



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation 3D du champ électromagnétique dans les supraconducteurs à haute température critique

Mohamad Farhat

► **To cite this version:**

Mohamad Farhat. Contribution à la modélisation 3D du champ électromagnétique dans les supraconducteurs à haute température critique. Energie électrique. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT: 2019LORR0083 . tel-02351551

**HAL Id: tel-02351551**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02351551v1>**

Submitted on 6 Nov 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

## Thèse

*Présentée pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'Université de Lorraine  
en Génie Electrique  
par Mohamad FARHAT*

# **Contribution à la modélisation 3D du champ électromagnétique dans les supraconducteurs à haute température critique**

*Soutenance publique le 27 Septembre 2019 devant le jury composé de :*

<b>Président</b>	M. Didier TRICHET	Professeur, Université de Nantes
<b>Rapporteurs</b>	M. Jean Frédéric CHARPENTIER	Maître de Conférences - HDR, Ecole Navale
	M. Claude MARCHAND	Professeur, Université Paris-Sud
<b>Directeurs de thèse</b>	Mme. Melika HINAJE	Professeur, Université de Lorraine
	M. Hocine MENANA	Maître de Conférences, Université de Lorraine





# Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé pendant l'élaboration de ma thèse et notamment ma directrice Madame le professeur HINAJE Melika, pour son intérêt, son soutien, et ses nombreux conseils. Je tiens aussi à remercier mon directeur de thèse Monsieur MENANA Hocine, Maître de conférences à l'Université de Lorraine, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit aussi remercié pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigué.

Je tiens aussi à remercier Monsieur TRICHET Didier, Professeur à l'Université de Nantes d'avoir accepté de présider le jury. J'exprime ma gratitude à Monsieur CHARPENTIER Jean Frédéric, Maître de Conférences - HDR, à l'Ecole Navale, et à Monsieur MARCHAND Claude, Professeur à l'Université Paris-Sud, qui ont bien voulu être rapporteurs.

Je remercie toutes les personnes qui ont répondu positivement, lors d'une rencontre ou simplement suite à un échange par mail, lorsque je leur demandais de me fournir une référence, un article ou tout autre document qui pouvait faire avancer mes recherches et qui n'était pas accessible d'une autre manière. Je tiens ainsi à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail et qui n'ont pas pu être cités ici.

J'adresse tous mes remerciements à la famille de GREEN, Groupe de Recherche en Energie Electrique de Nancy ; de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être l'un de ses membres. Un grand merci aussi à tous les membres de l'école doctorale IAEM.

Ces remerciements seraient incomplets si je n'en adressais pas à mes amis libanais à Nancy pour leur soutien logistique et moral, ainsi que pour la très bonne ambiance que j'ai toujours trouvée au centre de nos réunions et soirées.

A savoir, mes remerciements ne vont ni à Sara NAHLE, qui m'a fait peur de la soutenance et qui m'a volé la chicha à chaque fois que j'en avait besoin, ni à Hassan KHODER, qui m'a découragé et m'a démoralisé, ni à Ziad HASSAN qui m'a fait oublier le speech avec ses chansons 5 minutes avant ma soutenance, ni à Wael MKANNA, qui m'a fait perdre beaucoup de temps à chaque fois que je lui parle, ni à Abbas-Mohamad ALI qui m'a embêté avec ses déjeuners souvent fatiguant à préparer, et ni à Yazid STATRA qui m'a fait crier à chaque discussion scientifique. Je vous aime beaucoup.

Je voudrais aussi remercier mon père et ma famille pour leur soutien durant ces années de doctorat, c'est grâce à eux que j'ai pu concilier avec bonheur mes recherches pendant cette thèse. J'adresse aussi mille mercis à la plus belle fille du monde Jana JABER, le petit lapin qui m'a encouragé tout au long de cette thèse.

Enfin, j'ai une pensée toute particulière pour celle sans qui je ne serai pas là, qui me soutient depuis plus de vingt-huit ans dans tous mes projets et qui n'a pas émis le moindre doute le jour où je lui ai dit que je recommençais mes études dans une toute nouvelle branche.

Merci Maman !

# Table des matières

<b>LISTE DES SYMBOLES .....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>5</b>
<b>Chapitre I. Les supraconducteurs et leur modélisation électromagnétique .....</b>	<b>7</b>
Introduction .....	7
I.1 Propriétés générales .....	7
I.1.1 Les supraconducteurs de type I et de type II .....	9
I.1.2 Comportements électrique et magnétique des supraconducteurs de type II .....	10
I.1.3 Pertes dans les supraconducteurs de type II .....	16
I.1.4 Aspects techniques et applications .....	16
I.2 Etat de l'art de la modélisation électromagnétique des supraconducteurs .....	19
I.2.1 Rappel des équations de Maxwell .....	20
I.2.2 Les différentes formulations du problème électromagnétique .....	20
I.2.3 Méthodes de résolution .....	23
Conclusion .....	25
<b>Chapitre II. Formulation et mise en œuvre du modèle numérique .....</b>	<b>27</b>
Introduction .....	27
II.1 Système modélisé .....	28
II.2 Formulation du problème .....	29
II.3 Discrétisation et mise en œuvre du modèle numérique .....	32
II.3.1 Méthode des différences finies .....	32
II.3.2 Méthode de collocation .....	33
II.3.3 Discrétisations du domaine d'étude .....	34



II.3.4 Discrétisation de la formulation et construction des matrices .....	36
II.4 Résolution du système matriciel .....	37
II.5 Résolution dans le domaine fréquentiel en se limitant au premier harmonique dans le cas d'une excitation sinusoïdale .....	40
Conclusion .....	41
<b>Chapitre III. Applications en vue de la validation du modèle .....</b>	<b>43</b>
Introduction .....	43
III.1 Pertes AC dans un ruban composite multi filamentaires soumis à un champ magnétique externe, à variation sinusoïdale dans le temps .....	44
III.1.1 Description du système modélisé .....	44
III.1.2 Résultats et validation .....	46
III.2 Calcul des pertes AC dans un cube supraconducteur isotrope soumis à un champ magnétique externe, à variation sinusoïdale dans le temps .....	51
III.2.1 Description du système modélisé .....	51
III.2.2 Résultats et validation .....	53
III.3 Etude de l'influence du paramètre de fluage (n) sur le temps de calcul .....	59
Conclusion .....	60
<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>61</b>
<b>ANNEXE A. ALGORITHMES DE CONSRUCTION DES DIFFERENTES MATRICES .....</b>	<b>63</b>
<b>ANNEXE B. METHODE DE NEWTON RAPHSON AVEC UN FACTEUR D'AMORTISSEMENT</b>	<b>68</b>
<b>ANNEXE C. MODELE ANALYTIQUE DE CAMPBELL .....</b>	<b>71</b>
<b>ANNEXE D. EVOLUTION DES PERTES AC SUITE AU FRACTIONNEMENT D'UN CUBE SUPRACONDUCTEUR .....</b>	<b>72</b>
<b>REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES .....</b>	<b>75</b>
<b>RESUME .....</b>	<b>81</b>

# LISTE DES SYMBOLES

$B$	[T]	Induction magnétique
$B_m$	[T]	Amplitude de l'induction magnétique
$B^e$	[T]	Champ magnétique appliqué
$B_{//}$	[T]	Composante du champ magnétique parallèle au plan
$B_{\perp}$	[T]	Composante du champ magnétique perpendiculaire au plan
$H$	[A/m]	Champ magnétique
$H_{c1}$	[A/m]	Premier champ magnétique critique
$H_{c2}$	[A/m]	Second champ magnétique critique
$H_p$	[A/m]	Champ de pénétration
$H_c$	[A/m]	Champ magnétique critique
$E$	[V/m]	Champ électrique
$E_c$	[V/m]	Champ électrique critique
$M$	[A/m]	Aimantation
$f$	[Hz]	Fréquence
$\sigma$	[S/m]	Conductivité électrique
$\overline{\sigma}$	[S/m]	Tenseur de conductivité électrique
$D$	[C/m <sup>2</sup> ]	Induction électrique
$\rho$	[C/m <sup>3</sup> ]	Densité volumique de charge électrique
$J$	[A/m <sup>2</sup> ]	Densité de courant
$J^s$	[A/m <sup>2</sup> ]	Densité de courant source

$J_c$	$[A/m^2]$	Densité de courant critique
$J_{c0}$	$[A/m^2]$	Densité de courant critique pour $B = 0$
$T$	$[K]$	Température
$T_c$	$[K]$	Température critique
$\mu_0$	$[H/m]$	Perméabilité du vide
$n$	$[-]$	Exposant de la loi en puissance, ou « paramètre de fluage »
$n_0$	$[-]$	Exposant de la loi en puissance pour un champ magnétique nul

### ***Acronymes et Symboles utilisés***

SHT	Supraconducteurs à haute température critique
SBT	Supraconducteurs à Basse Température Critique
BSCCO	Supraconducteur à base de bismuth, de strontium, de calcium et d'oxydes de cuivre
YBCO	Supraconducteur à base d'yttrium, de baryum et d'oxydes de cuivre
S-Type-I	Supraconducteur de type I
S-Type-II	Supraconducteur de type II
CFRP	Matériaux composites à fibres de carbone
AC	Courant alternatif
3D	Tridimensionnel " en trois dimensions "
DF	Différences finies

NR	Newton Raphson
R&R	Reconditionnement et Relaxation
$\Delta_x, \Delta_y, \text{ et } \Delta_z$	Pas dans l'espace suivant les 3 axes $x, y, \text{ et } z$
$\Delta t$	Pas de temps
$\alpha$	Facteur de relaxation
$\beta$	Facteur d'amortissement



# Introduction générale

Depuis leur découverte, en 1911, les recherches sur les supraconducteurs n'ont cessé d'évoluer dans leurs aspects théorique et technique. L'avancement dans le domaine de développement des supraconducteurs a été réalisé en 1986, à la découverte des supraconducteurs à haute température critique HTC, qui a ouvert de nouveaux champs d'application, en particulier dans le domaine de l'énergie électrique, et réduisait leur coût en termes de refroidissement, étant refroidi à l'azote liquide.

Ces matériaux supraconducteurs présentent des propriétés physiques particulières qui exigent des approches de modélisation spatio-temporelle fines, où les méthodes classiques trouvent rapidement leurs limites en termes de convergence, de précision et de temps de calcul. Ce dernier peut être très conséquent, ce qui est incompatible avec les problèmes de dimensionnement et d'optimisation. Pour cela on s'intéresse à développer des outils de calcul pour la modélisation des dispositifs supraconducteurs en 3D permettant de calculer les différentes grandeurs électromagnétiques, dans des temps raisonnables.

Le travail mené durant cette thèse a pour objectif de développer des approches de modélisation rapides pour le dimensionnement et l'optimisation des systèmes supraconducteurs. Nous nous sommes particulièrement intéressés au calcul des pertes dans les matériaux HTC. Un intérêt particulier est porté pour les méthodes d'intégrales qui permettent de limiter le domaine d'étude aux parties actives du système modélisé. Les verrous scientifiques à lever, qui constituent également l'originalité du travail, résident dans l'intégration des lois de comportement  $E(J)$  des supraconducteurs dans les schémas numériques de ce type de méthodes.

Notre démarche s'est déroulée en trois étapes :

Tout d'abord, afin de mieux cerner les particularités des matériaux supraconducteurs, un bref résumé concernant leurs caractéristiques, et leurs lois de comportement est présenté. On présente également les différentes formulations existantes et les méthodes de résolution utilisées pour la modélisation du champ électromagnétique dans ces matériaux.

Le chapitre qui suit décrit le système étudié, avec les hypothèses de travail, la formulation choisie, ainsi que la méthode de résolution et l'implémentation du modèle. Nous expliquerons plus en détail le choix de la formulation intégral-différentielle en termes du potentiel vecteur électrique, en prenant en compte la non-linéarité de la loi de comportement  $E(J)$ , reliant la densité de courant électrique au champ électrique, dans les deux domaines fréquentiel et temporel. La discrétisation de la formulation sera faite en utilisant la méthode de différences finies et la méthode de collocation, où seules les parties actives sont discrétisées, et, par conséquent, les aspects multi-échelles du problème deviennent facilement traitables. Un conditionnement et une relaxation du système matriciel sont proposés afin d'améliorer la convergence du modèle. Un algorithme de Newton Raphson avec facteur d'amortissement est également appliqué pour accélérer la résolution.

Enfin, dans le dernier chapitre, l'évaluation de la précision et les performances du modèle proposé sont discutées. Pour cela deux cas d'étude sont traités :

- Le premier cas d'étude concerne le calcul des pertes dans un ruban multifilamentaire supraconducteur soumis à un champ magnétique externe uniforme. Dans ce cas, nous disposons d'un modèle analytique qui servira de référence pour la validation du modèle développé.
- Le second cas d'étude concerne le calcul des pertes dans un cube supraconducteur homogène soumis à un champ magnétique externe uniforme. Pour ce cas d'étude, nous disposons de résultats publiés auxquels nous comparons ceux obtenus par le modèle développé.

# Chapitre I

## Les supraconducteurs et leur modélisation électromagnétique

### Introduction

Depuis leur découverte, en 1911, les recherches sur les supraconducteurs n'ont cessé d'évoluer dans leurs aspects théorique et technique. Même si les phénomènes mis en jeu à l'échelle microscopique restent encore ambigus, leurs développements techniques et leurs applications ont beaucoup évolués ces dernières années, notamment après la découverte des supraconducteurs à haute température critique (SHT) en 1986. La découverte des SHT a ouvert de nouveaux champs d'application, en particulier dans le domaine de l'énergie électrique. Cependant, des verrous techniques limitent encore l'intégration de ses matériaux dans la conversion de l'énergie. Ces verrous sont liés à leurs propriétés électromagnétiques et structurelles particulières que nous rappelons de manière succincte dans la première partie de ce chapitre. La seconde partie sera consacrée à l'état de l'art des différentes approches de modélisation électromagnétique de ces matériaux, qui ont la particularité de présenter une forte sensibilité à leur environnement électromagnétique, ce qui exige des approches de modélisation à grandeurs locales, rendant l'utilisation des méthodes numériques indispensable dans la plupart des cas.

### I.1 Propriétés générales

En 1911, le physicien néerlandais Heike Kamerling Onnes découvre que certains éléments présentent un changement brusque de leurs propriétés physiques quand on les refroidit à des températures extrêmement basses, proches du zéro absolu. En particulier, la résistance électrique de ces matériaux devient inférieure à toute valeur mesurable, de sorte qu'un courant électrique continu peut y circuler sans dissipation d'énergie, et, par conséquent quasi indéfiniment. On parle de transition de l'état normal (dissipatif) à l'état supraconducteur. A



l'état normal, les supraconducteurs présentent une résistivité électrique généralement plus élevée que celle des conducteurs classiques (Fig. I.1-a). En 1933, Meissner et Ochsenfeld ont mis en évidence l'absence de flux magnétique à l'intérieur des matériaux supraconducteurs, pour des champs appliqués de faibles amplitudes; on parle alors de diamagnétisme parfait, ou d'effet Meissner (Fig. I.1-b). Ces phénomènes interviennent à des températures inférieures à une certaine valeur qu'on appelle température critique ( $T_c$ ).

Les supraconducteurs fonctionnant à des  $T_c$  inférieures à  $30K$  sont appelés Supraconducteurs à Basse Température Critique (*SBT*); au-delà, ils sont appelés Supraconducteurs à Haute Température Critique (*SHT*).

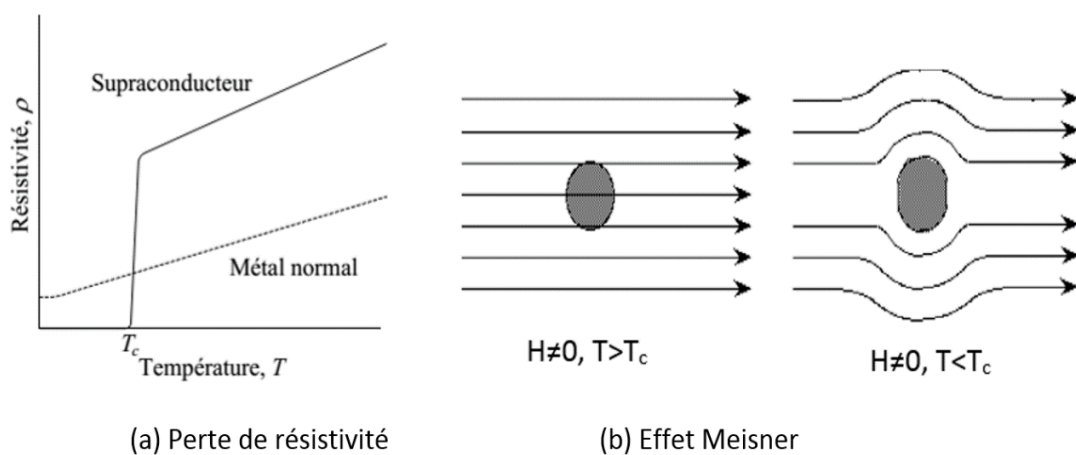


Fig. I.1 Illustration de la perte de résistivité et de l'effet Meissner des supraconducteurs en dessous de la température critique

A la température critique s'ajoutent deux autres grandeurs qui définissent la transition d'état 'supraconducteur – normal', qui sont le champ magnétique critique ( $H_c$ ) et la densité de courant critique ( $J_c$ ). Les trois grandeurs sont interdépendantes les unes des autres pour former une surface critique définissant l'état supraconducteur (Fig. I.2).

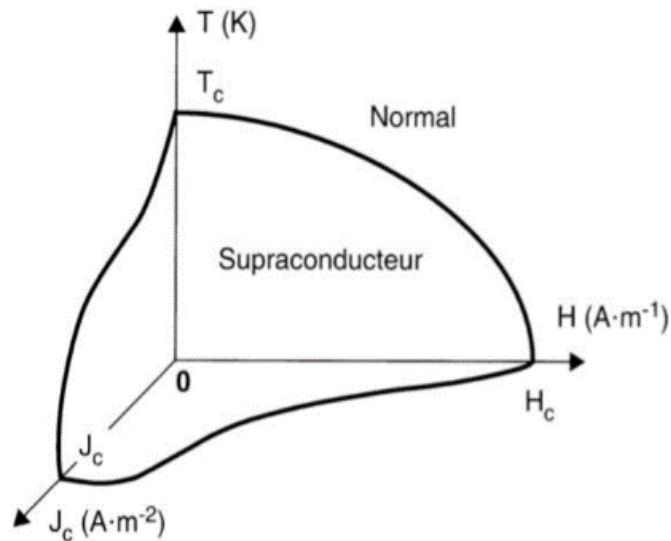


Fig. I.2 Etat supraconducteur et grandeurs critiques [Baixeras, 1998]

### I.1.1 Les supraconducteurs de type I et de type II

De la dépendance au champ magnétique, on distingue deux types de supraconducteurs : les supraconducteurs de type I que nous appellerons « S-Type-I », et les supraconducteurs de type II que nous appellerons « S-Type-II ». L'état supraconducteur dans les S-Type-I disparaît avec la disparition de l'effet Meisner, dès que le champ magnétique dépasse sa valeur critique. Les S-Type-II gardent leur état supraconducteur après la disparition de l'effet Meisner. Ils sont caractérisés par deux champs critiques  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$ . Entre les deux, le matériau est à l'état mixte, où le matériau est traversé par le champ magnétique dans des canaux qu'on appelle vortex. Chaque vortex est un cylindre constitué d'un cœur à l'état normal acheminant un quantum de flux magnétique de  $2.07 \times 10^{-15}$  Weber, entouré par des courants supraconducteurs tourbillonnaires. Le nombre de vortex par unité de surface est proportionnel au champ appliqué. Si les vortex sont libres de se déplacer dans le matériau, ils vont former un réseau triangulaire «réseau d'Abrikosov» [Dao, 2006]. Le champ critique  $H_{c1}$  est généralement plus faible que le champ critique des S-Type-I. Le champ critique  $H_{c2}$  est atteint lorsque les vortex occupent pratiquement toute la surface du matériau. Ce dernier peut être très élevé, de telle sorte que  $\mu_0 H_{c2} > 100T$  à  $4^\circ K$ , dans certains matériaux.

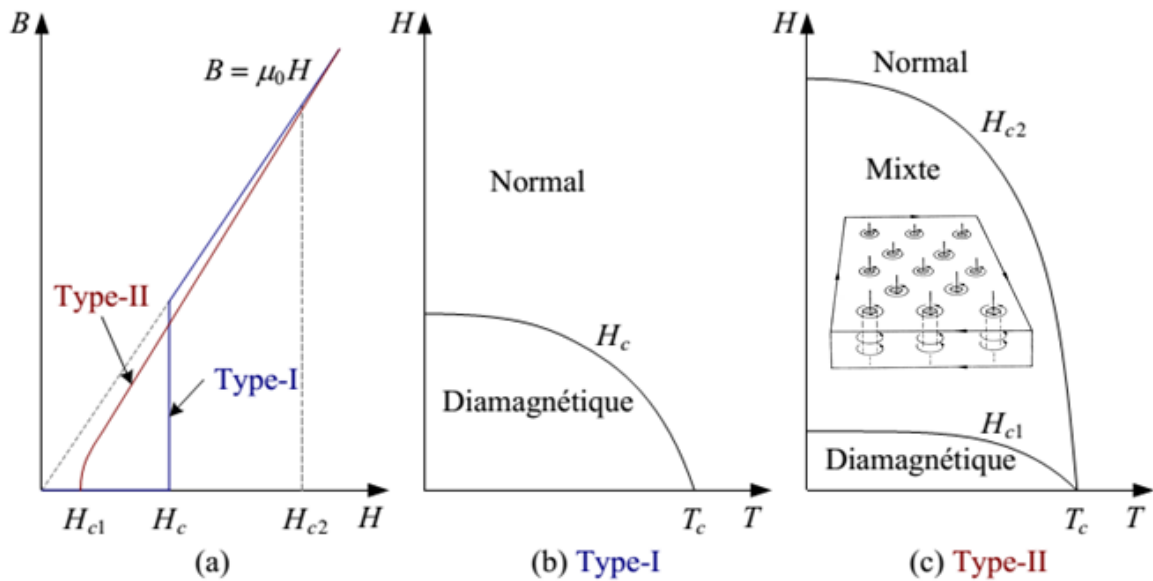


Fig. 1.3 Changement d'état dans les supraconducteurs de type I et de type II [Berger, 2006]

Le courant critique dans un S-Type-I est le courant qui crée le champ magnétique critique à sa surface (Règle de Silsbee) [Tixador et al., 2003]. Ce courant circule essentiellement sur la périphérie, et, il est d'une valeur généralement faible, étant donnée la faible valeur du champ critique. Ces matériaux ne présentent, de ce fait, aucun intérêt pour les applications en énergie électrique. Ainsi, dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'aux S-Type-II.

### 1.1.2 Comportements électrique et magnétique des supraconducteurs de type II

- Relation  $E(J)$

Le courant critique dans les supraconducteurs de type II est directement lié à la force qu'il exerce sur les vortex. Si cette force met en mouvement les vortex, un champ électrique sera créé, et sera à l'origine d'une dissipation de puissance dans le matériau. Pour augmenter cette force, et de ce fait augmenter la densité de courant critique, on introduit des défauts structurels dans le matériau pour ancrer les vortex (flux pinning) [Douine, 2001].

L'apparition du champ électrique suit un processus non linéaire. Pour les faibles valeurs de la densité de courant, un faible champ électrique est généré par les mouvements du réseau cristallin (agitation thermique), en augmentant la densité de courant, on passe par une phase

de fluage de flux (flux creep) ; dans cette phase, le champ électrique généré commence à devenir important, et, en augmentant davantage la densité de courant, la force exercée sur les vortex dépasse la force d'ancrage, et les vortex se mettent en mouvement créant un état encore plus dissipatif d'énergie (Fig. I.4) .

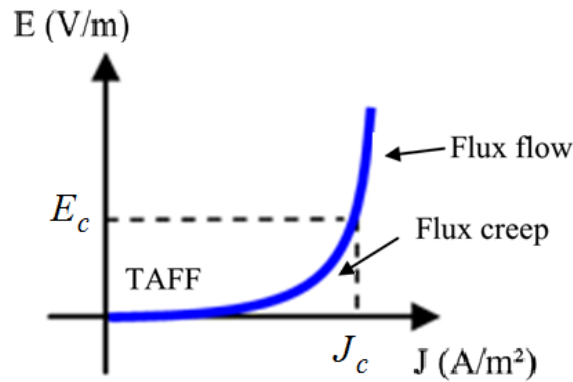


Fig. I.4 Relation E(J) dans un supraconducteur de type II

La zone de fluage (Flux creep) est généralement modélisée par une loi de puissance :

$$E = E_c \left( \frac{J}{J_c(B, T)} \right)^{n(B, T)} \quad (I. 1)$$

L'exposant «n» désigne la raideur de la courbe. Il est compris entre 5 et 25 pour les SHT, et généralement de valeur plus importante dans les SBT. Par convention, la densité de courant critique est celle qui génère un champ critique de 1μV/cm dans les SHT, et de 0.1μV/cm dans les SBT qui transitent de manière plus brutale [Vinot, 2000]. Comme l'illustre la relation I.1, la densité de courant critique et l'exposant n dépendent de la température et du champ magnétique dans lequel baigne le matériau.

Pour les valeurs élevées de l'exposant (n), en raison de la transition brutale du supraconducteur, un modèle tout ou rien est parfois utilisé, où le paramètre n est considéré comme infini. Ainsi, la relation E(J) devient :

$$\vec{J} = J_c(B) \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|} \quad (I. 2)$$

La densité de courant ne peut prendre, dans ce cas, que trois valeurs :  $J_c$ , 0 et  $-J_c$ . Cette relation s'appelle « Modèle de l'état critique de Bean ».

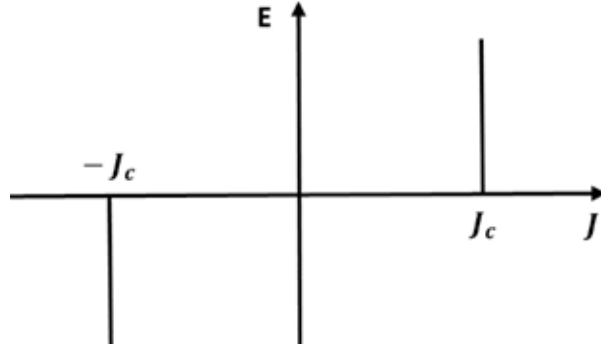


Fig. I.5 modèle de Bean

Le premier modèle décrivant la relation  $J_c(B)$  fut proposé par Y. Kim [Kim, 1962] :

$$J_c(B) = \frac{J_{c_0}}{1 + \|B\|/B_0} \quad (I.3)$$

Où :  $J_{c_0}$  est la densité de courant critique à champ nul, et  $B_0$  est une constante dépendant du matériau.

Ce modèle ne tient pas compte de l'orientation du champ magnétique, et, de ce fait, il ne convient pas à la modélisation des supraconducteurs anisotropes. Ainsi, d'autres modèles ont été proposés dans la littérature pour tenir compte du caractère anisotrope de la dépendance au champ magnétique de  $J_c$  et du paramètre  $n$  [Dutoit, et al. 1999 ; Sta02a, 2002 ; Sta03, 2003 ; Safran et al., 2010; Willis et al., 2011]. Le modèle le plus simple, impliquant le moins de paramètres à identifier est formulé comme suit [Safran et al., 2010; Willis et al., 2011] :

$$\begin{cases} J_c(B_{\perp}, B_{//}) = \frac{J_{c_0}}{(1 + B_{j_0}^{-1} \sqrt{k^2 B_{//}^2 + B_{\perp}^2})^{\beta}} \\ n(B_{\perp}, B_{//}) = \frac{n_0}{(1 + B_{n_0}^{-1} \sqrt{k^2 B_{//}^2 + B_{\perp}^2})^{\beta}} \end{cases} \quad (I.4)$$

Où :  $B_{//}$  et  $B_{\perp}$  sont respectivement les composantes du champ magnétique parallèle et perpendiculaire au plan du supraconducteur (Fig. 1.6),  $B_{J_0}$  et  $B_{n_0}$  sont des constantes de normalisation et  $(k, \beta)$  sont des paramètres à identifier du modèle.  $J_{c_0}$  et  $n_0$  sont respectivement la densité de courant critique et l'exposant de la loi en puissance pour un champ magnétique nul.

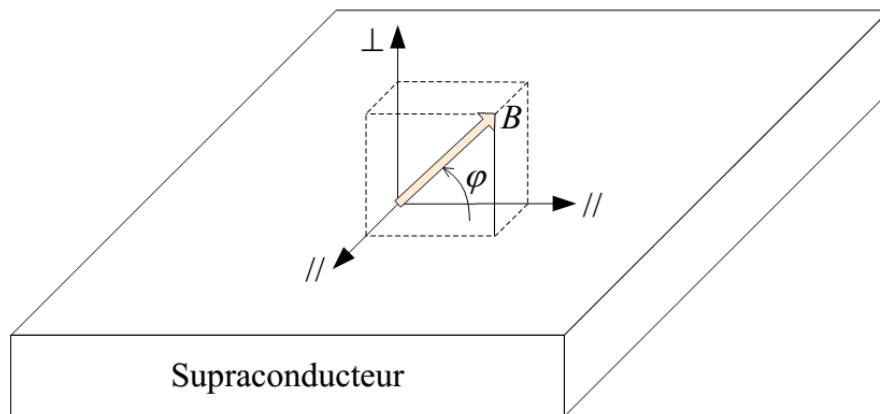


Fig. 1.6 Orientation du champ magnétique appliqué à un supraconducteur [Berger, 2006]

Les dépendances en température de  $J_c$  et du paramètre  $n$  peuvent être décrites par le modèle suivant [Berger, 2006] :

$$\begin{cases} J_c(T) = J_c(T_0) \left( \frac{1 - T/T_c}{1 - T_0/T_c} \right)^\alpha & \text{pour } (T_0 \leq T \leq T_c) \\ n(T) = n(T_0) \frac{T_0}{T} \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $T_0$  est la température de l'enceinte cryogénique,  $J_c(T_0)$  et  $n(T_0)$  sont les valeurs de la densité de courant critique et du paramètre  $n$  à la température  $T_0$ , et  $\alpha$  est un paramètre d'adaptation aux données expérimentales.

- Relation B(H)

Les S-Type-II se comportent comme des diamagnétiques parfaits lorsque le champ magnétique appliqué est inférieur à  $H_{c1}$ , et comme des paramagnétiques, au-delà, caractérisés par la perméabilité du vide,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ , (Fig. 1.7).

$$\begin{cases} B = 0 & \text{pour } (H < H_{c1}) & (a) \\ B = \mu_0 H & \text{pour } (H > H_{c1}) & (b) \end{cases} \quad (I.6)$$

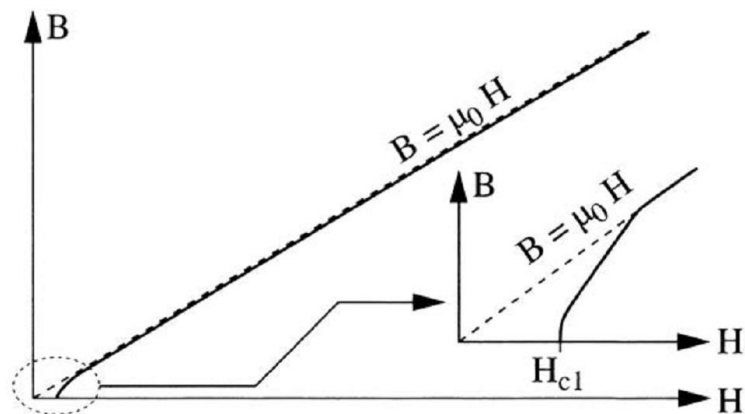


Fig. 1.7. Relation B(H) d'un supraconducteur de type II [Duron, et al 2006]

Dans la plupart des cas pratiques, les niveaux de champ magnétiques sont généralement très supérieurs à  $H_{c1}$ , et, de ce fait, la relation B(H) de ces matériaux est généralement modélisés par la relation I.6-(b).

En réalité, dès qu'un S-type-II est soumis à un champ magnétique, il développe des courants d'écrantage, qui se développent à partir de la surface, créant une aimantation dans le matériau. Il en résulte une répartition non homogène du champ magnétique dans le matériau. En effet, le champ n'existera que dans les parties où circulent les courants d'écrantage (Fig. 1.8). La relation locale du champ magnétique est donc :  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , où  $\vec{M}$  est l'aimantation créé par les courants d'écrantage.

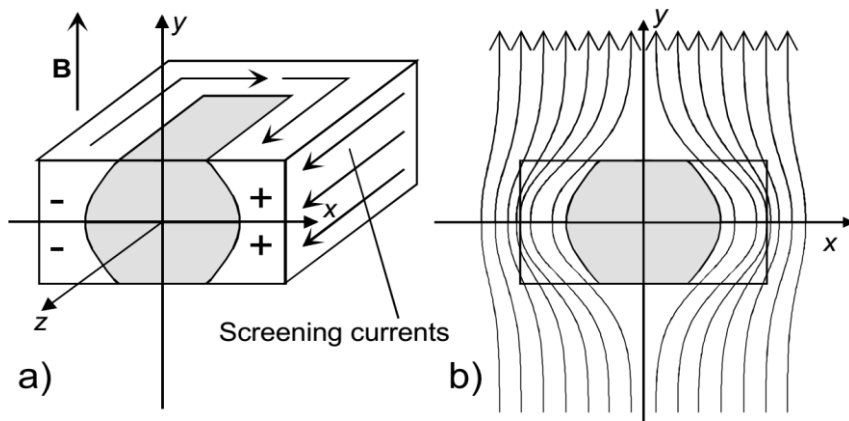


Fig. 1.8. (a) Courants d'écrantage et (b) répartition du champ magnétique dans un S-Type-II [Oomen, 2000]

Etant donné que le matériau ne change d'état magnétique qu'à partir de la surface, en régime variable, il en résulte un phénomène d'hystérésis magnétique dans ce dernier, illustré dans l'exemple de la figure 1.9, qui décrit le processus de piégeage de courants (magnétisation) d'un supraconducteur de forme cylindrique. Dans la figure 1.9,  $H_p$  désigne le champ de pénétration. A cette valeur du champ appliqué, le champ magnétique pénètre complètement le matériau.

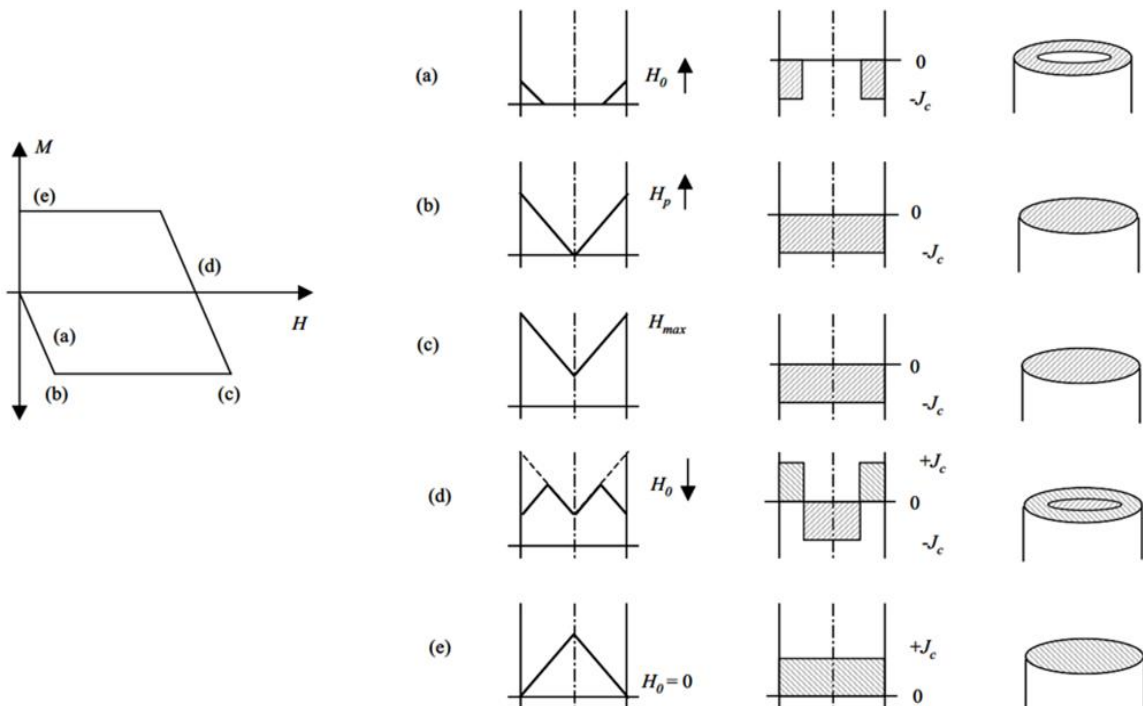


Fig. 1.9 Magnétisation d'un S-Type-II [Eunguk Lee, 2004]



### I.1.3 Pertes dans les supraconducteurs de type II

L'existence simultanée d'un champ électrique et d'une densité de courant dans le supraconducteur donne lieu à des pertes, dont la densité volumique ( $P_v$ ) s'exprime comme suit :

$$P_v = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (I.7)$$

En régime continu, et pour des densités de courants inférieures à  $J_c$ , ces pertes sont négligeables ; elles deviennent importantes à l'approche du régime critique et au-delà. Ces pertes résultent du déplacement des vortex et dépendent fortement des propriétés d'ancrage du matériau, et de la température de fonctionnement qui met à contribution l'agitation thermique des vortex [Berger, 2006].

En alternatif, les pertes sont plus importantes, en raison de la variation temporelle du champ magnétique (propre ou appliqué) qui contribue à la création du champ électrique dans le matériau (Loi de Maxwell-Faraday). On distingue trois types de pertes : les pertes résistives ( $P_R$ ) les pertes par hystérésis ( $P_H$ ) qui sont proportionnelle à la fréquence, et les pertes par courants de Foucault ( $P_{CF}$ ) qui sont proportionnelles au carré de la fréquence [Grilli, et al., 2014].

$$P_{Tot} = P_R + P_H + P_{CF} \quad (I.8)$$

En champ propre (courant de transport), les pertes par hystérésis sont généralement prédominantes dans ce cas. Ces dernières sont proportionnelles à l'aire du cycle d'hystérésis qui dépend de la forme et des dimensions du supraconducteur [Norris, 1969].

### I.1.4 Aspects techniques et applications

Les supraconducteurs HTC peuvent se présenter sous forme massive pour des applications en continu, ou lorsqu'ils sont utilisés comme des amenées de courant (liaisons intermédiaire avec le circuit extérieur), mais ceux destinés à des applications en régime variable sont de structures élémentaires de très faible diamètre ( $< \mu\text{m}$ ), associés à des bons conducteurs, comme le cuivre, pour la stabilisation thermique et l'évacuation des pertes, car, ils sont caractérisés par de faibles conductivités thermiques. Ainsi, les BTC se présentent

généralement sous forme d'assemblages multi-filamentaires, et les HTC sous forme de composites multi-filamentaires ou multicouches, car, ce sont des céramiques à structures fragiles, qui, en plus de leurs stabilisation thermique ont besoin d'être consolidés mécaniquement.

Les matériaux les plus utilisés actuellement sont niobium titane (NbTi) et le niobium étain (NbSn) pour les BTC, et le BISCCO, l'YBCO et le MgB2 pour les HTC. Leurs propriétés sont décrites dans le Tableau I.1.

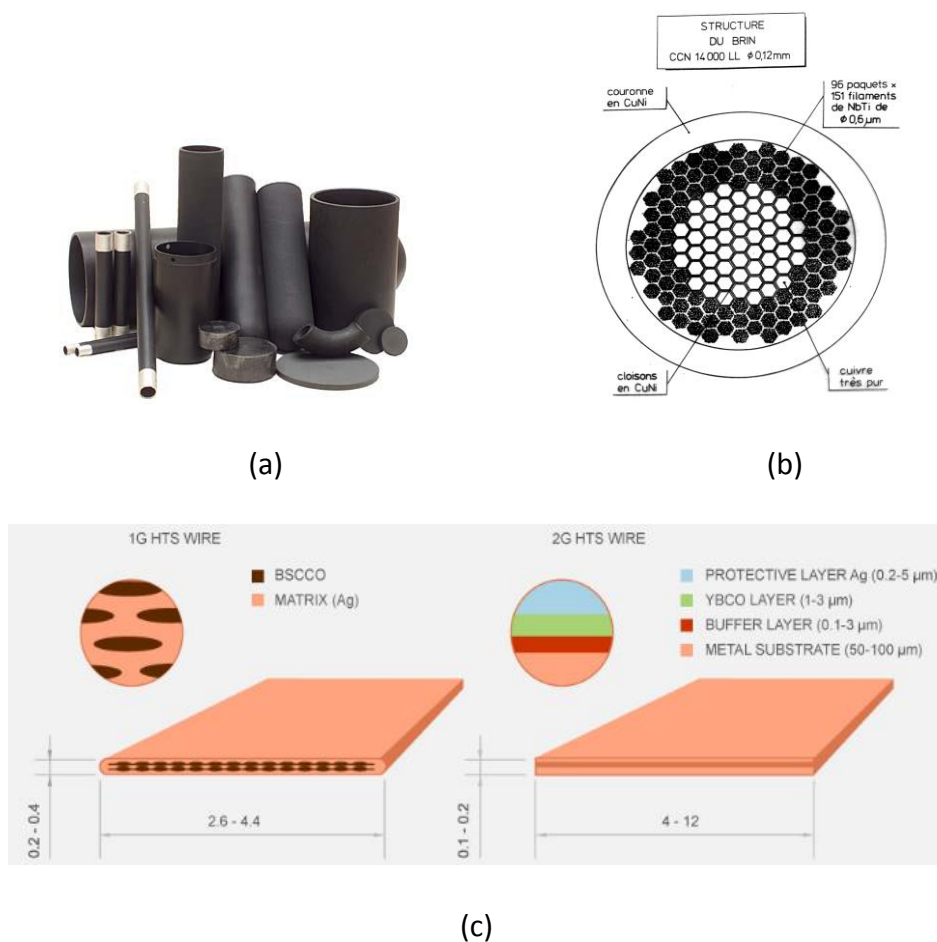


Fig. I.10 Différentes structures de supraconducteurs : (a) massives, (b) assemblages multifilamentaires, (c) composites multifilamentaires et multicouches

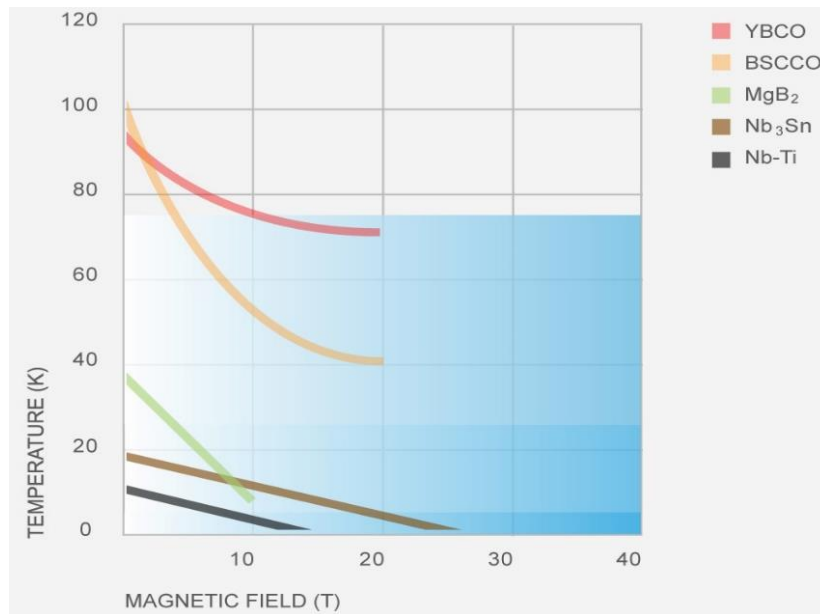

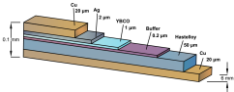





Fig. I.11 Niveaux de champ magnétique tolérés par les supraconducteurs usuels à différentes températures

(<http://www.superox.ru/en/superconductivity/>)

Tableau I.1. Propriétés des supraconducteurs les plus utilisés

catégorie	Matériau	Composition	Structure	T <sub>c</sub> (K)	B <sub>c2</sub> (T) à 4°K	B <sub>c2</sub> (T) à 77°K
HTC	BSCCO	Oxydes de bismuth, strontium, calcium et cuivre		110	> 100	< 1T
	YBCO	Oxydes d'yttrium, baryum et cuivre		93	> 100	< 2T
	MgB <sub>2</sub>	Diboride de magnésium		39	40	-
BTC	NbSn	Niobium et étain		18	28	-
	NbTi	Niobium et titane		10	10	-

Le choix d'un matériau ou un autre ne dépend pas que de la température critique. Il dépend également du niveau d'induction toléré, les propriétés mécaniques et le coût. Les BTC présentent l'inconvénient de fonctionner à basses températures, mais sont moins chers à la fabrication et offrent des propriétés mécaniques plus intéressantes que les HTC, notamment la possibilité de les modeler ou de réaliser des raccords. Les hauts HTC présentent l'avantage de pouvoir fonctionner à des températures plus élevées, avec un système cryogénique moins coûteux puisqu'on peut utiliser l'azote liquide, mais ils sont assez chers à l'achat, notamment pour les BSCCO qui utilisent une matrice d'argent. Ils offrent moins de possibilités de modelage ou d'assemblage, ce qui limite notamment les longueurs de fils. Lorsque l'application implique des niveaux élevés, l'utilisation des HTC n'est possible qu'à des températures assez basses, car le champ critique  $H_{c2}$  décroît avec la température, atteignant des valeurs très faibles aux températures critiques (Fig. I.11).

Avant la découverte des HTC, les supraconducteurs étaient essentiellement utilisés pour la fabrication de bobines à fort champ pour diverses applications, telle que l'imagerie médicale par résonance magnétique (IRM). La découverte des HTC a ouvert de nouveaux champs d'application, comme le transport d'électricité [Tixador, et al. 2004], la protection des réseaux contre les courts-circuits (limiteurs de courant de défaut) [Bonnard, et al. 2015], le stockage d'énergie et la conversion d'énergie électromécanique, avec des couples et puissances massiques beaucoup plus élevés que ceux des machines conventionnelles [Rezzoug, et al. 2003]. Plusieurs projets ont été concrétisés et testés avec succès [Masson, 2002] en attendant une industrialisation à une plus large échelle.

## **I.2 Etat de l'art de la modélisation électromagnétique des supraconducteurs**

La modélisation des supraconducteurs nécessite souvent des approches spatio-temporelles fines en 3D. Les propriétés physiques et géométriques non-conventionnelles (dimensions multi-échelles, la forte anisotropie ainsi que la forte non-linéarité de la loi  $E(J)$ ) sont des difficultés que l'on rencontre dans la modélisation des matériaux supraconducteurs; elles posent des problèmes dans l'application des méthodes numériques en termes de convergence, de précision et de temps de calcul.

Le comportement électromagnétique des supraconducteurs est décrit par les équations de Maxwell associées aux relations constitutives,  $E(J)$  et  $B(H)$ , qui les différencient des autres matériaux.

### I.2.1 Rappel des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell, qui constituent la base théorique de l'électromagnétisme, décrivent tous les phénomènes électromagnétiques. Les relations dans l'espace et le temps entre le champ électrique et le champ magnétique sont décrites par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(Equation de Maxwell – Faraday)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\sigma} \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{(Equation de Maxwell – Ampère)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(Equation de Maxwell – Gauss)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \text{(Equation de Maxwell – Gauss)} \end{array} \right. \quad (\text{I. 9})$$

Avec :

$\vec{E}$ : Vecteur champ électrique ( $V/m$ ),

$\vec{B}$ : Vecteur induction magnétique ( $T$ ),

$\vec{H}$ : Champ magnétique ( $A/m$ ),

$\vec{\sigma}$ : Tenseur de conductivité électrique ( $S/m$ ),

$\vec{D}$ : Vecteur induction électrique ( $C/m^2$ ),

$\rho$ : Densité volumique de charge électrique ( $C/m^3$ ).

Le terme  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère représente la densité des courants de déplacement, qui est négligeable dans le cas des basses fréquences.

### I.2.2 Les différentes formulations du problème électromagnétique

En partant des équations de Maxwell, il existe différentes formulations du problème électromagnétique ; les plus utilisées sont résumées dans le Tableau I.2. [Grilli, 2016]. Ces formulations se divisent en deux catégories : formulations électriques ( $\vec{A} - V$  et  $\vec{E}$ ) et formulations magnétiques ( $\vec{H}$  et  $\vec{T} - \varphi$ ).

L'utilisation directe de la loi de puissance pose quelques problèmes numériques lorsque le champ électrique est très faible ou nul. Elle est donc substituée par une relation  $\sigma(E)$  dans les formulations électriques et une relation  $\rho(J)$  dans les formulations magnétiques. Une faible résistivité  $\rho_0 \leq 10^{-14} \Omega \cdot m$  est rajoutée pour éviter les problèmes de convergences [Berger, et al. 2016 ; Duron, et al. 2006].

La formulation  $A - V$  est basée sur la conservation du flux magnétique i.e.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . La conservation de la densité de courant électrique doit être imposée de manière explicite. Le potentiel scalaire  $V$  n'est défini que dans les régions conductrices [Henrique, D. et al. 2011 ; Ma, G. et al. 2013 ; Ye, C. et al. 2016]. Il sert à assurer les conditions de passages entre les régions à différentes conductivités en 3D, et facilite la prise en compte de la source de tension, ce qui se traduit tout simplement par une condition de type Dirichlet de  $V$  aux bornes du conducteur. Cependant, la formulation  $\vec{A} - V$  utilise une loi  $\sigma(E)$  du supraconducteur, qui pose quelques problèmes de convergence [Grilli, et al. 2005 ; Luong, et al. 1997 ; Sta02b, 2002 ; Vinot, 2000].

La formulation en champ magnétique  $\vec{H}$  est la plus utilisée pour la modélisation des supraconducteurs. Elle est notamment intégrée dans le logiciel COMSOL [Escamez, 2016]. Elle assure de manière naturelle la conservation du courant électrique, étant donné que la densité de courant est définie comme le rotationnel du champ magnétique. La conservation du flux magnétique doit être imposée de manière explicite. Une loi de la  $E(J)$  converge plus rapidement qu'une loi  $J(E)$  [Vinot, 2000]. L'inconvénient de cette formulation est dans le traitement des régions non conductrices (comme l'air) où une résistivité non infinie doit être définie pour éviter les problèmes de convergence, ce qui peut donner lieu à des courants non physiques dans ces régions.

La formulation  $\vec{T} - \varphi$ , bien que plus difficile à implémenter, pallie les inconvénients de la formulation en  $\vec{H}$ , car, le champ magnétique dans les régions non conductrices est défini comme le gradient du potentiel scalaire magnétique  $\varphi$ . Comme la formulation en  $\vec{H}$ , elle assure de manière naturelle la conservation du courant, et, la conservation du flux magnétique doit être imposée de manière explicite. Elle permet également de réduire le nombre de variables à calculer dans les régions non conductrices. Cependant, les régions non simplement connexes nécessitent un traitement particulier [Dular, 1994], et la prise en

compte des sources d'alimentation n'est pas aisée. Les sources de courant sont prises en compte en rajoutant un potentiel  $\vec{T}_0$ , ce qui donne lieu à une formulation  $\vec{T} - \vec{T}_0 - \varphi$  [Zheng. et al. 2007 ; Zhang. et al. 2008 ; Pratrap. et al. 2015].

Tableau I.2.: Revue des différentes formulations du problème électromagnétique dans les supraconducteurs

Formulation	Equations	Définition
$\vec{A} - V$	$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sigma \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} V \right)$ $\vec{\nabla} \cdot \left( \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \vec{\nabla} V \right) = 0$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$ $\sigma = \sigma(E) = \left[ \frac{E_c}{J_c} \left( \frac{\ \vec{E}\ }{E_c} \right)^{\frac{n-1}{n}} + \rho_0 \right]^{-1}$ $\rho_0 = 10^{-14} \Omega \cdot m$
$\vec{T} - \varphi$	$\vec{\nabla} \times \rho \vec{\nabla} \times \vec{T} = -\mu \frac{\partial (\vec{T} - \vec{\nabla} \varphi)}{\partial t}$ $\nabla^2 \varphi = 0$	$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{T}$ $\vec{H} = \vec{T} - \vec{\nabla} \varphi$ $\rho = \rho(J) = \frac{E_c}{J_c} \left( \frac{\ \vec{J}\ }{J_c} \right)^{n-1} + \rho_0$
<i>Champ</i> - $\vec{E}$	$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial (\sigma \vec{E})}{\partial t}$	$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ $\sigma = \sigma(E)$
<i>Champ</i> - $\vec{H}$	$\vec{\nabla} \times \rho \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ $\rho = \rho(J)$

Ces différentes formulations impliquent des rotationnels de vecteurs qui ne sont définis qu'à un gradient près. L'unicité de la solution n'est donc assurée que par l'utilisation d'une condition de jauge. La jauge de Coulomb est la plus utilisée dans les problèmes de diffusion. Celle-ci peut être imposée en rajoutant un terme de pénalité [Golovanov, 2013], ou en ne gardant que le Laplacien  $\vec{\Delta}(\cdot)$  dans l'opérateur  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\cdot) = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot (\cdot) - \vec{\Delta}(\cdot)$ . Il est également possible d'assurer l'unicité de la solution de manière géométrique en utilisant la technique d'arbre (Tree-Cotree) lorsqu'on utilise les éléments finis d'arrêtes pour discrétiser la formulation [Creusé, et al. 2018].

### I.2.3 Méthodes de résolution

Pour résoudre un problème différentiel les méthodes analytiques sont toujours préférables aux méthodes numériques si elles existent; car elles évitent les critères numériques comme l'erreur de convergence, en plus, un gain de temps est toujours attendu. Ces méthodes sont basées sur l'intégration des équations aux dérivées partielles issues des formulations électromagnétiques. Cependant, l'utilisation des méthodes analytiques pour la modélisation des supraconducteurs est très limitée pour des géométries simples (formes rectangulaire fines, formes cylindriques...), et ne tiennent généralement pas en compte la non linéarité de la loi  $E(J)$ , en n'utilisant que le modèle de Bean ( $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c$ ) ou le modèle de l'état critique  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c(B)$ .

Les méthodes analytiques ont notamment été utilisées pour le calcul des pertes AC dans les supraconducteurs [Norris, 1969 ; Campbell, 1982].

Il est toutefois possible, sous certaines hypothèses, et en maniant quelques transformations, de modéliser des géométries un peu plus complexes. A titre d'exemple, dans la référence [Grigorii, et al. 2013], les auteurs présentent un calcul de la distribution du champ magnétique dans des ensembles planaires ou cylindriques de bandes supraconductrices à partir d'une bande isolée.

Dans la majorité des cas pratiques, la modélisation numérique est inévitable. Le principe des méthodes numériques est de transformer le modèle décrit dans un espace continu à un modèle discret, pour obtenir des solutions approchées aux équations aux dérivées partielles issues des formulations. Les différences finies est la méthode la plus simple



à mettre en œuvre, mais son utilisation est limitée par la complexité des géométries des systèmes modélisés. Elle souffre également de quelques problèmes de stabilité numérique, vu qu'elle discrétise la dérivée seconde des équations aux dérivées partielles issues des formulations électromagnétiques [Berger, 2008]. La méthode des éléments finis est, quant à elle, souvent coûteuse en espace mémoire et en temps de calcul, et, elle est parfois complexe à mettre en œuvre. La méthode des volumes finis se situe à l'intermédiaire des deux premières ; elle hérite de la simplicité des différences finies et de la stabilité numérique des éléments finis, car elle ne discrétise qu'une seule dérivée des équations aux dérivées partielles, en intégrant l'autre. D'autre part, travaux récents ont montré sa capacité à modéliser des géométries complexes [Vinot, et al. 2000 ; Nezzar, 1993].

Lorsque les systèmes modélisés présentent des dimensions multi-échelles associant des parties actives et des parties passives, comme l'air, il est parfois intéressant d'utiliser les méthodes d'intégrales de volumes qui permettent de ne discrétiser que les parties actives [Menana01, 2009]. Ces méthodes utilisent les expressions des champs et des potentielles par des équations intégrales impliquant leurs sources, i.e.,:

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv \\ \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{r}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv \end{cases} \quad (\text{I. 10})$$

Les méthodes intégrales conduisent cependant à des matrices pleines et à des singularités à la source, nécessitant un traitement particulier.

La résolution des problèmes non linéaires suit un processus itératif, et la convergence de la solution peut être accélérée en utilisant certains schémas numériques comme l'algorithme de Newton-Raphson [Berger, 2006].

## Conclusion

Les matériaux supraconducteurs présentent des propriétés physiques et géométriques particulières qui exigent des approches de modélisation spatio-temporelle fines, où les méthodes classiques trouvent rapidement leurs limites en termes de convergence, de précision et de temps de calcul. Ce dernier peut être très conséquent, ce qui est incompatible avec les problèmes de dimensionnement et d'optimisation.

Dans ce contexte, ce travail a pour objectif de développer des approches de modélisation multiphysique rapides pour le dimensionnement et l'optimisation des systèmes à base de supraconducteurs. Nous avons repris un modèle développé précédemment pour le calcul du champ électromagnétique dans les matériaux composites à fibres de carbone [Menana, 2009] dans le domaine fréquentiel, et nous travaillons à l'adapter à la modélisation des supraconducteurs multi-filamentaires parcourus par des courants alternatifs sinusoïdaux ou soumis à des champs magnétiques externes à variation sinusoïdale, dans le domaine temporel, en introduisant la non-linéarité.

Le modèle sera présenté dans le chapitre suivant. Il est basé sur une formulation intégral-différentielle en termes du potentiel vecteur électrique ( $\vec{T}$ ) associée à un couplage différences finies – méthode de collocation. Cette approche présente l'avantage de limiter la discrétisation aux parties actives du système et de traiter facilement les fortes anisotropies ainsi que la non-linéarité des propriétés électriques de la loi de comportement  $E(J)$ . Cependant, la partie intégrale introduit des problèmes de singularité à la source et engendre des matrices pleines. Des solutions sont développées pour pallier ces difficultés.



# Chapitre II

## Formulation et mise en œuvre du modèle numérique

### Introduction

La modélisation joue un rôle important pour la conception et l'optimisation des systèmes, ainsi que la prédiction de leur comportement avant leur réalisation. La modélisation électromagnétique consiste à résoudre les équations de Maxwell associées aux lois de comportement des matériaux. La formulation du problème électromagnétique dépend de la nature des grandeurs à calculer et les propriétés physiques et géométriques du système modélisé.

Dans ce travail, nous avons repris un modèle développé dans un précédent travail pour la modélisation des matériaux composites à fibres de carbone (CFRP) [Menana, 2011], et, nous l'avons adapté à la modélisation des supraconducteurs HTC isotropes et anisotropes, dans le but d'évaluer les pertes AC en champ propre (courant de transport) ou en champ appliqué. L'originalité dans ce travail, est la prise en compte de la non-linéarité des phénomènes électromagnétiques et leurs interdépendances, ce qui impose une approche 3D dans le temps, avec les problèmes de stabilité et de convergence inhérents, sur lesquels nous avons concentré l'essentiel de ce travail. Nous avons également proposé une approche de modélisation simplifiée dans le cas d'une excitation sinusoïdale.

Le modèle est basé sur une formulation intégral-différentielle en potentiel vecteur électrique, qui tient compte, de manière naturelle, de la conservation des densités de courant et du flux magnétique. La partie intégrale permet de ne discrétiser que les parties actives du système, ce qui facilite la prise en compte des dimensions multi-échelles.

La formulation est discrétisée en utilisant le couplage différences finies – méthode de collocation ; ainsi, la partie différentielle est discrétisée par la méthode des différences finies, et la partie intégrale par une méthode de collocation simplifiée. La partie intégrale conduit à une matrice pleine et présente une singularité à la source. Nous avons proposé une stratégie

de réduction de la taille de cette matrice et des méthodes d'évaluation des éléments singuliers. La résolution du système matriciel est réalisée par une méthode itérative. Comme le second membre est à divergence nulle, cela nous a permis notamment de ne pas imposer une condition de jauge pour assurer l'unicité de la solution, tel qu'il a été démontré par les travaux de Z. Ren [Ren, 1996].

Ce chapitre décrit le système, type, modélisé, les hypothèses de travail, la formulation du modèle, sa discrétisation, ainsi que la résolution du système matriciel.

## II.1 Système « type » modélisé

Le système modélisé est décrit dans la figure II.1. Il est constitué d'un matériau supraconducteur massif ou composite multi-filamentaire, occupant un domaine  $\Omega_c$ , parcouru par un courant variable dans le temps et/ou soumis à un champ magnétique externe  $\vec{B}^e$  appliqué ou produit par des sources de courant occupant un domaine  $\Omega_s$ , siège d'une densité de courant  $\vec{j}^s$ . Le volume du supraconducteur est délimité par la frontière  $\Gamma$ , et  $\vec{n}$  son vecteur normal, dirigé vers le milieu extérieur  $\Omega_e$  représentant l'air qui s'étend à l'infini, et qui est caractérisé par une conductivité électrique nulle. L'ensemble des parties du système modélisé est caractérisé par la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$ .

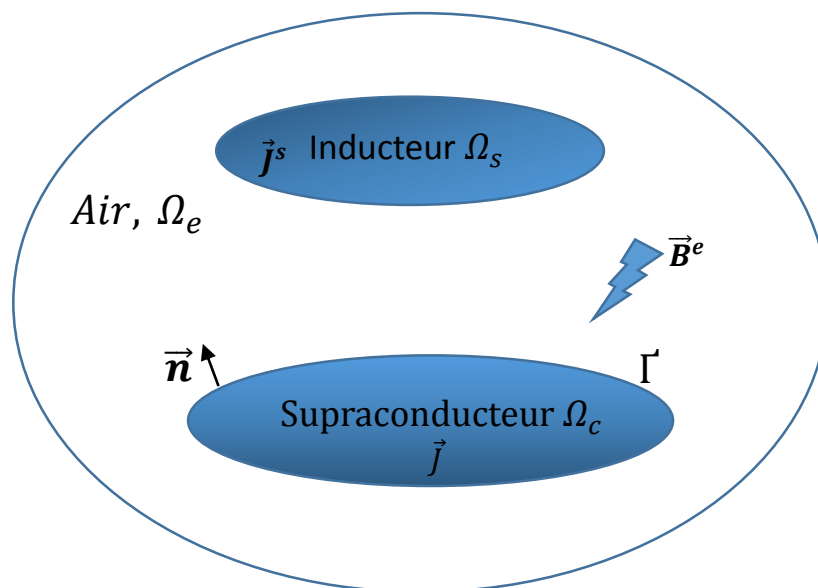


Fig. II.1 Domaine d'étude

## Hypothèses de travail

Dans toute la suite de ce travail, nous considérons les hypothèses suivantes :

- On se limite aux fréquences pour lesquelles les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction.
- Le supraconducteur modélisé est refroidi à une température inférieure à  $T_c$  avant d'appliquer un champ magnétique externe ou un courant de transport.
- Nous négligeons les variations des grandeurs caractéristiques ( $J_c$  et  $n$ ) en fonction de la température.
- Le champ appliqué magnétique est à divergence nulle :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^e = 0$

## II.2 Formulation du problème

Dans cette partie, nous développons la formulation intégral-différentielle en potentiel vecteur électrique  $\vec{T}$ . L'application directe de la loi de puissance n'est pas adaptée à la formulation du problème. Elle est, de ce fait, remplacée par une résistivité électrique équivalente qui est, dans le cas général, non linéaire et anisotrope :

$$\begin{cases} \bar{\rho}(J, B) = \text{diag}(\rho_{xx}(J, B), \rho_{yy}(J, B), \rho_{zz}(J, B)) \\ \rho_{uu}(J, B) = \frac{E_c}{J_c(\|\vec{B}\|)} \left( \frac{\|J_{uu}\|}{J_c(\|\vec{B}\|)} \right)^{n-1} + \rho_0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

A partir de la conservation du courant électrique, nous dérivons la densité de courant induit ( $\vec{J}$ ), dans  $\Omega_c$ , comme le rotationnel du potentiel vecteur électrique  $\vec{T}$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{T} \\ \vec{E} = \bar{\rho}(J, B) \vec{\nabla} \times \vec{T} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Dans un repère cartésien, les relations (II.2) se développent sous les formes matricielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx}(J, B) & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{yy}(J, B) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{zz}(J, B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

En introduisant l'équation (II.2) dans l'équation de Maxwell Faraday, nous obtenons la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \times \bar{\rho}(J, B) \vec{\nabla} \times \vec{T} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (\text{II. 3})$$

Afin d'annuler la composante normale de la densité de courant sur la frontière  $\Gamma$ , le potentiel vecteur électrique  $\vec{T}$  doit satisfaire la condition suivante :

$$\vec{n} \cdot \vec{j} = 0_{|\Gamma} \Leftrightarrow \vec{n} \times \vec{T} = \vec{0}_{|\Gamma} \quad (\text{II. 4})$$

Afin d'assurer la conservation du flux magnétique, nous dérivons l'induction magnétique  $\vec{B}$  comme le rotationnel du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{B}^e \quad (\text{II. 5})$$

Avec :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^e = 0$ .

En remplaçant II.5 dans II.3, nous obtenons l'équation suivante :

$$\vec{\nabla} \times \bar{\rho}(J, B) \vec{\nabla} \times \vec{T} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{B}^e \quad (\text{II. 6})$$

Le potentiel vecteur magnétique est calculé par une équation intégrale impliquant les densités de courant source  $\vec{J}^s$  et induit  $\vec{J}$  :

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{\Omega_s} \frac{\vec{J}^s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega_s + \int_{\Omega_c} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega_c \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_{\Omega_s} \frac{\vec{J}^s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega_s + \int_{\Omega_c} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{T}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega_c \right\}\end{aligned}\quad (\text{II. 7})$$

Et :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) + \vec{B}^e = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \begin{aligned} &\int_{\Omega_s} \frac{\vec{J}^s(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_s \\ &+ \int_{\Omega_c} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{T}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_c \end{aligned} \right) + \vec{B}^e \quad (\text{II. 8})$$

Où,  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  désigne la distance entre un point source repéré par le vecteur  $\vec{r}$  et un point de calcul repéré par le vecteur  $\vec{r}'$ . Le signe prime sur l'opérateur  $\vec{\nabla}'$  signifie que l'opérateur agit au point  $\vec{r}'$ .

Finalement, en introduisant l'équation (II.8) dans l'équation (II.6), et en rassemblant toutes les sources de champ magnétique dans un vecteur source  $\vec{B}^s$ , nous obtenons la formulation intégro-différentielle suivante :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\rho}(J, B) \vec{\nabla} \times \vec{T} = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{T}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_c + \vec{B}^s \right) \quad (\text{II. 9})$$

Comme pour toute formulation impliquant un opérateur rotationnel, l'unicité de la solution de l'équation II.8 n'est pas assurée, car le potentiel vecteur magnétique n'est défini qu'à un gradient près d'une fonction scalaire  $\varphi$ , i.e., :  $\vec{\nabla} \times \vec{T} = \vec{\nabla} \times (\vec{T} - \vec{\nabla}\varphi)$ .

Il est d'usage d'imposer une condition de jauge, qui est généralement la jauge de Coulomb pour les problèmes de diffusion, i.e.,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0$ , dans notre cas. Cela peut être réalisé



en rajoutant un terme de pénalité, ou annulant les termes liés à  $\vec{\nabla} \cdot \vec{T}$  dans le développement du terme  $\vec{\nabla} \times \bar{\rho}(J, B) \vec{\nabla} \times \vec{T}$ . Cependant, étant donné que le terme de droite (second membre) est à divergence nulle, nous avons préféré exploiter un résultat qui stipule que l'unicité de la solution d'un système matriciel d'équations impliquant un opérateur  $rot - rot$ , et pour lesquelles le second membre est à divergence nulle, est assurée en utilisant une méthode de résolution itérative [Ren, 1996]. En effet, soit un système d'équation ( $rot\ rot$ ) de la forme  $Ax = b$  ; avec  $div(b) = 0$ . Dans une résolution itérative, à chaque itération, la nouvelle valeur du vecteur variable peut s'écrire comme suit :  $x_{i+1} = x_i + \alpha_i p_i$ , où,  $p_i$  est un vecteur calculé par une combinaison linéaire de  $Ax_j - b$  ; pour tout  $j \leq i$  ; et  $\alpha_i$  sont des constantes. Or suite à notre condition :  $div(A) = 0$  et  $div(b) = 0$

$$\Rightarrow div(p_i) = 0$$

$$\Rightarrow div(x_{i+1}) = div(x_i) = 0$$

Alors, par récurrence, on a :  $div(x_i) = div(x_0) = 0$ .

A chaque itération, la divergence de  $x$  définie au sens faible, et est égale à la divergence de la solution initiale.

## II.3 Discrétisation et mise en œuvre du modèle numérique

Un couplage différences finies - méthode de collocation est choisi pour la discrétisation de la formulation. Ainsi, le terme différentiel est discrétisé par la méthode des différences finies et le terme intégral est discrétisé par la méthode de collocation. Dans ce qui suit, la discrétisation de la formulation et la mise en œuvre du modèle en utilisant les coordonnées cartésiennes sont présentés.

### II.3.1 Méthode des différences finies

La méthode consiste à discrétiser le domaine d'étude en un nombre fini de points où les dérivées sont approximées par des différentiations en chaque coordonnée.

En utilisant le développement de Taylor d'une fonction  $u(x)$ , deux fois dérivable, on a :

$$\begin{cases} u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) \\ u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) \end{cases} \quad (\text{II. 10})$$

Si le pas de maillage ( $h$ ) est suffisamment petit, on peut limiter le développement au premier ordre ( $+O(h^2)$ ), et on obtient les approximations de la dérivée  $u'(x)$  comme suit :

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) & \text{Ordre 1, décentré avant} \\ u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h) & \text{Ordre 1, décentré arrière} \\ u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2) & \text{Ordre 2, centré} \end{cases} \quad (\text{II. 11})$$

### II.3.2 Méthode de collocation

La méthode de collocation par sous domaine consiste à subdiviser le domaine d'étude de volume  $\Omega$  en  $N$  sous domaines de volume  $V_i$ . Dans chaque sous domaine, une fonction peut être approximée sur un ou plusieurs points [Bonnet, 1999].

Dans ce travail, nous avons utilisé cette méthode dans sa version la plus simple, et qui consiste à considérer une fonction constante par sous domaine. Appliquée à la partie intégrale de la formulation, nous avons :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{T}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\Omega_c \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N v c_i \left( \frac{\vec{\nabla}^i \times \vec{T}(\vec{r}_i) \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right) \quad (\text{II. 12})$$

Dans la relation II.12,  $\vec{r}_i$  est un vecteur qui repère le centre du volume élémentaire (i) de volume  $v c_i$ . Les centres des volumes élémentaires ( $v c_i$ ) coïncident avec le maillage différences finies de la partie différentielle.

### II.3.3 Discrétisation du domaine d'étude

La formulation permet de ne discrétiser que les parties actives du système (parties sièges de courants sources ou induits). Le couplage différences finies-méthode de collocation ne concerne que le domaine du supraconducteur. Toute autre source, où la densité de courant est imposée, est discrétisée en  $N_s$  volumes élémentaires (vs), afin d'évaluer numériquement les intégrales de volume en n'utilisant que la méthode de collocation.

La structure du supraconducteur est discrétisée en  $Ne = N \times M \times L$  volumes élémentaires, respectivement, suivant les trois axes  $x, y$ , et  $z$  (Fig. II.2). Les grandeurs électromagnétiques sont considérées constantes par élément.

Pour la suite, on définit les symboles suivants :

- $Ne$  est le nombre total de points de discrétisation du supraconducteur
- les pas dans l'espace sont  $\Delta_x, \Delta_y$ , et  $\Delta_z$  suivant les 3 axes  $x, y$ , et  $z$
- $N_t$  est le nombre total d'instantants de calcul
- le pas de temps est noté  $\Delta t$
- l'indice de temps est noté  $t : 0 \leq t \leq N_t$
- Les indices  $i, j$  et  $k$  sont des indices d'espaces d'une variable présentent la valeur de cette variable à un point  $(x_i, y_j, z_k)$  du maillage.

Afin de simplifier l'écriture dans nos algorithmes, on définit un indice global  $n$  pour numérotter les volumes élémentaires :

$$\begin{aligned} n &= i + (j - 1)N + (k - 1)MN \\ 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M, 1 \leq k \leq L \end{aligned} \quad (\text{II. 13})$$

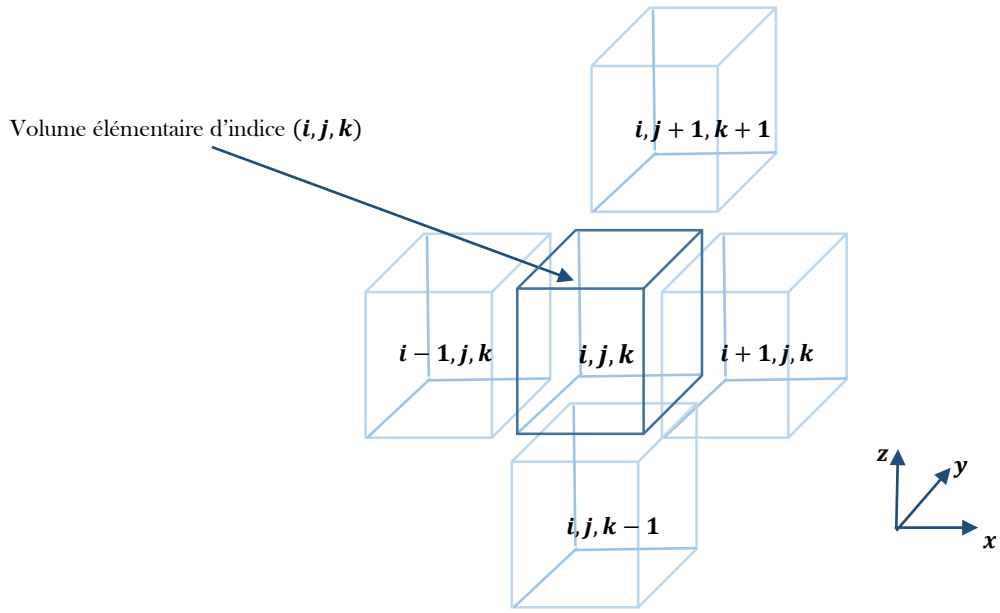


Fig II.2. Volumes élémentaires

Les dérivées en chaque nœud d'indices  $(i, j, k)$  sont évaluées par la méthode des différences finies centrées comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\cdot)_{i,j,k}}{\partial x} &= [(\cdot)_{i+1,j,k} - (\cdot)_{i-1,j,k}] / (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) \\
 \frac{\partial(\cdot)_{i,j,k}}{\partial y} &= [(\cdot)_{i,j+1,k} - (\cdot)_{i,j-1,k}] / (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \\
 \frac{\partial(\cdot)_{i,j,k}}{\partial z} &= [(\cdot)_{i,j,k+1} - (\cdot)_{i,j,k-1}] / (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})
 \end{aligned} \quad (\text{II. 14})$$

En utilisant l'indice global de numérotation  $(n)$ , les relations II.12 deviennent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\cdot)_n}{\partial x} &= [(\cdot)_{n+1} - (\cdot)_{n-1}] / (x_{n+1} - x_{n-1}) \\
 \frac{\partial(\cdot)_n}{\partial y} &= [(\cdot)_{n+N} - (\cdot)_{n-N}] / (x_{n+N} - x_{n-N}) \\
 \frac{\partial(\cdot)_n}{\partial z} &= [(\cdot)_{n+MN} - (\cdot)_{n-MN}] / (x_{n+MN} - x_{n-MN})
 \end{aligned} \quad (\text{II. 14 - bis})$$

### II.3.4 Discrétisation de la formulation et construction des matrices

En tenant compte de la condition aux limites II.4, la formulation II.8 s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\overline{\overline{CLM}} \cdot \left( \overline{\overline{C}} \overline{\overline{R}} \overline{\overline{C}} + \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\overline{M}} \overline{\overline{C}}) \right) \overline{T} = - \frac{\partial}{\partial t} \overline{B}^s \cdot \overline{CLS} \quad (\text{II. 15})$$

La matrice  $\overline{\overline{CLM}}$  et le vecteur  $\overline{CLS}$  sont introduits pour tenir compte des conditions aux limites données par la relation II.4. Le produit  $(.)$  désigne le produit de Hadamard, défini comme suit :  $(\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}})_{i,j} = (\overline{\overline{A}})_{i,j} \times (\overline{\overline{B}})_{i,j}$ .

Les vecteurs  $\overline{T}$ ,  $\overline{B}^s$  représentent respectivement le potentiel vecteur magnétique, et l'induction source. Ces vecteurs sont de dimension  $3Ne$ .

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} \{T_x\} \\ \{T_y\} \\ \{T_z\} \end{bmatrix}, \quad \overline{B}^s = \begin{bmatrix} \{B_x^s\} \\ \{B_y^s\} \\ \{B_z^s\} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 16})$$

La matrice  $\overline{\overline{C}}$  est la matrice rotationnel. Elle est de dimension  $(3Ne \times 3Ne)$ , et elle a la structure suivante :

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} [0] & -[Dz] & [Dy] \\ [Dz] & [0] & -[Dx] \\ -[Dy] & [Dx] & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{II. 17})$$

Où :  $[Dx]$ ,  $[Dy]$ , et  $[Dz]$  sont les matrices dérivées suivant les trois axes. Ces dernières sont de structures creuses, de dimensions  $Ne \times Ne$ .

La matrice  $\overline{\overline{R}}$  désigne le tenseur de résistivité. Elle est de dimension  $(3Ne \times 3Ne)$ , et elle se développe comme suit :

$$\overline{\overline{R}} = \begin{bmatrix} \text{diag}(\rho_{xx}) & [0] & [0] \\ [0] & \text{diag}(\rho_{yy}) & [0] \\ [0] & [0] & \text{diag}(\rho_{zz}) \end{bmatrix} \quad (\text{II. 18})$$

Où :  $\text{diag}(\rho_{xx})$ ,  $\text{diag}(\rho_{yy})$ , et  $\text{diag}(\rho_{zz})$  sont les matrices résistivité suivant les trois axes. Ces dernières ont des structures diagonales, de dimensions  $Ne \times Ne$ .

La matrice  $\overline{\overline{M}}$  est de dimension  $(3Ne \times 3Ne)$ . Elle a la structure suivante :

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} [0] & [M_z] & -[M_y] \\ -[M_z] & [0] & [M_x] \\ [M_y] & -[M_x] & [0] \end{bmatrix} \quad (\text{II. 19})$$

Les éléments des sous matrices  $[M_l]$ , où  $l=x, y, z$ ; s'expriment comme suit :

$$M_l(i, j) = \frac{\mu_0 v c_j (l_i - l_j)}{4\pi ||\vec{r}_i - \vec{r}_j||^3} \quad (\text{II. 20})$$

Ces éléments sont singuliers pour  $i = j : M_l(i, i) \mapsto \infty$ . Ces éléments sont évalués par la méthode de Gauss [Menana, 2011].

Les matrices  $[M_l]_{l=x,y,z}$  sont pleines. Afin de réduire leurs tailles, les interactions entre éléments éloignés sont négligées. Nous avons défini une distance  $d$ , au-delà de laquelle les interactions sont négligées :  $d = \sqrt{(k \times \Delta_x)^2 + (k \times \Delta_y)^2 + (k \times \Delta_z)^2}$ . Le coefficient  $k$ , est augmenté progressivement jusqu'à observer une invariance de la solution.

Les algorithmes de construction des différentes matrices sont fournis dans l'annexe A.

## II.4 Résolution du système matriciel

En appliquant la méthode des différences finies pour la discrétisation de la dérivée temporelle de l'équation II.15, on obtient l'équation matricielle II.21, où  $\Delta t$  est le pas de discrétisation temporelle. Etant donnée la non linéarité de la relation E(J), la matrice résistivité est actualisée à chaque pas de temps ( $i$ ).

$$\overline{\overline{CLM}} \cdot \left( \overline{\overline{C}} \overline{\overline{R}}^{(i)} \overline{\overline{C}} + \frac{1}{\Delta t} \overline{\overline{MC}} \right) \overline{\overline{T}}^{(i)} = \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left( \overline{\overline{B}}^{s(i-1)} - \overline{\overline{B}}^{s(i)} \right) + \frac{1}{\Delta t} \overline{\overline{MC}} \overline{\overline{T}}^{(i-1)} \right\} \cdot \overline{\overline{CLS}} \quad (\text{II. 21})$$

L'équation II.21 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\overline{\overline{MG}}^{(i)} \times \overline{\overline{T}}^{(i)} = \overline{\overline{S}}^{(i)} \quad (\text{II. 21 - bis})$$

Avec :

$$\overline{\overline{MG}}^{(i)} = \overline{\overline{CLM}} \cdot \left( \overline{\overline{C}} \overline{\overline{R}}^{(i)} \overline{\overline{C}} + \frac{1}{\Delta t} \overline{\overline{MC}} \right)$$

$$\overline{\overline{S}}^{(i)} = \left\{ \frac{1}{\Delta t} \left( \overline{\overline{B}}^{s(i-1)} - \overline{\overline{B}}^{s(i)} \right) + \frac{1}{\Delta t} \overline{\overline{MC}} \overline{\overline{T}}^{(i-1)} \right\} \cdot \overline{\overline{CLS}}$$

La discrétisation spatio-temporelle d'un problème électromagnétique doit satisfaire un critère de stabilité qui lie la discrétisation spatiale à la discrétisation temporelle, à travers la diffusivité magnétique, qui dépend des propriétés électromagnétique du matériau, comme le critère de Courant-Friedrichs-Lewy (critère CFL) [Dutykh, 2016].

Afin d'améliorer la convergence de la résolution du système matriciel, nous avons amélioré le conditionnement de la matrice globale et appliqué une technique de relaxation [Hadjidimos, 2000]. Nous obtenons donc un nouveau système matriciel qui s'écrit comme suit :

$$\overline{\overline{MGr}}^{(i)} \times \overline{\overline{T}}^{(i)} = \overline{\overline{Sr}}^{(i)} \quad (\text{II. 22})$$

Avec:

$$\overline{\overline{MGr}}^{(i)} = \overline{\overline{CLM}} \cdot \left\{ \overline{\overline{C}} \overline{\overline{R}}^{(i)} \overline{\overline{C}} + \frac{1}{\Delta t} [\overline{\overline{MC}} + \text{diag}(\overline{\overline{MC}})] \right\}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{Sr}}^{(i)} = & \frac{\alpha}{\Delta t} \left( \overline{\overline{B}}^{s(i-1)} - \overline{\overline{B}}^{s(i)} + \left( \overline{\overline{MC}} + \text{diag}(\overline{\overline{MC}}) \right) \overline{\overline{T}}^{(i-1)} \right) \cdot \overline{\overline{CLS}} \\ & + (1 - \alpha) \overline{\overline{Sr}}^{(i-1)} \end{aligned}$$

$\alpha$  est le facteur de relaxation.

L'algorithme de résolution du système matriciel dans le temps est donné dans la figure suivante.

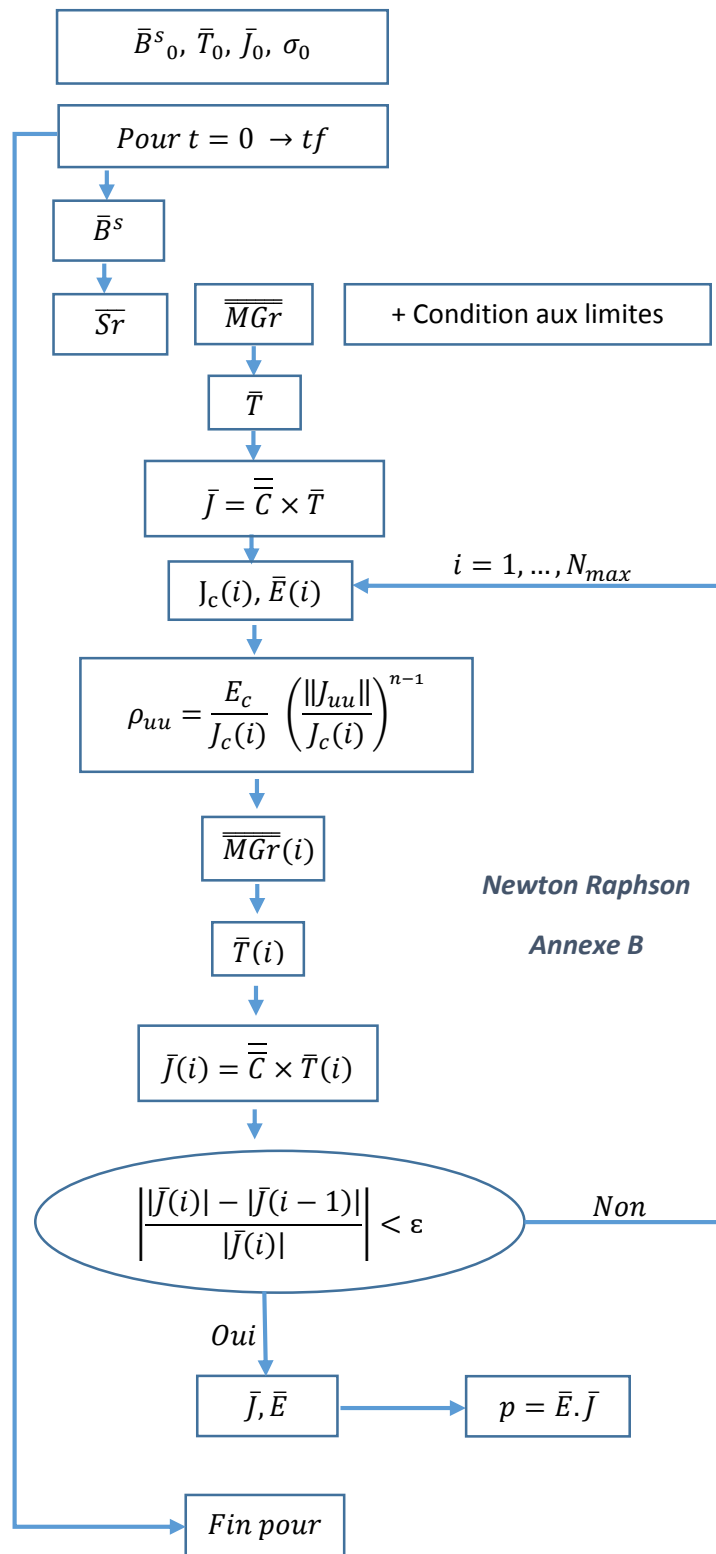


Fig. II.3. Résolution dans le domaine temporel



## II.5 Résolution dans le domaine fréquentiel en se limitant au premier harmonique, dans le cas d'une excitation sinusoïdale

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale, il est parfois suffisant de limiter la réponse du système au premier harmonique, notamment, en ce qui concerne le calcul des pertes. Cela permet d'avoir rapidement une première évaluation des grandeurs électromagnétiques, car, la résolution dans le domaine fréquentiel est beaucoup moins onéreuse en termes de temps de calcul et d'espace mémoire. Nous avons donc proposé une approche originale de calcul dans le domaine fréquentiel, tout en tenant compte de la non linéarité de la loi  $E(J)$  et de la dépendance du courant critique ( $J_c$ ) en fonction du champ magnétique.

L'équation II.15 s'écrit dans le domaine fréquentiel comme suit, où  $\omega$  est la pulsation de la source.

$$\overline{CLM} \cdot (\overline{CR}\overline{C} + i\omega\overline{MC})\overline{T} = -i\omega\overline{B}^s \cdot \overline{CLS} \quad (\text{II. 23})$$

Afin d'éviter de stocker la matrice intégrale, nous avons adopté le schéma de résolution itératif décrit dans la figure II.4. L'équation II.23 est réécrite comme suit :

$$\overline{CLM} \cdot \overline{CR}\overline{C} \overline{T} = -i\omega\overline{B} \cdot \overline{CLS} \quad (\text{II. 23 - bis})$$

$$\text{avec : } \overline{B} = \overline{B}^s + \overline{MC} \overline{T}$$

Nous commençons par résoudre II.23-bis, en ne considérant que le champ source ( $\overline{B} = \overline{B}^s$ ). Cela donne une première valeur du vecteur  $\overline{T}$ . Nous évaluons ensuite le champ magnétique de réaction ( $\overline{MC} \overline{T}$ ). Avec l'actualisation du champ magnétique  $\overline{B} = \overline{B}^s + \overline{MC} \overline{T}$ , nous actualisons la matrice résistivité  $\overline{R}$  en considérant la variation du courant critique en fonction du champ magnétique. Les valeurs actualisées de la matrice résistivité et du champ magnétique sont injectées à nouveau dans l'équation II.23-bis. L'opération est répétée jusqu'à convergence.

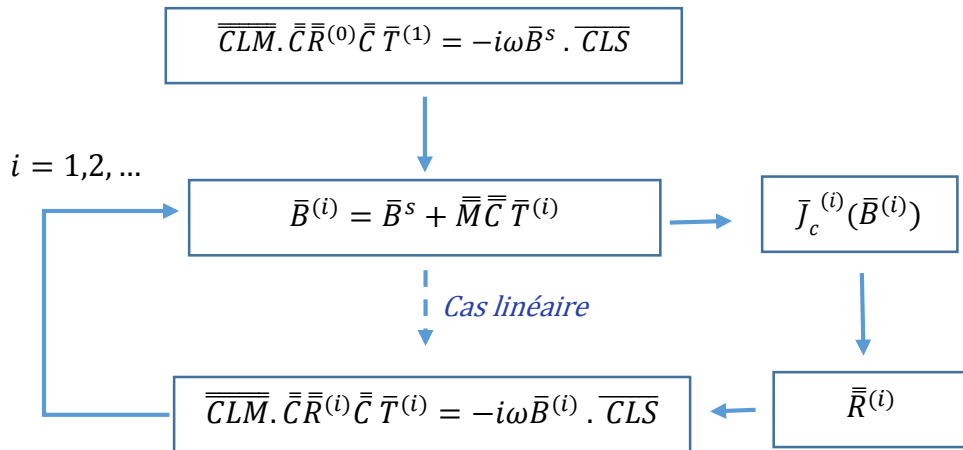


Fig. II.4 Résolution dans le domaine fréquentiel

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons repris une formulation intégréo-différentielle en potentiel vecteur électrique qui a été développée dans un précédent travail, et, nous l'avons adaptée à la modélisation des supraconducteurs HTC, avec la prise en compte de la non-linéarité des phénomènes électromagnétiques et leurs interdépendances, ce qui impose une approche 3D dans le temps, avec les problèmes de stabilité et de convergence, liés aux méthodes de discrétisation choisies, et, pour lesquels nous avons apporté des solutions.

Le choix de la formulation est motivé par son efficacité à traiter les problèmes de courants induits dans les milieux non magnétiques. Elle tient compte, de manière naturelle, de la conservation des densités de courant et du flux magnétique. Elle permet de ne discrétiser que les parties actives du système, ce qui facilite la prise en compte des dimensions multi-échelles. Les méthodes de discrétisations sont choisies pour leur simplicité de mise en œuvre et leur rapidité.

Il reste à évaluer la précision et les performances du modèle proposé. Cela fait l'objet du prochain chapitre, dans lequel deux cas d'étude sont traités à des fins de validation.



# Chapitre III

## Applications en vue de la validation du modèle

### Introduction

Après l'état de l'art, la formulation et la mise en œuvre du modèle, nous passons à l'étape de validation. Pour cela, nous considérons deux cas d'étude :

- Le premier cas d'étude concerne le calcul des pertes dans un ruban multifilamentaire supraconducteur soumis à un champ magnétique externe uniforme. Dans ce cas, nous disposons d'un modèle analytique qui servira de référence pour la validation du modèle développé.
- Le second cas d'étude concerne le calcul des pertes dans un cube supraconducteur homogène soumis à un champ magnétique externe uniforme. Pour ce cas d'étude, nous disposons de résultats publiés auxquels nous comparons ceux obtenus par le modèle développé.

Le modèle a été implémenté sous Matlab. Les outils de résolution des systèmes matriciels de Matlab sont de ce fait utilisés ; il en est de même que pour l'exploitation des résultats (tracés de graphes et de courbes...). L'ordinateur utilisé est sous Windows 7 professionnel 64 bits, avec un processeur : Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1650 v3 @ 3.50 GHz, 32.0 Gb RAM.

Outre l'appréciation des performances du modèle développé, cette partie a également pour objectif de mettre en évidence quelques phénomènes physiques liés au comportement électromagnétique des supraconducteurs.

### III.1 Pertes AC dans un ruban composite multi filamenteux soumis à un champ magnétique externe, à variation sinusoïdale dans le temps

#### III.1.1 Description du système modélisé

Le système modélisé, décrit dans la figure III.1, consiste en un ruban HTS, de longueur  $L_t$ , de largeur  $W_t$  et d'épaisseur  $T_t$ , constitué de filaments supraconducteurs en BSCCO non torsadés, noyés dans une matrice conductrice. Le ruban est soumis à un champ magnétique externe ( $\vec{B}^a$ ) homogène et qui varie sinusoïdalement dans le temps, à la fréquence  $f$ . Ce champ est orienté perpendiculairement à la surface la plus large du ruban, qui correspond à l'axe  $z$  dans un repère Cartésien :  $\vec{B}^a = B_m \sin(2\pi ft) \vec{e}_z$ .

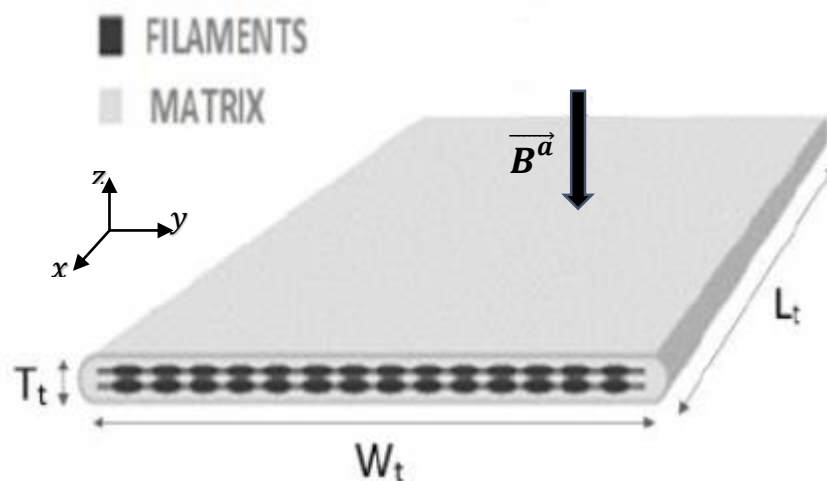


Fig III.1. Présentation du ruban modélisé

Pour éviter la modélisation à l'échelle du filament, un tenseur de conductivité électrique non linéaire homogénéisé est défini pour le ruban, donné par III.1, où  $\sigma_{//}$  et  $\sigma_T$  désignent les conductivités parallèle et transversale aux filaments, respectivement. La non-linéarité est reportée uniquement sur  $\sigma_{//}$  qui dépend de la fraction volumique des filaments HTS ( $\eta_s$ ) et de la conductivité de la matrice ( $\sigma_m$ ). Ce comportement non linéaire est décrit par la loi de puissance où  $E_{//}$  et  $J_{//}$  sont respectivement les composantes du champ électrique

et de la densité de courant parallèles aux filaments ;  $E_c$  et  $J_c$  correspondent respectivement aux valeurs critiques du champ électrique et de la densité de courant, et l'exposant de fluage ( $n$ ) détermine la pente de la transition de l'état supraconducteur à l'état normal. La relation de Kim est utilisée pour la dépendance de la densité de courant critique sur le champ magnétique, où  $J_{c0}$  est la densité de courant critique à champ magnétique nul, et  $B_0$  est une densité de flux magnétique caractéristique du matériau.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma} = \text{diag}(\sigma_{//}, \sigma_T, \sigma_T) \\ \sigma_{//} = \eta_s J_{//} E_{//}^{-1} + (1 - \eta_s) \sigma_m \\ \sigma_T = (1 + \eta_s) \sigma_m \\ E_{//} = E_c (J_{//} / J_c)^n \\ J_c(B) = J_{c0} (1 + B/B_0)^{-1} \end{array} \right. \quad (\text{III. 1})$$

Les propriétés physiques et géométriques du système modélisé sont données dans le tableau III.1. Le ruban est divisé en  $20 \times 10 \times 3$  éléments suivant les 3 axes  $x, y$  et  $z$ ; pour un total de 600 éléments. Un pas de temps fixe, (200 pas par période) est utilisé pour la discrétisation temporelle.

Afin de réduire la taille de la matrice intégrale, les interactions entre les éléments lointains sont négligées. En effet, au-delà d'une certaine distance, la négligence des interactions entre éléments n'affecte pas le résultat du calcul des courants induits.

En raison de la présence de la matrice, et étant en champ appliqué, les pertes AC sont essentiellement dues aux pertes par courants de Foucault. Les résultats de modélisation numérique dans le domaine temporel et fréquentiel non linéaire sont comparés à ceux obtenus par le modèle de Campbell [Campbell 1982], exprimé en  $J/m^3/\text{cycle}$  dans l'équation III.2, faisant intervenir la pulsation du champ source ( $\omega$ ), une constante de temps de la pénétration du flux magnétique ( $\tau$ ) et un facteur géométrique ( $\chi$ ). Les valeurs mesurées de  $\chi$  et  $\tau$ , données dans [Zola 2004], sont utilisées. Les dimensions du ruban choisi sont celles fournies dans littérature, correspondant à l'échantillon pour lequel les paramètres de  $\chi$  et  $\tau$  ont été mesurés Annexe C.

$$Q_c = \frac{B_m^2}{2\mu_0} \left[ 2\pi\chi \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right] \quad (\text{III. 2})$$

Tableau III.1. Propriétés physiques et géométriques du système modélisé

Paramètres	Valeurs
$L_t   W_t   T_t$	6.5mm   3.2mm   0.25mm
$f$	50Hz
$\eta_s$	0.32
$\sigma_m$	$6.3 \times 10^7 S.m^{-1}$
$\sigma_T$	$8.2 \times 10^7 S.m^{-1}$
$J_{c_0}$	$9.65 \times 10^7 A.m^{-2}$
$B_0$	0.3 T
$n$	15
$\chi   \tau$	9.8   0.32 ms

### III.1.2 Résultats et validation

La figure III.2 présente les pertes de puissance instantanées dans le ruban pour ( $B_m = 1mT$ ), obtenues avec et sans relaxation. Le cas  $\alpha=1$  signifie qu'on applique le reconditionnement de la matrice globale mais qu'on n'applique pas de relaxation.

Comme attendu, la relaxation affecte légèrement le régime subtransitoire et introduit un léger décalage de phase; néanmoins, cela reste acceptable. Le temps de calcul des pertes instantanées sur deux périodes est de 2.3 minutes sans relaxation ( $\alpha = 1$ ) et de 1,3 minute avec une relaxation pour  $\alpha = 0,6$ . La répartition des courants induits dans le ruban à  $t=15ms$  est donnée par la figure III.3.

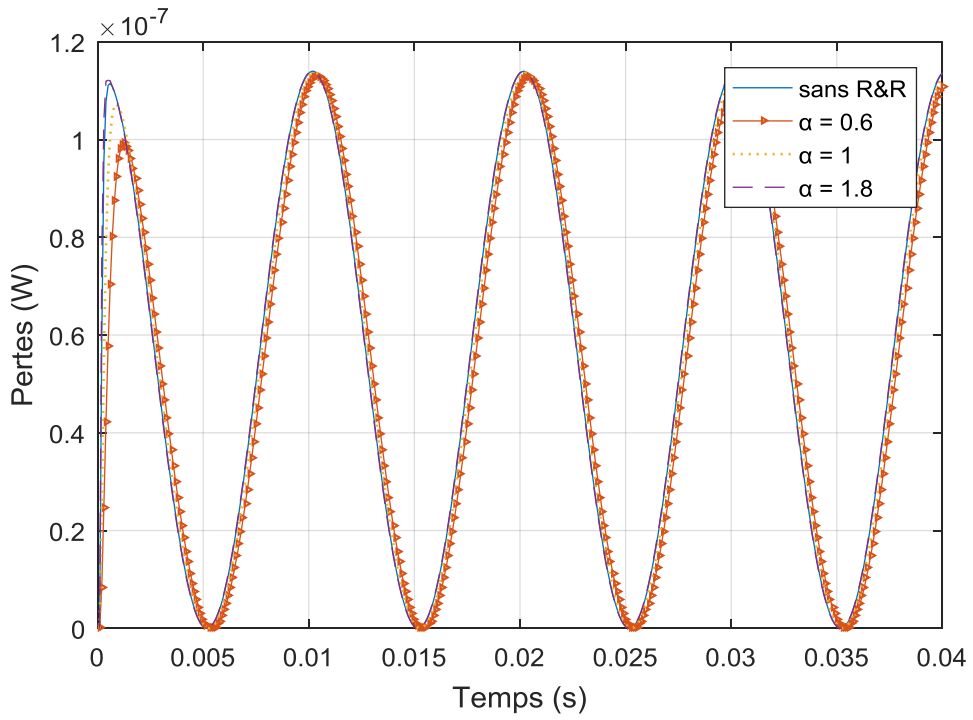


Fig III.2. Pertes instantanées dans le ruban pour différentes valeurs du facteur de relaxation ( $B_m = 1mT$ )

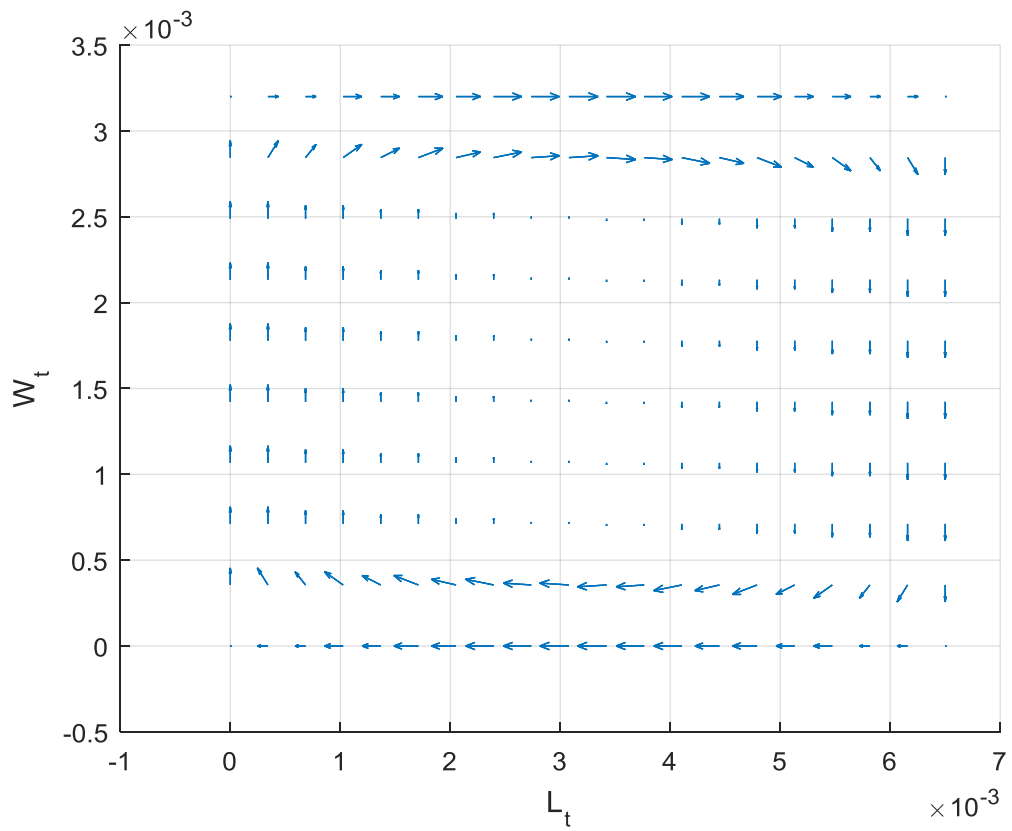


Fig III.3. Répartition de la densité de courants induits dans le ruban à l'instant  $t = 15ms$ , ( $B_m = 1mT$ )



La figure III.4 présente la comparaison entre les calculs numériques et analytiques des pertes moyennes dans le ruban. La comparaison est effectuée dans les limites de la validité du modèle analytique, qui ne prend pas en compte la variation du courant critique avec le champ magnétique (champs faibles). Les pertes moyennes sont calculées sur la deuxième période pour éviter le régime transitoire.

Les résultats des calculs numériques dans le domaine temporel et fréquentiel non linéaires sont tous les deux comparés au modèle analytique. Comme on peut le constater, les résultats du modèle fréquentiel se rapprochent plus du calcul analytique. En effet, celui-ci implique moins d'opérations numériques et, de ce fait, il présente moins d'erreurs numériques. Cependant, il faut rappeler que le modèle fréquentiel n'est applicable que dans le cas d'une excitation sinusoïdale. Les sources d'erreurs concernent aussi bien les modèles numériques que le modèle analytique. En effet, le modèle analytique suppose une distribution homogène du champ magnétique et ne prend pas en compte l'anisotropie électrique, ainsi que la dépendance  $J_c(B)$ . De plus, il utilise des paramètres déterminés expérimentalement avec un certain degré de précision.

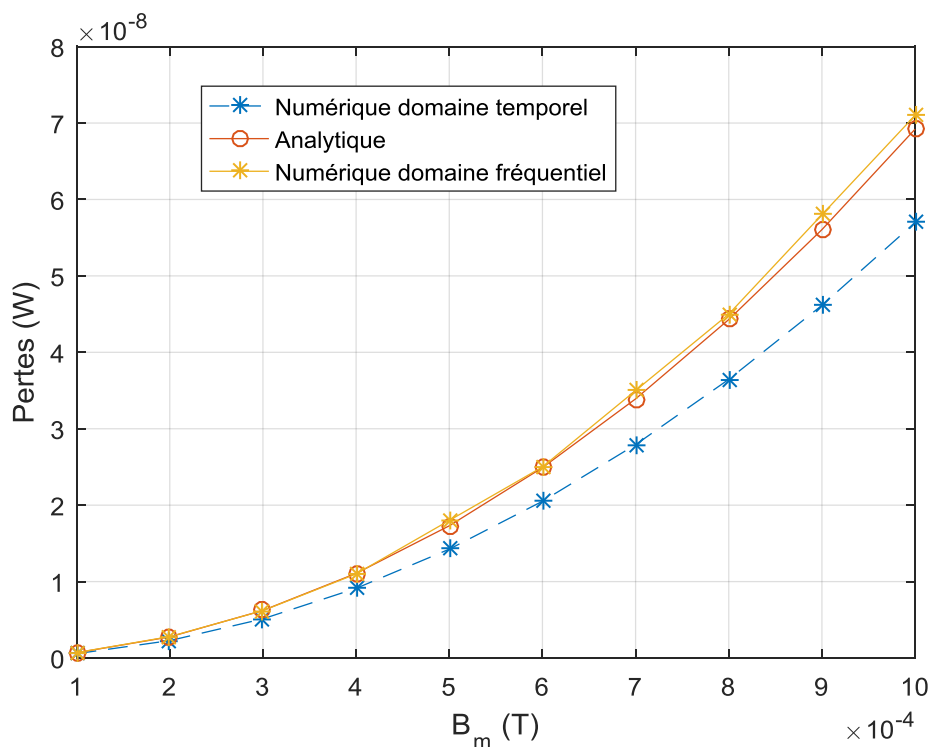


Fig III.4. Comparaison entre le calcul numérique (fréquentiel et temporel) et analytique des pertes dans le ruban pour  $f = 50\text{Hz}$

Avant d'aller plus loin dans les investigations, nous nous sommes intéressés à vérifier un résultat présenté par [Mulder 1993] qui stipule que, pour les faibles valeurs du champ magnétique, le comportement d'un ruban HTS multi filamentaire, du point de vue des pertes par courants induits, est similaire à celui d'un matériau conducteur (matrice du ruban) fortement anisotrope, avec un facteur d'anisotropie de  $10^4$ . Dans son travail, Mulder n'a considéré que le champ source et a ignoré la réaction magnétique du ruban [Menana et al. 2018]. Pour notre part, nous avons pris en compte la réaction magnétique du ruban. Ainsi, nous avons modélisé le ruban comme un matériau conducteur linéaire et anisotrope, avec :  $\sigma_T = \sigma_m$  et  $\sigma_{//} = [1: 10^4] \sigma_m$ . La figure suivante représente l'évolution des pertes en fonction du logarithme du facteur d'anisotropie ( $\sigma_T/\sigma_m$ ). Comme on peut le voir, les pertes évoluent jusqu'à un rapport de  $10^4$  et se stabilisent par la suite.

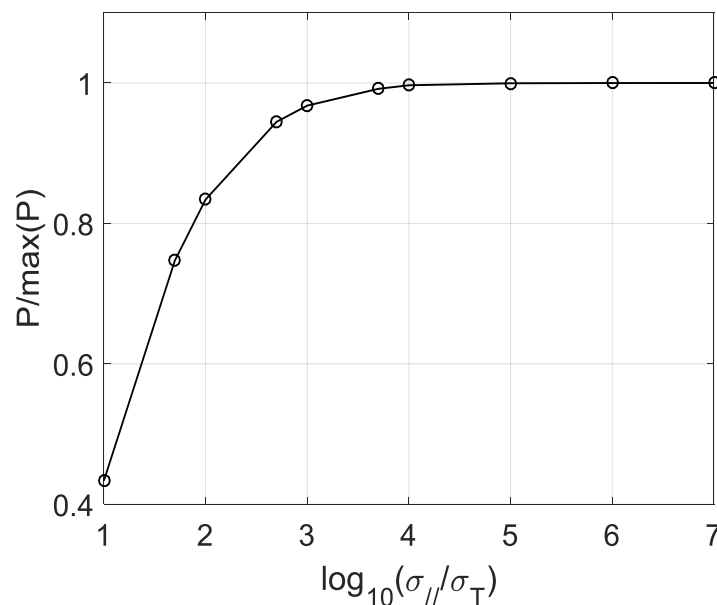


Fig. III.5. Evolution des pertes en fonction du logarithme du facteur d'anisotropie

Nous avons ensuite comparé les résultats de calcul des pertes moyennes pour le cas non linéaire, avec et sans la prise en compte de  $J_c(B)$ , et pour le cas linéaire anisotrope, avec un facteur d'anisotropie de  $10^4$ . Les résultats sont montrés dans la figure III.6. Comme on peut le constater, pour les valeurs du champ magnétique, jusqu'à environ  $0.5T$ , la variation de  $J_c(B)$  n'introduit pas de variation significative des pertes et peut donc être négligée. Pour des valeurs plus élevées du champ magnétique, le courant critique diminue (selon la loi de Kim),

ce qui est similaire à une augmentation de la résistivité pour un matériau conducteur conventionnel, entraînant une réduction des courants de Foucault et des pertes dans le ruban. Les pertes obtenues pour le cas linéaire anisotrope sont en très bonne concordance avec celle du cas non-linéaire, sans la prise en compte de  $J_c(B)$ . On en déduit donc que pour les faibles valeurs du champ magnétique appliqué, pour le calcul des pertes par courants de Foucault dans un ruban HTS multi-filamentaire, ce dernier peut être modélisé comme un matériau conducteur linéaire, en considérant :  $\sigma_T = \sigma_m$  et  $\sigma_{//} = 10^4 \sigma_m$ . Cela simplifierait considérablement le problème et réduirait de manière conséquente le temps de calcul.

L'influence de la variation de  $J_c(B)$  sur la puissance instantanée est présentée à la figure III.7 pour  $B_m = 1T$ . Comme on peut le constater, à force que l'amplitude du champ appliqué augmente, les pertes instantanées pour le cas où la variation de  $J_c(B)$  est prise en compte s'écartent de celles calculées sans la prise en compte de  $J_c(B)$ .

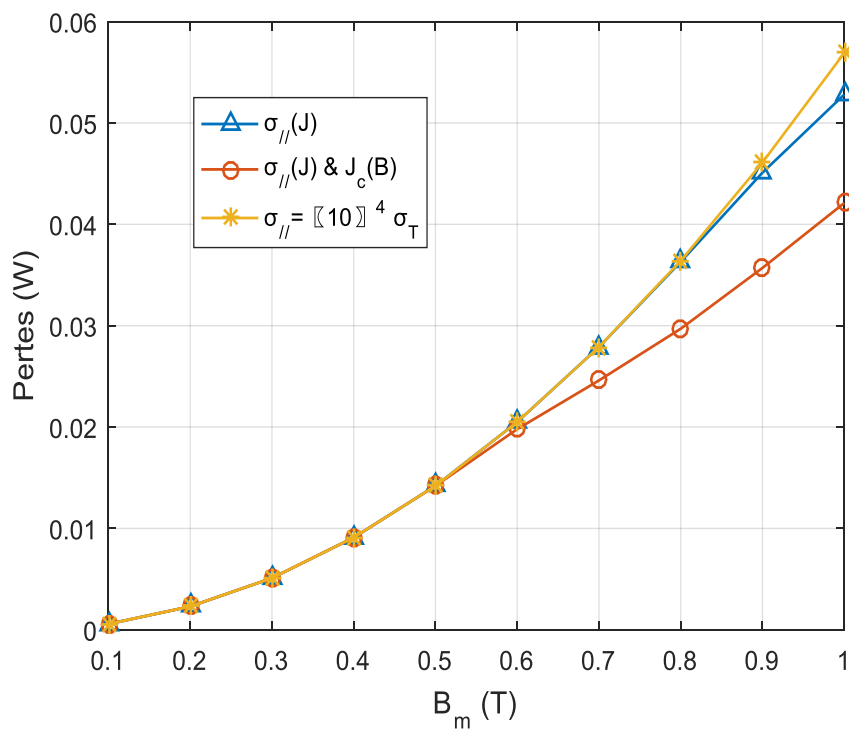


Fig III.6. Effet de la prise en compte de  $J_c(B)$  dans les deux domaines temporel et fréquentiel

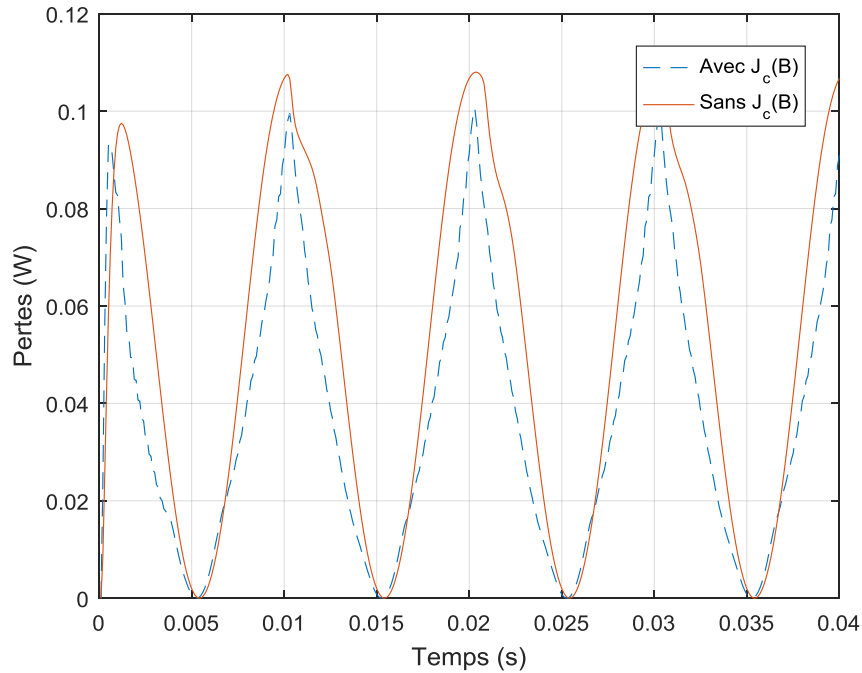


Fig III.7. Evolution des pertes instantanées dans le ruban avec et sans prise en compte de la dépendance de  $J_c(B)$  ( $B_m = 1T$ ,  $f = 50Hz$ )

## III.2 Calcul des pertes AC dans un cube supraconducteur isotrope soumis à un champ magnétique externe, à variation sinusoïdale dans le temps

### III.2.1 Description du système modélisé

Dans cette partie on applique cette approche à la modélisation des pertes par AC dans un cube supraconducteur soumis à un champ magnétique externe  $\vec{B}^s$  uniforme sinusoïdal, perpendiculaire à une des faces du cube (Fig.III.8).

Conformément aux résultats publiés dans la littérature, deux cas sont étudiés :

- Un cube supraconducteur de 2mm de côtés ( $c=2mm$ ), avec un exposant de fluage  $n=10$  [Makong 2016 ; Makong 2017]. Dans ce cas, les auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis avec une formulation en H.
- Un cube supraconducteur de 10mm de côtés ( $c=10mm$ ), avec un exposant de fluage  $n=25$  [Berger. et al. 2017]. Dans ce cas, les auteurs ont utilisé plusieurs formulations résolues par éléments finis.

Une résistivité résiduelle ( $\rho_0 = 10^{-14} \Omega.m$ ) est rajoutée à la loi de puissance afin d'éviter l'instabilité numérique due à une résistivité nulle, lorsque  $J=0$ . Les caractéristiques des systèmes des deux cas modélisés sont données dans le tableau III.2. Les pas des discrétisations spatiale et temporelle sont choisis de telle sorte de se mettre dans des conditions proches de celles des travaux publiés, et auxquels nous comparons nos résultats.

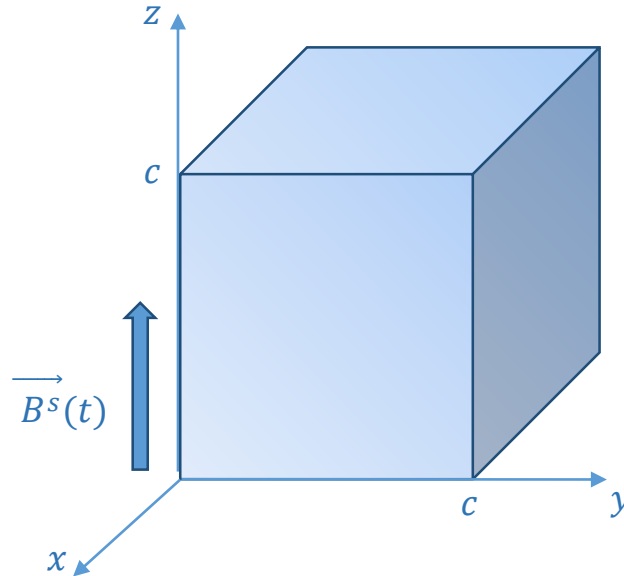


Fig III.8. Cube supraconducteur soumis à un champ magnétique externe

Tableau III.2. Caractéristiques des systèmes des deux cas modélisés

Paramètres	Cas 1	Cas 2
$E_c$	$10^{-4} V/m$	$10^{-4} V/m$
$J_c$	$10^8 A/m^2$	$2.5 \times 10^6 A/m^2$
$n$	10	25
$f$	50Hz	50Hz
$B_m$	0.1T	5mT
Coté (c)	2mm	10mm
Discrétisation spatiale : $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$	0.25mm	1mm
Discrétisation temporelle : $\Delta t$	$5.10^{-5} s$	$5.10^{-5} s$
$\vec{B}^s = B_m \sin(2\pi f) \vec{e}_z$		

### III.2.2 Résultats et validation

#### Cas 1 :

Les résultats présentés dans cette partie sont donnés sans la méthode de relaxation ( $\alpha = 1$ ). En effet, étant donnée la faible valeur du coefficient de fluage ( $n=10$ ), la relaxation ne s'est pas avérée nécessaire pour la convergence du modèle. Les courbes de la figure III.9 représentent les pertes AC instantanées dans le cube sur une période avec un régime transitoire qui dure de 6 ms. On observe un léger décalage dans le temps entre nos résultats et les résultats publiés [Makong 2016 ; Makong 2017], qui peut être dû à la différence entre les maillages utilisés, ce qui affecte la diffusion du champ magnétique dans le matériau. Le régime transitoire dure environ 6 ms. Les pertes moyennes sont calculées lorsqu'on atteint le régime permanent, soit :  $P_{AC}$  moyennes =  $2.9mW$  en appliquant Newton Raphson sans  $J_c(B)$  et  $P_{AC}$  moyennes =  $3.8mW$  avec  $J_c(B)$ . Le temps de calcul est de 3.5 minutes alors qu'il est de 2 à 3 heures pour le modèle de référence [Makong 2016 ; Makong 2017].

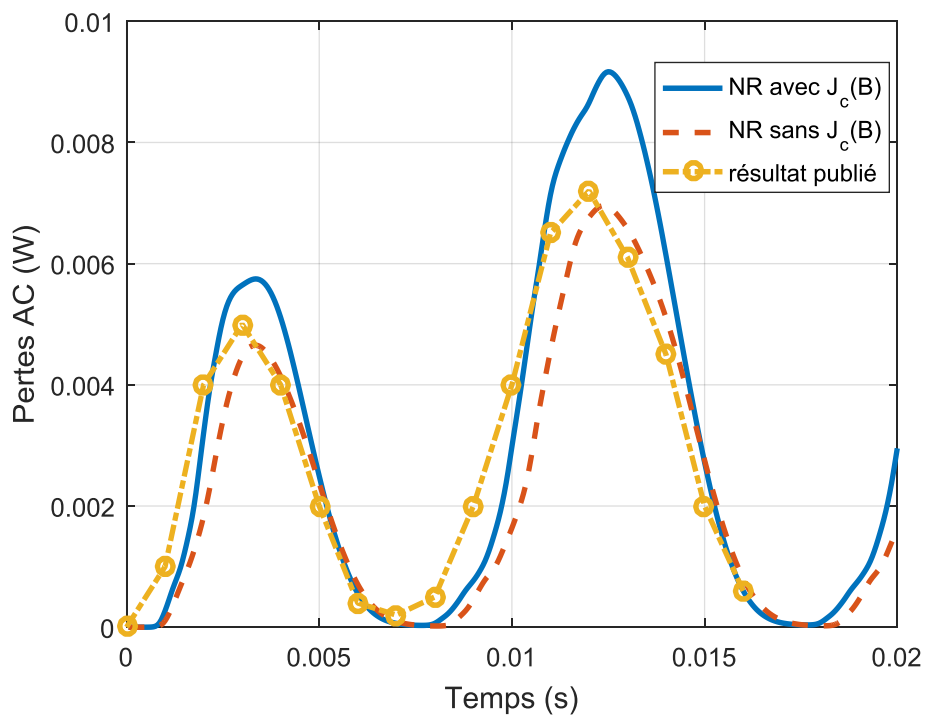


Fig III.9. Evolution des pertes AC dans le cube sur une période

La figure III.10. montre la densité de courant normalisée  $J_x/J_c$ , à différents instants, afin de voir la variation de pénétration partielle en fonction de temps dans le plan (y-z) pour 3 valeurs de x : d/6; d/2 et 5d/6. Ainsi qu'on présente la distribution des courants induits qui circulent loin du centre du cube dans le plan (x-y) perpendiculaire au champ appliqué (pour z = 0.0011).

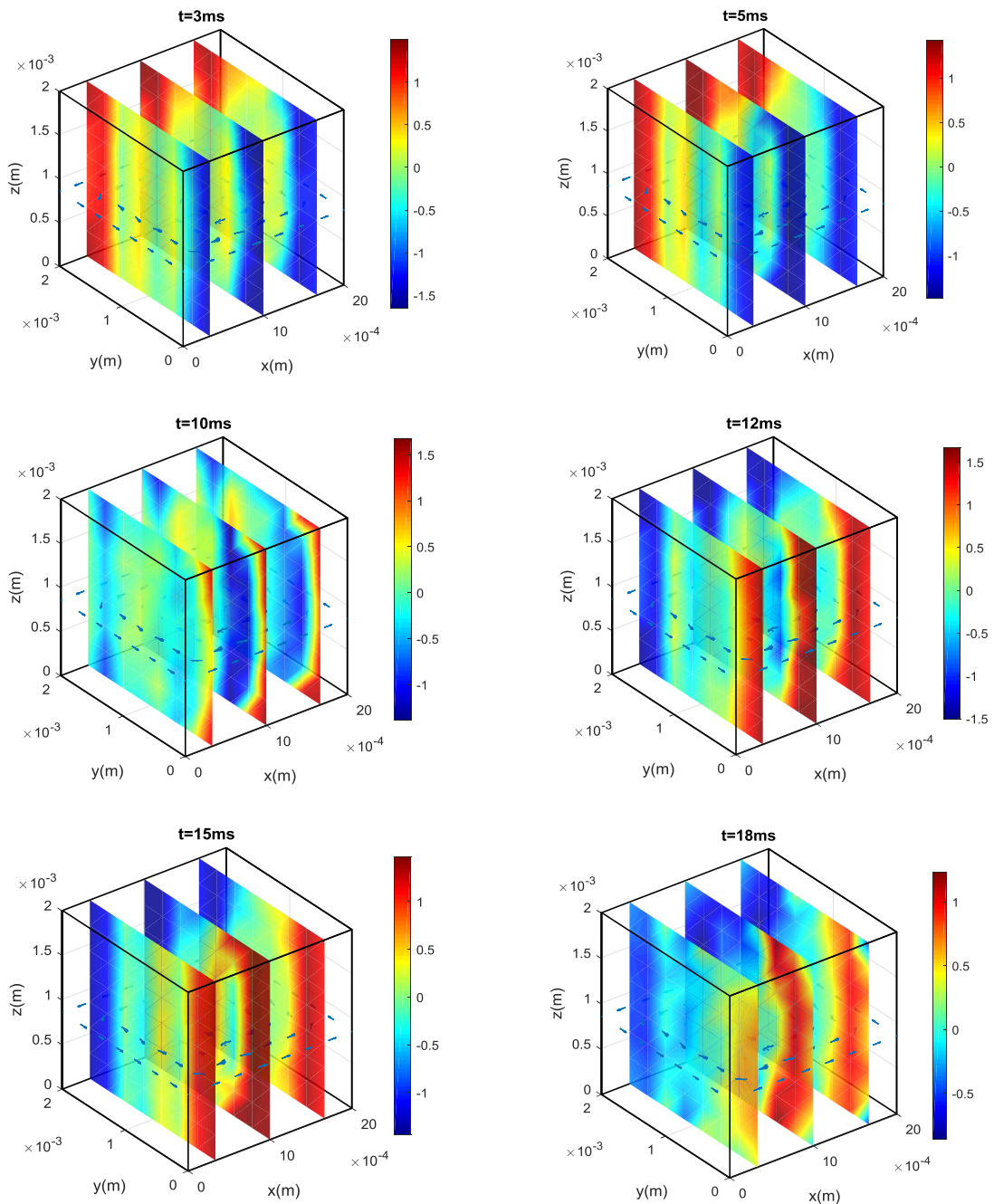


Fig III.10. Densité de courant normalisée  $J_x/J_c$  à différents instants pour  $B_m = 0.1T$  dans le plan (y-z) pour 3 valeurs de x : d/6; d/2 et 5d/6

La figure III.10 présente les évolutions dans le temps de  $J$  en pénétration incomplète. Les images correspondent à un champ magnétique maximal en valeur absolue ( $t = 5\text{ms}$  et  $t = 15\text{ms}$ ) et à un champ nul ( $t = 10\text{ms}$ ) et les autres images correspondent à des champs appliqués différents de  $(0, \pm B_m)$ . On observe une pénétration progressive du champ et des courants induits avec l'augmentation du champ magnétique, et une inversion des courants depuis la surface quand le champ magnétique décroît. À l'instant  $t=10\text{ms}$ , qui correspond à un champ magnétique appliqué nul  $\vec{B}^s = B_m \sin(\pi) \vec{e}_z = 0$ ; la densité de courant induit n'est pas vraiment nulle, et existe du fait de la variation dans le temps de  $B^s(t)$  et du comportement non linéaire du supraconducteur.

### **Cas 2 :**

Dans cette partie, on modélise un cube supraconducteur de côté  $c = 1\text{cm}$  soumis à un champ magnétique externe variable dans le temps, qui correspond à un exemple traité dans la littérature [Berger. et al. 2017], et auquel nous allons comparer nos résultats. Les résultats présentés dans cette partie sont obtenus en utilisant la méthode de relaxation ( $\alpha = 1.4$ ). En effet, tel que le montre la figure III.11, et, contrairement au cas précédent, la variation du facteur de relaxation affecte de manière significative le résultat des pertes, et les résultats les plus proches de ceux publiés sont obtenus pour  $\alpha = 1.4$ . Le temps de calcul varie entre 12.95 min pour  $\alpha = 1.5$  et 14,5 minutes pour  $\alpha = 1$ . Le calcul diverge pour  $\alpha > 1.5$ .

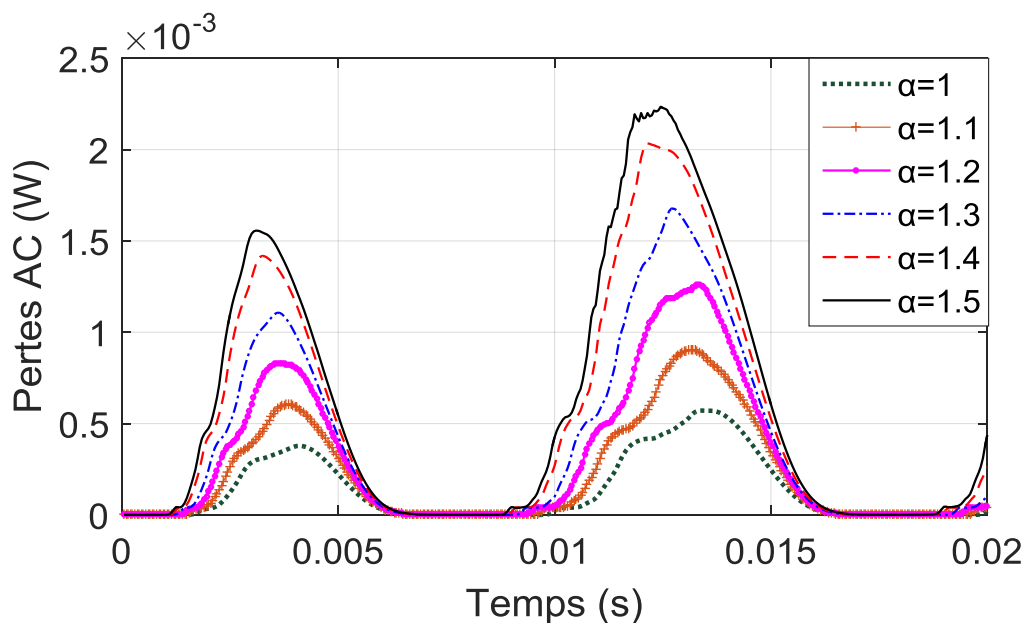


Fig III.11. Influence du coefficient de relaxation sur les résultats des pertes instantanées pour ( $n=25$ ).



La discrétisation en différences finies choisi pour le cube est effectuée avec les pas d'espaces tels que  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 10^{-3}m$ , pour un nombre final de 1000 éléments. On applique un champ magnétique externe uniforme variant sinusoidalement au cours du temps avec une fréquence  $f$ ;  $\vec{B}^s = B_m \sin(2\pi ft) \vec{e}_z$ . Les données et les figures ci-dessous montrent la variation des pertes AC ainsi que la répartition de la densité du courant dans le cube. Le pas de temps choisi est de  $\Delta_t = 5.10^{-5}s$ . Les paramètres utilisés sont donnés dans le tableau III.2 [Berger. et al. 2017].

Le champ magnétique appliqué suivant l'axe de z est uniforme d'amplitude  $B^m$  et de fréquence  $f = 50 Hz$ . On peut estimer la densité de flux de pénétration complète pour notre géométrie par la formule suivante [Berger. et al. 2017] :

$$B_p = \frac{\mu_0 J_c d}{2} = 15.7 mT \quad (III. 3)$$

Pour une pénétration partielle, on applique un champ magnétique d'amplitude  $B_m = 5mT < B_p$ .

Les grandeurs physiques telles que l'induction magnétique, la densité de courant et les pertes, ont été calculées au régime permanent.

Le calcul des éléments de la matrice globale du système à chaque pas de temps s'est déroulé en 10 secondes. La résolution du système matriciel et le calcul de la densité de courant et du champ électrique à chaque itération se fait en 2 à 4 secondes. Le temps total pour la résolution de ce problème sur une période est de 13.8 minutes pour un schéma temporel de 400 pas par période ; tandis qu'avant le reconditionnement de la matrice globale et avant de relaxer la solution le temps de calcul était de 218.2 minutes.

La figure III.12 permet de comparer les pertes AC instantanées sur une période dans le cube aux résultats publiés [Berger. et al. 2017], le calcul dure dans notre cas 13.8 minutes, alors qu'il est de 6.4 à 134 minutes dans les résultats publiés. On calcule les pertes moyennes AC sur une demi-période après un régime transitoire de 5 ms :  $P_{AC} moyennes = 7.14mW$  ; les pertes moyennes AC dans les résultats publiés varient entre 7.9 et 8.4 mW. Etant donnée la faible valeur du champ magnétique appliqué, l'influence de la variation de  $J_c(B)$  n'est pas significative.

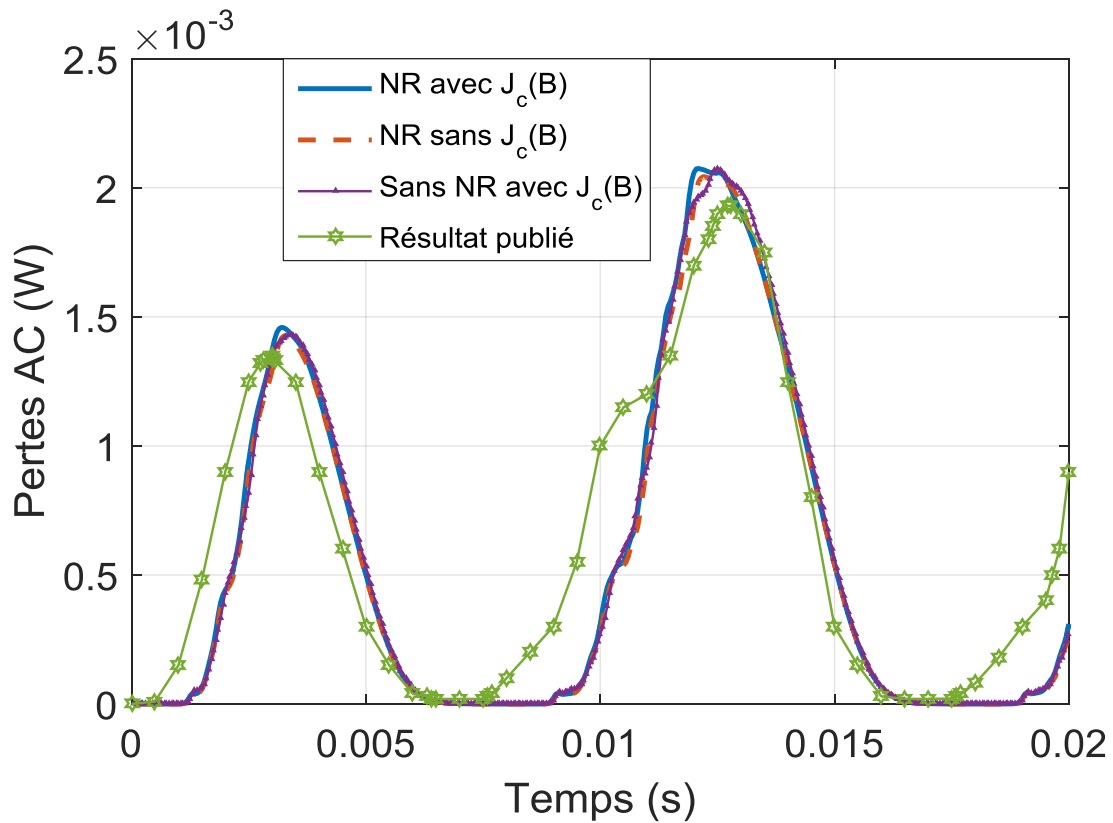


Fig III.12. Comparaison des pertes AC instantanées dans le cube sur une période

On présente dans la figure III.13 la densité de courant normalisée  $J_x/J_c$ , à différents instants, afin de voir la variation de pénétration partielle en fonction de temps dans le plan (y-z) pour 3 valeurs de x : d/6; d/2 et 5d/6.

On présente également dans la figure III.13 dans le plan x-y perpendiculaire au champ appliqué (pour  $z = 0.005$ ) la distribution des courants induits qui change en fonction de  $B^s$  appliqué. Du fait que le champ maximal d'application est inférieur à la densité de flux de pénétration complète  $B_p$ , on a une pénétration partielle du champ dans le cube, ce qui est observé lorsque le champ appliqué atteint sa valeur maximale à l'instant  $t=5\text{ms}$ .

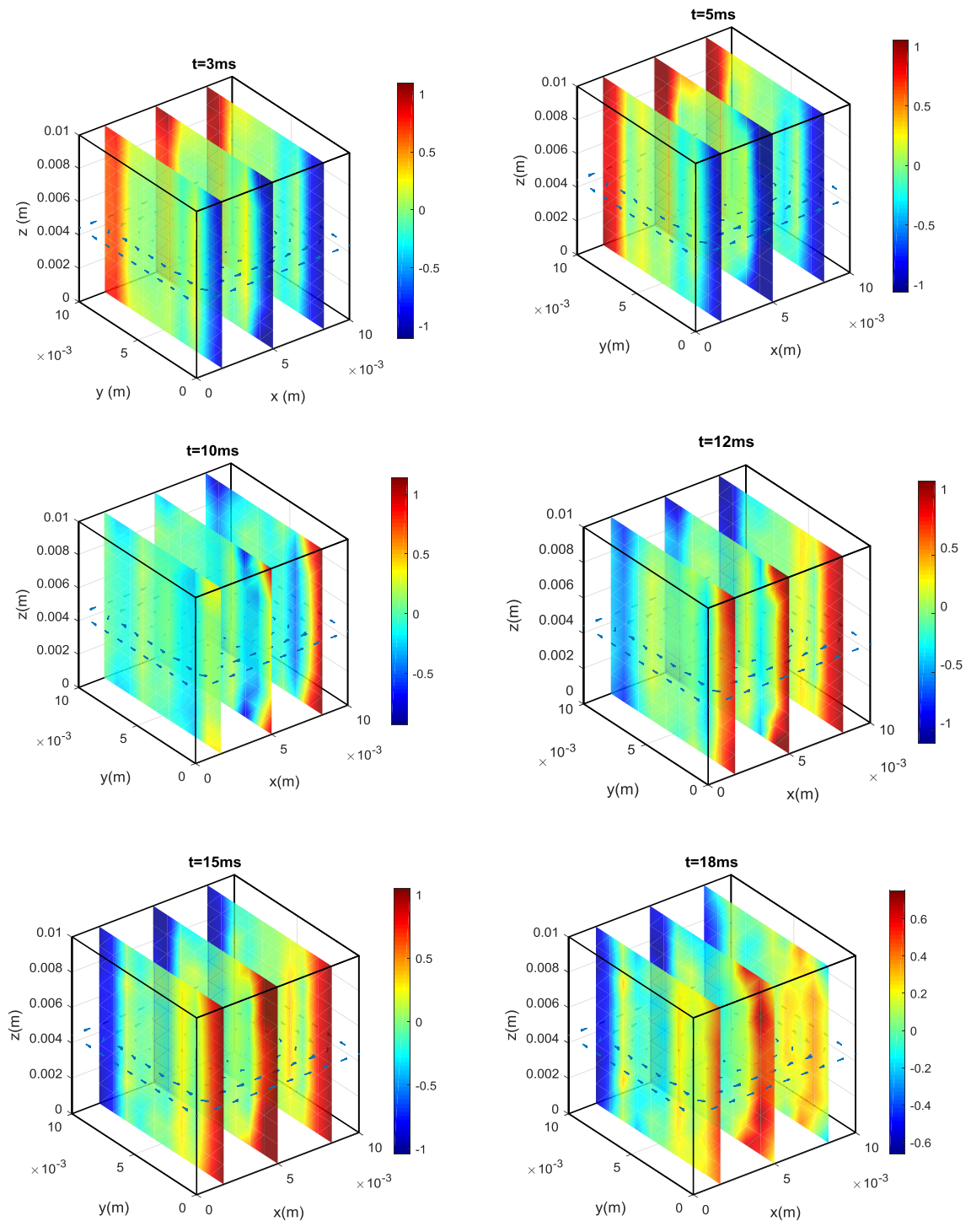


Fig III.13. Densité de courant normalisée  $J_x/J_c$  à différents instants pour  $B_m = 5mT$  dans le plan (y-z) pour 3 valeurs de x : d/6; d/2 et 5d/6

## Synthèse des résultats

Le tableau suivant présente une synthèse des résultats obtenus pour les deux cas étudiés.

Tableau III.3. Synthèse des résultats obtenus

	Cas 1	Cas 2
Puissance moyenne calculée	2.9mW	7.14mW
Puissance moyenne publiée	3.1mW	7.9 – 8.4mW
Erreur relative	0.069	0.106
Temps de calcul ( <i>minutes</i> )	3.5 - 3.8	6.11 – 14 (6.11 min sans NR)
Temps de calcul pour les modèles publiés ( <i>minutes</i> )	120-180	6.4– 134

### III.3 Etude de l'influence du paramètre de fluage (n) sur le temps de calcul

Dans le dernier cas étudié, nous avons fait varier l'exposant n de la loi en puissance, afin d'étudier son influence sur le temps de calcul. Comme le montrent les résultats présentés dans le Tableau III.4, ce paramètre n'influe pas de manière significative sur le nombre d'itérations et le temps de calcul.

Tableau III.4. Synthèse des résultats d'influence du paramètre de fluage n

n	5	10	15	20	25	30
Temps de calcul (min)	14.08	13.9	14.1	14.12	13.8	13.87
Nb d'itérations	2078	2120	2118	2129	2128	2110

## Conclusion

Nous avons mis en œuvre un code de calcul à base du modèle développé, que nous avons implémenté sous Matlab. A des fins de validation, nous avons considéré trois exemples où nous avons comparé les résultats à un modèle analytique et à des résultats publiés dans la littérature. Ces exemples nous ont permis d'apprécier les performances du modèle, et de mettre en évidence quelques phénomènes électromagnétiques liés aux propriétés non-conventionnelles des supraconducteurs. Nous avons par ailleurs montré que pour le calcul des pertes par courants induits, une modélisation dans le domaine fréquentiel non linéaire est suffisante. D'autre part, pour les faibles champs, la variation du courant critique en fonction du champ magnétique peut être négligée, et le matériau peut être dans ce cas modélisé comme un matériau linéaire fortement anisotrope.

Le calcul des courants induits dans un ruban HTS composite n'a pas nécessité de reconditionnement de la matrice globale, contrairement au calcul dans les supraconducteurs massifs. Ceci est dû à la présence de la matrice qui garantit une certaine valeur de la conductivité quel que soit l'état électromagnétique du matériau.

Afin d'améliorer la convergence et la rapidité de calcul, nous avons appliqué une relaxation. Nous avons pu mettre en évidence les avantages et les inconvénients d'une telle approche. Les temps de calcul sont faibles comparés à ceux des résultats publiés. La relaxation s'est avérée plus utile dans le cas de la modélisation du cube supraconducteur avec un fort paramètre de fluage ( $n$ ). Si la précision est nettement améliorée, le temps de calcul n'est que faiblement affecté.

Dans le cas des HTS massifs, nous avons appliqué l'algorithme de Newton Raphson pour accélérer la convergence. Dans ce cas, nous avons montré que cette méthode dans sa version classique ne marche pas, et qu'une version avec facteur d'amortissement est nécessaire.

# Conclusion générale et perspectives

L'objectif de cette thèse était de développer des approches de modélisation rapides pour le dimensionnement et l'optimisation des systèmes à base de supraconducteurs. Nous avons repris un modèle développé précédemment pour le calcul du champ électromagnétique dans les matériaux composites à fibres de carbone dans le domaine fréquentiel, et nous l'avons adapté à la modélisation des supraconducteurs multi-filamentaires parcourus par des courants alternatifs sinusoïdaux ou soumis à des champs magnétiques externes à variation sinusoïdale dans le domaine temporel, en introduisant la non-linéarité des phénomènes électromagnétiques et leurs interdépendances, ce qui impose une approche 3D dans le temps, avec les problèmes de stabilité et de convergence, liés aux méthodes de discrétisation choisies, et, pour lesquels nous avons apporté des solutions.

Le modèle développé tient compte naturellement de la conservation des densités de courant et du flux magnétique. La partie intégrale permet de ne discrétiser que les parties actives du système, ce qui facilite la prise en compte des dimensions multi-échelles. La formulation est discrétisée en utilisant couplage différences finies – méthode de collocation ; ainsi, la partie différentielle est discrétisée par la méthode des différences finies, et la partie intégrale par une méthode de collocation simplifiée. La partie intégrale conduit à une matrice pleine et présente une singularité à la source. Nous avons proposé une stratégie de réduction de la taille de cette matrice et des méthodes d'évaluation des éléments singuliers.

Les tests de validation nous ont permis d'apprécier les performances du modèle proposé, et, de mettre en évidence quelques phénomènes liés aux propriétés particulières des supraconducteurs. Nous avons notamment montré que pour un calcul des pertes par courants induits, et dans le cas des faibles champs magnétiques appliqués, les supraconducteurs HTC peuvent être modélisés comme des matériaux linéaires fortement anisotropes. Lorsqu'il faut prendre en compte la relation  $J_c(B)$ , nous avons également montré qu'un calcul non linéaire dans le domaine fréquentiel, limité au premier harmonique est suffisant pour le calcul des pertes par courants induits.

En plus de l'évaluation des pertes, le modèle développé est approprié pour l'évaluation de l'aimantation et la caractérisation structurelle des supraconducteurs HTC. Il serait intéressant, à l'avenir, d'améliorer le modèle en utilisant des méthodes de discrétisations plus élaborées, comme les éléments finis, et de compléter le modèle en introduisant un couplage avec la thermique.

# Annexe A

## Algorithmes de construction des différentes matrices

### Algorithme du maillage et de construction des matrices $[Dx]$ , $[Dy]$ , et $[Dz]$

*Déclaration des constantes : Longueur = Long, largeur = larg et l'épaisseur = Ep*

*Nombre totale d'éléments :  $Ne = M \times N \times L$*

*Déclaration des pas de discrétisation :  $\Delta_x = \frac{Long}{M}$ ,  $\Delta_y = \frac{larg}{N}$  et  $\Delta_z = \frac{Ep}{L}$*

*Définir la taille des sous matrices :  $[Dx], [Dy], [Dz] \rightarrow (Ne \times Ne)$*

*Définir la taille de la matrice rot :  $C \rightarrow (3Ne \times 3Ne)$*

*pour  $i = 1$  à  $M$ ;                      pour  $j = 1$  à  $N$ ;                      pour  $k = 1$  à  $L$ ;*

*$n = i + (j - 1)N + (k - 1)MN$ ;*

*$x_n = (i - 1)\Delta_x$ ;       $y_n = (j - 1)\Delta_y$ ;                       $z_n = (k - 1)\Delta_z$ ;*

*fin pour;                                      fin pour;                                      fin pour;*

*pour  $n = 1$  à  $Ne$ ;*

*Si  $n > 1$ ;                       $[Dx](n, n - 1) = -1/2\Delta_x$ ;                      fin si;*

*Si  $n < MNL$ ;                       $[Dx](n, n + 1) = 1/2\Delta_x$ ;                      fin si;*

*Si  $n > M$ ;                       $[Dy](n, n - M) = -1/2\Delta_y$ ;                      fin si;*

*Si  $n < MNL - M$ ;                       $[Dy](n, n + M) = 1/2\Delta_y$ ;                      fin si;*

*Si  $n > MN$ ;                       $[Dz](n, n - MN) = -1/2\Delta_z$ ;                      fin si;*

*Si  $n < MNL - MN$ ;                       $[Dz](n, n + MN) = 1/2\Delta_z$ ;                      fin si;*

*fin pour;*



$$\begin{array}{ll}
C(1 \rightarrow Ne, Ne + 1 \rightarrow 2Ne) = -[Dz]; & C(1 \rightarrow Ne, 2Ne + 1 \rightarrow 3Ne) = [Dy]; \\
C(Ne + 1 \rightarrow 2Ne, 1 \rightarrow Ne) = [Dz]; & C(Ne + 1 \rightarrow 2Ne, 2Ne + 1 \rightarrow 3Ne) = -[Dx]; \\
C(2Ne + 1 \rightarrow 3Ne, 1 \rightarrow Ne) = -[Dy]; & C(2Ne + 1 \rightarrow 3Ne, Ne + 1 \rightarrow 2Ne) = [Dx];
\end{array}$$

### Algorithme de déclaration de la matrice de résistivité

*Définir la taille de  $R \rightarrow (3Ne \times 3Ne)$*

*pour  $i = 1$  à  $Ne$ ;*

*$R(i, i) = \rho_{xx}(i); \quad R(i + Ne, i + Ne) = \rho_{yy}(i); \quad R(i + 2Ne, i + 2Ne) = \rho_{zz}(i);$*

*fin pour;*

## Algorithme pour calculer les éléments non singuliers de la matrice intégrale $M$

Définir la taille des sous matrices :  $M_x, M_y, \text{ et } M_z \rightarrow (Ne \times Ne)$

Définir la taille de  $M \rightarrow (3Ne \times 3Ne)$

$$\text{Volume élémentaire } V = \Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z$$

pour  $i = 1$  à  $Ne$ ;

$$d = \sqrt{(k \times \Delta_x)^2 + (k \times \Delta_y)^2 + (k \times \Delta_z)^2};$$

pour  $j = i + 1$  à  $Ne$ ;

$$r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2};$$

Si  $r < d$ ; alors

$$M_x(i, j) = \frac{\mu_0 V (x_i - x_j)}{4\pi r^3}; \quad M_y(i, j) = \frac{\mu_0 V (y_i - y_j)}{4\pi r^3}; \quad M_z(i, j) = \frac{\mu_0 V (z_i - z_j)}{4\pi r^3};$$

$$M_x(j, i) = -M_x(i, j);$$

$$M_y(j, i) = -M_y(i, j);$$

$$M_z(j, i) = -M_z(i, j);$$

fin si;

fin pour;

fin pour;

$$M(1 \rightarrow Ne, Ne + 1 \rightarrow 2Ne) = M_z;$$

$$M(1 \rightarrow Ne, 2Ne + 1 \rightarrow 3Ne) = -M_y;$$

$$M(Ne + 1 \rightarrow 2Ne, 1 \rightarrow Ne) = -M_z;$$

$$M(Ne + 1 \rightarrow 2Ne, 2Ne + 1 \rightarrow 3Ne) = M_x;$$

$$M(2Ne + 1 \rightarrow 3Ne, 1 \rightarrow Ne) = M_y;$$

$$M(2Ne + 1 \rightarrow 3Ne, Ne + 1 \rightarrow 2Ne) = -M_x;$$

## Algorithme pour définir les conditions aux limites

$$CLM(1 \rightarrow 3Ne, 1 \rightarrow 3Ne) = 1;$$

$$CLS(1 \rightarrow 3Ne) = 1;$$

### **Conditions aux limites sur $\Gamma_x$**

*pour*  $i = 1 \& M$ ;

*pour*  $j = 1 \text{ à } N$ ;                      *pour*  $k = 1 \text{ à } L$ ;

$$n = i + (j - 1)N + (k - 1)MN;$$

$$CLM(n + Ne, 1 \rightarrow 3Ne) = 0; \quad CLM(1 \rightarrow 3Ne, n + Ne) = 0;$$

$$CLM(n + 2Ne, 1 \rightarrow 3Ne) = 0; \quad CLM(1 \rightarrow 3Ne, n + 2Ne) = 0;$$

$$CLM(n + Ne, n + Ne) = 1; \quad CLM(n + 2Ne, n + 2Ne) = 1;$$

$$CLS(n + Ne) = 0; \quad CLS(n + 2Ne) = 0;$$

*fin pour*;

*fin pour*; *fin pour*;

### **Conditions aux limites sur $\Gamma_y$**

*pour*  $j = 1 \& N$ ;

*pour*  $i = 1 \text{ à } M$ ;                      *pour*  $k = 1 \text{ à } L$ ;

$$n = i + (j - 1)N + (k - 1)MN;$$

$$CLM(n, 1 \rightarrow 3Ne) = 0; \quad CLM(1 \rightarrow 3Ne, n) = 0;$$

$$CLM(n + 2Ne, 1 \rightarrow 3Ne) = 0; \quad CLM(1 \rightarrow 3Ne, n + 2Ne) = 0;$$

$$CLM(n, n) = 1; \quad CLM(n + 2Ne, n + 2Ne) = 1;$$

$$CLS(n) = 0; \quad CLS(n + 2Ne) = 0;$$

*fin pour*;

*fin pour*; *fin pour*;

**Conditions aux limites sur  $\Gamma_z$**

*pour*  $k = 1 \& L;$

*pour*  $i = 1 \text{ à } M;$                       *pour*  $j = 1 \text{ à } N;$

$n = i + (j - 1)N + (k - 1)MN;$

$CLM(n, 1 \rightarrow 3Ne) = 0;$                        $CLM(1 \rightarrow 3Ne, n) = 0;$

$CLM(n + Ne, 1 \rightarrow 3Ne) = 0;$                        $CLM(1 \rightarrow 3Ne, n + Ne) = 0;$

$CLM(n, n) = 1;$                                        $CLM(n + Ne, n + Ne) = 1;$

$CLS(n) = 0;$      $CLS(n + Ne) = 0;$

*fin pour;*

*fin pour; fin pour;*

## Annexe B

# Méthode de Newton Raphson avec un facteur d'amortissement

Il existe différentes méthodes pour résoudre un problème non linéaire, telle que la méthode de Newton-Raphson, et la méthode de point fixe pour laquelle il faut chercher une fonction contractante, ce qui rend son utilisation difficile dans notre cas.

La méthode de Newton Raphson peut se généraliser à la recherche des zéros d'une fonction  $F: R^n \rightarrow R^m$  qui devra être différentiable. Dans notre cas, l'itération principale dans la méthode est de la forme :

$$T_{i+1} = T_i + dT \quad (\text{B.1})$$

$$dT \text{ vérifie l'équation : } J(F_i).dT = -F_i \quad (\text{B.2})$$

$J(F_i)$  est la matrice jacobienne de la fonction  $F_i = \overline{\overline{MGr}} \times \overline{T}_i - \overline{Sr}_i$

Avec  $F_i = F(T_i)$

Et donc l'algorithme pour cette méthode sera sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 \text{ donnée} \\ \text{Chercher } dT \text{ solution de } J(F_i).dT = -F_i \\ T_{i+1} = T_i + dT \\ \text{Test d'arrêt } \|dT\| < \varepsilon \end{array} \right.$$

Or, pour appliquer la méthode de Newton Raphson, on a besoin de calculer l'inverse de la matrice Jacobienne de la fonction, ce qui demande un temps de calcul très important pour des problèmes avec beaucoup de variables, et ceci devient vite impraticable puisqu'on intègre la non linéarité dans la matrice globale qu'on actualise à chaque itération. Donc la méthode proposée dans ce cas est de calculer la matrice Jacobienne  $J(F_i)$  et de résoudre par

des méthodes itératives l'équation (B.2), comme par exemple la méthode de bi-gradient conjugué.

S'il existe des racines multiples, la convergence de la méthode de NR peut devenir très lente ; en plus l'algorithme de cette méthode ne converge que lorsque son point de départ est très proche de la solution.

Il existe des approches qui combinent la convergence super-linéaire locale (comme celle de Newton) avec des propriétés de convergence globale. Une telle méthode s'obtient en multipliant l'incrément dans la méthode de Newton avec un facteur d'amortissement  $\beta$  :

$$T_{i+1} = T_i + \beta dT \quad (\text{B.3})$$

Le facteur  $\beta$  est choisi de manière à satisfaire :

$$|F_{i+1}|^2 < |F_i|^2$$

on évite ainsi une divergence et/ou un comportement cyclique.

### **Théorème**

Si  $F \in C^1$  et  $F'(T_i) \neq 0$ , alors il existe  $\beta > 0$  tel que  $T_{i+1} = T_i + \beta dT$ .

En effet, pour  $\beta$  suffisamment petit on a :  $F'(c)/F'(T_i) > 0$  Pour tout  $c \in [T_i, T_{i+1}]$

Dès lors, grâce au développement de Taylor et à (B.3) on a :

$$F(T_{i+1}) = F(T_i) + F'(c)(T_{i+1} - T_i)$$

$$F(T_{i+1}) = F(T_i) + F'(c)(\beta(-F(T_i)/F'(T_i)))$$

$$F(T_{i+1}) = F(T_i) - \beta F(T_i)(F'(c)/F'(T_i))$$

$$|F(T_{i+1})|^2 = |F(T_i)|^2 - 2\beta |F(T_i)|^2 (F'(c)/F'(T_i)) + O(\beta^2)$$

Pour  $\beta > 0$  suffisamment petits.

Et donc on modifie la méthode de Newton Raphson pour une équation  $F(T) = 0$

si  $F'(T_i) \neq 0$  alors :  $T_{i+1} = T_i + \beta dT$

En recherchant un facteur  $\beta$  qui satisfait :  $|F_{i+1}| < |F_i|$

## Algorithme

$T_0$  donnée ;  $\beta = 1$ ;

Calcul  $dT$  tel que  $dT = -J(F_i)^{-1} \cdot F_i$ ;

$T_{i+1} = T_i + \beta dT$ ;

$\beta = \frac{\beta}{2}$ ;

Test d'arrêt  $|F_{i+1}| < |F_i|$ ;

# Annexe C

## Modèle analytique de Campbell

Le modèle de Campbell donne les pertes par couplage dans un ruban supraconducteur soumis à un champ magnétique externe, à variation sinusoïdale dans le temps, dans la limite où la variation  $J_c(B)$  peut être négligée. En supposant que le champ magnétique  $B$  à l'intérieur du ruban supraconducteur est uniforme, les courants induits sont proportionnels à la dérivée temporelle  $\frac{\partial B}{\partial t}$  du champ magnétique interne  $B$ , et on a [Campbell 1982]:

$$B = B^a - \tau \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{C.1})$$

Où  $B^a$  est le champ magnétique appliqué.

$\tau$  est la constante de temps de la pénétration du flux magnétique dans le ruban, qui est liée à sa géométrie et à la résistivité de la matrice.

En intégrant l'équation (C.1), on obtient les pertes par unité de volume, exprimées en (J/m<sup>3</sup>/cycle) dans la relation (C.2).

$$Q_c = \frac{B_m^2}{2\mu_0} \left[ 2\pi\chi \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right] \quad (\text{C.2})$$

Avec (voir Fig.III.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi = \frac{\pi W_t}{4T_t} \\ \tau = \frac{L_t^2 \sigma_m \mu_0}{\pi^2 \chi} \end{array} \right.$$

Où  $\chi$  est le facteur de démagnétisation du ruban.



## Annexe D

# Evolution des pertes AC suite au fractionnement d'un cube supraconducteur

Dans cette partie on applique notre modèle à l'évaluation de l'évolution des pertes AC dans le cube supraconducteur étudié dans le Cas 2 du chapitre III, suite à son fractionnement en parties isolées électriquement. L'intérêt est à la fois d'apprécier les performances du modèle pour la simulation des systèmes multi domaines, et d'étudier l'évolution des pertes, ce qui présente un intérêt pour certaines applications impliquant les supraconducteurs HTC massifs, sous champ magnétique variable.

Les mêmes paramètres que ceux du chapitre III sont utilisés. Le cube est subdivisé en deux parties égales soumises à un champ magnétique externe  $\vec{B}^s$  uniforme sinusoïdal, perpendiculaire suivant l'axe de z (Fig. D.1).

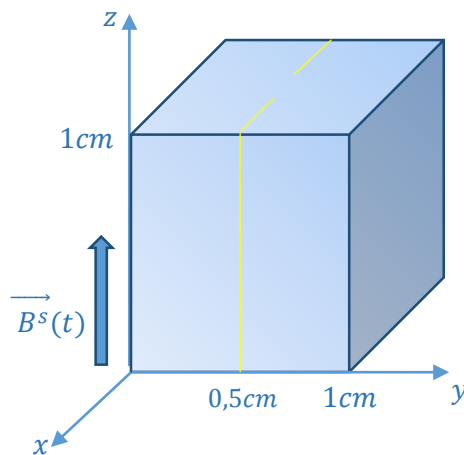


Fig D.1. Cube supraconducteur subdivisé en deux parallélépipèdes isolés électriquement soumis à un champ magnétique externe

La figure D.2 permet de comparer les pertes AC instantanées, sur une période, dans le cube pour trois cas : le premier cas est celui qu'on a déjà traité dans le chapitre III, qui correspond à la modélisation du cube entier ; le deuxième et troisième cas comparent les pertes AC en découpant le cube en deux parties égales, avec et sans couplage électromagnétique entre les deux. Le tableau D.1 présente une synthèse des résultats obtenus

pour les trois cas étudiés. Les pertes moyennes AC sont calculées sur une demi-période après un régime transitoire de 5 ms. Le troisième cas où l'on modélise les deux parties, en négligeant le couplage électromagnétique entre elles, correspond à une modélisation symétrique c.-à-d. à la modélisation d'un seul parallélépipède, et les pertes sont multipliées par un facteur de deux d'où le gain de temps de calcul. Comme attendu, la subdivision du cube permet de diminuer les pertes AC, même avec couplage magnétique, car le domaine de développement des courants induits est plus restreint par leur fermeture dans les deux parallélépipèdes.

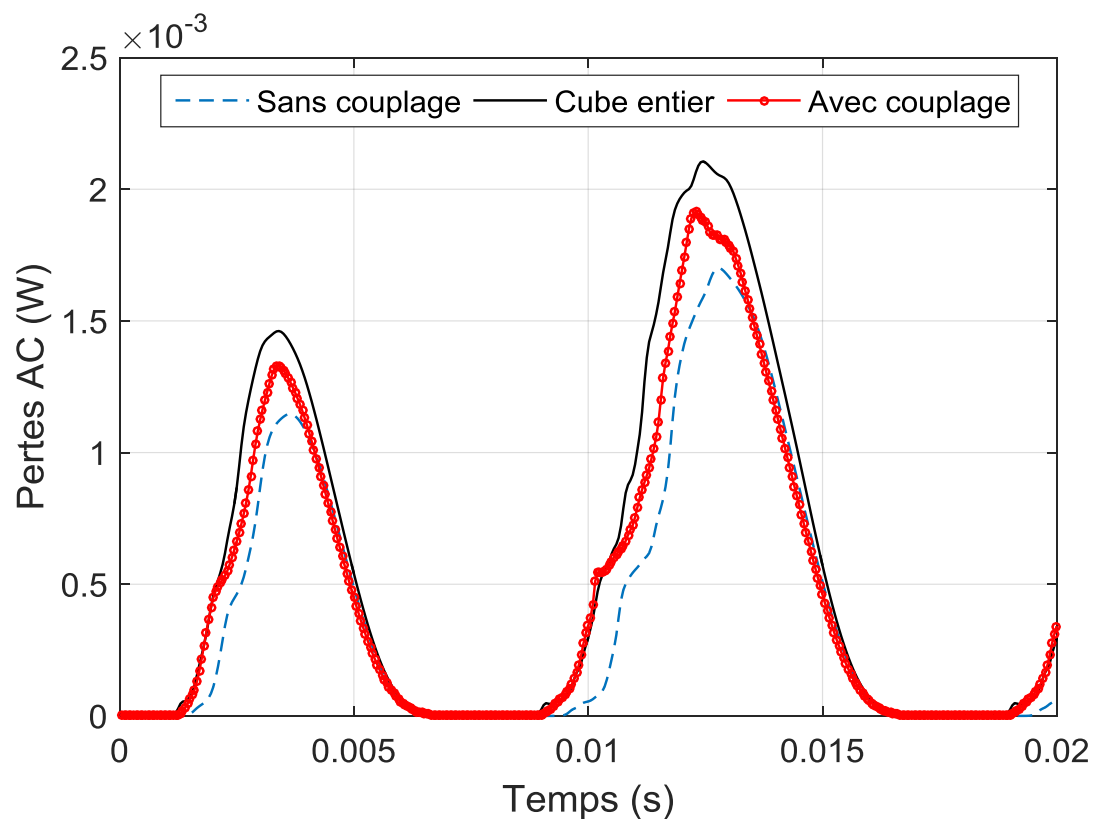


Fig D.2. Comparaison des pertes AC instantanées sur une période pour les trois cas étudiés

Tableau D.1. Synthèse des résultats obtenus

	Cube entier	Cube subdivisé Avec couplage	Cube subdivisé Sans couplage
Pertes totale moyenne $mW$	0.74	0.626	0.539
Temps de calcul (minute)	13.8	17.08	4.56



# Références bibliographiques

- [Baixeras ,1998] BAIXERAS, J. Les supraconducteurs : applications à l'électronique et à l'électrotechnique. Eyrolles, 1998.
- [Berger, 2006] Kévin Berger. Etude des phénomènes couplés magnétothermiques dans les supraconducteurs à haute température. Thèse de Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy I. 2006.
- [Berger, et al. 2008] Kévin Berger, Christophe Guérin, Gérard Meunier, Jean Lévêque, Pascal Tixador. Comparaison de Différents Outils de Calcul pour la Modélisation des Supraconducteurs. MGE 2008 : Matériaux du Génie Electrique, May 2008, Toulouse, France. 2008.
- [Berger, et al., 2016] Kévin Berger, Loïc Quéval, Abelin Kameni, Lotfi Alloui, Brahim Ramdane, et al.. Benchmark on the 3D Numerical Modeling of a Superconducting Bulk. 2016.
- [Berger, et al. 2017] Kévin Berger, Guillaume Escamez, Loïc Quéval, Abelin Kameni, Lotfi Alloui, et al.. Benchmark on the 3D Numerical Modeling of a Superconducting Bulk. 21st International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (Compumag 2017), Jun 2017, Daejeon, South Korea. pp.(ID 110), 2017, Proceedings of the 21st International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields.
- [Berger. et al. 2017] Kévin Berger<sup>1</sup>, Guillaume Escamez<sup>2</sup>, Loïc Quéval<sup>3</sup>, Abelin Kameni<sup>3</sup>, Lotfi Alloui<sup>3,4</sup>, Brahim Ramdane<sup>2</sup> Modélisations 3-D d'un cube supraconducteur, influence du maillage, November 2017.
- [Bonnard, et al., 2015] Charles-Henri Bonnard, Frédéric Sirois, Gaëtan Didier, Bruno Douine, Jean Lévêque. Limiteur de courant de court-circuit supraconducteur résistif : prémices d'un modèle circuit multi-échelle. La Revue 3 E. I, Société de l'électricité, de l'électronique et des technologies de l'information et de la communication, 2015, 82, pp.28-32.
- [Bonnet, 1999] M. Bonnet. Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids. Wiley, 1999.
- [Campbell, 1982] Campbell A. M., A general treatment of losses in multifilamentary superconductors, Cryogenics, 1982, 22, 3-16.

- [Ch Jooss et al 2002] C. Jooss, J. Albrecht, H. Kuhn, S. Leonhardt, and H. Kronmüller, ‘Magneto-optical studies of current distributions in high-Tc superconductors’ \iRep. Prog. Phys., vol. 65, no. 5, p. 651, 2002.
- [Creusé, et al., 2019] Emmanuel Creusé, Patrick Dular, Serge Nicaise. About the gauge conditions arising in Finite Element magnetostatic problems. *Computers and Mathematics with Applications, Computers and Mathematics with Applications* 77 (2019) 1563–1582.
- [Dao, 2006]. Vu Hung Dao. Etude théorique de l’état de vortex dans de nouveaux supraconducteurs: MgB2 et PrOs4Sb12. *Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I*, 2006.
- [Douine, 2001] Bruno Douine. Etude des pertes dans les supraconducteurs à haute température critique. Thèse de Doctorat de l’Université Henri Poincaré, Nancy-I, 2001.
- [Dular, 1994] Patrick DULAR Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires. Thèse de Doctorat de l’Université de Liège 1996.
- [Duron, et al., 2006] J Duron et al Finite-element modelling of superconductors in over-critical regime with temperature dependent resistivity 2006 *J. Phys.: Conf. Ser.* 43 1076
- [Dutoit, et al., 1999] B. Dutoit, M. Sjöström, and S. Stavrev. Bi(2223) Ag sheathed tape  $I_c$  and exponent  $n$  characterization and modelling under DC magnetic field. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 9 (2), pp. 809-812, 1999.
- [Dutykh, 2016] Denys Dutykh. How to overcome the Courant-Friedrichs-Lewy condition of explicit discretizations?. [Research Report] CNRS - LAMA UMR 5127, University Savoie Mont Blanc. 2016
- [Escamez, 2016]. Guillaume Escamez. AC losses in superconductors : a multi-scale approach for the design of high current cables. *Electric power. Université Grenoble Alpes*, 2016.
- [Eunguk Lee, 2004] EUNGUK LEE, M.S., AC loss in superconducting composites continuous and discrete models for round and rectangular cross sections, and comparison to experiments, PhD thesis, School of The Ohio State University, 2004
- [Grigorii, et al. 2013] Grigorii P. Mikitik, Yasunori Mawatari, Andy T. S. Wan and Frédéric Sirois, Senior Member, *IEEE TRANSACTIONS ON APPLIED SUPERCONDUCTIVITY*, VOL. 23, NO. 2, APRIL 2013

- [Grilli, et al 2005] F. Grilli et al. Finite-element method modeling of superconductors: from 2-D to 3-D. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 15 (1), pp. 17-25, 2005.
- [Grilli, et al., 2014] F. Grilli et al. Computation of losses in HTS under the action of varying magnetic fields and currents,” IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 24, no. 1, Feb. 2014, Art. ID 8200433.
- [Grilli, 2016] Francesco Grilli. Numerical Modeling of HTS Applications. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016, 26, 0500408
- [Golovanov, 2013] Cristian Golovanov. Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique: application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement Thèse de Doctorat de l’institut national polytechnique de Grenoble, 2013
- [Hadjidimos, 2000] A. Hadjidimos. Successive overrelaxation (SOR) and related methods. Journal of Computational and Applied Mathematics 123 (2000) 177–199
- [Henrique, D. et al. 2011] Daniel Henrique, Nogueira Dias, Guilherme Gonçalves Sotelo, and Rubens de Andrade, Jr. Study of the Lateral Force Behavior in a Field Cooled Superconducting Linear Bearing. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 21, No. 3, June 2011
- [Kim, 1962] Kim, Y. et al. (1962), “Critical persistent currents in hard superconductors”, Physical Review Letters, vol. 9, No. 7, pp. 306–309.
- [Luong, et al. 1997] H.T. Luong, Y. Marechal, G. Meunier. Computation of 3D current driven eddy current problems using cutting surfaces. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 33 (5), pp. 1314-1317, 1997.
- [Makong 2016] Makong Hell ludovic. Modélisation 3D de supraconducteurs à haute température critique, 2016.
- [Makong 2017] Ludovic Didier Makong Hell Nkatak. 3D modelling of twisted multi-filamentary superconductors. Electromagnetism. Université Paris-Saclay, 2017.
- [Ma, G. et al. 2013] Guang-Tong Ma. Considerations on the Finite-Element Simulation of High-Temperature Superconductors for Magnetic Levitation Purposes. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 23, No. 5, October 2013

- [Masson, 2002] Philippe Masson. Étude d'écrans supraconducteurs à haute température critique massifs. Application à la réalisation d'une machine électrique de conception originale.. Autre. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2002.
- [Menana, 2009] H. MENANA. Modélisation 3D simplifiée pour l'évaluation non destructive des matériaux composites anisotropes. Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes Novembre 2009.
- [Menana, 2011] Menana H., Féliachi M. An integro-differential model for 3D eddy current computation in CFRPs. IEEE Transactions on Magnetics, 2011, 47, 756-763.
- [Menana et al. 2018] H. Menana, M. Farhat, M. Hinaje, K. Berger, B. Douine and J. Lévêque., Eddy current modeling in linear and nonlinear multifilamentary composite materials, OpenPhys. 2018 ; 16 :183-187
- [NEZZAR, 1993] Amar NEZZAR. Mise en œuvre de modèles électromagnétiques 2D et 3D utilisant la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) dans l'optique d'études d'éléments de circuits pour l'intégration monolithique millimétrique. Thèse de doctorat de l'université des Sciences et Technologies de Lille. 28 Juin 1993.
- [Mulder 1993] Mulder G. B. J. and Niessen E. M. J., Coupling losses of multifilamentary superconductors having several concentric regions and mixed matrix, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 1993, 3, 142-145.
- [Norris, 1969]. W. Norris, Calculation of hysteresis losses in hard super-conductors carrying ac : iolated conductors and edges of thin sheets, J. Phys. D : Appl. Phys., vol. 3 (1969).
- [Oomen, 2000] Oomen M. P., AC loss in superconducting tapes and cables, PhD thesis, Twente University, Enschede - Netherlands, 2000.
- [Pratrap. et al. 2015] Siddharth Pratap, Senior Member, IEEE, and Clay S. Hearn. 3-D Transient Modeling of Bulk High-Temperature Superconducting Material in Passive Magnetic Bearing Applications. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 25, No. 5, Octobre 2015.
- [Ren 1996] Zhuoxiang Ren, "Influence of the R.H.S. on the Convergence Behaviour of the Curl-Curl Equation", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 32, no. 3, pp. 665-658, May 1996.

- [Rezzoug, et al. 2003] Abderrezak Rezzoug Jean-Paul Caron Jean Lévêque Denis Netter B. Douine Kévin Berger El Hadj Ailam. Les supraconducteurs : des propriétés aux applications électrotechniques, Conference: EF'2003 Électrotechnique du Futur, At: Gif-sur-Yvette, France December 2003.
- [Safran et al., 2010] Safran, S., Vojenciak, M., Gencer, A. and Gomory, F. (2010), “Critical current and AC loss of DI-BSCCO tape modified by the deposition of ferromagnetic layer on edges”, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 20 No. 5, pp. 2294-2300.
- [Sta02a, 2002] S. Stavrev, B. Dutoit, and N. Nibbio. Geometry considerations for use of Bi-2223/Ag tapes and wires with different models of  $J_c(B)$ . IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 12 (3), pp. 1857-1865, 2002.
- [Sta03, 2003] S. Stavrev, B. Dutoit, and P. Lombard. Numerical modelling and AC losses in multifilamentary Bi-2223/Ag conductors with various geometry and filament arrangement. Physica C, vol. 384 (1-2), pp. 19-31, 2003.
- [Sta02b, 2002] S. Stavrev et al. Comparison of Numerical Methods for Modeling of Superconductors. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 38 (2), pp. 849-852, 2002.
- [Tixador et al., 2003] Pascal TIXADOR, Yves BRUNET. Supraconducteurs – Bases théoriques. Techniques de l'ingénieur.
- [Tixador, et al. 2004] Pascal TIXADOR ; Yves BRUNET., Supraconducteurs, Environnement et applications D2703 v1
- [Vinot, et al. 2000] E. Vinot, G. Meunier, and P. Tixador. Different Formulations to Model Superconductors. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 36 (4), pp. 1226-1229, 2000.
- [Vinot, 2000]. Emmanuel Vinot. Modélisation des supraconducteurs HTC Applications au calcul des pertes AC. Thèse de Doctorat de l'institut national polytechnique de Grenoble, 2000.
- [Willis et al. 2011] Willis, J. O., Coulter, J. Y. and Rupich, M. W. (2011), “n-Value analysis of position-dependent property variability in long-length coated conductors”, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, vol. 21 No. 3, pp. 2988-2991.
- [Ye, C. et al. 2016] Chang-Qing Ye, Guang-Tong Ma, and Jia-Su Wang. Calculation and Optimization of High-Temperature Superconducting Levitation by a Vector Potential Method. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol.. 26, No. 8, December 2016



- [Zhang, et al. 2008] Jianghua Zhang, Youwen Zeng, Jun Cheng, and Xian Tang. Optimization of Permanent Magnet Guideway for HTS Maglev Vehicle With Numerical Methods. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 18, No. 3, Septembre 2008
- [Zheng, et al. 2007] Xiaojing Zheng and Yong Yang. Transition Cooling Height of High-Temperature Superconductor Levitation System. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Vol. 17, No. 4, Decembre 2007
- [Zola 2004] Zola D., Gömöry F., Polichetti M., Strýček F., Seiler E., Hušek I. et al., A study of coupling loss on bi-columnar BSCCO/Ag tapes through ac susceptibility measurements, Supercond. Science and Technology, 2004, 17, 501-511.

## ***Résumé***

Les matériaux supraconducteurs présentent des propriétés physiques et géométriques particulières qui exigent des approches de modélisation spatio-temporelle fines, où les méthodes classiques trouvent rapidement leurs limites en termes de convergence, de précision et de temps de calcul. Ce dernier peut être très conséquent, ce qui est incompatible avec les problèmes de dimensionnement et d'optimisation.

Dans ce contexte, ce travail a pour objectif de développer des approches de modélisation multiphysique rapides pour le dimensionnement et l'optimisation des systèmes à base de supraconducteurs. Un intérêt particulier est porté pour les méthodes intégrales. Les verrous scientifiques à lever, qui constituent également l'originalité du travail, résident dans l'intégration des lois de comportement  $E(J)$  des supraconducteurs dans les schémas numériques de ce type de méthodes. Dans ce travail on développe un modèle numérique afin d'étudier la distribution de la densité de courant et d'estimer les pertes AC dans les supraconducteurs à haute température (HTS). Le modèle développé est basé sur une formulation intégral-différentielle en termes de potentiel vecteur électrique dans les deux domaines fréquentiel et temporel. Une campagne de test est menée afin de valider et de bien cerner les possibilités offertes et les limites de cette approche pour la modélisation des supraconducteurs.

## ***Abstract***

Superconducting materials have particular physical and geometric properties that require spatial-temporal modeling approaches fines, where conventional methods quickly reach their limits in terms of convergence, precision and computational time. The latter can be very consistent, which is incompatible with the design and optimization problems.

In this context, this work aims to develop rapid multiphysics modeling approaches for the design and optimization of superconductor-based systems. Particular attention is paid to the integral methods. Scientific obstacles to overcome, which also constitute the originality of the work lies in the integration of behavior laws  $E(J)$  of superconducting digital patterns of such methods. A numerical model is developed for a rapid computation of eddy currents in multifilamentary high temperature superconductive (HTS) for the evaluation of AC losses. The developed model is based on an integro-differential formulation in terms of the electric vector potential in the frequency and temporal domains. A test campaign is conducted to validate and clearly identify the possibilities and limitations of this approach for modeling superconductors.