



HAL
open science

Corrélations dans les systèmes quantiques inhomogènes à une dimension

Yannis Brun

► **To cite this version:**

Yannis Brun. Corrélations dans les systèmes quantiques inhomogènes à une dimension. Physique Quantique [quant-ph]. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT : 2019LORR0094 . tel-02393790

HAL Id: tel-02393790

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02393790>

Submitted on 4 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

Thèse de doctorat
présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de Lorraine
dans la spécialité
Physique

**Corrélations dans les systèmes quantiques
inhomogènes à une dimension**

soutenue publiquement le **27 septembre 2019** par

Yannis Brun

devant le jury composé de :

Anna Minguzzi Directrice de Recherche au CNRS	Rapporteure
David Dean Professeur à l'Université de Bordeaux	Rapporteur
Fabien Alet Directeur de Recherche au CNRS	Examineur
Thomas Schmidt Professeur associé à l'Université du Luxembourg	Examineur
Dragi Karevski Professeur à l'Université de Lorraine	Examineur
Christophe Chatelain Maître de Conférence à l'Université de Lorraine	Directeur de thèse
Jérôme Dubail Chargé de Recherche au CNRS	Codirecteur de thèse

Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques - UMR-7019
Université de Lorraine - Faculté des Sciences et Technologies
B.P. 70239 - F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

*Si la connaissance est un mur en pierre, cette thèse
est-elle un grain de sable dans le mortier ?
Et si ce mur est en pierre sèche ?
Alors ce n'est que du vent.*

Table des matières

Remerciements

Articles de références	1
------------------------	---

I Contexte 3

1 Introduction aux systèmes quantiques à une dimension 5

1.1 Particularités de la physique à une dimension	6
1.2 Expériences d'atomes ultra-froids	8
1.3 Autres travaux sur le liquide de Luttinger inhomogène	10
1.4 Plan du manuscrit	12

2 Solutions exactes du modèle de Lieb-Liniger 15

2.1 Ansatz de Bethe	16
2.1.1 Fonction d'onde de Bethe	16
2.1.2 Équations de Bethe	17
2.1.3 Limite thermodynamique	19
2.1.4 Gaz de Tonks-Girardeau	21
2.1.5 Corrélations et Ansatz de Bethe algébrique	23
2.2 Groupe de renormalisation de la matrice densité	24
2.2.1 Principe de la méthode	25
2.2.2 De la chaîne XXZ au modèle de Lieb-Liniger	27

3 Théories effectives : liquide de Luttinger et théories conformes 29

3.1 Fluctuations de la densité : introduction du champ de hauteur	30
3.2 Hamiltonien effectif	31
3.3 Diagonalisation et fonctions de corrélation	32
3.4 Lien avec les théories conformes	33
3.4.1 Champ libre gaussien	34
3.4.2 Notion d'invariance conforme	35
3.4.3 Théories conformes dans le plan complexe	36

4	Matrice densité à une particule du gaz de Tonks-Girardeau homogène	39
4.1	Quelques résultats connus	39
4.2	Identification des opérateurs de création et annihilation	40
4.3	Transformation du plan vers le cylindre	43
II	Résultats	45
5	Liquide de Luttinger inhomogène	47
5.1	Hypothèse de séparation d'échelles	48
5.2	Reconstruction des fluctuations quantiques	49
5.2.1	Hydrodynamique classique à température nulle	49
5.2.2	Quantification : action effective	50
5.2.3	Corrélations dans l'état fondamental à température nulle	52
5.3	Champ libre gaussien inhomogène	54
5.3.1	Équation de Poisson généralisée	54
5.3.2	Régularisation du propagateur au même point	56
5.3.3	Opérateurs de vertex : analogie électrostatique	56
5.3.4	Compactification du champ de hauteur	57
5.3.5	Opérateurs magnétiques : dualité électrique/magnétique	59
5.3.6	Corrélations mixtes électrique/magnétique	61
5.3.7	Opérateurs de vertex mixtes électrique/magnétique	63
5.4	Identification des opérateurs microscopiques	64
5.4.1	Coefficients non-universels	64
5.4.2	Extraction des coefficients par les facteurs de formes	65
6	Gaz de Tonks-Girardeau dans un potentiel dépendant du temps	67
6.1	Matrice densité à une particule dans l'état initial	68
6.1.1	Profil de densité hydrostatique	68
6.1.2	Théorie conforme en espace courbe	69
6.1.3	Propagateurs dans le demi-plan : méthode des images	71
6.1.4	Applications au cas harmonique et au double-puits	74
6.2	Piège harmonique dépendant du temps	75
6.2.1	Description hydrodynamique	76
6.2.2	Coordonnées isothermes	78
6.2.3	Chiralisation et propagateurs	79
6.2.4	Matrice densité à une particule	81
6.2.5	Fonction de corrélation à n particules	83

7	Corrélations à l'équilibre dans le cas avec interaction finie	87
7.1	Gaz de Lieb-Liniger confiné dans un piège	87
7.1.1	Limite thermodynamique	88
7.1.2	Paramètre de Luttinger et coordonnées isothermes	89
7.2	Corrélations de l'opérateur densité	90
7.2.1	Développement au deuxième ordre de l'opérateur	90
7.2.2	Profil de densité	92
7.2.3	Corrélation densité-densité	93
7.3	Matrice densité à une particule	94
8	Conclusion et perspectives	97
8.1	Résumé du manuscrit	97
8.2	Résultats préliminaires : corrections au profil de densité	98
8.3	Quelques problèmes ouverts	100
A	Calculs des facteurs de forme	101
A.1	Facteur de forme de l'opérateur densité	102
A.2	Facteur de forme de la matrice densité à une particule	102
B	Électrostatique sur le réseau bidimensionnel	103
B.1	Champ électrique dans le milieu inhomogène	103
B.2	Flux de champs magnétiques et dualité électrique/magnétique	104
B.3	Potentiel mixte électrique/magnétique	105

Bibliographie

Remerciements

Merci à Jérôme

Merci à Bertrand, Christophe et Dragi

Merci à Alexandre, Jean-Marie et Paola

Grazie a Stefano

Obrigado Frankbelson

Dyakuyu Dmytro, Marjana and Yurij

Merci à Claude, Hervé, Jean-Yves, Loïc, Malte et Xavier

Merci à Antonio, Christian, Fabien, François, Sébastien, Séverine et Véronique

Merci à Bertrand, Sébastien, Stéphane et Yannick

Merci à Anna Minguzzi, David Dean, Fabien Alet et Thomas Schmidt

Merci à Charles

Merci à Arnaud, Hugo, Jean-Loïs, Jimmy, Mylène, Raphaël, Rémi et Vincent

Merci à Clément, Gautier, Océane, Paul, Rémi et Rocco

Merci à Adèle, Agathe, Alexia, Betty, Camille, Clémence, Corentin, Eulalie,

Gautier, Hugo, Lou, Marion, Nicolas, Nina, Sophie, Stéphane et Valentin

Merci à Daniel, Éric, Herbert, Loïc, Lorraine, Orilia, Sylvie et Véronique

And everything under the sun is in tune

But the sun is eclipsed by the moon

Articles de références

Ce manuscrit de thèse reprend les résultats des articles suivants, publiés dans des revues à comité de lecture en accès libre :

1. Y. Brun and J. Dubail, “One-particle density matrix of trapped one-dimensional impenetrable bosons from conformal invariance,” *SciPost Phys.*, vol. 2, p. 012, 2017, <https://scipost.org/SciPostPhys.2.2.012>,
2. Y. Brun and J. Dubail, “The inhomogeneous gaussian free field, with application to ground state correlations of trapped 1d bose gases,” *SciPost Physics*, vol. 4, no. 6, p. 037, 2018, <https://scipost.org/SciPostPhys.4.6.037>
3. P. Ruggiero, Y. Brun, and J. Dubail, “Conformal field theory on top of a breathing one-dimensional gas of hard core bosons,” *SciPost Phys.*, vol. 6, p. 51, 2019, <https://scipost.org/SciPostPhys.6.4.051>

Première partie

Contexte

Chapitre 1

Introduction aux systèmes quantiques à une dimension

Il est parfois sidérant de se rappeler qu'on ne peut pas prédire exactement le mouvement de trois corps massifs soumis à l'interaction gravitationnelle. C'est un vieux problème de mécanique céleste connu sous le nom de *problème à N corps*, qui a notamment été étudié par Poincaré dans le cadre de sa théorie des systèmes chaotiques à la fin du dix-neuvième siècle [4]. Un peu plus tard, dans les années 1920, la mécanique quantique s'est développée. Elle décrit les constituants élémentaires de la matière, et permet enfin d'expliquer la stabilité de la structure atomique là où les modèles planétaires de Rutherford et Bohr avaient échoués. La mécanique quantique et la mécanique céleste gardent pourtant un point commun, celui d'être confrontées au problème à N corps. Malgré cela, nous savons décrire et manipuler la matière qui nous entoure avec une précision extrêmement fine. Ce qui est d'autant plus impressionnant si l'on garde à l'esprit que le moindre objet physique dont nous faisons l'expérience quotidienne contient un nombre d'atomes de l'ordre de la constante d'Avogadro N_A . Cette maîtrise de la physique de la matière condensée est possible grâce aux efforts conjoints de la théorie, de l'expérience et aujourd'hui du numérique. Nombre de modèles de matière condensée sont d'une difficulté sans précédent à étudier analytiquement. On pourrait alors naïvement penser que, grâce au numérique, il est plus simple et efficace de simuler un système physique que de le résoudre analytiquement. En réalité, la simulation est généralement possible à mettre en œuvre pour un système classique, mais elle s'avère être d'une complexité fondamentale pour un système quantique.

Le concept d'ordinateur quantique est ainsi proposé dès le début des années 1980 par Manin [5] et Feynman [6]. Depuis, l'*information quantique* est devenue une discipline de recherche foisonnante, mêlant physique, mathématique et informatique fondamentales. Si le concept idéal est celui d'une machine de

Turing quantique, il existe à présent des réalisations physiques d'ordinateur quantique. Pour les physiciens, un simulateur quantique analogique consiste à préparer un ensemble d'objets quantiques dans un état donné avec un contrôle sur les paramètres, de sorte que le système soit représenté par un hamiltonien H . Parmi quelques autres, les expériences de gaz d'atomes ultra-froids sont de bons simulateurs quantiques [7]. Leur développement a permis de remettre sur le devant de la scène certains modèles théoriques qui n'étaient vu que comme des modèles-jouets, en particulier à une dimension.

1.1 Particularités de la physique à une dimension

L'avantage de s'intéresser à la physique à une dimension est qu'elle offre d'excellents exemples pédagogiques. On peut s'initier aux concepts de la mécanique quantique en étudiant la quantification des niveaux d'énergie d'un électron dans une boîte à une dimension. Ou bien on peut se familiariser avec la physique du solide en commençant par étudier les modèles d'électrons presque libres et les modèles de liaisons fortes à une seule dimension. Néanmoins, ces exemples pédagogiques ne se généralisent pas immédiatement à plus grande dimension $d > 1$; les interactions rendent la physique différente en fonction de la dimension de l'espace.

Comme premier exemple, intéressons-nous aux métaux. À trois dimensions, on considère en première approximation un gaz d'électrons libres définissant une surface de Fermi. Ce sont les excitations de basse énergie, autour de cette surface, qui donnent lieu au phénomène de conduction. Cependant, les électrons ne sont pas libres dans un système réel, au contraire, ils interagissent notamment via la répulsion de Coulomb. Il s'agit alors d'un problème à N corps quantique, il y a donc peu d'espoir d'obtenir une solution exacte. La seule possibilité est alors d'établir une théorie effective ; c'est ce qu'à fait Landau en 1956 en introduisant la théorie du liquide de Fermi [8]. Dans cette approche, les excitations des électrons sont décrites par des quasi-particules, de même charge que les électrons, mais perturbées par des fluctuations dues aux interactions. Ceci a pour effet de renormaliser certaines grandeurs physiques, la masse entre autres, qui n'est pas la masse des électrons nus mais la masse effective des électrons habillés par les fluctuations. Si cette description est très efficace à deux ou trois dimensions, elle n'est pas possible à une dimension.

À une dimension, la nature même des excitations est modifiée. On a une première explication intuitive en remarquant qu'il ne peut pas exister d'excitation individuelle dans cette situation. En effet, pour qu'une particule se

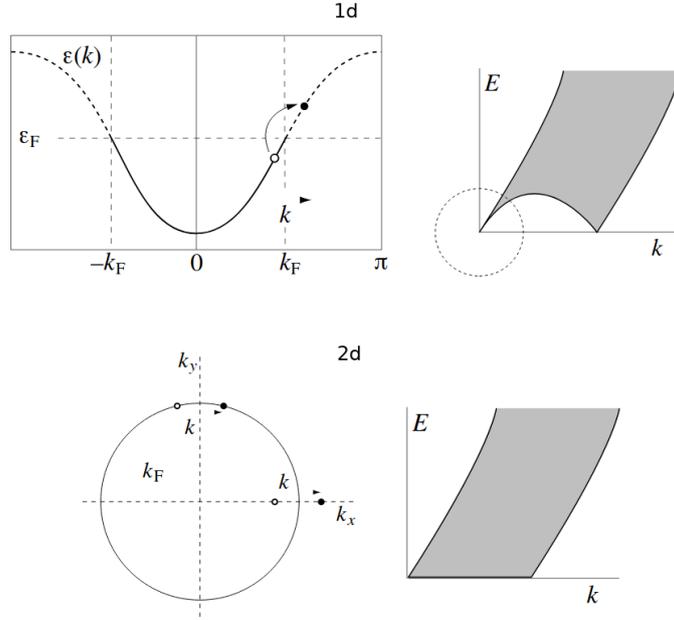


FIGURE 1.1 – Spectres des excitations particule-trou pour un gaz d'électrons à une dimension et à deux dimensions, reproduit de [9].

déplace, elle doit nécessairement *pousser* ses voisines et ainsi les exciter à leur tour ; toute excitation est ainsi collective. Plus formellement, la surface de Fermi est réduite à seulement deux points, k_F et $-k_F$, voir figure 1.1. En linéarisant la relation de dispersion autour de ces deux points, on peut alors définir des excitations particule-trou qui ont, par construction, une nature bosonique. Cette technique connue sous le terme de bosonisation [9] est à la base de la théorie du liquide de Luttinger établie par Haldane en 1981 [10–12], qui remplace la théorie du liquide de Fermi à une dimension.

Nous venons de voir que les systèmes de fermions en interaction ont un comportement très différent à une dimension comparé aux dimensions supérieures $d > 1$. Il en va de même pour les bosons. À trois dimensions, il existe une température critique T_c en deçà de laquelle un gaz de bosons libres devient un condensat de Bose-Einstein [13]. Si l'on admet qu'en réalité les bosons interagissent de manière répulsive, l'ordre à longue portée fait que le condensat n'est pas immédiatement détruit. Ce n'est pas le cas à une dimension où le condensat ne se forme même pas à température nulle $T = 0$. Les fluctuations quantiques détruisent automatiquement tout ordre à longue portée, ce qui est justifié par le théorème de Mermin, Wagner [14] et Hohenberg [15]. Tel que généralisé par Coleman [16], ce théorème démontre qu'il n'existe pas de brisure spontanée d'une symétrie continue en dimension $d \leq 2$. La condensation de Bose-Einstein étant associée à la brisure de la symétrie $U(1)$, elle n'a tout simplement pas lieu pour les systèmes de bosons à une dimension.

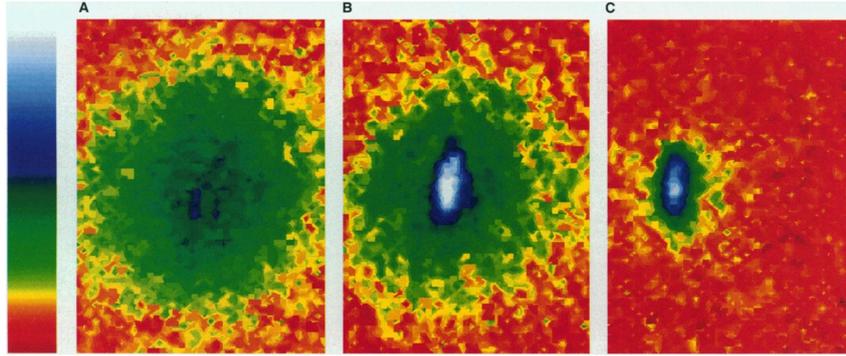


FIGURE 1.2 – Distribution de vitesse d’un nuage d’atomes de rubidium-87 et formation d’un condensat de Bose-Einstein. De gauche à droite : le condensat (bleu/blanc) se forme au centre du nuage (jaune/vert), et se retrouve isolé par refroidissement évaporatif. La résolution de l’image est de $200\mu\text{m}$ par $270\mu\text{m}$. Reproduit de [17].

Enfin, l’aspect le plus intéressant de la physique à une dimension est que la notion même de fermion et de boson est ambiguë. Pour distinguer un système obéissant à la statistique fermionique d’un système à la statistique bosonique, on se base respectivement sur l’anti-symétrie et la symétrie de la fonction d’onde sous l’échange de deux particules. Pour vérifier cela, il faudrait pouvoir échanger la position de deux particules sans que celles-ci n’interagissent, ce qui est simplement impossible à une dimension. En pratique, les modèles unidimensionnels de bosons en interaction sont aussi décrits par le paradigme du liquide de Luttinger.

Toutes ces subtilités ne sont pas seulement des sujets de recherche théorique : des systèmes quantiques à une dimension sont effectivement réalisés dans des expériences, notamment les expériences d’atomes ultra-froids.

1.2 Expériences d’atomes ultra-froids

Les expériences d’atomes ultra-froids consistent à maintenir à des températures proches de $0K$ des paquets d’atomes, via un piégeage optique et/ou magnétique. Ces techniques de piégeage magnéto-optique et de refroidissement laser se développent aux alentours des années 1990. Un des événements les plus marquants de ce développement a lieu en 1995, lorsque les groupes de Cornell et Wiemann [17], et indépendamment, de Ketterle [18], ont observé pour la première fois la condensation de Bose-Einstein prédite en 1924, voir figure 1.2. À présent, les expériences d’atomes ultra-froids fournissent de nombreux exemples de simulateurs quantiques, particulièrement pour les systèmes de matière condensée. Bien que l’on ne soit jamais à température nulle mais plutôt de l’ordre du nK ou de quelques μK , l’excellent contrôle sur la tempé-

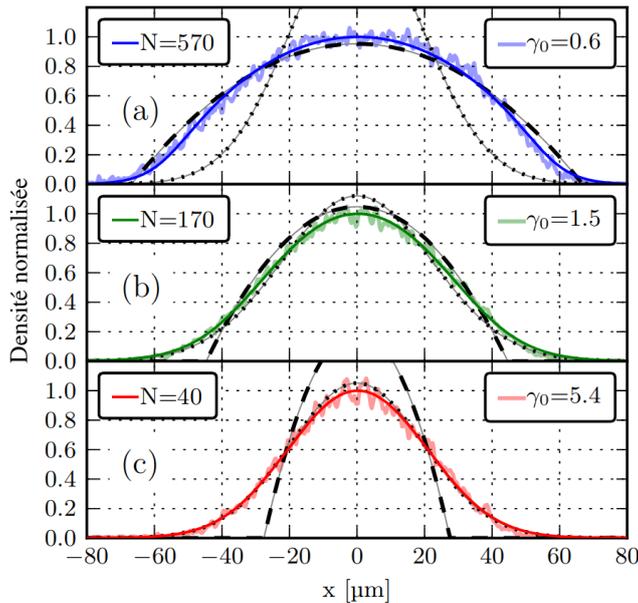


FIGURE 1.3 – Profils de densité de gaz d’atomes ultra-froids de rubidium-87. Les courbes de couleur pâle sont les résultats expérimentaux et les courbes de couleur foncée sont les résultats théoriques à température finie pour un potentiel harmonique. N est le nombre de particules, γ l’intensité de l’interaction. Les lignes en pontillés sont des résultats asymptotiques. Reproduit de [27].

rature permet dans certains cas de s’affranchir des fluctuations thermiques et d’étudier principalement les fluctuations quantiques. Les prédictions théoriques à $T = 0K$ restent ainsi pertinentes. En outre, la précision des techniques de confinement permet de réaliser des systèmes de basse dimension, notamment des modèles unidimensionnels tels que les chaînes de spins ou les gaz de bosons [19–32]. La technique la plus répandue est celle du piégeage laser dans laquelle un réseau bidimensionnel est réalisé en faisant interférer deux ondes stationnaires, chacune réalisée par deux lasers opposés l’un à l’autre et légèrement déphasés. En jouant sur l’asymétrie du réseau, on peut réaliser une assemblée de systèmes à une dimension et obtenir à chaque expérience un ensemble de mesures. Dans cette configuration, Olshanii a montré en 1998 [33] qu’un gaz de bosons en interaction répulsive est correctement décrit par le modèle de Lieb-Liniger [34, 35]. C’est ce modèle en particulier qui nous sert d’exemple tout au long de cette thèse.

Une autre technique d’atomes ultra-froids à même de réaliser le modèle de Lieb-Liniger est celle du piégeage magnétique. Dans celle-ci, un champ magnétique est généré grâce aux courants traversant une puce lithographiée [36, 37]. La géométrie du piège est alors parfaitement contrôlable et la technique se prête bien au cas du gaz de bosons unidimensionnel [24, 38]. Cependant, dans toutes ces expériences, le potentiel de confinement a pour effet de rendre le

profil de densité du système inhomogène [39, 40]. Du point de vue théorique, cette inhomogénéité brise en général toute possibilité d’obtenir une description exacte. Pour une situation spécifique où le potentiel est considéré harmonique, on peut néanmoins obtenir des résultats asymptotiquement exacts dans la limite d’un grand nombre de particules $N \gg 1$ avec une interaction infinie $\gamma \rightarrow \infty$ [41, 42].

Si le potentiel harmonique peut être une bonne approximation du potentiel de confinement, voir figure 1.3, cela reste une situation particulière qu’il faut dépasser. Par exemple, dans la fameuse expérience du pendule de Newton quantique [43], l’état initial peut être décrit par un potentiel en double-puits. L’objectif de cette thèse est d’établir une description effective des systèmes quantiques à une dimension confinés dans un potentiel arbitraire. Pour ce faire, nous nous proposons de généraliser la théorie du liquide de Luttinger aux situations inhomogènes, que nous testons systématiquement sur le modèle de Lieb-Liniger.

1.3 Autres travaux sur le liquide de Luttinger inhomogène

Revenons un instant sur le paradigme du liquide de Luttinger. Il s’agit une théorie effective qui décrit les systèmes de particules quantiques en interaction à une dimension. Comme les excitations sont collectives dans ces systèmes, les quasiparticules émergentes sont de nature bosonique. La description repose sur un champ libre gaussien (GFF) qui dépend uniquement du modèle microscopique considéré à travers deux paramètres, la vitesse des excitations v et le paramètre de Luttinger K . Les différents opérateurs associés au GFF permettent alors de calculer asymptotiquement les fonctions de corrélation exactes. Une spécificité de la théorie du liquide de Luttinger est que les fonctions de corrélation décroissent en loi de puissance avec un exposant fixé par les paramètres v ou K . Dans l’approche standard, ces deux paramètres sont généralement constants, mais pour les systèmes inhomogènes que nous considérons ici, ils doivent dépendre de la position. D’autres travaux se sont déjà intéressés au problème du liquide de Luttinger dans une situation inhomogène.

À notre connaissance, la première occurrence du liquide de Luttinger inhomogène dans la littérature date de 1995. Maslov et Stone [44], et indépendamment Safi et Schulz [45], ont étudié la résistance de Landauer d’un système constitué d’un fil conducteur quantique dont les extrémités sont reliées à un fil supposé parfait, en d’autres termes, un gaz d’électrons libres. Le fil principal est supposé homogène et les interactions sont décrites par un paramètre de

Luttinger constant, $K = \text{cst}$. Dans le fil parfait, le paramètre de Luttinger prend la valeur $K = 1$, correspondant aux fermions libres, de même que la vitesse des excitations v fixée par K passe à la vitesse de Fermi v_F . Calculer les coefficients de réflexion et de transmission aux interfaces revient donc ici à résoudre l'hamiltonien du liquide de Luttinger [10] avec $K(x)$ et $v(x)$ des fonctions portes. En particulier, Maslov et Stone [44] ont utilisé un formalisme lagrangien et ont ainsi été amenés à écrire l'action du liquide de Luttinger inhomogène sous la même forme que nous le présentons dans la section 5 (voir équation (3) de leur article). Dans ce cas, le propagateur peut être obtenu analytiquement et est solution d'une équation de Poisson généralisée similaire à celle que nous établissons pour le champ libre gaussien inhomogène (IGFF), c'est à dire l'objet mathématique qui sous-tend la théorie du liquide de Luttinger inhomogène. À noter que le même système a également été étudié en 1998 par Fazio, Hekking et Khmelnitskii [46] sous l'angle de la conductivité thermique. Cependant, les quantités physiques d'intérêt dans les Refs. [44–46] sont toutes données sous la forme d'intégrales du propagateur, sans recourir au calcul de fonctions de corrélations plus générales.

En 2003, Gangardt et Shlyapnikov [40] se sont intéressés aux fonctions de corrélation d'un gaz de bosons piégé dans un potentiel harmonique. Les paramètres dépendent alors de la position, $K(x)$ et $v(x)$, mais en s'appuyant sur l'approximation de la densité locale (LDA), ils peuvent être fixés en utilisant la solution exacte du gaz homogène. Cette astuce est identique à ce que nous faisons dans la section 7.1, la LDA étant équivalente à ce que nous appelons hydrostatique. Les auteurs obtiennent alors un développement du champ bosonique qui permet, en principe, de calculer les corrélations. Par la suite, cette approche a été utilisée par Ghosh en 2006 [47] ainsi que Citro et al. en 2008 [48], dont les résultats sont passés en revue dans Ref. [49] (section V.E). Cependant, un élément important semble avoir été négligé dans ces travaux. En effet, lorsque l'on écrit une théorie des champs effective, les observables locales $\hat{O}(x)$ du modèle microscopique sont liées aux opérateurs de la théorie des champs $\Phi(x)$ par des coefficients non-universels $C^{(\hat{O})}$. Si dans une situation homogène (et certains systèmes libres) ces coefficients sont constants et peuvent parfois être calculés exactement, ce n'est pas le cas dans les systèmes inhomogènes (et en interaction) où ils dépendent alors de la position, $C^{(\hat{O})}(x)$. Ceux-ci n'apparaissent pas dans les Refs. [40, 47–49].

Dans cette thèse, on se propose de développer plus en avant la théorie du liquide de Luttinger inhomogène à partir des travaux récents de Dubail et al. [50] qui visent à décrire les systèmes quantiques inhomogènes à une dimension par des théories conformes (CFT) dans un espace courbe. Ces travaux ont depuis donné lieu à une série d'articles par des collègues et collaborateurs [50–63]. Tous

les résultats présentés ici sont essentiellement extraits de trois articles publiés au cours des trois dernières années [1–3]. Dans le chapitre 5, on s’attache à présenter en toute généralité le cadre de la théorie du liquide de Luttinger inhomogène. En partant d’une description hydrodynamique semi-classique, on peut reconstruire une action pour les fluctuations quantiques. Cette action est celle du champ libre gaussien inhomogène et permet de calculer toutes les fonctions de corrélation de la théorie. Enfin, on présente une manière générique de calculer les amplitudes qui lient les opérateurs microscopiques au IGFF. Dans le chapitre 6, on applique ce cadre au gaz de bosons avec interaction infinie dans une situation dynamique. Si nous retrouvons de nombreux résultats connus, notre cadre permet de calculer des corrélations qui étaient jusqu’ici hors de portée des autres approches. Dans le chapitre 7, le cas avec interaction finie est étudié à l’équilibre et comparé avec des résultats numériques obtenus par la méthode de renormalisation de la matrice densité. Mais avant cela, le chapitre qui suit est consacré à une brève présentation des outils phares de la physique unidimensionnelle ; si ce sont des techniques extrêmement puissantes, à la fois uniques et complémentaires, ce sont aussi les ingrédients de base de tous les travaux mentionnés dans cette introduction. Bien sûr, il serait trop gourmand de vouloir rendre compte de toute leur saveur dans ce manuscrit, aussi nous n’en présenterons qu’une version quelque peu édulcorée.

1.4 Plan du manuscrit

Dans la première partie du manuscrit, nous proposons une vue d’ensemble du contexte de notre thèse. Nous avons commencé par une introduction générale aux particularités de la physique à une dimension et aux motivations expérimentales qui sous-tendent nos travaux. Nous avons mentionné que les approches théoriques spécifiques aux systèmes unidimensionnels ne sont pas adaptées aux situations inhomogènes telles qu’elles sont réalisées dans les expériences d’atomes ultra-froids. Ces approches étant néanmoins nécessaires à la compréhension et à la construction d’une théorie plus générale, nous les présentons dans les deux chapitres suivants. Le chapitre 2 est consacré aux solutions exactes, l’une analytique via l’Ansatz de Bethe, l’autre numérique via la méthode du groupe de renormalisation de la matrice densité. On poursuit au chapitre 3 avec une introduction aux théories effectives, à savoir le liquide de Luttinger et le lien avec les théories conformes à deux dimensions. Enfin, le chapitre 4 a une double vocation pédagogique. D’une part, il illustre comment utiliser les outils présentés dans les chapitres précédents pour calculer une fonction de corrélation non-triviale, la matrice densité à une particule du gaz de Tonks-Girardeau [64]. D’autre part, il fait la transition avec l’approche du li-

quide de Luttinger inhomogène développée dans la suite et dont le formalisme est similaire.

La seconde partie présente les résultats obtenus et publiés dans les articles de références [1–3]. Dans le chapitre 5, nous généralisons la théorie du liquide de Luttinger aux situations inhomogènes. Notre approche repose sur l’hypothèse d’une séparation des échelles microscopique et macroscopique, de sorte que les systèmes puissent être considérés localement homogènes, voir section 5.1. Ceci permet d’utiliser une description hydrodynamique donnant accès aux profils de densité et aux grandeurs thermodynamiques d’intérêt. Les fluctuations quantiques peuvent alors être reconstruites en quantifiant les équations d’Euler. À la section 5.2, on obtient ainsi une action effective qui généralise celle du champ libre gaussien, qui apparaît de manière universelle dans nombre de problèmes statistiques à deux dimensions et modèles quantiques à une dimension. Le champ libre gaussien inhomogène est entièrement résolu à la section 5.3 grâce à une analogie avec l’électrostatique à deux dimensions. Les fonctions de corrélation de tout système qui entre dans cette classe d’universalité peuvent être calculées asymptotiquement. Pour que ces formules soient asymptotiquement exactes, il faut savoir identifier les opérateurs de la théorie des champs effective avec les opérateurs du modèle microscopique. On montre dans la section 5.4 comment les coefficients qui apparaissent dans le développement asymptotique des fonctions de corrélation peuvent être calculés systématiquement par l’utilisation conjointe des solutions exactes et des théories conformes.

Toute la suite de la seconde partie est dédiée aux applications de l’approche du liquide de Luttinger inhomogène au modèle de Lieb-Liniger confiné dans un potentiel externe. Dans le chapitre 6, on se concentre sur la limite d’interaction infinie, celle du gaz de Tonks-Girardeau. La section 6.1 est consacrée au calcul de la matrice densité à une particule pour un potentiel de piégeage arbitraire. Ce résultat se généralise facilement à la fonction de corrélation à n particules. On étudie ensuite une situation hors d’équilibre en considérant un piège harmonique dont la fréquence dépend du temps. Ce cas précis permet de faire tous les calculs de manière explicite, et il illustre la capacité de notre approche à traiter également des problèmes dynamiques. Au delà de la limite du gaz de Tonks-Girardeau, le liquide de Luttinger inhomogène exprime tout son intérêt dans le cas des interactions finies, où le paramètre de Luttinger $K(x)$ dépend de la position. C’est ce que l’on montre dans le chapitre 7. D’abord, la préparation du système est expliquée dans la section 7.1. Le développement asymptotique de l’opérateur densité est établi dans la section 7.2 et permet de calculer les corrections au profil de densité hydrodynamique ainsi que les corrélations densité-densité. Pour terminer, on calcule la matrice densité à une

particule dans la section 7.2. Chaque résultat analytique est comparé au résultat obtenu numériquement en simulant le modèle de Lieb-Liniger par la méthode du groupe de renormalisation de la matrice densité. Une conclusion générale est esquissée au chapitre 8, ouvrant sur de potentielles applications du liquide de Luttinger inhomogène. En outre, on propose une justification supplémentaire à l'hypothèse de séparation des échelles.

Chapitre 2

Solutions exactes du modèle de Lieb-Liniger

Avant de construire une théorie effective pour un phénomène physique précis, il convient de se demander ce que l'on sait exactement de ce phénomène. Ici, nous nous intéressons aux gaz quantiques à une dimension ; comme nous l'avons dit en introduction, avant d'être l'objet d'expériences en laboratoire, les systèmes unidimensionnels ont longtemps été étudiés par les théoriciens. Plus particulièrement, un grand nombre de modèles à une dimension d'espace et une dimension de temps sont regroupés dans la classe des systèmes intégrables. Si l'intégrabilité est correctement définie pour les systèmes classiques, sa définition est encore sujette à discussion pour les systèmes quantiques : ici, on appelle système intégrable un système dont la solution exacte est donnée par l'Ansatz de Bethe. Cette méthode, introduite par Bethe en 1931 [65], donne la solution exacte d'un certain nombre de modèles quantiques unidimensionnels.

En parallèle des solutions analytiques, la physique numérique permet également d'obtenir des résultats exacts en simulant un phénomène. Aujourd'hui, le groupe de renormalisation de la matrice densité (DMRG) [66] est indiscutablement la méthode la plus performante pour les modèles à une dimension. Simuler un problème précis n'est évidemment pas sans difficulté et il faut savoir contrôler les paramètres de la simulation avec suffisamment de précision pour obtenir un résultat numérique exact.

Afin d'illustrer ces approches exactes analytiques et numériques, on choisit de se focaliser sur le modèle de Lieb-Liniger [34, 35],

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + g \sum_{j < l=1}^N \delta(x_j - x_l). \quad (2.1)$$

Cet hamiltonien modélise un gaz de N bosons sans spin, contraints de se déplacer dans une seule direction de l'espace x . Ces particules interagissent via

un potentiel donné par un delta de Dirac $\delta(x)$, avec une intensité qui dépend du paramètre g . Dans ce chapitre, nous présentons la solution historique du modèle de Lieb-Liniger, où l'Ansatz de Bethe donne le spectre des excitations. Nous introduisons brièvement la forme plus moderne de l'Ansatz de Bethe algébrique qui permet de calculer les corrélations. La limite d'interaction infinie $g \rightarrow \infty$ a des propriétés particulières qui donnent lieu à une autre solution en terme de fermions libres ; c'est le gaz de Tonks-Girardeau que nous abordons dans la troisième section. Enfin, nous présentons le principe de la méthode du groupe de renormalisation de la matrice densité et la simulation exacte du modèle de Lieb-Liniger à partir de la chaîne XXZ.

2.1 Ansatz de Bethe

L'Ansatz a d'abord été introduit par Bethe en 1931 [65] pour résoudre exactement le modèle de Heisenberg dans sa phase antiferromagnétique. Plus de trente ans après, en 1963, le même Ansatz permet à Lieb et Liniger de résoudre le modèle de bosons qui porte aujourd'hui leur nom [34, 35]. Cette même année, Hubbard propose un modèle d'électrons sur un réseau unidimensionnel [67] qui est finalement résolu en 1968 par Lieb et Wu [68], toujours en utilisant l'Ansatz de Bethe. Il permet en effet de résoudre des modèles en interaction en généralisant la solution des modèles libres. Pour ces derniers, la solution consiste à réécrire la fonction d'onde d'un système à N particules libres comme le produit de N fonctions d'onde à une seule particule. Dans les systèmes en interaction, la solution ne se réduit pas à un problème à une seule particule, mais à la place, l'Ansatz de Bethe montre que l'on peut se ramener à un problème à deux particules. Plus précisément, l'état à N particules se décompose en un produit de matrices de diffusion à deux particules.

Ici, nous calculons le spectre des excitations et les propriétés thermodynamiques du modèle de Lieb-Liniger par l'approche historique, aujourd'hui souvent nommée Ansatz de Bethe en coordonnées. Seuls sont rapportés les éléments nécessaires à la compréhension du reste du manuscrit. Pour une présentation exhaustive, on pourra se référer au livre de Korepin, Bogoliubov et Izergin [69], ou aux notes de Franchini [70].

2.1.1 Fonction d'onde de Bethe

Pour alléger les notations, le hamiltonien (2.1) est généralement réécrit sous la forme

$$H = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2c \sum_{i<j=1}^N \delta(x_i - x_j), \quad (2.2)$$

avec $c = \frac{m}{\hbar^2}g$. En introduction, nous avons mentionné l'élément principal de l'Ansatz : le problème se réduit à un ensemble de processus à deux particules. À une dimension, la conservation de l'énergie et de l'impulsion impose qu'après la collision de deux particules identiques, les impulsions sont égales à celles qui précèdent la collision. Quelle que soit l'interaction, la fonction d'onde est donc seulement modifiée par une phase. Pour passer au cas à N particules, l'Ansatz consiste à supposer que la fonction d'onde est une superposition d'ondes planes de la forme

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\mathcal{P}} A_{\mathcal{P}} e^{i \sum_j k_{j(\mathcal{P})} x_j}. \quad (2.3)$$

Les k_j sont des pseudo-impulsions, qui par définition, sont reliées à l'énergie E et l'impulsion K totales d'un système de N bosons par

$$E = \sum_{j=1}^N k_j^2 \quad \text{et} \quad K = \sum_{j=1}^N k_j. \quad (2.4)$$

La somme sur \mathcal{P} correspond aux $N!$ permutations des pseudo-impulsions, mais il n'est pas nécessaire de considérer les permutations des coordonnées $\{x_1, \dots, x_N\}$. Les particules étant bosoniques, il suffit de connaître une seule configuration, par exemple $x_1 < x_2 < \dots < x_N$, les autres configurations étant données par la symétrie de la fonction d'onde.

Pour calculer les amplitudes $A_{\mathcal{P}}$, on sait que toutes les permutations peuvent être générées par une succession de permutations de deux pseudo-impulsions. Or, sous la permutation de deux pseudo-impulsions, le rapport des deux amplitudes doit être égal à la phase générée par une collision de deux particules. Cette phase peut se calculer exactement et on obtient,

$$\frac{A_{\mathcal{P}}}{A_{\mathcal{P}'}} = -e^{i\theta(k-k')}, \quad \text{avec} \quad \theta(k) \equiv -2 \arctan\left(\frac{k}{c}\right). \quad (2.5)$$

Si l'on s'intéresse en particulier aux processus de collisions de trois particules, on peut montrer explicitement qu'ils se décomposent en une séquence de trois collisions de deux particules : cette condition est imposée par l'équation de Yang-Baxter [71]. Cette équation est en fait au fondement d'une généralisation de l'Ansatz de Bethe en coordonnées, l'Ansatz de Bethe algébrique que nous présentons brièvement à la fin de cette section. Pour normaliser la fonction d'onde de Bethe (2.3), il faut introduire des conditions aux bords.

2.1.2 Équations de Bethe

Considérons maintenant que le système vit dans un espace de taille finie L , avec des conditions périodiques aux bords de sorte que la fonction d'onde

satisfait la relation

$$\Psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) = \Psi(x_1, \dots, x_j + L, \dots, x_N). \quad (2.6)$$

Cette condition est réalisée par une succession de $N - 1$ permutations de la particule en x_j avec ses voisines. Puisqu'à chaque permutation correspond une collision de deux particules, cette particule acquiert une phase totale $(-1)^{N-1} \prod_j^N e^{i\theta(k_j - k_l)}$. Mais la particule acquiert également une phase dynamique $e^{ik_j L}$ en parcourant le système sur sa longueur L . Les conditions périodiques aux bords sont alors satisfaites si la somme de ces deux phases est proportionnelle à 2π . Cela impose la contrainte,

$$k_j L - \sum_{j=1}^N \theta(k_j - k_l) = 2\pi I_j, \quad (2.7)$$

connue sous le nom d'équations de Bethe, avec les nombres de Bethe I_j . Ces derniers sont demi-entiers lorsque N est pair et entiers quand N est impair. Si deux nombres de Bethe I_j et I_l sont identiques, les pseudo-impulsions associées le sont aussi, $k_j = k_l$, et la fonction d'onde s'annule. Par conséquent, une solution des équations de Bethe est une solution physique seulement pour une configuration $\{I_j\}$ de nombre de Bethe distincts.

Dans le cas d'une interaction infinie $c \rightarrow \infty$, on a $\theta(k) \rightarrow 0$ et les pseudo-impulsions sont simplement données par $k_j = \frac{2\pi}{L} I_j$. Comme tous les nombres doivent être distincts, l'état fondamental qui minimise l'énergie et l'impulsion (2.4) est une configuration symétrique de la forme

$$\{I_j\} = \left\{ -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \dots, \frac{N-1}{2} \right\}, \quad (2.8)$$

pour laquelle l'impulsion totale est nulle, $K = 0$. Si maintenant l'interaction c est ramenée vers une valeur finie, seule la configuration des pseudo-impulsions varient, les nombres de Bethe étant fixés : l'état fondamental reste celui décrit par la configuration (2.8). Pourvu que les nombres soient distincts, une configuration donnée renvoie toujours vers une état propre, et ce quelque soit l'intensité de l'interaction c . Ceci peut s'interpréter comme une généralisation du principe d'exclusion de Pauli à une dimension, valide même pour un système de bosons. À partir de ce constat, on peut interpréter les états excités en terme d'excitations individuelles, qui sont essentiellement de deux types. Les excitations de type I consistent à ajouter une particule à l'état fondamental à N particules (2.8). La nouvelle particule doit nécessairement avoir une pseudo-impulsion $|k_p| > k_{\max.} = k_N$, et dans le cas où celle-ci est positive, l'état excité

à $N + 1$ particules correspond à la configuration

$$\{I'_j\} = \left\{ -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} + p \right\}, \quad (2.9)$$

pour laquelle l'impulsion totale est $K = \frac{2\pi}{L}p$, avec $p \in \mathbb{Z}$. La configuration des pseudo-impulsions est donc totalement modifiée par l'ajout d'une particule, $\{k_j\} = \frac{2\pi}{L}\{I_j\} \mapsto \{k'_j\} = \frac{2\pi}{L}\{I'_j\}$, de telle sorte que l'impulsion totale $K = \frac{2\pi}{L}p$ gagnée par le système n'est pas simplement égale à la pseudo-impulsion k_p de la nouvelle particule. Indépendamment de l'intensité de l'interaction, un système à une dimension est donc toujours fortement corrélé, ou en d'autres termes, les excitations sont toujours collectives.

Les excitations de type II sont en quelque sorte l'inverse des premières, puisqu'elles consistent à retirer une particule à l'état fondamental à N particules (2.8), c'est à dire qu'elles créent un trou. Pour ces excitations, une configuration de nombre de Bethe est construite en partant de l'état fondamental à $N - 1$ particules, duquel une particule de pseudo-impulsion $|k_r| < k_{\max}$. est envoyée vers le premier nombre inoccupé de la configuration, avec une impulsion positive ou négative. Une telle configuration est par exemple,

$$\{I''_j\} = \left\{ -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} - r - 1, \frac{N}{2} - r + 1, \dots, \frac{N}{2} \right\}, \quad (2.10)$$

pour laquelle l'impulsion totale est $K = \frac{2\pi}{L}r$, avec $r \in \mathbb{Z}$. Dans la limite thermodynamique, on peut montrer que ces deux types d'excitations sont suffisants pour générer tous les états excités de basse énergie. Par exemple, les fluctuations de la densité étant des excitations particule-trou, elles sont données par la combinaison d'excitations de type I et II.

Sous la forme (2.7), les équations de Bethe sont facilement résolues numériquement pour des systèmes de plusieurs dizaines de particules. On peut aller au delà en considérant la limite thermodynamique, pour laquelle l'Ansatz de Bethe se simplifie davantage.

2.1.3 Limite thermodynamique

La limite thermodynamique $N, L \rightarrow \infty$ est prise de sorte que la densité $\rho \equiv N/L$ reste finie. On travaille alors préférentiellement avec le hamiltonien (2.1) sous sa forme de seconde quantification,

$$H = \int dx \left[\Psi^\dagger(x) (-\partial_x^2 - \mu) \Psi(x) + c\Psi^{\dagger 2}(x)\Psi^2(x) \right], \quad (2.11)$$

où, les opérateurs $\Psi^\dagger(x)$ et $\Psi(x)$ créent ou annihilent respectivement un boson en x et satisfont le commutateur $[\Psi(x), \Psi^\dagger(x')] = \delta(x - x')$. On a gardé la convention $c = \frac{m}{\hbar^2}g$ et introduit un potentiel chimique μ qui permet de fixer la densité ρ . Dans ces conditions, le modèle est entièrement décrit par le paramètre adimensionné

$$\gamma \equiv \frac{c}{\rho}. \quad (2.12)$$

Deux systèmes ayant une même valeur de γ sont physiquement équivalents.

Lorsque $N, L \rightarrow \infty$, la différence entre deux pseudo-impulsions consécutives devient infinitésimale, $k_{j+1} - k_j \sim \mathcal{O}(1/L)$. Ces dernières sont ainsi contenues dans un interval $[k_{\min.}, k_{\max.}]$, de manière analogue à une mer de Dirac ou une surface de Fermi. Pour une configuration de nombres de Bethe correctement ordonnés, on définit la densité de pseudo-impulsion :

$$\rho(k_j) \equiv \lim_{N, L \rightarrow \infty} \frac{1}{L(k_{j+1} - k_j)} > 0, \quad (2.13)$$

de sorte que, pour une fonction des pseudo-impulsions $f(k)$, la somme est remplacée par une intégrale de la forme

$$\sum_{j=1}^N f(k_j) \mapsto L \int_{k_{\min.}}^{k_{\max.}} dk \rho(k) f(k). \quad (2.14)$$

Dans cette limite thermodynamique, on introduit une fonction $y(k)$ qui à une pseudo-impulsion donnée renvoie le nombre de Bethe correspondant, $y(k_j) \equiv \frac{2\pi}{L} I_j$. Par définition, on a alors

$$y'(k_j) = 2\pi\rho(k_j) \Leftrightarrow y(k) = 2\pi \int_{k_{\min.}}^k dk' \rho(k'). \quad (2.15)$$

Avec ces notations, les équations de Bethe (2.7) prennent maintenant la forme :

$$k - \int_{k_{\min.}}^{k_{\max.}} dk' \rho(k') \theta(k - k') = y(k). \quad (2.16)$$

La dérivée par rapport à k de cette équation donne l'équation de Lieb,

$$2\pi\rho(k) - \int_{k_{\min.}}^{k_{\max.}} dk' \rho(k') \kappa(k - k') = 1, \quad (2.17)$$

où

$$\kappa(k) \equiv \frac{2c}{k^2 + c^2}. \quad (2.18)$$

Avec l'équation de Lieb (2.17), on a accès à la distribution de pseudo-impulsion

sans recourir aux configurations de nombres de Bethe : le passage à la limite thermodynamique se fait au détriment de la connaissance de l'état propre. En particulier, si l'interaction est infinie, $g \rightarrow \infty$, on a $\kappa(k) \rightarrow 0$ et la densité de pseudo-impulsions est simplement donnée par $\rho(k) = \frac{1}{2\pi}$.

La distribution de pseudo-impulsions est seulement conditionnée par le support d'intégration. Dans l'état fondamental, elle doit elle-même être symétrique, $k_{\max.} = -k_{\min.} = q$. En réintroduisant les paramètres physiques $c \mapsto \frac{m}{\hbar^2}g$, les densités de particule ρ et d'énergie ε sont respectivement définies par

$$\rho \equiv \frac{N}{L} = \int_{-q}^q dk \rho(k) \quad \text{et} \quad \varepsilon \equiv \frac{E}{L} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-q}^q dk \rho(k) k^2. \quad (2.19)$$

En jouant avec les relations d'état, on a alors accès à des quantités thermodynamiques telles que le potentiel chimique μ , la pression P ou la vitesse du son v , données respectivement par :

$$\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \quad P = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \varepsilon \quad \text{et} \quad v = \sqrt{\frac{\rho}{m} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2}}. \quad (2.20)$$

Dans la suite, nous allons voir que ces quantités peuvent être évaluées explicitement dans l'état fondamental du régime d'interaction infinie $g \rightarrow \infty$.

2.1.4 Gaz de Tonks-Girardeau

La limite $g \rightarrow \infty$ est aussi appelée gaz de Tonks-Girardeau car elle correspond à un gaz de bosons impénétrables, étudié par Girardeau en 1960 [64]. Dans ce cas, nous avons vu que les pseudo-impulsions de N particules étaient connues explicitement, $k_j = \frac{2\pi}{L} I_j$. Ici, on se focalise sur l'état fondamental correspondant à la configuration (2.8). Dans la limite $L \rightarrow \infty$, l'extremum de la pseudo-impulsion est simplement relié à la densité $k_F = \pi\rho$. Comme on sait par ailleurs que $\rho(k) = \frac{1}{2\pi}$, la densité d'énergie (2.19) est égale à

$$\varepsilon_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{6m} \rho^3, \quad (2.21)$$

et les différentes quantités thermodynamiques (2.20) sont calculées explicitement,

$$\mu = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \rho_F^2, \quad P_F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{3m} \rho^3 \quad \text{et} \quad v_F = \frac{\pi \hbar}{m} \rho. \quad (2.22)$$

Nous avons inclus l'indice F pour souligner que toutes ces quantités sont équivalentes à celles d'un gaz de fermions libres à une dimension. L'état propre

d'un tel gaz doit s'annuler lorsque deux bosons se trouvent à la même position. Cette propriété est partagée par les deux états propres, à la différence près que celui des gaz de fermions libres Ψ_F est antisymétrique là où celui des bosons Ψ_B est symétrique. Comme l'a montré Girardeau [64], les deux états propres sont alors équivalents sous la contrainte

$$\Psi_B(x_1, \dots, x_N) = S(x_1, \dots, x_N) \Psi_F(x_1, \dots, x_N), \quad (2.23)$$

avec la fonction $S(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$ qui symétrise la fonction d'onde fermionique¹. Cette équivalence fermion-boson peut s'interpréter [75] comme l'analogie de la transformation de Jordan-Wigner [76] dans le continu, et elle reste vraie en général [77].

Les fonctions de corrélation qui font uniquement intervenir la norme de la fonction d'onde $|\Psi_F|$ sont alors égales pour les deux gaz : dans ce cas, on peut directement utiliser les résultats connus pour les fermions libres. C'est notamment le cas de la densité moyenne $\langle \hat{\rho}(x_1) \rangle \equiv \rho$,

$$\rho = N \int dx_2 \dots dx_N |\Psi_B(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2, \quad (2.24)$$

ou de la corrélation densité-densité $\langle \hat{\rho}(x_1) \hat{\rho}(x_2) \rangle_c = \langle \hat{\rho}(x_1) \hat{\rho}(x_2) \rangle - \langle \hat{\rho}(x_1) \rangle \langle \hat{\rho}(x_2) \rangle$.

$$\langle \hat{\rho}(x_1) \hat{\rho}(x_2) \rangle_c = N(N-1) \int dx_3 \dots dx_N |\Psi_B(x_1, x_2, \dots, x_N)|^2, \quad (2.25)$$

Toutes les corrélations faisant intervenir l'opérateur densité $\hat{\rho}$ sont en fait égales à celle du gaz de fermions libres. En revanche, ce n'est pas le cas général. Par exemple, ce n'est pas le cas de la matrice densité à une particule $\langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \rangle \equiv g_1(x, x')$,

$$g_1(x, x') = N \int dx_2 \dots dx_N \Psi_B^*(x, x_2, \dots, x_N) \Psi_B(x', x_2, \dots, x_N), \quad (2.26)$$

car ici la fonction $S(x_1, \dots, x_N)$ ne se simplifie pas et le calcul exact est nettement plus ardu. La fonction de corrélation $g_1(x, x')$ est donc un bon candidat pour tester l'efficacité de l'approche que nous développons dans la suite de ce manuscrit, et elle sera étudiée à de multiples reprises.

1. La fonction d'onde du gaz de fermions libres est donnée par un déterminant de Slater [72]. Plusieurs auteurs signalent d'ailleurs que ce déterminant est apparu trois ans auparavant dans les travaux de Dirac [73] et de Heisenberg [74].

2.1.5 Corrélations et Ansatz de Bethe algébrique

Une première limitation de l'Ansatz de Bethe est que toute sa construction repose sur l'hypothèse d'invariance par translation du système. Dans les situations inhomogènes qui nous intéressent ici, l'intégrabilité du modèle de Lieb-Liniger n'est donc pas suffisante pour en caractériser toutes les propriétés. Quant au calcul des fonctions de corrélation, la fonction d'onde de Bethe est d'une complexité telle qu'il est souvent impossible de les calculer en pratique. Ce problème est pallié par la formulation appelée *Ansatz de Bethe algébrique*.

En règle général, les corrélations quantiques peuvent être décrites par des équations aux dérivées partielles non-linéaires. En 1967, Gardner, Greene, Kruskal et Miura [78] ont introduit une nouvelle méthode permettant de résoudre ce genre d'équations : la *méthode de la diffusion inverse* qui est aujourd'hui à la base de bon nombre de modèles exactement solubles. Le nom provient de l'idée de base empruntée à la théorie de la diffusion : généralement, un problème de diffusion consiste à construire la matrice de diffusion à partir des contraintes imposées par le potentiel diffusif. Dans la méthode inverse, on cherche à reconstruire le potentiel à partir d'une matrice de diffusion connue. Elle a été appliquée avec succès à l'équation de Schrödinger non-linéaire dès 1972 par Shabat et Zakharov [79]. Si l'équation de Schrödinger non-linéaire est une théorie classique des champs, elle est en fait équivalente au modèle de Lieb-Liniger après une quantification canonique. Sa version quantifiée a été résolue en 1979 par Sklyanin, Takhtadzhyan et Faddeev [80] grâce à la *méthode de diffusion inverse quantique*. Leur approche, qui concilie l'Ansatz de Bethe avec la méthode de diffusion inverse, a donné naissance à l'Ansatz de Bethe algébrique. Cette formulation peut s'interpréter comme une seconde quantification de l'Ansatz de Bethe en coordonnées. Pour construire la matrice de transfert, on utilise l'équation de Yang-Baxter [71] et l'algèbre qui lui est associée. On peut alors extraire de la matrice deux opérateurs qui définissent un pseudo-vide, état sur lequel on applique deux autres opérateurs qui créent et annihilent les excitations. Une simple introduction aux aspects mathématiques de l'Ansatz de Bethe algébrique serait déjà bien au delà de notre propos, aussi nous renvoyons à nouveau vers le livre de Korepin, Bogoliubov et Izergin [69] ou aux notes de Franchini [70] pour une présentation détaillée.

L'intérêt de l'Ansatz de Bethe algébrique est qu'il donne les états propres sous une forme similaire à une seconde quantification. En principe, on peut donc calculer les fonctions de corrélations à notre guise, mais la tâche reste en réalité extraordinairement difficile. Malgré cela, il existent de nombreux résultats explicites basés sur les *facteurs de forme* [81–89]. Ces facteurs de forme sont les éléments de matrices d'opérateurs microscopiques entre deux

états propres de Bethe,

$$\langle \{k'_j\} | \hat{O}(x, t) | \{k_j\} \rangle; \quad (2.27)$$

En l'occurrence, les formules explicites connues pour les opérateurs de création/annihilation bosoniques et l'opérateur densité vont nous servir à fixer les coefficients non-universels apparaissant dans la théorie du liquide de Luttinger inhomogène que nous développons dans la suite. Nous revenons sur le calcul de ces coefficients dans le chapitre 5 et présentons explicitement les formules dans l'annexe A.

2.2 Groupe de renormalisation de la matrice densité

Parmi les méthodes que l'on peut considérer comme exactes, il existe aussi des méthodes numériques, qui sont exactes dans la limite de la précision machine. À l'inverse de la plupart des solutions analytiques, les solutions numériques ne sont évidemment exactes que pour des systèmes de taille finie. Pour obtenir la solution d'un modèle donné, le plus simple est en principe d'écrire la matrice de son hamiltonien dans une base appropriée et de la diagonaliser numériquement. Cette méthode est appelée *diagonalisation exacte* et s'applique efficacement aux problèmes de fermions libres ou du type liaisons fortes. En revanche, elle possède deux écueils pour les systèmes qui nous intéressent dans cette thèse. Le premier concerne le cas des modèles continus ; pour diagonaliser un modèle continu, il doit exister une procédure de discrétisation. Dans le cas du modèle de Lieb-Liniger qui nous intéresse, cet obstacle est facilement contourné puisqu'on sait qu'il correspond à la limite de faible densité du modèle de Bose-Hubbard [90].

Le second obstacle est lié à la méthode en elle-même. Imaginons un réseau de L sites sur lesquels vivent des bosons en répulsion infinie. Sur chaque site, il n'existe que deux états possibles : soit le site est inoccupé $|0\rangle$, soit le site est occupé par un unique boson $|1\rangle$. L'espace de Hilbert double de taille chaque fois qu'un site est ajouté. Le hamiltonien à diagonaliser est une matrice de taille $2^N \times 2^N$ mais possède de nombreuses entrées nulles. S'il existe des algorithmes qui permettent de diagonaliser exactement une telle matrice pour une centaine de bosons en répulsion infinie, la situation est différente pour une interaction finie. Dans cette situation, un nombre n de bosons peut occuper le même site simultanément. La taille de l'espace de Hilbert est ainsi multipliée par n pour chaque site ajouté et on se retrouve rapidement limité numériquement, étant

donné qu'il faut garder en mémoire n^N degrés de liberté à chaque étape du calcul. En revanche, le problème est simplifié lorsque l'on ne s'intéresse qu'à une partie du spectre, généralement l'état fondamental et les quelques premiers états excités. L'algorithme de Lanczos [91] en est un exemple, particulièrement efficace pour obtenir l'état fondamental. Il est notamment utilisé dans le *groupe de renormalisation de la matrice densité*.

2.2.1 Principe de la méthode

Le groupe de renormalisation de la matrice densité (DMRG) est une méthode variationnelle proposée par White en 1992 [66]. Elle permet d'obtenir itérativement l'état fondamental en s'affranchissant des degrés de liberté non pertinents. C'est aujourd'hui la technique la plus efficace pour étudier les propriétés de l'état fondamental des systèmes unidimensionnels, sa précision étant limitée par la précision machine [92]. L'efficacité du DMRG s'explique par le fait que les états s'écrivent sous la forme de *produits de matrices* (MPS). La formulation du DMRG en terme de produits de matrice a permis de l'étendre aux problèmes en évolution temporelle, à température finie ou encore avec des conditions périodiques aux bords. En fait, la notion de produits de matrices dans ce contexte est liée à la théorie des réseaux de tenseurs utilisée dans diverses disciplines scientifiques. Ici, on se limite à la présentation historique du principe du DMRG mais on peut se référer à la revue de Schollwöck [92] pour une introduction plus moderne.

On cherche à connaître l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ d'un système vivant sur le réseau. Pour cela, on commence par séparer cet état en deux bloc, l'un appelé le système S et l'autre l'environnement E. La matrice densité du système total $\hat{\rho} = |\psi_0\rangle \langle\psi_0|$ se décompose elle-même en deux matrices densité réduites $\hat{\rho}_S = \text{Tr}_E [\hat{\rho}]$ et $\hat{\rho}_E = \text{Tr}_S [\hat{\rho}]$ où Tr signifie que l'on prend la trace sur les degrés de liberté correspondants à l'environnement E ou le système S respectivement. La décomposition de Schmidt [93] permet de réécrire l'état fondamental dans la base des états propres des matrices densité réduites,

$$|\psi_0\rangle = \sum_i \sqrt{\alpha_i} |S_i\rangle |E_i\rangle, \quad (2.28)$$

où α_i sont des valeurs propres communes aux deux matrices réduites. L'idée de base du DMRG est alors de tronquer cette somme le plus efficacement possible.

La première étape est celle de l'algorithme de taille infinie. On considère un hamiltonien H_{L_0} constitué de L_0 sites et dont l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ peut se calculer par diagonalisation, par exemple via l'algorithme de Lanczos. Puis on construit et diagonalise les deux matrices densités réduites dont on garde

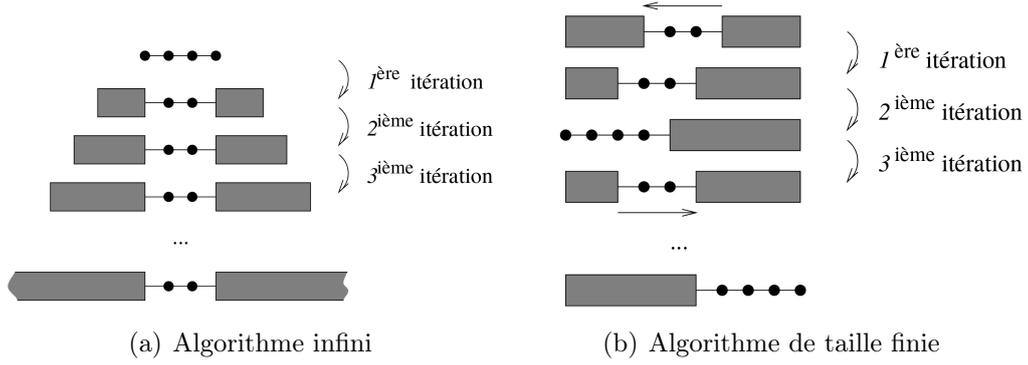


FIGURE 2.1 – Illustration du principe de la méthode DMRG, reproduit de [94].

les m plus grandes valeurs propres qui définissent l'espace de Hilbert réduit. À la troisième étape, le hamiltonien du bloc système H_S est projeté dans la base des états propres de la matrice densité réduite correspondante,

$$H'_S = R^\dagger H_S R, \quad (2.29)$$

où R est la matrice contenant les m vecteurs propres des m plus grandes valeurs propres. On procède de la même manière pour le hamiltonien du bloc environnement H_E puis on ajoute un site à chacun des blocs de sorte qu'ils se joignent par un bloc de deux sites. L'ensemble de ces trois blocs forme un nouveau système dont le hamiltonien H_{L_0+2} sert de point de départ à l'itération suivante. Le système croît donc indéfiniment tant que la convergence n'est pas atteinte, d'où le nom d'algorithme de taille infinie.

Si l'on s'intéresse à un système de taille finie, on peut en principe utiliser l'algorithme de taille infinie en partant d'un système de petite taille l et stopper l'algorithme lorsque la taille du système a atteint la taille L souhaitée. Le risque est alors que l'algorithme n'ait pas convergé vers l'état fondamental. L'algorithme de taille finie prend pour point de départ le système lorsqu'il a atteint la taille L voulue. Au lieu d'augmenter la taille du système total, on fait varier la taille du bloc système aux dépens du bloc environnement, et inversement. Concrètement, on fait croître le bloc système d'un site en retirant celui-ci du bloc environnement, puis on réitère la procédure : chaque bloc est projeté dans la base de ses m plus grandes valeurs propres, le système total est reconstruit et on continue jusqu'à ce que la taille minimale du bloc environnement soit atteinte. À partir de là, c'est le bloc environnement qui croît aux dépens du bloc système et ces *balayages* continuent jusqu'à converger vers l'état fondamental.

La formulation en terme de produits de matrices a permis de développer des bibliothèques de calcul par DMRG très élégantes et faciles d'emploi. Dans cette

thèse, nous avons utilisé la librairie libre de droit ITensor [95] développée en C++.

2.2.2 De la chaine XXZ au modèle de Lieb-Liniger

Comme nous l'avons mentionné, le modèle de Bose-Hubbard peut s'interpréter comme version discrète du modèle de Lieb-Liniger (2.1). La méthode DMRG peut alors être utilisée pour simuler le gaz de bosons avec interaction répulsive. Dans le cas qui nous intéresse d'un gaz confiné par un potentiel externe $V(x)$, Schmidt et Fleischauer [96] ont montré que la simulation DMRG est essentiellement exacte pour le hamiltonien de Bose-Hubbard,

$$H_{\text{B.H.}} = -\frac{J}{2} \sum_{j=2}^{n-1} b_j^\dagger b_{j+1} + b_j^\dagger b_{j-1} + \sum_{j=1}^n (V(x) - \mu) b_j^\dagger b_j - \frac{U}{2} \sum_{j=1}^n b_j^{\dagger 2} b_j^2, \quad (2.30)$$

où b_j^\dagger et b_j sont les opérateurs de création et annihilation bosoniques, j est le label des sites, a_0 le pas du réseau, n le nombre total de sites, $J = \hbar^2/ma_0^2$ et $U = g/a_0$. Les deux modèles sont équivalents dans la limite de faible densité par site, $\rho \ll a_0^{-1}$, où la position x dans le gaz est donnée par $ja_0 \rightarrow x$.

Le gaz de Lieb-Liniger est également connu pour être la limite continue de la chaine de spin-1/2 XXZ [97]. À partir du hamiltonien de Bose-Hubbard (2.30), l'équivalence fermion-boson 2.1.4 permet de réécrire les opérateurs bosoniques en terme des opérateurs de création et annihilation de fermioniques, puis en terme de spin-1/2 via une transformation de Jordan-Wigner. La simulation du modèle de Lieb-Liniger par la méthode DMRG sur la chaine XXZ a également été réalisée par Muth, Schmit et Fleischauer [98, 99], avec

$$H_{\text{XXZ}} = -\frac{J}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \sigma_j^- \sigma_{j+1}^+ + \sum_{j=1}^n (J - \mu + V(x)) \sigma_j^z - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{J}{1 + U/2J} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z, \quad (2.31)$$

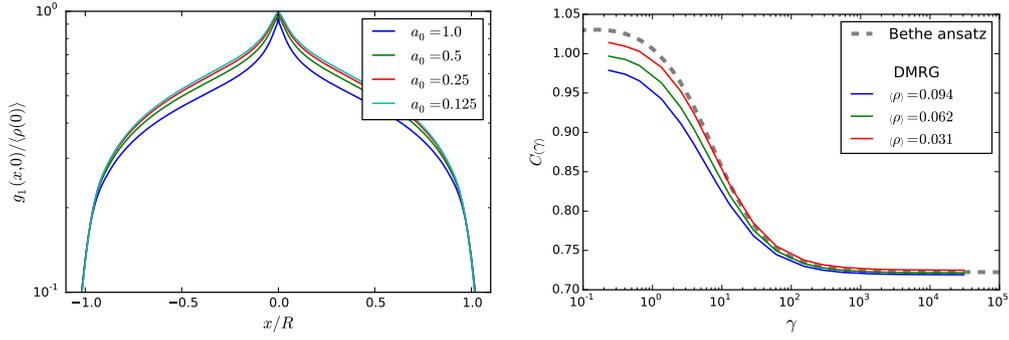
où $\sigma_j^{\pm, z}$ sont les matrices de Pauli. Dans le langage des spins, la fonction de corrélation densité-densité est ainsi donnée par

$$\langle \rho(x) \rho(x') \rangle_c = \langle \psi_0 | \sigma_j^z \sigma_{j'}^z | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | \sigma_j^z | \psi_0 \rangle \langle \psi_0 | \sigma_{j'}^z | \psi_0 \rangle, \quad (2.32)$$

avec $|\psi_0\rangle$ l'état fondamental du hamiltonien (2.31). La matrice densité à une particule est elle donnée par

$$g_1(x, x') = \langle \psi | \sigma_j^+ \sigma_{j'}^- | \psi \rangle. \quad (2.33)$$

Comme nous allons développer une description de type théorie des champs,



(a) Convergence de la matrice densité à une particule pour une discretisation croissante (b) Préfacteur de la matrice densité à une particule

FIGURE 2.2 – Résultat DMRG de la matrice densité à une particule pour $N = 48$ particules avec une discretisation croissante et comparaison du préfacteur au résultat exact obtenue via l'Ansatz de Bethe.

nous voulons simuler un nombre de particules assez grand, $N \gg 1$. Pour prendre la limite de faible densité de la chaîne XXZ (2.31), on choisit donc d'augmenter la discretisation en prenant un pas de réseau très petit $a_0 \ll 1$. Pour vérifier que la simulation converge vers le modèle de Lieb-Liniger avec interaction finie, $\gamma \sim 1$, on extrait du résultat DMRG le préfacteur $C(\gamma)$ de la matrice densité à une particule $g_1(x, x')$ que l'on compare au résultat exact du facteur de forme calculé via l'Ansatz de Bethe algébrique, voir figure 2.2. Nous revenons en détails sur ce préfacteur dans la seconde partie de cette thèse.

Chapitre 3

Théories effectives : liquide de Luttinger et théories conformes

Nous avons vu en introduction que les excitations de basses énergies des systèmes quantiques à une dimension revêtent un caractère bosonique. En 1950, Tomonaga [100] est le premier à s'intéresser à cette spécificité et propose un modèle de fermions avec une relation de dispersion linéaire. Ses travaux sont poursuivis en 1963 par Luttinger [101], mais c'est Mattis et Lieb en 1965 [102] qui obtiennent la solution exacte. Ce système est connu sous le nom de modèle de Tomonaga-Luttinger. La résolution de ce modèle fait intervenir la technique de bosonisation [9, 103], qui est exacte pour une relation de dispersion strictement linéaire. Ce résultat est en réalité plus général, comme l'a montré Haldane en 1981 [10–12] : le hamiltonien du modèle de Tomonaga-Luttinger capture en fait les propriétés universelles de bon nombre de systèmes quantiques à une dimension. Haldane établit ainsi la théorie du liquide de Luttinger, qui joue le rôle du liquide de Fermi à une dimension. Le fait que le liquide de Luttinger définit une classe d'universalité peut se comprendre par le lien qui existe avec les théories conformes.

Dans ce chapitre, on présente l'esprit de la théorie du liquide de Luttinger, ses principaux concepts et la terminologie qui lui est associée. Les détails de calculs sont volontairement laissés de côté. Si le traitement le plus standard est l'approche canonique décrite dans le livre de Giamarchi [104], un traitement plus spécifique aux gaz d'atomes froids est aussi présenté par Cazalilla [105]. Ce chapitre est inspiré de ces différentes références, mais les notations sont quelque peu modifiées afin de faciliter le lien avec l'approche du liquide de Luttinger inhomogène que l'on développe au chapitre suivant.

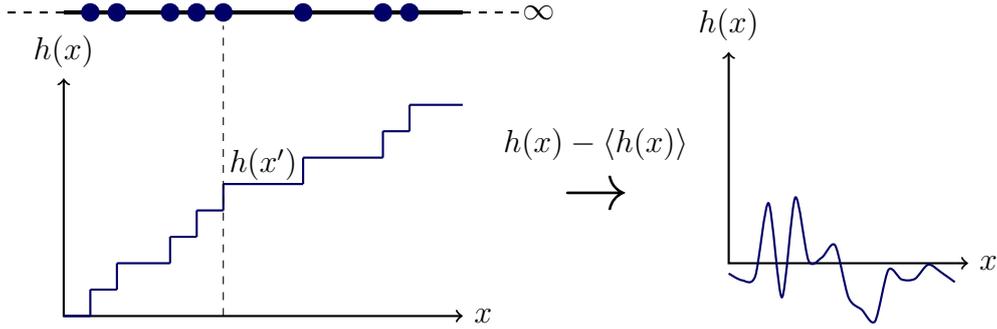


FIGURE 3.1 – À gauche : champ de hauteur $h(x)$ correspondant à une configuration de particules sur la ligne infinie. À droite : en retirant au champ $h(x)$ sa valeur moyenne $\langle h(x) \rangle$, on obtient les fluctuations de la densité, représentées par un champ libre gaussien.

3.1 Fluctuations de la densité : introduction du champ de hauteur

Considérons un système homogène de taille $L \gg 1$, composé de $N \gg 1$ particules identiques et de densité $\rho = N/L$. L'opérateur densité $\hat{\rho}(x)$ à la position x est donné par la somme

$$\hat{\rho}(x) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i). \quad (3.1)$$

Utiliser l'opérateur sous cette forme n'est pas pratique, mais le fait de travailler dans une seule dimension de l'espace nous offre la possibilité de réécrire cet opérateur sous une forme plus concrète. En effet, quelle que soit la répartition des particules, il existe une unique façon de les compter. Pour un système homogène, la distance interparticule moyenne est donnée par l'inverse de la densité ρ^{-1} . On introduit alors le champs de hauteur $h(x_n) = 2\pi\rho x_n$ qui prend pour valeur $2\pi n$ à la position x_n . Comme le champ est strictement monotone, l'opérateur densité se réécrit

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x) &= \sum_n |\partial_x h(x)| \delta(h(x) - 2\pi n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \partial_x h(x) \sum_p e^{iph(x)}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où q est un entier. En séparant la valeur moyenne du champ $\langle h(x) \rangle = 2\pi\rho x$ de ses fluctuations, $h(x) \mapsto \langle h(x) \rangle + h(x)$, on sépare également la densité moyenne

de ses fluctuations,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x) &\mapsto \hat{\rho}(x) + \delta\rho(x) \\ &= \left(\rho + \frac{1}{2\pi} \partial_x h(x) \right) \sum_p e^{ip(2\pi\rho x + h(x))}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

À courte distance, on peut considérer que le champ h est constant et la densité est alors dominée par le terme

$$\hat{\rho}(x) \sim \rho \cos(2\pi\rho x + h(x)). \quad (3.4)$$

La densité est ainsi interprétée classiquement comme une onde de densité de période $2\pi\rho$ dont la position des extrema est donnée par les valeurs du champ de hauteur $h(x)$. À l'inverse, si l'on s'intéresse aux corrélations à longue portée, c'est à dire à des distances grandes devant la distance interparticule ρ^{-1} , alors les oscillations sont atténuées et il ne reste que le terme

$$\hat{\rho}(x) \simeq \rho + \frac{1}{2\pi} \partial_x h(x). \quad (3.5)$$

À l'ajout d'une particule à la position x doit donc correspondre une discontinuité de 2π dans le champ de hauteur $h(x)$.

3.2 Hamiltonien effectif

On cherche maintenant à identifier l'opérateur ψ^\dagger qui crée un boson libre supplémentaire, avec $[\psi(x), \psi^\dagger(x')] = \delta(x-x')$. Localement, on peut voir l'ajout d'une particule en x comme une translation de l'opérateur densité, $\hat{\rho}(x) = \rho + 1$. Le générateur de cette translation est donné par l'opérateur η qui satisfait les commutateurs

$$\left[\frac{1}{2\pi} \partial_x h(x), \eta(x') \right] = i\delta(x-x'), \quad (3.6)$$

et $[\hat{\rho}(x), e^{-i\eta(x')}] = \delta(x-x')e^{-i\eta(x')}$. On peut ainsi définir l'opérateur de création d'une excitation particule-trou,

$$\psi^\dagger(x) = \sqrt{\hat{\rho}(x)} e^{-i\eta(x)}. \quad (3.7)$$

De manière réciproque, l'opérateur $\frac{1}{2\pi} \partial_x \eta(x)$ est interprété comme le moment conjugué du champ de hauteur h . Étant donné que l'énergie d'interaction est représentée par un terme $\sim \int dx \hat{\rho}(x)^2$ et l'énergie cinétique par un terme $\sim \int dx (\partial_x \psi^\dagger(x)) (\partial_x \psi(x))$, on peut construire un hamiltonien effectif avec les opérateurs h et η . Si l'on ne garde que les champs essentiels (au sens du groupe

de renormalisation), seuls les termes $(\partial_x h(x))^2$ et $(\partial_x \eta(x))^2$ apparaissent, et les excitations de basse énergie d'un système quantique à une dimension sont décrites par le hamiltonien

$$H = \frac{\hbar}{2\pi} \int dx \left[vK (\partial_x \eta(x))^2 + \frac{v}{K} (\partial_x h(x))^2 \right]. \quad (3.8)$$

Les deux paramètres v et K sont respectivement la vitesse des excitations et le paramètre de Luttinger adimensionné. Ces paramètres dépendent des détails du modèle microscopique, mais on sait que pour les systèmes invariants sous une transformation de Galilée, ils sont liés par la relation [10]

$$K = \frac{\pi \hbar \rho}{mv}. \quad (3.9)$$

Il faut également noter que le hamiltonien (3.8) reste inchangé sous la transformation $h \mapsto \eta$ et $K \mapsto 1/K$; cette dualité est très utile par la suite. Dans le cas d'un problème dépendant du temps, la dépendance temporelle des opérateurs est simplement introduite par la représentation de Heisenberg en temps réel,

$$O(t) = e^{iHt} O e^{-iHt}, \quad (3.10)$$

ou bien en temps imaginaire [106],

$$O(\tau) = e^{\tau H} O e^{-\tau H}, \quad (3.11)$$

avec τ la variable de temps imaginaire obtenue après une rotation de Wick $t \mapsto i\tau$.

3.3 Diagonalisation et fonctions de corrélation

Le paramètre de Luttinger K peut être absorbé dans un hamiltonien \tilde{H} en redéfinissant les opérateurs par

$$h = \sqrt{K} \tilde{h} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{K}} \tilde{\eta}. \quad (3.12)$$

Cela revient à travailler avec $K = 1$ dans le hamiltonien (3.8). Le hamiltonien \tilde{H} est diagonal dans la base des impulsions q ,

$$\tilde{H} = \sum_{q \neq 0} v |q| \psi_q^\dagger \psi_q, \quad (3.13)$$

avec ψ_q^\dagger la transformée de Fourier de l'opérateur $\psi^\dagger(x)$, qui satisfait le commutateur $[\psi_q^\dagger, \psi_{q'}] = \delta_{q,q'}$. Pour un système invariant par translation, la décomposition en mode de Fourier des opérateurs h et η permet calculer la fonction de corrélation à deux points du champs de hauteur,

$$\begin{aligned} G_{[K]}((x, \tau), (0, 0)) &\equiv -\langle h(x, \tau) h(0, 0) \rangle \\ &= K \log(x^2 + v^2 \tau^2). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dans le cadre d'une formulation en intégrales de chemin, cette fonction de corrélation est aussi appelée propagateur et s'obtient comme la fonction de Green d'un certain opérateur ; nous revenons en détail sur ce point dans la chapitre suivant. Le propagateur de l'opérateur conjugué $\langle \eta(x, \tau) \eta(0, 0) \rangle$ s'obtient directement à partir du précédent (3.16) grâce à la dualité $h \mapsto \eta$ et $K \mapsto 1/K$. Enfin, la fonction de corrélation mixte des deux opérateurs est donnée par,

$$\begin{aligned} F_{[K, 1/K]}((x, \tau), (0, 0)) &\equiv \langle h(x, \tau) \eta(0, 0) \rangle \\ &= \arg(z), \end{aligned} \quad (3.15)$$

où $\arg(z)$ est l'argument du nombre complexe $z = x + iv\tau$.

Pour donner un premier exemple de fonction de corrélation, on peut facilement calculer la corrélation densité-densité grâce à la définition (3.3) et la fonction de Green (3.15),

$$\begin{aligned} \langle \hat{\rho}(x, \tau) \hat{\rho}(0, 0) \rangle &= \rho - \frac{K}{4\pi^2} \frac{(x^2 - v^2 \tau^2)}{(x^2 + v^2 \tau^2)^2} + \rho^2 \cos(2\pi \rho x) \frac{A_2}{(x^2 + v^2 \tau^2)^K} \\ &\quad + \rho^2 \cos(4\pi \rho x) \frac{A_4}{(x^2 + v^2 \tau^2)^{4K}} + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les constantes A_2 et A_4 sont des coefficients non-universels qui dépendent des propriétés du modèle microscopique sous-jacent. Dans la seconde partie nous présentons une méthode qui permet de les calculer de manière systématique.

La théorie du liquide de Luttinger peut se résumer ainsi : si on sait calculer les paramètres v et K du hamiltonien (3.8) pour un modèle microscopique, alors on peut calculer toutes ses fonctions de corrélation à grande distance. Plus précisément, les fonctions de corrélation sont obtenues exactement dans la limite asymptotique $N, L \rightarrow \infty$, pour une densité $\rho = N/L$ fixée.

3.4 Lien avec les théories conformes

L'universalité de la théorie du liquide de Luttinger quant à la description des systèmes quantiques à une dimension peut s'expliquer par son lien avec

les théories conformes. Pour mettre en évidence ce lien, il faut s'appuyer sur le calcul des fonctions de corrélation en terme d'intégrales de chemin. Cette formulation de la mécanique quantique est due historiquement aux travaux de thèse de Feynman [107] et est à la base des théories quantiques des champs.

3.4.1 Champ libre gaussien

En terme d'intégrale de chemin, la fonction de corrélation à deux points du champ de hauteur est définie par

$$\langle h(x, \tau) \dots h(x', \tau') \rangle = \frac{\int [dh] e^{-\mathcal{S}[h]} h(x, \tau) \dots h(x', \tau')}{\int [dh] e^{-\mathcal{S}[h]}}, \quad (3.17)$$

où $\mathcal{S}[h]$ est l'action associée au hamiltonien du liquide de Luttinger (3.8),

$$\mathcal{S}[h] = \frac{1}{8\pi K} \int dx d\tau \left(\frac{1}{v} (\partial_\tau h)^2 + v (\partial_x h)^2 \right). \quad (3.18)$$

Sous cette forme, le temps imaginaire $t = i\tau$ joue le rôle d'une deuxième dimension euclidienne et illustre simplement l'équivalence entre un système quantique à une dimension qui évolue dans le temps et un système classique à deux dimensions [108]. Cette action correspond en fait à la limite continue de nombreux problèmes de physique statistique, notamment aux problèmes de pavage avec des dominos, au point critique du modèle de Ising bidimensionnel, au modèle XY, ou encore à la croissance de surfaces aléatoires. Au point critique, ces différents modèles ont la particularité de pouvoir être représentés en terme d'un gaz de Coulomb en deux dimensions. Initiée par Kosterlitz et Thouless dès 1973 [109, 110] pour le modèle XY, la représentation en terme de gaz de Coulomb s'est imposée suite aux travaux de Kadanoff en 1978 [111] et de Nienhuis en 1984 [112].

Dans le cadre des théories quantiques des champs, l'action (3.18) est connue sous le nom de boson libre euclidien de masse nulle. Pour rappel, une masse nulle dans une théorie quantique en une dimension représente l'équivalent du point critique d'un système statistique à deux dimensions [108]. Aujourd'hui, l'action tend à être plus connue par les physiciens et les mathématiciens sous le nom de *champ libre gaussien* (GFF) [113], ce pourquoi nous avons choisi de l'utiliser dans cette présentation. Parmi ces théories, la plus puissante dans le cadre des problèmes à (1+1) dimensions ou deux dimensions est l'approche des théories conformes.

3.4.2 Notion d'invariance conforme

L'universalité de la représentation en gaz de Coulomb, et par là même la théorie du liquide de Luttinger, peut se comprendre par leur lien avec les théories conformes des champs (CFT) [114]. L'idée d'utiliser l'invariance conforme pour étudier les systèmes critiques remonte à Polyakov en 1970 [115], mais cette approche ne révèle sa puissance qu'en 1984, lorsque Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [116] montrent qu'elle permet de décrire de manière effective les systèmes critiques à deux dimensions. D'importants travaux ont suivis la même année, notamment par Dotsenko et Fateev [117] ou encore Cardy [118], et le lien avec la technique de bosonisation à la base de la théorie du liquide de Luttinger est rapidement identifié. Le but de cette section est simplement de donner un aperçu pratique des théories conformes ; pour une introduction plus complète, on pourra se référer aux notes de Cardy [119], de Ginsparg [120] ou de Schellekens [121], et pour une lecture approfondie aux livres de Henkel [108] ou de Di Francesco, Mathieu et Sénéchal [122].

Au point critique, un système classique possède une invariance d'échelle, c'est à dire que les coordonnées du système peuvent être renormalisées par une transformation du type $\mathbf{x} \mapsto b^{-1}\mathbf{x}$, où $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ et b est constant. En plus de l'invariance sous une dilatation, les systèmes critiques possèdent généralement une invariance par translation et par rotation. Ces opérations forment un groupe pour lequel les fonctions de corrélation des opérateurs de la théorie effective se transforment simplement par :

$$\langle \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) \rangle \mapsto b^{-\Delta_{\Phi_1}} \dots b^{-\Delta_{\Phi_n}} \langle \Phi_1(x_1) \dots \Phi_n(x_n) \rangle, \quad (3.19)$$

où Δ_{Φ} est la dimension d'échelle de l'opérateur Φ . Un système à deux dimensions dont les interactions sont locales a en réalité un groupe de symétrie beaucoup plus large ; les transformations qui combinent localement les translations, les rotations et les dilations définissent le groupe de symétrie conforme. Pour être exact, les transformations du groupe de symétrie conforme sont celles qui préservent la métrique de la théorie des champs à un facteur de Weyl [123] près :

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad \text{telle que} \quad g'_{ab}(x') \mapsto e^{2\sigma(x)} g_{ab}(x). \quad (3.20)$$

Sous une transformation conforme locale, les opérateurs ne sont plus simplement renormalisés par un facteur global b mais par un facteur local $b(x)$. Cela a des conséquences importantes sur la transformation des fonctions de corrélation : intéressons-nous par exemple à la fonction à deux points $\langle \Phi_1(x_1) \Phi_2(x_2) \rangle$. Pour satisfaire une relation similaire à (3.19), les dimensions d'échelles des deux opérateurs doivent être égales $\Delta_{\Phi_1} = \Delta_{\Phi_2} = \Delta$. La symétrie conforme

impose ainsi l'orthogonalité des opérateurs de la théorie, c'est à dire que les fonctions de corrélation à deux points prennent toujours la forme

$$\langle \Phi_i(x_1) \Phi_j(x_2) \rangle \sim \frac{\delta_{ij}}{(x_1 - x_2)^{2\Delta}}. \quad (3.21)$$

3.4.3 Théories conformes dans le plan complexe

Si l'on utilise les coordonnées complexes $z = x + iv\tau$ et $\bar{z} = x - iv\tau$, le sous-groupe des translations, rotations et dilations est généré par les transformations de Möbius

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (3.22)$$

où les coefficients complexes doivent satisfaire $ad - bc \neq 0$. Sous une telle transformation, la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ est envoyée sur elle-même et on parle souvent de transformation conforme spéciale. Cependant, si l'on considère simplement la contrainte locale (3.20), on voit qu'elle est satisfaite pour toute fonction holomorphe $z' = w(z)$,

$$dz' d\bar{z}' = \left| \frac{dw(z)}{dz} \right|^2 dz d\bar{z}, \quad (3.23)$$

où $\left| \frac{dw(z)}{dz} \right|^2$ est identifié avec le facteur de Weyl. Le groupe conforme est ainsi généré par une infinité de transformations conformes. En d'autres termes, il existe toujours un jeu de coordonnées isothermes (z, \bar{z}) telles que la métrique est plate, à un facteur de Weyl près. Si ce jeu de coordonnées est connu explicitement, on peut toujours effectuer une transformation conforme et se ramener à une géométrie dans laquelle on sait déjà calculer les fonctions de corrélation. Imaginons que l'on sache calculer toutes les fonctions de corrélation dans le plan complexe \mathbb{C} mais que l'on s'intéresse à un problème avec des conditions périodiques aux bords. La géométrie est celle d'un cylindre de circonférence L , mais on sait que le plan \mathbb{C} peut être envoyé vers le cylindre par la transformation

$$w(z) = \frac{L}{2\pi} \log(z). \quad (3.24)$$

Les opérateurs vivants sur le cylindre sont liés aux opérateurs vivants sur le plan via les facteurs de Weyl, Sous cette transformation conforme les opérateurs primaires de la théorie se transforment par la relation

$$\Phi(w, \bar{w}) \rightarrow e^{-\Delta\sigma(z, \bar{z})} \Phi(z, \bar{z}). \quad (3.25)$$

On peut ainsi calculer les fonctions de corrélations dans la géométrie du cy-

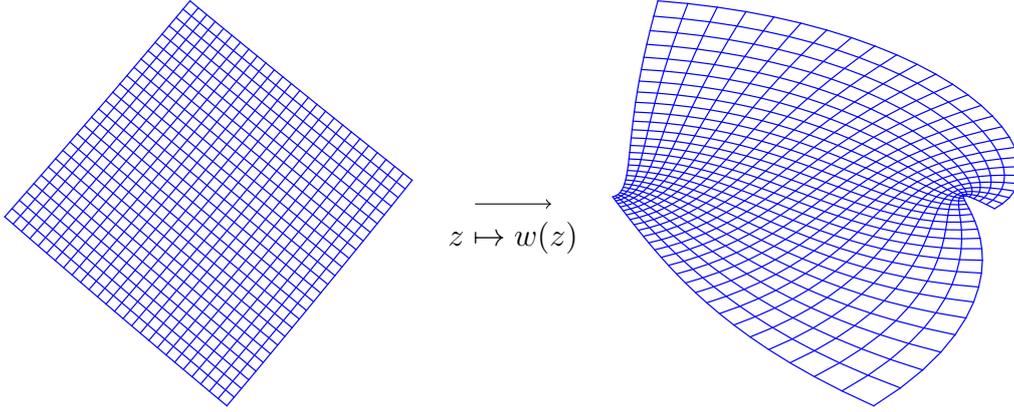


FIGURE 3.2 – Exemple de transformation conforme $z \mapsto w(z)$ du plan vers une surface quelconque, générée à partir du code de Trott [124].

lindre,

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = e^{-\Delta\sigma(w_1, \bar{w}_1)} \dots e^{-\Delta\sigma(w_n, \bar{w}_n)} \langle \Phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle. \quad (3.26)$$

L'invariance conforme est extrêmement puissante; en jouant avec les transformations conformes, on peut tenir compte des effets de tailles finies, ou au contraire s'en affranchir comme nous allons le voir dans le chapitre 5.

Dans les coordonnées complexes z et \bar{z} , l'action du champ libre gaussien prend la forme

$$\mathcal{S}[h] = \frac{1}{4\pi K} \int dz d\bar{z} (\partial_z h) (\partial_{\bar{z}} h). \quad (3.27)$$

Comme l'action (3.27) est quadratique, la fonction à deux points $\langle h(z, \bar{z}) h(z', \bar{z}') \rangle$ est directement obtenue par le calcul de l'intégrale gaussienne,

$$\langle h(z, \bar{z}) h(z', \bar{z}') \rangle = -K \log |z - z'|^2. \quad (3.28)$$

Les équations du mouvement associées à l'action (3.27) restent satisfaites lorsque le champ de hauteur $h(z, \bar{z})$ est décomposé en une fonction holomorphe de z et une fonction anti-holomorphe de \bar{z} ,

$$h(z, \bar{z}) = \sqrt{K} (\varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})), \quad (3.29)$$

telles que $\partial_{\bar{z}} \varphi(z) = \partial_z \bar{\varphi}(\bar{z}) = 0$. En (1+1) dimensions, c'est à dire en temps réel, cette condition correspond aux solutions droite et gauche imposées par l'invariance de Lorentz; les excitations gauche et droite se propagent indépendamment le long d'un cône de lumière. On parle alors de théorie chirale, et

par extension les champs $\varphi(z)$ et $\bar{\varphi}(\bar{z})$ sont appelés champs chiraux. Les propagateurs des champs chiraux ont une forme analogue à la fonction à deux points,

$$\langle \varphi(z)\varphi(z') \rangle = -\log(z - z'), \quad \langle \bar{\varphi}(\bar{z})\bar{\varphi}(\bar{z}') \rangle = -\log(\bar{z} - \bar{z}'), \quad (3.30)$$

et $\langle \varphi(z)\bar{\varphi}(\bar{z}') \rangle = 0$.

On remarque que le propagateur du champ de hauteur (3.28) est égal, au signe près, à la fonction de Green du potentiel électrostatique à deux dimensions,

$$G_{[K]}((z, \bar{z}), (z', \bar{z}')) = K \log |z - z'|^2. \quad (3.31)$$

Si ce constat nous permet de généraliser la théorie liquide de Luttinger inhomogène au chapitre 5, c'est aussi celui qui est à la base de l'approche du gaz de Coulomb que nous avons mentionné précédemment. Dans celle-ci, l'exponentiel des champs chiraux créent des charges électriques ou magnétiques, c'est à dire un flux de champ magnétique perpendiculaire au plan. Les opérateurs qui créent une charge électrique α sont les opérateurs de vertex électriques,

$$\mathcal{V}_\alpha^e(z, \bar{z}) = : e^{i\alpha h(z, \bar{z})} : . \quad (3.32)$$

Ces opérateurs ont une dimension d'échelle $\Delta = \alpha^2 K$, et comme le champ de hauteur h est seulement défini modulo 2π , les charges électriques α sont quantifiées et doivent être entières. Prendre l'exponentiel du champ de hauteur n'est pas une opération triviale : il y a une singularité lorsque deux champs chiraux se trouvent au même point, voir équation (3.30). La procédure de régularisation en CFT est nommée *ordre normal*, défini ici par

$$\left\langle \prod_{i=1}^l : e^{i\alpha_i \varphi(z_i)} : \right\rangle_{\mathbb{C}} = \prod_{1 \leq j < k \leq l} |z_j - z_k|^{\alpha_j \alpha_k}. \quad (3.33)$$

Il reste à définir les opérateurs de vertex magnétiques $\mathcal{V}_\beta^m(z, \bar{z})$. Les charges électriques α étant quantifiées, on a l'équivalent de la quantification des monopôles de Dirac à deux dimensions, ce qui impose aussi des contraintes sur les charges magnétiques β . En présence d'une charge magnétique $\beta = 1$, le champ de hauteur est incrémenté $h \mapsto h + 2\pi$. En effet, nous allons voir que les opérateurs magnétiques sont associés aux opérateurs qui créent et annihilent les particules du modèle microscopique.

Chapitre 4

Matrice densité à une particule du gaz de Tonks-Girardeau homogène

Avant de développer la théorie du liquide de Luttinger inhomogène, voyons comment utiliser les différents outils présentés aux chapitres 2 et 3 dans une situation homogène. Pour cela, on se focalise sur un problème non-trivial, à savoir la matrice densité à une particule (2.26) du gaz de Tonks-Girardeau. Comme déjà présenté au chapitre 2, c'est la limite d'interaction infinie $g \rightarrow +\infty$ du modèle de Lieb-Liniger,

$$H = \int dx \left[-\Psi^\dagger(x) \frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} \Psi(x) + \frac{g}{2} \Psi^\dagger(x) \Psi^2(x) \right]. \quad (4.1)$$

Dans ce régime, on a accès à des formules analytiques explicites, et nous verrons par la suite que les corrélations dans le gaz de Tonks-Girardeau inhomogène peuvent se ramener aux mêmes types de calcul que dans le cas présent. Il y a donc un double objectif pédagogique à ce chapitre, qui vise tant à faciliter la compréhension du problème inhomogène qu'à en alléger la présentation.

4.1 Quelques résultats connus

De nombreux travaux se sont intéressés à la matrice densité à une particule depuis les années 1960 [33, 41, 42, 125–141]. Cette quantité a initialement été étudiée dans le but de définir un critère pour la condensation de Bose-Einstein en une dimension [142]. Si l'on voit les valeurs propres de

$$g_1(x, x') = \langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x') \rangle \quad (4.2)$$

comme le nombre d'occupation, alors il y a condensation de Bose-Einstein si la plus grande de ces valeurs est de l'ordre du nombre de particule $\mathcal{O}(N)$ pour

$N \rightarrow +\infty$. En 1963, Schultz démontre qu'à une dimension, les bosons de noyau dur ne remplissent jamais ce critère [125].

En 1964, Lenard [126] étudie le gaz de Tonks-Girardeau sur la ligne infinie avec une densité homogène ρ et montre que $g_1(x, x')$ peut s'écrire sous la forme d'un déterminant de Toeplitz. Dans la limite $|x - x'| \gg \rho^{-1}$, il obtient alors la borne $g_1(x, x') \leq A/|x - x'|^{\frac{1}{2}}$ pour $A > 0$. Il revient sur ce problème en 1972 [128] en proposant une meilleure estimation de la constante A , puis émet la conjecture selon laquelle la borne supérieure obtenue précédemment est une égalité lorsque $\rho|x - x'| \rightarrow \infty$. Cette conjecture est démontrée par Widom en 1973 [129]. Malgré ces résultats, le comportement asymptotique de $g_1(x, x')$ pour $|x - x'|$ grand ne semble pas être apparu explicitement dans la littérature avant 1979, lorsque Vaidya et Tracy [130] l'écrivent sous la forme,

$$g_1(x, x') = |C|^2 \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{|x - x'|^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.3)$$

où la constante $|C|^2$ est connue explicitement en terme de la fonction de Barnes $G(\cdot)$,

$$|C|^2 = \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0.521414. \quad (4.4)$$

Vaidya et Tracy obtiennent également les ordres supérieurs qui apparaissent dans l'équation (4.3) à $\rho|x - x'|$ fini. Le passage du système infiniment long au système périodique de longueur L est aussi présent dans les résultats précédents [126, 128, 129] et se trouve explicitement dans l'article de Forrester et al. [41],

$$g_1(x, x') = \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{\left| \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi}{L}(x - x') \right|^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.5)$$

Nous allons voir que notre approche permet de retrouver élégamment ces résultats.

4.2 Identification des opérateurs de création et annihilation

Considérons le gaz de Tonks-Girardeau vivant sur la ligne infinie avec une densité ρ fixée. On sait que cette dernière est donnée par celle du gaz de fermions libres ρ_F et que la vitesse des excitations est $v_F = \frac{\pi\hbar}{m}\rho_F$. Le paramètre de Luttinger est donc trivialement $K = 1$ d'après l'équation (3.9), mais nous continuons de le faire apparaître pour une raison de clarté avec les chapitres

suivants. En temps imaginaire, on a la métrique

$$ds^2 = v_F^2 d\tau^2 + dx^2,$$

et on introduit les coordonnées complexes $(z, \bar{z}) = x \pm iv_F \tau$. Le système vit ainsi dans le plan complexe $(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}$ et l'action est celle du champ libre gaussien (3.27).

Puisque l'on cherche à calculer la matrice densité à une particule, il faut identifier les opérateurs de création et d'annihilation $\Psi^\dagger(x)$ et $\Psi(x)$. Avec l'interprétation en terme du champ de hauteur $h(z, \bar{z})$, on sait que l'opérateur qui crée une particule engendre une discontinuité de 2π du champ h . Il correspond donc à un opérateur de vertex magnétique $\mathcal{V}_\beta^m(z, \bar{z})$, à l'ordre dominant,

$$\Psi^\dagger(x) = \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} C_{\mathcal{V}_\beta^m}^{(\Psi^\dagger)} \mathcal{V}_\beta^m(z, \bar{z}) + \text{termes sous-dominants}, \quad (4.6)$$

avec $C_{\mathcal{V}_\beta^m}^{(\Psi^\dagger)}$ un coefficient qui dépend de la nature des opérateurs. Supposons la forme générique pour l'opérateur de vertex magnétique, $\mathcal{V}_\beta^m(z, \bar{z}) = : e^{i\beta_1 \varphi(z) + i\beta_2 \bar{\varphi}(\bar{z})} : .$ Lorsque deux opérateurs de vertex électriques et magnétiques sont en présence l'un de l'autre, la quantification des monopôles de Dirac impose $\beta_2 = -\beta_1 = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha}$, avec β entier également. Les opérateurs de vertex magnétiques sont alors de la forme,

$$\mathcal{V}_\beta^m(z, \bar{z}) = : e^{i\beta \eta(z, \bar{z})} : , \quad (4.7)$$

avec une dimension d'échelle $\Delta = \frac{\beta^2}{4K}$ et où le champ dual η est défini par

$$\eta(z, \bar{z}) = -\frac{\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})}{2\sqrt{K}}. \quad (4.8)$$

Pour se convaincre que les opérateurs qui créent une particule sont bien de la forme (4.7), nous pouvons vérifier par un calcul force brute que cette définition est compatible avec le commutateur

$$[\rho(x), \Psi^\dagger(x')] = \delta(x - x') \Psi^\dagger(x').$$

En appliquant le théorème de Wick, on a le développement en produits d'opérateurs suivant :

$$\begin{aligned} \partial_x h(z, \bar{z}) : e^{i\beta_1 \varphi(z') + i\beta_2 \bar{\varphi}(\bar{z}')} : &= \sqrt{K} (\partial_z \varphi(z) + \partial_{\bar{z}} \bar{\varphi}(\bar{z})) : e^{i\beta_1 \varphi(z') + i\beta_2 \bar{\varphi}(\bar{z}')} : \\ &\sim \sqrt{K} \left(-\frac{i\beta_1}{z - z'} - \frac{i\beta_2}{\bar{z} - \bar{z}'} \right) : e^{i\beta_1 \varphi(z') + i\beta_2 \bar{\varphi}(\bar{z}')} : . \end{aligned}$$

Dans la limite où la partie imaginaire est infinitésimale, le commutateur de l'opérateur de vertex magnétique avec les fluctuations de la densité donne :

$$\begin{aligned}
[\delta\rho(x), \mathcal{V}_\beta^m(x')] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \left[\partial_x h(x + i\varepsilon, x - i\varepsilon) : e^{i\beta_1\varphi(x') + i\beta_2\bar{\varphi}(x')} : - \{\varepsilon \rightarrow -\varepsilon\} \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \left[-\frac{i\beta_1}{x - x' + i\varepsilon} - \frac{i\beta_2}{x - x' - i\varepsilon} - \{\varepsilon \rightarrow -\varepsilon\} \right] \mathcal{V}_{0,\beta}(x') \\
&= \sqrt{K}(\beta_2 - \beta_1) \delta(x - x') \mathcal{V}_\beta^m(x').
\end{aligned}$$

Pour que ce résultat soit compatible avec le commutateur des opérateurs microscopiques, on doit minimiser la dimension d'échelle de l'opérateur sous la contrainte $\beta_2 - \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{K}}$,

$$\min_{\beta_2 - \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{K}}} \frac{1}{2}(\beta_1^2 + \beta_2^2) = \frac{1}{4K}, \quad \text{avec} \quad \beta_2 = -\beta_1 = \frac{1}{2\sqrt{K}}.$$

L'opérateur de vertex magnétique est bien donné par le champ dual (4.8). On remarque aussi que la dualité électrique/magnétique pour le champ libre gaussien implique la dualité $K \mapsto 1/4K$, de sorte que la fonction de Green du champ dual est donnée par :

$$G_{[1/4K]}((z, \bar{z}), (z', \bar{z}')) = \frac{1}{4K} \log |z - z'|^2. \quad (4.9)$$

À partir d'ici, on fixe le paramètre de Luttinger à sa valeur $K = 1$, les notations s'en trouvent ainsi allégées. Pour achever l'identification de l'opérateur de création (4.6), il reste à identifier l'amplitude $C_{\mathcal{V}_\beta^m}^{(\Psi^\dagger)}$ qui doit posséder une dimension d'échelle $\Delta = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$. La seule longueur microscopique du problème étant l'inverse de la densité ρ^{-1} , le coefficient doit être de la forme

$$C_{\mathcal{V}_\beta^m}^{(\Psi^\dagger)} = C \rho^{\frac{1}{4}}, \quad (4.10)$$

où C est une constante numérique que l'on peut extraire de la solution exacte ; en l'occurrence elle a une forme analytique connue dans le cas homogène, c'est la racine carrée de $\frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}}$, voir équation (4.4). Les opérateurs de création et annihilation sont donc :

$$\begin{cases} \Psi^\dagger(x) &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} C \rho^{\frac{1}{4}} : e^{-i\frac{1}{2}[\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})]} : + \dots \\ \Psi(x) &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} C^* \rho^{\frac{1}{4}} : e^{i\frac{1}{2}[\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})]} : + \dots \end{cases} \quad (4.11)$$

En toute exhaustivité, il faut aussi supposer qu'une phase est associée à l'amplitude, mais elle ne joue aucun rôle ici.

4.3 Transformation du plan vers le cylindre

Le calcul de la matrice densité à une particule dans le plan complexe n'est maintenant plus qu'un jeu d'écriture,

$$\begin{aligned}
g_1(x, x') &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} \langle \Psi^\dagger(z, \bar{z}) \Psi(z', \bar{z}') \rangle_{\mathcal{C}} \\
&= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} |C|^2 \rho^{\frac{1}{2}} \left\langle : e^{-i\frac{1}{2}[\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})]} :: e^{i\frac{1}{2}[\varphi(z') - \bar{\varphi}(\bar{z}')] } : \right\rangle_{\mathcal{C}} \\
&= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} |C|^2 \rho^{\frac{1}{2}} |z - z'|^{-\frac{1}{4}} |\bar{z} - \bar{z}'|^{-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{|x - x'|^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule (3.33). C'est le résultat de l'équation (4.3) obtenu par Vaidya et Tracy [130]. À partir de celui-ci, on peut très facilement retrouver le résultat pour le système périodique de l'équation (4.5) obtenu par Forrester et al. [41]. La condition de périodicité $x + L \rightarrow x$ signifie que le système ne vit plus dans le plan complexe mais sur un cylindre de circonférence L ; pour calculer les corrélations, il nous suffit d'envoyer le cylindre \mathcal{C} sur le plan \mathbb{C} via la transformation conforme

$$z \mapsto w(z) = e^{i\frac{2\pi}{L}z}.$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
g_1(x, x') &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} \langle \Psi^\dagger(z, \bar{z}) \Psi(z', \bar{z}') \rangle_{\mathcal{C}} \\
&= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} |C|^2 \rho^{\frac{1}{2}} \left\langle : e^{-i\frac{1}{2}[\varphi(z) - \bar{\varphi}(\bar{z})]} :: e^{i\frac{1}{2}[\varphi(z') - \bar{\varphi}(\bar{z}')] } : \right\rangle_{\mathcal{C}} \\
&= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} |C|^2 \rho^{\frac{1}{2}} \left| \frac{dw}{dz} \right|^{\frac{1}{4}} \left| \frac{dw'}{dz'} \right|^{\frac{1}{4}} \left\langle : e^{-i\frac{1}{2}[\varphi(w) - \bar{\varphi}(\bar{w})]} :: e^{i\frac{1}{2}[\varphi(w') - \bar{\varphi}(\bar{w}')] } : \right\rangle_{\mathcal{C}} \\
&= \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{\left| \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{L}x - x'\right) \right|^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

On vient de retrouver les résultats présentés dans la section 4.1 en utilisant les différents outils des chapitres 2 et 3. Cependant, ils sont par nature incompatibles avec la description des systèmes inhomogènes. Dans le chapitre qui suit, on propose de développer une théorie plus générale du liquide de Luttinger inhomogène.

Deuxième partie

Résultats

Chapitre 5

Liquide de Luttinger inhomogène

Au travers de l'exemple du gaz de bosons avec interaction répulsive, nous avons vu deux outils analytiques qui permettent d'étudier une grande classe de systèmes quantiques unidimensionnels. Avec la solution exacte fournie par l'Ansatz de Bethe, on peut calculer simplement les propriétés thermodynamiques d'un système donné, mais calculer une fonction de corrélation quelconque à partir de cette solution demeure une tâche ardue ; représenter les états propres du système est un problème en soi. La théorie du liquide de Luttinger permet quant à elle de calculer de manière systématique les formes asymptotiques des fonctions de corrélation, tout en s'affranchissant des états microscopiques. En effet, il suffit pour écrire une telle théorie effective de connaître deux paramètres donnés par la limite thermodynamique du modèle considéré, la vitesse des excitations v et le paramètre de Luttinger K . Ces deux approches sont donc complémentaires lorsqu'il s'agit d'étudier des systèmes impliquant un grand nombre de particules.

Néanmoins, nous l'avons vu dans l'introduction, les travaux présentés dans cette thèse sont motivés par les expériences d'atomes froids où un grand nombre d'atomes sont confinés par un potentiel externe. Ceci brise l'intégrabilité du modèle et condamne l'accès aux propriétés thermodynamiques via l'Ansatz de Bethe, et par conséquent nous prive de fixer les paramètres libres de la théorie effective. Dans ce chapitre, nous allons montrer comment ce problème peut être résolu et présenter le cadre général d'une théorie du liquide de Luttinger inhomogène de manière formelle, sans s'attacher à un modèle particulier. Les deux chapitres suivants seront consacrés à des applications au modèle de Lieb-Liniger.

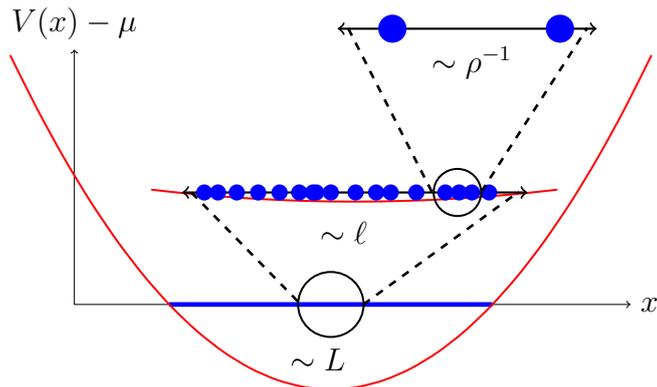


FIGURE 5.1 – Illustration de l’hypothèse de séparation des échelles. Le potentiel chimique local $\mu(x) = \mu - V(x)$ varie typiquement sur la longueur L , très grande devant l’échelle microscopique correspondant à l’inverse de la densité locale $\rho^{-1}(x)$. Il existe une particule fluide à l’échelle mésoscopique ℓ qui est localement homogène mais contient un grand nombre de particules microscopiques.

5.1 Hypothèse de séparation d’échelles

L’approche que nous développons ici repose essentiellement sur une hypothèse de séparation entre les échelles microscopique et macroscopique. Imaginons un gaz quantique confiné dans un potentiel $V(x)$, tel que représenté sur la figure 5.1. En une dimension, l’échelle de longueur microscopique la plus naturelle est l’inverse de la densité locale $\langle \hat{\rho}(x) \rangle^{-1} \equiv \rho^{-1}(x)$, qui donne la distance interatomique moyenne. Si l’on admet que le potentiel varie lentement devant la distance interatomique, alors toutes les quantités thermodynamiques locales font de même, en particulier la densité et la densité d’énergie. Ceci peut s’écrire en mesurant la variation de la densité et donne

$$\rho^{-1}(x) \ll \left(\frac{|\partial_x \rho(x)|}{\rho(x)} \right)^{-1} \equiv L,$$

ce qui définit une longueur macroscopique L qui est de l’ordre de grandeur du système total. Lorsque cette échelle macroscopique est très grande devant l’échelle microscopique, il doit exister une échelle mésoscopique notée ℓ telle que

$$\rho^{-1}(x) \ll \ell \ll L. \quad (5.1)$$

À cette échelle mésoscopique, nous avons affaire à une particule fluide, en référence à la notion de mécanique des fluides. Cette particule fluide est à la fois homogène, étant petite devant la taille du système L , et contient en même temps un grand nombre de particules microscopiques, étant grande devant la distance interatomique $\rho^{-1}(x)$. Pour étudier ce type de systèmes, l’approxima-

tion de la densité locale est souvent utilisée [33, 40, 47, 48]. La LDA est compatible avec les approches hydrodynamiques [143] et peut s'interpréter comme une approximation hydrostatique [39].

Outre la séparation des échelles de longueur, il est nécessaire de supposer une séparation des échelles de temps pour les situations dynamiques. Une particule fluide doit atteindre son état stationnaire dans un intervalle de temps microscopique durant lequel la densité a peu varié. Alors les valeurs moyennes des observables dans l'état exact au temps t sont données par les valeurs moyennes de l'état stationnaire homogène de densité $\rho(x)$.

Fondamentalement, l'hypothèse de séparation d'échelles est aussi requise pour donner du sens à la théorie des champs effective : ceux-ci doivent être définis localement sur un support homogène. Dans les chapitres 6 et 7 nous montrons que la limite semiclassique $\hbar \rightarrow 0$ correspond à la limite thermodynamique $N \rightarrow +\infty$ dans le cas du modèle de Lieb-Liniger. Dans ces conditions, l'hypothèse n'est plus une approximation mais devient exacte.

5.2 Reconstruction des fluctuations quantiques

Nous venons de le mentionner, la séparation des échelles présentées ci-dessus est à la base des approches hydrodynamiques, l'échelle mésoscopique est ainsi souvent nommée échelle d'Euler [143]. Les gaz quantiques possèdent en effet une description hydrodynamique sous la forme des équations d'Euler.

5.2.1 Hydrodynamique classique à température nulle

Pour un système fermé, homogène et invariant par translation, il existe trois quantités conservées décrites chacune par une équation de continuité : le nombre de particules, la quantité de mouvement et l'énergie. Si le modèle microscopique considéré est invariant sous une transformation de Galilée, alors ces trois équations conduisent aux équations d'Euler

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x P &= 0 \\ \partial_t e + u \partial_x e + \frac{P}{\rho} \partial_x u &= 0,\end{aligned}$$

où u est la vitesse moyenne d'une particule fluide, e l'énergie interne, définie par $e = \varepsilon/\rho$ avec ε est la densité d'énergie (2.19) et P est la pression (2.20).

En utilisant la variation de l'énergie interne,

$$de = -Pd(1/\rho), \quad (5.2)$$

la dernière équation peut être réécrite en terme de l'entropie s ,

$$\partial_t s + u\partial_x s = 0.$$

Pour les gaz quantiques unidimensionnels qui nous intéressent, l'entropie est nulle à $T = 0$. Des trois équations précédentes, seules les deux premières sont à retenir pour notre description hydrodynamique. L'énergie reste évidemment conservée, mais l'équation de conservation qui lui est associée est trivialement satisfaite dans toutes les situations, ce qui n'impose pas de contraintes sur les deux premières.

Jusqu'ici, nous avons supposé un système homogène, mais il faut garder à l'esprit que l'on s'intéresse à des systèmes inhomogènes confinés dans un potentiel externe $V \neq 0$. Dans une telle situation, la quantité de mouvement n'est plus conservée et les équations d'Euler qu'il faut résoudre sont

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t u + u\partial_x u + \frac{1}{\rho}\partial_x P &= -\frac{1}{m}\partial_x V. \end{cases} \quad (5.3)$$

Il s'agit des équations d'Euler sous leur forme classique, mais il faut noter que les détails du modèle quantique microscopique se trouvent cachés dans ces équations. En effet, pour le gaz parfait à $T = 0$, la pression serait tout simplement nulle. En revanche, ce n'est généralement pas le cas avec les équations d'état des gaz quantiques, notamment avec l'équation de Lieb (2.17) dans le cas du modèle de Lieb-Liniger. Il est important de souligner que cette description classique est intéressante en soi. Prenons le cas d'un gaz de fermions libres initialement confinés dans un potentiel harmonique. Si au temps t on éteint le potentiel de confinement, $V = 0$, on peut facilement calculer l'évolution du profil de densité $\rho(x, t)$ à partir des équations d'Euler (5.3), ceci pour un très grand nombre de particules là où l'on serait rapidement limité en simulant le modèle quantique exact. Cependant, pour pouvoir déterminer les corrélations dues aux fluctuations quantiques, qui dominent en une dimension, il faut aller vers une description hydrodynamique quantique.

5.2.2 Quantification : action effective

On cherche à quantifier les équations d'Euler (5.3) à $T = 0$. Pour cela, on choisit de passer par la formulation des corrélations en terme d'intégrales de

chemin de Feynman [107]. La première étape est d'établir un principe de moindre action, en l'occurrence une action \mathcal{S} dont les équations d'Euler-Lagrange redonnent les équations hydrodynamiques (5.3). Pour une action $\mathcal{S}[\rho, j]$ qui relie la densité locale $\rho(x, t)$ au courant local $j(x, t) = \rho(x, t)u(x, t)$,

$$\mathcal{S} = \int dxdt \left[m \frac{j^2}{2\rho} - \varepsilon(\rho) - \rho V \right], \quad (5.4)$$

la première des deux équations d'Euler (5.3) impose la contrainte $\partial_x \rho + \partial_t j = 0$ sur la seconde. Puisque l'on s'intéresse exclusivement à des systèmes qui s'inscrivent dans la classe d'universalité du liquide de Luttinger, les fluctuations autour d'une configuration $\{\rho(x, t), j(x, t)\}$ sont représentées par le champ de hauteur $h(x, t)$,

$$\delta\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi} \partial_x h(x, t), \quad \delta j(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \partial_t h(x, t), \quad (5.5)$$

qui satisfont l'équation de continuité $\partial_x \rho + \partial_t j = 0$. En développant au premier ordre en $\delta\rho, \delta j$, on obtient après intégration par partie

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}^{(1^{\text{st}} \text{ ordre})} &= \int dxdt \left[m \frac{j\delta j}{\rho} - m \frac{j^2}{2\rho^2} \delta\rho - \delta\rho \partial_\rho \varepsilon - \delta\rho V \right] \\ &= -\frac{m}{2\pi} \int dxdt \left[\left(\frac{j}{\rho} \right) \partial_t h + \frac{1}{m} \left(\frac{j^2}{2\rho^2} \right) \partial_x h + (\partial_\rho \varepsilon + V) \partial_x h \right]. \end{aligned}$$

En réinjectant $u = j/\rho$ et $\partial_x(\partial_\rho \varepsilon) = \frac{1}{\rho} \partial_x P$, on voit que l'action (5.4) est bien minimisée par les équations de l'approche hydrodynamique (5.3) pour une configuration classique $\{\rho(x, t), j(x, t)\}$.

En développant maintenant au second ordre autour de la configuration classique,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}^{(2^{\text{nd}} \text{ ordre})} &= \frac{1}{2} \int dxdt \left[\frac{m}{\rho} (\delta j)^2 - 2 \frac{mj}{\rho^2} (\delta\rho)(\delta j) + \left(\frac{mj^2}{\rho^3} - \partial_\rho^2 \varepsilon \right) (\delta\rho)^2 \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dxdt \left[\frac{m}{\pi\rho} (\partial_t h)^2 + 2 \frac{mj}{\pi\rho^2} (\partial_x h)(\partial_t h) + \left(\frac{mj^2}{\pi\rho^3} - \frac{1}{\pi} \partial_\rho^2 \varepsilon \right) (\partial_x h)^2 \right], \end{aligned}$$

on obtient une action quadratique pour les fluctuations quantiques, ce qui est une des clés de la théorie du liquide de Luttinger. On peut rendre cette action plus facile à exploiter en l'écrivant sous sa forme covariante,

$$\mathcal{S}[h(x, t)] \equiv \delta\mathcal{S}^{(2^{\text{nd}} \text{ ordre})} = \frac{\hbar}{8\pi} \int \frac{\sqrt{-g} d^2x}{K(\mathbf{x})} g^{ab} (\partial_a h)(\partial_b h), \quad (5.6)$$

avec $x^0 = t$ et $x^1 = x$ et le tenseur métrique

$$g = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{v} - v & -\frac{u}{v} \\ -\frac{u}{v} & \frac{1}{v} \end{pmatrix}^{-1},$$

où la vitesse des excitations v et le paramètre de Luttinger K sont donnés respectivement par

$$v = \sqrt{\frac{\rho}{m} \partial_\rho^2 \varepsilon} \quad \text{et} \quad K = \frac{\pi \hbar \rho}{mv}. \quad (5.7)$$

Sous cette forme, on voit que les excitations de basse énergie vivent dans un espace-temps supporté par une métrique courbe. La métrique est en effet donnée par

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = -v^2 dt^2 + (dx - u dt)^2, \quad (5.8)$$

qui a une interprétation claire. Le gaz étudié est constitué des particules fluides mésoscopiques décrites par l'état fondamental du gaz homogène, soumis à une transformation de Galilée. Cette transformation de Galilée émerge de la description hydrodynamique, le gaz ayant localement une vitesse moyenne $u \neq 0$. Les excitations sont également soumises à la transformation et se propagent le long des géodésiques de la métrique (5.8), simplement données par

$$\dot{x}_\pm(t) = u(x, t) \pm v(x, t), \quad (5.9)$$

où le signe \pm correspond aux trajectoires gauche/droite. La séparation des excitations en trajectoires gauche/droite indépendantes est caractéristique des théories des champs libres. En particulier, nous montrerons dans le chapitre 6 que le calcul des corrélations dans une situation dynamique repose essentiellement sur la connaissance des corrélations dans l'état initial. On s'attache donc dans la fin de cette section à présenter plus en détail le calcul des fonctions de corrélation à température nulle, en s'appuyant sur le formalisme des intégrales de chemin.

5.2.3 Corrélations dans l'état fondamental à température nulle

Les fonctions de corrélation dans l'état fondamental du modèle microscopique s'obtiennent en calculant

$$\langle O(x) \dots O(x') \rangle = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}[O(x) \dots O(x') e^{-\beta H}]}{\text{tr}[e^{-\beta H}]},$$

où $\beta = 1/k_B T$ et H est le hamiltonien du modèle. Dans la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$, on veut pouvoir identifier le numérateur et le dénominateur de l'expression ci-dessus avec des intégrales de chemins faisant intervenir les champs hydrodynamiques $\rho(x, t)$ et $j(x, t)$. Pour cela, il est plus commode de travailler en temps imaginaire en effectuant une rotation de Wick, $t \rightarrow i\tau$: on passe alors d'une métrique avec une signature lorentzienne comme dans l'équation. (5.8) à une métrique avec une signature riemannienne. En imposant des conditions périodiques aux bords dans la direction du temps imaginaire, $\{\rho(x, \tau + \beta\hbar), j(x, \tau + \beta\hbar)\} = \{\rho(x, \tau), j(x, \tau)\}$, l'action s'écrit

$$\mathcal{S} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \frac{d\tau}{\hbar} \int_0^L dx \left[m \frac{j^2}{2\rho} + \varepsilon(\rho) + \rho V \right].$$

Dans la limite $\beta \rightarrow \infty$, l'action est donc définie sur un domaine $(x, \tau) \in [0, L] \times \mathbb{R}$ où L est la taille physique du système dans la direction x .

En développant au second ordre autour de la configuration correspondant à l'état initial $\{\rho, j\} = \{\rho_0, 0\}$, on obtient

$$\delta\mathcal{S}^{(1^{\text{st}}+2^{\text{nd}} \text{ ordre})} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \frac{d\tau}{\hbar} \int_0^L dx \left[\delta\rho\partial_\rho\varepsilon + \delta\rho V + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\rho_0} (\delta j)^2 + \partial_\rho^2\varepsilon(\delta\rho)^2 \right) \right].$$

Ici, le premier ordre s'annule car $\partial_\rho\varepsilon + V = 0$, et en réintroduisant les fluctuations en terme du champ de hauteur, $\delta\rho(x, \tau) = \frac{1}{2\pi}\partial_x h(x, \tau)$ et $\delta j(x, \tau) = -\frac{1}{2\pi}\partial_\tau h(x, \tau)$, on arrive à l'action

$$\delta\mathcal{S}^{(2^{\text{nd}} \text{ ordre})} = \frac{1}{8\pi} \int \frac{dx d\tau}{K(x, \tau)} \left(\frac{1}{v} (\partial_\tau h)^2 + v (\partial_x h)^2 \right). \quad (5.10)$$

Cette action généralise celle du liquide de Luttinger standard (3.18) aux cas inhomogènes via le couplage $K(x, \tau)$ qui n'est pas constant. Lorsque K est constant, on sait que le liquide de Luttinger peut être traité en faisant appel au cadre mathématique du champ libre gaussien standard. En effet, on peut se ramener au cas $K = 1$ par un simple changement d'échelle du champ de hauteur, $\sqrt{K}h \rightarrow h$.

Ici, nous avons affaire au champ libre gaussien inhomogène, IGFF, dont l'action s'écrit sous la forme covariante

$$\mathcal{S}[h(x, \tau)] \equiv \delta\mathcal{S}^{(2^{\text{nd}} \text{ ordre})} = \frac{1}{8\pi} \int \frac{\sqrt{g} d^2x}{K(x)} g^{ab} (\partial_a h)(\partial_b h), \quad (5.11)$$

avec la métrique riemannienne

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = v^2 d\tau^2 + dx^2. \quad (5.12)$$

La formulation covariante de l'action facilite l'emploi des outils des théories conformes. Nous le verrons concrètement dans les applications aux gaz de bosons aux chapitres suivants, mais nous allons également le voir dans la section suivante où, à partir de l'action, on développe le cadre du IGFF qui permet d'accéder de manière systématique à toutes les fonctions de corrélations.

5.3 Champ libre gaussien inhomogène

Par simplicité, considérons que la coordonnée \mathbf{x} vit dans un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. À deux dimensions, il existe toujours une transformation de Weyl permettant de se ramener à une métrique plate. Comme l'action (5.11) est elle-même invariante après une transformation de Weyl, $g_{ab} \rightarrow e^{2\sigma} g_{ab}$, on est libre de choisir de travailler dans la métrique euclidienne

$$g_{ab} = \delta_{ab}, \quad (5.13)$$

de sorte que l'action du IGFF se met sous la forme

$$\mathcal{S}[h] = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \frac{d^2\mathbf{x}}{K(\mathbf{x})} (\nabla h(\mathbf{x}))^2. \quad (5.14)$$

Comme on s'intéresse à des problèmes de taille finie, le champ de hauteur h doit s'annuler sur les bords, ce que implique d'introduire des conditions au bord de Dirichlet,

$$h(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (5.15)$$

5.3.1 Équation de Poisson généralisée

Les fonctions de corrélations du champ de hauteur sont données par les intégrales de chemin

$$\langle h(\mathbf{x}_1) \dots h(\mathbf{x}_n) \rangle = \frac{\int [dh] e^{-\mathcal{S}[h]} h(\mathbf{x}_1) \dots h(\mathbf{x}_n)}{\int [dh] e^{-\mathcal{S}[h]}}, \quad (5.16)$$

et puisque l'action $\mathcal{S}[h]$ est gaussienne, la partie connexe de toutes les corrélations à n points pour $n \geq 3$ s'annulent. La fonction à un point doit s'annuler également puisqu'elle est antisymétrique sous la transformation $h \mapsto -h$. Tout ce dont nous avons besoin est alors la fonction de corrélation à deux points,

qui s'obtient en faisant varier la fonction à un point,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\int [dh] \frac{\delta}{\delta h(\mathbf{x})} (e^{-\mathcal{S}[h]} h(\mathbf{x}'))}{\int [dh] e^{-\mathcal{S}[h]}} \\
&= - \left\langle \frac{\delta \mathcal{S}[h]}{\delta h(\mathbf{x})} h(\mathbf{x}') \right\rangle + \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= \frac{1}{4\pi} \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left[\frac{1}{K(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}) \right] h(\mathbf{x}') \right\rangle + \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),
\end{aligned}$$

après intégration par partie dans la dernière ligne. On peut identifier la fonction à deux points avec la fonction de Green d'un opérateur de Poisson généralisé $\nabla \cdot \frac{1}{K(\mathbf{x})} \nabla$,

$$\langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}') \rangle = -G_{[K]}^{\text{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (5.17)$$

où $G_{[K]}^{\text{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ est symétrique sous l'échange de \mathbf{x} avec \mathbf{x}' , et résout l'équation différentielle

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{1}{K(\mathbf{x})} \nabla_{\mathbf{x}} G_{[K]}^{\text{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ G_{[K]}^{\text{D}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad \text{for } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.18)$$

Ainsi, les corrélations à n points du champ de hauteur, $\langle h(\mathbf{x}_1) \dots h(\mathbf{x}_n) \rangle$, peuvent toutes s'exprimer en faisant appel à la fonction de Green (5.18). L'exposant 'D' fait référence aux conditions au bord de Dirichlet et l'indice $[K]$ met l'accent sur le fait que le IGFF est paramétré par la fonction $K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Dans le cas du GFF, la fonction de Green peut être obtenue par une transformation conforme du domaine Ω vers le demi-plan supérieur et donne lieu à des formules explicites, ce que nous verrons au chapitre suivant avec le gaz de Tonks-Girardeau. S'il n'existe pas de telle expression dans le cas du IGFF, la fonction de Green de l'opérateur de Poisson généralisé peut en revanche être facilement évaluée numériquement par des méthodes d'éléments finis. En fait, cet opérateur est bien connu en électrostatique [144] : c'est lui qui apparaît dans l'équation de Poisson du potentiel électrostatique $V(\mathbf{x})$ dans un milieu de constante diélectrique inhomogène, $\epsilon(\mathbf{x}) : \nabla \cdot \epsilon(\mathbf{x}) \nabla V(\mathbf{x}) = 0$. L'analogie avec l'électromagnétisme classique est extrêmement utile et va nous servir pour la suite.

La fonction à deux points précédente n'est pas le seul résultat du IGFF dont nous avons besoin pour écrire une théorie du liquide de Luttinger inhomogène. Afin de généraliser les résultats du champ libre gaussien standard, il faut d'une part compactifier le champ de hauteur h , de sorte qu'il prenne des valeurs sur le cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ au lieu de \mathbb{R} . C'est ce que nous faisons dans la section 5.3.4. D'autre part, il faut trouver une procédure qui permette de calculer les fonctions de corrélation qui font intervenir plusieurs fois le champ

$h(x)$ au même point. C'est ce que nous faisons dans la section suivante.

5.3.2 Régularisation du propagateur au même point

Lorsque $x' \rightarrow x$, la fonction de Green (5.18) a une divergence logarithmique,

$$G_{[K]}^D(x, x') \underset{x' \sim x}{=} K(x) \log |x - x'|^2,$$

qu'il faut régulariser pour les fonctions de corrélation faisant intervenir plusieurs fois le champ $h(x)$ au même point, $h^n(x)$ avec $n \geq 2$. Pour cela, on fait appel à l'ordre normal, noté $: h^n(x) :$ et défini comme suit. Pour $n = 0$, $: 1 := 1$, pour $n = 1$,

$$: h(x) : = h(x), \quad (5.19a)$$

puis par induction sur n , on définit $: h^n(x) :$ comme

$$: h^n(x) : = \lim_{x' \rightarrow x} \left[: h^{n-1}(x) : h(x') + (n-1) K(x) \log |x - x'|^2 : h^{n-2}(x) : \right]. \quad (5.19b)$$

Le second terme est introduit pour annuler la divergence de la fonction de Green lorsque $x' \rightarrow x$, de sorte que la corrélation $\langle : h^n(x) : \rangle$ est finie et égale à

$$\langle : h^n(x) : \rangle = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)!} \left(-G_{[K]}^D(x)\right)^{\frac{n}{2}}, \quad (n \text{ pair}), \quad (5.20)$$

où on a défini la fonction de Green régularisée

$$G_{[K]}^D(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \left[G_{[K]}^D(x, x') - K(x) \log |x - x'|^2 \right]. \quad (5.21)$$

Lorsque n est impair, la corrélation s'annule à cause de la symétrie $h \mapsto -h$.

5.3.3 Opérateurs de vertex : analogie électrostatique

Avec la régularisation de la fonction de Green que nous venons de voir, on peut définir les opérateurs de vertex,

$$\mathcal{V}_\alpha^e(x) \equiv : e^{i\alpha h(x)} : = \sum_{p \geq 0} \frac{(i\alpha)^p}{p!} : h^p(x) : . \quad (5.22)$$

Les fonctions de corrélation correspondantes sont facilement calculées grâce au théorème de Wick,

$$\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}^e(x_1) \dots \mathcal{V}_{\alpha_n}^e(x_n) \rangle = \left(\prod_{p=1}^n e^{\frac{\alpha_p^2}{2} G_{[K]}^D(x_p)} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{\alpha_i \alpha_j G_{[K]}^D(x_i, x_j)} \right). \quad (5.23)$$

Ces opérateurs peuvent être interprétés par analogie avec l'électrostatique classique en deux dimensions. Si l'on voit la valeur moyenne du champ $i\nabla h(\mathbf{x})$ comme un champ électrique $E(\mathbf{x})$ dans le plan, on obtient en présence des opérateurs de vertex,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \frac{\langle i\nabla h(\mathbf{x})\mathcal{V}_{\alpha_1}^e(\mathbf{x}_1)\dots\mathcal{V}_{\alpha_n}^e(\mathbf{x}_n)\rangle}{\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}^e(\mathbf{x}_1)\dots\mathcal{V}_{\alpha_n}^e(\mathbf{x}_n)\rangle} \\ &= \nabla_{\mathbf{x}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \log \langle \mathcal{V}_{\alpha}^e(\mathbf{x})\mathcal{V}_{\alpha_1}^e(\mathbf{x}_1)\dots\mathcal{V}_{\alpha_n}^e(\mathbf{x}_n)\rangle \right)_{\alpha=0} \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \nabla_{\mathbf{x}} G_{[K]}^D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

On voit alors que $E(\mathbf{x})$ satisfait les équations de Maxwell dans un milieu de constante diélectrique inhomogène $\epsilon(\mathbf{x}) = 1/K(\mathbf{x})$, avec des charges électriques ponctuelles α_j en \mathbf{x}_j . Les lois de Gauss et de Faraday (en l'absence de flux de champ magnétique) sont ainsi vérifiées,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \frac{1}{K(\mathbf{x})} E(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n 4\pi\alpha_j \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \\ \nabla \times E(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (5.24)$$

Ce ne sont pas seulement les opérateurs qui ont une interprétation en terme d'électrostatique, mais bien les fonctions de corrélation dans leur ensemble. En effet, le logarithme de la fonction (5.23) donne l'énergie électrostatique de la configuration de charges ponctuelles dans le domaine Ω avec de la constante diélectrique $\epsilon(\mathbf{x}) = 1/K(\mathbf{x})$, délimité par un conducteur parfait où le champ s'annule, ce qui correspond aux conditions au bord de Dirichlet (5.15). On a donc

$$\frac{1}{8\pi} \int \frac{d^2\mathbf{x}}{K(\mathbf{x})} |E(\mathbf{x})|^2 = \sum_{p=1}^n \frac{\alpha_p^2}{2} G_{[K]}^D(\mathbf{x}_p) + \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j G_{[K]}^D(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j), \quad (5.25)$$

où le premier terme est l'énergie individuelle de chaque particule électrique plongée dans le milieu diélectrique, et le second terme est l'énergie due à l'interaction de Coulomb pour chaque paire de particules électriques.

5.3.4 Compactification du champ de hauteur

Pour l'instant, nous avons considéré que le champ de hauteur prenait des valeurs dans \mathbb{R} , mais nous allons voir qu'en imposant une contrainte sur le domaine, on peut modifier le type d'opérateurs qui émergent dans la théorie. À présent, on compactifie $h(\mathbf{x})$ de sorte qu'il prenne des valeurs dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Ceci a deux conséquences.

La première conséquence porte sur les opérateurs électriques. Avec la compactification du champ de hauteur, les opérateurs de vertex $\mathcal{V}_\alpha^e(\mathbf{x}) = : e^{i\alpha h(\mathbf{x})} :$ sont définis modulo 2π . Par conséquent, pour rester invariant sous la transformation $h \rightarrow h + 2\pi$, la charge α doit être un entier. On a alors une théorie dans laquelle la charge électrique est quantifiée.

La seconde conséquence est l'émergence d'un nouveau type d'opérateurs, $\mathcal{V}_\beta^m(\mathbf{y})$, qui représentent un trou ponctuel en $\mathbf{y} \in \Omega$, autour duquel $h(\mathbf{x})$ peut s'enrouler. Pour un nombre entier β de tours dans le sens trigonométrique, le champ $h(\mathbf{x})$ croît de $2\pi\beta$. Mathématiquement, cela correspond à la circulation du champ $\nabla h(\mathbf{x})$,

$$\oint_{C_y} d\mathbf{x} \cdot \nabla h(\mathbf{x}) = 2\pi\beta, \quad (5.26)$$

où C_y est un contour au voisinage du point \mathbf{y} . Comme toujours, cette expression ne prend de sens qu'en terme de fonction de corrélation, ce qui donne formellement

$$\oint_{C_{y_j}} d\mathbf{x} \cdot \langle \nabla h(\mathbf{x}) \mathcal{V}_{\beta_1}^m(\mathbf{y}_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(\mathbf{y}_m) \rangle = 2\pi\beta_j \langle \mathcal{V}_{\beta_1}^m(\mathbf{y}_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(\mathbf{y}_m) \rangle. \quad (5.27)$$

Si l'on tient compte des conditions aux bords, voir équation (5.15), on voit que la circulation le long du bord $\partial\Omega$ doit s'annuler, $\oint_{\partial\Omega} d\mathbf{x} \cdot \nabla h(\mathbf{x}) = 0$. La configuration d'opérateurs $\mathcal{V}_{\beta_1}^m(\mathbf{y}_1), \dots, \mathcal{V}_{\beta_m}^m(\mathbf{y}_m)$ doit satisfaire la condition de neutralité

$$\beta_1 + \dots + \beta_m = 0. \quad (5.28)$$

L'interprétation électrostatique est également pertinente ici. Une fois encore, en présence des opérateurs \mathcal{V}_β^m on peut voir la valeur moyenne de $\nabla h(\mathbf{x})$ ¹ comme un champ électrique $E(\mathbf{x})$,

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\langle \nabla h(\mathbf{x}) \mathcal{V}_{\beta_1}^m(\mathbf{y}_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(\mathbf{y}_m) \rangle}{\langle \mathcal{V}_{\beta_1}^m(\mathbf{y}_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(\mathbf{y}_m) \rangle}, \quad (5.29)$$

qui satisfait les équations :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \frac{1}{K(\mathbf{x})} E(\mathbf{x}) = 0, \\ \nabla \times E(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m 2\pi\beta_j \delta^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_j). \end{cases} \quad (5.30)$$

La première équation, qui pour rappel découle des équations du mouvement du

1. Précédemment, le facteur i était introduit de sorte que $E(\mathbf{x})$ soit positif, ce qui n'est pas nécessaire ici.

champ $h(\mathbf{x})$ avec l'action (5.14), peut toujours être interprétée comme la loi de Gauss dans un milieu diélectrique $\epsilon(\mathbf{x})$, mais cette fois sans charges électriques. La seconde équation est une réécriture de l'équation (5.27) via le théorème de Stokes, et est interprétée comme la loi de Faraday dans un milieu traversé par des flux de champs magnétiques aux positions y_j . Pour cette raison, les opérateurs $\mathcal{V}_\beta^m(\mathbf{y})$ sont nommés opérateurs magnétiques, et les entiers β charges magnétiques.

5.3.5 Opérateurs magnétiques : dualité électrique/magnétique

Les fonctions de corrélations des opérateurs magnétiques sont elles aussi définies en terme d'intégrale de chemin, mais sur un domaine parsemé de trous. En effet, nous avons vu que l'opérateur $\mathcal{V}_\beta^m(\mathbf{y})$ représentait un trou au point \mathbf{y} ; on doit alors traiter des configurations du champ de hauteur avec des défauts, que l'on note h_d , vivant dans le domaine $\Omega_d \equiv \Omega \setminus \{y_1, \dots, y_m\}$. La contrainte sur ces configurations avec défauts s'écrit

$$\oint_{C_{y_j}} d\mathbf{x} \cdot \nabla h_d = 2\pi\beta_j. \quad (5.31)$$

L'indice d sous le champ de hauteur h_d est conservé dans cette section uniquement par soucis pédagogique. Par la suite on l'omet, puisque la présence d'un opérateur magnétique $\mathcal{V}_\beta^m(\mathbf{y})$ dans une fonction de corrélation indique que le domaine Ω est troué en \mathbf{y} .

On a ainsi la fonction de corrélation

$$\langle \mathcal{V}_{\beta_1}^m(y_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(y_m) \rangle = \frac{\int_{\Omega_d} [dh_d] e^{-\mathcal{S}[h_d]}}{\int [dh] e^{-\mathcal{S}[h]}}, \quad (5.32)$$

où le dénominateur est l'intégrale de chemin sur les configurations sans défauts, c'est à dire la fonction de partition du IGFF sur le domaine Ω . Le numérateur, quant à lui, peut être évalué en séparant les configurations avec défauts en une partie classique $h_d^{\text{cl}}(\mathbf{x})$ qui satisfait les équations de Euler-Lagrange, et une partie quantique qui fluctue $h(\mathbf{x})$,

$$h_d(\mathbf{x}) = h_d^{\text{cl}}(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}). \quad (5.33)$$

Comme $h_d^{\text{cl}}(\mathbf{x})$ doit satisfaire les équations du mouvement, on peut séparer l'action en

$$\mathcal{S}[h_d] = \mathcal{S}[h_d^{\text{cl}}] + \mathcal{S}[h], \quad (5.34)$$

et en changeant la variable d'intégration $h_d(\mathbf{x}) \mapsto h(\mathbf{x})$, l'intégrale de chemin au

numérateur se simplifie avec celle du champ de hauteur $h(\mathbf{x})$ au dénominateur. La fonction de corrélation (5.32) se réduit ainsi à

$$\langle \mathcal{V}_{\beta_1}^m(y_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(y_m) \rangle = e^{-\mathcal{S}[h_d^{\text{cl.}}]}, \quad (5.35)$$

et il reste à calculer

$$\mathcal{S}[h_d^{\text{cl.}}] = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \frac{d^2\mathbf{x}}{K(\mathbf{x})} (\nabla h_d^{\text{cl.}}(\mathbf{x}))^2, \quad (5.36)$$

où $h_d^{\text{cl.}}(\mathbf{x})$ satisfait la contrainte (5.31), et l'équation $\nabla \cdot \frac{1}{K(\mathbf{x})} \nabla h_d^{\text{cl.}}(\mathbf{x}) = 0$ avec des conditions au bord de Dirichlet.

L'analogie avec l'électrostatique permet une fois de plus de calculer cette intégrale simplement. En effet, l'équation (5.36) est vue comme l'énergie électrostatique $\frac{1}{8\pi} \int d^2\mathbf{x} \varepsilon(\mathbf{x}) |E(\mathbf{x})|^2$ pour le champ électrique $E(\mathbf{x}) = \nabla h_d^{\text{cl.}}(\mathbf{x})$ créé par les flux de champs magnétiques. Si ces flux peuvent être interprétés comme des charges électriques ponctuelles, alors le résultat est donné par l'équation (5.25). La dualité électrique/magnétique est une astuce couramment utilisée pour interpréter un flux de champ magnétique comme une charge ponctuelle. En introduisant le nouveau champ \tilde{E} avec les composantes

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} E_2 \\ -E_1 \end{pmatrix}, \quad (5.37)$$

on voit que les contraintes (5.30) pour le champ électrique E , avec une constante diélectrique $1/K$, sont transformées en les contraintes (5.24) pour \tilde{E} , avec une constante diélectrique $1/\tilde{K} = 4K$. À présent, la formule (5.25) s'applique et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[h_d^{\text{cl.}}] &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{d^2\mathbf{x}}{K} |E|^2 = \frac{1}{8\pi} \int \frac{d^2\mathbf{x}}{\tilde{K}} |\tilde{E}|^2 \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{\beta_p^2}{2} G_{[\tilde{K}]}^{\text{N}}(y_p) + \sum_{i<j} \beta_i \beta_j G_{[\tilde{K}]}^{\text{N}}(y_i, y_j). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Dans la dernière ligne nous avons remplacé l'exposant D par N puisque les conditions au bord de Dirichlet sont le dual des conditions au bord de Neumann. Pour s'en convaincre, si on voit le champ E comme $\nabla h_d^{\text{cl.}}$, on peut voir le champ \tilde{E} comme le gradient $\nabla \tilde{h}$ d'une certaine fonction \tilde{h} . On sait que $h_d^{\text{cl.}} = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est à dire que la composante tangentielle E_{\parallel} s'annule sur les bords. Alors comme \tilde{E} est obtenu par une rotation de $\pi/2$ du champ électrique E , c'est sa composante normale \tilde{E}_{\perp} qui doit s'annuler sur les bords. La fonction \tilde{h} possède donc des conditions au bord de Neumann. On peut également se

référer à l'annexe B pour plus de détails sur la dualité des conditions au bord.

En résumé, les fonctions de corrélation des opérateurs magnétiques sont données par

$$\langle \mathcal{V}_{\beta_1}^m(y_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(y_m) \rangle = \left(\prod_{p=1}^m e^{\frac{\beta_p^2}{2} G_{[1/4K]}^N(y_p)} \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq m} e^{\beta_i \beta_j G_{[1/4K]}^N(y_i, y_j)} \right), \quad (5.39)$$

où la fonction de Green $G_{[1/4K]}^N(y, y')$ est celle de l'opérateur de Poisson généralisé $\nabla \cdot 4K \nabla$ avec des conditions aux bords de Neumann. Sa régularisation est définie de la même manière que dans l'équation. (5.21). Cette fonction de Green est aussi symétrique sous l'échange des coordonnées y et y' et résout le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot 4K(y) \nabla_y G_{[1/4K]}^N(y, y') = 4\pi \delta^2(y - y') - \frac{4\pi}{\text{Vol}(\Omega)}, \\ \int_{\Omega} d^2y G_{[1/4K]}^N(y, y') = 0, \\ \hat{n}_y \cdot \nabla_y G_{[1/4K]}^N(y, y') = 0 \quad \text{for } y \in \partial\Omega, \end{cases}, \quad (5.40)$$

avec \hat{n}_y le vecteur unitaire normal au bord en $y \in \partial\Omega$. Le terme $4\pi/\text{Vol}(\Omega)$ dans la première équation vient du fait que l'opérateur de Poisson généralisé $\nabla \cdot 4K \nabla$, avec les conditions au bord de Neumann imposées par la troisième équation, possède un mode nul sur le domaine Ω . La deuxième équation est donc introduite pour restreindre le problème au sous-espace des fonctions de Ω qui ont une valeur moyenne nulle. Dans ce sous-espace, l'opérateur $\nabla \cdot 4K \nabla$ est alors inversible et définit la fonction de Green.

5.3.6 Corrélations mixtes électrique/magnétique

Que se passe-t-il maintenant en présence des opérateurs électriques et magnétiques dans une même fonction de corrélation ? C'est encore l'analogie électrostatique qui nous aide à calculer ces corrélations mixtes, qui doivent prendre

la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{V}_{\alpha_1}(x_1) \dots \mathcal{V}_{\alpha_n}(x_n) \mathcal{V}_{\beta_1}^m(y_1) \dots \mathcal{V}_{\beta_m}^m(y_m) \rangle = & \\
& \left(\prod_{p=1}^n e^{\frac{\alpha_p^2}{2} G_{[K]}^D(x_p)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} e^{\alpha_i \alpha_j G_{[K]}^D(x_i, x_j)} \right) \\
& \times \left(\prod_{q=1}^m e^{\frac{\beta_q^2}{2} G_{[1/4K]}^N(y_q)} \prod_{1 \leq i < j \leq m} e^{\beta_i \beta_j G_{[1/4K]}^N(y_i, y_j)} \right) \\
& \times \left(\prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^m e^{i \alpha_k \beta_l F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x_k, y_l)} \right). \quad (5.41)
\end{aligned}$$

Le logarithme de cette fonction de corrélation donne l'énergie électrostatique totale d'une configuration de n charges électriques ponctuelles α_p et m trous traversés par des flux magnétiques, ou de façon équivalente m charges magnétiques ponctuelles β_q , qui donne lieu à une somme de $n + \frac{n(n-1)}{2} + m + \frac{m(m-1)}{2} + nm$ termes. Chacun des n premiers termes est l'énergie coulombienne individuelle d'une charge électrique en x_p , les $\frac{n(n-1)}{2}$ termes suivants correspondant à l'interaction coulombienne de chaque paire de charges électriques. De la même manière, les m premiers termes correspondent à l'énergie de chaque flux pris individuellement, et les $\frac{m(m-1)}{2}$ termes qui suivent sont pour les paires. Nous avons déjà vu ces termes dans les sections précédentes, en revanche les $n \times m$ nouveaux termes correspondent chacun à l'énergie d'une charge électrique en x_k plongée dans le potentiel électrostatique créé par le flux de champ magnétique en y_l .

On note le potentiel mixte électrique/magnétique par $F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x, y)$, qui est une fonction de x et y à valeurs dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et qui doit satisfaire les contraintes suivantes. En choisissant une fonction continue $f: \partial\Omega \rightarrow [0, 2\pi]$ avec une charge magnétique $\beta = 1$, on a l'intégrale de contour sur le bord du domaine $\oint_{\partial\Omega} dx \cdot \nabla f(x) = 2\pi$, de sorte que $F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x, y)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \frac{1}{K(x)} \nabla_x F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x, y) = 0 & \text{if } x \in \Omega, \\ F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x, y) = f(x) & \text{if } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.42)$$

Ainsi, pour tout contour fermé C_y autour de y , on

$$\oint_{C_y} dx \cdot \nabla_x F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x, y) = 2\pi. \quad (5.43)$$

Si le choix arbitraire de la fonction f impose une contrainte sur le potentiel $F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x, y)$, la fonction de corrélation (5.41) ne dépend pas de ce choix.

En effet, si l'on a deux fonctions f_1 and f_2 , alors $F_1(x, y) - F_2(x, y)$ est aussi solution des équations (5.42) mais avec une charge magnétique totale nulle. En appliquant la condition de neutralité (5.28), on voit alors que la somme sur l de 1 à m , $\sum_{l=1}^m \beta_l [F_1(x, y_l) - F_2(x, y_l)]$, doit s'annuler dans tout le domaine Ω . La fonction de corrélation (5.41) n'étant pas modifiée par le choix de la fonction f , il est suffisant d'en connaître une seule.

En conclusion, il faut noter que nous venons de présenter le potentiel mixte en se focalisant sur la variable x avec y fixé. Mais si l'on regarde le potentiel comme une fonction de y , alors il satisfait un ensemble de contraintes duales aux équations (5.42), en l'occurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_y \cdot 4K(y) \nabla_y F_{[K,1/4K]}^{\text{D,N}}(x, y) = 0, \\ \oint_{C_x} dy \cdot \nabla_y F_{[K,1/4K]}^{\text{D,N}}(x, y) = -2\pi \\ \hat{n}_y \cdot \nabla_y F_{[K,1/K]}^{\text{D,N}}(x, y) = \hat{t}_y \cdot \nabla f(y) \quad \text{if } y \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (5.44)$$

où \hat{n}_y et \hat{t}_y sont des vecteurs unitaires, respectivement normal et tangentiel au bord $\partial\Omega$ en y . Cette dualité est plus simple à saisir dans la version discrète que nous présentons dans l'annexe B.

5.3.7 Opérateurs de vertex mixtes électrique/magnétique

Pour finir cette section sur le champ libre gaussien inhomogène, on peut synthétiser les différents résultats précédents dans un formalisme plus compact. Grâce à l'analogie électrostatique et la dualité électrique/magnétique, on a vu que les opérateurs magnétiques $\mathcal{V}_\beta^m(y)$ pouvaient être interprétés comme créant une charge magnétique β en y . L'idée est alors d'écrire des opérateurs de vertex qui possèdent à la fois une charge électrique et une charge magnétique. Ils peuvent être obtenus en fusionnant un opérateur électrique avec un opérateur magnétique, en prenant la limite $x, y \rightarrow z$ dans les fonctions de corrélations mixtes. On note ces opérateurs de vertex mixte

$$\mathcal{V}_{\alpha,\beta}(z), \quad (5.45)$$

avec deux indices pour chaque type de charge, de sorte que les opérateurs électriques et magnétiques pures correspondent respectivement à $\mathcal{V}_\alpha(x) = \mathcal{V}_{\alpha,0}(x)$ et $\mathcal{V}_\beta^m(y) = \mathcal{V}_{0,\beta}(y)$.

En introduisant ces opérateurs, la fonction de corrélation (5.41) se réécrit

en prenant $m = n$ et $x_i, y_i \rightarrow z_i$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}_{\alpha_1, \beta_1}(z_1) \dots \mathcal{V}_{\alpha_n, \beta_n}(z_n) \rangle = & \\ & \left(\prod_{p=1}^n e^{\frac{\alpha_p^2}{2} G_{[K]}^D(z_p) + \frac{\beta_p^2}{2} G_{[1/4K]}^N(z_p) + i\alpha_p \beta_p F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(z_p)} \right) \\ & \times \left(\prod_{i \neq j} e^{\alpha_i \alpha_j G_{[K]}^D(x_i, x_j) + \beta_i \beta_j G_{[1/4K]}^N(y_i, y_j) + i\alpha_i \beta_j F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x_i, y_j)} \right). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Le potentiel mixte régularisé $F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(z)$ est défini par

$$F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(z) = \lim_{x, y \rightarrow z} \left[F_{[K, 1/4K]}^{D, N}(x, y) - \arg(x - y) \right], \quad (5.47)$$

où $\arg(x)$ est l'argument du nombre complexe $x^1 + ix^2$ construit avec $x = (x, \tau)$.

À partir de la formule (5.46) pour les opérateurs de vertex mixtes électrique/magnétique, on a accès à toutes les fonctions de corrélation d'observables locales. Tout ce dont nous avons besoin de savoir sur le champ libre gaussien inhomogène est contenu dans les fonctions de Green $G_{[K]}^D$ et $G_{[1/4K]}^N$ et le potentiel mixte $F_{[K, 1/4K]}^{D, N}$, ainsi que leurs régularisations respectives. Pour obtenir une théorie du liquide de Luttinger inhomogène complète, il nous reste à savoir identifier les observables microscopiques du modèle considéré avec les opérateurs contenus dans le IGFF. Nous allons avoir besoin de deux ingrédients pour cela : il faut premièrement connaître une solution exacte du problème homogène, puis dans un second temps utiliser les outils de théorie conforme.

5.4 Identification des opérateurs microscopiques

Ce que nous avons présenté jusqu'ici est général et s'applique à tout système qui s'inscrit dans la classe d'universalité du liquide de Luttinger. Les détails du modèle microscopique n'apparaissent dans le champ libre gaussien qu'au travers du paramètre de Luttinger K et de la métrique. Maintenant, si l'on veut utiliser ce cadre pour calculer des corrélations physiques, il faut pouvoir identifier les opérateurs microscopiques avec les opérateurs de la théorie correspondante.

5.4.1 Coefficients non-universels

Dans un modèle microscopique donné, les observables locales \hat{O} sont liées aux opérateurs locaux Φ de la théorie des champs par des coefficients non-

universels $C^{(\hat{O})}$,

$$\hat{O}(x, \tau) = \sum_j C_j^{(\hat{O})} \Phi_j(x, \tau). \quad (5.48)$$

Dans le cadre du IGFF, tous les opérateurs locaux Φ sont donnés par des combinaisons des dérivées du champ de hauteur ∂_x^n et des opérateurs de vertex mixtes $\mathcal{V}_{\alpha, \beta}(x)$. La relation (5.48) s'entend évidemment au sens des fonctions de corrélation : les corrélations microscopiques correspondent à des développements asymptotiques des corrélations,

$$\langle \hat{O}_1(x_1, \tau_1) \dots \hat{O}_n(x_n, \tau_n) \rangle = \sum_{j_1, \dots, j_n} C_{j_1}^{(\hat{O}_1)} \dots C_{j_n}^{(\hat{O}_n)} \langle \Phi_{j_1}(x_1, \tau_1) \dots \Phi_{j_n}(x_n, \tau_n) \rangle.$$

Pour les systèmes homogènes, les coefficients non-universels jouent le rôle d'un préfacteur global dans les fonctions de corrélations (voir par exemple les articles [86–89]), mais ce n'est pas le cas dans les problèmes inhomogènes où ils deviennent eux-même dépendant de la position, $C_j^{(\hat{O})} \rightarrow C_j^{(\hat{O})}(x, \tau)$. Il est aussi à noter que ces amplitudes possèdent une dimension qui dépend de la dimension d'échelle des opérateurs qui entrent en jeu.

De même que les paramètres du liquide de Luttinger, ces coefficients peuvent être extraits numériquement de la solution exacte homogène, en l'occurrence des facteurs de formes calculés par l'Ansatz de Bethe algébrique [81–83]. Toutefois, la relation (5.48) n'est valide que dans la limite d'un système infini $(x, \tau) \in \mathbb{R}^2$, ce qui semble incompatible avec une évaluation numérique de taille finie L . Ce problème est résolu grâce à l'invariance conforme du GFF qui permet de prendre la limite $L \rightarrow \infty$ de manière systématique.

5.4.2 Extraction des coefficients par les facteurs de formes

Considérons la situation homogène, invariante par translation avec des conditions périodiques aux bords. On fait les deux hypothèses suivantes.

D'une part, on suppose que les états de basses excitations du hamiltonien microscopique H correspondent sans équivoque à ceux de la théorie des champs, pour L suffisamment grand. Plus précisément, l'état fondamental de H , $|0\rangle_L$, est identifié avec le vide de la théorie des champs $|0\rangle$, et réciproquement il existe un unique état propre de H , $|\Phi_j\rangle_L$, qui est la version microscopique de l'état $|\Phi_j\rangle$ de la théorie des champs.

D'autre part, on suppose que le facteur de forme ${}_L\langle \Phi_j | \hat{O}(x, \tau) | 0 \rangle_L$ est connu pour le modèle microscopique de taille arbitraire L .

Le système vit dans le domaine $(x, \tau) \in [0, L] \times \mathbb{R}$ avec des conditions périodiques au bord dans la direction x . Ce domaine peut être envoyé vers le plan infini par la transformation conforme $z = e^{i2\pi \frac{x+i\tau}{L}}$, de sorte que le membre

de droite de l'équation (5.48) devient

$$\sum_j C_j^{(\hat{O})} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{\Delta_{\Phi_j}} \Phi_j(z, \bar{z}).$$

À present on peut projeter les deux membres de l'équation (5.48) sur leurs états respectifs, ${}_L\langle \Phi_j | \cdot | 0 \rangle_L$ et $\langle \Phi_j | \cdot | 0 \rangle$, ce qui donne pour $\tau = 0$:

$$\frac{{}_L\langle \Phi_j | \hat{O}(x, \tau) | 0 \rangle_L}{\sqrt{{}_L\langle 0 | 0 \rangle_L} \sqrt{{}_L\langle \Phi_j | \Phi_j \rangle_L}} \simeq C_j^{(\hat{O})} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{\Delta_{\Phi_j}} \langle \Phi_j | \Phi_j(e^{i\frac{2\pi x}{L}}) | 0 \rangle.$$

Le dénominateur du membre de gauche normalise les deux états microscopiques, et les états de la théorie des champs sont normalisés par $\langle \Phi_j | \Phi_{j'}(0) | 0 \rangle = \delta_{j,j'}$. Cette approximation en taille finie L devient exacte dans la limite $L \rightarrow \infty$ et on obtient finalement la formule suivante,

$$C_j^{(\hat{O})} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{L}{2\pi} \right)^{\Delta_{\Phi_j}} \frac{{}_L\langle \Phi_j | \hat{O}(x, \tau) | 0 \rangle_L}{\sqrt{{}_L\langle 0 | 0 \rangle_L} \sqrt{{}_L\langle \Phi_j | \Phi_j \rangle_L}} \right], \quad (5.49)$$

où Δ_{Φ_j} est la dimension d'échelle du champ Φ_j . Le calcul pratique des facteurs de forme est extrêmement technique mais il existe dans la littérature des formules explicites, notamment pour les opérateurs qui nous intéressent dans la suite. Ces formules sont présentées dans l'annexe A.

Dans ce chapitre, nous avons vu comment, en principe, calculer les fonctions de corrélation du liquide de Luttinger inhomogène. Avec l'hypothèse de la séparation d'échelle, on peut reconstruire les fluctuations quantiques à partir de la solution hydrodynamique classique. Ces fluctuations sont décrites par le champ libre gaussien inhomogène, pour lequel nous avons explicité les différentes formules donnant accès aux corrélations. Enfin, nous avons présenté une manière générique d'identifier les opérateurs du modèle microscopique avec ceux qui interviennent dans le IGFF. Les chapitres suivants présentent des applications de cette approche au modèle de Lieb-Liniger dans plusieurs situations : avec interaction infinie et finie, à l'équilibre ou hors d'équilibre.

Chapitre 6

Gaz de Tonks-Girardeau dans un potentiel dépendant du temps

Nous allons maintenant appliquer la théorie du liquide de Luttinger inhomogène au gaz de Tonks-Girardeau hors de l'équilibre. L'hamiltonien prend la forme

$$H(t) = \int dx \left[\Psi^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} - \mu + V(x, t) \right) \Psi(x) + \frac{g}{2} \Psi^{\dagger 2}(x) \Psi^2(x) \right], \quad (6.1)$$

où $V(x, t)$ est un potentiel dépendant du temps. L'objectif final dans ce chapitre est de savoir calculer les fonctions de corrélation d'observables locales dans une situation dynamique,

$$\langle O_1(x_1, t_1) O_2(x_2, t_2) \dots O_p(x_p, t_p) \rangle. \quad (6.2)$$

Le gaz de Tonks-Girardeau a la particularité d'être analogue à un gaz de fermions libres, et de nombreux résultats exploitent cette correspondance pour calculer certaines corrélations à temps égaux, $t_1 = t_2 = \dots = t_p$. Dans le cas d'un nombre de particules N fini, on pense notamment aux travaux de Minguzzi et al. dans Ref. [145] et aux travaux liés [146–153]. Cependant, ces résultats n'ont pas été obtenus à des temps différents, ce qui devient possible avec notre approche. Il existe aussi des résultats dans la limite thermodynamique $N \rightarrow +\infty$ qui ne découlent pas directement de l'équivalence avec les fermions libres, en particulier pour la matrice densité à une particule à l'équilibre.

Le cadre élaboré au chapitre 5 permet non seulement de reproduire ces résultats asymptotiquement pour N suffisamment grand, mais également d'établir de nouveaux résultats, qui ne sont connus ni à l'équilibre, ni à temps différents. Ici, on se focalise sur les corrélations bosoniques faisant intervenir les opérateurs de création et d'annihilation $\Psi^\dagger(x)$ et $\Psi(x)$, c'est à dire qui ne

découlent pas directement de l'équivalence fermion-boson. Nous verrons que résoudre le problème dynamique repose en grande partie sur la connaissance des corrélations dans l'état initial. Nous commençons donc par détailler le calcul de la matrice densité à une particule à l'équilibre, pour le gaz de Tonks-Girardeau piégé dans un potentiel arbitraire.

6.1 Matrice densité à une particule dans l'état initial

Une vingtaine d'années s'écourent entre les derniers travaux sur le cas homogène par Vaidya et Tracy en 1979 [130] et le résultat dans le piège harmonique $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ obtenu par Forrester et al. en 2003 [41],

$$g_1(x, x') = \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_F(x)^{\frac{1}{4}}\rho_F(x')^{\frac{1}{4}}}{|x - x'|^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.3)$$

Les auteurs obtiennent ce résultat à partir d'une méthode basée sur la théorie des matrices aléatoires. En 2004, Gangardt [42] développe une méthode basée sur les systèmes désordonnés qui permet de retrouver ce résultat, de même que les résultats du problème homogène que nous avons présenté dans la section 4.1. Cependant, ces méthodes sont assez avancées et spécifiques au cas du potentiel harmonique. L'approche du liquide de Luttinger inhomogène permet simplement de généraliser ces résultats dans le cas d'un potentiel arbitraire. La première étape consiste à utiliser la description hydrodynamique afin d'obtenir le profil de densité initial.

6.1.1 Profil de densité hydrostatique

Supposons que l'hypothèse de séparation des échelles de la section 5.1 soit valide. Comme on s'intéresse à l'état initial à l'équilibre, la description hydrodynamique (5.3) est en fait une description hydrostatique avec $u = 0$,

$$\begin{cases} \partial_t \rho &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \partial_x P &= -\frac{1}{m} \partial_x V. \end{cases}$$

En utilisant la relation $dP = \frac{\rho}{m} d\mu$, on voit que la seconde équation impose la contrainte $\partial_x(\mu + V) = 0$. Dans une situation inhomogène, cela impose un potentiel chimique local de la forme

$$\mu(x) = \mu - V(x). \quad (6.4)$$

Ce résultat est aussi connu sous le nom d'approximation de la densité locale (LDA), et la constante μ est fixée en demandant à l'intégrale de la densité locale $\rho(\mu - V(x))$ de donner le nombre de particule N fixé,

$$\int dx \rho(\mu - V(x)) = N. \quad (6.5)$$

Grâce à l'équivalence fermion-boson à une dimension, on sait que la densité est la même que celle du gaz de fermions libres $\rho_F = \frac{\sqrt{2m\mu}}{\pi\hbar}$, et ainsi le profil de densité à l'équilibre s'écrit explicitement,

$$\rho_F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\hbar} \sqrt{2m(\mu - V(x))} & \text{pour } \mu - V(x) > 0, \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (6.6)$$

Sous cette forme, il est clair que l'hypothèse de séparations d'échelle (5.1) fait sens ; la distance interparticule est donnée par $\rho_F^{-1}(x) \sim \mathcal{O}(\hbar)$, et la longueur macroscopique est $L \sim \mathcal{O}(1)$. Si l'on choisit l'échelle mésoscopique telle que $l \sim \mathcal{O}(\hbar^{\frac{1}{2}})$, alors la séparation d'échelle (5.1) est satisfaite dès lors que $\hbar \ll 1$. Plus précisément, l'équation (6.5) nous dicte une manière simple de prendre la limite thermodynamique qui nous intéresse,

$$\hbar \rightarrow 0 \implies N \rightarrow +\infty. \quad (6.7)$$

Cela signifie que la limite thermodynamique est aussi une limite semiclassique, qui vérifie automatiquement l'hypothèse de séparation d'échelle, et vice versa. On a alors accès au profil de densité initial à l'ordre dominant pour un potentiel arbitraire $V(x)$, ce qui nous permet d'effectuer un premier test de simulation par DMRG : on veut s'assurer que les paramètres utilisés sont compatibles avec la description hydrodynamique (hydrostatique ici) qui sous-tend le reste de la théorie. Dans la figure 6.1, on présente les résultats pour le piège harmonique $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ et le double-puits $V(x) = a_4 x^4 - a_2 x^2$. Le profil simulé par DMRG converge bien vers la densité hydrostatique de l'équation (6.6), même pour un nombre de particules aussi faible que $N = 15$.

6.1.2 Théorie conforme en espace courbe

Le profil de densité inhomogène $\rho_F(x)$ occasionne deux grands changements par rapport au cas homogène que nous avons traité dans le chapitre 4. Premièrement, le système étant confiné dans une région de l'espace, le domaine dans lequel vit le IGFF est maintenant un sous-ensemble du plan complexe, $\Omega \subset \mathbb{C}$. Afin de ne pas compliquer inutilement le problème, nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'il existe un unique intervalle $[x_R, x_L] \sim L$

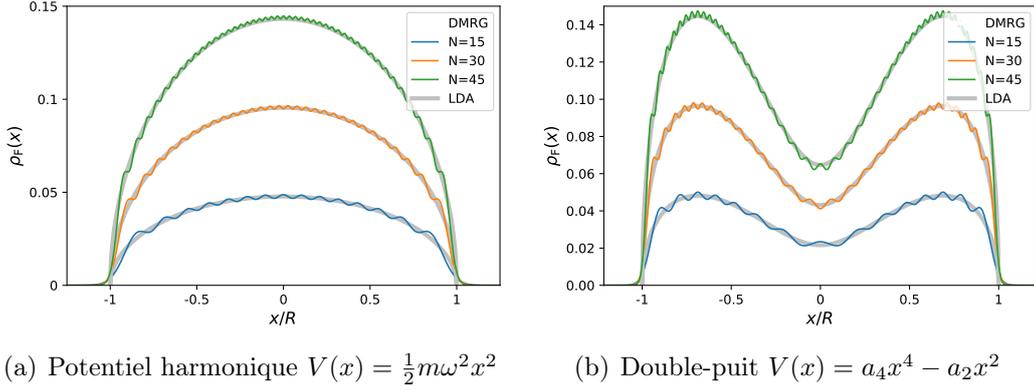


FIGURE 6.1 – Profils de densité simulés par DMRG. La simulation converge bien vers le profil de l'équation (6.6).

pour lequel $\mu(x) = \mu - V(x)$ est positif. Le fait que la densité s'annule aux bornes de l'intervalle $[x_L, x_R]$ impose des conditions aux bords sur le champ de hauteur $h(x)$. Pour voir cela, on s'appuie sur les fluctuations de la densité (5.5); le nombre de particules N étant fixé dans le piège, les fluctuations intégrées sur tout l'intervalle doivent s'annuler,

$$2\pi \int_{x_L}^{x_R} dx \delta\rho(x) = h(x_R) - h(x_L) = 0. \quad (6.8)$$

Aux bords, les champs $h(x_L)$ et $h(x_R)$ sont donc égaux à la même constante que l'on peut choisir arbitrairement nulle : $h(x_L) = h(x_R) = 0$. Le domaine dans lequel vivent les opérateurs est donc la bande verticale infinie $S = [x_L, x_R] \times \mathbb{R}$ avec des conditions au bord de Dirichlet.

Le deuxième changement vient du fait que la vitesse des excitations n'est plus constante, étant donné que pour le gaz de Tonks-Girardeau la vitesse des excitations v_F est proportionnelle à la densité ρ_F . La métrique s'en trouve grandement affectée, en effet on a $ds^2 = v_F(x)^2 d\tau^2 + dx^2$, c'est à dire un espace courbe. Nous avons donc affaire à une théorie des champs sur la bande verticale infinie équipée d'une métrique courbe. Mais en deux dimensions, on peut toujours se ramener à une métrique plate. Comme l'action du IGFF (5.11) est invariante sous une transformation de Weyl¹, on peut calculer les fonctions de corrélation dans un espace plat en utilisant le jeu de coordonnées isothermes $z(x, \tau)$ et $\bar{z}(x, \tau)$ telles que la métrique prenne la forme

$$ds^2 = v_F(x)^2 d\tau^2 + dx^2 \mapsto e^{2\sigma(z, \bar{z})} dz d\bar{z}, \quad (6.9)$$

1. En fait, dans le cas de Tonks-Girardeau où $K = 1$, l'action est celle du GFF standard qui est elle-même invariante conforme.

avec $e^{2\sigma(z, \bar{z})}$ le facteur de Weyl. Le choix le plus simple ici est de prendre

$$z(x, \tau) = \int_{x_L}^x \frac{dr}{v_F(r)} + i\tau = \xi + i\tau \quad \text{avec} \quad e^{\sigma(x)} = v_F(x), \quad (6.10)$$

et $\bar{z}(x, \tau) = \xi - i\tau$. La coordonnée ξ peut s'interpréter physiquement en la voyant comme le temps nécessaire à une particule pour parcourir la distance entre le bord gauche x_L et un point x . On peut alors travailler dans le domaine de la bande infinie plate $S_{\text{plate}} = [\xi_L, \xi_R] \times \mathbb{R}$, en tenant compte du facteur de Weyl lors du changement de coordonnées : en particulier, les opérateurs de la théorie se transforment comme $\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow e^{-\Delta\sigma(z, \bar{z})}\Phi(z, \bar{z})$ avec Δ la dimension d'échelle de l'opérateur Φ .

Si l'on veut pouvoir faire tous les calculs d'une manière aussi explicite que dans le cas homogène, il nous faut trouver une forme analytique pour le propagateur $G_{[1]}^D((z, \bar{z}), (z', \bar{z}'))$ avec conditions au bord de Dirichlet et son dual $G_{[1/4]}^N((z, \bar{z}), (z', \bar{z}'))$ avec conditions au bord de Neumann. En théorie conforme, la technique habituelle consiste à trouver une transformation conforme qui envoie le domaine de départ vers une surface sur laquelle on sait faire les calculs. À cause des bords, il n'existe pas de transformation conforme qui envoie la bande S_{plate} vers le plan \mathbb{C} , mais on peut en revanche l'envoyer vers le demi-plan supérieur \mathbb{H} .

6.1.3 Propagateurs dans le demi-plan : méthode des images

La bande plate S_{plate} est envoyée vers le demi-plan supérieur \mathbb{H} via la transformation conforme

$$z \mapsto w(z) = e^{i\frac{\pi}{L}z}, \quad (6.11)$$

où $L = \xi_R - \xi_L$. Dans la suite, on travaille donc avec la coordonnée w . La condition au bord de Dirichlet impose la contrainte suivante sur le champ de hauteur,

$$h(w, \bar{w}) = 0 \quad \text{pour } w = \bar{w} \in \mathbb{R}.$$

Les opérateurs vivent dans un demi-plan, et on choisit en particulier de travailler dans le demi-plan supérieur \mathbb{H} . Une fois de plus, l'analogie avec l'électrostatique à deux dimensions va nous aider ; le propagateur $G_{[1]}^{\mathbb{H}}((w, \bar{w}), (w', \bar{w}'))$ est vu comme étant le potentiel ressenti en (w, \bar{w}) en présence d'une charge électrique en (w', \bar{w}') . Pour tenir compte du bord, on utilise une astuce connue sous le nom de méthode des images [144]. Elle consiste à travailler avec l'image miroir de la charge en (w', \bar{w}') , en l'occurrence la symétrique par rapport à l'axe réel (\bar{w}', w') . Il convient alors d'ajuster la charge de sorte que le propagateur vérifie la condition au bord. Grâce à la chiralisation du champ de hauteur, on

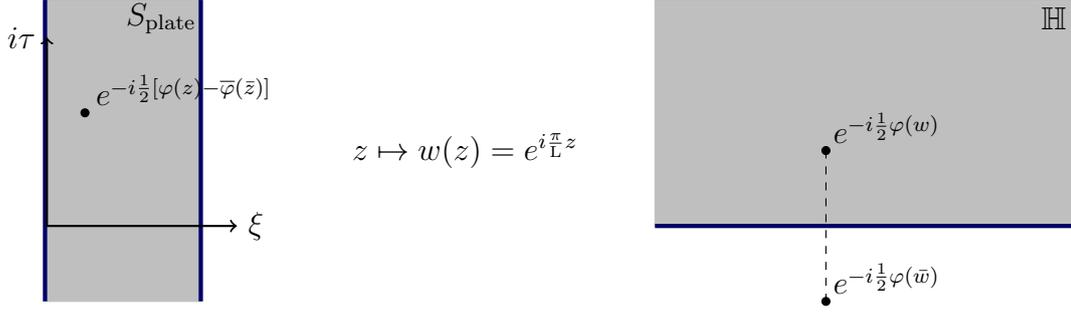


FIGURE 6.2 – La bande infinie $S_{\text{plate}} = [\xi_L, \xi_R] \times \mathbb{R}$ est envoyée vers le demi-plan supérieur \mathbb{H} via la transformation conforme $z \mapsto w(z) = e^{i\frac{\pi}{L}z}$. On peut alors utiliser la méthode des images.

peut illustrer cette astuce d'une manière simple.

Nous avons vu au chapitre 4 que le champ de hauteur pouvait se séparer en deux champs chiral et anti-chiral indépendants dans le plan complexe, $h(w, \bar{w}) = \varphi(w) + \bar{\varphi}(\bar{w})$. Avec la condition au bord de Dirichlet, ces deux champs ne sont plus indépendants :

$$\varphi(w) = -\bar{\varphi}(\bar{w}) \quad \text{pour } w = \bar{w} \in \mathbb{R}, \quad (6.12)$$

par conséquent la fonction à deux points $\langle \varphi(w)\bar{\varphi}(\bar{w}) \rangle$ n'est plus nulle. On peut alors voir le champ $\bar{\varphi}(\bar{w})$ comme le prolongement analytique de $-\varphi(\bar{w})$ au demi-plan inférieur de sorte que l'on a, en plus des propagateurs indépendants (3.30), le propagateur qui couple les deux champs chiraux

$$\langle \varphi(w)\bar{\varphi}(\bar{w}') \rangle_{\text{D}} = \log(w - \bar{w}'). \quad (6.13)$$

La fonction de Green avec conditions au bord de Dirichlet s'obtient alors trivialement,

$$\begin{aligned} G_{[1]}^{\text{D}}((w, \bar{w}), (w', \bar{w}')) &= -\langle h(w, \bar{w})h(w', \bar{w}') \rangle_{\text{D}} \\ &= \langle (\varphi(w) + \bar{\varphi}(\bar{w}))(\varphi(w') + \bar{\varphi}(\bar{w}')) \rangle_{\text{D}} \\ &= \log \left| \frac{w - w'}{w - \bar{w}'} \right|^2, \end{aligned} \quad (6.14)$$

de même que la fonction de Green régularisée,

$$\begin{aligned} G_{[1]}^{\text{D}}((w, \bar{w})) &= \lim_{w' \rightarrow w} \left[G_{[1]}^{\text{D}}((w, \bar{w}), (w', \bar{w}')) - \log |w - w'|^2 \right] \\ &= -\log |w - \bar{w}|^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Maintenant, on peut faire exactement la même chose pour les conditions au

bord de Neumann. On a

$$\varphi(w) = \bar{\varphi}(\bar{w}) \quad \text{pour } w = \bar{w} \in \mathbb{R}, \quad (6.16)$$

ce qui implique

$$\langle \varphi(w) \bar{\varphi}(\bar{w}') \rangle_{\mathbb{N}} = -\log(w - \bar{w}'). \quad (6.17)$$

La fonction à deux points donne ainsi

$$\begin{aligned} G_{[1/4]}^{\mathbb{N}}((w, \bar{w}), (w', \bar{w}')) &= -\langle h(w, \bar{w}) h(w', \bar{w}') \rangle_{\mathbb{N}} \\ &= \langle (\varphi(w) + \bar{\varphi}(\bar{w})) (\varphi(w') + \bar{\varphi}(\bar{w}')) \rangle_{\mathbb{N}} \\ &= \frac{1}{4} \log |(w - w')(w - \bar{w}')|^2, \end{aligned} \quad (6.18)$$

et sa fonction régularisée,

$$\begin{aligned} G_{[1/4]}^{\mathbb{N}}((w, \bar{w})) &= \lim_{w' \rightarrow w} \left[G_{[1]}^{\mathbb{N}}((w, \bar{w}), (w', \bar{w}')) - \frac{1}{4} \log |w - w'|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \log |w - \bar{w}|^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Pour calculer des corrélations dans la bande, il suffit à présent de réécrire les différentes fonctions de Green dans les coordonnées isothermes $(z, \bar{z}) = \xi \pm i\tau$, en tenant bien compte du jacobien de la transformation inverse, $w \mapsto z(w)$. On obtient notamment pour les conditions au bord de Dirichlet,

$$G_{[1]}^{\mathbb{D}}((z, \bar{z}), (z', \bar{z}')) = \log \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z - z'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z + \bar{z}'}{2}\right)} \right|^2, \quad (6.20)$$

avec la régularisation

$$G_{[1]}^{\mathbb{D}}((z, \bar{z})) = \log \left| \sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z + \bar{z}}{2}\right) \right|^2. \quad (6.21)$$

Pour les conditions au bord de Neumann, on a

$$G_{[1/4]}^{\mathbb{N}}((z, \bar{z}), (z', \bar{z}')) = \frac{1}{4} \log \left| \frac{4L^2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z - z'}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z + \bar{z}'}{2}\right) \right|^2 \quad (6.22)$$

avec la régularisation

$$G_{[1/4]}^{\mathbb{N}}((z, \bar{z})) = \frac{1}{4} \log \left| \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{L} \frac{z + \bar{z}}{2}\right) \right|^2. \quad (6.23)$$

Le calcul de la matrice densité à une particule est alors obtenu sans plus d'effort.

6.1.4 Applications au cas harmonique et au double-puits

Comme dans le cas homogène, les opérateurs de création et d'annihilation sont donnés par un opérateur de vertex magnétique à l'ordre dominant (4.6). L'amplitude en revanche est légèrement modifiée : elle doit toujours avoir une dimension d'échelle égale à $-1/4$, mais ici la seule longueur microscopique pertinente est la densité locale $\rho_F(x)$. On a donc :

$$\begin{cases} \Psi^\dagger(x) &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} C \rho_F(x)^{\frac{1}{4}} \mathcal{V}_{0,1}(z, \bar{z}) + \dots \\ \Psi(x) &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} C^* \rho_F(x)^{\frac{1}{4}} \mathcal{V}_{0,-1}(z, \bar{z}) + \dots \end{cases} \quad (6.24)$$

où C est une fois de plus la racine carrée de la constante $\frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}}$, caractéristique de la limite de Tonks-Girardeau. Pour commencer, on réécrit la fonction de corrélation avec le jeu de coordonnées isothermes $(z, \bar{z}) = \xi \pm i\tau$ qui permet de passer de la bande infinie équipée de la métrique courbe à la bande infinie plate :

$$\begin{aligned} g_1(x, x') &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} |C|^2 \rho_F(x)^{\frac{1}{4}} \rho_F(x')^{\frac{1}{4}} \langle \mathcal{V}_{0,1}(z, \bar{z}) \mathcal{V}_{0,-1}(z', \bar{z}') \rangle_{S_{\text{courbe}}} \\ &= \lim_{\tau, \tau' \rightarrow 0} |C|^2 \left(\frac{\rho_F(x)}{e^{\sigma(x)}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\rho_F(x')}{e^{\sigma(x')}} \right)^{\frac{1}{4}} \langle \mathcal{V}_{0,1}(z, \bar{z}) \mathcal{V}_{0,-1}(z', \bar{z}') \rangle_{S_{\text{plate}}} . \end{aligned}$$

Puisque $e^{\sigma(x)} = v_F(x) = \frac{\pi\hbar}{m} \rho_F(x)$, le préfacteur se simplifie et donne $\sqrt{\frac{m}{\pi\hbar}}$. Le corrélateur des opérateurs de vertex magnétiques est donné par la formule générale (5.46), ou plus simplement (5.39) :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}_{0,1}(z, \bar{z}) \mathcal{V}_{0,-1}(z', \bar{z}') \rangle_{S_{\text{plate}}} &= e^{\frac{1}{2}G_{[1/4]}^N((z, \bar{z})) + \frac{1}{2}G_{[1/4]}^N((z', \bar{z}')) - G_{[1/4]}^N((z, \bar{z}), (z', \bar{z}'))} \\ &= \frac{|\sin(\frac{\pi}{L} \frac{z+\bar{z}}{2})|^{\frac{1}{4}} |\sin(\frac{\pi}{L} \frac{z'+\bar{z}'}{2})|^{\frac{1}{4}}}{|\frac{2L}{\pi} \sin(\frac{\pi}{L} \frac{z-\bar{z}'}{2}) \sin(\frac{\pi}{L} \frac{z+\bar{z}'}{2})|^{\frac{1}{2}}} . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Pour un potentiel $V(x)$ arbitraire, on a alors le résultat final :

$$g_1(x, x') = \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar}} \frac{|\sin(\frac{\pi}{L} \xi)|^{\frac{1}{4}} |\sin(\frac{\pi}{L} \xi')|^{\frac{1}{4}}}{|\frac{2L}{\pi} \sin(\frac{\pi}{L} \frac{\xi-\xi'}{2}) \sin(\frac{\pi}{L} \frac{\xi+\xi'}{2})|^{\frac{1}{2}}} , \quad (6.26)$$

où, pour rappel, $\xi(x) = \int_{x_L}^x \frac{dr}{v_F(r)}$. Dans le cas du potentiel harmonique, pour $m = \omega = \mu = 1$ on a $\xi = \pi - \arccos(\frac{x}{\sqrt{2}})$ et $L = \pi$ et on retrouve explicitement la formule (6.3) de Forrester et al. [41]. Dans la figure 6.3, on compare notre formule aux résultats obtenus par DMRG dans le cas du potentiel harmonique et pour le double-puits. Comme attendu, la simulation converge bien vers la formule (6.26) pour un nombre de particules N croissant. Si l'accord

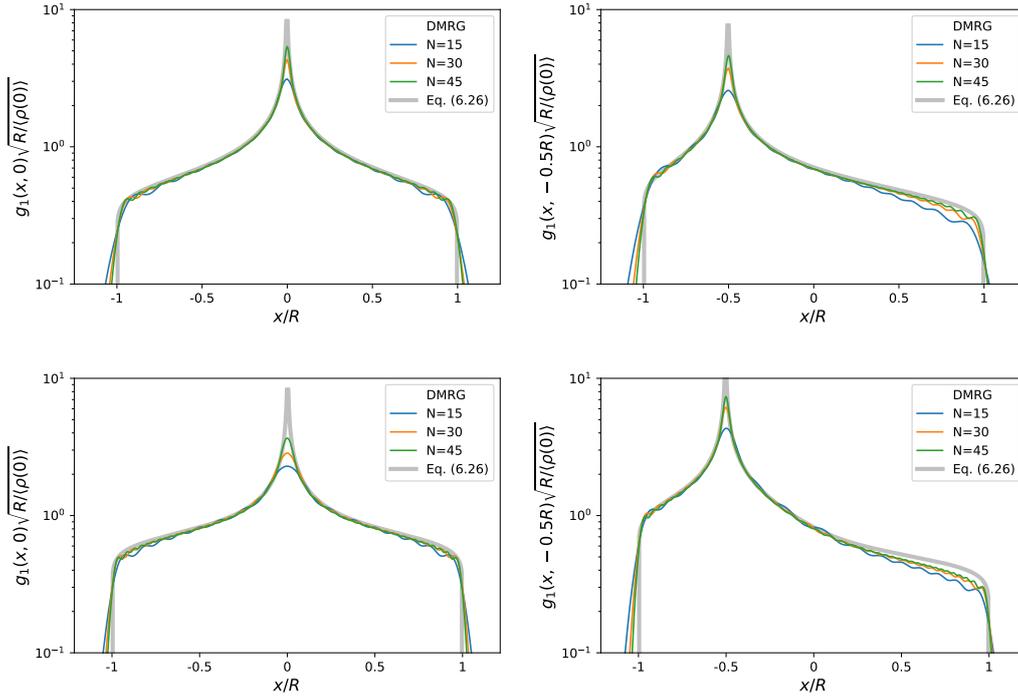


FIGURE 6.3 – Matrice densité à une particule $g_1(x, x')$ du gaz de Tonks-Girardeau piégé dans un potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ (à gauche) et un double-puits $V(x) = a_4x^4 - a_2x^2$ (à droite). La formule (6.26) est comparée à la simulation DMRG pour un nombre croissant de particules N .

est visiblement moins bon sur les bords, il peut être amélioré en augmentant la discrétisation.

6.2 Piège harmonique dépendant du temps

Nous nous tournons à présent vers le problème hors de l'équilibre, plus particulièrement le cas où le potentiel externe est le potentiel harmonique dépendant du temps,

$$V(x, t) = \frac{1}{2}m\omega(t)^2x^2. \quad (6.27)$$

Dans cette situation, il est plus aisé de travailler avec la métrique lorentzienne (5.8), qui prend la forme

$$ds^2 = -v_F(x, t)^2 dt^2 + (dx - u(x, t)dt)^2, \quad (6.28)$$

avec $u(x, t)$ la vitesse hydrodynamique et $v_F(x, t)$ la vitesse de propagation des excitations, qui satisfont l'équation des géodésiques (5.9) :

$$\dot{x}_{\pm}(t) = u(x, t) \pm v_F(x, t). \quad (6.29)$$

Nous allons montrer ci-dessous que l'on peut obtenir des expressions explicites pour ces grandeurs à partir d'une analogie avec un problème simple de mécanique newtonnienne.

6.2.1 Description hydrodynamique

Trouver des solutions analytiques aux équations d'Euler (5.3) est facilité par l'image holographique introduit par Eliezer et Gray [154], dont nous nous inspirons pour cette section.

Imaginons que l'on ait un oscillateur rigide de longueur variable $\ell(t)$, libre de tourner autour du centre du plan (x, y) . La position de l'extrémité de l'oscillateur est repérée par

$$\begin{cases} x(t) = \ell(t) \cos \xi(t) \\ y(t) = \ell(t) \sin \xi(t), \end{cases} \quad (6.30)$$

où $\xi(t)$ est un angle défini modulo 2π . À $t = 0$, la longueur et la vitesse angulaire initiales sont respectivement ℓ_0 et ω_0 . Comme la longueur $\ell(t)$ varie, l'énergie du système n'est pas conservée mais le moment cinétique l'est. Cela implique

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{b(t)^2}, \quad (6.31)$$

où $b(t) = \ell(t)/\ell_0$. Maintenant, imaginons que l'on regarde le système de très loin dans la direction de l'axe y : on ne voit alors que l'oscillateur se déplacer selon $x(t)$. En injectant $x(t) = \ell(t) \cos \xi(t)$ dans l'équation de Newton avec la contrainte de conservation du moment angulaire (6.31), on voit que la trajectoire coïncide précisément avec le mouvement d'une particule dans un potentiel harmonique [154],

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\partial_x V, \quad \text{avec} \quad V(x, t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega_0^2}{b(t)^4} - \frac{\ddot{b}(t)}{b(t)} \right) x^2. \quad (6.32)$$

La fonction d'échelle $b(t)$ est alors reliée à la fréquence du potentiel harmonique (6.27) par l'équation d'Ermakov [155, 156]

$$\ddot{b}(t) + \omega(t)^2 b(t) = \frac{\omega_0^2}{b(t)^3}. \quad (6.33)$$

Étant donné que le gaz est initialement à l'équilibre dans un piège de fréquence ω_0 , les conditions initiales de l'équation (6.33) sont $b(0) = 1$ and $\dot{b}(0) = 0$. Si l'on sait calculer $b(t)$ pour une fréquence $\omega(t)$ donnée, alors la position d'une

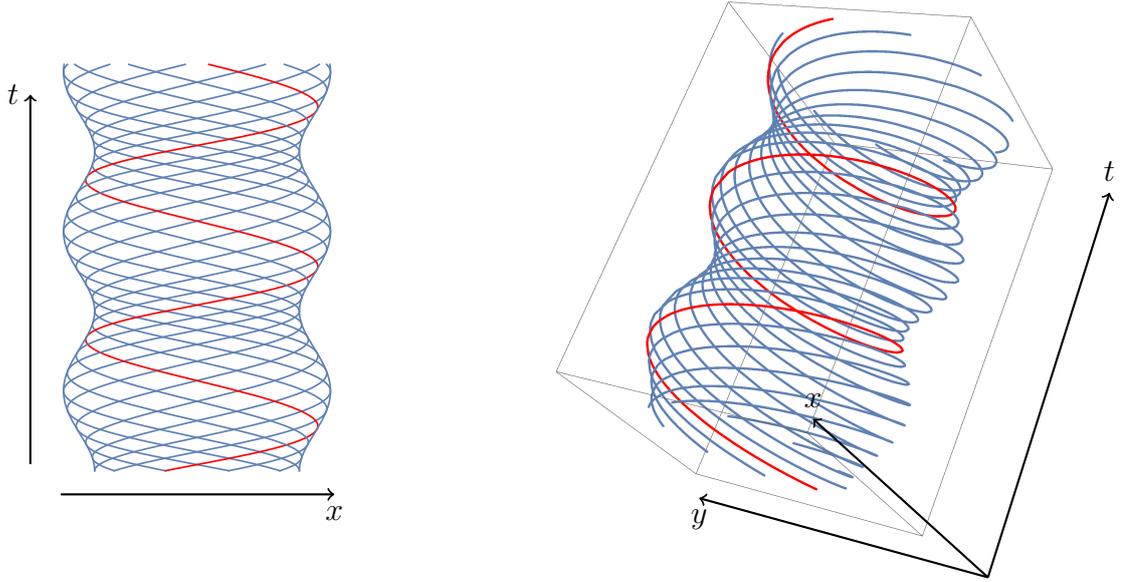


FIGURE 6.4 – Gauche : trajectoire $x(t)$ d'une particule classique dans le potentiel harmonique dépendant du temps, ici pour une trempe soudaine de la fréquence $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ at $t = 0$, ce qui donne la fonction d'échelle $b(t) = \sqrt{1 + (\omega_0^2/\omega_1^2 - 1) \sin^2(\omega_1 t)}$. Droite : image holographique : la trajectoire $x(t)$ est vue comme la projection du mouvement bidimensionnel du pendule tournant autour de l'origine du plan (x, y) , ce qui illustre la conservation du moment cinétique.

particule est simplement donnée par $x(t) = \ell_0 b(t) \cos(\xi(0) + \tau(t))$ avec

$$\tau(t) \equiv \int_0^t \frac{\omega_0 dr}{b(r)^2}. \quad (6.34)$$

Nous verrons dans la section suivante que les coordonnées (ξ, τ) sont isothermes pour la métrique (6.28). Avant cela, il nous reste à déterminer les solutions de l'approche hydrodynamique classique.

Pour le gaz de Tonks-Girardeau, on sait que la pression est donnée par $P = \frac{\pi^2 \hbar^2 \rho_F^3}{3m}$ et les équations d'Euler (5.3) ont alors pour solutions

$$\rho(x, t) = \frac{1}{b(t)} \times \frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2} - \frac{x^2}{b(t)^2}} \quad (6.35)$$

et

$$u(x, t) = \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} x. \quad (6.36)$$

Cette description hydrodynamique explicite est bien connue [145, 157–159] et est souvent nommée solution d'échelle, le profil de densité (6.35) étant le profil initial renormalisé par la fonction d'échelle $b(t)$.

6.2.2 Coordonnées isothermes

Nous avons déjà souligné dans la section 5.2.2 que dans le cadre des théories conformes, l'équation des géodésiques (6.29) est satisfaite par deux trajectoires gauche et droite indépendantes. Une observable locale $O(x, t)$ peut aussi être décomposée en composantes gauche et droite, que l'on note respectivement avec les symboles $+$ et $-$: $O = O^+ \otimes O^-$. Comme chaque composante chirale suit sa propre trajectoire indépendamment de l'autre, on peut remonter la trajectoire et évaluer l'opérateur à sa position initiale à $t = 0$. Suivant cette procédure, une fonction de corrélation telle que celle de l'équation (6.2) devient :

$$\begin{aligned} & \langle O_1(x_1, t_1) O_2(x_1, t_1) \dots O_p(x_p, t_p) \rangle \\ &= \langle O_1^+(x_+(x_1, t_1), 0) O_1^-(x_-(x_1, t_1), 0) \dots O_p^+(x_+(x_p, t_p), 0) O_p^-(x_-(x_p, t_p), 0) \rangle, \end{aligned} \quad (6.37)$$

où $x_{\pm}(x_i, t_i)$ est la position initiale à $t = 0$ de la trajectoire gauche/droite qui passe en x_i au temps t_i . Si la métrique était plate, cette position initiale serait simplement donnée par $x_i \mp t_i$; ce n'est pas le cas ici avec la métrique courbe (6.28) mais on sait qu'en deux dimensions il existe toujours un jeu de coordonnées isothermes pour lesquelles la métrique est plate.

Il se trouve que le jeu de coordonnées isothermes qui nous intéresse est en fait contenu dans la description hydrodynamique. On peut en effet vérifier que la trajectoire $x(t) = b(t) \cos(\xi + \tau)$ satisfait l'équation des géodésiques (6.29); pour chaque position x contenue dans l'intervalle où $\rho(x, t) \neq 0$, on a deux possibilités pour la coordonnée ξ , telle que $\cos \xi = x/(b(t) \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}})$. Ces deux solutions sont définies par

$$\begin{cases} \xi(x, t) \equiv -\arccos\left(\frac{x}{b(t) \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}}}\right) \in [-\pi, 0] \pmod{2\pi}, \\ 2\pi - \xi(x, t) \in [0, \pi] \pmod{2\pi}. \end{cases} \quad (6.38)$$

Avec cette définition et celle de la variable $\tau(t)$ (6.34), la métrique (6.28) prend la forme attendue

$$ds^2 = e^{2\sigma(x,t)} (-d\tau^2 + d\xi^2) \quad \text{avec} \quad e^{\sigma(x,t)} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2} b(t)^2 - x^2}. \quad (6.39)$$

Dans ces coordonnées, la fonction de corrélation dynamique (6.37) est simple-

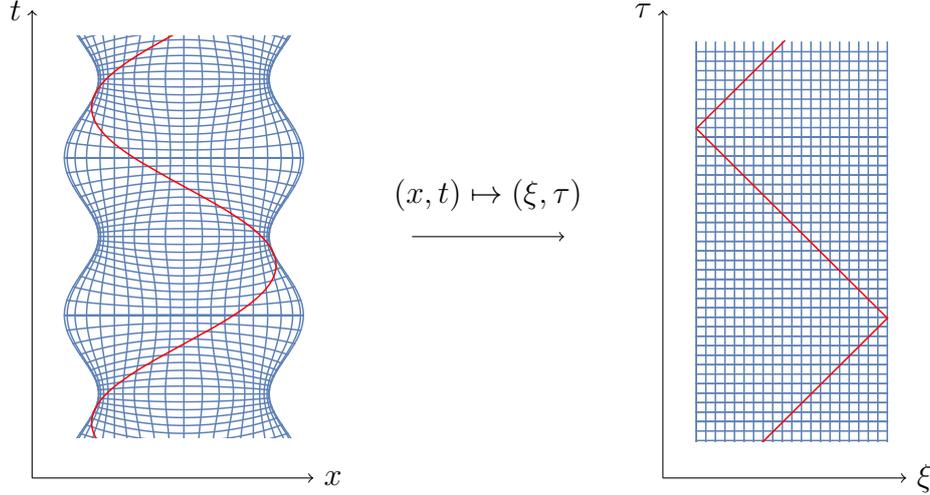


FIGURE 6.5 – Gauche : trajectoire d’une excitation dans le gaz de Tonks-Girardeau hors de l’équilibre, ici pour le protocole $\omega(t) = \omega_0$ en $t \leq 0$ et $\omega(t) = \omega_1$ pour $t > 0$. Droite : même trajectoire dans les coordonnées isothermes (ξ, τ) , donnée par $\xi_{\pm} = \xi \pm \tau$. Comme il s’agit d’une théorie conforme avec bords, les excitations gauche et droite sont réfléchies l’une en l’autre aux bords.

ment

$$\begin{aligned} & \langle O_1(\xi_1, \tau_1) O_2(\xi_2, \tau_2) \dots O_p(\xi_p, \tau_p) \rangle \\ & = \langle O_1^+(\xi_1 + \tau_1) O_1^-(\xi_1 - \tau_1) \dots O_p^+(\xi_p + \tau_p) O_p^-(\xi_p - \tau_p) \rangle. \end{aligned} \quad (6.40)$$

où chaque observable chirale est fonction d’une seule trajectoire $\xi_{\pm} = \xi \pm \tau$. Sous cette forme, le membre de droite de l’équation (6.40) est calculé comme une fonction de corrélation à l’équilibre ; le problème se ramène donc au même type de calcul que ceux que nous avons présentés pour l’état initial. Ici encore, on obtient des résultats explicites en s’appuyant sur le champ chiral φ .

6.2.3 Chiralisation et propagateurs

À présent les bords gauche/droite du système ne sont plus fixés mais se déplacent suivant $x_{L,R}(t) = \mp b(t) \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_0^2}}$. Cependant, le champ de hauteur est toujours régi par des conditions au bord de Dirichlet,

$$h(x_L(t), t) = h(x_R(t), t) = 0, \quad (6.41)$$

que l’on peut une fois de plus démontrer par le calcul de l’intégrale des fluctuations de la densité (6.8) :

$$2\pi \int_{x_L(t)}^{x_R(t)} dx \delta\rho(x) = h(x_R(t), t) - h(x_L(t), t) = 0.$$

Dans la métrique lorentzienne courbe, le système vit sur une bande d'espace-temps verticale de largeur qui varie avec le temps, mais dans les coordonnées isothermes (ξ, τ) la bande à une largeur fixée, que l'on peut choisir telle que $\xi_L = 0$ et $\xi_R = \pi$. Les deux champs chiraux qui composent le champ de hauteur $h(\xi, \tau)$ sont encore le prolongement analytique l'un de l'autre. En choisissant de travailler avec le boson chiral droit, $\varphi(\xi - \tau)$, on arrive sous les contraintes (6.38) et (6.41) à

$$h(\xi, \tau) = \varphi_-(\xi - \tau) + \varphi_+(\xi + \tau) \quad (6.42)$$

$$= \varphi(\xi - \tau) - \varphi(-\xi - \tau), \quad (6.43)$$

ce qui satisfait automatiquement les conditions au bord de Dirichlet $h(\xi, \tau) = 0$ pour $\xi = 0$ et $\xi = \pi \pmod{2\pi}$.

Avec l'équation (6.40) et la chiralisation (6.42), on se retrouve dans une situation analogue à celle du cas à l'équilibre de la section 6.1, à ceci près que les coordonnées (ξ, τ) sont isothermes pour la métrique lorentzienne (6.28). Nous avons vu qu'en suivant les trajectoires gauche/droite les corrélations pouvaient se calculer à partir de la connaissance de l'état initial. Or, on voit que la coordonnée $\xi(x, t)$ à $t = 0$ satisfait $d\xi(x, 0) = \frac{dx}{v_F(x)}$, donc les coordonnées (ξ, τ) sont aussi isothermes pour la métrique riemannienne

$$ds^2 = e^{2\sigma}(d\tau^2 + d\xi^2), \quad (6.44)$$

où la partie imaginaire est portée par $\zeta = -i\xi$. Les différents propagateurs peuvent donc être calculés par la méthode des images avec les coordonnées $(z, \bar{z}) = \pm\zeta - \tau$ envoyées vers le demi-plan via la transformation $z \mapsto w(z) = e^{iz}$. Toutes les étapes de calcul sont identiques à celles de la section 6.1.3, mais certaines simplifications permises par l'usage des coordonnées complexes ne peuvent pas être faites avant d'avoir effectué la rotation vers la coordonnée réelle $\xi = i\zeta$. Pour le propagateur avec conditions au bord de Neumann, on obtient en particulier

$$\begin{aligned} G_{[1/4]}^N((\xi, \tau), (\xi', \tau')) &= \frac{1}{4} \log \left[4 \sin \left(\frac{(\xi - \xi') - (\tau - \tau')}{2} \right) \sin \left(\frac{(\xi + \xi') - (\tau - \tau')}{2} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{4} \log \left[4 \sin \left(\frac{(\xi + \xi') + (\tau - \tau')}{2} \right) \sin \left(\frac{(\xi - \xi') + (\tau - \tau')}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.45)$$

et la régularisation

$$G_{[1/4]}^N((\xi, \tau)) = \frac{1}{4} \log |2 \sin(\xi)|^2. \quad (6.46)$$

Avec ces formules, on peut calculer les corrélations des opérateurs de vertex magnétiques $\mathcal{V}_{0,\beta}(\xi, \tau)$, ce qui est suffisant pour déterminer la matrice densité à une particule dynamique à l'ordre dominant.

6.2.4 Matrice densité à une particule

Une fois de plus, il faut identifier les opérateurs de création et annihilation mais ici, il faut porter une plus grande attention aux phases qui peuvent jouer un rôle important dans une situation dynamique. Pour alléger les notations, on prend $m = \omega_0 = \mu = 1$ jusqu'à la fin de ce chapitre.

Il doit exister une phase associée au boost galiléen local, $u(x, t)$. Elle est définie par,

$$\phi(x, t) = \int dx u(x, t) = \left(-\tau(t) + \frac{\dot{b}(t) x^2}{b(t)} \frac{1}{2} \right) N. \quad (6.47)$$

Cette phase porte la symétrie $U(1)$ et apparaît dans le développement des opérateurs de création et d'annihilation,

$$\begin{cases} \Psi^\dagger(x, t) &= C \rho(x, t)^{\frac{1}{4}} e^{-i\phi(x, t)} \mathcal{V}_{0,1}(x, t) + \dots \\ \Psi(x, t) &= C^* \rho(x, t)^{\frac{1}{4}} e^{i\phi(x, t)} \mathcal{V}_{0,-1}(x, t) + \dots \end{cases} \quad (6.48)$$

où C est toujours la racine carrée de $\frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}}$, et la densité hydrostatique (7.3) est naturellement remplacée par la densité hydrodynamique (6.35). On obtient ainsi pour la matrice densité à une particule dynamique,

$$\begin{aligned} g_1((x, t), (x', t')) &= |C|^2 \rho(x, t)^{\frac{1}{4}} \rho(x', t')^{\frac{1}{4}} e^{-i(\phi(x, t) - \phi(x', t'))} \langle \mathcal{V}_{0,1}(x, t) \mathcal{V}_{0,-1}(x', t') \rangle \\ &= |C|^2 \left(\frac{\rho(x, t)}{e^{\sigma(x, t)}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\rho(x', t')}{e^{\sigma(x', t')}} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-i(\phi(x, t) - \phi(x', t'))} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2} G_{[1/4]}^N((\xi, \tau)) + \frac{1}{2} G_{[1/4]}^N((\xi', \tau')) - G_{[1/4]}^N((\xi, \tau), (\xi', \tau'))}. \end{aligned}$$

Le préfacteur se simplifie avec $\frac{\rho(x, t)}{e^{\sigma(x, t)}} = \frac{1}{\pi \hbar b(t)^2}$, et en injectant la formule (6.47)

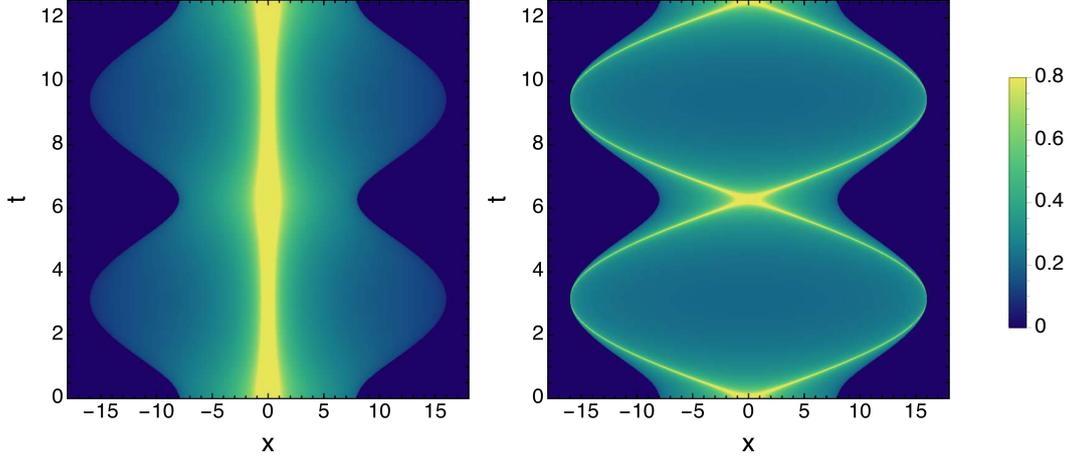


FIGURE 6.6 – Gauche : valeur absolue de la matrice densité à une particule à temps égaux $|g_1(x, 0; t)|$. Droite : idem à temps différents $|g_1((x, t), (0, 0))|$. Les paramètres choisis sont : $\omega_0 = 1, \omega_1 = 0.5, N = 32$.

pour la phase et les propagateurs (6.45) et (6.46) on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
g_1((x, t), (x', t')) &= \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\left(\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}\frac{(x^2-x'^2)}{2} - \frac{(\tau-\tau')}{4}\right)N}}{\sqrt{2\pi\hbar b(t)b(t')}} \\
&\times \frac{(\sin \xi)^{\frac{1}{4}}}{\left(\sin \frac{(\xi-\xi')-(\tau-\tau')}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\sin \frac{(\xi-\xi')+(\tau-\tau')}{2}\right)^{\frac{1}{4}}} \\
&\times \frac{(\sin \xi')^{\frac{1}{4}}}{\left(\sin \frac{(\xi+\xi')+(\tau-\tau')}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\sin \frac{(\xi+\xi')-(\tau-\tau')}{2}\right)^{\frac{1}{4}}}. \quad (6.49)
\end{aligned}$$

Ce qui est remarquable ici, c'est qu'à temps égaux le résultat $g_1(x, x'; t) \equiv g_1((x, t), (x', t))$ prend une forme explicite compacte,

$$\begin{aligned}
g_1(x, x'; t) &= \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\left(\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}\frac{(x^2-x'^2)}{2}\right)N}}{\sqrt{2\pi\hbar b(t)^2}} \frac{(\sin \xi)^{\frac{1}{4}}(\sin \xi')^{\frac{1}{4}}}{\left(\sin \frac{(\xi-\xi')}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{(\xi+\xi')}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{G^4(3/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\left(\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}\frac{(x^2-x'^2)}{2}\right)N}}{\sqrt{b(t)}} \frac{\rho(x, t)^{\frac{1}{4}}\rho(x', t)^{\frac{1}{4}}}{\left|\frac{x-x'}{b(t)}\right|^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.50)
\end{aligned}$$

qui s'avère être exactement la même que le résultat dans l'état initial (6.26) pour le potentiel harmonique. À la seconde ligne, on voit que le résultat coïncide avec celui obtenu par Minguzzi et Gangardt [145]. Enfin, à $t = 0$, on a

$b(0) = 1$ et on retrouve comme attendu le résultat de Forrester et al. [41],

$$g_1(x, x'; 0) = \frac{G^4(3/2) \rho(x, 0)^{\frac{1}{4}} \rho(x', 0)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi} |x - x'|^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.51)$$

Dans la Fig. 6.6, on trace $g_1((x, t), (x', t'))$ dans le cas d'une trempe soudaine de la fréquence : $\omega(t) = \omega_0$ pour $t \leq 0$ et $\omega(t) = \omega_1 \neq \omega_0$ pour $t > 0$. Dans ce cas, la fonction d'échelle est connue analytiquement, $b(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - 1\right) \sin^2(\omega_1 t)}$.

À notre connaissance, il n'existe pas de méthode numérique permettant d'évaluer $g_1((x, t), (x', t'))$ à temps différents pour un nombre de particules suffisamment grand. Cependant, notre résultat est obtenu exactement de la même manière que dans le cas à l'équilibre, que nous avons validé numériquement par des simulations de DMRG.

6.2.5 Fonction de corrélation à n particules

Le résultat obtenu pour la matrice densité à une particule se généralise très facilement au cas à n particules,

$$g_n((x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n), (x'_1, t'_1), \dots, (x'_n, t'_n)) = \langle \Psi^\dagger(x_1, t_1) \dots \Psi^\dagger(x_n, t_n) \Psi(x'_1, t'_1) \dots \Psi(x_n, t_n) \rangle. \quad (6.52)$$

Comme nous suivons exactement les mêmes étapes et faisons exactement les mêmes simplifications qu'avant, nous rapportons les calculs ci-dessous sans plus de commentaires.

$$\begin{aligned} & g_n((x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n), (x'_1, t'_1), \dots, (x'_n, t'_n)) \\ &= |C|^{2n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\rho(x_i, t_i)}{e^{\sigma(x_i, t_i)}} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\rho(x'_i, t'_i)}{e^{\sigma(x'_i, t'_i)}} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-i(\phi(x_i, t_i) - \phi(x'_i, t'_i))} \\ &\quad \times \langle \mathcal{V}_{0,1}(\xi_1, \tau_1) \dots \mathcal{V}_{0,1}(\xi_n, \tau_n) \mathcal{V}_{0,1}(\xi'_1, \tau'_1) \dots \mathcal{V}_{0,1}(\xi'_n, \tau'_n) \rangle \\ &= |C|^{2n} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-i(\phi(x_i, t_i) - \phi(x'_i, t'_i))}}{\sqrt{\pi \hbar b(t_i) b(t'_i)}} \prod_{j=1}^n e^{\frac{1}{2} G_{[1/4]}^N(\xi_j, \tau_j) + \frac{1}{2} G_{[1/4]}^N(\xi'_j, \tau'_j)} \\ &\quad \times \prod_{k,l}^n e^{-G_{[1/4]}^N((\xi_k, \tau_k), (\xi'_l, \tau'_l))} \prod_{m < p}^n e^{G_{[1/4]}^N((\xi_m, \tau_m), (\xi_p, \tau_p)) + G_{[1/4]}^N((\xi'_m, \tau'_m), (\xi'_p, \tau'_p))}. \end{aligned}$$

La formule peut être écrite explicitement en injectant le propagateur (6.45) et la régularisation (6.46), mais elle devient gigantesque et n'apporte rien à notre propos. En revanche, on arrive à une forme plus compacte dans le cas où tous

les points sont pris à temps égaux, $t_1 = \dots = t_n = t'_1 = \dots = t'_n = t$,

$$\begin{aligned}
& g_n(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n; t) \\
&= |C|^{2n} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-i(\phi(x_i, t) - \phi(x'_i, t))}}{\sqrt{\pi \hbar} b(t)^2} \prod_{j=1}^n 4 |\sin(\xi_j)|^{\frac{1}{4}} |\sin(\xi'_j)|^{\frac{1}{4}} \\
&\quad \times \frac{\prod_{m < p}^n 16 \left| \sin\left(\frac{\xi_m - \xi_p}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi_m + \xi_p}{2}\right) \right|^{\frac{1}{2}} \left| \sin\left(\frac{\xi'_m - \xi'_p}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi'_m + \xi'_p}{2}\right) \right|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k, l}^n 4 \left| \sin\left(\frac{\xi_k - \xi'_l}{2}\right) \sin\left(\frac{\xi_k + \xi'_l}{2}\right) \right|^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.53)
\end{aligned}$$

Cette dernière formule est valide pour un potentiel arbitraire mais se simplifie d'autant plus dans le cas du potentiel harmonique :

$$\begin{aligned}
& g_n(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n; t) \\
&= |C|^{2n} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-i(\phi(x_i, t) - \phi(x'_i, t))}}{\sqrt{b(t)}} \prod_{j=1}^n \rho(x_j, t)^{\frac{1}{4}} \rho(x'_j, t)^{\frac{1}{4}} \frac{\prod_{m < p}^n \left| \frac{\xi_m - \xi_p}{b(t)} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\xi'_m - \xi'_p}{b(t)} \right|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k, l}^n \left| \frac{\xi_k - \xi'_l}{b(t)} \right|^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.54)
\end{aligned}$$

ce qui généralise le résultat de Minguzzi et Gangardt dans le cas $n = 1$ [145]. De là, on obtient aussi le résultat dans l'état initial $t = 0$, avec $b(0) = 1$:

$$\begin{aligned}
& g_n(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n; 0) \\
&= |C|^{2n} \prod_{j=1}^n \rho(x_j, 0)^{\frac{1}{4}} \rho(x'_j, 0)^{\frac{1}{4}} \frac{\prod_{m < p}^n |\xi_m - \xi_p|^{\frac{1}{2}} |\xi'_m - \xi'_p|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k, l}^n |\xi_k - \xi'_l|^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.55)
\end{aligned}$$

ce qui généralise le résultat de Forrester et al. [41].

Dans ce chapitre, nous avons montré comment notre approche permet de calculer les fonctions de corrélations dynamiques dans une situation inhomogène. Pour cela nous nous sommes concentrés sur le cas simple du gaz de Tonks-Girardeau; il s'agit d'un cas simple car il offre la possibilité d'établir des formules explicites. Tout cela est possible car le paramètre de Luttinger du gaz de bosons de cœur dur est $K = 1$, ce qui signifie que les différents propagateurs peuvent être obtenus analytiquement. Dans le chapitre suivant, nous allons illustrer notre approche dans son intégralité en nous intéressant au gaz de Lieb-Liniger avec interaction finie. Le paramètre de Luttinger dépend

alors de la position, $K \rightarrow K(x)$, et les propagateurs ne peuvent plus être obtenus analytiquement. Il faut alors voir les différentes fonctions de Green comme des paramètres calculés numériquement que l'on injecte dans le formalisme, exactement comme on injecte les paramètres v et K calculés par l'Ansatz de Bethe. On se limite au calcul des fonctions de corrélations à l'équilibre, ce qui nous permet de valider numériquement nos résultats par comparaison aux simulations de DMRG.

Chapitre 7

Corrélations à l'équilibre dans le cas avec interaction finie

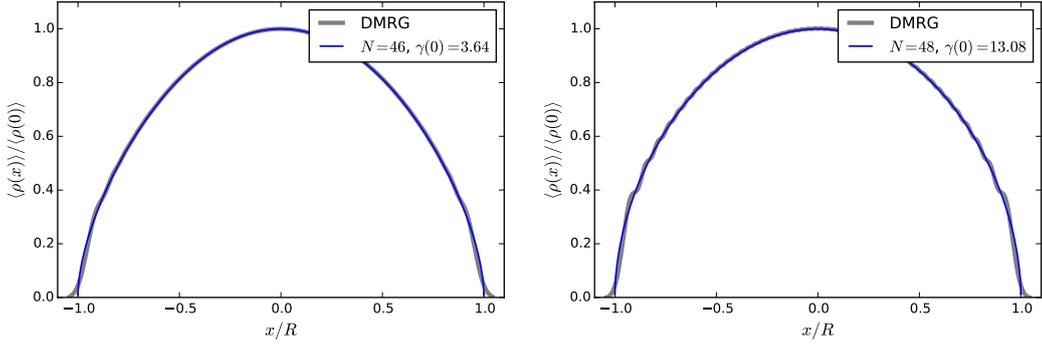
Nous avons vu au chapitre 5 que dans une situation inhomogène, le paramètre de Luttinger dépend en général de la position $K(\mathbf{x})$. L'action de la théorie est alors donnée par l'équation (5.11) et donne lieu au formalisme du champ libre gaussien inhomogène. Dans le cas où $K(\mathbf{x})$ ne peut pas simplement être absorbé dans le champ de hauteur, les propagateurs de la théorie ne peuvent pas être obtenus analytiquement. Il faut alors résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles (5.18) et (5.40) qui font intervenir les opérateurs de Poisson généralisés. Grâce à l'analogie avec l'électrostatique à deux dimensions (voir l'annexe B), l'évaluation numérique des différentes fonctions de Green est assez simple. On peut alors appliquer le formalisme du IGFF et voir les fonctions de Green comme des paramètres.

7.1 Gaz de Lieb-Liniger confiné dans un piège

Nous traitons maintenant le gaz de Lieb-Liniger avec interaction finie. Afin de pouvoir utiliser l'approche du liquide de Luttinger inhomogène telle que nous l'avons présentée dans le chapitre 5, nous réécrivons l'Hamiltonien sous la forme

$$H = \int dx \left[\Psi^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 - \mu + V(x) \right) \Psi(x) + \frac{\hbar\bar{g}}{2} \Psi^\dagger(x) \Psi^2(x) \right], \quad (7.1)$$

avec $\hbar\bar{g} \equiv g$. Comme précédemment, on souhaite garder m , μ , $V(x)$ constants et prendre la limite $\hbar \rightarrow 0$. Nous allons voir que pour rester dans le régime d'interaction finie, c'est la constante de couplage \bar{g} et non pas g qu'il convient de fixer.



(a) Paramètres : $\bar{g} = 3.16$, $m = 1$, $\mu = 1.4$, $\omega = 0.12$ et $\hbar = 5.44 \times 10^{-4}$.
(b) Paramètres : $\bar{g} = 15.81$, $m = 1$, $\mu = 5.0$, $\omega = 0.23$ et $\hbar = 7.56 \times 10^{-4}$.

FIGURE 7.1 – Profils de densité dans le potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Le profil $\rho(x)$ de l'équation (7.3) est comparé aux profils exacts obtenus par DMRG. Le deux jeux de paramètres donnent lieu à différentes valeurs du paramètre d'interaction $\gamma(x)$. La constante de couplage \bar{g} est fixée en choisissant une valeur minimale pour $\gamma(0)$, qui se trouve dans ce cas au centre du piège.

7.1.1 Limite thermodynamique

Lorsque l'interaction est finie, il n'existe pas d'expression analytique connue pour la densité, même dans la situation homogène $V(x) = 0$. Cependant, on peut par analyse dimensionnelle lui donner la forme

$$\rho = \frac{\sqrt{2m\mu}}{\pi\hbar} F\left(\bar{g}\sqrt{m/\mu}\right), \quad (7.2)$$

où $F(\cdot)$ est une fonction que l'on peut extraire numériquement de l'Ansatz de Bethe. Sous la forme (7.2), on sait simplement que cette fonction doit satisfaire $F(+\infty) = 1$ pour redonner la densité du gaz de fermions libres dans la limite d'interaction infinie.

Pour passer au cas inhomogène, on raisonne comme à la section 6.1.1, c'est à dire avec la description hydrostatique. La contrainte sur le potentiel chimique est la même qu'à l'équation (6.4), ce qui nous donne

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{2m\mu(x)}}{\pi\hbar} F\left(\bar{g}\sqrt{m/\mu(x)}\right). \quad (7.3)$$

Ainsi, la limite $\hbar \rightarrow 0$ reste une façon naturelle de prendre la limite thermodynamique $N \rightarrow +\infty$ et satisfait automatiquement l'hypothèse de séparation d'échelle. Néanmoins, on sait que l'interaction est décrite par le paramètre adimensionné $\gamma = \frac{mg}{\hbar^2\rho}$; si la constante de couplage g reste fixe, alors l'interaction devient infinie dans la limite $\hbar \rightarrow 0$. On résout ce problème en introduisant une nouvelle constante de couplage \bar{g} telle que $\hbar\bar{g} \equiv g$. Le paramètre d'interaction

est donc donné par

$$\gamma(x) = \frac{m\bar{g}}{\hbar\rho(x)}, \quad (7.4)$$

qui reste fini dans la limite $\hbar \rightarrow 0$.

7.1.2 Paramètre de Luttinger et coordonnées isothermes

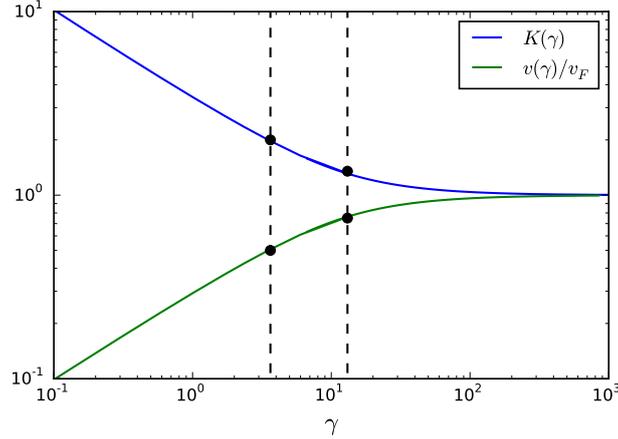


FIGURE 7.2 – Le paramètre de Luttinger K et la vitesse des excitations v (renormalisé par la vitesse de Fermi $v_F = \sqrt{2\mu/m}$) sont des fonctions du paramètre d'interaction γ . Les lignes en pointillé correspondent aux deux jeux de paramètres utilisés pour comparer nos résultats aux simulations DMRG (voir Fig.7.1).

Dans ce chapitre, on suppose à nouveau qu'il existe un seul intervalle $[x_L, x_R]$ pour lequel $\mu(x) = \mu - V(x)$ est positif, sans perte de généralité. Puisque le nombre de particules N dans le piège est toujours fixé, on peut utiliser l'équation (6.8) et montrer que le champ de hauteur satisfait aussi les conditions aux bords de Dirichlet dans le cas avec interaction finie,

$$h(x_L, \tau) = h(x_R, \tau) = 0. \quad (7.5)$$

Le domaine Ω dans lequel vit la théorie est une fois de plus la bande verticale infinie $S = [x_L, x_R] \times \mathbb{R}$. Pour fixer le paramètre de Luttinger K et la métrique g dans ce domaine, on peut s'appuyer sur la solution exacte homogène grâce à la séparation d'échelle.

Imaginons qu'à chaque particule fluide corresponde une seule valeur du paramètre d'interaction γ . Puisque le nombre de particules microscopiques est infiniment grand dans une particule fluide, on peut extraire K et la vitesse des excitations v de l'Ansatz de Bethe. Par analyse dimensionnelle, on sait que $v = v_F f_1(\gamma)$ avec $v_F = \sqrt{2\mu/m}$ la vitesse de Fermi et $f_1(\gamma)$ une fonction de

l'interaction. Comme le modèle de Lieb-Liniger est invariant sous une transformation de Galilée, le paramètre de Luttinger K est simplement donné par $vK = v_F$. Ces paramètres sont représentés dans la figure 7.2. On connaît donc localement la métrique,

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j \\ &= v^2 d\tau^2 + dx^2, \end{aligned} \quad (7.6)$$

et par conséquent, en injectant $\mu(x)$ (6.4) et $\gamma(x)$ (7.4), on connaît K et la métrique g dans tout le domaine.

La bande S est équipée de la métrique courbe $ds^2 = dx^2 + v(x)^2 d\tau^2$, mais on se ramène à une métrique plate avec le jeu de coordonnées isothermes (ξ, τ) ,

$$\xi = \int_{x_L}^x \frac{dr}{v(r)}, \quad (7.7)$$

de telle sorte que la métrique se réécrit

$$ds^2 = e^{2\sigma(x)} (d\tau^2 + d\xi^2) \quad \text{avec} \quad e^{\sigma(x)} = v(x). \quad (7.8)$$

Avec ces différents paramètres en place, on peut appliquer le formalisme du IGFF au gaz de Lieb-Liniger confiné dans un potentiel. Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients non-universels qui apparaissent dans le développement des opérateurs que l'on considère. Nous présenterons le calcul pratique de ces coefficients au cas par cas.

7.2 Corrélations de l'opérateur densité

7.2.1 Développement au deuxième ordre de l'opérateur

Nous avons déjà vu que les opérateurs locaux du IGFF sont la dérivée du champ de hauteur $\partial_x h$ et les opérateurs de vertex mixtes électrique-magnétique $\mathcal{V}_{\alpha,\beta}(x)$. Par construction de la théorie, on sait que le développement de l'opérateur densité doit en premier lieu inclure le profil de densité hydrodynamique et la dérivée du champ de hauteur, qui représente les fluctuations de la densité à l'ordre dominant. On sait aussi que les opérateurs magnétiques correspondent aux processus de création et d'annihilation de particules, donc les opérateurs de vertex qui apparaissent dans le développement doivent avoir une charge magnétique nulle $\beta = 0$. Le développement de l'opérateur de densité locale

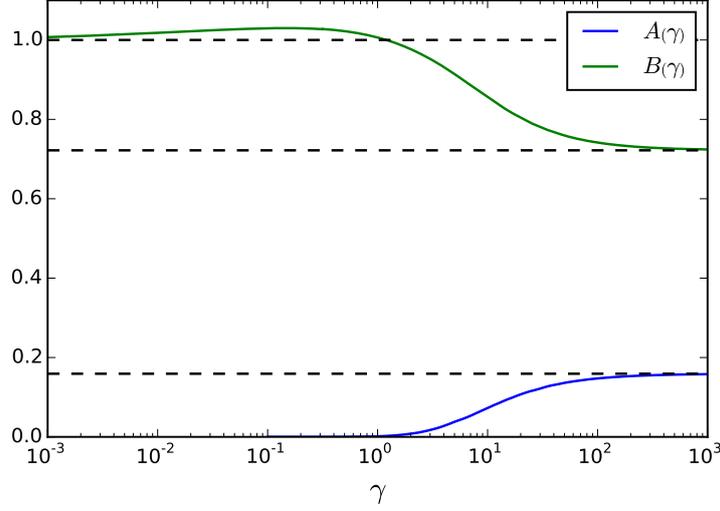


FIGURE 7.3 – Fonctions $A(\gamma)$ et $B(\gamma)$ qui apparaissent dans le développement des opérateurs de densité locale $\hat{\rho}(x)$ et de création $\Psi^\dagger(x)$, calculés via les formules de facteurs de forme de l'Ansatz de Bethe. Les lignes en pointillé correspondent à des asymptotiques connues : $A(\gamma) \rightarrow 1/(2\pi)$ pour $\gamma \gg 1$, $B(\gamma) \rightarrow 1$ pour $\gamma \ll 1$, $B(\gamma) \rightarrow G^2(3/2)/(2\pi)^{\frac{1}{4}} \simeq 0.722$ pour $\gamma \gg 1$, avec $G(\cdot)$ la fonction de Barnes de l'équation (4.4).

prend ainsi la forme

$$\hat{\rho}(x, \tau) = \rho(x) + \frac{1}{2\pi} \partial_x h(x, \tau) + \sum_{p \neq 0} C_{p,0}^{(\hat{\rho})} \mathcal{V}_{p,0}(x, \tau) + \dots, \quad (7.9)$$

où $C_{p,0}^{(\hat{\rho})}$ sont des coefficients que nous devons identifier. Les termes sous-dominants sont ici les dérivées d'ordre supérieur du champ de hauteur h , que nous ne considérons pas ici. En gardant uniquement les termes $p = \pm 1$ dans la somme, on obtient le développement :

$$\hat{\rho}(x, \tau) = \rho(x) + \frac{1}{2\pi} \partial_x h(x, \tau) + C_{1,0}^{(\hat{\rho})} \mathcal{V}_{1,0}(x, \tau) + C_{-1,0}^{(\hat{\rho})} \mathcal{V}_{-1,0}(x, \tau). \quad (7.10)$$

Il reste à identifier les coefficients $C_{1,0}^{(\hat{\rho})}$ et $C_{-1,0}^{(\hat{\rho})}$ et on procède de la manière présentée dans la section 5.4, c'est à dire en calculant les facteurs de formes de l'opérateur densité à partir de la solution de l'Ansatz de Bethe algébrique. En l'occurrence, on calcule le facteur de forme

$$C_{p,0}^{(\hat{\rho})} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{L}{2\pi} \right)^{\Delta_{\mathcal{V}_{p,0}}} \frac{L \langle \mathcal{V}_{p,0} | \hat{\rho}(x, \tau) | 0 \rangle_L}{\sqrt{L \langle 0 | 0 \rangle_L L \langle \mathcal{V}_{p,0} | \mathcal{V}_{p,0} \rangle_L}} \right], \quad (7.11)$$

où $|\mathcal{V}_{p,0}\rangle_L$ est l'état excité de Bethe correspondant aux opérateurs de vertex électriques $\mathcal{V}_{p,0}$ de la théorie des champs. Nous rapportons les formules expli-

cites qui permettent de faire ce calcul dans l'annexe A. En pratique, on a déjà quelques informations sur le coefficient avant même de calculer le facteur de forme. Par exemple, étant donné que la dimension d'échelle de l'opérateur $\mathcal{V}_{\pm 1,0}$ est K , on sait par analyse dimensionnelle que $\left|C_{\pm 1,0}^{(\hat{\rho})}\right| = \rho^{1-K} e^{\pm i 2\pi \rho x} A(\gamma)$, avec ρ la densité locale et $A(\gamma)$ une fonction réelle positive du paramètre d'interaction adimensionné γ . La phase $e^{\pm i 2\pi \rho x}$ est typique de ce développement [160] et correspond à une phase WKB. C'est donc la fonction $A(\gamma)$ que l'on doit extraire du calcul du facteur de forme ; elle est représentée dans la figure 7.3.

Puisque les coefficients $C_{\pm 1,0}^{(\hat{\rho})}$ ne dépendent que des propriétés locales du système, les formules du cas homogène doivent encore être valides dans le cas inhomogène, en remplaçant ρ et γ par $\rho(x)$ et $\gamma(x)$. Alors le développement qui nous intéresse est finalement donné par :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x, \tau) = & \rho(x) + \frac{1}{2\pi} \partial_x h(x, \tau) + e^{i 2\phi_{\text{WKB}}(x)} \rho(x)^{1-K(x)} A(x) \mathcal{V}_{1,0}(x, \tau) \\ & + e^{-i 2\phi_{\text{WKB}}(x)} \rho(x)^{1-K(x)} A(x) \mathcal{V}_{-1,0}(x, \tau). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Pour alléger les notations, on écrit $A(x)$ et $K(x)$ au lieu de $A(\gamma(x))$ et $K(\gamma(x))$. La phase, de type WKB, est défini par

$$\phi_{\text{WKB}}(x) = \int dx \pi \rho(x). \quad (7.13)$$

de sorte que dans le cas homogène où ρ est constant on retrouve la phase $e^{\pm i 2\pi \rho x}$.

Pour récapituler : l'ordre 0 est le profil de densité hydrostatique sur lequel vient s'appuyer la quantification de la théorie. Le premier ordre correspond aux fluctuations de la densité, données par la dérivée du champ de hauteur h . À partir du champ de hauteur, on obtient notamment le propagateur qui permet de construire tous les autres opérateurs de la théorie. C'est le cas de l'opérateur de vertex électrique $\mathcal{V}_{\alpha,0}$ apparaissant au second ordre et qui donne une première correction de taille finie à l'opérateur de densité.

7.2.2 Profil de densité

À partir du développement de l'équation (7.12) on peut en principe calculer toutes les fonctions de corrélation faisant intervenir la densité locale $\hat{\rho}(x)$. En particulier, on peut calculer la première correction de taille finie au profil de densité hydrostatique. En utilisant la formule (5.46), on sait que

$$\langle \mathcal{V}_{\alpha,0}(x, \tau) \rangle = e^{-\sigma(x)K(x)} \langle \mathcal{V}_{\alpha,0}(\xi, \tau) \rangle \quad (7.14)$$

$$= v(x)^{-K(x)} e^{\frac{\alpha^2}{2} G_{[K]}^{\text{D}}(x)}, \quad (7.15)$$

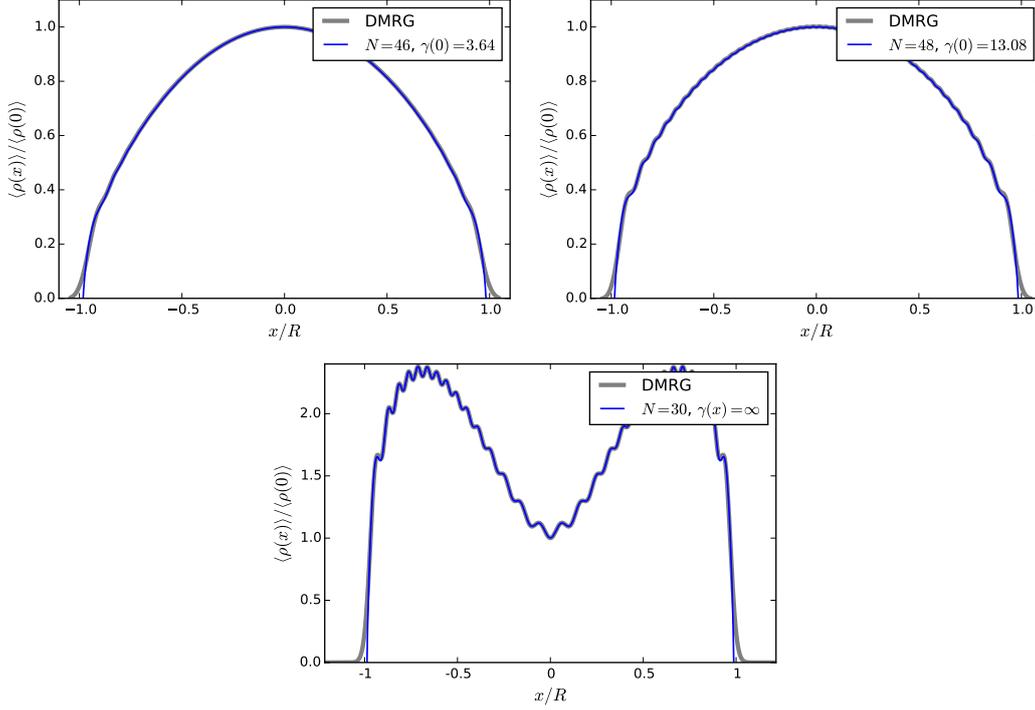


FIGURE 7.4 – Haut : comparaison des profils de densité obtenus par la formule (7.16) avec les simulations DMRG. L'accord est excellent et on voit que le second ordre du développement reproduit parfaitement les oscillations de Friedel. Bas : pour montrer que l'accord reste aussi bon dans le cas d'un potentiel arbitraire, on ajoute la correction de second ordre au profil de densité du gaz de Tonks-Girardeau dans le potentiel en double-puits.

où $x = (\xi, \tau)$. Puisque la fonction à un point du champ de hauteur est nulle, alors $\langle \partial_x h \rangle = 0$ et on obtient le profil de densité suivant :

$$\langle \hat{\rho}(x) \rangle = \rho(x) + 2 \cos [2\phi_{\text{WKB}}(x)] \frac{\rho(x)^{1-K(x)}}{v(x)^{K(x)}} A(x) e^{\frac{1}{2}G_K^D(x)}. \quad (7.16)$$

Dans la figure 7.4, on compare cette formule aux profils exacts obtenus par DMRG. L'accord est excellent quel que soit le paramètre d'interaction $\gamma(x)$. Pour le gaz de Tonks-Girardeau $\gamma \rightarrow +\infty$ dans le potentiel harmonique, on peut même vérifier analytiquement la formule (7.16) à partir des asymptotiques des polynômes d'Hermite lorsque N est grand.

7.2.3 Corrélation densité-densité

Une autre quantité d'intérêt faisant intervenir l'opérateur de densité locale est la fonction de corrélation densité-densité [84]. Avec l'approche du liquide de Luttinger inhomogène on peut très facilement obtenir cette fonction pour

le modèle de Lieb-Liniger dans un potentiel arbitraire. On se focalise sur la partie connexe de la fonction de corrélation, c'est à dire

$$\langle \hat{\rho}(x)\hat{\rho}(x') \rangle_c = \langle \hat{\rho}(x)\hat{\rho}(x') \rangle - \langle \hat{\rho}(x) \rangle \langle \hat{\rho}(x') \rangle. \quad (7.17)$$

En utilisant le développement asymptotique (7.12) et après quelques manipulations élémentaires, on arrive au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \langle \hat{\rho}(x)\hat{\rho}(x') \rangle_c &= -\frac{1}{4\pi^2} [v(x)v(x')]^{-1} \partial_\xi \partial_{\xi'} G_K^D(x, x') \\ &+ \frac{1}{\pi} v(x)^{-1} [\partial_\xi G_{[K]}^D(x, x')] \sin [2\phi_{\text{WKB}}(x')] \frac{\rho(x')^{1-K(x')}}{v(x')^{K(x')}} A(x') e^{\frac{1}{2}G_{[K]}^D(x')} \\ &+ \frac{1}{\pi} v(x')^{-1} [\partial_{\xi'} G_{[K]}^D(x, x')] \sin [2\phi_{\text{WKB}}(x)] \frac{\rho(x)^{1-K(x)}}{v(x)^{K(x)}} A(x) e^{\frac{1}{2}G_{[K]}^D(x)} \\ &+ 2 \left[\left(e^{G_{[K]}^D(x, x')} - 1 \right) \cos [2\phi_{\text{WKB}}(x) + 2\phi_{\text{WKB}}(x')] \right. \\ &\quad \left. + \left(e^{-G_{[K]}^D(x, x')} - 1 \right) \cos [2\phi_{\text{WKB}}(x) - 2\phi_{\text{WKB}}(x')] \right] \\ &\quad \times \frac{\rho(x)^{1-K(x)}}{v(x)^{K(x)}} \frac{\rho(x')^{1-K(x')}}{v(x')^{K(x')}} A(x) A(x') e^{\frac{1}{2}G_{[K]}^D(x) + \frac{1}{2}G_{[K]}^D(x')}, \quad (7.18) \end{aligned}$$

Dans la figure 7.5, on compare la formule (7.18) pour $\tau = \tau' = 0$ aux résultats exacts de DMRG. La fonction de corrélation est tracée en fonction de x pour deux valeurs de x' et deux paramètres d'interaction différents. L'accord est excellent et les oscillations de Friedel sont correctement reproduites.

7.3 Matrice densité à une particule

Finalement, nous allons une fois de plus appliquer notre approche à la matrice densité à une particule $g_1(x, x')$. Nous avons déjà fait plusieurs fois l'identification des opérateurs de création et d'annihilation bosoniques et on sait qu'à l'ordre dominant ils sont donnés par

$$\begin{cases} \Psi^\dagger(x, \tau) &= C_{0,1}^{(\Psi^\dagger)} \mathcal{V}_{0,1}(x, \tau) + \dots \\ \Psi(x, \tau) &= C_{0,-1}^{(\Psi)} \mathcal{V}_{0,-1}(x, \tau) + \dots \end{cases} \quad (7.19)$$

Le coefficient $C_{0,1}^{(\Psi^\dagger)}$ est identifié de la même manière que celui de l'opérateur densité. Les opérateurs de création et d'annihilation ont pour dimension d'échelle $1/2$ et les opérateurs de vertex magnétiques $1/4K$, alors l'amplitude du coefficient doit être de la forme $\left| C_{0,1}^{(\Psi^\dagger)} \right| = \rho^{\frac{2K-1}{4K}} B(\gamma)$. La fonction $B(\gamma)$ est

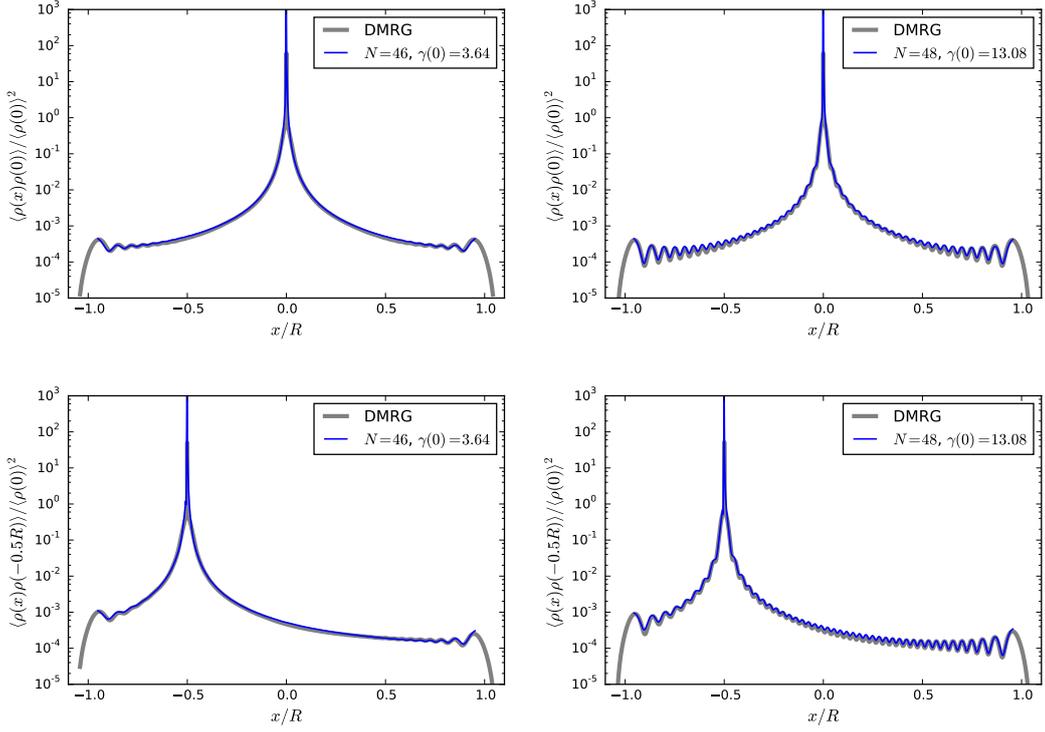


FIGURE 7.5 – Partie connexe de la fonction de corrélation densité-densité du gaz de Lieb-Liniger dans un potentiel harmonique. La formule (7.18) est comparée aux résultats obtenus par la simulation DMRG.

représentée dans la figure 7.3 et est extraite du facteur de forme

$$C_{0,1}^{(\Psi^\dagger)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{L}{2\pi} \right)^{\Delta_{\mathcal{V}_{0,1}}} \frac{L \langle \mathcal{V}_{0,1} | \Psi^\dagger(x, \tau) | 0 \rangle_L}{\sqrt{L \langle 0 | 0 \rangle_L L \langle \mathcal{V}_{0,1} | \mathcal{V}_{0,1} \rangle_L}} \right], \quad (7.20)$$

où $|\mathcal{V}_{0,1}\rangle_L$ est l'état excité de Bethe correspondant à l'opérateur de vertex magnétique $\mathcal{V}_{0,1}$. Dans une situation statique, la phase de $C_{0,1}^{(\Psi^\dagger)}(x)$ ne dépend pas de la position. On travaille alors avec les opérateurs

$$\begin{cases} \Psi(x, \tau) &= \rho(x)^{\frac{2K(x)-1}{4K(x)}} B(x) \mathcal{V}_{0,1}(x, \tau), \\ \Psi^\dagger(x, \tau) &= \rho(x)^{\frac{2K(x)-1}{4K(x)}} B(x) \mathcal{V}_{0,-1}(x, \tau). \end{cases}, \quad (7.21)$$

où on écrit $B(x)$ au lieu $B(\gamma(x))$.

Le calcul est direct en utilisant la formule (5.39) :

$$g_1(x, x') = \frac{\rho(x)^{\frac{2K(x)-1}{4K(x)}}}{v(x)^{\frac{1}{4K(x)}}} \frac{\rho(x')^{\frac{2K(x')-1}{4K(x')}}}{v(x')^{\frac{1}{4K(x')}}} B(x) B(x') \frac{e^{\frac{1}{2} G_{[1/4K]}^N(x) + \frac{1}{2} G_{[1/4K]}^N(x')}}{e^{G_{[1/4K]}^N(x, x')}}}, \quad (7.22)$$

Dans la figure 7.6, on vérifie ce résultat pour $\tau = \tau' = 0$ en comparant aux résultats de DMRG. Bien que l'on se limite à l'ordre dominant, l'accord est

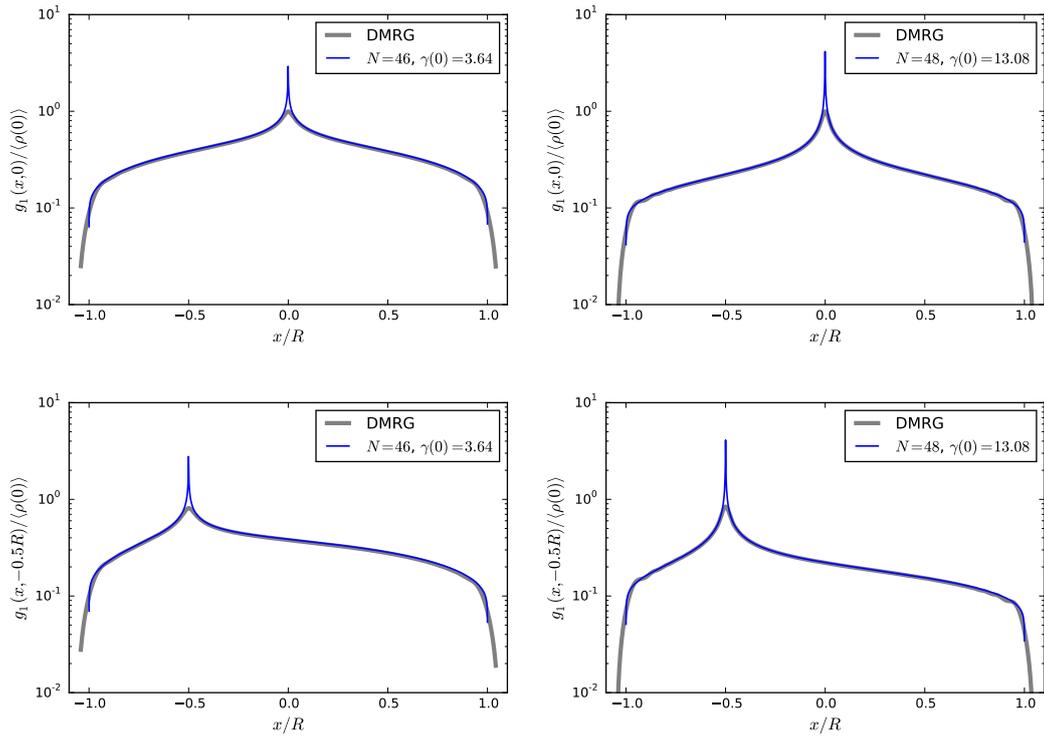


FIGURE 7.6 – Matrice densité à une particule du gaz de Lieb-Liniger dans un potentiel harmonique. Comparaison de la formule (7.22) aux résultats exacts de DMRG, pour deux valeurs du paramètre d'interaction $\gamma(x)$.

déjà excellent.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

En guise de conclusion, nous commençons par résumer succinctement ce qui est présenté dans ce manuscrit. L'unique hypothèse sur laquelle sont basés nos résultats est la séparation des échelles, dont nous proposons une justification quantitative dans la suite. Nous achèverons en mentionnant brièvement quelques problèmes ouverts.

8.1 Résumé du manuscrit

Dans cette thèse nous avons généralisé la théorie effective du liquide de Luttinger aux cas des systèmes quantiques inhomogènes. Nous avons dans une première partie introduit les spécificités des systèmes critiques à une dimension. Si leur étude théorique remonte aux origines de la théorie quantique, elle est aujourd'hui grandement motivée par la réalisation expérimentale de gaz d'atomes ultra-froids confinés dans une seule direction de l'espace. Pour décrire fidèlement ces expériences, il convient de tenir compte des effets du potentiel de piégeage du gaz, qui induit naturellement une inhomogénéité dans le profil de densité des atomes. En règle générale, cette inhomogénéité brise l'intégrabilité, c'est à dire que l'on ne peut plus obtenir de solutions exactes via l'Ansatz de Bethe. Pour caractériser les systèmes unidimensionnels inhomogènes et être en mesure de calculer des corrélations, il s'agit de construire une théorie des champs effective.

Nous avons ici développé la théorie du liquide de Luttinger dans le cas où le paramètre $K(x)$ dépend de la position. L'action correspondante est celle du champ libre gaussien inhomogène. Il y a trois types d'opérateurs qui apparaissent dans cette théorie : les dérivées du champ de hauteur $h(x)$, les opérateurs de vertex électriques $\mathcal{V}_{\alpha,0}(x)$ et les opérateurs de vertex magnétiques $\mathcal{V}_{0,\beta}(x)$. Comme il s'agit d'un champ libre gaussien, le calcul des fonctions de corrélation repose uniquement sur les fonctions à deux points. En l'occurrence,

il s'agit des propagateurs $G_{[K]}^D(x)$ et de son dual $G_{[1/4K]}^N(x)$. En analogie avec l'électrostatique à deux dimensions, ces deux propagateurs correspondent aux fonctions de Green d'un opérateur de Poisson généralisé décrivant un milieu diélectrique de constante $\epsilon(x)$ inhomogène. Dans certains cas, tel que celui du gaz de Tonks-Girardeau, la fonction de Green peut être obtenue explicitement. Mais en général, il faut l'évaluer numériquement, ce qui peut se faire simplement par un calcul en éléments finis grâce à l'analogie électrostatique.

L'approche du liquide de Luttinger inhomogène telle que formulée dans le chapitre 5 a ensuite été testée sur le modèle de Lieb-Liniger. Dans la limite d'interaction infinie, on a obtenu la matrice densité à une particule dans un potentiel arbitraire, en excellent accord avec la simulation par DMRG. Sous cette forme, la généralisation à n particules est directe. La matrice densité à une particule a également été calculée pour le problème dynamique du potentiel harmonique dépendant du temps. Enfin, nous nous sommes intéressés au régime d'interaction finie à l'équilibre. Ici, nous avons calculé les corrélations de l'opérateur densité et la matrice densité à une particule, qui sont aussi en excellent accord avec la simulation par DMRG. Tous ces résultats reposent sur l'hypothèse de séparation des échelles, pour laquelle nous proposons une justification dans la section suivante.

8.2 Résultats préliminaires : corrections au profil de densité

Qualitativement, la séparation des échelles implique que la variation de la densité soit faible devant la distance interatomique. Dans la limite thermodynamique telle que nous la prenons, $\hbar \rightarrow 0$, l'hypothèse est valide sur tout le profil de densité. Pour tester quantitativement sa validité, on peut imaginer une situation mettant en défaut la séparation des échelles. Prenons par exemple le modèle de Lieb-Liniger de taille infinie $L \rightarrow \infty$, mais de densité homogène $\rho = N/L$ constante. Maintenant, on perturbe localement le système avec un potentiel $\delta V(x)$ et on calcule la réponse de la densité $\langle \hat{\rho}(x) \rangle$ dans l'état fondamental,

$$\delta \langle \hat{\rho}(x) \rangle = - \int dx' \chi(x, x') \delta V(x'),$$

où

$$\chi(x, x') = 2 \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | \hat{\rho}(x) | n \rangle \langle n | \hat{\rho}(x') | 0 \rangle}{E_n - E_0}$$

et n représente les différents états excités du système. Dans la limite $L \rightarrow \infty$, le système est globalement invariant par translation et on peut travailler dans

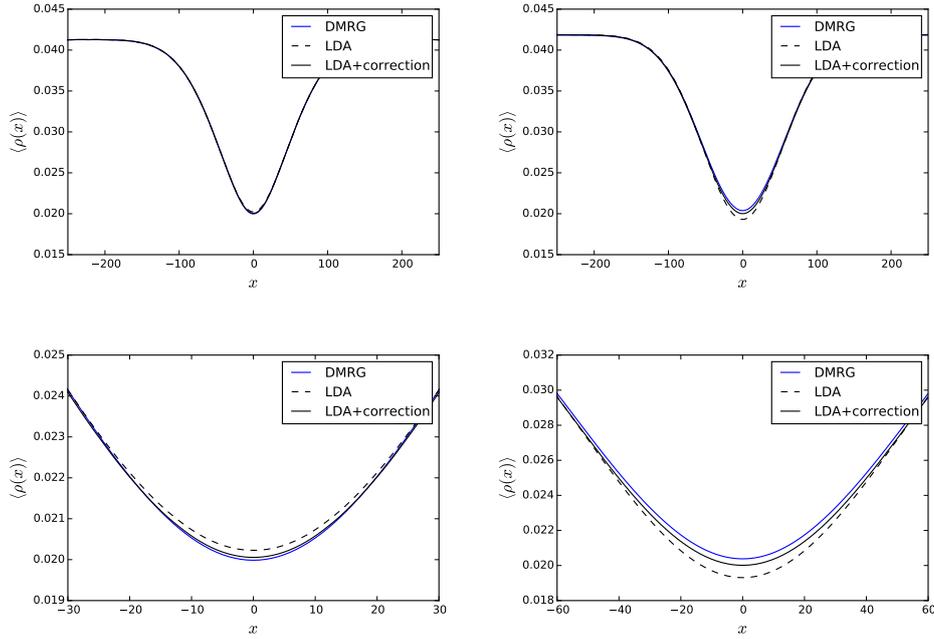


FIGURE 8.1 – À gauche : écart du profil hydrodynamique à la simulation DMRG dans le gaz de Tonks-Girardeau. L'écart est faible mais est significativement corrigé en tenant compte du terme $\chi''(0)$. À droite : idem pour le modèle de Lieb-Liniger avec $\gamma \sim 4$. L'écart reste faible mais est également corrigé en tenant compte du terme $\chi''(0)$

l'espace des impulsions q après une transformée de Fourier. La réponse de la densité s'écrit alors

$$\delta\rho_q = -\chi(q) \delta V_q.$$

Sous cette forme, la fonction de réponse $\chi(q)$ peut se calculer grâce aux facteurs de forme de l'Ansatz de Bethe algébrique,

$$\chi(q) = \frac{2}{L} \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle 0 | \rho_q | n \rangle|^2}{E_n - E_0}.$$

Comme on s'intéresse aux excitations de basse énergie, $q \sim 0$, on cherche à écrire $\chi(q)$ sous la forme d'un développement de Taylor. Par symétrie, $\chi(q) = \chi(-q)$, donc le développement doit être donné par

$$\chi(q) = \chi(0) + \frac{1}{2} q^2 \chi''(0) + \dots$$

avec $\chi''(0) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial q^2} |_{q=0}$. On peut alors montrer que la réponse de la densité est

$$\delta \langle \hat{\rho}(x) \rangle = \rho(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \chi''(0),$$

avec $\rho(x)$ le profil de densité hydrodynamique.

Dans la figure 8.1, on compare le profil de densité hydrodynamique à la simulation DMRG. On voit que l'écart reste petit même dans le cas où l'hypothèse de séparation des échelles est mise en défaut. En outre, cette approche permet de corriger significativement l'écart. Ces résultats devraient faire l'objet d'un prochain article.

8.3 Quelques problèmes ouverts

Parmi les autres applications possibles du liquide de Luttinger inhomogène, la première serait naturellement de traiter le problème dynamique du modèle de Lieb-Liniger avec interaction finie dans un piège dépendant du temps. Le formalisme que nous avons présenté ici doit s'appliquer directement pour ce problème, cependant son traitement serait essentiellement numérique. Dans ce cas, les équations hydrodynamiques n'ont pas de solution analytique et nécessitent d'être résolues numériquement, et résoudre les équations d'Euler ne se limite pas à une discrétisation triviale. À partir de la solution hydrodynamique, il faut calculer la fonction de Green et son dual pour tout temps. Cela requiert des méthodes numériques plus avancées telle que la méthode des volumes finis. Une implémentation de ces deux algorithmes permet en principe d'obtenir efficacement le profil de densité et les propagateurs qui interviennent dans notre formalisme.

Comme nous l'avons mentionné en introduction, les expériences d'atomes ultra-froids ne se déroulent jamais à température strictement nulle. Une extension du liquide de Luttinger inhomogène envisageable est de tenir compte des effets de température finie. À l'équilibre, l'approche standard est de compacifier la direction du temps imaginaire. Cette technique ne permet cependant pas de décrire le comportement des particules aux bords du piège et n'est pas suffisante. Des possibilités pourraient provenir d'autres travaux sur les gaz unidimensionnels traitant des effets de température finie [161–167].

Traitant à la fois la dynamique hors d'équilibre et les effets de température finie des systèmes intégrables, la théorie de l'hydrodynamique généralisée (GHD) semble s'imposer depuis sa première occurrence en 2016 [168, 169]. Ici, nous avons développé notre approche en reconstruisant les fluctuations quantiques sur une description hydrodynamique classique. Cette hydrodynamique classique n'est en réalité que le cas le plus simple de GHD. Le problème ouvert le plus intéressant est alors d'étudier comment la théorie du liquide de Luttinger peut se généraliser dans ce nouveau cadre.

Annexe A

Calculs des facteurs de forme

Dans la section 5.4, nous avons vu que les coefficients non-universels qui apparaissent dans le développement asymptotique des opérateurs microscopiques peuvent être obtenus à partir des facteurs de forme de l'Ansatz de Bethe algébrique, en faisant appel à l'invariance conforme. On présente dans cette annexe les formules que nous avons utilisées pour calculer les facteurs de forme de l'opérateur densité et de la matrice densité à une particule.

La première étape est de résoudre numériquement les équations de Bethe (2.7),

$$\lambda_j L + 2 \sum_{j=1}^N \arctan \left(\frac{\lambda_j - \lambda_l}{c} \right) = 2\pi I_j, \quad (\text{A.1})$$

avec les configurations de demi-entiers de Bethe $\{I\}$ des états excités correspondant aux opérateurs de la théorie des champs qui nous intéressent. Pour une discussion plus détaillée de la correspondance entre les états propres de Bethe et ceux de la théorie des champs, on pourra se référer au premier chapitre du livre de Korepin et al. [69]. Avec l'approche de l'Ansatz de Bethe algébrique, les états sont normalisés par :

$$|\{\lambda\}|^2 = c^N \prod_{j \neq k}^N \frac{\lambda_j - \lambda_k + ic}{\lambda_j - \lambda_k} \det_N \mathcal{G}(\{\lambda\}) \quad (\text{A.2})$$

avec la matrice de Gaudin,

$$\mathcal{G}_{jk}(\{\lambda\}) = \delta_{jk} \left(L + \sum_l^N \kappa(\lambda_j - \lambda_l) \right) - \kappa(\lambda_j - \lambda_k), \quad (\text{A.3})$$

où $\kappa(\lambda) = \frac{2c}{\lambda^2 + c^2}$.

A.1 Facteur de forme de l'opérateur densité

Pour le facteur de forme de l'opérateur densité, nous avons utilisé les formules telles qu'elles sont présentées dans [170] :

$$\begin{aligned} & \langle \{\mu\} | \hat{\rho}(0) | \{\lambda\} \rangle \\ &= \left(\sum_j^N (\mu_j - \lambda_j) \right) \prod_k^N (V_k^+ - V_k^-) \prod_{l,m}^N \left(\frac{\lambda_l - \lambda_m + ic}{\mu_l - \lambda_m} \right) \frac{\det_N(U)}{V_p^+ - V_p^-}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

avec

$$U_{jk} = i \left(\frac{\mu_j - \lambda_j}{V_j^+ - V_j^-} \right) \prod_{l \neq j}^N \left(\frac{\mu_l - \lambda_j}{\lambda_l - \lambda_j} \right) [\kappa(\lambda_j - \lambda_k) - \kappa(\lambda_p - \lambda_k)] + \delta_{jk}, \quad (\text{A.5})$$

et

$$V_j^\pm = \prod_k^N \left(\frac{\mu_k - \lambda_j \pm ic}{\lambda_k - \lambda_j \pm ic} \right) \quad (\text{A.6})$$

Ici, $\{\mu\}$ et $\{\lambda\}$ sont des états de Bethe, et λ_p est un nombre arbitraire.

A.2 Facteur de forme de la matrice densité à une particule

Pour le facteur de forme de la matrice densité à une particule, nous avons utilisé les formules telles qu'elles sont présentées dans [85] :

$$\langle \{\mu\} | g_1(x, 0) | \{\lambda\} \rangle = c^{N-\frac{1}{2}} \frac{\prod_{j \neq k}^N (\lambda_j - \lambda_k + ic)^2}{\prod_l^N \prod_m^{N-1} (\lambda_l - \mu_m)^2} \left(\det_{N-1}(U) \right)^2, \quad (\text{A.7})$$

avec

$$U_{jk} = \frac{\prod_{l \neq j}^{N-1} (\mu_l - \lambda_j)}{\prod_{m \neq j}^N (\lambda_m - \lambda_j)} [\kappa(\lambda_j - \lambda_k) - \kappa(\lambda_N - \lambda_k)] - i\delta_{jk}(V_j^+ - V_j^-), \quad (\text{A.8})$$

et

$$V_j^\pm = \frac{\prod_k^{N-1} (\mu_k - \lambda_j \pm ic)}{\prod_l^N (\lambda_l - \lambda_j \pm ic)}. \quad (\text{A.9})$$

Annexe B

Électrostatique sur le réseau bidimensionnel

Dans cette annexe, on explicite l'analogie électrostatique qui nous a permis de résoudre le champ libre gaussien inhomogène dans la section 5.3. Pour cela, on construit un réseau bidimensionnel représentant un milieu diélectrique inhomogène ; c'est cette construction que nous avons utilisée pour évaluer numériquement les fonctions de Green $G_{[K]}^D$ et $G_{[1/4K]}^N$ dans le chapitre 7 consacré aux corrélations dans le gas de Lieb-Liniger à l'équilibre.

Pour commencer, on considère un réseau rectangulaire dont les nœuds x sont occupés par une version discrète du champ de hauteur h_x , et où le paramètre de Luttinger $K_{\langle x, x' \rangle}$ vit sur les arêtes. En analogie avec l'électrostatique, le champ h peut-être vu comme un potentiel électrique et K comme une résistance sur chaque arête. Le milieu diélectrique inhomogène que l'on se propose d'étudier est alors un réseau de résistances tel qu'illustré sur la Fig. B.1.

B.1 Champ électrique dans le milieu inhomogène

le champ électrique E vivant sur l'arête $\langle xx' \rangle$ entre les deux nœuds x et x' est défini par

$$E_{\langle x, x' \rangle} = \frac{h_x - h_{x'}}{|x - x'|}.$$

Pour alléger les notations dans la suite, on choisit un pas de réseau de sorte que $|x - x'| = 1$. La loi de Gauss au nœud x est donc donnée par

$$\nabla \cdot \frac{1}{K} \nabla h = \sum_{\substack{x' \text{ neighbor} \\ \text{of } x}} \frac{1}{K_{\langle x, x' \rangle}} (h_x - h_{x'}) = 0 \quad (\text{B.1})$$

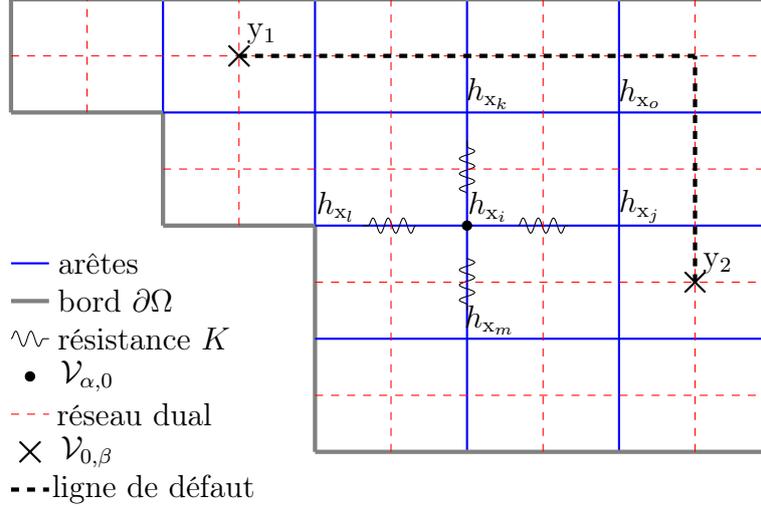


FIGURE B.1 – Électrostatique classique dans un milieu diélectrique inhomogène discret.

en l'absence de charge électrique. Si l'on ajoute une charge électrique α en x , alors le résultat n'est pas nul mais proportionnel à α ; il s'agit de la version discrète de l'équation (5.24).

Lorsqu'aucun flux de champ magnétique ne traverse les plaquettes du réseau, le rotationnel du champ E s'annule. Avec les nœuds x_i , x_j , x_o et x_k de la Fig. B.1, la version discrète de la loi de Faraday de l'équation (5.24) est donnée par

$$(h_{x_i} - h_{x_j}) + (h_{x_j} - h_{x_o}) + (h_{x_o} - h_{x_k}) + (h_{x_k} - h_{x_i}) = 0.$$

Pour conclure l'étude du champ électrique sur le réseau inhomogène, on sait que les conditions au bord de Dirichlet imposent que le potentiel électrostatique s'annule $h_x = 0$ pour $x \in \partial\Omega$. En terme du champ électrique, cela implique que la composante tangentielle du champ électrique s'annule le long de $\partial\Omega$,

$$E_{\parallel} = 0, \tag{B.2}$$

ce qui correspond à dire que le bord du domaine Ω est composé de fils conducteurs parfaits.

B.2 Flux de champs magnétiques et dualité électrique/magnétique

imaginons maintenant que deux plaquettes sont traversées en leur centre y_1 et y_2 par des flux de champs magnétiques. Ces flux peuvent être vus comme

des défauts topologiques autour desquels le potentiel électrostatique h s'accroît de $\pm 2\pi\beta$. Pour préserver les conditions au bord de Dirichlet, on doit satisfaire la condition de neutralité (5.28) et insérer des défauts avec des charges magnétiques opposées $\pm\beta$. Sur la Fig. B.1, ils sont reliés par une ligne de défaut : lorsque le champ h franchit cette ligne, il augmente de $2\pi\beta$. Comme précédemment, on peut faire les calculs sur le champ discret h_x , et en l'absence de charge électrique on voit que ces calculs correspondent aux versions discrètes des Eqs. (5.30) :

$$\begin{cases} \left(\nabla \cdot \frac{1}{K} E \right)_x = 0 & \text{on each site } x \\ (\nabla \times E)_y = 2\pi\beta_y & \text{on each plaquette } y, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

où la charge magnétique β_y est $+\beta$ en $y = y_1$, $-\beta$ en $y = y_2$, et 0 partout ailleurs.

Nous avons nommé les entiers β charges magnétiques en vertu de la dualité électrique/magnétique. Sur le réseau bidimensionnel, le champ dual \tilde{E} est donné par une rotation de $\pi/2$ du champ électrique E et le changement d'échelle $1/(2K)$,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Ce champ dual \tilde{E} vit sur les arêtes du réseau, mais on peut aussi le voir comme le gradient d'un champ de hauteur dual \tilde{h} , qui vit sur les nœuds du réseau dual représenté sur la Fig. B.1. Alors, pour une charge magnétique β_y en y , la loi de Gauss est \tilde{E} , $\nabla \cdot 4K\nabla\tilde{h} = \nabla \cdot 4K\tilde{E} = 4\pi\beta_y$. Enfin, comme $\tilde{E}_\perp \propto E_\parallel$, le champ dual \tilde{E} satisfait des conditions au bord de Neumann si E satisfait des conditions au bord de Dirichlet ($E_\parallel = 0$).

B.3 Potentiel mixte électrique/magnétique

pour finir, on peut aussi reconstruire le potentiel mixte électrique/magnétique $F_{x,y}$ sur le réseau bidimensionnel. Il s'agit du potentiel ressenti par une charge électrique en x en la présence d'une charge magnétique en y , sur le réseau dual. On fixe une charge magnétique en y , d'où part alors une ligne de défaut qui traverse le bord du réseau, voir Fig. B.2. Le champ de hauteur h_x a une discontinuité de 2π le long de cette ligne, c'est à dire que le gradient discret de h le long d'une arête $\langle x, x' \rangle$, définit normalement par $(\nabla h)_{\langle xx' \rangle} = h_x - h_{x'}$, est maintenant remplacé par $(\nabla h)_{\langle xx' \rangle}^{(d)} = \pm 2\pi + h_x - h_{x'}$ sur toutes les arêtes qui coupe cette ligne de défaut. (Le signe \pm est fixé par l'orientation relative de l'arête par rapport à la ligne). Il reste à choisir une fonction f_x qui vit sur les

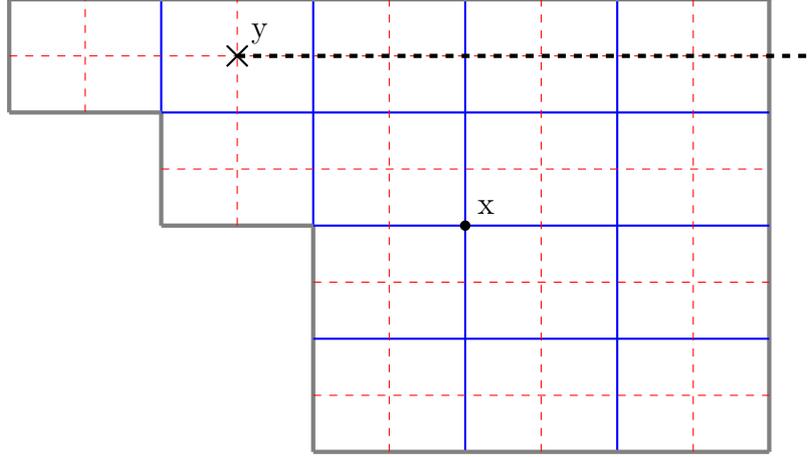


FIGURE B.2 – Configuration de charges électrique et magnétique utilisée pour définir le potentiel mixte $F_{x,y}$. Lorsque x franchit la ligne de défaut qui part de y , $F_{x,y}$ augmente de $\pm 2\pi$.

nœuds de $\partial\Omega$, et qui ont la même discontinuité de 2π là où la ligne de défaut franchit le bord. Le potentiel mixte $F_{x,y}$ correspond alors au champ de hauteur h_x qui satisfait cette discontinuité et les conditions au bord de Dirichlet, $h_x = f_x$. Le potentiel discret $F_{x,y}$ est alors défini par les contraintes

$$\begin{cases} \nabla_x \cdot \frac{1}{K} \nabla_x F_{x_i, y_i} = 0, \\ F_{x,y} = f_x \text{ if } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

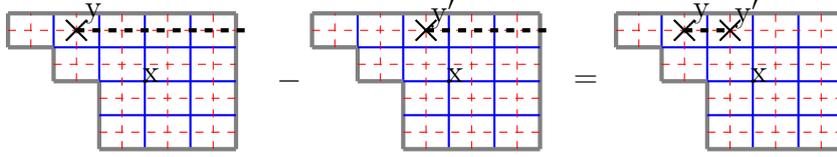
qui sont une version discrète des Eqs. (5.42).

Comme dans la section 5.3, plutôt que de voir $F_{x,y}$ comme une fonction de x avec y fixé, on peut le voir comme une fonction de y satisfaisant les contraintes dual des Eqs. (B.5),

$$\begin{cases} \nabla_y \cdot K \nabla_y F_{x,y} = 0, \\ (\nabla_y F_{x,y})_{\perp} = (\nabla f_y)_{\parallel} \text{ if } y \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

qui sont cette fois une version discrète des Eqs. (5.44). Pour s'en convaincre, on peut montrer simplement que la première équation dans (B.6) est bien dual de la première dans (B.5). Premièrement, on note que pour deux plaquettes y et y' voisines, le gradient discret $F_{x,y} - F_{x,y'}$ représente le champ électrique créé par une ligne de défaut vivant sur l'arête dual $\langle y, y' \rangle$, vu depuis x . On

représente ceci schématiquement par :



Alors l'équation discrète $\nabla_y \cdot K \nabla_y F_{x,y}$ est la somme de quatre termes qui correspondent au champ créé par quatre lignes de défauts autour de y :

$$\nabla_y \cdot K \nabla_y F_{x,y} =$$

Maintenant, si l'on identifie $Q_x := \nabla_y \cdot K \nabla_y F_{x,y}$, on voit que Q_x satisfait $\nabla_x \cdot \frac{1}{K} \nabla_x Q = 0$ pour tout $x \in \Omega$. C'est évident pour les nœuds suffisamment éloignés de la plaquette y puisque $F_{x,y}$ satisfait lui-même cette équation. En revanche, lorsque x est un nœud qui forme un des quatre coins de la plaquette y , il faut tenir compte des discontinuités de $\pm 2\pi$. En faisant explicitement le calcul avec les quatre termes de l'opérateur discret $\nabla_x \cdot \frac{1}{K} \nabla_x$, on s'aperçoit que deux d'entre eux coupent une ligne de défaut :

$$\nabla_x \cdot \frac{1}{K} \nabla_x Q_x =$$

$$= 0.$$

Cependant, les discontinuités de $\pm 2\pi$ se compensent et la relation $\nabla_x \cdot \frac{1}{K} \nabla_x Q_x = 0$ s'avère être correcte dans tous les cas. En outre, puisque par construction $Q_x = 0$ pour $x \in \partial\Omega$, alors Q_x s'annule partout, donc $\nabla_y \cdot K \nabla_y F_{x,y} = 0$ comme annoncé dans l'Eq (B.6).

Bibliographie

- [1] Y. Brun and J. Dubail, “One-particle density matrix of trapped one-dimensional impenetrable bosons from conformal invariance,” *SciPost Phys.*, vol. 2, p. 012, 2017.
- [2] Y. Brun and J. Dubail, “The inhomogeneous gaussian free field, with application to ground state correlations of trapped 1d bose gases,” *SciPost Physics*, vol. 4, no. 6, p. 037, 2018.
- [3] P. Ruggiero, Y. Brun, and J. Dubail, “Conformal field theory on top of a breathing one-dimensional gas of hard core bosons,” *SciPost Phys.*, vol. 6, p. 51, 2019.
- [4] H. Poincaré, “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique,” *Acta mathematica*, vol. 13, no. 1, pp. A3–A270, 1890.
- [5] I. Manin Yu, “Vychislimoe i nevychislimoe (computable and noncomputable).”
- [6] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” *International journal of theoretical physics*, vol. 21, no. 6, pp. 467–488, 1982.
- [7] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbene, “Quantum simulations with ultracold quantum gases,” *Nature Physics*, vol. 8, no. 4, p. 267, 2012.
- [8] D. Pines, *Theory of Quantum Liquids : Normal Fermi Liquids*. CRC Press, 2018.
- [9] D. Sénéchal, “An introduction to bosonization,” *Theoretical Methods for Strongly Correlated Electrons*, pp. 139–186, 2004.
- [10] F. Haldane, “Effective harmonic-fluid approach to low-energy properties of one-dimensional quantum fluids,” *Physical Review Letters*, vol. 47, no. 25, p. 1840, 1981.
- [11] F. Haldane, “Demonstration of the luttinger liquid character of bethe-ansatz-soluble models of 1-d quantum fluids,” *Physics Letters A*, vol. 81, no. 2-3, pp. 153–155, 1981.
- [12] F. Haldane, “luttinger liquid theory’ of one-dimensional quantum fluids. i. properties of the luttinger model and their extension to the general

- 1d interacting spinless fermi gas,” *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. 14, no. 19, p. 2585, 1981.
- [13] A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen gases,” *SB Preuss. Akad. Wiss. phys.-math. Klasse*, 1924.
- [14] N. D. Mermin and H. Wagner, “Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic heisenberg models,” *Physical Review Letters*, vol. 17, no. 22, p. 1133, 1966.
- [15] P. C. Hohenberg, “Existence of long-range order in one and two dimensions,” *Physical Review*, vol. 158, no. 2, p. 383, 1967.
- [16] S. Coleman, “There are no goldstone bosons in two dimensions,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 31, no. 4, pp. 259–264, 1973.
- [17] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor,” *science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995.
- [18] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle, “Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms,” *Physical review letters*, vol. 75, no. 22, p. 3969, 1995.
- [19] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms,” *Nature*, vol. 415, Jan 2002.
- [20] L.-M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin, “Controlling spin exchange interactions of ultracold atoms in optical lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 91, p. 090402, Aug 2003.
- [21] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, “Observation of a one-dimensional tonks-girardeau gas,” *Science*, vol. 305, no. 5687, pp. 1125–1128, 2004.
- [22] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl, and T. Esslinger, “Transition from a strongly interacting 1d superfluid to a mott insulator,” *Physical review letters*, vol. 92, no. 13, p. 130403, 2004.
- [23] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch, and I. Bloch, “Tonks–girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice,” *Nature*, vol. 429, no. 6989, pp. 277–281, 2004.
- [24] A. Van Amerongen, J. Van Es, P. Wicke, K. Kheruntsyan, and N. Van Druten, “Yang-yang thermodynamics on an atom chip,” *Physical review letters*, vol. 100, no. 9, p. 090402, 2008.

- [25] S. Whitlock, P. Wicke, and N. J. van Druten, “CLEO/europe and eqec 2011 conference digest,” *CLEO/Europe and EQEC 2011 Conference Digest*, p. EC11, 2011.
- [26] T. Jacqmin, J. Armijo, T. Berrada, K. V. Kheruntsyan, and I. Bouchoule, “Sub-poissonian fluctuations in a 1d bose gas : From the quantum quasicondensate to the strongly interacting regime,” *Physical review letters*, vol. 106, no. 23, p. 230405, 2011.
- [27] A. Vogler, R. Labouvie, F. Stubenrauch, G. Barontini, V. Guarrera, and H. Ott, “Thermodynamics of strongly correlated one-dimensional bose gases,” *Physical Review A*, vol. 88, no. 3, p. 031603, 2013.
- [28] G. Pagano, M. Mancini, G. Cappellini, P. Lombardi, F. Schäfer, H. Hu, X.-J. Liu, J. Catani, C. Sias, M. Inguscio, *et al.*, “A one-dimensional liquid of fermions with tunable spin,” *Nature Physics*, vol. 10, no. 3, pp. 198–201, 2014.
- [29] B. Fang, G. Carleo, A. Johnson, and I. Bouchoule, “Quench-induced breathing mode of one-dimensional bose gases,” *Physical review letters*, vol. 113, no. 3, p. 035301, 2014.
- [30] B. Fang, A. Johnson, T. Roscilde, and I. Bouchoule, “Momentum-space correlations of a one-dimensional bose gas,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 5, p. 050402, 2016.
- [31] R. Toskovic, R. van den Berg, A. Spinelli, I. S. Eliens, B. van den Toorn, B. Bryant, J.-S. Caux, and A. F. Otte, “Atomic spin-chain realization of a model for quantum criticality,” *Nature Physics*, vol. 12, Apr 2016.
- [32] M. Schemmer, A. Johnson, and I. Bouchoule, “Monitoring squeezed collective modes of a one-dimensional bose gas after an interaction quench using density-ripple analysis,” *Physical Review A*, vol. 98, no. 4, p. 043604, 2018.
- [33] M. Olshanii and V. Dunjko, “Short-distance correlation properties of the lieb-liniger system and momentum distributions of trapped one-dimensional atomic gases,” *Physical review letters*, vol. 91, no. 9, p. 090401, 2003.
- [34] E. H. Lieb and W. Liniger, “Exact analysis of an interacting bose gas. i. the general solution and the ground state,” *Physical Review*, vol. 130, no. 4, p. 1605, 1963.
- [35] E. H. Lieb, “Exact analysis of an interacting bose gas. ii. the excitation spectrum,” *Phys. Rev.*, vol. 130, pp. 1616–1624, May 1963.
- [36] R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, and C. Henkel, “Microscopic atom optics : From wires to an atom chip,” *Advances in Atomic Molecular and Optical Physics*, vol. 48, pp. 263–356, 2002.

- [37] J. Fortágh, S. Kraft, A. Günther, C. Trüch, P. Wicke, and C. Zimmermann, “Perspectives of ultracold atoms trapped in magnetic micro potentials,” *Optics communications*, vol. 243, no. 1-6, pp. 45–56, 2004.
- [38] I. Bouchoule, N. van Druten, and C. Westbrook, “Atom chips and one-dimensional bose gases,” *Atom Chips*, pp. 331–363, 2011.
- [39] V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii, “Bosons in cigar-shaped traps : Thomas-fermi regime, tonks-girardeau regime, and in between,” *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 24, p. 5413, 2001.
- [40] D. Gangardt and G. Shlyapnikov, “Stability and phase coherence of trapped 1d bose gases,” *Physical review letters*, vol. 90, no. 1, p. 010401, 2003.
- [41] P. Forrester, N. Frankel, T. Garoni, and N. Witte, “Finite one-dimensional impenetrable bose systems : Occupation numbers,” *Physical Review A*, vol. 67, no. 4, p. 043607, 2003.
- [42] D. M. Gangardt, “Universal correlations of trapped one-dimensional impenetrable bosons,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 37, no. 40, p. 9335, 2004.
- [43] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, “A quantum newton’s cradle,” *Nature*, vol. 440, no. 7086, p. 900, 2006.
- [44] D. L. Maslov and M. Stone, “Landauer conductance of luttinger liquids with leads,” *Physical Review B*, vol. 52, no. 8, p. R5539, 1995.
- [45] I. Safi and H. Schulz, “Transport in an inhomogeneous interacting one-dimensional system,” *Physical Review B*, vol. 52, no. 24, p. R17040, 1995.
- [46] R. Fazio, F. Hekking, and D. Khmel'nitskii, “Anomalous thermal transport in quantum wires,” *Physical review letters*, vol. 80, no. 25, p. 5611, 1998.
- [47] T. K. Ghosh, “Quantized hydrodynamic theory of bosons in quasi-one-dimensional harmonic trap,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 20, no. 32, pp. 5443–5462, 2006.
- [48] R. Citro, S. De Palo, E. Orignac, P. Pedri, and M.-L. Chiofalo, “Luttinger hydrodynamics of confined one-dimensional bose gases with dipolar interactions,” *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 4, p. 045011, 2008.
- [49] M. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol, “One dimensional bosons : From condensed matter systems to ultracold gases,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 83, no. 4, p. 1405, 2011.
- [50] J. Dubail, J.-M. Stephan, J. Viti, and P. Calabrese, “Conformal Field Theory for Inhomogeneous One-dimensional Quantum Systems : the Example of Non-Interacting Fermi Gases,” *SciPost Phys.*, vol. 2, p. 002, 2017.

- [51] A. G. Abanov, “Hydrodynamics of correlated systems,” in *Applications of Random Matrices in Physics*, pp. 139–161, Springer, 2006.
- [52] N. Allegra, J. Dubail, J.-M. Stéphan, and J. Viti, “Inhomogeneous field theory inside the arctic circle,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2016, no. 5, p. 053108, 2016.
- [53] J. Dubail, J.-M. Stéphan, and P. Calabrese, “Emergence of curved light-cones in a class of inhomogeneous Luttinger liquids,” *SciPost Phys.*, vol. 3, p. 019, 2017.
- [54] X. Wen, S. Ryu, and A. W. Ludwig, “Evolution operators in conformal field theories and conformal mappings : Entanglement hamiltonian, the sine-square deformation, and others,” *Physical Review B*, vol. 93, no. 23, p. 235119, 2016.
- [55] V. Eisler and D. Bauernfeind, “Front dynamics and entanglement in the xxz chain with a gradient,” *Physical Review B*, vol. 96, no. 17, p. 174301, 2017.
- [56] K. Gawędzki, E. Langmann, and P. Moosavi, “Finite-time universality in nonequilibrium cft,” *Journal of Statistical Physics*, pp. 1–26, 2017.
- [57] J. Rodríguez-Laguna, J. Dubail, G. Ramírez, P. Calabrese, and G. Sierra, “More on the rainbow chain : entanglement, space-time geometry and thermal states,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 16, p. 164001, 2017.
- [58] X. Wen and J.-Q. Wu, “Quantum dynamics in sine-square deformed conformal field theory : Quench from uniform to nonuniform conformal field theory,” *Physical Review B*, vol. 97, no. 18, p. 184309, 2018.
- [59] A. Colcelli, J. Viti, G. Mussardo, and A. Trombettoni, “Universal off-diagonal long-range-order behavior for a trapped tonks-girardeau gas,” *Physical Review A*, vol. 98, no. 6, p. 063633, 2018.
- [60] E. Tonni, J. Rodríguez-Laguna, and G. Sierra, “Entanglement hamiltonian and entanglement contour in inhomogeneous 1d critical systems,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2018, no. 4, p. 043105, 2018.
- [61] E. Langmann and P. Moosavi, “Diffusive heat waves in random conformal field theory,” *Physical Review Letters*, vol. 122, no. 2, p. 020201, 2019.
- [62] E. Granet, L. Budzynski, J. Dubail, and J. L. Jacobsen, “Inhomogeneous gaussian free field inside the interacting arctic curve,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2019, no. 1, p. 013102, 2019.

- [63] S. Murciano, P. Ruggiero, and P. Calabrese, “Entanglement and relative entropies for low-lying excited states in inhomogeneous one-dimensional quantum systems,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2019, no. 3, p. 034001, 2019.
- [64] M. Girardeau, “Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 1, no. 6, pp. 516–523, 1960.
- [65] H. Bethe, “Zur theorie der metalle,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 71, no. 3-4, pp. 205–226, 1931.
- [66] S. R. White, “Density matrix formulation for quantum renormalization groups,” *Physical review letters*, vol. 69, no. 19, p. 2863, 1992.
- [67] J. Hubbard, “Electron correlations in narrow energy bands,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 276, no. 1365, pp. 238–257, 1963.
- [68] E. H. Lieb and F. Y. Wu, “Absence of mott transition in an exact solution of the short-range, one-band model in one dimension,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 20, pp. 1445–1448, Jun 1968.
- [69] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, vol. 3. Cambridge university press, 1997.
- [70] F. Franchini, *An introduction to integrable techniques for one-dimensional quantum systems*, vol. 940. Springer, 2017.
- [71] M. Jimbo, *Yang-Baxter equation in integrable systems*, vol. 10. World Scientific, 1990.
- [72] J. C. Slater, “The theory of complex spectra,” *Phys. Rev.*, vol. 34, pp. 1293–1322, Nov 1929.
- [73] P. A. M. Dirac, “On the theory of quantum mechanics,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 112, no. 762, pp. 661–677, 1926.
- [74] W. Heisenberg, “Mehrkörperproblem und resonanz in der quantenmechanik,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 38, no. 6-7, pp. 411–426, 1926.
- [75] M. Cazalilla, “Differences between the tonks regimes in the continuum and on the lattice,” *Physical Review A*, vol. 70, no. 4, p. 041604, 2004.
- [76] E. P. Wigner and P. Jordan, “Über das paulische äquivalenzverbot,” *Z. Phys*, vol. 47, p. 631, 1928.
- [77] V. Yukalov and M. Girardeau, “Fermi-bose mapping for one-dimensional bose gases,” *Laser Physics Letters*, vol. 2, no. 8, p. 375, 2005.

- [78] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, “Method for solving the korteweg-devries equation,” *Physical review letters*, vol. 19, no. 19, p. 1095, 1967.
- [79] A. Shabat and V. Zakharov, “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media,” *Soviet physics JETP*, vol. 34, no. 1, p. 62, 1972.
- [80] E. K. Sklyanin, L. A. Takhtadzhyan, and L. D. Faddeev, “Quantum inverse problem method. i,” *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, vol. 40, no. 2, pp. 194–220, 1979.
- [81] N. A. Slavnov, “Calculation of scalar products of wave functions and form factors in the framework of the algebraic bethe ansatz,” *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, vol. 79, no. 2, pp. 232–240, 1989.
- [82] N. A. Slavnov, “Nonequal-time current correlation function in a one-dimensional bose gas,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 82, no. 3, pp. 273–282, 1990.
- [83] T. Kojima, V. E. Korepin, and N. Slavnov, “Determinant representation for dynamical correlation functions of the quantum nonlinear schrödinger equation,” *Communications in mathematical physics*, vol. 188, no. 3, pp. 657–689, 1997.
- [84] J.-S. Caux and P. Calabrese, “Dynamical density-density correlations in the one-dimensional bose gas,” *Physical Review A*, vol. 74, no. 3, p. 031605, 2006.
- [85] J.-S. Caux, P. Calabrese, and N. A. Slavnov, “One-particle dynamical correlations in the one-dimensional bose gas,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2007, no. 01, p. P01008, 2007.
- [86] A. Shashi, L. I. Glazman, J.-S. Caux, and A. Imambekov, “Nonuniversal prefactors in the correlation functions of one-dimensional quantum liquids,” *Physical Review B*, vol. 84, no. 4, p. 045408, 2011.
- [87] N. Kitanine, K. Kozłowski, J. Maillet, N. Slavnov, and V. Terras, “A form factor approach to the asymptotic behavior of correlation functions in critical models,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2011, no. 12, p. P12010, 2011.
- [88] A. Shashi, M. Panfil, J.-S. Caux, and A. Imambekov, “Exact prefactors in static and dynamic correlation functions of one-dimensional quantum integrable models : Applications to the calogero-sutherland, lieb-liniger, and x x z models,” *Physical Review B*, vol. 85, no. 15, p. 155136, 2012.
- [89] N. Kitanine, K. Kozłowski, J. Maillet, N. Slavnov, and V. Terras, “Form factor approach to dynamical correlation functions in critical models,”

- Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2012, no. 09, p. P09001, 2012.
- [90] H. A. Gersch and G. C. Knollman, “Quantum cell model for bosons,” *Phys. Rev.*, vol. 129, pp. 959–967, Jan 1963.
- [91] C. Lanczos, *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*. United States Governm. Press Office Los Angeles, CA, 1950.
- [92] U. Schollwöck, “The density-matrix renormalization group in the age of matrix product states,” *Annals of Physics*, vol. 326, no. 1, pp. 96–192, 2011.
- [93] E. Schmidt, “Zur theorie der linearen und nicht linearen integralgleichungen zweite abhandlung,” *Mathematische Annalen*, vol. 64, no. 2, pp. 161–174, 1907.
- [94] C. Chatelain, *Study of the influence of randomness on the critical properties of the Potts models*. Theses, Université Henri Poincaré - Nancy I, June 2000.
- [95] “ITensor, Intelligent Tensor Library, <http://itensor.org/>.”
- [96] B. Schmidt and M. Fleischhauer, “Exact numerical simulations of a one-dimensional trapped bose gas,” *Physical Review A*, vol. 75, no. 2, p. 021601, 2007.
- [97] B. Golzer and A. Holz, “The nonlinear schrodinger model as a special continuum limit of the anisotropic heisenberg model,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 20, no. 11, p. 3327, 1987.
- [98] D. Muth, M. Fleischhauer, and B. Schmidt, “Discretized versus continuous models of p-wave interacting fermions in one dimension,” *Physical Review A*, vol. 82, no. 1, p. 013602, 2010.
- [99] D. Muth, B. Schmidt, and M. Fleischhauer, “Fermionization dynamics of a strongly interacting one-dimensional bose gas after an interaction quench,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 8, p. 083065, 2010.
- [100] S.-i. Tomonaga, “Remarks on bloch’s method of sound waves applied to many-fermion problems,” in *Bosonization*, pp. 63–88, World Scientific, 1994.
- [101] J. Luttinger, “An exactly soluble model of a many-fermion system,” in *Luttinger Model : The First 50 Years and Some New Directions*, pp. 3–11, World Scientific, 2014.
- [102] D. C. Mattis and E. H. Lieb, “Exact solution of a many-fermion system and its associated boson field,” in *Bosonization*, pp. 98–106, World Scientific, 1994.

- [103] A. O. Gogolin, A. A. Nersisyan, and A. M. Tsvelik, *Bosonization and strongly correlated systems*. Cambridge university press, 2004.
- [104] T. Giamarchi, *Quantum physics in one dimension*, vol. 121. Oxford university press, 2004.
- [105] M. Cazalilla, “Bosonizing one-dimensional cold atomic gases,” *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 37, no. 7, p. S1, 2004.
- [106] G. C. Wick, “Properties of bethe-salpeter wave functions,” *Phys. Rev.*, vol. 96, pp. 1124–1134, Nov 1954.
- [107] R. P. Feynman and L. M. Brown, *Feynman’s thesis : a new approach to quantum theory*. World Scientific, 2005.
- [108] M. Henkel, *Conformal Invariance and Critical Phenomena*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [109] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, “Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems,” *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. 6, no. 7, p. 1181, 1973.
- [110] J. Kosterlitz, “The critical properties of the two-dimensional xy model,” *Journal of Physics C : Solid State Physics*, vol. 7, no. 6, p. 1046, 1974.
- [111] L. P. Kadanoff, “Lattice coulomb gas representations of two-dimensional problems,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 11, no. 7, p. 1399, 1978.
- [112] B. Nienhuis, “Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the coulomb gas,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 34, no. 5-6, pp. 731–761, 1984.
- [113] S. Sheffield, “Gaussian free fields for mathematicians,” *Probability theory and related fields*, vol. 139, no. 3, pp. 521–541, 2007.
- [114] P. Di Francesco, H. Saleur, and J.-B. Zuber, “Relations between the coulomb gas picture and conformal invariance of two-dimensional critical models,” *Journal of statistical physics*, vol. 49, no. 1-2, pp. 57–79, 1987.
- [115] A. M. Polyakov, “Conformal Symmetry of Critical Fluctuations (Originally published in Russian Volume 12, Number 11),” *ZhETF Pisma Redaktsiiu*, vol. 12, p. 538, 1970.
- [116] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 241, no. 2, pp. 333–380, 1984.
- [117] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, “Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2d statistical models,” *Nuclear Physics B*, vol. 240, no. 3, pp. 312–348, 1984.

- [118] J. L. Cardy, “Conformal invariance and universality in finite-size scaling,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 17, no. 7, p. L385, 1984.
- [119] J. L. Cardy, “Conformal invariance and statistical mechanics,” *Les Houches*, 1988.
- [120] P. Ginsparg, “Applied conformal field theory,” *arXiv preprint hep-th/9108028*, 1988.
- [121] A. Schellekens, “Introduction to conformal field theory,” *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, vol. 44, no. 8, pp. 605–705, 1996.
- [122] P. Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [123] H. Weyl, “Zur gravitationstheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 359, no. 18, pp. 117–145, 1917.
- [124] Michael Trott, Conformal Maps <http://demonstrations.wolfram.com/ConformalMaps/>.
- [125] T. Schultz, “Note on the one-dimensional gas of impenetrable point-particle bosons,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 5, pp. 666–671, 1963.
- [126] A. Lenard, “Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 5, no. 7, pp. 930–943, 1964.
- [127] A. Lenard, “One-dimensional impenetrable bosons in thermal equilibrium,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 7, no. 7, pp. 1268–1272, 1966.
- [128] A. Lenard, “Some remarks on large toeplitz determinants,” *Pacific J. Math.*, vol. 42, no. 1, pp. 137–145, 1972.
- [129] H. Widom, “Toeplitz determinants with singular generating functions,” *American Journal of Mathematics*, vol. 95, no. 2, pp. 333–383, 1973.
- [130] H. G. Vaidya and C. Tracy, “One particle reduced density matrix of impenetrable bosons in one dimension at zero temperature,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 20, no. 11, pp. 2291–2312, 1979.
- [131] H. G. Vaidya and C. A. Tracy, “One particle reduced density matrix of impenetrable bosons in one dimension at zero temperature,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 20, no. 11, pp. 2291–2312, 1979.
- [132] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, and M. Sato, “Density matrix of an impenetrable bose gas and the fifth painlevé transcendent,” *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 1, no. 1, pp. 80–158, 1980.

- [133] A. Its, A. Izergin, and V. Korepin, “Space correlations in the one-dimensional impenetrable bose gas at finite temperature,” *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vol. 53, no. 1, pp. 187–213, 1991.
- [134] M. Girardeau, E. M. Wright, and J. Triscari, “Ground-state properties of a one-dimensional system of hard-core bosons in a harmonic trap,” *Physical Review A*, vol. 63, no. 3, p. 033601, 2001.
- [135] G. Lapeyre Jr, M. Girardeau, and E. M. Wright, “Momentum distribution for a one-dimensional trapped gas of hard-core bosons,” *Physical Review A*, vol. 66, no. 2, p. 023606, 2002.
- [136] T. Papenbrock, “Ground-state properties of hard-core bosons in one-dimensional harmonic traps,” *Physical Review A*, vol. 67, no. 4, p. 041601, 2003.
- [137] R. Pezer and H. Buljan, “Momentum distribution dynamics of a tonks-girardeau gas : Bragg reflections of a quantum many-body wave packet,” *Physical review letters*, vol. 98, no. 24, p. 240403, 2007.
- [138] A. Ovchinnikov, “Fisher–hartwig conjecture and the correlators in the impenetrable bose gas,” *Physics Letters A*, vol. 373, no. 3, pp. 305–307, 2009.
- [139] T. Claeys and I. Krasovsky, “Toeplitz determinants with merging singularities,” *Duke Mathematical Journal*, vol. 164, no. 15, pp. 2897–2987, 2015.
- [140] K. K. Kozłowski, “Large-distance and long-time asymptotic behavior of the reduced density matrix in the non-linear schrödinger model,” *Annales Henri Poincaré*, vol. 16, no. 2, pp. 437–534, 2015.
- [141] Y. Atas, I. Bouchoule, D. Gangardt, and K. Kheruntsyan, “Exact finite-temperature dynamics of a tonks-girardeau gas and a quantum many-body bounce,” *arXiv preprint arXiv :1608.08720*, 2016.
- [142] O. Penrose and L. Onsager, “Bose-einstein condensation and liquid helium,” *Physical Review*, vol. 104, no. 3, p. 576, 1956.
- [143] H. Spohn, *Large scale dynamics of interacting particles*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [144] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [145] A. Minguzzi and D. Gangardt, “Exact coherent states of a harmonically confined tonks-girardeau gas,” *Physical review letters*, vol. 94, no. 24, p. 240404, 2005.
- [146] M. Collura and D. Karevski, “Critical quench dynamics in confined systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 200601, May 2010.

- [147] E. Vicari, “Quantum dynamics and entanglement in one-dimensional fermi gases released from a trap,” *Phys. Rev. A*, vol. 85, p. 062324, Jun 2012.
- [148] J.-S. Caux and R. M. Konik, “Constructing the generalized gibbs ensemble after a quantum quench,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 175301, Oct 2012.
- [149] M. Collura, S. Sotiriadis, and P. Calabrese, “Equilibration of a tonks-girardeau gas following a trap release,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 110, p. 245301, Jun 2013.
- [150] M. Collura, S. Sotiriadis, and P. Calabrese, “Quench dynamics of a tonks-girardeau gas released from a harmonic trap,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2013, no. 09, p. P09025, 2013.
- [151] M. A. Rajabpour and S. Sotiriadis, “Quantum quench of the trap frequency in the harmonic calogero model,” *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 033620, Mar 2014.
- [152] A. S. Campbell, D. M. Gangardt, and K. V. Kheruntsyan, “Sudden expansion of a one-dimensional bose gas from power-law traps,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, p. 125302, Mar 2015.
- [153] R. Boumaza and K. Bencheikh, “Analytical results for the time-dependent current density distribution of expanding ultracold gases after a sudden change of the confining potential,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 50, p. 505003, nov 2017.
- [154] C. Eliezer and A. Gray, “A note on the time-dependent harmonic oscillator,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 30, no. 3, pp. 463–468, 1976.
- [155] E. Pinney, “The nonlinear differential equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 1, no. 5, p. 681, 1950.
- [156] V. P. Ermakov, “Second-order differential equations : conditions of complete integrability,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, pp. 123–145, 2008.
- [157] V. Gritsev, P. Barmettler, and E. Demler, “Scaling approach to quantum non-equilibrium dynamics of many-body systems,” *New journal of Physics*, vol. 12, no. 11, p. 113005, 2010.
- [158] S. Scopa and D. Karevski, “One-dimensional bose gas driven by a slow time-dependent harmonic trap,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 50, no. 42, p. 425301, 2017.

- [159] S. Scopa, J. Unterberger, and D. Karevski, “Exact dynamics of a one dimensional bose gas in a periodic time-dependent harmonic trap,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 51, no. 18, p. 185001, 2018.
- [160] A. M. Tsvetlik, *Quantum field theory in condensed matter physics*. Cambridge university press, 2007.
- [161] W. Xu and M. Rigol, “Universal scaling of density and momentum distributions in lieb-liniger gases,” *Physical Review A*, vol. 92, no. 6, p. 063623, 2015.
- [162] D. S. Dean, P. Le Doussal, S. N. Majumdar, and G. Schehr, “Noninteracting fermions at finite temperature in a d-dimensional trap : Universal correlations,” *Physical Review A*, vol. 94, no. 6, p. 063622, 2016.
- [163] D. S. Dean, P. Le Doussal, S. N. Majumdar, and G. Schehr, “Statistics of the maximal distance and momentum in a trapped fermi gas at low temperature,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2017, no. 6, p. 063301, 2017.
- [164] J. Grella, S. N. Majumdar, and G. Schehr, “Kinetic energy of a trapped fermi gas at finite temperature,” *Physical review letters*, vol. 119, no. 13, p. 130601, 2017.
- [165] D. S. Dean, P. Le Doussal, S. N. Majumdar, and G. Schehr, “Wigner function of noninteracting trapped fermions,” *Physical Review A*, vol. 97, no. 6, p. 063614, 2018.
- [166] D. S. Dean, P. Le Doussal, G. Schehr, *et al.*, “Noninteracting fermions in a trap and random matrix theory,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 2019.
- [167] D. S. Dean, P. L. Doussal, S. N. Majumdar, and G. Schehr, “Nonequilibrium dynamics of noninteracting fermions in a trap,” *arXiv preprint arXiv :1902.02594*, 2019.
- [168] O. A. Castro-Alvaredo, B. Doyon, and T. Yoshimura, “Emergent hydrodynamics in integrable quantum systems out of equilibrium,” *Physical Review X*, vol. 6, no. 4, p. 041065, 2016.
- [169] B. Bertini, M. Collura, J. De Nardis, and M. Fagotti, “Transport in out-of-equilibrium x x z chains : Exact profiles of charges and currents,” *Physical review letters*, vol. 117, no. 20, p. 207201, 2016.
- [170] J. De Nardis and M. Panfil, “Density form factors of the 1d bose gas for finite entropy states,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2015, no. 2, p. P02019, 2015.

Corrélations dans les systèmes quantiques inhomogènes à une dimension

Résumé : si les systèmes quantiques à une dimension ont longtemps été vus comme de simples modèle-jouets, bon nombre sont à présent réalisés dans les expériences d'atomes ultra-froids. Dans ces expériences, le potentiel de confinement du gaz induit nécessairement une inhomogénéité spatiale. Cette inhomogénéité brise l'invariance par translation qui joue un rôle clé dans les solutions analytiques, notamment celle de l'Ansatz de Bethe. On propose dans cette thèse de développer une théorie des champs effective à même de caractériser ces gaz quantiques inhomogènes, en généralisant la théorie du liquide de Luttinger. Dans ces conditions la métrique de l'action effective est courbe. Sous une hypothèse de séparation des échelles, les paramètres de l'action peuvent néanmoins être fixés par les solutions de l'Ansatz de Bethe. Le problème peut alors se ramener au cas d'un espace plat en faisant appel aux théories conformes. On est ainsi amené à résoudre le champ libre gaussien inhomogène, qui donne accès à toutes les fonctions de corrélations du modèle considéré. Ici, on s'intéresse plus particulièrement au modèle de Lieb-Liniger. Les résultats obtenus sont comparés au système simulé par DMRG.

Mots-clés : physique à une dimension, systèmes fortement corrélés, atomes froids, liquide de Luttinger, modèle de Lieb-Liniger

Correlations in inhomogeneous quantum systems in one dimension

Summary : one-dimensional quantum systems have long been seen as simple toy-models but are nowadays often realized in ultracold atoms experiments. In those experiments the confining potential creates a spatial inhomogeneity. This breaks the translation invariance which plays a key role in exact analytical solutions as the Bethe Ansatz. In this thesis, we propose an effective theory generalizing the Luttinger liquid approach for inhomogeneous systems. In this setup, the effective action lives in curved space. However, making the hypothesis of separation of scales allow to compute the action's parameters by using Bethe Ansatz. The problem can then be solved in flat space by using tools from conformal theory. This leads us to solving the inhomogeneous gaussian free field that gives access to all correlation functions of the model under investigation. Here we focus on the Lieb-Liniger model. Our results are tested against DMRG simulations.

Keywords : physics in one dimension, strongly correlated systems, cold atoms, Luttinger liquid, Lieb-Liniger model