



**HAL**  
open science

# Étude analytique et numérique du développement de la striction multiple pour des cylindres métalliques en expansion dynamique

Mathieu Xavier

► **To cite this version:**

Mathieu Xavier. Étude analytique et numérique du développement de la striction multiple pour des cylindres métalliques en expansion dynamique. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT : 2019LORR0064 . tel-02329302

**HAL Id: tel-02329302**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02329302>**

Submitted on 23 Oct 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



École doctorale *C2MP* : Chimie, Mécanique, Matériaux, Physique

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de Docteur délivré par

**l'Université de Lorraine**

**Spécialité : Mécanique des matériaux**

*par*

**Mathieu XAVIER**

soutenue en public le 26 avril 2019

## **Étude analytique et numérique du développement de la striction multiple pour des cylindres métalliques en expansion dynamique**

### **Jury**

<b>Nathalie BOUDEAU,</b>	Professeur des Universités, ENSMM	Rapporteur
<b>Patrice LONGÈRE,</b>	Professeur, ISAE-Supaéro	Rapporteur
<b>Jean-Lin DEQUIEDT,</b>	Ingénieur de recherche, CEA, DAM, DIF	Encadrant de thèse
<b>Nicolas JACQUES,</b>	Maître de Conférences, HdR, ENSTA Bretagne	Examineur
<b>Dominique JOUVE,</b>	Ingénieur de recherche, CEA, DAM, DIF	Encadrant de thèse
<b>Han ZHAO,</b>	Professeur des Universités, UPMC Sorbonne Université	Examineur
<b>Christophe CZARNOTA,</b>	Maître de Conférences, HdR, Université de Lorraine	Directeur de thèse
<b>Sébastien MERCIER,</b>	Professeur des Universités, Université de Lorraine	Directeur de thèse
<b>Skander EL MAÏ,</b>	Ingénieur de recherche, CEA, Gramat	Invité
<b>Alain MOLINARI,</b>	Professeur Émérite, Université de Lorraine	Invité

---

---

*À mon Papa, ma Maman, mon frère et ma soeur...*

*That's how it starts.  
We go back to your house.  
You check the charts  
and start to figure it out.  
And if it's crowded, all the better.  
Because we know we're gonna be up late.  
But if you're worried about the weather,  
then you picked the wrong place to stay.*

**LCD Soundsystem**, All My Friends, 2006.

*Mon but, c'est d'élargir notre perception de l'humanité. D'où nous venons. Où nous allons. Les soubresauts et les péripéties. Les périls et les promesses. Peut-être même trouver une réponse à cette éternelle question : pourquoi ?*

**Emmett L. "Doc" Brown**, Retour Vers le Futur II, 1985/2015

---

---

*Tempus fugit.* Le temps passe décidément bien vite. Trente-six mois se sont écoulés à une vitesse folle. Mais paradoxalement, j'ai, au gré des multiples rencontres et échanges, accumulé bon nombre de beaux souvenirs que je garderai précieusement pendant longtemps, hors du temps qui file. Il me semble alors naturel de replonger, quelques lignes, dans ces trois formidables années pour remercier chaleureusement ceux qui ont contribué à cette réussite.

Dans un premier temps, je souhaite remercier vivement l'ensemble des membres du jury. Les rapporteurs Patrice Longère et Nathalie Boudeau ont permis d'améliorer la qualité de ce manuscrit et de la soutenance de thèse. Merci pour ce travail d'analyse approfondie. Je remercie également Han Zhao qui a accepté de présider le jury et Nicolas Jacques pour avoir examiné ce travail. Vos questions lors de la soutenance ont permis d'ouvrir de nouvelles pistes de travail.

Durant ces trois années, je me suis toujours senti bien au CEA, où j'ai reçu un accueil chaleureux dans le service et dans le labo. En ce sens, je remercie Stéphane Bernard pour sa gentillesse et Cyril Bolis, avec qui j'espère pouvoir poursuivre nos nombreuses conversations (scientifiques, mais pas que!). Je remercie tous les chercheurs et secrétaires du service et du labo que j'ai rencontré. En particulier, Laurianne et Guillaume pour leur sympathie et William, qui a pris le temps d'accompagner mes premiers pas, peu assurés, dans le monde des schémas numériques. Et merci à Claire pour son infinie gentillesse.

J'ai eu la chance de bénéficier d'un encadrement formidable, que ce soit au CEA ou à l'Université de Lorraine à Metz. Merci à Dominique pour son implication dans ce travail et pour la confiance qu'il m'a toujours témoignée (même quand j'avais des idées un peu farfelues). Je suis content de pouvoir poursuivre notre collaboration. Merci à Jean-Lin qui m'a apporté le recul nécessaire et avec qui j'apprécie toujours les discussions. Merci à Skander pour sa sympathie et pour les discussions sur les voies à explorer dans le futur. Il me tarde de développer ensemble nos idées. Merci infiniment à mes deux directeurs de thèse, Christophe et Sébastien. Depuis Metz, ils ont toujours supporté mon amour de la biblio, de la rédaction d'articles et des tâches administratives. Ils ont surtout tempéré mes emballements et m'ont appris la patience, si importante en thèse. Je souhaite à tous les étudiants d'avoir des directeurs aussi top que vous! Et merci à Alain Molinari avec qui

c'est toujours un plaisir d'échanger et de discuter autour d'un sujet dont il est l'un des pionniers.

De Simone Signoret à Atlanta, de St Louis à la 39-40, de la Me210 au G6bis, les personnes que j'ai eu la chance de rencontrer en amont de la thèse et que j'ai continué à cotoyer ces trois ans ont, à leur manière, participé à ce travail. Merci à AP et les copains de VLP pour les bons moments ensemble. Merci à Quentin, mon plus vieil ami. Merci à Anaëlle pour son écoute. Merci aux trois *Defensive End* de la 570 Ethel Fantasy League pour ces sempiternelles discussions enflammées sur Eli, le GOAT, les Lions et la Honey Mustard (une bagouze pendant la thèse!). Merci à Camille pour son amitié qui perdure, elle aussi, dans le temps. Merci à Your's qui, au cours de nombreuses saisons qui s'équilibrent, aura affuté mon esprit de compétition. *Cholevas!* Merci à mon *London Boy* Xavier pour ces week-ends outre-Manche toujours mémorables, où la Techno est toujours présente.

Doctorants, post-docs et stagiaires ont partagé mon quotidien. Des échanges scientifiques, bien entendu, mais surtout des moments formidables de bonne humeur et de convivialité qui ont eu, indéniablement, un impact positif sur la qualité de ce travail. Merci à Lucile, Thibaud, Matthieu *MSP El Jefe*, Paulo *Prosperoh*, Charles, Julien, Audrey, Baptiste, Léonce *Tic* et Yoann *Tac*, Mathilde, Alexia, Victor, Alexandre, Albertine et Vincent. Merci aux doctorants qui arpentent actuellement le chemin de la bénédiction et de la Vérité : Corentin, Giovanni, Christina, Ronan *Fils*, Antoine et Cécile *Haberstyle*, supportrice numéro 1 du RC Strasbourg et du Crémant. Et enfin, merci à la *Compagnie d'Éclairage et d'Appui*, avec qui j'ai passé le plus clair de mon temps. Merci à Alexis/*Malbouffe* pour qui le mot *Remontada* n'a plus de secret. Merci à Jean-Cédric/*Jisse-san* pour nos réflexions toujours très philosophiques et qui est le seul à comprendre pourquoi Gin n'aurait pas dû mourir. Merci à Grégoire/*Grégou*, ma chips stable qui a inspiré la méthode spectrale et avec qui j'ai partagé tant de trajets. Merci à Marie/*Mahree*, ma petite soeur de thèse et colocatrice de bureau, pour les innombrables fous rires et pour les souvenirs de Glasgow (*Kendall and Campus!*). Souviens-toi que la mécanique, c'est du solide! Merci à Florian/*Guy the Goose*, pour ces interminables discussions autour de nos références communes. Lui sait que la brique ne rend pas les coups et que l'élément qui donne la vie, c'est l'eau.

Enfin, je souhaite terminer en remerciant ma famille. Tout d'abord, Steph, mon grand frère et Myr, ma grande soeur, qui, depuis 27 ans, ont bien balisé le chemin devant moi. Et bien sûr, mon Papa et ma Maman, pour leur indéfectible soutien. Inutile de dire que je n'en serais pas là sans eux. Il semble bien présomptueux d'imaginer qu'un simple "merci" suffise. Alors, puissiez-vous quatre trouver dans ces pages l'expression de ma profonde gratitude et d'une réussite qui vous doit beaucoup.



# Introduction

Ce travail de thèse porte sur l'étude de la striction multiple, prémice à la fragmentation d'enveloppes cylindriques en expansion dynamique et couvre une problématique qui intéresse tant l'industrie civile que celle de la défense. Pour les deux domaines d'application, il s'agit de pouvoir prédire la taille et la vitesse des fragments, résultant de la destruction d'enveloppes métalliques, afin de mesurer les conséquences sur des structures de sécurité. Nous proposons, dans ce travail, d'améliorer la compréhension du phénomène de localisation de la déformation plastique à l'origine de la fragmentation qui s'initie, pour les métaux ductiles, par le développement d'instabilités de l'écoulement plastique. Ces instabilités correspondent à l'apparition de strictions, i.e. d'amincissements locaux, le long des génératrices du cylindre aux lieux de localisation de la déformation plastique.

Dans le chapitre 1, nous présentons un état de l'art des travaux concernant la localisation et la fragmentation dans les enveloppes métalliques. Après un rappel des enjeux de sécurité en section 1.1, une revue de la littérature sur les observations expérimentales, qui concernent diverses géométries, est proposée dans la section 1.2. La section 1.3 est consacrée aux modélisations analytiques. Les modèles stochastiques sont présentés brièvement en section 1.3.1 et les approches fondées sur l'Analyse Linéaire de Stabilité (ALS) sont développées dans la section 1.3.2. Ces derniers travaux ont essentiellement porté sur l'étude de la striction multiple par l'analyse du développement d'une perturbation (de faible amplitude) de la solution fondamentale, associée à une structure initialement dénuée de défauts. L'ALS a permis notamment de mettre en évidence l'existence d'une longueur

---

d'onde dominante, représentative d'une distance inter-strictions, et de décrire l'augmentation du nombre de strictions avec la vitesse de déformation, restituant ainsi les observations expérimentales. Néanmoins, les modèles d'ALS supposent implicitement une séparation des échelles de temps, i.e. que le développement de l'instabilité plastique est bien plus rapide que l'évolution de la solution fondamentale, ce qui restreint le cadre des applications de la modélisation. De fait, ces modèles ne permettent d'accéder qu'à des taux de croissance instantanés des perturbations et pas à la chronologie du développement de l'instabilité au cours de l'écoulement.

Ces travaux de thèse visent à appréhender les cas pour lesquels l'hypothèse de séparation des échelles n'est plus vérifiée (par exemple, pour des vitesses de chargement très élevées) et s'inscrivent dans l'amélioration de la compréhension de l'évolution d'un défaut de longueur d'onde donnée. Le chapitre 2 est consacré à la présentation de la configuration adoptée ainsi que de la solution fondamentale associée. Le système d'équations régissant l'écoulement perturbé est développé dans le chapitre 3. Un nouveau modèle, appelé *XLSA*, est alors proposé dans la section 3.3; il est vu comme une extension de l'ALS classique et la recherche des solutions est basée sur une méthode spectrale adaptée à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles : les perturbations de l'écoulement sont recherchées sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Chebyshev dont les coefficients sont des fonctions du temps solutions d'un système d'équations différentielles en temps résolu par un schéma aux différences finies. Le cas traité correspond à une plaque en déformation plane, considérant un matériau métallique ductile de comportement thermo-viscoplastique. L'apport de notre approche réside dans l'accès à l'évolution spatio-temporelle des perturbations thermique et mécanique, même pour des cas où l'écoulement plastique est initialement stable et devient instable à mesure que la déformation progresse.

Le chapitre 4 est consacré à l'exploitation des résultats de la nouvelle approche sur différentes configurations du matériau. Nous montrons notamment que l'influence de la perturbation (ou défaut) initiale est particulièrement importante durant les premiers ins-

---

tants du processus de déformation, mais que le taux de croissance et le mode dominant se trouvent peu influencés aux temps longs. L'étude du couplage thermo-mécanique révèle que les perturbations mécanique et thermique sont décorrélées dans les premiers instants mais que leurs taux de croissance sont proches pour des déformations importantes confirmant les prédictions du modèle classique.

Par ailleurs, nous proposons, dans le chapitre 5, une comparaison entre l'approche proposée et un calcul par éléments finis (*ABAQUS/Explicit*). Dans un premier temps, nous proposons une revue bibliographique de l'étude de la fragmentation par les simulations numériques. Cette étude de la littérature met en évidence que les simulations par éléments finis permettent de retrouver la plupart des résultats de l'ALS Classique mais qu'il existe des difficultés à lier les deux approches en termes de chronologie. Nous proposons de lever cette difficulté avec le modèle *XLSA*. L'évolution d'une perturbation de longueur d'onde donnée est étudiée dans la section 5.3.1. Le modèle numérique révèle que l'augmentation de l'amplitude du défaut initial ne modifie pas le taux de croissance de la perturbation aux temps courts mais entraîne une diminution de la déformation à la localisation. En outre, le modèle analytique permet de prédire de façon très satisfaisante l'instant de localisation relevé dans les simulations numériques.

---

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Étude Bibliographique</b>	<b>15</b>
1.1	Contexte de l'étude . . . . .	15
1.2	Observations expérimentales . . . . .	16
1.3	Modélisations analytiques de la striction . . . . .	24
1.3.1	L'approche stochastique de Mott pour la rupture . . . . .	24
1.3.2	L'Analyse Linéaire de Stabilité pour l'étude du développement des instabilités plastiques de striction . . . . .	26
1.4	Conclusion de l'étude bibliographique . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Configuration et écoulement homogène</b>	<b>39</b>
2.1	Configuration de l'étude . . . . .	39
2.2	Écoulement de base de la plaque parfaite . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Extension de l'approche classique d'Analyse Linéaire de Stabilité</b>	<b>47</b>
3.1	Système d'équations régissant l'écoulement perturbé . . . . .	48
3.1.1	Cinématique . . . . .	48
3.1.2	Contraintes . . . . .	52
3.2	Décomposition modale de la perturbation . . . . .	60

3.3	Modèle étendu d'Analyse Linéaire de Stabilité (XLSA) . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Résultats de l'Analyse Linéaire de Stabilité étendue (XLSA)</b>	<b>77</b>
4.1	Matériau non sensible à la vitesse de déformation et à la température . . .	78
4.1.1	Cas d'un écoulement initialement instable . . . . .	80
4.1.2	Cas d'un écoulement initialement stable . . . . .	85
4.2	Cas d'un matériau (thermo)-viscoplastique . . . . .	94
4.2.1	Matériau viscoplastique . . . . .	94
4.2.2	Matériau thermo-viscoplastique . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Simulations numériques et comparaison avec le modèle XLSA</b>	<b>107</b>
5.1	Approches numériques développées dans la littérature . . . . .	107
5.1.1	Simulations avec localisation déclenchée par les erreurs d'arrondis .	109
5.1.2	Simulations avec défaut initial calibré . . . . .	109
5.2	Modèle par éléments finis . . . . .	119
5.2.1	Présentation du modèle - cahier des charges . . . . .	119
5.2.2	Configuration géométrique et loi de comportement . . . . .	122
5.2.3	Plaque parfaite . . . . .	123
5.3	Analyse monomodale . . . . .	124
5.3.1	Modèle perturbé . . . . .	124
5.3.2	Cas de référence . . . . .	127
5.3.3	Influence du nombre d'onde . . . . .	138
5.3.4	Influence de l'amplitude du défaut . . . . .	142

<b>6 Conclusions et perspectives</b>	<b>149</b>
6.1 Conclusions . . . . .	149
6.2 Perspectives . . . . .	151
<b>A Théorie des coefficients figés</b>	<b>153</b>
<b>B Généralités sur les méthodes spectrales</b>	<b>159</b>
B.1 Polynômes orthogonaux de Chebyshev . . . . .	160
B.1.1 Passage de l'espace spectral à l'espace physique . . . . .	161
B.1.2 Algorithme de dérivation spectrale . . . . .	162
B.2 Principe de la méthode Tau . . . . .	164
<b>C Convergence du schéma</b>	<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>
<b>Table des figures</b>	<b>181</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>199</b>





# Chapitre 1

## Étude Bibliographique

### 1.1 Contexte de l'étude

L'étude de la fragmentation d'enceintes métalliques en expansion dynamique intéresse tant l'industrie civile que la défense. Dans le premier cas, on veut pouvoir, par exemple, évaluer les conséquences de l'explosion d'un container métallique sur les installations environnantes. Citons à titre d'illustration l'accident de Bontang (voir Lees, 2012) en Inde en 1983 : la surpression dans un échangeur de chaleur d'une exploitation de gaz naturel a entraîné la rupture de la colonne et sa fragmentation. Un des morceaux a atteint une construction située à environ 50 mètres. Un autre exemple est celui de l'explosion, en 1993 à Sydney, d'un cylindre en acier contenant de l'acétylène sous pression, causant des dégâts humains et matériels. L'accident a été analysé par Price (2006). L'acétylène, instable, a subi une transformation chimique conduisant à une détonation. L'onde de choc produite a alors entraîné la rupture dynamique du cylindre projetant des fragments jusqu'à 200 mètres aux alentours de l'explosion. La Figure 1.1 présente les dimensions du cylindre et les fragments récupérés après l'accident. Dans le cas de l'industrie de la défense, on veut pouvoir prédire les conséquences de l'explosion d'une bombe. Les premières analyses théoriques de la fragmentation remontent aux travaux pionniers de Mott (1947) datant de la Seconde

Guerre Mondiale. Il avait notamment expliqué que les bombes allemandes généraient des fragments plus petits que ceux des bombes anglaises en raison de leur plus grande teneur en carbone.

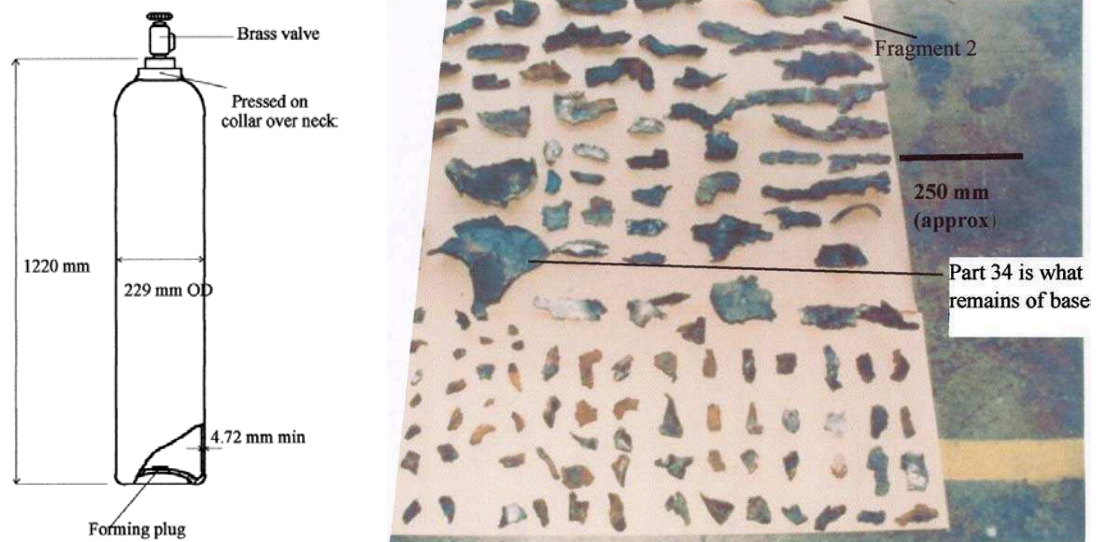


FIGURE 1.1 – À gauche, dimensions du cylindre en acier contenant de l'acétylène sous pression, avant explosion à Sydney en 1993, d'après Price (2006). À droite, les fragments récupérés après l'explosion. Près de 200 fragments de tailles variées ont été collectés.

Pour des applications civiles et militaires telles que celles évoquées, il est nécessaire de prédire les conséquences de l'impact de fragments sur les structures de sécurité. Il faut pour cela connaître l'énergie cinétique des fragments et par conséquent savoir prédire leurs distributions en termes de taille et de célérité. La thèse a pour but de contribuer à améliorer cette capacité de prédiction.

## 1.2 Observations expérimentales

Dans notre étude, nous nous intéressons uniquement à l'expansion de métaux ductiles tels que l'aluminium, le cuivre ou le tantale pour lesquels le niveau de déformation atteint à l'instant de rupture est de l'ordre de 0,1 dans le cas d'essais quasi-statiques sur des éprouvettes de traction. Dans le cas de l'expansion dynamique d'enveloppes, cette déformation peut atteindre l'unité.

La fragmentation a été étudiée dans la littérature pour des géométries variées telles que des cylindres, des anneaux, des hémisphères ou des jets de charges creuses. La mise en vitesse est la plupart du temps réalisée de deux manières : par voie détonique ou par voie électro-magnétique.

Pour la première méthode, la structure étudiée est mise en expansion grâce à l'onde de choc générée par la détonation d'un explosif. La Figure 1.2 présente le dispositif expérimental utilisé par Olive *et al.* (1979) pour étudier la fragmentation d'un cylindre en acier. Un explosif est placé au centre du dispositif et déclenché par un détonateur. Le cylindre en acier est positionné sur un cylindre en plexiglas dont le but est de faciliter la mise en mouvement et le décollage du cylindre.

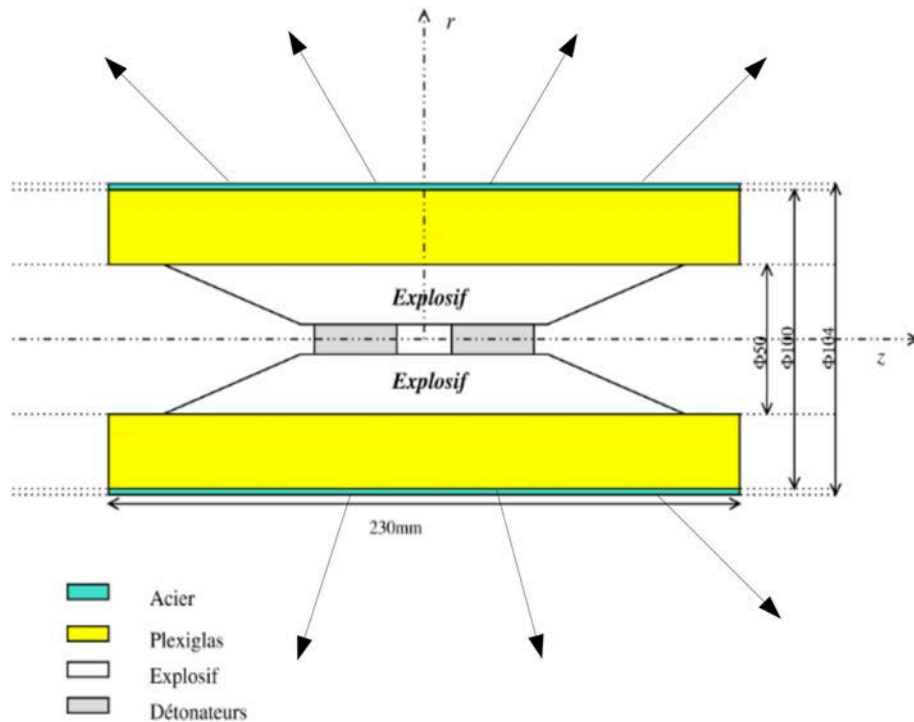


FIGURE 1.2 – Dispositif de l'expérience d'Olive *et al.* (1979) - Section méridienne

Nous citerons en outre, toujours pour la méthode détonique, les travaux de Hoggatt et Recht (1968), Mock Jr et Holt (1983), Martineau *et al.* (2000), Singh *et al.* (2002), Voltz *et al.* (2008), Hiroe *et al.* (2008) portant sur l'expansion de cylindres, Goto *et al.* (2008) qui se sont aussi intéressés aux anneaux ou Juanicotena (1998) et Mercier *et al.* (2010) qui

ont étudié l'expansion d'hémisphères.

La méthode d'expansion par voie électromagnétique est aussi utilisée. Le principe physique utilisé par Walling et Forrestal (1973) puis repris par Grady et Benson (1983) pour l'expansion d'anneaux en aluminium est illustré sur la Figure 1.3. L'anneau est placé sur un support dans lequel circule un courant primaire  $i_1$ . Un courant  $i_2$  de sens opposé est induit dans l'anneau. L'anneau est alors mis en mouvement par la pression magnétique induite par les deux courants. Cette méthode présente des avantages par rapport à la voie explosive. D'une part, elle ne génère pas de produits gazeux qui pourraient venir obstruer les moyens de visualisation. D'autre part, comme il n'y a pas d'onde de choc, le comportement du matériau n'est pas altéré avant le début de la phase de vol libre. Enfin, ce processus est répétable et peut également être plus facilement mis en place dans un environnement de laboratoire. Concernant les études ayant utilisé la méthode électromagnétique, citons les travaux de Niordson (1965), Grady et Benson (1983), Grady et Olsen (2003), Balanethiram *et al.* (1994), Altynova *et al.* (1996), Zhang et Ravi-Chandar (2006), El Maï (2014) ou Jeanson *et al.* (2016) pour l'expansion d'anneaux, ou Fyfe et Rajendran (1980) ou Zhang et Ravi-Chandar (2010) pour le cas du cylindre.

À noter que récemment, Nie *et al.* (2018) ont adopté un circuit  $LC$  pour générer le chargement en traction (et en compression) lors d'essais sur des barres d'Hopkinson.

Ces travaux de la littérature ont permis de mettre en évidence un processus de rupture en trois phases pour les métaux ductiles, illustré sur la Figure 1.4 issue des expériences sur les expansions d'anneaux de Zhang et Ravi-Chandar (2006). La Figure 1.4 présente des clichés superposés des différentes positions de l'anneau au cours du temps. L'anneau s'éloigne du centre à mesure que la déformation se poursuit :

- dans un premier temps, la structure se déforme de manière homogène (cela correspond aux deux premiers anneaux en partant du centre sur la Figure 1.4) ;
- on observe ensuite l'apparition d'amincissements locaux (correspondant aux troisième et quatrième anneaux sur la Figure 1.4) ;

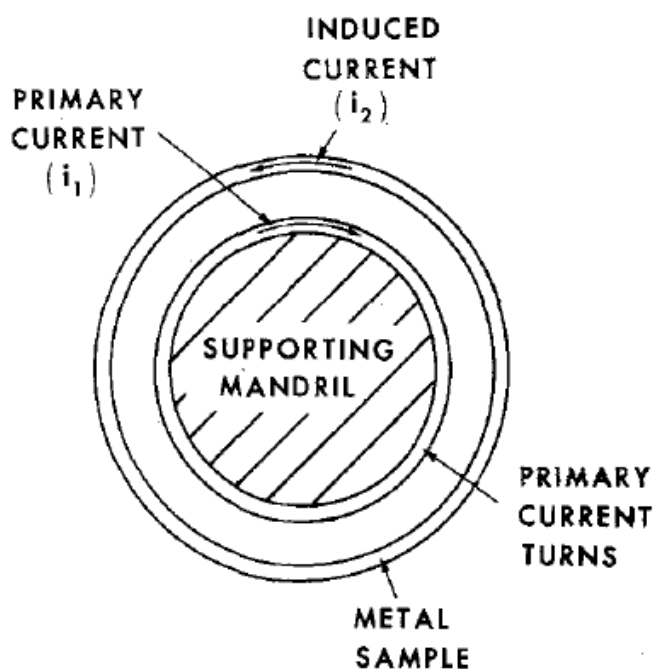


FIGURE 1.3 – Principe de l'expansion d'anneaux par voie électromagnétique, Grady et Benson (1983). Le courant  $i_1$  circule sur le support et induit un courant  $i_2$  de sens opposé dans l'anneau, mis en mouvement par la pression magnétique induite par le couplage des deux courants.

— la rupture s'amorce aux endroits où les strictions sont les plus marquées. Sur la Figure 1.4, les ruptures sont notées à partir du cinquième anneau en partant du centre. À partir de ces sites se propagent des ondes de décharge élastique, dites ondes de Mott, qui viennent inhiber le développement des strictions voisines. Le développement de la striction au milieu du fragment VIII sur la Figure 1.4 s'est arrêté et n'a pas conduit à une rupture. La Figure 1.5 issue des travaux de Grady et Benson (1983) illustre ce phénomène pour le cas de l'expansion dynamique d'un anneau en aluminium. Le développement d'une striction est stoppé du fait de la propagation des ondes de Mott. La taille des fragments dépend alors de la compétition entre la vitesse de propagation des ondes de Mott et la vitesse de déformation plastique (Mott, 1947).

En statique, sur un matériau non visqueux, la striction se déclenche peu avant l'instant de force maximum. Le premier ayant rapporté cette observation expérimentale est Consi-

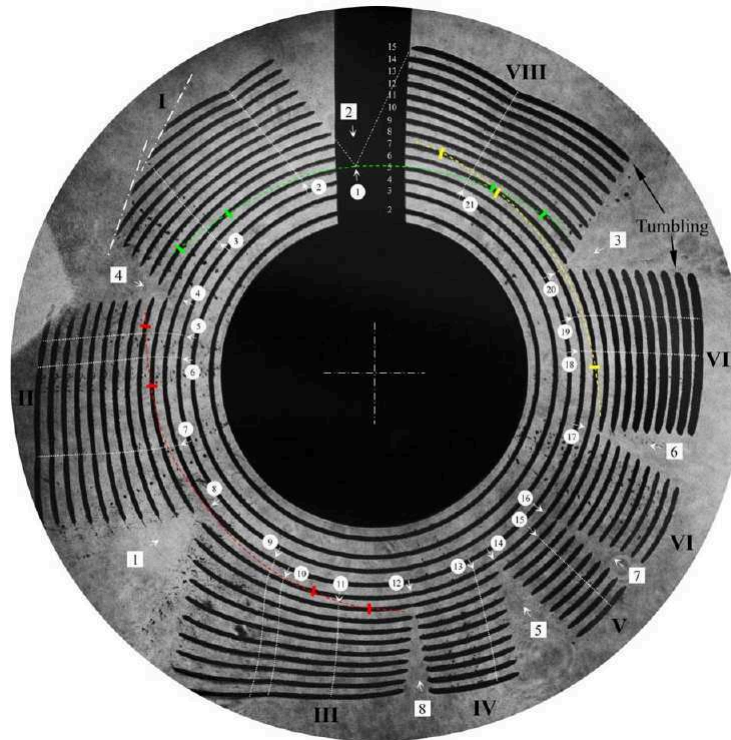


FIGURE 1.4 – Image composée de la superposition à différents instants de l'état de l'anneau d'aluminium lors de son expansion d'après Zhang et Ravi-Chandar (2006). À mesure que la structure se déforme, le rayon moyen de l'anneau augmente.

dère (1885), qui effectuait des essais de traction uniaxiale en régime quasi-statique sur des barreaux de fer et d'acier. Cette observation est étendue pour des essais d'expansions dynamiques d'anneaux comme l'ont montré Zhang et Ravi-Chandar (2006) qui retrouvent le critère de Considère (1885).

Pour les matériaux sensibles à la vitesse de déformation, l'effet de la viscosité est de retarder l'apparition des instabilités dans les matériaux ductiles. Cet effet est particulièrement visible lors d'essais quasi-statiques sur des matériaux superplastiques, pour lesquels un accroissement de la viscosité augmente considérablement l'allongement à la rupture (voir Figure 1.6), bien au-delà de l'instant de force maximum. Le critère de Considère (1885) n'est donc plus adapté pour prédire l'instant de localisation. Citons en ce sens, les travaux de Woodford (1969) et de Sagat et Taplin (1976).

De manière générale, lorsque l'on fait croître la vitesse de déformation plastique, on

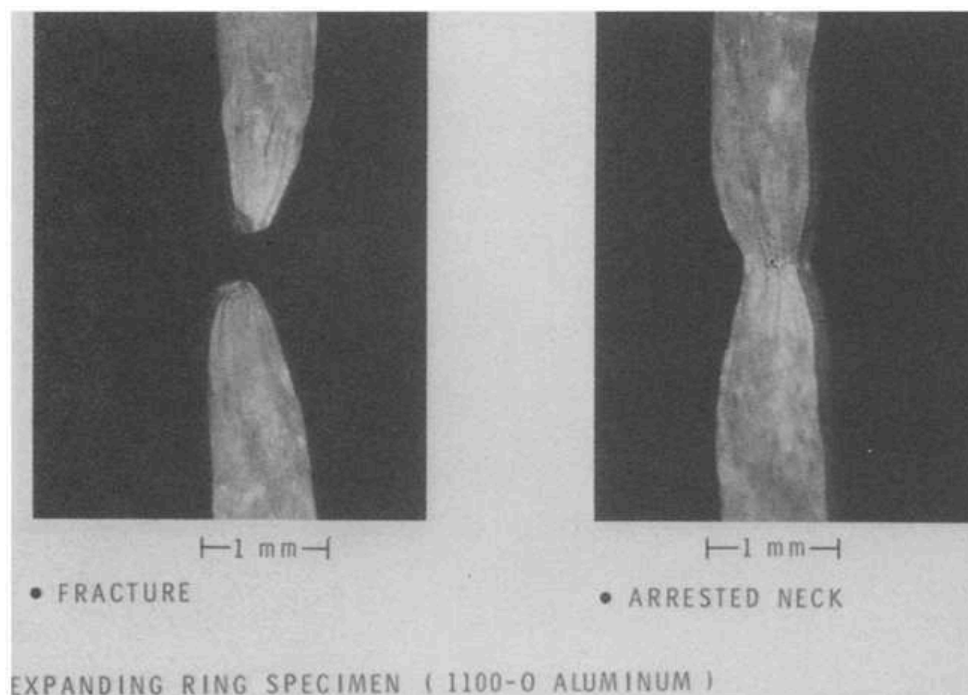


FIGURE 1.5 – Fragmentation d'un anneau en aluminium (voir Grady et Benson, 1983) : à gauche, la striction a conduit à une rupture ; à droite, on voit une striction dont le développement s'est arrêté suite à la propagation d'une onde de décharge élastique.

observe une augmentation de la ductilité. Cette tendance est retrouvée jusqu'à un certain point par Wood (1967) (voir Figure 1.7), qui note sur des essais de traction d'éprouvettes, d'expansions de cylindres et d'hémisphères :

- l'augmentation de la vitesse de déformation stabilise suffisamment les instabilités pour en effet augmenter la ductilité ;
- mais ensuite, il existe un intervalle de vitesse dans lequel la ductilité est constante ;
- pour les essais de traction et d'expansions d'hémisphères, la ductilité chute brutalement au-delà d'une seconde vitesse critique. Cette chute brutale n'est pas observée dans le cas de l'expansion de cylindres.

Balanethiram *et al.* (1994) et Altynova *et al.* (1996) étendent les conclusions de Wood (1967) en observant une première vitesse critique en-deçà de laquelle les effets d'inertie sont peu marqués. Les auteurs ne retrouvent néanmoins pas la zone de ductilité constante. Ceci peut s'expliquer par la définition adoptée pour la déformation mesurée. En effet,

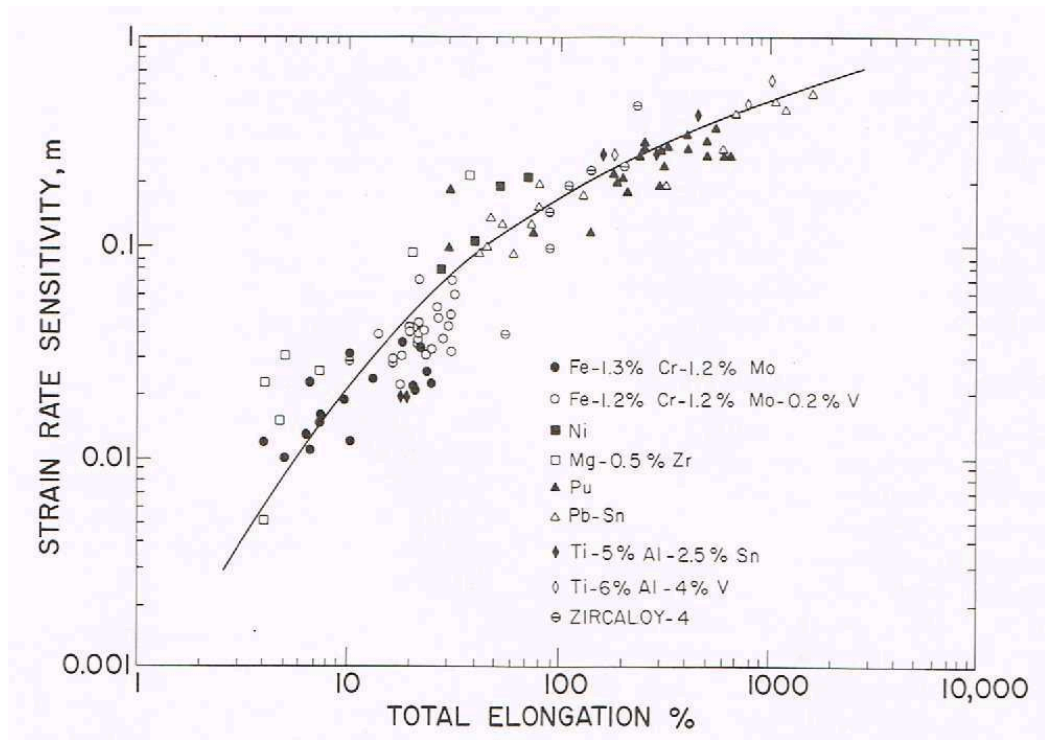


FIGURE 1.6 – Corrélation entre l’allongement à la rupture et le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation pour différents matériaux, Woodford (1969)

Wood (1967) mesure la déformation entre les fragments tandis que Altynova *et al.* (1996) mesurent la variation de taille sur l’échantillon entier (en mettant les fragments récupérés bout à bout). L’existence de la seconde vitesse critique au-delà de laquelle la ductilité chute brutalement est néanmoins confirmée pour des essais de traction et expliquée par la nature du chargement. Dans le cas de l’essai de traction, les ondes plastiques sont concentrées au niveau des mors et n’ont pas le temps de se propager au sein du spécimen en raison des vitesses extrêmes de déformation. La rupture est observée aux extrémités de l’échantillon. Dans le cas de l’expansion d’hémisphères, les ondes sont concentrées sur la base de la structure, fixe. L’absence de la seconde vitesse critique pour le cas d’un chargement cylindrique est confirmée par les essais d’expansions d’anneaux (Wood, 1967 et Altynova *et al.*, 1996) ; ils observent alors que l’effet de concentration des ondes disparaît et donc que la ductilité ne chute pas brutalement.

Par ailleurs, l’augmentation de la vitesse de déformation entraîne une augmentation du



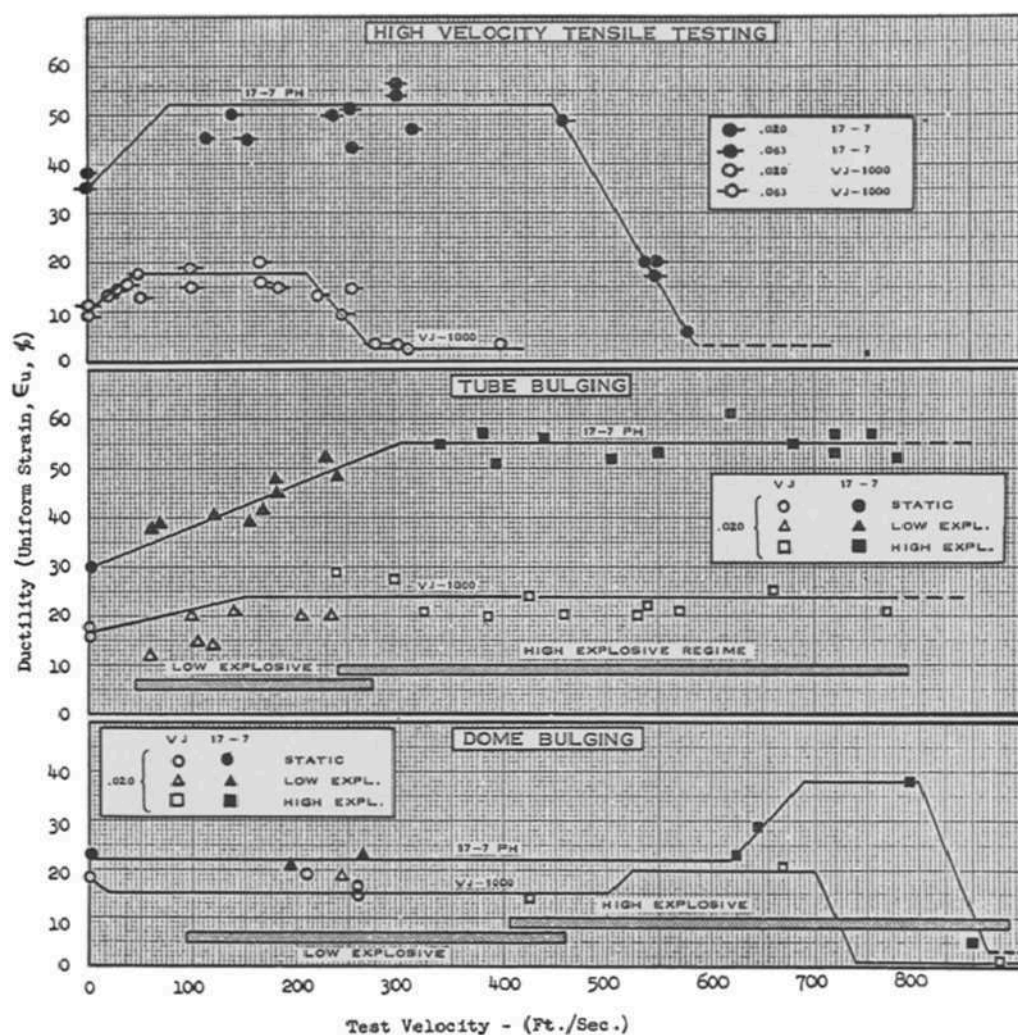


FIGURE 1.7 – Mesure expérimentale de ductilité en fonction de la vitesse de déformation pour des essais de traction, d'expansion de cylindres et d'expansion d'hémisphères, Wood (1967)

nombre de strictions et donc, *in fine*, du nombre de fragments. L'étude d'Altynova *et al.* (1996) met en évidence l'effet des ondes de décharge élastique en observant un nombre de strictions plus important que le nombre de fragments (voir Figure 1.8).

Chaque phase de l'expansion dépend de celle qui la précède. Pour comprendre la fragmentation, nous devons donc d'abord savoir prédire les prémices du développement de l'instabilité plastique de striction.

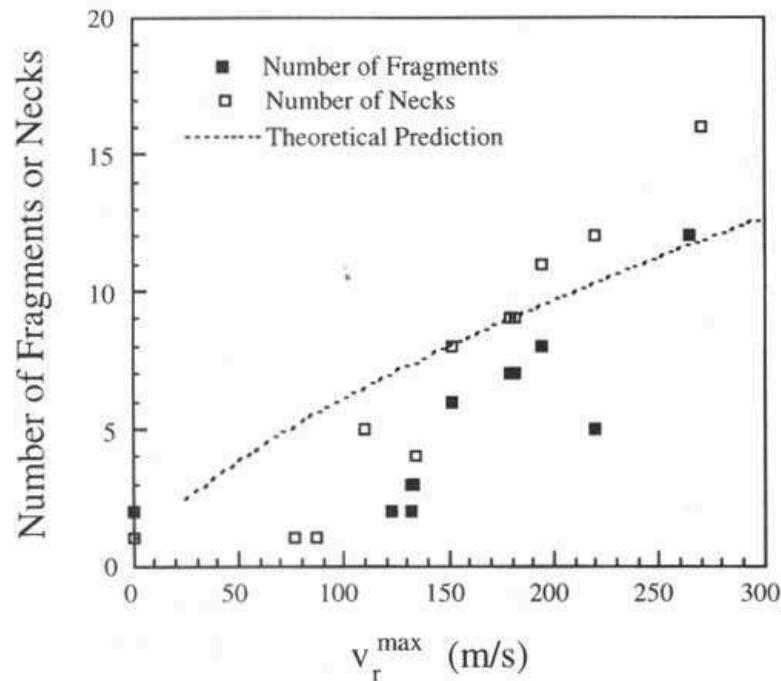


FIGURE 1.8 – Nombre de fragments (carrés pleins) et de striction (carrés blancs) en fonction de la vitesse d'expansion relevée lors de l'expansion d'anneaux en aluminium, Altynova et al. (1996). La prédiction analytique utilisant le modèle de Kipp et Grady (1985) est présentée (voir section 1.3.1).

## 1.3 Modélisations analytiques de la striction

### 1.3.1 L'approche stochastique de Mott pour la rupture

Mott (1947) a d'abord proposé une approche stochastique pour la prédiction de la taille des fragments. Il note que dans le cas d'une déformation à la rupture homogène dans le matériau, l'anneau considéré se rompt en tous points au même instant. Il propose un modèle basé sur la présence de défauts au sein du matériau conduisant à une dispersion du seuil de déformation à la rupture dans la structure. La rupture s'initie au niveau de ces défauts. Comme évoqué précédemment, une fois la rupture atteinte en un point, deux ondes de relaxation des contraintes se propagent de part et d'autre du site de rupture et la taille des fragments dépend de la compétition entre la vitesse de propagation des ondes de relaxation et la vitesse de l'écoulement plastique. Grady (1981) utilise la méthode

de Mott (1947) pour retrouver la distribution des fragments expérimentale obtenue lors d'expansions d'anneaux en aluminium réalisées par Wesenberg et Sagartz (1977). La Figure 1.9 présente les résultats expérimentaux obtenus pour la taille des fragments récupérés et la prédiction des auteurs en utilisant le modèle de Mott (1947). La prédiction obtenue par Grady (1981) est aussi présentée. Un bon accord est trouvé pour la dispersion de la taille des fragments. La différence dans la prédiction analytique de Wesenberg et Sagartz (1977) et celle de Grady (1981) réside dans le choix de la condition initiale sur la distribution des défauts. Grady *et al.* (1984) et Kipp et Grady (1985) étendent les travaux de Mott en introduisant la notion de dissipation d'énergie pour prendre en compte le fait que la rupture n'est pas un processus instantané. Cependant, pour ces modèles, le choix de la distribution des défauts pour l'initiation des ruptures modifie la prédiction de la taille. Les prémices du développement de la striction ne sont pas explorées.

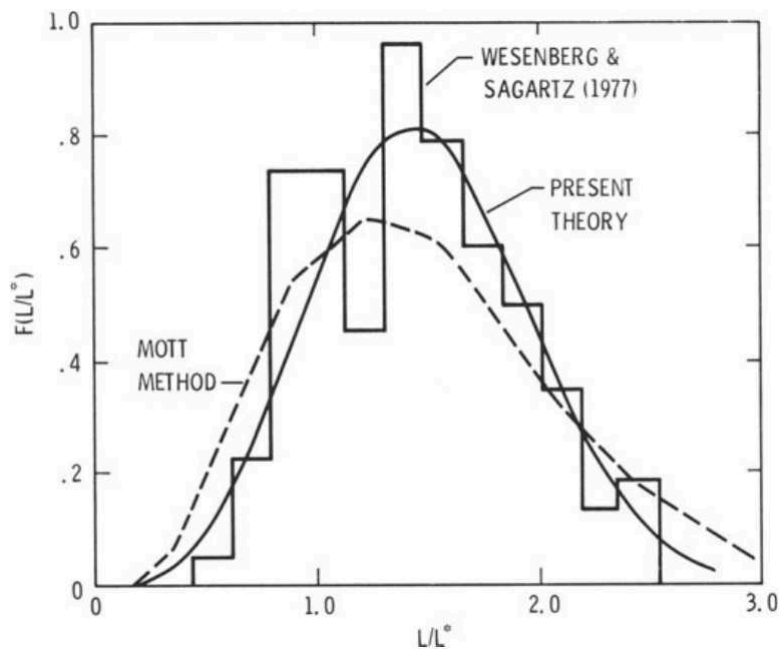


FIGURE 1.9 – Distribution en taille des fragments d'un anneau en aluminium en expansion. Superposition des résultats expérimentaux de Wesenberg et Sagartz (1977), du modèle de Mott (1947) appliqué par Grady (1981) (traits pleins) et par Wesenberg et Sagartz (1977) (traits pointillés).

Dans la littérature, les modèles analytiques basés sur la technique d'Analyse Linéaire de Stabilité ont permis d'améliorer la compréhension du développement des instabilités

plastiques de striction. Nous allons résumer ces approches dans la littérature dans la suite.

### 1.3.2 L'Analyse Linéaire de Stabilité pour l'étude du développement des instabilités plastiques de striction

#### a) Principe de l'Analyse Linéaire de Stabilité

Une technique éprouvée pour traiter le début du développement d'instabilités dans des écoulements est l'**Analyse Linéaire de Stabilité (ALS)**. Elle est employée avec succès dans plusieurs domaines autres que la mécanique du solide. On peut citer :

- la physique des interfaces. Coriell *et al.* (1971) ont par exemple étudié la forme de l'interface solide-liquide lors d'un processus de cristallisation. Des perturbations de faible amplitude se développent et l'état de surface, instable, devient rugueux ;
- la physique de la combustion. Joulin et Clavin (1979) ont analysé le mécanisme de perte de chaleur d'une flamme.

Dans les enveloppes métalliques, lorsque la structure étudiée est dénuée de défauts géométriques, elle est infiniment ductile et se déforme sans rupture. On parle alors de solution fondamentale homogène ou encore d'**écoulement de base**. Néanmoins, dans la réalité, au cours du processus de déformation dynamique, des perturbations peuvent se développer et sont à l'origine de strictions multiples pouvant conduire à la fragmentation.

L'Analyse Linéaire de Stabilité est une méthode qui repose sur l'analyse du développement de perturbations de faible amplitude que l'on superpose à la solution fondamentale homogène. Dans le cas de notre étude, cet écoulement est associé à l'expansion d'un cylindre supposé infiniment long et infiniment ductile (dans le sens où son épaisseur tend asymptotiquement et uniformément vers zéro sans rupture).

En mécanique du solide, l'ALS permet :

- de déterminer l'instant à partir duquel les premières instabilités apparaissent ;

- de prendre en compte des sollicitations dynamiques. Les travaux de Hill et Hutchinson (1975) sur l'analyse de la bifurcation d'une plaque en statique supposent que l'apparition de l'instabilité est instantanée. L'ALS, en dynamique, permet d'accéder à une échelle de temps caractéristique de la croissance des instabilités ;
- d'étudier l'apparition de motifs périodiques de déformation, représentatifs des amincissements locaux observés. Ils sont reliés à la striction multiple et déterminent une distance inter-strictions. Le nombre de strictions est comparé aux observations expérimentales (voir Jouve, 2010 pour le cylindre ou Mercier *et al.*, 2010 pour les hémisphères) ;
- d'intégrer des mécanismes physiques impliquant des gradients tels que la conduction thermique.

L'ALS consiste à rechercher le taux de croissance  $\eta$  d'une perturbation des positions matérielles de l'écoulement de base et périodique selon la direction de traction. Ainsi, la perturbation est définie comme le produit d'une fonction exponentielle du temps ( $\exp(\eta t)$ ) et d'une fonction des positions matérielles (voir Shenoy et Freund, 1999).

En lien avec nos objectifs et le cadre de la thèse, nous décrivons dans la suite des résultats obtenus par l'ALS qui permettent de restituer des observations expérimentales liées à l'apparition et à la croissance des instabilités. Les matériaux étudiés dans les travaux que nous menons sont des métaux ductiles, homogènes, isotropes, incompressibles satisfaisant le critère du  $J2$ . L'élasticité est négligée. La contrainte d'écoulement  $Y$  dépend uniquement de la déformation plastique équivalente  $\varepsilon_p$ , de la vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\varepsilon}_p$  et de la température absolue au sein du matériau  $\theta$  :  $Y = Y(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, \theta)$ . Le processus est supposé adiabatique et l'endommagement est négligé.

## b) Principaux résultats obtenus par l'Analyse Linéaire de Stabilité

Pour les matériaux non sensibles à la vitesse de déformation et à écrouissage positif ( $Y = Y(\varepsilon_p)$  avec  $\partial Y / \partial \varepsilon_p > 0$ ), Hill et Hutchinson (1975) réalisent l'analyse de la bifurcation

d'une plaque en conditions de traction plane. Les auteurs montrent que le développement des grandes longueurs d'onde est favorisé pour un chargement quasi-statique. Shenoy et Freund (1999) proposent une extension des travaux de Hill et Hutchinson (1975) en prenant en compte les effets d'inertie. Ils développent une analyse linéaire de stabilité et révèlent alors que l'inertie stabilise le développement des grandes longueurs d'onde. Par ailleurs, la prise en compte de la multiaxialité de l'écoulement conduit à la stabilisation des courtes longueurs d'onde. Aussi, à chaque instant du processus de déformation, une longueur d'onde intermédiaire est sélectionnée. Ce mode est supposé représentatif de la distance inter-strictions.

Les Analyses Linéaires de Stabilité sont également utilisées pour l'étude des matériaux sensibles à la vitesse de déformation. En statique, le développement des instabilités dans le cadre de l'ALS a été étudié par Hutchinson et Obrecht (1977) dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde pour laquelle la longueur caractéristique de l'instabilité doit être très grande devant le rayon du barreau étudié, ce qui revient à négliger les effets de multiaxialité de l'écoulement. Ils s'intéressent à des barreaux cylindriques en traction uniaxiale. Le matériau est viscoplastique et obéit à la loi de comportement de Norton (1929) ( $Y \propto \dot{\epsilon}_p^m$ ,  $m$  étant le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation). L'étude de l'évolution de défauts sinusoïdaux de faible amplitude montre que la longueur d'onde la plus instable est infinie. L'observation expérimentale d'un unique point de rupture au milieu de l'éprouvette pour un chargement quasi-statique est ainsi restituée. Par ailleurs, les auteurs montrent l'existence d'une longueur d'onde de coupure en-deçà de laquelle les perturbations sont stabilisées. Ils montrent graphiquement que cette longueur d'onde minimale tend vers 0 quand  $m$  tend vers 0. Hutchinson et Neale (1977) se placent dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde. Ils mettent en évidence, au moyen d'un modèle non linéaire, l'augmentation de la déformation à la rupture lorsque le paramètre  $m$  de sensibilité à la vitesse de déformation augmente, restituant les observations expérimentales sur les matériaux superplastiques de Sagat et Taplin (1976) par exemple. Néan-

moins, l'approximation des grandes longueurs d'onde sous-estime la déformation critique à laquelle apparaissent les strictiones. Il est alors montré que la multiaxialité de l'écoulement et les effets visqueux stabilisent les courtes longueurs d'onde. Fressengeas et Molinari (1985, 1987, 1994) combinent les effets visqueux avec les effets d'inertie et l'écroutissage du matériau et montrent que l'inertie stabilise les grandes longueurs d'onde tandis que la multiaxialité de l'écoulement stabilise les courtes longueurs d'onde. L'action combinée de l'inertie, des effets visqueux et de la multiaxialité de l'écoulement conduit, moyennant un écroutissage suffisant, à la sélection d'une longueur d'onde intermédiaire, restituant ainsi les observations expérimentales de strictiones multiples. Ce résultat sera retrouvé par la suite par Jeanclaude et Fressengeas (1997), Mercier et Molinari (2003) ou Rodríguez-Martínez *et al.* (2013b) pour le cas du barreau cylindrique en traction. L'effet combiné de l'inertie et de la multiaxialité est illustré sur la Figure 1.10, issue de Mercier et Molinari (2003). La configuration étudiée est une plaque en déformation plane. Le matériau est le cuivre dont le comportement est viscoplastique. La contrainte d'écoulement obéit à une loi puissance  $Y = K\varepsilon_p^m$ . La Figure 1.10 présente l'évolution du taux de croissance relatif de la perturbation à l'instant initial (défini par le rapport  $\frac{m\eta}{\dot{\varepsilon}_{11}}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{11}$  étant le gradient de vitesse initial) en fonction du nombre d'onde adimensionné  $kL_2$  ( $k$  : nombre d'onde longitudinal,  $L_2$  : demi-épaisseur). Plusieurs vitesses de chargement sont considérées et représentées par le nombre adimensionnel  $I$ , proportionnel au carré de la vitesse de traction  $V_0$ . Les résultats sont présentés pour trois modèles : une approche quasi-statique, une approche dynamique avec l'approximation des grandes longueurs d'ondes et une approche dynamique  $2D$ . Mercier et Molinari (2003) confirment les observations de Fressengeas et Molinari (1994). Les effets d'inertie stabilisent les grandes longueurs d'ondes (*i.e.* les faibles  $kL_2$ ), conduisant ainsi à limiter la taille des fragments, mais n'affectent que peu les courtes longueurs d'onde. Pour leur part, les effets de multiaxialité stabilisent les courtes longueurs d'onde (*i.e.* les grands  $kL_2$ ). La longueur d'onde la plus instable est donc intermédiaire. L'influence de la sensibilité à la vitesse de déformation est illustrée sur la Figure 1.11, issue de Mercier et Molinari (2003) pour le cas d'un barreau cylindrique en traction dont le type de loi de

comportement adoptée est identique à celui de la Figure 1.10 (seule change la valeur de  $m$ ). La Figure 1.11 présente l'évolution du taux de croissance relatif en fonction de  $kL_2$  pour plusieurs valeurs du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$ . Mercier et Molinari (2003) montrent que l'augmentation de la sensibilité à la vitesse de déformation stabilise les courtes longueurs d'onde (*i.e.* augmente la taille des fragments) et retrouvent ainsi les résultats de Jeanclaude et Fressengeas (1997).

Fressengeas et Molinari (1994) et Jeanclaude et Fressengeas (1997) s'intéressent aussi à l'évolution temporelle de la longueur d'onde la plus instable : dans les premiers instants, la croissance des perturbations de grande longueur d'onde précède celle de courtes longueurs d'onde ; puis le mode dominant se déplace vers les courtes longueurs d'ondes. Cette observation est étendue à d'autres lois de comportement par Mercier *et al.* (2010) et Jouve (2010).

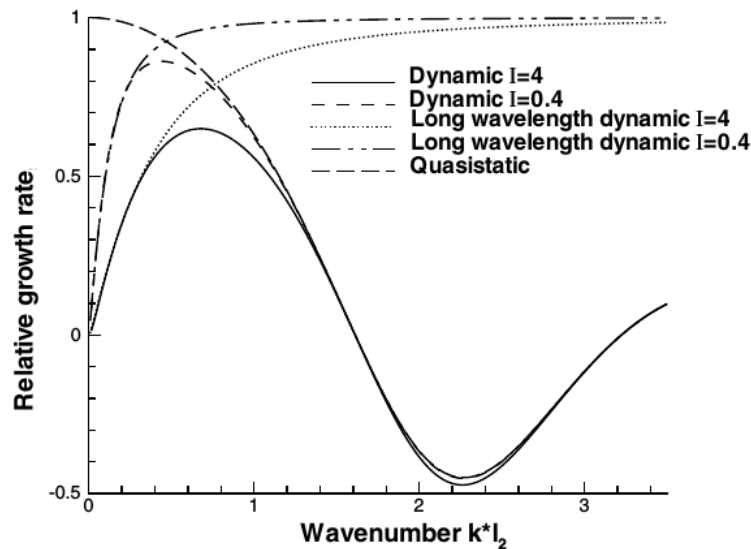


FIGURE 1.10 – Taux de croissance relatif de la perturbation à l'instant initial en fonction du nombre d'onde adimensionné  $kL_2$ , Mercier et Molinari (2003). Plusieurs vitesses de chargement sont considérées et représentées par le nombre adimensionnel  $I$ , proportionnel au carré de la vitesse de traction  $V_0$ . Le comportement est viscoplastique,  $Y = K\dot{\epsilon}_p^m$  avec  $K = 1,1 \cdot 10^8$  SI et  $m = 0,05$ . Le matériau est sans écrouissage. Les résultats de l'approche quasi-statique, de l'approche dynamique avec l'approximation des grandes longueurs d'onde et de l'approche dynamique 2D sont présentés.

L'ALS a également permis de révéler que l'écrouissage a un effet stabilisant sur les per-



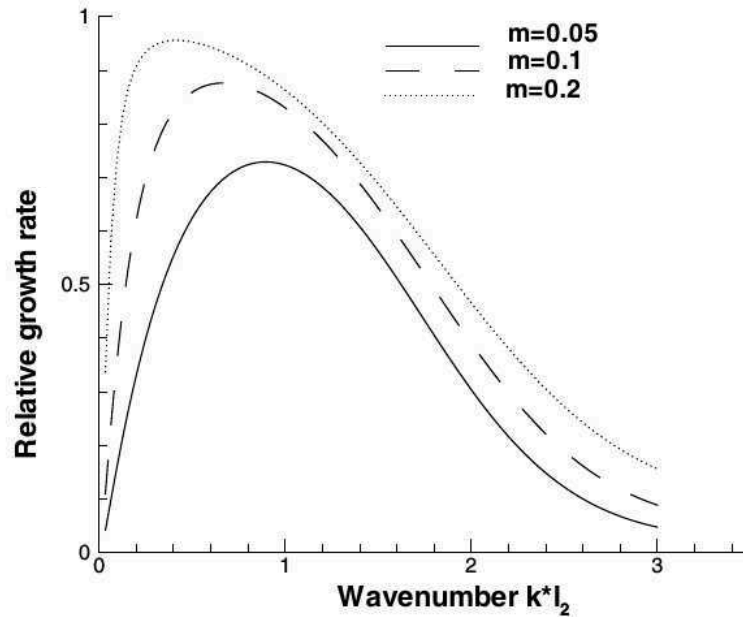


FIGURE 1.11 – Taux de croissance relatif de la perturbation à l’instant initial en fonction du nombre d’onde adimensionné dans la direction de l’amincissement  $kL_2$ , issu de Mercier et Molinari (2003). Le matériau étudié est celui de la Figure 1.10. Plusieurs valeurs du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$  sont étudiées.

turbations, Mercier et Molinari (2004). L’effet déstabilisant de l’adoucissement thermique a pour sa part été mis en évidence par Fressengeas et Molinari (1985) mais reste secondaire par rapport aux effets géométriques selon Jeanclaude et Fressengeas (1997) pour le cas de la striction. Néanmoins, Longère et Dragon (2007) traitent avec l’ALS le couplage thermomécanique dans le cas où l’adoucissement thermique est important. Dans ce cas, l’instabilité est thermique et se manifeste sous la forme de bandes de cisaillement adiabatiques.

L’ALS a permis une restitution d’expériences de fragmentation sur diverses géométries. Jeanclaude et Fressengeas (1997) ou Petit *et al.* (2005) prédisent une taille de fragments en accord avec des expériences sur des jets de charges creuses. Mercier et Molinari (2004) retrouvent les résultats d’Altynova *et al.* (1996) sur le nombre de strictions observés sur des expansions d’anneaux.

Les études évoquées ont traité le cas d’un matériau isotrope en traction plane ou uniaxiale. Notons que Dudzinski et Molinari (1991) et Boudeau et Gelin (2000) ont étendu

l'ALS au cas des matériaux orthotropes, en particulier pour des plaques en traction biaxiale dans leur plan. Dans le cadre de cette thèse, le matériau sera considéré comme isotrope.

Les observations expérimentales mettent en évidence une inhomogénéité dans la taille des fragments. El Maï (2014) étudie la dispersion des longueurs inter-strictions en prenant en compte l'ensemble des modes instables (et plus seulement le mode dominant) dans le cas du barreau cylindrique en traction. Une perturbation aléatoire de la section du barreau le long de la direction de traction est considérée à l'instant initial. Chacun des modes longitudinaux de la perturbation est étudié séparément au moyen de l'ALS. La Figure 1.12 décrit l'évolution de la section normalisée du barreau en fonction de la coordonnée normalisée le long de la direction de traction à différents instants. La distance entre deux strictions (minima de la section) évolue en fonction de la coordonnée, restituant ainsi l'inhomogénéité de la taille des fragments.

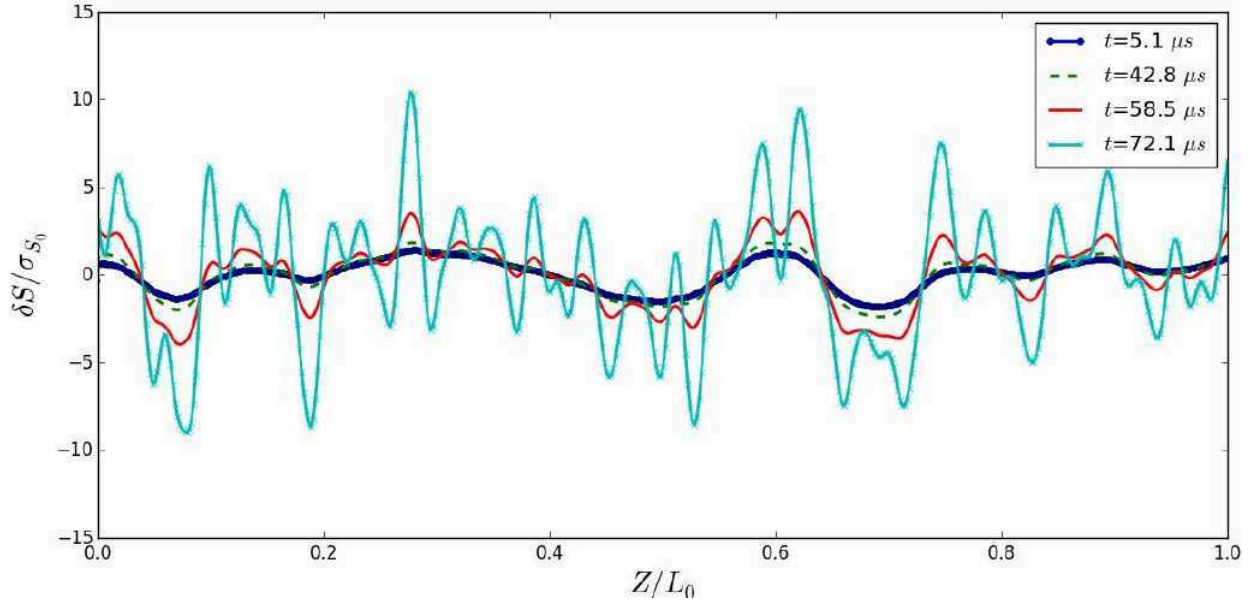


FIGURE 1.12 – Évolution de la perturbation de la section normalisée du barreau cylindrique en cuivre en traction en fonction de la coordonnée longitudinale normalisée, El Maï (2014). Une perturbation aléatoire de la section est considérée à l'instant initial. L'évolution des modes longitudinaux est déterminée au moyen de l'ALS. La distance inter-strictions le long du barreau évolue au cours du temps.

**c) Restitution d'une expérience d'expansion de cylindres : confrontation ALS/Expérience d'Olive *et al.* (1979)**

Dans le cadre d'essais d'expansions de cylindres ou d'anneaux, Mercier et Molinari (2004) étudient l'influence de la courbure sur le développement des perturbations. Il est montré que les résultats de l'ALS ne sont pas affectés par la courbure lorsque le cylindre est suffisamment mince (le rapport de l'épaisseur sur le rayon moyen est inférieur à 0,02). Une configuration de plaque en déformation plane, en assimilant le cylindre à son plan tangent, est utilisée pour prédire le comportement d'un cylindre et le barreau en traction uniaxiale permet de reproduire un anneau en expansion.

Cette approche a été utilisée par Jouve (2010) pour restituer la chronométrie de l'expérience d'Olive *et al.* (1979) dont le dispositif expérimental est présenté en Figure 1.2 (voir page 17). D'un point de vue expérimental, on observe à partir de la Figure 1.13, issue d'Olive *et al.* (1979) :

- après une phase d'expansion homogène, les premières localisations apparaissent sur l'image 3, à  $t = 25 \mu s$  ;
- les strictions sont pleinement développées à  $t = 34 \mu s$  (image 4). L'image n'est pas suffisamment nette pour permettre un comptage précis des strictions. Jouve (2010) se reporte donc à un instant suivant, à  $t = 52 \mu s$  (image 6) et donne une estimation de 125 à 150 strictions par mètre pour l'image 4. Le phénomène d'écrantage par les ondes de relaxation étant vraisemblablement limité aux vitesses de déformation atteintes dans le cylindre, cela lui donne un bon ordre de grandeur du nombre de strictions.

L'ALS est ensuite utilisée pour déterminer la longueur inter-strictions. Dans un premier temps, une simulation numérique est réalisée pour déterminer l'état (dimensions, température absolue, déformation plastique équivalente) du cylindre à l'instant du début du vol libre. Le cylindre en acier, illustré en Figure 1.14, est à l'instant de vol libre, d'épaisseur  $e$ ,

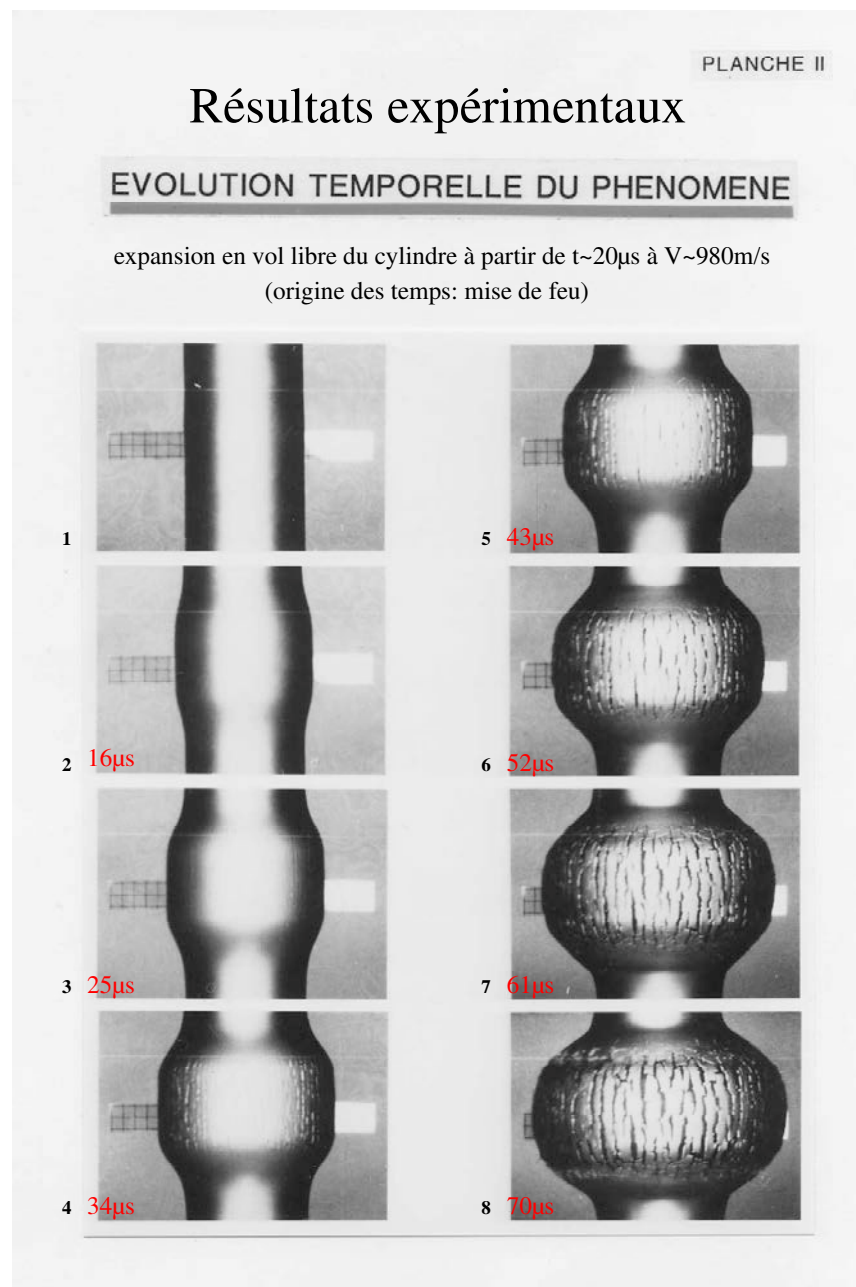
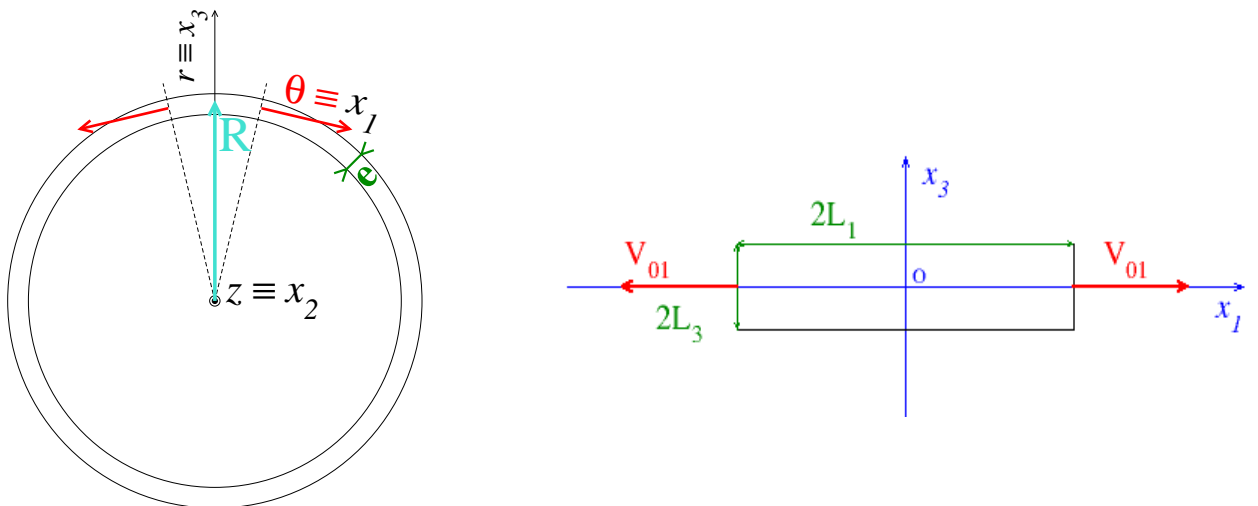


FIGURE 1.13 – Images réalisées lors de l'expansion par voie détonique du cylindre en acier de l'expérience d'Olive et al. (1979) et exploitées par Jouve (2010). L'image 2 montre une déformation homogène. À  $t = 25 \mu\text{s}$  (image 3), les premières localisations suivent les génératrices du cylindre. À  $t = 34 \mu\text{s}$  (image 4), les strictionnements sont pleinement développés. Le nombre de strictionnements par mètre est évalué entre 125 et 150 par mètre par Jouve (2010). Les premières ruptures sont apparentes à  $t = 52 \mu\text{s}$  (image 6).

de rayon interne  $R$  et de dimension infinie dans la direction  $z$ . Après une première phase de mise en vitesse par chocs successifs provenant de l'explosif, il est soumis à une vitesse d'expansion radiale  $V_r$  pour ainsi dire constante estimée à 980 m/s. Le cylindre, en déformation plane dans le plan  $(r, \Theta)$ , est suffisamment mince pour négliger les effets de courbure (le rapport  $e/R$  est de l'ordre de 0,04 avant la détonation). Il est assimilé à son plan tangent. L'étude se ramène donc à celle de la déformation plane d'une plaque dans le plan  $(x_1, x_3)$ , présentée sur la Figure 1.14. La direction orthoradiale  $\Theta$  devient la direction de traction  $x_1$  tandis que la direction radiale  $r$  devient la direction  $x_3$ . La plaque, de longueur  $2L_1 = 2\pi R$ , d'épaisseur  $2L_3 = e$  et de longueur infinie dans la direction  $x_2$  est soumise à une vitesse de traction  $V_{01}$  sur les faces latérales calculée à partir de la vitesse d'expansion radiale :  $V_{01}/L_{01} = V_r/R$ .



coupe de la partie centrale du cylindre

FIGURE 1.14 – Configuration géométrique d'un cylindre en expansion radiale à une vitesse  $V_r$  représentatif de l'expérience d'Olive et al. (1979). Du fait du faible rapport  $e/R$ , l'expérience est analysée en considérant une plaque en déformation plane dans le plan  $(x_1, x_3)$ , assimilant le cylindre à son plan tangent, Jouve (2010). Les relations géométriques sont :  $2L_1 = 2\pi R$ ,  $2L_3 = e$ . La vitesse de traction de la plaque est telle que  $V_{01}/L_{01} = V_r/R$ .

Jouve (2010) réalise ensuite une ALS sur une configuration de plaque en traction plane et calcule à différents instants et pour toute longueur d'onde le taux de croissance de la perturbation  $\eta$ . La Figure 1.15 présente le taux de croissance normalisé  $\eta/D_{11}^{(b)}(t)$ , avec

$D_{11}^{(b)}(t)$  le taux de déformation longitudinal de l'écoulement de base, en fonction du nombre de strictions par mètre (*i.e.* la longueur d'onde).

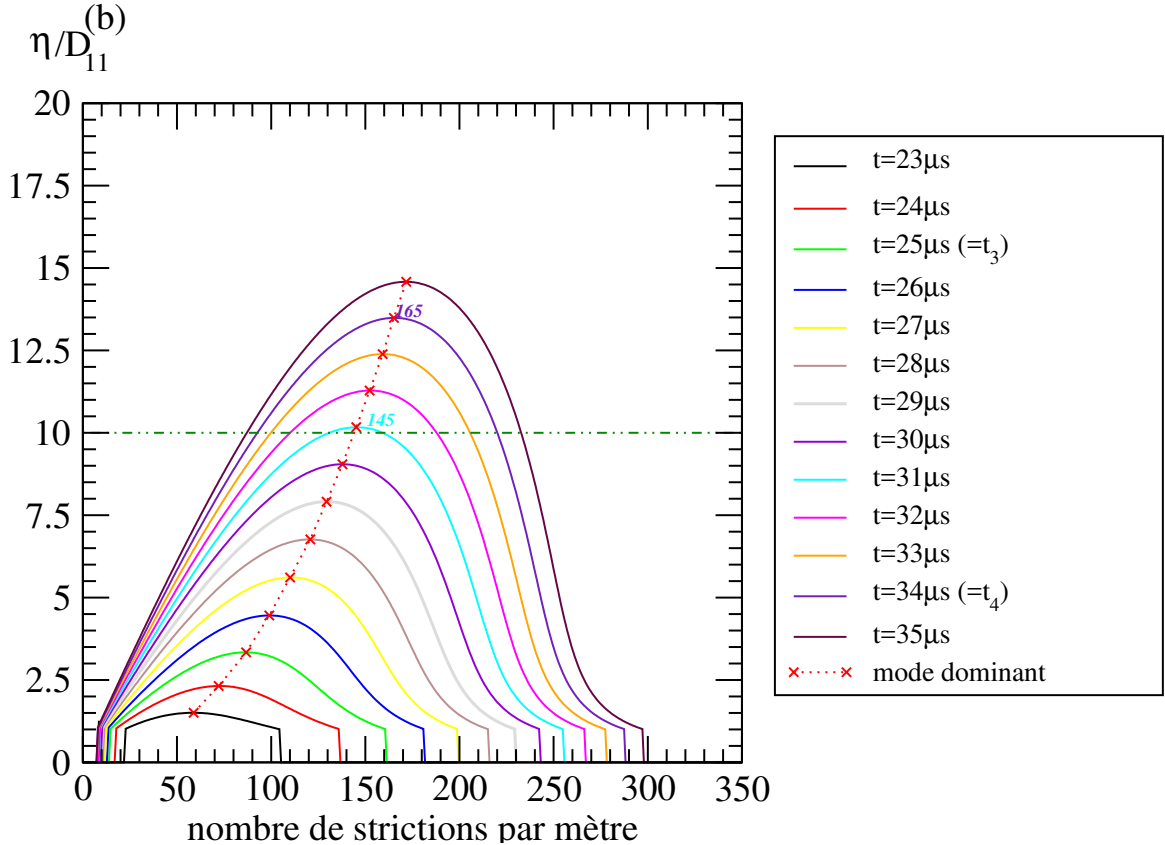


FIGURE 1.15 – Taux de croissance normalisé de la perturbation en fonction du nombre de strictions par mètre (*i.e.* la longueur d'onde) à différents instants pour un cylindre en acier en expansion à une vitesse radiale  $V_r$  estimée à 980 m/s, Jouve (2010). Les premiers taux de croissance sont déterminés à  $t = 23 \mu s$ . Le taux de croissance maximum à chaque instant donne une prédiction de la distance inter-strictions. L'instant  $t_3$  (resp.  $t_4$ ) est associé à l'image 3 (resp. image 4) sur la Figure 1.13.

Grâce au suivi de la longueur d'onde la plus instable au cours du temps, Jouve (2010) observe :

- un déclenchement des instabilités à un instant proche de celui de force maximum soit  $t = 23 \mu s$ , en accord avec l'observation expérimentale de  $t = 25 \mu s$ .
- les strictions sont considérées comme pleinement développées lorsque le rapport  $\eta/D_{11}^{(b)}(t)$  associé au mode dominant dépasse 10, soit pour  $t = 31 \mu s$  où 145 strictions par mètre sont relevées, une fois encore en accord avec l'expérience.

La restitution de Jouve (2010) est en accord avec les ordres de grandeur de l'expérience d'Olive *et al.* (1979). Il convient cependant d'interpréter les résultats avec précaution. L'expérience d'Olive *et al.* (1979) est ancienne et peu instrumentée. L'écart de  $9 \mu s$  entre deux images successives ne permet de restituer avec l'ALS que des ordres de grandeur.

De plus, la modélisation soulève des interrogations. Dans les travaux antérieurs, l'étude de la croissance de l'instabilité se base sur une théorie des coefficients figés. Implicitement, cela suppose que l'échelle de temps  $1/\eta$  de croissance de l'instabilité est très petite devant  $1/D_{11}^{(b)}$ , associée à l'évolution de l'écoulement de base homogène. Cette hypothèse de séparation d'échelles est très contestable pour des essais fortement dynamiques.

## 1.4 Conclusion de l'étude bibliographique

L'étude bibliographique a permis de souligner que L'Analyse Linéaire de Stabilité est une méthode adaptée pour déterminer une longueur d'onde caractéristique de défaut, représentative de la distance moyenne inter-strictions et pouvant généralement être en accord avec les observations expérimentales. L'influence des paramètres matériaux et de la vitesse de chargement sur la distance inter-strictions a été explorée dans les travaux de la littérature. Les études ont été menées sur des géométries variées, parmi lesquelles le cylindre, objet de notre étude et pour lequel une configuration de plaque en déformation plane est appropriée (voir Figure 1.14). Plus récemment, l'étude des longueurs d'onde autour du mode dominant a permis de restituer la répartition de la distribution de la taille des fragments autour de la distance inter-strictions dominante, voir El Maï *et al.* (2014).

L'ALS est un modèle de perturbation linéaire. Lorsque l'instabilité de striction est fortement développée, l'amplitude des perturbations est importante et les effets non-linéaires apparaissent. La phase de fragmentation n'est donc pas accessible par cette approche mais l'analyse linéaire peut fournir des conditions initiales pour l'étude des phases suivantes du processus, les strictions pouvant être interprétées comme des défauts dans une approche de Mott par exemple, voir Dequiedt (2015).

Néanmoins, les études menées dans la littérature sont basées sur une théorie des coefficients figés dont la validité peut être remise en question lorsque la vitesse de déformation est importante. Notre travail de thèse consiste à proposer une nouvelle approche permettant de s'affranchir de cette hypothèse.



# Chapitre 2

## Configuration et écoulement homogène

### 2.1 Configuration de l'étude

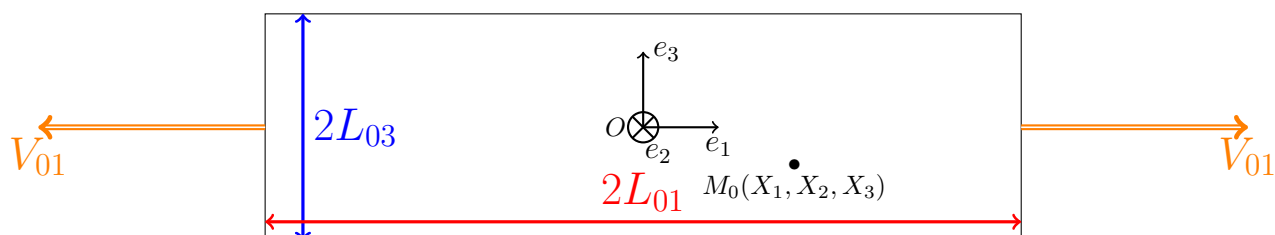


FIGURE 2.1 – Configuration géométrique dans le plan  $(x_1, x_3)$  de la plaque en déformation plane. À l'instant initial, la plaque est de demi-longueur  $L_{01}$  et de demi-épaisseur  $L_{03}$ . Les faces en  $X_1 = \pm L_{01}$  sont soumises à une vitesse de traction constante  $V_{01}$ .

On considère une plaque placée au centre d'un repère cartésien orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  (voir Figure 2.1). La plaque est de demi-longueur initiale  $L_{01}$  selon la direction  $x_1$ , de demi-épaisseur initiale  $L_{03}$  selon la direction  $x_3$ , et infinie selon la direction  $x_2$ . La plaque est sollicitée en déformation plane selon la direction  $x_1$ , dans le plan  $(x_1, x_3)$  où un champ de vitesse uniforme et constant  $\pm V_{01} \vec{e}_1$  est imposé sur les surfaces latérales, orthogonales à la direction de traction (voir Figure 2.1). Les faces orthogonales à la direction  $\vec{e}_3$  sont libres de contraintes.

Soit  $P$ , une particule matérielle de la plaque, de position initiale  $M_0$  de vecteur position

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^1$ . On note  $M$  sa position à l'instant courant  $t$  de vecteur position  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . En traction plane,  $x_2 = X_2$ . Le déplacement de la particule est  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$  et le champ de vitesse associé est  $\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \partial\mathbf{u}/\partial t$ . Les dépendances en  $\mathbf{X}$  et en  $t$  seront intentionnellement omises dans la suite. Le tenseur gradient de transformation  $\mathbf{F}$  à l'instant  $t$  s'exprime par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}} \quad (2.1)$$

ou encore, en écrivant ses composantes dans  $\mathcal{R}^2$  :

$$F_{ij} = x_{i,j} \quad (2.2)$$

Le tenseur gradient de vitesse eulérienne  $\mathbf{L}$  se déduit du tenseur gradient de transformation  $\mathbf{F}$  par :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (2.3)$$

où  $(\dot{\cdot})$  désigne la dérivée temporelle du tenseur de deuxième ordre  $(\cdot)$ .

Le matériau étudié est un métal ductile supposé homogène, et isotrope. Le matériau est également rigide et viscoplastique. L'élasticité étant négligée, le matériau est supposé incompressible et indilatable. Il vient alors :

$$\det(\mathbf{F}) = 1 \quad (2.4)$$

Le tenseur taux de déformation  $\mathbf{D}$ , partie symétrique du tenseur gradient de vitesse  $\mathbf{L}$

---

1. Dans la suite, les grandeurs vectorielles ou tensorielles seront notées en gras. Les grandeurs scalaires ont une typographie classique.

2. Par convention, pour toute grandeur  $A$  considérée, on pose :

$$A_{,i} = \frac{\partial A}{\partial X_i}$$

s'obtient à partir de l'équation (2.3) :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \right) \quad (2.5)$$

où  $(.)^T$  désigne la transposée de  $(.)$  et  $(.)^{-T}$  désigne la transposée de l'inverse de  $(.)$ .

À partir de  $\mathbf{D}$ , on définit classiquement la vitesse de déformation plastique équivalente  $\dot{\varepsilon}_p$  telle que :

$$\dot{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D} : \mathbf{D}} \quad (2.6)$$

avec  $(:)$  le produit doublement contracté des tenseurs du second ordre. La déformation plastique cumulée  $\varepsilon_p$  est obtenue par intégration de l'équation (2.6) :

$$\varepsilon_p = \int_0^t \dot{\varepsilon}_p d\tau \quad (2.7)$$

On adopte aussi la règle d'écoulement plastique suivante :

$$\mathbf{D} = \frac{3\dot{\varepsilon}_p}{2\bar{\sigma}} \mathbf{S} = \lambda \mathbf{S} \quad (2.8)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique,  $\mathbf{S}$  désigne la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\bar{\sigma}$  la contrainte équivalente au sens de Von Mises :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} \quad (2.9)$$

En phase de chargement plastique, la contrainte équivalente  $\bar{\sigma}$  est égale à la contrainte d'écoulement du matériau  $Y$  que l'on écrit, pour la plupart des matériaux métalliques, sous la forme d'une somme de deux termes :

$$Y = Y_p(\varepsilon_p, \theta) + Y_v(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, \theta) \quad (2.10)$$

où  $Y_p$  est une contribution indépendante de la vitesse de déformation (la limite élastique du matériau) tandis que  $Y_v$  correspond à la contribution visqueuse (ou overstress).

On rappelle aussi que  $\mathbf{T}$ , tenseur des contraintes nominales, est lié à  $\Sigma$  par la relation :

$$\mathbf{T} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\Sigma = \mathbf{F}^{-1}\Sigma \quad (2.11)$$

Dans cette relation, la condition d'incompressibilité (2.4) a été utilisée.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit en variables lagrangiennes :

$$\rho\mathbf{\Gamma} = \text{div}(\mathbf{T}) \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{\Gamma}$  désigne le vecteur accélération en variables lagrangiennes et  $\rho$  la masse volumique. Du fait de l'incompressibilité et de l'homogénéité,  $\rho = \rho_0$  est constant.

L'équation (2.12), projetée selon l'axe  $\vec{e}_i$ , s'écrit, en variables lagrangiennes, sous forme indicielle dans un repère cartésien, à l'instant courant :<sup>3</sup>

$$\rho\Gamma_i = T_{ji,j} \quad (2.13)$$

Les chargements considérés dans cette étude sont dynamiques ( $\dot{\epsilon}_p$  compris entre  $10^3$  et  $10^5 \text{ s}^{-1}$ ). Nous supposons donc le processus de déformation adiabatique ; nous négligeons les échanges thermiques avec le milieu extérieur ainsi que la conduction thermique au sein du matériau. L'équation régissant l'évolution de la température absolue  $\theta$  au sein du matériau s'écrit alors :

$$\dot{\theta} = \beta^{TQ} \frac{Y\dot{\epsilon}_p}{\rho C} \quad (2.14)$$

où  $C$  est la capacité thermique à volume constant, supposée constante. Le coefficient  $\beta^{TQ}$  est le coefficient de Taylor et Quinney (1934) et représente la fraction de travail plastique converti en chaleur. On trouve dans la littérature des travaux à la fois théoriques (citons

---

3. Nous adoptons, sauf mention contraire, la convention d'écriture d'Einstein sur les indices répétés.

Longère et Dragon, 2008a,b ou Stainier et Ortiz, 2010) et expérimentaux (citons Mason *et al.*, 1994, Rittel, 1999, Hodowany *et al.*, 2000) traitant de la valeur du coefficient  $\beta^{TQ}$  et de son évolution au cours du chargement. Dans la suite, nous supposons que le travail de la déformation plastique est totalement converti en chaleur, c'est à dire  $\beta^{TQ} = 1$  ( $\dot{\theta} = Y\dot{\epsilon}_p/\rho C$ ).

Concernant les conditions aux limites, les surfaces supérieure et inférieure ( $X_3 = \pm L_{03}$ ) sont libres de contrainte. Les surfaces latérales ( $X_1 = \pm L_{01}$ ) sont soumises à une vitesse constante  $\pm V_{01}$  :

$$v_1(\pm L_{01}, X_3, t) = \pm V_{01} \quad T_{13}(\pm L_{01}, X_3, t) = 0 \quad (2.15)$$

$$T_{33}(X_1, \pm L_{03}, t) = 0 \quad T_{31}(X_1, \pm L_{03}, t) = 0. \quad (2.16)$$

## 2.2 Écoulement de base de la plaque parfaite

Nous étudions dans cette section la plaque « idéale », dénuée de défauts géométriques ou structuraux (matériau parfaitement homogène isotrope). Une approche lagrangienne est adoptée. Cette plaque est infiniment ductile ; son épaisseur tend uniformément et asymptotiquement vers zéro au cours du temps et sans rupture. Cet écoulement, que nous désignons par **écoulement de base**, a déjà été étudié dans la littérature (*e.g.* Fressengeas et Molinari, 1994). Dans la suite, un exposant (*b*) désigne les quantités associées à l'écoulement de base.

L'incompressibilité du matériau permet d'écrire :

$$x_1 x_2 x_3 = X_1 X_2 X_3 \quad (2.17)$$

Les coordonnées  $x_i$  à l'instant  $t$  du point matériel  $M$  s'écrivent en traction plane :

$$x_1 = X_1(1 + \varepsilon_{11}) \quad x_2 = X_2 \quad x_3 = X_3 \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \quad (2.18)$$

avec :

$$\varepsilon_{11}(t) = \dot{\varepsilon}_{11}t = \frac{V_{01}}{L_{01}}t \quad (2.19)$$

On en déduit le gradient de la transformation  $\mathbf{F}^{(b)}$  :

$$\mathbf{F}^{(b)} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Les composantes  $v_i$ , à l'instant  $t$ , de la vitesse de  $M$  s'obtiennent à partir de l'équation (2.18) :

$$v_1 = X_1 \dot{\varepsilon}_{11} \quad v_2 = 0 \quad v_3 = -X_3 \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \quad (2.21)$$

et les composantes  $\Gamma_i$ , à l'instant  $t$ , de l'accélération de  $M$  sont alors :

$$\Gamma_1 = 0 \quad \Gamma_2 = 0 \quad \Gamma_3 = X_3 \frac{2\dot{\varepsilon}_{11}^2}{(1 + \varepsilon_{11})^3} \quad (2.22)$$

Le tenseur taux de déformation  $\mathbf{D}^{(b)}$  est donné par la relation (2.5) et par l'expression (2.20) du tenseur gradient de transformation  $\mathbf{F}^{(b)}$  :

$$\mathbf{D}^{(b)} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{1 + \varepsilon_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{1 + \varepsilon_{11}} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Le tenseur  $\mathbf{D}^{(b)}$  est donc diagonal, et en vertu de la relation (2.8), il en résulte que  $\mathbf{S}^{(b)}$  et  $\mathbf{\Sigma}^{(b)}$  sont diagonaux.

D'après Fressengeas et Molinari (1994) ou Jouve (2010), l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy  $\Sigma^{(\mathbf{b})}$  est :

$$\Sigma^{(\mathbf{b})} = \begin{pmatrix} \sigma_1(t) - P^I(X_3, t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) - P^I(X_3, t) & 0 \\ 0 & 0 & -P^I(X_3, t) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

avec la pression inertielle  $P^I$  :

$$P^I(X_3, t) = \rho \frac{\dot{\varepsilon}_{11}^2 (L_{03}^2 - X_3^2)}{(1 + \varepsilon_{11})^4} \quad (2.25)$$

La partie déviatorique de  $\Sigma^{(\mathbf{b})}$ , notée  $\mathbf{S}^{(\mathbf{b})}$ , ne dépend que du temps :

$$\mathbf{S}^{(\mathbf{b})} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma_1(t) - \sigma_2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2(t) - \sigma_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_1(t) - \sigma_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

tandis que la pression  $P$  s'écrit :

$$P = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\Sigma^{(\mathbf{b})}) = P^I(X_3, t) - \frac{1}{3}(\sigma_1(t) + \sigma_2(t)) \quad (2.27)$$

où  $\text{Tr}(\cdot)$  désigne la trace du tenseur de second ordre  $(\cdot)$ .

La pression apparaît comme la somme de deux termes :

- la pression inertielle  $P^I$  donnée par l'équation (2.25) ;
- une composante statique,  $P^S$ , qui ne dépend que du temps :

$$P^S = -\frac{1}{3}(\sigma_1(t) + \sigma_2(t)) \quad (2.28)$$

Rappelons que le problème est étudié en déformation plane dans le plan  $(x_1, x_3)$  de

---

sorte que :

$$D_{22}^{(b)} = 0 \quad (2.29)$$

En vertu de la règle de normalité donnée par la relation (2.8), on a donc :

$$S_{22}^{(b)} = 0 \quad (2.30)$$

Ainsi, d'après les relations (2.9) et (2.26), on obtient :

$$\sigma_1 = 2\sigma_2 = \frac{2Y}{\sqrt{3}} \quad P^S = -\frac{Y}{\sqrt{3}} \quad (2.31)$$

La partie déviatorique  $\mathbf{S}^{(b)}$  du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\Sigma}^{(b)}$  s'écrit donc :

$$\mathbf{S}^{(b)} = \frac{Y}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Dans le cadre de l'expansion dynamique, on a, via les relations (2.6) et (2.23) :

$$\dot{\varepsilon}_p^{(b)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} D_{33}^{(b)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{1 + \varepsilon_{11}} \quad (2.33)$$

Il est observé dans les expériences que des perturbations apparaissent pour les matériaux ductiles soumis à des sollicitations dynamiques et sont à l'origine du développement de striction multiples conduisant à la fragmentation. L'objectif de notre travail est d'estimer l'évolution temporelle d'une imperfection à travers une extension des méthodes de perturbations linéaires. Cette nouvelle approche est décrite dans le chapitre suivant.



# Chapitre 3

## Extension de l'approche classique d'Analyse Linéaire de Stabilité

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité de l'écoulement de base décrit dans la section (2.2) du chapitre 2. Il s'agit d'étudier le développement de perturbations de faible amplitude. L'approche utilisée suit le formalisme développé par Fressengeas et Molinari (1994) et repris par Shenoy et Freund (1999), Mercier et Molinari (2004), Mercier *et al.* (2010) ou Jouve (2010). À un instant donné  $t_0$ , une perturbation dépendante du temps et de l'espace est superposée à l'écoulement de base de telle manière que toute variable  $G$  (scalaire, vectorielle ou tensorielle) de l'écoulement, solution du problème perturbé est la somme de deux termes :

$$G = G^{(b)} + \delta G \quad (3.1)$$

avec  $G^{(b)}$ , le champ de  $G$  relié à l'écoulement de base et  $\delta G$  le champ de perturbation associé.

Le système d'équations régissant l'évolution des champs de l'écoulement perturbé est obtenu par la linéarisation des équations de champs décrites dans la section 2.1 du chapitre 2 : à partir de l'équation de conservation du volume linéarisée, nous définissons la fonction

de courant  $\delta\psi$  dont dérive la perturbation  $\delta\mathbf{x}$  des positions matérielles. Nous montrons alors que, quelle que soit la grandeur  $G$  considérée, la perturbation  $\delta G$  associée peut s'écrire uniquement en fonction de  $\delta\psi$  et de la perturbation  $\delta\theta$  de la température absolue  $\theta$ . Les deux fonctions  $\delta\theta$  et  $\delta\psi$  sont solutions d'un système linéaire de deux équations différentielles couplées, valables en tout point de la plaque. Le système est d'ordre 2 en temps sur  $\delta\psi$  et d'ordre 1 en temps sur  $\delta\theta$ . Pour être résolu, ce système doit être complété par les conditions aux limites de bords libres en  $X_{03} = \pm L_{03}$  linéarisées et par des conditions initiales, données par l'amplitude initiale des perturbations.

## 3.1 Système d'équations régissant l'écoulement perturbé

### 3.1.1 Cinématique

En déformation plane, la perturbation en position dans le repère orthonormal  $\mathcal{R}$  s'écrit :

$$\delta\mathbf{x} = \begin{cases} \delta x_1(X_1, X_3, t) \\ 0 \\ \delta x_3(X_1, X_3, t) \end{cases} \quad (3.2)$$

La perturbation  $\delta\mathbf{F}$  du gradient de transformation  $\mathbf{F}$  donné par la définition (2.1) s'écrit alors à partir de l'équation (3.2) :

$$\delta\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \delta x_{1,1} & 0 & \delta x_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta x_{3,1} & 0 & \delta x_{3,3} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Le matériau est supposé incompressible ( $\det(\mathbf{F}^{(b)} + \delta\mathbf{F}) = 1$ ). D'après les équations

(2.4), (2.20) et l'écriture de  $\delta \mathbf{F}$  (3.3), on obtient l'équation de conservation du volume linéarisée à l'instant  $t$  :

$$\delta x_{1,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} + \delta x_{3,3} (1 + \varepsilon_{11}) = 0 \quad (3.4)$$

On rappelle que  $\varepsilon_{11}(t) = \dot{\varepsilon}_{11} t = \frac{V_{01}}{L_{01}} t$  (voir l'équation 2.19).

De l'équation (3.4), on déduit :

$$\left( \frac{\delta x_1}{1 + \varepsilon_{11}} \right)_{,1} + (\delta x_3 (1 + \varepsilon_{11}))_{,3} = 0 \quad (3.5)$$

Comme dans Mercier et Molinari (2003) ou Mercier *et al.* (2010), une fonction de courant  $\delta \psi$  est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\delta \psi_{,3} = \frac{\delta x_1}{1 + \varepsilon_{11}} \\ \delta \psi_{,1} = \delta x_3 (1 + \varepsilon_{11}) \end{array} \right. \quad (3.6a)$$

$$(3.6b)$$

**Remarque :** la définition (3.6) pour la fonction de courant diffère de celle adoptée par Shenoy et Freund (1999) ou Jouve (2010) pour qui le terme  $\varepsilon_{11}$  n'est pas présent. En effet, dans leur formalisme, l'objectif est d'étudier la stabilité de l'écoulement à un instant  $t$  donné ; la perturbation est superposée à la solution fondamentale à cet instant, pris pour origine des temps. Le tenseur gradient de transformation dans l'écoulement de base est alors égal à l'identité. Le développement des calculs est identique mais le système d'équations obtenu par le formalisme *Full-Lagrangian* (voir Mercier et Molinari, 2003, Mercier *et al.*, 2010), adopté ici, comporte un terme d'inertie supplémentaire. La longueur d'onde dominante n'est pas modifiée mais les taux de croissance obtenus sont plus faibles. Cette définition de la fonction de courant est la plus adaptée au suivi temporel d'une

perturbation.

D'après l'équation (2.3), la perturbation  $\delta\mathbf{L}$  du tenseur gradient de vitesse eulérienne  $\mathbf{L}$  s'écrit :

$$\delta\mathbf{L} = \left( \delta\dot{\mathbf{F}} - \mathbf{L}^{(b)}\delta\mathbf{F} \right) \mathbf{F}^{-1(b)} \quad (3.7)$$

La perturbation  $\delta\mathbf{D}$  du tenseur taux de déformation est quant à elle la partie symétrique de la perturbation  $\delta\mathbf{L}$  du tenseur gradient de vitesses :

$$\delta\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{L} + \delta\mathbf{L}^T) \quad (3.8)$$

Le matériau est supposé incompressible (et indilatable) :  $\text{Tr}(\mathbf{D}) = 0$ . Il en est donc de même pour  $\delta\mathbf{D}$  et  $\text{Tr}(\delta\mathbf{D}) = 0$ . Par ailleurs, puisqu'aucune grandeur ne dépend de la coordonnée  $X_2$  et  $\delta x_2 = 0$ , on a :

$$\delta D_{12} = \delta D_{22} = \delta D_{21} = \delta D_{23} = \delta D_{32} = 0 \quad (3.9)$$

On obtient donc :

$$\delta\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \delta D_{11} & 0 & \delta D_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta D_{13} & 0 & \delta D_{33} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

avec :  $\delta D_{11} = -\delta D_{33}$ .

À partir des équations (3.7) (en notant que  $\mathbf{L}^{(b)} = \mathbf{D}^{(b)}$  dont l'expression est donnée par l'équation 2.23) et (3.8), de l'écriture du gradient de transformation au sein de l'écoulement

de base (2.20) et au sein de l'écoulement perturbé (3.3), nous déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{13} = \frac{1}{2} \left[ \delta \dot{x}_{1,3}(1 + \varepsilon_{11}) + \delta \dot{x}_{3,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} - \dot{\varepsilon}_{11} \left( \delta x_{1,3} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \delta x_{3,1} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.11a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{11} = \delta \dot{x}_{1,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \delta x_{1,1} \end{array} \right. \quad (3.11b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{33} = \delta \dot{x}_{3,3}(1 + \varepsilon_{11}) + \dot{\varepsilon}_{11} \delta x_{3,3} \end{array} \right. \quad (3.11c)$$

Notons qu'en dérivant la relation de conservation du volume linéarisée (3.4) par rapport au temps, on vérifie bien l'égalité  $\delta D_{11} + \delta D_{33} = 0$ .

Les expressions (3.11a)-(3.11c) font intervenir des dérivées temporelles de la perturbation  $\delta \mathbf{x}$ . À partir des équations (3.6), on donne les relations entre les dérivées temporelles de  $\delta x_1$  et  $\delta x_3$  et la fonction de courant  $\delta \psi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{x}_1 = -\dot{\varepsilon}_{11} \delta \psi_{,3} - \delta \dot{\psi}_{,3}(1 + \varepsilon_{11}) \end{array} \right. \quad (3.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \dot{x}_3 = -\frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \delta \psi_{,1} + \delta \dot{\psi}_{,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \end{array} \right. \quad (3.12b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \ddot{x}_1 = -2\dot{\varepsilon}_{11} \delta \dot{\psi}_{,3} - (1 + \varepsilon_{11}) \delta \ddot{\psi}_{,3} \end{array} \right. \quad (3.12c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \ddot{x}_3 = \frac{2\dot{\varepsilon}_{11}^2}{(1 + \varepsilon_{11})^3} \delta \psi_{,1} - \frac{2\dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \delta \dot{\psi}_{,1} + \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \delta \ddot{\psi}_{,1} \end{array} \right. \quad (3.12d)$$

Il vient alors, à partir de la définition de la fonction de courant (3.6), l'expression du

tenseur  $\delta\mathbf{D}$  en fonction de  $\delta\psi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{11} = -\delta\dot{\psi}_{,31} \end{array} \right. \quad (3.13a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{33} = \delta\dot{\psi}_{,13} \end{array} \right. \quad (3.13b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{13} = \frac{1}{2} \left[ \delta\dot{\psi}_{,11} \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} - \delta\dot{\psi}_{,33} (1 + \varepsilon_{11})^2 \right] \end{array} \right. \quad (3.13c)$$

Ici également, on retrouve bien  $\delta D_{11} + \delta D_{33} = 0$ .

### 3.1.2 Contraintes

La linéarisation de l'équation (2.11) permet d'établir une relation, pour un matériau incompressible, entre la perturbation  $\delta\mathbf{T}$  du tenseur des contraintes nominales et la perturbation  $\delta\mathbf{\Sigma}$  du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\delta\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1(b)} \left( -\delta\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1(b)}\mathbf{\Sigma}^{(b)} + \delta\mathbf{\Sigma} \right) \quad (3.14)$$

L'expression de  $\mathbf{F}^{(b)}$  est donnée par la relation (2.20), celle de  $\delta\mathbf{F}$  par la relation (3.3) et celle de  $\mathbf{\Sigma}^{(b)}$  par les relations (2.24), (2.25) et (2.31). Les composantes de  $\delta\mathbf{T}$  sont donc :

$$\begin{aligned} \delta T_{13} &= P^I \delta x_{1,3} + \delta S_{13} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} & \delta T_{31} &= - \left( \frac{2Y^{(b)}}{\sqrt{3}} - P^I \right) \delta x_{3,1} + \delta S_{31} (1 + \varepsilon_{11}) \\ \delta T_{11} &= - \left( \frac{2Y^{(b)}}{\sqrt{3}} - P^I \right) \delta x_{1,1} \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} + \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} (\delta S_{11} - \delta P) \\ \delta T_{33} &= P^I (1 + \varepsilon_{11})^2 \delta x_{3,3} + (\delta S_{33} - \delta P) (1 + \varepsilon_{11}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec  $\delta P = -\frac{1}{3}\text{Tr}(\delta\mathbf{\Sigma})$  et  $P^I$  la pression inertielle au sein de l'écoulement de base.

La contrainte d'écoulement  $Y^{(b)}$  au sein de l'écoulement de base dépend uniquement du temps. L'expression de la pression inertielle  $P^I$  au sein de l'écoulement de base est donnée par la relation (2.25). Elle dépend du temps mais aussi de la coordonnée de l'épaisseur  $X_3$ . Par conséquent, la linéarisation de la relation fondamentale de la dynamique (2.13) donne, après projection selon les directions  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_3$ , en vertu de la relation de conservation du volume linéarisée (3.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \delta \ddot{x}_1 = P_{,3}^{(b)} \delta x_{3,1} + \delta S_{11,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} + \delta S_{13,3} (1 + \varepsilon_{11}) - \delta P_{,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \\ \rho \delta \ddot{x}_3 = P_{,3}^{(b)} \delta x_{3,3} (1 + \varepsilon_{11})^2 + \delta S_{31,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} + \delta S_{33,3} (1 + \varepsilon_{11}) - \delta P_{,3} (1 + \varepsilon_{11}) \end{array} \right. \quad (3.16a)$$

Ces deux relations font intervenir la perturbation  $\delta P$  de la pression. Dérivons par rapport à  $X_3$  l'équation (3.16a) multipliée par  $(1 + \varepsilon_{11})$ . Dérivons ensuite par rapport à  $X_1$  l'équation (3.16b) multipliée par  $-\frac{1}{1 + \varepsilon_{11}}$ . Les deux équations ainsi obtenues sommées membre à membre permettent d'éliminer  $\delta P$ . Il vient :

$$\rho \left[ (1 + \varepsilon_{11}) \delta \ddot{x}_{1,3} - \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \delta \ddot{x}_{3,1} \right] = (1 + \varepsilon_{11}) P_{,33}^{(b)} \delta x_{3,1} - \delta S_{33,13} + \delta S_{11,13} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \delta S_{13,11} + (1 + \varepsilon_{11})^2 \delta S_{13,33} \quad (3.17)$$

avec, d'après les égalités (2.25) et (2.27) :

$$P_{,33}^{(b)} = \frac{-2\rho \dot{\varepsilon}_{11}^2}{(1 + \varepsilon_{11})^4} \quad (3.18)$$

L'égalité (3.17) doit être exprimée en fonction de la fonction de courant  $\delta\psi$ . Les expressions des dérivées temporelles  $\delta \ddot{x}_1$  et  $\delta \ddot{x}_3$  ont déjà été données (voir 3.12c et 3.12d). Il faut désormais donner une expression du tenseur  $\delta \mathbf{S}$  en fonction de  $\delta\psi$ . Pour cela, il convient de linéariser la règle de normalité (2.8).  $\delta \mathbf{D}$  est exprimé en fonction de la perturbation

$\delta\lambda$  du multiplicateur plastique  $\lambda$  et de la perturbation  $\delta\mathbf{S}$  du déviateur  $\mathbf{S}$  du tenseur des contraintes de Cauchy  $\boldsymbol{\Sigma}$  :

$$\delta\mathbf{D} = \lambda^{(b)}\delta\mathbf{S} + \mathbf{S}^{(b)}\delta\lambda \quad (3.19)$$

Premièrement, examinons la forme de  $\delta\mathbf{S}$ . En vertu des relations (3.10), (3.19) et de l'expression (2.26) du tenseur  $\mathbf{S}^{(b)}$ , on a :

$$\delta D_{12} = \delta D_{22} = \delta D_{23} = 0 \Rightarrow \delta S_{12} = \delta S_{22} = \delta S_{23} = 0 \quad (3.20)$$

En conclusion, voici la forme matricielle du tenseur  $\delta\mathbf{S}$  :

$$\delta\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\delta S_{33} & 0 & \delta S_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta S_{13} & 0 & \delta S_{33} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Une expression de  $\delta\lambda$  est nécessaire pour déterminer les composantes non nulles de  $\delta\mathbf{S}$ . La linéarisation de l'expression du multiplicateur plastique  $\lambda$  donnée par l'expression (2.8) donne :

$$\delta\lambda = \frac{3}{2Y^{(b)}} \left( \delta\dot{\varepsilon}_p - \frac{\dot{\varepsilon}_p^{(b)}\delta Y}{Y^{(b)}} \right) \quad (3.22)$$

Les composantes du tenseur  $\delta\mathbf{S}$  sont donc exprimées en fonction de celles de  $\delta\mathbf{D}$ , en



utilisant l'expression du tenseur  $\mathbf{S}^{(b)}$  donnée par l'équation (2.32) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{13} = \frac{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{2Y^{(b)}} \delta S_{13} \end{array} \right. \quad (3.23a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{11} = \frac{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{2Y^{(b)}} \left[ \delta S_{11} + \frac{Y^{(b)}}{\sqrt{3}} \left( \frac{\delta \dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} - \frac{\delta Y}{Y^{(b)}} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.23b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta D_{33} = \frac{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{2Y^{(b)}} \left[ \delta S_{33} - \frac{Y^{(b)}}{\sqrt{3}} \left( \frac{\delta \dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} - \frac{\delta Y}{Y^{(b)}} \right) \right] \end{array} \right. \quad (3.23c)$$

Une expression de la perturbation  $\delta Y$  de la contrainte d'écoulement est nécessaire. D'après l'égalité (2.10), on écrit<sup>1</sup> :

$$\delta Y = \delta \varepsilon_p Y_{,\varepsilon_p}^{(b)} + \delta \dot{\varepsilon}_p Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} + \delta \theta Y_{,\theta}^{(b)} \quad (3.24)$$

avec  $\delta \varepsilon_p$  la perturbation de la déformation plastique,  $\delta \dot{\varepsilon}_p$  la perturbation de la vitesse de déformation plastique et  $\delta \theta$  la perturbation de la température.

De même, il faut établir une expression pour  $\delta \dot{\varepsilon}_p$  et  $\delta \varepsilon_p$ . Linéarisons l'équation (2.6). Il vient, en l'absence d'élasticité :

$$\dot{\varepsilon}_p^{(b)} \delta \dot{\varepsilon}_p = \frac{2}{3} \mathbf{D}^{(b)} : \delta \mathbf{D} \quad (3.25)$$

À partir de l'équation (3.25), de la forme matricielle de  $\delta \mathbf{D}$  donnée par l'expression (3.10) et des relations (2.23) et (2.33), il vient en vertu de l'égalité (3.13b) :

$$\delta \dot{\varepsilon}_p = -\frac{2}{\sqrt{3}} \delta D_{33} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \delta \dot{\psi}_{,13} \quad (3.26)$$

---

1. Nous adoptons l'écriture :  $Y_{,\alpha} = \frac{\partial Y}{\partial \alpha}$  avec ( $\alpha = \varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p$  ou  $\theta$ )

Par intégration de l'équation (3.26), on voit que :

$$\delta\varepsilon_p - \delta\varepsilon_p^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(\delta\psi_{,13} - \delta\psi_{,13}^0) \quad (3.27)$$

où  $\delta\varepsilon_p^0$  et  $\delta\psi_{,13}^0$  sont les valeurs à l'instant initial  $t_0$  des champs de perturbation  $\delta\varepsilon_p$  et  $\delta\psi_{,13}$ . Dans la suite, le cas  $\delta\varepsilon_p^0 = -2/\sqrt{3}\delta\psi_{,13}^0$  sera étudié. Le modèle aurait pu être développé sans cette hypothèse. Aucune relation n'est nécessaire pour ces quantités mais puisqu'ils sont représentatifs des perturbations initiales en déformation, ce choix semble le plus naturel. On obtient alors :

$$\delta\varepsilon_p = -\frac{2}{\sqrt{3}}\delta\psi_{,13} \quad (3.28)$$

Notons que la perturbation de la déformation plastique à l'instant initial est par conséquent conditionnée par le champ de perturbation des positions matérielles.

D'après les égalités (3.26) et (3.28), l'expression de  $\delta Y$  donnée par l'équation (3.24) s'écrit désormais :

$$\delta Y = -\frac{2}{\sqrt{3}}\delta\psi_{,13}Y_{,\varepsilon_p}^{(b)} - \frac{2}{\sqrt{3}}\delta\dot{\psi}_{,13}Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} + \delta\theta Y_{,\theta}^{(b)} \quad (3.29)$$

En combinant les équations (3.13), (3.20), (3.23), (3.26) et (3.29), les composantes de  $\delta\mathbf{S}$  sont alors exprimées en fonction de  $\delta\psi$  :

$$\delta S_{13} = \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \left[ \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \delta\dot{\psi}_{,11} - (1 + \varepsilon_{11})^2 \delta\dot{\psi}_{,33} \right] \quad (3.30a)$$

$$\delta S_{11} = -\frac{2}{3}\delta\dot{\psi}_{,13}Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} - \frac{2}{3}\delta\psi_{,13}Y_{,\varepsilon_p}^{(b)} + \delta\theta \frac{Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}} \quad (3.30b)$$

$$\delta S_{33} = \frac{2}{3}\delta\dot{\psi}_{,13}Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} + \frac{2}{3}\delta\psi_{,13}Y_{,\varepsilon_p}^{(b)} - \delta\theta \frac{Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}} \quad (3.30c)$$

$$\delta S_{12} = \delta S_{22} = \delta S_{23} = 0 \quad (3.30d)$$

En introduisant dans l'équation (3.17), les relations (3.6b), (3.12c) et (3.12d) entre les dérivées temporelles de  $\delta\mathbf{x}$  et  $\delta\psi$  et la relation (3.18) et les expressions (3.30a)-(3.30c) des

---

composantes de  $\delta\mathbf{S}$ , on obtient une équation différentielle du quatrième ordre en espace sur la fonction de courant  $\delta\psi$  :

$$\begin{aligned} & \rho \left[ -(1 + \varepsilon_{11})^2 \delta\ddot{\psi}_{,33} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \delta\ddot{\psi}_{,11} + 2 \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^3} \delta\dot{\psi}_{,11} - 2(1 + \varepsilon_{11})\dot{\varepsilon}_{11} \delta\dot{\psi}_{,33} \right] \\ &= - \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \left[ (1 + \varepsilon_{11})^4 \delta\dot{\psi}_{,3333} + \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^4} \delta\dot{\psi}_{,1111} \right] - \frac{2}{3} \left[ 2Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} - \frac{Y^{(b)}}{\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \right] \delta\dot{\psi}_{,1313} \\ & \quad - \frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3} \delta\psi_{,1313} + \frac{2Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}} \delta\theta_{,13} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Notons que le champ de perturbation  $\delta\theta$  de la température intervient dans cette équation : un couplage thermo-mécanique existe. Une seconde équation est donc nécessaire pour compléter le système. Le bilan thermique donné par la relation (2.14) est linéarisé en supposant  $C$  constant. On rappelle que dans le cadre de ce travail, on suppose que le coefficient de Taylor-Quinney est pris égal à 1, *i.e.*  $\beta^{TQ} = 1$ . On déduit, d'après l'égalité (3.24) :

$$\rho C \delta\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}_p^{(b)} \left( \delta\varepsilon_p Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} + \delta\dot{\varepsilon}_p Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} + \delta\theta Y_{,\theta}^{(b)} \right) + Y^{(b)} \delta\dot{\varepsilon}_p \quad (3.32)$$

Cette relation peut être réécrite en introduisant la fonction de courant  $\delta\psi$  grâce aux relations (3.26) et (3.28) :

$$\rho C \delta\dot{\theta} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \delta\psi_{,13} Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} + Y^{(b)} \right] \delta\dot{\psi}_{,13} + \delta\theta Y_{,\theta}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} \quad (3.33)$$

Le système formé des 2 équations (3.31) et (3.33) valables en tout point de la plaque permet d'étudier l'évolution des champs de perturbations. Il est du quatrième ordre en espace. Il doit donc être complété par les conditions aux limites définies par les équations (2.15). Celles-ci, exprimées en termes de perturbations, s'écrivent :

$$\delta v_1(\pm L_{01}, X_3, t) = 0 \quad \delta T_{13}(\pm L_{01}, X_3, t) = 0 \quad (3.34)$$

$$\delta T_{33}(X_1, \pm L_{03}, t) = 0 \quad \delta T_{31}(X_1, \pm L_{03}, t) = 0. \quad (3.35)$$

Les deux équations (3.35) permettent de donner 4 conditions aux limites pour les fonctions de courant  $\delta\psi$  et  $\delta\theta$ , nécessaires pour compléter le système. Les équations (3.34) seront utilisées ultérieurement.

**Condition de contrainte tangentielle nulle en  $X_3 = \pm L_{03}$**

Dans un premier temps, la condition aux limites de cisaillement nul s'écrit :

$$\delta T_{31} = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.36)$$

soit, d'après l'expression de  $\delta\mathbf{T}$  donnée par les relations (3.15) :

$$-\left(\frac{2Y^{(b)}}{\sqrt{3}} - P^I\right) \delta x_{3,1} + \delta S_{31} (1 + \varepsilon_{11}) = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.37)$$

La pression inertielle, donnée par la relation (2.25), est nulle en  $X_3 = \pm L_{03}$ . Il vient, d'après les relations (3.6b) et (3.30a) :

$$-\frac{2Y^{(b)}}{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \delta\psi_{,11} + \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \delta\dot{\psi}_{,11} - (1 + \varepsilon_{11})^3 \delta\dot{\psi}_{,33} \right] = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.38)$$

**Condition de contrainte normale nulle en  $X_3 = \pm L_{03}$**

La condition de contrainte normale nulle en  $X_3 = \pm L_{03}$  s'écrit :

$$\delta T_{33} = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.39)$$

soit, d'après l'expression de  $\delta\mathbf{T}$  donnée par les relations (3.15) et du fait que la pression inertielle, donnée par la relation (2.25), est nulle en  $X_3 = \pm L_{03}$  :

$$\delta S_{33} - \delta P = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.40)$$

Cette relation fait intervenir la perturbation  $\delta P$  de la pression qui n'apparaît pas dans le système d'équations. Elle est valable quel que soit  $X_1$  ( $-L_{01} \leq X_1 \leq L_{01}$ ). On a donc :

$$\delta S_{33,1} - \delta P_{,1} = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.41)$$

Injectons l'équation (3.41) dans le principe fondamental de la dynamique linéarisé et projeté selon la direction  $\vec{e}_1$  (égalité (3.16a)). Il vient, en vertu de l'équation (3.21) :

$$\rho \delta \ddot{x}_1 = P_{,3}^{(b)} \delta x_{3,1} - 2\delta S_{33,1} \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} + \delta S_{13,3} (1 + \varepsilon_{11}) \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.42)$$

En  $X_3 = \pm L_{03}$ , d'après les relations (2.25) et (2.27), qui donnent la dépendance de la pression  $P^{(b)}$  vis-à-vis de la coordonnée  $X_3$ , on a :

$$P_{,3}^{(b)} = \mp \frac{2\rho L_{03} \dot{\varepsilon}_{11}^2}{(1 + \varepsilon_{11})^4} \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.43)$$

On injecte cette expression dans l'équation (3.42). En vertu de l'expression des composantes de  $\delta \mathbf{x}$  et de ses dérivées temporelles (relations (3.6) et (3.12)) et de celles de  $\delta \mathbf{S}$  (relations (3.30)), il vient :

$$\begin{aligned} \rho \left[ -\delta \ddot{\psi}_{,3} (1 + \varepsilon_{11}) - 2\dot{\varepsilon}_{11} \delta \dot{\psi}_{,3} \right] &= \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \left[ \frac{1}{1 + \varepsilon_{11}} \delta \dot{\psi}_{,113} - (1 + \varepsilon_{11})^3 \delta \dot{\psi}_{,333} \right] - \frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3(1 + \varepsilon_{11})} \delta \dot{\psi}_{,113} \\ &\quad - \frac{4Y_{,\varepsilon_p}^{(b)}}{3(1 + \varepsilon_{11})} \delta \psi_{,113} + \delta \theta_{,1} \frac{2Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}(1 + \varepsilon_{11})} \\ &\quad \mp \frac{2\rho L_{03} \dot{\varepsilon}_{11}^2}{(1 + \varepsilon_{11})^5} \delta \psi_{,11} \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Le système dynamique formé par les équations (3.31) et (3.33) est complété par les conditions aux limites (3.38) et (3.44) en  $X_3 = \pm L_{03}$ . Il permet de faire un suivi temporel des grandeurs perturbées. Il est d'ordre 2 en temps pour  $\delta \psi$  et d'ordre 1 en temps pour  $\delta \theta$ . Pour le résoudre, nous devons imposer des conditions initiales : un champ initial de

perturbations des positions et des vitesses et un champ initial de perturbation de la température. Dans la réalité, ces perturbations peuvent provenir du processus de mise en forme (rugosité) et des hétérogénéités au sein du matériau. Les données initiales nécessaires sont  $\delta \mathbf{x}^0$ ,  $\delta \mathbf{v}^0 = \delta \dot{\mathbf{x}}^0$  et  $\delta \theta^0$ . La relation (3.6b) évaluée à  $t = 0$  donne :

$$\delta \psi_{,1}^0 = \delta x_3^0 \quad (3.45)$$

De même, en dérivant la relation (3.6b) en  $t = 0$ , il vient :

$$\delta \dot{\psi}_{,1}^0 = \delta \dot{x}_3^0 + \dot{\varepsilon}_{11} \delta x_3^0 \quad (3.46)$$

Le système développé jusqu'ici est relativement complexe. Il fait intervenir des dérivées croisées des coordonnées longitudinale  $X_1$  et transverse  $X_3$  ainsi que des dérivées temporelles. Par ailleurs, les coefficients du système dépendent de l'écoulement de base. Ils évoluent donc avec le temps. La résolution du système est donc, en l'état, difficile. Dans la section suivante, une méthode de décomposition de la perturbation est discutée.

## 3.2 Décomposition modale de la perturbation

Dans la littérature (citons Fressengeas et Molinari, 1994 ou Mercier et Molinari, 2003), la perturbation de la fonction de courant est cherchée sous la forme :

$$\delta \psi = \sin(\gamma_1 X_1) \hat{\psi}(X_3, t) \quad (3.47)$$

avec le nombre d'onde  $\gamma_1$  défini par :

$$\gamma_1 = 2p\pi/2L_{01} = p\pi/L_{01} \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.48)$$

L'entier  $p$  détermine le nombre initial de strictions le long de la direction longitudinale induites par la perturbation.

La définition (3.47) de la dépendance selon la direction longitudinale  $X_1$  de  $\delta\psi$  permet de vérifier les deux conditions aux limites (3.34). Ainsi, la planéité des faces latérales, soumises à la vitesse de traction  $V_{01}$ , est assurée.

Pour satisfaire les équations (3.31) et (3.33) en tout point de la plaque, compte tenu de l'expression (3.47) de  $\delta\psi$ , on écrit nécessairement la perturbation  $\delta\theta$  de la température sous la forme :

$$\delta\theta = \cos(\gamma_1 X_1) \hat{\theta}(X_3, t) \quad (3.49)$$

Dans ce travail, seules les perturbations liées au développement de la striction sont étudiées. Aussi, la géométrie de la plaque reste symétrique par rapport au plan médian  $X_3 = 0$  durant le processus de déformation. Les symétries dans la plaque sont illustrées sur la figure 3.1 pour le cas  $p = 2$ . Pour ce cas, on voit que  $\delta x_1$  doit être une fonction impaire de  $X_1$  et  $\delta x_3$  une fonction paire de  $X_1$ . Par conséquent, pour le mode  $\gamma_1$ , cela conduit à :

$$\delta x_1 = \sin(\gamma_1 X_1) \hat{x}_1(X_3, t) \quad \delta x_3 = \cos(\gamma_1 X_1) \hat{x}_3(X_3, t) \quad (3.50)$$

$\hat{x}_3$  (resp.  $\hat{x}_1$ ) est une fonction impaire (resp. paire) de la coordonnée de l'épaisseur  $X_3$ . Le formalisme développé dans la suite reste néanmoins valable pour une perturbation quelconque de l'épaisseur.

**Remarque :** Dans ce travail, nous étudions une perturbation monomodale. Néanmoins, dans le cadre de l'expansion d'un anneau, par exemple, la perturbation initiale est aléatoire. Dans ce cas, on décompose la perturbation  $\delta G$  en une somme de perturbations monomodales, avec une période  $2L_{01}$  :

$$\delta G = \sum_{p=0}^{\infty} \delta G_p = \sum_{p=0}^{\infty} \cos(\gamma_{1p} X_1 + \phi_p) \hat{G}_p(X_3, t) \quad (3.51)$$

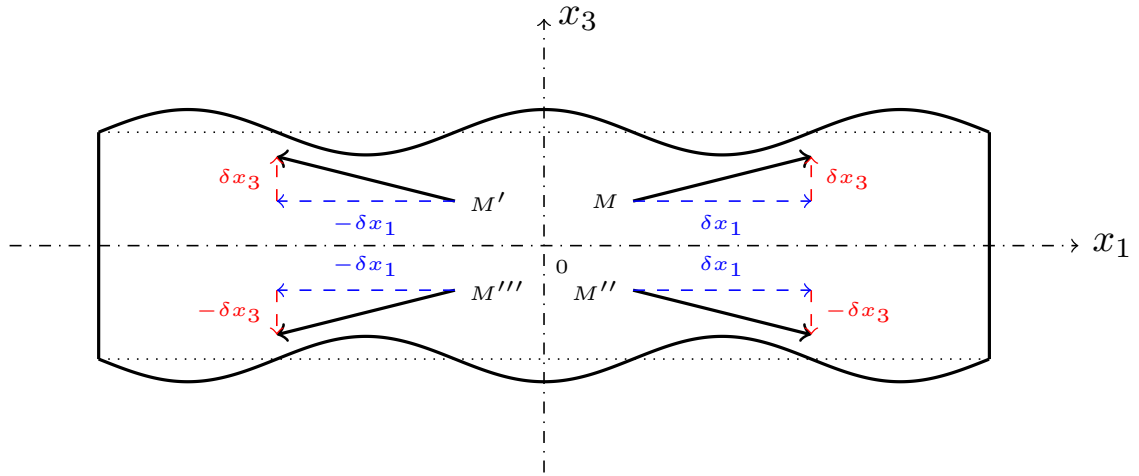


FIGURE 3.1 – Représentation schématique de la plaque à l'instant  $t$  pour une perturbation de mode longitudinal  $p = 2$ . La perturbation des positions  $\delta \mathbf{x}$  et ses composantes  $\delta x_1$  et  $\delta x_3$  sont représentées en différents points de la plaque. Le point de référence est le point  $M(X_1, X_3)$ .  $M'$  (resp.  $M''$ ) est le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe  $x_3$  (resp.  $x_1$ ).  $M'''$  est le symétrique de  $M$  par rapport à l'origine  $O$ .

Cette décomposition est retrouvée dans la littérature (voir El Maï, 2014) pour l'étude de l'expansion d'anneaux métalliques assimilés à un barreau en traction. En pratique, la série de Fourier est tronquée à l'ordre  $N$ ,  $N$  étant choisi suffisamment grand pour assurer une bonne approximation de  $\delta G$ . La variable  $\phi_p$  est une constante propre à chaque mode longitudinal et représente le déphasage de la perturbation selon la direction  $x_1$ . Pour étudier une perturbation dans l'écoulement, on s'intéresse donc séparément aux perturbations monomodales de sa décomposition. Il n'y pas de couplage entre modes.

Dans la suite, on exprime le système d'équations régissant l'évolution d'une perturbation  $\delta \mathbf{x}$ , monomodale de nombre d'onde  $\gamma_1$ . Nous réécrivons le système des équations (3.31) et (3.33) avec cette fois pour inconnues  $\hat{\psi}(X_3, t)$  et  $\hat{\theta}(X_3, t)$  définies par les équations (3.47) et (3.49).



L'équation (3.31) s'écrit désormais après simplification par  $\sin(\gamma_1 X_1)$  :

$$\begin{aligned}
 & -\rho(1 + \varepsilon_{11})^2 \ddot{\hat{\psi}}_{,33} + \rho \frac{\gamma_1^2}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \ddot{\hat{\psi}} - 2\rho \frac{\gamma_1^2 \dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^3} \dot{\hat{\psi}} - 2\rho(1 + \varepsilon_{11}) \dot{\varepsilon}_{11} \dot{\hat{\psi}}_{,33} \\
 = & -\frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} (1 + \varepsilon_{11})^4 \dot{\hat{\psi}}_{,3333} - \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \frac{\gamma_1^4}{(1 + \varepsilon_{11})^4} \dot{\hat{\psi}} + \frac{2\gamma_1^2}{3} \left[ 2Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} - \frac{Y^{(b)}}{\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \right] \dot{\hat{\psi}}_{,33} \\
 & + \frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3} \gamma_1^2 \hat{\psi}_{,33} - \frac{2Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}} \gamma_1 \hat{\theta}_{,3}
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

De même, l'équation (3.33) s'écrit, après simplification par  $\cos(\gamma_1 X_1)$  :

$$\rho C \dot{\hat{\theta}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_1 Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} \hat{\psi}_{,3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_1 \left[ Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} + Y^{(b)} \right] \dot{\hat{\psi}}_{,3} + Y_{,\theta}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} \hat{\theta} \tag{3.53}$$

Posons les fonctions du temps suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= -\rho(1 + \varepsilon_{11})^2 & a_2(t) &= \rho \frac{\gamma_1^2}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \\
 a_3(t) &= \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} (1 + \varepsilon_{11})^4 & a_4(t) &= -2\rho(1 + \varepsilon_{11}) \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{2\gamma_1^2}{3} \left[ 2Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} - \frac{Y^{(b)}}{\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \right] \\
 a_5(t) &= -2\rho \frac{\gamma_1^2 \dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^3} + \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \frac{\gamma_1^4}{(1 + \varepsilon_{11})^4} & a_6(t) &= -\frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3} \gamma_1^2 \\
 a_7(t) &= \frac{2Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}} \gamma_1 & b_1(t) &= -\frac{Y_{,\theta}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{\rho C} \\
 b_2(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_1}{\rho C} \left[ Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} + Y^{(b)} \right] & b_3(t) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_1}{\rho C} Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)} \dot{\varepsilon}_p^{(b)}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Le système formé par les équations (3.52) et (3.53) peut s'écrire de manière plus compacte en utilisant les coefficients (3.54) (on notera indifféremment, pour des raisons de clarté,  $a_j$  et  $b_j$  au lieu de  $a_j(t)$  et  $b_j(t)$ ) :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & a_1 \ddot{\hat{\psi}}_{,33} + a_2 \ddot{\hat{\psi}} + a_3 \dot{\hat{\psi}}_{,3333} + a_4 \dot{\hat{\psi}}_{,33} + a_5 \dot{\hat{\psi}} + a_6 \hat{\psi}_{,33} + a_7 \hat{\theta}_{,3} = 0 & (3.55a) \\
 & \dot{\hat{\theta}} + b_1 \hat{\theta} + b_2 \dot{\hat{\psi}}_{,3} + b_3 \hat{\psi}_{,3} = 0 & (3.55b)
 \end{aligned} \right.$$

Ce système doit être complété par la réécriture des conditions limites (3.38) et (3.44).

En combinant l'équation (3.38) de contrainte tangentielle nulle en  $X_3 = \pm L_{03}$  à l'expression de  $\delta\psi$  (relation (3.47)), on obtient, après simplification par  $\sin(\gamma_1 X_1)$  :

$$\frac{2Y^{(b)}}{\sqrt{3}} \frac{\gamma_1^2}{1 + \varepsilon_{11}} \hat{\psi} - \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \left[ \frac{\gamma_1^2}{1 + \varepsilon_{11}} \dot{\hat{\psi}} + (1 + \varepsilon_{11})^3 \dot{\hat{\psi}}_{,33} \right] = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.56)$$

De même, on combine l'expression de  $\delta\psi$  (relation (3.47)) et celle de  $\delta\theta$  (relation (3.49)) avec l'équation (3.44) de contrainte normale nulle en  $X_3 = \pm L_{03}$ . Il vient, après simplification par  $\sin(\gamma_1 X_1)$  :

$$\begin{aligned} -\rho \left[ \ddot{\hat{\psi}}_{,3}(1 + \varepsilon_{11}) + 2\dot{\varepsilon}_{11} \dot{\hat{\psi}}_{,3} \right] &= \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \left[ -\frac{\gamma_1^2}{1 + \varepsilon_{11}} \dot{\hat{\psi}}_{,3} - (1 + \varepsilon_{11})^3 \dot{\hat{\psi}}_{,333} \right] \\ &+ \frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3(1 + \varepsilon_{11})} \gamma_1^2 \dot{\hat{\psi}}_{,3} + \frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3(1 + \varepsilon_{11})} \gamma_1^2 \hat{\psi}_{,3} \\ &- \frac{2Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}(1 + \varepsilon_{11})} \gamma_1 \hat{\theta} \pm \frac{2\rho L_{03} \dot{\varepsilon}_{11}^2}{(1 + \varepsilon_{11})^5} \gamma_1^2 \hat{\psi} \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Posons les fonctions du temps suivantes :

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{\gamma_1^2}{(1 + \varepsilon_{11})^4} & c_2(t) &= 2\sqrt{3} \dot{\varepsilon}_p^{(b)} \frac{\gamma_1}{(1 + \varepsilon_{11})^4} \\ n_1(t) &= -\rho(1 + \varepsilon_{11}) & n_2(t) &= \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} (1 + \varepsilon_{11})^3 \\ n_3(t) &= -2\rho \dot{\varepsilon}_{11} + \frac{Y^{(b)}}{3\dot{\varepsilon}_p^{(b)}(1 + \varepsilon_{11})} \gamma_1^2 - \frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3(1 + \varepsilon_{11})} \gamma_1^2 & n_4(t) &= -\frac{4Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}}{3(1 + \varepsilon_{11})} \gamma_1^2 \\ n_5(t) &= \zeta \frac{2\rho L_{03} \dot{\varepsilon}_{11}^2}{(1 + \varepsilon_{11})^5} \gamma_1^2 & n_6(t) &= \frac{2Y_{,\theta}^{(b)}}{\sqrt{3}(1 + \varepsilon_{11})} \gamma_1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec  $\zeta = -1$  en  $X_3 = L_{03}$  et  $\zeta = 1$  en  $X_3 = -L_{03}$

Avec ces notations, l'équation de contrainte tangentielle nulle à la surface libre (3.56)

s'écrit alors :

$$\boxed{\dot{\hat{\psi}}_{,33} + c_1 \dot{\hat{\psi}} - \gamma_1 c_2 \hat{\psi} = 0} \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.59)$$

L'équation de contrainte normale nulle à la surface libre (3.57) s'écrit quant à elle :

$$\boxed{n_1 \ddot{\hat{\psi}}_{,3} + n_2 \dot{\hat{\psi}}_{,333} + n_3 \dot{\hat{\psi}}_{,3} + n_4 \hat{\psi}_{,3} + n_5 \hat{\psi} + n_6 \hat{\theta} = 0} \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (3.60)$$

Le système dynamique formé par les équations (3.55a) et (3.55b) est complété par les conditions aux limites (3.59) et (3.60). Il permet d'étudier l'évolution temporelle dans la direction transversale d'une perturbation monomodale de nombre d'onde  $\gamma_1$  (son évolution selon la coordonnée longitudinale  $X_1$  est connue). Ce nouveau système est plus simple que celui obtenu dans la section 3.1 mais demeure compliqué à résoudre. Il reste à coefficients non constants, les coefficients dépendant de l'écoulement de base et du mode longitudinal considéré.

À ce stade, les fonctions  $\hat{\psi}(X_3, t)$  et  $\hat{\theta}(X_3, t)$  n'ont pas d'expression mathématique spécifique. Une intégration numérique est nécessaire pour résoudre ce système. Néanmoins, à partir de ce système, il est possible de retrouver les résultats des approches classiques. Dans l'Annexe A, nous montrons qu'en utilisant une théorie des coefficients figés, les résultats de Mercier *et al.* (2010) sont retrouvés. Dans la section 3.3, nous discutons les limites des approches actuelles qui motivent l'extension proposée.

### 3.3 Modèle étendu d'Analyse Linéaire de Stabilité (XLSA)

Dans l'Analyse Linéaire de Stabilité classique (appelée *CLSA* dans la suite), la perturbation dans l'épaisseur  $\hat{G}$  du champ  $G$  est recherchée sous la forme<sup>2</sup> :

$$\hat{G} = \exp(\eta t) \bar{G}(X_3) \quad (3.61)$$

L'étude d'une perturbation par l'analyse des taux de croissance exponentielle suppose implicitement que le temps caractéristique  $\tau_p = 1/\eta$  d'évolution de la perturbation est bien plus faible que le temps caractéristique  $\tau_b = 1/\dot{\varepsilon}_{11}$  d'évolution de l'écoulement de base. En effet, pour tout champ  $G$  de l'écoulement, on a (voir aussi Jouve (2014) pour la démonstration) :

$$G^2 = G^{(b)} (G^{(b)} + 2\delta G) \Rightarrow \delta(G^2) = 2G^{(b)}\delta G \quad (3.62)$$

D'après l'équation (3.61), on a aussi  $\delta\dot{G} = \eta\delta G$ . On doit donc avoir simultanément :

$$\delta\left(\frac{DG^2}{Dt}\right) = 2\delta G\dot{G}^{(b)} + 2\delta\dot{G}G^{(b)} \quad (3.63)$$

et

$$\delta\left(\frac{DG^2}{Dt}\right) = \eta\delta(G^2) \quad (3.64)$$

Pour que les deux équations (3.63) et (3.64) soient compatibles, on doit supposer :

$$\dot{G}^{(b)} \ll \eta G^{(b)} \quad (3.65)$$

En particulier pour le champ  $G = e^{\varepsilon_p}$ , il vient  $\eta/\dot{\varepsilon}_p \gg 1$ . Cette hypothèse de séparation

---

2. L'étude de l'instabilité est basée sur la recherche de taux de croissance à partie réelle positive. Dans la plupart des cas, il est observé que les solutions les plus instables sont les solutions réelles positives.

des échelles de temps conduit à supposer figés les coefficients du système des équations (3.55a) et (3.55b).

Dans certains cas que nous considérerons au chapitre 4, l'hypothèse de séparation des échelles est valide, voir figure 4.2a) page 81. En revanche, pour des fortes vitesses de déformation, voir figure 4.2b), page 81 ou encore pour les premiers instants de l'expérience d'Olive *et al.* (1979) sur la figure 1.15, page 36, l'échelle de temps d'évolution de l'écoulement de base est de l'ordre de celle issue de la croissance de la perturbation. Les hypothèses d'application du modèle *CLSA* ne sont donc pas vérifiées.

Cette limitation conduit à considérer en lieu et place de l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique à coefficients figés une approche basée sur **le suivi spatio-temporel** de la perturbation. Le système des équations (3.55) avec les conditions aux limites (3.59) et (3.60) est intégré numériquement sans hypothèses *a priori* sur l'évolution temporelle de la perturbation. Ceci fait l'objet de cette section 3.3.

Les coefficients de ce système sont non constants : ils dépendent de l'écoulement de base (donc du temps) et de la longueur d'onde longitudinale de la perturbation considérée. Une solution ne peut donc être déterminée de manière exacte. Une résolution numérique, fondée sur une méthode spectrale, est proposée. Dans cette section, nous exposons une stratégie de résolution : les dépendances en  $X_3$  des inconnues  $\hat{\psi}$  et  $\hat{\theta}$  sont développées en une série basée sur les polynômes de Chebyshev. La dépendance en temps est quant à elle intégrée en utilisant un schéma aux différences finies. Notons que dans l'étude de Mercier et Molinari (2004), consacrée à l'analyse du développement de striction multiples durant l'expansion dynamique de cylindres, une méthode de type Galerkin avait été utilisée. La dépendance en  $X_3$  avait été développée sur la base canonique des polynômes ( $h_n(X_3) = X_3^n$ ).

La méthode Tau, utilisée dans notre travail, est une méthode spectrale proposée par Lanczos (1938) ; elle permet de traiter les dépendances spatiales des inconnues  $\hat{\psi}$  et  $\hat{\theta}$  dans le système (3.55) et les conditions aux limites en  $X_3 = \pm L_{03}$  (équations 3.59 et 3.60).

On introduit la coordonnée transversale adimensionnelle  $\tilde{X}_3$  :

$$\tilde{X}_3 = X_3/L_{03} \quad (3.66)$$

Les nouvelles inconnues  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\theta}$  sont alors introduites :

$$\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t) = \hat{\psi}(X_3, t), \quad \tilde{\theta}(\tilde{X}_3, t) = \hat{\theta}(X_3, t). \quad (3.67)$$

Les deux fonctions  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\theta}$  sont donc définies sur le segment  $[-1, 1]$ . On définit enfin :

$$\tilde{\psi}_{,3} = \partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{X}_3 = L_{03}\hat{\psi}_{,3} \quad (3.68)$$

Notons que, dans la suite, la notation  $(\cdot)_{,3}$  sera différente selon la fonction à laquelle elle est associée ; pour une fonction  $\hat{G}(X_3, t)$  (resp.  $\tilde{G}(\tilde{X}_3, t)$ ),  $\hat{G}_{,3}$  (resp.  $\tilde{G}_{,3}$ ) correspond à la dérivée partielle de  $\hat{G}$  (resp.  $\tilde{G}$ ) par rapport à  $X_3$  (resp.  $\tilde{X}_3$ ).

En utilisant les nouvelles notations (3.66), (3.67) et (3.68), on définit à partir du système (3.55) un nouveau système d'équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\theta}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{L_{03}^2} \ddot{\psi}_{,33} + a_2 \ddot{\psi} + \frac{a_3}{L_{03}^4} \dot{\psi}_{,3333} + \frac{a_4}{L_{03}^2} \dot{\psi}_{,33} + a_5 \dot{\psi} + \frac{a_6}{L_{03}^2} \tilde{\psi}_{,33} + \frac{a_7}{L_{03}} \tilde{\theta}_{,3} = 0 \\ \dot{\tilde{\theta}} + b_1 \tilde{\theta} + \frac{b_2}{L_{03}} \dot{\tilde{\psi}}_{,3} + \frac{b_3}{L_{03}} \tilde{\psi}_{,3} = 0 \end{array} \right. \quad (3.69a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\tilde{\theta}} + b_1 \tilde{\theta} + \frac{b_2}{L_{03}} \dot{\tilde{\psi}}_{,3} + \frac{b_3}{L_{03}} \tilde{\psi}_{,3} = 0 \end{array} \right. \quad (3.69b)$$

Les conditions aux limites (3.59) et (3.60) deviennent, en  $\tilde{X}_3 = \pm 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L_{03}^2} \dot{\tilde{\psi}}_{,33} + c_1 \dot{\tilde{\psi}} - \gamma_1 c_2 \tilde{\psi} = 0 \\ \frac{n_1}{L_{03}} \ddot{\tilde{\psi}}_{,3} + \frac{n_2}{L_{03}^3} \dot{\tilde{\psi}}_{,333} + \frac{n_3}{L_{03}} \dot{\tilde{\psi}}_{,3} + \frac{n_4}{L_{03}} \tilde{\psi}_{,3} + n_5 \tilde{\psi} + n_6 \tilde{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (3.70a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L_{03}^2} \dot{\tilde{\psi}}_{,33} + c_1 \dot{\tilde{\psi}} - \gamma_1 c_2 \tilde{\psi} = 0 \\ \frac{n_1}{L_{03}} \ddot{\tilde{\psi}}_{,3} + \frac{n_2}{L_{03}^3} \dot{\tilde{\psi}}_{,333} + \frac{n_3}{L_{03}} \dot{\tilde{\psi}}_{,3} + \frac{n_4}{L_{03}} \tilde{\psi}_{,3} + n_5 \tilde{\psi} + n_6 \tilde{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (3.70b)$$

Les inconnues  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\theta}$  sont interpolées sur la base des polynômes de Chebyshev pour  $\tilde{X}_3$  dans  $[-1, 1]$  :

$$\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(t) T_i(\tilde{X}_3) \quad (3.71a)$$

$$\tilde{\theta}(\tilde{X}_3, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) T_i(\tilde{X}_3) \quad (3.71b)$$

Le vecteur  $\mathbf{q} = (q_0 \ q_1 \ \dots)$  (resp.  $\mathbf{p} = (p_0 \ p_1 \ \dots)$ ) est la représentation spectrale de  $\tilde{\psi}$  (resp.  $\tilde{\theta}$ ).  $T_n(\tilde{X}_3)$  désigne le polynôme de Chebyshev du premier type, de degré  $n$  :

$$T_n(\tilde{X}_3) = \cos\left(n \arccos(\tilde{X}_3)\right) \text{ avec } n \geq 0. \quad (3.72)$$

Le produit scalaire associé à cette base est défini par :

$$\langle T_m, T_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_m T_n}{\sqrt{1-X^2}} dX \quad m, n \geq 0. \quad (3.73)$$

Les polynômes  $T_n$  forment une base orthogonale pour les fonctions réelles. En effet :

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \pi \quad \langle T_n, T_n \rangle = \pi/2 \ (n > 0) \quad \langle T_m, T_n \rangle = 0 \ (m \neq n) \quad (3.74)$$

Le lecteur trouvera des compléments d'informations dans la littérature (Canuto *et al.* (2012) par exemple). Cependant, quelques résultats et propriétés importants sont décrits dans l'Annexe B.

La décomposition spectrale (3.71) est introduite dans l'équation mécanique (3.69a). On obtient une fonction, notée  $M$ , définie par :

$$M(\tilde{X}_3, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{a_1}{L_{03}^2} \frac{d^2 q_i^{(2)}}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \frac{a_3}{L_{03}^4} \frac{dq_i^{(4)}}{dt} + \frac{a_4}{L_{03}^2} \frac{dq_i^{(2)}}{dt} + a_5 \frac{dq_i}{dt} + \frac{a_6}{L_{03}^2} q_i^{(2)} + \frac{a_7}{L_{03}} p_i^{(1)} \right) T_i(\tilde{X}_3) \quad (3.75)$$

où  $\mathbf{q}^{(m)}$  désigne la représentation spectrale de  $\frac{\partial^m \tilde{\psi}}{\partial \tilde{X}_3^m}$ , dérivée partielle d'ordre  $m$  de  $\tilde{\psi}$ . Dans l'Annexe B, on montre que  $\mathbf{q}^{(m)}$  s'exprime uniquement en fonction de  $\mathbf{q}$  à travers la matrice de dérivation spectrale, notée  $\mathbf{D}_S$ .

De la même manière, la décomposition spectrale (3.71) introduite dans l'équation d'évolution de la température (3.69b) conduit à la définition d'une fonction  $H$  :

$$H(\tilde{X}_3, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{dp_i}{dt} + b_1 p_i + \frac{b_2}{L_{03}} \frac{dq_i^{(1)}}{dt} + \frac{b_3}{L_{03}} q_i^{(1)} \right) T_i(\tilde{X}_3) \quad (3.76)$$

Pour le moment, les inconnues  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\theta}$  sont donc développées en séries avec une infinité de termes dans les équations (3.71). Les fonctions  $M$  et  $H$  sont donc, en toute rigueur, identiquement nulles ; on ne peut pas encore parler de résidu. Il est bien évident que pour la résolution numérique, un ordre de troncature doit être défini.

On définit  $\tilde{\psi}_N$  (resp.  $\tilde{\theta}_{N-1}$ ), le développement tronqué à l'ordre  $N$  (resp  $N-1$ ) de  $\tilde{\psi}$  (resp.  $\tilde{\theta}$ ). Notons que les deux fonctions ne sont pas tronquées au même ordre. En effet, cette différence d'ordre est nécessaire pour maintenir la cohérence dans l'équation thermique (3.69b). En effet, on observe que dans cette équation, la perturbation de la température  $y$  est présente ainsi que la dérivée à l'ordre 1 de la perturbation de la fonction de courant. Les fonctions  $M$  et  $H$  sont elles aussi tronquées et ne sont donc plus identiquement nulles. Elles définissent le résidu de l'interpolation.



La méthode Tau consiste en la minimisation des résidus de l'interpolation par la détermination d'une relation entre les coefficients spectraux  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$ . Cette relation est issue de la condition d'orthogonalité des résidus  $M$  et  $H$  avec les polynômes de Chebyshev. Dans le cas du résidu  $M$ , cette condition conduit à un système de  $N - 3$  équations. En effet, l'équation (3.69a) contient une dérivée spatiale d'ordre 4. Seuls les produits scalaires avec les polynômes de degré inférieur ou égal à  $N - 4$  seront retenus puisque  $\frac{\partial^4 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{X}_3^4}$  est lui-même un polynôme de degré  $N - 4$ . On obtient ainsi :

$$\forall i \in [0, N - 4], \quad \frac{a_1}{L_{03}^2} \frac{d^2 q_i^{(2)}}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 q_i}{dt^2} + \frac{a_3}{L_{03}^4} \frac{dq_i^{(4)}}{dt} + \frac{a_4}{L_{03}^2} \frac{dq_i^{(2)}}{dt} + a_5 \frac{dq_i}{dt} + \frac{a_6}{L_{03}^2} q_i^{(2)} + \frac{a_7}{L_{03}} p_i^{(1)} = 0 \quad (3.77)$$

Notons que ces  $N - 3$  équations sont des équations différentielles en temps du second ordre dont les inconnues sont les coefficients spectraux de la fonction de courant  $\tilde{\psi}$  et de la température  $\tilde{\theta}$ . De ce fait, un fort couplage thermo-mécanique existe.

La condition d'orthogonalité appliquée au résidu  $H$  conduit à un système de  $N$  équations :

$$\forall i \in [0, N - 1], \quad \frac{dp_i}{dt} + b_1 p_i + \frac{b_2}{L_{03}} \frac{dq_i^{(1)}}{dt} + \frac{b_3}{L_{03}} q_i^{(1)} = 0 \quad (3.78)$$

Quatre équations supplémentaires sont nécessaires et obtenues à partir des conditions aux limites (3.70) ( $\delta T_{31} = 0$  et  $\delta T_{33} = 0$  en  $\tilde{X}_3 = \pm 1$ ). On utilise l'évaluation des polynômes de Chebyshev en  $\tilde{X}_3 = \pm 1$  :  $T_n(1) = 1$  et  $T_n(-1) = (-1)^n$ . Pour des raisons de concision, on impose que le  $N^{\text{ième}}$  coefficient spectral de la température soit nul :  $p_N = 0$ . Ainsi, il

vient :

$$\text{en } \tilde{X}_3 = +1 : \sum_{i=0}^N \left( \frac{1}{L_{03}^2} \frac{dq_i^{(2)}}{dt} + c_1 \frac{dq_i}{dt} - \gamma_1 c_2 q_i \right) = 0 \quad (3.79a)$$

$$\text{en } \tilde{X}_3 = -1 : \sum_{i=0}^N (-1)^i \left( \frac{1}{L_{03}^2} \frac{dq_i^{(2)}}{dt} + c_1 \frac{dq_i}{dt} - \gamma_1 c_2 q_i \right) = 0 \quad (3.79b)$$

$$\text{en } \tilde{X}_3 = +1 : \sum_{i=0}^N \left( \frac{n_1}{L_{03}} \frac{d^2 q_i^{(1)}}{dt^2} + \frac{n_2}{L_{03}^3} \frac{dq_i^{(3)}}{dt} + \frac{n_3}{L_{03}} \frac{dq_i^{(1)}}{dt} + \frac{n_4}{L_{03}} q_i^{(1)} + n_5 q_i + n_6 p_i \right) = 0 \quad (3.79c)$$

$$\text{en } \tilde{X}_3 = -1 : \sum_{i=0}^N (-1)^i \left( \frac{n_1}{L_{03}} \frac{d^2 q_i^{(1)}}{dt^2} + \frac{n_2}{L_{03}^3} \frac{dq_i^{(3)}}{dt} + \frac{n_3}{L_{03}} \frac{dq_i^{(1)}}{dt} + \frac{n_4}{L_{03}} q_i^{(1)} + n_5 q_i + n_6 p_i \right) = 0 \quad (3.79d)$$

Pour les configurations étudiées dans ce travail, une valeur de  $N = 20$  a été retenue. Ce nombre de polynômes est suffisant pour que les résultats ne soient pas dépendants de l'ordre de troncature. Cela permet aussi d'avoir des temps de calculs raisonnables.

### Discretisation temporelle

Les équations (3.77), (3.78) et (3.79) forment un système de  $2N + 1$  équations différentielles ordinaires en temps dont les solutions sont les coefficients spectraux  $q_i$  et  $p_i$ . Ces coefficients sont fonctions du temps. Le système est d'ordre 2 en temps sur  $\mathbf{q}$  et d'ordre 1 sur  $\mathbf{p}$ . Des conditions initiales pour  $\mathbf{q}(t = 0)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t = 0)$  et  $\mathbf{p}(t = 0)$  sont nécessaires.

On définit  $t^n = ndt$  et pour le vecteur  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}^n = \mathbf{q}(t = t^n)$ . Les équations sont discrétisées

en approchant, à l'ordre 1, les dérivées temporelles par un schéma aux différences finies :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}(t^n) = \frac{\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-1}}{dt} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}(t^n) = \frac{\mathbf{q}^n - 2\mathbf{q}^{n-1} + \mathbf{q}^{n-2}}{dt^2} \end{array} \right. \quad (3.80a)$$

$$\quad (3.80b)$$

Une discrétisation identique est adoptée pour le vecteur  $\mathbf{p}$ . Le pas de temps  $dt$  sera fixé.

De manière classique, l'intégration temporelle de problèmes avec un couplage thermo-mécanique est résolue avec un algorithme de grille décalée (*staggered grid*) : les fonctions  $q_i$  de la représentation spectrale de  $\tilde{\psi}$  sont évaluées au demi-pas de temps  $t^{n+1/2}$  tandis que les fonctions  $p_i$  de la représentation spectrale de  $\tilde{\theta}$  sont évaluées au pas de temps entier  $t^n$ . Pour un pas de temps donné, on divise la résolution en deux étapes :

1. à partir de l'équation mécanique (3.77) et des conditions aux limites (3.79),  $\mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}}$  est calculé en fonction de  $\mathbf{q}^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $\mathbf{q}^{n-\frac{3}{2}}$  et  $\mathbf{p}^n$
2. à partir de l'équation thermique (3.78),  $\mathbf{p}^{n+1}$  est calculé en fonction de  $\mathbf{p}^n$ ,  $\mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{q}^{n-\frac{1}{2}}$

On peut alors écrire les relations issues de l'équation mécanique (3.77) et les conditions aux limites (3.79) sous forme matricielle, en faisant intervenir la matrice de dérivation spectrale  $\mathbf{D}_S$  définie en Annexe B, voir équation (B.16) :

$$\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}} \mathbf{q}^{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{U}^{n-\frac{3}{2}} \mathbf{q}^{n-\frac{3}{2}} + \mathbf{V}^n \mathbf{p}^n \quad (3.81)$$

Comme évoqué précédemment, l'ordre de troncature pour la perturbation de la fonction de courant  $\tilde{\psi}$  est  $N$  alors que celui de la perturbation de la température  $\tilde{\theta}$  est  $N - 1$ . Aussi, pour des raisons de représentation, on impose à la composante d'ordre  $N$  de la température  $p_N$  d'être nulle. Les matrices de l'équation (3.81) exprimées dans la suite sont donc toutes

carrées, de taille  $(N + 1)^2$ . Les coefficients de ces matrices dépendent de l'écoulement de base, du nombre d'onde  $\gamma_1$  du mode longitudinal considéré et de la matrice de dérivation spectrale  $\mathbf{D}_S$ . Les coefficients de l'écoulement de base sont évalués à l'instant  $t^{n+1/2}$ .

$$U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a_1}{L_{03}^2 dt^2} D_{S_{ij}}^2 + \frac{a_2}{dt^2} \delta_{ij} + \frac{a_3}{L_{03}^4 dt} D_{S_{ij}}^4 + \frac{a_4}{L_{03}^2 dt} D_{S_{ij}}^2 + \frac{a_5}{dt} \delta_{ij} + \frac{a_6}{L_{03}^2} D_{S_{ij}}^2 & i \leq N - 4 \\ \frac{1}{L_{03}^2 dt} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}}^2 + \frac{c_1}{dt} - \gamma_1 c_2 & i = N - 3 \\ \frac{1}{L_{03}^2 dt} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}}^2 + (-1)^j \left( \frac{c_1}{dt} - \gamma_1 c_2 \right) & i = N - 2 \\ \frac{n_1}{L_{03} dt^2} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}} + \frac{n_2}{L_{03}^3 dt} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}}^3 + \frac{n_3}{L_{03} dt} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}} + \frac{n_4}{L_{03}} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}} + n_5 & i = N - 1 \\ \frac{n_1}{L_{03} dt^2} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}} + \frac{n_2}{L_{03}^3 dt} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}}^3 + \frac{n_3}{L_{03} dt} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}} \\ + \frac{n_4}{L_{03}} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}} + (-1)^j n_5 & i = N \end{array} \right.$$

$$U_{ij}^{n-\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2a_1}{L_{03}^2 dt^2} D_{S_{ij}}^2 + \frac{2a_2}{dt^2} \delta_{ij} + \frac{a_3}{L_{03}^4 dt} D_{S_{ij}}^4 + \frac{a_4}{L_{03}^2 dt} D_{S_{ij}}^2 + \frac{a_5}{dt} \delta_{ij} & i \leq N - 4 \\ \frac{1}{L_{03}^2 dt} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}}^2 + \frac{c_1}{dt} & i = N - 3 \\ \frac{1}{L_{03}^2 dt} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}}^2 + (-1)^j \frac{c_1}{dt} & i = N - 2 \\ \frac{2n_1}{L_{03} dt^2} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}} + \frac{n_2}{L_{03}^3 dt} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}}^3 + \frac{n_3}{L_{03} dt} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}} & i = N - 1 \\ \frac{2n_1}{L_{03} dt^2} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}} + \frac{n_2}{L_{03}^3 dt} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}}^3 + \frac{n_3}{L_{03} dt} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}} & i = N \end{array} \right.$$

$$U_{ij}^{n-\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{a_1}{L_{03}^2 dt^2} D_{S_{ij}}^2 - \frac{a_2}{dt^2} \delta_{ij} & i \leq N - 4 \\ 0 & i = N - 3 \\ 0 & i = N - 2 \\ -\frac{n_1}{L_{03} dt^2} \sum_{k=0}^N D_{S_{kj}} & i = N - 1 \\ -\frac{n_1}{L_{03} dt^2} \sum_{k=0}^N (-1)^k D_{S_{kj}} & i = N \end{array} \right.$$

$$V_{ij}^n = \begin{cases} -\frac{a_7}{L_{03}} D_{S_{ij}} & i \leq N - 4 \\ 0 & i = N - 3 \\ 0 & i = N - 2 \\ -n_6 & i = N - 1 \\ -(-1)^j n_6 & i = N \end{cases}$$

D'après la relation (3.81), l'expression de  $\mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}}$  est obtenue :

$$\boxed{\mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}}\right)^{-1} \mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}} \mathbf{q}^{n-\frac{1}{2}} + \left(\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}}\right)^{-1} \mathbf{U}^{n-\frac{3}{2}} \mathbf{q}^{n-\frac{3}{2}} + \left(\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}}\right)^{-1} \mathbf{V}^n \mathbf{p}^n} \quad (3.82)$$

De la même manière, on discrétise les relations (3.78) issues du bilan thermique et on calcule  $\mathbf{p}^{n+1}$ , à l'instant  $t^{n+1}$  (les coefficients de l'écoulement de base sont évalués à l'instant  $t^{n+1}$ ) :

$$\boxed{\mathbf{p}^{n+1} = \frac{1}{1 + b_1 dt} \left( \mathbf{p}^n - \frac{b_2 + b_3 dt}{L_{03}} \mathbf{D}_S \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b_2}{L_{03}} \mathbf{D}_S \mathbf{q}^{n-\frac{1}{2}} \right)} \quad (3.83)$$

Les équations différentielles (3.77), (3.78) et (3.79) sont intégrées en temps par la donnée des conditions initiales pour  $\mathbf{q}(t = 0)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t = 0)$  et  $\mathbf{p}(t = 0)$ . Pour notre schéma, cela implique de connaître  $\mathbf{q}^{-\frac{3}{2}}$ ,  $\mathbf{q}^{-\frac{1}{2}}$  et  $\mathbf{p}^0$ .

Le lecteur trouvera en Annexe C des éléments relatifs à la convergence du schéma. Des cas de référence dont la solution analytique est connue exactement sont étudiés.

# Chapitre 4

## Résultats de l'Analyse Linéaire de Stabilité étendue (XLSA)

Dans ce chapitre, nous considérons une plaque de demi-dimensions  $L_{01} = 1 \text{ m}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ , sollicitée en traction dynamique à une vitesse  $V_{01}$  constante imposée (gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = V_{01}/L_{01}$ ), voir Figure 2.1. La masse volumique du matériau est  $\rho = 5000 \text{ kg.m}^{-3}$ . À l'instant initial, la déformation plastique cumulée est  $\varepsilon_p(t = 0) = 0$ . La contrainte d'écoulement, dont la forme générale est donnée par l'équation (2.10), est, pour ce chapitre :

$$Y = K (\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^{-\beta} \quad (4.1)$$

où  $n$  est le coefficient d'écrouissage,  $m$  le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation,  $\beta$  le coefficient d'adoucissement thermique.  $K$  et  $\dot{\varepsilon}_0$  sont des paramètres du matériau.  $\theta_0$  correspond à la température de référence et  $\varepsilon_i$  sera nommé *paramètre de déformation* dans la suite. Dans ce chapitre, tous les résultats seront obtenus avec des valeurs fixées pour  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0, 2$ ,  $\dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  et  $\theta_0 = 293 \text{ K}$ .

La loi de comportement et les coefficients adoptés sont représentatifs des métaux usuels. Néanmoins, des travaux tels que ceux de Zhao et Gary (1996) existent pour caractériser

les métaux de manière plus précise, à l'aide notamment d'essais dynamiques.

Dans la première partie, nous considérons un matériau avec écrouissage ( $m = \beta = 0$  dans l'équation (4.1)). Les effets du gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = V_{01}/L_{01}$ , du paramètre de déformation  $\varepsilon_i$  et des conditions initiales sont étudiés. Le dernier point est particulièrement intéressant dans le contexte de l'approche développée. En effet, en contraste avec l'approche classique d'analyse linéaire de stabilité (voir Mercier *et al.*, 2010 ou Jouve, 2010 pour le cas de la déformation plane), notre modèle suit l'évolution spatio-temporelle d'une perturbation quelconque dans l'écoulement. Le rôle des conditions initiales doit donc être exploré. Dans un second temps, un matériau thermo-viscoplastique sera considéré et l'influence de la viscosité et de l'adoucissement thermique sera étudiée.

La méthode spectrale développée dans la section 3.3 est utilisée. L'intégration temporelle est obtenue avec le schéma aux différences finies. Dans la suite, on choisit  $N = 20$  polynômes de Chebyshev et un pas d'intégration temporelle de  $0,02 \mu s$  (resp.  $0,002 \mu s$ ) pour un gradient de vitesse initial de  $1000 s^{-1}$  (resp.  $10000 s^{-1}$ ). Il a été vérifié qu'une augmentation de l'ordre de troncature  $N$  ou une diminution du pas de temps donnent des résultats identiques.

## 4.1 Matériau non sensible à la vitesse de déformation et à la température

Dans cette section, les sensibilités à la vitesse de déformation et à la température sont ignorées. Dans ce cas, la loi de comportement donnée par l'équation (4.1) devient, avec  $m = 0$  et  $\beta = 0$  :

$$Y = K (\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n \quad (4.2)$$

Pour ce type de matériau, l'instant de déclenchement de l'instabilité plastique de striction est souvent déterminé en utilisant le critère de Considère (1885), basé sur des obser-



vations expérimentales. Les instabilités commencent à apparaître lorsque la force exercée sur les surfaces latérales en  $X_1 = \pm L_{01}$  est maximale. Ce critère est retrouvé en utilisant l'approche classique (*CLSA*) (voir Mercier *et al.*, 2010, Jouve, 2010, 2015) qui calcule des taux de croissance positifs près de l'instant de force maximum. Pour la loi de comportement adoptée ici (voir équation 4.2), l'expression de la force  $F$  appliquée sur les surfaces en  $X_1 = \pm L_{01}$  (par unité de longueur dans la direction transversale  $X_2$ ) en déformation plane et en quasi-statique est :

$$F = 4K/\sqrt{3}(\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n L_{03}\exp(-\sqrt{3}\varepsilon_p/2) \quad (4.3)$$

Le maximum de la force de traction, noté  $F_{max}$  est défini par la condition  $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_p}(\varepsilon_c) = 0$  où  $\varepsilon_c$  fait référence à la déformation de Considère. D'après l'équation (4.3), on obtient  $\varepsilon_c = \frac{2n}{\sqrt{3}} - \varepsilon_i$ . Si  $\varepsilon_i > \frac{2n}{\sqrt{3}}$  alors  $F$  décroît de manière monotone avec l'augmentation de  $\varepsilon_p$ . L'écoulement est donc initialement instable. Au contraire, si  $\varepsilon_i < \frac{2n}{\sqrt{3}}$  alors  $F$  augmente jusqu'à ce que  $\varepsilon_p = \varepsilon_c$  où  $F$  atteint son maximum  $F_{max}$ . Puis  $F$  diminue quand  $\varepsilon_p$  augmente : l'écoulement est stable jusqu'à ce que  $\varepsilon_p = \frac{2n}{\sqrt{3}} - \varepsilon_i$ .

La Figure 4.1 représente l'évolution de la force appliquée en  $X_1 = \pm L_{01}$ , normalisée par  $F_{max}$  en fonction de la déformation plastique cumulée  $\varepsilon_p$  pour différentes valeurs de  $\varepsilon_i$ . Pour  $n = 0,2$ , la déformation de Considère est  $\varepsilon_c = 0,23 - \varepsilon_i$  ce qui signifie que l'écoulement devient instable lorsque la déformation plastique atteint  $0,23 - \varepsilon_i$ . On observe, d'après la Figure 4.1, que pour  $\varepsilon_i = 0$  et  $\varepsilon_i = 0,1$ , la force maximum est atteinte après une déformation plastique positive, ce qui signifie que l'écoulement est initialement stable. À l'inverse, pour  $\varepsilon_i = 0,4$ , la force normalisée est une fonction décroissante de la déformation plastique dès l'instant initial, et est inférieure à 1 ce qui signifie que l'écoulement est initialement instable.

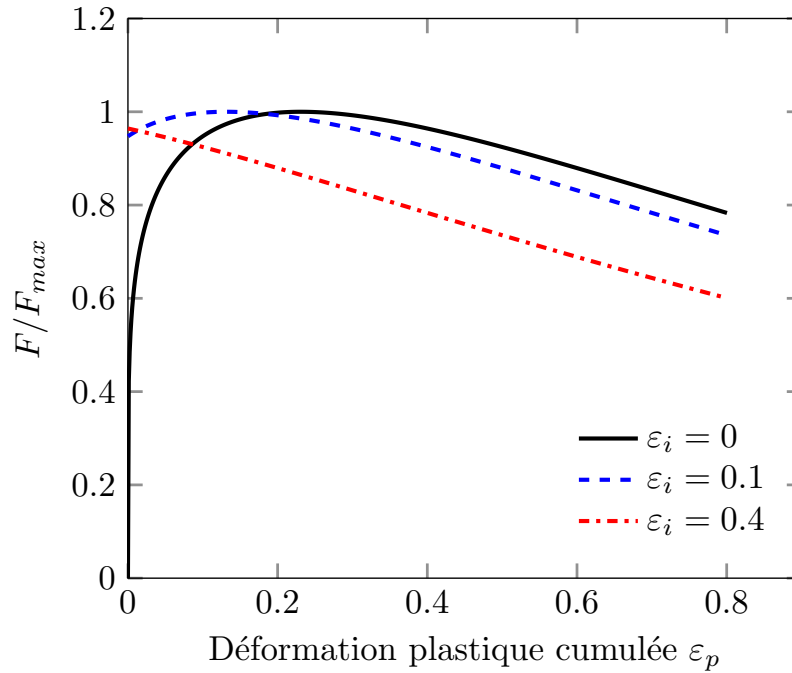


FIGURE 4.1 – Force normalisée  $F/F_{max}$  appliquée sur les faces latérales  $X_1 = \pm L_{01}$  par unité de longueur transversale  $X_2$ , en fonction de la déformation plastique cumulée  $\varepsilon_p$ . Le cas de la déformation plane est étudié. Trois valeurs du paramètre de déformation  $\varepsilon_i$  sont considérées. La valeur du paramètre  $\varepsilon_i$  pour la loi de comportement (4.2) détermine si l'écoulement est initialement instable ou non. Si  $\frac{2n}{\sqrt{3}} - \varepsilon_i < 0$  (resp.  $\frac{2n}{\sqrt{3}} - \varepsilon_i > 0$ ) alors l'écoulement est instable (resp. stable)

#### 4.1.1 Cas d'un écoulement initialement instable

On considère le cas  $\varepsilon_i = 0,4$  (l'écoulement est initialement instable). Deux valeurs de vitesse appliquée à la surface  $X_1 = \pm L_{01}$  sont considérées :  $V_{01} = 1000 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V_{01} = 10000 \text{ m.s}^{-1}$  (gradients de vitesse initiaux  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$  et  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$  respectivement).

Avant de présenter les résultats basés sur le modèle proposé, nous explorons plus en détail les prédictions du modèle classique d'analyse linéaire de stabilité (CLSA). Le taux de croissance calculé par le modèle CLSA à  $t = 0$  est noté  $\eta_0$ . La Figure 4.2 présente l'évolution du taux de croissance normalisé  $\eta_0/\dot{\varepsilon}_{11}$  en fonction du nombre d'onde  $\gamma_1 = i_1\pi/L_{01}$  pour  $V_{01} = 1000 \text{ m.s}^{-1}$  i.e.  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$  (Figure 4.2a) et  $V_{01} = 10000 \text{ m.s}^{-1}$  i.e.  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$  (Figure 4.2b). Pour la plus faible des deux vitesses, la Figure 4.2a) montre

que la courbe  $\eta_0/\dot{\epsilon}_{11}$  en fonction du nombre d'onde  $\gamma_1$  a la forme d'une arche. Il existe une bande de longueurs d'onde suffisamment découplées, *i.e.*  $\eta_0/\dot{\epsilon}_{11} > 5$ , ce qui signifie que la théorie des coefficients figés est valide pour les paramètres du matériau considérés. Il existe un nombre d'onde critique  $\gamma_1^c$  pour lequel le taux de croissance est maximum (voir la ligne pointillée verticale sur la Figure 4.2a) :  $\gamma_1^c = 23\pi/L_{01}$  avec un taux de croissance  $\eta_0^c = 13517 \text{ s}^{-1}$  et un taux de croissance normalisé  $\eta_0^c/\dot{\epsilon}_{11} = 13,5$ . Pour  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ , la Figure 4.2b montre que le nombre d'onde critique est identique ( $\gamma_1^c = 23\pi/L_{01}$ ) mais avec un taux de croissance  $\eta_0^c = 6651 \text{ s}^{-1}$  et un taux de croissance normalisé  $\eta_0^c/\dot{\epsilon}_{11} = 0,66$  plus faibles. Dans ce cas,  $\eta_0/\dot{\epsilon}_{11} < 1$  pour tous les nombres d'onde ce qui signifie que l'hypothèse de séparation des échelles de temps entre la solution fondamentale et la perturbation n'est plus satisfaite. Pour cette forte vitesse de déformation, la théorie des coefficients figés est remise en cause justifiant ainsi le développement d'une nouvelle approche.

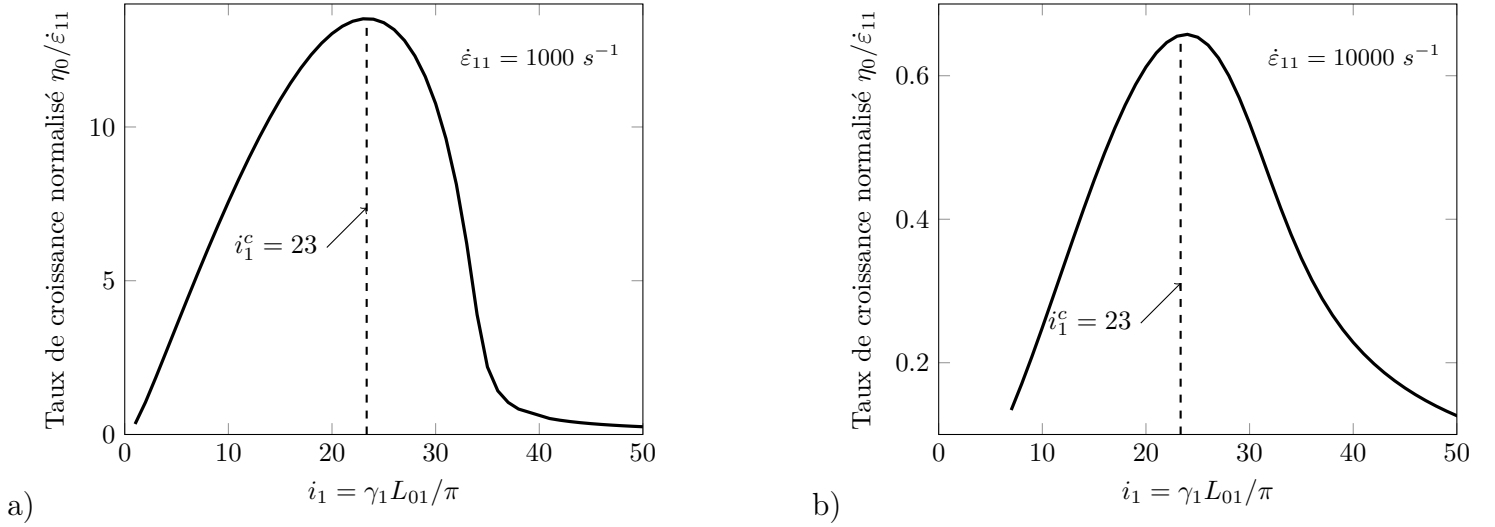


FIGURE 4.2 – Taux de croissance normalisé à  $t = 0$  (déformation plastique cumulée  $\epsilon_p = 0$ ) en fonction de l'index de nombre d'onde  $i_1$  ( $\gamma_1 = \frac{i_1\pi}{L_{01}}$ ) pour a)  $V_{01} = 1000 \text{ m.s}^{-1}$  *i.e.*  $\dot{\epsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$  et b)  $V_{01} = 10000 \text{ m.s}^{-1}$  *i.e.*  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0,2$ . Le paramètre de déformation est  $\epsilon_i = 0,4$  (l'écoulement est initialement instable). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 1 \text{ m}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

Dans cette nouvelle approche, l'évolution de la perturbation est régie par l'équation (3.69a), qui est une équation différentielle du second ordre en temps. Les conditions initiales

sur  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$  et  $\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t = 0)$  doivent être définies.  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$  et  $\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t = 0)$  sont représentatives des perturbations de la position et de la vitesse au sein de l'écoulement homogène. Dans ce travail, quatre conditions initiales (CI1 à CI4) définies dans la Table 4.1 sont testées afin d'observer leur influence sur l'évolution des perturbations.

	$\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$	$\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t = 0)$
CI1	$A_0 \tilde{\psi}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$	$A_0 \eta_0 \dot{\tilde{\psi}}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$
CI2	$A_0 \tilde{\psi}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$	$4A_0 \eta_0 \dot{\tilde{\psi}}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$
CI3	$A_0 \tilde{\psi}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$	0
CI4	$A_0 \sin(\omega \tilde{X}_3)$	$\dot{\epsilon}_{11} A_0 \sin(\omega \tilde{X}_3)$

TABLE 4.1 – Définition des conditions initiales. CI1, CI2 et CI3 sont calculées à partir de l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique, voir équation (4.4).  $A_0$  est un facteur d'amplitude qui n'influence pas les résultats présentés, donc aucune valeur n'est spécifiée. CI4 est une fonction périodique avec  $\omega = 5\pi/2$ . Deux valeurs de gradients de vitesse initial sont testées :  $\dot{\epsilon}_{11} = 1\,000\text{ s}^{-1}, 10\,000\text{ s}^{-1}$ .

Les conditions CI1, CI2, CI3 sont construites à partir des solutions déterminées par l'analyse classique *CLSA* présentée en Annexe A. En effet,  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0) = A_0 \tilde{\psi}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$  et  $\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t = 0) = \alpha A_0 \eta_0 \dot{\tilde{\psi}}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$  où  $\alpha = 1$  pour CI1,  $\alpha = 4$  pour CI2,  $\alpha = 0$  pour CI3 et  $A_0$  est un facteur d'amplitude. On rappelle que les solutions  $\tilde{\psi}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$  et  $\dot{\tilde{\psi}}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$  sont :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t_0 = 0) &= \sum_{n=1}^2 G_{3n} \sinh(d_n \tilde{X}_3) \\ \dot{\tilde{\psi}}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t_0 = 0) &= \eta_0 \sum_{n=1}^2 G_{3n} \sinh(d_n \tilde{X}_3)\end{aligned}\tag{4.4}$$

où  $d_1, d_2$  et  $\eta_0$  sont déterminés comme dans l'annexe A. Notons que  $A_0$  n'a pas d'influence sur l'évolution de la perturbation, puisque le modèle classique *CLSA* et le nouveau modèle *XLSA* sont des analyses linéaires. Néanmoins,  $A_0$  est choisi suffisamment petit pour être représentatif d'une perturbation de faible amplitude.

Les conditions initiales CI1, CI2 et CI3 sont illustrées sur la Figure 4.3 décrivant l'évolution de  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$  au sein de la plaque pour les deux vitesses considérées et deux nombres d'onde :  $\gamma_1 = \frac{23\pi}{L_{01}}$  correspondant au nombre d'onde critique décrit sur la Figure 4.2 et un second nombre d'onde  $\gamma_1 = \frac{35\pi}{L_{01}}$  avec un taux de croissance plus faible à  $t = 0$  (voir Figure 4.2). En étudiant les nombres d'onde transversaux  $d_1$  et  $d_2$  prédits par le modèle *CLSA*, il apparaît sur la Figure 4.3 que  $\tilde{\psi}^{CLSA}(\tilde{X}_3, t = 0)$  est presque linéaire. Une condition initiale supplémentaire, notée CI4, est étudiée afin d'observer les effets d'une condition initiale de forme différente. La condition étudiée est :  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0) = A_0 \sin(\omega \tilde{X}_3)$  et  $\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t = 0) = \dot{\epsilon}_{11} A_0 \sin(\omega \tilde{X}_3)$  avec  $\omega = 5\pi/2$ . Il est clair que la condition CI4 est très différente des solutions *CLSA*.

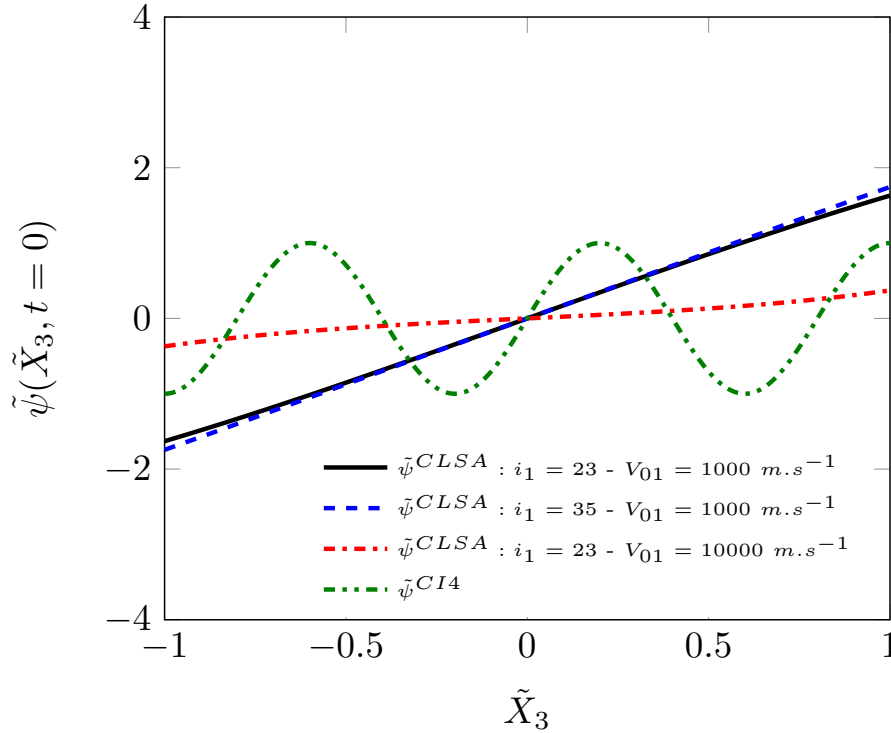


FIGURE 4.3 – Évolution de  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$  dans l'épaisseur pour différents nombres d'onde  $\gamma_1 = i_1\pi/L_{01}$  (avec  $i_1 = 23$  et  $i_1 = 35$ ) et deux vitesses de chargement  $V_{01} = 1000$  m/s ou  $10000$  m/s.  $\tilde{\psi}^{CLSA}$  est déterminé par l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique (voir Annexe A). La condition initiale  $\tilde{\psi}^{CI4}$  n'est pas reliée au modèle *CLSA*; sa forme est sinusoidale et donc très différente des autres conditions initiales (voir Table 4.1). Les paramètres du matériau et la configuration géométrique sont rappelés en Figure 4.2.

Afin de comparer les deux méthodes, le taux de croissance instantané de la perturbation  $\eta(t)$  pris au niveau de la surface libre ( $\tilde{X}_3 = 1$ ) est défini par :

$$\eta(t) = \frac{\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3 = 1, t)}{\tilde{\psi}(\tilde{X}_3 = 1, t)} \quad (4.5)$$

Ce taux de croissance est comparé à celui calculé par le modèle *CLSA*.

Le taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$  est calculé à partir des conditions initiales CI1 à CI4 à chaque instant du processus de déformation jusqu'à  $\varepsilon_{11} = V_{01}t/L_{01} = 1$ . Les résultats sont présentés en Figure 4.4 pour deux vitesses,  $V_{01} = 1\,000, 10\,000\text{ m/s}$  et deux nombres d'onde :  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  et  $\gamma_1 = 35\pi/L_{01}$ . D'après la Figure 4.4, on observe que pour tous les cas présentés, le taux de croissance de la perturbation est fortement dépendant du choix des conditions initiales (*i.e.* de la forme de la perturbation initiale) dans les premiers instants de la déformation mais est relativement peu dépendant lorsque la déformation est importante. Cela est particulièrement marqué pour la faible vitesse de déformation ( $V_{01} = 1\,000\text{ m/s}$ , voir Figures 4.4 a-b) ; les résultats obtenus avec notre modèle pour les quatre conditions initiales coïncident après  $t \simeq 180\ \mu\text{s}$  (déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 0,18$ ). Les Figures 4.4 a) et b), montrent que pour de hauts niveaux de déformation, le taux de croissance normalisé calculé par le nouveau modèle est proche de celui déterminé par le modèle classique. Cela confirme que le modèle *CLSA*, basé sur une théorie des coefficients figés avec les définitions (4.4), est valide dans le cas où la perturbation se développe avec une échelle de temps bien plus courte que celle de l'évolution de l'écoulement de base  $1/\dot{\varepsilon}_{11}$ . En comparant les résultats des Figures 4.4 a) et b), on remarque aussi qu'à la fin du processus de déformation, le taux de croissance de la perturbation associé au nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  (Figure 4.4a) est plus petit que celui associé au nombre d'onde  $\gamma_1 = 35\pi/L_{01}$  (Figure 4.4 b). Cela confirme que le mode dominant évolue au cours du temps ; à mesure que la déformation se poursuit, les modes longitudinaux de courtes longueurs d'onde se développent plus vite. Cela a déjà été noté dans la littérature dans le cadre du modèle *CLSA* (voir par exemple

Mercier et Molinari, 2003). Cette tendance est confirmée par notre modèle, sans faire appel à la théorie des coefficients figés.

Pour le cas du fort gradient de vitesse initial ( $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ , voir Figures 4.4 c) et d), on remarque que même pour de grandes déformations, les prédictions *CLSA* ne sont pas complètement retrouvées. En effet, pour  $t = 0,1 \text{ ms}$  (*i.e.*  $\varepsilon_{11} = 1$ ), les prédictions basées sur les conditions initiales CI1 à CI4 sont légèrement différentes (5% d'écart entre les différentes conditions initiales, voir Figure 4.4 c). Néanmoins, la prédiction *CLSA* fournit un bon ordre de grandeur des taux de croissance de la perturbation lorsque la déformation est importante.

#### 4.1.2 Cas d'un écoulement initialement stable

Dans la section précédente, nous avons présenté le cas d'un écoulement initialement instable. L'un des points essentiels dans la nouvelle approche est sa capacité d'étudier l'évolution de la perturbation avant même que l'écoulement ne soit instable (dans le cas d'un matériau non visqueux, il s'agit d'étudier la perturbation pour des déformations inférieures à celle de Considère).

Dans la littérature relative aux modèles *CLSA*, des taux de croissance positifs sont recherchés. L'évolution de la perturbation dans la phase stable de l'écoulement n'est généralement pas étudiée. Une fois que les taux de croissance positifs sont trouvés (à partir de l'instant  $t = t_i$ ), l'amplitude  $A(t)$  d'un champ de perturbation d'amplitude initiale  $A_0$  calculée par l'approche classique est obtenue par l'intégration du taux de croissance instantané à chaque instant (voir Fressengeas et Molinari, 1994, Petit *et al.*, 2005, El Maï *et al.*, 2014 ou Vaz-Romero *et al.*, 2017) de la manière suivante :

$$A(t) = A_0 \exp \left( \int_{t_i}^t \eta(\tau) d\tau \right) \quad (t \geq t_i) \quad (4.6)$$

Avec la nouvelle approche, la perturbation évolue comme solution de l'équation (3.69a).

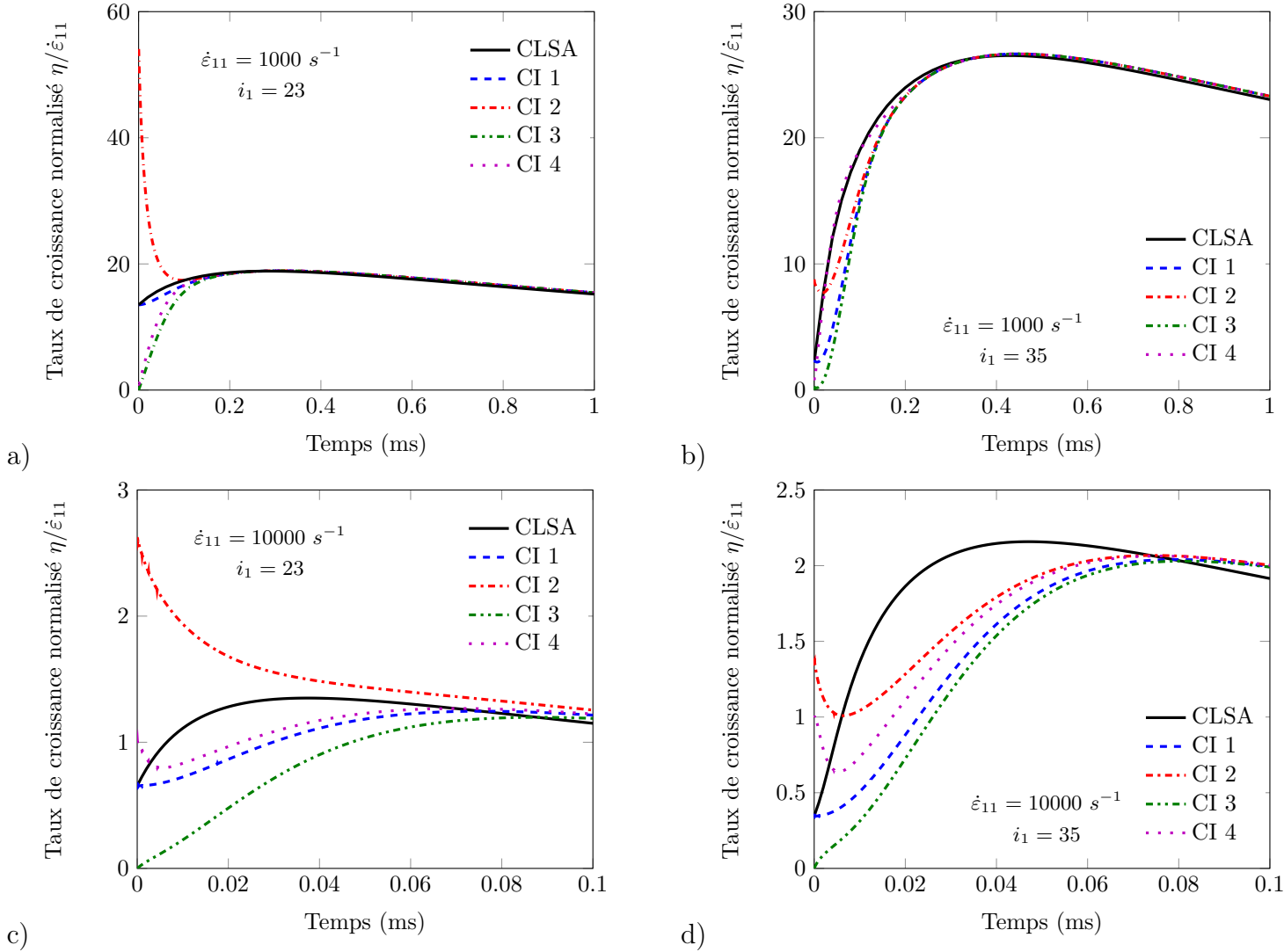


FIGURE 4.4 – Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$  d'une perturbation de nombre d'onde a)-c)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ , b)-d)  $\gamma_1 = 35\pi/L_{01}$ ; le gradient de vitesse initial est a)-b)  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ , c)-d)  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . Le taux de croissance est défini par l'équation (4.5). Les conditions initiales sont définies en Table 4.1 et représentées sur la Figure (4.3). La contrainte d'écoulement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$  et  $n = 0,2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0,4$ . Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 1 \text{ m}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

À  $t = 0$ , l'écoulement est stable et l'approche classique ne fournit pas de taux de croissance positif sous la forme correspondant à l'équation (4.4). Dans ce cas, les initialisations CI1 à CI3 présentées précédemment ne peuvent plus être utilisées. Deux nouvelles conditions initiales (notées CI5 et CI6) sont alors proposées (voir Table 4.2). Pour les deux conditions initiales,  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$  est une fonction linéaire de la coordonnée de l'épaisseur



	$\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$	$\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t = 0)$
CI5	$A_0\tilde{X}_3$	0
CI6	$A_0\tilde{X}_3$	$B_0\tilde{X}_3$

TABLE 4.2 – Définition des conditions initiales pour le cas d'un matériau non sensible à la vitesse de déformation lorsque l'écoulement est stable à  $t = 0$ .

$\tilde{X}_3$  ; c'est un choix relativement proche des conditions initiales présentées dans la Figure 4.3. Comme évoqué précédemment, le coefficient d'amplitude  $A_0$  n'a pas d'influence sur l'évolution normalisée de la perturbation (principe des analyses linéaires). La différence entre CI5 et CI6 réside dans le choix de la perturbation initiale de la vitesse  $\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t_0 = 0)$ . Elle est nulle pour CI5 tandis qu'elle varie linéairement dans l'épaisseur pour la condition initiale CI6. De plus, on choisit  $B_0/A_0 = 20\dot{\varepsilon}_{11}$  ( $= 20000 \text{ s}^{-1}$  pour un gradient de vitesse initial de  $1000 \text{ s}^{-1}$ ) pour la condition CI6. Avec un tel taux de croissance initial, on peut supposer qu'à l'instant initial, la séparation des échelles de temps entre la solution fondamentale et l'évolution de la perturbation est vérifiée.

Pour illustrer l'apport principal de la nouvelle méthode, on garde les paramètres de la configuration de la section 4.1.1 à l'exception du paramètre de déformation  $\varepsilon_i = 0, 1$ . Pour un gradient de vitesse initial de  $1000 \text{ s}^{-1}$ , l'écoulement reste stable pour  $t < 119 \mu\text{s}$ .

La forme de la perturbation de la fonction de courant normalisée et évaluée sur la surface libre  $\tilde{X}_3 = 1$  est définie par :

$$\frac{\delta\psi(X_1, \tilde{X}_3 = 1, t)}{A_0} = \frac{\tilde{\psi}(\tilde{X}_3 = 1, t)}{A_0} \sin(\gamma_1 X_1) \quad (4.7)$$

Elle est tracée en fonction de la coordonnée longitudinale normalisée  $\gamma_1 X_1$  en Figure 4.5. La perturbation est tracée à différents instants et pour deux nombres d'onde avec la condition initiale CI5 :  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  (Figure 4.5a) et  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$  (Figure 4.5c). Les résultats avec le nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  et la condition initiale CI6 sont présentés

sur la Figure 4.5b). Précisons que les résultats avec la condition *CI6* pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$  ne sont pas présentés mais on verra sur la Figure 4.6b) que le résultat est très similaire à celui obtenu avec la condition initiale *CI5*. Sur les Figures 4.5a), b) et c), la forme de la perturbation de la fonction de courant normalisée à  $t = 0$  correspond à l'initialisation adoptée; la perturbation initiale pour les deux nombres d'onde est donc identique. Pour  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ , les Figures 4.5a) et b) révèlent pour les conditions initiales *CI5* et *CI6* que l'amplitude à  $t = 70 \mu s$  (*i.e.*  $\varepsilon_p = 0,08$ ) est plus faible qu'à l'instant initial. Par conséquent, grâce à la nouvelle approche, on peut voir qu'avant que le critère de Considère ne soit vérifié, la perturbation est stabilisée. Notons que l'amplitude pour la condition *CI5* (Figure 4.5a) est plus faible que pour la condition *CI6* (Figure 4.5b). À  $t = 300 \mu s$  (*i.e.*  $\varepsilon_p = 0,30$ ), l'instabilité s'est fortement développée et son amplitude est six fois supérieure à l'amplitude initiale. Il apparaît qu'à cet instant, la perturbation est identique pour les deux conditions initiales. En comparant avec la Figure 4.5c), il apparaît que la durée de la phase de stabilisation de l'amplitude pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$  est plus longue que pour  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . En effet, à  $t = 200 \mu s$  (*i.e.*  $\varepsilon_p = 0,21$  correspondant à une déformation plastique pourtant plus grande que la déformation de Considère), l'amplitude de la perturbation est toujours plus faible que l'amplitude à  $t = 0$ . Néanmoins, pour une plus grande déformation, ce mode de perturbation devient instable. Sur la Figure 4.5c), on note que l'amplitude normalisée à  $t = 600 \mu s$  ( $\varepsilon_p = 0,54$ ) est sept fois supérieure à l'amplitude initiale. Ainsi, pour les deux perturbations, l'amplitude de la perturbation évolue fortement avant Considère (stabilisation de la perturbation). Une telle évolution n'a pas encore été prédite par le modèle *CLSA*, *i.e.* en utilisant la relation (4.6).

Les résultats de la Figure 4.5 sont présentés de manière différente en considérant l'amplitude normalisée sur la surface libre  $\tilde{X}_3 = 1$ , définie par :

$$A_{\delta\psi} = \frac{|\tilde{\psi}(\tilde{X}_3 = 1, t)|}{|\tilde{\psi}(\tilde{X}_3 = 1, t = 0)|} \quad (4.8)$$

L'évolution temporelle de l'amplitude  $A_{\delta\psi}$  est présentée en Figure 4.6a) pour le nombre

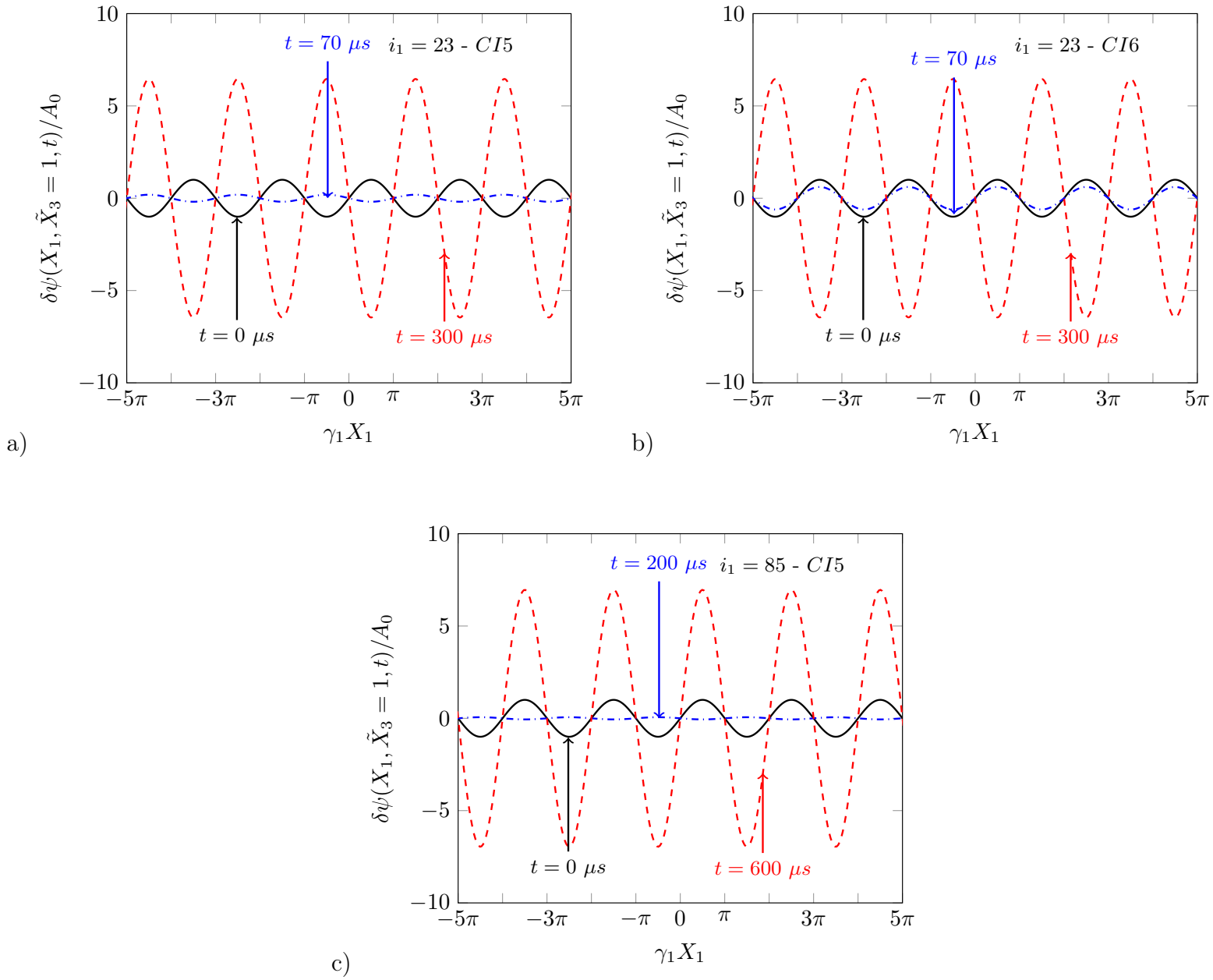


FIGURE 4.5 – Évolution de la perturbation normalisée  $\delta\psi/A_0$  en fonction de la coordonnée longitudinale normalisée  $\gamma_1 X_1$  pour deux nombres d'onde à différents instants a) et b)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  et  $t = 0 \mu s$ ,  $t = 70 \mu s$  et  $t = 300 \mu s$ . c)  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$  et  $t = 0 \mu s$ ,  $t = 200 \mu s$  et  $t = 600 \mu s$ . La fonction de courant est évaluée sur la surface libre  $\tilde{X}_3 = 1$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0, 2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0, 1$ . La condition initiale CI5 (resp. CI6) est adoptée pour a) et c) (resp. pour b)), voir Table (4.2). La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  et en Figure 4.6b) pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Les prédictions *XLSA* pour les deux conditions initiales *CI5* et *CI6* sont présentées ainsi que l'estimation *CLSA* obtenue par l'équation (4.6). Pour les temps  $t$  dans l'intervalle l'ALS Classique ne trouve pas de taux de croissance positif, l'amplitude évaluée par le modèle *CLSA* n'est pas étudiée. Pour  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  et pour les deux conditions initiales (*CI5* et *CI6*), l'amplitude  $A_{\delta\psi}$  calculée par la nouvelle approche diminue dans un premier temps, jusqu'à s'annuler à l'instant  $\tau_I = 61 \mu s$  pour *CI5* et  $\tau_{II} = 97 \mu s$  pour *CI6*. Puis, l'amplitude augmente significativement pour  $t \geq 150 \mu s$ . Pour  $t \geq 220 \mu s$ , les deux signaux d'amplitude pour *CI5* et *CI6* sont superposables. Le modèle *CLSA* trouve des taux de croissance  $\eta$  positifs pour  $t \geq 130 \mu s$  (pour rappel, la déformation de Considère est atteinte à  $t = 119 \mu s$ ). La croissance forte de la perturbation débute à  $t = 150 \mu s$  pour le modèle *XLSA*. Le signal d'amplitude  $A_0 \exp\left(\int_{t_i}^t \eta(\tau) d\tau\right)$  croît significativement à partir de  $t = 220 \mu s$ . Il suit alors la même évolution que le signal d'amplitude donné par le suivi temporel mais il subsiste un écart dû à la variation d'amplitude aux temps courts déterminée par le suivi temporel. Pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ , la Figure 4.5c) révèle que l'amplitude de la perturbation est pratiquement identique tout au long de l'essai pour les deux conditions initiales *CI5* et *CI6*. Cette amplitude oscille d'abord et s'annule à différents instants, et pour la dernière fois à  $\tau_{III} = 324 \mu s$  (l'écoulement est pourtant instable au sens de la déformation de Considère). Elle croît significativement à partir de  $t = 450 \mu s$ . Le modèle *CLSA* détermine des taux de croissance positifs à partir de  $t = 250 \mu s$ . L'amplitude calculée par l'approche classique croît fortement à partir de  $t = 450 \mu s$  de manière similaire au suivi temporel mais il subsiste un écart, comme pour  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ , dû à la variation d'amplitude aux temps courts déterminée par le suivi temporel.

L'évolution temporelle du taux de croissance normalisé de la perturbation est présentée en Figure 4.7 pour les deux nombres d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  et  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Rappelons que la Figure 4.6 montre que l'amplitude de la perturbation  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3 = 1, t)$  peut être très proche de zéro (voire être nulle) à certains instants de la déformation. Par conséquent,

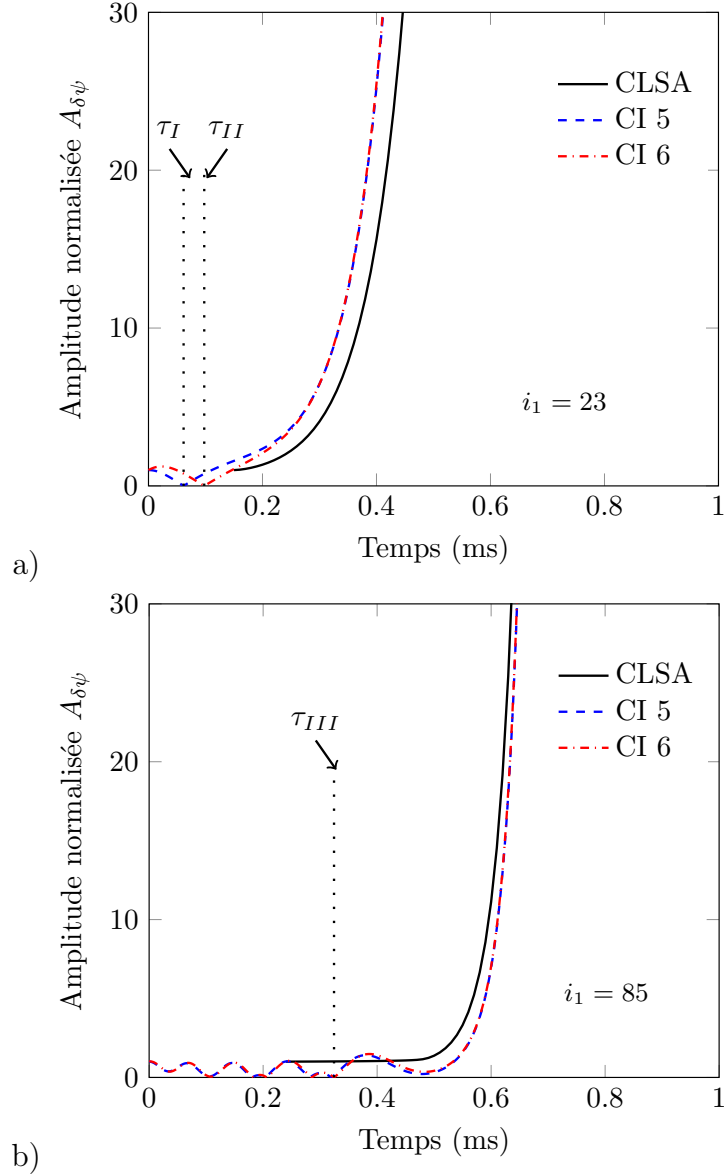


FIGURE 4.6 – Amplitude normalisée  $A_{\delta\psi}$  d'une perturbation de nombre d'onde a)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  b)  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$  et  $n = 0, 2$ . Le paramètre de déformation est  $\epsilon_i = 0, 1$ . Les conditions initiales CI5 et CI6 sont adoptées (voir Table 4.2). L'amplitude évaluée par le modèle CLSA, calculée par l'équation (4.6), est aussi présentée. La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

puisque  $\dot{\psi}(\tilde{X}_3 = 1, t)$  est bornée, le taux de croissance  $\eta$  défini par l'équation (4.5) peut atteindre des valeurs très importantes (infinies en théorie lorsque l'amplitude est nulle). Pour éviter ces points singuliers (identifiés par des traits pointillés aux instants  $\tau_I$ ,  $\tau_{II}$  et  $\tau_{III}$  sur les Figures 4.6a) et b), on choisit de ne présenter sur la Figure 4.7 que l'évolution

temporelle de  $\eta$  sur un intervalle de temps pour lequel l'amplitude de la perturbation  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3 = 1, t)$  est strictement positive; à savoir  $t > \tau_I = 61 \mu s$  (resp.  $t > \tau_{II} = 97 \mu s$ ) pour  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  avec la condition initiale *CI5* (resp. *CI6*) et  $t > \tau_{III} = 324 \mu s$  pour  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Les résultats obtenus avec le nouveau modèle sont en accord avec ceux du modèle classique pour les grandes déformations. Dans les premiers instants, l'effet des conditions initiales est clairement mis en lumière. On rappelle que le modèle *CLSA* n'a pas encore étudié l'évolution de la perturbation avant la déformation de Considère. Pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ , après la déformation de Considère, des taux de croissance positifs sont trouvés pour les modèles *XLSA* et *CLSA*. Pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ , des taux de croissance négatifs sont calculés par le nouveau modèle même si le niveau de déformation plastique est supérieur à la déformation de Considère (instant  $t = 119 \mu s$ ,  $\varepsilon_p = 2n/\sqrt{3} - \varepsilon_i = 0,13$ ). Par construction, lorsque l'écoulement est instable, le modèle *CLSA* prédit des taux de croissance positifs. Clairement, nous avons observé une forte influence des conditions initiales avec notre nouvelle approche dans les premiers instants du processus de déformation. Cet effet est encore plus marqué pour une vitesse de déformation plus importante. À titre d'illustration, la Figure 4.8 présente l'évolution du taux de croissance normalisé de la perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  dans le cas d'une vitesse de traction  $V_{01} = 10\,000 \text{ m/s}$ . La perturbation est étudiée jusqu'à une déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 1,5$ . Il est noté que contrairement au cas avec la vitesse de déformation modérée (voir Figure 4.7a), une différence persiste à  $t = 0,1 \text{ ms}$  (*i.e.*  $\varepsilon_{11} = 1$ ) entre les deux conditions initiales *CI5* et *CI6* mais aussi avec le taux de croissance calculé par le modèle *CLSA*. L'effet des conditions initiales pour le modèle *XLSA* devient négligeable à  $t = 0,15 \text{ ms}$  (*i.e.*  $\varepsilon_{11} = 1,5$ ) et on retrouve le taux prédit par le modèle classique.

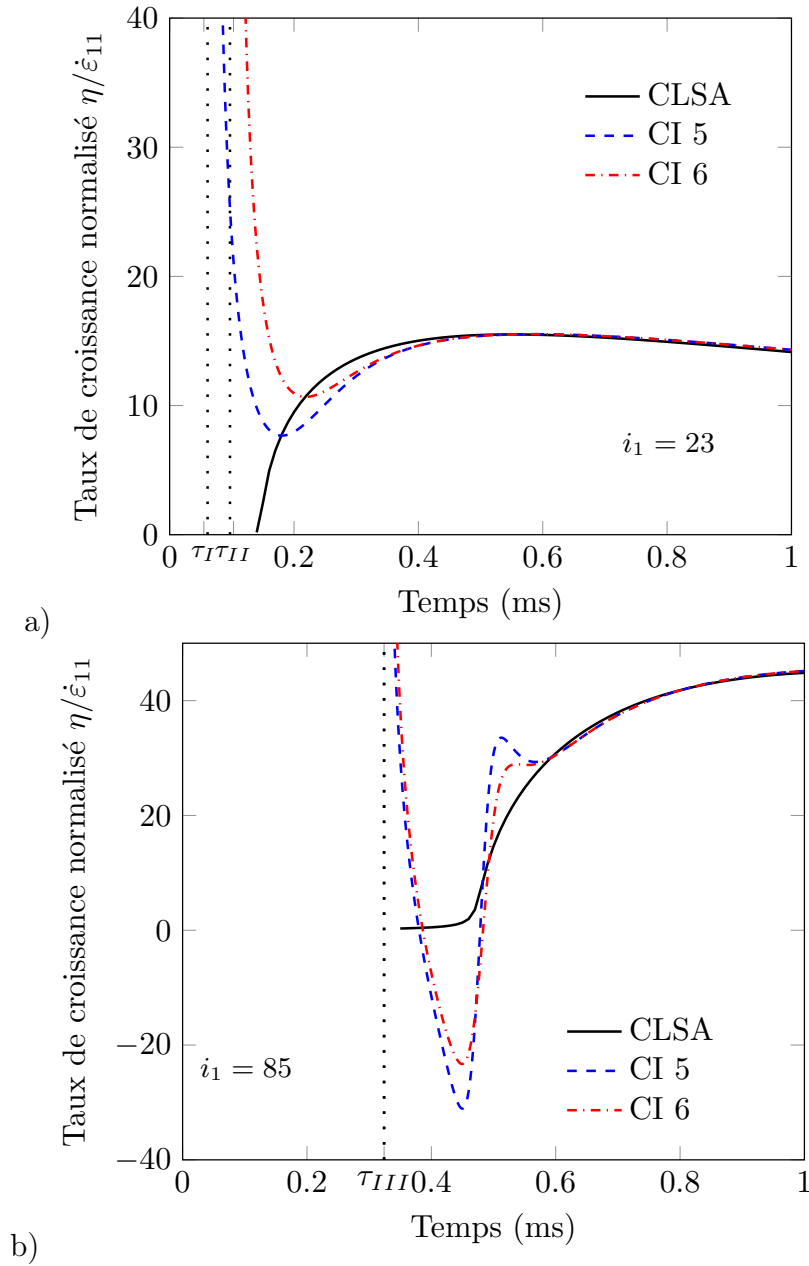


FIGURE 4.7 – Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$ , pour une perturbation de nombre d'onde a)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  b)  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0,2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0,1$ . La déformation de Considère est atteinte à  $t = 119 \mu\text{s}$ . Les conditions initiales CI5 et CI6 sont définies dans la Table 4.2. Les asymptotes verticales correspondent aux temps  $\tau_I = 61 \mu\text{s}$ ,  $\tau_{II} = 97 \mu\text{s}$  et  $\tau_{III} = 324 \mu\text{s}$  pour lesquels la perturbation a une amplitude proche de 0 (voir Figure 4.6). La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

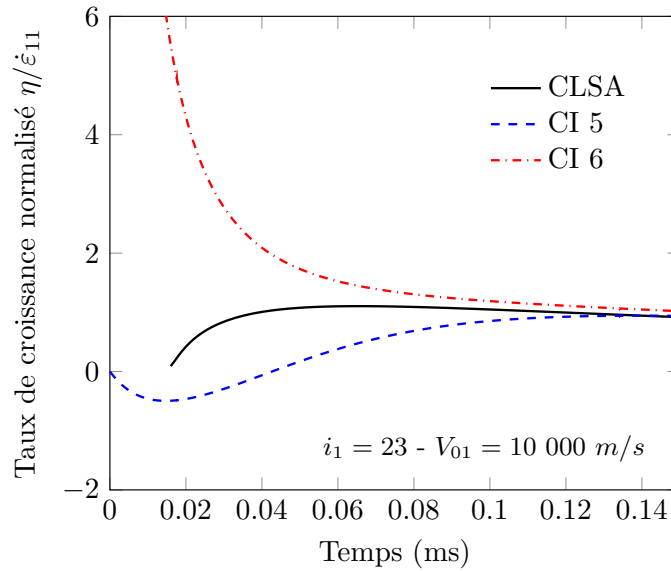


FIGURE 4.8 – Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$ , pour une perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0,2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0,1$ . La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . Les conditions initiales CI5 et CI6 sont définies dans la Table 4.2.

## 4.2 Cas d'un matériau (thermo)-viscoplastique

### 4.2.1 Matériau viscoplastique

Dans cette section, le matériau est sensible à la vitesse de déformation et non sensible à l'adoucissement thermique ( $\beta = 0$  dans l'équation 4.1). La contrainte d'écoulement suit la loi :

$$Y = K (\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m \quad (4.9)$$

avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0,2$  et  $\dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0,1$ . Ainsi, l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation est étudié pour un écoulement initialement stable. Les paramètres sont résumés dans la Table 4.3. La vitesse de traction est  $V_{01} = 1000 \text{ m/s}$  (gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ ).

L'influence des conditions initiales est dans un premier temps évoquée avec une valeur



$K$	$n$	$\varepsilon_i$	$\dot{\varepsilon}_0$
1 GPa	0,2	0,1	1 s <sup>-1</sup>

TABLE 4.3 – Paramètres adoptés pour la loi de comportement décrite par l'équation (4.9). Plusieurs valeurs du paramètre  $m$  de sensibilité à la vitesse de déformation seront adoptées :  $m = 0,01$  et  $m = 0,05$ .

fixe de  $m$ . Puis, l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation est discuté en faisant varier le paramètre  $m$ .

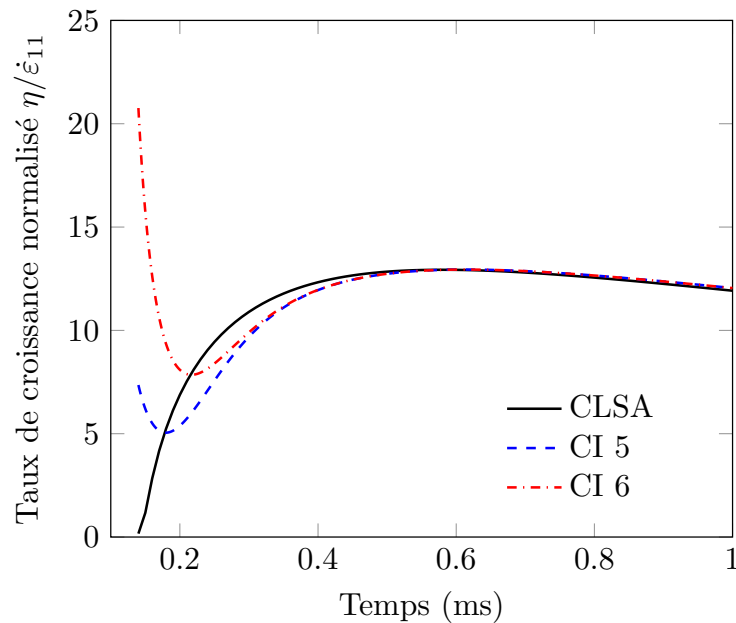


FIGURE 4.9 – Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$ . Les conditions initiales sont définies en Table 4.2. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.9) avec un paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation égal à  $m = 0,01$  et les paramètres de la Table 4.3.

On fixe dans un premier temps le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation  $m = 0,01$ . Les conditions initiales CI5 et CI6 sont considérées (voir Table 4.2 pour la définition). L'évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$  est présentée en Figure 4.9 pour une perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = \frac{23\pi}{L_{01}}$ . Comme précédemment, on note que l'effet des conditions initiales est importante dans les premiers instants de la déformation mais est négligeable pour des grandes déformations où les taux de croissance

calculés par le modèle *CLSA* sont retrouvés. Les conclusions sont similaires au cas du matériau non visqueux (voir section 4.1 et Figure 4.7) puisque le modèle classique ne calcule pas de taux de croissance positif à l'instant  $t = 0$  du processus de déformation. Les premiers taux de croissance positifs sont trouvés vers  $130 \mu s$  (correspondant à une déformation plastique cumulée  $\varepsilon_p = 0,14 \approx \varepsilon_c$ ).

La Figure 4.10 présente l'évolution du taux de croissance normalisé en fonction du nombre d'onde à a)  $t = 490 \mu s$  (déformation plastique  $\varepsilon_p = 0,46$ ) et b)  $t = 820 \mu s$  (déformation plastique  $\varepsilon_p = 0,69$ ). Deux paramètres de sensibilité à la vitesse sont choisis :  $m = 0,01$  et  $m = 0,05$ . Le taux de croissance *XLSA* est comparé à celui obtenu par le modèle classique *CLSA*. À  $t = 490 \mu s$  (voir Figure 4.10a), les prédictions du taux de croissance pour les deux modèles sont similaires pour les grandes longueurs d'onde (faibles valeurs de l'indice  $i_1$ ). Des différences sont notées pour les courtes longueurs d'onde (grands indices  $i_1$ ). On observe également que les deux approches conduisent à des résultats similaires pour les longueurs d'onde étudiées pour des temps  $t$  plus importants. On note par ailleurs que la viscosité stabilise l'écoulement car les taux de croissance sont plus faibles pour tous les nombres d'onde ; cela affecte particulièrement les grands nombres d'onde (*i.e* les modes de courtes longueurs d'onde). Le mode de perturbation avec le plus fort taux de croissance se déplace vers les grandes longueurs d'onde quand la sensibilité à la vitesse de déformation augmente. Cet effet est discuté dans la littérature (voir Fressengeas et Molinari, 1994 par exemple) et retrouvé avec la nouvelle approche. La Figure 4.10 montre alors que pour des vitesses de déformation limitées, l'approche classique basée sur la théorie des coefficients figés est aussi valide pour des matériaux sensibles à la vitesse de déformation. Notons que pour des vitesses de déformation plus importantes, des différences existent même aux grandes déformations.

Il est aussi intéressant d'examiner l'évolution de l'amplitude, définie par l'équation (4.8), pour différentes valeurs du paramètre  $m$ . Seule la condition *CI6* (voir Table 4.2) est présentée ici, les résultats obtenus avec la condition initiale *CI5* produisant des résultats

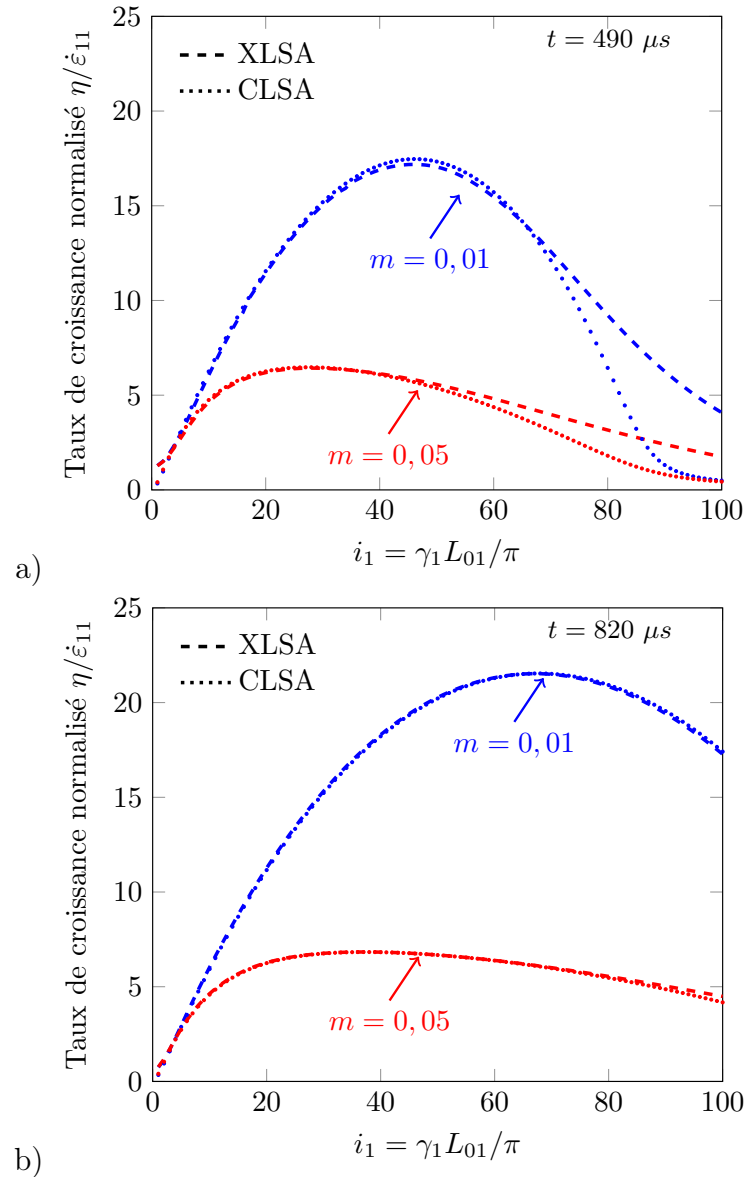


FIGURE 4.10 – Comparaison des taux de croissance normalisés calculés par le nouveau modèle XLSA et le modèle classique CLSA. Les résultats sont présentés à a)  $t = 490 \mu s$  (déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 0,49$ ) et b)  $t = 820 \mu s$  (déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 0,82$ ). La condition initiale CI6 (voir Table 4.2) est considérée. Le matériau est sensible à la vitesse de déformation et la configuration de la Figure 4.9 est adoptée. Deux valeurs du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$  sont testées :  $m = 0,01$  et  $m = 0,05$ .

similaires. La Figure 4.11 présente l'évolution de l'amplitude normalisée pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . La perturbation est de plus en plus stable à mesure que  $m$  augmente. Plus précisément, le taux de croissance de la perturbation étant significativement plus faible quand  $m$  est grand (voir Figure 4.10), l'amplitude normalisée de la perturbation se

développe plus tard que dans le cas non visqueux ( $m = 0$ ). Ainsi, une augmentation de la sensibilité à la vitesse de déformation a tendance à retarder le développement rapide de l'instabilité plastique. Cette tendance reflète l'effet stabilisant de la viscosité, déjà évoqué dans la littérature (voir par exemple Fressengeas et Molinari, 1994). Notons par ailleurs que le comportement oscillant de la perturbation avant la déformation de Considère observé pour le cas non visqueux  $m = 0$  est fortement amorti avec l'augmentation du paramètre de viscosité  $m$ . Pour  $m = 0,05$ , les oscillations disparaissent et l'amplitude de la perturbation décroît de manière monotone jusqu'à  $t = 0,23 \text{ ms}$  avant de croître de manière plus contrôlée pour des temps plus tardifs. Notons que pour  $m = 0,05$ , le niveau d'amplitude de la perturbation est équivalent à sa valeur initiale à  $t = 0,65 \text{ ms}$  (déformation plastique correspondante  $\varepsilon_p = 0,58$ ). Les résultats présentés montrent que même si l'écoulement est stable, la perturbation évolue de manière importante. Cela a un impact important sur la modélisation du phénomène de fragmentation puisque l'initiation d'une striction est liée à l'amplitude du défaut. La prise en compte de l'effet d'histoire est donc un point particulièrement critique. Une comparaison avec un modèle aux éléments finis va être menée afin de valider les résultats du modèle analytique. Cela fait l'objet du chapitre 5.

## 4.2.2 Matériau thermo-viscoplastique

Le couplage thermo-mécanique complet est pris en compte dans cette section avec une loi de comportement du matériau sous la forme (voir équation 4.1) :

$$Y = K (\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^{-\beta} \quad (4.10)$$

Les paramètres de la section 4.2.1 sont choisis :  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0,2$ ,  $\varepsilon_i = 0,1$ ,  $m = 0,01$  et  $\dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ . Par ailleurs, le paramètre d'adoucissement thermique est  $\beta = 0,1$ . La température de référence est  $\theta_0 = 293 \text{ K}$  et  $\theta(t) \geq \theta_0$  pour tout instant  $t \geq 0$ . Les paramètres sont résumés dans la Table 4.4.

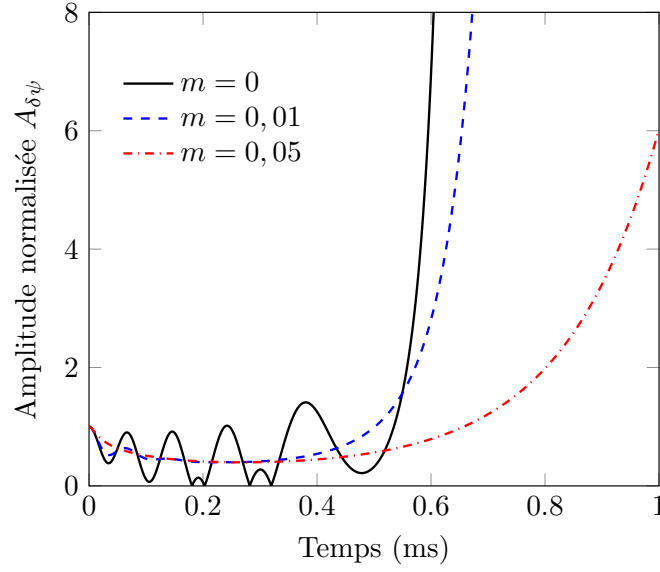


FIGURE 4.11 – Évolution temporelle de l'amplitude normalisée de la perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . Le matériau est sensible à la vitesse de déformation. La loi de comportement est donnée par l'équation (4.9) avec les paramètres de la Table 4.3. Différentes valeurs du paramètre  $m$  de sensibilité à la vitesse de déformation sont considérées. Les résultats sont obtenus avec la condition initiale CI6 définie en Table 4.2.

$K$	$n$	$\varepsilon_i$	$\dot{\varepsilon}_0$	$m$	$\theta_0$
1 GPa	0,2	0,1	1 s <sup>-1</sup>	0,01	293 K

TABLE 4.4 – Paramètres adoptés pour la loi de comportement décrite par l'équation (4.10). Plusieurs valeurs du paramètre  $\beta$  d'adoucissement thermique seront adoptées :  $\beta = 0,1$  et  $\beta = 0,2$ .

Lorsqu'un couplage thermo-mécanique existe, l'extension de l'analyse linéaire de stabilité proposée dans notre travail conduit à un système de deux équations couplant en tout point de la plaque la partie mécanique (équation 3.69a) et la partie thermique (équation 3.69b). Par conséquent, les perturbations du système sont caractérisées par deux contributions : une perturbation mécanique  $\tilde{\psi}$  et une perturbation thermique  $\tilde{\theta}$ . Dans l'analyse linéaire classique, la perturbation thermique est reliée à la perturbation mécanique par la théorie des coefficients figés (voir l'équation A.4 dans l'Annexe A)

Pour le modèle XLSA, une condition initiale sur la perturbation en température est nécessaire en complément des deux conditions initiales sur la perturbation mécanique  $\tilde{\psi}$  et  $\dot{\tilde{\psi}}$ . Dans les sections précédentes, ce couplage n'était pas présent et l'évolution de la

	$\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t_0 = 0)$	$\dot{\tilde{\psi}}(\tilde{X}_3, t_0 = 0)$	$\tilde{\theta}(\tilde{X}_3, t_0 = 0)$
CI7	$A_0 \tilde{X}_3$	0	$C_0$
CI8	$A_0 \tilde{X}_3$	0	$C_0 \cos(\pi \tilde{X}_3)$

TABLE 4.5 – Définition des conditions initiales pour la perturbation mécanique et la perturbation thermique. Le comportement du matériau est thermoviscoplastique.

la perturbation  $\tilde{\psi}$  ne nécessitait pas de définition de la condition initiale sur  $\tilde{\theta}$ . Ici, on définit les conditions initiales CI7 et CI8, identiques à la condition CI5 pour la partie mécanique (voir Table 4.2) mais qui intègrent une condition supplémentaire sur la température (voir Table 4.5). La condition CI7 correspond au cas d'une perturbation uniforme où  $\tilde{\theta}(\tilde{X}_3, t_0 = 0) = C_0$ ,  $C_0$  étant une constante prise égale à 4 K. La condition CI8 correspond à une perturbation périodique dans l'épaisseur  $C_0 \cos(\pi \tilde{X}_3)$ .

Comme pour la section précédente, le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$  et les résultats sont présentés pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = \frac{23\pi}{L_{01}}$ . Les deux contributions  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{\theta}$  de la perturbation peuvent présenter différents taux de croissance. C'est un degré de liberté supplémentaire par rapport à l'analyse linéaire classique où tous les champs, et en particulier le champ de perturbation de la fonction de courant et de la température, ont le même taux de croissance. Pour la partie mécanique, le taux de croissance  $\eta$  est défini par l'équation (4.5). Une définition similaire est adoptée pour le taux de croissance de la perturbation en température :

$$\eta_T(t) = \frac{\dot{\tilde{\theta}}(\tilde{X}_3 = 1, t)}{\tilde{\theta}(\tilde{X}_3 = 1, t)} \quad (4.11)$$

Dans la suite, on ne présentera les résultats qu'en considérant la condition CI7. En effet, la Figure 4.12 présente l'évolution temporelle du taux de croissance de la perturbation de la température défini par l'équation (4.11) pour un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$  pour les deux conditions initiales CI7 et CI8 définies dans la Table 4.5. L'influence de la condition initiale est marquée dans les premiers instants mais est négligeable pour de

grandes déformations.

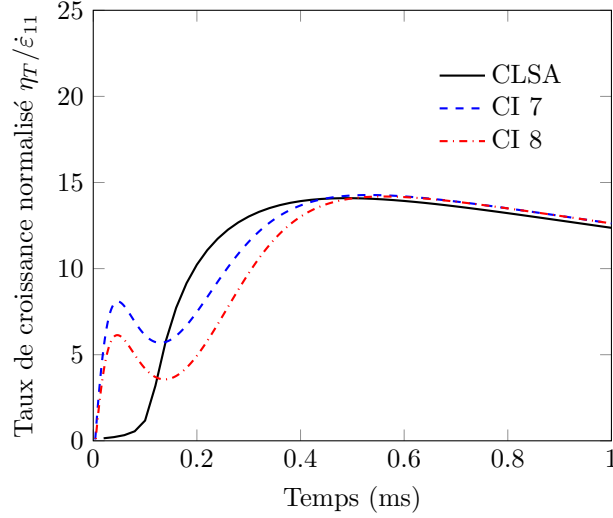


FIGURE 4.12 – Évolution temporelle du taux de croissance  $\eta_T/\dot{\epsilon}_{11}$  (voir l'équation 4.11). La perturbation est de nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par la relation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. Le coefficient d'adoucissement thermique est  $\beta = 0,1$ . Les conditions initiales sont définies dans la Table 4.5.

L'évolution temporelle des deux taux de croissance  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  pour la fonction de courant et  $\eta_T/\dot{\epsilon}_{11}$  pour la perturbation de la température est présentée en Figure 4.13. Dans les premiers instants du processus de déformation, les deux taux de croissance  $\eta$  et  $\eta_T$  sont assez différents. Notons que cette observation n'est pas limitée au nombre d'onde étudié ici. Néanmoins, les taux de croissance de la fonction de courant  $\eta$  et de la perturbation de la température  $\eta_T$  sont proches de celui prédit par le modèle classique pour des grandes déformations.

Nous définissons l'amplitude normalisée de la contribution thermique de la perturbation par :

$$A_{\delta\theta} = \frac{|\tilde{\theta}(\tilde{X}_3 = 1, t)|}{|\tilde{\theta}(\tilde{X}_3 = 1, t = 0)|} \quad (4.12)$$

La Figure 4.14 présente les amplitudes normalisées  $A_{\delta\psi}$  de la fonction de courant (définie par l'équation 4.8) et  $A_{\delta\theta}$  de la température à  $t = 260 \mu\text{s}$  (déformation plastique  $\epsilon_p = 0,27$ ). Dans l'approche classique, les modes critiques pour l'amplitude sont identiques pour la

fonction de courant et la température, puisque toutes les perturbations sont supposées évoluer avec le même taux de croissance. La prise en compte du couplage thermo-mécanique dans la nouvelle approche révèle que dans les premiers instants de la déformation, les modes présentant la plus grande amplitude sont légèrement différents entre la fonction de courant et la température. Sur la Figure 4.14, l'indice critique pour la perturbation mécanique est  $i_1 = 28$  alors qu'il est de  $i_1 = 27$  pour la perturbation thermique (à  $t = 260 \mu s$ ). Par ailleurs, pour certains modes, il n'existe pas de corrélation immédiate entre les amplitudes des perturbations mécanique et thermique. En effet, on observe que la perturbation mécanique  $\hat{\psi}$  s'annule pour certains modes (ici  $i_1 = 13$  et  $i_1 = 82$  sur la Figure 4.14) alors que la perturbation  $\hat{\theta}$  a une amplitude non nulle. La situation inverse est notée pour les modes  $i_1 = 9$  et  $i_1 = 84$ . Ces observations dépendent de l'instant considéré. Cette situation particulière n'est pas retrouvée pour des temps  $t$  plus importants; les perturbations mécanique et thermique sont toutes deux très instables et ont des amplitudes importantes. On note alors que les modes critiques sont les mêmes pour les deux perturbations et correspondent à celui prédit par le modèle *CLSA*. Cette remarque est confirmée par la Figure 4.13 montrant que les taux de croissance des deux perturbations sont très proches aux grandes déformations.

L'influence de l'adoucissement thermique est maintenant discutée. La condition initiale *CI7* de la Table 4.5 est à nouveau choisie. La Figure 4.15 présente l'évolution du taux de croissance de la perturbation en fonction du nombre d'onde à  $t = 1 ms$  (déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 1$ ) pour  $\beta = 0,1$  et  $\beta = 0,2$ . On présente à la fois le taux de croissance de la fonction de courant  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$  sur la Figure 4.15a) et le taux de croissance de perturbation de la température  $\eta_T/\dot{\varepsilon}_{11}$  sur la Figure 4.15b) tous deux calculés par la nouvelle approche et comparés à celui de l'approche classique donné par l'équation (4.4). On note que dans l'approche classique, par construction, les deux quantités ont le même taux de croissance. La Figure 4.15 montre que les taux de croissance calculés par la nouvelle approche convergent vers le taux de croissance *CLSA* pour les deux valeurs de coefficient  $\beta$  et pour les nombres d'onde calculés. Une légère différence entre le taux  $\eta_T$  et le taux ob-



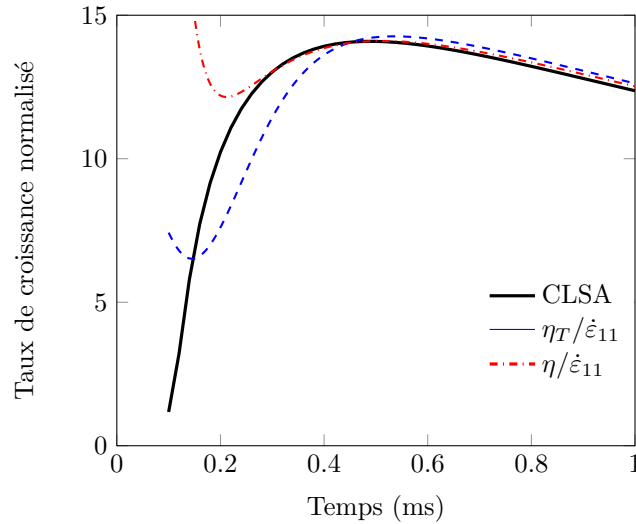


FIGURE 4.13 – Évolution temporelle des taux de croissance  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$  (voir l'équation 4.5) et  $\eta_T/\dot{\varepsilon}_{11}$  (voir l'équation 4.11). Les perturbations ont le même nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par la relation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. Le coefficient d'adoucissement thermique est  $\beta = 0,1$ . Les résultats sont obtenus avec la condition initiale CI7 définie dans la Table 4.5.

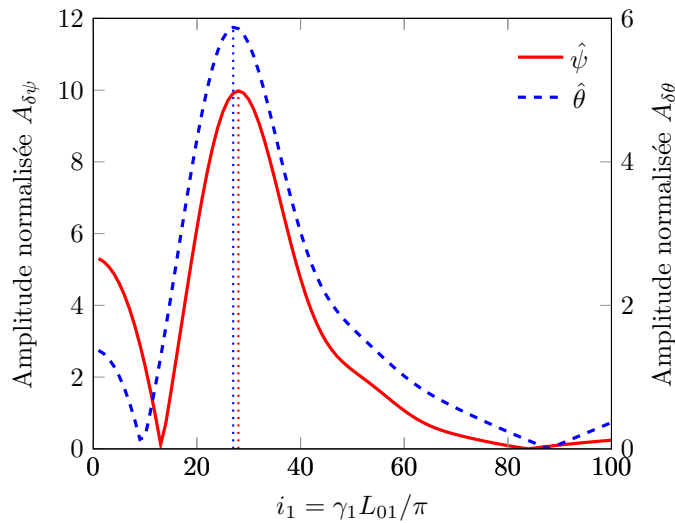


FIGURE 4.14 – Amplitude normalisée de la fonction de courant (équation 4.8) et de la perturbation de la température (équation 4.12) en fonction du nombre d'onde à  $t = 260 \mu\text{s}$  (déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 0,26$ ). La loi de comportement est donnée par l'équation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. Le coefficient d'adoucissement thermique est  $\beta = 0,1$ . Les résultats sont obtenus avec la condition initiale CI7 définie dans la Table 4.5.

tenu par le modèle classique est observée, alors que le taux  $\eta$  converge presque exactement vers le taux *CLSA*. On note aussi que l'adoucissement thermique déstabilise l'écoulement

puisqu'une augmentation du coefficient  $\beta$  produit des taux de croissance normalisés plus importants pour tous les nombres d'onde. Cet effet est discuté dans la littérature (voir Mercier *et al.*, 2010 par exemple) et est retrouvé avec la nouvelle modélisation sans utiliser la théorie des coefficients figés. Notons que pour les deux valeurs de  $\beta$ , les deux taux  $\eta$  et  $\eta_T$  sont très proches pour les grandes déformations. En particulier, les modes critiques pour la perturbation thermique  $\hat{\theta}$  et la perturbation mécanique  $\hat{\psi}$  sont identiques.

## Conclusion

En conclusion, le nouveau modèle fournit des résultats particulièrement notables. À la différence des méthodes classiques reposant sur une théorie des coefficients figés, l'hypothèse de séparation des échelles de temps est levée. L'effet des conditions initiales a été étudié. Il est montré que, pour des chargements à faible vitesse, l'analyse classique et le modèle étendu donnent des résultats assez proches en termes de modes dominants et de taux de croissance associé (pour de larges déformations). Pour des chargements à haute vitesse, les deux modèles sont en accord pour des grandes déformations mais il est noté que dans les premières phases du processus de déformation, le mode dominant et surtout les amplitudes relatives des défauts sont clairement modifiés.

L'un des principaux résultats concerne l'évolution des perturbations dans les premières phases de l'écoulement et en particulier la phase où les perturbations évoluent clairement sans croître rapidement. Cette évolution n'a pas été étudiée par les méthodes classiques.

Il convient désormais de s'interroger sur le domaine d'application du nouveau modèle pour la compréhension du phénomène de localisation. L'intégration numérique du système d'équations a permis de lever une hypothèse forte mais le modèle étendu reste basé sur la linéarisation des équations d'évolution du matériau; nécessairement, l'amplitude des perturbations doit rester faible devant l'écoulement de base. Le nouveau modèle est donc intermédiaire et se situe entre un modèle par éléments finis et le modèle classique d'ALS (voir Figure 4.16).

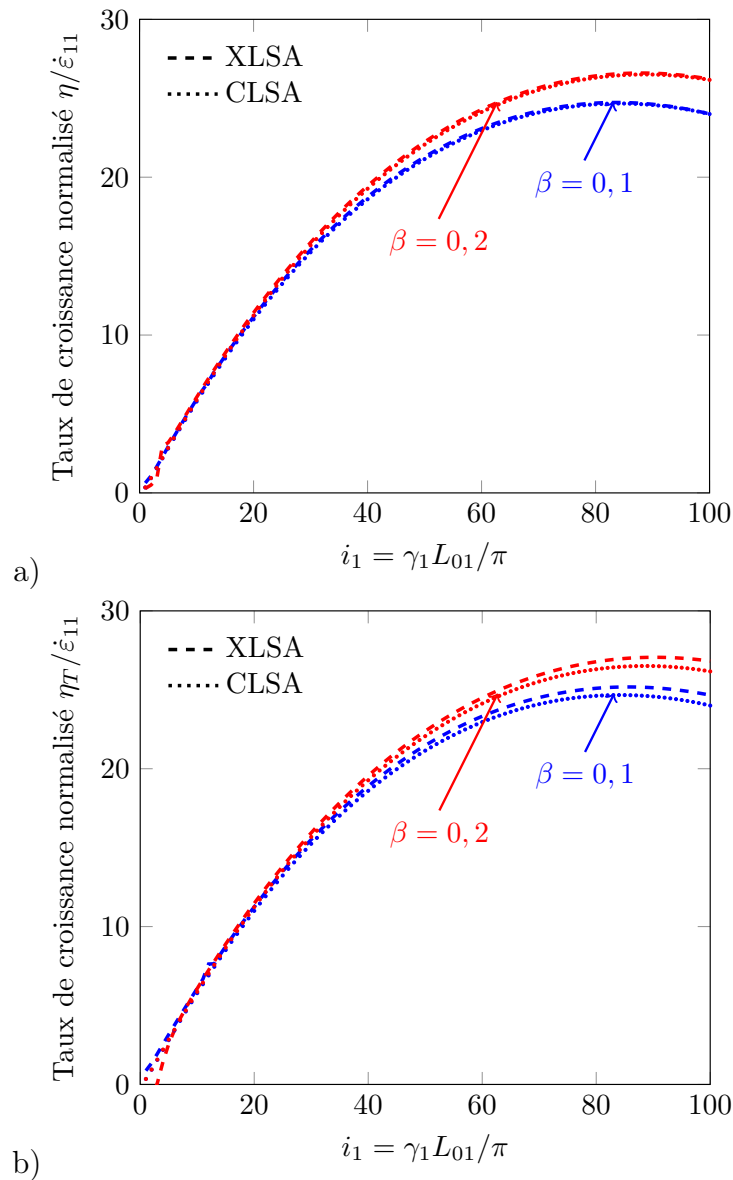


FIGURE 4.15 – Taux de croissance normalisés donnés par le modèle XLSA pour a)  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$  (voir équation 4.5) b)  $\eta_T/\dot{\varepsilon}_{11}$  (voir équation 4.11) et par l'approche classique (voir équation 4.4) en fonction du nombre d'onde pour  $\beta = 0,1$  et  $0,2$ . Les résultats sont présentés en utilisant la condition initiale CI7 définie dans la Table 4.5. La loi de comportement est donnée par l'équation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. L'instant considéré est  $t = 1$  ms correspondant à une déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 1$  ; le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000$  s<sup>-1</sup>.

Lorsque les strictions sont fortement développées, au voisinage de la localisation, l'amplitude des perturbations dans l'écoulement est importante ; les effets non linéaires ne sont plus négligeables. El Maï *et al.* (2018) a noté qu'il était difficile de relier quantitativement les résultats obtenus par l'ALS avec des simulations par éléments finis. La raison avancée

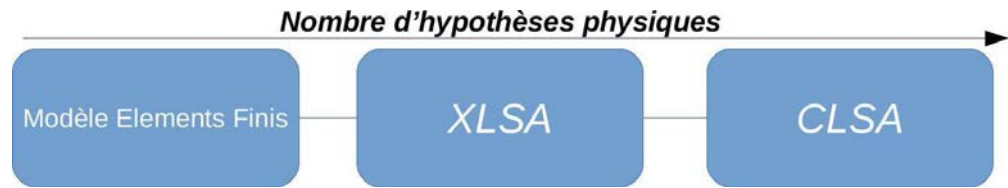


FIGURE 4.16 – Différents modèles d'analyse des prémices du développement de l'instabilité plastique de striction

concerne l'évolution des amplitudes dans les premières phases de l'écoulement (accessible avec le modèle étendu) et non pas l'absence de prise en compte des effets non-linéaires. On propose alors dans le chapitre 5 d'étudier l'évolution d'une perturbation avec le modèle étendu et de comparer les résultats à des simulations par éléments finis. L'objectif est de définir le champ d'application du modèle *XLSA*.

# Chapitre 5

## Simulations numériques et comparaison avec le modèle *XLSA*

L'objectif de ce chapitre est de confronter les résultats obtenus par la nouvelle approche *XLSA* à ceux issus d'un modèle par éléments finis développé dans la thèse et présenté dans ce chapitre. Avant d'introduire le modèle par éléments finis, nous proposons un aperçu de quelques travaux de la littérature ayant mis en œuvre des simulations numériques. Les travaux évoqués ont porté, entre autres, sur un motif de déformation de longueur d'onde fixée dans le cadre de l'étude du développement de l'instabilité plastique de striction. Nous montrons que les résultats de l'ALS sont retrouvés.

### 5.1 Approches numériques développées dans la littérature

L'Analyse Linéaire de Stabilité étudie le développement de perturbations de faible amplitude. Lorsque les strictions sont fortement développées et que la localisation s'est produite, l'hypothèse de perturbations de faible amplitude est remise en cause. Les ef-

fets non-linéaires ne sont plus négligeables. Les simulations numériques par éléments finis permettent d'étudier la phase non-linéaire et ainsi d'appréhender la localisation et la fragmentation.

Les travaux de la littérature ont notamment porté sur l'étude par un modèle par éléments finis de la localisation et de la fragmentation de structures de géométries variées : une plaque en déformation plane (Rodríguez-Martínez *et al.*, 2013a, Vaz-Romero *et al.*, 2015, Rusinek *et al.*, 2005 ou Jouve, 2013), une plaque en traction biaxiale (citons Jouve (2010), Zaera *et al.*, 2015, Rodríguez-Martínez *et al.*, 2017), un barreau cylindrique en traction (Zaera *et al.*, 2014, El Maï *et al.*, 2014, Vaz-Romero *et al.*, 2015), un anneau en expansion (Pandolfi *et al.*, 1999, Sørensen et Freund, 2000, Becker, 2002, Rusinek et Zaera, 2007, Xue *et al.*, 2008, Rodríguez-Martínez *et al.*, 2013c, Rodríguez-Martínez *et al.*, 2013b, El Maï *et al.*, 2018) ou encore un cylindre en expansion (Tugcu, 1996).

On distingue deux types d'approches :

- pour certains auteurs (*e.g.* Becker, 2002, Rusinek et Zaera, 2007), la géométrie étudiée n'est pas perturbée à l'instant initial. Le développement des instabilités est déclenché par des erreurs d'arrondis numériques qui conduisent *in fine* à la striction et à la fragmentation de la structure. On peut parler d'approche multimodale puisque le bruit numérique l'est très vraisemblablement. En revanche, son amplitude et sa décomposition spectrale sont difficilement maîtrisables et probablement dépendants du maillage ;
- dans d'autres études (*e.g.* Han et Tvergaard, 1995, Xue *et al.*, 2008, Vaz-Romero *et al.*, 2017), une perturbation est initialement présente dans le modèle par éléments finis. Ces approches étudient la plupart du temps un défaut périodique de longueur d'onde donnée.

Compte tenu du nombre de travaux sur ce sujet, nous proposons de détailler plus particulièrement les travaux récents en rapport direct avec notre étude et faisant le lien entre ALS et simulations numériques.

### 5.1.1 Simulations avec localisation déclenchée par les erreurs d’arrondis

Rodríguez-Martínez *et al.* (2013b) ont par exemple étudié l’expansion d’un anneau en utilisant les deux types d’approches évoquées. La géométrie de l’anneau complet n’est pas perturbée à l’instant initial. Une vitesse constante est imposée sur la face interne de l’anneau.

La Figure 5.1 présente une comparaison entre la distance inter-strictions moyenne  $L_0$  (rapportée à la configuration initiale) normalisée par l’épaisseur initiale  $e_0$  de l’anneau, de section carrée, observée à l’instant de localisation et la taille moyenne des fragments, également normalisée par  $e_0$ , obtenue pour différentes vitesses de chargement. Pour des faibles vitesses de chargement, le nombre de strictions est supérieur au nombre de fragments. Les ondes de Mott se propagent à partir de l’instant de localisation et inhibent le développement des strictions voisines. Pour des chargements rapides, la distance inter-strictions correspond à la taille des fragments. En effet, dans ce cas, les strictions se développent jusqu’à la rupture sans être inhibées par les ondes de Mott dont la vitesse de propagation est inférieure à la vitesse de chargement. Ceci confirme les observations expérimentales (Altynova *et al.*, 1996, Zhang et Ravi-Chandar, 2006) concernant les effets des ondes de décharge. La Figure 5.1 révèle que la distance inter-strictions et la taille des fragments tendent vers une valeur asymptotique (ligne pointillée) lorsque la vitesse de chargement tend vers l’infini.

### 5.1.2 Simulations avec défaut initial calibré

Divers auteurs ont essayé de justifier la distance inter-strictions par l’existence d’une longueur d’onde la plus instable. Pour ce faire, ils réalisent des simulations en introduisant un défaut calibré dans la configuration initiale. C’est un défaut dont l’amplitude et la longueur d’onde sont maîtrisées. Sørensen et Freund (2000) et Xue *et al.* (2008) se sont

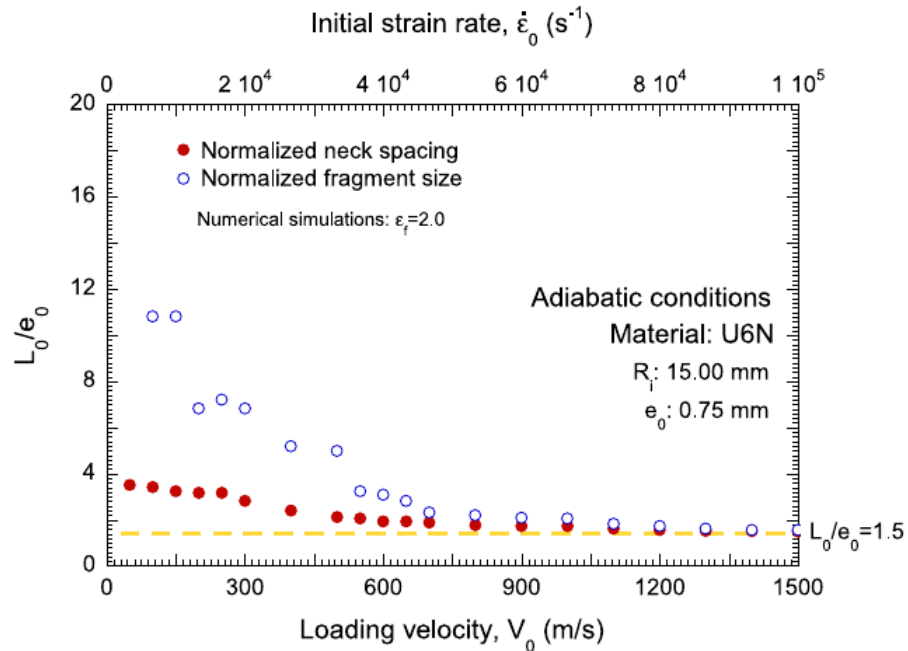


FIGURE 5.1 – Distance inter-strictions  $L_0$ , rapportée à la configuration initiale, normalisée par l'épaisseur initiale  $e_0$ , observée à l'instant de localisation et taille moyenne normalisée des fragments en fonction de la vitesse de chargement. Résultats obtenus par Rodríguez-Martínez et al. (2013b) (modèle par éléments finis, ABAQUS) sur l'expansion d'anneaux d'uranium de rayon interne initial  $R_i$  et de section carrée.  $\epsilon_f$  est la déformation seuil du critère de rupture adopté (l'élément est retiré). La géométrie est initialement non perturbée.

intéressés à l'expansion d'anneaux, étudiés au moyen d'une cellule unitaire, de longueur  $L_0$  dans la direction de traction et de diamètre  $\Phi_0$ . La Figure 5.2 présente la cellule étudiée par Xue *et al.* (2008) et reprise ensuite par Rodríguez-Martínez *et al.* (2013b). La cellule est sollicitée à vitesse constante  $V_0/2$  sur les faces latérales  $X_1 = \pm L_0/2$ . La mise en mouvement abrupte de la structure produit des ondes dont la propagation peut initier des strictions prématurées. Les auteurs (Rusinek et Zaera, 2007, Xue *et al.*, 2008 ou Rodríguez-Martínez *et al.*, 2013b) mettent en évidence l'importance d'initialiser les champs de contraintes (sur la surface de charge) et les champs de vitesses dans toute la géométrie afin de limiter l'amplitude des ondes. Un unique défaut sinusoïdal, d'amplitude  $\delta$ , est introduit. L'influence de la longueur d'onde du défaut est explorée en faisant varier le rapport  $L_0/\Phi_0$ .

La localisation correspond à l'instant pour lequel la déformation n'évolue plus au voisinage des faces latérales et se concentre au niveau des amincissements. L'instant de localisa-



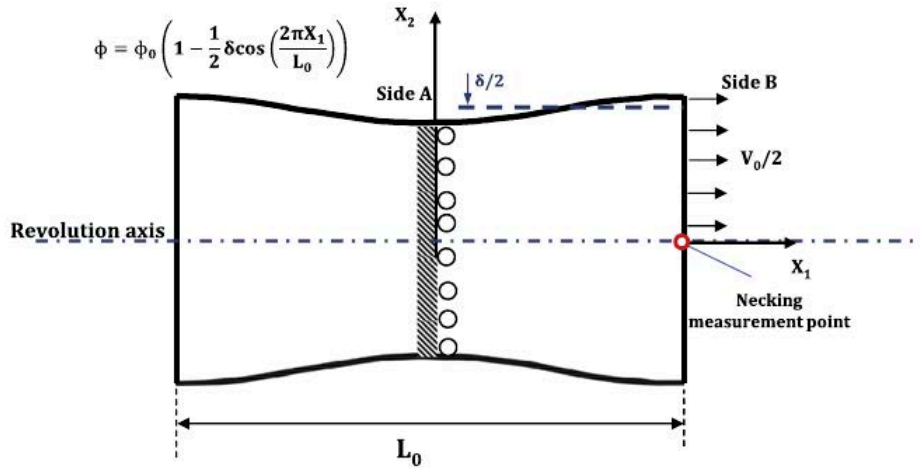


FIGURE 5.2 – Configuration géométrique de la cellule unitaire étudiée par Xue et al. (2008) et Rodríguez-Martínez et al. (2013b) (ABAQUS). La cellule est de longueur  $L_0$  et de diamètre  $\Phi_0$ , sollicitée à vitesse constante  $V_0/2$  sur les faces latérales. Un défaut est introduit à l’instant initial.

tion est alors déterminé par la condition  $d\varepsilon_B/dt = 0$  où  $\varepsilon_B$  est la déformation mesurée sur la face latérale de la cellule. La Figure 5.3 présente l’évolution de  $\varepsilon_B$  à l’instant de localisation en fonction du rapport  $L_0/\Phi_0$  pour différentes vitesses de déformation. L’amplitude du défaut est fixée. La Figure 5.3 révèle une déformation de localisation importante pour les faibles valeurs du rapport  $L_0/\Phi_0$  (*i.e.* les courtes longueurs d’onde). Ceci confirme l’effet stabilisant de la multiaxialité de l’écoulement mis en évidence notamment par Mercier et Molinari (2003) en utilisant une approche ALS. Par ailleurs, l’augmentation de la vitesse de chargement conduit à l’augmentation de la déformation de localisation pour les grandes longueurs d’onde illustrant l’effet stabilisant de l’inertie sur les grandes longueurs d’onde. L’effet combiné de l’inertie et des effets multiaxiaux sélectionne une longueur d’onde intermédiaire, définie par le minimum sur les courbes de la Figure 5.3, confirmant ainsi les prédictions analytiques de l’ALS (Fressengeas et Molinari, 1994 ou Mercier et Molinari, 2003). Pour les grandes vitesses de déformation, le rapport  $L_0/\Phi_0$  associé au mode dominant semble tendre vers une valeur de 1,5, proche de la valeur asymptotique  $L_0/e_0$  obtenue pour le cas sans perturbation initiale (voir Figure 5.1). Ces observations mettent ainsi en évidence l’aspect déterministe du profil de striction dans le cas étudié et confirment les résultats obtenus avec les approches du type Becker (2002).

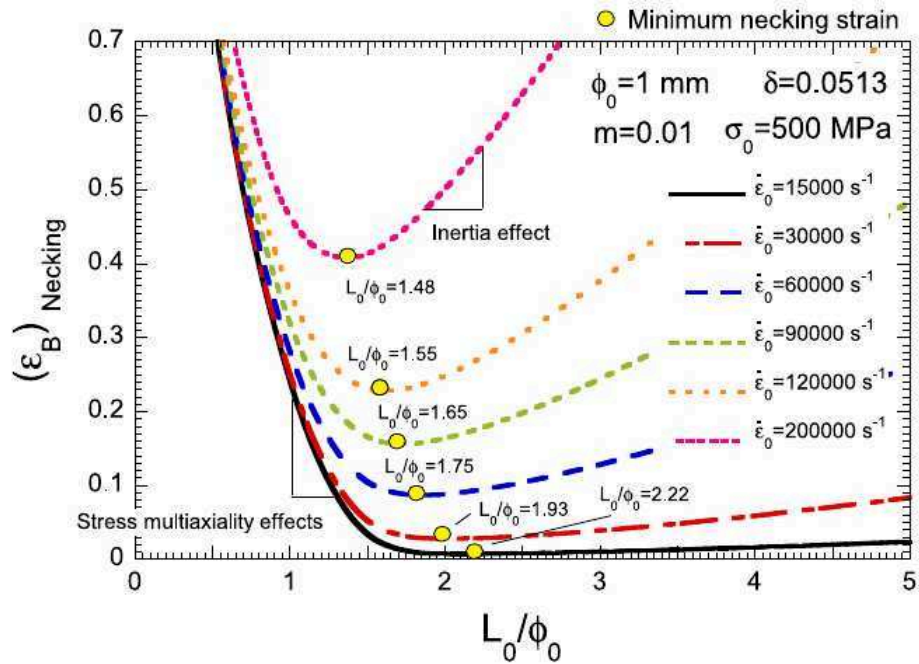


FIGURE 5.3 – Déformation à l’instant de localisation de la cellule étudiée par éléments finis (ABAQUS) par Rodríguez-Martínez et al. (2013b) (voir Figure 5.2) en fonction du rapport  $L_0/\Phi_0$ . Différentes vitesses de chargement sont considérées. L’amplitude  $\delta$  du défaut est fixée. La loi de comportement est  $\sigma = \sigma_0 \left( \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_r} \right)^m$  avec  $\dot{\epsilon}_r = 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

La longueur d’onde intermédiaire suggère l’existence d’un motif de striction prépondérant. Par ailleurs, lorsque l’on introduit une perturbation périodique dans un calcul de structure, son effet se combine avec celui du bruit numérique. Rodríguez-Martínez *et al.* (2013c) étudient au moyen d’un modèle par éléments finis (ABAQUS) l’expansion d’un anneau dont le rayon externe a été perturbé (le rayon interne restant uniforme). Un nombre  $N$  de défauts est introduit le long de la circonférence de l’anneau, *i.e.* une perturbation périodique à  $N$  longueurs d’onde. La Figure 5.4 présente l’évolution du nombre de strictions  $n$  obtenues en fonction du nombre d’imperfections initiales  $N$  pour une vitesse de déformation fixée. Trois régions sont mises en évidence. Les régions *I* (grandes longueurs d’onde) et *III* (courtes longueurs d’onde) sont caractérisées par un nombre de strictions constant, indépendant de la perturbation initiale. Ce nombre est associé à la longueur d’onde dominante, probablement excitée par le bruit numérique. La région *II* couvre une

zone où le nombre de strictions obtenues correspond au nombre d'imperfections initiales. Ce nombre ne correspond pas nécessairement au motif associé à la longueur d'onde dominante et illustre l'existence de longueurs d'onde instables autour du mode dominant mise en évidence par les équations de l'ALS (voir Shenoy et Freund (1999) ou Mercier et Molinari (2003)) *i.e.* les longueurs d'onde autour du mode dominant sont aussi très instables. Notons que l'étendue des régions *I* et *III* est modulée par les effets d'inertie, et donc par la vitesse de déformation.

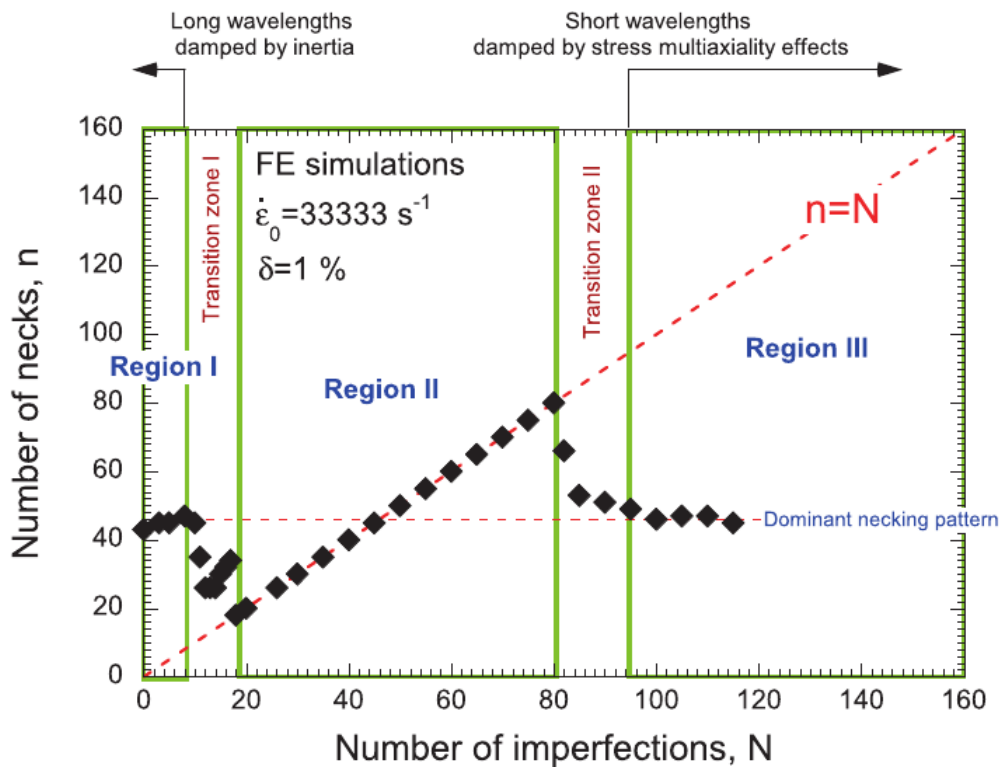


FIGURE 5.4 – Évolution du nombre de strictions obtenues en fonction du nombre d'imperfections initiales le long de la circonférence de l'anneau. Expansion d'un anneau perturbé d'après Rodríguez-Martínez et al. (2013c) (éléments finis, ABAQUS). L'amplitude du défaut et la vitesse de chargement sont fixées.

### Influence du défaut initial

L'influence de l'amplitude du défaut initial est explorée par Vaz-Romero *et al.* (2017) sur un barreau non visqueux. La Figure 5.5 présente l'évolution de la force mesurée sur la

surface de chargement en fonction de la déformation axiale mesurée pour différentes amplitudes  $\bar{\omega}$  du défaut initial. Il est observé que l'amplitude du défaut n'influe pas sur l'évolution de l'instabilité dans la phase pré-Considère et au début de la phase post-uniforme. Néanmoins, il est noté que pour un défaut d'amplitude moins importante (*i.e.* faible valeur de  $\bar{\omega}$ ), la localisation (correspondant à la rupture de pente dans l'évolution de la force) est retardée. Il est à noter également que l'augmentation de l'amplitude du défaut augmente la taille de la région *II* (voir Figure 5.4). De ce fait, les défauts contrôlent plus largement le processus de fragmentation. Ce résultat est attendu car pour des défauts importants, il est naturel que la fragmentation s'initie au niveau des imperfections.

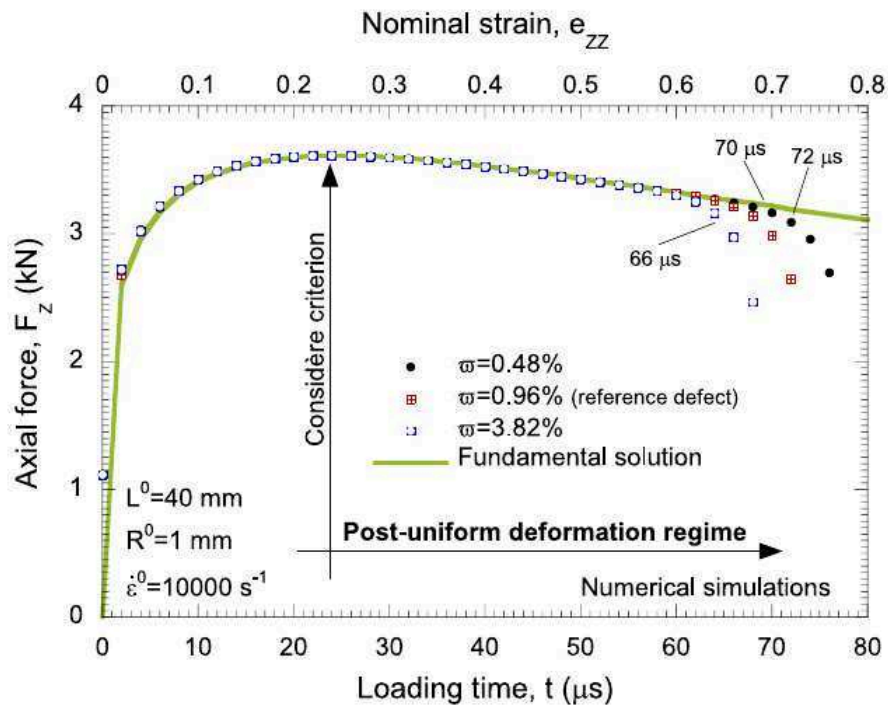


FIGURE 5.5 – Évolution de la force mesurée sur la surface de chargement en fonction de la déformation axiale. Les résultats sont obtenus par Vaz-Romero et al. (2017) au moyen d'une simulation par éléments finis. La déformation de Considère est indiquée et correspond au maximum de la force. L'influence de l'amplitude  $\bar{\omega}$  du défaut initial est étudiée.

## Comparaison des taux de croissance obtenus par l'ALS et par la simulation numérique

Les simulations numériques confirment donc les effets structurants de l'inertie. Les prédictions analytiques de l'ALS sur l'existence du mode dominant sont confortées. Les simulations numériques ont également permis de confronter les prédictions ALS d'évolution temporelle du taux de croissance du mode dominant. Jouve (2013) considère une plaque en déformation plane. Le matériau est non sensible à la vitesse de déformation et est à écrouissage positif ( $Y = (A + B(\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n)$ ), où  $A$ ,  $B$ ,  $n$ ,  $\varepsilon_i$ . Une perturbation correspondant à la solution calculée par le modèle *CLSA* (voir Annexe A) pour le mode dominant est introduite dans la géométrie à l'instant initial. Jouve (2013) étudie le signal  $R(t)$ , représentatif d'un taux de croissance de perturbation, construit à partir des perturbations en chaque point de la géométrie. La déformation est supérieure à la déformation de Considère et les vitesses de déformation considérées sont modérées de manière à ce que l'écoulement soit instable et que l'hypothèse de séparation des échelles soit vérifiée. La Figure 5.6 présente l'évolution temporelle de  $R(t)$  pour la prédiction ALS et la simulation par éléments finis pour deux niveaux de maillage. Il est noté que les résultats ne dépendent pas du maillage. Du fait de l'écrouissage, l'existence d'une longueur d'onde de coupure (longueur d'onde minimale de développement de l'instabilité plastique de striction) permet de faire converger les simulations en maillage. Le taux de croissance de la perturbation calculé par la simulation numérique est en accord avec celui prédit par l'ALS. Les deux modèles divergent à l'instant  $t = 43 \mu s$  correspondant à la décharge élastique marquant la fin de la validité de l'ALS.

Jouve (2013) présente sur la Figure 5.7 la cartographie de la vitesse de déformation plastique au sein du matériau à l'instant de décharge élastique calculé par la simulation numérique. Le motif le long de la direction de traction (axe horizontal sur la Figure 5.7) correspond au mode dominant initialement introduit. Dans l'épaisseur (axe vertical sur la Figure 5.7), on constate un motif particulier qui peut être retrouvé dans l'étude d'une

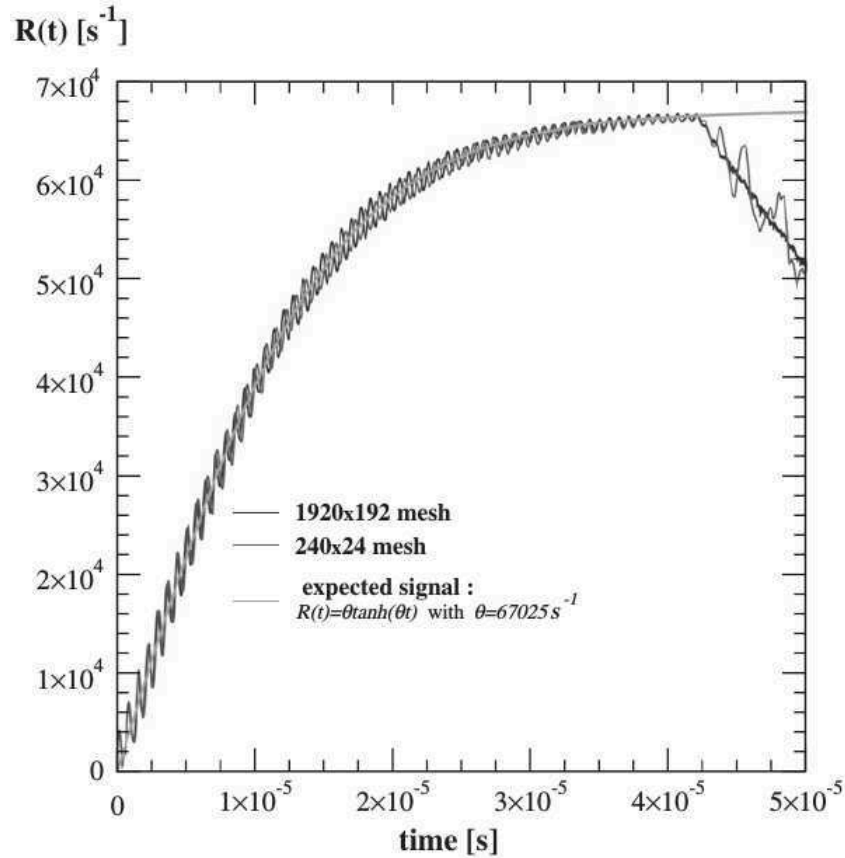


FIGURE 5.6 – Comparaison du signal  $R(t)$ , représentatif du taux de croissance, pour la prédiction ALS et la simulation numérique par éléments finis, Jouve (2013). Configuration en déformation plane. Le matériau est non visqueux. Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 10 \text{ s}^{-1}$ . La perturbation calculée par le modèle CLSA pour le mode dominant est introduite à l’instant initial. Deux niveaux de maillage pour la simulation numérique sont présentés. Du fait de l’écrouissage, l’existence d’une longueur d’onde de coupure permet de faire converger les simulations.

plaque en déformation plane de Vaz-Romero *et al.* (2015). On proposera dans la suite du chapitre une prédiction de l’état de la plaque avec le modèle XLSA que l’on comparera avec la simulation numérique. On s’intéressera notamment à l’état de la perturbation au sein de l’épaisseur de la plaque.

Néanmoins, certains travaux récents ont mis en évidence la difficulté de relier quantitativement les deux approches en termes de chronologie. El Maï *et al.* (2018) étudient un anneau en expansion au moyen d’une simulation par éléments finis et de l’ALS avec l’approche intégrée pour le taux de croissance. Ils assimilent l’anneau à un barreau cylindrique de longueur  $L_0$  en traction et déterminent, en utilisant l’approche stochastique de El Maï

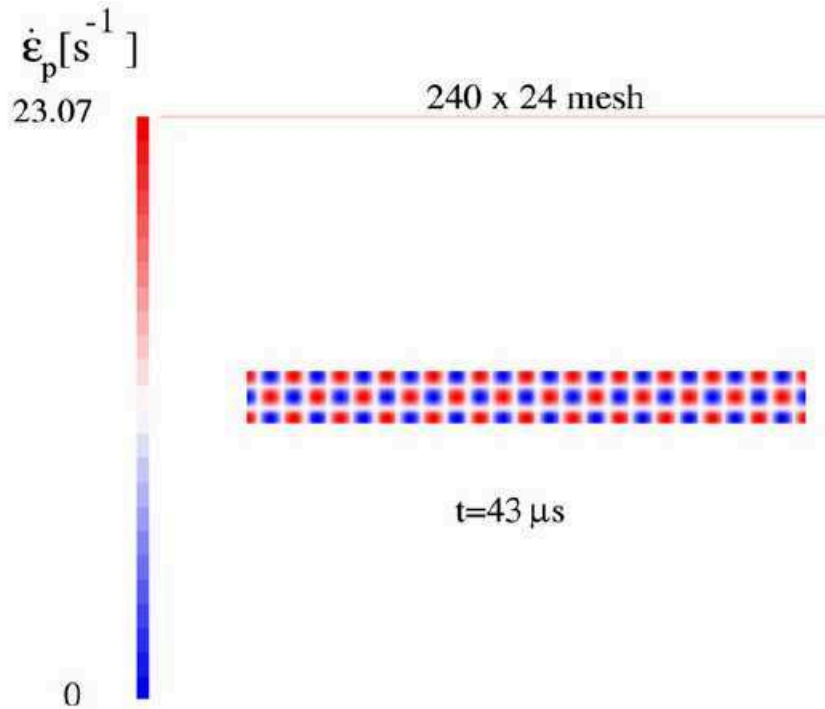


FIGURE 5.7 – Vitesse de déformation plastique au sein de la plaque en déformation plane au moment de la décharge élastique, Jouve (2013). Le matériau est non visqueux. Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 10 \text{ s}^{-1}$ . La perturbation calculée par le modèle CLSA pour le mode dominant est introduite à l’instant initial.

*et al.* (2014), la probabilité d’obtenir une taille de fragment normalisée  $l/L_0$  au cours du temps. La Figure 5.8 présente l’évolution de la probabilité d’obtenir une distance inter-strictions  $l/L_0$  pour a) l’ALS avec taux de croissance intégré et b) le modèle éléments finis. La probabilité est tracée à chaque fois à différents instants de la déformation. El Maï *et al.* (2018) montrent que la distance inter-strictions la plus probable se déplace vers les courtes longueurs d’onde pour les deux modèles. Néanmoins, la probabilité d’obtenir une courte distance  $l/L_0$  apparaît plus rapidement sur le modèle par éléments finis que sur le modèle analytique. El Maï *et al.* (2018) attribuent cet écart au fait que les premiers instants de la déformation ne sont pas pris en compte dans l’approche de type CLSA. Ceci doit conduire à une évolution de la perturbation dans les premiers instants, ce qui peut ensuite affecter le processus de fragmentation.

En conclusion, les études numériques confirment les résultats prédits par l’ALS notam-

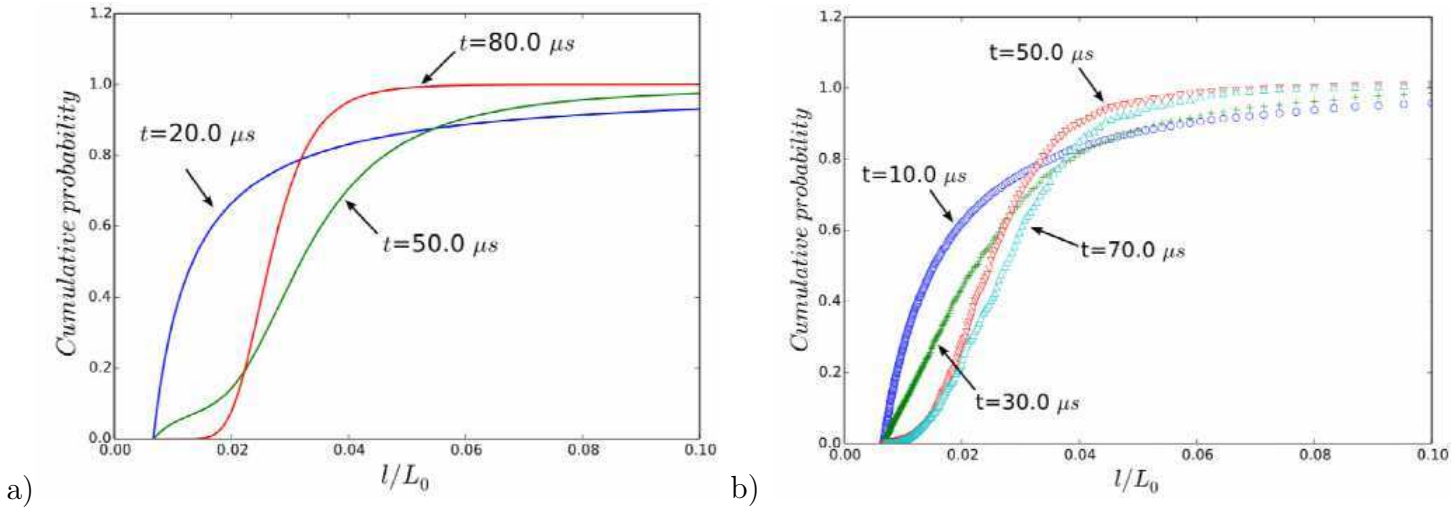


FIGURE 5.8 – Probabilité cumulée d’obtenir une distance inter-strictions  $l/L_0$  à différents instants de la déformation d’après El Maï et al. (2018) pour a) le modèle *CLSA* avec taux de croissance intégré et b) une simulation numérique par éléments finis.

ment sur la sélection d’une longueur d’onde intermédiaire dominante. Néanmoins, l’étude bibliographique met en lumière une difficulté de relier les deux approches en termes de chronologie *i.e.* pour prédire l’instant de localisation. Le modèle *XLSA* développé dans cette thèse permet quant à lui de considérer le cas des écoulements initialement stables et de prendre en compte l’évolution d’une perturbation dès les premiers instants du processus de déformation.

Forts de ce constat, nous proposons d’enrichir l’analyse de Jouve (2013) au moyen du modèle *XLSA*. Le développement d’une perturbation de longueur d’onde donnée est étudié. Nous démontrons que le modèle développé dans la thèse enrichit l’approche classique au point de relier quantitativement les prédictions de l’ALS et des simulations par éléments finis. L’évolution d’un défaut initial inspiré de Xue *et al.* (2008) est étudiée au moyen du modèle *XLSA* et d’une approche par éléments finis. Ce travail est préliminaire à l’étude future des perturbations multimodales.



## 5.2 Modèle par éléments finis

### 5.2.1 Présentation du modèle - cahier des charges

Le modèle par éléments finis développé dans le cadre de la thèse a été réalisé sous *ABAQUS/Explicit*. Un champ initial de perturbation  $\delta\mathbf{x}(X_1, X_3)$  des positions matérielles, de longueur d'onde donnée, est considéré. L'objectif est d'étudier l'évolution de la même perturbation par le modèle *XLSA* et de regarder à partir de quand les deux modèles divergent afin de définir le domaine de validité de l'approche *XLSA* proposée. On présente dans cette section le modèle par éléments finis développé dans la thèse.

Le modèle répond à deux exigences :

- d'une part, le modèle par éléments finis permet d'étudier le développement d'un champ de perturbation initialement présent dans la plaque (dans la réalité, il peut, par exemple, résulter du processus de mise en forme). Ainsi, une approche numérique fondée sur le développement des erreurs d'arrondis conduisant à la localisation (par exemple Becker, 2002 ou Rusinek et Zaera, 2007) n'est pas retenue. Une modélisation de type Xue *et al.* (2008) ou Vaz-Romero *et al.* (2017) est donc adoptée. Pour une configuration suffisamment instable (*i.e.* se situant dans la région *II* de la Figure 5.4), le nombre de striction sur la géométrie reste constant au cours de la déformation.
- dans la section 5.1, la géométrie adoptée par Xue *et al.* (2008) puis Rodríguez-Martínez *et al.* (2013b) est décrite (voir Figure 5.2). L'influence de la longueur d'onde du défaut initial est explorée en faisant varier le rapport d'aspect  $L_0/\Phi_0$  de la cellule. Dans notre étude, nous nous appuyons sur les résultats de l'ALS avec un rapport d'aspect  $L_{03}/L_{01}$  constant. Nous nous imposons donc de modéliser la plaque entière et imposons un défaut périodique le long de la direction de traction (selon la direction  $\vec{e}_1$ ). Ainsi, dans les différentes configurations étudiées dans la suite, l'écoulement de base reste invariable. Nous nous limitons à l'évolution d'une

perturbation monomodale et examinons l'influence de la longueur d'onde sur le processus de localisation.

On rappelle que l'on étudie une plaque de demi-longueur  $L_{01}$  et de demi-épaisseur  $L_{03}$  en déformation plane, soumise à une vitesse de traction constante imposée  $V_{01}$  sur ses faces latérales ; le gradient de vitesse initial longitudinal associé est  $\dot{\epsilon}_{11} = V_{01}/L_{01}$ .

Un maillage régulier (structuré) est utilisé, avec des éléments en déformation plane, de 4 nœuds bilinéaires, avec intégration réduite et contrôle de hourglass (CPE4R). Le maillage de principe est présenté sur la Figure 5.9 (le maillage est évidemment plus fin pour les cas considérés) :

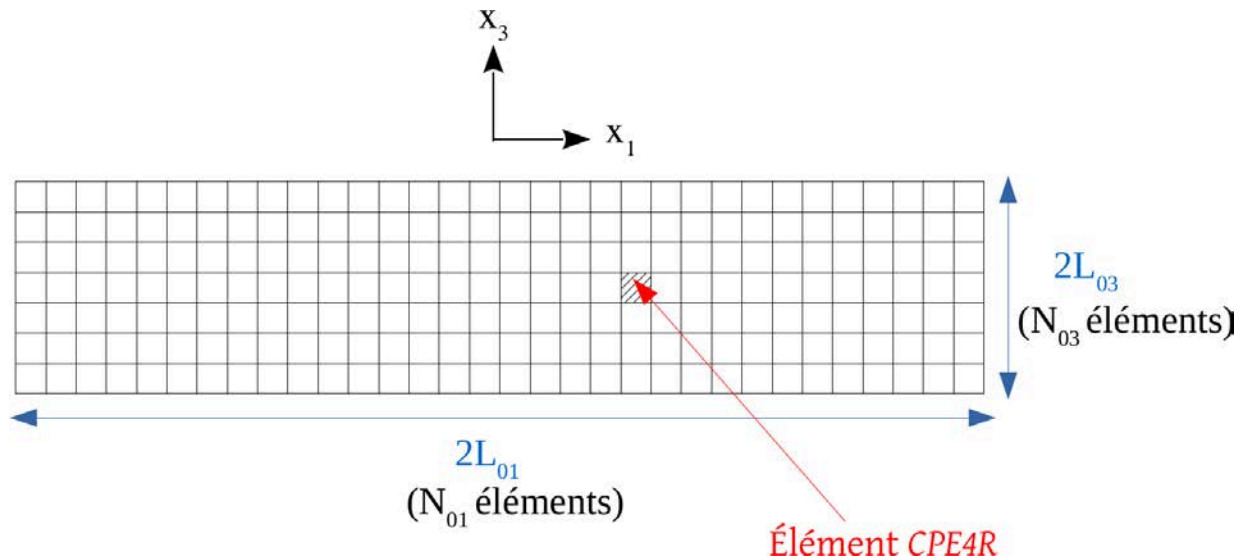


FIGURE 5.9 – Représentation schématique du maillage structuré de la plaque. La plaque est de demi-longueur  $L_{01}$  et de demi-épaisseur  $L_{03}$ . Il y a  $N_{01}$  (resp.  $N_{03}$ ) éléments selon la longueur (resp. l'épaisseur). Les éléments sont de type CPE4R (déformation plane à 4 nœuds et intégration réduite).

La mise en œuvre de notre modélisation par éléments finis nécessite deux calculs. Un calcul est d'abord réalisé sur une structure homogène (sans perturbation introduite) pour modéliser l'écoulement de base qui sert de référence dans la suite. Puis un second calcul avec la présence d'une perturbation est réalisé. Dans les deux cas, l'état initial de la plaque perturbée, étudiée par la suite, correspond à un état en chargement plastique afin d'éviter les futures propagations d'ondes. Le nœud  $M_{ij}$  de la plaque ( $0 \leq i \leq N_{01}$ ,  $0 \leq j \leq N_{03}$ ) a

pour coordonnées :

$$X_1^{ij} = -L_{01} + 2iL_{01}/N_{01} \quad X_3^{ij} = -L_{03} + 2jL_{03}/N_{03} \quad (5.1)$$

où  $N_{01}$  (resp.  $N_{03}$ ) désigne le nombre de mailles dans la direction  $\vec{e}_1$  (resp.  $\vec{e}_3$ ).

En vertu des relations établies lors de l'étude de l'écoulement de base (voir section 2.2), les champs suivants sont définis à l'instant initial, en tout point de la plaque :

— les composantes  $v_1^{ij}$  et  $v_3^{ij}$  de la vitesse du nœud  $M_{ij}$  sont définies grâce à la relation :

$$v_1^{ij} = X_1^{ij} \dot{\varepsilon}_{11} \quad v_3^{ij} = -X_3^{ij} \frac{\dot{\varepsilon}_{11}}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \quad (5.2)$$

— le tenseur des contraintes  $\Sigma$  dont l'expression est donnée par les équations (2.24) et (2.31) :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2Y/\sqrt{3} - P^I(X_3, t) & 0 & 0 \\ 0 & Y/\sqrt{3} - P^I(X_3, t) & 0 \\ 0 & 0 & -P^I(X_3, t) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

avec  $P^I$ , la pression inertielle définie par l'équation (2.25) :

$$P^I(X_3, t) = \rho \frac{\dot{\varepsilon}_{11}^2 (L_{03}^2 - X_3^2)}{(1 + \varepsilon_{11})^4} \quad (5.4)$$

En adoptant l'équation (5.3), on suppose donc que le matériau est initialement sur sa surface de charge. L'initialisation du modèle est cruciale. En effet, si les faces latérales de la plaque sont abruptement mises en mouvement à  $t = 0$  alors que le reste de la plaque est au repos, une onde plastique va se propager. Ce phénomène peut alors déclencher une striction associée à une longueur d'onde différente de celle imposée. Cette remarque est déjà présente chez Xue *et al.* (2008) ou Zaera *et al.* (2015).

Nous présentons dans la section suivante la géométrie et la loi de comportement adoptée

dans la suite du chapitre.

### 5.2.2 Configuration géométrique et loi de comportement

La géométrie est reprise de Jouve (2013) : on considère une plaque de demi-longueur  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et de demi-épaisseur  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ , soumise à une vitesse de traction  $V_{01}$  sur les faces ( $X_{01} = \pm L_{01}$ ) ; le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = V_{01}/L_{01}$ . Dans la suite, on choisira une vitesse de traction  $V_{01} = 1000 \text{ m/s}$  (gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ ).

Nous reprenons la loi de comportement adoptée par Jouve (2013) (matériau écrouissable non sensible à la vitesse de déformation) :

$$Y = \alpha_1 + \alpha_2 (\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n \quad (5.5)$$

où  $n$  est le coefficient d'écrouissage.  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\varepsilon_i$  sont des paramètres du matériau. Dans cette section, tous les résultats seront obtenus avec des valeurs fixées pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0,25$ , voir Table 5.1. Jouve (2013) a adopté une valeur de  $\varepsilon_i = 1,29$  afin de pouvoir appliquer l'hypothèse de séparation des échelles de temps du modèle *CLSA*. L'écoulement est très instable et une faible perturbation conduit à une localisation presque immédiate. Notre modèle *XLSA* permet d'étudier l'évolution des perturbations même lorsque le modèle *CLSA* ne détermine pas de taux de croissance positif. Ainsi, nous adoptons  $\varepsilon_i = 0,15$  ; à l'instant initial, l'écoulement est alors instable mais il sera montré que pour les longueurs d'onde étudiées dans la suite, le modèle *CLSA* ne fournit pas de taux de croissance positifs et donc une évolution de la perturbation pourra être observée avant que la perturbation ne se développe fortement.

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$n$	$\varepsilon_i$
1 GPa	1 GPa	0,25	0,15

TABLE 5.1 – Paramètres adoptés pour la loi de comportement décrite par l'équation (5.5).

Dans notre modèle numérique, le comportement du matériau est élasto-plastique (on rappelle que dans l'Analyse Linéaire de Stabilité présentée précédemment, l'élasticité est négligée). On considère ici que le comportement élastique est isotrope de module d'Young  $E = 150 \text{ GPa}$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0,33$  (un comportement quasi-incompressible correspond au cas  $\nu = 0,4995$ ). Notons que l'initialisation envisagée (équations 5.2 à 5.4) correspond à un matériau rigide incompressible. L'hypothèse quasi-incompressible pour l'élasticité n'est pas retenue car les vitesses d'ondes associées seraient infinies et le pas de temps chuterait. Néanmoins, on a observé que l'approximation imputable à la non prise en compte de l'élasticité dans les conditions initiales n'engendre pas d'ondes de forte amplitude pouvant induire un motif de striction différent de la perturbation introduite.

La qualité de l'initialisation est étudiée dans la section suivante où l'on présente les résultats obtenus avec une plaque parfaite, sans défaut initial.

### 5.2.3 Plaque parfaite

Dans les différentes configurations présentées dans la suite du chapitre, la plaque parfaite a servi de référence pour étudier l'évolution des perturbations. La Figure 5.10 présente l'évolution de la force axiale mesurée sur la surface de chargement en fonction du temps. Ce résultat est obtenu par le modèle par éléments finis pour la plaque homogène. Le maillage comprend  $N_{01} = 3200$  mailles dans le sens de la longueur et  $N_{03} = 160$  mailles dans l'épaisseur. Dans la suite du chapitre, une étude de convergence en maillage est réalisée. L'évolution temporelle de la force, dont l'expression analytique par unité de longueur selon la direction  $x_2$  est donnée par l'équation (5.6), est également présentée sur la Figure 5.10.

$$F_{theo} = \frac{4Y}{\sqrt{3}} \frac{L_{03}}{1 + \varepsilon_{11}} \quad (5.6)$$

Dans les premiers instants, on note des oscillations, peu visibles sur la Figure 5.10, dues à la propagation d'ondes qui finissent par se dissiper. La force diminue continûment

et coïncide avec la solution analytique. À  $t = 150 \mu s$  (soit une déformation nominale de  $\varepsilon_{11} = 1,5$ ), la plaque ne présente aucune striction.

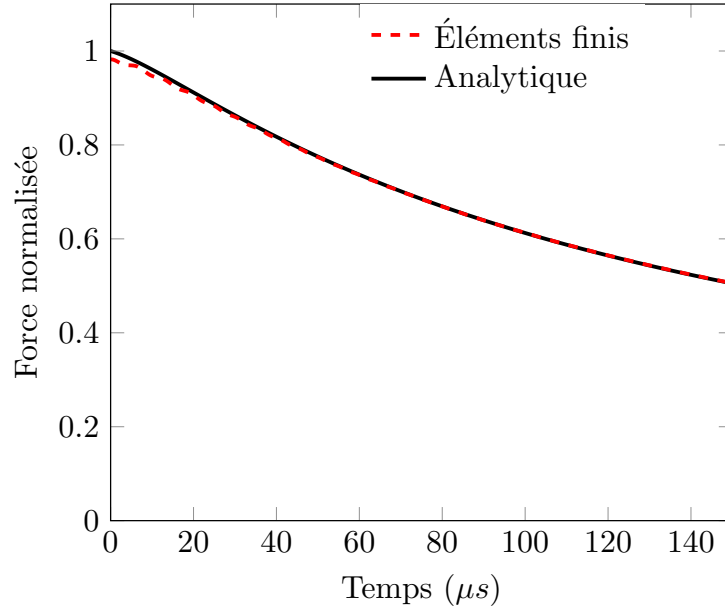


FIGURE 5.10 – Évolution de la force axiale, par unité de longueur selon la direction  $x_2$ , exercée sur la face latérale de la plaque pour le modèle par éléments finis. La force est normalisée par la valeur de la solution analytique à l’instant initial  $4Y/\sqrt{3}L_{03}$ . La solution analytique est présentée. La loi de comportement est donnée par l’équation (5.5) et les paramètres de la Table 5.1. La vitesse de chargement est  $V_{01} = 1000 \text{ m/s}$  (gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ ). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

Le calcul sur la plaque parfaite est validé et l’initialisation proposée permet d’envisager l’étude du développement d’une perturbation imposée sans avoir des interférences liées aux ondes générées à l’instant initial. La section suivante est consacrée à la présentation du cas de référence pour l’étude du développement de perturbations au sein de l’écoulement.

## 5.3 Analyse monomodale

### 5.3.1 Modèle perturbé

Le modèle par éléments finis est désormais utilisé pour étudier le développement d’une perturbation. À l’instant initial  $t_0 = 0$ , une perturbation  $\delta \mathbf{x}$  de la position est superposée à

l'écoulement homogène. Les coordonnées des nœuds  $M_{ij}$  seront modifiées en conséquence. Dans notre approche, seule la coordonnée selon la direction de l'épaisseur est modifiée :

$$X_3^{ij} = X_3^{ij (b)} + \delta x_3^0(X_1^{ij (b)}, X_3^{ij (b)}) \quad (5.7)$$

où  $X_3^{ij (b)}$  est la coordonnée dans l'épaisseur de  $M_{ij}$  dans l'écoulement de base (voir l'équation 5.1). Pour être représentative d'une perturbation monomodale, la perturbation  $\delta x_3^0$  est définie par :

$$\delta x_3^0 = \cos(\gamma_1 X_1) \hat{x}_3^0(X_3) \quad (5.8)$$

avec :

$$\gamma_1 = 2p\pi/2L_{01} = p\pi/L_{01} \quad (5.9)$$

avec  $p$ , l'entier qui définit le nombre de défauts d'épaisseur le long de la direction de traction.

Dans la suite, on adopte une perturbation  $\hat{x}_3^0$  de la forme :

$$\hat{x}_3^0(X_3) = \frac{A}{2} \frac{X_3}{L_{03}}, \quad -L_{03} \leq X_3 \leq L_{03} \quad (5.10)$$

avec  $A$ , amplitude crête à creux de la perturbation sur les faces inférieure et supérieure de la plaque. L'influence de  $A$  sera étudiée par la suite.

Notons que dans le modèle de perturbation linéaire, l'incompressibilité induit une relation entre  $\delta x_1$  et  $\delta x_3$ . Cette relation n'est plus valable dans le cas du modèle par éléments finis avec une élasticité compressible. Hormis la coordonnée  $x_3$ , nous avons décidé de ne perturber aucun autre champ. Notons que les conditions initiales (5.1) à (5.4) ne s'appliquent qu'à la plaque parfaite. Dans le cas d'une géométrie perturbée, Xue *et al.* (2008) notent qu'en chaque point du domaine, le matériau n'est pas rigoureusement sur la surface de charge et qu'une onde plastique se propage au sein de la plaque. Son amplitude reste cependant faible. On fait alors le choix de laisser le modèle évoluer librement car la

perturbation est de faible amplitude. L'initialisation est donc de bonne qualité.

### Grandeurs d'étude

Soit  $G(X_1, X_3, t)$  un champ de l'écoulement perturbé et  $G^{(b)}(X_1, X_3, t)$  le champ associé dans l'écoulement de la structure homogène. Nous introduisons le champ de perturbation  $\delta G(X_1, X_3, t)$  par :

$$\delta G(X_1, X_3, t) = G(X_1, X_3, t) - G^{(b)}(X_1, X_3, t) \quad (5.11)$$

Le champ  $G^{(b)}$  est calculé au moyen de la simulation par éléments finis de l'écoulement homogène et non pas au moyen de la solution fondamentale calculée dans le chapitre 2 car le comportement du matériau dans le modèle par éléments finis est élasto-plastique.

Il est nécessaire de définir des grandeurs pour suivre l'évolution des champs mécaniques dans l'écoulement perturbé afin de quantifier l'écart entre les deux modèles. Nous introduisons, pour tout champ de perturbation  $\delta G(X_1, X_3, t)$ , la norme  $\|\delta G\|$  définie par :

$$\|\delta G\| = \frac{1}{\sqrt{2L_{01}}} \sqrt{\int_{-L_{01}}^{L_{01}} \delta G^2(X_1, \pm L_{03}, t) dX_1} \quad (5.12)$$

qui représente l'amplitude de la perturbation à l'instant  $t$  sur la surface libre de la plaque en  $X_{03} = \pm L_{03}$ . Une norme nulle correspond au cas de la plaque parfaite.

Les amincissements locaux le long de la plaque résultent du développement de la composante  $\delta x_3$  de la perturbation de la position. On définit alors la grandeur adimensionnelle  $J(t)$  par :

$$J(t) = \frac{\|\delta x_3\|}{L_3^{(b)}} \quad (5.13)$$

décrivant l'évolution temporelle de l'amincissement rapporté à la demi-épaisseur  $L_3^{(b)}$  de la



plaque à l'instant courant  $t$ . On définit également la grandeur adimensionnelle  $K(t)$  par :

$$K(t) = \frac{\|\delta v_3\|}{v_3^{(b)}} \quad (5.14)$$

mesurant l'évolution temporelle de la perturbation de la vitesse transversale au cours du temps.

Enfin, nous proposons d'étudier la grandeur adimensionnelle  $Z(t)$ , définie par :

$$Z(t) = \frac{\|\delta v_3\|}{\|\delta x_3\|} \frac{1}{\dot{\epsilon}_{11}} \quad (5.15)$$

La grandeur  $Z(t)$  pourra donc être comparée au taux de croissance normalisé de la perturbation au sens du modèle classique (*CLSA*). En effet, dans le cas limite des écoulements fortement découplés et pour un mode longitudinal donné, l'équation (A.2) montre que  $\delta v_3 = \eta \delta x_3$  où  $\eta$  est le taux de croissance de la perturbation. Il vient alors  $Z(t) = \eta / \dot{\epsilon}_{11}$ . De fait,  $Z(t)$  correspond au taux de croissance normalisé au sens du modèle *CLSA*.

Dans la sous-section 5.3.2, le cas de référence est présenté. Puis, l'influence du nombre de strictions  $p$  le long de la plaque est étudiée dans la sous-section 5.3.3. Enfin, l'influence de l'amplitude du défaut initial est étudiée dans la section 5.3.4.

### 5.3.2 Cas de référence

Dans le cas de référence, on considère 12 strictions le long de la plaque soit un nombre d'onde  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . L'amplitude crête à creux du défaut est fixée à  $A = 8 \mu m$ . La géométrie est représentée schématiquement sur la Figure 5.11.

La loi de comportement est donnée par la relation (5.5) avec les paramètres de la table 5.1.

La Figure 5.12 présente l'évolution temporelle du taux de croissance  $\eta / \dot{\epsilon}_{11}$  calculé par l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique (*CLSA*, voir Annexe A). Deux phases dans l'évo-

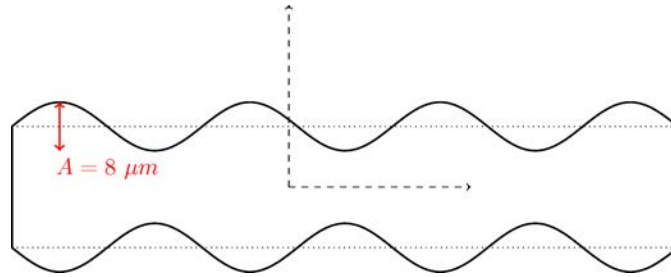


FIGURE 5.11 – Représentation schématique de la plaque à l’instant initial. La perturbation est définie par les équations (5.7) à (5.10).  $A$  représente l’amplitude crête à creux de l’état de surface de la plaque.

lution de la perturbation sont distinguées. Jusqu’à  $t = 60 \mu s$ , le modèle *CLSA* ne détermine pas de taux de croissance positif suffisamment grand pour rendre compte d’une croissance rapide de la perturbation. À  $t = 60 \mu s$ , le taux de croissance augmente de manière importante et l’amplitude de la perturbation croît.

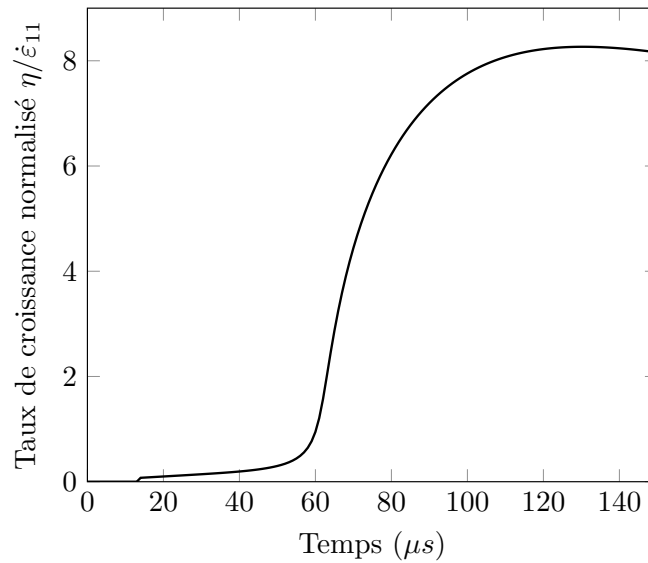


FIGURE 5.12 – Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  du mode  $p = 12$  calculé par l’Analyse Linéaire de Stabilité Classique (*CLSA*, voir Annexe A). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l’équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ .

Dans la suite, nous allons comparer l’évolution de la perturbation prédite par le modèle par éléments finis et le modèle *XLSA*. Avant de poursuivre plus en avant l’analyse, une étude de convergence en maillage a été réalisée.

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
$N_{01}$	600	800	1600	3200	4800
$N_{03}$	30	40	80	160	240

TABLE 5.2 – Caractéristiques des différents maillages utilisés pour définir un maillage de référence.

### Convergence en maillage

L'évolution temporelle de la norme  $K(t)$  de la perturbation ( $p = 12$ ) en vitesse, définie selon l'équation (5.14), calculée par le modèle par éléments finis est donnée en Figure 5.13 pour les premiers instants. Plusieurs maillages, définis dans la Table 5.2, sont adoptés. On définit par  $l_1$  (resp.  $l_3$ ) la taille des mailles dans la direction longitudinale (resp. de l'épaisseur). Pour tous les niveaux de maillage, le rapport initial  $l_1/l_3$  est fixe et égal à  $1/2$ , de sorte qu'au cours de la déformation, les mailles ne soient pas trop étirées dans la direction  $\vec{e}_1$ . Les tailles de maille obtenues sont du même ordre de grandeur que Rusinek et Zaera (2007) pour le cas de l'anneau.

On observe des oscillations qui diminuent au cours du temps et dont l'amplitude décroît à mesure que le maillage est raffiné. Ces oscillations sont dues aux conditions initiales. On observe une convergence de résultats pour un maillage suffisamment fin (résultats identiques pour les maillages  $M_4$  et  $M_5$ ). Dans la suite, le maillage retenu est le maillage  $M_4$  avec  $N_{01} = 3200$  éléments dans la direction longitudinale et  $N_{03} = 160$  éléments dans la direction de l'épaisseur.

### Comparaison éléments finis/*XLSA*

L'évolution de la perturbation est étudiée en parallèle avec le modèle étendu (*XLSA*) et le schéma numérique associé (voir chapitre 3, section 3.3).

La Figure 5.14 présente l'évolution temporelle de la norme  $J(t)$  de la perturbation de la position, définie par l'équation (5.13), pour le modèle par éléments finis et le modèle

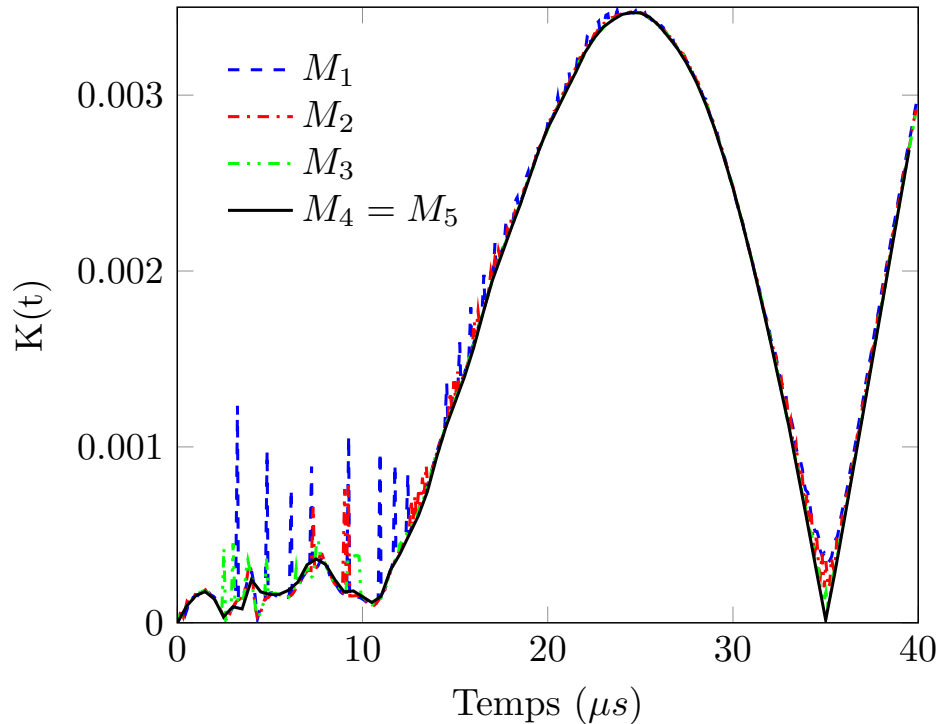


FIGURE 5.13 – Évolution temporelle de la norme de la perturbation ( $p = 12$ ) de la vitesse définie par l'équation (5.14) sur la face inférieure ( $X_3 = -L_{03}$ ) pour les maillages définis dans le tableau (5.2). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ } \mu\text{m}$ . Les résultats obtenus pour les maillages  $M_4$  et  $M_5$  sont similaires. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

XLSA. Les résultats sont proches pour les deux modèles. On distingue deux phases dans l'évolution. Aux temps courts, le modèle XLSA révèle deux annulations de  $J(t)$  à  $t = 27 \text{ } \mu\text{s}$  et  $t = 42 \text{ } \mu\text{s}$ . Une seule annulation est révélée par le modèle par éléments finis à  $t = 40 \text{ } \mu\text{s}$ . Les tendances sont néanmoins restituées. En effet, on constate bien que le modèle par éléments finis présente aussi un minimum local de  $J(t)$  autour de  $t = 29 \text{ } \mu\text{s}$ . L'écart entre les deux modèles augmente à mesure que l'amplitude de la perturbation augmente. C'est un résultat attendu puisque le modèle XLSA est une méthode de perturbation linéaire, basée sur la superposition d'une perturbation qui est, par hypothèse, de faible amplitude. Lorsque l'amplitude de la perturbation augmente, seule une solution numérique peut reproduire les effets non linéaires marqués.

La Figure 5.15 compare l'évolution temporelle de la norme  $K(t)$  de la perturbation

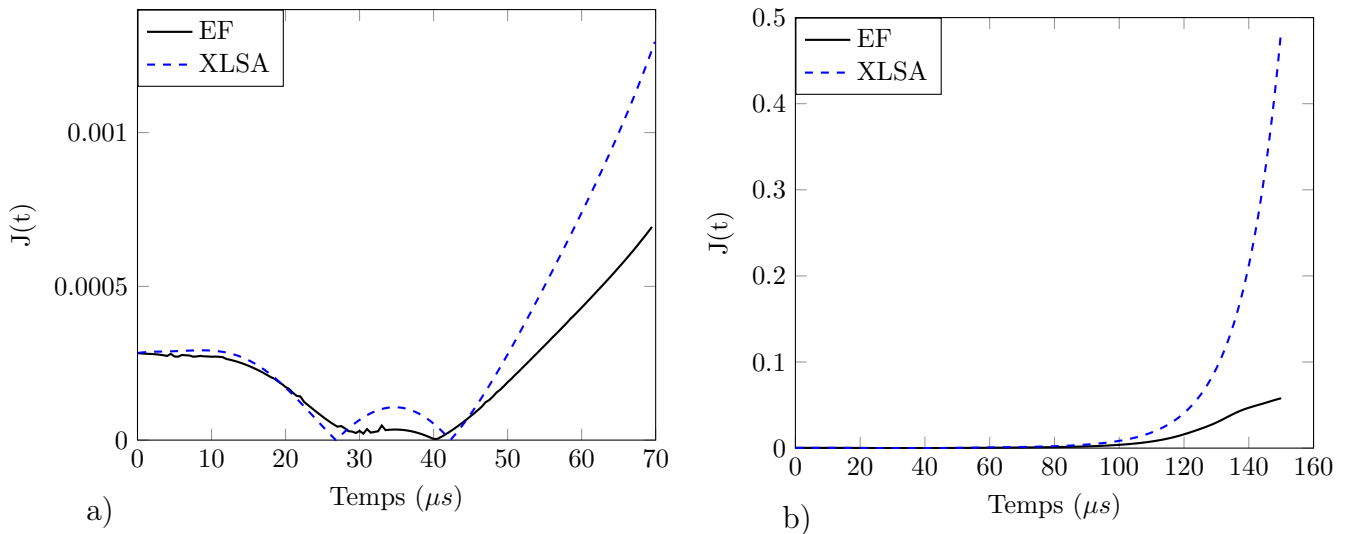


FIGURE 5.14 – Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $J(t)$  de la perturbation de la position définie par l'équation (5.13). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

de la vitesse, définie par l'équation (5.14), pour le modèle par éléments finis et le modèle XLSA. Les évolutions aux temps courts sont très voisines (voir Figure 5.15a). L'amplitude de la perturbation de la vitesse augmente puis diminue jusqu'à s'annuler pour  $t = 34 \text{ }\mu\text{s}$  (même instant pour les deux modèles). Les deux approches prédisent une augmentation importante de l'amplitude de  $K(t)$  à partir de  $t = 60 \text{ }\mu\text{s}$ , correspondant à l'instant de déclenchement de l'instabilité prédit par le modèle classique (voir Figure 5.12).

La Figure 5.16 présente la carte spatiale de  $\delta\dot{\varepsilon}_p/\dot{\varepsilon}_p^{(b)}$  à deux instants  $t = 27 \text{ }\mu\text{s}$  (avant que l'amplitude  $K(t)$  ne s'annule) et  $t = 36 \text{ }\mu\text{s}$  (juste après que l'amplitude  $K(t)$  ne s'annule). Cette grandeur représente la déviation par rapport à l'écoulement homogène pour la vitesse de déformation plastique. Les prédictions pour les deux modèles sont présentées. On note que les résultats sont très comparables pour les deux approches en termes d'amplitude des déviations et en termes de comportement de la perturbation dans la direction de l'épaisseur. L'alternance des motifs dans la longueur suit le nombre d'onde  $\gamma_1$ . On remarque aussi un motif alterné dans l'épaisseur indiquant la présence d'un nombre

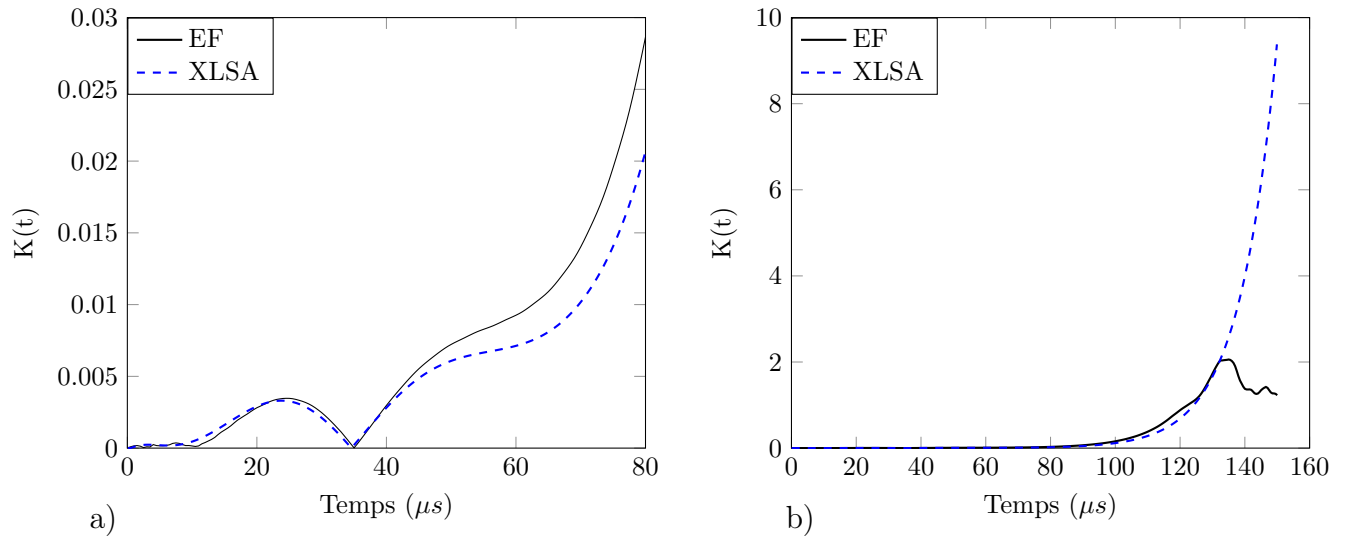


FIGURE 5.15 – Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse définie par l'équation (5.14). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

d'onde transversal. Notons au passage que la carte spatiale est très similaire à celle présentée par Jouve (2013) (voir Figure 5.7). La Figure 5.17 présente l'évolution de la grandeur  $\delta v_3(-L_{01}, X_3, t)/v_3^{(b)}(-L_{01}, L_{03}, t)$  en fonction de la coordonnée normalisée  $X_3/L_{03}$  de l'épaisseur aux instants  $t = 27 \text{ }\mu\text{s}$  et  $t = 36 \text{ }\mu\text{s}$ . À nouveau, le modèle XLSA permet une bonne restitution des résultats issus du modèle par éléments finis.

La Figure 5.18 présente la carte spatiale de  $\delta \dot{\varepsilon}_p / \dot{\varepsilon}_p^{(b)}$  à l'instant  $t = 105 \text{ }\mu\text{s}$ . La perturbation s'est bien développée et la vitesse de déformation plastique apparaît homogène dans la direction de l'épaisseur. On observe donc, pour les temps longs, un fort changement de la dépendance selon l'épaisseur (par comparaison des Figures 5.16 et 5.18). Notons que l'homogénéité de la perturbation de la vitesse de déformation dans l'épaisseur est prédite par l'approche classique. En effet, d'après le modèle classique CLSA, le calcul des modes propres du système lorsque l'écoulement est fortement instable conduit à une fonction de courant  $\hat{\psi}$  presque linéaire dans l'épaisseur (voir chapitre 4, Figure 4.3, page 83). Autrement

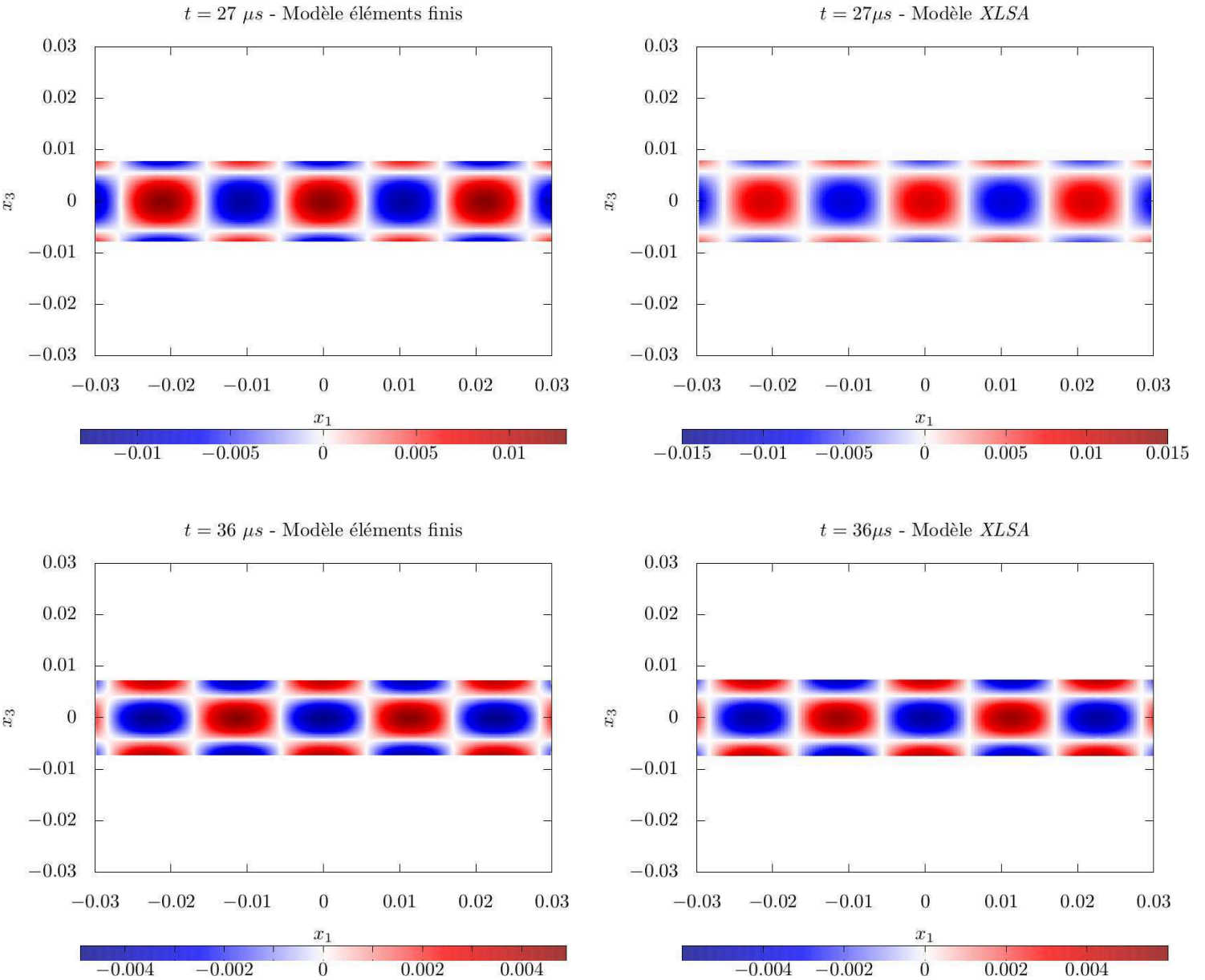


FIGURE 5.16 – Nappes  $\delta\hat{\epsilon}_p/\hat{\epsilon}_p^{(b)}$  aux instants  $t = 27 \mu s$  et  $t = 36 \mu s$  pour le modèle par éléments finis et le modèle XLSA. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres issus de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut ( $p = 12$ ) est  $A = 8 \mu m$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans le tableau (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ .

dit :

$$\hat{\psi}^{CLSA} \simeq \alpha \exp(\eta t) X_3 \quad \alpha, \text{ coefficient d'amplitude} \quad (5.16)$$

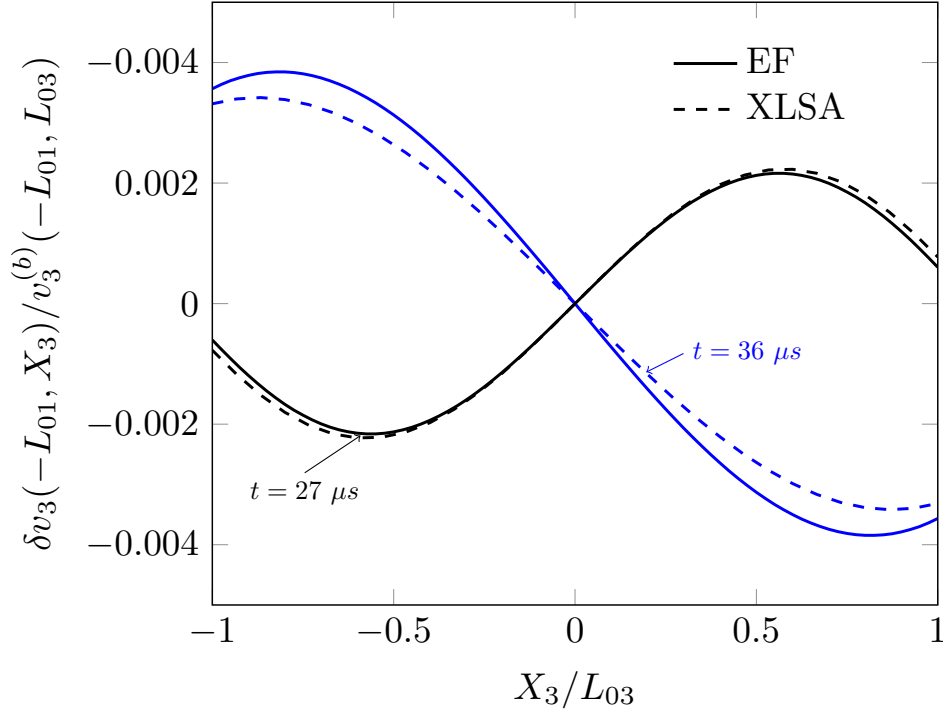


FIGURE 5.17 – Composante  $\delta v_3$  de la perturbation de la vitesse sur la face latérale ( $X_1 = -L_{01}$ ) de la plaque normalisée à l’instant  $t = 27 \mu s$  et  $t = 36 \mu s$  en fonction de la coordonnée normalisée  $X_3/L_{03}$  pour le modèle par éléments finis et le modèle XLSA. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l’équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L’amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \mu m$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table 5.2. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ .

Comme la perturbation de la vitesse de déformation plastique se déduit de la fonction de courant par la relation (en vertu des relations (3.26) et (3.47)) :

$$\delta \dot{\varepsilon}_p = -\frac{2}{\sqrt{3}} \gamma_1 \cos(\gamma_1 X_1) \dot{\psi}_{,3}, \quad (5.17)$$

d’après les équations 5.16 et 5.17, le modèle classique prédit que la perturbation de la vitesse de déformation plastique est homogène dans la direction de l’épaisseur  $x_3$  lorsque l’écoulement est très instable.

L’évolution temporelle du maximum sur la face inférieure de la grandeur  $\frac{\delta \dot{\varepsilon}_p}{\delta \dot{\varepsilon}_p^0}$  pour les modèles XLSA et CLSA (obtenue en intégrant le taux de croissance calculé par l’approche



classique, voir chapitre 4, équation 4.6) est présentée sur la Figure 5.19. Le résultat obtenu par le modèle par éléments finis est très proche des résultats *XLSA*. On observe une différence nette aux temps courts qui persiste aux temps longs, lorsque la phase de croissance rapide de la perturbation démarre. Ainsi, la cartographie de la Figure 5.18 est retrouvée par le modèle *CLSA* mais pas les amplitudes associées.

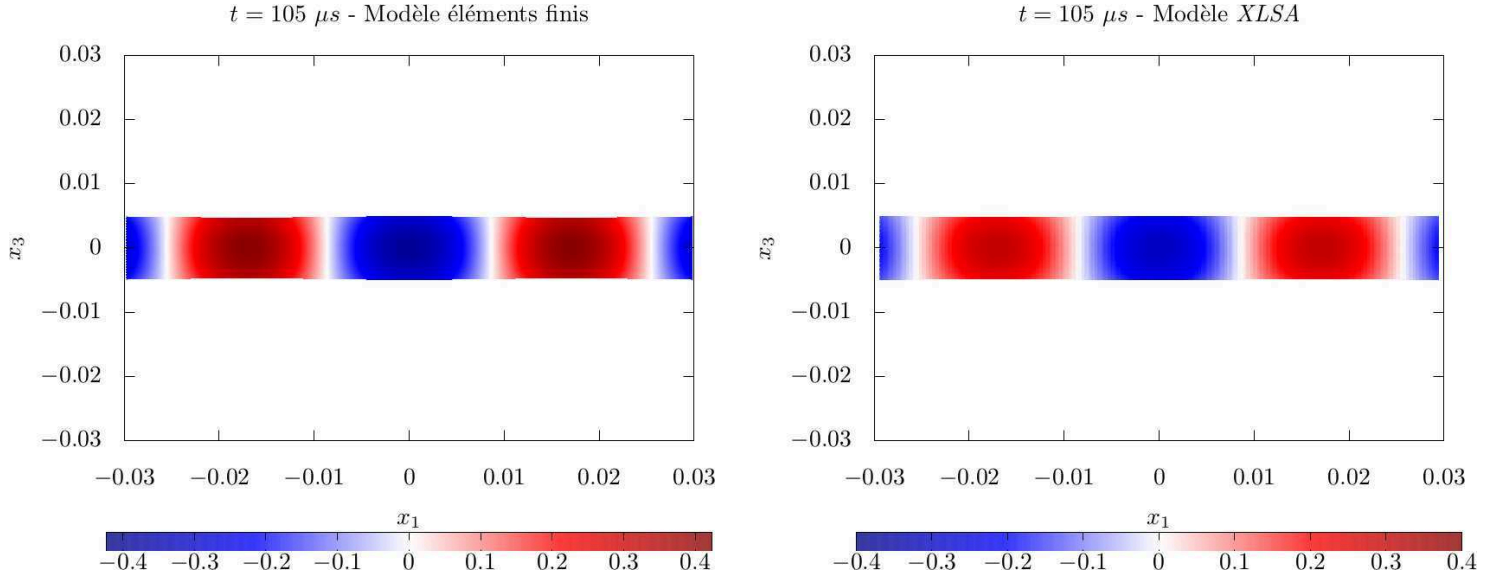


FIGURE 5.18 – Nappes  $\delta\dot{\varepsilon}_p/\dot{\varepsilon}_p^{(b)}$  à l’instant  $t = 105 \mu s$  pour le modèle par éléments finis et le modèle *XLSA*. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l’équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L’amplitude crête à creux du défaut ( $p = 12$ ) est  $A = 8 \mu m$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ .

La Figure 5.15 révèle que les deux modèles (éléments finis et *XLSA*) divergent clairement à  $t = 130 \mu s$  mais que des écarts significatifs entre les deux modèles sont déjà observés à partir de  $t = 117 \mu s$  où le modèle par éléments finis présente une rupture de pente. On a observé que cet instant correspond à l’apparition dans la simulation par éléments finis d’éléments au sein desquels la vitesse de déformation plastique est nulle. C’est le signe de l’apparition des premières décharges élastiques et de la localisation. Ce phénomène est encore mieux observé lorsque l’on s’intéresse au taux de croissance  $Z(t)$  de la perturbation (selon la définition 5.15). Son évolution temporelle (calculée avec le modèle par éléments finis et le modèle *XLSA*) est donnée en Figure 5.20. Le modèle par éléments finis et le

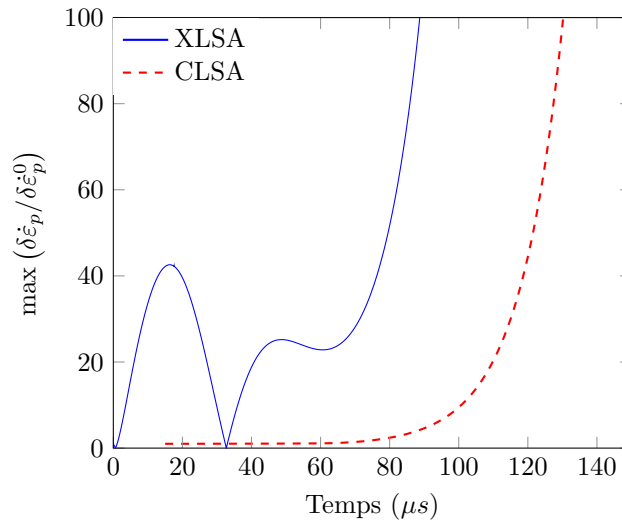


FIGURE 5.19 – Évolution temporelle de  $\max(\delta\dot{\epsilon}_p/\delta\dot{\epsilon}_p^0)$  par le modèle XLSA. Les résultats avec le modèle classique sont obtenus par intégration du taux de croissance calculé par la CLSA (voir chapitre 4, équation 4.6). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ } \mu\text{m}$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

modèle XLSA donnent des résultats similaires. On note une différence, peu visible, dans les premiers instants (entre  $t = 0 \text{ } \mu\text{s}$  et  $t = 15 \text{ } \mu\text{s}$ ) avec de légères oscillations observées sur le modèle par éléments finis résultant d'ondes induites par les conditions initiales. Ces oscillations sont ensuite atténuées et les deux modèles coïncident. Aux instants  $t = 27 \text{ } \mu\text{s}$  et  $t = 42 \text{ } \mu\text{s}$ , l'amplitude  $J(t)$  de la perturbation de la position s'annule pour le modèle XLSA (voir Figure 5.14) et la Figure 5.20 révèle que le taux de croissance  $Z(t)$  tend vers l'infini. De même, le taux de croissance  $Z(t)$  s'annule à  $t = 34 \text{ } \mu\text{s}$  correspondant à l'annulation de l'amplitude  $K(t)$  de la perturbation en vitesse (voir Figure 5.15). Puis, les deux modèles sont très proches dans la phase instable jusqu'à l'instant  $t = 117 \text{ } \mu\text{s}$  (déformation nominale  $\epsilon_{11} = 1,17$ ), qui marque l'instant des premières décharges élastiques. C'est l'instant de localisation au-delà duquel le modèle XLSA n'est plus valide. Le taux de croissance calculé avec le modèle classique CLSA est aussi représenté. Le modèle classique ne rend pas compte du début de l'évolution de la perturbation. Il prédit un début de croissance forte de la perturbation à  $t = 60 \text{ } \mu\text{s}$ , ce qui est en accord avec le modèle par éléments finis et le

modèle *XLISA*. Cependant, dans la phase instable, lorsque la séparation des échelles est vérifiée (c'est-à-dire lorsque le taux de croissance est bien plus important que le gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ ), les taux de croissance sont proches pour les trois méthodes lorsque  $t > 70 \mu\text{s}$ . On conclut de la même manière que dans le chapitre 4, quant au fait que le taux de croissance de la méthode *XLISA* tend vers le taux de croissance prédit par la méthode *CLSA* lorsque l'écoulement est fortement découplé. Notre approche *XLISA* permet aussi de décrire l'évolution de la perturbation aux instants de faible croissance de celle-ci.

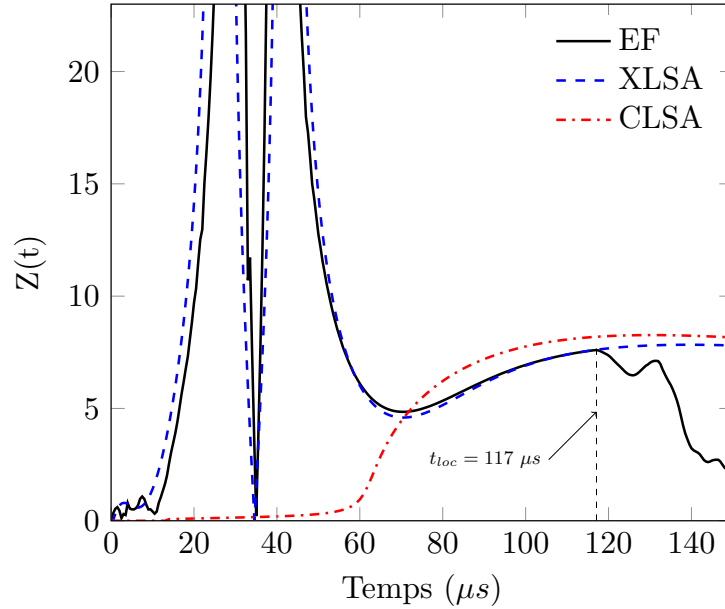


FIGURE 5.20 – Évolution temporelle du taux de croissance  $Z(t)$  de la perturbation défini par l'équation (5.15) sur la face inférieure ( $X_3 = -L_{03}$ ). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial de  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

La Figure 5.21 présente l'évolution temporelle de la force mesurée sur la face latérale de la plaque calculée par le modèle par éléments finis, pour l'écoulement homogène et l'écoulement perturbé. La prédiction théorique obtenue par l'équation (5.6) est aussi reportée. La grandeur présentée est normalisée par la valeur théorique de la force à l'instant initial. Dans les premiers instants, un écart existe entre les résultats des calculs par éléments finis

et la valeur théorique en raison de l'initialisation. Les trois modèles coïncident par la suite jusqu'à  $t = t_{loc} = 117 \mu s$ , où le résultat par éléments finis prédit une chute brutale de l'effort, marquant la localisation, en accord avec les observations de Vaz-Romero *et al.* (2017) (voir Figure 5.5 ou El Maï *et al.*, 2018).

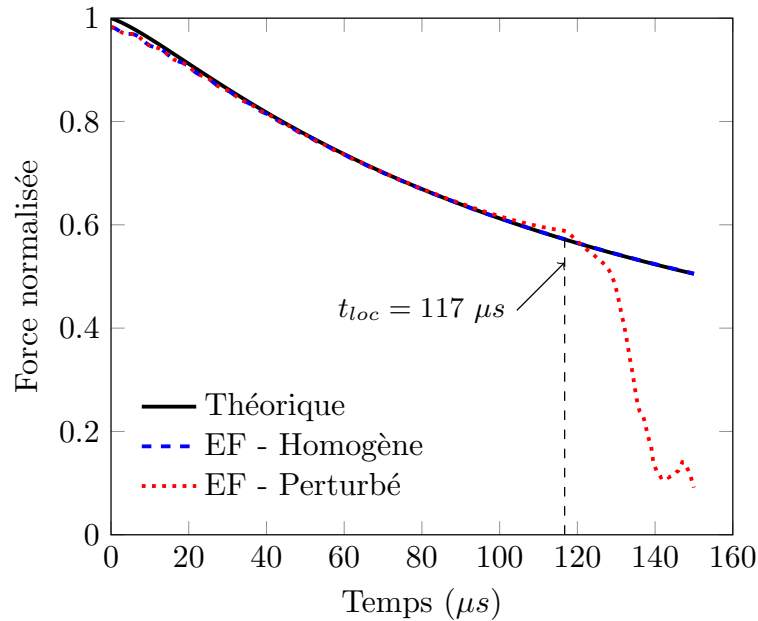


FIGURE 5.21 – Évolution temporelle de la force normalisée sur la face latérale issue du modèle par éléments finis pour la plaque homogène et la plaque perturbée. La valeur théorique obtenue par l'équation (5.6) est aussi présentée. L'instant de localisation est noté  $t_{loc} = 117 \mu s$  et correspond aux premières décharges élastiques dans la simulation numérique. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \mu m$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ .

### 5.3.3 Influence du nombre d'onde

Dans cette section, la configuration de référence est conservée : la loi de comportement est toujours donnée par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1 et le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ . À l'instant  $t_0$ , on superpose une perturbation  $\delta x_3$  définie par les équations (5.8) et (5.10),

avec une amplitude  $A = 8 \mu m$ . Le nombre d'onde est, pour cette section,  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ , soit 20 amincissements distribués initialement le long de la plaque.

La Figure 5.22 présente l'évolution temporelle du taux de croissance  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  calculé par l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique (*CLSA*, voir Annexe A). Comme pour le cas de référence (voir Figure 5.12), deux phases dans l'évolution de la perturbation sont distinguées. Dans la première phase, le modèle *CLSA* ne détermine pas de taux de croissance positifs suffisamment grands pour rendre compte d'une croissance rapide de la perturbation. Le point d'inflexion marquant le début de la croissance forte de l'instabilité est observé à  $t = 101 \mu s$ , soit plus tard que pour le mode de référence où il était observé à  $t = 60 \mu s$ . C'est un résultat attendu puisque les modes de grande longueur d'onde (par exemple  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ ) sont instables avant ceux de courte longueur d'onde (par exemple  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ ). Notons également que le taux de croissance de la perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$  à l'instant  $t = 150 \mu s$  est plus important que celui associé au nombre d'onde de référence (voir Figure 5.12).

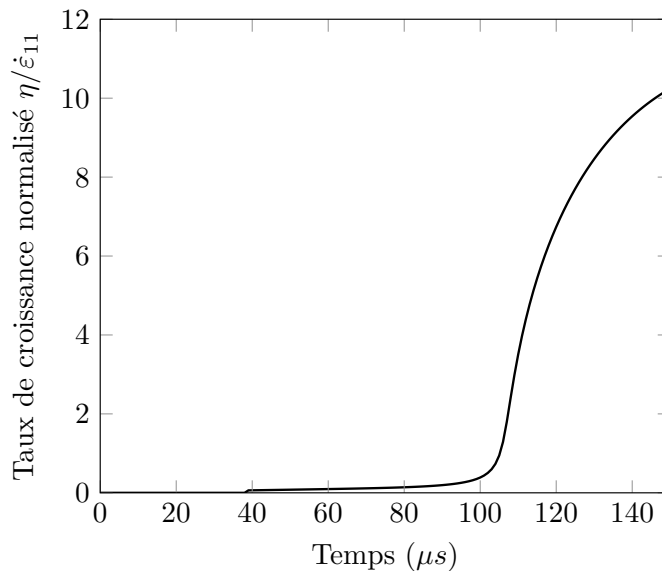


FIGURE 5.22 – Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  calculé par l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique (*CLSA*, voir Annexe A). Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ .

Comme pour le cas de référence, l'évolution de la perturbation est déterminée par le modèle par éléments finis et le modèle XLSA. On présente en Figure 5.23 l'évolution temporelle de l'amplitude  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse définie par l'équation (5.14). Les résultats sont similaires au cas de référence avec une phase stable où l'amplitude

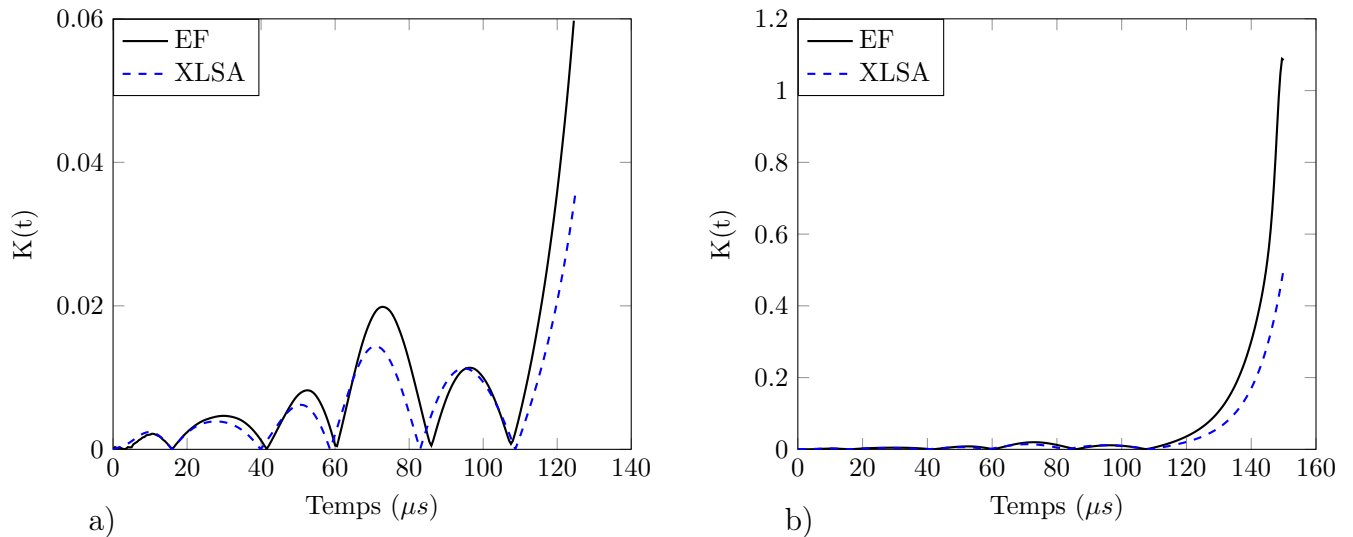


FIGURE 5.23 – Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse définie par l'équation (5.14). Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

de la perturbation évolue peu, s'annulant à plusieurs reprises. On note 5 annulations (2 annulations étaient observées pour le cas de référence, voir Figure 5.15). Puis, à partir de  $t = 110 \text{ }\mu\text{s}$ , l'amplitude de la perturbation de la vitesse augmente fortement. L'amplitude  $K(t)$  pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$  est plus faible que pour le nombre d'onde  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$  (voir Figure 5.15b) aux grands temps et en particulier à l'instant  $t = 117 \text{ }\mu\text{s}$  correspondant à l'instant d'apparition des premières décharges pour le cas de référence (voir Figure 5.21). Cette observation est complétée par l'étude du taux de croissance de la perturbation (définie selon l'équation 5.15) et présentée en Figure 5.24.

On observe sur le résultat obtenu par éléments finis, comme dans le cas de référence, de légères oscillations en début de déformation dues à la définition des conditions initiales du

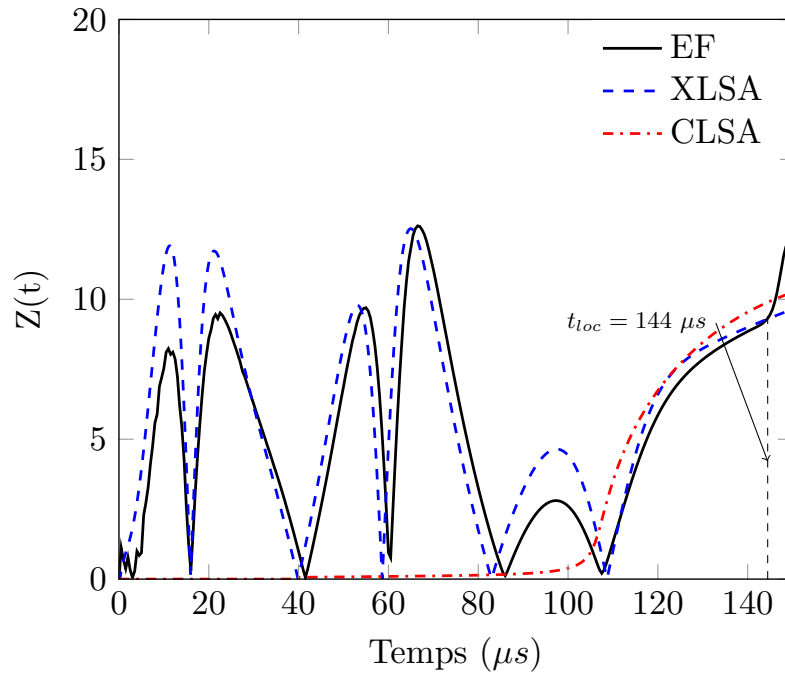


FIGURE 5.24 – Évolution temporelle du taux de croissance  $Z(t)$  de la perturbation défini par l'équation (5.15). Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude du défaut crête à creux est  $A = 8 \text{ } \mu\text{m}$ . Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

modèle. Jusqu'à  $t = 100 \text{ } \mu\text{s}$ , le modèle classique (*CLSA*) ne propose pas de taux de croissance suffisamment grand pour que le système soit très instable. Dans cette phase, le taux de croissance de la perturbation est proche pour les modèles par éléments finis et *XLSA*. À l'instant  $t = 107 \text{ } \mu\text{s}$ , le modèle classique prédit des taux de croissance positifs significatifs, synonymes de croissance de l'instabilité pour le mode considéré. Cette observation est cohérente avec la Figure 5.23 où il était observé un début de croissance de l'amplitude de la perturbation de la vitesse vers  $t = 110 \text{ } \mu\text{s}$ . Les taux de croissance ainsi que leurs évolutions sont proches pour les trois modèles (éléments finis, *XLSA* et *CLSA*) aux temps longs ( $t > 107 \text{ } \mu\text{s}$ ). Enfin, on observe pour le modèle par éléments finis un changement brutal de l'évolution temporelle du taux de croissance à  $t = 144 \text{ } \mu\text{s}$ . Ce changement est, comme pour le cas de référence, dû aux premières décharges élastiques et à l'apparition de zones avec une vitesse de déformation plastique nulle. Dans le cas du nombre d'onde

$\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ , cette décharge intervient plus tôt dans la déformation, à  $t = 117 \mu s$ .

### 5.3.4 Influence de l'amplitude du défaut

Dans cette section, l'influence de l'amplitude  $A$  du défaut (voir définition 5.10) est étudiée. La configuration est celle de référence (mode  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ , gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ ). La plaque est perturbée avec des défauts de plus grande amplitude  $A = 8 \mu m$  (valeur de référence),  $12 \mu m$ ,  $32 \mu m$ ,  $48 \mu m$ ,  $64 \mu m$  et  $80 \mu m$ .

L'évolution temporelle de la norme de la perturbation en position  $J(t)$ , définie par l'équation (5.13), est illustrée en Figure 5.25 pour les différentes valeurs d'amplitude du défaut. Seuls les résultats issus des calculs par éléments finis sont présentés. Pour toutes les amplitudes, deux phases peuvent encore être identifiées. Dans un premier temps, une phase stable, dont la durée est la même pour toutes les valeurs d'amplitude. La norme de la perturbation s'annule par deux fois aux instants  $t = 27 \mu s$  et  $t = 42 \mu s$  pour toutes les valeurs d'amplitude testées. Puis, la perturbation croît jusqu'à la localisation où l'on observe clairement un ralentissement dans l'évolution de l'amplitude de la perturbation ;  $J(t)$  est une grandeur moyennée sur la longueur. Donc même si la perturbation croît vite au sein des strictions, en dehors, la déformation peut se figer de sorte qu'en moyenne  $J(t)$  croît encore mais de manière moins rapide. L'instant  $t_{loc}$  de localisation qui correspond aux premières décharges élastiques relevé dans le modèle par éléments finis diminue quand l'amplitude  $A$  du défaut augmente, voir Table 5.3.

$A (\mu m)$	8	12	32	48	64	80
$t_{loc} (\mu s)$	117	112	101	96	93	91

TABLE 5.3 – Instant  $t_{loc}$  de localisation relevé dans le modèle par éléments finis pour les différentes amplitudes  $A$  du défaut. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ .



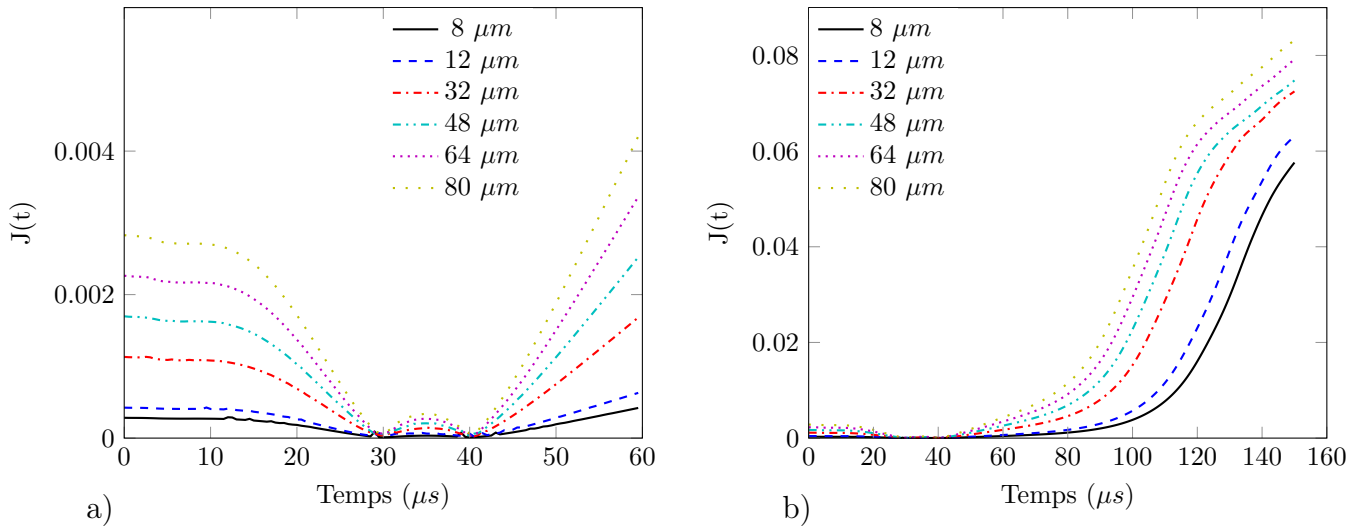


FIGURE 5.25 – Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $J(t)$  de la perturbation de la position définie par l'équation (5.13) pour différentes valeurs d'amplitude de défaut  $A$ . Résultats issus du modèle par éléments finis. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

L'évolution temporelle de la norme de la perturbation de la vitesse (selon la définition 5.14) est présentée en Figure 5.26 pour les différentes valeurs d'amplitude initiale du défaut. Notons que le comportement dans la phase stable pour la perturbation en vitesse est le même pour toutes les amplitudes : la perturbation s'annule à  $t = 34 \mu\text{s}$ . La phase instable démarre alors puis l'amplitude  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse augmente fortement jusqu'à subir un changement brutal dans son évolution.

La décharge intervient plus tôt à mesure que le défaut d'amplitude est plus important (déjà observé sur la Figure 5.25). Ce résultat est intuitif puisqu'un défaut initial plus marqué va naturellement déclencher la ruine de l'éprouvette plus rapidement, quel que soit le mode de déformation. Les observations sur l'influence de l'amplitude du défaut sur l'instant d'apparition des premières décharges élastiques, correspondant à la localisation de la déformation au sein des striction, se confirment lorsqu'on étudie les résultats par éléments finis sur l'évolution temporelle du taux de croissance instantanée  $Z(t)$  (selon la définition 5.15), représentée en Figure 5.27, pour différentes valeurs d'amplitude initiale de

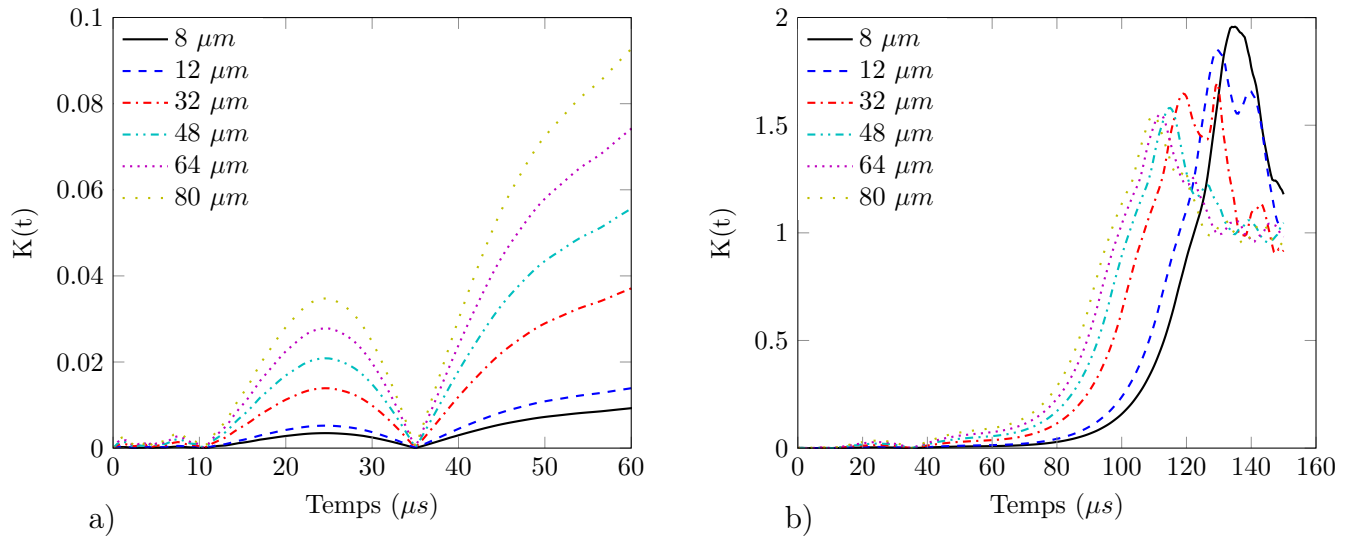


FIGURE 5.26 – Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse définie par l'équation (5.14) pour différentes valeurs d'amplitude de défaut  $A$ . Résultats issus du modèle par éléments finis. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

défaut. Notons dans un premier temps que l'évolution temporelle jusqu'à la localisation est indépendante de l'amplitude du défaut ; le taux de croissance issu du modèle *CLSA* ne dépend pas de l'amplitude du défaut initial. Il est en partie retrouvé par le modèle *XLISA* et confirmé ici par le modèle par éléments finis. La décharge élastique intervient lorsque l'on observe un changement brutal dans l'évolution temporelle du taux de croissance. À nouveau, on constate que la décharge intervient plus tôt lorsque le défaut initial est important. Le comportement au-delà de la décharge élastique est différent selon le défaut initial. Seul le modèle par éléments finis permet de représenter cette dernière phase. Néanmoins, on montre dans le paragraphe suivant qu'il est possible de prédire l'instant  $t_{loc}$  de localisation avec le modèle *XLISA*.

La décharge élastique correspond à l'instant à partir duquel il y a dans la plaque un élément dans lequel la vitesse de déformation plastique est nulle. Dans le modèle étendu

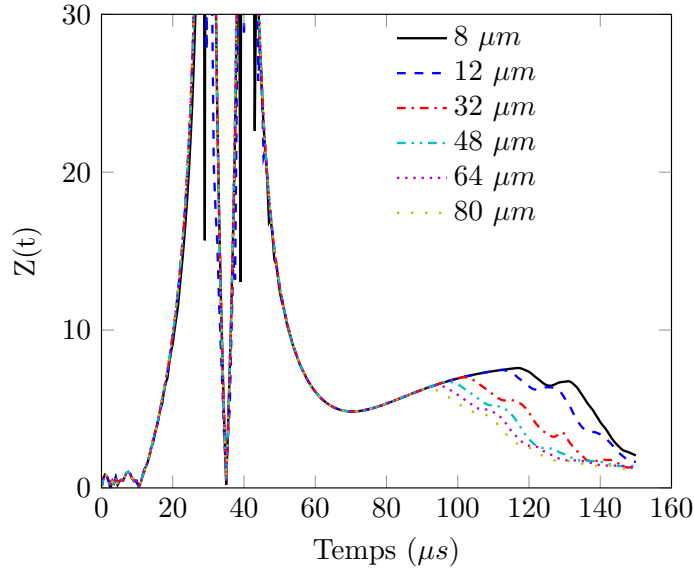


FIGURE 5.27 – Évolution temporelle du taux de croissance  $Z(t)$  défini par l'équation (5.15) pour différentes valeurs d'amplitude  $A$  de défaut. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle ABAQUS utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . L'instant de localisation qui correspond aux premières décharges élastiques est reporté dans la Table 5.3 pour chacune des amplitudes du défaut.

(XLSA) proposé dans la thèse, on rappelle que :

$$\dot{\varepsilon}_p(X_1, X_3, t) = \dot{\varepsilon}_p^{(b)}(t) + \delta\dot{\varepsilon}_p(X_1, X_3, t) \quad (5.18)$$

avec :

$$\delta\dot{\varepsilon}_p(X_1, X_3, t) = \cos(\gamma_1 X_1) \hat{\varepsilon}_p(X_3, t) \quad (5.19)$$

D'après l'équation (5.18), la vitesse de déformation plastique en un point de la plaque perturbé est nulle lorsque  $\delta\dot{\varepsilon}_p = -\dot{\varepsilon}_p^{(b)}$ . De manière équivalente, d'après l'équation (5.19), cela revient à déterminer, grâce au modèle XLSA, le premier instant pour lequel il existe une valeur de  $X_3$  telle que  $|\hat{\varepsilon}_p(X_3, t)|/|\dot{\varepsilon}_p^{(b)}| = 1$ .

**Remarque :** À l'instant  $t_{loc}$  de localisation correspondant aux premières décharges élastiques, la vitesse de déformation plastique dans l'écoulement perturbé vérifie les condi-

tions  $|\hat{\epsilon}_p(X_3, t)|/\dot{\epsilon}_p^{(b)} = 1$  et  $\cos(\gamma_1 X_1) = \pm 1$ , *i.e.* les premières décharges élastiques apparaissent pour un extremum local de la perturbation selon la direction longitudinal  $x_1$ . Il est vérifié sur le modèle *XLSA* et sur le modèle par éléments finis que les zones où se produisent les premières décharges se situent entre les strictions, ce qui confirme un résultat intuitif, illustré sur la Figure 5.28. La déformation est concentrée au niveau des amincissements et les zones inter-strictions ne subissent plus de déformation (ce qui explique le ralentissement dans la croissance de la grandeur  $J(t)$ , moyennée sur la longueur de la plaque, voir Figure 5.25).

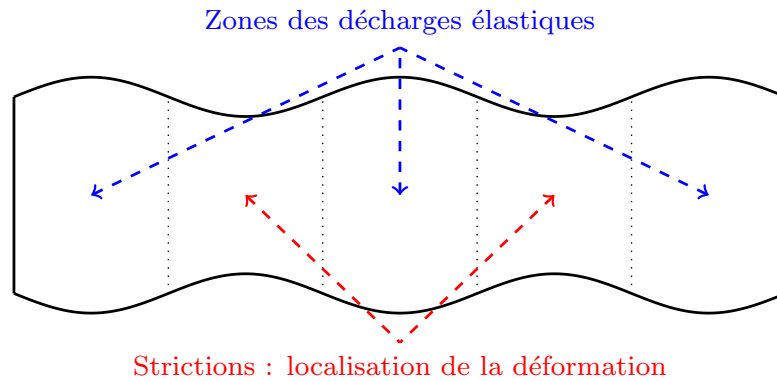


FIGURE 5.28 – Représentation schématique de la plaque au moment de la localisation. Les premières décharges élastiques apparaissent entre deux strictions tandis que la déformation se concentre au niveau des amincissements.

La Figure 5.29 représente l'instant de la décharge élastique prédit par le modèle (*XLSA*) en fonction de l'amplitude initiale du défaut. Il est comparé avec plusieurs calculs par éléments finis. Il y a une bonne corrélation entre le modèle étendu et les résultats de simulations numériques sous ABAQUS. On remarque une évolution non linéaire de l'instant de localisation. Une asymptote verticale pour un défaut nul semble apparaître. Cela est attendu puisqu'un défaut nul correspond au cas de la plaque homogène, infiniment ductile. Dans ce cas, en théorie, la déformation peut se produire sans décharge élastique. L'écart constaté entre les deux modèles s'explique par le fait que le modèle étendu atteint sa limite de validité avant la décharge élastique ; dès lors que le rapport  $\hat{\epsilon}_p(X_3, t)/\dot{\epsilon}_p$  est supérieur à 0, 1, l'hypothèse d'une perturbation de faible amplitude est mise en défaut et les effets

non linéaires commencent à apparaître. Le modèle *CLSA* ne donne pas, pour sa part, une amplitude en accord avec le modèle par éléments finis et le modèle *XLSA* (voir Figure 5.19). Il en est de même pour la prédiction de l'instant de localisation.

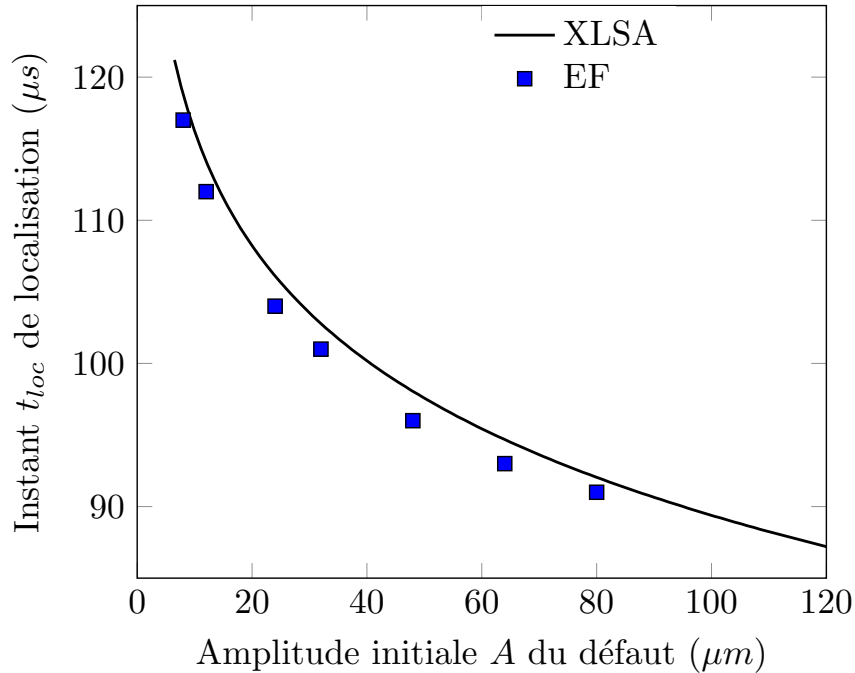


FIGURE 5.29 – Instant  $t_{loc}$  de localisation en fonction de l'amplitude initiale du défaut. La prédiction du modèle *XLSA* et l'instant de localisation relevé par le modèle par éléments finis sont présentés. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ .

En conclusion, les résultats présentés dans cette section démontrent la capacité du modèle *XLSA* à lever les restrictions liées aux hypothèses nécessaires pour le modèle classique. Pour un défaut de longueur d'onde donnée, le modèle *XLSA* fournit une prédiction pour l'amplitude des perturbations proche de celle du modèle par éléments finis jusqu'à l'instant  $t_{loc}$  où les strictions sont fortement développées (apparition des décharges élastiques). Fort des constats que les tendances de l'ALS sont retrouvées par les simulations numériques (voir section 5.1) et que les résultats obtenus avec la nouvelle approche sont confortés par les simulations numériques pour des perturbations monomodales, la prochaine étape consiste à étudier une perturbation multimodale. On se rapproche de la possibilité de prédire, par ce type d'analyse, l'instant de localisation et, en tout cas, d'avoir une définition

plus précise de la distance inter-strictions. Ceci constitue la perspective majeure ouverte par ces travaux de thèse.

# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

### 6.1 Conclusions

Ce travail de thèse porte sur l'étude de l'expansion dynamique d'enveloppes cylindriques et s'inscrit dans l'amélioration de la prédiction de la distribution de la taille et de la vitesse des fragments par des méthodes autres que numériques.

Dans le chapitre 1, une étude bibliographique est menée pour appréhender le phénomène de localisation qui s'initie par le développement de perturbations (ou défauts). Une revue des résultats obtenus par les modèles analytiques a permis de mettre en évidence l'apport de l'Analyse Linéaire de Stabilité (ALS) au cours des dernières décennies. L'existence d'une longueur d'onde dominante, représentative d'une distance inter-strictions est mise en évidence ainsi que l'augmentation du nombre de fragments avec la vitesse de déformation restituant les observations expérimentales. Néanmoins, il est montré que les modèles actuels supposent implicitement une séparation des échelles de temps, *i.e.* que le développement de l'instabilité plastique est nettement plus rapide que l'évolution de la solution fondamentale, ce qui restreint le champ d'application de la modélisation.

Une nouvelle approche, nommée *XLSA* (pour ALS étendue), est alors proposée pour s'affranchir de l'hypothèse de séparation des échelles. Dans le chapitre 2, la configura-

tion de l'étude est présentée. Le cylindre mince est assimilé à son plan tangent et une plaque en déformation plane est considérée ; le matériau est thermo-viscoplastique. Le système d'équations régissant l'écoulement perturbé est déterminé, dans le chapitre 3, pour un défaut de longueur d'onde donnée. La section 3.3 présente la résolution du système d'équations caractérisant l'évolution des perturbations. La méthode Tau utilisée cherche la solution sous la forme d'une décomposition en polynômes de Chebychev et l'intégration temporelle est résolue par un schéma aux différences finies.

La validation de la nouvelle approche est explorée dans le chapitre 4. Un matériau écrouissable, non sensible à la vitesse de déformation et aux effets thermiques, est d'abord étudié dans la section 4.1. Dans un premier temps, on se place au-delà de la déformation de Considère. De fait, l'écoulement est initialement instable. Il est montré que pour des vitesses de déformation où la séparation des échelles est vérifiée, l'effet des conditions initiales sur le taux de croissance est présent dans les premiers instants mais devient négligeable à mesure que la déformation progresse. Le taux de croissance prédit par le modèle classique est retrouvé. En revanche, lorsque l'hypothèse de séparation des échelles n'est pas vérifiée, *i.e.* pour une vitesse de déformation plus importante, l'effet des conditions initiales est plus marqué et des écarts sont constatés entre les différentes conditions initiales étudiées. Une différence persiste aux temps longs avec le taux de croissance prédit par le modèle classique (même pour des déformations importantes). Dans un second temps, nous considérons que l'état initial du matériau est tel que l'écoulement est initialement stable (avant Considère). La méthode proposée met en évidence une stabilisation du défaut dans les premiers instants qui affecte le processus de développement des strictions. Ces observations sont étendues pour un matériau sensible à la vitesse de déformation dans la section 4.2.1. La croissance de l'amplitude est retardée quand la viscosité augmente, particulièrement pour les courtes longueurs d'onde. Cet effet, déjà décrit par l'approche classique *CLSA*, est retrouvé sans l'hypothèse de séparation des échelles. Le couplage thermo-mécanique est exploré dans la section 4.2.2. Nous confirmons l'effet déstabilisant de l'adoucissement thermique mis



en évidence par l'approche classique *CLSA*. Un résultat important de l'approche *XLISA* est le fait de réaliser l'analyse sans présumer d'un lien entre les perturbations mécanique et thermique. La nouvelle approche révèle que dans les premiers instants la dépendance spatiale dans l'épaisseur de la perturbation thermique est légèrement différente de celle de la partie mécanique. Néanmoins, lorsque la déformation progresse, les deux perturbations ont la même forme et les taux de croissance sont presque identiques.

Le premier apport principal des travaux menés réside dans l'étude des perturbations tout au long du chargement en incluant les phases durant lesquelles la solution homogène est stable. Cette avancée est par la suite confortée par une étude par éléments finis. Un défaut monomodal est introduit dans la géométrie d'un modèle par éléments finis et son évolution est comparée avec le modèle *XLISA* dans le chapitre 5. L'étude de l'amplitude mesurée sur une surface libre de la plaque révèle une bonne corrélation entre les deux modèles lorsque l'amplitude de la perturbation est modérée. Le domaine de validité du modèle *XLISA* s'étend jusqu'à ce que la localisation intense, synonyme des premières décharges élastiques, soit atteinte. Il est montré que l'amplitude du défaut n'influe pas sur la croissance de la perturbation mais l'instant de localisation est retardé quand l'amplitude du défaut initial est réduite. Un dernier apport important de l'approche *XLISA* est la possibilité de prédire l'instant des premières décharges élastiques. L'approche classique n'est pas en mesure de fournir une prédiction aussi précise.

## 6.2 Perspectives

L'approche proposée dans cette thèse améliore la compréhension de l'évolution d'une perturbation de longueur d'onde donnée en prenant en compte son évolution dans la phase stable de l'écoulement. L'étude de la compétition entre les modes d'un défaut aléatoire est envisagée. Les travaux de El Maï (2014) proposent une décomposition d'une perturbation aléatoire  $\delta G$  en une somme de perturbations monomodales d'amplitudes connues, avec une

période  $2L_{01}$  :

$$\delta G = \sum_{p=0}^{\infty} \delta G_p = \sum_{p=0}^{\infty} \cos(\gamma_{1p} X_1 + \phi_p) \hat{G}_p(X_3, t) \quad (6.1)$$

avec  $\Phi_p$ , un déphasage aléatoire compris entre 0 et  $2\pi$ . La dépendance de  $\hat{G}_p$  selon l'épaisseur de chacun des modes sera étudiée séparément au moyen du modèle *XLSA* et celle d'un défaut aléatoire pourra l'être en superposant les solutions.

La restitution d'une expérience d'expansion de tubes (Olive *et al.*, 1979 par exemple) pourra être envisagée en proposant une prédiction de la distribution inter-strictions. L'approche *CLSA* a déjà permis de le faire mais de manière moins directe. La possibilité offerte par le modèle *XLSA* de suivre naturellement une perturbation en temps et en espace est le point fort de la méthode. Les imperfections initiales de la structure (l'état de surface par exemple) seront utilisées comme conditions initiales de l'approche *XLSA*. L'influence du processus de mise en forme sur la distance inter-strictions sera donc appréhendée.

Enfin, la distribution des distances inter-strictions donne une bonne indication de la taille des fragments mais l'ALS (étendue ou non) ne prend pas en compte l'effet d'inhibition des ondes de Mott. Les modèles stochastiques sont basés sur la nucléation et la croissance de défauts présents initialement dans la géométrie. Une extension des travaux de Dequiedt (2015) pourra être proposée : la distribution des défauts dans la géométrie issue du calcul de l'évolution d'une perturbation aléatoire pourra être utilisée comme condition initiale d'un modèle stochastique de Mott.

# Annexe A

## Théorie des coefficients figés

Jusqu'à présent, le système formé par les équations (3.55a), (3.55b) et les conditions limites (3.59) et (3.60) n'a pas fait l'objet d'une intégration numérique. Dans la littérature (Mercier *et al.* (2010), Jouve (2010) par exemple), l'étude des solutions de ce système est menée en utilisant à chaque instant  $t_e$  de l'étude une théorie des coefficients figés : sur un intervalle de temps  $[t_e, t_e + \delta t]$ , les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $n_i$  de l'étude sont assimilés à des constantes égales à leur valeur à l'instant  $t_e$ . On cherche alors, sur cet intervalle, des solutions sous la forme d'un produit d'une fonction exponentielle du temps et d'une fonction des coordonnées de l'épaisseur :

$$\hat{\psi}(X_3, t) = e^{\eta t} \hat{f}(X_3) \quad \hat{\theta}(X_3, t) = e^{\eta t} \hat{g}(X_3) \quad (\text{A.1})$$

$\eta$  est le taux de croissance de la perturbation à l'instant courant. On dit que l'instabilité se développe lorsque le taux de croissance calculé est positif. Notons que tous les champs dans l'écoulement ont alors le même taux de croissance. De manière générale, quelle que soit la grandeur  $G$  de l'écoulement considérée, sa perturbation  $\delta G$  vérifie :

$$\delta \dot{G} = \eta \delta G \quad (\text{A.2})$$

Avec la forme des solutions (A.1), et en vertu de la relation sur les dérivées temporelles (A.2), le système des équations (3.55a) et (3.55b) devient :

$$a_1\eta^2\hat{f}_{,33} + a_2\eta^2\hat{f} + a_3\eta\hat{f}_{,3333} + a_4\eta\hat{f}_{,33} + a_5\eta\hat{f} + a_6\hat{f}_{,33} + a_7\hat{g}_{,3} = 0 \quad (\text{A.3a})$$

$$\eta\hat{g} + b_1\hat{g} + b_2\eta\hat{f}_{,3} + b_3\hat{f}_{,3} = 0 \quad (\text{A.3b})$$

À partir de l'équation (A.3b), la fonction  $\hat{g}$  associée à la perturbation de la température est exprimée en fonction de la fonction  $\hat{f}$  liée à la fonction de courant associée à la perturbation  $\delta\mathbf{x}$  des positions matérielles :

$$\hat{g} = -\frac{1}{\eta + b_1}(b_2\eta + b_3)\hat{f}_{,3} = \tilde{b}\hat{f}_{,3} \quad (\text{A.4})$$

### Comparaison avec l'article de Mercier *et al.* (2010)

D'après la relation (A.4) et les expressions des coefficients  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$  données par les relations (3.54), il vient :

$$\tilde{b} = -\frac{1}{\eta - \frac{Y_{,\theta}^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{\rho C}} \left( \frac{2\eta\gamma_1}{\sqrt{3}\rho C} \left[ Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)} + Y^{(b)} \right] + \frac{2\gamma_1}{\sqrt{3}\rho C} Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= -\frac{2\gamma_1}{\sqrt{3}} \frac{\eta Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{\rho C \eta - \frac{Y_{,\theta}^{(b)}\theta^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)}Y^{(b)}}{Y^{(b)}\theta^{(b)}}} \left( \frac{Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{Y^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} + \frac{1}{\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} + \frac{1}{\eta} \frac{Y_{,\dot{\varepsilon}_p}^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)}}{Y^{(b)}\dot{\varepsilon}_p^{(b)}} \right) \quad (\text{A.6})$$

Le coefficient  $\tilde{b}$  est lié à  $\tilde{C}$ , obtenu par Mercier *et al.* (2010), puisque dans le cadre de la théorie des coefficients figés, la relation entre la perturbation de la déformation plastique et la fonction de courant est donnée par l'équation (3.28) :

$$\tilde{C} = -\tilde{b} \frac{\sqrt{3}}{2\gamma_1\eta} \quad (\text{A.7})$$

En vertu de (A.4), l'équation (A.3a) devient :

$$a_1\eta^2\hat{f}_{,33} + a_2\eta^2\hat{f} + a_3\eta\hat{f}_{,3333} + a_4\eta\hat{f}_{,33} + a_5\eta\hat{f} + a_6\hat{f}_{,33} + a_7\tilde{b}\hat{f}_{,33} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Cette équation est d'ordre 4 mais ne fait intervenir que les ordres 0, 2 et 4.

Les conditions limites (3.59) et (3.60) s'écrivent :

$$\eta\hat{f}_{,33} + (c_1\eta - \gamma_1c_2)\hat{f} = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (\text{A.9a})$$

$$n_2\eta\hat{f}_{,333} + \left(n_1\eta^2 + n_3\eta + n_4 + n_6\tilde{b}\right)\hat{f}_{,3} + n_5\hat{f} = 0 \quad \text{en } X_3 = \pm L_{03} \quad (\text{A.9b})$$

Sur l'intervalle  $[t_e, t_e + \delta t]$ , les coefficients des équations sont figés. La résolution de ces équations revient à déterminer les modes propres du système. Le taux de croissance  $\eta$  de la perturbation est solution d'une équation de dispersion issue du polynôme caractéristique de l'équation (A.8) :

$$P(r) = \alpha_4r^4 + \alpha_2r^2 + \alpha_0 = 0 \quad (\text{A.10})$$

avec :

$$\alpha_4 = \eta a_3 \quad \alpha_2 = \eta^2 a_1 + \eta a_4 + a_6 + a_7\tilde{b} \quad \alpha_0 = \eta^2 a_2 + \eta a_5 \quad (\text{A.11})$$

Posons  $p = r^2$ . On cherche les racines du polynôme  $Q$ , de degré 2 :

$$Q(p) : \alpha_4p^2 + \alpha_2p + \alpha_0 \quad (\text{A.12})$$

$Q$  possède deux racines complexes  $p_1$  et  $p_2$ . On distingue alors deux cas selon que les racines de  $Q$  sont distinctes ou confondues.

### Les racines de $Q$ sont distinctes

$P$  possède alors 4 racines distinctes deux à deux :  $\pm r_1$  et  $\pm r_2$ .  $\hat{f}$  s'écrit donc comme une combinaison de fonctions exponentielles de ces racines :

$$\hat{f}(X_3) = A_1 e^{r_1 X_3} + A_2 e^{-r_1 X_3} + A_3 e^{r_2 X_3} + A_4 e^{-r_2 X_3} \quad (\text{A.13})$$

La fonction  $\hat{\psi}$  associée à des perturbations symétriques est impaire. On en déduit l'écriture des modes propres du système :

$$\hat{f}(X_3) = \sum_{n=1}^2 G_{3n} \sinh(d_n X_3) \quad (\text{A.14})$$

Les  $d_n$  et  $G_{3n}$  sont respectivement appelés *modes transverses de la perturbation* et *coefficients d'amplitude de la perturbation*.

La forme (A.14) de  $\hat{f}$ , réinjectée dans les deux équations de bords libres (A.9a) et (A.9b), donne les égalités :

$$\sum_{n=1}^2 G_{3n} \sinh(d_n L_{03}) [d_n^2 \eta + c_1 \eta - \gamma_1 c_2] = 0 \quad (\text{A.15a})$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^2 G_{3n} \cosh(d_n L_{03}) [n_1 \eta^2 d_n + n_2 \eta d_n^3 + n_3 \eta d_n + n_4 d_n + n_6 \tilde{b} d_n \\ + n_5 \tanh(d_n L_{03})] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15b})$$

Ces deux équations s'écrivent aussi sous forme matricielle :

$$\mathbf{\Lambda} \begin{pmatrix} G_{31} \\ G_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

avec :

$$\Lambda_{1n} = \sinh(d_n L_{03}) [d_n^2 \eta + c_1 \eta - \gamma_1 c_2] \quad (\text{A.17a})$$

$$\Lambda_{2n} = \cosh(d_n L_{03}) [n_1 \eta^2 d_n + n_2 \eta d_n^3 + n_3 \eta d_n + n_4 d_n + n_6 \tilde{b} d_n + n_5 \tanh(d_n L_{03})] \quad (\text{A.17b})$$

L'équation (A.16) admet au moins une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant de  $\Lambda$  est nul. La fonction  $H = \det(\Lambda)$  est une fonction de  $\eta$ . Chercher ses racines revient à déterminer les taux de croissance  $\eta$  admissibles.

### Les racines de $Q$ sont confondues

$P$  possède 2 racines doubles :  $\pm r$ . On a alors, pour des perturbation symétriques :

$$\hat{f}(X_3) = A \sinh(r X_3) + B X_3 \cosh(r X_3) \quad (\text{A.18})$$

Les dérivées de  $\hat{f}$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_{,3}(X_3) = (Ar + B) \cosh(r X_3) + Br X_3 \sinh(r X_3) \end{array} \right. \quad (\text{A.19a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_{,33}(X_3) = (Ar^2 + 2Br) \sinh(r X_3) + Br^2 X_3 \cosh(r X_3) \end{array} \right. \quad (\text{A.19b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}_{,333}(X_3) = (Ar^3 + 3Br^2) \cosh(r X_3) + Br^3 X_3 \sinh(r X_3) \end{array} \right. \quad (\text{A.19c})$$

La forme (A.18) de  $\hat{f}$  et de ses dérivées (relations (A.19)), réinjectée dans les deux

équations de bords libres (A.9b) et (A.9a), donne :

$$AC_{11} + BC_{12} = 0 \quad (\text{A.20a})$$

$$AC_{21} + BC_{22} = 0 \quad (\text{A.20b})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = (\eta r^2 + c_1 \eta - \gamma_1 c_2) \sinh(rL_{03}) \end{array} \right. \quad (\text{A.21a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{12} = L_{03} (\eta r^2 + c_1 \eta - \gamma_1 c_2) \cosh(rL_{03}) + 2\eta r \sinh(rL_{03}) \end{array} \right. \quad (\text{A.21b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{21} = \cosh(rL_{03}) \left[ r \left( n_1 \eta^2 + n_3 \eta + n_4 + n_6 \tilde{b} \right) + r^3 n_2 \eta \right] + n_5 \sinh(rL_{03}) \end{array} \right. \quad (\text{A.21c})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{22} = \cosh(rL_{03}) \left[ n_1 \eta^2 + n_3 \eta + n_4 + n_6 \tilde{b} + 3n_2 r^2 \eta + n_5 L_{03} \right] \\ \quad + \sinh(rL_{03}) \left[ rL_{03} \left( n_1 \eta^2 + n_3 \eta + n_4 + n_6 \tilde{b} \right) + n_2 \eta r^3 L_{03} \right] \end{array} \right. \quad (\text{A.21d})$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

La relation (A.22) admet au moins une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant de  $\mathbf{C}$  est nul. Le cas des racines non distinctes est assez rare en pratique. Dans la thèse, nous ne considérons que le cas de racines distinctes qui est le plus courant.



# Annexe B

## Généralités sur les méthodes spectrales

Nous présentons succinctement dans ce chapitre les principes d'utilisation de la méthode spectrale pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Citons les ouvrages de Quarteroni *et al.* (2008) et de Canuto *et al.* (2012), où le lecteur pourra trouver plus de détails.

La méthode Tau, proposée par Lanczos (1938), a déjà été utilisée pour l'étude d'instabilités hydrodynamiques. Elle est simple à mettre en place pour des équations linéaires, en  $1D$  et pour des problèmes lagrangiens. Son utilisation est donc appropriée pour la résolution du système des équations (3.55) avec les conditions aux limites (3.59) et (3.60).

Cette méthode est basée sur la décomposition des inconnues du problème sur la base des polynômes de Chebyshev. Des généralités sur ces polynômes sont données en section B.1, puis la méthode de résolution d'une équation différentielle est décrite en section B.2.

## B.1 Polynômes orthogonaux de Chebyshev

Dans ce travail de thèse (voir chapitre 3), les inconnues  $\hat{\psi}$  et  $\hat{\theta}$  sont développées sur la base des polynômes de Chebyshev

$$\hat{\psi}(X_3, t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(t)T_i(X_3) \quad \hat{\theta}(X_3, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t)T_i(X_3) \quad (\text{B.1})$$

La fonction  $T_n$  désigne le polynôme de Chebyshev d'ordre  $n$  de première nature :

$$T_n(X) = \cos(n \arccos(X)) \quad (\text{B.2})$$

Les polynômes de Chebyshev peuvent être également définis par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1 & (\text{B.3a}) \\ T_1(X) = X & (\text{B.3b}) \\ T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X) \quad \forall n \geq 2 & (\text{B.3c}) \end{cases}$$

Ces polynômes forment une base des fonctions à valeurs réelles  $u(X) : X \in [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

On définit le produit scalaire sur l'ensemble des fonctions par :

$$\langle T_m, T_n \rangle = \int_{X=-1}^{X=1} T_m(X)T_n(X)p(X)dx \quad (\text{B.4})$$

où  $p(X)$  est la fonction suivante :

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} \quad (\text{B.5})$$

Cette base est orthogonale puisque l'on montre aisément :

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \pi \quad \langle T_m, T_m \rangle = \pi/2 \text{ for } m > 0 \quad \langle T_m, T_n \rangle = 0 \text{ pour } m \neq n \quad (\text{B.6})$$

On note que, pour tout  $n$ ,  $T_n(1) = 1$  et  $T_n(-1) = (-1)^n$ . De manière générale,  $T_n$  est pair (resp. impair) quand  $n$  est pair (resp. impair).

Dans les faits, les sommes données par la relation (B.1) sont tronquées à l'ordre  $N$ . Par définition, on dit que le vecteur  $\mathbf{q} = (q_0(t) \dots q_N(t))$  est la représentation de  $\hat{\psi}$  dans l'espace spectral et  $\mathbf{p} = (p_0(t) \dots p_N(t))$  celle de  $\hat{\theta}$ .

Les fonctions  $\hat{\psi}$  ou  $\hat{\theta}$  sont évaluées sur une famille de points  $(X_j)_{0 \leq j \leq N}$ . On dit que le vecteur  $\mathbf{v} = (\hat{\psi}(X_0, t) \dots \hat{\psi}(X_N, t))$  est la représentation de  $\hat{\psi}$  dans l'espace physique :

$$v_j = \sum_{i=0}^N q_i(t) T_i(X_j) \quad (\text{B.7})$$

Les polynômes de Chebyshev sont intéressants car ils permettent de définir des algorithmes de transformation rapide. Dans la section B.1.1, on définit un algorithme qui permet de passer simplement de la représentation d'une fonction dans l'espace physique à sa représentation dans l'espace spectral. Aussi, on définit dans la section B.1.2 un algorithme pour le calcul des dérivées d'une fonction dans l'espace physique à partir de sa représentation spectrale.

### B.1.1 Passage de l'espace spectral à l'espace physique

Le choix de la famille de points sur lesquels sont évaluées les inconnues est important. On choisit ici les extremums de  $T_N$ , atteints pour les points :

$$X_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (\text{B.8})$$

On choisit aussi  $X_0 = 1$  et  $X_N = -1$ . Ces points forment une famille, couramment appelée *points de Gauss-Lobatto-Chebyshev* ou encore *points de Gauss-Lobatto*. Un tel choix de points d'interpolation (ou collocation), fréquemment utilisé dans la littérature, permet de définir un algorithme de transformation rapide entre l'espace physique et l'espace spectral.

Cette transformation s'écrit sous forme matricielle, d'après la relation (B.7) :

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{q} \quad (\text{B.9})$$

avec, d'après les relations (B.2) et (B.8),

$$M_{ij} = \cos\left(\frac{ij\pi}{N}\right) \quad (\text{B.10})$$

$\mathbf{M}$  est la matrice de passage de l'espace spectral à l'espace physique, définie sur les points de Gauss-Lobatto. Son inverse est  $\mathbf{W}$ , défini par Thual (1996) :

$$\mathbf{W} = \frac{2}{N}\mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{B} \quad (\text{B.11})$$

avec :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & 1 & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$\mathbf{W}$  est la matrice de passage de l'espace physique à l'espace spectral, définie sur les points de Gauss-Lobatto. On a donc :

$$\mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{v} \quad (\text{B.13})$$

### B.1.2 Algorithme de dérivation spectrale

On définit dans cette section un algorithme pour le calcul des dérivées spatiales de  $\hat{\psi}$ . Ces dérivées sont reliées par une relation linéaire aux coefficients spectraux  $q_i$ .

En effet, on a la relation de récurrence suivante sur les dérivées premières des polynômes de Chebychev :

$$\begin{cases} T'_0(X) = 0 & \text{(B.14a)} \\ T'_1(X) = 1 & \text{(B.14b)} \\ \frac{T'_{n+1}(X)}{n+1} = 2T_n(X) + \frac{T'_{n-1}(X)}{n-1} & \forall n \geq 2 \end{cases} \quad \text{(B.14c)}$$

Nous cherchons à évaluer, dans un premier temps, la dérivée spatiale de premier ordre de  $\hat{\psi}$ . Puisque  $\hat{\psi}$  est de degré  $N$ ,  $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial X}$  est un polynôme de degré  $N-1$  et s'exprime dans la base des  $T_n$  :

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial X}(X, t) = \sum_{i=0}^N q_i(t) T'_i(X) = \sum_{i=0}^N b_i(t) T_i(X) \quad \text{(B.15)}$$

On a donc  $b_N(t) = 0$  à tout instant.

Par convention, on pose  $b_i = q_i^{(1)}$ . Le vecteur  $\mathbf{q}^{(1)}$  est lié à  $\mathbf{q}$  par  $\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{D}_S \mathbf{q}$ . L'expression de  $\mathbf{D}_S$ , matrice de dérivation spectrale, est issue de l'équation (B.14) :

$$D_{S_{ij}} = \begin{cases} j & \text{si } i=0 \text{ et } j=1, 3, 5\dots \\ 2j & \text{si } i=1, 2, \dots, N-1 \text{ et } j=i+1, i+3, \dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(B.16)}$$

$\mathbf{D}_S$  est une matrice creuse dont on présente la forme ci-après :

$$\begin{pmatrix} q_0^{(1)} \\ q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ \vdots \\ q_N^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \quad \text{(B.17)}$$

Par définition, la première colonne est nulle, puisqu'elle est associée à la dérivée du

polynôme de degré 0 (donc la constante) dans le développement polynomial de  $\hat{\psi}$ . De la même manière, la dernière ligne est également nulle. En effet,  $\hat{\psi}$  est un polynôme de degré  $N$ ; sa dérivée est un polynôme de degré  $(N - 1)$ . Donc, le coefficient  $q_N^{(1)}$  associé au polynôme de degré  $N$  dans la dérivée est nul.

Les coefficients spectraux  $\mathbf{q}^{(m)}$  de  $\frac{\partial^m \hat{\psi}}{\partial X^m}(X, t)$  sont calculés par la relation de récurrence :

$$\mathbf{q}^{(m)} = \mathbf{D}_S^m \mathbf{q} \quad (\text{B.18})$$

## B.2 Principe de la méthode Tau

Dans cette section, on présente des généralités autour de la méthode spectrale Tau utilisée pour résoudre le système d'équations différentielles régissant l'écoulement perturbé. L'intérêt de la méthode spectrale est d'utiliser le développement polynomial des inconnues du système. Ce développement permet de séparer les dépendances temporelles et spatiales pour transformer une équation aux dérivées partielles en temps et en espace en un système d'équations différentielles uniquement en temps.

Soit l'équation aux dérivées partielles ( $E$ ) vérifiée par une fonction  $u$  de l'espace et du temps :

$$Au = f \quad (\text{B.19})$$

avec  $A$  un opérateur différentiel contenant des dérivées à la fois en temps et en espace.

La fonction  $u$  est développée sur la base des polynômes de Chebyshev comme décrit dans la section B.1, tronquée à l'ordre  $N$  :

$$u^N(X, t) = \sum_{i=0}^N a_i(t) T_i(X) \quad (\text{B.20})$$

La qualité de l'approximation peut être mesurée par le *résidu*  $R^N$  :

$$R^N = Au^N - f^N = A \left( \sum_{i=0}^N a_i(t) T_i(X) \right) - \sum_{i=0}^N f_i(t) T_i(X) \quad (\text{B.21})$$

Notons que ce résidu s'annule lorsque  $N$  tend vers l'infini ( $u^N$  tend alors vers  $u$ , solution exacte du problème).

La méthode Tau consiste à minimiser le résidu  $R^N$  en déterminant une relation linéaire entre les coefficients  $a_i$  ; cette relation est obtenue de manière à ce que le résidu  $R^N$  soit orthogonal à toutes les fonctions de base dans le développement B.20. Il s'agit donc de projeter le résidu sur les polynômes de la base. Si l'opérateur différentiel  $A$  contient des dérivées spatiales jusqu'à l'ordre  $k$ , les relations de projection conduisent à  $N - k + 1$  équations différentielles en temps. En effet, la fonction  $\frac{\partial^k u}{\partial X^k}$  est un polynôme de degré  $N - k$  donc seules les équations de projection sur les polynômes  $T_i$  de degré inférieur ou égal à  $N - k$  sont à utiliser :

$$\langle R^N, T_i \rangle = 0 \quad 0 \leq i \leq N - k \quad (\text{B.22})$$

Ce système de  $N + 1 - k$  équations différentielles en temps sur les  $a_i$  est complété par les  $k$  conditions aux limites du système. Les  $N + 1$  inconnues à l'instant  $t$  sont les  $a_i(t)$  pour  $0 \leq i \leq N$ . Ces équations différentielles en temps sont résolues grâce à un schéma aux différences finies.





# Annexe C

## Convergence du schéma

Nous présentons quelques éléments relatifs à la convergence du schéma ainsi que les cas tests qui permettent de conclure quant à la validité de ce dernier. Il ne s'agit en aucun cas d'une démonstration mathématique.

Le système d'équations régissant l'écoulement perturbé est formé par les équations (3.69a), (3.69b) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1}{L_{03}^2} \ddot{\psi}_{,33} + a_2 \ddot{\psi} + \frac{a_3}{L_{03}^4} \dot{\psi}_{,3333} + \frac{a_4}{L_{03}^2} \dot{\psi}_{,33} + a_5 \dot{\psi} + \frac{a_6}{L_{03}^2} \tilde{\psi}_{,33} + \frac{a_7}{L_{03}} \tilde{\theta}_{,3} = 0 \\ \dot{\theta} + b_1 \tilde{\theta} + \frac{b_2}{L_{03}} \dot{\psi}_{,3} + \frac{b_3}{L_{03}} \tilde{\psi}_{,3} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(C.1a)} \\ \text{(C.1b)} \end{array}$$

Ce système est complété par les conditions aux limites (3.70) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{L_{03}^2} \dot{\psi}_{,33} + c_1 \dot{\psi} - \gamma_1 c_2 \tilde{\psi} = 0 \\ \frac{n_1}{L_{03}} \ddot{\psi}_{,3} + \frac{n_2}{L_{03}^3} \dot{\psi}_{,333} + \frac{n_3}{L_{03}} \dot{\psi}_{,3} + \frac{n_4}{L_{03}} \tilde{\psi}_{,3} + n_5 \tilde{\psi} + n_6 \tilde{\theta} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(C.2a)} \\ \text{(C.2b)} \end{array}$$

Nous n'avons pas rencontré, à notre connaissance, de travaux proposant une solution analytique exacte de ce système d'équations aux dérivées partielles. La difficulté provient

des coefficients non constants du système. Lorsque les coefficients varient peu, on applique la théorie des coefficients figés (voir Annexe A).

Dans le cas limite de coefficients constants, une solution analytique existe. On considère le système d'équations avec les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $n_i$  constants et égaux à leur valeurs à l'instant  $t_0 = 0$ . On cherche alors la solution sous la forme :

$$\tilde{\psi}(X_3, t) = e^{\eta t} \tilde{f}(X_3) \quad \tilde{\theta}(X_3, t) = e^{\eta t} \tilde{g}(X_3) \quad (\text{C.3})$$

avec  $\eta$  le taux de croissance des perturbations à l'instant initial, constant au cours du temps (les coefficients du système sont constants).

On rappelle la relation entre les fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  donnée par l'équation (A.4) :

$$\tilde{g} = \tilde{b} \tilde{f}_{,3} \quad (\text{C.4})$$

Dans le cas général, Jouve (2010) montre (voir Annexe A) que la fonction  $\tilde{f}$  s'écrit sous la forme :

$$\tilde{f}(X_3) = \sum_{n=1}^2 G_{3n} \sinh(d_n X_3) \quad (\text{C.5})$$

Les conditions initiales sont définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(X_3, t = 0) &= \sum_{n=1}^2 G_{3n} \sinh(d_n X_3) = \tilde{f}(X_3) & \dot{\tilde{\psi}}(X_3, t = 0) &= \eta \sum_{n=1}^2 G_{3n} \sinh(d_n X_3) = \eta \tilde{f}(X_3) \\ \tilde{\theta}(X_3, t = 0) &= \tilde{b} \sum_{n=1}^2 G_{3n} d_n \cosh(d_n X_3) = \tilde{g}(X_3) = \tilde{b} \tilde{f}_{,3}(X_3) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

On étudie une plaque de demi-longueur  $L_{01} = 1 \text{ m}$  et de demi-épaisseur  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ , sollicitée en traction plane à la vitesse constante imposée  $V_{01} = 100 \text{ m.s}^{-1}$ . Il est à noter que, dans le cas de coefficients maintenus constants, le gradient de vitesse imposé n'importe pas puisque l'hypothèse de séparation des échelles est exactement vérifiée.

Le matériau étudié est un métal de masse volumique  $\rho = 5000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le matériau possède un comportement indépendant de la vitesse de déformation et les effets thermiques sont négligés. La contrainte d'écoulement du matériau obéit à une loi puissance :

$$Y = K(\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n$$

avec :  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0, 2$  et  $\varepsilon_i = 1$ .

Le paramètre de déformation  $\varepsilon_i$  est choisi de telle manière que l'écoulement soit initialement instable et que le modèle *CLSA* soit en mesure de déterminer une solution de la forme (C.6).

À l'instant  $t_0 = 0$ , une perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = 40\pi/L_{01}$  est superposée à l'écoulement de base selon les conditions initiales (C.6). La solution analytique du système d'équations est donnée par les équations (C.3).

On définit le taux de croissance à l'instant  $t$  de la perturbation de la fonction de courant par :

$$\mathcal{N}(t) = \frac{\|\tilde{\psi}\|}{\|\tilde{\psi}\|} \quad (\text{C.7})$$

avec  $\|\tilde{\psi}\|$  la norme  $L_2$  de la fonction de courant  $\tilde{\psi}$ .

Le taux de croissance de la solution analytique est constant :  $\mathcal{N}(t) = \eta$ .

L'évolution temporelle des perturbations du système est déterminée par le schéma d'intégration numérique du modèle *XLISA* présenté dans le chapitre 3. Il est noté que la solution est dépendante du pas de temps  $dt$  d'intégration du schéma aux différences finies. L'ordre de convergence du schéma est étudié. L'erreur relative, exprimée en pourcent, à l'instant  $t_1 = 100 \mu\text{s}$  est définie par :

$$E = 100 \frac{\mathcal{N}(t_1) - \eta}{\eta} \quad (\text{C.8})$$

La figure C.1 présente l'évolution de l'erreur relative  $E$  en fonction du pas de temps  $dt$ , en représentation *log-log*, pour deux valeurs de  $N$ , nombre de polynômes d'interpolation.

Les pentes des évolutions d'ordre 1 et d'ordre 2 sont indiquées. Il est noté que le nombre de polynômes d'interpolation influe peu sur la valeur de l'erreur. La pente de l'évolution de l'erreur indique que le schéma d'intégration numérique est bien d'ordre 1 en temps. Autrement dit, en divisant le pas de temps par 10, l'erreur est divisée par 10. Ce résultat était attendu puisque les dérivées temporelles ont été calculées à l'ordre 1 en temps (voir équations 3.80).

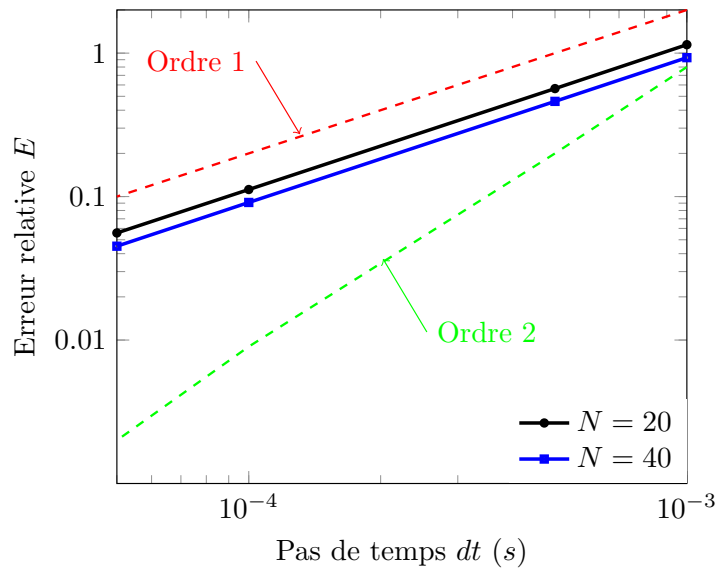


FIGURE C.1 – Erreur relative sur le taux de croissance instantanée de  $\tilde{\psi}$  à  $t = 100 \mu s$  (voir équation C.8) en fonction du pas de temps en échelle log-log. Deux valeurs du nombre  $N$  de polynômes d'interpolation sont considérées. Les pentes associées aux erreurs d'ordre 1 et 2 sont représentées.

Comme la modélisation ne fait pas intervenir de phénomènes d'advection, il n'y a donc pas d'ondes se propageant dans la phase linéaire. Ceci pourrait expliquer l'apparente stabilité inconditionnelle du schéma.

# Bibliographie

- ALTYNOVA, M., HU, X. et DAEHN, G. S. (1996). Increased ductility in high velocity electromagnetic ring expansion. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 27(7):1837–1844.
- BALANETHIRAM, V., HU, X., ALTYNOVA, M. et DAEHN, G. S. (1994). Hyperplasticity : enhanced formability at high rates. *Journal of Materials Processing Technology*, 45(1-4):595–600.
- BECKER, R. (2002). Ring fragmentation predictions using the Gurson model with material stability conditions as failure criterion. *Int. J. Solids Struct.*, 39:3555–3580.
- BOUDEAU, N. et GELIN, J.-C. (2000). Necking in sheet metal forming. influence of macroscopic and microscopic properties of materials. *International journal of mechanical sciences*, 42(11):2209–2232.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. M., THOMAS JR, A. *et al.* (2012). *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Science & Business Media.
- CONSIDÈRE, A. (1885). L’emploi du fer de l’acier dans les constructions, memoire no 34. *In Annales des Ponts et Chaussées, Paris*, pages 574–575.
- CORIELL, S., HARDY, S. et SEKERKA, R. (1971). A non-linear analysis of experiments on the morphological stability of ice cylinders freezing from aqueous solutions. *Journal of Crystal Growth*, 11(1):53–67.

- DEQUIEDT, J. L. (2015). Statistics of dynamic fragmentation for a necking instability. *International Journal of Solids and Structures*, 75-76:32–44.
- DUDZINSKI, D. et MOLINARI, A. (1991). Perturbation analysis of thermoviscoplastic instabilities in biaxial loading. *Int. J. Solids Struct.*, 27(5):601 – 628.
- EL MAÏ, S. (2014). *Etude du développement des instabilités dans un anneau en expansion dynamique*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, École doctorale EMMA, France.
- EL MAÏ, S., MERCIER, S. et MOLINARI, A. (2018). Analysis of the localization process leading to fragmentation of dynamically expanded rings. *In EPJ Web of Conferences*, volume 183, page 01064. EDP Sciences.
- EL MAÏ, S., MERCIER, S., PETIT, J. et MOLINARI, A. (2014). An extension of the linear stability analysis for the prediction of multiple necking during dynamic extension of round bar. *International Journal of Solids and Structures*, 51:3491–3507.
- EL MAÏ, S., MERCIER, S., PETIT, J. et MOLINARI, A. (2014). Towards the prediction of multiple necking during dynamic extension of round bar : linear stability approach versus finite element calculations. *In Journal of Physics : Conference Series*, volume 500, page 152005. IOP Publishing.
- FRESSENGEAS, C. et MOLINARI, A. (1985). Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow. *Acta Metallurgica*, 33(3):387–396.
- FRESSENGEAS, C. et MOLINARI, A. (1987). Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35:185–211.
- FRESSENGEAS, C. et MOLINARI, A. (1994). Fragmentation of rapidly stretching sheets. *European Journal of Mechanics Series A Solids*, 13:251–251.
- FYFE, I. et RAJENDRAN, A. (1980). Dynamic pre-strain and inertia effects on the fracture of metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 28(1):17–26.

- GOTO, D., BECKER, R., ORZECOWSKI, T., SPRINGER, H., SUNWOO, A. et SYN, C. (2008). Investigation of the fracture and fragmentation of explosively driven rings and cylinders. *International Journal of Impact Engineering*, 35(12):1547–1556.
- GRADY, D. (1981). Application of survival statistics to the impulsive fragmentation of ductile rings. In *Shock waves and high-strain-rate phenomena in metals*, pages 181–192. Springer.
- GRADY, D. et BENSON, D. (1983). Fragmentation of metal rings by electromagnetic loading. *Experimental Mechanics*, 23(4):393–400.
- GRADY, D., KIPP, M. et BENSON, D. (1984). Energy and statistical effects in the dynamic fragmentation of metal rings. Rapport technique, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA).
- GRADY, D. et OLSEN, M. (2003). A statistics and energy based theory of dynamic fragmentation. *International journal of impact engineering*, 29(1):293–306.
- HAN, J. et TVERGAARD, V. (1995). Effect of inertia on the necking as a precursor to dynamic fracture. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 14:287–307.
- HILL, R. et HUTCHINSON, J. W. (1975). Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:239–264.
- HIROE, T., FUJIWARA, K., HATA, H. et TAKAHASHI, H. (2008). Deformation and fragmentation behaviour of exploded metal cylinders and the effects of wall materials, configuration, explosive energy and initiated locations. *International Journal of Impact Engineering*, 35(12):1578–1586.
- HODOWANY, J., RAVICHANDRAN, G., ROSAKIS, A. et ROSAKIS, P. (2000). Partition of plastic work into heat and stored energy in metals. *Experimental mechanics*, 40(2):113–123.

- HOGGATT, C. R. et RECHT, R. F. (1968). Fracture behavior of tubular bombs. *Journal of Applied Physics*, 39(3):1856–1862.
- HUTCHINSON, J. et NEALE, K. (1977). Influence of strain-rate sensitivity on necking under uniaxial tension. *Acta Metallurgica*, 25(8):839–846.
- HUTCHINSON, J. et OBRECHT, H. (1977). Tensile instabilities in strain-rate dependent materials. *Fracture*, 1:101–116.
- JEANCLAUDE, V. et FRESSENGEAS, C. (1997). Dynamic necking of rods at high strain rates. *J. Phys. IV Colloque C3*, 7:699–704.
- JEANSON, A.-C., BAY, F., JACQUES, N., AVRILLAUD, G., ARRIGONI, M. et MAZARS, G. (2016). A coupled experimental/numerical approach for the characterization of material behaviour at high strain-rate using electromagnetic tube expansion testing. *International Journal of Impact Engineering*, 98:75–87.
- JOULIN, G. et CLAVIN, P. (1979). Linear stability analysis of nonadiabatic flames : diffusional-thermal model. *Combustion and Flame*, 35:139–153.
- JOUVE, D. (2010). *Etude analytique de l'instabilité plastique de striction pour une plaque sollicitée en traction biaxiale*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique et Commissariat à l'Energie Atomique, France.
- JOUVE, D. (2013). Analytic study of plastic necking instabilities during plane tension tests. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 39:180–196.
- JOUVE, D. (2014). Analytic study of the onset of plastic instabilities during plane tension and compression tests on metallic plates. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 47:70–81.
- JOUVE, D. (2015). Étude du développement d'instabilités plastiques lors d'essais sur des plaques métalliques sollicitées biaxialement dans leur plan, en traction ou en compression.



*S05 Caractérisation expérimentale et numérique du comportement des matériaux lors des sollicitations rapides.*

JUANICOTENA, A. (1998). *Etude théorique et expérimentale du comportement viscoplastique des matériaux aux grandes déformations et grandes vitesses de déformation*. Ph.d. thesis, Université de Metz and Commissariat à l'Energie Atomique, France.

KIPP, M. E. et GRADY, D. E. (1985). Dynamic fracture growth and interaction in one dimension. *J. Mech. Phys. Solids*, 33:399–415.

LANCZOS, C. (1938). Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *Journal of Mathematics and Physics*, 17(1-4):123–199.

LEES, F. (2012). *Lees' Loss prevention in the process industries : Hazard identification, assessment and control*. Butterworth-Heinemann.

LONGÈRE, P. et DRAGON, A. (2007). Adiabatic heat evaluation for dynamic plastic localization. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45(2):203–223.

LONGÈRE, P. et DRAGON, A. (2008a). Evaluation of the inelastic heat fraction in the context of microstructure-supported dynamic plasticity modelling. *International Journal of Impact Engineering*, 35(9):992–999.

LONGÈRE, P. et DRAGON, A. (2008b). Plastic work induced heating evaluation under dynamic conditions : Critical assessment. *Mechanics Research Communications*, 35(3): 135–141.

MARTINEAU, R., ANDERSON, C. et SMITH, F. (2000). Expansion of cylindrical shells subjected to internal explosive detonations. *Experimental Mechanics*, 40(2):219–225.

MASON, J., ROSAKIS, A. et RAVICHANDRAN, G. (1994). On the strain and strain rate dependence of the fraction of plastic work converted to heat : an experimental study

- using high speed infrared detectors and the kolsky bar. *Mechanics of Materials*, 17(2-3):135–145.
- MERCIER, S., GRANIER, N., MOLINARI, A., LLORCA, F. et BUY, F. (2010). Multiple necking during the dynamic expansion of hemispherical metallic shells, from experiments to modelling. *J. Mech. Phys. Sol.*, 58(7):955–982.
- MERCIER, S. et MOLINARI, A. (2003). Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension. *Int. J. Solids Struct.*, 40:1995–2016.
- MERCIER, S. et MOLINARI, A. (2004). Analysis of multiple necking in rings under rapid radial expansion. *Int. J. Impact Eng.*, 30:403–419.
- MOCK JR, W. et HOLT, W. H. (1983). Fragmentation behavior of armco iron and hf-1 steel explosive-filled cylinders. *Journal of applied physics*, 54(5):2344–2351.
- MOTT, N. F. (1947). Fragmentation of shell cases. *In Proceedings of The Royal Society, Series A*, pages 300–308.
- NIE, H., SUO, T., SHI, X., LIU, H., LI, Y. et ZHAO, H. (2018). Symmetric split hopkinson compression and tension tests using synchronized electromagnetic stress pulse generators. *International Journal of Impact Engineering*, 122:73–82.
- NIORDSON, F. I. (1965). A unit for testing materials at high strain rates. *Experimental Mechanics*, 5(1):29–32.
- NORTON, F. H. (1929). *The creep of steel at high temperatures*. Numéro 35. McGraw-Hill Book Company, Incorporated.
- OLIVE, F., NICAUD, A., MARILLEAU, J. et LOICHOT, R. (1979). Rupture behaviour of metals in explosive expansion. *In Mechanical properties at high rates of strain, 1979*.
- PANDOLFI, A., KRYSL, P. et ORTIZ, M. (1999). Finite element simulation of ring expansion and fragmentation. *Int. J. Fract.*, 95:279–297.

- PETIT, J., JEANCLAUDE, V. et FRESSENGEAS, C. (2005). Breakup of copper shaped-charge jets : Experiments, numerical simulations, and analytical modeling. *J. Appl. Physics*, 98:123521.
- PRICE, J. W. H. (2006). An acetylene cylinder explosion : A most probable cause analysis. *Eng. Failure Analysis*, 13:705 – 715.
- QUARTERONI, A. M., SACCO, R. et SALERI, F. (2008). *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer Science & Business Media.
- RITTEL, D. (1999). On the conversion of plastic work to heat during high strain rate deformation of glassy polymers. *Mechanics of Materials*, 31(2):131–139.
- RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A., MOLINARI, A., ZAERA, R., VADILLO, G. et FERNÁNDEZ-SÁEZ, J. (2017). The critical neck spacing in ductile plates subjected to dynamic biaxial loading : on the interplay between loading path and inertia effects. *International journal of solids and structures*, 108:74–84.
- RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A., RITTEL, D., ZAERA, R. et OSOVSKI, S. (2013a). Finite element analysis of aisi 304 steel sheets subjected to dynamic tension : the effects of martensitic transformation and plastic strain development on flow localization. *International journal of impact engineering*, 54:206–216.
- RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A., VADILLO, G., FERNÁNDEZ-SÁEZ, J. et MOLINARI, A. (2013b). Identification of the critical wavelength responsible for the fragmentation of ductile rings expanding at very high strain rates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61:1357–1376.
- RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A., VADILLO, G., ZAERA, R. et FERNÁNDEZ-SÁEZ, J. (2013c). On the complete extinction of selected imperfection wavelengths in dynamically expanded ductile rings. *Mechanics of Materials*, 60:107–120.

- RUSINEK, A. et ZAERA, R. (2007). Finite element simulation of steel ring fragmentation under radial expansion. *Int. J. Impact Eng.*, 34:799–822.
- RUSINEK, A., ZAERA, R., KLEPACZKO, J. R. et CHERIGUENE, R. (2005). Analysis of inertia and scale effects on dynamic neck formation during tension of sheet steel. *Acta Materialia*, 53(20):5387–5400.
- SAGAT, S. et TAPLIN, D. (1976). The stability of plastic flow in strain-rate sensitive materials. *Metal Science*, 10(3):94–100.
- SHENOY, V. B. et FREUND, L. B. (1999). Necking bifurcations during high strain rate extension. *J. Mech. Phys. Solids*, 47:2209–2233.
- SINGH, M., SUNEJA, H., BOLA, M. et PRAKASH, S. (2002). Dynamic tensile deformation and fracture of metal cylinders at high strain rates. *International Journal of Impact Engineering*, 27(9):939–954.
- SØRENSEN, N. et FREUND, L. (2000). Unstable neck formation in a ductile ring subjected to impulsive radial loading. *International Journal of Solids and Structures*, 37(16):2265–2283.
- STAINIER, L. et ORTIZ, M. (2010). Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 47(5):705–715.
- TAYLOR, G. et QUINNEY, H. (1934). The latent energy remaining in a metal after cold working. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 143(849):307–326.
- THUAL, O. (1996). Introduction aux méthodes spectrales. <http://thual.perso.enseeiht.fr/otcpge/96-spectral/1996-MethodesSpectrales.pdf>.
- TUGCU, P. (1996). Inertial effects in ductile failure of cylindrical tubes under internal pressure. *International journal of impact engineering*, 18(5):539–563.

- VAZ-ROMERO, A., RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. et ARIAS, A. (2015). The deterministic nature of the fracture location in the dynamic tensile testing of steel sheets. *International journal of impact engineering*, 86:318–335.
- VAZ-ROMERO, A., RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A., MERCIER, S. et MOLINARI, A. (2017). Multiple necking pattern in nonlinear elastic bars subjected to dynamic stretching : The role of defects and inertia. *International Journal of Solids and Structures*, 125:232 – 243.
- VOLTZ, C., LAGRANGE, J., BESNARD, G. et ETCHESSAHAR, B. (2008). Application of ultra-high-speed optical observations and high-speed x-ray radiography measurements to the study of explosively driven copper tube expansion. *In 28th International Congress on High-Speed Imaging and Photonics*, pages 71261M–71261M. International Society for Optics and Photonics.
- WALLING, H. et FORRESTAL, M. (1973). Elastic-plastic expansion of 6061-t6 aluminum rings. *AIAA Journal*, 11(8):1196–1197.
- WESENBERG, D. et SAGARTZ, M. (1977). Dynamic fracture of 6061-T6 aluminium cylinders. *J. Appl. Mech.*, 44:643–646.
- WOOD, W. (1967). Experimental mechanics at velocity extremes very high strain rates. *Experimental mechanics*, 7(10):441–446.
- WOODFORD, D. (1969). Strain-rate sensitivity as a measure of ductility. *ASM TRANS QUART*, 62(1):291–293.
- XUE, Z., VAZIRI, A. et HUTCHINSON, J. (2008). Material aspects of dynamic neck retardation. *J. Mech. Phys. Solids*, 56:93–113.
- ZAERA, R., RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A., VADILLO, G. et FERNÁNDEZ-SÁEZ, J. (2014). Dynamic necking in materials with strain induced martensitic transformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 64:316–337.

- ZAERA, R., RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ, J. A., VADILLO, G., FERNÁNDEZ-SÁEZ, J. et MOLINARI, A. (2015). Collective behaviour and spacing of necks in ductile plates subjected to dynamic biaxial loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 85:245–269.
- ZHANG, H. et RAVI-CHANDAR, K. (2006). On the dynamics of necking and fragmentation- I. Real-time and post-mortem observations in Al 6061-O. *Int. J. Fract.*, 142:183–217.
- ZHANG, H. et RAVI-CHANDAR, K. (2010). On the dynamics of localization and fragmentation- IV. expansion of al 6061-o tubes. *Int. J. Fract.*, 163:41–65.
- ZHAO, H. et GARY, G. (1996). The testing and behaviour modelling of sheet metals at strain rates from  $10^{-4}$  to  $10^4$  s<sup>-1</sup>. *Mater. Sci. Engng. A*, A207:46–50.

# Table des figures

1.1	À gauche, dimensions du cylindre en acier contenant de l'acétylène sous pression, avant explosion à Sydney en 1993, d'après Price (2006). À droite, les fragments récupérés après l'explosion. Près de 200 fragments de tailles variées ont été collectés. . . . .	16
1.2	Dispositif de l'expérience d'Olive <i>et al.</i> (1979) - Section méridienne . . . .	17
1.3	Principe de l'expansion d'anneaux par voie électromagnétique, Grady et Benson (1983). Le courant $i_1$ circule sur le support et induit un courant $i_2$ de sens opposé dans l'anneau, mis en mouvement par la pression magnétique induite par le couplage des deux courants. . . . .	19
1.4	Image composée de la superposition à différents instants de l'état de l'anneau d'aluminium lors de son expansion d'après Zhang et Ravi-Chandar (2006). À mesure que la structure se déforme, le rayon moyen de l'anneau augmente.	20
1.5	Fragmentation d'un anneau en aluminium (voir Grady et Benson, 1983) : à gauche, la striction a conduit à une rupture ; à droite, on voit une striction dont le développement s'est arrêté suite à la propagation d'une onde de décharge élastique. . . . .	21
1.6	Corrélation entre l'allongement à la rupture et le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation pour différents matériaux, Woodford (1969) . . .	22

1.7	Mesure expérimentale de ductilité en fonction de la vitesse de déformation pour des essais de traction, d'expansion de cylindres et d'expansion d'hémisphères, Wood (1967) . . . . .	23
1.8	Nombre de fragments (carrés pleins) et de strictions (carrés blancs) en fonction de la vitesse d'expansion relevée lors de l'expansion d'anneaux en aluminium, Altynova <i>et al.</i> (1996). La prédiction analytique utilisant le modèle de Kipp et Grady (1985) est présentée (voir section 1.3.1). . . . .	24
1.9	Distribution en taille des fragments d'un anneau en aluminium en expansion. Superposition des résultats expérimentaux de Wesenberg et Sagartz (1977), du modèle de Mott (1947) appliqué par Grady (1981) (traits pleins) et par Wesenberg et Sagartz (1977) (traits pointillés). . . . .	25
1.10	Taux de croissance relatif de la perturbation à l'instant initial en fonction du nombre d'onde adimensionné $kL_2$ , Mercier et Molinari (2003). Plusieurs vitesses de chargement sont considérées et représentées par le nombre adimensionnel $I$ , proportionnel au carré de la vitesse de traction $V_0$ . Le comportement est viscoplastique, $Y = K\dot{\epsilon}_p^m$ avec $K = 1, 1.10^8 SI$ et $m = 0, 05$ . Le matériau est sans écrouissage. Les résultats de l'approche quasi-statique, de l'approche dynamique avec l'approximation des grandes longueurs d'onde et de l'approche dynamique $2D$ sont présentés. . . . .	30
1.11	Taux de croissance relatif de la perturbation à l'instant initial en fonction du nombre d'onde adimensionné dans la direction de l'amincissement $kL_2$ , issu de Mercier et Molinari (2003). Le matériau étudié est celui de la Figure 1.10. Plusieurs valeurs du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation $m$ sont étudiées. . . . .	31



<p>1.12 Évolution de la perturbation de la section normalisée du barreau cylindrique en cuivre en traction en fonction de la coordonnée longitudinale normalisée, El Maï (2014). Une perturbation aléatoire de la section est considérée à l’instant initial. L’évolution des modes longitudinaux est déterminée au moyen de l’ALS. La distance inter-strictions le long du barreau évolue au cours du temps. . . . .</p>	<p>32</p>
<p>1.13 Images réalisées lors de l’expansion par voie détonique du cylindre en acier de l’expérience d’Olive <i>et al.</i> (1979) et exploitées par Jouve (2010). L’image 2 montre une déformation homogène. À <math>t = 25 \mu s</math> (image 3), les premières localisations suivent les génératrices du cylindre. À <math>t = 34 \mu s</math>(image 4), les strictions sont pleinement développées. Le nombre de strictions par mètre est évalué entre 125 et 150 par mètre par Jouve (2010). Les premières ruptures sont apparentes à <math>t = 52 \mu s</math> (image 6). . . . .</p>	<p>34</p>
<p>1.14 Configuration géométrique d’un cylindre en expansion radiale à une vitesse <math>V_r</math> représentatif de l’expérience d’Olive <i>et al.</i> (1979). Du fait du faible rapport <math>e/R</math>, l’expérience est analysée en considérant une plaque en déformation plane dans le plan <math>(x_1, x_3)</math>, assimilant le cylindre à son plan tangent, Jouve (2010). Les relations géométriques sont : <math>2L_1 = 2\pi R</math>, <math>2L_3 = e</math>. La vitesse de traction de la plaque est telle que <math>V_{01}/L_{01} = V_r/R</math>. . . . .</p>	<p>35</p>
<p>1.15 Taux de croissance normalisé de la perturbation en fonction du nombre de strictions par mètre (<i>i.e.</i> la longueur d’onde) à différents instants pour un cylindre en acier en expansion à une vitesse radiale <math>V_r</math> estimée à <math>980 m/s</math>, Jouve (2010). Les premiers taux de croissance sont déterminés à <math>t = 23 \mu s</math>. Le taux de croissance maximum à chaque instant donne une prédiction de la distance inter-strictions. L’instant <math>t_3</math> (resp. <math>t_4</math>) est associé à l’image 3 (resp. image 4) sur la Figure 1.13. . . . .</p>	<p>36</p>

2.1	Configuration géométrique dans le plan $(x_1, x_3)$ de la plaque en déformation plane. À l'instant initial, la plaque est de demi-longueur $L_{01}$ et de demi-épaisseur $L_{03}$ . Les faces en $X_1 = \pm L_{01}$ sont soumises à une vitesse de traction constante $V_{01}$ . . . . .	39
3.1	Représentation schématique de la plaque à l'instant $t$ pour une perturbation de mode longitudinal $p = 2$ . La perturbation des positions $\delta \mathbf{x}$ et ses composantes $\delta x_1$ et $\delta x_3$ sont représentées en différents points de la plaque. Le point de référence est le point $M(X_1, X_3)$ . $M'$ (resp. $M''$ ) est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe $x_3$ (resp. $x_1$ ). $M'''$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'origine $O$ . . . . .	62
4.1	Force normalisée $F/F_{max}$ appliquée sur les faces latérales $X_1 = \pm L_{01}$ par unité de longueur transversale $X_2$ , en fonction de la déformation plastique cumulée $\varepsilon_p$ . Le cas de la déformation plane est étudié. Trois valeurs du paramètre de déformation $\varepsilon_i$ sont considérées. La valeur du paramètre $\varepsilon_i$ pour la loi de comportement (4.2) détermine si l'écoulement est initialement instable ou non. Si $\frac{2n}{\sqrt{3}} - \varepsilon_i < 0$ (resp. $\frac{2n}{\sqrt{3}} - \varepsilon_i > 0$ ) alors l'écoulement est instable (resp. stable) . . . . .	80
4.2	Taux de croissance normalisé à $t = 0$ (déformation plastique cumulée $\varepsilon_p = 0$ ) en fonction de l'index de nombre d'onde $i_1$ ( $\gamma_1 = \frac{i_1 \pi}{L_{01}}$ ) pour a) $V_{01} = 1000 \text{ m.s}^{-1}$ i.e. $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ et b) $V_{01} = 10000 \text{ m.s}^{-1}$ i.e. $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est donnée par l'équation (4.2) avec $K = 1 \text{ GPa}$ , $n = 0,2$ . Le paramètre de déformation est $\varepsilon_i = 0,4$ (l'écoulement est initialement instable). Les demi-dimensions sont $L_{01} = 1 \text{ m}$ et $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . .	81

- 4.3 Évolution de  $\tilde{\psi}(\tilde{X}_3, t = 0)$  dans l'épaisseur pour différents nombres d'onde  $\gamma_1 = i_1\pi/L_{01}$  (avec  $i_1 = 23$  et  $i_1 = 35$ ) et deux vitesses de chargement  $V_{01} = 1000 \text{ m/s}$  ou  $10000 \text{ m/s}$ .  $\tilde{\psi}^{CLSA}$  est déterminé par l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique (voir Annexe A). La condition initiale  $\tilde{\psi}^{CI4}$  n'est pas reliée au modèle *CLSA*; sa forme est sinusoidale et donc très différente des autres conditions initiales (voir Table 4.1). Les paramètres du matériau et la configuration géométrique sont rappelés en Figure 4.2. . . . . . 83
- 4.4 Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$  d'une perturbation de nombre d'onde a)-c)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ , b)-d)  $\gamma_1 = 35\pi/L_{01}$ ; le gradient de vitesse initial est a)-b)  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ , c)-d)  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . Le taux de croissance est défini par l'équation (4.5). Les conditions initiales sont définies en Table 4.1 et représentées sur la Figure (4.3). La contrainte d'écoulement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$  et  $n = 0,2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0,4$ . Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 1 \text{ m}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . . 86
- 4.5 Évolution de la perturbation normalisée  $\delta\psi/A_0$  en fonction de la coordonnée longitudinale normalisée  $\gamma_1 X_1$  pour deux nombres d'onde à différents instants a) et b)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  et  $t = 0 \text{ }\mu\text{s}$ ,  $t = 70 \text{ }\mu\text{s}$  et  $t = 300 \text{ }\mu\text{s}$ . c)  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$  et  $t = 0 \text{ }\mu\text{s}$ ,  $t = 200 \text{ }\mu\text{s}$  et  $t = 600 \text{ }\mu\text{s}$ . La fonction de courant est évaluée sur la surface libre  $\tilde{X}_3 = 1$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0,2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0,1$ . La condition initiale *CI5* (resp. *CI6*) est adoptée pour a) et c) (resp. pour b)), voir Table (4.2). La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . . 89

- 4.6 Amplitude normalisée  $A_{\delta\psi}$  d'une perturbation de nombre d'onde a)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  b)  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$  et  $n = 0, 2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0, 1$ . Les conditions initiales CI5 et CI6 sont adoptées (voir Table 4.2). L'amplitude évaluée par le modèle *CLSA*, calculée par l'équation (4.6), est aussi présentée. La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 91
- 4.7 Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$ , pour une perturbation de nombre d'onde a)  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$  b)  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0, 2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0, 1$ . La déformation de Considère est atteinte à  $t = 119 \text{ }\mu\text{s}$ . Les conditions initiales CI5 et CI6 sont définies dans la Table 4.2. Les asymptotes verticales correspondent aux temps  $\tau_I = 61 \text{ }\mu\text{s}$ ,  $\tau_{II} = 97 \text{ }\mu\text{s}$  et  $\tau_{III} = 324 \text{ }\mu\text{s}$  pour lesquels la perturbation a une amplitude proche de 0 (voir Figure 4.6). La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 93
- 4.8 Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$ , pour une perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.2) avec  $K = 1 \text{ GPa}$ ,  $n = 0, 2$ . Le paramètre de déformation est  $\varepsilon_i = 0, 1$ . La demi-épaisseur est  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . Les conditions initiales CI5 et CI6 sont définies dans la Table 4.2. . . . . 94

- 4.9 Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\varepsilon}_{11}$ . Les conditions initiales sont définies en Table 4.2. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par l'équation (4.9) avec un paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation égal à  $m = 0,01$  et les paramètres de la Table 4.3. . . . . . 95
- 4.10 Comparaison des taux de croissance normalisés calculés par le nouveau modèle *XLSA* et le modèle classique *CLSA*. Les résultats sont présentés à a)  $t = 490 \mu\text{s}$  (déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 0,49$ ) et b)  $t = 820 \mu\text{s}$  (déformation nominale  $\varepsilon_{11} = 0,82$ ). La condition initiale *CI6* (voir Table 4.2) est considérée. Le matériau est sensible à la vitesse de déformation et la configuration de la Figure 4.9 est adoptée. Deux valeurs du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$  sont testées :  $m = 0,01$  et  $m = 0,05$ . . . . . 97
- 4.11 Évolution temporelle de l'amplitude normalisée de la perturbation de nombre d'onde  $\gamma_1 = 85\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . Le matériau est sensible à la vitesse de déformation. La loi de comportement est donnée par l'équation (4.9) avec les paramètres de la Table 4.3. Différentes valeurs du paramètre  $m$  de sensibilité à la vitesse de déformation sont considérées. Les résultats sont obtenus avec la condition initiale *CI6* définie en Table 4.2. . . . . 99
- 4.12 Évolution temporelle du taux de croissance  $\eta_T/\dot{\varepsilon}_{11}$  (voir l'équation 4.11). La perturbation est de nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\varepsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par la relation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. Le coefficient d'adoucissement thermique est  $\beta = 0,1$ . Les conditions initiales sont définies dans la Table 4.5.101

4.13 Évolution temporelle des taux de croissance  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  (voir l'équation 4.5) et  $\eta_T/\dot{\epsilon}_{11}$  (voir l'équation 4.11). Les perturbations ont le même nombre d'onde  $\gamma_1 = 23\pi/L_{01}$ . Le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement est donnée par la relation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. Le coefficient d'adoucissement thermique est  $\beta = 0,1$ . Les résultats sont obtenus avec la condition initiale *CI7* définie dans la Table 4.5. 103

4.14 Amplitude normalisée de la fonction de courant (équation 4.8) et de la perturbation de la température (équation 4.12) en fonction du nombre d'onde à  $t = 260 \text{ } \mu\text{s}$  (déformation nominale  $\epsilon_{11} = 0,26$ ). La loi de comportement est donnée par l'équation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. Le coefficient d'adoucissement thermique est  $\beta = 0,1$ . Les résultats sont obtenus avec la condition initiale *CI7* définie dans la Table 4.5. . . . . . 103

4.15 Taux de croissance normalisés donnés par le modèle *XSLA* pour a)  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  (voir équation 4.5) b)  $\eta_T/\dot{\epsilon}_{11}$  (voir équation 4.11) et par l'approche classique (voir équation 4.4) en fonction du nombre d'onde pour  $\beta = 0,1$  et  $0,2$ . Les résultats sont présentés en utilisant la condition initiale *CI7* définie dans la Table 4.5. La loi de comportement est donnée par l'équation (4.10) avec les paramètres de la Table 4.4. L'instant considéré est  $t = 1 \text{ ms}$  correspondant à une déformation nominale  $\epsilon_{11} = 1$ ; le gradient de vitesse initial est  $\dot{\epsilon}_{11} = 1000 \text{ s}^{-1}$ . . . . . 105

4.16 Différents modèles d'analyse des prémices du développement de l'instabilité plastique de striction . . . . . 106

5.1	Distance inter-strictions $L_0$ , rapportée à la configuration initiale, normalisée par l'épaisseur initiale $e_0$ , observée à l'instant de localisation et taille moyenne normalisée des fragments en fonction de la vitesse de chargement. Résultats obtenus par Rodríguez-Martínez <i>et al.</i> (2013b) (modèle par éléments finis, <i>ABAQUS</i> ) sur l'expansion d'anneaux d'uranium de rayon interne initial $R_i$ et de section carrée. $\varepsilon_f$ est la déformation seuil du critère de rupture adopté (l'élément est retiré). La géométrie est initialement non perturbée. . . . .	110
5.2	Configuration géométrique de la cellule unitaire étudiée par Xue <i>et al.</i> (2008) et Rodríguez-Martínez <i>et al.</i> (2013b) ( <i>ABAQUS</i> ). La cellule est de longueur $L_0$ et de diamètre $\Phi_0$ , sollicitée à vitesse constante $V_0/2$ sur les faces latérales. Un défaut est introduit à l'instant initial. . . . .	111
5.3	Déformation à l'instant de localisation de la cellule étudiée par éléments finis ( <i>ABAQUS</i> ) par Rodríguez-Martínez <i>et al.</i> (2013b) (voir Figure 5.2) en fonction du rapport $L_0/\Phi_0$ . Différentes vitesses de chargement sont considérées. L'amplitude $\delta$ du défaut est fixée. La loi de comportement est $\sigma = \sigma_0 \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_r} \right)^m$ avec $\dot{\varepsilon}_r = 10^3 \text{ s}^{-1}$ . . . . .	112
5.4	Évolution du nombre de strictions obtenues en fonction du nombre d'imperfections initiales le long de la circonférence de l'anneau. Expansion d'un anneau perturbé d'après Rodríguez-Martínez <i>et al.</i> (2013c) (éléments finis, <i>ABAQUS</i> ). L'amplitude du défaut et la vitesse de chargement sont fixées. . . . .	113
5.5	Évolution de la force mesurée sur la surface de chargement en fonction de la déformation axiale. Les résultats sont obtenus par Vaz-Romero <i>et al.</i> (2017) au moyen d'une simulation par éléments finis. La déformation de Considère est indiquée et correspond au maximum de la force. L'influence de l'amplitude $\bar{\omega}$ du défaut initial est étudiée. . . . .	114

5.6	Comparaison du signal $R(t)$ , représentatif du taux de croissance, pour la prédiction ALS et la simulation numérique par éléments finis, Jouve (2013). Configuration en déformation plane. Le matériau est non visqueux. Le gradient de vitesse initial est $\dot{\epsilon}_{11} = 10 \text{ s}^{-1}$ . La perturbation calculée par le modèle <i>CLSA</i> pour le mode dominant est introduite à l’instant initial. Deux niveaux de maillage pour la simulation numérique sont présentés. Du fait de l’écrouissage, l’existence d’une longueur d’onde de coupure permet de faire converger les simulations. . . . .	116
5.7	Vitesse de déformation plastique au sein de la plaque en déformation plane au moment de la décharge élastique, Jouve (2013). Le matériau est non visqueux. Le gradient de vitesse initial est $\dot{\epsilon}_{11} = 10 \text{ s}^{-1}$ . La perturbation calculée par le modèle <i>CLSA</i> pour le mode dominant est introduite à l’instant initial. . . . .	117
5.8	Probabilité cumulée d’obtenir une distance inter-strictions $l/L_0$ à différents instants de la déformation d’après El Maï <i>et al.</i> (2018) pour a) le modèle <i>CLSA</i> avec taux de croissance intégré et b) une simulation numérique par éléments finis. . . . .	118
5.9	Représentation schématique du maillage structuré de la plaque. La plaque est de demi-longueur $L_{01}$ et de demi-épaisseur $L_{03}$ . Il y a $N_{01}$ (resp. $N_{03}$ ) éléments selon la longueur (resp. l’épaisseur). Les éléments sont de type <i>CPE4R</i> (déformation plane à 4 nœuds et intégration réduite). . . . .	120



- 5.10 Évolution de la force axiale, par unité de longueur selon la direction  $x_2$ , exercée sur la face latérale de la plaque pour le modèle par éléments finis. La force est normalisée par la valeur de la solution analytique à l'instant initial  $4Y/\sqrt{3}L_{03}$ . La solution analytique est présentée. La loi de comportement est donnée par l'équation (5.5) et les paramètres de la Table 5.1. La vitesse de chargement est  $V_{01} = 1000 \text{ m/s}$  (gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ ). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 124
- 5.11 Représentation schématique de la plaque à l'instant initial. La perturbation est définie par les équations (5.7) à (5.10).  $A$  représente l'amplitude crête à creux de l'état de surface de la plaque. . . . . 128
- 5.12 Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  du mode  $p = 12$  calculé par l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique (*CLSA*, voir Annexe A). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 128
- 5.13 Évolution temporelle de la norme de la perturbation ( $p = 12$ ) de la vitesse définie par l'équation (5.14) sur la face inférieure ( $X_3 = -L_{03}$ ) pour les maillages définis dans le tableau (5.2). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Les résultats obtenus pour les maillages  $M_4$  et  $M_5$  sont similaires. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 130

5.14 Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $J(t)$  de la perturbation de la position définie par l'équation (5.13). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 131

5.15 Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse définie par l'équation (5.14). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 132

5.16 Nappes  $\delta\dot{\epsilon}_p/\dot{\epsilon}_p^{(b)}$  aux instants  $t = 27 \text{ }\mu\text{s}$  et  $t = 36 \text{ }\mu\text{s}$  pour le modèle par éléments finis et le modèle *XLSA*. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres issus de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut ( $p = 12$ ) est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans le tableau (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 133

5.17 Composante  $\delta v_3$  de la perturbation de la vitesse sur la face latérale ( $X_1 = -L_{01}$ ) de la plaque normalisée à l'instant  $t = 27 \mu s$  et  $t = 36 \mu s$  en fonction de la coordonnée normalisée  $X_3/L_{03}$  pour le modèle par éléments finis et le modèle *XLSA*. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \mu m$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table 5.2. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ . . . . . 134

5.18 Nappes  $\delta \dot{\epsilon}_p / \dot{\epsilon}_p^{(b)}$  à l'instant  $t = 105 \mu s$  pour le modèle par éléments finis et le modèle *XLSA*. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut ( $p = 12$ ) est  $A = 8 \mu m$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ . 135

5.19 Évolution temporelle de  $\max(\delta \dot{\epsilon}_p / \delta \dot{\epsilon}_p^0)$  par le modèle *XLSA*. Les résultats avec le modèle classique sont obtenus par intégration du taux de croissance calculé par la *CLSA* (voir chapitre 4, équation 4.6). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 s^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \mu m$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 cm$  et  $L_{03} = 1 cm$ . . . . . 136

5.20 Évolution temporelle du taux de croissance  $Z(t)$  de la perturbation défini par l'équation (5.15) sur la face inférieure ( $X_3 = -L_{03}$ ). La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial de  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 137

5.21 Évolution temporelle de la force normalisée sur la face latérale issue du modèle par éléments finis pour la plaque homogène et la plaque perturbée. La valeur théorique obtenue par l'équation (5.6) est aussi présentée. L'instant de localisation est noté  $t_{loc} = 117 \text{ }\mu\text{s}$  et correspond aux premières décharges élastiques dans la simulation numérique. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 138

5.22 Évolution temporelle du taux de croissance normalisé  $\eta/\dot{\epsilon}_{11}$  calculé par l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique (*CLSA*, voir Annexe A). Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 139

5.23 Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse définie par l'équation (5.14). Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude crête à creux du défaut est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 140

5.24 Évolution temporelle du taux de croissance  $Z(t)$  de la perturbation défini par l'équation (5.15). Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 20\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. L'amplitude du défaut crête à creux est  $A = 8 \text{ }\mu\text{m}$ . Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 141

5.25 Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $J(t)$  de la perturbation de la position définie par l'équation (5.13) pour différentes valeurs d'amplitude de défaut  $A$ . Résultats issus du modèle par éléments finis. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . 143

5.26 Évolution temporelle a) aux temps courts ; b) aux temps longs de la norme  $K(t)$  de la perturbation de la vitesse définie par l'équation (5.14) pour différentes valeurs d'amplitude de défaut  $A$ . Résultats issus du modèle par éléments finis. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . 144

5.27 Évolution temporelle du taux de croissance  $Z(t)$  défini par l'équation (5.15) pour différentes valeurs d'amplitude  $A$  de défaut. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . L'instant de localisation qui correspond aux premières décharges élastiques est reporté dans la Table 5.3 pour chacune des amplitudes du défaut. . . . . 145

5.28 Représentation schématique de la plaque au moment de la localisation. Les premières décharges élastiques apparaissent entre deux strictions tandis que la déformation se concentre au niveau des amincissements. . . . . 146

5.29 Instant  $t_{loc}$  de localisation en fonction de l'amplitude initiale du défaut. La prédiction du modèle *XLSA* et l'instant de localisation relevé par le modèle par éléments finis sont présentés. Le nombre d'onde de la perturbation est  $\gamma_1 = 12\pi/L_{01}$ . La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial  $\dot{\varepsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle *ABAQUS* utilise le maillage  $M_4$  défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont  $L_{01} = 10 \text{ cm}$  et  $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . . 147

C.1 Erreur relative sur le taux de croissance instantanée de  $\tilde{\psi}$  à  $t = 100 \mu\text{s}$  (voir équation C.8) en fonction du pas de temps en échelle *log-log*. Deux valeurs du nombre  $N$  de polynômes d'interpolation sont considérées. Les pentes associées aux erreurs d'ordre 1 et 2 sont représentées. . . . . 170





# Liste des tableaux

4.1	Définition des conditions initiales. CI1, CI2 et CI3 sont calculées à partir de l'Analyse Linéaire de Stabilité Classique, voir équation (4.4). $A_0$ est un facteur d'amplitude qui n'influence pas les résultats présentés, donc aucune valeur n'est spécifiée. CI4 est une fonction périodique avec $\omega = 5\pi/2$ . Deux valeurs de gradients de vitesse initial sont testées : $\dot{\epsilon}_{11} = 1\,000\text{ s}^{-1}$ , $10\,000\text{ s}^{-1}$ . .....	82
4.2	Définition des conditions initiales pour le cas d'un matériau non sensible à la vitesse de déformation lorsque l'écoulement est stable à $t = 0$ . . . . .	87
4.3	Paramètres adoptés pour la loi de comportement décrite par l'équation (4.9). Plusieurs valeurs du paramètre $m$ de sensibilité à la vitesse de déformation seront adoptées : $m = 0,01$ et $m = 0,05$ . . . . .	95
4.4	Paramètres adoptés pour la loi de comportement décrite par l'équation (4.10). Plusieurs valeurs du paramètre $\beta$ d'adoucissement thermique seront adoptées : $\beta = 0,1$ et $\beta = 0,2$ . . . . .	99
4.5	Définition des conditions initiales pour la perturbation mécanique et la perturbation thermique. Le comportement du matériau est thermoviscoplastique. . . . .	100
5.1	Paramètres adoptés pour la loi de comportement décrite par l'équation (5.5).	122

5.2	Caractéristiques des différents maillages utilisés pour définir un maillage de référence. . . . .	129
5.3	Instant $t_{loc}$ de localisation relevé dans le modèle par éléments finis pour les différentes amplitudes $A$ du défaut. La plaque est soumise à un gradient de vitesse initial $\dot{\epsilon}_{11} = 10000 \text{ s}^{-1}$ . La loi de comportement du matériau est décrite par l'équation (5.5) avec les paramètres de la Table 5.1. Le modèle <i>ABAQUS</i> utilise le maillage $M_4$ défini dans la Table (5.2). Les demi-dimensions sont $L_{01} = 10 \text{ cm}$ et $L_{03} = 1 \text{ cm}$ . . . . .	142

## **Étude analytique et numérique du développement de la striction multiple pour des cylindres métalliques en expansion dynamique**

La fragmentation d'enveloppes métalliques en expansion dynamique intéresse tant l'industrie civile que celle de la défense. Pour les deux domaines d'application, il s'agit de pouvoir prédire la taille et la vitesse des fragments, résultant de la destruction des enveloppes, afin de mesurer les conséquences que ceux-ci peuvent avoir sur des structures de sécurité. Les modèles de prédiction existants étudient le développement d'un défaut au sein du matériau et arrivent à déterminer une taille caractéristique des fragments. Néanmoins, ces modèles nécessitent une hypothèse dont la validité est remise en cause lorsque la vitesse de déformation est importante. Dans ce travail, nous proposons un nouveau modèle analytique pour des cylindres (solicitation en traction plane) permettant de s'affranchir de cette hypothèse et d'étudier l'influence du défaut initial en suivant son évolution. Le modèle développé est comparé avec succès à des résultats issus de simulations numériques par éléments finis. Nos travaux permettent notamment de préciser les cadres d'application et de validité des approches classiques. Comme résultats majeurs, la nouvelle approche permet d'analyser les évolutions des perturbations aux faibles déformations mais aussi d'estimer le temps d'apparition des premières décharges élastiques, synonymes de strictions localisées.

**Mots-clés :** Instabilités, Striction, Bifurcation, Analyse Linéaire de Stabilité

### **Analytical and numerical study of multiple necking for metal tubes in dynamic expansion**

This work deals with the fragmentation of dynamically expanding metal shells and covers a problem of interest for both civil and military industries. For both fields of application, it is crucial to predict the size and the speed of fragments, resulting from the destruction of shells in order to measure the consequences that it could have on structures. Current models study the growth of a defect within the material and are able to determine a characteristic size of fragments. Nevertheless, these models require a hypothesis whose validity is questionable when the rate of deformation is important. In this work, we propose a new analytical model for cylinders (equivalent to the dynamic extension of a plate) to overcome this hypothesis and study the influence of the initial defect by following its time evolution. The model is compared successfully with results performed with a finite element method. Our work notably expands the framework of classical linear stability analyses. As a major outcome, the proposed approach is able to track the evolution of a perturbation even for small plastic strain, when the flow may be stable. In addition it is shown that the present approach can predict accurately the time where the elastic unloading is observed in finite element simulations.

**Keywords :** Instabilities, Necking, Bifurcation, Linear Stability Analysis