



**HAL**  
open science

# Diagnostic de systèmes non linéaires par analyse en composantes principales à noyau

Kwami Anani

► **To cite this version:**

Kwami Anani. Diagnostic de systèmes non linéaires par analyse en composantes principales à noyau. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT : 2019LORR0026 . tel-02132788

**HAL Id: tel-02132788**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02132788>**

Submitted on 17 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Diagnostic de systèmes non linéaires par analyse en composantes principales à noyau

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 21 mars 2019

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**

**Spécialité Automatique**

par

**Kwami ANANI**

### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Pierre Beuseroy Ghaleb Hoblos	Professeur, Université de Technologie de Troyes (ICD/LM2S) Enseignant-Chercheur - HDR, ESIGELEC (IRSEEM)
<i>Examineurs :</i>	Abdel Aitouche Gilles Mourot	Professeur, HEI (CRIStAL) Ingénieur de Recherche, Université de Lorraine (CRAN)
<i>Encadrants :</i>	Didier Maquin Maya Kallas	Professeur, Université de Lorraine (CRAN) Maître de Conférences, Université de Lorraine (CRAN)

Mis en page avec la classe thesul.

## Remerciements

Les travaux de cette thèse ont été réalisés au sein du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN UMR 7039 CNRS) et la thèse a été financée par l'Université de Lorraine.

Ce travail n'aurait pas pu aboutir sans la participation de mon directeur de thèse Monsieur Didier Maquin, Professeur à l'Université de Lorraine et de Madame Maya Kallas ma co-directrice de thèse, Maître de Conférences à l'Université de Lorraine. Je tiens vivement à leur adresser tous mes sincères remerciements. Leurs accompagnements tout au long de cette thèse ont été précieux. Je suis bien reconnaissant pour la disponibilité dont ils ont fait preuve, l'aide qu'ils m'ont apportée durant cette thèse, les conseils qui m'ont permis de progresser, les critiques nécessaires à la progression du travail et la rigueur scientifique indispensable pour un tel travail. Outre le caractère scientifique d'une thèse, les relations humaines sont aussi très importantes pour sa réussite. Sur ce point, je tiens aussi à leur exprimer ma gratitude pour la confiance qu'ils m'ont témoigné et l'accueil qu'ils m'ont accordé et qui m'ont donné la possibilité d'effectuer ce travail de recherche et d'aller au terme de la rédaction de ce manuscrit.

Je remercie Monsieur Pierre Beuseroy, Professeur à l'Université de Troyes et Monsieur Ghaleb Hoblos, Enseignant-Chercheur - HDR à ESIGELEC d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Leurs critiques et suggestions ont été constructives. Mes remerciements à Monsieur Abdel Aitouche Professeur à HEI et chercheur au laboratoire CRISAL d'avoir accepté d'être membre de jury de cette thèse, je lui témoigne toute ma reconnaissance.

C'est aussi l'occasion pour moi de dire un grand merci à Monsieur Gilles Mourot, Ingénieur de recherche au CRAN, membre de jury de cette thèse, pour ses idées et sa disponibilité et à Monsieur José Ragot, Professeur Émérite à l'Université de Lorraine qui a fait partie de l'équipe participante de cette thèse.

Je remercie Madame Christine Pierson assistante administrative au CRAN pour son aide permanent concernant tout problème administratif, ses conseils et sa gentillesse ainsi qu'aux Chercheurs du CRAN avec qui j'ai eu l'occasion d'échanger au cours de cette thèse.

Je dis merci également à tous mes collègues du laboratoire CRAN pour leurs sympathies et à tous mes amis. Je remercie particulièrement mes parents pour leur soutien constant. Je n'oublie pas tous ceux qui m'ont soutenu durant ce travail.



*Je dédie cette thèse  
à mes chers parents.*

*"La science ne cherche pas à énoncer des vérités éternelles ou de dogmes immuables ; loin de prétendre que chaque étape est définitive et qu'elle a dit son dernier mot, elle cherche à cerner la vérité par approximations successives."*

*Bertrand Russell, ABC de la relativité*



# Table des matières

Notation

Résumé

Abstract

Introduction Générale

## I Diagnostic par ACP et détection de défauts par KPCA 5

Chapitre 1

Diagnostic par Analyse en Composantes Principales

1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Analyse en Composantes Principales . . . . .	8
1.2.1	Principe de l'ACP . . . . .	8
1.2.2	Détermination du nombre de Composantes Principales . . . . .	11
1.2.2.1	Pourcentage cumulé de la variance totale . . . . .	11
1.2.2.2	Pourcentage de la variance résiduelle . . . . .	11
1.2.2.3	Moyenne des valeurs propres . . . . .	11
1.2.2.4	Fonction d'erreur . . . . .	12
1.3	Détection de défauts et indices . . . . .	12
1.3.1	Influence du défaut dans les espaces principal et résiduel . . . . .	12
1.3.2	Indice $SPE$ (Square Prediction Error) . . . . .	13
1.3.3	Indice $T^2$ (Statistique de Hotelling) . . . . .	13
1.3.4	Indice combiné $\phi$ . . . . .	14
1.4	Localisation et estimation de l'amplitude du défaut détecté . . . . .	14
1.4.1	Calcul de contributions . . . . .	15
1.4.1.1	Calcul de contributions dans le cas de l'indice $SPE$ . . . . .	15
1.4.1.2	Calcul de contributions dans le cas de l'indice $T^2$ . . . . .	15
1.4.1.3	Calcul de contributions dans le cas de l'indice $\phi$ . . . . .	16

1.4.2	Contributions basées sur la reconstruction . . . . .	16
1.4.2.1	Contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable de l'observation $\mathbf{x}$ à l'indice de détection $SPE$ . . . . .	18
1.4.2.2	Contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable de l'observation $\mathbf{x}$ à l'indice de détection $T^2$ . . . . .	18
1.4.2.3	Contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable de l'observation $\mathbf{x}$ à l'indice de détection $\phi$ . . . . .	19
1.4.3	Localisation basée sur le principe de reconstruction . . . . .	19
1.4.3.1	Localisation par reconstruction basée sur l'indice $SPE$ . . . . .	19
1.4.3.2	Autre approche pour la localisation basée sur l'indice $SPE$ . . . . .	20
1.4.3.3	Localisation par reconstruction basée sur l'indice $T^2$ . . . . .	20
1.4.3.4	Localisation par reconstruction basée sur l'indice $\phi$ . . . . .	20
1.4.3.5	Cas de défauts multiples . . . . .	21
1.4.4	Autres approches de localisation . . . . .	22
1.4.4.1	Contributions basées sur la décomposition partielle . . . . .	22
1.4.4.2	Contributions diagonales . . . . .	22
1.4.4.3	Contributions basées sur l'angle . . . . .	23
1.5	Application des méthodes sur l'ACP . . . . .	24
1.5.1	Détection de défauts sur le système . . . . .	25
1.5.2	Localisation et estimation de l'amplitude des défauts sur le système . . . . .	26
1.5.2.1	Méthode de calcul de contributions . . . . .	26
1.5.2.2	Méthode de contributions par reconstruction . . . . .	27
1.5.2.3	Méthode de localisation basée sur la reconstruction . . . . .	28
1.5.3	Localisation de défauts multiples . . . . .	29
1.6	Application de l'ACP sur un système non linéaire . . . . .	30
1.7	Conclusion . . . . .	31

**Chapitre 2**

**Détection de défauts par ACP à noyau**

2.1	Introduction . . . . .	33
2.2	Position du problème . . . . .	34
2.2.1	L'ACP à noyau . . . . .	34
2.2.2	Analyse d'une nouvelle observation . . . . .	37
2.2.3	Détection de défauts basée sur un modèle KPCA . . . . .	39
2.2.3.1	Indice $SPE$ (Square Prediction Error) . . . . .	39
2.2.3.2	Indice de Hotelling $T^2$ . . . . .	40
2.2.3.3	Indice combiné $\phi$ . . . . .	40
2.2.3.4	Nouvel indice $NI$ . . . . .	41

2.3	Évaluation de l'indice de détection $SPE$ en fonction du défaut . . . . .	49
2.3.1	Premier cas . . . . .	50
2.3.2	Deuxième cas . . . . .	51
2.4	Conclusion . . . . .	52

## II Localisation et estimation de l'amplitude des défauts par des méthodes de contributions 55

### Chapitre 3

#### Localisation et estimation de l'amplitude des défauts détectés

3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Méthodes existantes de contributions . . . . .	58
3.2.1	Calcul de contributions . . . . .	58
3.2.1.1	Calcul des contributions basées sur l'indice $SPE$ . . . . .	59
3.2.1.2	Calcul des contributions basées sur l'indice $T^2$ . . . . .	60
3.2.1.3	Calcul des contributions basées sur l'indice $\phi$ . . . . .	60
3.2.1.4	Contributions relatives pour les trois indices . . . . .	60
3.2.1.5	Une autre approche pour le calcul des contributions . . . . .	61
3.2.2	Contributions basées sur la reconstruction . . . . .	62
3.2.2.1	Problème d'optimisation . . . . .	63
3.2.2.2	Calcul des contributions basées sur la reconstruction . . . . .	63
3.2.2.3	Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $SPE$ . . . . .	63
3.2.2.4	Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $T^2$ . . . . .	65
3.2.2.5	Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice combiné $\phi$ . . . . .	65
3.2.2.6	Réévaluation de l'indice de détection de défaut . . . . .	66
3.2.3	Méthodes itératives de résolution . . . . .	66
3.2.3.1	Méthode de la descente du gradient . . . . .	66
3.2.3.2	Méthode du point fixe . . . . .	66
3.3	Méthodes d'initialisation pour une meilleure convergence . . . . .	67
3.3.1	Technique de l'observation la plus proche . . . . .	67
3.3.2	Technique de la zone d'attraction . . . . .	70
3.3.3	Technique de la limite de détection . . . . .	73
3.3.4	Exemple d'application des techniques d'initialisation . . . . .	78
3.3.4.1	Technique de l'observation la plus proche . . . . .	78
3.3.4.2	Technique de la limite de détection . . . . .	79

3.4 Conclusion . . . . . 80

<p><b>Chapitre 4</b>  <b>Contributions sous contraintes pour la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts</b></p>
---

4.1 Introduction . . . . . 83

4.2 Méthode proposée de contributions sous contraintes . . . . . 84

4.2.1 Problème d'optimisation sous contraintes de non négativité et de somme unité . . . . . 85

4.2.2 Méthode de résolution . . . . . 87

4.2.3 Cas de défauts simultanés affectant plusieurs variables . . . . . 93

4.3 Présentation des méthodes de contributions sur des données simulées . . . . . 94

4.3.1 Détection et localisation du défaut affectant la variable  $y_1$  . . . . . 95

4.3.1.1 Détection du défaut sur la variable  $y_1$  . . . . . 95

4.3.1.2 Localisation du défaut 1 par la méthode de calcul de contributions . . . . . 95

4.3.1.3 Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction . . . . . 96

4.3.1.4 Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes . . . . . 97

4.3.2 Détection et localisation du défaut affectant la variable  $y_2$  . . . . . 98

4.3.2.1 Détection du défaut sur la variable  $y_2$  . . . . . 98

4.3.2.2 Localisation du défaut 2 par la méthode de calcul de contributions . . . . . 98

4.3.2.3 Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction . . . . . 99

4.3.2.4 Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes . . . . . 100

4.3.2.5 Reconstruction d'une observation affectée par le défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes 101

4.4 Conclusion . . . . . 101

**III Application des méthodes sur un système simulé 103**

<p><b>Chapitre 5</b>  <b>Application sur le CSTR</b></p>
--

5.1 Introduction . . . . . 105

5.2 Présentation du modèle . . . . . 106

---

5.3	Détection et localisation du défaut affectant la température à l'entrée du CSTR $T_0$ . . . . .	108
5.3.1	Description du défaut sur la température $T_0$ . . . . .	108
5.3.2	Détection du défaut affectant la température $T_0$ . . . . .	109
5.3.3	Application des différentes méthodes d'initialisation sur le défaut affectant la température $T_0$ . . . . .	109
5.3.3.1	Présentation des données concernant le défaut sur la température $T_0$ . . . . .	109
5.3.3.2	Application de la technique de l'observation la plus proche pour le défaut sur la température $T_0$ . . . . .	110
5.3.3.3	Application de la technique de la zone d'attraction pour le défaut sur la température $T_0$ . . . . .	110
5.3.3.4	Application de la technique de la détection limite pour le défaut sur la température $T_0$ . . . . .	111
5.3.4	Application des différentes méthodes de contributions pour la localisation du défaut affectant $T_0$ . . . . .	112
5.3.4.1	Méthode de calcul de contributions pour la localisation du défaut sur la température $T_0$ . . . . .	112
5.3.4.2	Méthode de contributions par reconstruction pour la localisation du défaut sur la température $T_0$ . . . . .	112
5.3.4.3	Méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut sur la température $T_0$ . . . . .	113
5.4	Détection et localisation du défaut affectant la concentration du réactif $C_{AA}$ . . . . .	114
5.4.1	Description du défaut affectant la concentration $C_{AA}$ . . . . .	114
5.4.2	Détection du défaut affectant la concentration $C_{AA}$ . . . . .	115
5.4.3	Application des différentes méthodes d'initialisation sur le défaut affectant $C_{AA}$ . . . . .	115
5.4.3.1	Présentation des données concernant le défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	116
5.4.3.2	Application de la technique de l'observation la plus proche pour le défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	116
5.4.3.3	Application de la technique de la zone d'attraction pour le défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	117
5.4.3.4	Application de la technique de la détection limite pour le défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	117
5.4.4	Application des différentes méthodes de contributions pour la localisation du défaut affectant la concentration $C_{AA}$ . . . . .	118

5.4.4.1	Méthode de calcul de contributions pour la localisation du défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	118
5.4.4.2	Méthode de contributions par reconstruction pour la localisation du défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	118
5.4.4.3	Méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	119
5.5	Détection et localisation du défaut affectant la température $T$ . . . . .	120
5.5.1	Description du défaut affectant la température $T$ . . . . .	120
5.5.2	Détection du défaut affectant la température $T$ . . . . .	121
5.5.3	Application des différentes méthodes de contribution pour la localisation du défaut affectant la température $T$ . . . . .	122
5.5.3.1	Méthode de calcul de contributions pour la localisation du défaut sur la température $T$ . . . . .	122
5.5.3.2	Méthode de contributions par reconstruction pour la localisation du défaut sur la température $T$ . . . . .	122
5.5.3.3	Méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation du défaut sur la température $T$ . . . . .	123
5.5.3.4	Comparaison de la méthode de contributions par reconstruction et de la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation du défaut $T$ . . . . .	124
5.6	Conclusion . . . . .	125

<b>Conclusion Générale et perspectives</b>
--

<b>Annexe A</b>
-----------------

<b>Annexe</b>
---------------

A.1	Centrage des données dans l'espace des caractéristiques . . . . .	131
A.2	Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $SPE$ centré . . . . .	132
A.3	Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $T^2$ centré . . . . .	133
A.4	Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice combiné $\phi$ centré . . . . .	134

<b>Bibliographie</b>
----------------------

# Table des figures

1.1	Tracé des variables	24
1.2	Détection de défaut sur les variables	25
1.3	Contributions de chaque variable à l'indice de détection <i>SPE</i>	26
1.4	<i>RBC</i> de chaque variable à l'indice de détection <i>SPE</i>	27
1.5	Tracé de l'indice de détection <i>SPE</i> après reconstruction des variables	28
1.6	Tracé des variables sans défauts et variables affectées par des défauts	29
1.7	Tracé de l'indice <i>SPE</i> après reconstruction des variables $\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{y}_3$	30
1.8	Détection de défaut sur un système non linéaire	31
2.1	Simulation sur le cas de la banane avec quelques observations en défaut	42
2.2	Simulation sur le cas de la banane avec quelques observations sans défaut	43
2.3	Recherche de la distance limite pour le cas de la banane	44
2.4	Simulation de l'anneau avec quelques observations en défaut	44
2.5	Simulation de l'anneau avec quelques observations sans défaut	45
2.6	Recherche de la distance limite pour l'anneau	46
2.7	Simulation du cadre avec quelques observations en défaut	47
2.8	Simulation du cadre avec quelques observations sans défaut	48
2.9	Recherche de la distance limite pour le cadre	49
2.10	Tracé du <i>SPE</i> en fonction des observations pour un premier cas dans la direction $\mathbf{y}_1$	50
2.11	Tracé du <i>SPE</i> en fonction des observations pour un premier cas dans la direction $\mathbf{y}_2$	51
2.12	Tracé du <i>SPE</i> en fonction des observations pour un deuxième cas dans la direction $\mathbf{y}_1$	51
2.13	Tracé du <i>SPE</i> en fonction des observations pour un deuxième cas dans la direction $\mathbf{y}_2$	52
3.1	Tracé des observations	68
3.2	Données et limite du <i>SPE</i>	68
3.3	Données, limite du <i>SPE</i> et observation en défaut	69
3.4	Technique de l'observation la plus proche	69
3.5	Fonction Gaussienne	70
3.6	Technique de la zone d'attraction	72
3.7	Technique de la limite de détection	77
3.8	Technique de l'observation la plus proche	78
3.9	Zoom sur les observations dans la technique de l'observation la plus proche	79
3.10	Technique de la limite de détection	79
3.11	Technique de la limite de détection dans la direction $\mathbf{y}_2$	80

4.1	Simulation des données : tracé des variables . . . . .	94
4.2	Détection de défaut sur la variable $y_1$ . . . . .	95
4.3	Localisation du défaut 1 par la méthode de calcul de contributions avec l'indice $SPE$ . . . . .	96
4.4	Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction avec l'indice $SPE$ . . . . .	96
4.5	Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes avec l'indice $SPE$ . . . . .	97
4.6	Détection de défaut sur la variable $y_2$ . . . . .	98
4.7	Localisation du défaut 2 par la méthode de calcul de contributions avec l'indice $SPE$ . . . . .	99
4.8	Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction avec l'indice $SPE$ . . . . .	99
4.9	Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes avec l'indice $SPE$ . . . . .	100
4.10	Valeurs des coefficients du vecteur $\hat{\beta}$ . . . . .	101
5.1	Diagramme du CSTR . . . . .	106
5.2	Influence du défaut affectant la température $T_0$ sur les variables . . . . .	108
5.3	Détection de défaut sur la température $T_0$ . . . . .	109
5.4	Présentation des données avec le défaut sur $T_0$ . . . . .	110
5.5	Technique de l'observation la plus proche pour le défaut sur $T_0$ . . . . .	110
5.6	Technique de la zone d'attraction pour le défaut sur $T_0$ . . . . .	111
5.7	Technique de la détection limite pour le défaut sur $T_0$ . . . . .	111
5.8	Contributions des variables à l'indice $SPE$ avec un défaut sur la température $T_0$ . . . . .	112
5.9	Contribution par reconstruction à l'indice $SPE$ pour un défaut sur la température $T_0$ . . . . .	113
5.10	Contribution par reconstruction sous contraintes à l'indice $SPE$ pour un défaut sur la température $T_0$ . . . . .	113
5.11	Influence du défaut affectant la concentration $C_{AA}$ sur les variables . . . . .	115
5.12	Détection de défaut sur la concentration $C_{AA}$ . . . . .	115
5.13	Présentation des données avec le défaut sur $C_{AA}$ . . . . .	116
5.14	Technique de l'observation la plus proche avec le défaut sur $C_{AA}$ . . . . .	116
5.15	Technique de la zone d'attraction avec le défaut sur $C_{AA}$ . . . . .	117
5.16	Technique de la détection limite avec le défaut sur $C_{AA}$ . . . . .	117
5.17	Contributions des variables avec un défaut affectant la concentration $C_{AA}$ . . . . .	118
5.18	Contributions par reconstruction à l'indice $SPE$ pour un défaut affectant la concentration $C_{AA}$ . . . . .	119
5.19	Contributions par reconstruction sous contraintes à l'indice $SPE$ pour un défaut affectant la concentration $C_{AA}$ . . . . .	119
5.20	Influence du défaut affectant la température $T$ sur les variables . . . . .	121
5.21	Détection de défaut sur la température $T$ . . . . .	121
5.22	Contributions des variables avec un défaut affectant la température $T$ . . . . .	122
5.23	Contributions par reconstruction à l'indice $SPE$ pour un défaut affectant la température $T$ . . . . .	123
5.24	Contributions par reconstruction sous contraintes de l'indice $SPE$ pour un défaut affectant la température $T$ . . . . .	123
5.25	Contributions par reconstruction (5.25(a)) et contributions par reconstruction sous contraintes (5.25(b)) à l'indice $SPE$ pour un défaut affectant la température $T$ . . . . .	124



# Liste des tableaux

1.1	Valeurs de $\Psi$ pour la forme générale des indices de détection de défaut . . . . .	14
1.2	Valeurs des amplitudes, variables et observations affectées par les défauts . . . . .	25
1.3	Valeurs estimées des amplitudes des défauts . . . . .	29
1.4	Valeurs des amplitudes, variables et observations affectées par les défauts pour le système non linéaire . . . . .	31
2.1	Simulations pour les observations en défaut pour le cas de la banane . . . . .	42
2.2	Simulations pour les observations sans défaut pour le cas de la banane . . . . .	43
2.3	Simulations pour les observations en défaut pour le cas de l’anneau . . . . .	45
2.4	Simulations pour les observations sans défaut pour le cas de l’anneau . . . . .	46
2.5	Simulations pour les observations en défaut du cadre . . . . .	47
2.6	Simulations pour les observations sans défaut pour le cas du cadre . . . . .	48
4.1	Calcul du <i>RBC</i> avec l’indice <i>SPE</i> pour un défaut affectant la variable $\mathbf{y}_1$ . . . . .	97
4.2	Calcul du <i>RBC</i> avec l’indice <i>SPE</i> pour un défaut affectant la variable $\mathbf{y}_1$ pour la reconstruction sous contraintes . . . . .	98
4.3	Calcul du <i>RBC</i> avec l’indice <i>SPE</i> pour un défaut affectant la variable $\mathbf{y}_2$ . . . . .	100
4.4	Calcul du <i>RBC</i> avec l’indice <i>SPE</i> pour un défaut affectant la variable $\mathbf{y}_2$ pour la reconstruction sous contraintes . . . . .	101
5.1	<i>RBC</i> à l’indice <i>SPE</i> pour un défaut affectant la température $T_0$ . . . . .	114
5.2	<i>RBC</i> de l’indice de détection <i>SPE</i> pour un défaut affectant la concentration $C_{AA}$ . . . . .	120
5.3	<i>RBC</i> de l’indice <i>SPE</i> pour un défaut affectant $T$ . . . . .	125



# Notation

Notations	Significations
ACP	Analyse en Composantes Principales ( <i>Principal Component Analysis</i> )
CPs	Composantes Principales ( <i>Principal Components</i> )
CSTR	Réacteur à agitation continue ( <i>Continuous Stirred Tank Reactor</i> )
ACP à noyau	Analyse en Composantes Principales à noyau ( <i>KPCA : Kernel Principal Component Analysis</i> )
$SPE$	Erreur quadratique d'estimation ( <i>Square Prediction Error</i> )
$T^2$	Statistique de Hotelling ( <i>Hotelling statistic</i> )
$\phi$	Indice combiné ( <i>Combined index</i> )
$RBC$	Contribution basée sur la reconstruction ( <i>Reconstruction Based Contribution</i> )
SGM	Méthode de la descente du gradient normalisé ( <i>Split Gradient Method</i> )
$N$	Nombre d'observations
$m$	Nombre de variables
$\mathcal{H}$	Espace des caractéristiques
$h$	Dimension de l'espace des caractéristiques
$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m}$	Matrice de données représentant le fonctionnement normal d'un système
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$	Vecteur de mesure des variables
$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$	$i^{\text{ème}}$ vecteur de mesure
$[\mathbf{x}]_i$	$i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de mesure $\mathbf{x}$
$\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{h \times h}$	Matrice de covariance des données dans l'espace des caractéristiques pour le KPCA
$\mathbf{S}_L \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Matrice de covariance des données pour l'ACP linéaire
$\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{N \times h}$	Matrice des données projetées dans l'espace des caractéristiques
$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$	Matrice de Gram
$\lambda_i$	$i^{\text{ème}}$ valeur propre de $\mathbf{S}$ ou de $\mathbf{S}_L$
$\boldsymbol{\nu}_i \in \mathbb{R}^h$	$i^{\text{ème}}$ vecteur propre de $\mathbf{S}$
$\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^N$	$i^{\text{ème}}$ vecteur propre de $\frac{1}{N-1}\mathbf{K}$
$\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^m$	$i^{\text{ème}}$ vecteur propre de $\mathbf{S}_L$
$\varphi$	Coefficient de proportionnalité
$\ell$	Nombre de CPs
$q$	Rang de la matrice $\mathbf{S}$
$\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{q \times q}$	Matrice diagonale des valeurs propres de $\mathbf{S}$
$\hat{\boldsymbol{\Lambda}} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$	Matrice diagonale des $\ell$ plus grandes valeurs propres de $\mathbf{S}$ ou de $\mathbf{S}_L$
$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} \in \mathbb{R}^{(q-\ell) \times (q-\ell)}$	Matrice diagonale des $(q-\ell)$ valeurs propres de $\mathbf{S}$

$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{h \times q}$	Matrice des vecteurs propres de $\mathbf{S}$
$\widehat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{h \times \ell}$	Matrice des $\ell$ vecteurs propres de $\mathbf{S}$ correspondant aux $\ell$ plus grandes valeurs propres de $\mathbf{S}$
$\widetilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{h \times (q-\ell)}$	Matrice des vecteurs propres de $\mathbf{S}$ correspondant aux $(q - \ell)$ valeurs propres de $\mathbf{S}$
$\widehat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$	Matrice des $\ell$ vecteurs propres de $\frac{1}{N-1}\mathbf{K}$ correspondant aux $\ell$ plus grandes valeurs propres de $\frac{1}{N-1}\mathbf{K}$
$\Lambda_L \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Matrice diagonale des valeurs propres de $\mathbf{S}_L$
$\widetilde{\Lambda}_L \in \mathbb{R}^{(m-\ell) \times (m-\ell)}$	Matrice diagonale des $(m - \ell)$ valeurs propres de $\mathbf{S}_L$
$\mathbf{P}_L \in \mathbb{R}^{m \times m}$	Matrice des vecteurs propres de $\mathbf{S}_L$
$\widehat{\mathbf{P}}_L \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$	Matrice des $\ell$ vecteurs propres de $\mathbf{S}_L$ correspondant aux $\ell$ plus grandes valeurs propres de $\mathbf{S}_L$
$\widetilde{\mathbf{P}}_L \in \mathbb{R}^{m \times (m-\ell)}$	Matrice des vecteurs propres de $\mathbf{S}_L$ correspondant aux $(m - \ell)$ valeurs propres de $\mathbf{S}_L$
$\mathbf{I}_m$	Matrice identité de taille $m$
$C_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x})$	Contribution de la $i^{\text{ème}}$ composante d'une observation $\mathbf{x}$ à un indice de détection
$CR_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x})$	Contribution relative de la $i^{\text{ème}}$ composante d'une observation $\mathbf{x}$ à un indice de détection
$\mathbf{x}^*$	Observation sans défaut
$\xi_i \in \mathbb{R}^m$	Vecteur nul sauf la $i^{\text{ème}}$ composante qui est égale à 1
$\widehat{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^\ell$	Vecteur des $\ell$ composantes principales correspondant aux $\ell$ grandes valeurs propres de $\mathbf{S}$
$\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$	Estimation du vecteur $\mathbf{x}$
$\delta^2$	Seuil de l'indice $SPE$
$\tau^2$	Seuil de l'indice $T^2$
$\zeta^2$	Seuil de l'indice $\phi$
$\sigma$	Largeur de bande du noyau Gaussien
$\varphi(\cdot)$	Fonction non linéaire
$\kappa(\cdot, \cdot)$	Fonction noyau
$g(\cdot)$	Fonction de normalisation
$\mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N$	Vecteur dont toutes les composantes sont égales à $1/N$
$\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$	Matrice dont toutes les composantes sont égales à $1/N$
$f_i$	Amplitude du défaut associé à la $i^{\text{ème}}$ direction
$\beta \in \mathbb{R}^N$	Vecteur de coefficients pour l'estimation de l'amplitude du défaut dans la méthode des contributions sous contraintes
$\mu \in \mathbb{R}^N$	Vecteur contenant les multiplicateurs de Lagrange
$\eta$	Pas du gradient
$\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m$	Observation $\mathbf{x}$ reconstruite dans la $i^{\text{ème}}$ direction
$\nabla$	Opérateur gradient
$d_i$	Distance entre une observation en défaut $\mathbf{x}$ et une observation de la base de données dans la direction de reconstruction $\xi_i$
$\mathbf{d}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N$	Vecteur contenant les distances entre une observation en défaut $\mathbf{x}$ et toutes les observations de la base de données dans la direction de reconstruction $\xi_i$

# Résumé

La demande sans cesse croissante d'un meilleur rendement des processus industriels a conduit à une recherche plus accrue des méthodes de diagnostic de défauts. La production industrielle exige de plus en plus une qualité de produits élevée. Cependant, une petite défaillance dans le processus peut avoir une grave incidence sur la qualité du produit. Pour limiter les risques de pannes et ainsi assurer le bon fonctionnement du processus, il est indispensable d'effectuer une surveillance en réalisant un diagnostic afin d'atteindre les objectifs assignés.

Pour effectuer le diagnostic d'un système, il faut détecter, localiser et estimer les amplitudes des défauts détectés. L'Analyse en Composantes Principales (ACP) est une technique très utilisée pour effectuer ce diagnostic. L'ACP recherche des axes maximisant la variance entre les données. Cette méthode a été conçue pour analyser les données liées par des relations linéaires. Pour effectuer le diagnostic des systèmes non linéaires, l'ACP est couplée aux méthodes à noyau. Dans cette thèse, nous proposons de nouvelles méthodes pour les phases de localisation et d'estimation des défauts pour lesquelles les travaux existants ont quelques inconvénients.

L'ACP à noyau consiste à projeter les données par l'intermédiaire d'une application non linéaire dans un espace de dimension élevée dénommé espace des caractéristiques où l'ACP linéaire est appliquée. Dans l'espace des caractéristiques, les phases de détection et de localisation peuvent s'effectuer pour les premières étapes du diagnostic. Par contre pour l'estimation de l'amplitude du défaut, il est nécessaire de revenir à l'espace initial dans lequel les valeurs peuvent être interprétées. Mais ce retour est complexe du fait de l'utilisation des noyaux pour la projection des données dans l'espace des caractéristiques. La fonction inverse qui permet le retour à l'espace initial peut ne pas exister. De ce fait, la solution dans l'espace initial si elle existe peut ne pas être unique. La résolution de ce problème s'appuie sur une optimisation non linéaire dont il est nécessaire d'étudier les propriétés de convergence.

Les méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut sont basées sur les contributions des variables du processus à diagnostiquer. La variable ayant la plus grande contribution est susceptible d'être affectée par un défaut. Les méthodes de contributions existantes présentent quelques inconvénients dans la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts et ne fonctionnent pas correctement. La nouvelle méthode de localisation proposée dans cette thèse est basée sur les contributions sous contraintes permettant d'obtenir une reconstruction parcimonieuse des variables. Cette méthode résout quelques problèmes rencontrés dans l'implémentation des méthodes de contributions existantes. L'efficacité de la méthode proposée est montrée par la simulation d'un réacteur à agitation continue (CSTR).



# Abstract

The ever-increasing demand for high performance in industrial processes has led to increased research for fault diagnosis methods. Industrial production increasingly requires high product quality. However, a slight process failure can have a serious impact on product quality. To reduce the risk of failures and thus ensure the effective operation of the process, it is essential to monitor the process by achieving a diagnosis in order to reach the assigned objectives.

To diagnose a system, it is necessary to detect, isolate and estimate the magnitudes of the detected faults. Principal Component Analysis (PCA) is a method widely used for diagnosis. It seeks for axes maximising the variance between the data. PCA was developed to identify linear structures in a given dataset. To diagnose non linear systems, the PCA is coupled with kernel methods. In this thesis, we propose new methods for the isolation and estimation of fault magnitudes for which the previous methods have some drawbacks.

Kernel PCA consists in projecting data using a nonlinear mapping function into a higher dimensional space called feature space where the linear PCA is applied. In the feature space, the results obtained can be used to detect and isolate the faults. However, to estimate the magnitudes of the detected faults, it is necessary to map back to the original space in which the values can be analyzed. However, this mapping back is complex due to the use of kernels for the transformation into the feature space. The inverse function that maps back to the original space may not exist. Therefore, the solution in the original space if it exists may not be unique. The resolution consists in solving an optimization problem whose convergence properties should be studied.

The isolation and estimation of fault magnitudes methods are based on the contributions of the variables to be diagnosed. The variable with the largest contribution is considered to be affected by a fault. Previous contributions methods have some drawbacks in isolation and estimation of fault magnitudes and aren't appropriate for the non linear case. The new isolation and estimation of fault magnitudes method proposed in this thesis is based on contributions under constraints. This method solves problems encountered in the implementation of previous contributions methods. The effectiveness of the proposed method is demonstrated on the simulated continuous stirred tank reactor (CSTR) process.





# Introduction Générale

Pour assurer en permanence le bon fonctionnement d'un système, il est important de réaliser un diagnostic et de mener les actions de correction nécessaires à la reconfiguration du système. Ce diagnostic consiste à détecter, à localiser un ou plusieurs défauts et à estimer l'amplitude des défauts détectés. Sur les systèmes, des capteurs mesurent les informations qui permettent de décrire leurs comportements. Ces mesures sont parfois redondantes et des méthodes permettent d'utiliser cette redondance à des fins de diagnostic. Si le comportement normal d'un système est connu, la comparaison entre le comportement observé du processus fourni par les capteurs et le comportement attendu fourni par une représentation mathématique du processus engendre les résidus. L'analyse de ces résidus permet de signaler le dysfonctionnement du système et si possible les parties défaillantes. Dans les situations où il n'est pas possible de construire le modèle de fonctionnement normal du système, le diagnostic peut se faire à l'aide des méthodes sans modèle. Dans la méthode sans modèle, l'analyse se base uniquement sur les données acquises sur le système (sans identifier explicitement le comportement ou les paramètres du modèle). Dans ce travail, nous nous intéresserons aux méthodes de diagnostic sans modèle pour l'analyse de systèmes non linéaires.

L'une des méthodes les plus utilisées dans le diagnostic de systèmes est l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Initialement cette méthode a été introduite par [Pea01] et plus tard cette méthode a été reprise et développée par [Hot33]. L'ACP est une technique de projection orthogonale linéaire qui projette les données dans un espace de dimension inférieure en maximisant la variance des projections, cette projection est définie par un produit scalaire. L'ACP permet de traiter efficacement des données de très grandes dimensions et corrélées. Cependant, les performances de l'ACP dans le diagnostic de systèmes non linéaires sont médiocres. En effet l'ACP est utilisée pour analyser les combinaisons linéaires entre les données. A partir de ce constat de nombreux auteurs ont développé des techniques pour surmonter ces difficultés. L'une des méthodes pour travailler sur les systèmes non linéaires est les méthodes à noyau. A partir de l'ACP linéaire couplée à ces méthodes non linéaires, une extension au cas non linéaire était proposée avec l'ACP à noyau. Dans cette thèse, nous utilisons l'ACP à noyau pour effectuer le diagnostic [DM96], [JMM00].

Comme l'ACP, l'ACP à noyau a suscité un intérêt considérable dans divers domaines de recherche. Proposé par [SSM98], cette méthode a été appliquée pour le diagnostic de défauts sur des processus. L'idée principale des méthodes à noyau consiste à transformer les données par le concours d'une application non linéaire dans un espace de dimension plus élevée (espace des caractéristiques) où l'ACP classique est appliquée. Pour le diagnostic, les phases de détection et de localisation de défauts peuvent se faire dans l'espace des caractéristiques. Par contre pour l'estimation des défauts, il faut revenir dans l'espace d'origine dans lequel les valeurs obtenues ont vraiment un sens et sont par conséquent interprétables. Mais ce retour est complexe à cause de l'utilisation des noyaux pour la transformation des données dans l'espace des caractéristiques.

La fonction inverse qui permet le retour à l'espace d'origine n'existe donc pas. Mais il est possible de résoudre ce problème en recherchant une solution dans l'espace d'origine ayant comme image une fonction la plus proche possible de celle calculée dans l'espace des caractéristiques [KHR<sup>+</sup>13].

Pour la phase de détection, de nombreuses études sont faites sur la base des indices de détection de défaut [LYL04]. On peut citer l'Erreur quadratique d'Estimation (*SPE* : *Square Prediction Error*) et la statistique de Hotelling ( $T^2$ ). Une fois le défaut détecté, il faut localiser le défaut et estimer son amplitude. [CLC<sup>+</sup>05], [CLL<sup>+</sup>05], [KXZG14], [SC16] et d'autres auteurs ont proposé des méthodes de localisation des défauts. En plus de la localisation de défauts, [AQ10] développent une méthode qui permet aussi d'estimer l'amplitude des défauts. Cette méthode de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts de [AQ10] est une extension de la méthode que [AQ09] ont proposé dans le cadre du diagnostic sur les systèmes linéaires. Ces méthodes de localisation sont basées sur les contributions des variables du processus à diagnostiquer, un principe largement utilisé aussi dans le cas linéaire [Har03], [WG96], [DQ98], [WGS00], [DQEM96]. L'idée de ces méthodes de contributions est de déterminer la contribution de chaque variable à un indice de détection de défaut. La variable ayant la plus grande contribution est susceptible d'être affectée par un défaut.

## Objectifs

L'ACP associée aux méthodes à noyau permet alors de détecter, localiser et estimer l'amplitude des défauts dans les cas des systèmes non linéaires. L'objectif principal de cette thèse est le développement de nouvelles méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut dans le cas non linéaire.

Les méthodes de contributions existantes présentent quelques inconvénients dans la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts et ne fonctionnent pas correctement dans certaines situations comme le cas des défauts affectant plusieurs variables simultanément. De plus, il y a d'autres difficultés comme le choix des paramètres du noyau et la dimension des données. Nous développons de nouvelles méthodes de localisation et d'estimation dans ce travail pour résoudre ces problèmes et avoir une meilleure estimation de l'amplitude du défaut. Pour atteindre ces objectifs, le travail est divisé en trois grandes parties :

1. Le rappel sur le diagnostic de systèmes linéaires et la détection de défauts par l'ACP à noyau
2. La localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts détectés
3. L'application des méthodes existantes et des méthodes développées sur un exemple simulé de système non linéaire qu'est le réacteur à agitation continue (CSTR)

## Organisation du mémoire

Ce manuscrit (organisé en trois parties) est décomposé en cinq chapitres. La première partie constituée de deux chapitres présente au chapitre 1, le diagnostic par Analyse en Composantes Principales et au chapitre 2, la détection de défauts par Analyse en Composantes Principales à noyau. La deuxième partie constituée également de deux chapitres indique la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts détectés dans le chapitre 3 (nous avons proposé des méthodes pour une bonne estimation de l'amplitude du défaut) et la nouvelle méthode de contributions pour la localisation et l'estimation de défauts proposée dans le chapitre 4 (cette méthode proposée est basée sur les calculs de contributions sous contraintes). La troisième partie constituée

---

d'un chapitre met en œuvre les méthodes développées sur une application de système non linéaire dans le chapitre 5.

## **Partie 1 : Diagnostic par Analyse en Composantes Principales et Détection de défauts par Analyse en Composantes Principales à noyau**

### **Chapitre 1**

Le chapitre 1 présente les méthodes existantes pour le diagnostic de systèmes linéaires par Analyse en Composantes Principales. Il est question dans ce chapitre de faire un rappel sur les principes de base de l'ACP, de construire le modèle ACP et de déterminer les indices de détection de défauts et les seuils. Ensuite, pour toute nouvelle donnée, les indices de détection sont comparés aux seuils pour la phase de détection de défauts. Enfin, après avoir détecté les défauts sur le système, les méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts sont illustrées. Cette phase de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts se base sur les méthodes de contributions qui fonctionnent sur le fait qu'une variable ayant une plus grande contribution est susceptible d'être en défaut. Sur un exemple de système linéaire, l'efficacité de ces méthodes est illustrée en montrant leurs limites dans le cadre d'un exemple de système non linéaire.

### **Chapitre 2**

Évoquant les limites de l'ACP appliquée aux systèmes non linéaires à la fin du chapitre 1, le chapitre 2 concerne la détection de défaut sur un système non linéaire. Il présente l'ACP à noyau et pose les bases et les principes de la méthode. Comme dans le chapitre 1, après la construction du modèle de l'ACP à noyau, les indices de détection de défaut sont explicités pour la phase de détection de défaut. Nous ajoutons aux indices existants un nouvel indice que nous élaborons. Afin de connaître la détectabilité du système et de montrer les difficultés que pose la non linéarité du système, un indice de détection de défaut est étudié en fonction de quelques observations. L'idée à travers cette étude est de montrer quand il peut être possible de détecter un défaut et les conditions dans lesquelles un défaut ne peut pas être détecté.

## **Partie 2 : Localisation et estimation de l'amplitude des défauts par des méthodes de contributions**

### **Chapitre 3**

Après la phase de détection de défauts sur des systèmes non linéaires dans le chapitre 2, l'étape de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts est présentée dans ce chapitre 3. Les méthodes de contributions existantes pour la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts sont exposées : méthodes de calcul de contributions et méthodes de contributions basées sur la reconstruction. Comme dans le chapitre 1, ces méthodes de contributions fonctionnent sur le fait qu'une variable ayant une grande contribution peut être affectée par un défaut. Pour l'estimation de l'amplitude du défaut, l'équation permettant sa résolution nécessite une initialisation de l'amplitude du défaut. Pour cette raison, nous proposons trois méthodes d'initialisation qui conduisent à une meilleure convergence de l'algorithme permettant de trouver l'estimation du défaut. Sur un exemple de système non linéaire, ces différentes méthodes d'initialisation sont appliquées.

## **Chapitre 4**

Dans ce chapitre 4, nous présentons une nouvelle méthode de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut en se basant sur les méthodes présentées dans le chapitre 3. Cette nouvelle méthode de localisation basée sur les contributions sous contraintes est définie sur la reconstruction parcimonieuse des variables. Cette méthode résout les problèmes rencontrés dans l'implémentation des méthodes de contributions existantes. Elle peut être appliquée sur des systèmes avec des défauts affectant une variable ou des défauts affectant plusieurs variables simultanément. Sur un système non linéaire, les différentes méthodes de contributions indiquées dans le chapitre 3 et la nouvelle méthode de contributions sous contraintes sont illustrées. Une comparaison est effectuée entre ces méthodes et une conclusion est tirée sur l'efficacité de chaque méthode.

## **Partie 3 : Application des méthodes sur un système simulé**

### **Chapitre 5**

Dans ce chapitre, nous appliquons toutes les méthodes développées dans ce travail sur un exemple de système non linéaire. Il s'agit d'un modèle de réacteur à agitation continue. Le système est décrit avec les mesures des capteurs et les conditions initiales du modèle. Les perturbations et les bruits de mesure sont ajoutés sur le modèle. Trois défauts sont simulés sur le modèle du CSTR : deux défauts simples (affectant une seule variable à la fois) et un défaut ayant un effet multiple (affectant plusieurs variables simultanément). Pour chaque défaut, la phase de détection est montrée. Ensuite l'étape de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts est illustrée après l'application des différentes techniques d'initialisation proposées. La nouvelle méthode de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut élaborée dans ce travail est comparée à la méthode de [AQ10]. Les inconvénients des méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude de défauts existantes sont soulevés.

Le document se termine par une conclusion avec des perspectives qui peuvent être envisagées pour la suite de ce travail.

Première partie

**Diagnostic par ACP et détection de  
défauts par KPCA**



# Chapitre 1

## Diagnostic par Analyse en Composantes Principales

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Analyse en Composantes Principales</b>	<b>8</b>
1.2.1	Principe de l'ACP	8
1.2.2	Détermination du nombre de Composantes Principales	11
<b>1.3</b>	<b>Détection de défauts et indices</b>	<b>12</b>
1.3.1	Influence du défaut dans les espaces principal et résiduel	12
1.3.2	Indice <i>SPE</i> (Square Prediction Error)	13
1.3.3	Indice $T^2$ (Statistique de Hotelling)	13
1.3.4	Indice combiné $\phi$	14
<b>1.4</b>	<b>Localisation et estimation de l'amplitude du défaut détecté</b>	<b>14</b>
1.4.1	Calcul de contributions	15
1.4.2	Contributions basées sur la reconstruction	16
1.4.3	Localisation basée sur le principe de reconstruction	19
1.4.4	Autres approches de localisation	22
<b>1.5</b>	<b>Application des méthodes sur l'ACP</b>	<b>24</b>
1.5.1	Détection de défauts sur le système	25
1.5.2	Localisation et estimation de l'amplitude des défauts sur le système	26
1.5.3	Localisation de défauts multiples	29
<b>1.6</b>	<b>Application de l'ACP sur un système non linéaire</b>	<b>30</b>
<b>1.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

---

### 1.1 Introduction

L'analyse en composantes principales (ACP) permet de simplifier l'analyse des données généralement corrélées issues de capteurs par une restriction de ces données en un ensemble de variables non corrélées. L'efficacité de l'ACP dans le traitement de grandes quantités de données a permis de l'utiliser dans plusieurs domaines comme la compression de données, le diagnostic de systèmes, le traitement d'images etc ... Ainsi dans la littérature de nombreux auteurs ont mis en œuvre l'ACP sur différents types de processus et sur de nombreuses applications. Par la projection des données sur des composantes principales, l'ACP cherche à maximiser la variance des projections. Les données de l'espace d'entrée sont représentées dans un espace de dimension

$m$  et l'espace formé par les composantes principales est de dimension  $\ell$  (avec  $\ell < m$ ). L'ACP est basée sur une décomposition orthogonale de la matrice de covariance des données en considérant les directions qui expliquent la variation maximale des données [WEG87], [Jol86], [Jac80], [GLHM99], [NM94], [MNK94], [JM92].

L'ACP définit deux espaces : l'espace principal constitué des composantes principales et l'espace résiduel dans lequel il est possible d'évaluer l'erreur suite à la projection des données dans l'espace principal. Dans le diagnostic de données par ACP, il faut construire le modèle ACP et projeter les données dans les espaces principal et résiduel. Si un défaut intervient dans le processus, des indices de détection de défaut permettent de le détecter [JM79], [Qin03], [Qin09], [VRKY03], [Bak98], [BK08], [DZD<sup>+</sup>10]. Ces indices appliqués soit dans l'espace principal soit dans l'espace résiduel sont comparés à des seuils calculés à partir des données saines. Les indices de détection de défaut les plus couramment utilisés sont l'indice  $SPE$  qui mesure l'erreur commise après la projection des données dans l'espace principal, l'indice  $T^2$  qui mesure la variation des données sur les composantes principales et l'indice combiné  $\phi$  défini sur l'ensemble des deux espaces. Une fois qu'un défaut est détecté dans le processus, des méthodes existent pour localiser et estimer l'amplitude du défaut détecté : les méthodes de contributions et les méthodes de reconstruction [AQ09], [YQ01], [MAO<sup>+</sup>09], [WGS00], [MSH98]. Les méthodes de contributions évaluent l'effet de chaque variable sur l'indice de détection ; la variable ayant la plus grande contribution est susceptible d'être en défaut. Dans les méthodes de localisation par reconstruction, une première étape permet d'effectuer une estimation de chaque variable (c'est l'étape de reconstruction) ; il faut ensuite réévaluer les indices de détection après reconstruction de chaque variable et faire une comparaison de ces indices recalculés avec les seuils.

L'objectif de ce premier chapitre est d'évaluer et d'examiner quelques méthodes existantes dans le cadre du diagnostic d'un système linéaire avec l'ACP puis de poser les limites dans l'application de ces méthodes aux systèmes non linéaires. Nous commençons ce chapitre par l'illustration des principes de l'ACP et quelques critères de détermination du nombre de composantes principales. Les différents indices de détection de défaut sont exposés par la suite avec les différentes méthodes de calcul des seuils. Après cela, les méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts détectés sont présentées notamment celles de calcul de contributions, de contributions basées sur la reconstruction des variables et de localisation par reconstruction. Sur un exemple de système linéaire, une simulation est effectuée pour appliquer les différentes approches. Pour illustrer quelques limites de l'ACP, les méthodes sont également appliquées sur un exemple de système non linéaire.

## 1.2 Analyse en Composantes Principales

L'analyse en composantes principales recherche les relations linéaires entre les variables d'un processus et extrait quelques composantes représentatives des données originales. L'ACP peut traiter des données de processus linéaires corrélées, multidimensionnelles en projetant les données dans un espace de dimension inférieure.

### 1.2.1 Principe de l'ACP

Soit un ensemble de données collectées au cours d'un fonctionnement normal d'un système. Nous représentons ces données par une matrice  $\mathbf{X}$ . Soit  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$  un vecteur de mesure de dimension  $m$ . Dans ce système,  $N$  observations sont collectées au sein de la matrice  $\mathbf{X}$  de dimension  $N \times m$ . Nous supposons que la matrice  $\mathbf{X}$  est centrée et avec une variance égale à



l'unité (un traitement préalable permet de ramener à la matrice  $\mathbf{X}$  centrée et réduite si ce n'est pas le cas). La matrice  $\mathbf{X}$  s'écrit :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^\top \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (1.1)$$

Pour élaborer la structure du modèle ACP, il faut évaluer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de covariance des données. Soit  $\mathbf{S}_L$  la matrice de covariance. Elle se calcule par :

$$\mathbf{S}_L = \frac{1}{N-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}, \quad \mathbf{S}_L \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (1.2)$$

L'idée est de résoudre (1.3) pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de covariance  $\mathbf{S}_L$  :

$$\mathbf{S}_L \mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^m \quad (1.3)$$

$\lambda_i$  et  $\mathbf{p}_i$  sont respectivement la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre de  $\mathbf{S}_L$  et le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre correspondant.

La décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de covariance  $\mathbf{S}_L$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{P}_L \mathbf{\Lambda}_L \mathbf{P}_L^T \quad (1.4)$$

avec

$$\mathbf{P}_L = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m], \quad \mathbf{P}_L \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad : \text{ la matrice des vecteurs propres de } \mathbf{S}_L \quad (1.5)$$

et

$$\mathbf{\Lambda}_L = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_m\}, \quad \mathbf{\Lambda}_L \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad : \text{ la matrice des valeurs propres de } \mathbf{S}_L \quad (1.6)$$

Par construction,  $\mathbf{P}_L$  est une matrice orthogonale, alors :

$$\mathbf{P}_L \mathbf{P}_L^T = \mathbf{P}_L^T \mathbf{P}_L = \mathbf{I}_m \quad (1.7)$$

$\mathbf{\Lambda}_L$  est une matrice diagonale. Les termes diagonaux de  $\mathbf{\Lambda}_L$  qui constituent les valeurs propres sont ordonnés dans l'ordre décroissant ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ ). Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres sont réordonnés en fonction de l'ordre décroissant des valeurs propres.

Supposons que le nombre de composantes principales (CPs) retenues est  $\ell$ . Plusieurs méthodes ont été proposées pour le sélectionner [VLQ99], [Fer95] et quelques méthodes de détermination du nombre de CPs sont présentées dans la section 1.2.2. Les matrices  $\mathbf{P}_L$  et  $\mathbf{\Lambda}_L$  peuvent être partitionnées comme suit :

$$\mathbf{\Lambda}_L = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Lambda}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{\Lambda}}_L \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \ell \times \ell & & \\ & (m-\ell) \times (m-\ell) & \end{matrix} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{P}_L = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_L & \tilde{\mathbf{P}}_L \\ m \times \ell & m \times (m-\ell) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$\hat{\mathbf{\Lambda}}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_L$  représentent respectivement la matrice des  $\ell$  plus grandes valeurs propres et la matrice des vecteurs propres correspondants.  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_L$  et  $\tilde{\mathbf{P}}_L$  représentent respectivement quant à elles la

matrice des  $(m - \ell)$  valeurs propres restantes et la matrice des vecteurs propres correspondants. Nous définissons deux espaces : l'espace principal et l'espace résiduel. L'espace principal est engendré par la matrice  $\widehat{\mathbf{P}}_L$  tandis que l'espace résiduel est formé par la matrice  $\widetilde{\mathbf{P}}_L$  [YDH<sup>+</sup>12]. Avec cette partition, la matrice de covariance s'écrit : [HTMR10] :

$$\mathbf{S}_L = \widehat{\mathbf{P}}_L \widehat{\mathbf{\Lambda}} \widehat{\mathbf{P}}_L^\top + \widetilde{\mathbf{P}}_L \widetilde{\mathbf{\Lambda}} \widetilde{\mathbf{P}}_L^\top \quad (1.10)$$

L'ACP transforme chaque vecteur  $\mathbf{x}_i$  en un nouveau vecteur  $\mathbf{t}_i$  défini par :

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{P}_L^\top \mathbf{x}_i \quad \mathbf{t}_i \in \mathbb{R}^m \quad (1.11)$$

L'ACP consiste à projeter les observations (vecteurs de mesure) dans l'espace engendré par les vecteurs propres et à analyser les projections dans l'espace principal et dans l'espace résiduel. Dans l'une des méthodes sur la détermination du nombre de CPs (pourcentage cumulé de la variance totale), le nombre de CPs est fréquemment choisi pour que la somme des  $\ell$  valeurs propres retenues représente entre 90% et 98% de la somme totale. L'ACP permet de réduire donc la dimension d'un système. Les CPs ne sont pas corrélées [Jol86], [RC96].

Une mesure  $\mathbf{x}$  peut donc être décomposée en la projetant dans l'espace principal et dans l'espace résiduel [GM97] :

$$\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{x}} \quad (1.12)$$

La projection de  $\mathbf{x}$  sur l'espace principal est :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{x}} &= \widehat{\mathbf{P}}_L \widehat{\mathbf{t}} \\ &= \widehat{\mathbf{P}}_L \widehat{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x} \\ &= \widehat{\mathbf{F}} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.13)$$

où

$$\widehat{\mathbf{t}} = \widehat{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x}, \quad \widehat{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^\ell \quad (1.14)$$

et

$$\widehat{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{P}}_L \widehat{\mathbf{P}}_L^\top, \quad \widehat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (1.15)$$

La projection de  $\mathbf{x}$  sur l'espace résiduel est :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{x}} &= \widetilde{\mathbf{P}}_L \widetilde{\mathbf{t}} \\ &= \widetilde{\mathbf{P}}_L \widetilde{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x} \\ &= \left( \mathbf{I}_m - \widehat{\mathbf{P}}_L \widehat{\mathbf{P}}_L^\top \right) \mathbf{x} \quad \text{car } \mathbf{P}_L \mathbf{P}_L^\top = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}_L \\ \widetilde{\mathbf{P}}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}_L^\top \\ \widetilde{\mathbf{P}}_L^\top \end{bmatrix} = \widehat{\mathbf{P}}_L \widehat{\mathbf{P}}_L^\top + \widetilde{\mathbf{P}}_L \widetilde{\mathbf{P}}_L^\top = \mathbf{I}_m \end{aligned} \quad (1.16)$$

où

$$\widetilde{\mathbf{t}} = \widetilde{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x}, \quad \widetilde{\mathbf{t}} \in \mathbb{R}^{m-\ell} \quad (1.17)$$

Puisque l'espace principal et l'espace résiduel sont orthogonaux nous pouvons écrire :

$$\widehat{\mathbf{x}}^\top \widetilde{\mathbf{x}} = 0 \quad (1.18)$$

## 1.2.2 Détermination du nombre de Composantes Principales

La détermination du nombre de composantes principales est une étape importante pour élaborer le modèle ACP. Un mauvais choix de composantes principales conduit à une erreur de modélisation et ne permet pas de faire un bon diagnostic. De nombreuses méthodes sont proposées pour déterminer le nombre de composantes principales [VLQ99], [Mna12], [Har03], [Tha08]. Leurs études sont basées sur les travaux de [HSG94], [RP75], [Cat66], [Kai60], [Mal77]. Nous retrouvons dans la littérature plusieurs critères utilisant différentes approches. Nous en présentons quelques uns.

### 1.2.2.1 Pourcentage cumulé de la variance totale

Le pourcentage de variance expliqué par les  $\ell$  premières CPs est donné par :

$$Va(\ell) = 100 \left( \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \right) \quad (1.19)$$

Pour choisir  $\ell$ , il faut au préalable déterminer le pourcentage de la variance totale à conserver (entre 90% et 98% de la variance totale). Si le pourcentage choisi est atteint ou dépassé alors ce nombre correspond au nombre de CPs. Ce critère étant très subjectif, il est nécessaire de trouver un compromis entre une variance maximale et un nombre minimal de CPs retenues.

### 1.2.2.2 Pourcentage de la variance résiduelle

Le pourcentage de la variance résiduelle est une procédure pour sélectionner le nombre de CPs en utilisant les valeurs propres de l'espace résiduel. La méthode recherche un point de cassure des variances résiduelles tracées en fonction du nombre de composantes principales. L'approche est basée sur l'idée que la variance résiduelle atteint un état stable lorsque les erreurs aléatoires sont prises en compte. Lorsqu'un point de rupture est trouvé (quand les variances résiduelles se stabilisent), ce point correspond au nombre de composantes principales. Le pourcentage de la variance résiduelle est défini comme :

$$Vr(\ell) = 100 \left( \frac{\sum_{i=\ell+1}^m \lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \right) \quad (1.20)$$

### 1.2.2.3 Moyenne des valeurs propres

Des règles empiriques peuvent également guider la détermination du nombre de CPs. Le principe d'une de ces règles consiste à considérer la moyenne arithmétique de toutes les valeurs propres et ne prendre en compte que les composantes pour lesquelles la valeur propre est supérieure à la moyenne. En particulier, si les données sont centrées et réduites, il faut négliger les composantes dont la variance est inférieure à l'unité ( $\frac{1}{m} \text{trace}(\mathbf{S}_L) = 1$ ). Dans le cas du modèle ACP calculé à partir de la matrice de covariance  $\mathbf{S}_L$ , la moyenne arithmétique des valeurs propres est donnée par  $\frac{1}{m} \text{trace}(\mathbf{S}_L)$ .

#### 1.2.2.4 Fonction d'erreur

Cette méthode est basée sur l'idée que l'espace de mesure est divisé en deux : l'espace principal qui représente les signaux importants du processus et l'espace résiduel dans lequel se projettent les bruits de mesure. Le calcul de cette fonction d'erreur s'effectue en utilisant uniquement les valeurs propres de l'espace résiduel :

$$Fe(\ell) = \left( \frac{\ell \sum_{i=\ell+1}^m \lambda_i}{Nm(m-\ell)} \right)^{1/2} \quad (1.21)$$

Cette méthode suppose que les données contiennent des signaux et des erreurs de mesure. Avant que tous les signaux ne soient extraits,  $Fe(\ell)$  contient un mélange de signaux et d'erreurs, qui tend à diminuer avec  $\ell$ . Quand tous les signaux sont extraits,  $Fe(\ell)$  contient uniquement des erreurs et doit augmenter avec  $\ell$ . Si la valeur minimale de  $Fe(\ell)$  existe, elle correspond au nombre de CPs nécessaires pour décrire les données.

Après l'élaboration du modèle ACP par la détermination des valeurs propres (1.8), des vecteurs propres (1.9) et du nombre de CPs, l'étape suivante est de considérer une nouvelle observation  $\mathbf{x}$  dans le processus et commencer le diagnostic par l'évaluation des indices de détection de défaut.

### 1.3 Détection de défauts et indices

Trois indices sont généralement utilisés pour le diagnostic des systèmes. Ces indices servent à faire la détection de défauts [DQ98], [Qin03], [AQ09], [Liu12], [GAFVS09], [AQ11], [EYND09]. Avant de présenter ces méthodes, nous exposons l'influence d'un défaut sur l'espace principal et sur l'espace résiduel.

#### 1.3.1 Influence du défaut dans les espaces principal et résiduel

Une observation  $\mathbf{x}$  affectée par un défaut dans la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$  s'écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}_i f \quad (1.22)$$

$\mathbf{x}^*$  désigne la partie sans défaut de l'observation  $\mathbf{x}$  (elle est composée d'une valeur vraie et du bruit) et  $\boldsymbol{\xi}_i f$  la partie avec défaut de l'observation  $\mathbf{x}$ . La partie avec défaut est composée de l'amplitude du défaut  $f$  et la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\xi}_i$  ( $\boldsymbol{\xi}_i \in \mathbb{R}^m$ ) représente la direction de la  $i^{\text{ème}}$  variable. Il s'écrit :  $\boldsymbol{\xi}_i = [0 \ 0 \cdots 1 \cdots 0]^T$ , 1 étant à la  $i^{\text{ème}}$  position. Si le défaut affecte une seule variable, il est qualifié de défaut simple.

La projection de l'observation  $\mathbf{x}$  sur l'espace principal s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= \hat{\mathbf{P}}_L^T \mathbf{x} \\ &= \hat{\mathbf{P}}_L^T (\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}_i f) \end{aligned} \quad (1.23)$$

et la projection de l'observation  $\mathbf{x}$  sur l'espace résiduel est :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}} &= \tilde{\mathbf{P}}_L^T \mathbf{x} \\ &= \tilde{\mathbf{P}}_L^T (\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\xi}_i f) \\ &= \tilde{\mathbf{P}}_L^T \boldsymbol{\xi}_i f \end{aligned} \quad (1.24)$$

On remarque que le défaut perturbe à la fois la projection de l'observation  $\mathbf{x}$  dans l'espace principal et dans l'espace résiduel. La projection de l'observation  $\mathbf{x}$  dans l'espace résiduel (1.24) est un résidu (résidu au sens où en l'absence de défaut et de bruit,  $\tilde{\mathbf{t}}$  est nul et lors de la présence d'un défaut,  $\tilde{\mathbf{t}}$  dévie significativement de zéro).

### 1.3.2 Indice $SPE$ (Square Prediction Error)

L'indice  $SPE$  mesure la projection de l'observation  $\mathbf{x}$  sur l'espace résiduel :

$$\begin{aligned} SPE(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 &= \tilde{\mathbf{x}}^\top \tilde{\mathbf{x}} \\ &= \tilde{\mathbf{t}}^\top \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{t}} \\ &= \tilde{\mathbf{t}}^\top \tilde{\mathbf{t}} \quad \text{car } \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L = \mathbf{I}_{m-\ell} \\ &= \mathbf{x}^\top \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.25)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top \quad (1.26)$$

Un défaut est détecté sur l'observation  $\mathbf{x}$  si  $SPE(\mathbf{x}) > \delta^2$ . Le calcul du seuil  $\delta^2$  peut se faire de façon expérimentale ou par un calcul théorique. Ce seuil peut être calculé par :

$$\delta^2 = g^{SPE} \chi_{h^{SPE}, \alpha}^2 \quad (1.27)$$

$$g^{SPE} = \frac{\theta_2}{\theta_1}, \quad h^{SPE} = \frac{\theta_1^2}{\theta_2}, \quad \theta_i = \sum_{j=\ell+1}^m \lambda_j^i, \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } \lambda_j \text{ est la } j^{\text{ème}} \text{ valeur propre de}$$

la matrice de covariance  $\mathbf{S}_L$ . Une distribution du  $\chi^2$  est considérée avec  $h^{SPE}$  degré de liberté et un seuil de confiance  $\alpha$ . On peut trouver des éléments sur le calcul du seuil théorique dans [JM79]. Pour le seuil expérimental, on peut le calculer en prenant un pourcentage de l'indice  $SPE$  appliqué sur les données sans défaut.

### 1.3.3 Indice $T^2$ (Statistique de Hotelling)

Le calcul de l'indice  $T^2$  s'effectue dans l'espace principal :

$$\begin{aligned} T^2(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{t}}^\top \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{t}} \\ &= \left( \hat{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x} \right)^\top \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \left( \hat{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x} \right) \\ &= \mathbf{x}^\top \hat{\mathbf{P}}_L \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec :

$$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{P}}_L \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top, \quad \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (1.29)$$

$T^2(\mathbf{x}) > \tau^2$  si il y a un défaut sur l'observation  $\mathbf{x}$ . Le seuil  $\tau^2$  est calculé soit expérimentalement ou théoriquement. Pour établir le seuil expérimental, on peut considérer un pourcentage de l'indice  $T^2$  appliqué sur les données sans défaut. Pour le calcul théorique, le seuil de détection peut être approximé si le nombre d'observations  $N$  est important par :

$$\tau^2 = \chi_{\ell, \alpha}^2 \quad (1.30)$$

$\alpha$  est le seuil de confiance donné pour une distribution du  $\chi^2$  avec  $\ell$  degrés de liberté.

Le seuil de détection peut être approché si le nombre d'observations  $N$  est faible par :

$$\tau^2 = \frac{\ell(N-1)(N+1)}{N(N-\ell)} F_{\ell, N-\ell, \alpha} \quad (1.31)$$

$F_{\ell, N-\ell, \alpha}$  est la distribution de Fisher avec  $\ell$  et  $(N-\ell)$  degrés de liberté et  $\alpha$  le seuil de confiance. Des éléments pour l'évaluation de ce seuil peuvent être trouvés dans [Qin03] qui se sont basés sur [Tra92], [Jac91], [Haw74], [RS81].

### 1.3.4 Indice combiné $\phi$

La détection de défaut peut également se faire en utilisant conjointement les espaces principal et résiduel. Un nouvel indice  $\phi$  est proposé par [YQ98] et [YQ01] en se servant des indices  $SPE$  et  $T^2$ . L'indice  $\phi$  se définit comme :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{SPE(\mathbf{x})}{\delta^2} + \frac{T^2(\mathbf{x})}{\tau^2} \\ &= \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Theta} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.32)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top}{\delta^2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}_L \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top}{\tau^2} \quad (1.33)$$

S'il y a un défaut sur l'observation  $\mathbf{x}$ ,  $\phi(\mathbf{x}) > \zeta^2$ . Le calcul du seuil  $\zeta^2$  est défini par :

$$\zeta^2 = g^\varphi \chi_{h^\varphi, \alpha}^2 \quad (1.34)$$

avec :  $g^\varphi = \left( \frac{1}{\tau^4} + \frac{\theta_2}{\delta^4} \right) / \left( \frac{1}{\tau^2} + \frac{\theta_1}{\delta^2} \right)$ ,  $h^\varphi = \left( \frac{1}{\tau^2} + \frac{\theta_1}{\delta^2} \right)^2 / \left( \frac{1}{\tau^4} + \frac{\theta_2}{\delta^4} \right)$

[AQ09] donnent des éléments de calcul de ce seuil  $\zeta^2$  en se basant sur les travaux de [Box54].

Nous définissons un indice général caractérisé par la matrice  $\boldsymbol{\Psi}$  intervenant dans son calcul et dont les valeurs sont rassemblées dans le tableau 1.1.

TABLE 1.1 – Valeurs de  $\boldsymbol{\Psi}$  pour la forme générale des indices de détection de défaut

Indice	$SPE$	$T^2$	$\phi$
$\boldsymbol{\Psi}$	$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top$	$\mathbf{G} = \hat{\mathbf{P}}_L \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top$	$\boldsymbol{\Theta} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top}{\delta^2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}_L \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top}{\tau^2}$

Une fois les défauts détectés, la deuxième phase dans le diagnostic de données est la localisation du défaut détecté et l'estimation de l'amplitude du défaut.

## 1.4 Localisation et estimation de l'amplitude du défaut détecté

Après la phase de détection de défauts, il est possible de localiser le défaut et ensuite estimer son amplitude. Dans la littérature, plusieurs méthodes de localisation ont été développées

notamment les méthodes de calcul de contributions et les méthodes de reconstruction (contributions basées sur la reconstruction et localisation basée sur le principe de reconstruction).

Dans la méthode de contributions basées sur la reconstruction, après reconstruction de chaque variable, on évalue sa contribution à un indice de détection. La variable ayant la plus grande contribution à l'indice de détection est déclarée en défaut. Dans la méthode de localisation basée sur le principe de reconstruction, après reconstruction de chaque variable, on calcule l'indice de détection. La variable pour laquelle l'indice de détection est inférieur au seuil est déclarée en défaut.

### 1.4.1 Calcul de contributions

Pour la méthode de calcul de contributions, l'idée est d'évaluer les contributions de chaque variable à l'indice de détection ( $SPE$ ,  $T^2$  ou  $\phi$ ). La variable ayant la plus forte contribution à l'indice de détection est considérée comme la variable en défaut [Har03], [MK95], [WG96], [VdKVGVI13].

[AQ09] et [AQ11] ont présenté les contributions pour les indices  $SPE$ ,  $T^2$  et  $\phi$ . A partir de (1.25), (1.28) et de (1.32), les indices de détection peuvent s'écrire pour une observation  $\mathbf{x}$  :

$$\begin{aligned} \text{Indice}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x} \\ &= \|\boldsymbol{\Psi}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Psi}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m C_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.35)$$

$C_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) = \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Psi}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x} \right)^2$  est la contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'observation  $\mathbf{x}$  à l'indice de détection.

#### 1.4.1.1 Calcul de contributions dans le cas de l'indice $SPE$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'observation  $\mathbf{x}$  à l'indice  $SPE$  est :

$$\begin{aligned} C_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \left( \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{x} \right)^2 \\ &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \left( \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top \right) \mathbf{x} \right)^2 \text{ car } \left( \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top \right)^{\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top \\ &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} \right)^2 \\ &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \tilde{\mathbf{x}} \right)^2 \text{ avec } \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} \\ &= [\tilde{\mathbf{x}}]_i^2 \end{aligned} \quad (1.36)$$

#### 1.4.1.2 Calcul de contributions dans le cas de l'indice $T^2$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'observation  $\mathbf{x}$  à l'indice  $T^2$  est :

$$\begin{aligned} C_i^{T^2}(\mathbf{x}) &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_L \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{P}}_L^\top \mathbf{x} \right)^2 \\ &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{G}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.37)$$

### 1.4.1.3 Calcul de contributions dans le cas de l'indice $\phi$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante de l'observation  $\mathbf{x}$  à l'indice  $\phi$  est :

$$\begin{aligned} C_i^\phi(\mathbf{x}) &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \left( \frac{\tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top}{\delta^2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}_L \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top}{\tau^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{x} \right)^2 \\ &= \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Theta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Cette approche sur le calcul de contributions présente quelques inconvénients. Il existe des cas où les variables susceptibles d'être en défaut peuvent ne pas être les variables avec les plus grandes contributions surtout dans le cadre de défauts affectant plusieurs variables simultanément.

Nous passons dans la section suivante à une deuxième méthode de localisation, celle des contributions basées sur la reconstruction des variables.

### 1.4.2 Contributions basées sur la reconstruction

Après la phase de détection de défaut, si un défaut est détecté sur l'observation  $\mathbf{x}$ , la méthode de contributions par reconstruction permet de localiser ce défaut et ensuite estimer son amplitude.

Cette méthode *RBC* (*Reconstruction-Based Contribution*) consiste à considérer une observation  $\mathbf{x}$  affectée par un défaut et à estimer l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  en reconstruisant la  $i^{\text{ème}}$  variable. Il faut déterminer l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  telle que l'indice de détection de défaut de l'observation reconstruite soit inférieur au seuil.

Pour chaque observation  $\mathbf{x}$  affectée par un défaut, l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  est estimée en reconstruisant la  $i^{\text{ème}}$  variable en se basant sur le modèle ACP et les mesures des autres variables [DQ98], [YQ01]. Dans un système de  $m$  variables avec un défaut sur une observation  $\mathbf{x}$  dans la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$ , la reconstruction de cette observation s'écrit :

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i \hat{f}_i \quad (1.39)$$

Pour trouver l'estimation de l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$ , il faut minimiser l'indice de détection de l'observation reconstruite ( $\text{Indice}(\mathbf{z}_i)$ ).

Si nous considérons un défaut agissant selon la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$  et dont l'amplitude est  $f_i$ , la reconstruction de l'observation  $\mathbf{x}$  est :

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i \quad (1.40)$$

Comme en réalité le vecteur  $\boldsymbol{\xi}_i$  et l'amplitude  $f_i$  sont tous les deux inconnus, on imposera la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$  et on estimera l'amplitude du défaut selon cette direction.

A partir de (1.25), (1.28) et de (1.32), la forme générale de l'indice de détection de défaut d'une observation reconstruite est :

$$\text{Indice}(\mathbf{z}_i) = \mathbf{z}_i^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{z}_i \quad (1.41)$$



L'annulation de la dérivée de  $\text{Indice}(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$  permet de trouver l'estimation de l'amplitude du défaut :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial [\text{Indice}(\mathbf{z}_i)]}{\partial f_i} &= \frac{\partial (\mathbf{z}_i^\top \Psi \mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \\
 &= 2\mathbf{z}_i^\top \Psi \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial f_i} \\
 &= 2\mathbf{z}_i^\top \Psi (-\boldsymbol{\xi}_i) \quad \text{car } \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial f_i} = -\boldsymbol{\xi}_i \\
 &= -2(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i)^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Pour un indice de détection de défaut, la reconstruction d'une variable minimise l'effet de cette variable et ramène l'indice de détection en dessous du seuil de détection. Ainsi si l'indice de détection recalculé avec l'observation reconstruite est inférieur au seuil ( $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i) < \delta^2$ ,  $T^2(\hat{\mathbf{z}}_i) < \tau^2$  ou  $\phi(\hat{\mathbf{z}}_i) < \zeta^2$ ), la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  est peut-être affectée par un défaut.

En posant cette équation (1.42) égale à 0  $\left( \frac{\partial [\text{Indice}(\mathbf{z}_i)]}{\partial f_i} \Big|_{\mathbf{z}_i = \hat{\mathbf{z}}_i, f_i = \hat{f}_i} = 0 \right)$ , nous obtenons l'estimation de l'amplitude du défaut.

$$2(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i \hat{f}_i)^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i = 0 \tag{1.43}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{x}^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i = \hat{f}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i$$

et on obtient l'estimation de l'amplitude du défaut :

$$\hat{f}_i = \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \mathbf{x} \tag{1.44}$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  à un indice de détection est :

$$\begin{aligned}
 RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) &= \left\| \Psi^{1/2} \boldsymbol{\xi}_i \hat{f}_i \right\|^2 \\
 &= \left( \boldsymbol{\xi}_i \hat{f}_i \right)^\top \Psi \left( \boldsymbol{\xi}_i \hat{f}_i \right)
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

A partir de (1.44), la valeur de  $\hat{f}_i$  remplacée dans (1.45) conduit à :

$$\begin{aligned}
 RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) &= \left[ \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \mathbf{x} \right]^\top \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \mathbf{x} \\
 &= \mathbf{x}^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \mathbf{x} \\
 &= \mathbf{x}^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1} \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

car  $\Psi^\top = \Psi$  et  $\left[ \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1} \right]^\top = \left( \boldsymbol{\xi}_i^\top \Psi \boldsymbol{\xi}_i \right)^{-1}$ ,  $\Psi$  est une matrice symétrique.

La relation entre  $\text{Indice}(\mathbf{z}_i)$ ,  $\text{Indice}(\mathbf{x})$  et  $RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x})$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \text{Indice}(\mathbf{z}_i) &= \mathbf{z}_i^\top \Psi \mathbf{z}_i = (\mathbf{x} - \xi_i f_i)^\top \Psi (\mathbf{x} - \xi_i f_i) \\
 &= (\mathbf{x}^\top - f_i \xi_i^\top) \Psi (\mathbf{x} - \xi_i f_i) \\
 &= (\mathbf{x}^\top \Psi - f_i \xi_i^\top \Psi) (\mathbf{x} - \xi_i f_i) \\
 &= \mathbf{x}^\top \Psi \mathbf{x} - f_i \xi_i^\top \Psi \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \Psi \xi_i f_i + f_i \xi_i^\top \Psi \xi_i f_i \\
 &= \mathbf{x}^\top \Psi \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \Psi \xi_i (\xi_i^\top \Psi \xi_i)^{-1} \xi_i^\top \Psi \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Or les deux termes de (1.47) sont respectivement :

$$\text{Indice}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \Psi \mathbf{x} \tag{1.48}$$

et

$$RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \Psi \xi_i (\xi_i^\top \Psi \xi_i)^{-1} \xi_i^\top \Psi \mathbf{x}$$

Alors :

$$\text{Indice}(\mathbf{z}_i) = \text{Indice}(\mathbf{x}) - RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) \tag{1.49}$$

Et par conséquent :

$$RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) = \text{Indice}(\mathbf{x}) - \text{Indice}(\mathbf{z}_i) \tag{1.50}$$

#### 1.4.2.1 Contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable de l'observation $\mathbf{x}$ à l'indice de détection $SPE$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  à l'indice de détection  $SPE$  s'obtient en faisant  $\Psi = \tilde{\mathbf{F}}$  dans (1.46) :

$$\begin{aligned}
 RBC_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \tilde{\mathbf{F}} \xi_i (\xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \xi_i)^{-1} \xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} \\
 &= \frac{(\xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x})^2}{\xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \xi_i}
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Puisque  $[\tilde{\mathbf{x}}]_i = \xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x}$ , le  $RBC_i^{SPE}(\mathbf{x})$  peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned}
 RBC_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= \frac{[\tilde{\mathbf{x}}]_i^2}{\xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \xi_i} \\
 &= \frac{C_i^{SPE}(\mathbf{x})}{\xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \xi_i}
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

#### 1.4.2.2 Contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable de l'observation $\mathbf{x}$ à l'indice de détection $T^2$

En faisant  $\Psi = \mathbf{G}$  dans (1.46), la contribution de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  à l'indice de détection  $T^2$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 RBC_i^{T^2}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \xi_i (\xi_i^\top \mathbf{G} \xi_i)^{-1} \xi_i^\top \mathbf{G} \mathbf{x} \\
 &= \frac{(\xi_i^\top \mathbf{G} \mathbf{x})^2}{\xi_i^\top \mathbf{G} \xi_i}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

### 1.4.2.3 Contribution de la $i^{\text{ème}}$ variable de l'observation $\mathbf{x}$ à l'indice de détection $\phi$

Pour l'indice de détection  $\phi$ , la contribution de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  en faisant  $\Psi = \Theta$  dans (1.46) donne :

$$\begin{aligned} RBC_i^\phi(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \Theta \xi_i \left( \xi_i^\top \Theta \xi_i \right)^{-1} \xi_i^\top \Theta \mathbf{x} \\ &= \frac{\left( \xi_i^\top \Theta \mathbf{x} \right)^2}{\xi_i^\top \Theta \xi_i} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Pour cette méthode de contributions par reconstruction, en utilisant les trois indices de détection, la variable ayant la plus grande contribution à l'indice de détection est considérée comme la variable en défaut. Dans la section qui suit, nous exposerons une troisième méthode de localisation qui concerne l'évaluation des indices de détection après la reconstruction de chaque variable. Ces indices après reconstruction des variables sont comparés aux seuils.

### 1.4.3 Localisation basée sur le principe de reconstruction

Le principe de cette méthode est basé sur le fait qu'une variable est supposée en défaut et reconstruite en utilisant le modèle ACP et les mesures des autres variables. Pour effectuer la localisation, il faut faire la comparaison entre l'indice de détection obtenu après la reconstruction et le seuil. Si pour une variable reconstruite, l'indice de détection obtenu est inférieur au seuil alors cette variable est susceptible d'être en défaut.

A partir de (1.44), l'observation reconstruite est :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_i &= \mathbf{x} - \xi_i \hat{f}_i \\ &= \mathbf{x} - \xi_i \left( \xi_i^\top \Psi \xi_i \right)^{-1} \xi_i^\top \Psi \mathbf{x} \\ &= \left[ \mathbf{I} - \xi_i \left( \xi_i^\top \Psi \xi_i \right)^{-1} \xi_i^\top \Psi \right] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.55)$$

L'indice de détection obtenu après reconstruction de l'observation s'écrit alors :

$$\text{Indice}(\hat{\mathbf{z}}_i) = \hat{\mathbf{z}}_i^\top \Psi \hat{\mathbf{z}}_i \quad (1.56)$$

Cette méthode peut s'appliquer aux trois indices de détection de défaut.

#### 1.4.3.1 Localisation par reconstruction basée sur l'indice $SPE$

A partir de (1.55), en remplaçant  $\Psi = \tilde{\mathbf{F}}$ , l'observation reconstruite s'écrit :

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \left[ \mathbf{I} - \xi_i \left( \xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \xi_i \right)^{-1} \xi_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \right] \mathbf{x} \quad (1.57)$$

L'évaluation de l'indice de détection  $SPE$  pour l'observation reconstruite  $\hat{\mathbf{z}}_i$  à partir de (1.56) est :

$$SPE(\hat{\mathbf{z}}_i) = \hat{\mathbf{z}}_i^\top \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top \hat{\mathbf{z}}_i \quad (1.58)$$

Pour cette observation reconstruite  $\hat{\mathbf{z}}_i$ , si l'indice de détection  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  est inférieur au seuil alors la  $i^{\text{ème}}$  variable est peut-être affectée par un défaut.

[DQEM96] ont proposé une approche pour simplifier cette méthode de localisation par reconstruction basée sur l'indice  $SPE$ .

### 1.4.3.2 Autre approche pour la localisation basée sur l'indice $SPE$

A partir de (1.44), pour l'indice de détection  $SPE$  et considérant la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  reconstruite, l'estimation de l'amplitude du défaut conduit à :

$$\hat{f}_i = [\mathbf{x}]_i - \frac{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{-i}^\top & 0 & \hat{\mathbf{F}}_{+i}^\top \end{bmatrix} \mathbf{x}}{1 - f_{ii}} \quad (1.59)$$

où  $[\mathbf{x}]_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  et  $[\hat{\mathbf{F}}_{-i}^\top \ f_{ii} \ \hat{\mathbf{F}}_{+i}^\top]$  forme la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $\hat{\mathbf{F}}$ .  $\hat{\mathbf{F}}_{-i}^\top$  comprend les éléments avant  $i$  et  $\hat{\mathbf{F}}_{+i}^\top$  comprend les éléments après  $i$ .  $f_{ii}$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice  $\hat{\mathbf{F}}$ .

Ainsi considérant cette approche, à partir de (1.55), l'observation reconstruite en se basant sur l'indice de détection  $SPE$  peut être calculée par :

$$\hat{\mathbf{z}}_i = [\mathbf{x}]_i - \hat{f}_i = \frac{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{-i}^\top & 0 & \hat{\mathbf{F}}_{+i}^\top \end{bmatrix} \mathbf{x}}{1 - f_{ii}} \quad (1.60)$$

Cette approche élaborée pour le cas de l'indice de détection  $SPE$  donne les mêmes résultats que la méthode de localisation par reconstruction basée sur l'indice  $SPE$ .

### 1.4.3.3 Localisation par reconstruction basée sur l'indice $T^2$

A partir de (1.55), en remplaçant  $\Psi = \mathbf{G}$ , l'observation reconstruite s'écrit :

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \left[ \mathbf{I} - \xi_i \left( \xi_i^\top \mathbf{G} \xi_i \right)^{-1} \xi_i^\top \mathbf{G} \right] \mathbf{x} \quad (1.61)$$

L'indice de détection  $T^2$  à partir de (1.56) pour l'observation reconstruite  $\hat{\mathbf{z}}_i$  est :

$$T^2(\hat{\mathbf{z}}_i) = \hat{\mathbf{z}}_i^\top \hat{\mathbf{P}}_L \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top \hat{\mathbf{z}}_i \quad (1.62)$$

Si l'indice de détection  $T^2(\hat{\mathbf{z}}_i)$  est inférieur au seuil pour cette observation reconstruite  $\hat{\mathbf{z}}_i$ , alors la  $i^{\text{ème}}$  variable est susceptible d'être affectée par un défaut.

### 1.4.3.4 Localisation par reconstruction basée sur l'indice $\phi$

En remplaçant  $\Psi = \Theta$  dans (1.55), l'observation reconstruite s'écrit :

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \left[ \mathbf{I} - \xi_i \left( \xi_i^\top \Theta \xi_i \right)^{-1} \xi_i^\top \Theta \right] \mathbf{x} \quad (1.63)$$

L'évaluation de l'indice de détection  $\phi$  pour  $\hat{\mathbf{z}}_i$  à partir de (1.56) est :

$$\phi(\hat{\mathbf{z}}_i) = \hat{\mathbf{z}}_i^\top \left( \frac{\tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top}{\delta^2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}_L \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top}{\tau^2} \right) \hat{\mathbf{z}}_i \quad (1.64)$$

Pour cette observation reconstruite  $\hat{\mathbf{z}}_i$ , si l'indice de détection  $\phi(\hat{\mathbf{z}}_i)$  est inférieur au seuil, il est possible que la  $i^{\text{ème}}$  variable soit affectée par un défaut.

Il convient de noter que le défaut peut affecter plusieurs variables. Dans ce cas, la direction du défaut n'est plus un vecteur  $\xi_i$  mais une matrice représentant des défauts sur plusieurs variables. Dans la section suivante, nous allons évoquer les cas de la localisation basée sur la reconstruction avec des défauts affectant plusieurs variables.

### 1.4.3.5 Cas de défauts multiples

Dans le cas des défauts multiples affectant plusieurs variables, l'observation reconstruite dans (1.39) devient :

$$\hat{\mathbf{z}}_R = \mathbf{x} - \Xi_R \hat{f}_R \quad (1.65)$$

avec  $\Xi_R$  une matrice constituée de 0 et de 1 et qui indique les directions des défauts. Les indices des variables à reconstruire simultanément sont regroupés dans  $R$ . Dans un ensemble de quatre variables, s'il faut reconstruire un ensemble de variables  $R = \{1, 3\}$  alors la matrice  $\Xi_R$  s'écrit :

$$\Xi_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (1.66)$$

Dans ce cas, l'estimation des amplitudes des défauts est le vecteur  $\hat{f}_R$ . Avec cet exemple, la dimension de  $\hat{f}_R$  est  $\mathbb{R}^{2 \times 1}$ .

Pour trouver l'estimation de l'amplitude du défaut  $\hat{f}_R$ , il faut minimiser l'indice de détection de l'observation reconstruite ( $\text{Indice}(\mathbf{z}_R)$ ) :

$$\hat{f}_R = \arg \min_{f_R} \text{Indice}(\mathbf{z}_R) \quad (1.67)$$

avec :

$$\text{Indice}(\mathbf{z}_R) = \mathbf{z}_R^\top \Psi \mathbf{z}_R \quad (1.68)$$

L'annulation de la dérivée première de  $\text{Indice}(\mathbf{z}_R)$  par rapport à  $f_R$  permet d'obtenir l'estimation de l'amplitude du défaut [DQ98] :

$$\hat{f}_R = \left( \Xi_R^\top \Psi \Xi_R \right)^{-1} \Xi_R^\top \Psi \mathbf{x} \quad (1.69)$$

L'observation reconstruite pour l'indice de détection  $SPE$  est :

$$\hat{\mathbf{z}}_R = \left[ \mathbf{I} - \Xi_R \left( \Xi_R^\top \tilde{\mathbf{F}} \Xi_R \right)^{-1} \Xi_R^\top \tilde{\mathbf{F}} \right] \mathbf{x} \quad (1.70)$$

Pour l'indice de détection  $T^2$ , l'observation reconstruite s'écrit :

$$\hat{\mathbf{z}}_R = \left[ \mathbf{I} - \Xi_R \left( \Xi_R^\top \mathbf{G} \Xi_R \right)^{-1} \Xi_R^\top \mathbf{G} \right] \mathbf{x} \quad (1.71)$$

Et pour l'observation reconstruite pour l'indice de détection  $\phi$ , elle s'évalue par :

$$\hat{\mathbf{z}}_R = \left[ \mathbf{I} - \Xi_R \left( \Xi_R^\top \Theta \Xi_R \right)^{-1} \Xi_R^\top \Theta \right] \mathbf{x} \quad (1.72)$$

L'évaluation des indices de détection  $SPE$ ,  $T^2$  et  $\phi$  pour  $\hat{\mathbf{z}}_i$  à partir de (1.56) sont respectivement :

$$SPE(\hat{\mathbf{z}}_R) = \hat{\mathbf{z}}_R^\top \tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top \hat{\mathbf{z}}_R \quad (1.73)$$

$$T^2(\hat{\mathbf{z}}_R) = \hat{\mathbf{z}}_R^\top \hat{\mathbf{P}}_L \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top \hat{\mathbf{z}}_R \quad (1.74)$$

$$\phi(\hat{\mathbf{z}}_R) = \hat{\mathbf{z}}_R^\top \left( \frac{\tilde{\mathbf{P}}_L \tilde{\mathbf{P}}_L^\top}{\delta^2} + \frac{\hat{\mathbf{P}}_L \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_L^\top}{\tau^2} \right) \hat{\mathbf{z}}_R \quad (1.75)$$

Si les valeurs des indices  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_R)$ ,  $T^2(\hat{\mathbf{z}}_R)$  et  $\phi(\hat{\mathbf{z}}_R)$  sont inférieures à leurs seuils respectifs alors dans l'ensemble de variables  $R$ , les variables représentées par 1 dans l'exemple de (1.66) sont peut-être affectées par un défaut.

#### 1.4.4 Autres approches de localisation

Dans la littérature, d'autres méthodes de localisation basées sur les contributions ont été développées. Nous rappelons dans cette section quelques unes de ces approches [AQ11].

##### 1.4.4.1 Contributions basées sur la décomposition partielle

Cette méthode de contributions décompose partiellement un indice de détection de défauts sous forme de somme des contributions de variables. A l'origine cette méthode a été élaborée pour l'indice de détection  $T^2$  :

$$\begin{aligned} T^2(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{I} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Or la matrice  $\mathbf{I}$  peut s'écrire :  $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top$  alors :

$$\begin{aligned} T^2(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \left( \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \right) \mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.76)$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  basée sur la décomposition partielle pour l'indice de détection  $T^2$  est :

$$PDC_i^{T^2}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \quad (1.77)$$

Dans le cas général, les contributions basées sur la décomposition partielle pour les indices de détection de défaut en considérant l'observation  $\mathbf{x}$  s'évaluent par :

$$PDC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \quad (1.78)$$

A partir de (1.78), pour une observation  $\mathbf{x}$ , la contribution de la  $i^{\text{ème}}$  variable basée sur la décomposition partielle pour l'indice de détection  $SPE^2$  est :

$$PDC_i^{SPE}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \quad (1.79)$$

Sur ce même principe en se référant à (1.78), la contribution de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  basée sur la décomposition partielle pour l'indice de détection  $\phi^2$  est :

$$PDC_i^\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \quad (1.80)$$

##### 1.4.4.2 Contributions diagonales

Les contributions diagonales sont définies en ne conservant que les termes diagonaux. Par exemple pour l'indice de détection  $T^2$ , la contribution diagonale de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  peut être définie comme :

$$\begin{aligned} DC_i^{T^2}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{G} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \\ &= g_{ii}[\mathbf{x}]_i \end{aligned} \quad (1.81)$$

$g_{ii}$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice  $\mathbf{G}$ .

En se basant sur les contributions diagonales pour l'indice de détection  $T^2$  (1.81), la contribution diagonale de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  pour l'indice  $SPE$  est :

$$\begin{aligned} DC_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \\ &= f_{ii}[\mathbf{x}]_i \end{aligned} \quad (1.82)$$

Et pour l'indice  $\phi$ , la contribution diagonale de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} DC_i^\phi(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} \\ &= \theta_{ii}[\mathbf{x}]_i \end{aligned} \quad (1.83)$$

$\theta_{ii}$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal de la matrice  $\boldsymbol{\Theta}$ .

#### 1.4.4.3 Contributions basées sur l'angle

Pour une observation  $\mathbf{x}$ , la contribution basée sur l'angle de la  $i^{\text{ème}}$  variable est mesurée par l'angle entre l'observation  $\mathbf{x}$  et la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$  après une projection par  $\boldsymbol{\Psi}^{1/2}$ .

$$\begin{aligned} AC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) &= \left( \frac{\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i^\top \tilde{\mathbf{x}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i\| \|\tilde{\mathbf{x}}\|} \right)^2 \quad \text{avec } \tilde{\boldsymbol{\xi}}_i = \boldsymbol{\Psi}^{1/2} \boldsymbol{\xi}_i \text{ et } \tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Psi}^{1/2} \mathbf{x} \\ &= \frac{(\boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x})^2}{\boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\xi}_i \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}} \\ &= \frac{RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x})}{\text{Indice}(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (1.84)$$

où  $RBC_i^{\text{Indice}}(\mathbf{x}) = \frac{(\boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x})^2}{\boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\xi}_i}$  et  $\text{Indice}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}$

A partir de (1.84), la contribution basée sur l'angle de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  pour l'indice de détection  $SPE$  s'écrit :

$$AC_i^{SPE}(\mathbf{x}) = \frac{RBC_i^{SPE}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^\top \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x}} \quad (1.85)$$

Les contributions basées sur l'angle de la  $i^{\text{ème}}$  variable de l'observation  $\mathbf{x}$  pour les indices de détection  $T^2$  et  $\phi$  sont respectivement :

$$AC_i^{T^2}(\mathbf{x}) = \frac{RBC_i^{T^2}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x}} \quad (1.86)$$

$$AC_i^\phi(\mathbf{x}) = \frac{RBC_i^\phi(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\Theta} \mathbf{x}} \quad (1.87)$$

Les méthodes présentées dans ce chapitre seront simulées sur un exemple dans la section suivante : les approches étudiées sur le diagnostic d'un système par ACP à savoir les méthodes de détection, les méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude de défauts.

## 1.5 Application des méthodes sur l'ACP

Nous présentons un exemple de simulation pour illustrer les méthodes indiquées dans ce chapitre. Soit un système linéaire décrit par six variables<sup>1</sup> et représenté par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_1 &= \mathbf{u}_1 + \varepsilon_1 \\
 \mathbf{y}_2 &= \mathbf{u}_1 + \varepsilon_2 \\
 \mathbf{y}_3 &= \mathbf{u}_2 + \varepsilon_3 \\
 \mathbf{y}_4 &= \mathbf{u}_2 + \varepsilon_4 \\
 \mathbf{y}_5 &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \varepsilon_5 \\
 \mathbf{y}_6 &= \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + \varepsilon_6
 \end{aligned}
 \tag{1.88}$$

où les bruits de mesure  $\varepsilon_i$  sont des bruits aléatoires uniformément répartis entre  $-0.1$  et  $0.1$ , et  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont des signaux en forme de créneaux dont les amplitudes et les durées changent de manière aléatoire entre  $-2$  et  $2$ . Les mesures simulées des variables  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5$  et  $\mathbf{y}_6$  sont indiquées sur la figure 1.1. En conditions normales de fonctionnement, une simulation a été faite pour construire le modèle ACP. Les observations sont au nombre de  $N = 200$ .

Le nombre de composantes principales retenues pour le modèle ACP est  $\ell = 2$ . Il correspond environ à 99% de la variance totale des données. Pour la détermination du nombre de composantes principales le critère utilisé est le pourcentage cumulé de la variance totale (1.19).

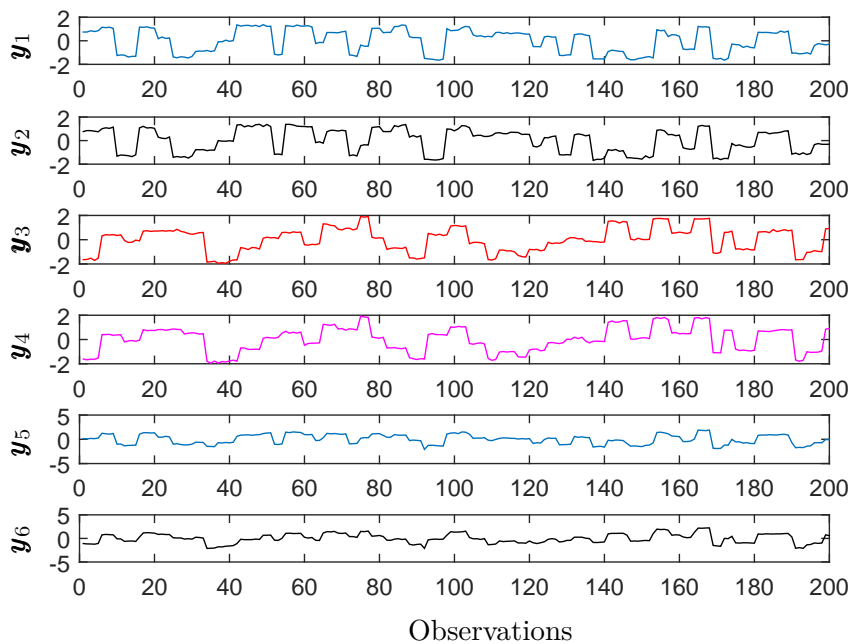


FIGURE 1.1 – Tracé des variables

Les seuils évalués sont : pour l'indice  $SPE$  :  $\delta^2 = 0.04$ , pour l'indice  $T^2$  :  $\tau^2 = 4.70$  et pour l'indice combiné  $\phi$  :  $\zeta^2 = 1.62$ .

1. Dans tous les exemples d'application,  $\mathbf{y}_i$  désigne les variables des systèmes simulés et elles sont les composantes des observations  $\mathbf{x}$ .



Six défauts ont été simulés pour appliquer les méthodes présentées. Les six défauts sont appliqués séparément sur les variables  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{y}_3$ ,  $\mathbf{y}_4$ ,  $\mathbf{y}_5$  et  $\mathbf{y}_6$ . Le tableau 1.2 indique l'amplitude et les instants d'occurrence des défauts sur les variables.

TABLE 1.2 – Valeurs des amplitudes, variables et observations affectées par les défauts

Variabiles en défaut	Intervalles des observations affectées par les défauts	Amplitudes des défauts
$\mathbf{y}_1$	10 - 20	0.42
$\mathbf{y}_2$	40 - 50	-0.5
$\mathbf{y}_3$	70 - 80	0.48
$\mathbf{y}_4$	100 - 110	0.5
$\mathbf{y}_5$	130 - 140	-0.35
$\mathbf{y}_6$	160 - 170	0.4

Dans ce tableau 1.2, la variable  $\mathbf{y}_1$  est affectée par un défaut d'une amplitude de 0.42 entre les observations 10 et 20, la variable  $\mathbf{y}_2$  est affectée par un défaut d'une amplitude de -0.5 entre les observations entre 40 et 50, ainsi de suite jusqu'à la variable  $\mathbf{y}_6$  affectée par un défaut d'une amplitude de 0.4 entre les observations 160 et 170.

### 1.5.1 Détection de défauts sur le système

La figure 1.2 illustre les indices de détection de défaut en bleu et les seuils en rouge. L'indice  $SPE$  permet de détecter le défaut dans les intervalles sur lesquelles les défauts ont été ajoutés sur le système (entre 10 et 20, entre 40 et 50, entre 70 et 80, 100 et 110, entre 130 et 140, 160 et 170). Par contre l'indice  $T^2$  ne détecte pas les défauts. L'indice combiné détecte aussi les défauts comme l'indice  $SPE$  sur les six intervalles sur lesquelles les défauts ont été ajoutés.

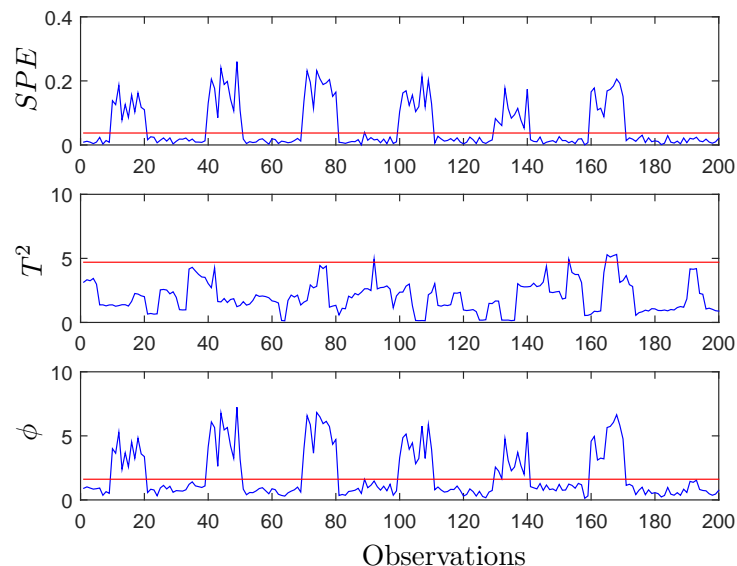


FIGURE 1.2 – Détection de défaut sur les variables

Après cette phase de détection de défauts, dans la section suivante l'étape de localisation et d'estimation des défauts sera établie.

## 1.5.2 Localisation et estimation de l'amplitude des défauts sur le système

Trois méthodes de localisation sont testées sur l'exemple (1.88) en se basant sur l'indice de détection  $SPE$ . Il s'agit de la méthode de calcul de contributions, la méthode de contributions basées sur la reconstruction et la méthode de localisation basée sur le principe de reconstruction.

### 1.5.2.1 Méthode de calcul de contributions

La figure 1.3 indique les tracés des contributions de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$ . Les barres indiquent la contribution de chaque variable sur toutes les observations affectées par le défaut. Ainsi la figure 1.3(a) montre les contributions des six variables à l'indice de détection  $SPE$  pour les observations qui se situent dans l'intervalle 10 à 20. Sur cette figure 1.3(a), la variable  $y_1$  à la plus grande contribution. Elle est considérée comme la variable en défaut. Sur la figure 1.3(b), la variable  $y_2$  est la variable avec la plus grande contribution. Cette figure 1.3(b) correspond à la contribution de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$  pour les observations se situant entre 40 et 50. La figure 1.3(c) représente la contribution de chaque variable à l'indice  $SPE$  pour les observations entre 70 et 80. La variable  $y_3$  a la plus grande contribution.

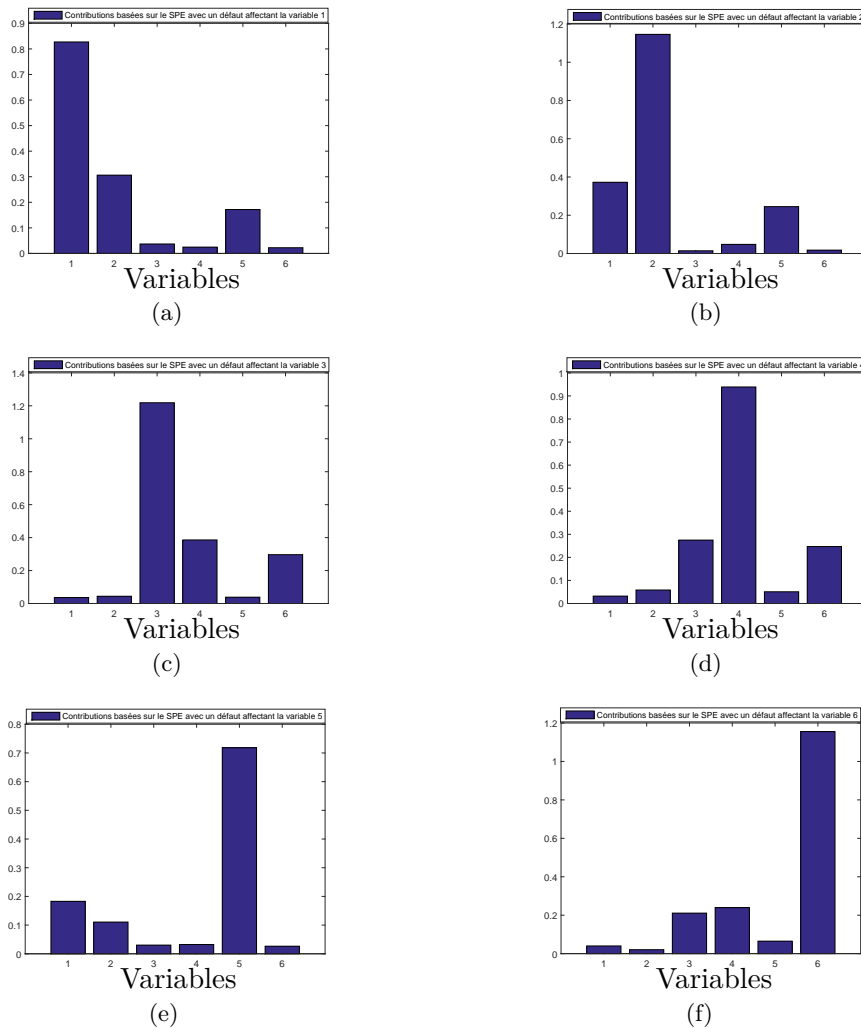


FIGURE 1.3 – Contributions de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$

Sur les autres figures 1.3(d), 1.3(e) et 1.3(f), les variables ayant les plus grandes contributions sont respectivement  $y_4$ ,  $y_5$  et  $y_6$ . Les figures 1.3(d), 1.3(e) et 1.3(f) indiquent les contributions de chaque variable à l'indice  $SPE$  pour les observations entre 100 et 110, 130 et 140, 160 et 170 respectivement. Les résultats obtenus sur cette figure 1.3 sont conformes à ce qui est indiqué dans le tableau 1.2. En conclusion, la variable  $y_1$  est affectée par un défaut entre les observations 10 et 20, la variable  $y_2$  entre 40 et 50, la variable  $y_3$  entre 70 et 80, la variable  $y_4$  entre 100 et 110, la variable  $y_5$  entre 130 et 140, la variable  $y_6$  entre 160 et 170.

### 1.5.2.2 Méthode de contributions par reconstruction

La figure 1.4 indique les tracés des  $RBC$  de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$ . Les barres indiquent la contribution de chaque variable sur toutes les observations affectées par le défaut. La figure 1.4(a) indique le  $RBC$  des six variables à l'indice de détection  $SPE$  pour les observations affectées par un défaut entre 10 et 20. Sur cette figure 1.4, la variable  $y_1$  a la plus grande contribution. Sur la figure 1.4(b) est illustré le  $RBC$  des six variables à l'indice de détection  $SPE$  pour les observations affectées par un défaut entre 40 et 50. La variable  $y_2$  est la variable en défaut.

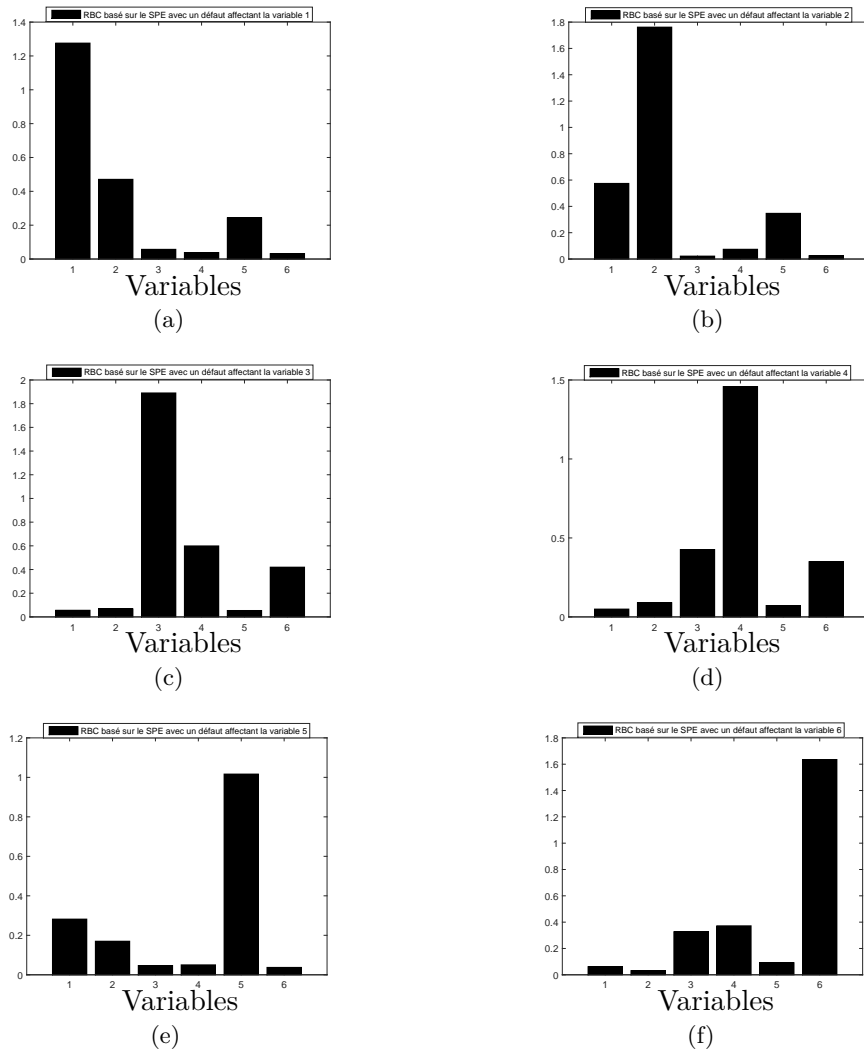


FIGURE 1.4 –  $RBC$  de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$

Sur les autres figures 1.4(c), 1.4(d), 1.4(e) et 1.4(f) sont montrés les *RBC* des six variables à l'indice de détection *SPE* pour les observations entre 70 et 80, 100 et 110, 130 et 140, 160 et 170 respectivement. Les variables ayant les plus grandes contributions sur ces figures sont respectivement les variables  $\mathbf{y}_3$ ,  $\mathbf{y}_4$ ,  $\mathbf{y}_5$  et  $\mathbf{y}_6$ .

### 1.5.2.3 Méthode de localisation basée sur la reconstruction

La figure 1.5 illustre les tracés de l'indice de détection *SPE* après reconstruction des variables  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{y}_3$ ,  $\mathbf{y}_4$ ,  $\mathbf{y}_5$  et  $\mathbf{y}_6$  (cette reconstruction est déjà évaluée dans la section 1.5.2.2 avant les calculs de contributions). Sur la figure 1.5(a), l'indice *SPE* recalculé après reconstruction de la variable  $\mathbf{y}_1$  est inférieur au seuil entre les observations 10 et 20.

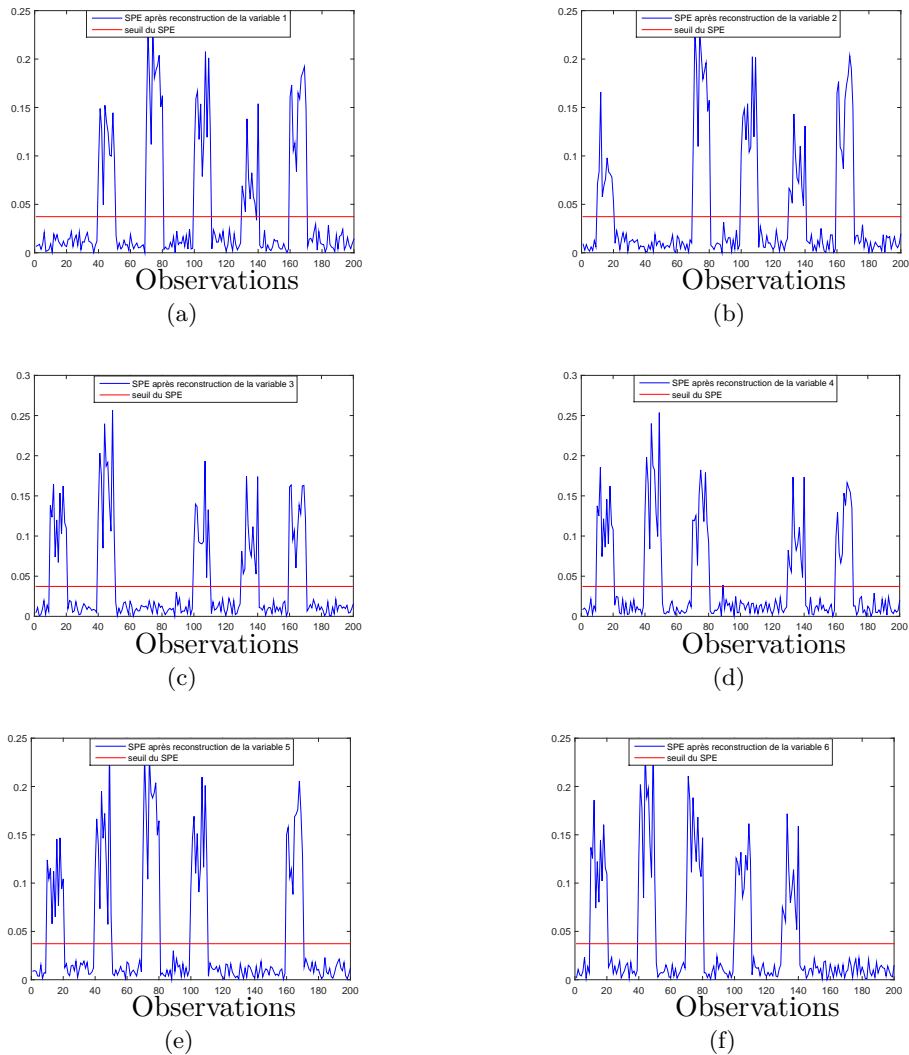


FIGURE 1.5 – Tracé de l'indice de détection *SPE* après reconstruction des variables

Ce qui veut dire c'est bien la variable  $\mathbf{y}_1$  qui est affectée par un défaut entre les observations 10 et 20. Pour rappel sur la figure 1.2, l'indice *SPE* est supérieur au seuil entre les observations 10 et 20. Sur cette figure 1.5(a), pour les autres intervalles d'observations affectées par le défaut (40 - 50, 70 - 80, 100 - 110, 130 - 140, 160 - 170), l'indice *SPE* reste supérieur au seuil. Pour

la variable  $y_2$  reconstruite, l'indice de détection  $SPE$  recalculé est inférieur au seuil entre les observations 40 et 50 sur la figure 1.5(b). Donc la variable  $y_2$  est susceptible d'être en défaut sur cet intervalle d'observations. Sur les autres figures 1.5(c), 1.5(d), 1.5(e) et 1.5(f), le même constat est fait concernant les variables  $y_3$ ,  $y_4$ ,  $y_5$  et  $y_6$ .

Dans le tableau 1.3, les amplitudes estimées des défauts sont indiquées.

TABLE 1.3 – Valeurs estimées des amplitudes des défauts

Variabes en défaut	Intervalles des observations affectées par les défauts	Amplitudes estimées des défauts
$y_1$	10 - 20	0.46
$y_2$	40 - 50	-0.54
$y_3$	70 - 80	0.56
$y_4$	100 - 110	0.49
$y_5$	130 - 140	-0.39
$y_6$	160 - 170	0.50

En terme de comparaison, on retrouve dans le tableau 1.3, les amplitudes des défauts ajoutés dans le tableau 1.2. En effet, un calcul d'erreur relative définissant le rapport des amplitudes estimées des défauts et des défauts ajoutés pour chaque variable montre que ce rapport est faible. Par exemple, en effectuant ce calcul pour la variable  $y_1$ , il vaut 8.7% et pour la variable  $y_2$  il est de 7.4%.

### 1.5.3 Localisation de défauts multiples

Nous considérons à présent deux défauts qui affectent simultanément les variables  $y_1$  et  $y_3$  entre les observations 10 et 20. Les défauts sur les autres variables interviennent sur des intervalles d'observations différents. Les défauts sont marqués en rouge sur la figure 1.6.

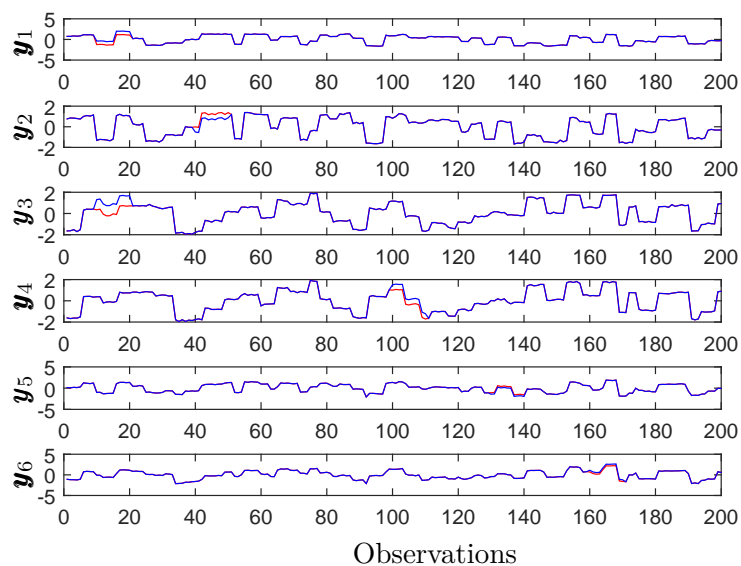


FIGURE 1.6 – Tracé des variables sans défauts et variables affectées par des défauts

Lorsque nous reconstruisons séparément les variables, l'indice de détection  $SPE$  recalculé est supérieur au seuil pour tous les intervalles des observations affectées par les défauts. Par contre lorsque les variables  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_3$  sont reconstruites en même temps sur les observations 10 à 20, l'indice de détection  $SPE$  recalculé est inférieur au seuil sur les observations 10 à 20. Ceci est illustré sur la figure 1.7.

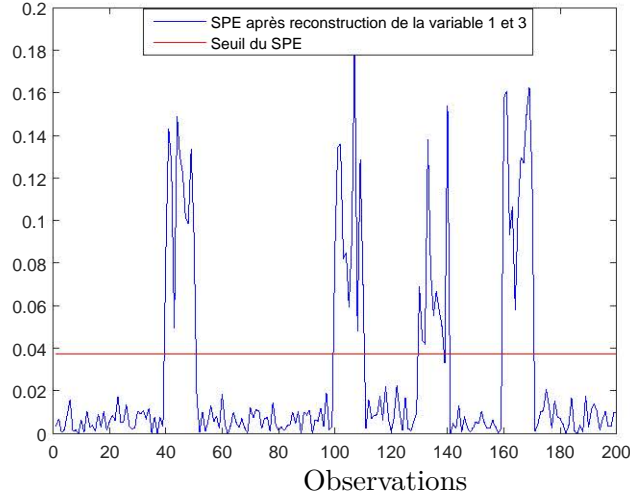


FIGURE 1.7 – Tracé de l'indice  $SPE$  après reconstruction des variables  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_3$

Comme dans le cas de défauts simples, cette méthode de localisation basée sur la reconstruction donne aussi de bons résultats sur les données affectées par des défauts multiples.

Dans la section suivante, en prenant l'exemple d'un système non linéaire, nous appliquons l'ACP sur ce système pour mettre en évidence ses limites.

## 1.6 Application de l'ACP sur un système non linéaire

Nous considérons un système non linéaire représenté par (1.89) et décrit par six variables.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_1 &= \mathbf{u}_1 + \varepsilon_1 \\
 \mathbf{y}_2 &= \mathbf{u}_1 + \varepsilon_2 \\
 \mathbf{y}_3 &= \mathbf{u}_2 + \varepsilon_3 \\
 \mathbf{y}_4 &= \mathbf{u}_2 + \varepsilon_4 \\
 \mathbf{y}_5 &= \mathbf{u}_1 * \mathbf{u}_2 + \varepsilon_5 \\
 \mathbf{y}_6 &= \mathbf{u}_1^2 + \varepsilon_6
 \end{aligned} \tag{1.89}$$

Les variables  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  sont générées aléatoirement dans l'intervalle  $[-2 \ 2]$ . Les bruits de mesure  $\varepsilon_i$  sont des bruits aléatoires uniformément répartis entre  $-0.1$  et  $0.1$ . Sur la figure 1.1, les mesures des variables  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5$  et  $\mathbf{y}_6$  sont illustrées. En conditions normales de fonctionnement, 200 observations sont utilisées pour construire le modèle ACP. Le nombre de composantes principales retenues pour le modèle ACP est  $\ell = 4$  déterminé à partir du critère du pourcentage cumulé de la variance totale (1.19).

Six défauts ont été simulés et 200 observations sont générées pour simuler chaque défaut. Les six défauts appliqués séparément sur les variables  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5$  et  $\mathbf{y}_6$  sont présentés dans le tableau 1.4.

TABLE 1.4 – Valeurs des amplitudes, variables et observations affectées par les défauts pour le système non linéaire

Variabes en défaut	Intervalles des observations affectées par les défauts	Amplitudes des défauts
$y_1$	10 - 20	0.50
$y_2$	40 - 50	0.46
$y_3$	70 - 80	-0.40
$y_4$	100 - 110	0.60
$y_5$	130 - 140	3
$y_6$	160 - 170	2

La figure 1.8 illustre les indices de détection de défaut. Malgré les amplitudes élevées des défauts sur les variables  $y_5$  et  $y_6$ , l'indice  $SPE$  et l'indice  $\phi$  qui ont permis de détecter les défauts sur l'exemple (1.88), ne fonctionnent pas sur cet exemple (1.89). Tous les défauts ne sont pas détectés. En réalité, l'ACP ne fonctionne que sur des systèmes linéaires. Les méthodes de localisation et d'estimation de défaut ne peuvent pas s'appliquer sur ce système étant donné que la phase de détection de défaut ne fonctionne pas correctement.

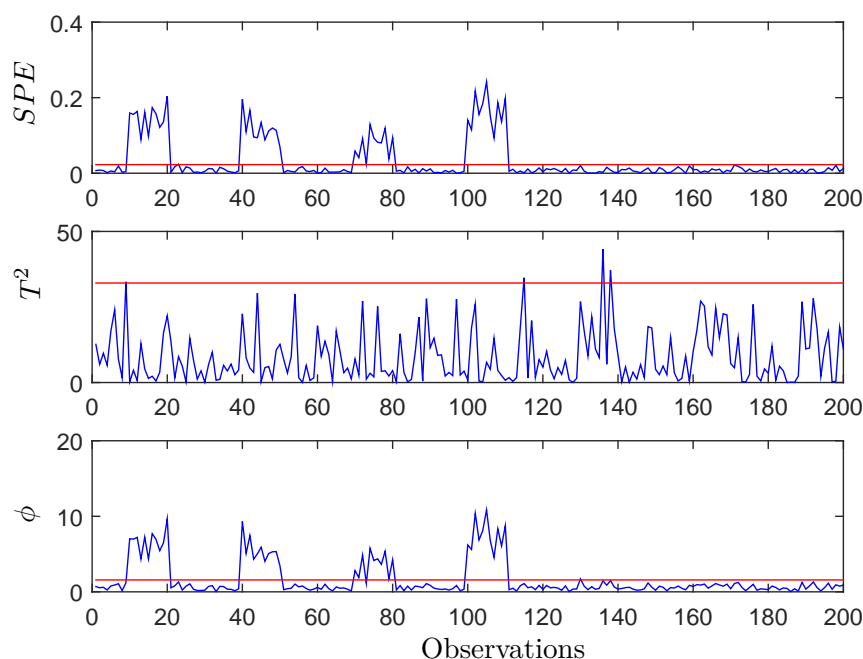


FIGURE 1.8 – Détection de défaut sur un système non linéaire

## 1.7 Conclusion

Ce chapitre a permis de poser les bases de l'analyse en composantes principales. Après avoir décrit le principe de l'ACP, la construction du modèle ACP par la détermination des valeurs propres, des vecteurs propres de la matrice de covariance des données et du nombre de composantes principales, trois indices de détection de défaut ont été présentés. Ces indices détectent

les défauts sur les différentes observations par la comparaison des valeurs des indices de détection et des seuils prédéfinis. Plusieurs méthodes de détermination du nombre de composantes principales ont été indiquées. Après l'étape de la détection de défauts, la phase de localisation et d'estimation des amplitudes des défauts a été présentée. Sur un exemple de système linéaire, ces méthodes ont été mises en œuvre. Les trois méthodes de localisation (méthode de calcul de contributions, méthode de contributions basées sur la reconstruction et méthode de localisation par reconstruction) simulées sur cet exemple conduisent effectivement à la localisation des variables affectées par les défauts. Dans la méthode de contributions basées sur la reconstruction, après reconstruction de chaque variable, on évalue sa contribution à un indice de détection. La variable ayant la plus grande contribution à l'indice de détection est susceptible d'être en défaut. Dans la méthode de localisation par reconstruction, après reconstruction de chaque variable, on évalue l'indice de détection. La variable pour laquelle l'indice de détection est inférieur au seuil est susceptible d'être en défaut. La méthode de contributions basées sur la reconstruction et la méthode de localisation par reconstruction permettent en plus de déterminer l'estimation de l'amplitude des défauts détectés. Les estimations des amplitudes des défauts trouvées sont quasiment égales aux amplitudes des défauts ajoutés. Ce qui fait conclure à une efficacité de ces méthodes. Les approches ont été testées dans le cas de défauts affectant une variable à la fois et dans le cadre des défauts affectant simultanément plusieurs variables en même temps.

Cependant, l'ACP présente certains inconvénients lorsqu'il s'agit de traiter des processus non linéaires. L'application de l'ACP sur un exemple de système non linéaire a montré que cette méthode ne fonctionne que sur des systèmes linéaires. Dans le chapitre 2, nous présentons une version non linéaire de l'ACP. Comme dans le chapitre 1, les indices de détection sont également présentés dans le chapitre 2 ainsi que des éléments sur la détectabilité des défauts sur des systèmes non linéaires.

Avant de passer au chapitre 2, il est important de souligner que dans la littérature, certains auteurs appliquent directement l'ACP sur des systèmes ayant des comportements non linéaires. Puisque l'ACP est initialement conçu pour le traitement des systèmes linéaires, ces applications effectuées sur les systèmes non linéaires ont des limites. C'est le cas de l'exemple simulé (1.89).

Dans la littérature, il existe aussi des situations où des méthodes non linéaires statiques ont été mises en œuvre sur des systèmes non linéaires dynamiques sans que les auteurs n'expliquent ou ne donnent des éléments sur les applications [EYND09], [YM01], [ZLH12], [LYC<sup>+</sup>04], [AQ10], [ABGB12], [LC14], [WGZ<sup>+</sup>17], [JHZ16]. Pour la suite de ce travail, toutes les simulations sont faites sur des systèmes non linéaires statiques.



# Chapitre 2

## Détection de défauts par ACP à noyau

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>33</b>
<b>2.2</b>	<b>Position du problème</b>	<b>34</b>
2.2.1	L'ACP à noyau	34
2.2.2	Analyse d'une nouvelle observation	37
2.2.3	Détection de défauts basée sur un modèle KPCA	39
<b>2.3</b>	<b>Évaluation de l'indice de détection <math>SPE</math> en fonction du défaut</b>	<b>49</b>
2.3.1	Premier cas	50
2.3.2	Deuxième cas	51
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>

---

### 2.1 Introduction

L'ACP est utilisée pour le diagnostic des systèmes pour lesquels il existe une relation linéaire entre les données. Son algorithme s'exprime en terme de produit scalaire. Pour un système non linéaire, l'ACP a des limites et ne fonctionne pas correctement. De nombreuses études ont été faites pour résoudre ce problème concernant les systèmes non linéaires en utilisant les méthodes à noyau. Ainsi une version non linéaire de l'ACP a été développée pour surmonter ces difficultés, à savoir l'analyse en composantes principales à noyau [SSM98], [WSS04]. Le principe de l'ACP à noyau est de projeter par une fonction non linéaire les données d'un espace d'origine vers un espace de dimension plus élevée (appelé espace des caractéristiques) dans lequel il y a une relation linéaire entre les données où l'ACP linéaire est appliquée. Cette transformation n'est pas explicite due à l'astuce du noyau qui permet de remplacer un produit scalaire par un noyau.

Des études ont été effectuées sur la détection de défauts qui peut se faire dans l'espace des caractéristiques avec les indices de détection de défauts fonctionnant sur les mêmes principes que ceux utilisés dans le cas de l'ACP (chapitre 1) [LYC<sup>+</sup>04], [SC16] [Sha11], [KMMR14], [PZL14], [CML08], [JMM98]. Considérant une observation  $\mathbf{x}$ , la comparaison des indices de détection pour cette observation avec les différents seuils permet d'indiquer si elle est affectée par un défaut. Si une observation est affectée par un défaut mais que le défaut n'est pas suffisamment élevé, l'évaluation de l'indice de détection de défaut pour une telle observation est inférieure au seuil. C'est une situation de non détection de défaut. Pour détecter un défaut sur une observation,

elle doit se situer en dehors des frontières de décision qui sont délimitées par le seuil. Dans ce cas la valeur de l'indice de détection est supérieure au seuil.

Dans la première partie de ce chapitre, nous exposons l'ACP à noyau. Les principes et les bases de la méthode sont montrés. Puis en deuxième partie, nous présentons des indicateurs pour la détection de défauts. Un nouvel indicateur est proposé et testé sur quelques exemples. En troisième partie, sur l'exemple d'un système non linéaire, l'indice de détection  $SPE$  est analysé en fonction de quelques observations pour étudier la détectabilité et la non linéarité du système.

## 2.2 Position du problème

L'ACP ne fonctionne efficacement que sur un ensemble d'observations dont les variations sont linéaires. L'Analyse en Composantes Principales à noyau (*Kernel Principal Component Analysis : KPCA*) est une méthode d'apprentissage qui consiste à projeter les données d'un espace d'origine (ou espace d'entrée) sur un espace de plus grande dimension que nous appelons espace des caractéristiques par l'intermédiaire d'une fonction non linéaire et ensuite appliquer l'ACP linéaire dans l'espace des caractéristiques.

### 2.2.1 L'ACP à noyau

Soit  $\mathbf{X}$  une matrice de données qui est composée de  $N$  observations de  $m$  variables  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Ces données sont collectées au cours du fonctionnement normal d'un système :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^\top \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times m} \quad (2.1)$$

Ces données sont projetées de l'espace  $\mathcal{X}$  dans l'espace des caractéristiques  $\mathcal{H}$  de dimension  $h \gg m$  par la fonction non linéaire  $\varphi(\cdot)$ . Il faut noter que  $h$  peut éventuellement être infini. La fonction  $\varphi(\cdot)$  est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{H} \\ \mathbf{x}_i &\mapsto \varphi(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dans l'espace des caractéristiques, la matrice  $\Phi$  est définie comme :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi^\top(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \varphi^\top(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}^h, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{N \times h} \quad (2.3)$$

Dans la suite, nous assumons que la matrice  $\Phi$  est centrée. Le calcul de la matrice  $\Phi$  centrée se trouve dans l'annexe A.

L'algorithme de l'ACP étant basé sur des produits scalaires, nous considérons l'espace  $\mathcal{X}$  muni d'un produit scalaire.

**Utilisation du noyau :** L'astuce du noyau (*kernel trick*) s'utilise dans un algorithme qui ne dépend que du produit scalaire entre deux vecteurs. Étant donné que l'algorithme de l'ACP consiste en la projection des données sur un espace, alors il peut être écrit sous la forme d'un

produit scalaire. L'idée de l'astuce du noyau est donc de remplacer ce calcul par une fonction noyau. Soit un noyau défini par :

$$\begin{aligned} \kappa &: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &\mapsto \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Nous utilisons des noyaux définis positifs c'est-à-dire :

$$\sum_i^N \sum_j^N \gamma_i \gamma_j \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \geq 0 \quad (2.5)$$

$\forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathcal{X}, \forall N \in \mathbb{N}$  et  $\forall \gamma_1, \dots, \gamma_N \in \mathbb{R}$ .

Dans l'espace des caractéristiques, après transformation des données par la fonction  $\varphi(\cdot)$ , le produit scalaire entre deux vecteurs s'exprime par une fonction noyau  $\kappa(\cdot, \cdot)$  définie par :

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \varphi^\top(\mathbf{x}_i)\varphi(\mathbf{x}_j) \quad (2.6)$$

Comme dans le cas de l'ACP (chapitre 1), pour élaborer le modèle KPCA il faut chercher les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de covariance dans l'espace des caractéristiques. L'évaluation de la matrice de covariance dans  $\mathcal{H}$  est :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \varphi(\mathbf{x}_i)\varphi^\top(\mathbf{x}_i), \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{h \times h} \\ &= \frac{1}{N-1} \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour trouver les valeurs propres et vecteurs propres de  $\mathbf{S}$ , il faut résoudre l'équation :

$$\mathbf{S} \boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i, \quad \boldsymbol{\nu}_i \in \mathbb{R}^h \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{N-1} \mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.9)$$

$\boldsymbol{\nu}_i$  et  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sont respectivement les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice de covariance  $\mathbf{S}$ .

Il est important de noter que la fonction  $\varphi(\cdot)$  n'est pas explicitement définie mais il est possible d'évaluer la matrice de Gram  $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\top$  en utilisant la fonction noyau  $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \varphi^\top(\mathbf{x}_i)\varphi(\mathbf{x}_j)$ . Chaque membre de (2.9) est multiplié par  $\mathbf{\Phi}$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{1}{N-1} \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\nu}_i = \lambda_i \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\nu}_i \quad (2.10)$$

Si  $\mathbf{K}$  est la matrice de Gram avec pour éléments  $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  alors  $\mathbf{K}$  peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^\top &= \begin{bmatrix} \varphi^\top(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_1) & \cdots & \varphi^\top(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi^\top(\mathbf{x}_N)\varphi(\mathbf{x}_1) & \cdots & \varphi^\top(\mathbf{x}_N)\varphi(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \cdots & \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous posons :

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \wp \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i \quad (2.12)$$

avec :  $\wp$  un coefficient de proportionnalité.

L'équation (2.10) devient :

$$\frac{1}{N-1} \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha}_i = \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i, \quad \boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^N \quad (2.13)$$

$\boldsymbol{\alpha}_i$  et  $\lambda_i$  sont respectivement le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre et la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre de la matrice  $\frac{1}{N-1} \mathbf{K}$ .

Nous recherchons  $\wp$  pour que les vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}_i$  et  $\boldsymbol{\nu}_i$  soient de norme unité ( $\boldsymbol{\alpha}_i^\top \boldsymbol{\alpha}_i = 1$  et  $\boldsymbol{\nu}_i^\top \boldsymbol{\nu}_i = 1$ ). Partant de (2.12), le calcul de  $\boldsymbol{\alpha}_i^\top \boldsymbol{\alpha}_i$  est :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i^\top \boldsymbol{\alpha}_i &= (\wp \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i)^\top \wp \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i \\ &= \wp^2 \boldsymbol{\nu}_i^\top \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

A partir de l'équation (2.9),  $\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i = (N-1) \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i \quad (2.15)$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i$  (2.15) est remplacé par son expression dans (2.14) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_i^\top \boldsymbol{\alpha}_i &= \wp^2 \boldsymbol{\nu}_i^\top (N-1) \lambda_i \boldsymbol{\nu}_i \\ &= (N-1) \lambda_i \wp^2 \boldsymbol{\nu}_i^\top \boldsymbol{\nu}_i \\ &= (N-1) \lambda_i \wp^2 \quad \text{puisque } \boldsymbol{\nu}_i^\top \boldsymbol{\nu}_i = 1 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\Rightarrow$

$$\wp = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i (N-1)}} \quad (2.17)$$

En remplaçant  $\wp$  dans (2.12), cela permet d'avoir le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre de la matrice  $\frac{1}{N-1} \mathbf{K}$  en (2.18) et le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre de la matrice  $\mathbf{S}$  en (2.19). Ainsi à travers (2.18) et (2.19) le lien entre les vecteurs propres des matrices  $\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Phi}^\top$  et  $\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi}$  est établi.

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \frac{1}{\sqrt{(N-1)}} \lambda_i^{-1/2} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\nu}_i \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\nu}_i = \frac{1}{\sqrt{(N-1)}} \lambda_i^{-1/2} \boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\alpha}_i \quad (2.19)$$

La matrice de covariance  $\mathbf{S}$  et  $\frac{1}{N-1} \mathbf{K}$  ont les mêmes valeurs propres non nulles. Soit  $q = \min(N, h)$ . Nous considérons  $\ell$  le nombre de Composantes Principales (CPs) retenues. La matrice diagonale des  $\ell$  plus grandes valeurs propres non nulles est :  $\widehat{\boldsymbol{\Lambda}} = \text{diag}\{\lambda_1 \cdots \lambda_\ell\} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$  et la matrice diagonale des  $(q - \ell)$  valeurs propres est :  $\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = \text{diag}\{\lambda_{\ell+1} \cdots \lambda_q\} \in \mathbb{R}^{(q-\ell) \times (q-\ell)}$ .

Soit  $\boldsymbol{\Lambda}$  la matrice diagonale de toutes les valeurs propres.  $\boldsymbol{\Lambda}$  peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Lambda}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{q \times q} \quad (2.20)$$

Dans l'espace des caractéristiques, la matrice des vecteurs propres  $\mathbf{V}$  de  $\mathbf{S}$  s'écrit :

$$\mathbf{V} = [\boldsymbol{\nu}_1 \cdots \boldsymbol{\nu}_\ell, \boldsymbol{\nu}_{\ell+1} \cdots \boldsymbol{\nu}_q], \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{h \times q} \quad (2.21)$$

La première partie de la matrice  $\mathbf{V}$  (2.22) correspond aux  $\ell$  plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{S}$  :

$$\hat{\mathbf{V}} = [\boldsymbol{\nu}_1 \cdots \boldsymbol{\nu}_\ell], \quad \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{h \times \ell} \quad (2.22)$$

et la seconde partie de la matrice  $\mathbf{V}$  (2.23) correspond aux  $(q - \ell)$  valeurs propres de  $\mathbf{S}$  :

$$\tilde{\mathbf{V}} = [\boldsymbol{\nu}_{\ell+1} \cdots \boldsymbol{\nu}_q], \quad \tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{h \times (q-\ell)} \quad (2.23)$$

$\hat{\mathbf{V}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  représentent respectivement les vecteurs propres de  $\mathbf{S}$  dans l'espace principal et dans l'espace résiduel. Les espaces principal et résiduel sont complémentaires. L'espace principal contient les axes principaux qui maximisent la variance entre les données.

La détermination des valeurs propres (2.20), des vecteurs propres (2.21) et le choix du nombre de CPs  $\ell$  s'effectuent sur la base de données  $\mathbf{X}$  réputées saines. L'élaboration du modèle KPCA des données est faite sur la base de ces éléments. Cette étape d'élaboration du modèle KPCA est désignée sous le nom de phase d'apprentissage. Au cours de cette phase, lorsque les données sont projetées dans l'espace principal, une erreur est commise. Puisque la dimension de l'espace principal  $\ell$  est inférieure à la dimension de l'espace des caractéristiques  $q$ , cette erreur est due à une perte d'information suite à cette réduction de dimension. Comparé à l'ACP, le KPCA utilise aussi des indicateurs pour évaluer cette erreur [ZLH12], [GYS09], [HZL<sup>+</sup>14], [SRL09], [ŽZP11], [DZW17], [Hof07].

Concernant la détermination du nombre de composantes principales, la variance totale à conserver doit être fixée pour le choix du nombre de composantes principales qui sont classées dans l'ordre décroissant des variances. Les mesures de ces variances correspondent aux valeurs propres non nulles de la matrice de covariance  $\mathbf{S}$  (2.7). Ainsi le pourcentage cumulé de la variance totale expliquée par les  $\ell$  plus grandes composantes principales (calcul différent de (1.19)) est :

$$Var(\ell) = 100 \left( \frac{\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i}{\sum_{i=1}^q \lambda_i} \right) \quad (2.24)$$

Après la construction du modèle KPCA, toute observation  $\mathbf{x}$  sera projetée sur les espaces principal et résiduel. Les indicateurs seront évalués pour chaque observation [CHC10], [ZZL17], [ZM11], [WCS16], [KLW11], [CLW08].

### 2.2.2 Analyse d'une nouvelle observation

Soit une nouvelle observation  $\mathbf{x}$ . Sa projection sur les espaces principal et résiduel conduit à :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{V}}^\top \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^\ell \\ \tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{V}}^\top \varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{q-\ell} \end{cases} \quad (2.25)$$

$\hat{\mathbf{t}}$  représente le vecteur des  $\ell$  composantes principales qui correspondent aux  $\ell$  plus grandes valeurs propres. Ces  $\ell$  composantes principales définissent les fortes variances existant entre les

données.  $\tilde{\mathbf{t}}$  représente quant à elle le vecteur des  $(q - \ell)$  composantes qui correspondent aux dernières valeurs propres.

En remplaçant  $\widehat{\mathbf{V}}$  avec les équations (2.22) et (2.19) dans l'expression du vecteur des composantes principales  $\widehat{\mathbf{t}}$ , il s'écrit comme :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{t}} = \widehat{\mathbf{V}}^\top \varphi(\mathbf{x}) &= \left[ \frac{1}{\sqrt{N-1}} \lambda_1^{-1/2} \Phi^\top \alpha_1 \cdots \frac{1}{\sqrt{N-1}} \lambda_\ell^{-1/2} \Phi^\top \alpha_\ell \right]^\top \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{N-1}} \Phi^\top \widehat{\mathbf{P}} \widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2} \right]^\top \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2} \widehat{\mathbf{P}}^\top \Phi \varphi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

La matrice  $\left(\widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}\right)^\top = \widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2}$  parce que  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$  est une matrice diagonale. La matrice  $\widehat{\mathbf{P}}$  représente la matrice des  $\ell$  vecteurs propres de  $\frac{1}{N-1} \mathbf{K}$  correspondant aux  $\ell$  plus grandes valeurs propres de  $\frac{1}{N-1} \mathbf{K}$  :

$$\widehat{\mathbf{P}} = [\alpha_1 \cdots \alpha_\ell], \quad \widehat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{N \times \ell} \quad (2.26)$$

Et le vecteur  $\Phi \varphi(\mathbf{x})$  est défini par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \Phi \varphi(\mathbf{x}) &= \left[ \varphi^\top(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}) \quad \varphi^\top(\mathbf{x}_2) \varphi(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi^\top(\mathbf{x}_N) \varphi(\mathbf{x}) \right]^\top \\ &= \left[ \kappa(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \quad \kappa(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \quad \cdots \quad \kappa(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}) \right]^\top, \quad \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N\end{aligned} \quad (2.27)$$

Le vecteur  $\widehat{\mathbf{t}}$  s'écrit alors :

$$\widehat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \widehat{\mathbf{\Lambda}}^{-1/2} \widehat{\mathbf{P}}^\top \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

Plusieurs types de noyaux existent dans la littérature [MMR<sup>+</sup>01], [ZQ07], [HKY07],[NG10]. Dans le choix du noyau, le réglage de ses paramètres influence grandement les résultats.

Nous choisissons d'utiliser un noyau Gaussien, l'un des noyaux les plus utilisés, pour tous les calculs que nous allons faire dans ce travail. Ce noyau (basé sur la distance) peut évaluer la proximité entre les observations. Si deux observations sont très proches, le calcul du noyau tend vers 1 tandis que pour deux observations assez éloignées, le calcul du noyau tend vers 0. Pour deux observations  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$ , le calcul du noyau Gaussien est :

$$\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^\top (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{2\sigma^2} \right] \quad (2.29)$$

où  $\sigma$  est la largeur de bande du noyau. L'espace des caractéristiques  $\mathcal{H}$  associé à la fonction noyau Gaussien est de dimension infinie.

Avec le noyau Gaussien, nous avons :  $\kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \kappa(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)$ . L'expression (2.27) peut s'écrire alors :

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = \left[ \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \quad \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N) \right]^\top \quad (2.30)$$

La notation de  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$  (2.30) sera utilisée dans le reste du document.

Après l'élaboration du modèle KPCA et la projection de la nouvelle observation  $\mathbf{x}$  sur les espaces principal et résiduel, les indices de détection de défauts vont être calculés. Ces indices seront ensuite comparés aux seuils pour savoir si éventuellement l'observation  $\mathbf{x}$  est affectée par un défaut.

### 2.2.3 Détection de défauts basée sur un modèle KPCA

Comme pour l'ACP linéaire (chapitre 1), trois indices (ou indicateurs) sont généralement utilisés pour la détection des défauts en utilisant le KPCA : l'erreur quadratique d'estimation  $SPE$ , la statistique de Hotelling  $T^2$  et l'indice combiné  $\phi$ . Cette phase de détection des défauts est la première étape dans le processus de diagnostic.

#### 2.2.3.1 Indice $SPE$ (Square Prediction Error)

L'indice  $SPE$  mesure l'erreur commise en projetant l'observation  $\mathbf{x}$  sur l'espace principal :

$$\begin{aligned} SPE(\mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{t}}^\top \tilde{\mathbf{t}} \\ &= \varphi^\top(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^\top \varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

or la matrice  $\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^\top$  est égale à :

$$\tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^\top = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^\top \quad (2.31)$$

car nous avons la relation suivante :

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^\top = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}} & \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}^\top \\ \tilde{\mathbf{V}}^\top \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^\top + \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}^\top = \mathbf{I} \quad (2.32)$$

Donc le  $SPE$  s'écrit :

$$\begin{aligned} SPE(\mathbf{x}) &= \varphi^\top(\mathbf{x}) \left[ \mathbf{I} - \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^\top \right] \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \varphi^\top(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) - \varphi^\top(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^\top \varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

A partir de  $\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \Phi^\top \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1/2}$ , le calcul de  $\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^\top$  donne :

$$\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^\top = \frac{1}{N-1} \Phi^\top \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^\top \Phi \quad (2.33)$$

Alors le  $SPE$  se définit par :

$$\begin{aligned} SPE(\mathbf{x}) &= \varphi^\top(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) - \frac{1}{N-1} \varphi^\top(\mathbf{x}) \Phi^\top \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^\top \Phi \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \kappa^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \kappa(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N-1} \hat{\mathbf{P}} \hat{\Lambda}^{-1} \hat{\mathbf{P}}^\top \quad (2.35)$$

Un défaut est détecté sur l'observation  $\mathbf{x}$  si  $SPE(\mathbf{x}) > \delta^2$ . Le seuil  $\delta^2$  peut être fixé de façon expérimentale ou par un calcul théorique. Le calcul du seuil expérimental se fait en choisissant un pourcentage de l'indice  $SPE$  appliqué sur les données sans défaut. Le calcul du seuil théorique peut être trouvé dans les travaux de [DQEM96] et [Qin12].

### 2.2.3.2 Indice de Hotelling $T^2$

L'indice  $T^2$  se calcule dans l'espace principal et il peut être défini comme la mesure des variations normales du processus.

$$\begin{aligned}
 T^2(\mathbf{x}) &= \left\| \widehat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{t}} \right\|^2 \\
 &= \widehat{\mathbf{t}}^\top \widehat{\Lambda}^{-1} \widehat{\mathbf{t}} \\
 &= \left[ \frac{1}{\sqrt{N-1}} \widehat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{P}}^\top \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right]^\top \widehat{\Lambda}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{N-1}} \widehat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{P}}^\top \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{1}{N-1} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{P}} \widehat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\Lambda}^{-1} \widehat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \widehat{\mathbf{P}}^\top \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \\
 &= \frac{1}{N-1} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{P}} \widehat{\Lambda}^{-2} \widehat{\mathbf{P}}^\top \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \\
 &= \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

avec :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{N-1} \widehat{\mathbf{P}} \widehat{\Lambda}^{-2} \widehat{\mathbf{P}}^\top \tag{2.37}$$

Il y a un fonctionnement anormal sur l'observation  $\mathbf{x}$  si :  $T^2(\mathbf{x}) > \tau^2$ . Dans ce cas aussi, le seuil est soit déterminé expérimentalement ou théoriquement. Le calcul du seuil expérimental se fait en choisissant un pourcentage de l'indice  $T^2$  appliqué sur les données sans défaut. [Qin03] donnent quelques éléments pour évaluer le seuil théorique.

### 2.2.3.3 Indice combiné $\phi$

Il est possible d'utiliser simultanément les espaces principal et résiduel pour faire la détection des défauts. [YQ01] ont proposé un indice  $\phi$  effectuant la combinaison des indices  $SPE$  et  $T^2$ . Cet indice se définit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{x}) &= \frac{SPE(\mathbf{x})}{\delta^2} + \frac{T^2(\mathbf{x})}{\tau^2} \\
 &= \frac{\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\delta^2} + \frac{\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\tau^2} \\
 &= \frac{\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\delta^2} + \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

avec

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{D}}{\tau^2} - \frac{\mathbf{C}}{\delta^2} \tag{2.39}$$

$\delta^2$  et  $\tau^2$  sont les seuils du SPE et du  $T^2$  respectivement. En cas de fonctionnement anormal sur l'observation  $\mathbf{x}$  :  $\phi(\mathbf{x}) > \zeta^2$ .

[YQ01] donnent une méthode de calcul du seuil  $\zeta^2$  en se référant à [Box54].

En (1.27), (1.30) et (1.34) on trouve le calcul des seuils théoriques pour les indices  $SPE$ ,  $T^2$  et  $\phi$  respectivement. Ces seuils ne fonctionnent pas en réalité dans le cas non linéaire de l'ACP. La distribution du  $\chi^2$  n'est plus valable dans le cas non linéaire avec l'utilisation de l'ACP à noyau.



### 2.2.3.4 Nouvel indice $NI$

Dans cette section, nous proposons un nouvel indice évalué dans l'espace principal. A partir de l'équation (2.25), nous calculons l'espérance de  $\hat{\mathbf{t}}$  et ensuite sa variance.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\mathbf{t}}) &= \mathbb{E}\left(\widehat{\mathbf{V}}^\top \varphi(\mathbf{x})\right) \\ &= \widehat{\mathbf{V}}^\top \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))\end{aligned}\quad (2.40)$$

La variance de  $\hat{\mathbf{t}}$  s'écrit comme suit :

$$\text{Var}(\hat{\mathbf{t}}) = \mathbb{E}\left[\left(\hat{\mathbf{t}} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{t}})\right)\left(\hat{\mathbf{t}} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{t}})\right)^\top\right] \quad (2.41)$$

L'évaluation de l'expression  $\hat{\mathbf{t}} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{t}})$  est :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{t}}) &= \widehat{\mathbf{V}}^\top \varphi(\mathbf{x}) - \widehat{\mathbf{V}}^\top \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x})) \\ &= \widehat{\mathbf{V}}^\top [\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))]\end{aligned}\quad (2.42)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\mathbf{t}}) &= \mathbb{E}\left[\left(\hat{\mathbf{t}} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{t}})\right)\left(\hat{\mathbf{t}} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{t}})\right)^\top\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\widehat{\mathbf{V}}^\top [\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))][\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))]^\top \widehat{\mathbf{V}}\right] \\ &= \widehat{\mathbf{V}}^\top \mathbb{E}\left[[\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))][\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))]^\top\right] \widehat{\mathbf{V}}\end{aligned}\quad (2.43)$$

Par définition  $\mathbb{E}\left[[\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))][\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))]^\top\right]$  représente une matrice de covariance. Nous posons :

$$\mathbb{E}\left[[\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))][\varphi(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\varphi(\mathbf{x}))]^\top\right] = \mathbf{S} \quad (2.44)$$

L'expression (2.43) devient alors :

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\mathbf{t}}) &= \widehat{\mathbf{V}}^\top \mathbf{S} \widehat{\mathbf{V}} \\ &= \widehat{\mathbf{\Lambda}}\end{aligned}\quad (2.45)$$

L'expression du nouvel indice pour une observation  $\mathbf{x}$  se définit comme :

$$NI(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i - \hat{\mathbf{t}}^\top \hat{\mathbf{t}} \quad (2.46)$$

Pour déterminer l'efficacité de cet indice, nous allons le comparer avec l'indice  $SPE$  sur quelques exemples de simulation.

**Simulation 1 :** Nous considérons un système ayant la forme d'une banane, constitué de deux variables et décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1 &= \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{u}^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{aligned}\quad (2.47)$$

où les bruits de mesure  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  sont des bruits aléatoires uniformément répartis entre  $-0.1$  et  $+0.1$  et  $\mathbf{u}$  est généré linéairement (avec la fonction `linspace` de Matlab) dans l'intervalle  $[-2 \ 1]$ . Les

observations sont au nombre de  $N = 125$ . Nous avons choisi un noyau Gaussien (2.29) et la largeur de bande du noyau est  $\sigma = 0.3$ .

Le nombre de composantes principales retenues est  $\ell = 18$  et il décrit 95.50% de la variance totale des données. Le seuil défini à partir du  $SPE$  vaut  $\delta^2 = 0.24$ . Le seuil défini pour le nouvel indice  $NI$  vaut  $\zeta^2 = 0.20$ . Quelques observations affectées par des défauts sont indiquées sur la figure 2.1 avec les seuils du  $SPE$  et du  $NI$ .

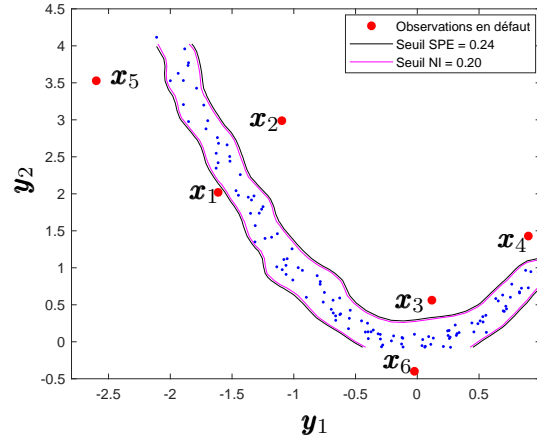


FIGURE 2.1 – Simulation sur le cas de la banane avec quelques observations en défaut

Pour ces observations (figure 2.1), nous évaluons le  $SPE$  et le  $NI$  (2.46). Les résultats sont présentés dans le tableau 2.1.

TABLE 2.1 – Simulations pour les observations en défaut pour le cas de la banane

Seuil $SPE : \delta^2$	Indice $SPE$	Erreur relative entre le $SPE$ et le seuil $\delta^2$ (en %) : $\frac{ SPE(\mathbf{x}) - \delta^2 }{SPE(\mathbf{x})}$	Seuil $NI : \zeta^2$	Indice $NI$	Erreur relative entre le $NI$ et le seuil $\zeta^2$ (en %) : $\frac{ NI(\mathbf{x}) - \zeta^2 }{NI(\mathbf{x})}$
0.24	$SPE(\mathbf{x}_1) = 0.35$	31.4	0.20	$NI(\mathbf{x}_1) = 0.32$	37.5
	$SPE(\mathbf{x}_2) = 0.97$	75.2		$NI(\mathbf{x}_2) = 0.93$	78.4
	$SPE(\mathbf{x}_3) = 0.75$	68.0		$NI(\mathbf{x}_3) = 0.71$	71.8
	$SPE(\mathbf{x}_4) = 0.89$	73.0		$NI(\mathbf{x}_4) = 0.85$	76.4
	$SPE(\mathbf{x}_5) = 0.99$	75.5		$NI(\mathbf{x}_5) = 0.95$	78.9
	$SPE(\mathbf{x}_6) = 0.64$	62.5		$NI(\mathbf{x}_6) = 0.60$	66.6

Dans les deux cas ( $SPE$  et  $NI$ ), les défauts sont clairement détectés puisque les valeurs du  $SPE$  et  $NI$  sont supérieures à leurs seuils respectifs. Pour toutes les observations en défaut ( $\mathbf{x}_1$  à  $\mathbf{x}_6$ ), les erreurs relatives entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  sont supérieures aux erreurs relatives entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$ .

Le constat que nous pouvons faire sur ces résultats est que plus le défaut est important (plus

éloigné de la base de données) plus l'écart donné par le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est grand. Par conséquent sur cette première expérience, le  $NI$  fonctionne mieux que le  $SPE$ .

Pour le cas des observations sans défaut, il existe des cas où le  $NI$  est moins efficace que le  $SPE$ . La figure 2.2 illustre l'exemple de trois observations sans défaut.

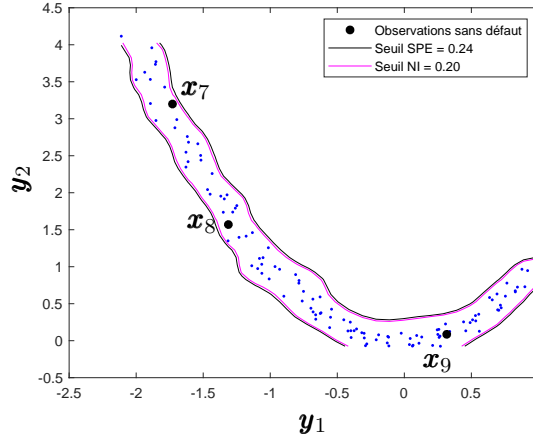


FIGURE 2.2 – Simulation sur le cas de la banane avec quelques observations sans défaut

Les indices  $SPE$  et  $NI$  sont évalués pour les trois observations  $\mathbf{x}_7$ ,  $\mathbf{x}_8$  et  $\mathbf{x}_9$  (figure 2.2). Les résultats sont mentionnés dans le tableau 2.2. Nous constatons que les erreurs relatives entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  sont supérieures aux erreurs relatives entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  pour les observations  $\mathbf{x}_7$  et  $\mathbf{x}_8$ . Par contre pour l'observation  $\mathbf{x}_9$ , l'erreur relative entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est inférieure à l'erreur relative entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$ .

TABLE 2.2 – Simulations pour les observations sans défaut pour le cas de la banane

Seuil $SPE : \delta^2$	Indice $SPE$	Erreur relative entre le $SPE$ et le seuil $\delta^2$ (en %) : $\frac{ SPE(\mathbf{x}) - \delta^2 }{SPE(\mathbf{x})}$	Seuil $NI : \zeta^2$	Indice $NI$	Erreur relative entre le $NI$ et le seuil $\zeta^2$ (en %) : $\frac{ NI(\mathbf{x}) - \zeta^2 }{NI(\mathbf{x})}$
0.24	$SPE(\mathbf{x}_7) = 0.11$	118.1	0.20	$NI(\mathbf{x}_7) = 0.07$	185.7
	$SPE(\mathbf{x}_8) = 0.07$	242.8		$NI(\mathbf{x}_8) = 0.03$	566.6
	$SPE(\mathbf{x}_9) = 0.01$	2300		$NI(\mathbf{x}_9) = 0.02$	900

Pour mettre en évidence les cas d'observations où l'erreur relative entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est inférieure à l'erreur relative entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  (comme le cas de l'observation  $\mathbf{x}_9$ ), nous allons nous intéresser aux observations voisines d'une observation sans défaut (figure 2.3). Nous fixons une distance limite autour de l'observation sans défaut au delà de laquelle le  $NI$  est plus performant que le  $SPE$ . Si la distance calculée entre l'observation sans défaut et l'observation la plus proche est inférieure à cette distance limite, le  $NI$  est moins efficace que le  $SPE$ .

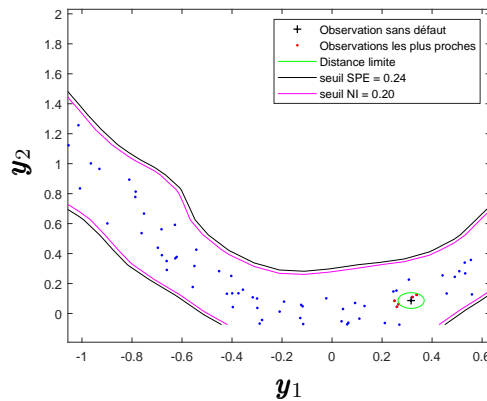


FIGURE 2.3 – Recherche de la distance limite pour le cas de la banane

Nous choisissons les cinq observations les plus proches de l'observation sans défaut. Ce choix est fait pour illustrer cet exemple. La distance limite est fixée en faisant une moyenne des distances des cinq observations les plus proches de l'observation sans défaut (plusieurs observations sans défaut ont été considérées dans la recherche de cette distance limite). Avec cet exemple de la banane, la distance limite est fixée à 0.05 (figure 2.3). Pour toutes les observations sans défaut dont les distances calculées avec la plus proche observation sont supérieures à 0.05, le  $NI$  est plus efficace que le  $SPE$ . Les observations qui ne vérifient pas cette hypothèse sont celles situées sur la frontière des données.

## Simulation 2

Nous constituons un ensemble de données qui forme un anneau décrit par un cercle. Ce cercle a un rayon de 0.9. Des bruits aléatoires issus d'une distribution uniforme (entre  $-0.1$  et  $+0.1$ ) sont ajoutés. Le nombre total d'observations est de  $N = 500$ .

Dans le cas de l'anneau, la largeur de bande du noyau Gaussien (2.29)  $\sigma$  vaut 0.1. Le nombre de composantes principales retenues est  $\ell = 75$  et il décrit 95.12% de la variance totale des données. Le seuil du  $SPE$  est  $\delta^2 = 0.20$  et le seuil défini pour le nouvel indice  $NI$  vaut  $\zeta^2 = 0.15$ .

Nous considérons sur la figure 2.4 six observations affectées par un défaut, nous illustrons aussi les seuils du  $SPE$  et du  $NI$ .

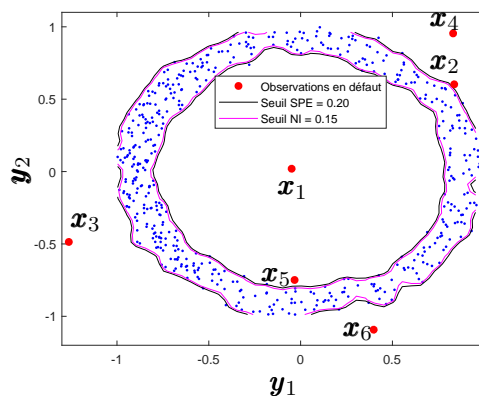


FIGURE 2.4 – Simulation de l'anneau avec quelques observations en défaut

Dans le tableau 2.3, les indices  $SPE$  et  $NI$  sont évalués pour ces six observations en défaut indiquées sur la figure 2.4.

TABLE 2.3 – Simulations pour les observations en défaut pour le cas de l’anneau

Seuil $SPE : \delta^2$	Indice $SPE$	Erreur relative entre le $SPE$ et le seuil $\delta^2$ (en %) : $\frac{ SPE(\mathbf{x}) - \delta^2 }{SPE(\mathbf{x})}$	Seuil $NI : \zeta^2$	Indice $NI$	Erreur relative entre le $NI$ et le seuil $\zeta^2$ (en %) : $\frac{ NI(\mathbf{x}) - \zeta^2 }{NI(\mathbf{x})}$
0.20	$SPE(\mathbf{x}_1) = 1$	80.0	0.15	$NI(\mathbf{x}_1) = 0.95$	84.2
	$SPE(\mathbf{x}_2) = 0.29$	31.0		$NI(\mathbf{x}_2) = 0.24$	37.5
	$SPE(\mathbf{x}_3) = 1$	80.0		$NI(\mathbf{x}_3) = 0.95$	84.2
	$SPE(\mathbf{x}_4) = 1$	80.0		$NI(\mathbf{x}_4) = 0.95$	84.2
	$SPE(\mathbf{x}_5) = 0.49$	59.1		$NI(\mathbf{x}_5) = 0.44$	65.9
	$SPE(\mathbf{x}_6) = 0.98$	79.5		$NI(\mathbf{x}_6) = 0.93$	83.8

A travers les résultats illustrés dans le tableau 2.3, l’erreur relative entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est plus élevée que celle du  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  pour chacune de ces six observations affectées par les défauts. Cela montre que le  $NI$  fonctionne mieux que le  $SPE$ .

Concernant les observations sans défaut, il existe des cas où le  $NI$  est moins efficace que le  $SPE$ . Sur la figure 2.5, l’exemple de trois observations sans défaut est indiqué.

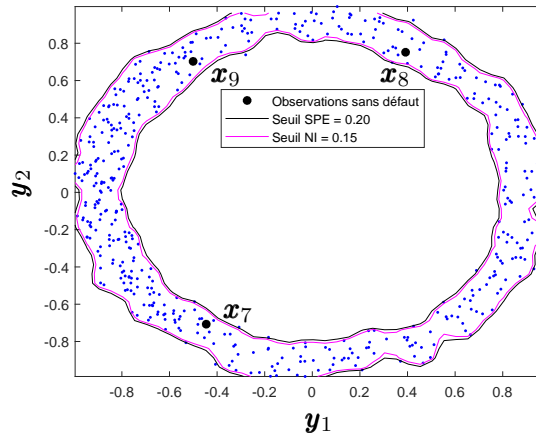


FIGURE 2.5 – Simulation de l’anneau avec quelques observations sans défaut

Les indices  $SPE$  et  $NI$  sont évalués pour les trois observations  $\mathbf{x}_7$ ,  $\mathbf{x}_8$  et  $\mathbf{x}_9$  (figure 2.5). Le tableau 2.4 montre les résultats. Les erreurs relatives entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  sont supérieures aux erreurs relatives entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  pour les observations  $\mathbf{x}_7$  et  $\mathbf{x}_8$ . L’erreur relative entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est inférieure à l’erreur relative entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  pour l’observation  $\mathbf{x}_9$ .

TABLE 2.4 – Simulations pour les observations sans défaut pour le cas de l’anneau

Seuil $SPE : \delta^2$	Indice $SPE$	Erreur relative entre le $SPE$ et le seuil $\delta^2$ (en %) : $\frac{ SPE(\mathbf{x}) - \delta^2 }{SPE(\mathbf{x})}$	Seuil $NI : \zeta^2$	Indice $NI$	Erreur relative entre le $NI$ et le seuil $\zeta^2$ (en %) : $\frac{ NI(\mathbf{x}) - \zeta^2 }{NI(\mathbf{x})}$
0.20	$SPE(\mathbf{x}_7) = 0.03$	566.6	0.15	$NI(\mathbf{x}_7) = 0.01$	1400
	$SPE(\mathbf{x}_8) = 0.05$	300		$NI(\mathbf{x}_8) = 0.003$	4900
	$SPE(\mathbf{x}_9) = 0.01$	1900		$NI(\mathbf{x}_9) = 0.02$	650

Comme pour le cas de la banane, pour mettre en évidence les cas d’observations où l’erreur relative entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est inférieure à l’erreur relative entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  (comme le cas de l’observation  $\mathbf{x}_9$ ), sur la figure 2.6 nous considérons les observations voisines d’une observation sans défaut. Avec le choix de cinq observations pour illustrer cet exemple, nous fixons la distance limite à 0.03 en faisant la moyenne des distances des cinq observations les plus proches d’une observation sans défaut (pour l’anneau aussi, plusieurs observations sans défaut ont été testées dans la recherche de cette distance limite).

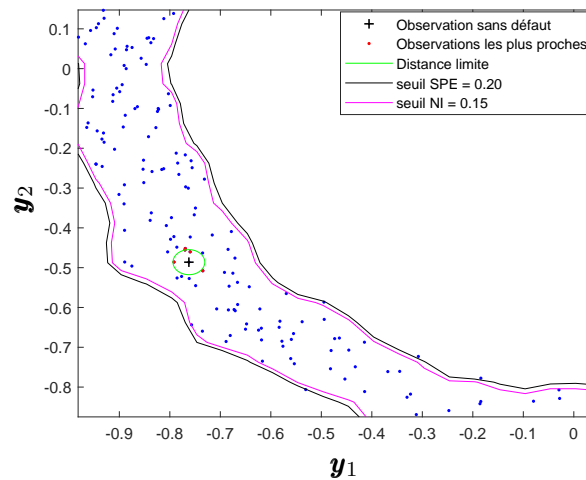


FIGURE 2.6 – Recherche de la distance limite pour l’anneau

Pour toutes les observations dont les distances calculées (entre l’observation sans défaut et les observations les plus proches) sont supérieures à la distance limite, le  $NI$  fonctionne mieux que le  $SPE$ . Les cas des observations qui ne vérifient pas cette hypothèse sont celles situées sur la frontière des données.

### Simulation 3

Nous prenons maintenant le cas d’un cadre décrit par quatre lignes (figure 2.7). Chaque ligne a pour longueur 2. Les données aléatoires sont uniformément distribuées sur ces lignes. Elles sont aussi perturbées par un bruit uniformément distribué sur  $-0.1$  et  $+0.1$ . Les observations sont au nombre de  $N = 320$ .

Pour le cadre, la largeur de bande du noyau Gaussien (2.29)  $\sigma$  vaut 0.2. Le nombre de composantes principales retenues est  $\ell = 38$  et il décrit 95% de la variance totale des données. Le seuil du  $SPE$  est égal  $\delta^2 = 0.16$  et le seuil défini pour le nouvel indice  $NI$  vaut  $\zeta^2 = 0.11$ .

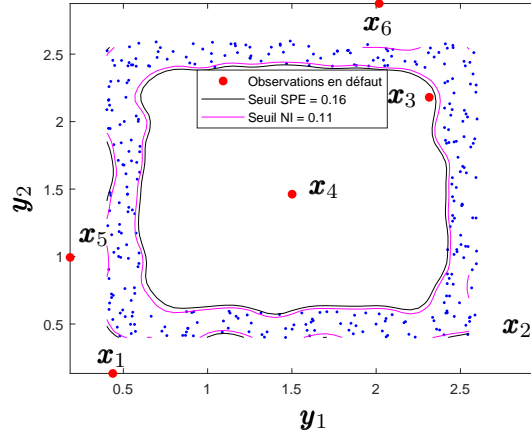


FIGURE 2.7 – Simulation du cadre avec quelques observations en défaut

Dans le tableau 2.5 sont indiquées les valeurs des deux indices de détection ainsi que les erreurs relatives entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  d'une part et les erreurs relatives entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  d'autre part.

TABLE 2.5 – Simulations pour les observations en défaut du cadre

Seuil $SPE : \delta^2$	Indice $SPE$	Erreur relative entre le $SPE$ et le seuil $\delta^2$ (en %) : $\frac{ SPE(\mathbf{x}) - \delta^2 }{SPE(\mathbf{x})}$	Seuil $NI : \zeta^2$	Indice $NI$	Erreur relative entre le $NI$ et le seuil $\zeta^2$ (en %) : $\frac{ NI(\mathbf{x}) - \zeta^2 }{NI(\mathbf{x})}$
0.16	$SPE(\mathbf{x}_1) = 0.93$	82.7	0.11	$NI(\mathbf{x}_1) = 0.88$	87.5
	$SPE(\mathbf{x}_2) = 0.99$	83.8		$NI(\mathbf{x}_2) = 0.94$	88.2
	$SPE(\mathbf{x}_3) = 0.24$	33.3		$NI(\mathbf{x}_3) = 0.20$	45.0
	$SPE(\mathbf{x}_4) = 1$	84.0		$NI(\mathbf{x}_4) = 0.95$	88.4
	$SPE(\mathbf{x}_5) = 0.78$	79.4		$NI(\mathbf{x}_5) = 0.74$	85.1
	$SPE(\mathbf{x}_6) = 0.96$	83.3		$NI(\mathbf{x}_6) = 0.91$	87.9

Comme dans les deux cas précédents, le nouvel indice donne de meilleurs résultats comparé au  $SPE$  pour les cas des observations en défaut.

En ce qui concerne les observations sans défaut, il existe des cas où le  $NI$  fonctionne moins bien que le  $SPE$ . Sur la figure 2.8, l'exemple de trois observations sans défauts est illustré.

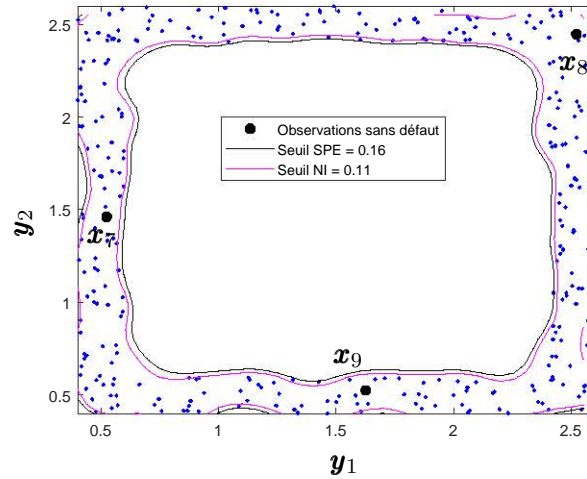


FIGURE 2.8 – Simulation du cadre avec quelques observations sans défaut

Les indices  $SPE$  et  $NI$  sont évalués pour les trois observations  $\mathbf{x}_7$ ,  $\mathbf{x}_8$  et  $\mathbf{x}_9$  (figure 2.8). Les résultats sont indiqués dans le tableau 2.6. Nous remarquons que les erreurs relatives entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  sont inférieures aux erreurs relatives entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  pour les observations  $\mathbf{x}_7$  et  $\mathbf{x}_9$ , tandis que l'erreur relative entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est supérieure à l'erreur relative entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  pour l'observation  $\mathbf{x}_8$ .

TABLE 2.6 – Simulations pour les observations sans défaut pour le cas du cadre

Seuil $SPE : \delta^2$	Indice $SPE$	Erreur relative entre le $SPE$ et le seuil $\delta^2$ (en %) : $\frac{ SPE(\mathbf{x}) - \delta^2 }{SPE(\mathbf{x})}$	Seuil $NI : \zeta^2$	Indice $NI$	Erreur relative entre le $NI$ et le seuil $\zeta^2$ (en %) : $\frac{ NI(\mathbf{x}) - \zeta^2 }{NI(\mathbf{x})}$
0.16	$SPE(\mathbf{x}_7) = 0.02$	700	0.11	$NI(\mathbf{x}_7) = 0.02$	450
	$SPE(\mathbf{x}_8) = 0.03$	433.3		$NI(\mathbf{x}_8) = 0.01$	1000
	$SPE(\mathbf{x}_9) = 0.01$	1500		$NI(\mathbf{x}_9) = 0.03$	266.6

Comme dans les cas précédents, pour mettre en évidence les cas d'observations où l'erreur relative entre le  $NI$  et le seuil  $\zeta^2$  est inférieure à l'erreur relative entre le  $SPE$  et le seuil  $\delta^2$  (comme le cas des observations  $\mathbf{x}_7$  et  $\mathbf{x}_9$ ), sur la figure 2.9 nous considérons les observations voisines d'une observation sans défaut. Pour montrer cet exemple nous choisissons cinq observations et nous fixons la distance limite à 0.03 en faisant une moyenne des distances de cinq observations les plus proches par rapport à une observation sans défaut.



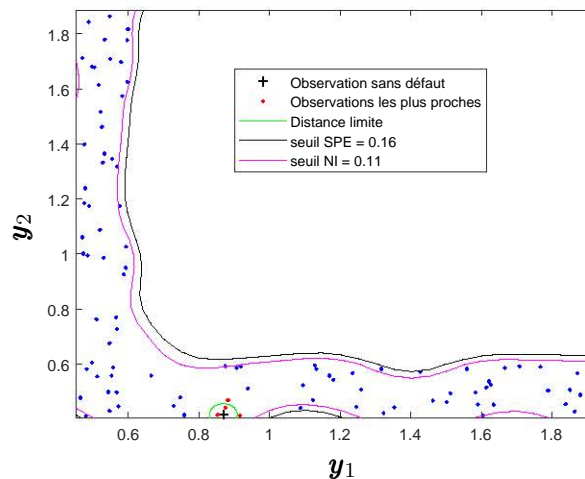


FIGURE 2.9 – Recherche de la distance limite pour le cadre

Lorsque les distances entre l'observation sans défaut et les observations voisines les plus proches sont supérieures à la distance limite, l'indice  $NI$  fonctionne mieux que le  $SPE$ . Les observations situées sur la frontière des données ne vérifient pas cette hypothèse.

**Remarques** En général pour les trois cas (banane - anneau - cadre), le nouvel indice proposé donne des résultats plus satisfaisants. Dans les deux cas ( $SPE$  et  $NI$ ), si une observation se trouve dans la base de données, les valeurs des indices  $SPE$  et du  $NI$  sont inférieures à leurs seuils respectifs. A chaque fois, les seuils du  $NI$  sont toujours proches des seuils du  $SPE$ . Les erreurs relatives du  $SPE$  et du  $NI$  démontrent clairement l'efficacité du  $NI$ . Par contre en absence de défauts, la position de l'observation sans défaut par rapport aux autres observations et sa situation par rapport à la frontière des données peut influencer les résultats.

Dans la section suivante, à partir de quelques exemples d'observations sur un système non linéaire, nous allons illustrer les conditions de détectabilité de défauts sur le système en suivant des directions données.

## 2.3 Évaluation de l'indice de détection $SPE$ en fonction du défaut

Soit un système constitué de deux variables et décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{u} + \varepsilon_1 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{u}^2 + \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Pour ce système représentant la forme d'une banane,  $\mathbf{u}$  est un signal choisi linéairement entre  $[-2 \ 2]$ . Les bruits de mesure  $\varepsilon_i$  sont des bruits aléatoires uniformément répartis entre  $-0.1$  et  $+0.1$ . Le nombre d'observations est de  $N = 100$ . Le noyau choisi est le noyau Gaussien (2.29) avec la valeur de la largeur de bande du noyau ( $\sigma$ ) égale à  $0.35$ . Le nombre de composantes principales retenues est  $\ell = 24$  et il décrit  $98\%$  de la variance totale des données. Le seuil du  $SPE$  vaut  $\delta^2 = 0.08$ .

### 2.3.1 Premier cas

Sur la figure 2.10(a), nous considérons quelques observations. Les valeurs du  $SPE$  en fonction des observations dans la direction  $y_1$  avec la direction  $y_2$  fixe (ordonnée 0.4) sont marquées sur le tracé de la figure 2.10(b). Pour l'observation illustrée en rouge de coordonnées  $(-1.2; 0.4)$ , la valeur du  $SPE$  est égale à 0.79 (figure 2.10(b)). Cette valeur est supérieure au seuil. Cette observation est donc affectée par un défaut.

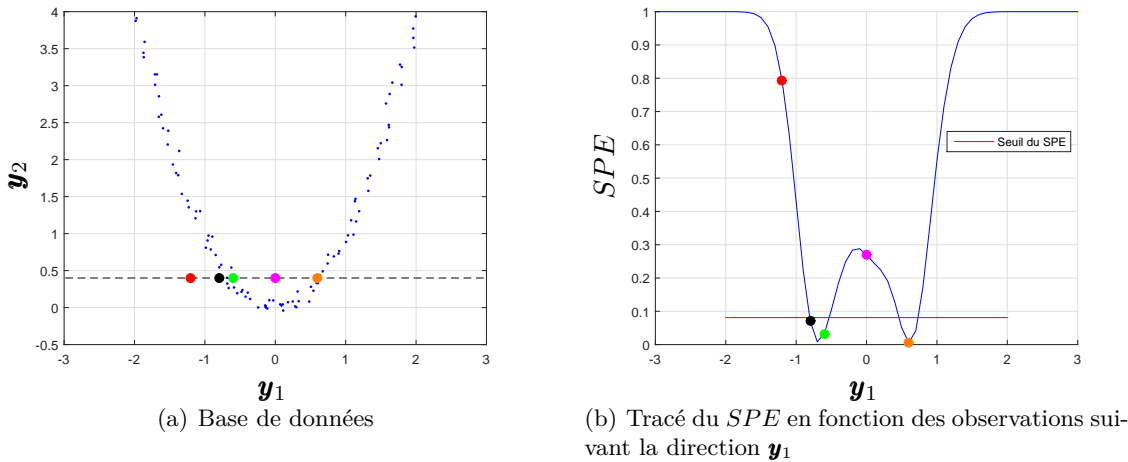


FIGURE 2.10 – Tracé du  $SPE$  en fonction des observations pour un premier cas dans la direction  $y_1$

L'observation indiquée en noir de coordonnées  $(-0.8; 0.4)$  sur la figure 2.10(a) a son  $SPE$  illustré en noir sur la figure 2.10(b). Le  $SPE$  vaut 0.07 et il est inférieur au seuil. Cette observation n'est pas affectée par un défaut. L'observation illustrée en vert de coordonnées  $(-0.6; 0.4)$  (figure 2.10(a)) a une valeur de  $SPE$  qui vaut 0.03. Cette observation n'est pas aussi affectée par un défaut. Par contre l'observation dessinée en magenta sur la figure 2.10(a) de coordonnées  $(0; 0.4)$  est en défaut puisqu'elle a une valeur de  $SPE$  qui est égale à 0.27 (figure 2.10(b)), supérieure au seuil du  $SPE$ . Le  $SPE$  de l'observation en orange de coordonnées  $(0.6; 0.4)$  sur la figure 2.10(a) a une valeur du  $SPE$  qui vaut 0.005. Cette valeur du  $SPE$  étant inférieure au seuil, aucun défaut n'est détecté sur cette observation.

Il faut remarquer que pour les trois observations présentées en vert, noir et orange sur la figure 2.10(a), même si nous supposons que ces observations sont affectées par des défauts, il n'est pas possible de détecter les défauts sur ces observations. Ces cas constituent des situations de non détection de défaut. En général, c'est le cas de toutes les observations qui se retrouvent dans la base de donnée ou très proches de la base de données.

Dans la direction  $y_2$ , sur la figure 2.11(a), nous indiquons quelques observations. L'illustration du  $SPE$  en fonction de ces observations dans la direction  $y_2$  avec la direction  $y_1$  fixe (ordonnée 1.5) est présentée sur la figure 2.11(b). Pour l'observation marquée en rouge de coordonnées  $(1.5; 0.4)$ , la valeur du  $SPE$  est égale à 0.98, supérieure au seuil du  $SPE$  (figure 2.11(b)). Cette observation est affectée par un défaut. Les deux observations indiquées en noir de coordonnées  $(1.5; 2)$  et en vert de coordonnées  $(1.5; 2.4)$  (figure 2.11(a)) ont des valeurs de  $SPE$  de 0.04 et 0.06 respectivement (figure 2.11(b)). Les valeurs des  $SPE$  sont inférieures au seuil. Ces observations ne sont pas affectées par des défauts. Ces deux cas peuvent représenter aussi des situations

de non détection. Le  $SPE$  de l'observation montrée en magenta (de coordonnées  $(1.5; 3.2)$ ) vaut 0.4 et donc supérieur au seuil. Cette observation est considérée comme en défaut.

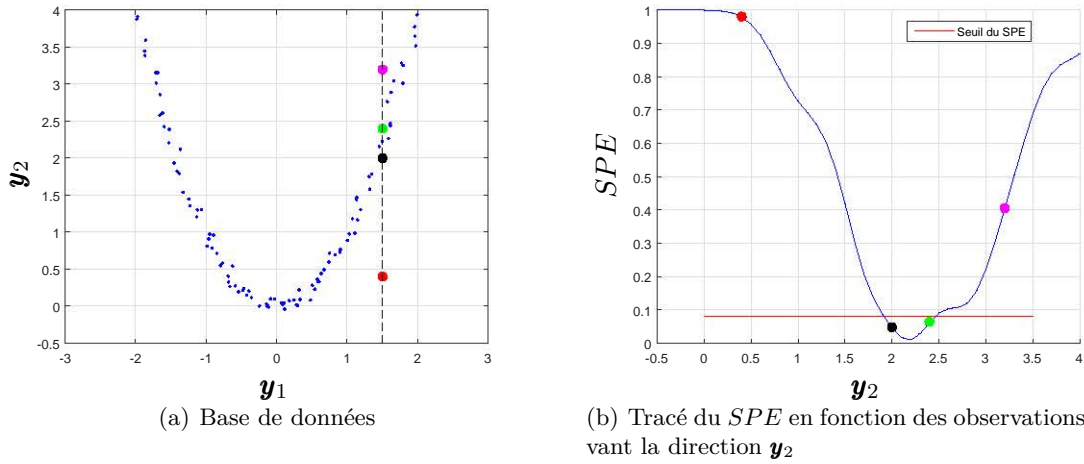


FIGURE 2.11 – Tracé du  $SPE$  en fonction des observations pour un premier cas dans la direction  $y_2$

### 2.3.2 Deuxième cas

Soit un deuxième cas de quelques observations illustrées sur la figure 2.12(a). Dans la direction  $y_1$ , sur la figure 2.12(b) est tracé le  $SPE$  en fonction des observations avec la direction  $y_2$  fixe (ordonnée 2.3). L'observation en vert ayant pour coordonnées  $(-1.5; 2.3)$  a son  $SPE$  qui est égal à 0.01 (figure 2.12(b)). Cette valeur est inférieure au seuil du  $SPE$ . Par conséquent, cette observation n'est pas affectée par un défaut. L'observation en magenta dont les coordonnées valent  $(0; 2.3)$  est en défaut parce que la valeur du  $SPE$  est égale à 1. L'observation marquée en noir de coordonnées  $(1.6; 2.3)$  a une valeur de  $SPE$  de 0.02, aucun défaut n'est détecté sur cette observation. Pour le cas de l'observation en rouge de coordonnées  $(1.8; 2.3)$ , le  $SPE$  égal à 0.35 est supérieur au seuil. Cette observation est donc affectée par un défaut.

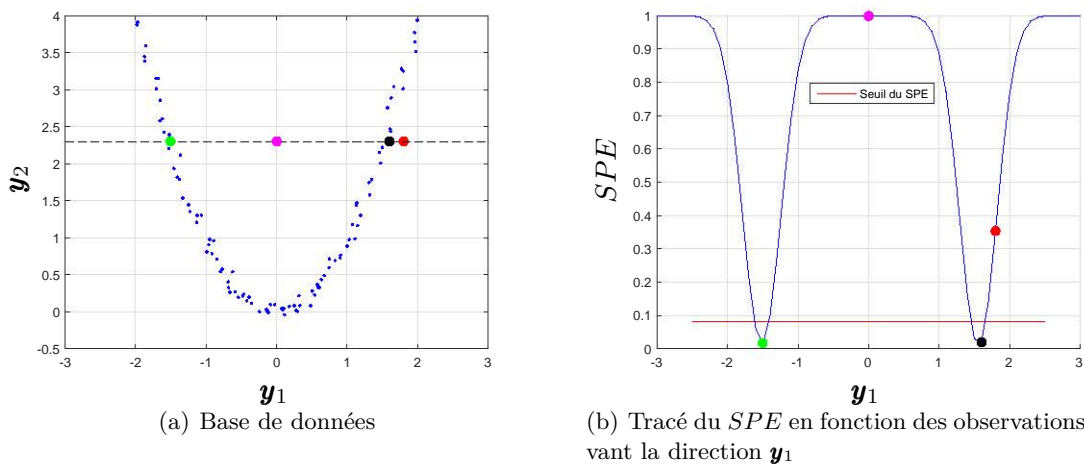


FIGURE 2.12 – Tracé du  $SPE$  en fonction des observations pour un deuxième cas dans la direction  $y_1$

Dans ce cas aussi, nous observons des situations de non détection pour les deux observations en vert et en noir (figure 2.12(a)). Comme dans le premier cas, nous illustrons pour ces observations la difficulté de détecter un défaut. Puisque ces observations sont à l'intérieur de la base de données, il n'est donc pas possible de détecter les défauts. Il faut noter que dans la direction  $\mathbf{y}_1$ , contrairement au premier cas (figures 2.10(a) et 2.10(b)), il est plus facile de détecter un défaut sur une observation à proximité de la base de données pour le deuxième cas (figures 2.12(a) et 2.12(b)).

Considérant deux observations sur la figure 2.13(a) et en suivant la direction  $\mathbf{y}_2$ , les valeurs du  $SPE$  en fonction des observations avec la direction  $\mathbf{y}_1$  fixe (ordonnée 0.3) sont illustrées sur la figure 2.13(b).

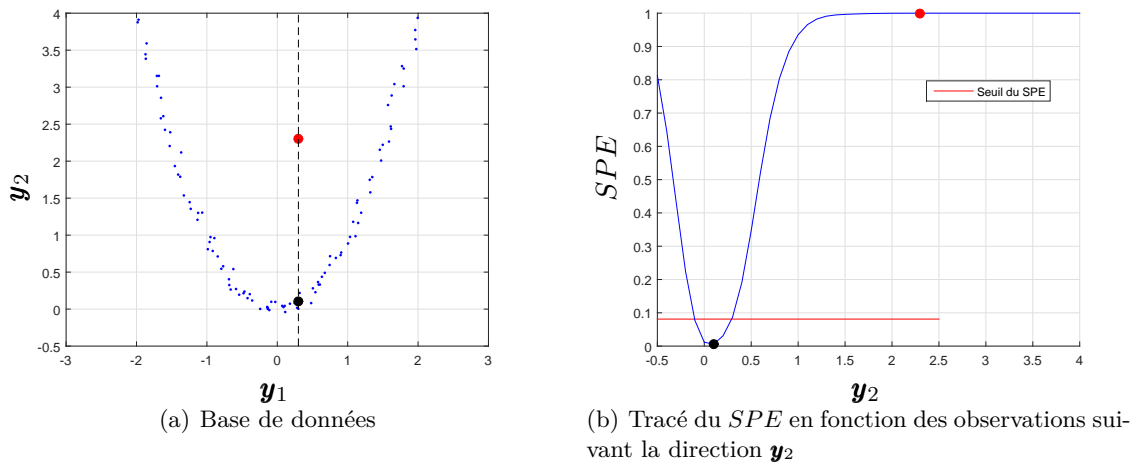


FIGURE 2.13 – Tracé du  $SPE$  en fonction des observations pour un deuxième cas dans la direction  $\mathbf{y}_2$

Pour l'observation dessinée en noir le  $SPE$  vaut 0.006 et il est inférieur au seuil. Par contre, l'observation en rouge a une valeur du  $SPE$  qui est égal à 1. Sur l'observation en noir aucun défaut n'est détecté alors que l'observation en rouge est affectée par un défaut.

A travers ces deux exemples, les conditions de détectabilité d'un défaut sur une observation sont indiquées. En suivant une direction donnée, nous avons constaté que lorsqu'une observation est éloignée de la base de données, la valeur du  $SPE$  est supérieure au seuil. Elle tend vers 1 si l'observation est suffisamment éloignée de la base de données. Lorsqu'une observation est proche de la base de données, la valeur du  $SPE$  tend vers 0. Le  $SPE$  vaut 0 si une observation se retrouve à l'intérieur de la base de données. Une observation en défaut à l'intérieur de la base de données ne peut donc être détectée. Pour qu'un défaut soit détecté sur une observation, il faut alors qu'elle soit à une distance de la base de données telle que le  $SPE$  soit supérieur au seuil. L'amplitude du défaut doit avoir une valeur minimale afin que le défaut soit détectable.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les bases et les principes de l'analyse en composantes principales à noyau qui est l'extension au cas non linéaire de l'analyse en composantes principales présenté dans le chapitre 1. L'ACP est un outil initialement utilisée pour traiter des données issues de systèmes linéaires. L'utilisation du noyau dans le kernel PCA permet de projeter les

données dans un nouvel espace dénommé espace des caractéristiques, de résoudre le problème du cas non linéaire et appliquer l'ACP linéaire.

Les indices de détection de défaut illustrés (utilisés aussi dans le cas de l'ACP linéaire) permettent de détecter des défauts sur chaque observation. En plus des indicateurs présentés  $SPE$ ,  $T^2$  et  $\varphi$ , nous avons présenté un quatrième indicateur. Cet indicateur a été comparé au  $SPE$  et il s'avère un peu plus efficace que ce dernier. Des comparaisons ont été faites sur des simulations en situation de défaut et en absence de défaut. Quand le système est affecté par un défaut le nouvel indice est plus efficace que le  $SPE$ . Par contre en absence de défaut les résultats sont un peu plus nuancés. La position de l'observation sans défaut dans la base de données d'une part et d'autre part l'influence des autres observations autour de l'observation sans défaut influencent les résultats. Nous avons ainsi défini une distance limite autour de l'observation sans défaut et qui permet de distinguer ces cas.

Il n'est pas toujours évident de détecter des défauts sur des observations pourtant affectées par des défauts. C'est le cas des observations en défaut qui se situent dans la base de données ou très proches de la base de données. L'exemple d'un système non linéaire dans ce chapitre 2 a permis de déterminer quelques situations de non détection de défaut et les zones où il est possible de détecter les défauts. La détectabilité dépend de l'amplitude du défaut, du signe du défaut ainsi que du point de fonctionnement du système.

Une fois cette phase de détection effectuée, l'objectif est de localiser le défaut détecté et trouver l'estimation de son amplitude. Pour la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut, des méthodes de contributions ont été développées à ce sujet. Dans le chapitre 3, nous passons en revue quelques méthodes de contributions. L'estimation de l'amplitude du défaut par les approches que nous présentons dans le chapitre 3 va nécessiter une initialisation de l'amplitude du défaut. Pour cette raison, nous proposons des méthodes d'initialisations, ce qui permet de trouver une bonne estimation de l'amplitude du défaut.



## Deuxième partie

# Localisation et estimation de l'amplitude des défauts par des méthodes de contributions





# Chapitre 3

## Localisation et estimation de l'amplitude des défauts détectés

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>57</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthodes existantes de contributions</b>	<b>58</b>
3.2.1	Calcul de contributions	58
3.2.2	Contributions basées sur la reconstruction	62
3.2.3	Méthodes itératives de résolution	66
<b>3.3</b>	<b>Méthodes d'initialisation pour une meilleure convergence</b>	<b>67</b>
3.3.1	Technique de l'observation la plus proche	67
3.3.2	Technique de la zone d'attraction	70
3.3.3	Technique de la limite de détection	73
3.3.4	Exemple d'application des techniques d'initialisation	78
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>80</b>

---

### 3.1 Introduction

Une fois qu'un défaut est détecté par les indices de détection de défauts, il est important de localiser les variables ou ensemble de variables, qui sont à l'origine de l'anomalie dans le système. Plusieurs approches sont généralement utilisées pour la localisation des défauts. Nous pouvons citer en particulier deux approches : les méthodes de calcul des contributions et les méthodes de reconstruction qui sont des méthodes dérivées de celles existantes dans le cas linéaire.

Dans la méthode des contributions, l'idée est d'évaluer les contributions de chaque variable à l'indice de détection ( $SPE$ ,  $T^2$  ou  $\phi$ ). Les calculs des contributions sur l'indice de détection indiquent l'importance ou l'effet de chaque variable sur cet indice. Une contribution élevée d'une variable du système indique habituellement un problème avec cette variable spécifique. Ainsi généralement, la variable ayant la plus forte contribution à l'indice de détection est considérée comme la variable en défaut. L'analyse des contributions ne permet pas toujours de déterminer l'origine du défaut mais elle peut déterminer les variables affectées par les défauts.

Dans la méthode de reconstruction, chaque variable est testée pour vérifier éventuellement si elle est affectée par un défaut. L'idée est de reconstruire chaque variable séparément en utilisant les mesures des autres variables et le modèle KPCA. Dans cette méthode de reconstruction,

chaque variable est reconstruite selon l'ensemble des directions  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) et l'amplitude du défaut correspondante  $f_i$  est estimée. Cette approche peut s'appuyer sur l'utilisation des trois indices de détection  $SPE$ ,  $T^2$  et  $\phi$ . Une variable est déclarée affectée par un défaut si la valeur de l'indice de détection pour l'observation reconstruite ( $SPE(\hat{z}_i)$ ,  $T^2(\hat{z}_i)$  et  $\phi(\hat{z}_i)$ ) est inférieure au seuil ( $\delta^2$ ,  $\tau^2$  ou  $\zeta^2$ ).

Ayant fait le calcul dans l'espace des caractéristiques, en réalité pour l'étape de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut, il faut revenir dans l'espace d'origine afin d'avoir des résultats significatifs et de mieux interpréter les amplitudes des défauts obtenus. Mais ce retour est complexe puisque la fonction non linéaire effectuant la transformation de l'espace d'origine vers l'espace des caractéristiques n'est pas explicite due à l'astuce du noyau. Des méthodes itératives existent pour la résolution du problème d'optimisation. Nous pouvons citer entre autre la méthode de la descente du gradient et la méthode du point fixe. Étant des méthodes itératives, les algorithmes de ces deux approches exigent une initialisation de la solution. Nous proposons dans ce chapitre des techniques d'initialisation pour l'algorithme itératif du point fixe.

Ce chapitre comprend essentiellement deux parties. La première partie présente les méthodes de calcul de contributions et les méthodes de contributions par reconstruction pour la localisation d'un défaut et l'estimation de son amplitude. La deuxième partie du chapitre est consacrée aux techniques d'initialisation. Trois méthodes d'initialisation sont proposées pour une meilleure convergence de l'algorithme itératif du point fixe. La première technique qui est la plus simple considère l'observation la plus proche dans la direction de reconstruction. La deuxième approche étudie la zone d'attraction de la base de données. La troisième méthode prend en compte l'observation dont le  $SPE$  est en limite du seuil fixé en suivant la direction de reconstruction. Chaque méthode d'initialisation est simulée sur un exemple à deux dimensions avec une direction choisie comme direction de reconstruction. Les inconvénients de ces techniques sont mis en évidence.

## 3.2 Méthodes existantes de contributions

Dans cette section, nous indiquons quelques méthodes de calcul de contributions classiques et une méthode de contributions par reconstruction.

### 3.2.1 Calcul de contributions

Dans la littérature, plusieurs auteurs ont proposé des méthodes de localisation basées sur le calcul des contributions de chaque variable aux différents indices de détection de défaut. Dans ces approches, la variable ayant la plus grande contribution est considérée comme celle étant en défaut.

[CLC<sup>+</sup>05] ont défini les contributions de chaque variable aux indices de détection  $SPE$  et  $T^2$ . La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  d'une observation  $\mathbf{x}$  aux indices de détection  $SPE$  et  $T^2$  sont :

$$C_i^{SPE}(\mathbf{x}) = \left| \frac{\partial SPE(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \quad (3.1)$$

et

$$C_i^{T^2}(\mathbf{x}) = \left| \frac{\partial T^2(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \quad (3.2)$$

A ces deux indices, nous définissons par analogie un troisième cas de calcul de contributions basé sur l'indice  $\phi$ .

$$C_i^\phi(\mathbf{x}) = \left| \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \quad (3.3)$$

### 3.2.1.1 Calcul des contributions basées sur l'indice *SPE*

A partir de (2.34), l'indice *SPE* évalué sur une observation  $\mathbf{x}$  en considérant le noyau Gaussien (2.29) est :

$$SPE(\mathbf{x}) = 1 - \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection *SPE* est définie par :

$$\begin{aligned} C_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= \left| \frac{\partial SPE(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \\ &= 2 \left| \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \end{aligned}$$

La dérivée de  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell)$  par rapport à  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell)}{\partial [\mathbf{x}]_i} &= -\frac{2}{2\sigma^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell) \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} &= -\frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell) \\ \vdots \\ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le vecteur  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i}$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \quad (3.7)$$

en posant :

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (3.8)$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection  $SPE$  est alors :

$$\begin{aligned} C_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= 2 \left| \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \left( -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right) \right| \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \left| \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right| \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2.1.2 Calcul des contributions basées sur l'indice $T^2$

Pour rappel, pour une observation  $\mathbf{x}$ , l'indice  $T^2$  est défini par :

$$\begin{aligned} T^2(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{t}}^\top \hat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1} \hat{\mathbf{t}} \\ &= \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection  $T^2$  est :

$$\begin{aligned} C_i^{T^2}(\mathbf{x}) &= \left| \frac{\partial T^2(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \\ &= 2 \left| \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \end{aligned}$$

A partir de (3.7),  $C_i^{T^2}(\mathbf{x})$  s'écrit :

$$\begin{aligned} C_i^{T^2}(\mathbf{x}) &= \left| \frac{\partial T^2(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \left| \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right| \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.2.1.3 Calcul des contributions basées sur l'indice $\phi$

Pour rappel, pour une observation  $\mathbf{x}$ , l'indice  $\phi$  est défini par :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{SPE(\mathbf{x})}{\delta^2} + \frac{T^2(\mathbf{x})}{\tau^2}$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection  $\phi$  est définie par :

$$\begin{aligned} C_i^\phi(\mathbf{x}) &= \left| \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial SPE(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial T^2(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right| \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \left| \frac{1}{\delta^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\tau^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right| \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.2.1.4 Contributions relatives pour les trois indices

Partant de la proposition de [KXZG14], des contributions relatives pour les trois indices de détection de défauts sont élaborées. Ces contributions relatives permettent de mieux préciser l'importance d'une variable par rapport aux autres dans l'ensemble des données.

Les contributions relatives pour les trois indices  $SPE$ ,  $T^2$  et  $\phi$  sont respectivement :

$$CR_i^{SPE}(\mathbf{x}) = \frac{C_i^{SPE}(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^m C_i^{SPE}(\mathbf{x})} \quad (3.12)$$

$$CR_i^{T^2}(\mathbf{x}) = \frac{C_i^{T^2}(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^m C_i^{T^2}(\mathbf{x})} \quad (3.13)$$

$$CR_i^{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{C_i^{\phi}(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^m C_i^{\phi}(\mathbf{x})} \quad (3.14)$$

### 3.2.1.5 Une autre approche pour le calcul des contributions

[SC16] ont proposé une méthode de localisation développée par [DTC13] et basée sur un calcul différent des contributions. Les contributions de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  d'une observation  $\mathbf{x}$  aux indices de détection  $SPE$  et  $T^2$  sont définies par :

$$C_i^{SPE}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_i \frac{\partial SPE(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \quad (3.15)$$

et

$$C_i^{T^2}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}]_i \frac{\partial T^2(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \quad (3.16)$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection  $SPE$  est :

$$\begin{aligned} C_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{x}]_i \frac{\partial SPE(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \\ &= [\mathbf{x}]_i \frac{\partial (\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}))}{\partial [\mathbf{x}]_i} \\ &= 2[\mathbf{x}]_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \end{aligned}$$

A partir de (3.7), la contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection  $SPE$  s'écrit :

$$\begin{aligned} C_i^{SPE}(\mathbf{x}) &= 2[\mathbf{x}]_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \left( -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} [\mathbf{x}]_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

La contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection  $T^2$  est :

$$\begin{aligned}
 C_i^{T^2}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{x}]_i \frac{\partial T^2(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \\
 &= [\mathbf{x}]_i \frac{\partial (\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}))}{\partial [\mathbf{x}]_i} \\
 &= 2[\mathbf{x}]_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i}, \quad \text{or } \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \\
 &= -\frac{2}{\sigma^2} [\mathbf{x}]_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous ajoutons à la contribution de ces deux indices, un troisième cas, la contribution de la  $i^{\text{ème}}$  composante  $[\mathbf{x}]_i$  à l'indice de détection  $\phi$  est :

$$\begin{aligned}
 C_i^\phi(\mathbf{x}) &= [\mathbf{x}]_i \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \\
 &= [\mathbf{x}]_i \left( \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial SPE(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial T^2(\mathbf{x})}{\partial [\mathbf{x}]_i} \right) \\
 &= -\frac{2}{\sigma^2} [\mathbf{x}]_i \left[ \frac{1}{\delta^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\tau^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Les contributions définies en (3.17), (3.18) et (3.19) peuvent être positives ou négatives. Par contre les contributions relatives établies en (3.12), (3.13) et (3.14) sont toujours positives et elles accentuent les contributions de chaque variable en comparaison aux méthodes de contributions élaborées en (3.9), (3.10) et (3.11).

Avec les calculs des contributions définies dans cette section 3.2.1, il est possible de déterminer les contributions de chaque variable à un indice de détection de défaut et d'identifier la variable à l'origine du défaut. Mais ces méthodes ne permettent pas de déterminer l'estimation de l'amplitude du défaut. Dans la section suivante, nous présenterons les méthodes de contributions basées sur la reconstruction qui en plus de localiser les défauts permettent d'estimer aussi les amplitudes des défauts. Pour rappel, la détection de défauts effectuée dans la section 2.2.3 est faite dans l'espace des caractéristiques. Par contre pour l'estimation de l'amplitude des défauts, les valeurs n'ont un sens que si elles sont estimées dans l'espace d'origine. Pour cette raison, le retour inverse de l'espace des caractéristiques à l'espace d'origine s'impose. Mais puisque la fonction non linéaire  $\varphi(\cdot)$  n'est pas explicite du fait de l'utilisation du noyau, ce retour n'est pas évident [KHR<sup>+</sup>13], [HR11b], [HR11a].

### 3.2.2 Contributions basées sur la reconstruction

[AQ10] développent une méthode de contributions basée sur la reconstruction (*reconstruction-based contributions : RBC*) de chaque variable. Cette méthode de contributions avait été déjà proposée dans le cas linéaire par [AQ09] (chapitre 1). Pour chaque observation  $\mathbf{x}$  affectée par un défaut, l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  est estimée en reconstruisant la  $i^{\text{ème}}$  variable. Chaque variable est reconstruite avec le modèle KPCA et les mesures des autres variables. En utilisant l'ensemble des directions  $\boldsymbol{\xi}_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), une observation est reconstruite comme indiqué en (1.39).

Pour trouver l'estimation de l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$ , il faut minimiser l'indice de détection de l'observation reconstruite en résolvant un problème d'optimisation.

### 3.2.2.1 Problème d'optimisation

Il faut chercher l'estimation de l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  (en fixant une direction  $\boldsymbol{\xi}_i$ ) pour laquelle  $\text{Indice}(\hat{\mathbf{z}}_i)$  est inférieure au seuil. Pour cette raison, il faut minimiser l'indice de détection de l'observation en défaut pour trouver l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$ .

$$\hat{f}_i = \arg \min_{f_i} \text{Indice}(\mathbf{z}_i) \quad (3.20)$$

où  $\text{Indice}(\mathbf{z}_i)$  peut être l'un des trois indices de détection de défaut :  $SPE(\mathbf{z}_i)$ ,  $T^2(\mathbf{z}_i)$  ou  $\phi(\mathbf{z}_i)$ . L'équation (3.20) est un problème non linéaire et non convexe (ce problème peut admettre un optimum global et aussi des optima locaux). Une variable est déclarée affectée par un défaut si l'indice de détection recalculé avec l'observation reconstruite est inférieur au seuil ( $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i) < \delta^2$ ,  $T^2(\hat{\mathbf{z}}_i) < \tau^2$  ou  $\phi(\hat{\mathbf{z}}_i) < \zeta^2$ ).

### 3.2.2.2 Calcul des contributions basées sur la reconstruction

Nous définissons la valeur de la contribution basée sur la reconstruction  $RBC$  comme la différence entre l'indice de détection avant la reconstruction et l'indice de détection après la reconstruction d'une observation comme en (1.50). Le  $RBC$  est la contribution de chaque variable à l'indice de détection. Par exemple pour l'indice de détection  $SPE$ , le  $RBC$  évalué sur l'observation  $\mathbf{x}$  est déterminé par :

$$RBC_i(\mathbf{x}) = SPE(\mathbf{x}) - SPE(\hat{\mathbf{z}}_i) \quad (3.21)$$

La variable ayant la plus grande valeur du  $RBC$  et donc la plus grande contribution est considérée comme la variable affectée par un défaut.

[AQ10] ont utilisé une expression du  $RBC$  définie dans [AQ09] :

$$RBC_i(\mathbf{x}) = \hat{f}_i^2 \quad (3.22)$$

### 3.2.2.3 Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $SPE$

L'équation (2.34) évaluée en  $\mathbf{z}_i$  s'écrit (en considérant le noyau Gaussien (2.29)) :

$$\begin{aligned} SPE(\mathbf{z}_i) &= \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) - \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \\ &= 1 - \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Il faut déterminer  $\boldsymbol{\xi}_i$  et  $\hat{f}_i$  pour lesquelles  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i) < \delta^2$ . Pour cette raison, on cherche, pour une direction  $\boldsymbol{\xi}_i$  donnée, l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  qui minimise  $SPE(\mathbf{z}_i)$ . La dérivée première de  $SPE(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$  est :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = -2\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \quad (3.24)$$

A partir de (2.30),  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  s'écrit :

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) = [\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1) \cdots \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_N)]^\top$$

La dérivée de chaque composante de  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  (avec  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_j)}{\partial f_i} &= -\frac{2}{2\sigma^2} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j)^\top (-\boldsymbol{\xi}_i) \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_j) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (3.25)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec :

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) = \begin{bmatrix} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (3.27)$$

L'expression (3.24) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$$

Avec  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$ , le développement de  $\mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i)$  est :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) &= \begin{bmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i f_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i f_i & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -\boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i f_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$



A partir de (3.8), l'expression de  $\mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i)$  s'écrit :

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) - f_i \mathbf{I} \quad (3.28)$$

avec  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{\mathbf{N} \times \mathbf{N}}$  une matrice identité.

D'où l'expression de la dérivée de  $SPE(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} (\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) - f_i \mathbf{I}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) + \frac{2}{\sigma^2} f_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \end{aligned}$$

L'annulation de la dérivée de  $SPE(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$  permet de trouver l'estimation de l'amplitude du défaut :

$$\left. \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \right|_{\mathbf{z}_i = \hat{\mathbf{z}}_i, f_i = \hat{f}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_i = \frac{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_i)}{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_i)} \quad (3.29)$$

### 3.2.2.4 Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $T^2$

L'indice  $T^2$  déterminé en  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$ , à partir de (2.36) est :

$$T^2(\mathbf{z}_i) = \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \quad (3.30)$$

L'objectif est d'estimer l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  associée à  $\boldsymbol{\xi}_i$  pour lesquelles  $T^2(\hat{\mathbf{z}}_i) < \tau^2$ . Pour cela, il faut minimiser l'indice  $T^2$ . Sa dérivée première par rapport à  $f_i$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^2(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= 2\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) - \frac{2}{\sigma^2} f_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Comme dans le cas de l'indice de détection  $SPE$ , avec  $\left. \frac{\partial T^2(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \right|_{\mathbf{z}_i = \hat{\mathbf{z}}_i, f_i = \hat{f}_i} = 0$ , la valeur de l'estimation de l'amplitude du défaut est égale à :

$$\hat{f}_i = \frac{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_i)}{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_i)} \quad (3.32)$$

### 3.2.2.5 Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice combiné $\phi$

En remplaçant  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$  dans (2.38), l'expression de  $\phi(\mathbf{z}_i)$  est :

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{z}_i) &= \frac{\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)}{\delta^2} + \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \\ &= \frac{1}{\delta^2} + \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Il faut donc chercher l'estimation de l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  associée à  $\xi_i$  pour lesquelles  $\phi(\hat{z}_i) < \zeta^2$ . Ce qui conduit à minimiser l'indice  $\phi$ . La dérivée première de  $\phi(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= 2\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) - \frac{2}{\sigma^2} f_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Avec l'annulation de la dérivée de  $\phi(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$ , l'estimation de l'amplitude du défaut est :

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \right|_{\mathbf{z}_i = \hat{z}_i, f_i = \hat{f}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_i = \frac{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\kappa}(\hat{z}_i)}{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}(\hat{z}_i)} \quad (3.35)$$

### 3.2.2.6 Réévaluation de l'indice de détection de défaut

Après l'estimation de l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$ , l'indice de détection est réévalué. Si pour l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$  et la direction associée  $\xi_i$ , l'indice de détection réévalué ( $SPE(\hat{z}_i)$ ,  $T^2(\hat{z}_i)$  ou  $\phi(\hat{z}_i)$ ) est inférieur au seuil ( $\delta^2$ ,  $\tau^2$  ou  $\zeta^2$ ), la variable liée à la direction  $\xi_i$  est déclarée affectée par un défaut. Cette opération est effectuée pour toutes les directions.

Les équations de l'estimation de l'amplitude du défaut pour les trois indices  $SPE$  (3.29),  $T^2$  (3.32) et  $\phi$  (3.35) sont des équations implicites. Dans ces équations, l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$  dépend de l'observation reconstruite  $\hat{z}_i$ . Or l'observation reconstruite  $\hat{z}_i$  (1.39) dépend elle-même de  $\hat{f}_i$ . Des méthodes itératives existent pour la résolution de ces équations.

## 3.2.3 Méthodes itératives de résolution

Différentes méthodes de résolution existent pour le problème d'optimisation (3.20) notamment la méthode de la descente du gradient et la méthode itérative du point fixe.

### 3.2.3.1 Méthode de la descente du gradient

La méthode de la descente du gradient fait partie des méthodes les plus utilisées en optimisation. Avec cette méthode, le gradient de l'Indice( $\hat{z}_i$ ) en  $f_i$  ( $\nabla_{f_i}$ ) est évalué. A chaque itération, la valeur de  $\hat{z}_i$  sera mise à jour.

$$\hat{z}_i^{(k+1)} = \hat{z}_i^{(k)} - \eta^{(k)} \nabla_{f_i} \text{Indice}(\hat{z}_i) \quad (3.36)$$

avec  $\eta^{(k)}$  le pas du gradient et  $k$  le numéro d'itérations.

### 3.2.3.2 Méthode du point fixe

Dans la méthode du point fixe, pour simplifier le processus d'optimisation, l'expression  $\nabla_{f_i} \text{Indice}(\hat{z}_i)$  est mise à zéro. L'annulation de la dérivée première de l'indice de détection par

rapport à  $f_i$  permet de trouver l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$ . L'annulation de la dérivée première des indices ((2.34), (2.36) et (2.38)) conduit à une forme implicite de type :

$$\hat{f}_i = g(\hat{f}_i) \quad (3.37)$$

Dans cette expression (3.37),  $\hat{f}_i$  prend la valeur de  $g(\hat{f}_i)$  à chaque itération. Avec cette méthode du point fixe, nous allons résoudre les équations de l'estimation de l'amplitude du défaut pour les trois indices de détection ( $SPE$  (3.29),  $T^2$  (3.32) et  $\phi$  (3.35)). Ces équations qui se présentent sur la forme de (3.37) confirment qu'il faut une valeur initiale pour  $\hat{f}_i$  dans l'implémentation de l'algorithme du point fixe. En plus de ce point de départ, il faut aussi fixer un critère d'arrêt. Le choix du point de départ influence les résultats. Une bonne initialisation est nécessaire pour obtenir un minimum global.

Dans la section suivante, nous proposons des techniques d'initialisation pour une meilleure convergence de l'algorithme du point fixe. Nous utilisons l'indice de détection  $SPE$  pour les illustrations (l'indice  $SPE$  est utilisé pour les études parce qu'il permet d'expliquer au mieux les méthodes développées).

### 3.3 Méthodes d'initialisation pour une meilleure convergence

Trois techniques d'initialisation sont développées dans cette partie. La première technique concerne la recherche, dans la base de données, de l'observation la plus proche de celle en défaut dans une direction donnée. La deuxième technique quant à elle, recherche le point initial en considérant une zone d'attraction de toutes les observations dans une direction donnée. La troisième technique effectue la recherche du point initial en se plaçant dans une zone où l'indice  $SPE$  est en limite de la détection du seuil fixé [KMA<sup>+</sup>17].

#### 3.3.1 Technique de l'observation la plus proche

De façon intuitive, la technique de l'observation la plus proche est la première méthode à laquelle on réfléchit pour la résolution de ce problème d'initialisation. Avec cette technique, on cherche la distance minimale entre l'observation en défaut  $\mathbf{x}$  et toutes les observations de la base de données dans la direction de reconstruction  $\boldsymbol{\xi}_i$  choisie. L'observation qui correspond à la distance minimale sert à déterminer le point de départ de l'algorithme du point fixe. Selon la direction de reconstruction  $\boldsymbol{\xi}_i$ , l'observation la plus proche de l'observation en défaut est :

$$q^* = \arg \min_q \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right| \quad (3.38)$$

avec  $q^*$  le numéro de l'observation retenue.

Avec cette observation retenue, l'estimation de  $f_i$  vaut :

$$\widehat{f}_i^0 = -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q^*})^\top \boldsymbol{\xi}_i \quad (3.39)$$

$\widehat{f}_i^0$  est considéré comme le point initial pour le début de l'algorithme du point fixe.

**Inconvénient :** Cette technique ne tient compte que d'une direction de reconstruction. Si toutes les directions sont prises en compte, l'observation retenue peut être éloignée de la base de données.

Pour illustrer cette méthode, nous considérons le système de données représenté par (2.48). Cet exemple sera utilisé aussi pour tester les autres méthodes d'initialisation proposées. Le signal  $\mathbf{u}$  est généré linéairement dans l'intervalle  $[-2 \ 1]$ . Les bruits de mesure  $\varepsilon_i$  sont des bruits aléatoires uniformément répartis entre  $-0.1$  et  $+0.1$ . Le nombre d'observations est  $N = 75$ . Les données générées sont représentées sur la figure 3.1.

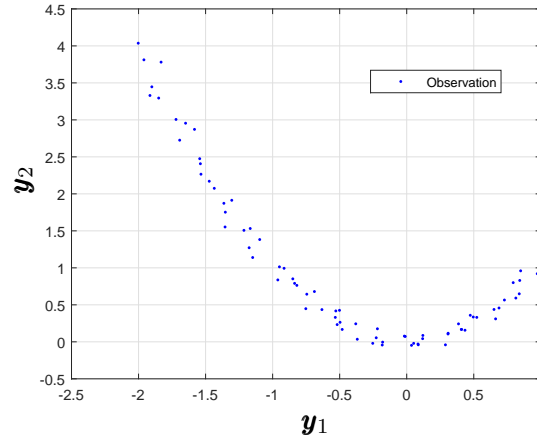


FIGURE 3.1 – Tracé des observations

Le paramètre  $\sigma$  pour le noyau Gaussien (2.29) a été défini égal à 0.35. Le nombre de composantes principales retenues pour le modèle KPCA est  $\ell = 18$ . Ce nombre de CPs correspond environ à 98% de la somme totale des valeurs propres. Le seuil du  $SPE$  égal à 0.06 est représenté sur la figure 3.2 par le contour en magenta.

Pour détecter un défaut sur une observation, il faut que l'amplitude du défaut associée à cette observation ait une valeur telle que l'observation soit en dehors de la limite du seuil du  $SPE$ . Si ce n'est pas le cas, l'observation affectée par un défaut ne sera pas détectée.

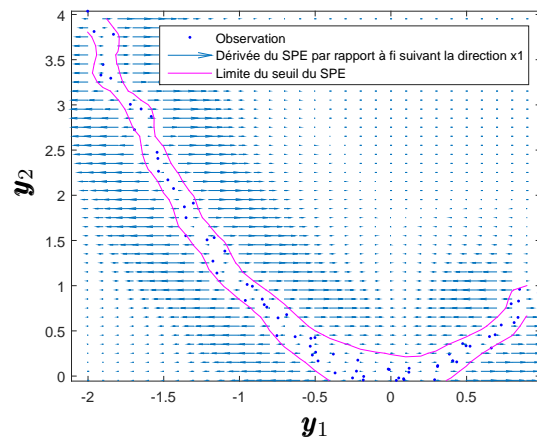


FIGURE 3.2 – Données et limite du  $SPE$

Sur cette figure 3.2, les vecteurs gradients du  $SPE$  par rapport à  $f_i$  dans la direction  $\mathbf{y}_1$  de tous les points d'une grille qui contient la base de données sont également indiqués. Cela permet d'illustrer des cas d'observations affectées par un défaut et qui ne peuvent pas servir pour calculer le point initial de début de l'algorithme du point fixe. Les points où la dérivée

est nulle correspondent aux points où il n'est pas possible de ramener une observation dans les frontières de décision (délimitées par le seuil du  $SPE$ ) avec l'algorithme du point fixe.

Dans les trois cas d'initialisation que nous allons illustrer, l'observation en défaut est dans une zone où la dérivée du  $SPE$  par rapport à  $f_i$  est nulle (figure 3.3, l'observation affectée par le défaut est indiquée par une étoile rouge). Cela nous permettra donc de tester nos méthodes d'initialisation et voir si après application de l'algorithme du point fixe cette observation pourra être ramenée dans la base de données (ou dans les frontières de décision).

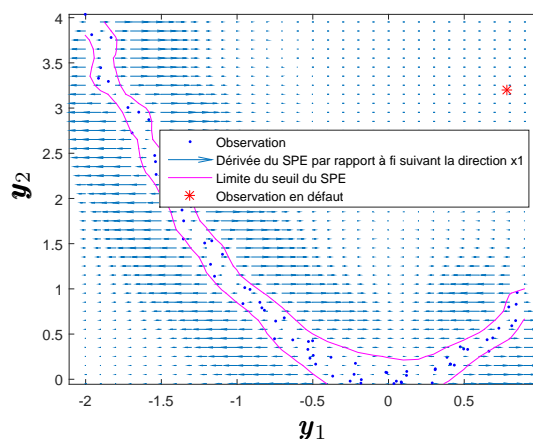


FIGURE 3.3 – Données, limite du  $SPE$  et observation en défaut

Nous considérons sur la figure 3.4, l'observation en défaut marquée par une étoile rouge. Pour la première technique, on recherche l'observation la plus proche de l'observation en défaut dans la direction  $y_1$ . La recherche dans la base de données de l'observation la plus proche dans la direction  $y_1$  est indiquée par l'observation encadrée en magenta. Avec cette observation retenue, nous déterminons l'estimation de  $f_i$  (3.39) et nous appliquons l'algorithme itératif du point fixe. La solution trouvée c'est-à-dire l'observation reconstruite avec l'estimation du défaut estimée  $\hat{f}_i$  (1.39) est marquée en bleu foncé sur la figure 3.4.

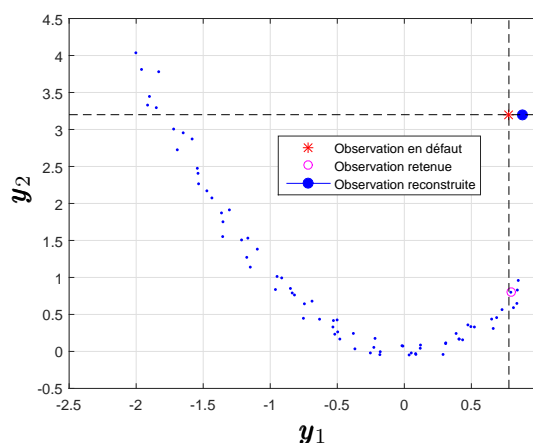


FIGURE 3.4 – Technique de l'observation la plus proche

Il est à souligner que l'observation reconstruite n'est pas ramenée dans la base de données ; ce qui signifie que le défaut sur cette observation n'est pas corrigé. L'indice de détection évalué

après reconstruction de l'observation  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  égal à 1 reste supérieur au seuil  $\delta^2$ .

**Inconvénient :** dans cette approche, avec la direction de reconstruction  $\mathbf{y}_1$ , l'observation reconstruite n'est pas ramenée dans la base de données. Une deuxième technique est proposée pour pallier ces difficultés.

### 3.3.2 Technique de la zone d'attraction

Dans cette approche, on recherche l'observation dans une zone d'attraction. On suppose que l'observation en défaut  $\mathbf{x}$  est éloignée de la base de données, c'est-à-dire  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \approx 0$ . Avec le choix du noyau Gaussien (2.29) si la distance entre deux observations  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  est supérieure à  $3\sigma$  (figure 3.5) alors  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \approx 0$ . Puisque  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  apparaît sous forme quadratique ( $\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i)\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$ ), la valeur de  $\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i)\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  tend plus rapidement vers 0. Pour éviter cela, en pratique, le rayon est limité à  $\wp\sigma$  où  $\wp$  est inférieur à 3.

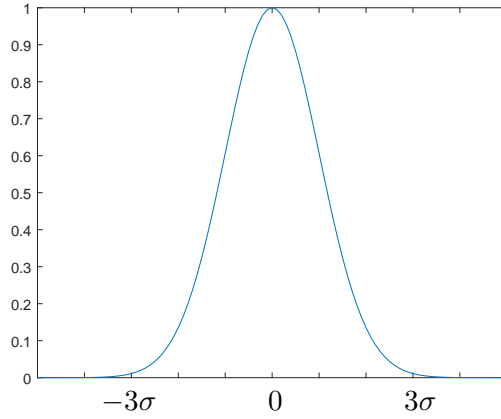


FIGURE 3.5 – Fonction Gaussienne

Il faut trouver l'amplitude minimale  $f_i$  en faisant l'intersection entre la zone d'attraction et la direction de reconstruction. Pour cela, il faut définir une zone proche de la direction de reconstruction pour laquelle  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  soit différent de 0 et rechercher l'amplitude minimale de  $f_i$  telle que pour une observation  $\mathbf{x}_q$  :

$$\|\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_q\|^2 = \wp^2\sigma^2 \quad (3.40)$$

En remplaçant l'expression de  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$  dans (3.40), on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i - \mathbf{x}_q)^\top (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i - \mathbf{x}_q) - \wp^2\sigma^2 &= 0 \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}_i f_i - f_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i f_i^2 - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{x}_q + 2f_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x}_q + \mathbf{x}_q^\top \mathbf{x}_q - \wp^2\sigma^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i = 1 \\ f_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x}_q = f_i \mathbf{x}_q^\top \boldsymbol{\xi}_i \\ f_i \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{x} = f_i \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{array} \right. \quad (3.42)$$

A partir de ces relations, l'équation (3.41) devient :

$$\begin{aligned} f_i^2 - 2f_i(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}_i - \mathbf{x}_q^\top \boldsymbol{\xi}_i) + \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^\top \mathbf{x}_q + \mathbf{x}_q^\top \mathbf{x}_q - \wp^2 \sigma^2 &= 0 \\ f_i^2 - 2f_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|^2 - \wp^2 \sigma^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Le discriminant de l'équation du second degré en  $f_i$  (3.43) est :

$$\Delta = \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right)^2 - \left( \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|^2 - \wp^2 \sigma^2 \right) \quad (3.44)$$

Avec  $\wp = 3$  et l'hypothèse  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) \approx 0$ , cela conduit à avoir :  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|^2 \geq \wp^2 \sigma^2$ .

Le discriminant est positif ou nul ( $\Delta \geq 0$ ) si :

$$\left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right)^2 \geq \left( \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|^2 - \wp^2 \sigma^2 \right) \quad (3.45)$$

La racine carrée de chaque membre de (3.45) conduit à :

$$\left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right| \geq \sqrt{\left( \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|^2 - \wp^2 \sigma^2 \right)} \quad (3.46)$$

Par (3.46), il y a une intersection entre la direction de reconstruction  $\boldsymbol{\xi}_i$  et le cercle de centre  $\mathbf{x}_q$  et de rayon  $\wp \sigma$ . Dans ce cas, Il existe deux solutions qui sont :

$$\widehat{f_{i1,2}^0} = |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i| \pm \sqrt{\Delta} \quad (3.47)$$

Il faut rechercher dans la base de données toutes les observations pour laquelle  $\Delta \geq 0$  (3.46), ensuite choisir l'observation ayant l'amplitude minimale pour (3.47) comme valeur initiale de l'algorithme du point fixe. L'algorithme de cette technique est présenté ci-dessous.

**Algorithme :** Recherche d'une observation dans une zone d'attraction

1. **Entrées**

- $\mathbf{x}_t, t = 1, \dots, N$
- $\mathbf{x}$ , avec  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) = 0$
- $\boldsymbol{\xi}_i$  direction choisie

2. **Initialisations**

- $q \rightarrow 1$
- $n \leftarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1\|$
- $\wp \leftarrow a$ , avec  $a < 3$

3. **tant que**  $q \leq N$

4. **si**  $\left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right| \geq \sqrt{\left( \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|^2 - \wp^2 \sigma^2 \right)}$  **alors**

5.  $\Delta \leftarrow \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right)^2 - \left( \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_q\|^2 - \wp^2 \sigma^2 \right)$

6.        **si**  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \pm \sqrt{\Delta} < n$  **alors**
7.             $n \leftarrow (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \pm \sqrt{\Delta}$
8.             $\mathbf{x}_{sol} \leftarrow \mathbf{x}_q$
9.        **fin si**
10.    **fin si**
11.     $q \leftarrow q + 1$
12. **fin tant que**
13.  $\widehat{f_{i1,2}^0} \leftarrow (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{sol})^\top \boldsymbol{\xi}_i \pm \sqrt{\Delta}$

Pour illustrer cette deuxième technique, nous considérons sur la figure 3.6, le même cas de défaut que dans la première technique (figure 3.4). L'observation en défaut est marquée par une étoile rouge. Dans la base de données, nous recherchons la zone d'attraction dans la direction  $\mathbf{y}_1$  de toutes les observations qui vérifient (3.46) et l'observation à retenir est celle qui a l'amplitude minimale (3.47) pour le point initial du début de l'algorithme du point fixe avec une valeur de  $\varphi = 2.5$ . Cette observation retenue est celle encerclée en magenta sur la figure 3.6. L'observation reconstruite (avec l'amplitude du défaut estimée), marquée en bleu foncé, est ramenée dans la base de données. Contrairement au premier cas de la technique de l'observation la plus proche (figure 3.4), cette fois-ci le défaut est corrigé sur cette observation et la solution trouvée est bien ramenée dans la base de données. L'indice de détection évalué après reconstruction de l'observation  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  égal à 0.02 est inférieur au seuil  $\delta^2$ .

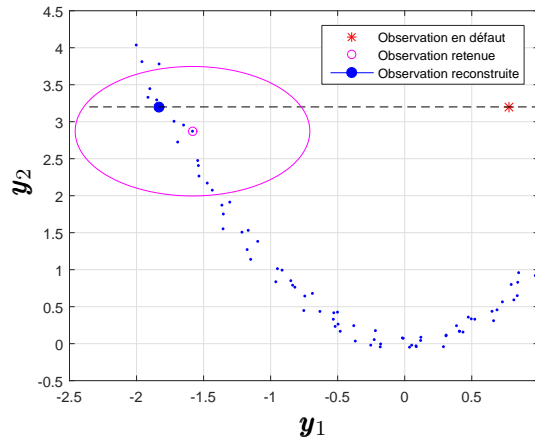


FIGURE 3.6 – Technique de la zone d'attraction

**Inconvénient :** Il faut dans cette approche que l'observation en défaut soit éloignée de la base de données pour avoir  $\kappa(\mathbf{x}) \approx 0$  et la recherche de la zone d'attraction se fait pour les toutes les observations ( $q$  varie de 1 à  $N$ ). Aussi cette approche présente plus de paramètres à régler. Une troisième technique est donc proposée à la suite de ces constats.



### 3.3.3 Technique de la limite de détection

On considère la même observation  $\mathbf{x}$  affectée par un défaut dans la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$ . Dans cette technique, on cherche l'observation dont le  $SPE$  est en limite du seuil fixé  $\delta^2$  dans la direction de reconstruction  $\boldsymbol{\xi}_i$  choisie.

$$SPE(\mathbf{z}_i) \geq \delta^2 \quad (3.48)$$

Par définition,  $SPE(\mathbf{z}_i)$  est compris entre  $\min(SPE(\mathbf{z}_i))$  et  $\max(SPE(\mathbf{z}_i))$

$$\min(SPE(\mathbf{z}_i)) \leq SPE(\mathbf{z}_i) \leq \max(SPE(\mathbf{z}_i)) \quad (3.49)$$

Si  $\mathbf{z}_i$  est en défaut, les expressions (3.48) et (3.49) permettent d'avoir :

$$\delta^2 \leq \min(SPE(\mathbf{z}_i)) \leq SPE(\mathbf{z}_i) \leq \max(SPE(\mathbf{z}_i)) \quad (3.50)$$

$\Rightarrow$

$$\min(SPE(\mathbf{z}_i)) \geq \delta^2 \quad (3.51)$$

Or l'expression de  $SPE(\mathbf{z}_i)$  (2.34) est :  $SPE(\mathbf{z}_i) = 1 - \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$

$SPE(\mathbf{z}_i)$  remplacé par son expression dans (3.51) est :

$$\min \left( 1 - \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \right) \geq \delta^2 \quad (3.52)$$

Ce qui équivaut à :

$$\max \left( \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \right) \leq 1 - \delta^2 \quad (3.53)$$

Une observation affectée par un défaut le long d'une direction s'écrit :  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$ . En fonction de ses composantes,  $\mathbf{z}_i$  s'écrit :

$$\mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}]_1 \\ \vdots \\ [\mathbf{x}]_i - f_i \\ \vdots \\ [\mathbf{x}]_m \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

On obtient donc pour  $\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_q)$  :

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_q) &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_q)^\top (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_q) \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i - \mathbf{x}_q)^\top (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i - \mathbf{x}_q) \right] \\ &= \prod_{k=1, k \neq i}^m \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_q]_k)^2 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} ([\mathbf{x}]_i - f_i - [\mathbf{x}_q]_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

En posant :

$$\Gamma_q = \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} ([\mathbf{x}]_i - f_i - [\mathbf{x}_q]_i)^2 \right] \quad (3.56)$$

$\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q) \right] \\ &= \prod_{k=1}^m \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_q]_k)^2 \right]\end{aligned}\quad (3.57)$$

En enlevant la composante  $i$  dans (3.57), elle devient :

$$\kappa_{-i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) = \prod_{k=1, k \neq i}^m \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_q]_k)^2 \right] \quad (3.58)$$

A partir de (3.55), (3.56) et (3.58),  $\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_q)$  s'écrit :

$$\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_q) = \kappa_{-i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) \Gamma_q \quad (3.59)$$

Le développement de  $\Gamma_q$  donne :

$$\begin{aligned}\Gamma_q &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} ([\mathbf{x}]_i - f_i - [\mathbf{x}_q]_i)^2 \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( ([\mathbf{x}]_i - [\mathbf{x}_q]_i)^2 - 2([\mathbf{x}]_i - [\mathbf{x}_q]_i) f_i + f_i^2 \right) \right]\end{aligned}\quad (3.60)$$

L'expression de  $[\mathbf{x}]_i - [\mathbf{x}_q]_i$  se calcule en fonction de la direction de reconstruction  $\boldsymbol{\xi}_i$  par :

$$[\mathbf{x}]_i - [\mathbf{x}_q]_i = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \quad (3.61)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Gamma_q &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i)^2 - 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i f_i + f_i^2 \right) \right] \\ &= \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i - f_i \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (3.62)$$

L'évaluation de  $\kappa(\mathbf{z}_i)$  en tenant compte de l'expression  $\Gamma_q$  est :

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) \quad (3.63)$$

avec

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \Gamma_N \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

et

$$\boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) = \left[ \kappa_{-i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \quad \kappa_{-i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad \kappa_{-i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N) \right]^\top$$

A partir de (3.53) et (3.63), nous avons :

$$\max \left( \boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{C} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) \right) \leq 1 - \delta^2 \quad (3.65)$$

En considérant la décomposition en valeurs propres et vecteurs propres de  $\mathbf{C}$  (2.35) et en prenant le maximum de cette décomposition, l'inégalité (3.65) s'écrit :

$$\lambda_{\max}(\mathbf{C}) \max \left( \boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) \right) \leq 1 - \delta^2 \quad (3.66)$$

A partir de (2.35), on déduit :

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\mathbf{C}) &= \frac{1}{N-1} \lambda_{\max}(\widehat{\boldsymbol{\Lambda}}^{-1}) \\ &= \frac{1}{(N-1)\lambda_\ell} \end{aligned} \quad (3.67)$$

avec  $\lambda_\ell$  la  $\ell^{\text{ème}}$  plus grande valeur propre de la matrice de covariance  $\mathbf{S}$ .

L'équation  $\boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x})$  dans (3.66) est égale à :

$$\boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) = \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \Gamma_1^2 + \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \Gamma_2^2 + \cdots + \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N) \Gamma_N^2 \quad (3.68)$$

Ainsi l'expression  $\max \left( \boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) \right)$  peut être majorée par  $N \max_q \kappa^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_q)$  :

$$\max \left( \boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) \right) \leq N \max_q \kappa^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_q) \quad (3.69)$$

Car à partir de (3.59),  $N \max_q \kappa^2(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_q) = N \max_q \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) \Gamma_q^2$ .

Alors :

$$\max \left( \boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) \right) \leq N \max_q \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) \Gamma_q^2 \quad (3.70)$$

**Analyse de l'expression  $N \max_q \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) \Gamma_q^2$**

Dans l'expression de  $N \max_q \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q) \Gamma_q^2$ ,  $\Gamma_q^2$  (3.62) est une exponentielle décroissante.  $\Gamma_q^2$  est maximum quand  $\frac{1}{\sigma^2} \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i - f_i \right)^2$  est minimum et  $\kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_q)$  est maximum quand  $\mathbf{x}_q$  est proche de  $\mathbf{x}$  pour toute direction exceptée la  $i^{\text{ème}}$ . Il faut alors chercher l'observation  $\mathbf{x}_{q^*}$  qui vérifie :

$$q^* = \arg \min_q \left( \sum_{k=1, k \neq i}^m ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_q]_k)^2 \right) \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right| \quad (3.71)$$

A partir de (3.66), (3.67), (3.70) et en prenant en compte l'observation  $\mathbf{x}_{q^*}$  retenue (3.71), nous pouvons écrire que :

$$\lambda_{\max}(\mathbf{C}) \max \left( \boldsymbol{\kappa}_{-i}^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^2 \boldsymbol{\kappa}_{-i}(\mathbf{x}) \right) \leq \frac{1}{(N-1)\lambda_\ell} N \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \Gamma_{q^*}^2 \leq 1 - \delta^2 \quad (3.72)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{N}{(N-1)\lambda_\ell} \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \Gamma_{q^*}^2 \leq 1 - \delta^2 \quad (3.73)$$

L'expression de  $\Gamma_{q^*}$  (obtenue à partir de 3.62) remplacée dans (3.73) conduit à :

$$\frac{N}{(N-1)\lambda_\ell} \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \exp \left[ -\frac{1}{\sigma^2} \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q^*})^\top \boldsymbol{\xi}_i - f_i \right)^2 \right] \leq 1 - \delta^2 \quad (3.74)$$

Pour raison de simplification, nous posons :

$$d_i = \left| (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{q^*})^\top \boldsymbol{\xi}_i \right| \quad (3.75)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{N}{(N-1)\lambda_\ell} \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \exp \left[ -\frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 \right] &\leq 1 - \delta^2 \\ \exp \left[ -\frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 \right] &\leq \frac{(1 - \delta^2) \frac{(N-1)\lambda_\ell}{N}}{\kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*})} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Le logarithme de l'expression (3.76) s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 &\leq \log(1 - \delta^2) + \log \left[ \frac{(N-1)\lambda_\ell}{N} \right] - \log \left[ \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \right] \\ -\frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 &\leq \log(1 - \delta^2) - \log \left[ \frac{N}{(N-1)\lambda_\ell} \right] - \log \left[ \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \right] \\ \frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 &\geq \log \left[ \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \right] + \log \left[ \frac{N}{(N-1)\lambda_\ell} \right] - \log(1 - \delta^2) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Soit :

$$d = \log \left[ \frac{N}{(N-1)\lambda_\ell} \right] - \log(1 - \delta^2) \quad (3.78)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 \geq \log \left[ \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \right] + d \quad (3.79)$$

L'expression  $\log \left[ \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \right]$  peut se définir à partir de (3.58) comme :

$$\begin{aligned} \log \left[ \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \right] &= \log \left\{ \prod_{k=1, k \neq i}^m \exp \left[ -\frac{1}{\sigma^2} ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_{q^*}]_k)^2 \right] \right\} \\ &= \sum_{k=1, k \neq i}^m -\frac{1}{\sigma^2} ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_{q^*}]_k)^2 \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1, k \neq i}^m ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_{q^*}]_k)^2 \end{aligned} \quad (3.80)$$

En remplaçant l'expression de  $\log \left[ \kappa_{-i}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{q^*}) \right]$  (3.80) dans (3.79), nous obtenons :

$$\frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 \geq -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1, k \neq i}^m ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_{q^*}]_k)^2 + d \quad (3.81)$$

Soit :

$$\vartheta_1 = \sum_{k=1, k \neq i}^m ([\mathbf{x}]_k - [\mathbf{x}_{q^*}]_k)^2 \quad (3.82)$$

L'expression (3.81) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{\sigma^2} (d_i - f_i)^2 \geq -\frac{\vartheta_1}{\sigma^2} + d \quad (3.83)$$

$$(d_i - f_i)^2 \geq \sigma^2 d - \vartheta_1$$

Si nous posons :

$$\vartheta = \sigma^2 d - \vartheta_1 \quad (3.84)$$

Alors :

$$(d_i - f_i)^2 \geq \vartheta \quad (3.85)$$

$$f_i^2 - 2d_i f_i + d_i^2 - \vartheta \geq 0$$

Pour résoudre (3.85) avec pour variable  $f_i$ , le discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= d_i^2 - d_i^2 + \vartheta \\ &= \vartheta \end{aligned} \quad (3.86)$$

Le discriminant  $\Delta$  dépend uniquement de  $\vartheta$  et donc du signe de  $\vartheta$ . Si  $\vartheta \geq 0$  alors  $\Delta \geq 0$ .  $\vartheta$  est positif ou nul si  $\sigma^2 d \geq \vartheta_1$  (3.84) puisque  $\vartheta_1$  est positif et  $\sigma^2 d$  est aussi positif.  $d$  (3.78) est forcément positif car  $-\log(1 - \delta^2) > 0$  et  $\log \left[ \frac{N}{(N-1)\lambda_\ell} \right] > 0$ .

Si  $\Delta \geq 0$ , il existe deux solutions :

$$\widehat{f_{i1,2}^0} = d_i \pm \sqrt{\vartheta} \quad (3.87)$$

L'amplitude minimale de ces solutions (3.87) est considérée comme le point de départ de l'algorithme.

Un exemple pour illustrer cette troisième technique est indiquée sur la figure 3.7. Comme dans les deux cas précédents, nous considérons la même observation en défaut marquée par une étoile rouge. La recherche dans la base de données de l'observation dont le  $SPE$  est en limite du seuil  $\delta^2$  dans la direction de reconstruction  $\mathbf{y}_1$  est celle encadrée en magenta. En faisant cela, nous recherchons dans la base de données l'observation qui vérifie (3.71). Par (3.87), cette observation retenue sert à déterminer l'amplitude du défaut estimée de  $f_i$  comme point initial de début de l'algorithme du point fixe.

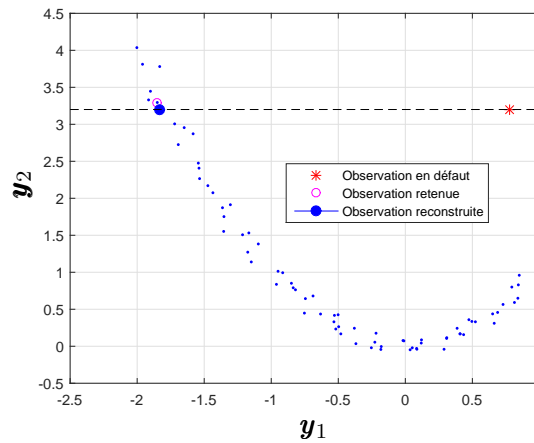


FIGURE 3.7 – Technique de la limite de détection

Après l'application de l'algorithme, l'observation reconstruite avec l'amplitude du défaut estimée est marquée en bleu foncé. Le défaut sur cette observation est bien corrigé et l'observation reconstruite est ramenée dans la base de données. L'indice de détection  $SPE$  évalué avec l'observation reconstruite  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  égal à 0.02 est inférieur au seuil  $\delta^2$ .

### 3.3.4 Exemple d'application des techniques d'initialisation

Dans cet exemple, nous considérons que l'observation en défaut se situe dans la région à mi-distance entre les données, une zone différente de l'exemple utilisé comme référence. La première technique et la troisième technique peuvent être appliquées pour tenter de corriger le défaut. Mais la deuxième technique ne peut pas s'appliquer sur cet exemple parce que l'observation en défaut n'est pas éloignée de la base de données (figure 3.8). C'est l'une des hypothèses pour l'application de la deuxième technique c'est-à-dire  $\kappa(\mathbf{x}) \approx 0$ .

#### 3.3.4.1 Technique de l'observation la plus proche

Sur la figure 3.8, l'observation affectée par le défaut est marquée par une étoile rouge. Pour cette première technique, on recherche l'observation la plus proche de l'observation en défaut (dont le  $SPE$  est égal à 0.26) dans la direction  $\mathbf{y}_1$ . L'observation encerclée en magenta indique l'observation retenue. Cette observation retenue dans la base de donnée est l'observation la plus proche de l'observation en défaut dans la direction  $\mathbf{y}_1$  selon (3.38). Avec cette observation retenue, nous déterminons l'estimation de  $f_i$  (3.39) et nous appliquons l'algorithme itératif du point fixe. La solution trouvée c'est-à-dire l'observation reconstruite avec l'estimation du défaut estimée  $\hat{f}_i$  (1.39) est marquée en bleu foncé sur la figure 3.8.

Contrairement au premier exemple où avec la première technique, l'observation reconstruite n'est pas ramenée dans la base de données (figure 3.4), pour cet exemple, l'observation en défaut est bien corrigée. L'indice de détection évalué après reconstruction de l'observation  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  égal à 0.009 est inférieur au seuil  $\delta^2$ .

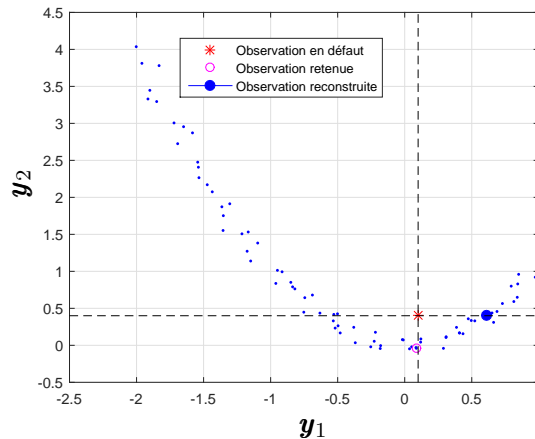


FIGURE 3.8 – Technique de l'observation la plus proche

Dans cette technique de l'observation la plus proche, lorsque nous observons l'observation retenue encerclée en magenta sur la figure 3.9, elle est située du côté gauche de l'axe  $\mathbf{y}_2$  passant par l'observation en défaut (marquée par une étoile rouge). Mais nous constatons que l'observation reconstruite (en bleu) est située du côté droit de l'axe  $\mathbf{y}_2$ . L'observation reconstruite est

située du côté droit parce qu'il y a plus d'observations de ce côté droit en comparaison au côté gauche en suivant la direction  $\mathbf{y}_1$  faisant un poids plus élevé.

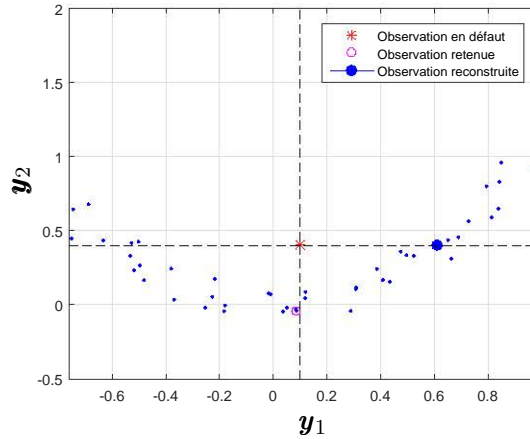


FIGURE 3.9 – Zoom sur les observations dans la technique de l'observation la plus proche

### 3.3.4.2 Technique de la limite de détection

L'illustration de cette troisième technique est indiquée sur la figure 3.10. La même observation en défaut marquée par une étoile rouge est considérée. La recherche dans la base de données de l'observation dont le  $SPE$  est en limite du seuil  $\delta^2$  dans la direction de reconstruction  $\mathbf{y}_1$  est l'observation encerclée en magenta. Cette observation retenue correspond à l'observation de la base de données qui vérifie (3.71). Cette observation retenue permet de déterminer l'amplitude du défaut estimée  $\hat{f}_i$  comme point initial de début de l'algorithme du point fixe (3.87).

Sur la figure 3.10, après l'application de l'algorithme du point fixe, l'observation reconstruite avec l'amplitude du défaut estimée est marquée en bleu foncé. Le défaut sur cette observation est corrigé et l'observation reconstruite est ramenée dans la base de données. L'indice de détection  $SPE$  évalué avec l'observation reconstruite  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  égal à 0.004 est inférieur au seuil  $\delta^2$ .

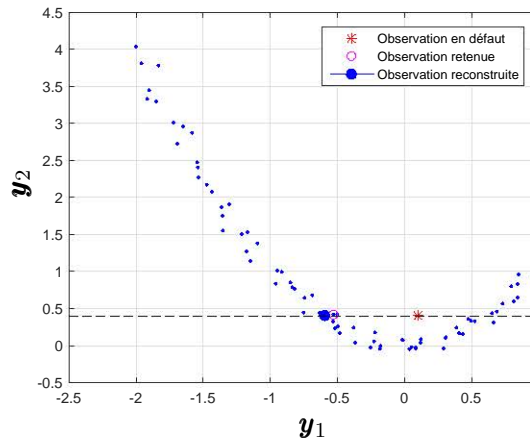


FIGURE 3.10 – Technique de la limite de détection

**Remarque :** Nous constatons, pour la reconstruction de l'observation affectée par le défaut marquée par une étoile rouge (figures 3.8 et 3.10), suivant la direction de reconstruction  $\mathbf{y}_1$  qu'il

Il y a deux solutions possibles. Dans la première technique, l'observation reconstruite est située du côté droit de l'observation en défaut (figure 3.8) alors que dans la troisième technique l'observation reconstruite se situe plutôt à gauche de celle-ci (figure 3.10). A travers cet exemple, nous démontrons aussi qu'il n'est pas évident de prévoir à l'avance dans quelle zone peut se situer l'observation reconstruite dans la base de données.

De plus, si nous considérons la direction de reconstruction  $y_2$ , en appliquant la troisième technique d'initialisation, l'observation reconstruite est indiquée sur la figure 3.11.

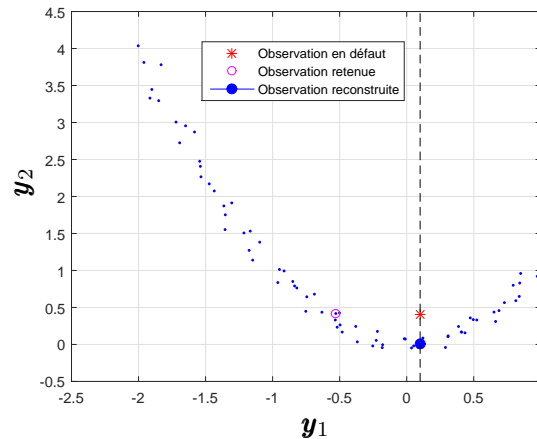


FIGURE 3.11 – Technique de la limite de détection dans la direction  $y_2$

Au total, en prenant en compte les deux directions de reconstruction  $y_1$  et  $y_2$  nous concluons que trois solutions sont possibles pour la reconstruction de cette observation en défaut (figures 3.8, 3.10 et 3.11). Ceci montre clairement la difficulté de reconstruire une observation en défaut.

### 3.4 Conclusion

Après la phase de détection de défauts, l'étape de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts a été présentée dans ce chapitre. Quelques méthodes de contributions existantes ont été indiquées. Il s'agit notamment des méthodes de calcul de contributions et les méthodes de contributions par reconstruction. Dans la méthode de calcul de contributions, la variable ayant la plus grande contribution à l'indice de détection est considérée comme la variable affectée par un défaut. Dans la méthode de contributions par reconstruction, pour chaque observation affectée par un défaut, les mesures des variables sont corrigées avec l'estimation de l'amplitude du défaut. Pour trouver l'estimation de l'amplitude du défaut, l'indice de détection de défaut a été minimisé. Les variables qui ont été supposées affectées par des défauts sont celles pour lesquelles l'indice de détection pour l'observation reconstruite est inférieur au seuil.

Si l'utilisation du noyau apporte des solutions et résout le problème du cas non linéaire par la projection des données dans l'espace des caractéristiques, elle en pose d'autres. La fonction non linéaire ayant servi à cette projection n'est pas explicite. L'estimation de l'amplitude du défaut ne pouvant se faire que dans l'espace d'origine pour une interprétation correcte des résultats, un retour inverse de l'espace des caractéristiques vers l'espace d'origine s'est imposé. Ce problème traduit en un problème d'optimisation a été résolu par l'algorithme itératif du point fixe qui nécessite une initialisation. Nous avons proposé trois techniques d'initialisation simulées sur un exemple : la technique en considérant l'observation la plus proche de l'observation en



défaut dans une direction donnée, la technique en considérant une zone d'attraction de la base de données et la technique en limite de détection suivant la direction de reconstruction qui a donné la meilleure satisfaction.

Après avoir présenté ces méthodes existantes sur les contributions pour la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts, dans le chapitre 4, nous proposons une méthode plus rigoureuse de contributions sous contraintes. Une comparaison avec les méthodes de contributions existantes est effectuée sur un exemple simulé.



## Chapitre 4

# Contributions sous contraintes pour la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>83</b>
<b>4.2</b>	<b>Méthode proposée de contributions sous contraintes</b>	<b>84</b>
4.2.1	Problème d'optimisation sous contraintes de non négativité et de somme unité	85
4.2.2	Méthode de résolution	87
4.2.3	Cas de défauts simultanés affectant plusieurs variables	93
<b>4.3</b>	<b>Présentation des méthodes de contributions sur des données simulées</b>	<b>94</b>
4.3.1	Détection et localisation du défaut affectant la variable $y_1$	95
4.3.2	Détection et localisation du défaut affectant la variable $y_2$	98
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>101</b>

---

### 4.1 Introduction

A la suite des méthodes de contributions existantes (la méthode de calcul de contributions et la méthode de contributions par reconstruction) présentées dans le chapitre 3, nous proposons dans ce chapitre une nouvelle méthode de contributions sous contraintes. Dans la méthode de contributions par reconstruction, l'amplitude du défaut est estimée en résolvant le problème d'optimisation (3.20). Il existe des méthodes pour résoudre ce problème mais elles présentent quelques inconvénients. La plupart de ces méthodes traitent le problème de localisation sur des systèmes avec un défaut affectant une seule variable à la fois. Pour la résolution du problème d'optimisation non linéaire permettant de trouver l'estimation de l'amplitude du défaut dans une direction donnée, certains auteurs ont proposé un algorithme itératif du point fixe. Les méthodes proposées sont instables et ont des problèmes de minima locaux, notamment le cas de [AQ10]. La solution que nous proposons dans ce chapitre au regard de tous ces manquements est une solution parcimonieuse qui consiste à minimiser l'indice de détection ( $SPE$ ,  $T^2$  ou  $\phi$ ) sous certaines contraintes [MKAM18].

Après la résolution de (3.20), l'estimation de l'amplitude du défaut peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire des distances entre les observations affectées par les défauts et les

observations de l'ensemble d'apprentissage selon les directions de reconstruction. Les coefficients de cette combinaison linéaire peuvent être négatifs ou positifs, ce qui peut induire une compensation de ces coefficients dans la combinaison linéaire. Dans la solution que nous proposons, l'estimation de l'amplitude des défauts est écrite comme une somme pondérée de ces distances dans les directions de reconstruction. A cela, nous ajoutons une contrainte de somme unité sur les coefficients. Le problème d'estimation devient alors un problème d'estimation parcimonieuse des coefficients de cette somme pondérée. Le problème d'optimisation initial (3.20) est traduit en un problème d'optimisation sous contraintes de non négativité des coefficients ([KHR<sup>+</sup>13], [SLSL07]) et de somme unité. Pour la résolution de ce problème d'optimisation sous contraintes de non négativité, certaines approches existent dans la littérature notamment les méthodes de type gradient projeté et les méthodes de type descente du gradient normalisée ("Split Gradient Method" - SGM) [TLD<sup>+</sup>13]. La méthode SGM sera utilisée dans ce chapitre. L'une des difficultés de cette méthode est le choix du pas pour assurer la convergence de l'algorithme. A chaque itération, les contraintes sur les coefficients sont vérifiées pour s'assurer qu'elles satisfont aux contraintes de somme unité. Il faut aussi noter que l'indice de détection ( $SPE(\cdot)$ ,  $T^2(\cdot)$  ou  $\phi(\cdot)$ ) est une fonction non linéaire et non convexe, ce qui limite la possibilité d'utiliser certains critères pour le choix du pas ou le choix d'une fonction de normalisation nécessaire à la résolution du problème et cela produit ainsi un calcul coûteux.

Dans la première partie de ce chapitre, nous développons une nouvelle méthode de localisation de défauts par reconstruction parcimonieuse des variables en défaut. La méthode de calcul des coefficients pour assurer la contrainte de non négativité et de somme unité sera effectuée ainsi que l'algorithme correspondant à sa résolution. La deuxième partie concerne l'application des méthodes de contributions existantes et de la nouvelle méthode de contributions sous contraintes sur un exemple simulé.

## 4.2 Méthode proposée de contributions sous contraintes

En considérant l'indice de détection  $SPE$ , l'expression pour l'estimation de l'amplitude du défaut donné par (3.29) peut s'écrire :

$$\hat{f}_i = \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top \mathbf{d}_i(\mathbf{x}), \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{d}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^N \quad (4.1)$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\text{Diag}(\boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_i)) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_i)}{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_i)} \quad (4.2)$$

et

$$\mathbf{d}_i(\mathbf{x}) = \left[ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \quad \cdots \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right]^\top \quad (4.3)$$

Les coefficients du vecteur  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  ne sont pas strictement positifs mais leur somme est égale à l'unité. L'expression (4.1) sous forme de somme s'écrit :

$$\hat{f}_i = \sum_{j=1}^N \hat{\beta}_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \quad (4.4)$$

Par l'équation (4.4), l'estimation de l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  décrit une combinaison linéaire des distances entre l'observation en défaut et toutes les observations de l'ensemble d'apprentissage dans la direction de reconstruction  $\boldsymbol{\xi}_i$ . Par expérience, on constate que les coefficients du vecteur  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  peuvent être négatifs ou positifs et de somme unité, ce qui avec le signe de  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i$  peut entraîner des compensations entre les différents termes de la somme. Ces compensations nuisent à la parcimonie du modèle KPCA.

### 4.2.1 Problème d'optimisation sous contraintes de non négativité et de somme unité

Dans la méthode de contributions basées sur la reconstruction, l'amplitude du défaut  $f_i$  est directement estimée. Dans la nouvelle méthode que nous proposons, au lieu d'estimer directement  $f_i$ , l'idée que nous élaborons (à partir des travaux de [KHR<sup>+</sup>13]) est de chercher plutôt à estimer le vecteur des coefficients  $\boldsymbol{\beta}$ . L'estimation des coefficients  $\beta_j$  est considérée comme la somme pondérée des distances entre l'observation en défaut et toutes les observations de l'ensemble d'apprentissage dans la direction de reconstruction.

$$f_i = \sum_{j=1}^N \beta_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \quad (4.5)$$

Pour obtenir une solution parcimonieuse, des contraintes de non négativité et de somme unité des coefficients du vecteur  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$  sont ajoutées par (4.6) et (4.7) avec :

contraintes de non négativité

$$\beta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.6)$$

et de somme unité

$$\sum_{j=1}^N \beta_j = 1 \quad (4.7)$$

Le problème d'optimisation résolu précédemment (3.20), en considérant l'indice  $SPE$  peut être reformulé comme un problème d'optimisation sous contraintes :

$$\hat{f}_i = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} SPE(\mathbf{z}_i) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i \\ f_i = \sum_{j=1}^N \beta_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{cases} \quad (4.8)$$

sous les contraintes (4.6) et (4.7).

Plusieurs méthodes existent pour la résolution de ce problème d'optimisation sous contraintes de non négativité des coefficients du vecteur  $\boldsymbol{\beta}$ . Nous pouvons citer notamment :

- La méthode du gradient qui est utilisée pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes d'inégalité.
- La méthode de la descente du gradient normalisé qui intègre directement la contrainte de somme unité et ramène le problème à un problème d'optimisation sous contraintes de non négativité [LTR11], [TLD<sup>+</sup>13].

Le lagrangien associé à ce problème d'optimisation s'écrit :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu}, \gamma) = SPE(\mathbf{z}_i) - \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\beta} - \gamma(1 - \mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\beta}) \quad (4.9)$$

avec :

$$\mathbf{1}_N = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{1}_N \in \mathbb{R}^N \quad (4.10)$$

Les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu}, \gamma)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} - \mu_j - \gamma = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

$$\mu_j \beta_j = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.12)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.13)$$

$$\beta_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

$$\mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\beta} = 1 \quad (4.15)$$

L'évaluation du terme  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j}$  de (4.11) est :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} = -2\boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} \quad (4.16)$$

Pour trouver la dérivée partielle du vecteur  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $\beta_j$  donnée par  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j}$ , il faut d'abord calculer la dérivée partielle de chacune de ses composantes.

Le calcul de  $\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell)$  s'écrit :

$$\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell) = \exp \left[ -\frac{(\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_\ell)^\top (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_\ell)}{2\sigma^2} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i &= \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i \\ \mathbf{z}_i &= \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i \sum_{j=1}^N \beta_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{aligned} \quad (4.17)$$

Le calcul de la dérivée partielle de  $\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell)$  par rapport à  $\beta_j$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell)}{\partial \beta_j} &= \frac{\partial \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell)}{\partial \mathbf{z}_i} \frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial \beta_j} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell) \end{aligned} \quad (4.18)$$

A partir de la valeur de  $\frac{\partial \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell)}{\partial \beta_j}$ , le calcul du vecteur  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j}$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} &= \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_\ell) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_1)^\top \boldsymbol{\xi}_i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_N)^\top \boldsymbol{\xi}_i \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \end{aligned} \quad (4.19)$$

En considérant (3.27), l'expression  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j}$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} = \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \quad (4.20)$$

et l'équation (4.16) s'écrit :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} = -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \quad (4.21)$$

En remplaçant (4.21) dans (4.11), les conditions d'optimalité deviennent :

$$-\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) - \mu_j - \gamma = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.22)$$

$$\mu_j \beta_j = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.23)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.24)$$

$$\beta_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.25)$$

$$\mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\beta} = 1 \quad (4.26)$$

A partir de (3.28), l'expression de  $\mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i)$  est remplacée dans (4.22) et les conditions d'optimalité sont :

$$-\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \left( \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) - f_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \right) - \mu_j - \gamma = 0, j = 1, \dots, N \quad (4.27)$$

$$\mu_j \beta_j = 0, j = 1, \dots, N \quad (4.28)$$

$$\mu_j \geq 0, j = 1, \dots, N \quad (4.29)$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, N \quad (4.30)$$

$$\mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\beta} = 1 \quad (4.31)$$

## 4.2.2 Méthode de résolution

Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode de la descente du gradient normalisé (SGM). Pour s'affranchir de la contrainte de somme unité, un changement de variable est d'abord fait :

$$\beta_j = \frac{\omega_j}{\sum_{k=1}^N \omega_k} \quad (4.32)$$

avec  $\omega_j \geq 0, j = 1, \dots, N$ .

Le problème se ramène alors à un problème d'optimisation sous contraintes inégalités. Ensuite, il faut procéder à la minimisation par rapport à la nouvelle variable  $\omega_j$ , sous réserve d'une contrainte de non négativité uniquement, en utilisant la méthode de descente du gradient et revenir après aux variables initiales  $\beta_j$ .

La fonction lagrangienne pour le problème de contrainte de non négativité s'écrit :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\mu}) = SPE(\mathbf{z}_i) - \boldsymbol{\mu}^\top \boldsymbol{\beta} \quad (4.33)$$

A l'optimum  $(\boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ , les conditions de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\left. \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^*} - \boldsymbol{\mu}^* = 0 \quad (4.34)$$

$$\mu_j^* \beta_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.35)$$

$$\mu_j^* \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.36)$$

$$\beta_j^* \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.37)$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont donnés par (4.34) :

$$\boldsymbol{\mu}^* = \left. \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^*} \quad (4.38)$$

En remplaçant (4.38) dans (4.35), nous obtenons :

$$\beta_j^* \left. \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} \right|_{\beta_j=\beta_j^*} = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.39)$$

sous les contraintes :

$$\left. \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} \right|_{\beta_j=\beta_j^*} \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.40)$$

$$\beta_j^* \geq 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (4.41)$$

Pour résoudre ce système d'équations non linéaires (4.39) sous les contraintes (4.40) et (4.41), une mise à jour de la descente du gradient est définie comme :

$$\begin{aligned} \beta_j^{(k+1)} &= \beta_j^{(k)} - \eta_j^{(k)} g_j(\beta_j^{(k)}) \beta_j^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} \\ &= \beta_j^{(k)} \left( 1 - \eta_j^{(k)} g_j(\beta_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

avec  $\eta_j^{(k)}$  le pas du gradient,  $g_j(\beta_j^{(k)}) > 0$  une fonction arbitraire de normalisation du gradient

et  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} = \left. \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} \right|_{\beta_j=\beta_j^{(k)}}$ .

Si  $\beta_j^{(k)} \geq 0$  alors la contrainte de non négativité de  $\beta_j^{(k+1)}$  (4.42) est garantie si :

$$1 - \eta_j^{(k)} g_j(\beta_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} \geq 0 \quad (4.43)$$

Deux cas peuvent être considérés en fonction du signe de  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j}$  :

- Si  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} \leq 0$ , l'expression (4.43) est satisfaite et donc  $\beta_j^{(k+1)} \geq 0$  alors aucune restriction sur le pas du gradient.



- Si  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} > 0$ , la condition de non négativité ( $\beta_j^{(k+1)} \geq 0$ ) est vérifiée si :

$$0 \leq \eta_j^{(k)} \leq \frac{1}{g_j(\beta_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j}} \quad (4.44)$$

Pour éviter un calcul de pas coûteux pour chaque composante de  $\boldsymbol{\beta}$ , en pratique, le pas du gradient  $\eta^{(k)}$  peut être choisi unique pour toutes les directions de descente dans l'intervalle  $]0, \eta_{\max}^{(k)}]$  :

$$\eta_{\max}^{(k)} = \min_{j=1, \dots, N} \frac{1}{g_j(\beta_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j}} \quad (4.45)$$

Concernant le choix des fonctions de normalisation  $g(\cdot)$ , les méthodes proposées par [LTR11], [TLD<sup>+</sup>13] basées sur la propriété de convexité du critère minimisé ne peuvent pas être appliquées dans notre cas parce que la fonction  $SPE(\cdot)$  n'est pas convexe.

Les dérivées partielles de  $SPE(\cdot)$  par rapport aux nouvelles variables définies en (4.32) où la contrainte de non négativité est reportée sur les variables  $\omega_j$  s'écrivent :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \omega_j} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_k} \frac{\partial \beta_k}{\partial \omega_j}, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.46)$$

A partir de (4.32), le calcul de  $\frac{\partial \beta_k}{\partial \omega_j}$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_k}{\partial \omega_j} &= \frac{\frac{\partial \omega_k}{\partial \omega_j} \sum_{k=1}^N \omega_k - \omega_j \frac{\partial \sum_{k=1}^N \omega_k}{\partial \omega_k}}{\left( \sum_{k=1}^N \omega_k \right)^2} \\ &= \frac{\delta_{jk} - \beta_k}{\sum_{k=1}^N \omega_k} \end{aligned} \quad (4.47)$$

avec :

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (4.48)$$

En remplaçant (4.47) dans (4.46), le calcul de  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \omega_j}$  est :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \omega_j} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \omega_k} \left( \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} - \sum_{k=1}^N \beta_k \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_k} \right) \quad (4.49)$$

Par analogie, à partir de (4.42), la mise à jour de  $\omega_j$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega_j^{(k+1)} &= \omega_j^{(k)} - \eta_j^{(k)} g_j(\omega_j^{(k)}) \omega_j^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j} \\ &= \omega_j^{(k)} - \eta_j^{(k)} g_j(\omega_j^{(k)}) \frac{\omega_j^{(k)}}{\sum_{k=1}^N \omega_k^{(k)}} \left( \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} - \sum_{k=1}^N \beta_k^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_k} \right)\end{aligned}\quad (4.50)$$

Il faut souligner que, comme  $\sum_{k=1}^N \omega_k^{(k+1)} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{(k)}$ , la division de (4.50) à gauche de l'égalité par  $\sum_{k=1}^N \omega_k^{(k+1)}$  et à droite de l'égalité par  $\sum_{k=1}^N \omega_k^{(k)}$ , s'écrit :

$$\beta_j^{(k+1)} = \beta_j^{(k)} - \eta_j^{(k)} g_j(\beta_j^{(k)}) \beta_j^{(k)} \frac{1}{\sum_{k=1}^N \omega_k^{(k)}} \left( \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} - \sum_{k=1}^N \beta_k^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_k} \right)\quad (4.51)$$

Étant donné que  $\sum_{k=1}^N \beta_k^{(k+1)} = \sum_{k=1}^N \beta_k^{(k)}$ , l'algorithme satisfait la condition de somme unité si le vecteur initial  $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$  satisfait cette contrainte.

**Preuve de la relation :** 
$$\sum_{j=1}^N \omega_j^{(k+1)} = \sum_{j=1}^N \omega_j^{(k)}$$

A partir de (4.50),  $\omega_j^{(k+1)}$  s'écrit :

$$\omega_j^{(k+1)} = \omega_j^{(k)} m_j^{(k)}\quad (4.52)$$

avec :

$$m_j^{(k)} = 1 - \eta_j^{(k)} g_j(\omega_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j}\quad (4.53)$$

Nous choisissons un pas unique  $\eta^{(k)}$  pour limiter le temps de calcul.

A partir de (4.52),  $\sum_{j=1}^N \omega_j^{(k+1)} = \sum_{j=1}^N \omega_j^{(k)}$  si :

$$\sum_{j=1}^N g_j(\omega_j^{(k)}) \omega_j^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j} = 0\quad (4.54)$$

Considérons les dérivées partielles de  $SPE(\cdot)$  par rapport à  $\omega_j$  établies en (4.49) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \omega_j} &= \sum_{r=1}^N \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_r} \frac{\partial \beta_r}{\partial \omega_j} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial \omega_j} = \frac{\delta_{jr} - \beta_r}{\sum_{r=1}^N \omega_r} \\ &= \frac{1}{\sum_{r=1}^N \omega_r} \left( \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} - \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_r} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Étant donné que le terme  $\sum_{r=1}^N \omega_r^{(k)}$  est le même pour toutes les composantes, la fonction  $g_j(\omega_j^{(k)})$  pour normaliser les directions du gradient peut être choisie comme :

$$g_j(\omega_j^{(k)}) = \sum_{r=1}^N \omega_r^{(k)} \quad (4.56)$$

Remplaçons (4.55) et (4.56) dans (4.54), nous avons :

$$\sum_{j=1}^N g_j(\omega_j^{(k)}) \omega_j^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j} = \sum_{j=1}^N \omega_j^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_j} - \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j^{(k)}}{\sum_{r=1}^N \omega_r^{(k)}} \sum_{r=1}^N \omega_r^{(k)} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \beta_r} = 0 \quad (4.57)$$

□

La division de (4.52) à gauche de l'égalité par  $\sum_{r=1}^N \omega_r^{(k+1)}$  et à droite de l'égalité par  $\sum_{r=1}^N \omega_r^{(k)}$ , s'écrit :

$$\beta_j^{(k+1)} = \beta_j^{(k)} m_j^{(k)} \quad (4.58)$$

A partir de (4.55), l'évaluation du terme  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} - \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_r}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} - \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_r} &= \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} - \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial \beta_r} \\ &= \left( \frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} - \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial f_i}{\partial \beta_r} \right) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \end{aligned} \quad (4.59)$$

En considérant (4.5), la dérivée de  $\frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$  est :

$$\frac{\partial f_i}{\partial \beta_j} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i = \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (4.60)$$

La dérivée de  $\frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}$  introduite dans (4.59), l'équation devient :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} - \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_r} = \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i - \sum_{r=1}^N \beta_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \quad (4.61)$$

Or nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i - \sum_{r=1}^N \beta_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \boldsymbol{\xi}_i &= \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i \sum_{r=1}^N \beta_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \boldsymbol{\xi}_i \quad \text{car } \boldsymbol{\xi}_i^\top \boldsymbol{\xi}_i = 1 \\
 &= \boldsymbol{\xi}_i^\top \left( (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \boldsymbol{\xi}_i \sum_{r=1}^N \beta_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \boldsymbol{\xi}_i \right) \\
 &= \boldsymbol{\xi}_i^\top ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) - \boldsymbol{\xi}_i f_i) \quad \text{car } f_i = \sum_{r=1}^N \beta_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \boldsymbol{\xi}_i \\
 &= \boldsymbol{\xi}_i^\top ((\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i) - \mathbf{x}_j) \\
 &= \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j) \quad \text{car } \mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i \\
 &= (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

En remplaçant le résultat du calcul de  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i - \sum_{r=1}^N \beta_r (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)^\top \boldsymbol{\xi}_i$  dans (4.61), elle s'écrit :

$$\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_j} - \sum_{r=1}^N \beta_r \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \beta_r} = (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \tag{4.63}$$

En remplaçant (4.63) dans (4.55), nous avons :

$$g_j(\omega_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \omega_j} = (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i}$$

Supposons que  $\beta_j^{(k)} > 0$  alors pour assurer la contrainte de non négativité de  $\beta_j^{(k+1)}$ , le signe de  $m_j^{(k)}$  défini en (4.53) doit être considéré. Pour cela, il faut étudier le signe de  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j}$  :

- Si  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j} \leq 0$  alors  $m_j^{(k)} \geq 1$ , la contrainte de non négativité est satisfaite  $\forall \eta^{(k)}$  et par conséquent  $\beta_j^{(k)}$  augmente.
- Si  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j} > 0$  alors pour assurer la contrainte de non négativité, le pas doit être choisi tel que :

$$0 \leq \eta^{(k)} \leq \max_{k \in \mathbf{E}} g_j(\omega_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j} \tag{4.64}$$

avec

$$\mathbf{E} = \left\{ j \mid \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial \omega_j} > 0 \right\} \tag{4.65}$$

donc  $0 \leq m_j^{(k)} \leq 1$  et  $\beta_j^{(k)}$  diminue.

Nous pouvons aussi noter que :

- Puisque le pas est choisi tel que  $m_j^{(k)}$  soit positive (4.64) et prenant en compte que  $\sum_{j=1}^N \beta_j^{(k+1)} = \sum_{j=1}^N \beta_j^{(k)}$ , le vecteur  $\beta_j^{(k+1)}$  satisfait les contraintes de non négativité et de somme unité si le vecteur  $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$  satisfait ces deux contraintes.
- Si nous supposons que le pas maximal dans (4.64) est atteint pour la  $\ell^{\text{ème}}$  observation, dans ce cas la valeur maximale du pas est définie par :

$$\eta_{\max}^{(k)} = \frac{1}{(\mathbf{z}_i^{(k)} - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial f_i}} \tag{4.66}$$

Et en considérant qu'à la  $k^{\text{ème}}$  itération,  $\eta^{(k)} \rightarrow \eta_{\max}^{(k)}$ , alors :

$$m_j^{(k)} = \left( 1 - \frac{(\mathbf{z}_i^{(k)} - \mathbf{x}_j)^\top \boldsymbol{\xi}_i \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial f_i}}{(\mathbf{z}_i^{(k)} - \mathbf{x}_\ell)^\top \boldsymbol{\xi}_i \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i^{(k)})}{\partial f_i}} \right) \quad (4.67)$$

Et dans ce cas  $\beta_j^{(k)}$  tend vers 0, ce qui explique l'idée de parcimonie.

De plus, des points fixes de la règle de mise à jour (4.58) se produisent lorsque :

- $\beta_j = 0$  et  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \omega_j} > 0$
- ou  $\beta_j > 0$  et  $m_j = 1$ , ce qui implique que  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_i)}{\partial \omega_j} = 0$

Ces deux points consistent en la mise en œuvre des conditions de Karush-Kuhn-Tucker et permettent d'être des points d'arrêt de l'algorithme.

### 4.2.3 Cas de défauts simultanés affectant plusieurs variables

Dans le cas des défauts multiples c'est-à-dire le cas des défauts affectant simultanément plusieurs variables, l'observation reconstruite (1.39) devient :

$$\hat{\mathbf{z}}_R = \mathbf{x} - \boldsymbol{\Xi}_R \hat{f}_R \quad (4.68)$$

avec la matrice  $\boldsymbol{\Xi}_R$  définie en (1.66).

L'estimation des coefficients  $\hat{\beta}_j$  dans (4.4) peut s'effectuer en considérant l'estimation comme la somme pondérée des distances entre l'observation en défaut et toutes les observations de l'ensemble d'apprentissage dans les directions de reconstruction :

$$\hat{f}_R = \sum_{j=1}^N \hat{\beta}_j \boldsymbol{\Xi}_R^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (4.69)$$

avec :

$$\hat{\beta}_j = \frac{\kappa(\hat{\mathbf{z}}_R, \mathbf{x}_j) \boldsymbol{\xi}_j^\top \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_R)}{\sum_{i=1}^N \kappa(\hat{\mathbf{z}}_R, \mathbf{x}_i) \boldsymbol{\xi}_i^\top \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}(\hat{\mathbf{z}}_R)} \quad (4.70)$$

Le problème d'optimisation sous contraintes (4.8) est alors :

$$\hat{f}_R = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} SPE(\mathbf{z}_R) \quad (4.71)$$

sous les contraintes de non négativité

$$\beta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (4.72)$$

et de somme unité

$$\sum_{j=1}^N \beta_j = 1 \quad (4.73)$$

Avec la même méthode de résolution que dans le cas développé précédemment c'est-à-dire la méthode de la descente du gradient normalisé, l'expression (4.42) sur les coefficients  $\beta_j^{(k+1)}$  s'écrit :

$$\beta_j^{(k+1)} = \beta_j^{(k)} \left( 1 - \eta_j^{(k)} g_j(\beta_j^{(k)}) \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_R^{(k)})}{\partial \beta_j} \right) \quad (4.74)$$

Après le choix de la fonction  $g_j(\beta_j^{(k)})$  (4.56) en supposons que  $\beta_j^{(k)} > 0$  pour la contrainte de non négativité et en considérant les deux cas :

- Si  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_R^{(k)})}{\partial f_R} \leq 0$  alors la contrainte de non négativité est satisfaite  $\forall \eta^{(k)}$  et donc  $\beta_j^{(k+1)}$  augmente.
- Si  $\frac{\partial SPE(\mathbf{z}_R^{(k)})}{\partial f_R} > 0$  avec le choix d'une valeur maximale à la  $\ell^{\text{ème}}$  observation et à la  $k^{\text{ème}}$  itération pour le pas :

$$\eta_{\max}^{(k)} = \frac{1}{\left(\mathbf{z}_R^{(k)} - \mathbf{x}_\ell\right)^\top \Xi_R \frac{\partial SPE(\mathbf{z}_R^{(k)})}{\partial f_R}} \quad (4.75)$$

Alors :

$$\beta_j^{(k+1)} = \beta_j^{(k)} \left( 1 - \frac{\left(\mathbf{z}_R^{(k)} - \mathbf{x}_j\right)^\top \Xi_R}{\left(\mathbf{z}_R^{(k)} - \mathbf{x}_\ell\right)^\top \Xi_R} \right) \quad (4.76)$$

Dans la section suivante, les méthodes de contributions existantes seront simulées sur un exemple, ensuite ces résultats seront comparés à la méthode de contributions sous contraintes proposée dans ce chapitre 4.

### 4.3 Présentation des méthodes de contributions sur des données simulées

Les méthodes développées sont illustrées sur les données engendrées par (4.77) [ZLH12]. Le système est constitué de trois variables reliées entre elles par des équations non linéaires.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{u}^2 + \varepsilon_1 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{u}^2 - 3\mathbf{u} + \varepsilon_2 \\ \mathbf{y}_3 &= -\mathbf{u}^3 + 3\mathbf{u}^2 + \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (4.77)$$

La variable  $\mathbf{u}$  est générée aléatoirement dans l'intervalle  $[0.01 \ 2]$ . Les variables  $\varepsilon_i$  sont des bruits de mesure aléatoires issus d'une distribution normale avec une moyenne égale à 0 et une variance égale à 0.01. Le nombre d'observations utilisé pour la phase d'apprentissage est  $N = 100$ . Ces simulations effectuées en conditions normales de fonctionnement ont servi à construire un modèle KPCA. Les tracés de ces variables, l'une en fonction de l'autre, sont indiqués sur la figure 4.1.

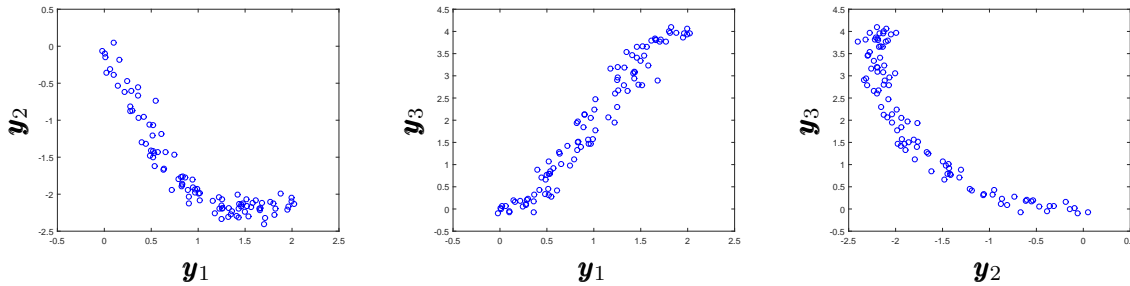


FIGURE 4.1 – Simulation des données : tracé des variables

A partir de (2.29), le paramètre  $\sigma$  du noyau Gaussien choisi égal à 0.75. Le nombre de composantes principales retenues pour le modèle KPCA est  $\ell = 14$ . Il correspond environ à 99% de la

variance totale des données. Le critère utilisé pour la détermination du nombre de composantes principales est le pourcentage cumulé de la variance totale (2.24).

Pendant la phase d'apprentissage le seuil calculé pour l'indice  $SPE$  est  $\delta^2 = 0.03$ , pour l'indice  $T^2$ , il vaut  $\tau^2 = 0.32$  et pour l'indice combiné  $\phi$ , il est égal  $\zeta^2 = 1.71$ .

Deux défauts ont été simulés pour appliquer les méthodes de contributions présentées. Un ensemble de données de 200 observations est généré pour la simulation de chaque défaut. Les deux défauts sont appliqués séparément sur les variables  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  [LYC<sup>+</sup>04], [CLL<sup>+</sup>05], [DM96].

### 4.3.1 Détection et localisation du défaut affectant la variable $\mathbf{y}_1$

Le défaut 1 est une rampe introduite sur la variable  $\mathbf{y}_1$ . Elle varie linéairement de l'observation 101 à 200 avec une pente de  $0.01(j - 100)$ , où  $j$  est le numéro de l'observation.

#### 4.3.1.1 Détection du défaut sur la variable $\mathbf{y}_1$

Sur la figure 4.2, l'indice de détection  $SPE$  (2.34) est indiqué. Il détecte réellement le défaut à partir de l'observation 120.

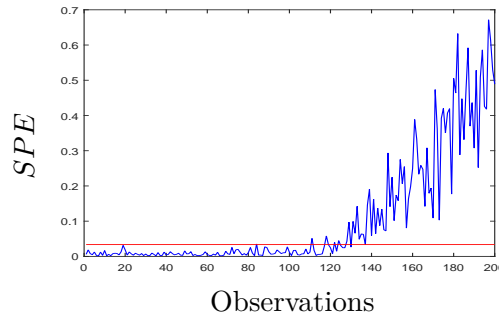


FIGURE 4.2 – Détection de défaut sur la variable  $\mathbf{y}_1$

Après avoir détecté les défauts, nous allons passer à la phase de localisation en utilisant l'indice  $SPE$ . Dans toutes les simulations, l'indice  $SPE$  sera utilisé pour les illustrations.

#### 4.3.1.2 Localisation du défaut 1 par la méthode de calcul de contributions

Sur la figure 4.3, les tracés des contributions relatives sont illustrés. Les barres indiquent les contributions des trois variables. Les contributions calculées en (3.12) pour l'indice de détection  $SPE$  sont utilisées pour évaluer ces contributions. Les contributions sont déterminées pour toutes les observations affectées par le défaut (de l'observation 101 à l'observation 200).

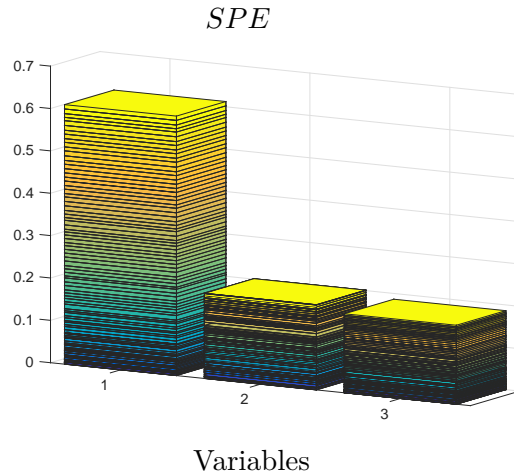


FIGURE 4.3 – Localisation du défaut 1 par la méthode de calcul de contributions avec l'indice  $SPE$

La contribution de la variable  $y_1$  est la plus grande comparée aux contributions des variables  $y_2$  et  $y_3$ . En conclusion la variable  $y_1$  est la variable affectée par le défaut.

#### 4.3.1.3 Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction

Le  $RBC$  calculé pour toutes les observations affectées par le défaut (de l'observation 101 à l'observation 200) est représenté sur la figure 4.4. Les barres indiquent les  $RBC$  cumulés de chaque variable. Le  $RBC$  évalué correspond à celui proposé par [AQ10] (3.22).

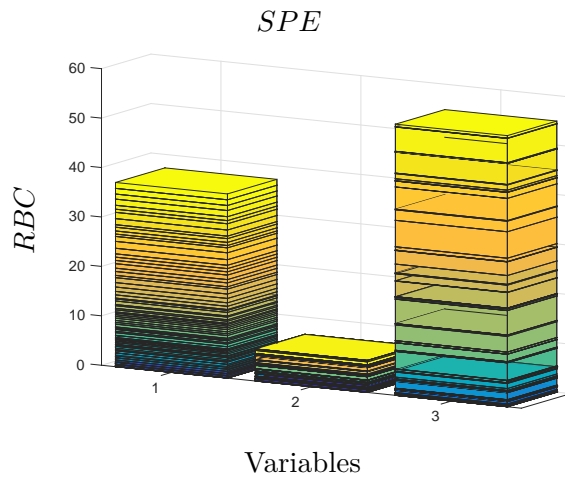


FIGURE 4.4 – Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction avec l'indice  $SPE$

Nous constatons que la variable  $y_3$  est celle qui a la plus grande contribution alors que c'est la variable  $y_1$  qui est affectée par le défaut. L'utilisation de (3.22) pose donc des problèmes et ne permet pas d'identifier clairement le défaut.

Après reconstruction de la variable  $y_1$ , la valeur de l'indice  $SPE$  obtenue est de 0.007. Cette valeur est inférieure au seuil de l'indice  $SPE$  qui est de  $\delta^2 = 0.03$ .



Après reconstruction des trois variables, les valeurs de l'indice  $SPE$  sont indiquées dans le tableau 4.1.

TABLE 4.1 – Calcul du  $RBC$  avec l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la variable  $\mathbf{y}_1$

<b>Indice <math>SPE</math></b>	Variable affectée par le défaut	$\mathbf{y}_1$
	Valeur du seuil	0.03
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_1$	0.007
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_2$	0.171
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_3$	0.136

Les valeurs de l'indice  $SPE$  obtenues après reconstruction des variables  $\mathbf{y}_2$  et  $\mathbf{y}_3$  sont supérieures aux seuils. Ce qui veut dire que les directions des variables  $\mathbf{y}_2$  et  $\mathbf{y}_3$  ne sont pas celles affectées par le défaut.

#### 4.3.1.4 Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes

La figure 4.5 illustre la méthode proposée dans ce chapitre. Au lieu d'estimer directement l'amplitude du défaut comme dans la méthode de contributions par reconstruction (3.29), dans cette approche nous évaluons d'abord les coefficients du vecteur  $\hat{\beta}$  défini en (4.2) et ensuite, nous calculons l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$  des défauts comme indiqué en (4.4) pour toutes les observations affectées par le défaut (de l'observation 101 à l'observation 200). Connaissant  $\hat{f}_i$ , cela permet d'évaluer l'indice  $SPE(\hat{z}_i)$  (2.34) avec  $\hat{z}_i = \mathbf{x} - \xi_i \hat{f}_i$  (1.39). Nous évaluons le  $RBC$  cumulé pour toutes les observations affectées par le défaut (3.21). Nous remarquons que c'est la variable  $\mathbf{y}_1$  qui est affectée par le défaut. Comparé à la méthode proposée par [AQ10] (3.22) (et illustrée sur la figure 4.4), la variable affectée par le défaut est réellement la variable localisée.

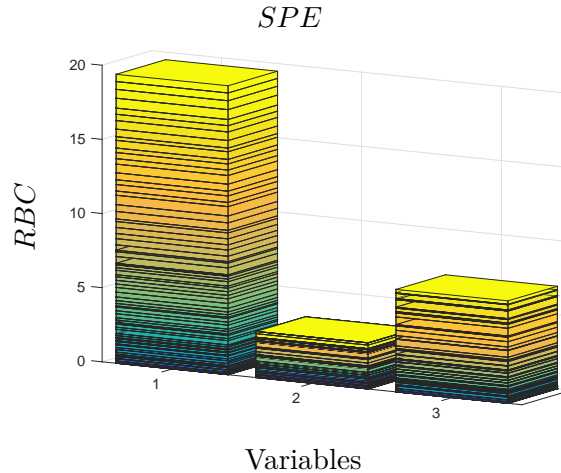


FIGURE 4.5 – Localisation du défaut 1 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes avec l'indice  $SPE$

La méthode de contributions par reconstruction sous contraintes proposée donne de meilleurs résultats que la méthode proposée par [AQ10]. Bien que la méthode de calcul de contributions proposée par [CLC<sup>+</sup>05] permet de localiser le défaut (figure 4.3), elle ne permet pas d'estimer l'amplitude du défaut et a quelques limites lorsque plusieurs variables sont affectées simultanément par des défauts (ce que nous allons montrer dans le chapitre 5). En somme, la méthode

proposée est plus complète et plus rigoureuse que ces deux méthodes de contributions.

Dans le tableau 4.2, les valeurs du  $SPE$  après reconstruction des variables  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$  et  $\mathbf{y}_3$  sont indiquées. Nous constatons que la valeur du  $SPE$  après reconstruction de  $\mathbf{y}_1$  (0.007) est inférieure au seuil du  $SPE$  ( $\delta^2 = 0.03$ ). Ce qui confirme le résultat de la figure 4.5 selon lequel la variable  $\mathbf{y}_1$  est celle affectée par le défaut. Par contre les valeurs du  $SPE$  après reconstruction de  $\mathbf{y}_2$  et  $\mathbf{y}_3$  sont supérieures au seuil.

TABLE 4.2 – Calcul du  $RBC$  avec l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la variable  $\mathbf{y}_1$  pour la reconstruction sous contraintes

<b>Indice <math>SPE</math></b>	Variable affectée par le défaut	$\mathbf{y}_1$
	Valeur du seuil	0.03
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_1$	0.007
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_2$	0.171
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_3$	0.133

### 4.3.2 Détection et localisation du défaut affectant la variable $\mathbf{y}_2$

Le défaut 2 est un échelon introduit sur la variable  $\mathbf{y}_2$  avec une valeur de  $-0.25$  à partir de l'observation 81.

#### 4.3.2.1 Détection du défaut sur la variable $\mathbf{y}_2$

L'indice de détection de défaut  $SPE$  (2.34) est illustré sur la figure 4.6. Les défauts sont détectés par l'indice  $SPE$  à partir de l'observation 81.

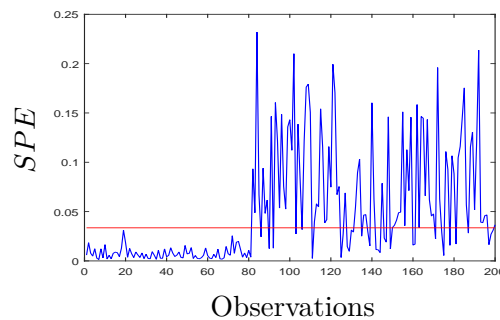


FIGURE 4.6 – Détection de défaut sur la variable  $\mathbf{y}_2$

Après cette étape de détection des défauts, dans la section qui suit, en se basant sur l'indice  $SPE$ , la phase de localisation sera étudiée.

#### 4.3.2.2 Localisation du défaut 2 par la méthode de calcul de contributions

Les barres sur la figure 4.7 représentent les contributions des trois variables. Les tracés des contributions (déterminées pour toutes les observations affectées par le défaut) définissent les contributions indiquées en (3.12) pour l'indice de détection  $SPE$ .

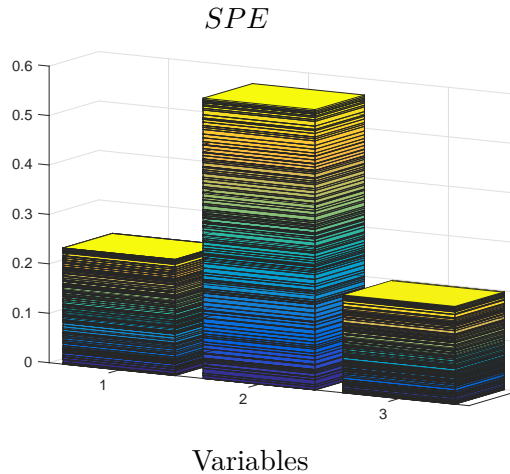


FIGURE 4.7 – Localisation du défaut 2 par la méthode de calcul de contributions avec l'indice  $SPE$

La contribution de la variable  $y_2$  est la plus grande comparée aux contributions des variables  $y_1$  et  $y_3$ . Par conséquent la variable  $y_2$  est la variable affectée par le défaut.

#### 4.3.2.3 Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction

Sur la figure 4.8, en utilisant l'indice  $SPE$ , les  $RBC$  cumulés pour toutes les observations affectées par le défaut (observation 81 à 200) sont évalués. Sur cette figure 4.8, la variable  $y_3$  a la plus grande contribution. Elle est considérée comme celle en défaut. Mais réellement c'est plutôt la variable  $y_2$  qui est affectée par le défaut. Comme dans le cas du défaut 1, le calcul du  $RBC$  proposé par [AQ10] (3.22) pose des problèmes dans la localisation du défaut. Cette méthode proposée par [AQ10] ne permet pas ici aussi de faire une bonne localisation du défaut. Le résultat est erroné. En effet ce calcul du  $RBC$  (3.22) n'est valable que dans le cas linéaire.

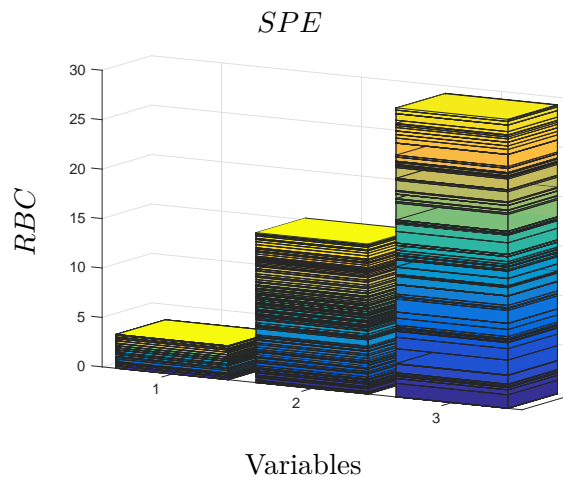


FIGURE 4.8 – Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction avec l'indice  $SPE$

La valeur trouvée après reconstruction de la variable  $y_2$  est de 0.006 pour l'indice  $SPE$ . Comparé au seuil du  $SPE$ , elle lui est inférieure. Les résultats sont illustrés dans le tableau 4.3 après reconstruction des trois variables.

TABLE 4.3 – Calcul du  $RBC$  avec l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la variable  $\mathbf{y}_2$

<b>Indice <math>SPE</math></b>	Variable affectée par le défaut	$\mathbf{y}_2$
	Valeur du seuil	0.03
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_1$	0.060
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_2$	0.006
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_3$	0.043

Dans le tableau 4.3, les valeurs de l'indice  $SPE$  obtenues après reconstruction des variables  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_3$  restent supérieures au seuil du  $SPE$ . Au regard de ces résultats, nous pouvons dire que les directions de ces deux variables ne sont pas celles affectées par le défaut.

#### 4.3.2.4 Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes

La méthode de reconstruction sous contraintes proposée est maintenant utilisée ((4.2), (4.4), (2.34) et (3.21)). Le  $RBC$  cumulé pour toutes les observations affectées par le défaut est présenté sur la figure 4.9. La variable  $\mathbf{y}_2$  a la plus grande contribution : c'est elle qui est en défaut. En comparant les résultats de la méthode proposée avec ceux de la méthode proposée par [AQ10] (3.22) (figure 4.8) la variable affectée par le défaut est réellement la variable localisée.

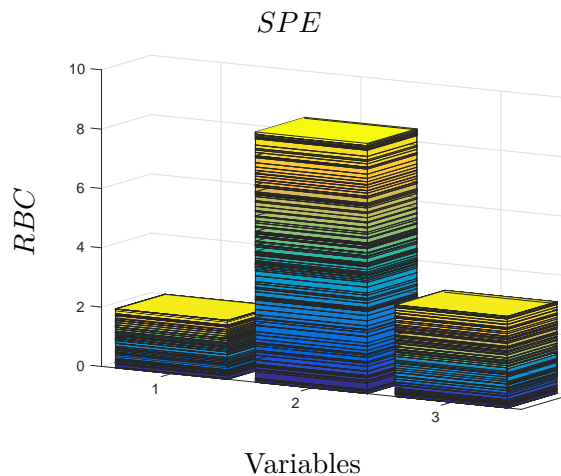


FIGURE 4.9 – Localisation du défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes avec l'indice  $SPE$

La méthode de calcul de contributions proposée par [CLC<sup>+</sup>05] évaluée sur la figure 4.7 permet de localiser le défaut. Cependant l'estimation de l'amplitude du défaut ne peut se faire à travers cette méthode.

Le tableau 4.4 présente les valeurs du  $SPE$  après reconstruction des variables  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$  et  $\mathbf{y}_3$ . La valeur du  $SPE$  après reconstruction de la variable  $\mathbf{y}_2$  est de 0.006. Elle est inférieure au seuil qui est de 0.03. Ce résultat est cohérent avec celui de la figure 4.9 où la variable  $\mathbf{y}_2$  est identifiée comme celle affectée par le défaut. Les valeurs du  $SPE$  après reconstruction des variables  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_3$  sont supérieures au seuil du  $SPE$ .

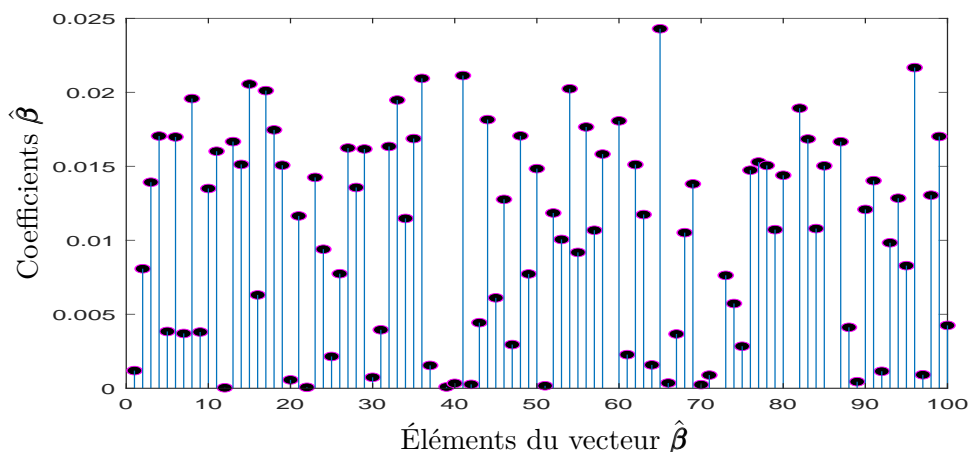
TABLE 4.4 – Calcul du  $RBC$  avec l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la variable  $\mathbf{y}_2$  pour la reconstruction sous contraintes

<b>Indice <math>SPE</math></b>	Variable affectée par le défaut	$\mathbf{y}_2$
	Valeur du seuil	0.03
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_1$	0.063
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_2$	0.006
	$SPE$ après reconstruction de $\mathbf{y}_3$	0.050

A titre indicatif, nous montrons les étapes de la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes en considérant le cas d'une seule observation pour évaluer les coefficients du vecteur  $\hat{\beta}$  dans la section suivante.

#### 4.3.2.5 Reconstruction d'une observation affectée par le défaut 2 par la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes

Dans la plage des observations affectées par le défaut 2 (observations 81 à 200), nous considérons l'observation 94 dont le  $SPE$  vaut 0.12. Dans la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes, le vecteur initial  $\beta^{(0)}$  défini pour le début de l'algorithme doit satisfaire la contrainte de non négativité et de somme unité. Nous choisissons chaque élément de ce vecteur initial (au total au nombre de 100) égal à 0.01. Après la convergence de l'algorithme, les coefficients du vecteur  $\hat{\beta}$  (4.2) sont tracés sur la figure 4.10. Ce vecteur des coefficients (figure 4.10) satisfait également la contrainte de non négativité et de somme unité.

FIGURE 4.10 – Valeurs des coefficients du vecteur  $\hat{\beta}$ 

Après l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$  (4.4) du défaut pour cette observation, l'indice  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  (2.34) est évalué. L'indice de détection  $SPE$  recalculé après reconstruction de cette observation vaut 0.01. Cette valeur de  $SPE$  obtenue est inférieure au seuil. Ce qui signifie que le défaut est bien corrigé sur cette observation.

## 4.4 Conclusion

Constatant que les méthodes de contributions existantes (chapitre 3) présentent quelques limites et ne fonctionnent pas dans certaines situations, nous avons proposé dans ce chapitre une

nouvelle méthode de contributions par reconstruction sous contraintes. Toutes ces méthodes de contributions peuvent être appliquées en utilisant les trois indices de détection de défaut ( $SPE$ ,  $T^2$  et  $\phi$ ).

La variable ayant la plus grande contribution à l'indice de détection est considérée comme la variable affectée par un défaut dans la méthode de calcul de contributions [CLC<sup>+</sup>05]. Dans le cas de plusieurs variables affectées simultanément par des défauts, cette méthode de calcul de contributions ne détermine pas toujours correctement toutes les variables affectées par les défauts. De plus, elle ne permet pas après la localisation du défaut, d'estimer correctement l'amplitude du défaut. Dans la méthode de contributions par reconstruction, les variables qui ont été supposées affectées par des défauts sont celles pour lesquelles l'indice de détection pour l'observation reconstruite est inférieur au seuil. La méthode de contributions par reconstruction proposée par [AQ10] (où il considère la valeur de la contribution dans la direction  $\xi_i$ ,  $RBC_i$  comme  $\hat{f}_i^2$ ) ne localise pas dans certains cas la bonne variable normalement affectée par le défaut, car [AQ10] ont directement utilisé le résultat du cas linéaire [AQ09]. Ceci a été montré sur l'exemple simulé.

La méthode de contributions par reconstruction sous contraintes présentée dans ce chapitre a permis de remédier à ces inconvénients. Dans cette méthode, la contribution dans la direction  $\xi_i$ ,  $RBC_i$  est évaluée comme la différence entre l'indice de détection avant et après la reconstruction de l'observation considérée. Concernant le KPCA, la minimisation de l'indice de détection pour trouver l'estimation de l'amplitude du défaut est un problème d'optimisation non linéaire. L'estimation de l'amplitude obtenue après la résolution de ce problème en considérant la reconstruction d'une variable peut être écrite comme une combinaison linéaire des distances entre l'observation en défaut et toutes les observations de l'ensemble d'apprentissage. Au lieu d'estimer directement  $f_i$  comme dans [AQ10], nous avons plutôt estimé les coefficients de cette combinaison linéaire sous contraintes de non négativité et de somme unité des coefficients. Sur l'exemple simulé dans ce chapitre, l'efficacité de cette méthode par rapport aux méthodes existantes a été montrée.

Pour aller un peu plus loin dans la comparaison de toutes les méthodes présentées, dans le chapitre 5, elles sont appliquées sur un exemple de simulation : un modèle de réacteur à agitation continue (CSTR). Après la phase de détection de défauts sur le CSTR, la phase de localisation des défauts est effectuée en considérant des défauts affectant une seule variable et des défauts affectant plusieurs variables simultanément.

Troisième partie

**Application des méthodes sur un  
système simulé**





# Chapitre 5

## Application sur le CSTR

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>105</b>
<b>5.2</b>	<b>Présentation du modèle</b>	<b>106</b>
<b>5.3</b>	<b>Détection et localisation du défaut affectant la température à l'entrée du CSTR <math>T_0</math></b>	<b>108</b>
5.3.1	Description du défaut sur la température $T_0$	108
5.3.2	Détection du défaut affectant la température $T_0$	109
5.3.3	Application des différentes méthodes d'initialisation sur le défaut affectant la température $T_0$	109
5.3.4	Application des différentes méthodes de contributions pour la localisation du défaut affectant $T_0$	112
<b>5.4</b>	<b>Détection et localisation du défaut affectant la concentration du réactif <math>C_{AA}</math></b>	<b>114</b>
5.4.1	Description du défaut affectant la concentration $C_{AA}$	114
5.4.2	Détection du défaut affectant la concentration $C_{AA}$	115
5.4.3	Application des différentes méthodes d'initialisation sur le défaut affectant $C_{AA}$	115
5.4.4	Application des différentes méthodes de contributions pour la localisation du défaut affectant la concentration $C_{AA}$	118
<b>5.5</b>	<b>Détection et localisation du défaut affectant la température <math>T</math></b>	<b>120</b>
5.5.1	Description du défaut affectant la température $T$	120
5.5.2	Détection du défaut affectant la température $T$	121
5.5.3	Application des différentes méthodes de contribution pour la localisation du défaut affectant la température $T$	122
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>125</b>

---

### 5.1 Introduction

Pour illustrer toutes ces méthodes, nous simulons un modèle de réacteur à agitation continue avec une réaction chimique du premier ordre et présentant des caractéristiques non linéaires.

Dans une première partie, le modèle du CSTR est décrit avec les mesures des capteurs et le régulateur Proportionnel Intégral qui corrige les perturbations et améliore les performances du système. Les conditions initiales du modèle sont données autour d'un point de fonctionnement.

Les perturbations et les bruits de mesures qui s'ajoutent aux mesures des capteurs sont également présentés. Dans l'objectif d'appliquer les méthodes de détection de défaut, les techniques d'initialisation et les méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts, des défauts sont introduits dans le modèle du CSTR. Ainsi pour chaque type de défaut introduit dans le modèle, les méthodes de détection, de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts sont testées. Dans une deuxième partie, les indices de détection de défaut sont appliqués. Après la détection des défauts, dans une troisième partie, les différentes méthodes de contributions (méthode de calcul de contributions, méthode de contributions par reconstruction, méthode de contributions par reconstruction sous contraintes) sont illustrées pour la phase de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts. Comme la méthode de contributions par reconstruction nécessite pour l'estimation de l'amplitude du défaut une initialisation du défaut, les méthodes proposées sont appliquées avant la présentation des méthodes de contributions.

## 5.2 Présentation du modèle

Le diagramme schématique du CSTR est illustré à la figure 5.1. Le modèle du réacteur est basé sur quelques hypothèses : un mélange parfait des constituants et des propriétés physiques constantes. Une hypothèse d'une réaction du premier ordre est supposée dans le réacteur. La réaction est basée sur le fait qu'un réactif  $A$  est mélangé avec un solvant  $S$ . Ce mélange se transforme en un produit  $B$ .

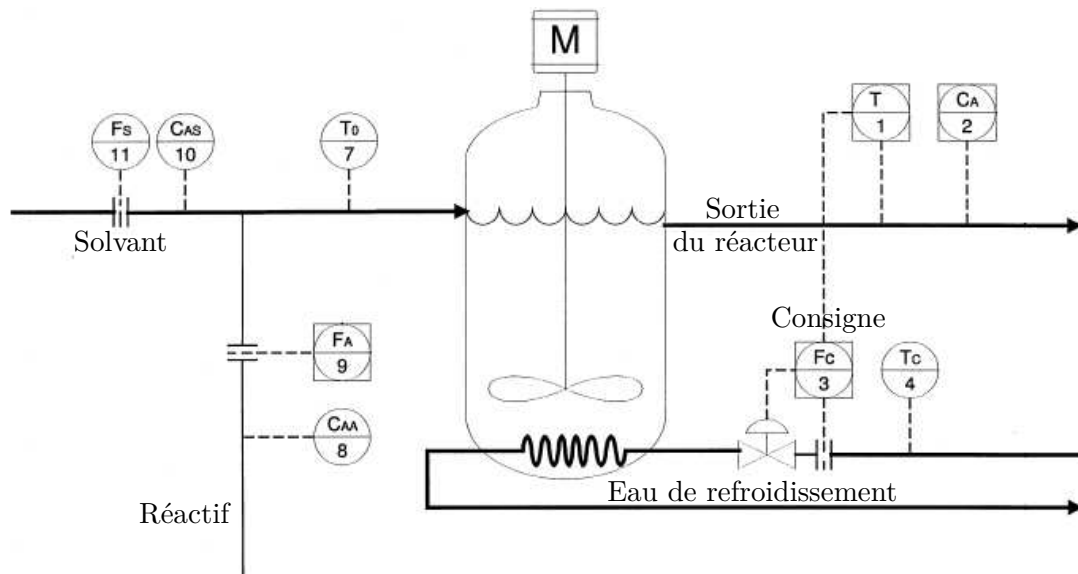


FIGURE 5.1 – Diagramme du CSTR

Pour décrire le comportement dynamique du CSTR, un bilan de masse et un bilan d'énergie permettent d'écrire les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dC_A}{dt} &= \frac{F}{V}C_{A0} - \frac{F}{V}C_A - k_0e^{-\frac{E}{RT}}C_A \\ V\rho C_P \frac{dT}{dt} &= \rho C_P F(T_0 - T) - \frac{aF_C^{b+1}}{F_C + \frac{aF_C^b}{(2\rho_C C_{PC})}}(T - T_C) - \Delta H_r V k_0 e^{-\frac{E}{RT}} C_A \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $V$  est le volume du réservoir,  $F$  est le débit d'entrée,  $k_0$  la constante de la vitesse de réaction,  $E$  l'énergie d'activation,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $\rho$  la densité du mélange,  $\rho_C$  la densité du liquide de refroidissement,  $C_P$  la capacité calorifique volumétrique,  $C_{PC}$  la capacité du liquide de refroidissement,  $\Delta H_r$  la chaleur de la réaction,  $T$  la température à la sortie,  $T_C$  la température de l'eau de refroidissement,  $T_0$  la température à l'entrée,  $F_C$  le débit d'eau de refroidissement et  $C_A$  la concentration à la sortie.

A partir du débit du réactif  $F_A$  et du débit du solvant  $F_S$ , il est possible d'obtenir la concentration du réactif à l'entrée du réacteur. Cette concentration  $C_{A0}$  vaut :

$$C_{A0} = \frac{C_{AA} F_A + C_{AS} F_S}{F_A + F_S} \quad (5.2)$$

Pour ce réacteur, le débit d'eau de refroidissement  $F_C$  contrôle la température  $T$  par l'intermédiaire d'un régulateur proportionnel intégral (PI) (figure 5.1).

Neuf variables sont mesurées, il s'agit de : la température de l'eau de refroidissement  $T_C$ , la température à l'entrée  $T_0$ , la concentration du réactif  $C_{AA}$ , la concentration du solvant  $C_{AS}$ , le débit du solvant  $F_S$ , le débit d'eau de refroidissement  $F_C$ , la concentration à la sortie  $C_A$ , la température  $T$  et le débit du réactif  $F_A$ . Une observation du réacteur, à un instant donné, est donc constituée des mesures de ces neuf variables.

$$\mathbf{x} = [T_C \ T_0 \ C_{AA} \ C_{AS} \ F_S \ F_C \ C_A \ T \ F_A]^\top \quad (5.3)$$

Les réactions sont affectées par des perturbations représentées par des variations autorégressives du premier ordre. Toutes ces perturbations qui agissent sur le processus, s'ajoutent sur les variables.

$$\mathbf{x}_t = \psi \mathbf{x}_{t-1} + \sigma_e \mathbf{e}_t \quad (5.4)$$

$\mathbf{e}_t$  est une variable aléatoire issue d'une distribution gaussienne avec une variance  $\sigma_e^2$  et  $\psi$  le coefficient autoregressif.

Des bruits sont également ajoutés à toutes les mesures. Ces bruits de mesures sont aussi gaussiens. Ils sont caractérisés par  $\mathbf{m}_t$  une variable aléatoire issue d'une distribution gaussienne et  $\sigma_m^2$  sa variance.

$$\mathbf{x}_{t,m} = \mathbf{x}_t + \sigma_m \mathbf{m}_t \quad (5.5)$$

Nous définissons les paramètres et les conditions initiales du CSTR :

**Paramètres de simulation :**  $V = 1$  (m<sup>3</sup>),  $\rho = 10^6$  (g/ m<sup>3</sup>),  $E/R = 8330.1$  (K),  $C_P = 1$  (cal/gK),  $C_{PC} = 1$  (cal/gK),  $b = 0.5$ ,  $k_0 = 10^{10}$  (m<sup>3</sup>/kmole × min),  $a = 1.678 \times 10^6$  (cal/min K),  $\Delta H_r = -1.3 \times 10^7$  (cal/kmole).

Les paramètres du régulateur PI pour le contrôle de la température sont :  $K_C = -1.5$ ,  $T_I = 5$

**Conditions initiales :**  $T_0 = 370$  (K),  $T_C = 365$  (K),  $F_C = 15$  (m<sup>3</sup>/min),  $T = 368.25$  (K),  $F_S = 0.9$  (m<sup>3</sup>/min),  $F_A = 0.1$  (m<sup>3</sup>/min),  $C_A = 0.8$  (kmole/m<sup>3</sup>),  $C_{AS} = 0.1$  (kmole/m<sup>3</sup>),  $C_{AA} = 19.1$  (kmole/m<sup>3</sup>). Les conditions de simulation sont issues de [YM01].

Durant la phase d'apprentissage, 100 observations ont été simulées en conditions normales et un modèle KPCA a été élaboré. Le paramètre  $\sigma$  du noyau Gaussien défini en (2.29) a été choisi égal

à 0.6. Le nombre de composantes principales (2.24) retenues pour le modèle KPCA est  $\ell = 28$  (ce qui représente plus de 90% de la variance totale des données).

Les seuils déterminés pendant la phase d'apprentissage valent  $\delta^2 = 0.18$  pour le  $SPE$ ,  $\tau^2 = 0.62$  pour le  $T^2$  et  $\zeta^2 = 1.61$  pour l'indice combiné  $\phi$ . Des défauts capteurs ont ensuite été simulés pour tester les méthodes. Pour chaque défaut simulé, un nouveau jeu de données de 100 observations a été utilisé pour valider les tests.

Après cette description du modèle du CSTR, dans la section suivante, une description des défauts est faite. Trois défauts capteurs sont introduits dans le modèle à partir de l'observation 51 : un défaut sur la température à l'entrée  $T_0$ , un défaut sur la concentration du réactif  $C_{AA}$  et un défaut sur la température  $T$ . Pour chacun de ces défauts, nous présentons les caractéristiques et les répercussions sur le modèle. Nous nous intéressons à la phase de détection, de localisation et d'estimation des défauts. Les méthodes de contributions existantes et celles proposées pour la localisation des défauts sont appliquées. Les méthodes d'initialisation proposées sont également appliquées. Nous rappelons que ces initialisations sont nécessaires pour une meilleure convergence de l'algorithme du point fixe.

### 5.3 Détection et localisation du défaut affectant la température à l'entrée du CSTR $T_0$

Nous commençons par la simulation du défaut capteur  $T_0$  introduit dans le modèle du CSTR.

#### 5.3.1 Description du défaut sur la température $T_0$

Un biais d'une valeur de 1.5 (K) est ajouté sur le capteur la température  $T_0$ . La figure 5.2 montre l'évolution de toutes les variables. Les variables acquises dans des conditions normales sont tracées en bleu. La variable  $T_0$  subit seule une modification (marquée en rouge). Ce défaut est qualifié de défaut simple puisqu'il n'affecte qu'une seule variable.

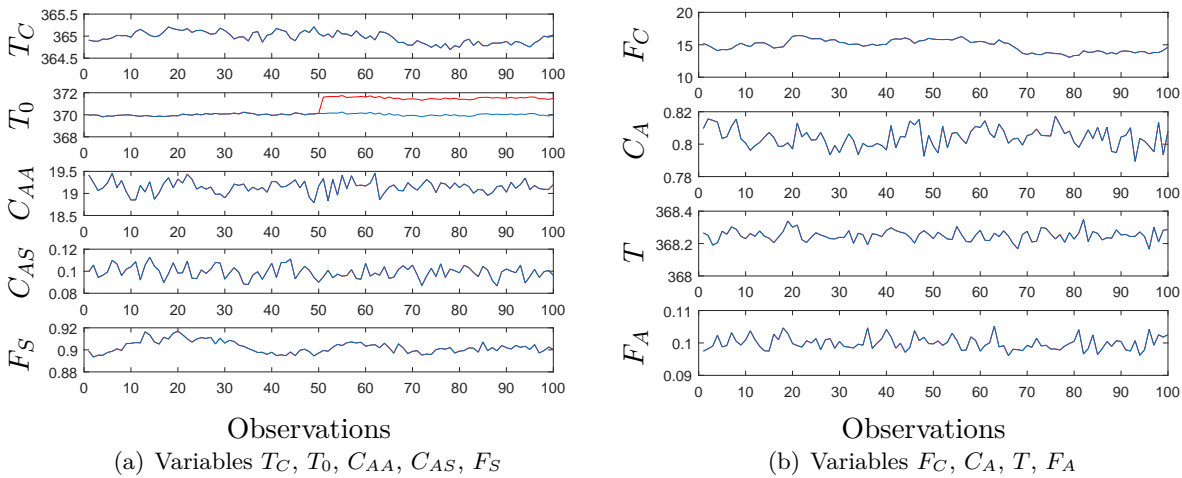


FIGURE 5.2 – Influence du défaut affectant la température  $T_0$  sur les variables

### 5.3.2 Détection du défaut affectant la température $T_0$

Les trois indices de détection sont utilisés pour illustrer cette partie. Sur la figure 5.3, la détection du défaut affectant la température  $T_0$  est indiquée. L'indice  $SPE$  et l'indice combiné  $\phi$  détectent nettement le défaut à partir de l'observation 51 alors que l'indice  $T^2$  donne un mauvais résultat. Avec l'indice  $T^2$ , le défaut n'est pas détecté. En effet l'indice  $T^2$  ne fonctionne pas puisque dans son expression (2.36), quand une observation  $\mathbf{x}$  est affectée par un défaut et éloignée de la base de données,  $\kappa(\mathbf{x}) \approx 0$  et (2.36) tend plus rapidement vers 0.

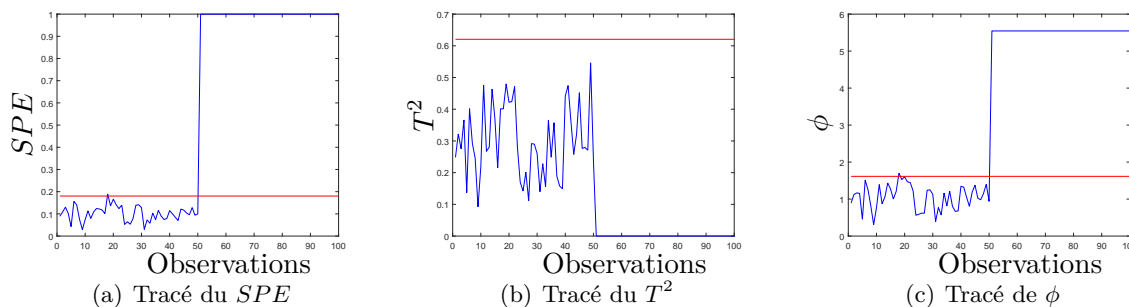


FIGURE 5.3 – Détection de défaut sur la température  $T_0$

Une fois le défaut détecté, la deuxième phase dans le processus de diagnostic du CSTR peut être présentée. Cette phase concerne la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut détecté. L'indice  $SPE$  est utilisé pour valider les méthodes de contributions présentées dans les chapitres 3 et 4 pour cette étape de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts.

Mais avant de passer concrètement à cette phase de localisation et d'estimation des défauts, les différentes méthodes d'initialisation développées dans la section 3.3 sont appliquées.

### 5.3.3 Application des différentes méthodes d'initialisation sur le défaut affectant la température $T_0$

Les trois techniques d'initialisation sont testées sur ce défaut qui affecte la température  $T_0$ . Les techniques de l'observation la plus proche, de la zone d'attraction et de la limite de détection sont mises en œuvre. Pour chaque technique, après l'estimation des amplitudes des défauts sur chaque observation en défaut, toutes les observations en défaut sont reconstruites pour analyser si les défauts sur ces observations sont corrigés.

#### 5.3.3.1 Présentation des données concernant le défaut sur la température $T_0$

Sur la figure 5.4, nous considérons le tracé des observations en fonction de trois variables parmi les neuf disponibles : la température d'eau de refroidissement  $T_C$ , la température  $T_0$  à l'entrée du CSTR et la concentration du réactif  $C_{AA}$ . La combinaison des trois variables  $T_C$ ,  $T_0$  et  $C_{AA}$  est l'une des combinaisons de variables qui permettent de distinguer clairement le tracé des observations sans défaut des observations affectées par les défauts. Les observations sans défaut sont tracées en bleu et en rouge les observations affectées par le défaut sur  $T_0$  à partir de l'observation 51.

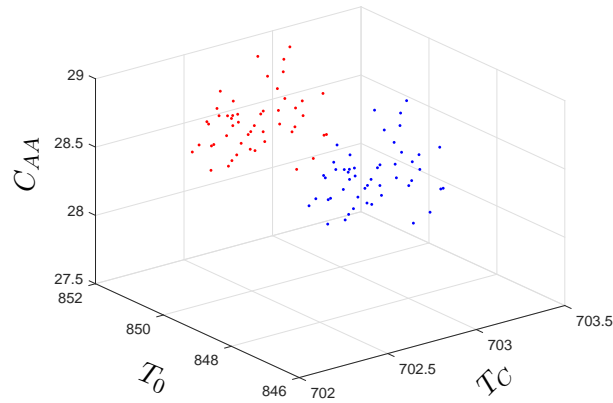


FIGURE 5.4 – Présentation des données avec le défaut sur  $T_0$

### 5.3.3.2 Application de la technique de l'observation la plus proche pour le défaut sur la température $T_0$

Pour chaque observation en défaut, on cherche dans la base de données l'observation la plus proche de chaque observation en défaut dans la direction de la variable  $T_0$ . En utilisant l'observation retenue (3.38) pour chaque observation en défaut, nous déterminons l'estimation de  $f_i$  (3.39) et nous appliquons l'algorithme itératif du point fixe. L'observation reconstruite avec l'estimation du défaut estimée  $\hat{f}_i$  (1.39) pour chaque observation en défaut est marquée en magenta sur la figure 5.5. L'indice de détection  $SPE$  évalué avec toutes les observations reconstruites  $SPE(\hat{z}_i)$  égal à 1 est supérieur au seuil  $\delta^2$ . Les observations reconstruites ne sont pas ramenées dans la base de données ; ce qui veut dire que les défauts sur ces observations ne sont pas corrigés.

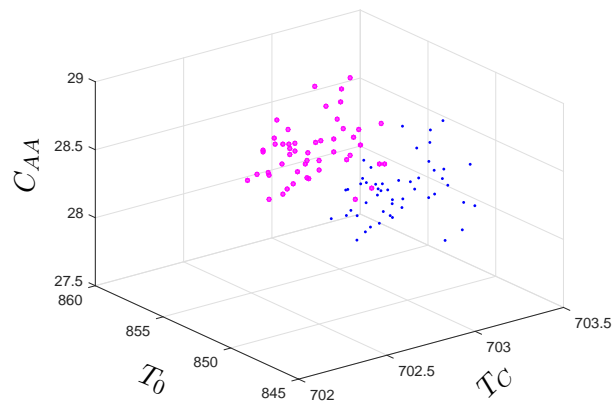


FIGURE 5.5 – Technique de l'observation la plus proche pour le défaut sur  $T_0$

### 5.3.3.3 Application de la technique de la zone d'attraction pour le défaut sur la température $T_0$

On recherche dans cette technique la zone d'attraction dans la direction de la variable  $T_0$  de toutes les observations de la base de données qui vérifient (3.46) (avec une valeur de  $\varphi$  égale à 2.5). Pour chaque observation en défaut, l'observation à retenir est celle qui a l'amplitude

minimale (3.47) pour débiter l'algorithme du point fixe. L'observation reconstruite pour chaque observation en défaut (avec l'amplitude du défaut estimée) est marquée en magenta sur la figure 5.6. Les observations reconstruites en magenta sont ramenées dans la base de données. L'indice de détection  $SPE$  avec toutes les observations reconstruites  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  égal à 0.08 est inférieur au seuil  $\delta^2$ . Dans cette deuxième technique, les défauts sont bien corrigés sur ces observations contrairement au premier cas de la technique de l'observation la plus proche (figure 5.5).

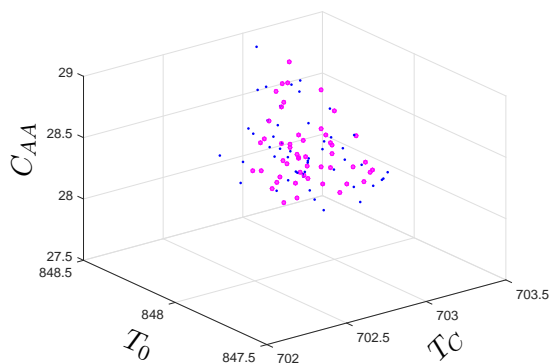


FIGURE 5.6 – Technique de la zone d'attraction pour le défaut sur  $T_0$

### 5.3.3.4 Application de la technique de la détection limite pour le défaut sur la température $T_0$

Les mêmes observations en défaut sont considérées comme dans les deux cas précédents. Pour chaque observation en défaut, on cherche dans la base de données l'observation dont le  $SPE$  est en limite du seuil  $\delta^2$  dans la direction de reconstruction de la variable  $T_0$ . Cela consiste à rechercher dans la base de données pour chaque observation en défaut, l'observation qui vérifie (3.71). Les observations retenues dans la base de données servent à déterminer l'amplitude estimée de  $f_i$  comme valeur initiale de début de l'algorithme du point fixe (3.87). Après l'application de l'algorithme, les observations reconstruites sont marquées en magenta sur la figure 5.7. L'indice de détection  $SPE$  après reconstruction des observations,  $SPE(\hat{\mathbf{z}}_i)$  égal à 0.08 est inférieur au seuil  $\delta^2$ . Les défauts sur ces observations reconstruites sont corrigés et ces observations sont ramenées dans la base de données.

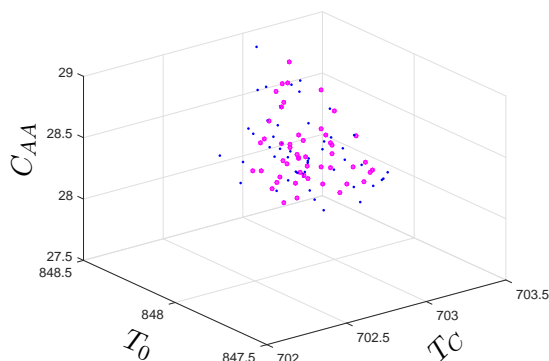


FIGURE 5.7 – Technique de la détection limite pour le défaut sur  $T_0$

Après l'application de ces différentes méthodes d'initialisation pour trouver la bonne initia-

lisation de l'algorithme du point fixe (dans la méthode de contributions par reconstruction), la phase de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut sur le CSTR peut être abordée avec les différentes méthodes de contributions.

### 5.3.4 Application des différentes méthodes de contributions pour la localisation du défaut affectant $T_0$

Dans un premier temps, nous illustrons les méthodes de calcul de contributions et les méthodes de contributions par reconstruction pour la localisation des défauts. Dans un deuxième temps nous appliquons la nouvelle méthode de contributions sous contraintes proposée.

#### 5.3.4.1 Méthode de calcul de contributions pour la localisation du défaut sur la température $T_0$

Partant des méthodes de contributions définies en (3.12) pour l'indice de détection  $SPE$ , nous calculons les contributions relatives de toutes les observations affectées par le défaut (de l'observation 51 à l'observation 100). Sur la figure 5.8, le tracé des contributions relatives de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$  est illustré. Les barres indiquent les contributions de chaque variable.

La deuxième variable (qui représente  $T_0$ ) est celle qui a la plus grande contribution par rapport aux autres variables. Les autres variables ont des contributions très inférieures avec des valeurs presque au même niveau. La variable  $T_0$  est donc celle affectée par le défaut.

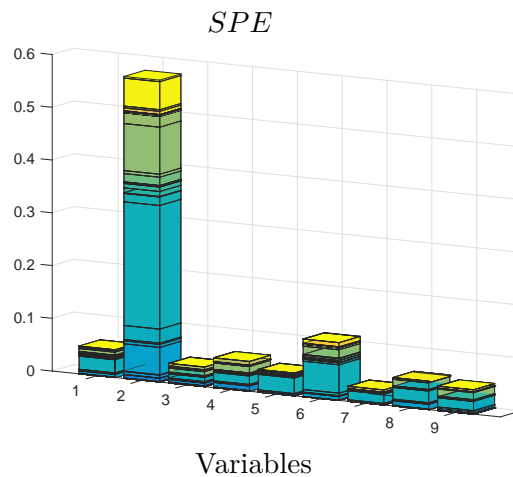


FIGURE 5.8 – Contributions des variables à l'indice  $SPE$  avec un défaut sur la température  $T_0$

#### 5.3.4.2 Méthode de contributions par reconstruction pour la localisation du défaut sur la température $T_0$

La figure 5.9 indique le  $RBC$  évalué sur les observations 51 à 100. Il représente le  $RBC$  cumulé de toutes les observations affectées par le défaut. Pour rappel, le  $RBC$  est la contribution basée sur la reconstruction de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$  (3.22). La technique de la limite de détection illustrée dans la section 5.3.3.4 est appliquée dans cette méthode de contributions par reconstruction pour déterminer l'amplitude du défaut nécessaire pour débiter l'algorithme itératif du point fixe.



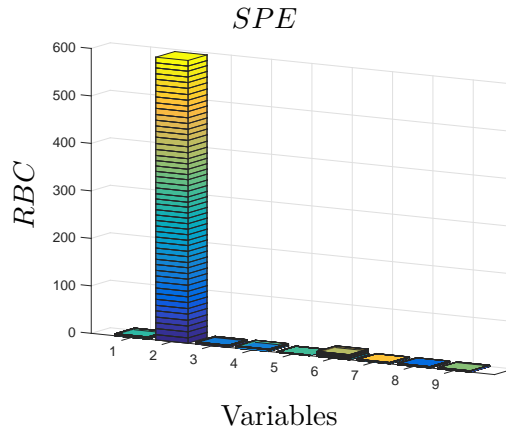


FIGURE 5.9 – Contribution par reconstruction à l'indice  $SPE$  pour un défaut sur la température  $T_0$

Sur cette figure 5.9, chaque barre indique la contribution de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$ . La deuxième barre est la plus élevée. Elle représente la contribution de la variable  $T_0$ . Puisque la contribution de la variable  $T_0$  est la plus grande, la variable  $T_0$  est la variable affectée par le défaut. Ce résultat est bien conforme à nos attentes dans la mesure où le défaut a réellement été introduit sur la température  $T_0$ . La valeur de l'indice de détection  $SPE$  obtenue après reconstruction de la variable  $T_0$  égale à 0.08 est inférieure au seuil et la valeur estimée du défaut est de 1.50 (K).

#### 5.3.4.3 Méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut sur la température $T_0$

Dans cette méthode, nous n'estimons pas directement l'amplitude du défaut comme dans la méthode de contributions par reconstruction (3.29). Nous calculons les coefficients du vecteur  $\hat{\beta}$  (4.2) puis nous évaluons l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$  des défaut (4.4) pour toutes les observations affectées par le défaut. L'indice  $SPE(\hat{z}_i)$  (2.34) est alors déterminé (avec  $\hat{z}_i = \mathbf{x} - \xi_i \hat{f}_i$  (1.39)).

Sur la figure 5.10, le  $RBC$  est évalué sur les observations 51 à 100. Il s'agit du  $RBC$  cumulé de toutes les observations affectées par le défaut en se basant sur l'indice  $SPE$ . Pour rappel, le  $RBC$  est l'écart entre l'indice de détection avant et après reconstruction (3.21).

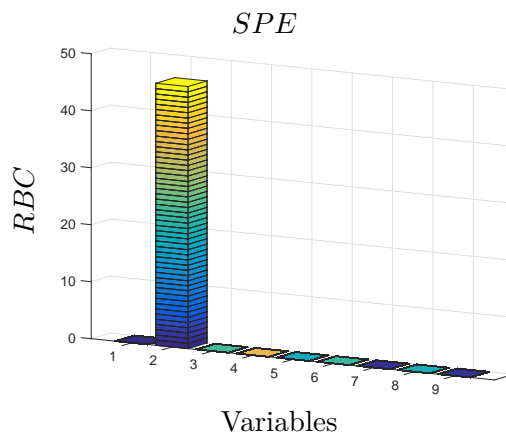


FIGURE 5.10 – Contribution par reconstruction sous contraintes à l'indice  $SPE$  pour un défaut sur la température  $T_0$

Cette figure 5.10 indique de manière précise que c'est la deuxième variable (représentant la variable  $T_0$ ) qui a la plus grande contribution. Donc la variable  $T_0$  est la variable affectée par le défaut. La valeur de l'indice de détection  $SPE$  obtenue après reconstruction de la variable  $T_0$  est indiquée dans le tableau 5.1.

TABLE 5.1 –  $RBC$  à l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la température  $T_0$

<b>Indice <math>SPE</math></b>	Variable affectée par le défaut	$T_0$
	Valeur du seuil	0.18
	$SPE$ après reconstruction de $T_0$	0.08
	Valeur estimée du défaut	1.49

La valeur du  $SPE$  après reconstruction de la variable  $T_0$  est inférieure au seuil du  $SPE$ . Ce qui signifie que la variable  $T_0$  a été bien reconstruite. Dans ce cas de figure, la valeur estimée du défaut est de 1.49 (K). C'est un résultat satisfaisant puisque le défaut capteur ajouté sur la température  $T_0$  vaut 1.5 (K) (section 5.3.1).

Les trois méthodes de contributions présentées permettent de localiser le défaut sur la température  $T_0$ . Avec les méthodes de contributions par reconstruction et de contributions par reconstruction sous contraintes proposée, les estimations de l'amplitude du défaut trouvées sont correctes. Dans la section suivante, ces méthodes sont appliquées pour la localisation et l'estimation du défaut affectant la concentration  $C_{AA}$ .

## 5.4 Détection et localisation du défaut affectant la concentration du réactif $C_{AA}$

Le deuxième défaut simulé est un défaut capteur sur la concentration  $C_{AA}$ . Après une description du défaut, la phase de détection du défaut est effectuée. Ensuite les méthodes d'initialisation sont appliquées et pour terminer les méthodes de contributions pour la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut sont testées.

### 5.4.1 Description du défaut affectant la concentration $C_{AA}$

Un deuxième cas de défaut est simulé lors de la mesure de la concentration  $C_{AA}$  où un biais de 1 (kmole/m<sup>3</sup>) est ajouté sur le capteur. Ce défaut affecte uniquement la variable  $C_{AA}$ . Ce défaut est qualifié aussi de défaut simple. Cette variable est tracée en rouge sur la figure 5.11. En bleu, sont tracées les variables acquises dans les conditions normales de fonctionnement.

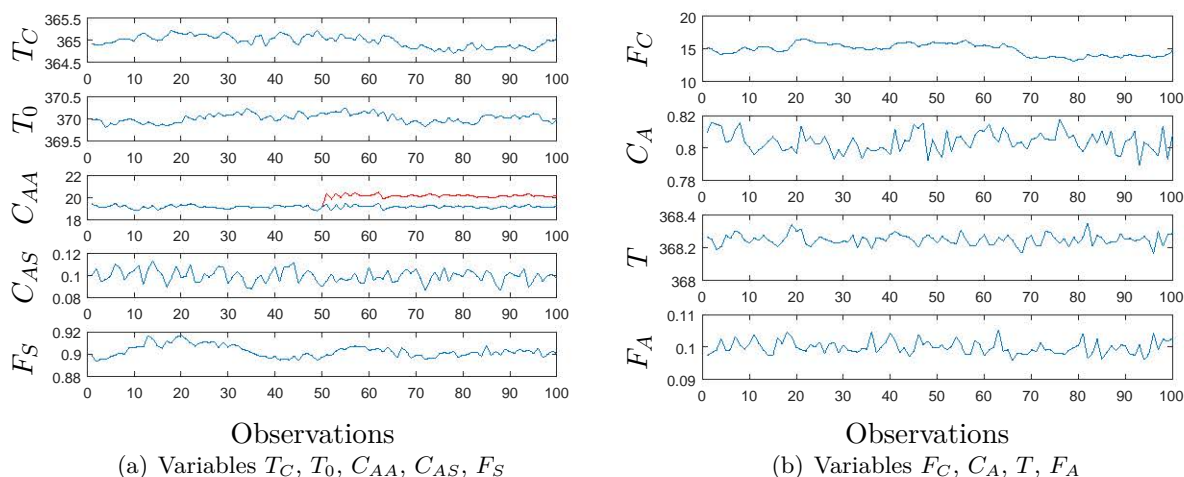


FIGURE 5.11 – Influence du défaut affectant la concentration  $C_{AA}$  sur les variables

### 5.4.2 Détection du défaut affectant la concentration $C_{AA}$

Sur la figure 5.12 pour le défaut affectant la concentration  $C_{AA}$ , dans cette situation aussi le défaut est bien détecté à partir de l'observation 51 par les indices  $SPE$  et  $\phi$ . L'indice  $T^2$  ne détecte pas le défaut.

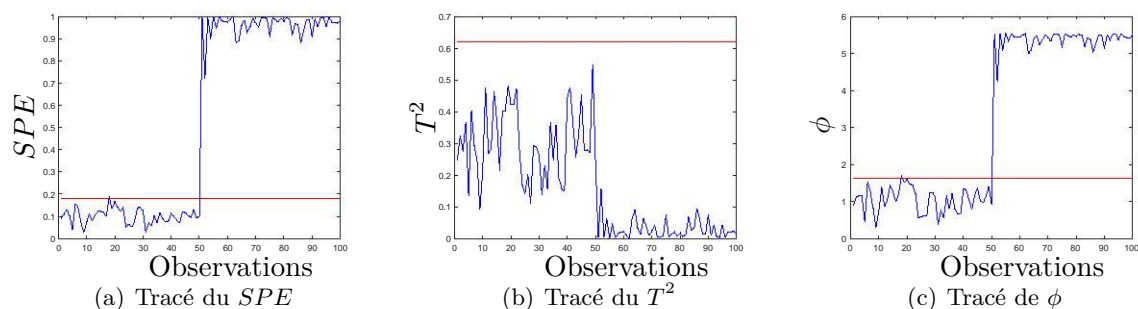


FIGURE 5.12 – Détection de défaut sur la concentration  $C_{AA}$

Après cette étape de détection du défaut sur la concentration  $C_{AA}$ , la phase de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut est présentée dans la section suivante. Les méthodes de contributions sont appliquées pour cette phase de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut après l'application des différentes méthodes d'initialisation (section 3.3).

### 5.4.3 Application des différentes méthodes d'initialisation sur le défaut affectant $C_{AA}$

Comme dans le cas du défaut sur la température  $T_0$ , les trois techniques d'initialisation sont testées sur ce défaut qui affecte la température  $C_{AA}$  : la technique de l'observation la plus proche, la technique de la zone d'attraction et la technique de la limite de détection. Après reconstruction de toutes les observations en défaut, il faut donc analyser si elles sont ramenées dans la base de données ou non.

### 5.4.3.1 Présentation des données concernant le défaut sur la concentration $C_{AA}$

La figure 5.13 illustre le tracé des observations en fonction de trois variables : la température d'eau de refroidissement  $T_C$ , la température  $T_0$  à l'entrée du CSTR et la concentration du réactif  $C_{AA}$ . Comme dans le cas du défaut sur la température  $T_0$ , la combinaison de ces variables ( $T_C$ ,  $T_0$  et  $C_{AA}$ ) est l'une des combinaisons de variables qui permettent de distinguer clairement les observations sans défaut des observations affectées par les défauts. Les observations sans défaut sont tracées en bleu et les observations avec défaut sont tracées en rouge à partir de l'observation 51.

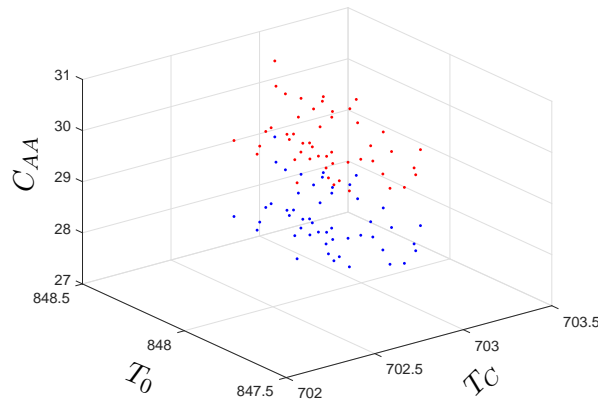


FIGURE 5.13 – Présentation des données avec le défaut sur  $C_{AA}$

### 5.4.3.2 Application de la technique de l'observation la plus proche pour le défaut sur la concentration $C_{AA}$

Avec l'observation la plus proche dans la direction de la variable  $C_{AA}$  (3.38), on évalue l'estimation de  $f_i$  (3.39). Les observations reconstruites sont marquées en magenta sur la figure 5.14. L'indice de détection  $SPE$  évalué après reconstruction,  $SPE(\hat{z}_i)$  égal à 1 est supérieur au seuil  $\delta^2$ . Les défauts sur les observations en défaut ne sont pas corrigés.

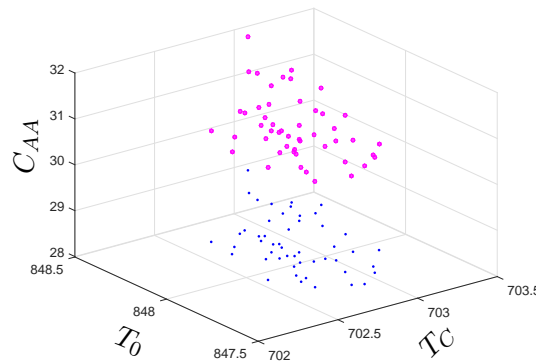


FIGURE 5.14 – Technique de l'observation la plus proche avec le défaut sur  $C_{AA}$

### 5.4.3.3 Application de la technique de la zone d'attraction pour le défaut sur la concentration $C_{AA}$

En déterminant la zone d'attraction dans la direction de la variable  $C_{AA}$  (3.46) on retient l'observation satisfaisant (3.47). Les observations reconstruites sont indiquées en magenta sur la figure 5.15. L'indice de détection  $SPE$  après reconstruction des observations,  $SPE(\hat{z}_i)$  égal à 0.68 reste supérieur au seuil  $\delta^2$ . Une partie des observations reconstruites est ramenée dans la base de données. Pour les observations qui ne sont pas ramenées dans la base de données, l'évaluation de  $\kappa(\mathbf{x})$  indique  $\kappa(\mathbf{x}) \approx 0$ .

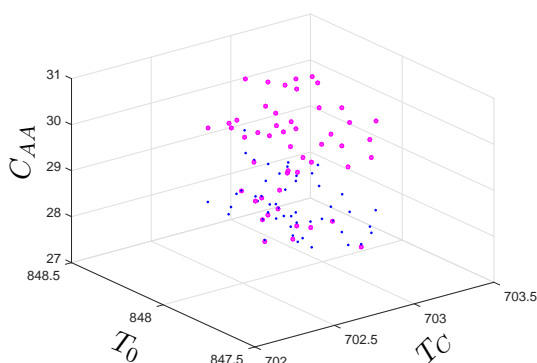


FIGURE 5.15 – Technique de la zone d'attraction avec le défaut sur  $C_{AA}$

### 5.4.3.4 Application de la technique de la détection limite pour le défaut sur la concentration $C_{AA}$

On cherche dans la base de données l'observation dont le  $SPE$  est en limite du seuil  $\delta^2$  dans la direction de la variable  $C_{AA}$  (3.71) et ensuite on détermine l'amplitude estimée de  $f_i$  (3.87). Les observations reconstruites sont marquées en magenta sur la figure 5.16.

L'indice de détection de défaut  $SPE$  calculé avec toutes les observations reconstruites  $SPE(\hat{z}_i)$  égal à 0.08 est inférieur au seuil  $\delta^2$ . Contrairement au cas de la technique de l'observation la plus proche et du cas de la technique de la zone d'attraction, dans cette troisième technique, toutes les observations reconstruites sont bien ramenées dans la base de données.

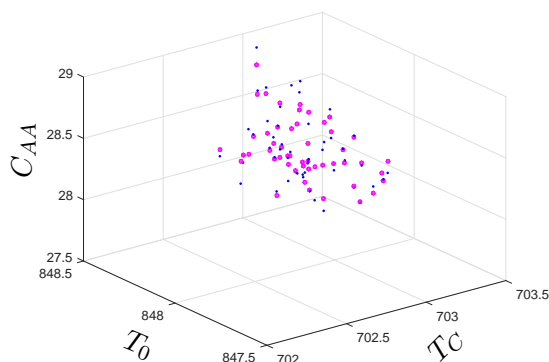


FIGURE 5.16 – Technique de la détection limite avec le défaut sur  $C_{AA}$

A travers l'application des méthodes d'initialisation, cela a permis de déterminer les amplitudes des défauts pour chaque observation en défaut pour être en mesure d'appliquer la méthode de contributions par reconstruction. Dans la section suivante, les méthodes de contributions sont mises en oeuvre pour localiser et estimer l'amplitude des défauts.

#### 5.4.4 Application des différentes méthodes de contributions pour la localisation du défaut affectant la concentration $C_{AA}$

Trois méthodes de contributions sont appliquées pour la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut concernant celui intervenant sur la concentration  $C_{AA}$  : la méthode de calcul de contributions, la méthode de contributions par reconstruction et la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes proposée.

##### 5.4.4.1 Méthode de calcul de contributions pour la localisation du défaut sur la concentration $C_{AA}$

Sur la figure 5.17, le tracé des contributions de chaque variable montre que la troisième variable (représentant la concentration  $C_{AA}$ ) est la variable affectée par le défaut. Cette variable présente la plus forte contribution par rapport aux autres variables. Les contributions sont tracées pour toutes les observations affectées par le défaut (3.12). Cette méthode de localisation basée sur l'indice  $SPE$  permet de localiser clairement la variable  $C_{AA}$  comme la variable en défaut.

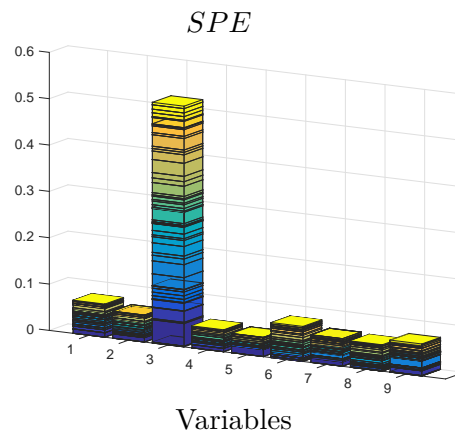


FIGURE 5.17 – Contributions des variables avec un défaut affectant la concentration  $C_{AA}$

##### 5.4.4.2 Méthode de contributions par reconstruction pour la localisation du défaut sur la concentration $C_{AA}$

Le  $RBC$  de la figure 5.18 représente le  $RBC$  cumulé de toutes ces observations affectées par le défaut et il est la contribution de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$  (3.22). La troisième technique d'initialisation, la technique de la limite de détection présentée dans la section 5.4.3.4 est appliquée dans cette méthode de contributions par reconstruction pour déterminer l'amplitude du défaut qu'il faut pour débiter l'algorithme itératif du point fixe.

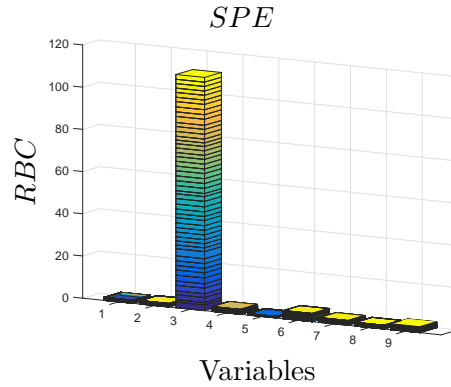


FIGURE 5.18 – Contributions par reconstruction à l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la concentration  $C_{AA}$

Les neuf barres indiquent les contributions des neuf variables à l'indice de détection  $SPE$  sur cette figure 5.18. La troisième barre représente la plus grande. Elle montre la contribution de la variable  $C_{AA}$ . La variable  $C_{AA}$  ayant la plus grande contribution, elle est considérée comme celle affectée par le défaut. La valeur de l'indice de détection  $SPE$  obtenue après reconstruction de la variable  $C_{AA}$  égale à 0.08 est inférieure au seuil et la valeur estimée du défaut est de 0.99 (kmole/m<sup>3</sup>).

#### 5.4.4.3 Méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation et l'estimation de l'amplitude du défaut sur la concentration $C_{AA}$

Dans cette approche, après avoir déterminé les coefficients du vecteur  $\hat{\beta}$  (4.2), nous calculons l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$  des défaut (4.4) pour toutes les observations affectées par le défaut. L'indice  $SPE(\hat{z}_i)$  (2.34) est évalué par la suite (avec  $\hat{z}_i = \mathbf{x} - \xi_i \hat{f}_i$  (1.39)).

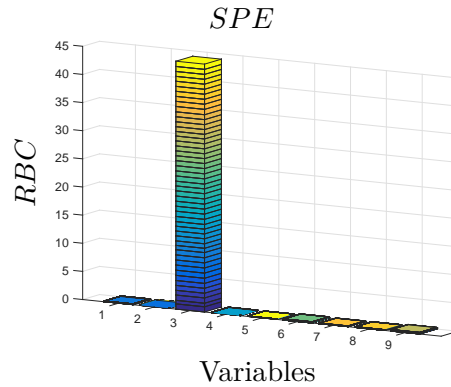


FIGURE 5.19 – Contributions par reconstruction sous contraintes à l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la concentration  $C_{AA}$

Sur la figure 5.19, le  $RBC$  (3.21) cumulé pour toutes les observations affectées par le défaut (observation 51 à 100) à l'indice  $SPE$  est présenté. La troisième valeur (qui représente  $C_{AA}$ ) est celle qui a la plus grande contribution. La variable  $C_{AA}$  est considérée comme celle en défaut.

La valeur de l'indice de détection  $SPE$  après reconstruction de la variables  $C_{AA}$  est indiquée dans le tableau 5.2.

TABLE 5.2 –  $RBC$  de l'indice de détection  $SPE$  pour un défaut affectant la concentration  $C_{AA}$

<b>Indice <math>SPE</math></b>	Variable affectée par le défaut	$C_{AA}$
	Valeur du seuil	0.18
	$SPE$ après reconstruction de $C_{AA}$	0.08
	Valeur estimée du défaut	0.98

Le  $SPE$  obtenu après reconstruction de la variable  $C_{AA}$  est inférieur au seuil du  $SPE$ . La variable  $C_{AA}$  est donc correctement reconstruite. L'estimation de l'amplitude du défaut donne 0.98 (kmole/m<sup>3</sup>). Cette valeur trouvée pour l'estimation est adéquate parce que le défaut capteur ajouté sur la concentration  $C_{AA}$  vaut 1 (kmole/m<sup>3</sup>) (section 5.4.1).

Dans ce deuxième cas de défaut sur la concentration  $C_{AA}$ , les trois méthodes de contributions localisent le défaut. La méthode de contributions par reconstruction et la nouvelle méthode de contributions par reconstruction sous contraintes conduisent à des estimations de l'amplitude du défaut correctes. Dans la section suivante, ces méthodes sont appliquées pour la localisation et l'estimation du défaut affectant la température  $T$ .

## 5.5 Détection et localisation du défaut affectant la température $T$

Après avoir simulé le défaut sur la température  $T_0$  et le défaut sur la concentration  $C_{AA}$ , la simulation du défaut capteur  $T$  introduit dans le modèle du CSTR à partir de l'observation 51 est présentée dans cette partie. Pour commencer l'étude du défaut capteur sur  $T$  sur le modèle, une description du défaut est faite, ensuite la phase de détection du défaut est effectuée et enfin les méthodes de contributions pour localiser et estimer l'amplitude du défaut sont appliquées.

### 5.5.1 Description du défaut affectant la température $T$

Pour ce troisième défaut, un biais de 1 (K) est ajouté sur le capteur de température  $T$ . Sur la figure 5.20, sont tracées en bleu comme dans les cas précédents, les variables collectées dans des conditions normales. Trois variables subissent des modifications : les variables  $F_C$ ,  $C_A$  et  $T$ . A l'inverse du défaut sur la température  $T_0$  et du défaut sur la concentration  $C_{AA}$ , ce défaut a un effet complexe sur le CSTR puisqu'il affecte trois variables simultanément comme nous l'apercevons sur la figure 5.20.



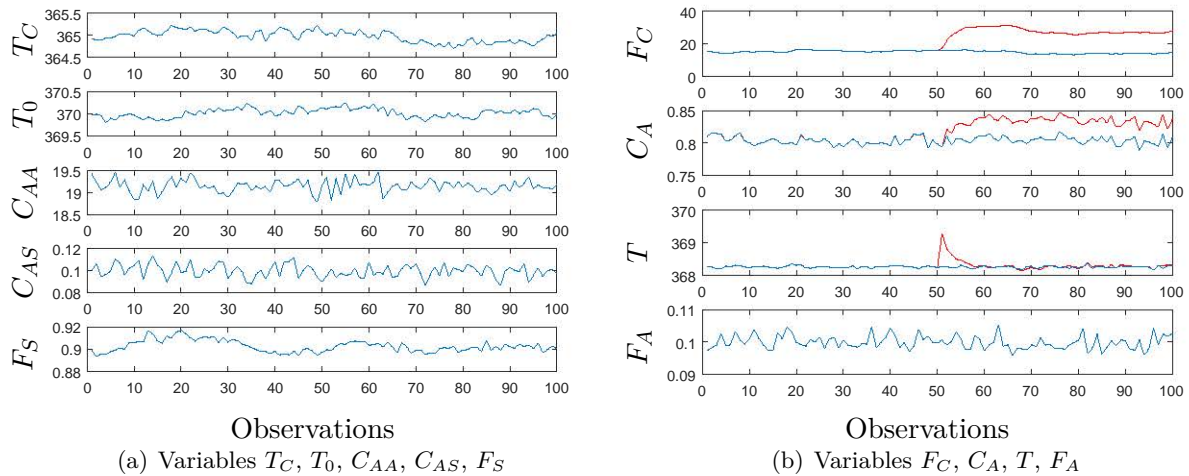


FIGURE 5.20 – Influence du défaut affectant la température  $T$  sur les variables

Dans le modèle du CSTR, la température de sortie  $T$  est contrôlée par un régulateur PI (figure 5.1). L'augmentation de la température  $T$  est corrigée suite à l'action du régulateur PI. Sur la figure 5.20, la température  $T$  augmente brusquement à partir de l'observation 51. Mais après une courte période (qui dure le temps de quelques observations), la température  $T$  diminue et atteint de nouveau sa valeur normale. Les effets du défaut sur la température  $T$  sont propagés au débit d'eau de refroidissement  $F_C$  et à la concentration de sortie  $C_A$ . Ce défaut sur  $T$  est éliminé dans le processus suite à l'augmentation du débit d'eau de refroidissement  $F_C$ . Toutefois à l'intérieur du réacteur, la température réelle est inférieure à celle nécessaire à son fonctionnement normal. Ce qui conduit à une augmentation de la concentration de sortie  $C_A$ .

### 5.5.2 Détection du défaut affectant la température $T$

Comme dans les deux cas précédents, les mêmes remarques sont faites sur la figure 5.21 pour le défaut affectant la température  $T$  à partir de l'observation 51. L'indice  $SPE$  et l'indice  $\phi$  détectent nettement le défaut.

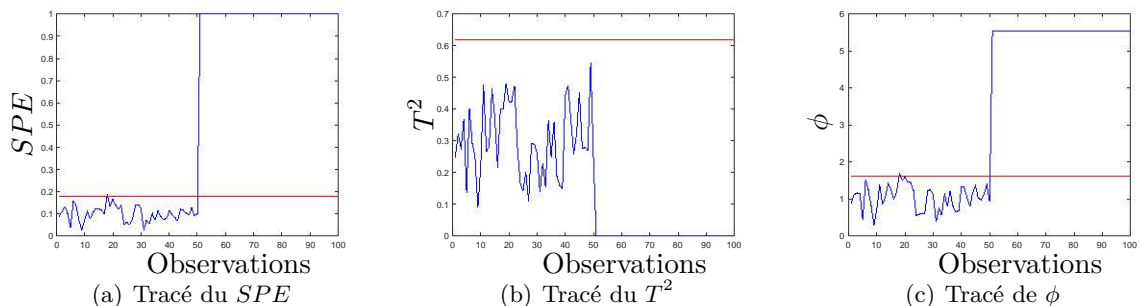


FIGURE 5.21 – Détection de défaut sur la température  $T$

Nous passons à la phase suivante dans le processus de diagnostic du CSTR après cette étape de détection du défaut sur la température  $T$ . Cette phase qui est la phase de localisation et d'estimation de l'amplitude du défaut est présentée avec les méthodes de calcul de contributions, de contributions par reconstruction et de contributions par reconstruction sous contraintes.

### 5.5.3 Application des différentes méthodes de contribution pour la localisation du défaut affectant la température $T$

Nous appliquons les méthodes de calcul de contributions pour commencer cette phase de localisation des défauts.

#### 5.5.3.1 Méthode de calcul de contributions pour la localisation du défaut sur la température $T$

La figure 5.22 illustre le tracé des contributions de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$  (3.12). La sixième variable est celle qui a la plus forte contribution. On pourrait s'arrêter là et conclure que seule la sixième variable ( $F_C$ ) est affectée par le défaut. Mais à partir de la figure 5.20, nous avons montré que le défaut affectant la température  $T$  a un effet complexe sur le CSTR. En réalité en plus de la variable  $F_C$  indiquée sur cette figure 5.22, la septième variable (représentant la concentration  $C_A$ ) et la huitième variable (représentant la température  $T$ ) sont aussi affectées par ce défaut. De surcroît avec cette méthode de contributions, la variable à l'origine du défaut (variable  $T$ ) n'est pas localisée. Ce qui pose problème puisque la figure 5.20 ne montre pas tout ceci.

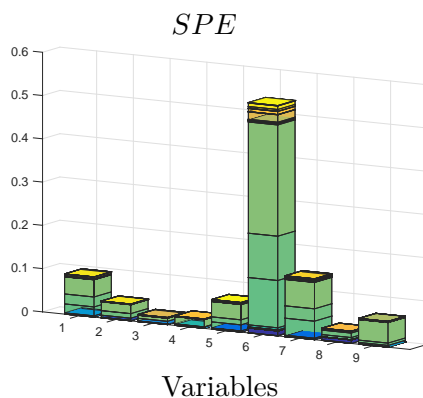


FIGURE 5.22 – Contributions des variables avec un défaut affectant la température  $T$

Dans le cas de défauts complexes, les méthodes de calcul de contributions ont quelques difficultés à localiser correctement toutes les variables affectées par le défaut et surtout à les distinguer clairement des variables qui ne sont pas affectées par le défaut. Ce qui fait que cette méthode de contributions est limitée. [DTC13] ont eu les mêmes difficultés avec ces méthodes de contributions dans la localisation des défauts complexes. Ils se sont confrontés au fait que de nombreuses variables ont des contributions élevées. Il est donc difficile d'identifier clairement dans ce cas de figure les variables affectées par le défaut. Même dans le cas de l'ACP linéaire, ces méthodes de contributions ont des résultats mitigés. [YQ01] ont soulevé ces difficultés dans le cas linéaire. Dans le cas d'un défaut complexe, même si ces tracés ne permettent pas de diagnostiquer l'origine du défaut sans équivoque, ils permettent de mieux comprendre les causes possibles du défaut et par conséquent, de restreindre considérablement la recherche sur la localisation des variables affectées par les défauts.

#### 5.5.3.2 Méthode de contributions par reconstruction pour la localisation du défaut sur la température $T$

La figure 5.23 présente le  $RBC$  cumulé pour toutes les observations affectées par le défaut (observation 51 à 100) après la reconstruction de chaque variable séparément. Le  $RBC$  calculé est celui proposé par [AQ10] (3.22).

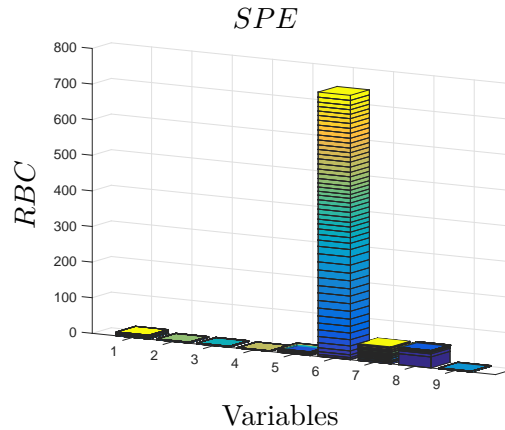


FIGURE 5.23 – Contributions par reconstruction à l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la température  $T$

La sixième variable ( $F_C$ ) est la variable qui a la plus grande contribution. L'indice de détection  $SPE$  calculé après reconstruction de la variable  $F_C$  est égal à 0.8 et il est supérieur au seuil du  $SPE$ . Dans ce cas le défaut n'est pas corrigé dans le système. Ce qui veut dire que le défaut affecte donc plus d'une variable dans le CSTR.

### 5.5.3.3 Méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation du défaut sur la température $T$

Nous calculons les coefficients du vecteur  $\hat{\beta}$  (4.2) et nous évaluons l'estimation de l'amplitude  $\hat{f}_i$  des défauts (4.4) pour toutes les observations affectées par le défaut. Ensuite l'indice  $SPE(\hat{z}_i)$  (2.34) est déterminé (avec  $\hat{z}_i = \mathbf{x} - \xi_i \hat{f}_i$  (1.39)).

La figure 5.24 illustre le  $RBC$  cumulé en prenant en compte toutes les observations en défaut. Le  $RBC$  est la différence entre la valeur de l'indice de détection  $SPE$  avant et après la reconstruction des observations en défaut (3.21).

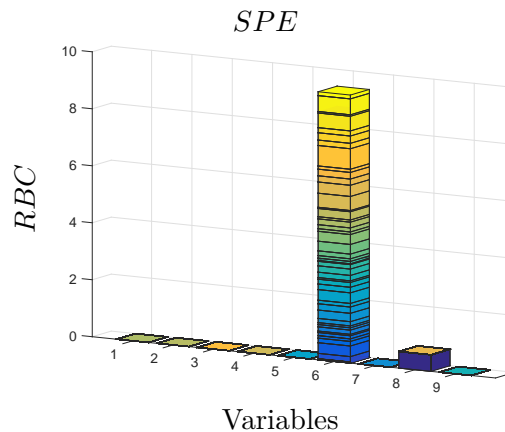


FIGURE 5.24 – Contributions par reconstruction sous contraintes de l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la température  $T$

Avec cette méthode aussi, la sixième variable ( $F_C$ ) est la variable qui a la plus grande contribution. L'indice de détection  $SPE$  calculé après reconstruction de la variable  $F_C$  vaut 0.8 et comme dans le cas de la méthode de contributions par reconstruction, cette valeur est supérieure au seuil du  $SPE$ . Le défaut n'est pas corrigé dans le système. A partir de ce constat, il faut

donc chercher une combinaison de variables qu'il faut reconstruire simultanément pour que la valeur de l'indice de détection  $SPE$  après reconstruction soit inférieure au seuil.

Comme mentionné sur la figure 5.20, le défaut affectant la température  $T$  a un effet complexe sur le CSTR. En raison de l'augmentation de la température de  $T$  de 1 degré et à cause de l'effet du régulateur PI qui contrôle  $T$ , le débit d'eau de refroidissement  $F_C$  a augmenté pour compenser cette brusque augmentation de la température  $T$ . Cet effet a provoqué aussi l'augmentation de la concentration  $C_A$ . Cela signifie qu'il faut une analyse a priori des influences des différentes variables au sein du système pour être capable de détecter, localiser et corriger.

Dans la section suivante, nous reconstruisons donc simultanément les trois variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$  et nous comparons les méthodes de contributions par reconstruction et de contributions par reconstruction sous contraintes.

#### 5.5.3.4 Comparaison de la méthode de contributions par reconstruction et de la méthode de contributions par reconstruction sous contraintes pour la localisation du défaut $T$

Comparons les résultats obtenus, lors de la reconstruction simultanée des trois variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$  lors de l'utilisation de la méthode de contributions par reconstruction et celle des contributions par reconstruction sous contraintes. Sur la figure 5.25(a), le  $RBC$  cumulé est celui de [AQ10] (3.22). Sur la figure 5.25(b) est évalué le  $RBC$  cumulé de (3.21).

**Méthode de contributions par reconstruction avec la reconstruction simultanée des variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$**  (figure 5.25(a))

Concernant la proposition de [AQ10] (3.22), pour le tracé des neuf premières barres sur la figure 5.25(a), la sixième variable (qui correspond à  $F_C$ ) est celle qui a la plus grande contribution à l'indice de détection  $SPE$ . Ces neuf premières barres représentent les tracés des  $RBC$  pour chaque variable reconstruite séparément. Elles représentent les neuf barres de la figure 5.23. Comme l'indice de détection calculé après reconstruction de la variable  $F_C$  vaut 0.8 et donc supérieur au seuil du  $SPE$ , on procède à la reconstruction simultanée des trois variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$ .

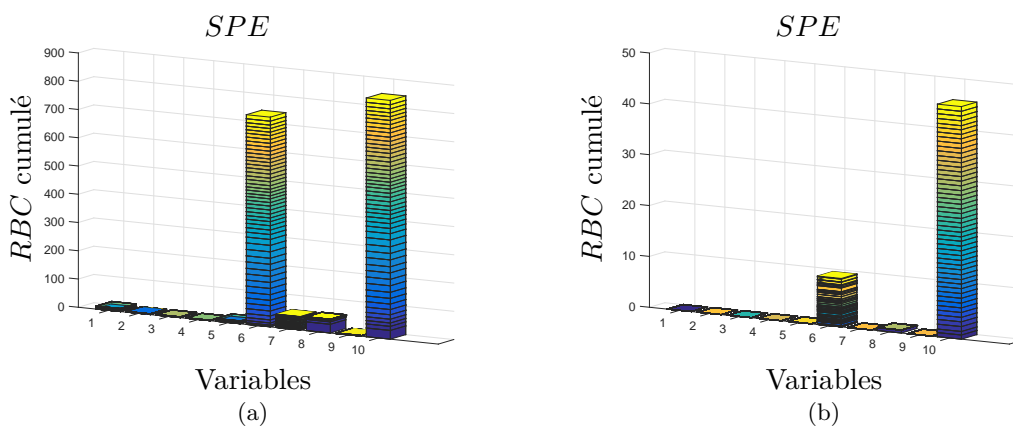


FIGURE 5.25 – Contributions par reconstruction (5.25(a)) et contributions par reconstruction sous contraintes (5.25(b)) à l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant la température  $T$

La dixième barre sur la figure 5.25(a) représente le  $RBC$  calculé après la reconstruction simultanée des variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$  pour toutes les observations en défaut. La valeur du  $SPE$  calculée après reconstruction simultanée des trois variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$  est égale à 0.09 et elle est inférieure au seuil.

### Méthode de contributions par reconstruction sous contraintes avec la reconstruction simultanée des variables $T$ , $F_C$ et $C_A$ (figure 5.25(b))

Les neuf premières barres de la figure 5.25(b) correspondent au tracé des  $RBC$  pour chaque variable reconstruite séparément. Elles représentent les neuf barres de la figure 5.24. Comme illustré sur la figure 5.24, sur les neuf premières barres, la sixième variable ( $F_C$ ) est celle qui a la plus grande contribution à l'indice de détection  $SPE$ . Le  $RBC$  cumulé obtenu après reconstruction simultanée des trois variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$  est marqué par la dixième barre sur la figure 5.25(b). La dixième barre est nettement plus grande que la sixième barre.

La valeur du  $SPE$  calculée après reconstruction simultanée des variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$  est indiquée dans le tableau 5.3. A l'inverse du cas de la figure 5.24 où après reconstruction de la variable  $F_C$ , la valeur obtenue après reconstruction est supérieure au seuil du  $SPE$ , dans le tableau 5.3, la valeur obtenue après reconstruction des trois variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$  est inférieure au seuil du  $SPE$ .

TABLE 5.3 –  $RBC$  de l'indice  $SPE$  pour un défaut affectant  $T$

	Valeur du seuil	0.18
<b>Indice <math>SPE</math></b>	$SPE$ après reconstruction simultanée de $T$ , $F_C$ et $C_A$	0.09

Dans le cas de la figure 5.25(a), la sixième barre ( $RBC$  calculé après reconstruction de  $F_C$ ) et la dixième barre ( $RBC$  calculé après reconstruction de  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$ ) ont un écart relatif de 12.1%. A première vue de la figure 5.25(a), on pourrait penser qu'en reconstruisant uniquement la variable  $F_C$ , on pourrait éliminer le défaut dans le système puisque les deux barres (6 et 10) sont quasiment au même niveau. Ce qui n'est pas le cas de la figure 5.25(b) où l'écart relatif entre la barre 6 et la barre 10 est plus net puisqu'il représente 79.2%.

En comparaison de ces deux résultats sur la méthode de contributions par reconstruction et la méthode proposée de contributions par reconstruction sous contraintes, il est clair que la nouvelle méthode proposée donne de meilleurs résultats pour la localisation des variables affectées par les défauts.

## 5.6 Conclusion

Le système choisi pour appliquer toutes les méthodes développées dans ce travail est un réacteur à agitation continue (CSTR). Pour mettre en évidence les méthodes existantes et les méthodes proposées, analyser les différentes approches et évaluer la pertinence de chacune des techniques, trois défauts ont été simulés. Deux défauts affectent simplement une seule variable à la fois (défaut sur le capteur de température  $T_0$  et défaut sur le capteur de concentration  $C_{AA}$ ). Le troisième défaut sur le capteur de température  $T$  affectant simultanément trois variables ( $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$ ) est un défaut multiple sur le système parce que ce défaut a un effet complexe sur le CSTR.

La première étape des études a concerné la partie de la détection des défauts. Trois indices de détection ont été utilisés : l'indice  $SPE$ , l'indice  $T^2$  et l'indice combiné  $\phi$ . Pour ces trois défauts, le même constat a été fait. Les indices  $SPE$  et  $\phi$  détectent à chaque fois les défauts. Par contre l'indice  $T^2$  ne parvient pas à les détecter correctement.

La deuxième étape des études a été la phase de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts effectuée grâce aux méthodes de contributions. Dans un premier temps pour chaque défaut simulé, les méthodes existantes de contributions ont été appliquées. Il s'agit de la méthode de calcul de contributions [CLC<sup>+</sup>05] et la méthode de contributions par reconstruction [AQ10]. La méthode de contributions par reconstruction nécessite pour l'évaluation de l'estimation de l'amplitude du défaut d'initialiser l'algorithme itératif du point fixe. Les trois techniques d'initialisation ont été alors appliquées sur le modèle pour trouver donc la bonne initialisation qu'il faut effectuer. La première technique d'initialisation, celle de l'observation la plus proche dans la direction de reconstruction a donné de mauvais résultats. Les observations en défaut reconstruites n'ont pas été ramenées dans la base de données (contenant les observations sans défaut). Par conséquent les défauts n'ont pas été corrigés sur les observations en défaut. La deuxième technique d'initialisation, celle de la zone d'attraction et la troisième technique d'initialisation, celle de la limite de détection ont mieux fonctionné que la première technique. Au final la troisième technique a été utilisée pour initialiser l'amplitude du défaut dans cette méthode de contributions par reconstruction.

Les méthodes existantes (méthode de calcul de contributions et méthode de contributions par reconstruction) ont présenté quelques inconvénients surtout dans le cas du défaut complexe affectant simultanément les trois variables  $T$ ,  $F_C$  et  $C_A$ . Pour la méthode de calcul de contributions, il n'est pas évident de déterminer de façon précise toutes les variables affectées par les défauts. En analysant le tracé des contributions de chaque variable, il n'est pas clair de définir explicitement toutes les variables affectées par les défauts. Pour la méthode de contributions par reconstruction, dans le cadre du défaut complexe, le résultat trouvé après le tracé des contributions de chaque variable à l'indice de détection  $SPE$  a prêté à confusion et fait penser qu'en reconstruisant une seule variable, en l'occurrence la variable  $F_C$  le défaut peut être éliminé du CSTR. Ce qui n'est réellement pas le cas. Dans un deuxième temps, avec la nouvelle méthode de contributions par reconstruction sous contraintes proposée ces manquements ont trouvé une solution et les difficultés relevées dans ces méthodes existantes de contributions ont été résolues. Le cas du défaut complexe simulé avec cette méthode de contributions par reconstruction sous contraintes est édifiant à ce sujet.

# Conclusion Générale et perspectives

## Conclusion Générale

La supervision des systèmes pour une performance efficace est un élément très important dans la mise en oeuvre des processus industriels. Cette surveillance est impérative pour éviter toute défaillance. Une telle surveillance passe par un diagnostic des systèmes. Pour diagnostiquer le fonctionnement d'un système, il est nécessaire de détecter, de localiser les défauts puis d'estimer les principales caractéristiques des défauts (les amplitudes des défauts). L'ACP est une méthode d'analyse de données très utilisée comme technique de surveillance et de diagnostic de systèmes. Puisque l'Analyse en Composantes Principales est utilisée pour analyser les structures linéaires entre les données, couplée aux méthodes à noyau, elle permet la transposition au cas de diagnostic des systèmes non linéaires. Ainsi avec l'Analyse en Composantes Principales à noyau, il est possible de détecter, localiser et estimer l'amplitude des défauts sur un système non linéaire. Les travaux de cette thèse ont consisté en particulier à développer de nouvelles méthodes pour la phase de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts.

Nous avons d'abord présenté l'Analyse en Composantes Principales pour le diagnostic de systèmes linéaires. Dans cette partie, les bases de la méthode ont été posées. Ce qui a permis de construire le modèle ACP et de faire le diagnostic des systèmes linéaires. L'ACP divise l'espace en deux parties : l'espace principal et l'espace résiduel. L'espace principal est engendré par  $\ell$  vecteurs propres correspondant aux  $\ell$  plus grandes valeurs propres et l'espace résiduel est formé par les  $m - \ell$  vecteurs propres restants (avec  $\ell$  le nombre de composantes principales et  $m$  le nombre de variables). Les méthodes simulées sur un exemple de système linéaire ont été concluantes sur la détection, la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts. Concernant la phase de détection, trois indices de détection ont été décrits : l'erreur quadratique d'estimation *SPE* qui mesure l'erreur commise après la projection des données sur l'espace principal, la statistique de Hotelling qui se calcule dans l'espace principal et un indice combiné  $\phi$  établi sur l'ensemble des deux espaces. Pour la localisation et l'estimation de l'amplitude des défauts, des méthodes de contributions ont été présentées : les méthodes de calcul de contributions, les méthodes de contributions basées sur la reconstruction (*RBC*) et les méthodes de reconstruction. Ces méthodes appliquées sur un exemple de système non linéaire n'ont pas eu de résultats probants. L'Analyse en Composantes Principales à noyau a été introduite pour résoudre ce problème des systèmes non linéaires. Après avoir énoncé les principes du KPCA, nous avons procédé à la détection de défauts par l'évaluation des indices de détection. Ces indices fonctionnent comme les indices utilisés dans le cas linéaire. En effet le KPCA divise aussi l'espace en deux parties : l'espace principal élaboré à partir des  $\ell$  vecteurs propres correspondant aux  $\ell$  plus grandes valeurs propres et l'espace résiduel défini à partir des  $N - \ell$  vecteurs propres (avec  $N$  le nombre d'observations). En plus des indices de détection de défaut qui existent dans la littérature, nous avons proposé un nouvel indice qui fonctionne mieux que les indices existants. L'étude de l'indice de détection en fonction de l'amplitude du défaut a permis de fixer les limites de la détectabilité

sur un système non linéaire.

Ensuite, nous avons abordé les méthodes de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts pour les systèmes non linéaires. Les méthodes utilisées pour la localisation des défauts et l'estimation de leurs amplitudes (les méthodes de calcul de contributions et les méthodes de contributions basées sur la reconstruction) ont été présentées. Ces méthodes de contributions fonctionnent sur les mêmes principes que ceux utilisés dans le cas linéaire. Mais les méthodes de contributions par reconstruction nécessitent pour l'estimation de l'amplitude du défaut une initialisation de l'amplitude du défaut. Nous avons donc proposé trois techniques d'initialisation pour une bonne initialisation de l'amplitude du défaut. La première technique détermine l'observation la plus proche dans la direction de reconstruction, la deuxième méthode analyse la zone d'attraction de la base de données et la troisième méthode examine la limite de détection en suivant la direction de reconstruction. Chaque méthode d'initialisation a été simulée sur un exemple de système à deux dimensions avec une direction choisie comme direction de reconstruction. L'application de ces techniques a conduit à une meilleure convergence de l'algorithme permettant d'estimer l'amplitude du défaut. En illustrant ces méthodes de contributions existantes, nous avons constaté d'une part que les méthodes de calcul de contribution ne permettent pas d'estimer l'amplitude des défauts et ont des difficultés à identifier la bonne variable affectée par le défaut dans le cas des défauts multiples, d'autre part que les méthodes de contributions basées sur la reconstruction ne localisent pas correctement les variables affectées par les défauts sur certains exemples. A partir de là, nous avons proposé une nouvelle méthode de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts. C'est une méthode de contributions basées sur la reconstruction sous contraintes. La comparaison des méthodes existantes de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts et la nouvelle approche proposée ont permis de conclure sur l'efficacité de cette dernière.

Enfin pour confirmer les résultats des méthodes développées dans ce travail, elles ont été appliquées sur des données issues d'un modèle de réacteur à agitation continue. Le modèle est affecté par des perturbations et des bruits de mesures. Trois défauts capteurs ont été introduits dans le modèle : deux défauts simples (affectant une seule variable à la fois) et un défaut multiple (affectant plusieurs variables simultanément à cause de l'action d'un régulateur proportionnel intégral). La phase de détection de défauts sur le CSTR a montré que les indices  $SPE$  et  $\phi$  détectent les défauts. L'indice  $T^2$  donne des résultats qui ne sont pas corrects. Ceci a été vérifié pour les trois défauts. Dans la phase de localisation et d'estimation de l'amplitude des défauts, les méthodes d'initialisation ont été appliquées pour un bon départ de l'algorithme du point fixe qui permet dans notre cas d'estimer l'amplitude du défaut. Pour les simulations effectuées, la troisième technique proposée a été la plus satisfaisante. En ce qui concerne la localisation des défauts simples, toutes les méthodes appliquées identifient la variable en défaut. Par contre dans le cas des défauts multiples, les méthodes existantes n'arrivent pas à localiser toutes les variables affectées par les défauts. En revanche la nouvelle méthode de contributions sous contraintes identifie clairement les variables en défaut. Les estimations de l'amplitude des défauts trouvées avec la méthode de contributions sous contraintes sont très proches des amplitudes de défauts ajoutées sur les données.

## **Perspectives**

Pour la suite de ce travail, nous suggérons quelques pistes qui peuvent être intéressantes à étudier concernant les méthodes développées.



---

**Résolution du problème d’optimisation :** nous avons résolu le problème d’optimisation (3.20) en utilisant l’algorithme itératif du point fixe parce que la solution obtenue pour les estimations des amplitudes des défauts ((3.29), (3.32), 3.35) est écrite dans une forme qui facilite l’usage de cette méthode. La technique de la descente du gradient avec un pas adaptatif peut également être utilisée pour résoudre ce problème. A chaque itération, on cherche un pas optimal pour assurer la convergence de l’algorithme. Même si cette méthode de résolution peut allonger le temps de calcul par rapport à la méthode du point fixe, elle mérite d’être testée pour analyser les résultats.

**Recherche du point initial :** lors de la recherche du point initial pour le début de l’algorithme du point fixe, l’observation retenue a été cherchée dans toute la base de données. Si le nombre d’observations est très grand, cette recherche est consommatrice de temps de calcul. Pour le restreindre, on peut effectuer la recherche en ne considérant que certaines observations voisines de l’observation en défaut dans la direction de reconstruction. Ainsi, au lieu de balayer toute la base de données, on peut considérer une méthode qui sélectionne les observations en fonction de leurs proximités avec l’observation en défaut, comme par exemple la technique des  $k$  plus proches voisins.

**Localisation des défauts multiples :** pour la localisation des défauts sur le CSTR, nous avons procédé d’une manière séquentielle et en faisant une analyse a priori des variables. Selon le nombre de variables affectées simultanément par les défauts, il peut sembler difficile de faire une analyse combinatoire de toutes les possibilités. Pour gérer le nombre de combinaisons afin qu’il n’explose pas, une analyse préalable sur les variables peut être utile. L’étude de la causalité entre les variables en analysant les grandeurs mesurées peut être intéressante. Dans le modèle du CSTR, nous avons constaté qu’un défaut introduit sur une variable peut se propager dans tout le système et affecter d’autres variables. L’étude de la dépendance qui existe entre les variables peut servir à connaître les variables susceptibles d’être affectées par un défaut propagé par une autre. Dans la littérature, on peut trouver des études sur la causalité des variables [Gra88], [YSX12], [MS06]. Dans [Fag13], les auteurs se sont basés sur le transfert d’entropie comme mesure de causalité et ont développé des algorithmes pour identifier le modèle causal à partir des données. Cela a permis de construire un graphe orienté pour représenter graphiquement les relations de causalité entre les mesures des variables. Ainsi à travers de telles approches, il peut être possible de faire une analyse des variables pour limiter le nombre de scénarii des situations à envisager.

**Technique d’initialisation :** sur le CSTR lors des défauts multiples affectant trois variables, nous n’avons pas pu appliquer les techniques d’initialisation en tenant compte de toutes les directions simultanément. C’est un problème difficile à résoudre. Dans le cas de la technique de la zone d’attraction, nous avons cherché l’intersection entre une direction de reconstruction et un cercle. Par exemple, si nous avons à reconstruire trois variables avec deux directions de reconstruction, les deux directions formeront un plan et le cercle deviendra lors de la reconstruction de trois variables une sphère. Il faudra alors chercher l’intersection entre le plan et la sphère pour trouver l’observation retenue. Or cette intersection conduit à un disque. Quelle observation faudra-t-il alors choisir sur ce disque? Ce problème doit être analysé précisément .

**Systèmes dynamiques :** la plupart des processus industriels variant en fonction du temps sont dynamiques, on peut aussi penser à appliquer les méthodes développées dans ce travail à un système dynamique. Cependant, une limitation majeure du diagnostic basé sur le KPCA est que le modèle KPCA est invariant dans le temps. Des méthodes ont été développées avec des algorithmes récursifs pour tenir compte de la dynamique des systèmes [ZLT12], [GWWZ16]

et faire la détection de défauts. En se basant sur ces travaux et les méthodes de localisation présentées, de nouvelles approches pour le diagnostic des systèmes dynamiques pourraient être développées.

# Annexe A

## Annexe

La matrice  $\Phi$  (2.3) a été supposée centrée pour tous les calculs effectués. Lorsque ceci n'est pas le cas, dans cet annexe, nous évaluons les calculs du noyau Gaussien et les estimations des amplitudes des défauts à partir des noyaux centrés.

### A.1 Centrage des données dans l'espace des caractéristiques

Le vecteur  $\Phi(\mathbf{x}_i)$  centré s'écrit :

$$\varphi_c(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\mathbf{x}_i) \quad (\text{A.1})$$

Dans l'espace des caractéristiques, la fonction noyau centrée de deux observations  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_j$  est :

$$\begin{aligned} \kappa_c(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= \varphi_c^\top(\mathbf{x}_i) \varphi_c(\mathbf{x}_j) \\ &= \left[ \varphi(\mathbf{x}_i) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(\mathbf{x}_i) \right]^\top \left[ \varphi(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(\mathbf{x}_j) \right] \\ &= \varphi^\top(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi^\top(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi^\top(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi^\top(\mathbf{x}_i) \varphi(\mathbf{x}_j) \\ &= \kappa(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{1}_N^\top \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}_j) + \mathbf{1}_N^\top \mathbf{K} \mathbf{1}_N \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A partir de (2.30), le vecteur centré de  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$  est  $\boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{x})$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{x}) &= \left[ \kappa_c(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) \quad \kappa_c(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) \cdots \kappa_c(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N) \right]^\top \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) (\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) - \mathbf{K} \mathbf{1}_N) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

avec  $\mathbf{I}_N = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{I}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et  $\mathbf{I}$  ( $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ) matrice identité.

La matrice de Gram centrée sous forme matricielle donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_c &= \mathbf{K} - \mathbf{I}_N \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{I}_N + \mathbf{I}_N \mathbf{K} \mathbf{I}_N \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $SPE$ centré

L'équation (2.34) devient avec le noyau centré :

$$SPE_c(\mathbf{x}) = \kappa_c(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{x}) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{x}) \quad (\text{A.5})$$

Si nous évaluons le  $SPE_c$  en  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$  alors à partir de (A.5), nous avons :

$$SPE_c(\mathbf{z}_i) = \kappa_c(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) - \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)$$

L'objectif est d'estimer l'amplitude du défaut  $\hat{f}_i$  associée à  $\boldsymbol{\xi}_i$  pour lesquelles  $SPE_c^2(\mathbf{z}_i) < \delta^2$ . Il faut minimiser  $SPE_c^2$ . La dérivée première de  $SPE_c^2(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$  est :

$$\frac{\partial SPE_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = \frac{\partial \kappa_c(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)}{\partial f_i} - 2 \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \quad (\text{A.6})$$

Or

$$\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) = [\kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1) \cdots \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_N)]^\top$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1)}{\partial f_i} &= -\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_1)^\top (-\boldsymbol{\xi}_i) \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\xi}_i^\top (\mathbf{z}_i - \mathbf{x}_1) \kappa(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A partir de (A.3) :  $\boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) (\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) - \mathbf{K} \mathbf{1}_N)$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \quad (\text{A.8})$$

Et à partir de (A.2) nous avons :

$$\frac{\partial \kappa_c(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = -2 \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \mathbf{1}_N = -2 \mathbf{1}_N^\top \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \quad (\text{A.9})$$

Donc :

$$\frac{\partial SPE_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = -2 \mathbf{1}_N^\top \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} - 2 \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i}$$

Or à partir de (3.26),  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial SPE_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= -2 \mathbf{1}_N^\top \left( \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \right) - 2 \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \left( \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \right) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \mathbf{1}_N^\top \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) - \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{A}_i^\top(\mathbf{z}_i) [\mathbf{1}_N + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)] \end{aligned}$$

A partir de (3.28),  $\mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) - f_i \mathbf{I}$  et  $\mathbf{A}_i^\top(\mathbf{z}_i) = \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i)$  car  $\mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i)$  est une matrice diagonale.

Alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial SPE_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) [\mathbf{1}_N + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)] \\
 &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) - f_i \mathbf{I}) [\mathbf{1}_N + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)] \\
 &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) [\mathbf{1}_N + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)] + \frac{2}{\sigma^2} f_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) [\mathbf{1}_N + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)]
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\left. \frac{\partial SPE_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \right|_{\mathbf{z}_i = \hat{\mathbf{z}}_i, f_i = \hat{f}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_i = \frac{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) [\mathbf{1}_N + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\hat{\mathbf{z}}_i)]}{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) [\mathbf{1}_N + (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa}_c(\hat{\mathbf{z}}_i)]} \tag{A.11}$$

Si le nombre d'observations  $N$  est très grand, l'estimation de l'amplitude (A.11) tend vers l'estimation de l'amplitude évaluée en (3.29).

### A.3 Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice de détection $T^2$ centré

Dans le cas du noyau centré, (2.36) devient :

$$T_c^2(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{x}) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{x}) \tag{A.12}$$

Si nous déterminons  $T_c^2$  en  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$  dans (A.12), nous obtenons :

$$T_c^2(\mathbf{z}_i) = \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) \tag{A.13}$$

Il faut déterminer  $\boldsymbol{\xi}_i$  et  $\hat{f}_i$  pour lesquelles  $T_c^2(\mathbf{z}_i) < \tau^2$ . Il faut minimiser  $T_c^2$ . La dérivée première de  $T_c^2(\mathbf{z}_i)$  par rapport à  $f_i$  est :

$$\frac{\partial T_c^2(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = 2 \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{D} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \tag{A.14}$$

Puisque  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i}$  et  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  alors

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_c^2(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{D} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i) \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) - f_i \mathbf{I}) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) \\
 &= \frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) - \frac{2}{\sigma^2} f_i \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

La valeur de l'amplitude du défaut dans la direction  $\boldsymbol{\xi}_i$  (avec  $\left. \frac{\partial T_c^2(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \right|_{\mathbf{z}_i = \hat{\mathbf{z}}_i, f_i = \hat{f}_i} = 0$ )

donne :

$$\hat{f}_i = \frac{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_c(\hat{\mathbf{z}}_i)}{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa}_c(\hat{\mathbf{z}}_i)} \quad (\text{A.16})$$

Si le nombre d'observations  $N$  est très grand, l'estimation de l'amplitude (A.16) tend vers l'estimation de l'amplitude calculée en (3.32).

#### A.4 Estimation de l'amplitude du défaut avec l'indice combiné $\phi$ centré

Avec un noyau centré, (2.38) donne :

$$\phi_c(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_c(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\delta^2} + \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{x}) \quad (\text{A.17})$$

L'évaluation de  $\phi$  en  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i f_i$  dans (A.17), nous avons :

$$\phi_c(\mathbf{z}_i) = \frac{\kappa_c(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i)}{\delta^2} + \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) \quad (\text{A.18})$$

La dérivée de  $\phi_c(\mathbf{z}_i)$  donne :

$$\frac{\partial \phi_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = -2 \frac{\mathbf{1}_N^\top}{\delta^2} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} + 2 \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i}$$

Comme  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)$  (3.26) et  $\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{f}_i}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} &= -2 \frac{\mathbf{1}_N^\top}{\delta^2} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} + 2 \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \\ &= -2 \frac{\mathbf{1}_N^\top}{\delta^2} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} + 2 \boldsymbol{\kappa}_c^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{z}_i)}{\partial \mathbf{f}_i} \\ &= -2 \frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \left( \frac{\mathbf{1}_N}{\delta^2} - (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) \right) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) \mathbf{A}_i(\mathbf{z}_i) \left( \frac{\mathbf{1}_N}{\delta^2} - (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) \right) \\ &= -\frac{2}{\sigma^2} \boldsymbol{\kappa}^\top(\mathbf{z}_i) (\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) - f_i \mathbf{I}) \left( \frac{\mathbf{1}_N}{\delta^2} - (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}_c(\mathbf{z}_i) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Pour  $\left. \frac{\partial \phi_c(\mathbf{z}_i)}{\partial f_i} \right|_{\mathbf{z}_i = \hat{\mathbf{z}}_i, f_i = \hat{f}_i} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\hat{f}_i = \frac{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \mathbf{A}_i(\mathbf{x}) \left[ \frac{\mathbf{1}_N}{\delta^2} - (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}_c(\hat{\mathbf{z}}_i) \right]}{\boldsymbol{\kappa}^\top(\hat{\mathbf{z}}_i) \left[ \frac{\mathbf{1}_N}{\delta^2} - (\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\kappa}_c(\hat{\mathbf{z}}_i) \right]} \quad (\text{A.20})$$

Si le nombre d'observations  $N$  est très grand, l'estimation de l'amplitude (A.20) tend vers l'estimation de l'amplitude calculée en (3.35).

**Remarque :** Si le nombre d'observations  $N$  est très grand, le centrage des données dans l'espace des caractéristiques n'est pas nécessaire. C'est ce que nous avons démontré dans cet annexe.





# Bibliographie

- [ABGB12] Mahmud Ahmed, Mabrouka Baqqar, Fengshou Gu, and Andrew Ball. Fault detection and diagnosis using principal component analysis of vibration data from a reciprocating compressor. In *Control (CONTROL), 2012 UKACC International Conference on*, pages 461–466. IEEE, 2012.
- [AQ09] Carlos Alcalá and Joe Qin. Reconstruction-based contribution for process monitoring. *Automatica*, 45(7) :1593–1600, 2009.
- [AQ10] Carlos Alcalá and Joe Qin. Reconstruction-based contribution for process monitoring with kernel principal component analysis. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(17) :7849–7857, 2010.
- [AQ11] Carlos Alcalá and Joe Qin. Analysis and generalization of fault diagnosis methods for process monitoring. *Journal of Process Control*, 21(3) :322–330, 2011.
- [Bak98] Bhavik Bakshi. Multiscale pca with application to multivariate statistical process monitoring. *AIChE journal*, 44(7) :1596–1610, 1998.
- [BK08] Stella Bezergianni and Aggeliki Kalogianni. Application of principal component analysis for monitoring and disturbance detection of a hydrotreating process. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(18) :6972–6982, 2008.
- [Box54] George Box. Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, i. effect of inequality of variance in the one-way classification. *The annals of mathematical statistics*, pages 290–302, 1954.
- [Cat66] Raymond Cattell. The scree test for the number of factors. *Multivariate behavioral research*, 1(2) :245–276, 1966.
- [CHC10] Chun-Yuan Cheng, Chun-Chin Hsu, and Mu-Chen Chen. Adaptive kernel principal component analysis (kPCA) for monitoring small disturbances of nonlinear processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(5) :2254–2262, 2010.
- [CLC<sup>+</sup>05] Ji-Hoon Cho, Jong-Min Lee, Sang Wook Choi, Dongkwon Lee, and In-Beum Lee. Fault identification for process monitoring using kernel principal component analysis. *Chemical engineering science*, 60(1) :279–288, 2005.
- [CLL<sup>+</sup>05] Sang Wook Choi, Changkyu Lee, Jong-Min Lee, Jin Hyun Park, and In-Beum Lee. Fault detection and identification of nonlinear processes based on kernel PCA. *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, 75(1) :55–67, 2005.
- [CLW08] Peiling Cui, Junhong Li, and Guizeng Wang. Improved kernel principal component analysis for fault detection. *Expert Systems with Applications*, 34(2) :1210–1219, 2008.
- [CML08] Sang Wook Choi, Julian Morris, and In-Beum Lee. Nonlinear multiscale modelling for fault detection and identification. *Chemical engineering science*, 63(8) :2252–2266, 2008.

- [DM96] Dong Dong and Thomas McAvoy. Nonlinear principal component analysis based on principal curves and neural networks. *Computers & Chemical Engineering*, 20(1) :65–78, 1996.
- [DQ98] Ricardo Dunia and Joe Qin. Subspace approach to multidimensional fault identification and reconstruction. *AIChE Journal*, 44(8) :1813–1831, 1998.
- [DQEM96] Ricardo Dunia, Joe Qin, Thomas Edgar, and Thomas McAvoy. Identification of faulty sensors using principal component analysis. *AIChE Journal*, 42(10) :2797–2812, 1996.
- [DTC13] Xiaogang Deng, Xuemin Tian, and Sheng Chen. Modified kernel principal component analysis based on local structure analysis and its application to nonlinear process fault diagnosis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 127 :195–209, 2013.
- [DZD<sup>+</sup>10] Steven Ding, Ping Zhang, Eve Ding, Amol Naik, Pengcheng Deng, and Weihua Gui. On the application of pca technique to fault diagnosis. *Tsinghua Science and Technology*, 15(2) :138–144, 2010.
- [DZW17] Xiaogang Deng, Na Zhong, and Lei Wang. Nonlinear multimode industrial process fault detection using modified kernel principal component analysis. *IEEE Access*, 5 :23121–23132, 2017.
- [EYND09] Lamiaa Elshenawy, Shen Yin, Amol Naik, and Steven Ding. Efficient recursive principal component analysis algorithms for process monitoring. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 49(1) :252–259, 2009.
- [Fag13] Ahmed Faghraoui. *Modélisation de causalité et diagnostic des systèmes complexes de grande dimension*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2013.
- [Fer95] Louis Ferré. Selection of components in principal component analysis : a comparison of methods. *Computational Statistics & Data Analysis*, 19(6) :669–682, 1995.
- [GAFVS09] Diego Garcia-Alvarez, Maria Jesus Fuente, Pastora Vega, and Gregorio Sainz. Fault detection and diagnosis using multivariate statistical techniques in a wastewater treatment plant. In *Proceedings of the 7th IFAC international symposium on advanced control of chemical processes, Turkey*, 2009.
- [GLHM99] Janos Gertler, Weihua Li, Yunbing Huang, and Thomas McAvoy. Isolation enhanced principal component analysis. *AIChE Journal*, 45(2) :323–334, 1999.
- [GM97] Janos Gertler and Thomas J McAvoy. Principal component analysis and parity relations—a strong duality. *IFAC Proceedings Volumes*, 30(18) :833–838, 1997.
- [Gra88] Clive Granger. Some recent development in a concept of causality. *Journal of econometrics*, 39(1-2) :199–211, 1988.
- [GWWZ16] Yong Gao, Xin Wang, Zhenlei Wang, and Liang Zhao. Fault detection in time-varying chemical process through incremental principal component analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 158 :102–116, 2016.
- [GYS09] Zhiqiang Ge, Chunjie Yang, and Zhihuan Song. Improved kernel pca-based monitoring approach for nonlinear processes. *Chemical Engineering Science*, 64(9) :2245–2255, 2009.
- [Har03] Mohamed-Faouzi Harkat. *Détection et localisation de défauts par analyse en composantes principales*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL, 2003.

- 
- [Haw74] Douglas Hawkins. The detection of errors in multivariate data using principal components. *Journal of the American Statistical Association*, 69(346) :340–344, 1974.
- [HKY07] Qingbo He, Fanrang Kong, and Ruqiang Yan. Subspace-based gearbox condition monitoring by kernel principal component analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(4) :1755–1772, 2007.
- [Hof07] Heiko Hoffmann. Kernel pca for novelty detection. *Pattern recognition*, 40(3) :863–874, 2007.
- [Hot33] Harold Hotelling. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of educational psychology*, 24(6) :417, 1933.
- [HR11a] Paul Honeine and Cédric Richard. A closed-form solution for the pre-image problem in kernel-based machines. *Journal of Signal Processing Systems*, 65(3) :289–299, 2011.
- [HR11b] Paul Honeine and Cedric Richard. Preimage problem in kernel-based machine learning. *IEEE Signal Processing Magazine*, 28(2) :77–88, 2011.
- [HSG94] David Himes, Robert Storer, and Christos Georgakis. Determination of the number of principal components for disturbance detection and isolation. In *American Control Conference, 1994*, volume 2, pages 1279–1283. IEEE, 1994.
- [HTMR10] Mohamed-Faouzi Harkat, Yvon Tharrault, Gilles Mourot, and Jose Ragot. Multiple sensor fault detection and isolation of an air quality monitoring network using rbf-nlpca model. *International Journal of Adaptive and Innovative Systems*, 1(3-4) :267–284, 2010.
- [HZL<sup>+</sup>14] Donglan Huang, Dahai Zhang, Yusui Liu, Shirong Zhang, and Wei Zhu. A kpca based fault detection approach for feed water treatment process of coal-fired power plant. In *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2014 11th World Congress on*, pages 3222–3227. IEEE, 2014.
- [Jac80] Edward Jackson. Principal components and factor analysis : part 1-principal components. *Journal of Quality Technology*, 12(4) :201–213, 1980.
- [Jac91] Edward Jackson. A user’s guide to principal components. wiley, new york. *A user’s guide to principal components*. Wiley, New York., 1991.
- [JHZ16] Hongquan Ji, Xiao He, and Donghua Zhou. On the use of reconstruction-based contribution for fault diagnosis. *Journal of Process Control*, 40 :24–34, 2016.
- [JM79] Edward Jackson and Govind Mudholkar. Control procedures for residuals associated with principal component analysis. *Technometrics*, 21(3) :341–349, 1979.
- [JM92] IT Jolliffe and BJT Morgan. Principal component analysis and exploratory factor analysis. *Statistical methods in medical research*, 1(1) :69–95, 1992.
- [JMM98] F Jia, Elaine Martin, and Julian Morris. Non-linear principal components analysis for process fault detection. *Computers & Chemical Engineering*, 22 :S851–S854, 1998.
- [JMM00] F Jia, Elaine Martin, and Julian Morris. Non-linear principal components analysis with application to process fault detection. *International Journal of Systems Science*, 31(11) :1473–1487, 2000.
- [Jol86] Ian Jolliffe. Principal component analysis and factor analysis. In *Principal component analysis*, pages 115–128. Springer, 1986.
- [Kai60] Henry Kaiser. The application of electronic computers to factor analysis. *Educational and psychological measurement*, 20(1) :141–151, 1960.

- [KHR<sup>+</sup>13] Maya Kallas, Paul Honeine, Cédric Richard, Clovis Francis, and Hassan Amoud. Non-negativity constraints on the pre-image for pattern recognition with kernel machines. *Pattern Recognition*, 46(11) :3066–3080, 2013.
- [KLW11] Issam Ben Khediri, Mohamed Limam, and Claus Weihs. Variable window adaptive kernel principal component analysis for nonlinear nonstationary process monitoring. *Computers & Industrial Engineering*, 61(3) :437–446, 2011.
- [KMA<sup>+</sup>17] Maya Kallas, Gilles Mourot, Kwami Anani, José Ragot, and Didier Maquin. Fault detection and estimation using kernel principal component analysis. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :1025–1030, 2017.
- [KMMR14] Maya Kallas, Gilles Mourot, Didier Maquin, and José Ragot. Diagnosis of nonlinear systems using kernel principal component analysis. In *Journal of physics : conference series*, volume 570, page 072004. IOP Publishing, 2014.
- [KXZG14] PENG Kai-Xiang, Kai ZHANG, and LI Gang. Online contribution rate based fault diagnosis for nonlinear industrial processes. *Acta Automatica Sinica*, 40(3) :423–430, 2014.
- [LC14] Jialin Liu and Ding-Sou Chen. Fault isolation using modified contribution plots. *Computers & Chemical Engineering*, 61 :9–19, 2014.
- [Liu12] Jialin Liu. Fault diagnosis using contribution plots without smearing effect on non-faulty variables. *Journal of Process Control*, 22(9) :1609–1623, 2012.
- [LTR11] Henri Lantéri, Céline Theys, and Cédric Richard. Nonnegative matrix factorization with regularization and sparsity-enforcing terms. In *Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), 2011 4th IEEE International Workshop on*, pages 97–100. IEEE, 2011.
- [LYC<sup>+</sup>04] Jong-Min Lee, ChangKyoo Yoo, Sang Wook Choi, Peter A Vanrolleghem, and In-Beum Lee. Nonlinear process monitoring using kernel principal component analysis. *Chemical Engineering Science*, 59(1) :223–234, 2004.
- [LYL04] Jong-Min Lee, ChangKyoo Yoo, and In-Beum Lee. Fault detection of batch processes using multiway kernel principal component analysis. *Computers & chemical engineering*, 28(9) :1837–1847, 2004.
- [Mal77] Edmund Malinowski. Determination of the number of factors and the experimental error in a data matrix. *Analytical Chemistry*, 49(4) :612–617, 1977.
- [MAO<sup>+</sup>09] Baligh Mnassri, Bouchra Ananou, Mustapha Ouladsine, et al. Fault detection and diagnosis based on pca and a new contribution plot. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(8) :834–839, 2009.
- [MK95] John MacGregor and Theodora Kourti. Statistical process control of multivariate processes. *Control Engineering Practice*, 3(3) :403–414, 1995.
- [MKAM18] Gilles Mourot, Maya Kallas, Kwami Anani, and Didier Maquin. Sparse reconstruction-based contribution for multiple fault isolation by kpca. In *2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 691–696. IEEE, 2018.
- [MMR<sup>+</sup>01] Klaus-Robert Muller, Sebastian Mika, Gunnar Ratsch, Koji Tsuda, and Bernhard Scholkopf. An introduction to kernel-based learning algorithms. *IEEE transactions on neural networks*, 12(2) :181–201, 2001.
- [Mna12] Baligh Mnassri. *Analyse de données multivariées et surveillance des processus industriels par analyse en composantes principales*. PhD thesis, Aix-Marseille, 2012.

- 
- [MNK94] John F MacGregor, Paul Nomikos, and Theodora Kourti. Multivariate statistical process control of batch processes using pca and pls. In *Advanced Control of Chemical Processes 1994*, pages 523–528. Elsevier, 1994.
- [MS06] Alessio Moneta and Peter Spirtes. Graphical models for the identification of causal structures in multivariate time series models. In *JCIS*, 2006.
- [MSH98] Paige Miller, Ronald Swanson, and Charles Heckler. Contribution plots : a missing link in multivariate quality control. *Applied mathematics and computer science*, 8(4) :775–792, 1998.
- [NG10] Viet Ha Nguyen and Jean-Claude Golinval. Fault detection based on kernel principal component analysis. *Engineering Structures*, 32(11) :3683–3691, 2010.
- [NM94] Paul Nomikos and John F MacGregor. Monitoring batch processes using multiway principal component analysis. *AIChE Journal*, 40(8) :1361–1375, 1994.
- [Pea01] Karl Pearson. Liii. on lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2(11) :559–572, 1901.
- [PZL14] Kai-Xiang Peng, Kai Zhang, and Gang Li. Online contribution rate based fault diagnosis for nonlinear industrial processes. *Acta Automatica Sinica*, 40(3) :423–430, 2014.
- [Qin03] Joe Qin. Statistical process monitoring : basics and beyond. *Journal of chemometrics*, 17(8-9) :480–502, 2003.
- [Qin09] Joe Qin. Data-driven fault detection and diagnosis for complex industrial processes. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(8) :1115–1125, 2009.
- [Qin12] Joe Qin. Survey on data-driven industrial process monitoring and diagnosis. *Annual reviews in control*, 36(2) :220–234, 2012.
- [RC96] Anne Raich and Ali Cinar. Statistical process monitoring and disturbance diagnosis in multivariable continuous processes. *AIChE Journal*, 42(4) :995–1009, 1996.
- [RP75] Richard Rozett and McLaughlin Petersen. Methods of factor analysis of mass spectra. *Analytical Chemistry*, 47(8) :1301–1308, 1975.
- [RS81] Jose Romagnoli and George Stephanopoulos. Rectification of process measurement data in the presence of gross errors. *Chemical Engineering Science*, 36(11) :1849–1863, 1981.
- [SC16] Raphael Tari Samuel and Yi Cao. Nonlinear process fault detection and identification using kernel pca and kernel density estimation. *Systems Science & Control Engineering*, 4(1) :165–174, 2016.
- [Sha11] Mohamed Bin Shams. Fault identification using kernel principle component analysis. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :4320–4325, 2011.
- [SLSL07] Fei Sha, Yuanqing Lin, Lawrence Saul, and Daniel Lee. Multiplicative updates for nonnegative quadratic programming. *Neural computation*, 19(8) :2004–2031, 2007.
- [SRL09] Ji-Dong Shao, Gang Rong, and Jong Min Lee. Learning a data-dependent kernel function for kpca-based nonlinear process monitoring. *Chemical Engineering Research and Design*, 87(11) :1471–1480, 2009.
- [SSM98] Bernhard Schölkopf, Alexander Smola, and Klaus-Robert Müller. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem. *Neural computation*, 10(5) :1299–1319, 1998.

- [Tha08] Yvon Tharrault. *Diagnostic de fonctionnement par analyse en composantes principales : Application à une station de traitement des eaux usées*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL, 2008.
- [TLD<sup>+</sup>13] Céline Theys, Henri Lantéri, Nicolas Dobigeon, Cédric Richard, Jean-Yves Tourneret, and André Ferrari. A normalized scaled gradient method to solve non-negativity and equality constrained linear inverse problem-application to spectral mixture analysis. *arXiv preprint arXiv :1310.0676*, 2013.
- [Tra92] Nola Tracy. Multivariate control charts for individual observations. *Jour. Quality Technology*, 24(2) :88–95, 1992.
- [VdKVGVI13] Pieter Van den Kerkhof, Jef Vanlaer, Geert Gins, and Jan Van Impe. Contribution plots for statistical process control : Analysis of the smearing-out effect. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 428–433. IEEE, 2013.
- [VLQ99] Sergio Valle, Weihua Li, and Joe Qin. Selection of the number of principal components : the variance of the reconstruction error criterion with a comparison to other methods. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 38(11) :4389–4401, 1999.
- [VRKY03] Venkat Venkatasubramanian, Raghunathan Rengaswamy, Surya Kavuri, and Kewen Yin. A review of process fault detection and diagnosis : Part iii : Process history based methods. *Computers & chemical engineering*, 27(3) :327–346, 2003.
- [WCS16] Chihang Wei, Junhui Chen, and Zhihuan Song. Nonlinear process monitoring using improved kernel principal component analysis. In *Control and Decision Conference (CCDC), 2016 Chinese*, pages 5832–5843. IEEE, 2016.
- [WEG87] Svante Wold, Kim Esbensen, and Paul Geladi. Principal component analysis. *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, 2(1-3) :37–52, 1987.
- [WG96] Barry Wise and Neal Gallagher. The process chemometrics approach to process monitoring and fault detection. *Journal of Process Control*, 6(6) :329–348, 1996.
- [WGS00] Johan Westerhuis, Stephen Gurden, and Age Smilde. Generalized contribution plots in multivariate statistical process monitoring. *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, 51(1) :95–114, 2000.
- [WGZ<sup>+</sup>17] Jing Wang, Wenshuang Ge, Jinglin Zhou, Haiyan Wu, and Qibing Jin. Fault isolation based on residual evaluation and contribution analysis. *Journal of the Franklin Institute*, 354(6) :2591–2612, 2017.
- [WSS04] Kilian Weinberger, Fei Sha, and Lawrence Saul. Learning a kernel matrix for nonlinear dimensionality reduction. In *Proceedings of the twenty-first international conference on Machine learning*, page 106. ACM, 2004.
- [YDH<sup>+</sup>12] Shen Yin, Steven Ding, Adel Haghani, Haiyang Hao, and Ping Zhang. A comparison study of basic data-driven fault diagnosis and process monitoring methods on the benchmark tennessee eastman process. *Journal of Process Control*, 22(9) :1567–1581, 2012.
- [YM01] Seongkyu Yoon and John MacGregor. Fault diagnosis with multivariate statistical models part i : using steady state fault signatures. *Journal of Process Control*, 11(4) :387 – 400, 2001.
- [YQ98] Henry Yue and Joe Qin. Fault reconstruction and identification for industrial processes. In *AIChE Annual Meeting, Miami, FL*, 1998.
- [YQ01] Henry Yue and Joe Qin. Reconstruction-based fault identification using a combined index. *Industrial & engineering chemistry research*, 40(20) :4403–4414, 2001.

- 
- [YSX12] Fan Yang, Sirish Shah, and Deyun Xiao. Signed directed graph based modeling and its validation from process knowledge and process data. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 22(1) :41–53, 2012.
- [ZLH12] Yingwei Zhang, Shuai Li, and Zhiyong Hu. Improved multi-scale kernel principal component analysis and its application for fault detection. *Chemical Engineering Research and Design*, 90(9) :1271–1280, 2012.
- [ZLT12] Yingwei Zhang, Shuai Li, and Yongdong Teng. Dynamic processes monitoring using recursive kernel principal component analysis. *Chemical Engineering Science*, 72 :78–86, 2012.
- [ZM11] Yingwei Zhang and Chi Ma. Fault diagnosis of nonlinear processes using multiscale kpca and multiscale kpls. *Chemical engineering science*, 66(1) :64–72, 2011.
- [ZQ07] Yingwei Zhang and Joe Qin. Fault detection of nonlinear processes using multi-way kernel independent component analysis. *Industrial & engineering chemistry research*, 46(23) :7780–7787, 2007.
- [ZZL17] Fei Zhang, Shengyue Zong, and Zhi Ling. Fault diagnosis using kernel principal component analysis for hot strip mill. *The Journal of Engineering*, 2017(9), 2017.
- [ŽZP11] Matej Žvokelj, Samo Zupan, and Ivan Prebil. Non-linear multivariate and multiscale monitoring and signal denoising strategy using kernel principal component analysis combined with ensemble empirical mode decomposition method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(7) :2631–2653, 2011.





## Résumé

**Titre :** Diagnostic de systèmes non linéaires par Analyse en Composantes Principales à noyau

Dans cette thèse, le diagnostic d'un système non linéaire a été réalisé par une analyse de données. Initialement conçue pour analyser les données liées par des relations linéaires, l'Analyse en Composantes Principales (ACP) est couplée aux méthodes à noyau pour détecter, localiser et estimer l'amplitude des défauts sur des systèmes non linéaires. L'ACP à noyau consiste à projeter les données par l'intermédiaire d'une application non linéaire dans un espace de dimension élevée dénommé espace des caractéristiques où l'ACP linéaire est appliquée. Ayant fait la projection à l'aide de noyaux, la détection peut facilement être réalisée dans l'espace des caractéristiques. Cependant, l'estimation de l'amplitude du défaut nécessite la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire. Une étude de contributions permet de localiser et d'estimer ces amplitudes. La variable ayant la plus grande contribution est susceptible d'être affectée par un défaut. Dans notre travail, nous avons proposé de nouvelles méthodes pour les phases de localisation et d'estimation des défauts pour lesquelles les travaux existants ont des limites. La nouvelle méthode proposée est basée sur les contributions sous contraintes permettant d'obtenir une reconstruction parcimonieuse des variables. L'efficacité des méthodes proposées est montrée sur un réacteur à agitation continue (CSTR).

**Mots-clés:** Diagnostic de défauts, systèmes non linéaires, analyse en composantes principales, méthodes à noyaux, problème d'optimisation.

## Abstract

**Title :** Diagnosis of nonlinear systems using kernel Principal Component Analysis

In this thesis, the diagnosis of a nonlinear system was performed using data analysis. Initially developed to analyze linear system, Principal Component Analysis (PCA) is coupled with kernel methods for detection, isolation and estimation of faults' magnitude for nonlinear systems. Kernel PCA consists in projecting data using a nonlinear mapping function into a higher dimensional space called feature space where the linear PCA is applied. Due to the fact that the projections are done using kernels, the detection can be performed in the feature space. However, estimating the magnitude of the fault requires the resolution of a nonlinear optimization problem. The variables' contributions make it possible to isolate and estimate these magnitudes. The variable with the largest contribution may be considered as faulty. In our work, we proposed new methods for the isolation and estimation phases for which previous work has some limitations. The new proposed method in this thesis is based on contributions under constraints. The effectiveness of the developed methods is illustrated on the simulated continuous stirred tank reactor (CSTR).

**Keywords:** Fault diagnosis, nonlinear systems, principal component analysis, kernel methods, optimization problem.



