



**HAL**  
open science

# Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

Gaël Pierson

► **To cite this version:**

Gaël Pierson. Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT : 2019LORR0054 . tel-02348111

**HAL Id: tel-02348111**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02348111>**

Submitted on 18 Jun 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Université de Lorraine  
École Doctorale Chimie – Mécanique – Matériaux – Physique (C2MP )  
Institut Jean Lamour – CNRS – UMR 7198

Département Nanomatériaux, Électronique et Vivant

---

# Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

---

**Thèse**  
présentée devant  
l'Université de Lorraine  
par

**Gaël PIERSON**

Pour l'obtention du titre de

**Docteur de l'université de Lorraine**  
en Mécanique des Matériaux

<b>Rapporteurs :</b>	M.	Michel FAGES	PU-PH	Université de Montpellier
	M.	Larbi SIAD	PU	Université de Reims
<b>Examineurs :</b>	Mme	Catherine STRAZIELLE	PU-PH	Université de Lorraine
	M.	Jean-Pierre BERNARD	PU	Université de Genève
<b>Directeur :</b>	M.	Richard KOUITAT-NJIWA	MCU-HDR	Université de Lorraine
<b>Co-directeur :</b>	M.	Pierre BRAVETTI	MCU	Université de Lorraine



# Table générale des matières

---

<b>TABLE GENERALE DES MATIERES .....</b>	<b>3</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>7</b>
<b>CHAPITRE 1 : CONTEXTE DE L'ETUDE.....</b>	<b>9</b>
<b>I. Introduction du contexte de travail.....</b>	<b>11</b>
<b>II. Structure de l'os.....</b>	<b>12</b>
1. Os compact .....	14
2. Os trabéculaire.....	15
3. Quelques valeurs numériques à travers l'expérimentation .....	16
<b>III. Modèles de comportement mécanique de l'os .....</b>	<b>18</b>
1. Modèle élastique linéaire .....	18
2. Modèle viscoélastique .....	19
3. Modèle élastique micropolaire.....	21
<b>IV. Les différentes approches numériques en mécanique.....</b>	<b>24</b>
1. La méthode des éléments finis .....	24
2. Meshless methods .....	25
3. Les éléments de frontière .....	26
4. Synthèse.....	27
<b>V. Conclusion .....</b>	<b>29</b>
<b>CHAPITRE 2 : STRATEGIE NUMERIQUE.....</b>	<b>31</b>
<b>I. Introduction .....</b>	<b>33</b>
<b>II. Équations de la statique et modèle de comportement.....</b>	<b>34</b>
1. Modèle élastique classique.....	34
2. Modèle élastique micropolaire.....	35
<b>III. Méthode numérique de résolution .....</b>	<b>39</b>

1.	Résolution pour l'équation de la chaleur.....	39
a.	Obtention du terme complémentaire.....	41
b.	Obtention du terme particulier.....	42
c.	Équations finales.....	45
d.	Exemple pour une forme en L.....	46
2.	La méthode LPI-BEM pour le modèle élastique micropolaire.....	48
a.	Champs complémentaires.....	49
b.	Champs particuliers.....	49
c.	Équations finales.....	50
3.	Optimisation de la méthode numérique.....	52
a.	Interpolation entre deux points sur des surfaces non-convexes.....	52
b.	Interpolation entre deux points passant à travers une face concave.....	53
c.	Validation des algorithmes : cas d'un tube avec une pression interne.....	55
<b>IV.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>58</b>
 <b>CHAPITRE 3 : VALIDATION DE LA STRATEGIE NUMERIQUE.....</b>		<b>61</b>
<b>I.</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>63</b>
<b>II.</b>	<b>Étude de la stabilité des résultats numériques.....</b>	<b>64</b>
<b>III.</b>	<b>Validation physique de la méthode LPI-BEM.....</b>	<b>66</b>
1.	Barre prismatique sollicitée en traction.....	66
2.	Patch Tests en déplacement.....	68
3.	Torsion d'un cylindre circulaire.....	69
4.	Plaque trouée.....	73
5.	Cube sous sollicitation de cisaillement.....	76
<b>IV.</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>80</b>
 <b>CHAPITRE 4 : ODONTOLOGIE.....</b>		<b>83</b>
<b>I.</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>85</b>
<b>II.</b>	<b>Os élastique classique.....</b>	<b>86</b>
1.	Os considéré comme un milieu à une structure.....	87
a.	1 <sup>er</sup> cas de charge : compression pure.....	89
b.	2 <sup>ème</sup> cas de charge : force oblique.....	91
2.	Os mandibulaire avec microstructure.....	93

# Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

a.	Bicouche os cortical – os spongieux.....	93
b.	Cas d'un recouvrement entier de l'os spongieux.....	96
3.	Discussion intermédiaire .....	98
<b>III.</b>	<b>Os considéré comme un milieu élastique micropolaire .....</b>	<b>100</b>
1.	Os mandibulaire : un milieu homogène, isotrope et élastique micropolaire .....	100
a.	Cas d'une compression .....	101
b.	Cas de la sollicitation oblique.....	103
c.	Conclusion partielle .....	106
2.	Os hétérogène composé de milieux élastiques micropolaires .....	107
a.	Considération d'une couche de corticale au-dessus de l'os spongieux .....	107
b.	Discussion.....	116
3.	Cas où l'os cortical entoure l'os spongieux.....	117
<b>IV.</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>121</b>
	<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>124</b>
	<b>Épilogue .....</b>	<b>126</b>
	<b>Annexe 1 : .....</b>	<b>134</b>





# Introduction générale

---

Actuellement, le développement avancé des pays dits « riches », qui tentent de satisfaire leur population au niveau de leurs besoins primaires nous amène à de nouvelles problématiques notamment des questions de bien-être. Comment pouvons-nous agir pour dépenser le moins possible tout en respectant l'humain, la cause animale et l'environnement ? Le domaine de la santé s'inscrit en plein dans cette problématique.

Les dispositifs médicaux classifiés en 12 catégories représentent un marché mondial de 187 milliards d'euros, qui est en expansion de 5 à 6% par an. L'industrie des dispositifs médicaux en Europe investit également en recherche et développement plus de 5,8 milliards d'euros et emploie 529 000 personnes en Europe dont 10 % en France. En conséquence la France représente 5% du marché mondial des prothèses médicales. L'Oséo, entreprise privée avec délégation de service public, affiche d'ailleurs la France en première place dans les investissements pour les dispositifs médicaux avec 85 millions d'euros en 2015. Ces investissements en recherche vont permettre ainsi de faciliter l'accès aux soins et de diminuer les coûts malgré la difficulté de l'acte chirurgical.

Parmi ces différentes catégories de dispositifs médicaux, l'implantologie est le domaine qui permet de remplacer les dents manquantes. Son objectif principal afin de permettre aux patients de retrouver la mastication et un aspect esthétique est d'assurer le maintien des dents entre elles. Dans cette discipline, 120 000 implants sont posés chaque année en France. Au vu du vieillissement démographique de la population, ce chiffre risque d'être en augmentation dans les années à venir. Les prothèses médicales en implantologie sont coupées en deux catégories. À savoir les implants axiaux endosseux qui sont intrusifs, et les implants basaux supraosseux qui se fixent autour de l'os. La plupart des implants sont du type axiaux endosseux et possèdent l'avantage d'être peu coûteux et faciles à poser. Cependant lorsque l'os a quasiment disparu à cause du phénomène de remodelage, leur pose devient difficile et les implants axiaux supraosseux deviennent incontournables. En effet, jusqu'à 5% des implants axiaux endosseux sont amenés à tomber soit à cause d'infections soit du fait de la fragilisation de l'os. Ce phénomène est dû à des implants mal

optimisés, la question de la versatilité et de la pérennité d'une prothèse se pose alors naturellement.

Pour répondre à cette problématique, il est nécessaire d'améliorer la forme, la surface ou le matériau qui constituent l'implant et afin l'optimiser au mieux de comprendre le milieu hôte. C'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail de thèse, avec le recours à la simulation numérique, pour comprendre au mieux la réponse du système implant - os sous une sollicitation mécanique. Ce sujet de thèse regroupera trois grands domaines, le domaine médical pour l'observation de la structure d'un os et l'apport d'une critique de nos simulations numériques en comparaison au cas cliniques, le domaine mécanique pour trouver un modèle de comportement mécanique et comprendre la réponse de l'os sous sollicitation mécanique et enfin le domaine mathématique pour pouvoir intégrer nos équations de notre modèle de comportement mécanique dans une méthode de résolution numérique.

Ainsi, l'objectif de cette thèse est de caractériser le comportement mécanique des tissus vivants durs du corps humain. Dans un premier chapitre, nous nous attacherons à décrire la structure de l'os pour ensuite trouver un modèle de comportement adapté à ce type de milieu. Puis nous exposerons dans ce même chapitre les différentes méthodes numériques pour trouver la méthode la plus pertinente. Au sein du second chapitre nous développerons la stratégie numérique et dans le troisième chapitre, nous testerons la robustesse de la méthode à travers les résultats numériques obtenus afin de comprendre l'impact de la prise en compte de la microstructure. Enfin dans le dernier chapitre, nous étudierons le système implant - os sous différentes sollicitations mécaniques et nous comparerons nos résultats issus de la simulation numérique à des cas cliniques pour savoir si notre modèle est adapté à la description des os.

## Chapitre 1 : Contexte de l'étude

---

## Table des matières du chapitre 1 :

<b>I.</b>	<b>INTRODUCTION DU CONTEXTE DE TRAVAIL .....</b>	<b>11</b>
<b>II.</b>	<b>STRUCTURE DE L'OS.....</b>	<b>12</b>
1.	Os compact .....	14
2.	Os trabéculaire.....	15
3.	Quelques valeurs numériques à travers l'expérimentation .....	16
<b>III.</b>	<b>MODELES DE COMPORTEMENT MECANIQUE DE L'OS.....</b>	<b>18</b>
1.	Modèle élastique linéaire .....	18
2.	Modèle viscoélastique .....	19
3.	Modèle élastique micropolaire .....	21
<b>IV.</b>	<b>LES DIFFERENTES APPROCHES NUMERIQUES EN MECANIQUE.....</b>	<b>24</b>
1.	La méthode des éléments finis.....	24
2.	Meshless methods .....	25
3.	Les éléments de frontière .....	26
4.	Synthèse .....	27
<b>V.</b>	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>29</b>

## **I. Introduction du contexte de travail**

L'os mandibulaire a pour rôle le maintien des dents et participe grandement au mécanisme de mastication. De ce fait, l'os mandibulaire est susceptible de subir d'importantes sollicitations transmises par les dents ou les implants dentaires. Il est donc préférable qu'il ne soit pas un point faible en fragilisant son milieu hôte. Pour comprendre au mieux le comportement du système implant - os et pouvoir créer un implant qui réagira en harmonie avec l'os, le milieu vivant, il faut alors procéder à des études par diverses approches parmi lesquelles la simulation numérique occupe une place de première importance. Or, avant d'entreprendre ces simulations numériques, il faut en premier lieu comprendre et décrire au mieux le comportement de l'os qui est un milieu vivant complexe comportant plusieurs structures, plus ou moins poreuses. Du fait de sa structure il semblerait que le modèle élastique classique ne soit donc pas suffisant pour décrire un tel milieu.

Ce chapitre présente un exposé succinct de l'état des connaissances sur les os. Dans un premier temps nous allons présenter les différents types d'os et leur composition. Ensuite nous exposerons les différents modèles de comportement utilisés pour décrire un tel milieu. Enfin nous indiquerons les différentes méthodes de résolution numérique avec leurs avantages et inconvénients pour la résolution de problèmes de l'ingénieur.

## II. Structure de l'os

Le corps humain est composé de deux cent six os, ce qui représente 20 % de la masse du corps humain, soit 13 à 16 kilos selon l'individu. Les os constituant le squelette ont donc pour fonction la structuration de notre corps. Ils permettent au corps de s'élever et de s'opposer à la gravité. Ils ont également pour fonction de jouer un rôle de protection, tel que le crâne protégeant le cerveau ou encore la cage thoracique protégeant le cœur et les poumons. Sa composition en calcium et en phosphore en font une réserve de minéraux pour l'organisme. Enfin, ils ont également comme rôle, et pas des moindres, la fabrication des globules rouges et blancs.

Il est possible de classer les os par leurs formes : il y a les os longs comme le fémur, les os courts, les os irréguliers ou encore les os plats comme le crâne. Ces différents os possèdent des structures différentes regroupées en deux grandes catégories, les structures externes et les structures internes. Les structures externes sont des structures d'os compact, résistantes, qui jouent un rôle de protection. Les structures internes, généralement poreuses, jouent un rôle de réservoir qui contient de la moelle rouge et de la graisse.

L'os est un milieu complexe possédant différentes structures et différentes échelles. De plus comme l'os est un milieu vivant, ses propriétés varient avec l'âge, le sexe, les maladies... Ces différents facteurs peuvent modifier ses caractéristiques macro et microscopique. Si nous nous penchons sur les différentes structures, nous observons que l'os a une structure hiérarchisée avec sept échelles différentes (Weiner and Wagner, 1998), voir figure 1.1.

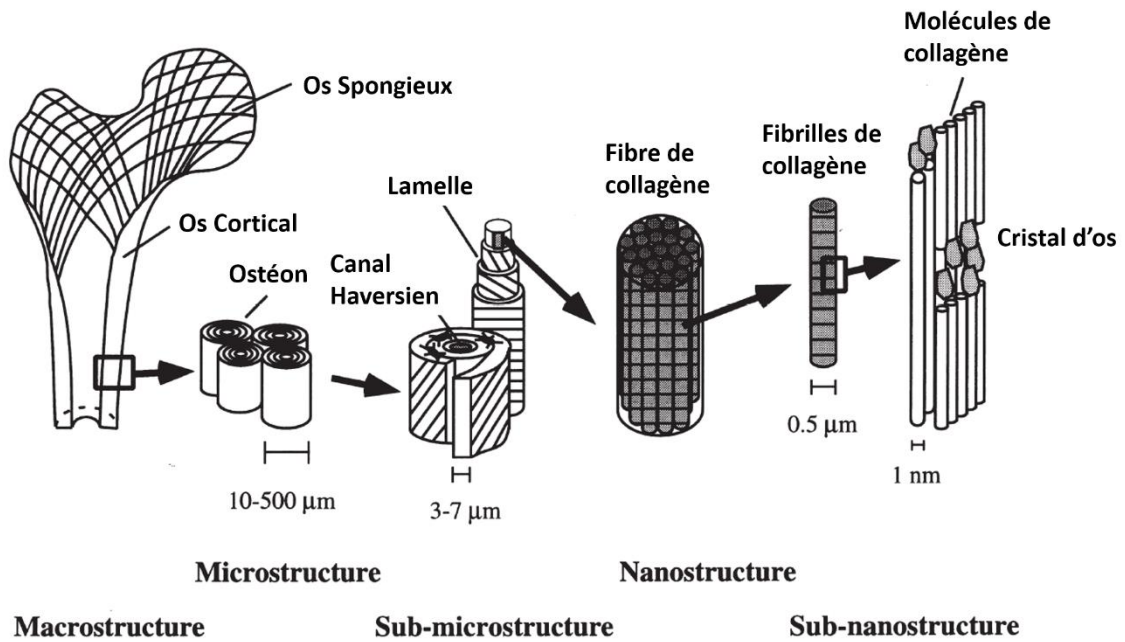


Figure 1.1 : Représentation de la structure multi-échelles de l'os. Extrait de Rho et al., 1998

D'un point de vue macroscopique, si nous regardons la structure externe, il peut apparaître comme un milieu homogène. Cependant si nous nous penchons sur sa structure interne, l'os apparait comme un milieu non homogène, anisotrope et poreux (voir figure 1.2). La porosité pouvant évoluer de façon continue entre 5 et 95 % les os ont soit une très faible porosité, soit une très forte porosité. Il est possible de séparer l'os en deux catégories, l'os cortical et l'os trabéculaire. L'os possède alors différents types de pores arrangés de façon variable (Cowin, 1999). Nous remarquons sur la figure 1.2 que l'évolution de la porosité entre l'os cortical et l'os trabéculaire se fait très rapidement (Carter DR and Hayes WC, 1977).

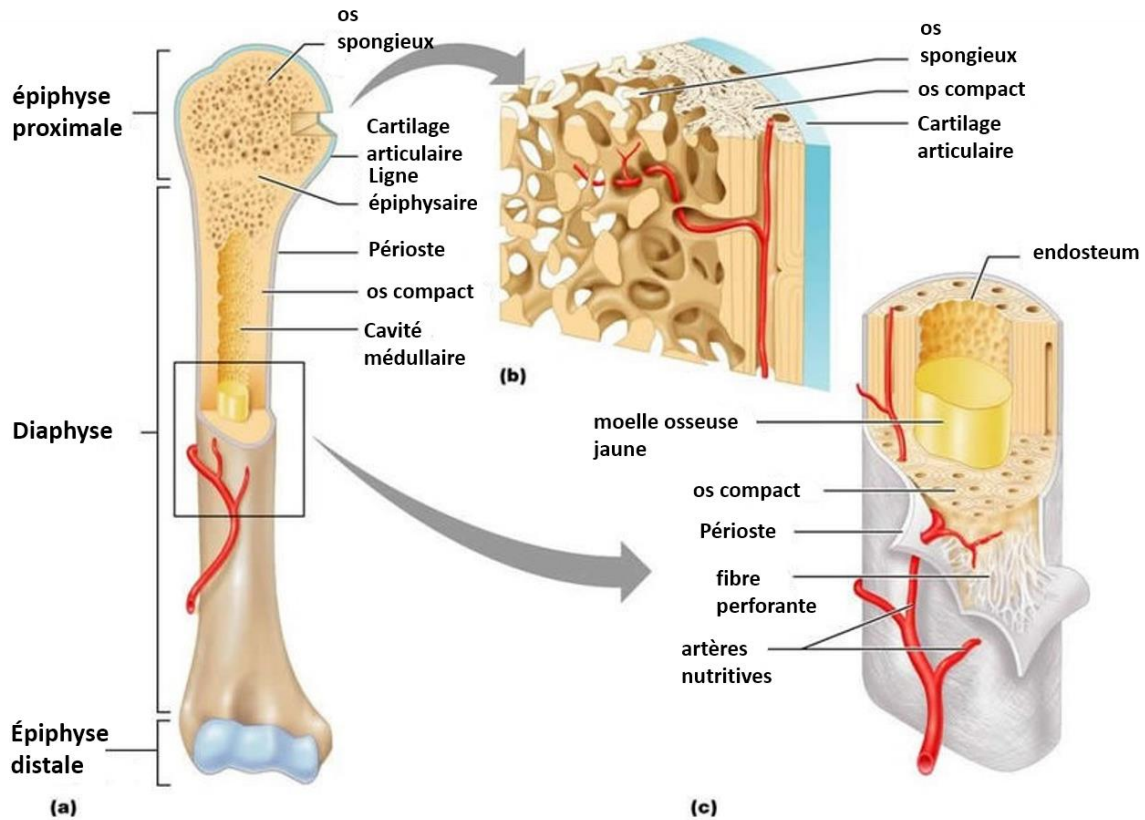


Figure 1.2 : Différentes structures de l'os. Extrait de Pearson Education Inc.

## 1. Os compact

L'os compact (ou cortical) du point de vue de sa microstructure est constitué d'une juxtaposition de cylindres eux-mêmes composés de lamelles formant des rouleaux (cf fig. 1.1). À première vue, l'os compact peut être considéré comme un milieu homogène sans microstructure du fait de sa faible taille. Or, lorsque nous l'observons de plus près il apparaît un milieu microarchitecturé (cf. figure 1.2) avec une porosité inférieure à 10 % de son volume et une taille des pores inférieure à 50  $\mu\text{m}$  (Doblaré et al., 2004).

Du point de vue du mécanicien, l'os cortical peut être caractérisé s'il est considéré comme un milieu élastique isotrope, par un module de Young et un coefficient de Poisson. Ces paramètres mécaniques dépendent évidemment de la composition de l'os (Carter and Spengler, 1978), (Gibson, 1985). Le module de Young obtenu dépend de la densité et de la composition de l'os. Vose et Kubala (Vose GP and Kubala AL, 1959) exprimèrent en premier cette dépendance sous la forme :



$$E(MPa) = 10500 \cdot \rho_{\alpha}^{2,57 \pm 0,04}$$

Où  $\rho_{\alpha}$  est la densité (poids des cendres / volume total de l'échantillon) comprise entre 0.03 et 1.22 g.cm<sup>-3</sup> pour une vertèbre. Pour obtenir les cendres, l'échantillon est placé dans un four durant une cinquantaine d'heure à 500°C et on ne récupère que la partie minérale de l'os. Ce modèle présente alors une limite puisqu'il ne permet pas de prendre en compte la fraction volumique d'os indépendamment de la fraction des cendres. Hernandez et al. (2001) ont réussi à prendre en considération la fraction volumique d'os en fonction de la fraction des cendres et ont proposé la relation suivante :

$$\rho = \frac{BV}{TV} (1,41 + 1,29\alpha)$$

Où BV/TV est le volume d'os sur la masse volumique,  $\alpha$  la fraction de cendre. Ce qui permet d'obtenir la relation suivante pour le module de Young :

$$E(MPa) = 84370 \left( \frac{BV}{TV} \right)^{2,58 \pm 0,02} \alpha^{2,74 \pm 0,13}$$

Cependant l'os est un milieu anisotrope donc le module de Young dépend de la direction. Les premiers à considérer cet aspect sont Lotz et al. (1991). Ils montrèrent que l'os cortical fémoral a pour module de Young selon la direction axiale :

$$E(MPa) = 2065\rho^{3,09}$$

Et pour module de Young dans la direction transverse :

$$E(MPa) = 2314\rho^{1,57}$$

## 2. Os trabéculaire

L'os trabéculaire contrairement à l'os compact est beaucoup moins dense. C'est un milieu possédant une grande porosité, supérieure à 50% du volume total de l'os, dont la taille de ses pores est en moyenne de 200  $\mu$ m.

De même que pour l'os cortical, des travaux ont été entrepris pour déterminer les propriétés des os trabéculaires (Goldstein, 1987). Les travaux de Keyak et al. (Keyak et al., 1994) ont mis en évidence des propriétés suivantes de l'os trabéculaire :

$$E(MPa) = 33900 \cdot \rho_{\alpha}^{2,2} \quad \text{si } \rho_{\alpha} < 0,27 \text{ g.cm}^{-3}$$

Les limitations de ce modèle étant les mêmes que pour l'os cortical, en prenant en compte l'indépendance de la fraction volumique d'os, la fraction de cendre et les directions de sollicitation, nous pouvons réécrire pour l'os trabéculaire le module de Young :

$$E(MPa) = 1904\rho^{1,64} \quad \text{direction axiale}$$

$$E(MPa) = 1157\rho^{1,78} \quad \text{direction transverse}$$

### 3. Quelques valeurs numériques à travers l'expérimentation

Pour avoir un aperçu des caractéristiques mécaniques macroscopiques de l'os, nous allons exposer quelques valeurs numériques pour expliciter l'ordre de grandeur des valeurs des modules de Young pour un milieu vivant dur comme l'os (Ces différentes valeurs sont restituées dans le tableau 1.1). La nano-indentation, méthode expérimentale, permet d'obtenir les paramètres locaux d'un matériau comme le module de Young ou la dureté. Elle a permis de caractériser de nombreux matériaux. Selon l'inclinaison de l'échantillon il est alors possible de mettre en avant les caractéristiques anisotropes de l'os cortical (Fan et al., 2001). Cette technique a permis de voir également les variations des propriétés de l'os en fonction de l'âge, du sexe ou encore des maladies (Turner et al., 1999, Zysset et al., 1999, Tjhia et al., 2011, Rho et al., 1997). D'autres méthodes, qui considèrent l'os dans sa globalité, comme des essais de compression (Misch et al., 1999) (Stoppie et al., 2005), de flexion (Lettry et al., 2003), ou encore de propagation d'ondes acoustiques (Schwartz-Dabney and Dechow, 2002), (Rohrbach et al., 2012) ont permis de remonter aux modules de Young des matériaux testés.

Références	Types d'essais	Statut	Type d'os	E cortical (GPa)	E spongieux (MPa)
(Misch et al., 1999)	Compression	Mandibule	Spongieux	/	3,5 - 240
(Schwartz-Dabney and Dechow, 2002)	Acoustique	Mandibule	Cortical	10 - 29,9	/
(Lettry et al., 2003)	Flexion	Mandibule	Cortical	4,7 - 16	/
(Stoppie et al., 2005)	Compression	Mandibule	Cortical et spongieux	/	22 - 950
(Rohrbach et al., 2012)	Acoustique	/	Cortical	18,5	/

Tableau 1.1 : Tableau regroupant les modules de Young pour différents os déterminés par différents essais

Pour conclure, nous pouvons classer les os en deux groupes suivant leur volume de porosité. L'os cortical, qui constitue la paroi externe et entoure l'os trabéculaire, est très dense et possède une faible porosité. L'os trabéculaire a, quant à lui, une forte porosité et intègre la moelle rouge et/ou différentes graisses. Les deux structures sont des milieux qui possèdent une microstructure, très fine pour l'os cortical et un peu plus importante pour l'os trabéculaire. Les résultats expérimentaux qui nous donnent le module de Young, nous montrent également cette différence entre les deux types d'os. Le module de Young de l'os cortical est beaucoup plus important que pour l'os spongieux. L'os cortical est alors la structure la plus rigide de l'os.

Cette partie a permis de mettre en avant que l'os est un milieu complexe qui possède deux structures aux propriétés mécaniques différentes. De plus, nous avons observé que l'os est un milieu multi-échelles. Pour optimiser la géométrie ou le matériau de l'implant à travers une étude paramétrique, il est nécessaire de trouver un modèle de comportement mécanique le plus adapté à décrire ce milieu complexe.

### III. Modèles de comportement mécanique de l'os

Pour pouvoir analyser les contraintes mécaniques induites dans un os par des stimuli extérieurs, il faut déterminer une expression mathématique traduisant son comportement. Dans la littérature on trouve principalement deux modèles de comportement mécanique pour l'os. Ce sont des modèles considérant l'os comme un milieu sans microstructure. L'un des deux le considère comme un milieu à élasticité linéaire classique (Yoon and Katz, 1976), (Reilly and Burstein, 1975) donc modélisable par loi de Hooke. L'autre le considère comme un milieu viscoélastique. Cependant aucun de ces modèles ne prend en considération l'impact éventuel de la microstructure sur le comportement mécanique. Nous avons alors décidé d'approcher son comportement à travers une approche phénoménologique en considérant l'os comme un milieu élastique micropolaire.

#### 1. Modèle élastique linéaire

C'est le modèle de comportement mécanique le plus simple, il peut être concevable de l'utiliser dans certains cas et sous certaines hypothèses. Cependant ce modèle ne prend pas en compte l'influence d'une éventuelle microstructure sur les macros déplacements. Il relie de façon linéaire le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  en un point au tenseur des déformations linéarisées  $\varepsilon_{kl}$  en ce même point par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Où  $C_{ijkl}$  est la matrice d'élasticité.

Ce modèle de comportement reste le plus utilisé dans le milieu industriel et dans la recherche. Il est bien adapté, dans un large champ applicatif, pour représenter le comportement des milieux classiques comme les métaux, le verre, le plastique ou encore les roches. Pour les os, le comportement semble être un peu plus complexe mais certains travaux négligent sa microstructure et le considèrent comme un milieu élastique isotrope (Didier et al., 2017), (Bessho et al., 2007).

Ce modèle semble pouvoir être adapté sous certaines conditions, comme pour l'os cortical où sa porosité est très faible ou encore pour avoir un aperçu du comportement osseux. Cependant au vu de la complexité structurelle de l'os, ce modèle de comportement semble ne pas être adapté pour décrire un tel milieu. Nous l'utiliserons ainsi comme point de comparaison pour mettre en avant l'impact de la microstructure sur le comportement mécanique.

## 2. Modèle viscoélastique

Si nous observons l'os de plus près il est évident qu'il n'est pas homogène (cf chapitre 1 II) donc qu'un modèle de comportement élastique et linéaire ne semble pas suffire, surtout dans le cas de l'os trabéculaire (Baïotto, 2004). C'est pourquoi d'autres chercheurs ont essayé d'en tenir compte en proposant d'autres modèles de comportement pour l'os tel que le modèle viscoélastique. La viscoélasticité introduit une dépendance au temps qui se traduit par l'introduction d'une vitesse de déformation.

Certains travaux mettent en évidence que le comportement de l'os cortical relierait la contrainte à la vitesse de déformation au taux de déformation (McElhaney, 1966). Après avoir effectué des expériences de compression sur des os humains et bovins, ils proposent une loi du type :

$$\sigma = 11,3 \ln(\dot{\epsilon}) + 230,5$$

Quelques années plus tard, Wright et al. (1976) ont proposé un modèle de comportement reliant la contrainte au logarithme du taux de déformation en faisant des essais de traction sur l'os cortical, décrit ci-après :

$$\sigma = 29,86 \ln(\dot{\epsilon}) + 145.91$$

Plus récemment, Lakes et Katz (Lakes et al., 1979), (Lakes and Katz, 1979) ont également montré que le comportement de l'os cortical pouvait être décrit par un modèle de comportement viscoélastique. De plus, d'un point de vue microstructural, nous pouvons comprendre qu'un modèle de comportement élastique et linéaire n'est pas adapté pour décrire un milieu tel que l'os trabéculaire qui est composé en plus de l'os, de moelle et de graisse. Dans leurs travaux, Carter et Hayes (1977) montrent que le taux de déformation est élevé à une certaine puissance alors que pour décrire l'os cortical il était fonction du logarithme. Ces travaux mettent en évidence l'influence du milieu emprisonné par l'os.

$$\sigma = 68 \dot{\epsilon}^{0,06} \rho_{app}^2$$

Avec  $\rho_{app}$  la densité apparente.

Pour améliorer le modèle de comportement, le travail de Linde and Sørensen (1993) a par exemple permis d'étudier l'impact du taux de déformation sur un os spongieux et d'obtenir une relation similaire à la précédente avec un terme indépendant de la densité apparente.

$$\sigma = (-5,8 + 37,1 \rho_{app}) \dot{\epsilon}^{0,073}$$

D'autres travaux, ici rhéologiques, prennent en compte la relaxation de l'os spongieux comme l'ont montré Deligianni et al. (Deligianni et al., 1994). À travers ces travaux, il a été démontré que la fonction de relaxation dépend du niveau de déformation, ce qui validerait le comportement viscoélastique. Les travaux de Bowman et al. (1994) ou encore Keaveny et Hayes (1993) nous montrent encore que l'os trabéculaire peut être modélisé par un comportement viscoélastique.

Pour conclure sur cette partie, nous remarquons que de telles lois de comportement semblent adaptées pour la description du comportement de l'os mais que ces différentes

lois sont établies sur des cas particuliers qui dépendent de l'os considéré, de l'âge, le sexe, la physiologie ou encore d'éventuelles pathologies.

### 3. Modèle élastique micropolaire

La théorie des milieux de Cosserat (milieux micropolaire) a été introduite pour la première fois par les frères Cosserat, Eugène et François, à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle (Cosserat and Cosserat, 1909). Une autre approche décrite par Eringen (Eringen, 1999a) est une simplification de la mécanique des milieux généralisés, les milieux micromorphes. Ces modèles de comportement sont capables de décrire des champs de déformations (Diepolder et al., 1991, Diebels, 2000)), de mouvements (Lakes, 1986, Ehlers, 1997, Diebels, 2002, Goddard, 2008) ou encore des champs électromagnétiques ((Maugin, 1988), (Eringen, 1990)) en réponse a une sollicitation externe.

Le milieu micromorphe tient compte de la microdéformation d'un corps, ce qui en conséquence apporte des degrés supplémentaires de liberté en plus des degrés de liberté en translation connus en mécanique classique. Les milieux micromorphes généralisés possèdent jusqu'à 12 degrés de libertés. Ils permettent généralement de décrire des milieux ayant des structures complexes tels que les mousses, les milieux poreux, granulaires ou encore biologiques.

Dans le cadre de ce travail de thèse, qui consiste à étudier le comportement des tissus biologiques durs ((Park and Lakes, 1986), (Li and Xie, 2004), (Ramezani et al., 2009), (Altenbach and Eremeyev, 2009)), nous utiliserons les milieux micropolaires. Nous prenons alors en compte l'influence de la microstructure en considérant que ses points matériels peuvent avoir des microrotations ce qui amène les os à être considérés comme des milieux à six degrés de liberté ((Eringen, 1999a), (Dyzlewicz, 2004)). Le travail expérimental de Lakes (Lakes, 1995) confirme que les milieux micropolaires sont particulièrement bien adaptés pour décrire les milieux tel que les os.

Schématiquement, nous pouvons décrire un point matériel avec une certaine longueur caractéristique comme sur la figure 1.3 ci-dessous. Ce point matériel peut subir des macro déplacements en translation  $U_i$  couplés à des microrotation  $\varphi_i$  avec  $i = 1, 2$  ou  $3$ .

Nos deux variables cinématiques entraînent donc un tenseur statique des contraintes  $\sigma_{ij}$  et un tenseur des microcontraintes  $m_{ij}$  avec  $i$  et  $j = 1, 2$  ou  $3$ . Les variables cinématiques sont reliées aux tenseurs statiques par un modèle de comportement constitué de deux équations qui décrivent respectivement ce qui se passe sur la macro et la micro-échelle. La formulation du modèle de comportement s'appuie sur la thermodynamique, plus de précisions seront données au chapitre 2.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl} U_{l,k} - C_{ijkl} \epsilon_{klw} \varphi_w + F_{ijkl} \varphi_{k,l} \\ m_{ij} &= A_{jikl} \varphi_{k,l} + F_{klij} U_{j,i} - F_{klij} \epsilon_{ijw} \varphi_w\end{aligned}\tag{1}$$

Où  $A_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  et  $F_{ijkl}$  sont des tenseurs d'ordre 4,  $U_i$  est le vecteur déplacement et  $\varphi_i$  le vecteur des microrotations. Ces différents tenseurs dépendent des paramètres macroscopiques dits de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , du paramètre de couplage macro/microstructure  $\kappa$  et des paramètres micropolaires  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Par exemple pour un cas isotrope et centrosymétrique, c'est-à-dire que chaque point matériel possède un centre de symétrie, les tenseurs d'ordre 4 peuvent se réécrire comme  $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu_m + \kappa) \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_m \delta_{il} \delta_{jk}$ ,  $A_{jikl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} + \gamma \delta_{ik} \delta_{jl}$  et  $F_{ijkl} = 0$ .

Le concept des milieux micropolaires entraîne naturellement à se poser des questions sur la taille de l'échelle microscopique par rapport à l'échelle macroscopique. La réponse d'un corps à une sollicitation dépend de la taille de ces échelles. Pour que la théorie soit acceptable il faut que la longueur caractéristique interne considérée  $l_i$  de la microstructure soit inférieure à la taille du domaine. Plus la porosité dans le domaine sera faible, moins l'impact de la microstructure sur la macrostructure sera importante (Eringen, 1999b).



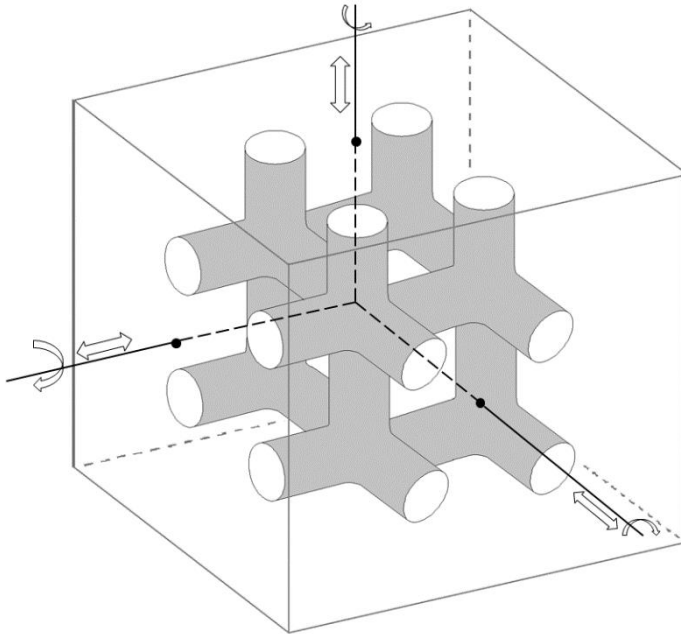


Figure 1.3 : Représentation d'un point matériel du milieu micropolaire homogénéisé

À travers cette partie nous avons pu mettre en évidence trois modèles de comportement mécanique, ayant chacun leurs hypothèses, qui peuvent être utilisés pour décrire les os. Dans ce travail de thèse nous chercherons à évaluer l'impact de la prise en compte de la microstructure sur le comportement mécanique d'un système implant - os, en utilisant le modèle élastique micropolaire. Pour appréhender l'impact de la microstructure sur le comportement mécanique nous modéliserons également l'os comme un milieu élastique classique qui servira de point de comparaison pour notre étude. Ce sont tous les deux des modèles qui ne nécessitent pas de modification des équations de comportement en fonction des types d'os et qui sont indépendantes de l'âge, du sexe, des maladies, du remodelage... seul les paramètres structuraux de l'os évoluent. De plus, à l'égard des travaux expérimentaux de Lakes, la théorie des milieux micropolaires semble adaptée à notre problématique (Lakes, 1995).

## **IV. Les différentes approches numériques en mécanique**

Lorsque le problème devient trop complexe à résoudre et que la solution ne peut être obtenue analytiquement, il n'est pas rare d'avoir recours aux méthodes numériques. Ces méthodes sont pertinentes pour résoudre des problèmes d'ingénierie pour des milieux complexes sous sollicitations complexes. Les méthodes numériques sont également un avantage car elles ont un faible coût et ne présentent aucun risque humain. Elles permettent un développement et une optimisation rapide d'un produit, dans un premier temps, sans avoir recours à des simulations réelles. De plus, avec l'évolution de l'informatique elles deviennent de plus en plus efficaces. L'ensemble de ces avantages nous permet de suggérer que l'utilisation de ces méthodes numériques pour le domaine médical pourraient avoir un apport positif. Dans le cadre de mon travail, en implantologie, elles permettraient d'optimiser au mieux la forme et le matériau de l'implant sans passer par des tests d'optimisation sur des cobayes.

Il existe différentes méthodes numériques pour résoudre les problèmes mécaniques. Nous pouvons citer les méthodes des volumes finis (MVF/ FVM), des différences finies (MDF / FDM), des éléments finis (MEF/ FEM), des éléments de frontière (MEFr/ BEM), les méthodes sans maillage (Meshless methods) ou encore la méthode des fonctions de poids (WFM).

Dans le domaine de la mécanique, la méthode numérique la plus connue est celle des éléments finis. Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi d'utiliser une combinaison de deux méthodes, celle des éléments de frontière et celle de la collocation par points, la LPI-BEM (« Local Point Interpolation-Boundary Element Method ») en l'adaptant pour résoudre des problèmes élastiques micropolaires.

### **1. La méthode des éléments finis**

C'est durant les années cinquante que cette méthode a vu le jour (Levy S., 1947), (Levy S., 1953), (Argyris, 1960). Elle permet de résoudre des problèmes multi-physiques qui peuvent être statiques ou dynamiques pour des géométries complexes. Elle est très

utilisée en ingénierie pour résoudre des problèmes de mécanique (János Szabó, 2008), de thermique (Mayer et al., 2014), de mécanique des fluides (Connor J.J. and Brebbia C.A., 1976), de mécanique de la rupture (Geniaut and Galenne, 2012)... Elle fut également la première méthode à être utilisée pour résoudre des problèmes de biomécanique pour l'os (Huiskes and Chao, 1983). C'est une méthode permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles, elle donne une solution approchée suffisamment fiable pour un problème donné. Cette méthode a l'avantage d'être simple à mettre en place et permet de traiter des problèmes tridimensionnels. Étant donné qu'elle doit être maillée entièrement sur le volume pour la discrétisation, cette méthode peut rapidement devenir lourde en temps de calcul et nécessite d'importantes ressources.

La méthode des éléments finis n'est cependant pas adaptée pour faire des simulations en grande transformation comme les problèmes de propagation de fissure ou encore des problèmes de glissement de bande lors de condition de cisaillement, ce qui amèneraient à la distorsion des éléments. Cependant, il existe des méthodes lourdes de remaillage pour éviter ces problèmes de distorsion (Trädegård et al., 1998), (Yvonnet, 2004).

## **2. Meshless methods**

Une autre méthode de substitution à la FEM est une méthode sans maillage dite de collocation (meshless methods). Ce type de stratégie numérique est né dans les années 70 à travers la méthode Smoothed Particle Hydrodynamics (Gingold and Monaghan, 1977) puis celle de Libersky et al. qui furent les premiers à l'introduire pour la résolution de problème en mécanique du solide (Libersky et al., 1993). Elle est également utilisée pour résoudre des problèmes de biomécanique (Belinha, 2014). Cette méthode étant basée sur des calculs d'interpolation entre les nœuds, l'approximation n'est plus liée aux éléments comme dans la méthode des éléments finis mais simplement à l'aide des données nodales. Ce dernier point est un avantage pour résoudre des problèmes de grandes transformations, par exemple, pour des milieux évolutifs. Cette méthode permet de faire des simulations d'objet 3D complexe, les nœuds pouvant être créés ou détruits au cours de la simulation comme dans les problèmes de fissurations. Elle permet également de

simuler facilement des matériaux aux propriétés non-linéaires (Chen et al., 2017) et d'éviter des problèmes de discontinuité ou de singularité.

En dépit de tous ces aspects positifs, cette méthode peut être mise en défaut. Par exemple il est difficile avec cette méthode d'imposer des conditions aux limites de type Dirichlet. Une autre faiblesse est liée à l'intégration numérique qui n'est pas polynomiale mais rationnelle. Il est alors nécessaire d'avoir un schéma d'interpolation très fin pour minimiser les erreurs (Dolbow and Belytschko, 1999). Les frontières non-convexes amènent aussi à des erreurs numériques, les interpolations entre les nœuds basés sur ce types de frontière ne doivent pas être prises en compte (Belytschko et al.). Le dernier inconvénient de cette méthode est la zone d'influence pour l'interpolation, elle doit contenir un nombre de point ni trop petit, ni trop grand et doit être régulière pour chaque nœud d'interpolation.

### **3. Les éléments de frontière**

Comme son nom l'indique, les éléments de frontière utilisent un maillage uniquement construit sur les frontières du domaine considéré. Cette méthode est née dans les années 1960 et a commencé à se développer dans les années 1970. C'est à partir de l'année 1991 que le nombre de publications sur les éléments de frontière a considérablement augmenté (Cheng and Cheng, 2005). Les éléments de frontière consistent en la transformation des équations aux dérivées partielles décrivant le champ à l'intérieur et sur les frontières du domaine en une équation intégrale sur la frontière par le biais d'une solution fondamentale de ces équations aux dérivées partielles, dite solution de Green. Dans la littérature, les solutions fondamentales des équations de Navier ou Laplace sont bien connues. Cette méthode peut s'appliquer à de nombreux domaines comme la mécanique des fluides, l'acoustique, l'électromagnétisme, les problèmes de fissuration ou encore les contacts mécaniques. (Huang and Liang, 1996) (Sladek and Sladek, 2003) (Sládek and Sládek, 1985).

Cette méthode a l'avantage de susciter peu de calculs car la discrétisation ne s'effectue que sur les frontières extérieures, donc seule les frontières ont besoin d'être maillées. Pour un même calcul, cette méthode nécessitera moins de ressource en comparaison aux

éléments finis. Elle a également l'avantage de pouvoir traiter des problèmes de singularité sans devoir être maillée finement autour de la singularité. En revanche elle est difficile à appliquer et elle ne peut résoudre que des problèmes linéaires. Les équations intégrales de frontière exigent la connaissance explicite d'une solution fondamentale de l'équation aux dérivées partielles.

En comparaison aux autres méthodes les éléments de frontière, lorsque l'on connaît la solution fondamentale aux équations d'équilibre, est d'une meilleure efficacité en terme de ressource de calcul en comparaison aux éléments finis.

#### 4. Synthèse

Ces trois méthodes différentes ont chacune des domaines physiques d'application qui leurs sont propres, mais elles peuvent être toutes efficaces pour résoudre des problèmes de mécanique. Ces trois méthodes peuvent se différencier à travers leur maillage comme sur la figure 1.4 qui résume de façon imagée le principe de chaque méthode. La méthode des éléments finis est une méthode relativement simple à mettre en place et relativement stable mais elle s'avère très gourmande en mémoire et en calcul lorsque les maillages deviennent complexes. De plus la densité de ses maillages en fait une méthode lourde en calcul et par ce fait en puissance de calcul.

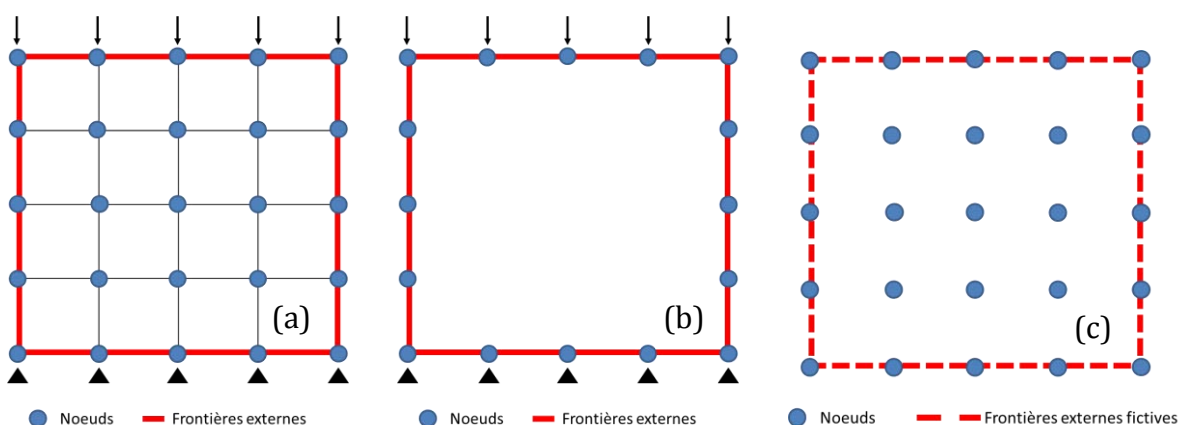


Figure 1.4 : Différences sur les maillages des méthodes numériques : (a) FEM, (b) BEM, (c) Meshless

Une alternative pour résoudre des problèmes non-linéaires serait les méthodes sans maillage (cf fig. 1.4 – (c)). Cette méthode permet de résoudre des problèmes dynamiques ou de grande déformation étant donné qu'elle s'abstient de la connexion des nœuds les uns par rapport aux autres. Les désavantages de cette méthode sont les difficultés à imposer les conditions aux limites, le fait d'avoir un grand nombre de nœuds d'interpolation, et celui d'optimiser la zone d'influence, cette dernière intégrant les nœuds à interpoler autour du point courant. Un des derniers inconvénients repose sur le fait que l'interpolation entre deux points sur une surface « frontière » non-convexe amène à des erreurs numériques.

Enfin, les éléments de frontière (cf fig. 1.4 – (b)) ont l'avantage lorsque les solutions fondamentales aux équations d'équilibre sont connues d'être peu gourmands en ressource mémoire et par conséquent en calcul. Cependant cette méthode possède l'inconvénient qu'on ne puisse pas résoudre des problèmes non linéaires.

Pour traiter notre sujet de thèse, du fait de la complexité des équations de comportement par la prise en compte du couplage entre les différentes échelles du modèle de comportement, la solution fondamentale aux équations d'équilibre ne peut plus être connue. Nous aurons alors recours à une méthode combinant les éléments de frontières à une méthode de collocation par point. La méthode des éléments de frontière va nous permettre de résoudre un problème linéaire et isotrope. Celle-ci couplée à la précédente, la méthode de collocation par point nous permettra donc de traiter l'aspect du couplage d'échelles. Cette méthode, appelée LPI-BEM (Local Point Interpolation-Boundary Element Method), reste peu gourmande en calcul et permettra de résoudre des problèmes complexes sur des machines personnelles (Kouitat Njiwa, 2011), (Njiwa, 2016).

## V. Conclusion

À travers ce chapitre, nous avons exposé dans un premier temps les différentes structures de l'os. Nous en avons conclu que nous pouvions les séparer en deux catégories ayant deux comportements mécaniques différents : les os corticaux et les os trabéculaires. Ces deux types de structure ont des propriétés macroscopiques différentes et ils possèdent chacun une microstructure poreuse avec une taille de porosité qui varie selon la structure considérée. En conséquence les os sont des milieux multi-échelles complexes. Pour décrire le comportement mécanique d'un tel milieu, nous avons présenté quelques modèles de comportement mécanique étant capables de le décrire. Nous avons choisi pour ce travail de thèse d'utiliser un modèle de comportement prenant en compte l'influence des différentes échelles entre elles à savoir le modèle élastique micropolaire. Enfin, pour terminer ce chapitre, nous avons exposé différentes méthodes numériques permettant de résoudre des problèmes élastiques micropolaires. Ainsi, pour étudier le système implant – os, nous avons choisi d'utiliser une méthode numérique couplant les éléments de frontière à une méthode de collocation par point nommée « local Point Interpolation–Boundary Element Method » LPI-BEM étant donné que les logiciels commerciaux de résolution numérique ne permettent pas de traiter des problèmes micropolaires.

**Table des figures :**

Figure 1.1 : Représentation de la structure multi-échelles de l'os. Extrait de Rho et al., 1998..... 13

Figure 1.2 : Différentes structures de l'os. Extrait de Pearson Education Inc..... 14

Figure 1.3 : Représentation d'un point matériel du milieu micropolaire homogénéisé... 23

Figure 1.4 : Différences sur les maillages des méthodes numériques : (a) FEM, (B) BEM, (c) Meshless ..... 27

**Table des tableaux :**

Tableau 1.1 : Tableau regroupant les modules de Young pour différents os déterminés par différents essais ..... 17



## Chapitre 2 : Stratégie numérique

---

## Table des matières du chapitre 2

<b>I. INTRODUCTION .....</b>	<b>33</b>
<b>II. ÉQUATIONS DE LA STATIQUE ET MODELE DE COMPORTEMENT .....</b>	<b>34</b>
1. Modèle élastique classique .....	34
2. Modèle élastique micropolaire .....	35
<b>III. METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION .....</b>	<b>39</b>
1. Résolution pour l'équation de la chaleur.....	39
a. Obtention du terme complémentaire .....	41
b. Obtention du terme particulier .....	42
c. Équations finales.....	45
d. Exemple pour une forme en L.....	46
2. La méthode LPI-BEM pour le modèle élastique micropolaire .....	48
a. Champs complémentaires .....	49
b. Champs particuliers .....	49
c. Équations finales.....	50
3. Optimisation de la méthode numérique .....	52
a. Interpolation entre deux points sur des surfaces non-convexes.....	52
b. Interpolation entre deux points passant à travers une face concave .....	53
c. Validation des algorithmes : cas d'un tube avec une pression interne .....	55
<b>IV. CONCLUSION .....</b>	<b>58</b>

### Nomenclature

{ } désigne un vecteur

[ ] désigne un tenseur

$\dot{\theta}$  désigne une dérivée temporelle

## I. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons détailler les choix que nous avons faits précédemment pour étudier le comportement mécanique des tissus vivants durs. Ce chapitre sera organisé en deux parties. La première partie exposera les différents modèles de comportement que nous avons retenus. Les modèles de comportement nous permettront de relier nos variables statiques à nos variables dynamiques. Nous présenterons d'abord, le modèle élastique classique (loi de Hooke) et ensuite le modèle élastique micropolaire. La deuxième partie de ce chapitre portera sur le détail de la méthode numérique que nous avons retenue. C'est une méthode combinant à la fois la méthode des éléments de frontière et une méthode de collocation par point : la méthode LPI-BEM (Local Point Interpolation–Boundary Element Method), introduite par Kouitat (Kouitat Njiwa, 2011). Elle comporte plusieurs avantages venant des éléments de frontière et de la méthode de collocation par point comme la réduction d'une dimension du problème. La BEM classique permet de résoudre des équations de type Navier ou Laplace dont les solutions fondamentales sont connues. La méthode de collocation par point va nous permettre de résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant une méthode d'interpolation radiale.

Cette méthode a fait ses preuves dans des problèmes d'anisotropie, de thermique, de piézoélectricité et des problèmes transitoires (Thurieu et al., 2014), (Kouitat Njiwa, 2011), (Njiwa, 2016), (Schwartz et al., 2012), (Jehl and Njiwa, 2014). Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode pour des problèmes élastiques micropolaires anisotropes et noncentrosymétriques. Dans un premier temps, nous donnerons les équations qui décrivent le comportement d'un milieu élastique micropolaire. Puis nous détaillerons la méthode pour des équations de champ de type scalaire, notamment l'équation de la conduction de la chaleur pour comprendre la stratégie numérique. Dans un second temps nous introduirons la résolution de nos équations de champs vectoriels ou tensoriels.

## II. Équations de la statique et modèle de comportement

Dans cette partie, nous allons détailler les différents modèles de comportement que nous avons utilisés. Nous avons vu précédemment que les os pouvaient être modélisés de deux manières différentes : le modèle élastique, linéaire et isotrope et le modèle élastique micropolaire qui prend en compte la microstructure de l'os. Le modèle élastique, linéaire et isotrope est utilisé dans ce travail comme modèle de comparaison. Dans un premier temps, nous allons détailler le modèle élastique classique et dans un second temps nous exposerons le modèle élastique micropolaire.

Par ailleurs nous utiliserons la notation d'Einstein avec la convention de sommation d'Einstein sur les indices muets répétés pour le développement de nos équations.

### 1. Modèle élastique classique

Nous choisissons un milieu fini faiblement déformable, défini par un volume  $\Omega$  et une frontière  $\Gamma$ . Ce milieu est composé d'un ensemble de points matériels  $P$ , dont chaque élément est influencé par ses voisins. Dans le cas où l'on considère un milieu élastique classique, chaque point matériel a la possibilité de se mouvoir dans les trois directions de l'espace. En l'absence de forces massiques, les équations locales d'équilibre s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ en tout part de } \Omega \quad (1)$$

On définit  $\sigma_{ij}$  comme étant le tenseur des contraintes au point courant  $P$ .

Après avoir donné l'équation de champ (1) de notre milieu nous pourrions à présent introduire les équations du comportement qui vont permettre de relier les contraintes aux déplacements. Ainsi nous introduisons la variable cinématique de déplacement  $u_i$  et le tenseur des déformations linéarisées défini par  $\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2$ , pour écrire le modèle de comportement d'un milieu linéaire et élastique, connu sous la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2)$$

Où  $C_{ijkl}$  est le tenseur d'ordre 4 des modules d'élasticité.

Pour un matériau isotrope, la relation se simplifie en :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3)$$

Où  $\varepsilon_{kk}$  désigne la trace du tenseur des déformations et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. Le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  s'expriment en fonction des paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  comme suit  $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$  et  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$  permettant d'inverser la relation (2) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (4)$$

Notre milieu doit subir des actions de contact engendrées par des forces extérieures sur ses frontières pour qu'il puisse se déformer en l'absence de force interne de volume. Puis nous prenons en compte ces forces en introduisant le vecteur normal sortant  $n_j$  qui renseigne sur la direction de celle-ci, ce qui permet de définir les conditions aux limites définies de la manière suivante :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (5)$$

## 2. Modèle élastique micropolaire

Le modèle élastique micropolaire permet de tenir compte du mouvement propre de la microstructure du milieu. De manière plus spécifique chaque point matériel est un milieu continu à part entière pouvant subir une déformation de cisaillement caractérisée par la rotation d'un trièdre rigide qui lui est attaché. À chaque point matériel est associés six

degrés de libertés à savoir les trois coordonnées usuelles de translation et celles du vecteur rotation propre.

Les équations traduisant l'équilibre d'un milieu élastique micropolaire sont (Iesan and Pompei, 1995) :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (6)$$

$$m_{ij,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0 \quad (7)$$

$\sigma_{ij}$  désigne le tenseur des contraintes,  $m_{ij}$  est le tenseur des microcontraintes induites par le tenseur des microdéformations

La densité volumique de l'énergie de déformation  $w$  d'un solide élastique micropolaire est donnée par (Eringen, 1999b) :

$$w = \frac{1}{2} \gamma_{ij} C_{ijkl} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} \kappa_{ij} A_{ijkl} \kappa_{kl} + \gamma_{ij} F_{ijkl} \kappa_{kl} \quad (8)$$

$u_i$  désigne le déplacement,  $\varphi_i$  les microrotations, le tenseur  $\gamma_{kl}$  est donné par  $\gamma_{il} = u_{i,l} + \epsilon_{ijm}\phi_m$  et  $\kappa_{ij}$  n'est d'autre que le gradient de  $\varphi_i$ .  $C_{ijkl}$  est le tenseur d'élasticité du matériau qui régit de la déformation macroscopique.  $A_{ijkl}$  est le tenseur des microcontraintes, qui va permettre de décrire le comportement des interactions des points matériels à l'échelle microscopique. Si nous considérons que notre cas à étudier est centrosymétrique, c'est-à-dire que chaque point matériel admet un centre de symétrie, alors notre tenseur  $F_{ijkl}$  disparaît.

De manière classique on en déduit de (8) que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \gamma_{ij}} = C_{ijkl} \gamma_{kl} + F_{ijkl} \kappa_{kl} \quad (9)$$

$$m_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \kappa_{ij}} = A_{ijkl} \kappa_{kl} + F_{klij} \gamma_{kl} \quad (10)$$

Ces expressions se mettent sous la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{l,k} - C_{ijkl} \epsilon_{klw} \varphi_w + F_{ijkl} \varphi_{k,l} \quad (11)$$

$$m_{ij} = A_{jikl} \varphi_{k,l} + F_{klij} u_{j,i} - F_{klij} \epsilon_{ijw} \varphi_w \quad (12)$$

## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

Dans les équations (11) et (12), nous notons l'apparition de divers tenseur d'ordre 4. Dans le cas d'un milieu centrosymétrique, les équations de comportement se réduisent à :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{l,k} - C_{ijkl} \epsilon_{klw} \varphi_w \quad (13)$$

$$m_{ij} = A_{jikl} \varphi_{k,l} \quad (14)$$

Puis nous relevons que les microcontraintes dans ce cas particulier ne dépendent pas des déplacements. Pour un matériau isotrope, les termes  $C_{ijkl}$  et  $A_{jikl}$  peuvent se réécrire sous la forme :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu_m + \kappa) \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_m \delta_{il} \delta_{jk} \quad (15)$$

$$A_{jikl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} + \gamma \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (16)$$

Où  $\mu_m = \mu + \frac{\kappa}{2}$  est le module de cisaillement équivalent pour un milieu élastique micropolaire,  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé,  $\kappa$  le paramètre de couplage macro-microéchelle et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres micropolaires.

La positivité de la densité volumique d'énergie de déformation impose aux différents paramètres apparaissant dans les équations (15) et (16) les conditions ci-après (Eringen, 1999b) :

$$\begin{array}{lll} 3\lambda + 2\mu_m + \kappa \geq 0 & 2\mu_m + \kappa \geq 0 & \kappa \geq 0 \\ \gamma - \beta \geq 0 & 3\alpha + \beta + \gamma \geq 0 & \beta + \gamma \geq 0 \end{array}$$

Le système étudié étant soumis à des forces extérieures, principalement de contact au travers de sa frontière. Soit  $n_j$  le vecteur unitaire normal en un point  $x$  de la frontière, et orienté vers l'extérieur du domaine. De manière classique, le vecteur contraintes  $t_i$  et les microcoupes  $m_i$  au point  $x$  sont donné par :

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (17)$$

$$m_i = m_{ji} n_j \quad (18)$$

Dans cette sous partie, nous avons introduit toutes les équations nécessaires pour décrire les milieux élastiques, linéaires et isotropes et les milieux élastiques micropolaires. Ainsi, pour le cas élastique pur nous avons trois inconnues en déplacement et trois équations et pour le cas micropolaire nous obtenons six équations pour six inconnues.

Dans la partie suivante nous allons détailler la stratégie numérique de résolution d'un problème de statique pour chacun des modèles.



### III. Méthode numérique de résolution

Dans ce chapitre, nous allons réarranger les différentes équations afin de les intégrer dans la méthode numérique « Local Point Interpolation–Boundary Element Method » (LPI-BEM) qui combine à la fois les éléments de frontière et une méthode de collocation par point. Dans un premier temps, nous nous baserons sur l'équation de la conduction de la chaleur afin de développer les étapes d'intégration du modèle dans la méthode numérique. Dans un second temps nous détaillerons les étapes pour l'intégration des équations du modèle élastique micropolaire. Dans chaque sous partie nous exposerons d'un côté le développement des équations pour les éléments de frontière et de l'autre les équations pour la méthode de collocation par point.

#### 1. Résolution pour l'équation de la chaleur

Nous pouvons représenter un domaine  $\Omega$  à l'équilibre fermé par une frontière  $\Gamma$  ayant pour vecteur normal unitaire sortant  $n_k$  (cf fig. 2.1).

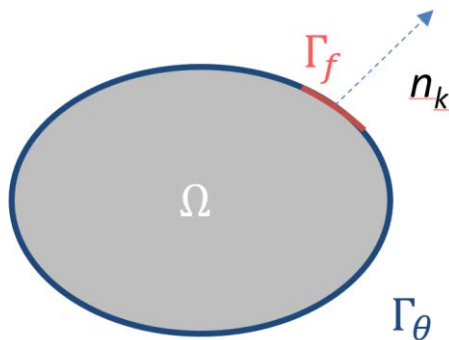


Figure 2. 1 : Schéma représentant le domaine à l'équilibre

La méthode numérique LPI-BEM est approchée ci-après pour la résolution de l'équation de la chaleur. L'équation différentielle de la conduction thermique transitoire s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \text{ dans le domaine } \Omega \quad (19)$$

Dans l'équation (19), qui doit être suivie par des conditions aux limites et initiales bien définies,  $K_{ij}$  est le tenseur d'ordre 2 de la conduction de chaleur,  $\theta$  la variation de température,  $C_p$  la capacité calorifique et  $\rho$  la masse volumique.

Le problème aurait pu être résolu en utilisant un logiciel commercial spécialisé utilisant la méthode des éléments finis comme COMSOL. Notre but est de proposer une solution simple basée sur les éléments de frontière qui conserve l'avantage de la réduction d'une dimension du problème, sans la mise en œuvre fastidieuse des fonctions anisotropes de Green.

SI nous supposons que le changement de température, la variable de base est la somme de deux termes pouvant s'écrire comme la somme d'un champ complémentaire  $\theta^c$  et d'un champ particulier  $\theta^p$ .

De plus, si nous introduisons un tenseur de scalaire du second ordre  $K^0$  ( $K_{ij}^0 = k^0 \delta_{ij}$ ).

l'équation (19) peut être réécrite comme :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij}^0 \frac{\partial \theta^c}{\partial x_j} + K_{ij}^0 \frac{\partial \theta^p}{\partial x_j} + \delta K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \text{ in } \Omega \quad (20)$$

Dans l'équation (20),  $\delta K_{ij} = K_{ij} - K_{ij}^0$ . Nous notons que si le matériau considéré est isotrope  $\delta K_{ij} = 0$ , le champ complémentaire  $\theta^c$  est supposé résoudre l'équation homogène suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij}^0 \frac{\partial \theta^c}{\partial x_j} \right) = 0 \Leftrightarrow k^0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} = 0 \quad (21)$$

En conséquence, le champ particulier  $\theta^p$  est déterminé en résolvant :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{ij}^0 \frac{\partial \theta^p}{\partial x_j} + \delta K_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) - \rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

**a. Obtention du terme complémentaire**

L'équation (21) est similaire à celle d'un problème de potentiel classique. Sa formulation intégrale aux frontières du domaine est bien connue et peut être trouvée dans de nombreux manuels (e.g. (Bonnet, 1999),(Brebbia and Dominguez, 1994),(Balaš et al., 1989)). Nous pouvons l'écrire de la manière suivante :

$$\int_{\Gamma} \bar{U}(\eta, \xi) q^c(\eta) d\Gamma(\eta) = \int_{\Gamma} k^0 \bar{T}(\eta, \xi) [\theta^c(\eta) - \theta^c(\xi)] d\Gamma(\eta) \tag{23}$$

Dans l'équation (23)  $\bar{U}$  est la solution fondamentale des équations de Laplace et  $\bar{T}$  est le flux associé. Les expressions explicites de ces fonctions sont disponibles dans la littérature susmentionnée.

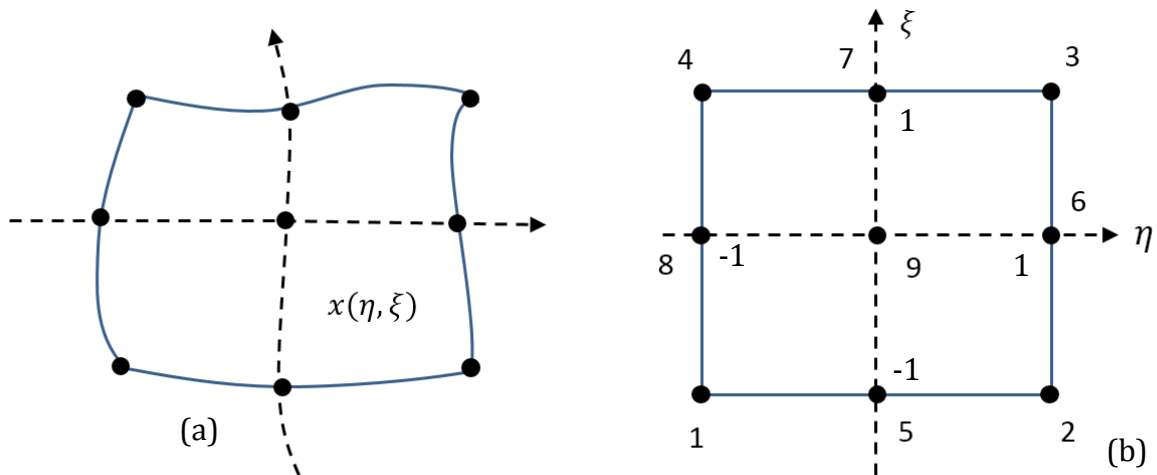


Figure 2.2 : Élément de référence (a) Élément réel (b) Numérotation des nœuds sur l'élément de référence

De manière classique, la frontière  $\Gamma$  est discrétisée en N éléments par exemple quadratiques. L'intégrale (23) se met alors sous la forme :

$$\sum_N \int_{\Gamma^{el}} \bar{U}(\eta, \xi) q^c(\eta) d\Gamma(\eta) = \sum_N \int_{\Gamma^{el}} k^0 \bar{T}(\eta, \xi) [\theta^c(\eta) - \theta^c(\xi)] d\Gamma(\eta) \tag{24}$$

Où  $\Gamma^{el}$  est un élément défini par ses nœuds géométriques dans l'espace physique. La figure 2.2 donne l'exemple d'un élément quadrilatère à 9 nœuds . La position  $x_i$  d'un point de cet élément est obtenue à partir de celles des nœuds géométriques ( $x_i^p$ ) et des fonction de forme explicitées en annexe 1 par :

$$x_i = \sum_{p=1, N_g} M_p(\eta, \xi) x_i^p \quad (25)$$

$N_g$  est le nombre de nœuds géométriques de l'élément et  $M_p$  représente la fonction de forme associée au nœud géométrique  $p$ .

Sur un élément, les champs de température  $\theta$  et de flux  $q$  sont interpolés comme suit :

$$\begin{cases} \theta_i(x) = \sum_{p=1, N_i} N_p(\eta, \xi) \theta_i^p \\ q_i(x) = \sum_{p=1, N_i} N_p(\eta, \xi) q_i^p \end{cases}$$

Où  $N_i$  est le nombre de nœuds d'interpolation sur l'élément et  $N_p$  est la fonction d'interpolation associée au nœud  $p$ .

En appliquant les approximations, nous obtenons le système d'équation de la forme suivante :

$$[H_\theta] \{\theta^c\} = [G_\theta] \{q^c\} \quad (26)$$

### b. Obtention du terme particulier

On s'intéresse maintenant à la solution de l'équation (22). Le domaine  $\Omega$  et sa frontière  $\Gamma$  sont représentés par des centres de collocation bien répartis comme sur la figure 2.3.

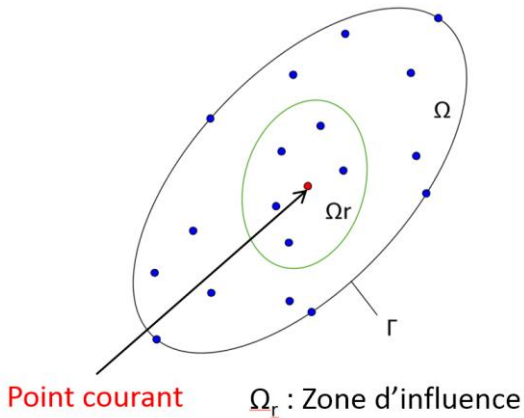


Figure 2.3 : Représentation du domaine et de ses centres de collocations proprement dispersés

On adopte une interpolation par fonctions radiales. Un champ  $v(x)$  est approximé par (e.g. (LIU and GU, 2001)) :

$$v(x) = \sum_{i=1}^N R_i(r) a_i + \sum_{j=1}^M p_j(x) b_j \quad (27)$$

Avec les contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^N p_j(x) a_i = 0, j = 1 - M \text{ et } i = 1 - N$$

$R_i(r)$  est la fonction radiale sélectionnée,  $r$  la distance euclidienne entre le point courant et le point utilisé pour l'approximation,  $N$  est le nombre de centres de collocation dans le voisinage (zone d'influence) du point courant et  $M$  est le nombre de monômes  $p_j(x)$  dans la base polynomiale choisie.

Les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  peuvent être déterminés en imposant à d' être satisfaite aux  $N$  centres situés dans la zone d'influence. On est amené à résoudre un système d'équations de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} v_{/L} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \text{ où } \{v_{/L}\} \text{ est le vecteur des valeurs nodales de } v(x).$$

On obtient alors après quelques manipulations algébriques :

$$\{b\} = [[P]^T [R]^{-1} [P]]^{-1} [P]^T [R]^{-1} \{v_{/L}\} = [F_b] \{v_{/L}\} \quad (28)$$

$$\{a\} = [R]^{-1} [I] - [P][F_b] \{v_{/L}\} = [F_a] \{v_{/L}\} \quad (29)$$

L'interpolation radiale de  $v(x)$  peut se réécrire sous la forme suivante :

$v(x) = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_n][F_a] \{v_{/L}\} + [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_m][F_b] \{v_{/L}\}$  que nous pouvons écrire sous forme compacte :

$$v^h(x) = [\Phi(x)] \{v_{/L}\} \quad (30)$$

L'équation (22) peut être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$k^0 \{\nabla\}^T \{\nabla \theta^p\} + \{\nabla\}^T ([\delta K] \{\nabla \theta\}) - \rho C_p \frac{\partial}{\partial t} \theta = 0 \quad (31)$$

Où l'on définit l'opérateur nabla  $\{\nabla\} = (\partial/\partial x \ \partial/\partial y \ \partial/\partial z)^T$

En utilisant l'interpolation radiale (30) pour les champs  $\theta$  et les champs complémentaires  $\theta^p$ , on obtient une équation de la forme suivante :

$$k^0 \{\nabla\}^T [\nabla \phi_1] \{\theta_{/L}^p\} + \{\nabla\}^T [\delta K] [\nabla \phi_1] \{\theta_{/L}\} - \rho C_p \dot{\theta} = 0 \quad (32)$$

Avec  $\{\theta_{/L}\} = (\theta^1 \ \theta^2 \ \theta^3 \ \dots \ \theta^N)^T$  pour un champ scalaire et  $\dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ .

$[\nabla \phi_1]$  est une matrice construite en utilisant l'interpolation (30). Nous notons que le vecteur  $\{\theta_{/L}\}$  peut contenir des nœuds internes et frontières. Pour des raisons de clarté, la dernière équation est réécrite sous forme condensée comme suit :

$$[a_\theta] \{\theta_{/L}^p\} + [b_\theta^s] \{\theta_{/L}\} - \rho c \dot{\theta} = 0 \quad (33)$$

Nous récupérons l'équation (33) pour tous les centres de collocation internes, ce qui mène à l'équation suivante :

$$[A_{\theta}^B \quad A_{\theta}^I] \begin{Bmatrix} \theta_B^p \\ \theta_I^p \end{Bmatrix} + [B_{\theta}^s] \{\theta\} - \rho c [I_{\theta}^t] \{\dot{\theta}\} = 0 \quad (34)$$

$\theta_B^p$  et  $\theta_I^p$  sont respectivement définis pour être la solution particulière aux nœuds frontières et la solution particulière aux nœuds internes.

Dans l'équation (34) la matrice  $[A_{\theta}^B \quad A_{\theta}^I]$  est rectangulaire et le système d'équation ne peut pas être résolu de manière directe pour le terme particulier. Cependant, si ce dernier est pris pour que tous les points frontières soient nuls, l'équation (34) peut se réduire alors à :

$$[A_{\theta}^I] \{\theta_I^p\} + [B_{\theta}^s] \{\theta\} - \rho c [I_{\theta}^t] \{\dot{\theta}\} = 0 \quad (35)$$

Où, maintenant  $[A_{\theta}^I]$  est une matrice carrée et le système peut être résolu pour la solution particulière comme suit :

$$\{\theta^p\} = -[\bar{B}_{\theta}^s] \{\theta\} + \rho c [\bar{B}_{\theta}^t] \{\dot{\theta}\} \quad (36)$$

Les conditions aux limites de flux sont également affectées par la partition en un terme complémentaire et un terme particulier. Le flux thermique à la frontière peut être réécrit de la manière suivante :

$$\{q_{\theta}\} = \{q_{\theta}^c\} + \{q_{\theta}^p\} + \{\delta q_{\theta}\} \quad (37)$$

Nous pouvons réécrire l'équation (37) en insérant la fonction d'interpolation radiale sous la forme suivante :

$$\{q_{\theta}\} = \{q_{\theta}^c\} + [AK_{1\theta}] \{\theta^p\} + [AK_{\theta}] \{\theta\} \quad (38)$$

### c. Équations finales

Nous considérons la relation (26) pour le terme complémentaire, en remplaçant le terme complémentaire  $\theta^c$  et  $q_\theta^c$  par leur définition respective  $\theta^c = \theta - \theta^p$  et  $q_\theta^c = q_\theta - q_\theta^p - \delta q_\theta$ , nous obtenons :

$$[\bar{H}_\theta]\{\theta - \theta^p\} = [\bar{G}_\theta]\{q_\theta - q_\theta^p - \delta q_\theta\} \quad (39)$$

En utilisant l'équation (35) et (38), le système final d'équations est obtenu dans sa forme condensée :

$$[H_{\theta_1}]\{\dot{\theta}\} + [H_\theta]\{\theta\} = [G_\theta]\{q_\theta\} \quad (40)$$

Cette équation différentielle à la même forme que celle obtenue avec des méthodes conventionnelles. Tout algorithme approprié peut alors être utilisé pour sa solution. Nous avons utilisé la méthode Euler qui est inconditionnellement stable.

#### d. Exemple pour une forme en L

Nous considérons le cas d'une géométrie en forme de L pour constater l'efficacité de la méthode (Brenner, 1999, Yau-Bin Yang, 2007, Elliotis et al., 2002). Le maillage de la géométrie du L-shape (voir figure 2.1) est composé de 56 éléments quadratiques à 9 nœuds pour sa frontière et est supplémenté par 99 centres de collocation interne.



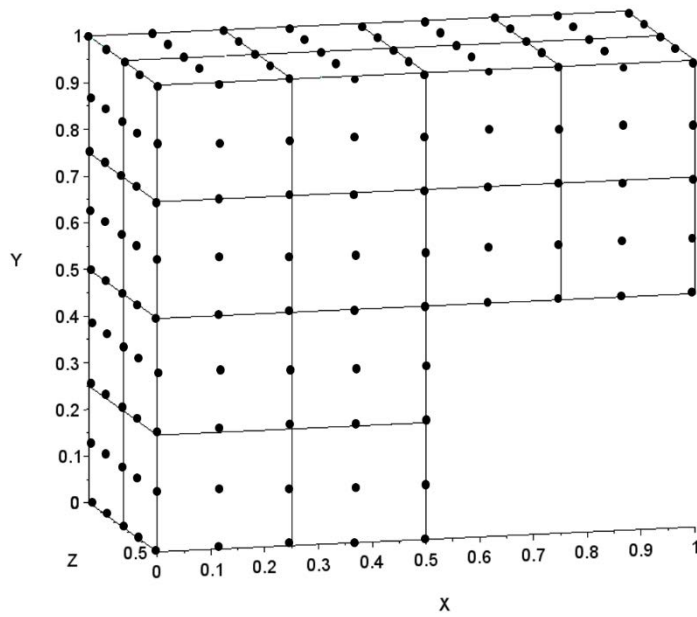


Figure 2.4 : Géométrie du domaine en forme de L

Nous imposons le flux nul  $q = 0$  sur les faces à l'extrémité du L en  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  et  $z = 0,5$ . Les faces en  $x = 0$  et  $y = 1$  ont une température imposée de  $1^\circ\text{C}$  et sur les faces en  $x = 0,5$  et  $y = 0,5$  la température est de  $0^\circ\text{C}$ . Nous obtenons les résultats sur la figure 2.5 :

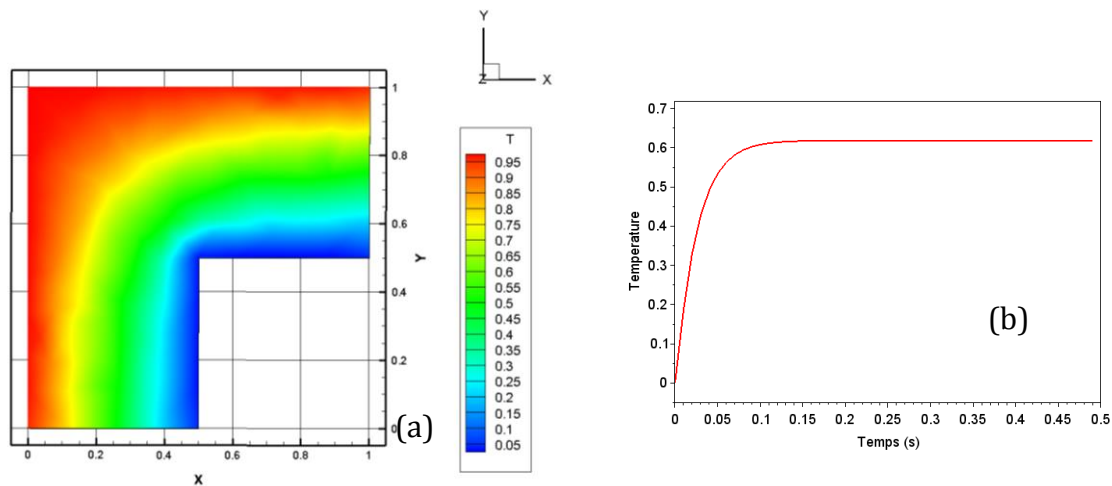


Figure 2.5 : (a) Carte des températures du plan  $z = 0,25$  - (b) évolution de la température au point  $x = 0,25$ ,  $y = 0,5$  et  $z = 0,5$

Les résultats en température que nous obtenons sont attendus. La méthode numérique est alors efficace pour résoudre des problèmes thermiques instationnaires.

## 2. La méthode LPI-BEM pour le modèle élastique micropolaire

Nous ne détaillerons uniquement les étapes importantes pour cette partie, le détail des développements ayant été fait dans la partie précédente et restant les mêmes. De la même manière, nous considérons que les grandeurs cinématiques sont le déplacement macroscopique  $u$  et la microrotation  $\varphi$  et elles peuvent être représentés comme la somme d'un terme complémentaire et d'un terme particulier défini comme  $u = u^c + u^p$  et  $\varphi = \varphi^c + \varphi^p$ . Nous pouvons alors introduire deux tenseurs d'ordre quatre  $C_{ijkl}^0$  et  $A_{jikl}^0$  similaires aux tenseurs des constantes élastiques d'un milieu isotrope les équations (11) et (12) sous la forme :

$$C_{ijkl}^0 u_{l,ki}^c + C_{ijkl}^0 u_{l,ki}^p + (C_{ijkl} - C_{ijkl}^0) u_{l,ki} - C_{ijkl} \epsilon_{klw} \varphi_{w,i} + F_{ijkl} \varphi_{k,li} = 0 \quad (41)$$

$$A_{jikl}^0 \varphi_{k,li}^c + A_{jikl}^0 \varphi_{k,li}^p + (A_{jikl} - A_{jikl}^0) \varphi_{k,li} + F_{klji} u_{l,ki} - F_{klji} \epsilon_{klw} \varphi_{w,m} + C_{klrs} \epsilon_{jkl} u_{s,r} - C_{klrs} \epsilon_{jkl} \epsilon_{rsw} \varphi_w + F_{klrs} \epsilon_{jkl} \varphi_{r,s} = 0 \quad (42)$$

Où nous postulons que les champs complémentaires seront les solutions des équations suivantes :

$$C_{ijkl}^0 u_{l,ki}^c = 0 \quad (43)$$

$$A_{jikl}^0 \varphi_{k,li}^c = 0 \quad (44)$$

En conséquence, la détermination des champs particuliers passe par la résolution des équations suivantes :

$$C_{ijkl}^0 u_{l,ki}^p + (C_{ijkl} - C_{ijkl}^0) u_{l,ki} - C_{ijkl} \epsilon_{klw} \varphi_{w,i} + F_{ijkl} \varphi_{k,li} = 0 \quad (45)$$

$$A_{jikl}^0 \varphi_{k,li}^p + (A_{jikl} - A_{jikl}^0) \varphi_{k,li} + F_{klji} u_{l,ki} - F_{klji} \epsilon_{klw} \varphi_{w,m} + C_{klrs} \epsilon_{jkl} u_{s,r} - C_{klrs} \epsilon_{jkl} \epsilon_{rsw} \varphi_w + F_{klrs} \epsilon_{jkl} \varphi_{r,s} = 0 \quad (46)$$

### a. Champs complémentaires

Les équations (43) et (44) sont similaires aux équations de Navier. Leur formulation intégrale conduit à :

$$\int_{\Gamma} U_{mi}(x, \xi) U_i^c(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} T_{mi}(x, \xi) [t_i^c(x) - t_i^c(\xi)] d\Gamma(x)$$

$$\int_{\Gamma} \bar{U}_{mi}(x, \xi) m_i^c(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \bar{T}_{mi}(x, \xi) [\varphi_i^c(x) - \varphi_i^c(\xi)] d\Gamma(x)$$

Respectivement dans ces expressions,  $U_{mi}$  et  $\bar{U}_{mi}$  sont les solutions fondamentales des équations de Navier et  $T_{mi}$  et  $\bar{T}_{mi}$  les vecteurs contraintes associés. L'application de l'approximation classique conduit aux systèmes d'équations suivant :

$$[H_u]\{u^c\} = [G_u]\{t^c\} \quad (47)$$

$$[H_\varphi]\{\varphi^c\} = [G_\varphi]\{m^c\} \quad (48)$$

### b. Champs particuliers

Nous allons utiliser la méthode de collocation par point pour les équations (45) et (46) pour obtenir les champs particuliers. Nous pouvons réécrire ces équations sous forme matricielle pour chaque nœud de la manière suivante :

$$[D^1][C^0][D^1]^t\{u^p\} + [D^1][\delta C][D^1]^t\{u\} + [-[D^2][C][I^1]^t + [D^1][F][D^2]^t]\{\varphi\} = 0 \quad (49)$$

$$[D^2][A^0][D^2]^t\{\varphi^p\} + \left[ [D^2][\delta A][D^2]^t - [I^1][F][D^2]^t - [I^1][C][I^1]^t + [I^1][F][D^2]^t \right] \{\varphi\} + [[D^1][F][D^2]^t + [I^1][C][D^1]^t] \{u\} = 0 \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Avec} \quad [\delta C] = [C] - [C^0] \quad \text{et} \quad [\delta A] = [A] - [A^0], \\
 [D^1] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [D^2] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{et} \\
 [I^1]^t &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Puis nous adoptons l'interpolation définie par l'équation (30) pour chacune des composantes des grandeurs cinématiques. Nous obtenons alors des relations que nous pouvons mettre sous les formes condensées suivantes, pour un point de collocation donné :

$$[a_{uu}]\{u_{/L}^P\} + [b_{uu}]\{u_{/L}\} + [b_{u\varphi}]\{\varphi_{/L}\} = 0 \quad (51)$$

$$[a_{\varphi\varphi}]\{\varphi_{/L}^P\} + [b_{\varphi\varphi}]\{\varphi_{/L}\} + [b_{\varphi u}]\{u_{/L}\} = 0 \quad (52)$$

Nous réécrivons également selon le même procédé les conditions aux limites (17) et (18) sous forme matricielle. Si nous adoptons la même interpolation pour les grandeurs cinématiques, nous obtenons :

$$\{t\} = \{t^c\} + [Ak_{1u}]\{u_{/L}^P\} + [Ak_u]\{u_{/L}\} + [Ak_{u\varphi}]\{\varphi_{/L}\} \quad (53)$$

$$\{m\} = \{m^c\} + [Ak_{1\varphi}]\{\varphi_{/L}^P\} + [Ak_\varphi]\{\varphi_{/L}\} + [Ak_{\varphi u}]\{u_{/L}\} \quad (54)$$

### c. Équations finales

Nous considérons les équations (47) et (48) pour le terme complémentaire, nous remplaçons nos variables complémentaires  $u^c$  et  $\varphi^c$  par leur définition et nous obtenons les équations suivantes :

Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

$$[H_u]\{u - u^p\} = [G_u]\{t^c\} \quad (55)$$

$$[H_\varphi]\{\varphi - \varphi^p\} = [G_\varphi]\{m^c\} \quad (56)$$

En réutilisant les équations particulières (52) et (53) ainsi que les équations de condition aux limites (53) et (54), nous obtenons le système d'équation pour les champs :

$$\begin{aligned} & \left[ [H_u] + [G_u][Ak_u] + \left[ [H_u] - [G_u][Ak_{1u}] \right] [A_{uu}]^{-1} [b_{uu}] \right] \{u\} \\ & \quad + \left[ [G_u][Ak_{u\varphi}] + \left[ [H_u] - [G_u][Ak_{1u}] \right] [A_{uu}]^{-1} [b_{u\varphi}] \right] \{\varphi\} \\ & = [G_u]\{t\} \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & \left[ [H_\varphi] + [G_\varphi][Ak_\varphi] + \left[ [H_\varphi] - [G_\varphi][Ak_{1\varphi}] \right] [A_{\varphi\varphi}]^{-1} [b_{\varphi\varphi}] \right] \{\varphi\} \\ & \quad + \left[ [G_\varphi][Ak_{\varphi u}] + \left[ [H_\varphi] - [G_\varphi][Ak_{1\varphi}] \right] [A_{\varphi\varphi}]^{-1} [b_{\varphi u}] \right] \{u\} \\ & = [G_\varphi]\{m\} \end{aligned} \quad (58)$$

Puis ces équations peuvent être réécrites sous les formes compactes :

$$[H_{uu}]\{u\} + [H_{u\varphi}]\{\varphi\} = [G_u]\{t\} \quad (59)$$

$$[H_{\varphi\varphi}]\{\varphi\} + [H_{\varphi u}]\{u\} = [G_\varphi]\{m\} \quad (60)$$

Ce système d'équations peut être alors résolu par la méthode d'élimination de Gauss après prise en compte des conditions aux limites.

### 3. Optimisation de la méthode numérique

Dans le chapitre précédent, nous avons explicité quelques problèmes liés aux méthodes de collocation par point notamment les problèmes des frontières concaves pour lesquels l'interpolation ne doit pas se faire entre deux points cachés par une frontière concave ce qui amènerait à des erreurs numériques (Belytschko et al., 1993). Au lieu de passer par une distance généralisée entre deux points (voir figure 2.3) ce qui serait fastidieux à mettre en œuvre, nous choisissons alors plus simplement de ne pas faire d'interpolation entre ces points. Pour simplifier nous avons alors dû créer deux algorithmes capables de rechercher si le segment entre les deux points passe à travers une face non-convexe.

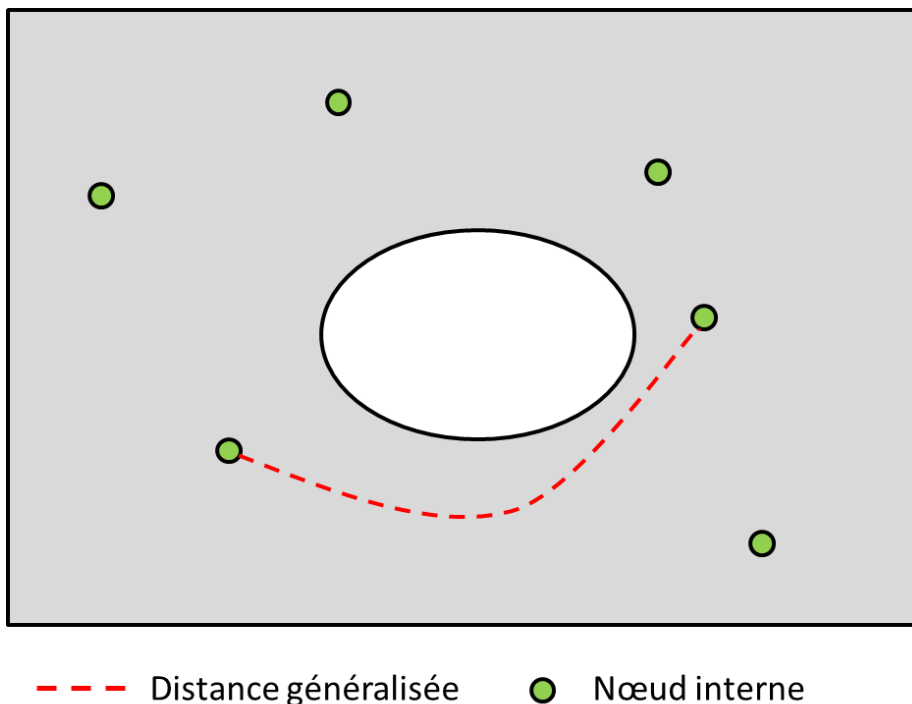


Figure 2.6 : Représentation d'une distance généralisée entre deux points

#### a. Interpolation entre deux points sur des surfaces non-convexes

Cet algorithme empêche les interpolations entre des centres de collocation se trouvant sur une frontière non-convexe. Nous considérons un domaine  $\Omega$  avec une frontière  $\Gamma$  et  $x_\Gamma$  les points appartenant à la frontière. Nous nommons  $x_i$  le centre de collocation et  $x_j$  le

point support de l'interpolation. Si  $x_i$  et  $x_j$  se trouvent sur une frontière non-convexe, plane ou concave, l'interpolation entre ces deux points est retirée. Voir figure 2.7.

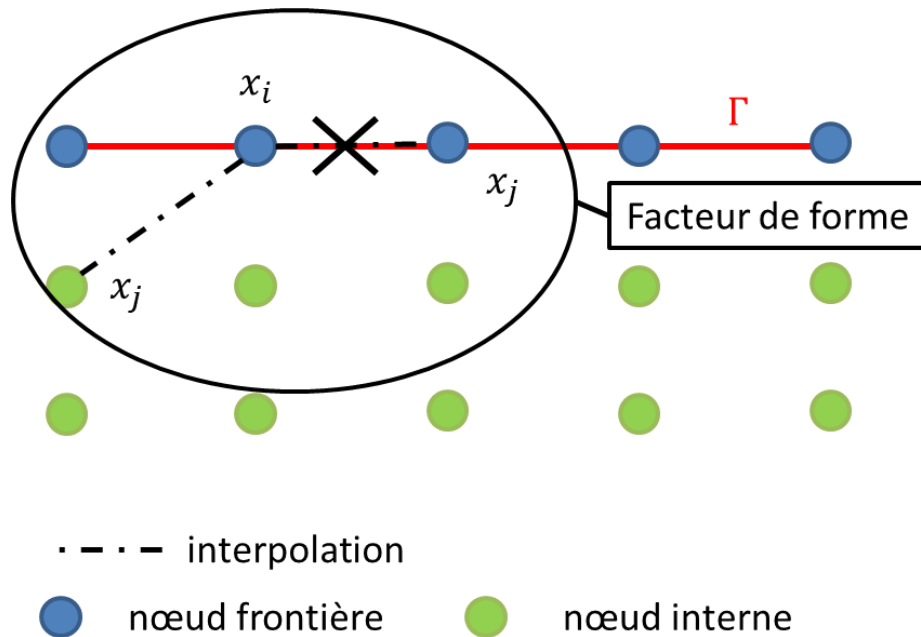


Figure 2.7 : schéma représentant les interpolations à effectuer ou non en fonction de la localisation du point interpolé

### b. Interpolation entre deux points passant à travers une face concave

Cet algorithme ne se limite pas aux nœuds frontières ou internes comme précédemment, il s'applique à l'ensemble des points du domaine. Nous avons un domaine  $\Omega$  avec une frontière  $\Gamma$  qui possède des points de collocation  $x$ . Nous considérons le point de collocation  $x_i$  et un point de l'interpolation  $x_j$  contenu dans la zone d'interpolation de  $x_i$  tels que la droite joignant les deux points traverse une surface de discontinuité (cf fig. 2.8). Si dans le facteur de forme il y a un nœud d'une frontière concave, l'algorithme s'active. Le trou est repéré grâce aux nœuds sur ses frontières qui indiquent qu'il s'agit d'une surface à ne pas traverser.

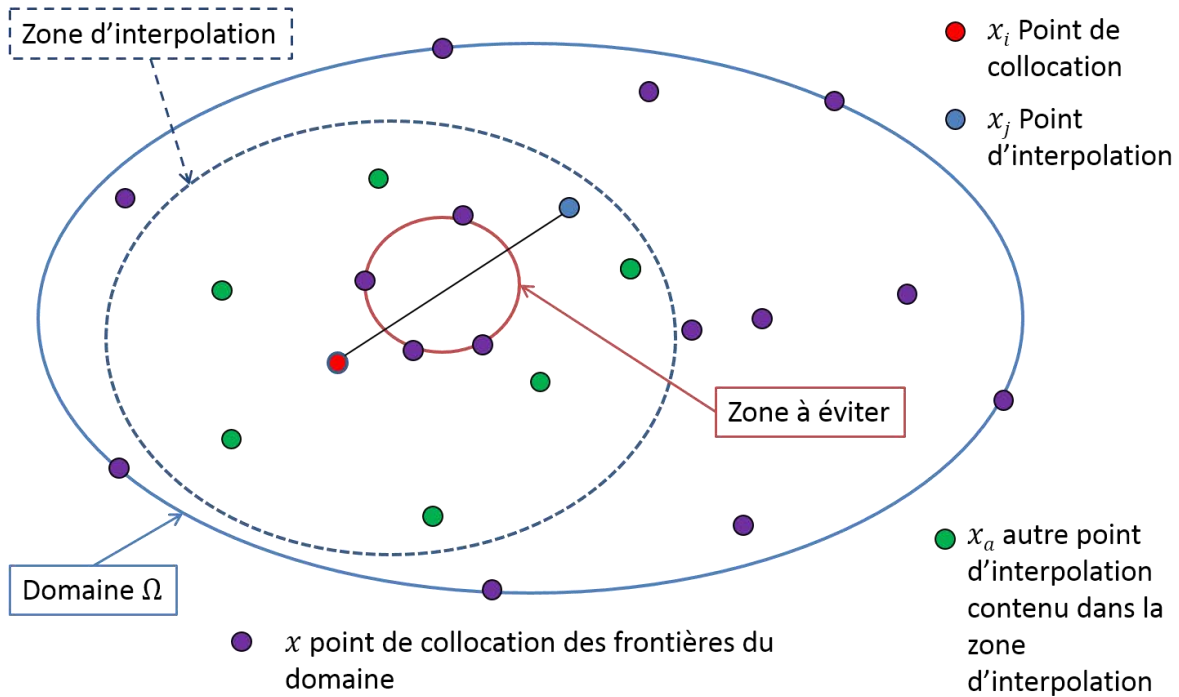


Figure 2.8 : Représentation des interpolations à ne pas prendre en considération pour la méthode de collocation par point

L'idée de cet algorithme est d'utiliser le projeté orthogonal des points  $x_a$  (en vert sur la figure 2.9) se trouvant sur la frontière dans la zone à éviter sur le segment entre  $x_i$  et  $x_j$ . Nous nommerons ces points projetés  $x_m$ . Nous devons alors faire un changement de repère pour passer de l'ancien repère  $R = (x, y)$  au nouveau repère  $R' = \left( x_m; \frac{\overline{x_m x_i}}{\|\overline{x_m x_i}\|}, \frac{\overline{x_m x_a}}{\|\overline{x_m x_a}\|} \right) = (x_m, x', y')$ . Si le segment d'interpolation entre  $x_i$  et  $x_j$  passe à travers une frontière à éviter, les directions des vecteurs  $\overline{x_m x_a}$  projetés sur  $y'$  pour tous les points sur la frontière, pourront s'opposer les uns par rapport aux autres. En revanche, si nous passons à l'extérieur de la zone à éviter, les projections des vecteurs  $\overline{x_m x_a}$  sur le vecteur unitaire  $\frac{\overline{x_m x_a}}{\|\overline{x_m x_a}\|}$  auront tous le même signe. Dans ce cas, l'interpolation entre les deux points pourra s'effectuer (cf fig. 2.9).



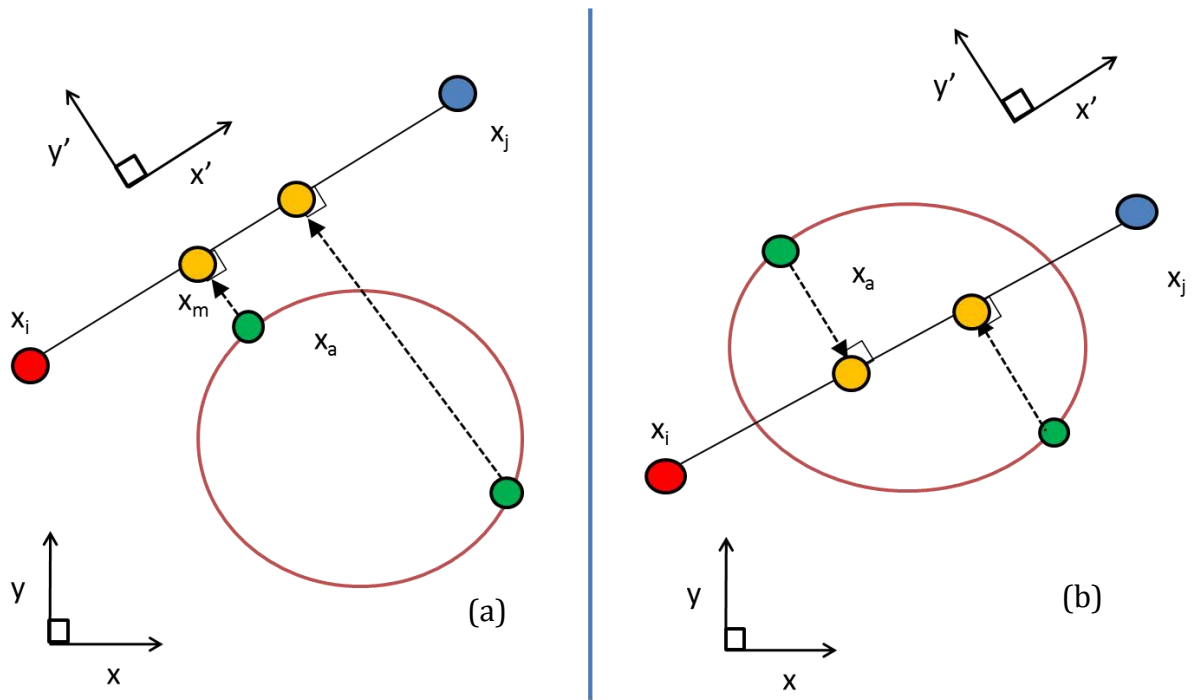


Figure 2.9 : Schéma représentant l'activation ou non de l'algorithme, (a) interpolation possible, (b) interpolation non possible entre les deux points  $x_i$  et  $x_j$

### c. Validation des algorithmes : cas d'un tube avec une pression interne

Nous considérons le cas d'un tube élastique soumis à une pression interne  $p_i$  (cf fig. 2.10). Nous comparons les résultats numériques obtenus en activant ou non l'algorithme à la solution analytique du déplacement radial suivant :

$$u = \left(\frac{1 - \nu}{E}\right) \frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2} r + \left(\frac{1 + \nu}{E}\right) \frac{a^2 b^2 (p_i - p_0)}{(b^2 - a^2) r}$$

Avec  $E = 1000$  MPa,  $\nu = 0,3$ ,  $a$  le rayon interne du tube,  $b$  le rayon externe du tube,  $p_i$  la pression interne et  $p_0$  la pression à l'extérieur du tube. La surface du tube de hauteur 1 unité de mesure, de rayon extérieur  $b = 1,5$  et intérieur  $a = 0,5$  est subdivisée en 96 éléments à 9 nœuds. La simulation utilise 336 points de collocation interne. Une pression interne de  $p_i = 10$  MPa du tube et  $p_0 = 0$  MPa. Les autres faces sont libres de déplacement. Afin d'éviter tout mouvement rigide, pour des raisons de symétrie, les points de la coupe centrale du tube ne subissent pas de déplacement axiaux.

Dans le cas où nous n'utilisons pas l'algorithme qui retire les interpolations à travers des surfaces concaves, nous devrions nous attendre à des déplacements plus faibles. Effectivement, si le point  $x_i$  utilise le point  $x_j$  pour interpolation (voir figure 2.10), comme leurs déplacements seront opposés, le déplacement du point  $x_i$  sera plus faible que dans le cas où le point  $x_j$  n'est pas pris dans l'interpolation.

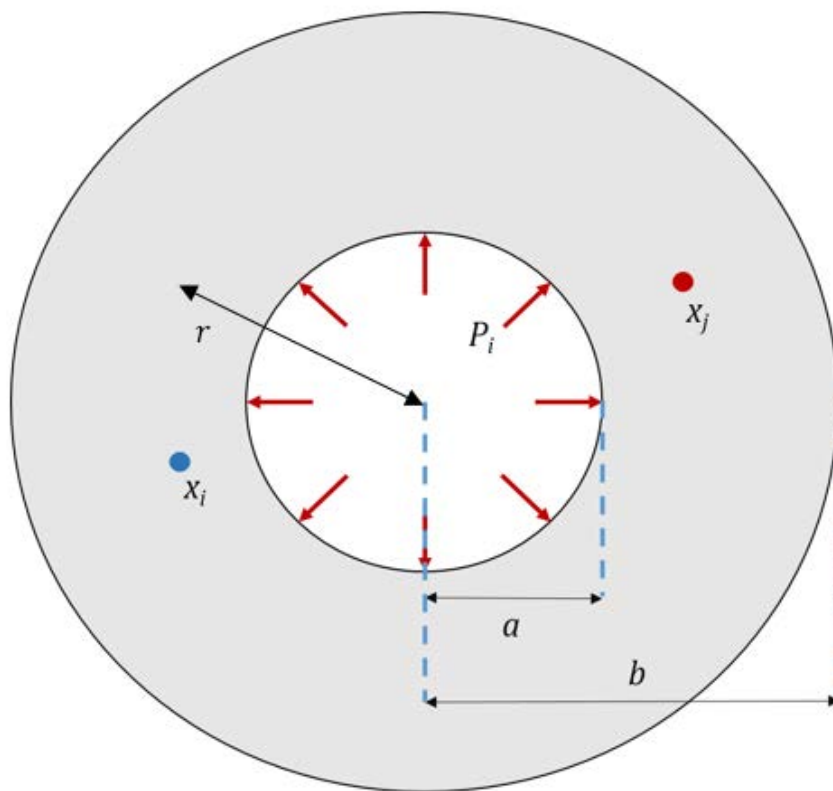


Figure 2.10 : Représentation d'une coupe du tube avec l'application de la pression interne

Si nous traçons les déplacements radiaux pour les deux cas selon le rayon, nous obtenons la figure 2.11. Les résultats obtenus ici nous montre une amélioration lorsque nous activons l'algorithme qui trie les interpolations à prendre en considération, ils se confondent avec la solution analytique.

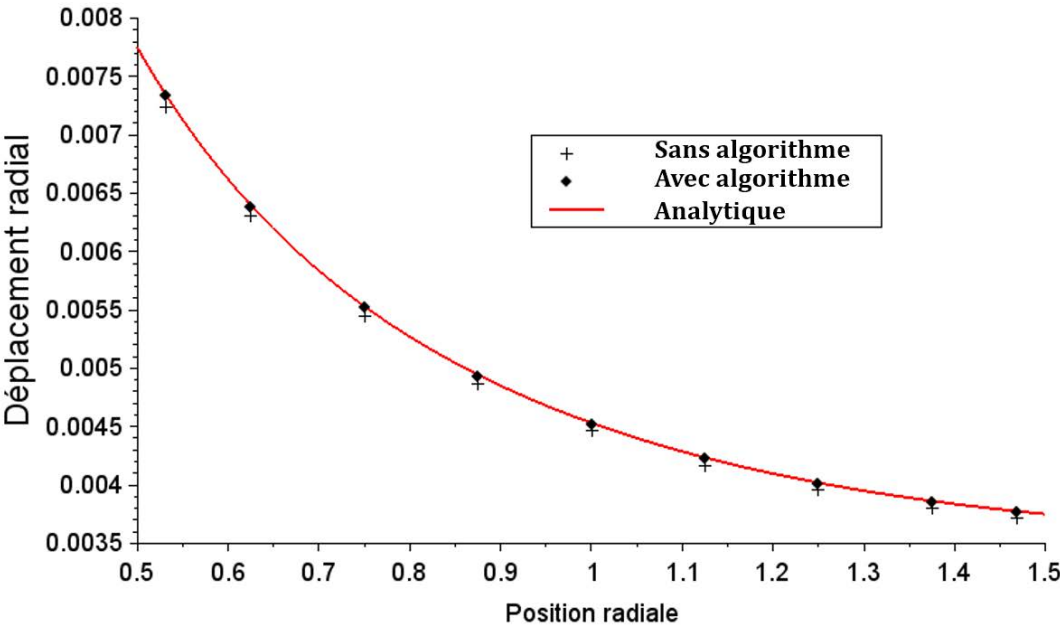


Figure 2.11 : Représentation des déplacements radiaux pour le cas d'un tube avec une pression interne pour la solution analytique et les solutions numériques dans le cas où nous activons ou non l'algorithme qui trie les interpolations

#### **IV. Conclusion**

Dans cette partie, nous avons exposé le développement de la méthode numérique « Local Point Interpolation–Boundary Element Method ». C'est une méthode qui utilise les éléments de frontières couplés avec une méthode sans maillage. Les éléments de frontière permettent d'obtenir nos champs complémentaires pour un milieu élastique linéaire et isotrope. La méthode de collocation, quant à elle, nous permet d'obtenir les champs particuliers pour le problème couplé. Ces deux méthodes ont l'avantage d'être peu gourmande en calcul. Cette méthode nous permet de faire des calculs sur un ordinateur personnel. Cependant, il faut faire attention aux points utilisés pour l'interpolation pour obtenir des résultats convenables. Il ne doit pas y avoir d'interpolation entre deux points sur une surface extérieure non-concave. La prise en compte de cet algorithme conduit à des résultats plus précis.

## Table des figures du chapitre 2

Figure 2. 1 : Schéma représentant le domaine à l'équilibre.....	39
Figure 2. 2 : Élément de référence (a) Élément réel (b) Numérotation des nœuds sur l'élément de référence .....	41
Figure 2. 3 : Représentation du domaine et de ses centres de collocations proprement dispersés .....	43
Figure 2.4 : Géométrie du domaine en forme de L .....	47
Figure 2.5 : (a) Carte des températures du plan $z = 0,25$ - (b) évolution de la température au point $x = 0,25, y = 0,5$ et $z = 0,5$ .....	47
Figure 2.6 : Représentation d'une distance généralisée entre deux points.....	52
Figure 2.7 : schéma représentant les interpolations à effectuer ou non en fonction de la localisation du point interpolé .....	53
Figure 2.8 : Représentation des interpolations à ne pas prendre en considération pour la méthode de collocation par point .....	54
Figure 2.9 : Schéma représentant l'activation ou non de l'algorithme, (a) interpolation possible, (b) interpolation non possible entre les deux points $x_i$ et $x_j$ .....	55
Figure 2.10 : Représentation d'une coupe du tube avec l'application de la pression interne .....	56
Figure 2.11 : Représentation des déplacements radiaux pour le cas d'un tube avec une pression interne pour la solution analytique et les solutions numériques dans le cas où nous activons ou non l'algorithme qui trie les interpolations .....	57



## Chapitre 3 : Validation de la stratégie numérique

---

## Table des matières du chapitre 3

<b>I. INTRODUCTION .....</b>	<b>63</b>
<b>II. ÉTUDE DE LA STABILITE DES RESULTATS NUMERIQUES.....</b>	<b>64</b>
<b>III. VALIDATION PHYSIQUE DE LA METHODE LPI-BEM .....</b>	<b>66</b>
1. Barre prismatique sollicitée en traction .....	66
2. Patch Tests en déplacement.....	68
3. Torsion d'un cylindre circulaire .....	69
4. Plaque trouée .....	73
5. Cube sous sollicitation de cisaillement .....	76
<b>IV. CONCLUSION .....</b>	<b>80</b>



## I. Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons détaillé les étapes d'intégration du modèle de comportement micropolaire dans la stratégie numérique. Dans l'objectif de simuler correctement le système implant – os, nous devons à présent valider la robustesse de la méthode LPI-BEM (Local Point Interpolation–Boundary Element Method). En premier lieu nous allons étudier la stabilité de la variation des résultats en fonction des paramètres mathématiques utilisés dans la méthode de collocation et, en second lieu vérifier si les résultats sont robustes, en fonction des paramètres matériaux utilisés et en comparaison aux solutions analytiques. Nous pouvons rappeler que cette méthode combine les avantages des éléments de frontières et des méthodes de collocation qu'elle sera basée sur une fonction d'interpolation de base radiale multi-quadriques. Dans ce chapitre nous nous attarderons également sur la résolution numérique de problèmes de milieux micropolaires isotropes et centrosymétriques dont le comportement mécanique est décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl} U_{l,k} - C_{ijkl} \epsilon_{klw} \varphi_w \\ m_{ij} &= A_{ijkl} \varphi_{k,l}\end{aligned}$$

Où les composantes  $C_{ijkl}$  et  $A_{ijkl}$  s'expriment en fonction des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , du paramètre de couplage d'échelle  $\kappa$ , et des paramètres micropolaires  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Plus précisément pour un milieu isotrope on a  $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + (\mu_m + \kappa) \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_m \delta_{il} \delta_{jk}$  et  $A_{ijkl} = \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} + \gamma \delta_{ik} \delta_{jl}$ .

Dans un premier temps nous réalisons une étude de la stabilité des résultats numériques lorsque nous faisons évoluer les paramètres de forme de la fonction radiale choisie pour l'interpolation. Ensuite, après cette première validation, nous traiterons différents cas dont les solutions analytiques sont connues pour comparer nos résultats numériques et montrer l'efficacité et la précision de la méthode LPI-BEM. Et enfin, une analyse paramétrique sera effectuée en vue d'étudier l'influence des différents paramètres micropolaires sur le comportement mécanique d'un milieu micropolaire.

## II. Étude de la stabilité des résultats numériques

L'objectif de cette partie est de montrer que la précision des résultats fournis par la méthode LPI-BEM n'est pas impactée lorsque l'on fait varier les paramètres de forme des fonctions radiales. Rappelons qu'il s'agit des fonctions multi-quadriques données par :

$$R_i(r) = (r_i^2 + c^2)^q$$

$$r_i = \|x - x_i\|$$

Où  $c$  et  $q$  sont les paramètres de forme et  $r_i$  la distance euclidienne entre le centre de collocation  $x_i$  et le point courant  $x$ .

À présent nous pouvons considérer un cube soumis à des forces de cisaillement surfacique de densité  $F$  et parallèle à l'axe  $x_2$  (cf fig. 3.1). Ce cube a pour côté 2 unités et le maillage est composé de 96 éléments à 9 nœuds. On utilise en outre 343 centres de collocation interne. La face supérieure du cube est soumise à une répartition uniforme d'efforts tangentiels dans la direction  $x_2$  et les points sont astreints à ne pas se déplacer dans la direction normale (direction  $x_3$ ). La face inférieure est bloquée dans le sens du cisaillement et dans le sens normal et les autres faces sont libres de se mouvoir.

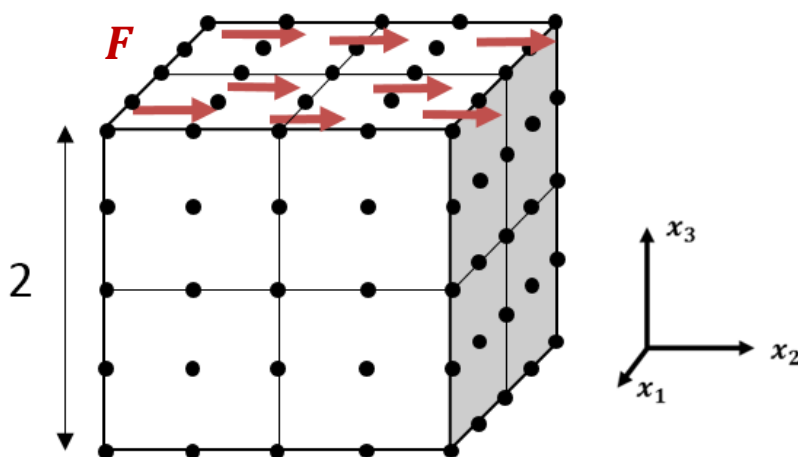


Figure 3.1 : Cube sous contrainte de cisaillement

## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

Dans le tableau 3.1 nous avons consigné le déplacement  $u_{x_2}$  du point de coordonnées (2 ; 0,0625 ; 1,9375), lorsque nous faisons varier les paramètres de forme  $q$  et  $c$  respectivement entre 1,03 et 1,63 et  $1.10^{-5}$  et  $1.10^{-1}$ .

c \ q	1.03	1.13	1.23	1.33	1.43	1.53	1.63
1.00E-01	9.6905E-04	9.6889E-04	9.6876E-04	9.6858E-04	9.6842E-04	9.6827E-04	9.6760E-04
1.00E-02	9.7009E-04	9.6966E-04	9.6891E-04	9.6904E-04	9.6883E-04	9.6864E-04	9.6844E-04
1.00E-03	9.7033E-04	9.6973E-04	9.6968E-04	9.6907E-04	9.6885E-04	9.6866E-04	9.6845E-04
1.00E-04	9.7043E-04	9.6975E-04	9.6959E-04	9.6907E-04	9.6886E-04	9.6866E-04	9.6846E-04
1.00E-05	9.7048E-04	9.6976E-04	9.6957E-04	9.6907E-04	9.6886E-04	9.6866E-04	9.6846E-04

Tableau 3.1 : Évolution du déplacement selon  $x_2$  du point  $x$  (2 ; 0,0625 ; 1,9375) sur un cube en cisaillement

D'après Liu (Wang and Liu, 2002), l'optimum du facteur de forme  $q$  est 1,03. Si nous prenons comme déplacement de référence la valeur pour  $c = 1.10^{-5}$  et  $q = 1.03$  l'erreur relative est :

c \ q	1.03	1.13	1.23	1.33	1.43	1.53	1.63
1.00E-01	0.15%	0.16%	0.18%	0.20%	0.21%	0.23%	0.30%
1.00E-02	0.04%	0.08%	0.16%	0.15%	0.17%	0.19%	0.21%
1.00E-03	0.02%	0.08%	0.08%	0.15%	0.17%	0.19%	0.21%
1.00E-04	0.01%	0.08%	0.09%	0.15%	0.17%	0.19%	0.21%
1.00E-05	0.00%	0.07%	0.09%	0.15%	0.17%	0.19%	0.21%

Tableau 3.2 : Erreur relative du déplacement par rapport à la valeur pour le point  $c = 10^{-5}$  et  $q = 1,03$  du point  $x$  (2 ; 0,0625 ; 1,9375) sur un cube en cisaillement de l'exemple II.4

Nous remarquons que nous pouvons utiliser un large panel de paramètres de forme sans affecter réellement la précision des résultats donnés par la méthode numérique. Ici nous voyons que l'erreur maximale est de 0.3%.

Cette étude montre que la méthode donne des résultats numériques stables. Nous pouvons maintenant nous concentrer sur la qualité des résultats obtenus numériquement en les comparant aux résultats analytiques.

### III. Validation physique de la méthode LPI-BEM

Dans un premier temps nous allons valider les solutions obtenues numériquement et ensuite nous essayerons de comprendre le rôle des paramètres microstructuraux à travers l'analyse des réponses de quelques structures simples.

#### 1. Barre prismatique sollicitée en traction

Nous considérons une barre de section droite quelconque (voir figure 3.2) contenue dans le plan  $(x_1, x_2)$  et de hauteur  $z$  dans la direction  $x_3$ . La barre est en appui simple glissant sur sa face inférieure et elle est soumise sur sa face supérieure à une charge normale uniformément répartie de 5 MPa. Les faces latérales de la barre sont libres de contraintes. Dans de telles conditions, toutes les sections droites de la barre sont équivalentes et l'on peut résoudre analytiquement les équations de champ pour le déplacement transversal. Nous obtenons alors :

$$u_3 = \frac{2\lambda + 2\mu_m + \kappa}{(3\lambda + 2\mu_m + \kappa)(2\mu_m + \kappa)} \sigma_{33} \cdot x_3$$

Où  $\mu_m$  est défini comme le module de cisaillement micropolaire définie comme :  $\mu_m = \mu - \frac{\kappa}{2}$ . Pour notre exemple nous avons utilisé la géométrie d'un parallélépipède rectangle de longueur  $x = 2$ , de largeur  $y = 1$  et de hauteur  $z = 5$ . La frontière de la barre est subdivisée en 88 éléments à 9 nœuds. Il y a 470 nœuds frontières et 171 points de collocation internes. Toutes les faces du parallélépipède sont libres de microcouple. Les paramètres matériaux utilisés pour l'étude sont regroupés dans le tableau 3.3 ci-dessous :

	$\lambda$ (MPa)	$\mu_m$ (MPa)	$\kappa$ (MPa)	$\alpha$ (N)	$\beta$ (N)	$\gamma$ (N)
Milieu micropolaire	1000	750	500	20	20	20

Tableau 3.3 : Paramètres micropolaires utilisés pour la simulation d'une barre prismatique sollicitée en traction simple

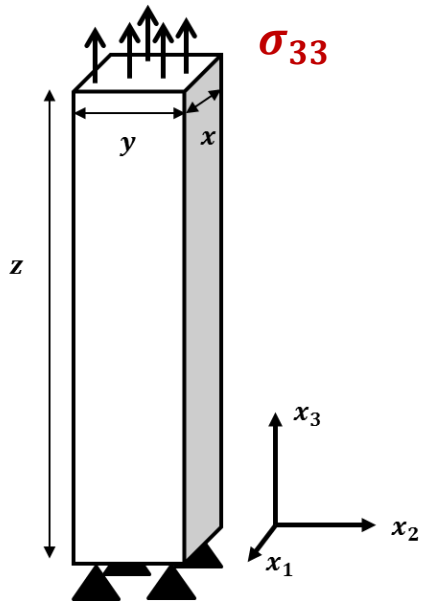


Figure 3.2 : Barre prismatique sollicitée en traction

La figure 3.3 compare le déplacement axial issu de la simulation à celui issu de la solution analytique. Nous constatons que les deux courbes sont confondues. L'outil numérique développé est efficace.

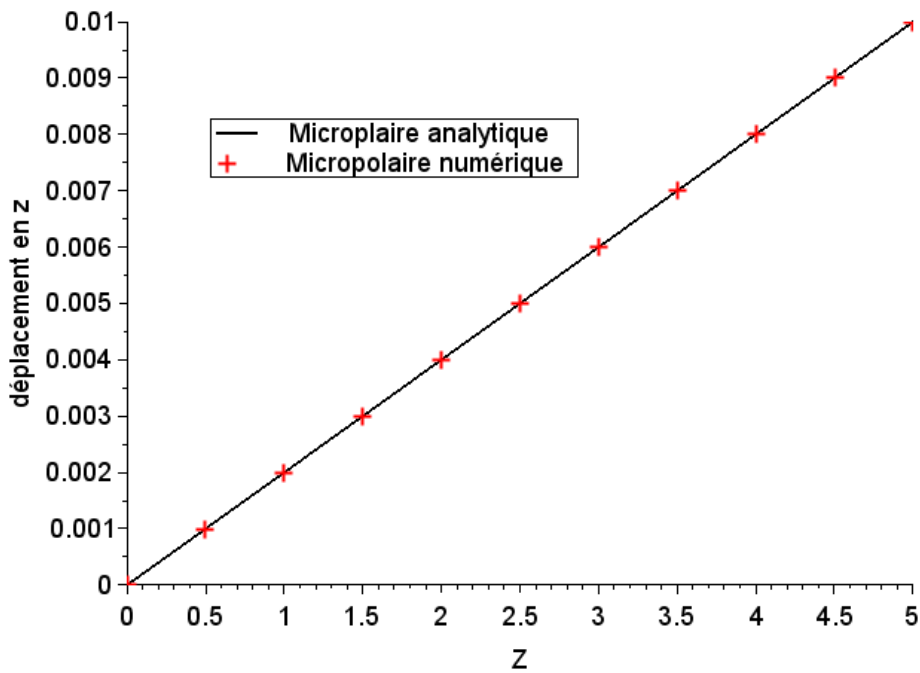


Figure 3.3 : Représentation des déplacements selon l'axe  $x_3$  pour les cas analytique et numérique d'un milieu micropolaire en traction

## 2. Patch Tests en déplacement

Dans ce paragraphe, nos résultats numériques sont comparés à ceux issus des travaux de Providas (Providas and Kattis, 2002) et Sara\_Grbčić et al. (2018). Nous considérons dans notre travail un parallélépipède ayant pour longueur  $L=0.24$ , largeur  $l=0.06$  et hauteur  $h=0.12$ . Nous imposons les conditions aux limites en déplacement et en microrotation de la manière suivante :

$$U_x = (x + 0.5y + z) \times 1.10^{-3} \quad U_y = (x + y + 0.5z) \times 1.10^{-3} \quad U_z = (0.5x + y + z) \times 1.10^{-3}$$

$$\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0.25 \times 10^{-3}$$

Les éléments finis ont déjà permis de traiter ce problème en utilisant un maillage décomposé en 7 éléments hexaèdres. Pour notre méthode nous avons utilisé un maillage de 6 éléments à 9 nœuds et 8 centres de collocation internes représentés sur la figure 3.4 :

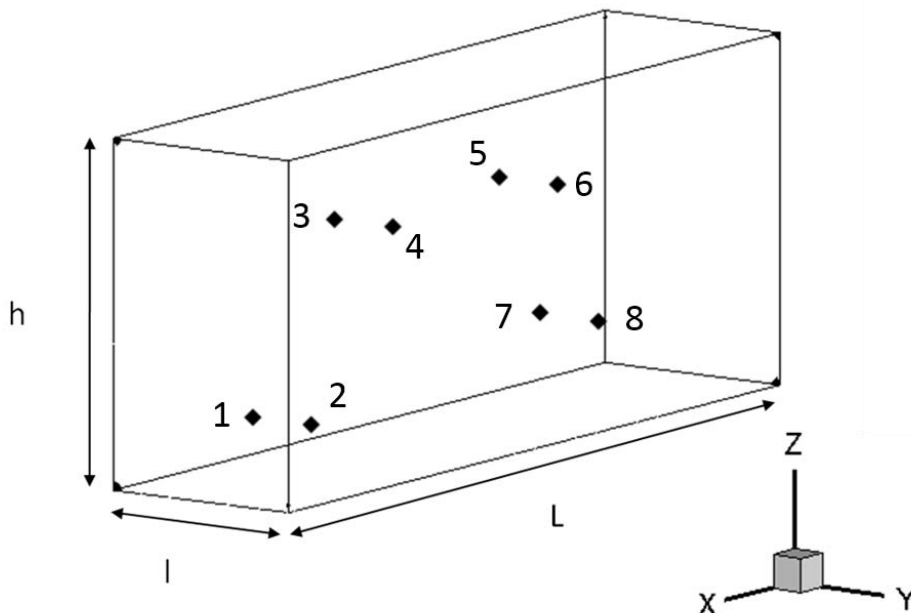


Figure 3.4 : Représentation du domaine pour la simulation du patch test en déplacement

## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

Les coordonnées des points numérotés de 1 à 8 sont répertoriées dans le tableau 3.4 ci-dessous. Nous pouvons déterminer analytiquement les contraintes en tout point du milieu pour ces champs de déplacements et de microrotations :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 5.0$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 1.5$$

Ainsi toutes les microcontraintes sont nulles. Nous obtenons les résultats dans le tableau 3.4.

Les simulations effectuées avec la méthode LPI-BEM ont conduit aux mêmes valeurs des contraintes avec une erreur de l'ordre de  $1 \times 10^{-3}$ . Nous obtenons des résultats de l'ordre de  $1 \times 10^{-6}$  pour ce qui est des microcontraintes, ce qui est considéré comme des erreurs numériques si nous les comparons aux valeurs des contraintes. Les résultats que nous obtenons avec la méthode LPI-BEM pour cet exemple sont alors conformes aux résultats analytiques.

	(x, y, z)	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xz}$	$m_{xx}$	$m_{zx}$
1	(0.04,0.02,0.02)	4.9984	1.5000	3.4445E-06	1.7422E-06
2	(0.04,0.04,0.02)	4.9986	1.4999	2.7052E-06	1.9378E-06
3	(0.08,0.02,0.08)	4.9943	1.4990	-1.7573E-06	-1.3079E-06
4	(0.08,0.04,0.08)	4.9939	1.4986	-1.5173E-06	-1.2852E-06
5	(0.16,0.02,0.08)	4.9947	1.4984	-8.3675E-08	1.0612E-06
6	(0.16,0.04,0.08)	4.9956	1.4988	-2.3694E-07	1.0647E-06
7	(0.18,0.02,0.03)	4.9968	1.4993	1.7310E-07	-1.8554E-06
8	(0.18,0.04,0.03)	4.9960	1.4992	1.9306E-07	-1.6577E-06

Tableau 3.4 : Échantillons pris au hasard des contraintes et microcontraintes sur les centres de collocation à l'intérieur du domaine

### 3. Torsion d'un cylindre circulaire

Nous allons observer les effets du cisaillement sur les microrotations à travers l'exemple de la torsion d'une pièce métallique de section droite circulaire. Nous allons comparer les résultats en déplacement et microrotation de notre solution numérique à ceux de la

solution analytique d'un milieu cylindrique micropolaire en torsion pour valider la robustesse de la méthode (cf fig. 3.5).

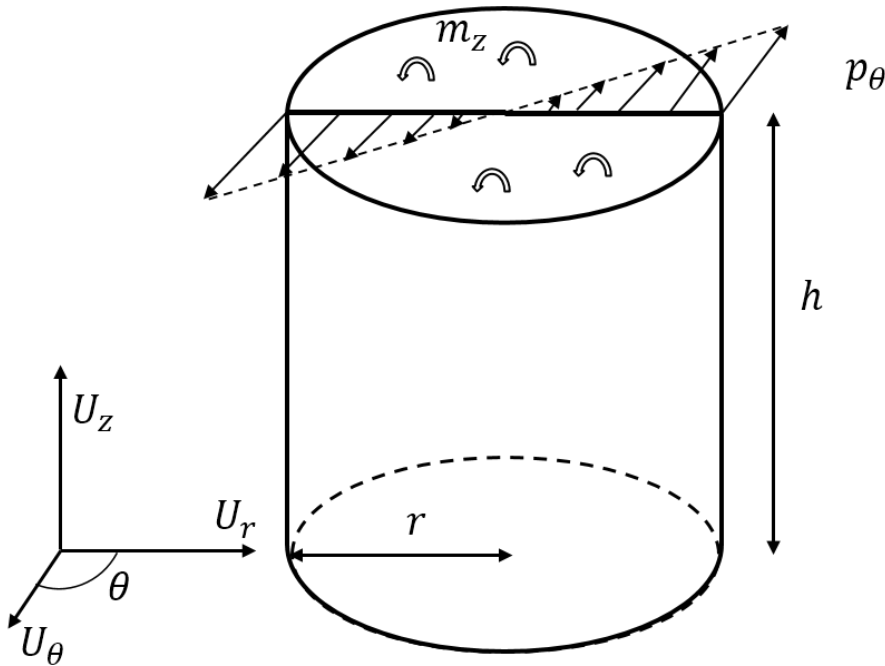


Figure 3.5 : Torsion d'un cylindre circulaire de hauteur  $h$  et rayon  $r$

Dans cette objectif nous suivons le travail de Sara\_Grbčić et al. (Grbčić et al., 2018). Le cylindre a pour hauteur  $h = 1$  et pour rayon  $r = 0,2$ . Les solutions analytiques en déplacement  $u_\theta$  et les microrotations  $\varphi_z$  du problème sont données par :

$$u_\theta = C_1 r z$$

$$\varphi_z = C_1 z$$

Avec  $C_1 = 2C_2 \left( \frac{2\beta + \alpha}{2\beta} p I_0(pr) - \frac{I_1(pr)}{r} \right)$  et  $C_2 = \frac{T}{2\pi r^2} \left( \left( 1.5 + \frac{\mu r^2}{4\beta} \right) (2\beta + \alpha) p I_0(pr) - \frac{2\beta}{r} \left( 2 + \frac{\mu r^2}{4\beta} \right) I_1(pr) \right)^{-1}$  où  $I_1$  et  $I_0$  sont les fonctions de Bessel modifiées respectivement d'ordre 1 et 0.

Ils définissent également une contrainte tangentielle de torsion  $p_\theta$  et un microcouple  $m_z$  imposé sur la face supérieure :



$$p_\theta = \mu C_1 r + 2\kappa C_2 I_1(pr)$$

$$m_z = \alpha p C_2 I_0(pr) + 2\beta C_1$$

Ce qui amène à imposer une force globale sur la face supérieure  $T$  égale à une unité de force :

$$T = 2\pi \int_0^a (r^2 p_\theta + r m_z) dr = 1$$

Le maillage retenu consiste alors en un cylindre avec 72 éléments à 9 nœuds le tout supplémenté par 2535 nœuds de collocation interne. Nous imposons une contrainte tangentielle  $p_\theta$  dans la direction  $U_\theta$  ainsi qu'un microcouple  $m_z$  dans la direction  $U_z$  sur la face supérieure. Puis une contrainte nulle est imposée sur la face latérale et la face inférieure est bloquée selon  $u_\theta$  et  $u_z$  et libre selon  $u_r$ . Enfin les microrotations sont nulles sur toutes les autres faces du domaine.

Nous utiliserons pour calculer les solutions analytique et numérique ces paramètres matériaux définis ainsi  $\lambda = 157\,500 \text{ MPa}$ ,  $\mu_m = 8\,750 \text{ MPa}$ ,  $\kappa = 3\,500 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = \beta = 0$  et  $\gamma = 210 \text{ N}$ .

Le terme  $\alpha$  nul rend les microcouples  $m_z$  constants. Nous obtenons  $m_z = 3,636829 \text{ N.mm}^{-1}$  pour  $T = 1$  et si l'on trace  $p_\theta$  en fonction de  $r$ , nous obtenons une droite affine pour  $r \in [0, a]$  avec en  $r = 0$ ,  $p_\theta = 0$  et en  $r = a$ ,  $p_\theta = 43,930470 \text{ MPa}$ .

L'ensemble nous permettant d'obtenir les courbes de la figure 3.6 et 3.7 :

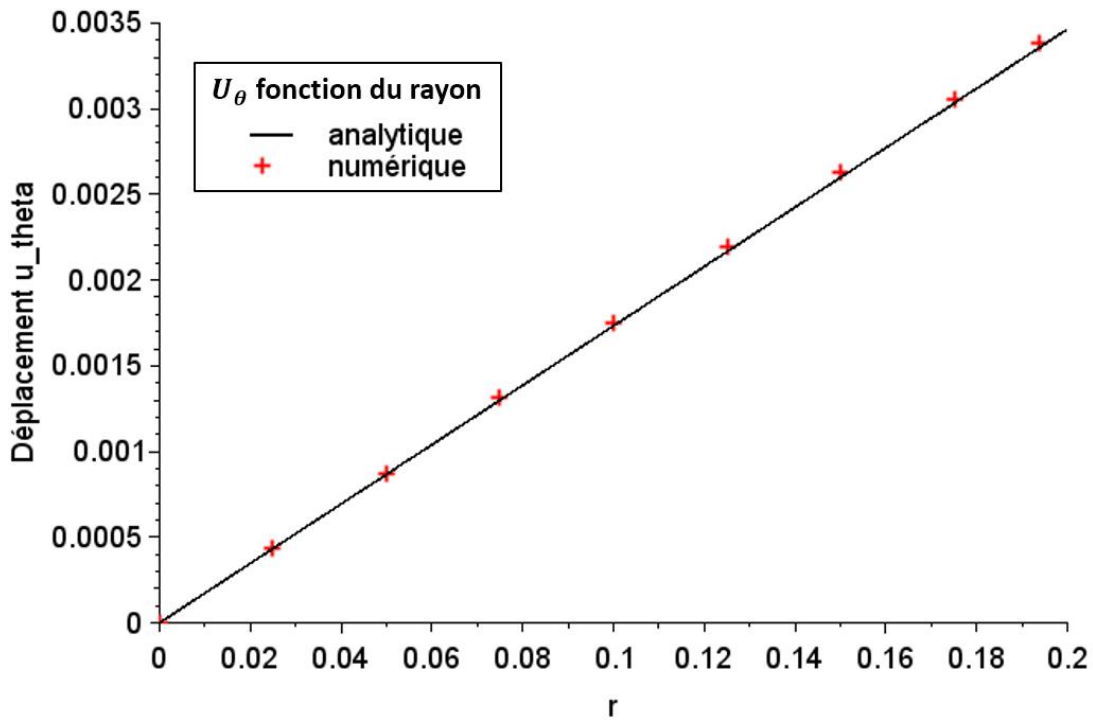


Figure 3.6 : Représentation des déplacements  $u_\theta$  le long du rayon  $r$  sur la face supérieure

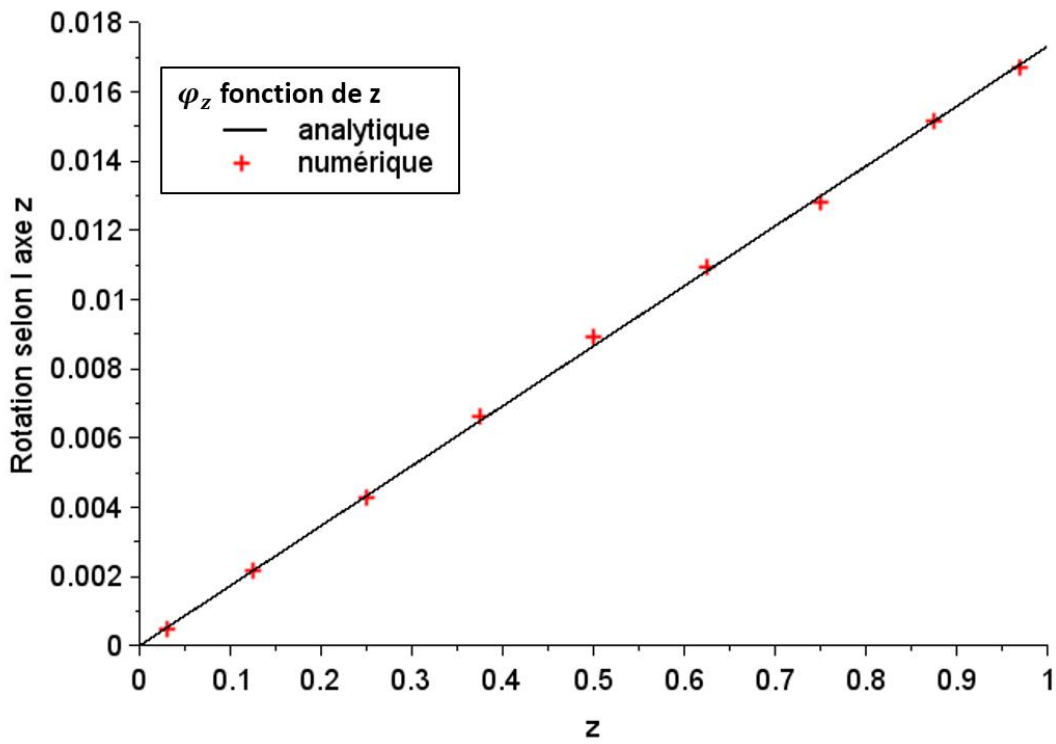


Figure 3.7 : Représentation des microrotations  $\varphi_z$  le long de la hauteur  $h$  sur la face latérale

À travers ces représentations on observe que les résultats numériques sont superposés aux résultats analytiques, cet exemple met encore en avant la précision de la méthode LPI-BEM pour un cas un peu plus complexe.

#### 4. Plaque trouée

Nous allons analyser les contraintes au bord du trou pour démontrer l'efficacité de la méthode LPI-BEM pour le cas micropolaire. La solution analytique du problème est présentée par Eringen page 220 (Eringen, 1999b). Il y est montré que le maximum des contraintes autour du trou de rayon  $R$  dépend des ratios  $R/l_i$  et  $p/l_i$  où  $l_i$  et  $p$  sont des longueurs caractéristiques internes définies par  $l_i = \sqrt{\frac{\gamma(\mu_m + \kappa)}{\kappa(2\mu_m + \kappa)}}$  et  $p = \sqrt{\frac{\gamma}{2(2\mu_m + \kappa)}}$ . Pour les calculs numériques, grâce aux symétries, nous ne considérerons que le quart de la plaque trouée présentée dans la figure 3.8.

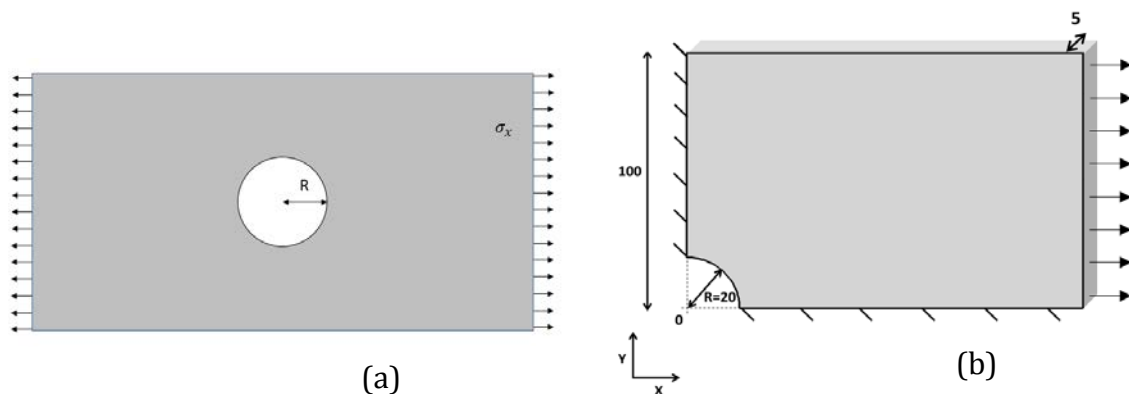


Figure 3.8 : (a) Géométrie de la plaque entière (b) Quart de la plaque considérée et conditions aux limites associées du problème

Les frontières du domaine sont composées de 114 éléments à 9 nœuds additionnés de 1383 centres de collocation interne. Les faces du dessus et dessous de la plaque sont libres de contrainte et microcontrainte ainsi que la face du trou et la face supérieure. Nous imposerons une contrainte de traction sur la face de droite, aussi les microcontraintes  $y$  sont nulles. Les faces de gauche en  $x = 0$  et inférieure en  $y = 0$  sont bloquées en déplacement normaux.

Des résultats numériques utilisant les éléments finis ont déjà été obtenus dans les travaux de Rosenberg et Cimrman (Rosenberg and Cimrman, 2003) et nous obtenons les mêmes résultats.

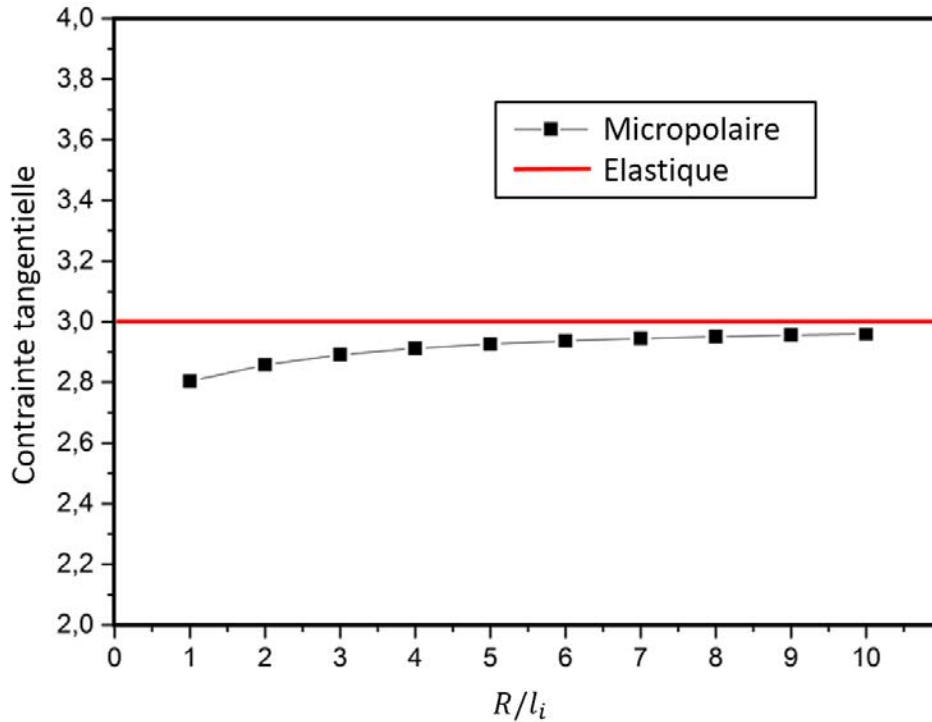


Figure 3.9 : Contraintes tangentielles en fonction de  $R/l_i$  pour le cas élastique et micropolaire

En rouge nous avons une asymptote de la contrainte pour le cas élastique classique, soit sans microstructure, et en noir la contrainte pour le cas élastique micropolaire. À travers ce résultat nous observons que plus la porosité devient faible, donc la longueur caractéristique  $l_i$  petite et le coefficient  $R/l_i$  grand, plus le comportement devient celui d'un milieu élastique pur. Finalement si la longueur caractéristique tend vers une taille infime, le milieu tend de nouveau à redevenir un milieu classique, et nous retrouvons alors un comportement d'un milieu élastique classique. En revanche, plus cette porosité sera grande, plus nous verrons que la microstructure a un impact sur le comportement de la plaque trouée (cf figure 3.9).

Par ailleurs, lorsque nous considérons le cas avec microstructure nous observons que les contraintes sont toujours abaissées en comparaison à ceux sans microstructure. Ces

premiers résultats nous permettent de comprendre comment les os peuvent résister à de très forte sollicitation sans rompre.

À présent nous pouvons considérer les microrotations entraînées au niveau de la microstructure afin de comprendre ce qu'elles apportent au comportement global. La figure 3.10 – (a) représente les contraintes tangentielles dans la plaque trouée. Dans le cas de la barre prismatique en traction, nous avons vu précédemment que sans défaut, la microstructure n'est pas activée car aucune contrainte tangentielle ne sont induites. Si on observe les microrotations  $\varphi_z$  selon z dans la plaque, nous remarquons une activation des microrotations aux mêmes localisations géographiques. Ainsi, plus la contrainte sera grande plus les microrotations seront importantes et elles sont maximales au bord du trou et diminuent en s'éloignant (cf fig. 3.10 – (b)).

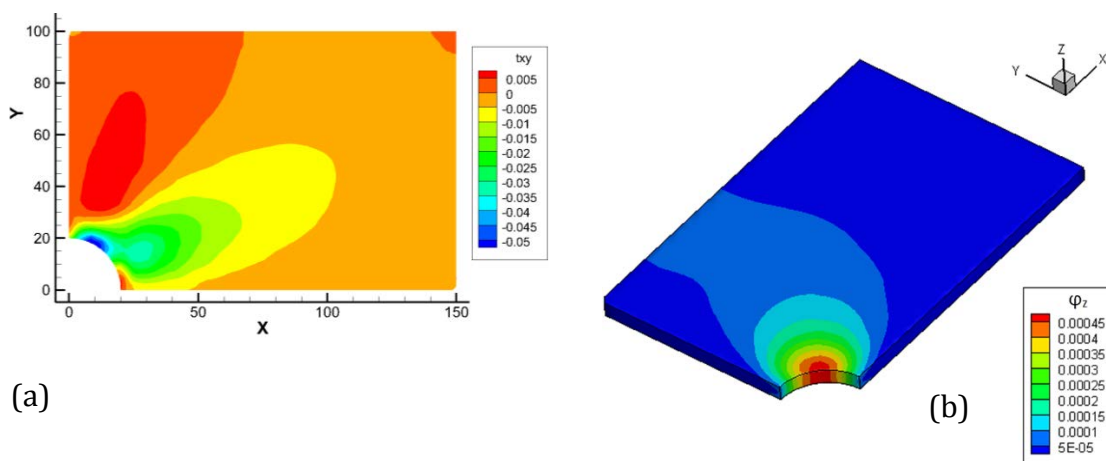


Figure 3.10 : (a) Représentation des contraintes de cisaillement  $t_{xy}$  (b) Représentation des microrotations selon z dans la plaque

Les résultats que nous obtenons sont cohérents et convergent alors vers une explication physique. À travers ces différents résultats nous montrons l'impact de la microstructure sur la macrostructure et nos résultats concordent avec les travaux antérieurs comme ceux de Eringen (Eringen, 1999b).

Dans cet exemple, nous avons fait varier seulement le paramètre de couplage  $\kappa$  qui a une influence sur la taille de la microstructure. Dans un autre exemple, nous allons mettre en

évidence l'influence des paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . De plus, cet exemple nous a permis à nouveau de valider les résultats numériques fournis par la méthode LPI-BEM.

## 5. Cube sous sollicitation de cisaillement

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la réponse d'un cube de côté 2 unités de longueur soumis à l'action d'un effort de cisaillement. Le cisaillement est la sollicitation qui peut mettre en avant l'influence de la présence d'une microstructure sur le comportement global de la structure. Pour effectuer la simulation de cet essai, nous imposons le déplacement des points de la face supérieure du cube de normale  $z$ . Les points de la face inférieure ne subissent aucun déplacement. Nous considérons que les faces latérales du cube sont libres de contrainte. La frontière du cube est subdivisée en 96 éléments quadratiques et les nœuds frontières sont augmentés de 343 centres de collocation interne. Cet essai simule le cisaillement du cube entre deux plaques. L'effet Poynting correspond alors à l'apparition des vecteurs contraintes avec une composante non nulle dans la direction normale à la surface supérieure (cf fig. 3.11).

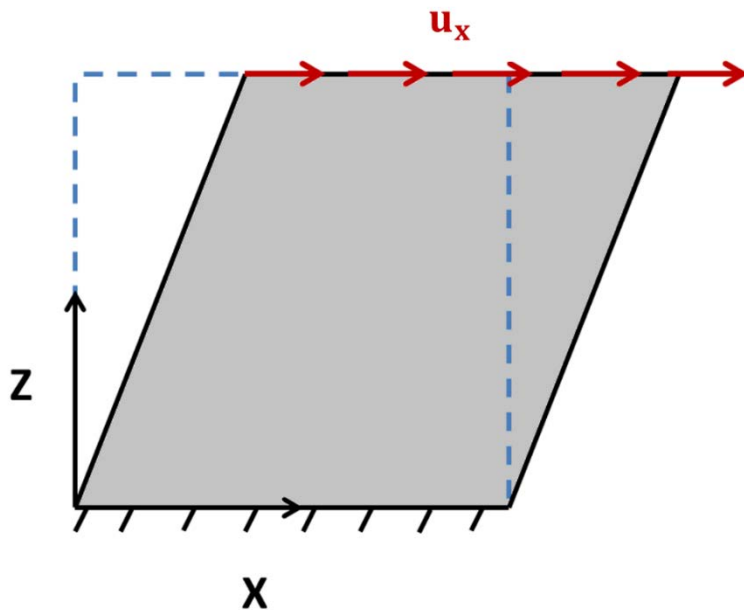


Figure 3.11 : Cube en cisaillement

## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

Il est considéré diverses combinaisons entre le paramètre de couplage et les paramètres micropolaires pour la simulation d'un cube élastique micropolaire sollicités en cisaillement. Le milieu est caractérisé par une longueur interne en torsion  $l_t$  pour chaque jeu de paramètres et un paramètre de couplage  $P_c$  dont les expressions sont définis par :

$$l_t = \sqrt{\frac{\gamma + \beta}{2\mu_m + \kappa}} \quad P_c = \frac{\kappa}{\mu + \kappa}$$

Nous rappelons ici que le module de cisaillement micropolaire  $\mu_m$  dépend du module de cisaillement élastique  $\mu_E$  et du paramètre de couplage  $\kappa$  et qu'il est défini par :

$$\mu_m = \mu_E - \frac{\kappa}{2}$$

Dans cet exemple, nous ferons évoluer la taille de la longueur caractéristique interne de torsion  $l_t$  et nous verrons son influence. Dans un premier temps nous imposerons le paramètre de couplage  $\kappa$  et ferons évoluer les autres paramètres micropolaires pour comprendre leurs impacts afin obtenir différentes longueurs internes. Les différents cas étudiés sont référencés dans le tableau 3.5 suivant :

	$\lambda$ (MPa)	$\mu$ (MPa)	$\kappa$ (MPa)	$\alpha$ (N)	$\beta$ (N)	$\gamma$ (N)	$l_t$ (mm)	$P_c$
Elastique	$18.10^3$	4505	/	/	/	/	/	/
Cas 1	$18.10^3$	$-14.68.10^3$	$38.37.10^3$	-11900	11900	23910	1.99	1.62
Cas 2	$18.10^3$	$-14.68.10^3$	$38.37.10^3$	-6000	6000	23910	1.82	1.62
Cas 3	$18.10^3$	2586	$38.37.10^2$	-4400	4400	8818	1.21	0.60
Cas 4	$18.10^3$	2586	$38.37.10^2$	-2200	2200	8818	1.10	0.60

**Tableau 3.5 : Différents paramètres matériaux pour un cube en cisaillement pour une longueur interne constante**

Les résultats des contraintes normales sur le centre de la face supérieure selon la direction  $x$  sont représentés dans la figure 3.12 suivante :

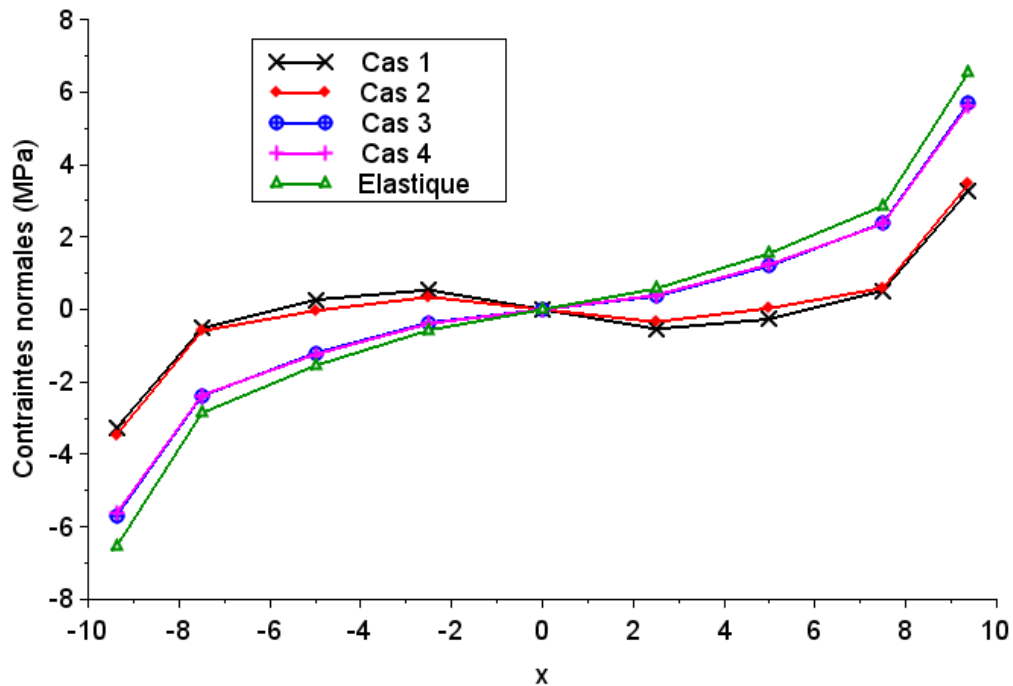


Figure 3.12 : Contraintes normales sur la face supérieure le long de l'axe x

Si nous observons la figure 3.12, nous nous apercevons que les contraintes normales sur la face supérieure du cube sont d'un côté positives ( $x > 0$ ) et de l'autre négatives ( $x < 0$ ), ce qui se traduit par une volonté d'affaissement à l'avant du cube et une poussée sur l'arrière. Si nous regardons maintenant les cas en fonction de leur longueur interne, on voit qu'ils se suivent également dans le même arrangement. Ainsi, plus la longueur caractéristique interne  $l_t$  est faible, plus nous nous rapprochons du cas élastique et plus la microstructure sera fine plus le matériau sera « homogénéisé » et moins elle aura d'impact sur la macrostructure. Ces résultats confirment alors ceux obtenus dans l'exemple de la plaque trouée.

Un autre résultat montre que les courbes sont rangées deux par deux. Le cas 1 avec le cas 2 et le cas 3 avec le cas 4. À travers le tableau 3.5, nous remarquons qu'ils sont reliés à notre paramètre de couplage  $P_c$  et qu'ils semblent mettre en évidence l'importante sur l'impact de la microstructure sur la macrostructure. De plus, lorsque nous regardons notre paramètre de couplage  $P_c$ , nous remarquons que plus il se rapproche de 0, moins il a d'influence. Et concernant  $\kappa$ , lorsqu'il devient grand, le module de cisaillement micropolaire  $\mu_m$  peut devenir négatif. Puis, lorsque  $\mu_m$  est négatif, nous remarquons que



## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

le profil n'est pas le même que pour le cas 3 et 4. Nous observons qu'à la place d'avoir des contraintes négatives d'un côté ( $x < 0$ ) et positives de l'autre ( $x > 0$ ), elles ont un profil passant du négatif au positif sur chaque côté.

Maintenant si nous comparons le cas 1 et le cas 2 ou le cas 3 avec le cas 4, nous remarquons que plus les paramètres micropolaires  $\alpha$  et  $\beta$  sont petits, moins ils auront d'influence sur la macrostructure et plus ils tendront vers le cas élastique. Cependant nous remarquons que leur influence n'a que très peu d'impact sur le comportement macroscopique.

Pour conclure, ce simple exemple d'un cube en cisaillement nous a permis de comprendre un peu mieux l'influence de la microstructure sur la macrostructure. En effet, le cisaillement « active » les microrotations et met en exergue l'influence de la microstructure sur le comportement global de la macrostructure considérée.

## IV. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré dans un premier temps la robustesse et la stabilité des résultats obtenus avec la méthode numérique LPI-BEM au sens où les variations des paramètres de la fonction d'interpolation ne les influencent pas. De plus nos exemples simples considèrent que l'écart entre les solutions connues et celles obtenues par la méthode numérique LPI-BEM n'excède pas 0,3% d'erreur relative.

En second temps, nous avons fait la simulation de différents cas et comparer les résultats numériques aux résultats analytiques. Nous obtenions des résultats confondus. De plus, à travers certains exemples, comme celui de la plaque trouée, nous avons pu mettre en évidence le rôle de la microstructure et pu comprendre son impact sur la structure globale du système étudié. Nous avons également pu observer l'influence de la taille de la microstructure et conclure que plus celle-ci est de petite taille, plus nous tendons vers la solution d'un milieu élastique classique. Pour terminer, la simulation de l'effet Poynting nous a permis d'avoir un aperçu du rôle des différents paramètres micropolaires.

**Table des figures :**

Figure 3.1 : Cube sous contrainte de cisaillement ..... 64

Figure 3.2 : Barre prismatique sollicitée en traction..... 67

Figure 3.3 : Représentation des déplacements selon l'axe  $x_3$  pour les cas analytique et numérique d'un milieu micropolaire en traction ..... 67

Figure 3.4 : Représentation du domaine pour la simulation du patch test en déplacement ..... 68

Figure 3.5 : Torsion d'un cylindre circulaire de hauteur  $h$  et rayon  $r$ ..... 70

Figure 3.6 : Représentation des déplacements  $u_\theta$  le long du rayon  $r$  sur la face supérieure ..... 72

Figure 3.7 : Représentation des microrotations  $\varphi_z$  le long de la hauteur  $h$  sur la face latérale..... 72

Figure 3.8 : (a) Géométrie de la plaque entière (b) Quart de la plaque considérée et conditions aux limites associées du problème..... 73

Figure 3.9 : Contraintes tangentielles en fonction de  $R/li$  pour le cas élastique et micropolaire ..... 74

Figure 3.10 : (a) Représentation des contraintes de cisaillement  $t_{xy}$  (b) Représentation des microrotations selon  $z$  dans la plaque..... 75

Figure 3.11 : Cube en cisaillement..... 76

Figure 3.12 : Contraintes normales sur la face supérieure le long de l'axe  $x$ ..... 78

**Table des tableaux :**

Tableau 3.1 : Évolution du déplacement selon  $x_2$  du point  $x$  (2 ; 0,0625 ; 1,9375) sur un cube en cisaillement..... 65

Tableau 3.2 : Erreur relative du déplacement par rapport à la valeur pour le point  $c = 10^{-5}$  et  $q = 1,03$  du point  $x$  (2 ; 0,0625 ; 1,9375) sur un cube en cisaillement de l'exemple II.4 ..... 65

Tableau 3.3 : Paramètres micropolaires utilisés pour la simulation d'une barre prismatique sollicitée en traction simple..... 66

Tableau 3.4 : Échantillons pris au hasard des contraintes et microcontraintes sur les centres de collocation à l'intérieur du domaine..... 69

Tableau 3.5 : Différents paramètres matériaux pour un cube en cisaillement pour une longueur interne constante ..... 77

## Chapitre 4 : Odontologie

---

## Table des matières du chapitre 4

<b>I. INTRODUCTION .....</b>	<b>85</b>
<b>II. OS ELASTIQUE CLASSIQUE .....</b>	<b>86</b>
1. Os considéré comme un milieu à une structure .....	87
a. 1 <sup>er</sup> cas de charge : compression pure.....	89
b. 2 <sup>ème</sup> cas de charge : force oblique .....	91
2. Os mandibulaire avec microstructure .....	93
a. Bicouche os cortical – os spongieux .....	93
b. Cas d'un recouvrement entier de l'os spongieux .....	96
3. Discussion intermédiaire.....	98
<b>III. OS CONSIDERE COMME UN MILIEU ELASTIQUE MICROPOLAIRE .....</b>	<b>100</b>
1. Os mandibulaire : un milieu homogène, isotrope et élastique micropolaire .....	100
a. Cas d'une compression .....	101
b. Cas de la sollicitation oblique .....	103
c. Conclusion partielle .....	106
2. Os hétérogène composé de milieux élastiques micropolaires .....	107
a. Considération d'une couche de corticale au-dessus de l'os spongieux.....	107
b. Discussion .....	116
3. Cas où l'os cortical entoure l'os spongieux .....	117
<b>IV. CONCLUSION .....</b>	<b>121</b>

## I. Introduction

En implantologie, le dimensionnement de l'implant à travers l'utilisation des méthodes numériques s'est toujours fait en posant l'hypothèse que l'os se comportait comme un milieu élastique linéaire isotrope. Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier numériquement l'impact d'un implant sous sollicitation mécanique, encastré dans l'os, en fonction du modèle de comportement adopté. C'est l'occasion de mettre en évidence l'influence de la prise en compte de la microstructure du milieu via le modèle micropolaire.

En premier lieu, nous étudierons le système implant - os sous sollicitation mécanique en considérant que l'os est un milieu élastique linéaire isotrope. Dans un second temps, nous prendrons en compte la microstructure de l'os en supposant qu'il se comporte mécaniquement comme un milieu élastique micropolaire. Enfin nous confronterons les résultats fournis par ces deux approches et nous essayerons de sélectionner celle qui serait la plus adaptée à décrire mécaniquement le système implant – os (cf fig. 4.1).

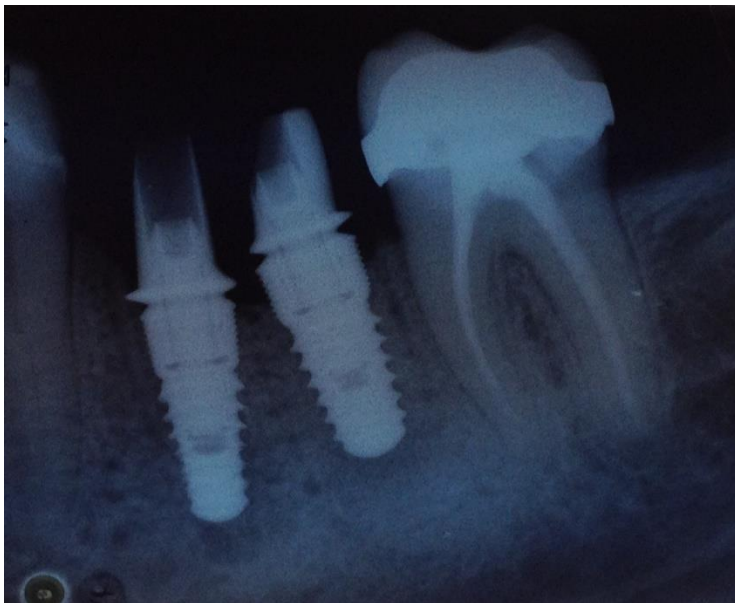


Figure 4. 1 : Système implant - os

## II. Os élastique classique

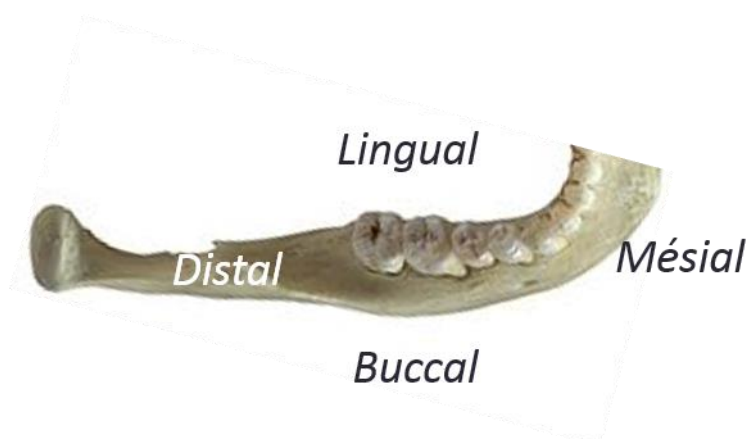
Dans cette partie, l'os étudié est supposé homogène et la déstructure entre l'os cortical et l'os trabéculaire est ignorée étant donné que l'os spongieux est lié à l'os corticale. La prise en compte de l'hétérogénéité de l'os est abordée dans une seconde étape. Ensuite nous tiendrons compte que l'os cortical recouvre uniquement la partie supérieure de l'os spongieux pour se rapprocher au plus de la réalité.

Nous allons analyser nos résultats en utilisant principalement la contrainte équivalente de von Mises qui permet d'avoir un aperçu des contraintes dans le milieu étudié et également de mettre en évidence les discontinuités de contrainte entre des milieux ayant des propriétés élastiques différentes. Elle se définit pour un milieu élastique classique quelconque :

$$\sigma_{vM} = \left[ \frac{3}{2} (dev(\sigma_{ij}) : dev(\sigma_{ij}) + dev(\sigma_{ij}) : dev(\sigma_{ji})) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Où  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes.

La figure 4.2 indique la caractérisation de la géométrie de l'os mandibulaire. Nous utiliserons les notations suivantes : M : mésial ; D : distal ; L : lingual ; B : buccal indiquées, sur la figure 4.2 :



**Figure 4.2 : Positionnement géographique des différentes faces de la mandibule**

Les faces mésiale et distale étant des coupes de l'os mandibulaire, la face linguale est la face intérieure de la bouche et la face buccale représente la face extérieure de la mâchoire.



## 1. Os considéré comme un milieu à une structure

Si nous observons deux dents en contact (cf fig. 4.3), nous remarquons que les deux faces en contact ne sont pas perpendiculaires à l'axe de la dent. La force de mastication  $\vec{F}_{mastication}$  induit, au vu de sa direction, une force de compression  $\vec{F}_n$  et va entraîner en plus une force de cisaillement  $\vec{F}_t$ . La somme des deux forces résultera en une force oblique  $\vec{F}_{obl}$ . Il a pu être mis en avant chez l'humain que l'inclinaison de cette force oblique dans des conditions de mastication normale ne dépasse pas  $15^\circ$  par rapport à l'axe vertical de la dent. Nous posons également l'hypothèse que la dent est maintenue par ses voisines donc la direction de cette force oblique se fera dans la direction linguale-buccale.

Dans cette sous partie, nous allons faire l'étude du système implant – os pour deux considérations de sollicitation : le cas d'une compression pure et le cas d'un chargement oblique appliqué sur l'implant incliné à  $15^\circ$  par rapport à l'axe de la dent.

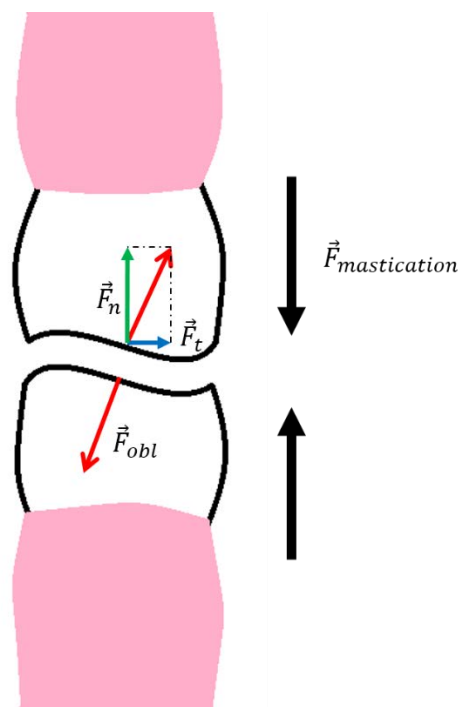


Figure 4.3 : Force résultantes de deux dents en contact

Les différents matériaux seront caractérisés par un module de Young ( $E$ ) et un coefficient de Poisson ( $\nu$ ). L'implant est assimilé à du titane, matériau biocompatible aux propriétés élastiques proches de celles de la dent. Nous prendrons  $E_i = 82,5 \text{ GPa}$  et  $\nu_i = 0,36$ . Pour l'os mandibulaire, nous adopterons un module de Young  $E_m = 20 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu_m = 0,3$ . Nous pouvons déjà noter le fort contraste entre la raideur des deux matériaux  $\frac{E_i}{E_m} \approx 4$ .

Une coupe de la géométrie du système étudié est représentée sur la figure 4.4. Il s'agit d'une version simple à analyser du système mécanique implant - os. Le domaine osseux est un parallélépipède de section droite carrée de côté 20 unités de longueur et de hauteur 30 unités de longueur avec un trou de forme cylindrique de rayon 5 unités de longueur et de profondeur 15 unités de longueur. L'implant est considéré comme un cylindre de rayon 5 unités de longueur et de hauteur 30 unités de longueur. Le maillage du domaine osseux est composé de 128 éléments à 9 nœuds. Le maillage de l'implant cylindrique quant à lui est composé de 64 éléments quadratiques.

Pour les conditions aux limites, le chargement est appliqué sur la face supérieure de l'implant. Les faces latérales de l'implant qui ne sont pas en contact avec la mandibule sont libres de contrainte. Les autres sont en contact adhérent avec la mandibule. Nous faisons l'hypothèse que les déplacements sont nuls sur la face inférieure du cube. Les faces qui représentent les coupes (mésiale et distale) de l'os mandibulaire sont bloquées dans le sens normal à la section et dans le sens lingual - buccal. Nous laissons libre le déplacement vertical de ces deux faces. Les faces restantes sont quant à elles libres de contraintes. Nous imposons des conditions de contact d'adhérence parfaite entre l'implant et l'os : continuité du déplacement  $u^{implant} = u^{os}$  à l'interface implant - os et le principe d'action - réaction pour les contraintes  $t^{implant} = -t^{os}$ .

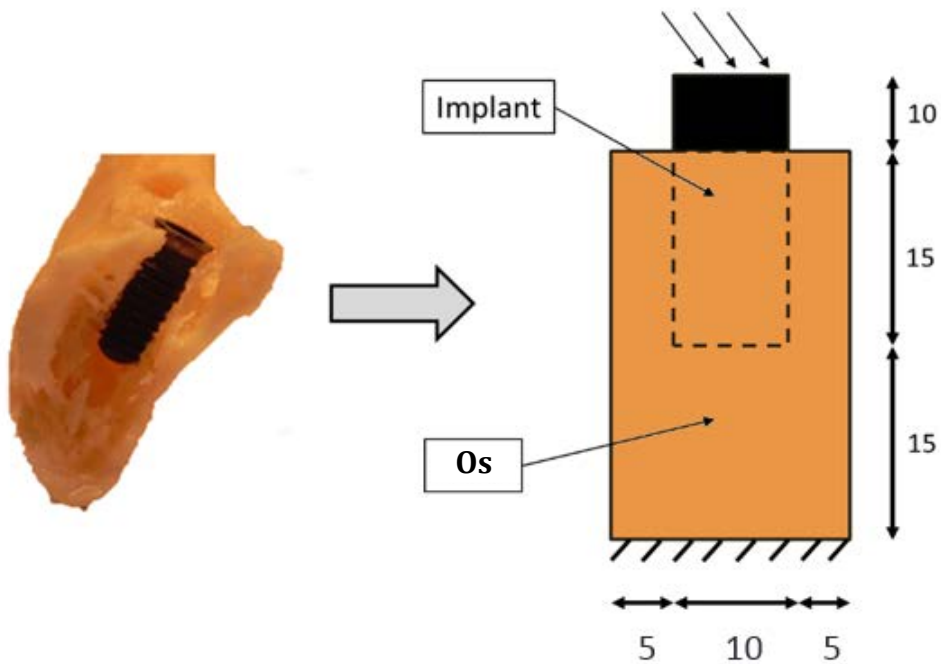


Figure 4.4 : Coupe transversale du système implant – os

Les résultats que nous allons présenter ci-après ont été obtenus pour deux cas de charge de la face supérieure de l'implant :

- 1<sup>er</sup> cas : Une force de compression pure de 300 N (soit une contrainte de 3.82 MPa) appliquée sur sa face supérieure (force de mastication).
- 2<sup>ème</sup> cas : Une force de compression et de cisaillement dans le sens lingual-buccal sont appliquées simultanément pour simuler au mieux la mastication. Leur résultante est une force oblique de 300 N inclinée de 15° par rapport à la verticale dans le sens lingual-buccal.

**a. 1<sup>er</sup> cas de charge : compression pure**

La carte des contraintes de von Mises à l'intérieur de l'os est donnée pour la figure 4.5. L'os est découpé en quartier et ouvert pour observer au mieux les contraintes à l'intérieur du domaine.

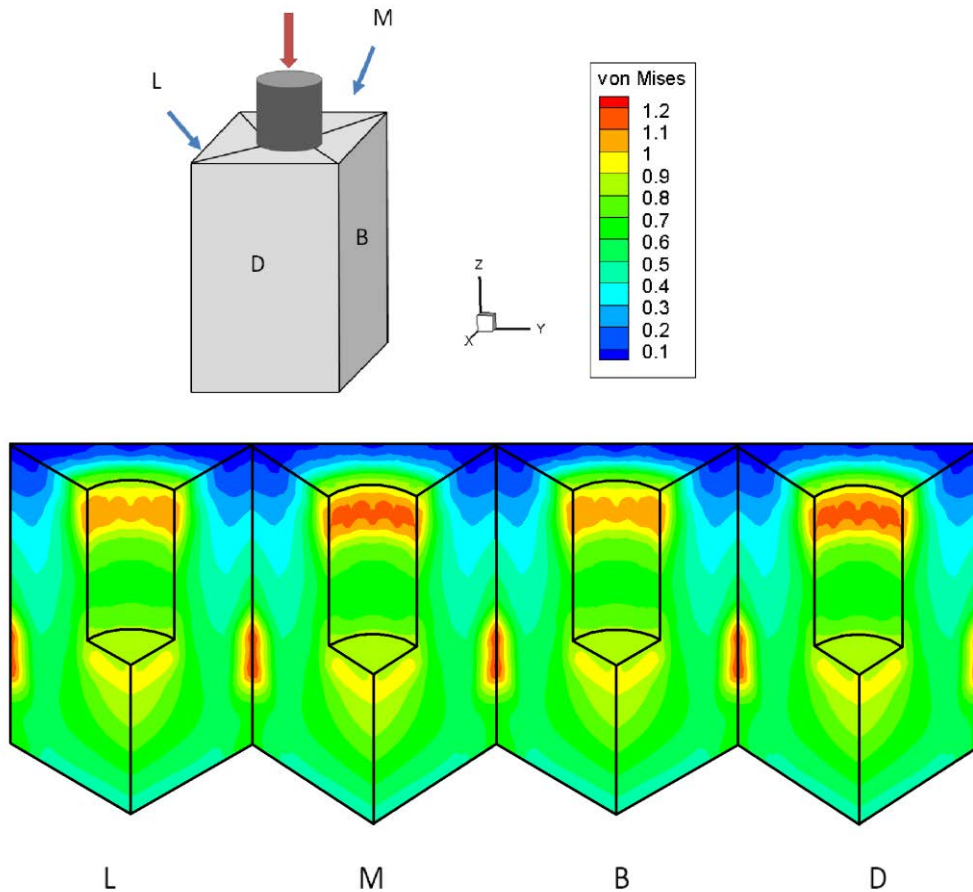


Figure 4.5 : Os élastique sous une compression pure : Carte des contraintes de von Mises dans l'os mandibulaire

Nous observons une symétrie des contraintes pour les faces M et D ainsi que pour les faces L et B. Cette symétrie est due à l'imposition des conditions aux limites sur chaque face. Les faces mésiale et distale représentent les coupes de l'os mandibulaire et sont bloquées en déplacement normaux et tangentiel dans la direction mésial - distal donc, de ce fait, nous y retrouvons des contraintes légèrement plus fortes que sur les faces linguale et buccale. Ce type de sollicitation entraîne un maximum de 1,2 unités de pression se trouvant sur la face en contact avec l'implant légèrement sous la cervicale (embouchure entre l'implant

Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

et l'os). Les contraintes sont globalement présentes dans tout le milieu mais une concentration de contrainte apparaît dans l'os localisée sous l'implant.

Cliniquement de telles contraintes entraîneraient des gênes chez un patient. Dans la réalité ces gênes n'existent pas.

### **b. 2<sup>ème</sup> cas de charge : force oblique**

Il suffit d'observer les faces des deux dents en contact pour comprendre qu'elles ne sont pas planes. La somme de ces deux forces revient à la résultante des forces de contact en une force oblique de  $15^\circ$  par rapport à l'axe vertical de l'implant. Le sens de la force de cisaillement va de la face linguale vers la face buccale.

Nous allons analyser les résultats de cette simulation par l'intermédiaire de la contrainte équivalente de von Mises :

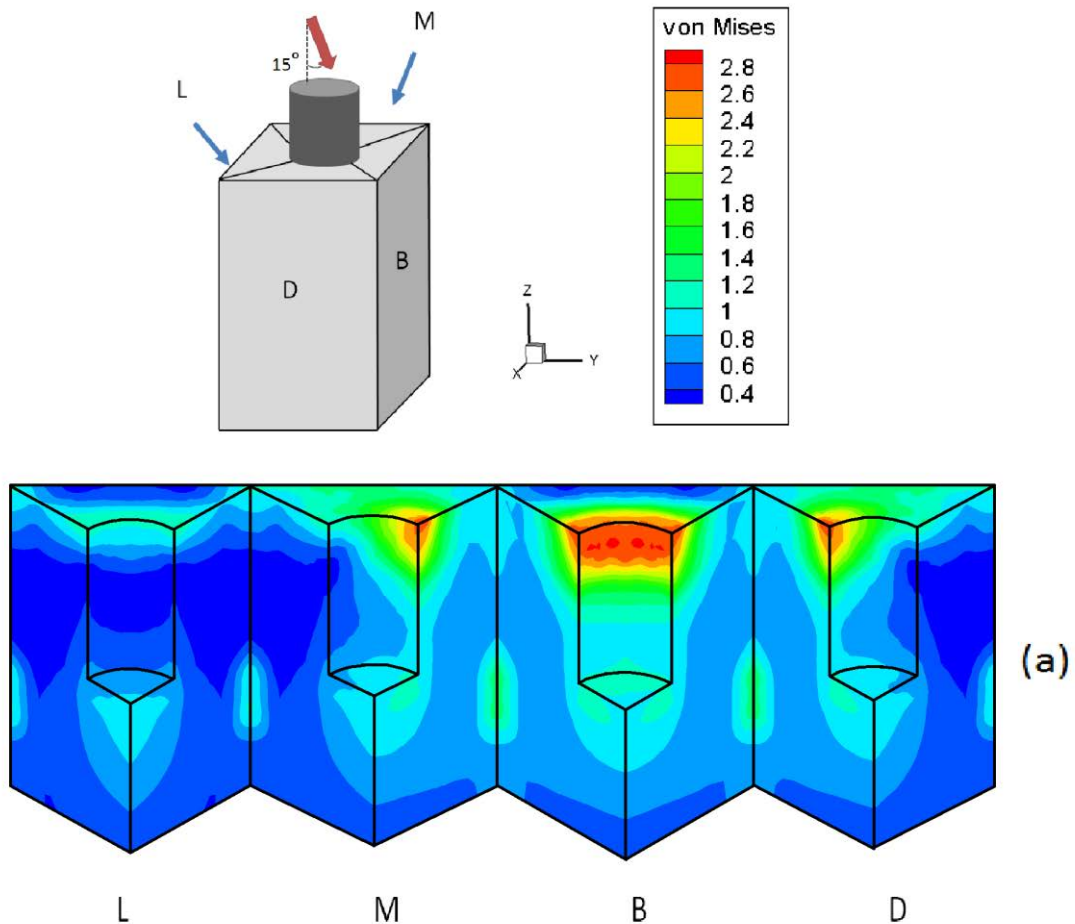


Figure 4.6 : Os élastique sous une force oblique de 15° : Carte des contraintes de von Mises dans l'os mandibulaire

Dans un premier temps nous observons que les contraintes augmentent par rapport au cas d'une compression seule. Les contraintes maximales (2,8 unités de pression) se localisent au niveau de la cervicale et juste en dessus. Les résultats en contrainte dans la mandibule montrent que la symétrie n'est présente qu'entre les faces M et D. Ce résultat est induit par le type de la sollicitation. Ceci signifie que la plupart des contraintes se localisent dans le quartier où il y a la face buccale. Des contraintes apparaissent également sur les faces mésiale et dentale, faces qui représentent les coupes de la mandibule. Les contraintes équivalentes de von Mises restent également présentes sous l'implant, ce qui cliniquement se traduirait par une gêne chez les patients, ce qui n'est pas le cas.

Les résultats obtenus montrent que les contraintes ont tendance à se concentrer sous la cervicale pour les deux cas de charges considérés : compression pure et force oblique.

Cependant pour le cas d'une compression, le maximum des contraintes est plus faible (1,2 unités de contrainte) comparé au cas d'une sollicitation oblique (2,8 unités de contrainte). Ces deux cas ont été comparés pour une force de même intensité de 300 N. Ainsi, plus la sollicitation est inclinée plus les contraintes générées dans la mandibule sont importantes. Pour compléter, une simulation en sollicitation de cisaillement pure de 300 N dans la direction linguale/buccale a également été traitée, les résultats vont dans le même sens et montrent que la contrainte maximale est de 8 unités de pression. De plus les contraintes induites par la sollicitation de cisaillement, sont présentes dans tout le volume de l'os.

Ces résultats nous montrent que plus la sollicitation se rapproche d'un cisaillement pur, plus les contraintes dans l'os sont importantes et donc augmentent le risque d'endommagement de l'os. Il serait alors utile de dimensionner les implants en essayant de minimiser l'impact du cisaillement sur les contraintes induites dans l'os.

## 2. Os mandibulaire avec microstructure

Si nous observons une coupe d'os mandibulaire, nous voyons apparaître clairement différentes structures. L'os mandibulaire est composé d'une structure externe en os cortical et d'une structure interne en os spongieux. Pour rappel l'os cortical a pour module de Young  $E_c = 20 \text{ GPa}$  et coefficient de Poisson  $\nu_c = 0,3$ . Nous prendrons un module de Young de  $E_s = 1 \text{ GPa}$  et un coefficient de poisson de  $\nu_s = 0,3$  pour caractériser l'os spongieux. L'implant en titane a un module de Young  $E_i = 82,5 \text{ GPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu_i = 0,36$ .

Le contact entre les trois milieux est un contact à adhérence totale (cf fig. 4.7). Nous traitons alors le cas d'une sollicitation oblique de 300 N inclinée de  $15^\circ$  par rapport à l'axe de l'implant.

### a. Bicouche os cortical – os spongieux

L'os cortical est lié à l'os spongieux, le domaine sera alors représenté par une couche d'os cortical posée sur l'os spongieux.

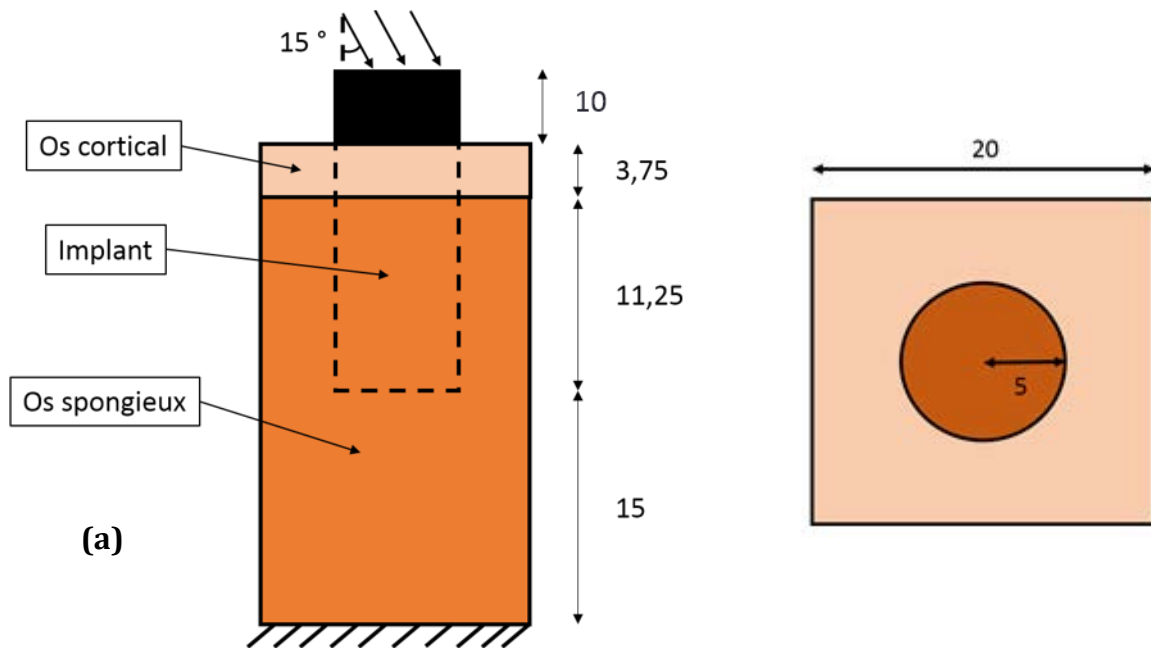


Figure 4.7 : Géométrie du système implant - os : (a) vue de profil ; (b) vue du dessus sans l'implant

L'épaisseur de la couche de l'os cortical est de 3,75 unités de longueur, celle de l'os spongieux a une hauteur de 26,25 unités de longueur. Vu du dessus le domaine étudié a une section carrée de 20 unités de longueur. L'implant a un rayon de 5 unités de longueur et une hauteur totale de 25 unités de longueur dont 15 sont en contact avec l'os (cf fig 4.7). Le maillage de l'implant consiste en 64 éléments à 9 nœuds. Pour le domaine de l'os, le maillage de la couche de cortical possède 72 éléments à 9 nœuds et celui de l'os spongieux en possède 120.

Nous analysons donc les résultats à travers la contrainte équivalente de von Mises représentés dans la figure 4.8 ci-dessous.



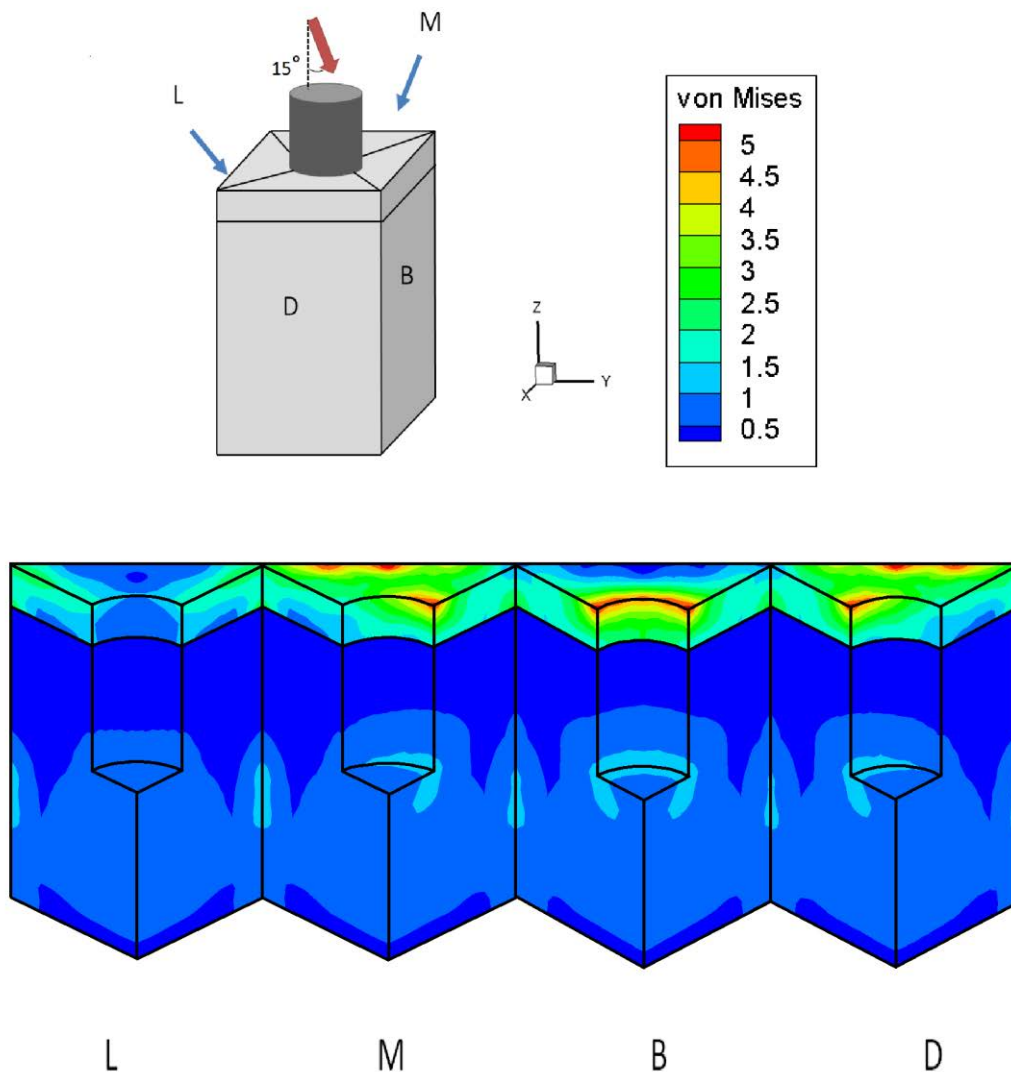


Figure 4.8 : Représentation des contraintes de von Mises dans l'échantillon d'os considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale pour le modèle élastique

Dans un premier temps les résultats nous montrent que les contraintes sont étalées dans la couche d'os cortical. Nous notons que le maximum des contraintes de 5 unités de pression est localisé sur la cervicale, endroit où l'implant comprime le plus l'os. Cependant, nous remarquons également que les contraintes se concentrent sur les faces mésiale et distale, du fait des conditions de bords imposées sur ces faces.

En second temps si nous nous attardons sur les contraintes dans l'os spongieux, nous observons dans la zone inférieure à l'implant des contraintes, qui se traduiraient par un risque de gêne chez le patient.

### b. Cas d'un recouvrement entier de l'os spongieux

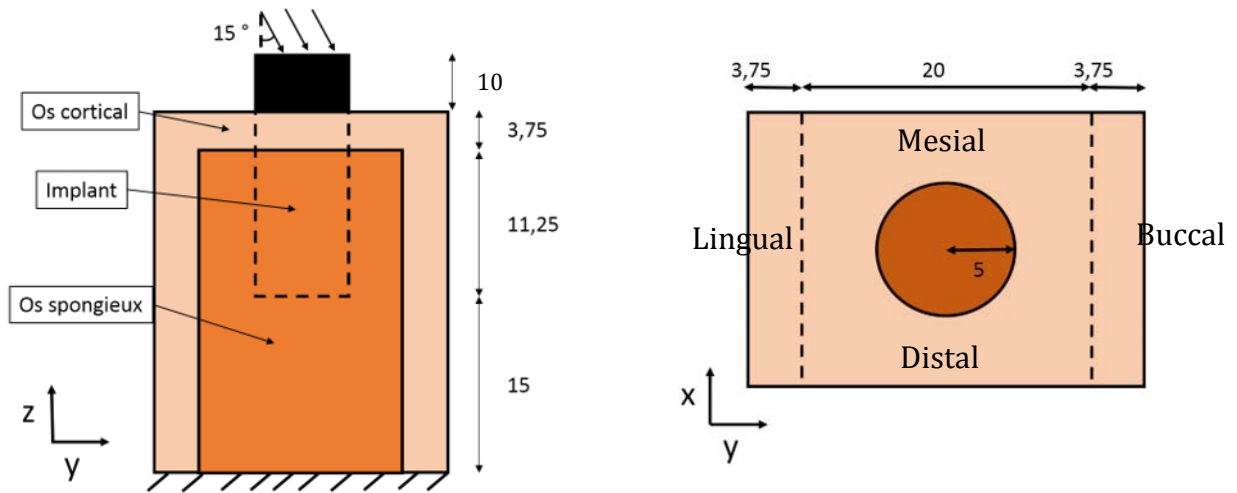
La figure 4.9 nous montre que l'os spongieux est entièrement recouvert par la couche d'os cortical.



Figure 4.9 : Coupe d'un os mandibulaire montrant la corticale qui entoure l'os spongieux

Nous considérons alors pour l'étude de notre système que l'os cortical entoure l'os spongieux en quasi-totalité (cf fig. 4.10). L'os spongieux aura pour hauteur 26,25 unités de longueur et une section carré de côté 20 unités de longueur. L'os spongieux sera recouvert d'une couche d'os cortical d'épaisseur 3,75 unités de longueur. L'implant aura toujours son rayon de 5 unités de longueur et une hauteur de 25 unités de longueur (cf fig 4.10). Nous continuons à considérer l'absence de décohésion possible entre les trois sous domaines. Le maillage de l'implant consiste en 64 éléments à 9 nœuds, le maillage pour la couche d'os cortical est composé de 280 éléments quadratiques et pour l'os spongieux de 120 éléments quadratiques.

## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique



Nous imposons également dans ce cas une sollicitation oblique de  $15^\circ$  de 300 N et nous analyserons nos résultats par le biais de la contrainte équivalente de von Mises dans la figure 4.11. Nous ne représentons que la face buccale où les contraintes  $y$  sont les plus importantes.

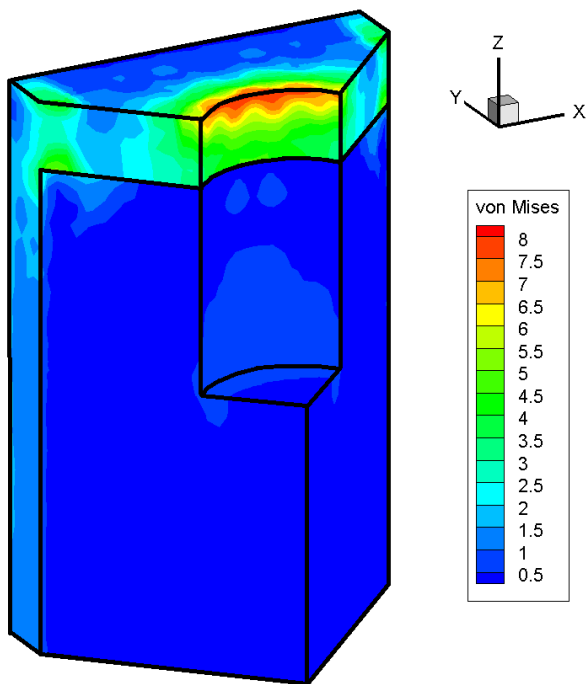


Figure 4.11 : Carte des contraintes équivalente de von Mises dans l'os mandibulaire considéré comme un milieu élastique linéaire et isotrope

Les contraintes se localisent sur la cervicale et le maximum est de 8 unités de pression. Dans ce cas nous observons une concentration de contrainte dans la couche de l'os cortical. Les contraintes dans l'os spongieux sont quasiment nulles.

Si nous comparons ces résultats au cas où la couche de corticale n'entoure pas l'os spongieux, nous remarquons que les contraintes augmentent. Nous avons dans l'autre cas un maximum de 5 unités de pression. Cependant, la distribution des contraintes dans l'os spongieux reste équivalente au cas précédent.

Les contraintes dans l'os cortical sur la partie inférieure de la mandibule restent faibles. Or un os au repos (à l'état naturel) est un os qui est amené à disparaître. Ici, au vu des concentrations de contraintes, la partie inférieure de l'os commencerait à se résorber.

### **3. Discussion intermédiaire**

Lorsque nous avons considéré l'os mandibulaire comme un milieu élastique homogène, nous avons pu effectuer une première analyse du système implant – os. Cette étude indiquait que plus la force est inclinée, plus les contraintes induites dans l'os seront importantes.

Lorsque nous avons affiné la modélisation en considérant l'os mandibulaire comme un milieu à deux constituants de caractéristiques mécaniques différentes nous avons montré dans un cas d'école, c'est-à-dire en ne considérant qu'une couche d'os cortical sur la partie supérieure de l'os, que la plupart des contraintes se concentraient dans la corticale. En comparaison au cas homogène, elles augmentaient de quasiment deux. Les contraintes dans l'os spongieux au contact de l'implant ne sont donc pas nulles, ce qui permettrait de penser que le patient ressentirait une gêne or ce n'est cliniquement pas le cas.

Enfin, en considérant que la couche d'os cortical recouvre entièrement l'os spongieux, il nous a été possible de montrer que les contraintes restent localisées dans l'os cortical et seulement dans la partie supérieure. La partie inférieure ainsi que l'os spongieux n'étaient

## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

que très peu sollicités. Ces résultats ont amené à considérer que l'os cortical va se remodeler et serait amené à disparaître, ce qui cliniquement n'a pas de sens.

Tous ces résultats, bien que riches d'enseignements, nous éclairent aussi sur les insuffisances du modèle qui fait abstraction de la microstructure de l'os. Nous allons maintenant observer l'influence de cette microstructure au travers d'une modélisation plus fine du comportement mécanique de l'os.

### III. Os considéré comme un milieu élastique micropolaire

Si nous tenons compte de sa microstructure quelle sera la réponse mécanique de l'os ? Dans cette partie nous adoptons la même démarche que dans la partie précédente, c'est-à-dire, dans un premier temps nous allons considérer l'os comme un milieu homogène élastique micropolaire. Ensuite nous considérerons l'os comme le milieu hétérogène qu'il est réellement en considérant ses deux structures. Nous analyserons les résultats par l'intermédiaire de la contrainte équivalente de von Mises. Cependant comme nous ne sommes plus dans la description d'un milieu élastique classique nous devons prendre en compte l'impact des microcontraintes. Nous pouvons réécrire la contrainte équivalente de von Mises pour les milieux micropolaires de la manière suivante (Gombos, 2007) :

$$\sigma_{vM} = \left[ \frac{3}{2} (dev(\sigma_{ij}):dev(\sigma_{ij}) + dev(\sigma_{ij}):dev(\sigma_{ji}) + m_{ij}:m_{ij} + m_{ij}:m_{ji}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Où  $m_{ij}$  est le tenseur des microcontraintes et  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes.

#### 1. Os mandibulaire : un milieu homogène, isotrope et élastique micropolaire

Nous soumettrons le système implant - os en premier abord en considérant une sollicitation de compression pure puis avec une charge inclinée de  $15^\circ$  par rapport à l'axe vertical de l'implant comme précédemment. L'implant et l'os sont donc en contact adhérent. L'implant est en titane avec pour module de Young  $E_i = 82,5$  GPa et coefficient de poisson  $\nu_i = 0,36$ . L'os mandibulaire gardera les mêmes caractéristiques macroscopiques  $E_m = 20$  GPa et  $\nu_m = 0,3$ . Le paramètre de microstructure  $\kappa$  et les paramètres micropolaires  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  qui caractérisent la microstructure de l'os sont regroupés dans le tableau 4.1 suivant :

	E (GPa)	$\nu$	$\kappa$ (GPa)	$\alpha$ (N)	$\beta$ (N)	$\gamma$ (N)
<b>Implant</b>						
Élastique	82,5	0,36	/	/	/	/
<b>Os</b>						
Micropolaire	20	0,3	38,37	-120	120	240

Tableau 4.1 : Paramètres matériaux pour la macro et micro échelle des différents milieux

Nous utiliserons toujours pour le maillage de l'implant un domaine cylindrique décomposé en 64 éléments à 9 nœuds. Les nœuds des 128 éléments quadratiques seront augmentés avec 1575 centres de collocation internes pour le domaine osseux.

Les dimensions du domaine ne changent pas par rapport au cas élastique (cf fig 4.4). L'implant a une hauteur de 25 unités de longueur et un rayon de 5 unités de longueur. L'os est un parallélépipède de hauteur 30 unités de longueur et possède une section carrée de 20 unités de longueur. L'implant est encastré dans l'os le long de la hauteur sur une profondeur de 15 unités de longueur. Nous imposerons un chargement sur la face supérieure de l'implant, la face latérale, qui n'est pas en contact, reste libre. La face inférieure de l'os est bloquée. Les faces buccale et linguale sont, quant à elles, libres de contraintes et les faces mésiale et distale, qui représentent les coupes de la mandibule, sont bloquées en déplacements normaux et en déplacement dans la direction linguale – buccale. Les conditions macroscopiques de contact entre l'os et l'implant sont toujours du type adhérences parfaites. Il est impératif de préciser les conditions aux limites associées aux équations traduisant l'évolution des microcontraintes pour les points se situant aux interfaces entre deux milieux aux propriétés différentes. Nous avons choisi de considérer que pour ces points les microcoupes sont nuls.

#### a. Cas d'une compression

Nous imposons une force de compression de 300 N sur le système implant – os pour cette simulation. Nous analyserons les résultats par le biais de la contrainte équivalente de von Mises représentée dans la figure 4.12.

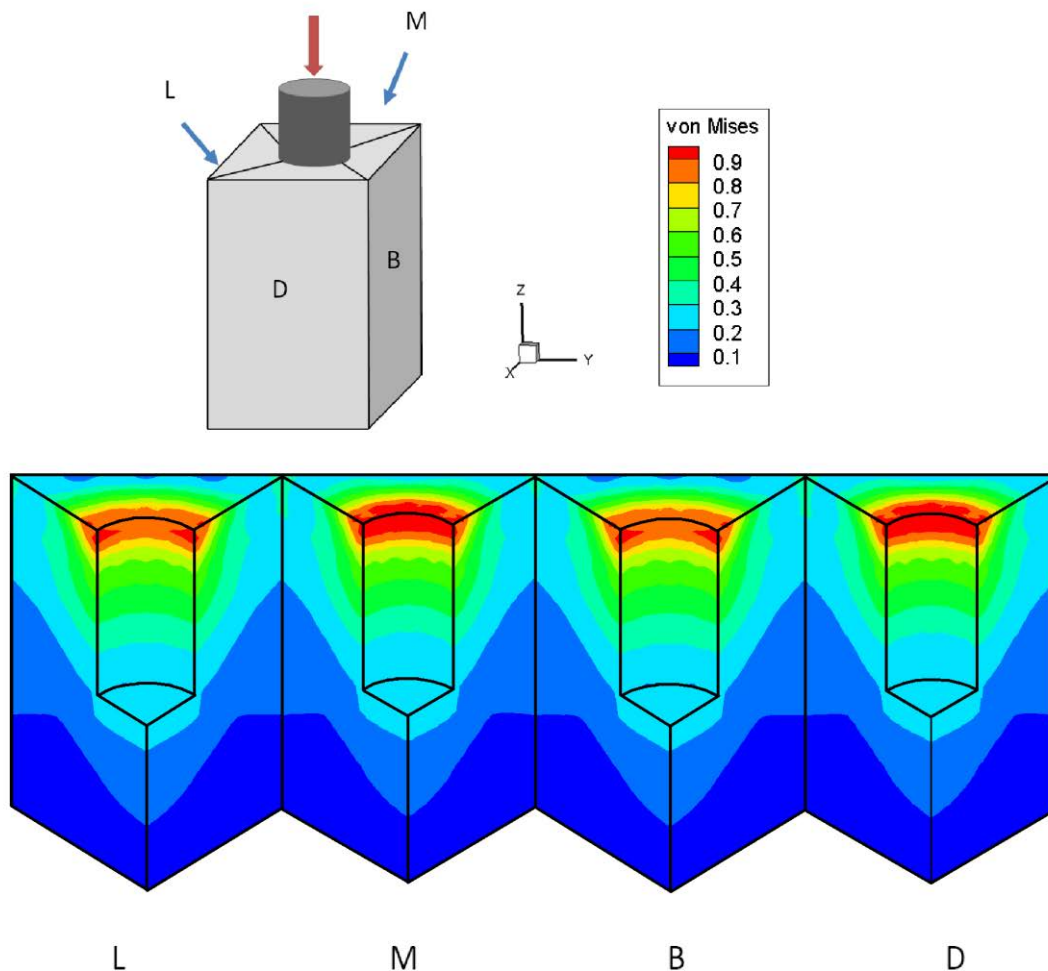


Figure 4.12 : Carte des contraintes de von Mises dans l'os mandibulaire, pour le modèle de comportement de l'os considéré comme élastique micropolaire, en réponse à une contrainte de compression

Les résultats représentés dans la mandibule nous montrent dans un premier temps une légère dissymétrie. Cette dissymétrie vient des faces M et D qui sont bloquées en déplacement dans le sens normal et tangentiel alors que les faces L et B sont libres de contrainte.

Cette représentation nous montre également que le maximum des contraintes en rouge est de 0,9 unités de pression et qu'il se localise sur tout le long de la cervicale. Les



## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

contraintes diminuent dans l'os en s'éloignant de la cervicale, jusqu'à devenir nulles dans la partie inférieure de la mandibule.

Cet exemple a également été simulé avec un maillage ayant moins de centre de collocation. Les résultats obtenus étaient sensiblement les mêmes. Cependant plus le nombre de point est important, plus la précision des résultats est fine alors nous avons choisi de représenter les résultats avec le maillage décrit.

### **b. Cas de la sollicitation oblique**

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une sollicitation plus critique où nous prendrons en considération une contrainte de cisaillement en plus de la contrainte de compression. Cette contrainte, comme vu sur la figure 4.3 de la partie II.1., est engendrée par le contact entre les deux dents. Le chargement sur la face supérieure de l'implant est alors incliné de  $15^\circ$  par rapport à la verticale dans le sens lingual - buccal.

Ainsi la figure 4.13 suivante représente les résultats sous forme de la contrainte équivalente de von Mises dans l'os mandibulaire :

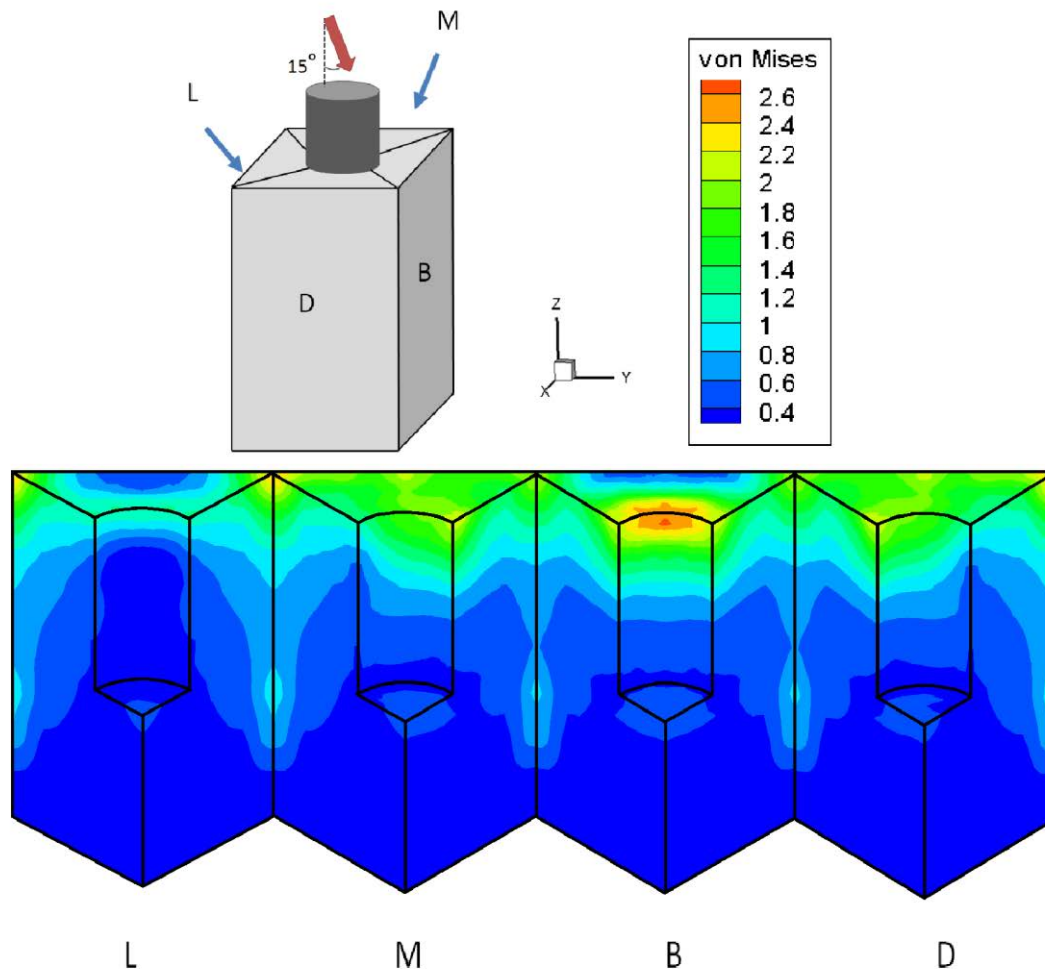


Figure 4.13 : Carte des contraintes de von Mises dans la mandibule considérée comme un milieu élastique micropolaire pour le cas d'un chargement oblique

Nous observons dans un premier temps une perte de symétrie dans le sens de la sollicitation (linguale – buccale). Le maximum des contraintes se retrouve dans le quartier de la face buccale qui subit un effort de compression de la part de l'implant et se situe au niveau de la cervicale. Les contraintes restent concentrées dans la partie supérieure de l'os et elles restent également importantes sur les faces mésiale et distale. Cette augmentation des contraintes sur les faces qui représentent les coupes de la mandibule vient des conditions aux limites (bloquées en déplacement normal et dans le sens lingual – buccal).

La contrainte équivalente de von Mises permet de faire apparaître les sauts de contrainte entre deux milieux élastiques aux propriétés différentes. Dans la figure 4.14, nous

représenterons les contraintes dans l'os et l'implant le long de l'axe lingual-buccal à une profondeur de 0,5 unités de longueur.

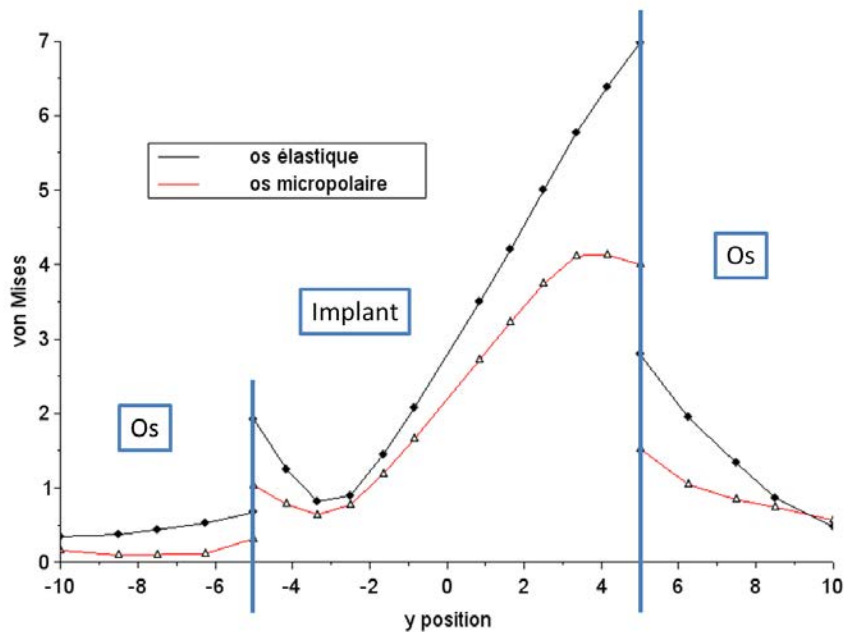


Figure 4.14 : Représentation des sauts de contrainte dans l'os et l'implant à une profondeur  $z = 0,5$

D'un point de vue global, l'os considéré comme élastique classique (ici la courbe noire) et l'os considéré comme un milieu élastique micropolaire (courbe rouge) ont les mêmes propriétés macroscopiques, seule la prise en compte de la microstructure amène à des résultats différents en contrainte. Nous remarquons que pour le cas élastique micropolaire les contraintes sont diminuées dans tout le système étudié, ce qui est également vrai pour les sauts de contrainte aux interfaces entre l'os et l'implant. Ces sauts de contraintes sont inférieurs (en  $y = 5$  : micropolaire : 2,5 unités de pression et élastique classique : 3,6 unités de pression ; en  $y = -5$  : micropolaire : 0,7 unités de pression et élastique classique : 1,3 unités de pression) aux sauts de contrainte en considérant l'os sans microstructure. Dans le cas avec considération de la microstructure, nous observons que les contraintes diminuent en se rapprochant de l'interface en  $y = 5$ . Les résultats mettent en avant une augmentation des contraintes équivalentes de von

Mises dans l'implant en se rapprochant de l'os en  $y = -5$  ceci s'explique par l'existence d'un contact adhérent entre l'os et l'implant.

Ainsi, plus le saut de contrainte entre deux milieux est important, plus le risque de décohésion l'est aussi. Les résultats obtenus avec le modèle de comportement mécanique micropolaire vont dans le sens le plus naturel, la nature ayant tendance à diminuer au maximum les concentrations de contraintes pour éviter ces problèmes.

### c. Conclusion partielle

Les résultats nous montrent dans un premier temps que le maximum de contrainte dépend du type de sollicitation. Ainsi, plus la force appliquée sur la face supérieure de l'implant sera inclinée, plus les contraintes seront grandes, comme dans le cas élastique classique. Le cas d'un cisaillement pur a également été traité et les contraintes  $y$  sont les plus importantes. Cependant dans le cas où nous considérons l'os comme étant élastique micropolaire, les contraintes sont plus faibles que pour l'os considéré comme un milieu élastique classique.

Le fait que nous prenons en considération la microstructure pour le cas du modèle de comportement micropolaire, les paramètres macroscopiques étant les mêmes, nous obtenons une différence de résultats entre les deux milieux.

Si nous observons les résultats en sauts de contraintes à l'interface entre les deux milieux, le risque de rupture semble diminué lorsque l'os est considéré comme un milieu élastique micropolaire. Les recherches actuelles tentent de rapprocher les propriétés mécaniques de l'implant au plus près de celles de l'os afin de diminuer les sauts de contraintes entre les deux milieux. Or au vu des résultats, lorsque nous tenons compte de la microstructure avec le modèle élastique micropolaire, nous remarquons que ces sauts sont diminués. Il n'est donc pas pertinent d'éloigner les propriétés mécaniques de l'implant de celles de la dent.

## 2. Os hétérogène composé de milieux élastiques micropolaires

Nous allons maintenant prendre en considération les différentes structures de l'os et donc le considérer comme un milieu hiérarchisé. Dans ce cas nous considérons deux milieux micropolaires en contact, ce qui nous amène à nous demander quelles sont les conditions de contact à l'interface pour les deux microstructures. Cependant, pour le contact macroscopique nous gardons en considération l'égalité des déplacements à l'interface  $u^a = u^b$  et le principe d'action réaction pour les contraintes  $t^a = -t^b$ . En ce qui concerne la microstructure, il est plus difficile d'imaginer ce qui s'y passe, s'il y a continuité ou non des microrotations.

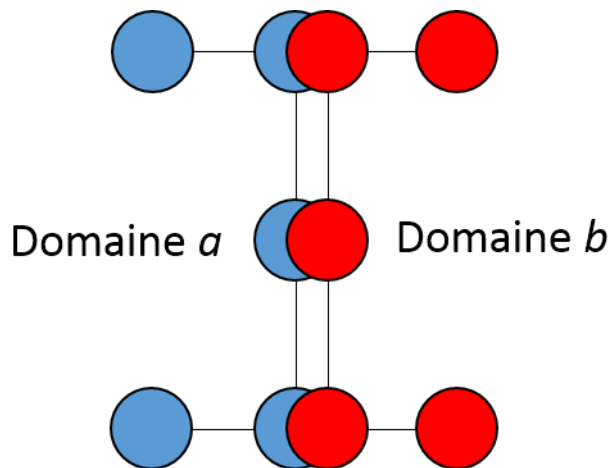


Figure 4.15 : Schéma représentant deux domaines en contact avec des nœuds géométriquement confondus

Nous considérerons dans notre travail deux types de contact entre deux milieux micropolaires a et b (cf fig 4.15). Un premier où nous considérerons qu'il n'y a pas une continuité des microrotations ( $\varphi_a$  indépendant de  $\varphi_b$ ) et que les microcoupes sont nuls à l'interface ( $m_a = m_b = 0$ ). Nous appliquerons les conditions d'adhérence parfaite pour les micro-mouvements, ainsi  $\varphi_a = \varphi_b$  et  $m_a + m_b = 0$ .

### a. Considération d'une couche de corticale au-dessus de l'os spongieux

Nous allons faire l'étude d'une couche de corticale posée sur l'os spongieux comme nous l'avons vu pour le cas élastique classique. Nous prendrons donc une couche de corticale d'épaisseur 3,75 unité de longueur posée sur un os spongieux de hauteur 26,25 unités de longueur, les deux os ayant une section carrée de côté 20 unités de longueur. L'implant y est encastré sur une profondeur de 15 unités de longueur et a pour hauteur totale 25 unités de longueur (cf fig. 4.7). Le maillage de l'implant ne change pas en comparaison au cas élastique classique. Cependant, les maillages des deux couches d'os changent, pour l'os cortical nous additionnons 324 centres de collocation internes aux 72 éléments à 9 nœuds et pour le maillage de l'os spongieux nous rajoutons 1359 nœuds internes en plus des 120 éléments à 9 nœuds vu dans la partie II.2.a..

Pour l'implant, l'os cortical et l'os spongieux nous prenons les paramètres macrostructuraux et microstructuraux représentés dans le tableau 4.2 suivant :

	E (GPa)	$\nu$	$\kappa$ (GPa)	$\alpha$ (N)	$\beta$ (N)	$\gamma$ (N)
<b>Implant</b>						
Elastique	82,5	0,36	/	/	/	/
<b>Os cortical</b>						
Micropolaire	20	0,3	38,37	-120	120	240
<b>Os spongieux</b>						
Micropolaire	1	0.3	2	-120	120	240

Tableau 4.2 : Paramètres matériaux de l'implant, de l'os cortical et de l'os spongieux

#### *i. Cas du contact sans continuité des microrotations*

Les résultats exposés dans la figure 4.16 sont représentés sous la forme de la contrainte équivalente de von Mises dans la mandibule :

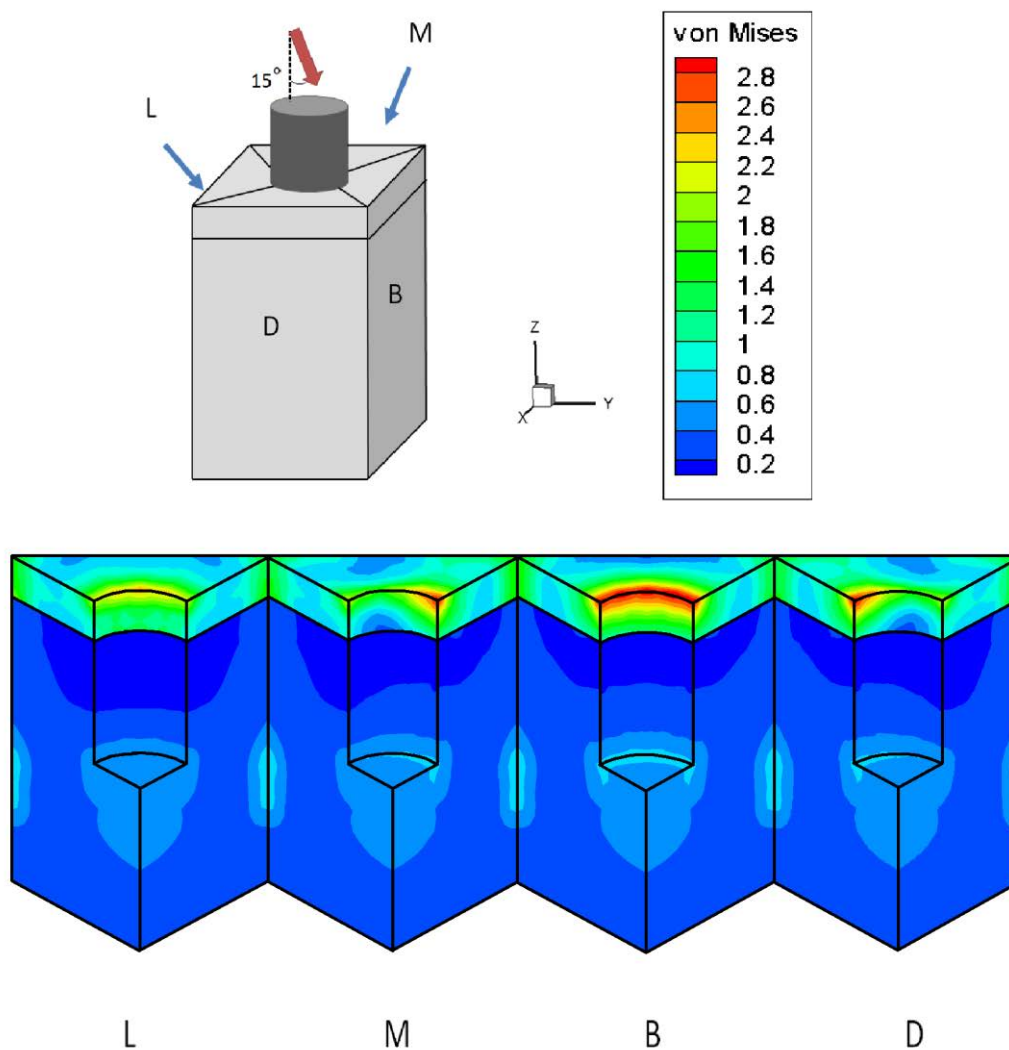


Figure 4.16 : Carte des contraintes de von Mises dans l'os considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale micropolaire, sans transmission des microrotations

Sur la figure 4.16, nous observons que les contraintes se concentrent dans l'os cortical. Le maximum de 2,8 unités de pression se concentre sur la cervicale. Des contraintes apparaissent également dans l'os spongieux, en particulier sous l'implant. Ces contraintes restent cependant très faibles.

En comparaison au cas élastique classique, les contraintes pour deux os considérés comme élastiques micropolaires pour un contact où il n'y a pas transmission des microrotations, sont diminuées par deux. La prise en compte de la microstructure amène à une diminution des contraintes.

*ii. Cas du contact avec continuité des microrotations*

Nous considérons maintenant qu'il y a continuité entre les microstructures, donc transmission des microrotations entre deux nœuds géométriquement confondus. Le système étudié est soumis aux mêmes sollicitation que dans le cas précédent, les résultats obtenus sous la forme de la contrainte de von Mises sont représentés dans la figure 4.17 suivante :

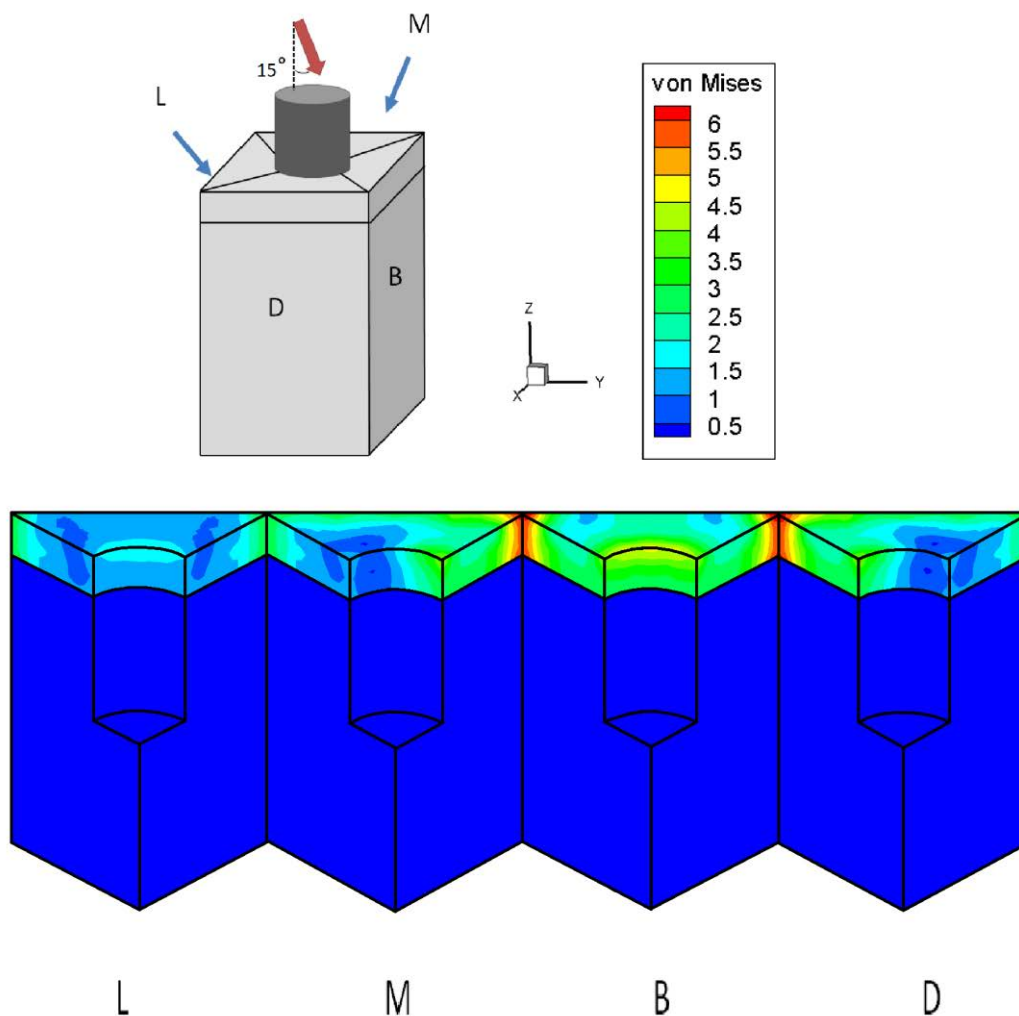


Figure 4.17 : Représentation des contraintes de von Mises dans l'os considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale micropolaires, continuité des microrotations



Cette représentation nous montre que les contraintes se concentrent dans l'os cortical et surtout dans le quartier buccal. Le maximum de 6 unités de pression pour ce type de contact entre les deux os n'est plus localisé sur la cervicale mais dans les coins des faces mésiale, buccale et distale. Nous observons cependant apparaître une légère concentration de contrainte sur la cervicale.

Les contraintes dans l'os spongieux ont, quant à elles, disparues. Celles-ci ne présagent d'aucune gêne dans l'os nous permet de décrire le cas clinique.

Le comportement entre le cas où nous considérons que les microrotations ne se transmettent pas et le cas où elles se transmettent, amène à des différences notables. Dans le cas d'une transmission des microrotations, nous avons une augmentation des contraintes d'un facteur 2 dans l'os cortical mais une diminution des contraintes dans l'os spongieux. Il est judicieux de se demander si ces concentrations ne sont pas dues à des effets de bords, étant donné que le maximum est localisé dans les coins.

Nous allons alors augmenter la taille de notre domaine par rapport à l'implant, pour vérifier cette hypothèse. Nous allons donc éloigner les faces qui représentent les coupes de la mandibule soit les faces mésiale et distale. Cliniquement cet exemple peut se traduire par l'implantation d'une prothèse de rayon plus faible dans la mandibule. Nous aurons alors une section rectangulaire de largeur 20 unités de longueur et une longueur de 26,6 unités de longueur en vue du dessus au lieu d'avoir une section carrée de 20 unités de longueur comme représenté sur la figure 4.18 ci-dessus :

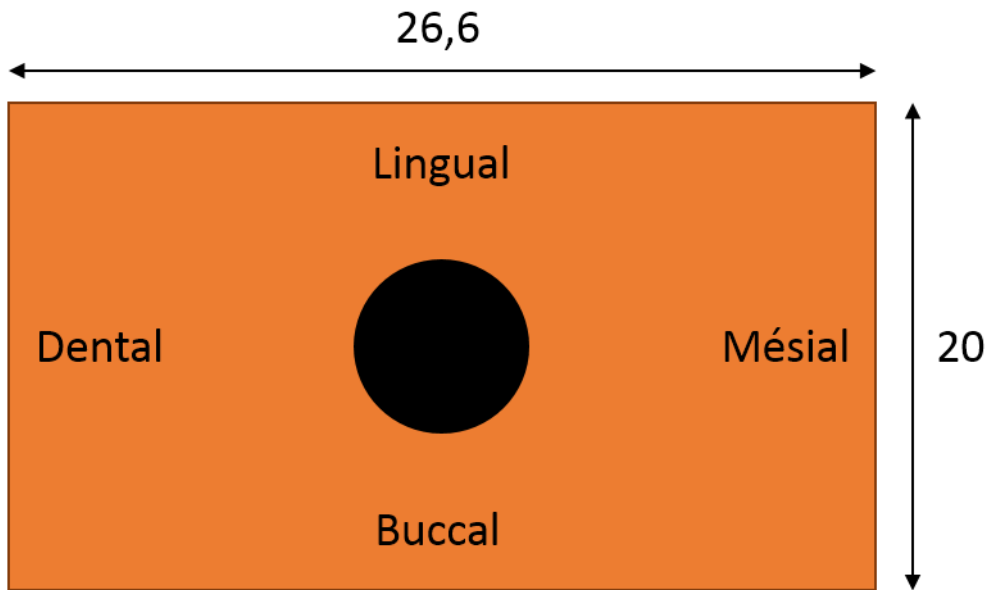


Figure 4.18 : Vue du dessus du domaine élargi

Nous représentons les résultats pour la considération du domaine élargi sous la forme de la contrainte de von Mises dans la figure 4.19 :

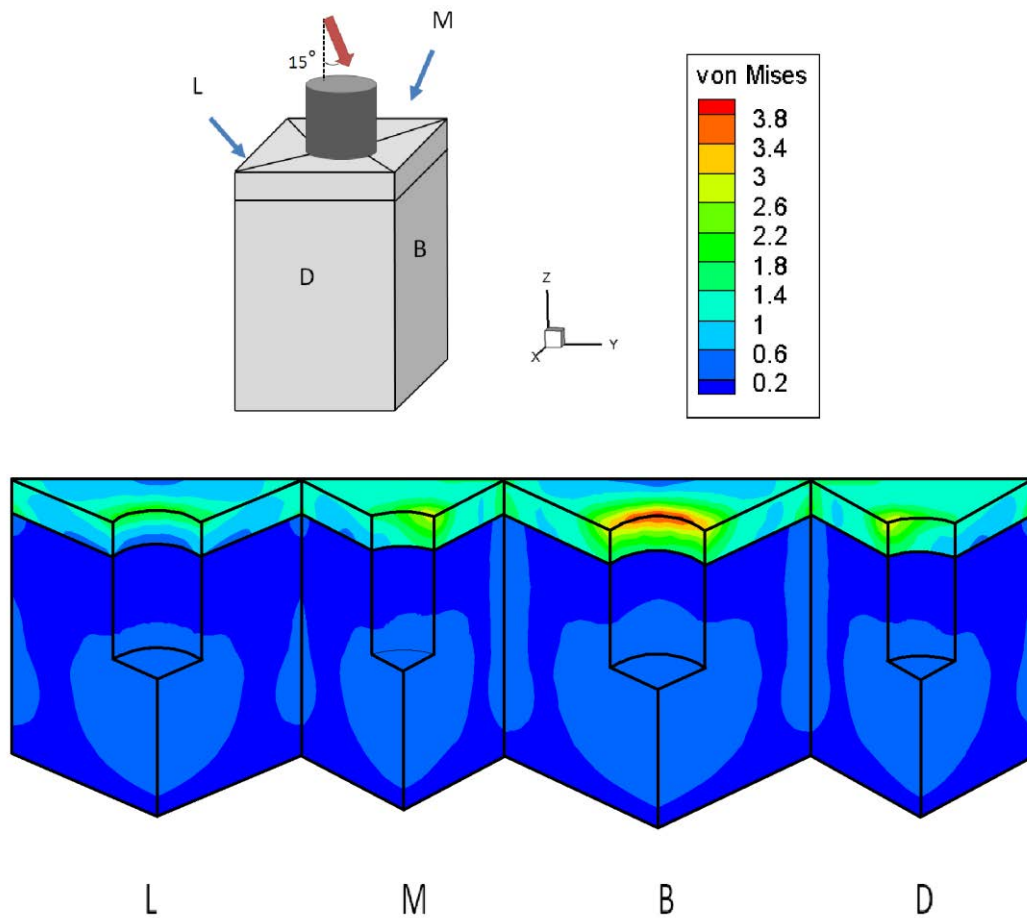


Figure 4.19 : Représentation des contraintes de von Mises dans l'os élargi considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale micropolaire

Les résultats montrent qu'il n'y a plus d'influence des bords, les contraintes y sont diminuées et passent de 6 à 3,8 unités de pression et le maximum se situe sur la cervicale. Les contraintes se localisent également sur les faces mésiale et dentale à cause des conditions aux limites.

Cliniquement, si une prothèse avec un rayon plus faible est implantée, les contraintes dans l'os cortical et dans l'os spongieux en seraient diminuées. La taille de l'implant par rapport à la taille de l'os semble être une donnée primordiale. Cependant, bien que les contraintes soient plus faibles que dans le cas élastique, les contraintes restent globalement plus fortes que dans le cas où il n'y a pas de continuité des microrotations. L'os est un milieu continu et possède un gradient de porosité entre les deux structures. Nous garderons alors le cas du contact où  $\varphi_a = \varphi_b$  et  $m_a + m_b = 0$  (cf fig. 4.15).

### iii. Impact de la microstructure

Les résultats précédents, lorsque les microrotations sont transmises, ont mis en avant la caractéristique de modifier le profil des contraintes dans l'os mandibulaire. Il serait intéressant d'observer l'impact de l'os spongieux sur l'os cortical en modifiant la longueur caractéristique interne de la microstructure. Nous introduisons donc une longueur caractéristique interne  $l_t$  qui dépend du module de cisaillement micropolaire  $\mu_m$ , du coefficient de couplage  $\kappa$  et du coefficient micropolaire  $\gamma$  :

$$l_t = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu_m + \kappa}}$$

Dans cette sous partie, nous faisons évoluer uniquement les paramètres microstructuraux. Nous obtenons le module de cisaillement micropolaire  $\mu_m$  par l'intermédiaire de la relation suivante :

$$\mu_m = \frac{E}{2(1 + \nu)} - \frac{\kappa}{2}$$

Nous ferons l'étude de trois cas où la longueur caractéristique interne évolue en faisant varier d'une part le paramètre de couplage et d'autre part les paramètres micropolaires  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Les différents paramètres utilisés sont dans le tableau 4.3 suivant :

	$E$ (GPa)	$\nu$	$\kappa$ (GPa)	$\alpha$ (N)	$\beta$ (N)	$\gamma$ (N)	$l_t$ (mm)
Cortical	20	0,3	38,37	-120	120	240	0.1
Cas 1	1	0,3	2	-120	120	240	0,42
Cas 2	1	0,3	4	-120	120	240	0,32
Cas 3	1	0,3	2	-1200	1200	2400	1,31

Tableau 4.3 : Différents paramètres de microstructure pour l'os spongieux

Nous faisons la même sollicitation sur le domaine de l'os élargi que dans la section précédente II.2.a.iii. et nous représentons seulement les résultats que sous la forme de la contrainte équivalente de von Mises que dans le quartier buccal où la contrainte de von Mises  $y$  est maximale (cf fig. 4.20).

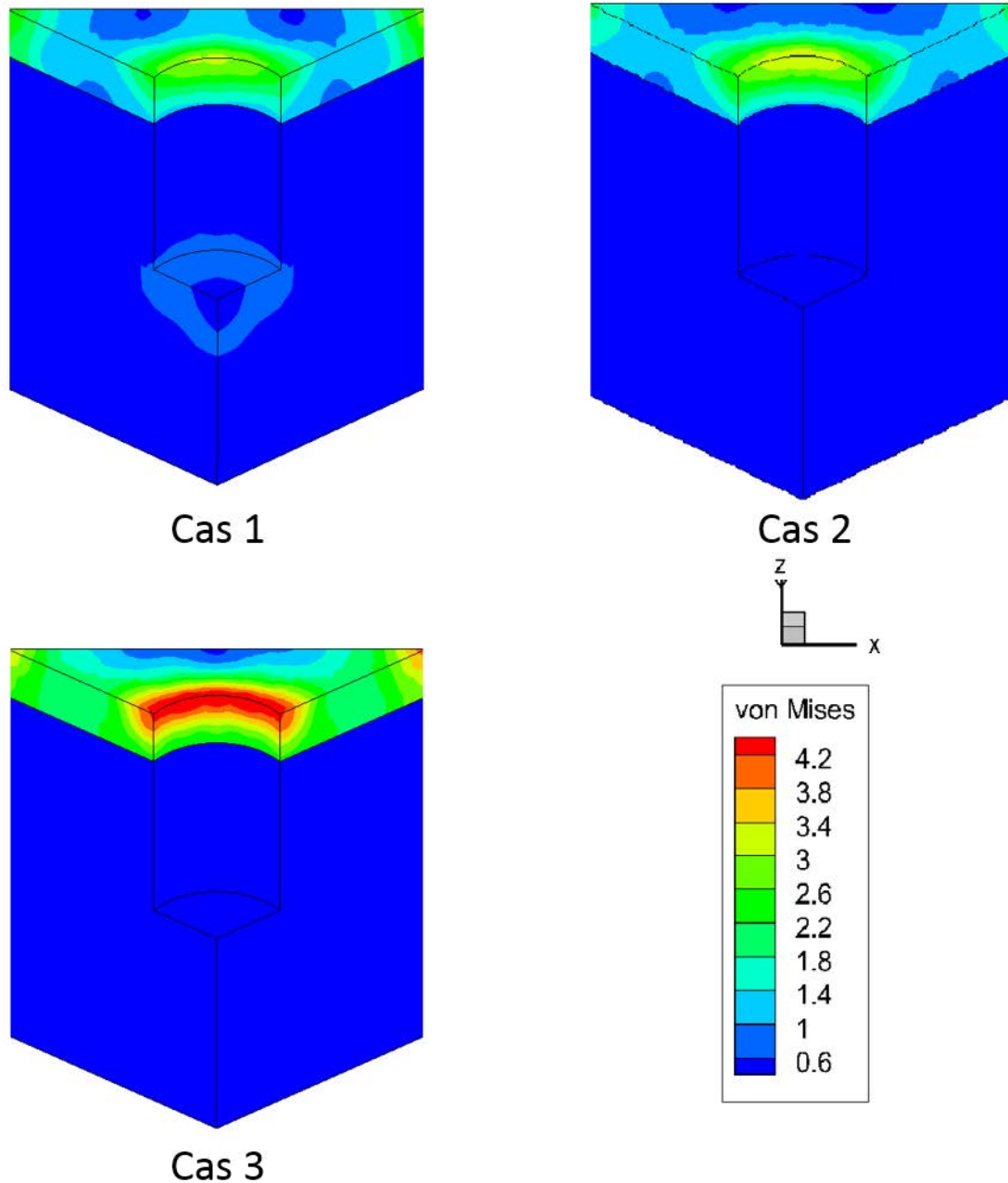


Figure 4.20 : Représentation des contraintes de von Mises pour 4 os spongieux avec des microstructures différentes

Dans un premier temps lorsque nous comparons les résultats des cas 1 et 2, l'évolution globale des contraintes de von Mises n'est quasiment pas affectée par le paramètre de couplage  $\kappa$ . Dans l'os spongieux pour le cas 1 il y a de légères contraintes qui apparaissent sous l'implant, l'orsque le paramètre  $\kappa$  est augmenté ces contraintes disparaissent. En effet, plus  $\kappa$  est petit plus les cas se rapprochent d'un cas élastique et nous remarquons que le cas 1 se rapproche du profil des contraintes d'un cas élastique. Dans le cas de l'os

cortical, les profils de contraintes entre les deux cas sont quasiment identiques. Dans le cas 2, les contraintes sur la cervicale sont très légèrement supérieures.

Nous nous attardons maintenant aux cas 1 et 3, où les paramètres micropolaires pour le cas 3 ont été augmentés. Le premier résultat montre la diminution des contraintes dans l'os spongieux. En revanche, dans l'os cortical, les résultats augmentent, les contraintes sont passées de 3 unités de pression pour le cas 1 à 4,2 unités de pression pour le cas 3. Cependant le profil des contraintes dans l'os cortical reste le même.

Entre le cas 1 et 2, l'évolution du paramètre de couplage  $\kappa$  pour l'os spongieux entre les deux cas n'impacte quasiment pas l'évolution des contraintes dans l'os cortical. Cependant nous observons à travers le cas 3 que si nous changeons les paramètres micropolaires de l'os spongieux, les contraintes dans l'os cortical sont affectées.

Il semblerait que les paramètres micropolaires pour le cas d'un contact où les microrotations sont transmises aient un impact sur la transmission des contraintes entre les deux milieux.

## **b. Discussion**

Dans cette partie nous avons étudié le cas d'un os considéré comme un milieu à deux structures. Cette prise en compte nous a amené à étudier le contact entre deux milieux micropolaires. Nous avons également pris en considération pour nos simulations, la structure de l'os cortical et la structure de l'os spongieux. Nous avons vu que la réponse à une sollicitation du comportement mécanique de l'os différait en fonction des conditions de contact pour la microstructure entre les deux milieux et en fonction des paramètres matériaux.

Dans le cadre où nous considérons que les microrotations à l'interface étaient propres à chaque milieu, nous avons trouvé que les contraintes de von Mises étaient plus faibles que dans le cas où nous avons continuité des microrotations, ce qui dans la nature semble le plus correct. Cependant, les contraintes dans l'os spongieux, particulièrement dans le bas de l'implant, restent importantes ce qui se traduirait par une gêne chez le patient. Le profil

des contraintes dans l'os cortical et l'os spongieux restent quasiment identiques à celui pour l'os considéré comme un milieu élastique.

Dans le cas où nous considérons un contact avec transmission des microrotations d'un milieu à l'autre, nous retrouvons une augmentation des contraintes qui est même supérieure au cas élastique classique. Cependant les contraintes ne se localisent plus sur la cervicale mais sont projetées dans les coins aux extrémités. C'est comme si la microstructure de l'os spongieux tendait à étaler les contraintes dans l'os cortical et provoquait des effets de bords.

Nous avons agrandi le domaine par rapport à l'implant pour vérifier si nos avancées étaient juste et nous avons observé que les effets de bords disparaissaient et le maximum des contraintes redevenait inférieur au cas élastique (3,8 contre 5 unités de pression dans le cas élastique) mais restait supérieur au cas où nous ne transmettions pas les microrotations d'un os à l'autre. Cette considération semble se justifier car la nature a horreur des concentrations de contraintes donc elle cherche toujours à les étaler pour éviter des ruptures.

Ensuite nous avons fait évoluer la microstructure de l'os spongieux pour voir l'impact sur le comportement mécanique de l'os mandibulaire. Nous avons mis en avant qu'en fonction de la taille de la microstructure, le profil des contraintes dans l'os cortical changeait.

Les variations des paramètres de la microstructure ou ceux des conditions de contact microscopique nous amène alors à des comportements mécaniques différents. Ce travail met en avant l'importance de la prise en compte de la microstructure de l'os par rapport au cas élastique classique.

### **3. Cas où l'os cortical entoure l'os spongieux**

Dans l'exemple précédent nous avons fait l'hypothèse que la corticale n'entourait pas l'os spongieux. Dans l'objectif de nous rapprocher au plus près de la réalité, nous prendrons en compte que la couche de cortical entoure entièrement l'os spongieux. Nous poserons comme hypothèse que la couche d'os cortical a une épaisseur constante de 3,75 unités de longueur et entoure l'os spongieux sur les faces linguale, buccale et supérieure. L'os

spongieux a pour hauteur 26,25 unités de longueur et pour côté 20 unités de longueur. L'os cortical ainsi que l'os spongieux ont un trou pour recevoir l'implant de rayon 5 unités de longueur. Le trou de l'os cortical est débouchant et l'os spongieux possède un trou d'une profondeur de 11,25 unités de longueur. Toutes les dimensions sont représentées sur la figure 4.21 suivante. Le contact entre les trois milieux est toujours considéré comme adhérent donc pas de décohésion possible. Le maillage de l'implant ne change pas, il est composé de 64 éléments à 9 nœuds. Le maillage pour la corticale est de 280 éléments quadratiques et pour l'os spongieux de 120 éléments quadratiques.

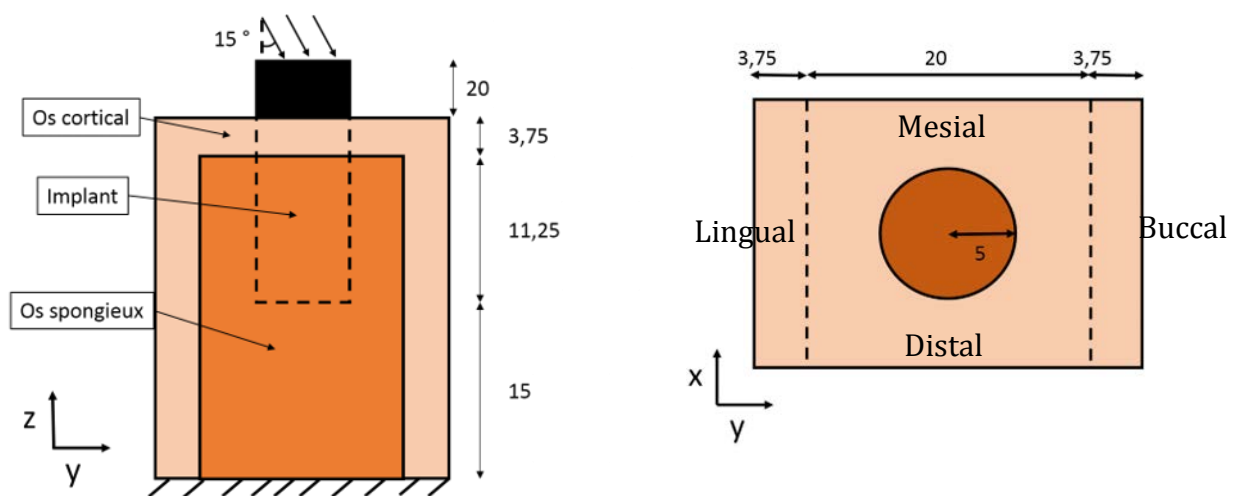


Figure 4.21 : Représentation de la géométrie du système implant - os : (a) vue de profil ; (b) vue du dessus sans l'implant

Les différents paramètres matériaux ne changent pas et sont rappelés dans le tableau 4.4 suivant :

	E (GPa)	$\nu$	$\kappa$ (GPa)	$\alpha$ (N)	$\beta$ (N)	$\gamma$ (N)
<b>Implant</b>						
Elastique	82,5	0,36	/	/	/	/
<b>Os cortical</b>						
Micropolaire	20	0,3	38,37	-120	120	240
<b>Os spongieux</b>						
Micropolaire	1	0,3	2	-120	120	240

Tableau 4.4 : Paramètres matériaux des différents milieux



Nous faisons une simulation pour une sollicitation de 300 N inclinée à  $15^\circ$  par rapport à l'axe de l'implant.

Les résultats sont représentés par l'intermédiaire de la contrainte de von Mises dans le quartier de la face buccale où les contraintes y sont les plus importantes.

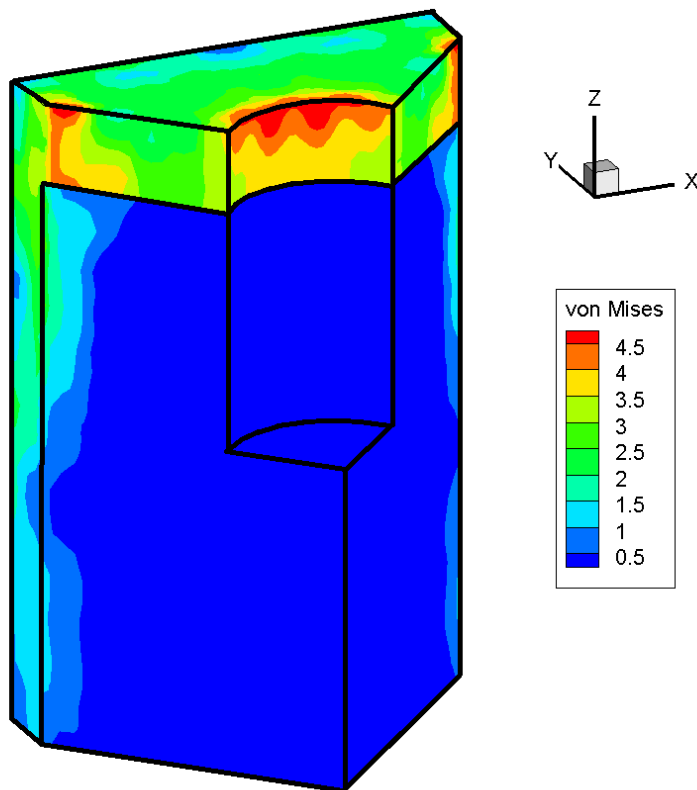


Figure 4.22 : Représentation des contraintes de von Mises pour l'os cortical entourant l'os spongieux, les deux considérés comme des milieux micropolaires

Nous observons sur la figure 4.22 que les contraintes équivalentes de von Mises sont entièrement concentrées dans l'os cortical. Elles se situent au niveau de la cervicale avec un maximum de 4,5 unités de pression. Des concentrations de contraintes apparaissent dans l'os cortical sur les faces distale et mésiale aux extrémités dans le cas du modèle élastique. Ces résultats montrent que des contraintes apparaissent dans la partie verticale de la couche d'os cortical, comme si elles se diffusaient. Pour l'os spongieux, les contraintes sont quasiment nulles partout à l'exception de l'interface entre les deux os.

En comparaison à des cas cliniques, cette simulation nous amène au cas où nous n'avons plus de gêne entraîné par l'implant. De plus, si nous comparons ce cas au cas élastique classique, les contraintes sont, d'une part, divisées par deux et d'autre part étalées. En considérant l'os comme un milieu élastique micropolaire, l'os cortical est entièrement contraint ce qui nous amène à penser qu'il ne disparaîtra pas. Ces résultats sont concordants avec les observations cliniques.

#### **IV. Conclusion**

Pour conclure ce chapitre, nous avons étudié deux systèmes implant - os, d'une part en considérant l'os comme un milieu élastique et d'autre part, en tenant compte de sa microstructure, en le décrivant avec le modèle de comportement élastique micropolaire. Le comportement mécanique décrit par le modèle ne prenant pas en considération la microstructure de l'os amène à des problèmes cliniques inexplicables telles que l'apparition de gêne dans la mandibule et/ou engendre peu de contrainte dans l'os cortical pouvant conduire à sa résorption.

Ainsi lorsque nous affinons la modélisation mécanique du comportement de l'os, en tenant compte de sa microstructure, à travers le modèle élastique micropolaire, nous mettons en lumière une diminution globale de l'intensité des contraintes et de leurs concentrations. Naturellement cela éviterait des concentrations et ainsi une éventuelle rupture de l'os. Nous observons également une disparition des contraintes dans la zone sous l'implant dans l'os spongieux ce qui se traduit cliniquement par aucune gêne clinique. Si nous tenons compte d'une géométrie plus réaliste en considérant la couche d'os cortical qui entoure l'os spongieux, les contraintes s'étalent dans la corticale, ce qui indique que l'os ne se résorbera pas lors du remodelage. Ces résultats sont comparables aux observations cliniques. La localisation des contraintes sur la cervicale lorsque que nous considérons la microstructure entraîne une détérioration de l'os et engendre ainsi une infiltration bactérienne. Cela explique les risques de perte d'implant liées aux péri-implantites.

Ce travail met donc en évidence qu'il est nécessaire de considérer la microstructure de l'os pour optimiser la géométrie ou le matériau d'un implant. Il permet ainsi de décrire au mieux le comportement mécanique du système implant – os sous sollicitation mécanique.

## Table des figures du chapitre 4

Figure 4. 1 : Système implant - os .....	85
Figure 4.2 : Positionnement géographique des différentes faces de la mandibule .....	86
Figure 4.3 : Force résultantes de deux dents en contact.....	87
Figure 4.4 : Coupe transversale du système implant – os .....	89
Figure 4.5 : Os élastique sous une compression pure : Carte des contraintes de von Mises dans l'os mandibulaire .....	90
Figure 4.6 : Os élastique sous une force oblique de 15° : Carte des contraintes de von Mises dans l'os mandibulaire .....	92
Figure 4.7 : Géométrie du système implant - os : (a) vue de profil ; (b) vue du dessus sans l'implant .....	94
Figure 4.8 : Représentation des contraintes de von Mises dans l'échantillon d'os considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale pour le modèle élastique.....	95
Figure 4.9 : Coupe d'un os mandibulaire montrant la corticale qui entoure l'os spongieux .....	96
Figure 4.10 : Représentation de la géométrie du système implant - os lorsque l'os cortical entoure l'os spongieux : (a) vue de profil ; (b) vue du dessus sans l'implant.....	97
Figure 4.11 : Carte des contraintes équivalente de von Mises dans l'os mandibulaire considéré comme un milieu élastique linéaire et isotrope .....	97
Figure 4.12 : Carte des contraintes de von Mises dans l'os mandibulaire, pour le modèle de comportement de l'os considéré comme élastique micropolaire, en réponse à une contrainte de compression .....	102
Figure 4.13 : Carte des contraintes de von Mises dans la mandibule considérée comme un milieu élastique micropolaire pour le cas d'un chargement oblique .....	104
Figure 4.14 : Représentation des sauts de contrainte dans l'os et l'implant à une profondeur $z = 0,5$ .....	105
Figure 4.15 : Schéma représentant deux domaines en contact avec des nœuds géométriquement confondus.....	107
Figure 4.16 : Carte des contraintes de von Mises dans l'os considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale micropolaire, sans transmission des microrotations .....	109

## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

Figure 4.17 : Représentation des contraintes de von Mises dans l'os considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale micropolaires, continuité des microrotations .....	110
Figure 4.18 : Vue du dessus du domaine élargi .....	112
Figure 4.19 : Représentation des contraintes de von Mises dans l'os élargi considéré avec une partie spongieuse et une partie corticale micropolaire.....	113
Figure 4.20 : Représentation des contraintes de von Mises pour 4 os spongieux avec des microstructures différentes .....	115
Figure 4.21 : Représentation de la géométrie du système implant - os : (a) vue de profil ; (b) vue du dessus sans l'implant .....	118
Figure 4.22 : Représentation des contraintes de von Mises pour l'os cortical entourant l'os spongieux, les deux considérés comme des milieux micropolaires .....	119

### **Table des tableaux :**

Tableau 4.1 : Paramètres matériaux pour la macro et micro échelle des différents milieux .....	101
Tableau 4.2 : Paramètres matériaux de l'implant, de l'os cortical et de l'os spongieux..	108
Tableau 4.3 : Différents paramètres de microstructure pour l'os spongieux.....	114
Tableau 4.4 : Paramètres matériaux des différents milieux.....	118

# Conclusion générale

---

Dans ce travail de thèse nous nous sommes intéressés aux problèmes d'implantologie liés aux prothèses dentaires qui parfois entraînent une dégradation de l'os. Contrairement aux travaux antérieurs, vu la structure multi-échelles de l'os, ce dernier est appréhendé comme un milieu micromorphe et plus particulièrement un milieu micropolaire. Ainsi, un point matériel continu de ce milieu peut avoir des mouvements propres de rotation. Nous avons eu recours à la simulation numérique pour étudier le comportement mécanique du système implant - os sous sollicitation mécanique. Nous avons utilisé une méthode couplant les éléments de frontières à une méthode de collocation par point, la LPI-BEM (Local Point interpolation – Boundary Element Method) (Njiwa, 2016). Les éléments de frontière permettent de résoudre des problèmes élastiques linéaires et isotropes de façon rapide et précise. Cependant lorsque le problème est couplé, c'est-à-dire qu'on ne connaîtra plus la solution fondamentale des équations de champs, nous aurons recours à une méthode de collocation par point couplée aux éléments de frontières. Au préalable, nous avons démontré l'efficacité de la stratégie en l'appliquant sur un problème de conduction thermique transitoire avant de l'adapter à la résolution de problèmes élastiques micropolaires. Une fois que nous avons prouvé la robustesse de la méthode numérique nous avons mis en avant la particularité du comportement mécanique des milieux micropolaires. Nous avons étudié le cas d'un implant inséré dans un os considéré comme un milieu élastique micropolaire. Les résultats obtenus sont comparés au cas où l'os est un milieu élastique classique. Les propriétés mécaniques macroscopiques des deux milieux sont identiques, seule la prise en compte de la micro-échelle dans le modèle micropolaire diffère. L'intégration de la microstructure conduit à une diminution des contraintes équivalentes de von Mises dans l'os, ce qui nous permet de comprendre l'aptitude de l'os à résister à de telles sollicitations. Ce résultat met également en avant une diminution des sauts de contrainte à l'interface entre les deux milieux aux propriétés mécaniques différentes, ce qui montre un faible risque de décohésion entre les deux milieux. Cliniquement ce résultat se justifie par la difficulté pour un praticien d'extraire une dent. La prise en compte de cette microstructure montre que les contraintes induites dans l'os spongieux au niveau de la partie basse de l'implant sont quasiment inexistantes,

ce qui est observé cliniquement. Et enfin, lorsque nous considérons une modélisation plus fine de l'os, les résultats obtenus avec le modèle élastique micropolaire contrairement au modèle élastique classique, nous montrent un étalement des contraintes dans toute la structure de l'os corticale. Ce résultat signifie que l'os ne se résorbera pas à travers le phénomène de remodelage.

La considération d'une modélisation plus fine de l'os permet ainsi d'obtenir des résultats justifiables vis-à-vis de cas clinique. Cette première étude montre que le modèle élastique micropolaire est plus adapté pour décrire le comportement mécanique de l'os et permettra par la suite une meilleure optimisation des implants afin de réduire le risque de dégrader l'os.

En perspective, et pour se rapprocher encore plus près du comportement mécanique de l'os, il faudrait faire une étude expérimentale afin d'obtenir les paramètres micropolaires les plus adaptés pour décrire ce milieu vivant complexe. Nous avons également vu au premier chapitre que l'os est un milieu à gradient de porosité. Y intégrer ce gradient dans notre stratégie numérique serait alors pertinent, nous permettant de nous abréger des conditions de contact microstructurale difficile à établir. Ce travail de thèse ne se limite pas seulement aux problèmes mandibulaires mais est adaptable pour la description de tous les os.

## Épilogue

Il était une fois la vie, naissant en premier lieu dans l'océan, cette immensité d'eau qui a la particularité, du point de vue du mécanicien, de s'abréger de la gravité. Nous pouvons le remarquer car nous flottons et les personnes ayant des handicaps physiques peuvent se mouvoir dans ce milieu. Quand les premières espèces sont sorties de l'eau, elles ont fait face à la gravité et ont dû s'adapter à leur nouvel environnement. D'après l'évolutionnisme et la sélection naturelle selon Darwin (Darwin, 1859), elles ont dû créer de membres pour se décoller du sol et se mouvoir. Le squelette des poissons en cartilage sans microstructure apparente, est adapté pour vivre dans un milieu sans gravité. Il a alors dû évoluer pour s'adapter à la pesanteur, avec une solidité pour supporter le poids, les chocs et une légèreté pour se mouvoir rapidement et survivre. A l'heure actuelle, si nous observons un os, il a une structure en os corticale et une structure en os spongieux. Nous voyons apparaître sur ces deux structures une microstructure apparente contrairement au cartilage. La partie compacte amène la résistance et la rigidité de l'os et la porosité amène de la légèreté dans la structure de l'os mais pas seulement. Lorsque nous nous mouvons, certains os sont amenés à supporter plusieurs fois le poids de notre corps (sauter et atterrir par terre), il faut alors que les contraintes transmises par l'os compact soient absorbées pour éviter des fractures et c'est l'un des rôles aussi de la microstructure. Lorsque nous mâchons, il se passe la même chose, il faut éviter que la mâchoire se casse où que les dents tombent. Les contraintes de compressions et de cisaillement lors de la mastication sont telles que la structure de l'os, assez fine, doit résister et donc en quelque sorte absorber ou étaler les contraintes. Certaines maladies, comme la maladie des os de verre, nommée ostéogenèse imparfaite, amène à supprimer cette particularité et fragilisent l'os (Imbert, 2014).

D'autre particularité amène à fragiliser l'os, comme par exemple en implantologie où les implants sont dimensionnés pour être intégrés dans des milieux qui ne prennent pas l'aspect vivant en compte. Ceci amène à une perte de l'implant due à une fissuration de l'os car la forme et le matériau n'ont jamais vraiment évolués pour s'adapter à l'os. Si nous voulons optimiser au mieux l'implant pour éviter des ruptures de l'os et ainsi sa perte, nous devons avoir recours à la simulation numérique, moyen permettant de comprendre



## Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

le comportement du système implant - os sous sollicitation mécanique. Nous devons donc trouver un modèle de comportement qui le décrit au mieux sous une sollicitation extérieure. C'est pourquoi nous devons nous efforcer à trouver un modèle numérique capable de décrire un tel milieu avec de telles caractéristiques.

## Références bibliographiques

Altenbach, H., and Eremeyev, V. a. (2009). On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM - J. Appl. Math. Mech. Z. Für Angew. Math. Mech.* 89, 242–256.

Argyris, J.H. (1960). *Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalised Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations* (Springer US).

Baiotto, S. (2004). *Modèle viscoélastique de remodelage osseux : approches théorique, numérique et expérimentale* (Paris 12).

Balaš, J., Sládek, J., and Sládek, V. (1989). *Stress Analysis by Boundary Element Methods* (Elsevier).

Belinha, J. (2014). *Meshless Methods in Biomechanics: Bone Tissue Remodelling Analysis* (Springer).

Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L. Element-free Galerkin methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 37, 229–256.

Bessho, M., Ohnishi, I., Matsuyama, J., Matsumoto, T., Imai, K., and Nakamura, K. (2007). Prediction of strength and strain of the proximal femur by a CT-based finite element method. *J. Biomech.* 40, 1745–1753.

Bonnet, M. (1999). *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids* (Chichester ; New York: Wiley).

Bowman, S.M., Keaveny, T.M., Gibson, L.J., Hayes, W.C., and McMahon, T.A. (1994). Compressive creep behavior of bovine trabecular bone. *J. Biomech.* 27, 301–310.

Brebbia, C.A., and Dominguez, J. (1994). *Boundary Elements: An Introductory Course* (WIT Press).

Brenner, S.C. (1999). Multigrid Methods for the Computation of Singular Solutions and Stress Intensity Factors I: Corner Singularities. *Math Comput* 68, 559–583.

Carter, D.R., and Spengler, D.M. (1978). Mechanical properties and composition of cortical bone. *Clin. Orthop.* 192–217.

Carter DR, and Hayes WC (1977). The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure. 954–962.

Chen, J.S., Hillman, M., and Chi, S.W. (2017). Meshfree methods: Progress made after 20 years. *J. Eng. Mech.* 143, 4017001.

Cheng, A.H.-D., and Cheng, D.T. (2005). Heritage and early history of the boundary element method. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 29, 268–302.

Connor J.J., and Brebbia C.A. (1976). *Finite Element Techniques for Fluid Flow* (Elsevier).

Cosserat, E.M.P., and Cosserat, F. (1909). *Théorie des corps déformables* (Paris: A. Hermann et fils).

Cowin, S.C. (1999). Bone poroelasticity. *J. Biomech.* 32, 217–238.

Darwin, C. (1859). *The Origin of Species: By Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life* (Cambridge).

Deligianni, D.D., Missirlis, Y.F., and Kafka, V. (1994). Determination of material constants and hydraulic strengthening of trabecular bone through an orthotropic structural model. *Biorheology* 31, 245–257.

Didier, P., Piotrowski, B., Fischer, M., and Laheurte, P. (2017). Mechanical stability of custom-made implants: Numerical study of anatomical device and low elastic Young's modulus alloy. *Mater. Sci. Eng. C* 74, 399–409.

Diebels, S. (2000). A macroscopic description of the quasi-static behavior of granular materials based on the theory of porous media. *Granul. Matter* 2, 143–152.

Diebels, S. (2002). Micropolar mixture models on the basis of the Theory of Porous Media. In *Porous Media*, P.D.-I.W. Ehlers, and P.D.D.-I.J. Bluhm, eds. (Springer Berlin Heidelberg), pp. 121–145.

Diepolder, W., Mannl, V., and Lippman, H. (1991). The cosserat continuum, a model for grain rotations in metals? *Int. J. Plast.* 7, 313–328.

Doblaré, M., García, J.M., and Gómez, M.J. (2004). Modelling bone tissue fracture and healing: a review. *Eng. Fract. Mech.* 71, 1809–1840.

Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. *Comput. Mech.* 23, 219–230.

Dyzlewicz, J. (2004). *Micropolar theory of elasticity*.

Elliotis, M., Georgiou, G., and Xenophontos, C. (2002). The solution of Laplacian problems over L-shaped domains with a singular function boundary integral method. *Commun. Numer. Methods Eng.* 18, 213–222.

Eringen (1990). *Electrodynamics of Continua I: Foundations and Solid Media*.

Eringen, A.C. (1999a). Theory of Micropolar Elasticity. In *Microcontinuum Field Theories*, (Springer New York), pp. 101–248.

Eringen, A.C. (1999b). *Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids* (New York, NY: Springer New York).

Fan, Z., Swadener, J.G., Rho, J.Y., Roy, M.E., and Pharr, G.M. (2001). Anisotropic properties of human tibial cortical bone as measured by nanoindentation. *J. Orthop. Res.* 20, 806–810.

- Geniaut, S., and Galenne, E. (2012). A simple method for crack growth in mixed mode with X-FEM. *Int. J. Solids Struct.* *49*, 2094–2106.
- Gibson, L.J. (1985). The mechanical behaviour of cancellous bone. *J. Biomech.* *18*, 317–328.
- Gingold, R.A., and Monaghan, J.J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* *181*, 375–389.
- Goddard, J.D. (2008). From Granular Matter to Generalized Continuum. In *Mathematical Models of Granular Matter*, G. Capriz, P.M. Mariano, and P. Giovine, eds. (Springer Berlin Heidelberg), pp. 1–22.
- Goldstein, S.A. (1987). The mechanical properties of trabecular bone: Dependence on anatomic location and function. *J. Biomech.* *20*, 1055–1061.
- Gombos, Á. (2007). Equivalent stress for micropolar solids. *Period. Polytech. Mech. Eng.* *51*.
- Grbčić, S., Ibrahimbegović, A., and Jelenić, G. (2018). Variational formulation of micropolar elasticity using 3D hexahedral finite-element interpolation with incompatible modes. *Comput. Struct.* *205*, 1–14.
- Hernandez, C.J., Beaupré, G.S., Keller, T.S., and Carter, D.R. (2001). The influence of bone volume fraction and ash fraction on bone strength and modulus. *Bone* *29*, 74–78.
- Huang, F.-Y., and Liang, K.-Z. (1996). Boundary element method for micropolar thermoelasticity. *Eng. Anal. Bound. Elem.* *17*, 19–26.
- Huiskes, R., and Chao, E.Y.S. (1983). A survey of finite element analysis in orthopedic biomechanics: The first decade. *J. Biomech.* *16*, 385–409.
- Iesan, D., and Pompei, A. (1995). On the equilibrium theory of microstretch elastic solids. *Int. J. Eng. Sci.* *33*, 399–410.
- Imbert, L. (2014). Effets de l'ostéogénèse imparfaite sur les propriétés mécaniques et minérales de l'os cortical chez l'enfant. phdthesis. Ecole Centrale de Lyon.
- János Szabó, F. (2008). Finite Element Analysis and Optimization of a Car Seat under Impact Loading. In *Design, Fabrication and Economy of Welded Structures*, K. Jármai, and J. Farkas, eds. (Woodhead Publishing), pp. 97–104.
- Jehl, J.-P., and Njiwa, R.K. (2014). A (Constrained) Microstretch Approach in Living Tissue Modeling: a Numerical Investigation Using the Local Point Interpolation - Boundary Element Method. *Comput. Model. Eng. Sci.* *102*, 345–358.
- Keaveny, T.M., and Hayes, W.C. (1993). A 20-Year Perspective on the Mechanical Properties of Trabecular Bone. *J. Biomech. Eng.* *115*, 534–542.

Keyak, J.H., Lee, I.Y., and Skinner, H.B. (1994). Correlations between orthogonal mechanical properties and density of trabecular bone: Use of different densitometric measures. *J. Biomed. Mater. Res.* *28*, 1329–1336.

Kouitat Njiwa, R. (2011). Isotropic-BEM coupled with a local point interpolation method for the solution of 3D-anisotropic elasticity problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.* *35*, 611–615.

Lakes, R. (1995). Letter to the editor: On the torsional properties of single osteons. *J. Biomech.* *28*, 1409–1410.

Lakes, R.S. (1986). Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids Struct.* *22*, 55–63.

Lakes, R.S., and Katz, J.L. (1979). Viscoelastic properties of wet cortical bone—II. Relaxation mechanisms. *J. Biomech.* *12*, 679–687.

Lakes, R.S., Katz, J.L., and Sternstein, S.S. (1979). Viscoelastic properties of wet cortical bone—I. Torsional and biaxial studies. *J. Biomech.* *12*, 657–678.

Lettry, S., Seedhom, B.B., Berry, E., and Cuppone, M. (2003). Quality assessment of the cortical bone of the human mandible. *Bone* *32*, 35–44.

Levy S. (1947). Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback. *J. Aeronaut. Sci.* *14*, 547–560.

Levy S. (1953). Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. *J. Aeronaut. Sci.* *20*, 449–454.

Li, L., and Xie, S. (2004). Finite element method for linear micropolar elasticity and numerical study of some scale effects phenomena in MEMS. *Int. J. Mech. Sci.* *46*, 1571–1587.

Libersky, L.D., Petschek, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R., and Allahdadi, F.A. (1993). High Strain Lagrangian Hydrodynamics: A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response. *J. Comput. Phys.* *109*, 67–75.

Linde, F., and Sørensen, H.C.F. (1993). The effect of different storage methods on the mechanical properties of trabecular bone. *J. Biomech.* *26*, 1249–1252.

LIU, G.R., and GU, Y.T. (2001). A LOCAL RADIAL POINT INTERPOLATION METHOD (LRPIM) FOR FREE VIBRATION ANALYSES OF 2-D SOLIDS. *J. Sound Vib.* *246*, 29–46.

Lotz, J.C., Gerhart, T.N., and Hayes, W.C. (1991). Mechanical properties of metaphyseal bone in the proximal femur. *J. Biomech.* *24*, 317–329.

Mayer, R., Enache-Pommer, E., Parsons, G., Mazor, M., Hansbro, J., Lastovica, J., Buck, C., and Maurer, M. (2014). Finite element thermal modeling and correlation of various building wall assembly systems. *Energy Build.* *75*, 410–418.

- McElhaney, J.H. (1966). Dynamic response of bone and muscle tissue. *J. Appl. Physiol.* *21*, 1231–1236.
- Misch, C.E., Qu, Z., and Bidez, M.W. (1999). Mechanical properties of trabecular bone in the human mandible: Implications for dental implant treatment planning and surgical placement. *J. Oral Maxillofac. Surg.* *57*, 700–706.
- Njiwa, R.K. (2016). The Local Point Interpolation–Boundary Element Method: Application to 3D Stationary Thermo-Piezoelectricity. *Int. J. Comput. Methods* *13*, 1650003.
- Park, H.C., and Lakes, R.S. (1986). Cosserat micromechanics of human bone: Strain redistribution by a hydration sensitive constituent. *J. Biomech.* *19*, 385–397.
- Providas, E., and Kattis, M.A. (2002). Finite element method in plane Cosserat elasticity. *Comput. Struct.* *80*, 2059–2069.
- Ramezani, S., Naghdabadi, R., and Sohrabpour, S. (2009). Constitutive equations for micropolar hyper-elastic materials. *Int. J. Solids Struct.* *46*, 2765–2773.
- Reilly, D.T., and Burstein, A.H. (1975). The elastic and ultimate properties of compact bone tissue. *J. Biomech.* *8*, 393–405.
- Rho, J.-Y., Tsui, T.Y., and Pharr, G.M. (1997). Elastic properties of human cortical and trabecular lamellar bone measured by nanoindentation. *Biomaterials* *18*, 1325–1330.
- Rho, J.-Y., Kuhn-Spearing, L., and Zioupos, P. (1998). Mechanical properties and the hierarchical structure of bone. *Med. Eng. Phys.* *20*, 92–102.
- Rohrbach, D., Lakshmanan, S., Peyrin, F., Langer, M., Gerisch, A., Grimal, Q., Laugier, P., and Raum, K. (2012). Spatial distribution of tissue level properties in a human femoral cortical bone. *J. Biomech.* *45*, 2264–2270.
- Rosenberg, J., and Cimrman, R. (2003). Microcontinuum approach in biomechanical modeling. *Math. Comput. Simul.* *61*, 249–260.
- Ruppel, M.E., Miller, L.M., and Burr, D.B. (2008). The effect of the microscopic and nanoscale structure on bone fragility. *Osteoporos. Int.* *19*, 1251–1265.
- Schwartz, M., Niane, N.T., and Kouitat Njiwa, R. (2012). A simple solution method to 3D integral nonlocal elasticity: Isotropic-BEM coupled with strong form local radial point interpolation. *Eng. Anal. Bound. Elem.* *36*, 606–612.
- Schwartz-Dabney, C.L., and Dechow, P.C. (2002). Variations in cortical material properties throughout the human dentate mandible. *Am. J. Phys. Anthropol.* *120*, 252–277.
- Sladek, J., and Sladek, V. (2003). Application of local boundary integral equation method into micropolar elasticity. *Eng. Anal. Bound. Elem.* *27*, 81–90.
- Sládek, V., and Sládek, J. (1985). Boundary element method in micropolar thermoelasticity. Part I: Boundary integral equations. *Eng. Anal.* *2*, 40–50.

Stoppie, N., Pattijn, V., Cleynenbreugel, T.V., Wevers, M., Sloten, J.V., and Ignace, N. (2005). Structural and radiological parameters for the characterization of jawbone. *Clin. Oral Implants Res.* 17, 124–133.

Thurieu, N., Kouitat Njiwa, R., and Taghite, M. (2014). The local point interpolation–boundary element method (LPI–BEM) applied to the solution of mechanical 3D problem of a microdilatation medium. *Eur. J. Mech. - ASolids* 47, 391–399.

Tjhia, C.K., Odvina, C.V., Rao, D.S., Stover, S.M., Wang, X., and Fyhrie, D.P. (2011). Mechanical property and tissue mineral density differences among severely suppressed bone turnover (SSBT) patients, osteoporotic patients, and normal subjects. *Bone* 49, 1279–1289.

Trädegård, A., Nilsson, F., and Östlund, S. (1998). FEM-remeshing technique applied to crack growth problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 160, 115–131.

Turner, C.H., Rho, J., Takano, Y., Tsui, T.Y., and Pharr, G.M. (1999). The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar: results from two microscopic measurement techniques. *J. Biomech.* 32, 437–441.

Vose GP, and Kubala AL (1959). Bone strength--its relationship to X-ray-determined ash content. *Hum. Biol* 261–270.

Wang, J.G., and Liu, G.R. (2002). On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191, 2611–2630.

Weiner, S., and Wagner, H.D. (1998). THE MATERIAL BONE: Structure-Mechanical Function Relations. *Annu. Rev. Mater. Sci.* 28, 271.

Wright, T.M., and Hayes, W.C. (1976). Tensile testing of bone over a wide range of strain rates: effects of strain rate, microstructure and density. *Med. Biol. Eng.* 14, 671.

Yau-Bin Yang (2007). Static and dynamic analysis of two-dimensional elastic continua by combined finite difference with distributed transfer function method :: University of Southern California Dissertations and Theses.

Yoon, H.S., and Lawrence Katz, J. (1976). Ultrasonic wave propagation in human cortical bone—II. Measurements of elastic properties and microhardness. *J. Biomech.* 9, 459–464.

Yvonnet, J. (2004). Nouvelles approches sans maillage basées sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme. phdthesis. Arts et Métiers ParisTech.

Zysset, P.K., Edward Guo, X., Edward Hoffler, C., Moore, K.E., and Goldstein, S.A. (1999). Elastic modulus and hardness of cortical and trabecular bone lamellae measured by nanoindentation in the human femur. *J. Biomech.* 32, 1005–1012.

## Annexe 1 :

Les quadrangles à 9 nœuds :

$$N_1(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \xi)\eta\xi$$

$$N_2(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(-1 - \eta)(1 - \xi)\eta\xi$$

$$N_3(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi)\eta\xi$$

$$N_4(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(-1 + \eta)(1 + \xi)\eta\xi$$

$$N_5(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(-1 + \eta^2)(1 - \xi)\xi$$

$$N_6(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(1 + \eta)(1 - \xi^2)\eta$$

$$N_7(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi)\xi$$

$$N_8(\eta, \xi) = \frac{1}{2}(-1 + \eta)(1 - \xi^2)\eta$$

$$N_9(\eta, \xi) = (1 - \eta^2)(1 - \xi^2)$$





**Titre :** Interaction implant – os élastique micropolaire : une investigation numérique

**Résumé :** La réparation de l'humain est un secteur d'activité qui nécessite les compétences en sciences médicales et sciences dites « dures ». Dans de nombreux cas, tout ou partie d'un organe doit être remplacé par un substitut en matériau inerte. C'est par exemple le cas en implantologie où l'on s'intéresse au remplacement de dents. La pose d'un implant dentaire est un acte chirurgical qui consiste à introduire dans l'os de la mandibule un dispositif en matériau inerte destiné à recevoir la couronne dentaire. Ces prothèses sont plus ou moins tolérées par l'organisme vivant (environ 5% de rejet) et peuvent dans certains cas conduire à une ruine de l'os ou engendrer des infections connues sous le nom de péri-implantite. Pour améliorer la biocompatibilité de ces dispositifs médicaux, plusieurs pistes sont explorées. On peut s'intéresser à la géométrie de l'implant et son état de surface, au matériau de l'implant ou bien au système mécanique implant - os. C'est dans ce dernier cadre que nous avons situé notre travail de thèse.

Le système os/dent est un système mécanique soumis à des sollicitations répétées de forte intensité. Les niveaux de contrainte et de déformation atteints lors de la mastication participent à la stabilité de l'ensemble et la viabilité de ces milieux vivants. Ces niveaux de contrainte et de déformation doivent être reproduits dans l'os dans le cas du système implant - os. On espère ainsi assurer la viabilité de l'os et éviter les divers processus de dégradation. Il convient donc de simuler et analyser la réponse d'un tel système à des sollicitations mécaniques. Ce travail nécessite la modélisation du comportement de l'os et de l'implant. Ce dernier est considéré comme un matériau métallique classique sollicité dans son domaine de déformation élastique. Pour ce qui est l'os, son observation fine révèle sa nature multi-échelle et nous avons choisi de modéliser son comportement par une particularisation du milieu micromorphique de Eringen. Plus précisément nous l'avons considéré comme un milieu élastique micropolaire. Pour résoudre les équations de champs du problème, il a été nécessaire de développer un outil numérique spécifiquement dédié. Cet outil est basé sur une combinaison astucieuse de la méthode des éléments de frontières et d'une méthode sans maillage (meshless), plus précisément une méthode de collocation par points.

Dans un premier temps, afin de comprendre le principe de la méthode, nous avons développé l'outil numérique pour résoudre une équation de champ scalaire, ici équation de la conduction thermique transitoire. Nous avons pu constater l'efficacité de la méthode pour des systèmes en trois dimensions. Dans un second temps nous avons adapté notre méthode numérique pour résoudre des équations de champ vectoriel qui sont dans notre cas les équations pour les milieux élastiques micropolaires. L'outil numérique a été validé sur un nombre d'exemples possédant une solution analytique ou en comparaison aux résultats de la littérature sur d'autres types de problèmes. L'outil a ensuite été appliqué à l'analyse du système implant - os. Pour comprendre l'apport de la microstructure d'un milieu élastique micropolaire, en comparaison à un milieu élastique classique, nous avons fait différentes études du système implant - os sous sollicitations mécaniques diverses en considérant les deux types de modélisation pour l'os. Les paramètres macroscopiques pour un milieu élastique micropolaire sont les mêmes que pour un milieu élastique classique. Les différences obtenues ne proviendront que de l'apport de la microstructure. Les résultats obtenus montrent que la modélisation fine du comportement mécanique adoptée pour l'os est réaliste au regard des contraintes induites par la sollicitation et à la diminution notable des sauts de contraintes à l'interface os/métal comparé au cas de la modélisation de l'os comme un milieu élastique classique. Ces résultats ont d'ores et déjà permis de comprendre certaines observations cliniques.

**Title:** Interaction implant - elastic micropolar bone: a digital investigation

**Abstract:** The repair of the human is a sector of activity which requires skills in medical sciences and sciences known as "hard". In many cases, all or part of an organ must be replaced by a substitute made of inert material. This is for example the case in implantology where one is interested in the replacement of teeth. The installation of a dental implant is a surgical act which consists in introducing into the bone of the mandible a device made of inert material intended to receive the dental crown. These prostheses are more or less tolerated by the living organism (about 5% of rejection) and can in some cases lead to a bone ruin or cause infections known as peri-implantitis. To improve the biocompatibility of these medical devices, several tracks are explored. We can focus on the geometry of the implant and its surface condition, the material of the implant or the mechanical bone / implant system. It is in this last frame that we located our work of thesis.

The bone / tooth system is a mechanical system subject to repeated intense stress. The levels of stress and deformation achieved during chewing contribute to the overall stability and viability of these living media. These stress and strain levels must be reproduced in the bone in the case of the bone / implant system. It is hoped to ensure the viability of the bone and to avoid the various processes of degradation. It is therefore necessary to simulate and analyze the response of such a system to mechanical stresses. This work requires modeling the behavior of the bone and the implant. The latter is considered as a conventional metallic material stressed in its field of elastic deformation. As for the bone, its fine observation reveals its multi-scale nature and we have chosen to model its behavior by a particularization of Eringen's micromorphic environment. More precisely we have considered it as a micropolar elastic medium. To solve the field equations of the problem, it was necessary to develop a dedicated digital tool. This tool is based on a clever combination of the boundary element method and a meshless method, more precisely a collocation method.

At first, in order to understand the principle of the method, we developed the numerical tool to solve a scalar field equation, here equation of transient thermal conduction. We have seen the effectiveness of the method for three-dimensional systems. In a second time we adapted our numerical method to solve vector field equations which are in our case the equations for the micropolar elastic media. The digital tool has been validated on a number of examples having an analytical solution or in comparison with the results of the literature. The digital tool was then applied to the analysis of the bone / implant system. To understand the contribution of the microstructure of a micropolar elastic medium, compared to a conventional elastic medium, we made different studies of the implant / bone system under various mechanical stress considering both types of modeling for the bone. The macroscopic parameters for a micropolar elastic medium are the same as for a conventional elastic medium. The differences obtained will come only from the contribution of the microstructure. The results obtained show that the fine modeling of the mechanical behavior adopted for the bone is realistic with regard to the stresses induced by the stress and to the noticeable decrease of the stress jumps at the bone / metal interface compared to the case of the modeling of the equivalent classic elastic medium. These results have already made it possible to understand certain clinical observations.