



HAL
open science

Secondary instabilities in the Rayleigh-Bénard convection for shear-thinning fluids

Thomas Varé

► **To cite this version:**

Thomas Varé. Secondary instabilities in the Rayleigh-Bénard convection for shear-thinning fluids. Fluid mechanics [physics.class-ph]. Université de Lorraine, 2019. English. NNT : 2019LORR0099 . tel-02394040

HAL Id: tel-02394040

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02394040v1>

Submitted on 4 Dec 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITE DE LORRAINE

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
ECOLE DOCTORALE SIMPPÉ

Thèse de Doctorat

Discipline : Mécanique et Energétique

Présentée et soutenue par

Thomas VARÉ

Instabilités secondaires dans la convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants

Soutenue le 19 Juillet 2019

Jury :

| | | | |
|----------------------|-------------------|---|---|
| <i>Rapporteurs :</i> | Marc MEDALE | - | Professeur, Université d'Aix-Marseille |
| | Daniel HENRY | - | Directeur de Recherche CNRS, MFAE/LMFA |
| <i>Directeurs :</i> | Chérif NOUAR | - | Directeur de Recherche CNRS, LEMTA |
| | Christel MÉTIVIER | - | Maitre de Conférences, Université de Lorraine |
| <i>Examineurs :</i> | Anne DAVAILLE | - | Directeur de Recherche CNRS FAST |
| | Alain BERGEON | - | Professeur, Université Paul Sabatier IMFT |



Remerciements

Au cours de ma thèse, j'ai été amené à côtoyer de nombreuses personnes qui m'ont accueilli, guidé et aidé. Sans elles, cette thèse n'aurait tout simplement pas pu voir le jour. A travers ces quelques lignes de remerciements, j'espère parvenir à leur témoigner toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont en premier lieu à mon directeur de thèse Chérif Nouar et à ma codirectrice de thèse Christel Métivier qui m'ont proposé un sujet intéressant, ambitieux et stimulant. Tout au long de ces quatre années de thèse, j'ai pu compter sur leurs conseils avisés, leur rigueur scientifique et leur grande disponibilité. Je les remercie également pour leur prévenance et leur soutien sans faille dans les périodes de doute.

J'exprime ma profonde gratitude à Daniel Henry et Marc Médale pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail de thèse. Leurs remarques judicieuses et leurs questions pertinentes ont permis d'améliorer sensiblement ce manuscrit. Je remercie chaleureusement Alain Bergeon de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance de thèse. Merci également à Anne Davaille pour avoir examiné attentivement mon travail.

Je remercie Célien, mon collègue mais avant tout mon ami, qui a partagé mon bureau pendant toutes ces années et qui a toujours fait preuve à mon égard d'une extrême gentillesse et d'une grande bienveillance. Je le remercie pour toutes les discussions passionnées autour de la musique classique et pour toutes les sorties au cinéma que nous avons faites.

Je remercie Waseem, un autre collègue et ami qui m'a accueilli dans son bureau, pour sa bonne humeur au quotidien et sa joie de vivre communicative. Merci à lui également pour toutes les conversations scientifiques que nous avons eues.

Toute ma gratitude va à Benoît, le dernier arrivant du bureau -006J qui a immédiatement trouvé sa place et qui a fait preuve dès son arrivée d'une grande bonté d'âme et d'une profonde sollicitude à l'égard de ses collègues.

Je remercie bien évidemment mon ami Alexandre qui m'a toujours impressionné par la diversité de ses connaissances. Les conversations que nous avons eues se sont toujours révélées intéressantes et stimulantes. Bravo et merci également pour son engagement auprès des doctorants.

Je remercie aussi Morgan pour son sens de l'humour aiguisé, ses mots d'esprit, sa connaissance encyclopédique des épisodes de « Kaamelott » et son amabilité. Les dis-

cussions autour de la méthode de Monte Carlo utilisée dans sa thèse étaient passionnantes.

Je remercie Naima pour sa jovialité, son caractère enjoué et sa bonne humeur. C'était un plaisir d'être son voisin de bureau.

Je remercie Azat pour sa bienveillance et son humour mordant. Son amitié est précieuse.

Pour leurs innombrables qualités et leur grande humanité, j'adresse mes remerciements les plus sincères à Brice, Marc, Sultan, Romain, Arthur, Jamal, Giuseppe, Justine, Mathieu, Jamel, Simon, Hadrien et Fatiha.

Enfin, puisse Eléonore E. trouver ici la marque de ma profonde reconnaissance.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction générale | 7 |
| Bibliographie | 23 |
| 1 Instabilities of convection patterns for a shear-thinning fluid between slabs of finite conductivities | 27 |
| 1.1 Abstract | 28 |
| 1.2 Introduction | 28 |
| 1.3 Problem formulation | 31 |
| 1.4 Linear stability analysis | 34 |
| 1.4.1 Critical conditions | 34 |
| 1.4.2 Characteristic time of the instability | 37 |
| 1.5 Pattern selection at the onset of convection | 37 |
| 1.5.1 Principles of the amplitude expansion method : case of square | 38 |
| 1.5.2 Nature of the primary bifurcation | 39 |
| 1.5.3 Convective patterns at threshold | 39 |
| 1.5.4 Flow structure, viscosity and temperature fields | 41 |
| 1.5.5 Comparison between roll and square solutions for fixed χ and λ | 43 |
| 1.5.6 Heat transfer | 43 |
| 1.6 Secondary instabilities | 46 |
| 1.6.1 Stability of a roll modulated solution | 46 |
| 1.6.2 Stability of a square modulated solution | 51 |
| 1.7 Numerical solutions of amplitude equations | 54 |
| 1.7.1 Numerical simulation | 54 |
| 1.7.2 Numerical results | 56 |
| 1.8 Conclusion | 63 |
| 1.A Eigenvalues versus Q_1 and Q_2 | 64 |
| 1.B Stability of the ETD2 scheme | 64 |
| 1.B.1 Case of a single ODE | 64 |
| 1.B.2 Extension to two coupled Ginzburg-Landau equations | 66 |
| Bibliographie | 68 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2 | Rayleigh-Bénard convection for thermodependent shear-thinning fluids | 73 |
| 2.1 | Abstract | 74 |
| 2.2 | Introduction | 74 |
| 2.3 | Basic equations | 77 |
| 2.3.1 | Rheological model and parameters | 78 |
| 2.3.2 | Boundary conditions | 79 |
| 2.3.3 | Reduction : elimination of the pressure | 79 |
| 2.4 | Linear stability analysis | 80 |
| 2.4.1 | Onset of convection : direct eigenvalue problem | 80 |
| 2.4.2 | Adjoint eigenvalue problem : Adjoint mode | 83 |
| 2.5 | Amplitude equations in a hexagonal lattice | 84 |
| 2.5.1 | Multiple scales method | 84 |
| 2.5.2 | Derivation of the Ginzburg-Landau equation | 85 |
| 2.5.3 | Solution at order δ^3 | 87 |
| 2.6 | Amplitude instabilities | 91 |
| 2.7 | Competition between rolls and squares | 92 |
| 2.8 | Phase instabilities | 95 |
| 2.9 | Conclusion | 97 |
| 2.A | Operators and matrix coefficients | 100 |
| 2.A.1 | The operator \mathbf{M} | 100 |
| 2.A.2 | The operator \mathbf{L} | 101 |
| 2.A.3 | sub-scale $\mathbf{L}^{(0)}$ | 101 |
| 2.A.4 | sub-scale $\mathbf{L}^{(1)}$ | 102 |
| 2.A.5 | sub-scale $\mathbf{L}^{(2)}$ | 102 |
| 2.B | Second-order solution (hexagons) | 102 |
| 2.B.1 | Solution proportional to $ A_p ^2$ (zero mode) | 102 |
| 2.B.2 | Solution proportional to $A_p^2 \exp(2i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$ | 103 |
| 2.B.3 | Solution proportional to $A_p A_q^* E_p E_q^*$ | 103 |
| 2.B.4 | Solution proportional to $\exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$ | 104 |
| | Bibliographie | 105 |
| 3 | Approche fortement non linéaire | 107 |
| 3.1 | Introduction | 108 |
| 3.2 | Equations gouvernant le problème | 108 |
| 3.3 | Méthode Pseudo-Spectrale | 110 |
| 3.3.1 | Décomposition de Fourier-Chebyshev | 110 |
| 3.3.2 | Projection des termes linéaires | 112 |
| 3.3.3 | Projection des termes non linéaire d'inertie | 112 |
| 3.3.4 | Projection des termes non linéaire visqueux | 114 |
| 3.4 | Nombre de Nusselt | 117 |
| 3.5 | Procédure de continuation | 118 |

| | | |
|-------|--|------------|
| 3.5.1 | Prédiction | 121 |
| 3.5.2 | Paramétrisation | 123 |
| 3.5.3 | Correction | 124 |
| 3.5.4 | Contrôle du pas | 126 |
| 3.6 | Résultats pour des fluides Newtoniens | 126 |
| 3.6.1 | Les principaux travaux existants | 127 |
| 3.6.2 | Convergence de la méthode de continuation en Newtonien | 128 |
| 3.6.3 | Évolution des différents modes de Fourier avec l'écart au seuil de la convection | 128 |
| 3.6.4 | Évolution des champs de vitesse et de température avec l'écart au seuil de la convection | 131 |
| 3.6.5 | Influence du nombre de Prandtl | 133 |
| 3.7 | Résultats pour des fluides rhéofluidifiants | 135 |
| 3.7.1 | Les principaux travaux existants en non-Newtoniens | 135 |
| 3.7.2 | Convergence de la méthode de continuation pour un fluide rhéofluidifiant | 138 |
| 3.7.3 | Évolution des différents modes de Fourier avec l'écart au seuil de la convection | 139 |
| 3.7.4 | Évolution des champs de vitesse, de température et de viscosité avec l'écart au seuil de la convection | 142 |
| 3.7.5 | Influence de l'indice de rhéofluidification n_c sur les échanges de chaleur | 145 |
| 3.7.6 | Influence du paramètre λ sur les échanges de chaleur et la nature de la bifurcation | 148 |
| 3.8 | Conclusion et perspectives | 149 |
| | Bibliographie | 150 |
| | Conclusion | 153 |
| | Bibliographie | 155 |

Introduction générale

Un fluide peut se mettre en mouvement sous l'effet d'un gradient thermique parallèle à la force de gravité. Ce phénomène physique, appelé convection thermique, est observé dans des contextes très divers et se manifeste à des échelles extrêmement variées. A l'échelle planétaire, la convection thermique est par exemple à l'origine des mouvements internes de l'atmosphère et entre en jeu dans de nombreux phénomènes météorologiques comme les orages, les cyclones ou encore les moussons. Elle est également la source des différents courants marins qui parcourent les océans de la planète et qui régulent les climats terrestres. A l'échelle des temps géologiques, l'accroissement de la température de la Terre avec la profondeur est responsable de la convection du manteau terrestre, l'élément moteur de la tectonique des plaques. Enfin, la convection thermique intervient également dans un grand nombre de procédés industriels et ce jusqu'à des échelles millimétriques comme dans certains dispositifs de refroidissement de composants électroniques par exemple. Du fait du nombre conséquent de situations où elle joue un rôle majeur, la convection thermique a été très étudiée depuis le début du XX^{ème} siècle. La configuration la plus utilisée est celle de Rayleigh-Bénard qui fait intervenir un fluide placé dans le champ de gravité \hat{g} et confiné entre deux plaques horizontales. La plaque inférieure est chauffée alors que la plaque supérieure est refroidie.

Les premières études expérimentales visant à étudier la configuration précédente furent réalisées aux alentours de l'an 1900 par Henri Bénard (1874-1939) au cours de sa thèse ayant pour titre « Les Tourbillons cellulaires dans une nappe liquide »[1]. Dans ses expériences, la surface supérieure était libre et les fluides utilisés étaient la plupart du temps de la cire ou du blanc de baleine qui sont liquides entre 50°C et 100°C. Le choix de ces fluides vient du fait qu'ils sont peu volatils dans la gamme de températures précédente : leur utilisation permet d'obtenir des couches de fluide uniformes. Les épaisseurs de ces couches étaient de l'ordre du millimètre. Grâce à différentes méthodes optiques, Henri Bénard a été en mesure d'observer différentes structures périodiques comme des polygones, le plus souvent des hexagones (Figure 1), mais aussi des rouleaux de convection. Il a notamment pu mesurer précisément la longueur d'onde des structures qui émergeaient ainsi que les variations dans le profil de l'interface. Toutefois, il ne disposait pas d'interprétations physiques permettant d'expliquer ses observations.

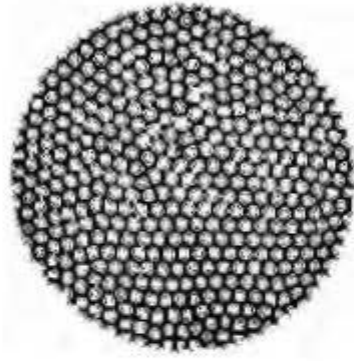


FIGURE 1 – Photographie issue des expériences de Henri Bénard tiré de [1]

En 1916, dans un article [2] intitulé « On the convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side », Lord Rayleigh (1842-1919) explique les résultats de Henri Bénard par l'existence de forces de flottabilité induites par les variations de masse volumique dues au gradient de température. Selon lui, deux phénomènes physiques s'opposent :

- D'un côté, la poussée d'Archimède tend à faire s'élever les couches de fluide basses plus chaudes donc moins denses.
- De l'autre, les forces de frottement dues à la viscosité du fluide et la conduction thermique s'opposent à la mise en mouvement.

La compétition entre ces deux mécanismes antagonistes est quantifiée par une grandeur adimensionnelle appelée nombre de Rayleigh et défini par :

$$\text{Ra} = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\mu}_0 \hat{\kappa}_0} \quad (1)$$

Dans l'expression précédente, $\hat{\rho}_0$, $\hat{\mu}_0$ et $\hat{\kappa}_0$ désignent respectivement la masse volumique, la viscosité dynamique et la diffusivité thermique du fluide. L'indice 0 signifie que ces grandeurs sont évaluées à une température de référence, en général celle qui règne au centre de la couche de fluide. La grandeur $\hat{\beta}$ désigne le coefficient de dilatation thermique du fluide et est à l'origine de la poussée d'Archimède. \hat{d} est l'épaisseur de la couche de fluide. $\Delta \hat{T} = \hat{T}_1 - \hat{T}_2$ est l'écart de température entre les plaques avec \hat{T}_1 et \hat{T}_2 qui désignent respectivement les températures chaude et froide.

A partir d'une différence de températures assez grande donc pour une valeur suffisamment élevée du nombre de Rayleigh notée Ra_c , la poussée d'Archimède l'emporte sur les forces de friction et le fluide initialement au repos se met en mouvement : on passe d'un régime purement conductif à un régime convectif (Figure 3.1). C'est la convection de Rayleigh-Bénard.

L'explication physique fournie par Rayleigh a été acceptée pendant plus de 40 ans, jusqu'en 1958, où Pearson a démontré dans [3] le rôle prédominant de la tension superficielle dans les résultats expérimentaux de Bénard. En effet, des inhomogénéités

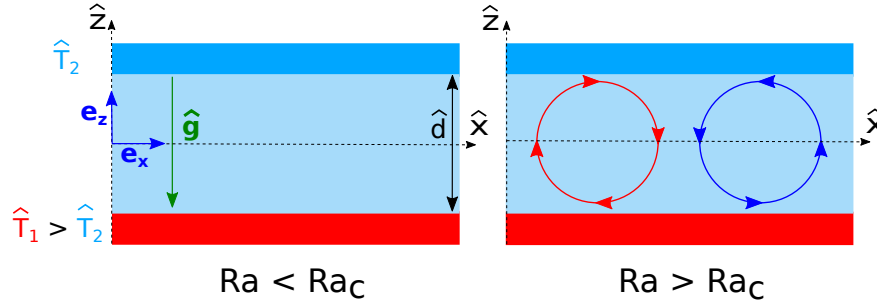


FIGURE 2 – Illustration de la convection de Rayleigh-Bénard.

de température peuvent engendrer des gradients de tension de surface qui peuvent provoquer des mouvements de fluide. Ce phénomène physique est connu sous le nom d'effet Marangoni, du nom du physicien italien Carlo Marangoni (1840-1925) qui l'observa le premier. Il s'avère que cet effet Marangoni est plus déstabilisant que les forces de flottabilité quand la couche de fluide est très mince ce qui était le cas dans les expériences de Bénard où les couches de fluides avaient une épaisseur de l'ordre du millimètre. Pour des couches de fluides de faible épaisseur, les forces induites par les gradients de tension superficielle sont prépondérantes et on parle de convection de Bénard-Marangoni. En revanche, pour des couches de fluide de plus grande épaisseur, ce sont les forces de flottabilité qui dominent et on parle alors de convection de Rayleigh-Bénard. A titre indicatif, pour de l'eau pure à 20 °C, l'épaisseur en dessous de laquelle l'instabilité de Bénard-Marangoni l'emporte sur celle de Rayleigh-Bénard est de 2.6 cm d'après [4].

Théoriquement, Rayleigh est parvenu à déterminer, à l'aide d'une analyse linéaire de stabilité, les conditions critiques du système à savoir la valeur du nombre de Rayleigh Ra_c au delà de laquelle survient l'instabilité ainsi que le nombre d'onde k_c des structures qui émergent. Il considère que les plaques sont parfaitement conductrices de la chaleur, ont une extension horizontale infinie et suppose que les surfaces délimitant le fluide sont libres. Les calculs sont menés dans le cadre des approximations de Boussinesq :

- la masse volumique ne varie que dans le terme de flottabilité de l'équation de conservation de la quantité de mouvement,
- la dissipation visqueuse ainsi que la dépendance de l'énergie interne avec la pression sont négligées dans l'équation de l'énergie,
- les coefficients thermodynamiques sont considérés constants et la masse volumique ne varie qu'avec la température (pas de compressibilité).

On donne ici les principales étapes de l'analyse linéaire de stabilité qui a permis à Rayleigh de déterminer les conditions critiques (k_c , Ra_c).

La couche de fluide est décrite mathématiquement par les équations générales de conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans le cadre utilisé par

Rayleigh, ces dernières s'écrivent :

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{V}} = 0 \quad (2)$$

$$\hat{\rho}_0 \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{V}}}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}} \right) = -\hat{\nabla} \hat{P} + \hat{\rho}(\hat{T}) \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mu}_0 \hat{\Delta} \hat{\mathbf{V}} \quad (3)$$

$$\hat{\rho}_0 \hat{C}_0 \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} + \hat{\nabla} \hat{T} \cdot \hat{\mathbf{V}} \right) = \hat{\lambda}_0 \hat{\Delta} \hat{T} \quad (4)$$

où $\hat{\rho}(\hat{T}) = \hat{\rho}_0(1 - \hat{\beta}(\hat{T} - \hat{T}_0))$.

Dans les équations précédentes, $\hat{\mathbf{V}}$, \hat{P} et \hat{T} désignent respectivement les champs de vitesse, de pression et de température. \hat{C}_0 et $\hat{\lambda}_0$ désignent respectivement la capacité calorifique et la conductivité thermique du fluide. La masse volumique $\hat{\rho}$ ne varie linéairement avec la température que dans le terme de poussée conformément à l'approximation de Boussinesq. Dans l'état de base, le fluide est au repos : le champ de vitesse est donc nul soit $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ et les équations décrivant cet état conductif sont alors :

$$\Delta \hat{T}_b = 0 \quad (5)$$

$$-\nabla \hat{P}_b + \hat{\rho}_0(1 - \hat{\beta}(\hat{T}_b - \hat{T}_0)) \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{0} \quad (6)$$

L'extension latérale de la couche de fluide étant supposée infinie, le champ de température dans l'état conductif ne dépend que de \hat{z} . L'intégration de l'équation (5) donne alors un profil de température linéaire en \hat{z} soit :

$$\hat{T}_b = -\frac{\Delta \hat{T}}{\hat{d}} \hat{z} + \hat{T}_0 \quad \text{où} \quad \Delta \hat{T} = \hat{T}_1 - \hat{T}_2 \quad \text{et} \quad \hat{T}_0 = \frac{\hat{T}_1 + \hat{T}_2}{2} \quad (7)$$

Pour étudier la stabilité de la couche de fluide, on superpose aux grandeurs de l'état de base des perturbations en température $\hat{\theta}$, en pression \hat{p} et en vitesse $\hat{\mathbf{v}}$ soit :

$$\hat{T} = \hat{T}_b + \hat{\theta} \quad \hat{P} = \hat{P}_b + \hat{p} \quad \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} = u \mathbf{e}_x + w \mathbf{e}_z \quad (8)$$

En introduisant ces différentes expressions dans les équations (2), (3) et (4) et en retranchant (5), (6) et (7), on obtient un système d'équations aux perturbations. Ce dernier peut être écrit sous forme adimensionnelle en utilisant respectivement $\Delta \hat{T}$, \hat{d} , $\hat{d}^2/\hat{\kappa}_0$, $\hat{\kappa}_0/\hat{d}$ et $\hat{\mu}_0 \hat{\kappa}_0/\hat{d}^2$ comme échelles caractéristiques de température, de distance, de temps, de vitesse et de pression. Le système d'équations aux perturbations s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \text{Ra} \theta \mathbf{e}_z + \Delta \mathbf{v} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \theta \cdot \mathbf{v} = w + \Delta \theta \quad (11)$$

Deux nombres adimensionnels entrent en jeu dans le système d'équations aux perturbations (9)-(11) :

- le premier est le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\mu}_0 \hat{\kappa}_0}$ déjà introduit précédemment.
- le second est le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{\kappa}_0}$ qui compare les temps de diffusion thermique et de diffusion visqueuse.

Dans l'analyse linéaire de stabilité, on considère des perturbations infinitésimales de la forme :

$$(u, v, w, p, \theta) = \delta(u_1, v_1, w_1, p_1, \theta_1) + \mathcal{O}(\delta^2) \text{ où } \delta \ll 1$$

On introduit ces perturbations dans le système (9)-(11) et on ne conserve que les termes d'ordre δ ce qui conduit à un système d'équations linéarisées :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \Delta u_1 \quad (13)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \Delta v_1 \quad (14)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial w_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + Ra \theta_1 + \Delta w_1 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = w_1 + \Delta \theta_1 \quad (16)$$

Ce système étant invariant par translation suivant x et y , on peut chercher des solutions sous la forme de modes normaux :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ p_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(z) \\ \tilde{v}_1(z) \\ \tilde{w}_1(z) \\ \tilde{p}_1(z) \\ \tilde{\theta}_1(z) \end{pmatrix} \exp(\sigma t) \exp(i(k_x x + k_y y)) \quad (17)$$

Dans l'expression précédente, $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$ est le vecteur d'onde et σ est le taux de croissance des perturbations. Quand $\text{Re}(\sigma) > 0$, les perturbations s'amplifient avec le temps et l'état conductif est donc instable. A l'inverse, quand $\text{Re}(\sigma) < 0$, les perturbations s'atténuent au cours du temps et l'état conductif est stable. En introduisant la décomposition sous forme de modes normaux (17) dans le système (12)-(16) et en éliminant \tilde{u}_1 , \tilde{v}_1 et \tilde{p}_1 , on obtient un problème aux valeurs propres pour les variables \tilde{w}_1 et $\tilde{\theta}_1$:

$$Pr(D^2 - k^2)^2 \tilde{w}_1 - Pr Ra k^2 \tilde{\theta}_1 = \sigma(D^2 - k^2) \tilde{w}_1 \quad (18)$$

$$\tilde{w}_1 + (D^2 - k^2) \tilde{\theta}_1 = \sigma \tilde{\theta}_1 \quad (19)$$

où $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ et $D = \frac{d}{dz}$.

Dans le cas de parois libres, Lord Rayleigh est parvenu à déterminer analytiquement la courbe de stabilité marginale associée à (18)-(19). Cette dernière correspond au lieu $Ra(k)$ des points (k, Ra) pour lesquels $\sigma = 0$. Elle délimite les domaines stable et instable de l'état conductif : ce dernier est stable en dessous de cette courbe et instable au dessus. Elle présente un minimum en deçà duquel l'état conductif est nécessairement stable : les coordonnées de ce point (k_c, Ra_c) sont appelées conditions critiques. Les valeurs obtenues par Lord Rayleigh pour ces dernières sont :

$$k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ et } Ra_c = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 657.5$$

La convection ne peut ainsi se développer que pour des valeurs du nombre de Rayleigh $Ra \geq Ra_c = 657.5$ quand on dispose de parois libres.

Dans le cas plus réaliste de parois rigides, les équations (18)-(19) n'admettent pas de solution analytique. Une résolution numérique a donc été menée par Pellew et Southwell dans [5] en 1940 afin de déterminer la courbe de stabilité marginale et les conditions critiques associées. Ces dernières ont été évaluées à :

$$k_c = 3.11 \text{ et } Ra_c = 1707.76$$

Les courbes de stabilité marginales obtenues dans le cas de parois libres et de parois rigides sont données sur la Figure 3 avec les conditions critiques correspondantes.

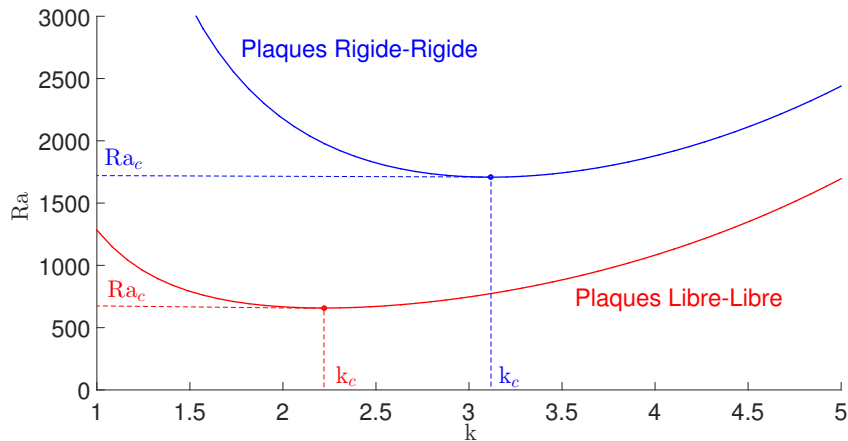


FIGURE 3 – Courbes de stabilité marginale obtenues dans le cas Libre-Libre et Rigide-Rigide

On peut également considérer que la paroi inférieure est rigide et que la paroi supérieure est libre comme dans l'expérience de Henri Bénard. Dans ce cas, toujours d'après [5], les conditions critiques sont :

$$k_c = 2.68 \text{ et } Ra_c = 1100.65$$

La configuration avec deux parois libres est intéressante parce qu'elle permet des développements analytiques. En revanche, sa réalisation s'avère difficile d'un point de

vue expérimental. Toutefois, une manière de s'en approcher est donnée par Goldstein et Graham dans [6]. L'idée de ces auteurs est de considérer comme bonne approximation d'une surface libre, une interface entre deux fluides non miscibles de viscosités très différentes. Ces auteurs ont donc utilisé une huile de silicone de forte viscosité reposant sur une couche de mercure liquide et surmontée d'une couche d'hélium gazeux, toutes deux de viscosité beaucoup plus faible (respectivement d'un facteur 10^6 et 10^4). Du point de vue thermique, la forte conductivité du mercure permet de considérer que la température est imposée à l'interface huile-mercure. A l'interface huile-hélium, le flux de chaleur est quasiment nul du fait de la faible conductivité de l'hélium. Avec leur dispositif, Goldstein et Graham trouvent une valeur du nombre de Rayleigh critique $Ra_c = 596$ ce qui représente une erreur de 10% avec la valeur théorique calculée par Lord Rayleigh.

D'autres conditions aux limites peuvent être envisagées. Par exemple, on peut considérer que les plaques limitant le fluide ne sont pas infiniment conductrices de la chaleur, ce qui est le cas dans la pratique. Des auteurs se sont ainsi intéressés à l'influence de la nature finie de la conductivité thermique des plaques sur les conditions critiques. L'étude la plus ancienne a été menée par Hurle, Jakeman et Pike dans [7] en 1967. Ces auteurs ont notamment montré que les conditions critiques Ra_c et k_c diminuaient d'autant plus que les plaques étaient isolantes.

Plus récemment, des études [8] et [9] se sont intéressées à l'impact d'un possible glissement survenant au niveau des parois délimitant le fluide. Ce phénomène est en effet susceptible de survenir dans des systèmes où le nombre de Knudsen est très faible, comme dans des gaz raréfiés par exemple. [8] et [9] ont montré que plus le phénomène de glissement était important et davantage les conditions critiques étaient réduites.

Dans tous les cas, l'analyse linéaire de stabilité permet de déterminer les conditions critiques (k_c, Ra_c) à partir desquelles se développent des motifs de convection mais ne donne pas d'indication sur la nature de la structure qui émerge au seuil de l'instabilité. En effet, n'importe quel mode ou combinaison linéaire de modes de nombre d'onde k_c est solution du problème linéarisé. Une analyse faiblement non linéaire de stabilité s'avère donc nécessaire afin d'étudier les motifs de convection.

Malkus et Veronis sont les premiers à proposer en 1958 dans [10] une méthode permettant de déterminer des solutions stationnaires aux équations descriptives du problème (9)-(11) sous forme de motifs de convection. Leur approche repose sur un développement asymptotique des inconnues du problème : la vitesse, la perturbation en température et le

nombre de Rayleigh sont ainsi écrits en série d'un petit paramètre $\delta \ll 1$:

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{v}_1 + \delta^2 \mathbf{v}_2 + \delta^3 \mathbf{v}_3 + \mathcal{O}(\delta^4) \quad (20)$$

$$\theta = \delta \theta_1 + \delta^2 \theta_2 + \delta^3 \theta_3 + \mathcal{O}(\delta^4) \quad (21)$$

$$\text{Ra} = \text{Ra}_c + \delta \text{Ra}_1 + \delta^2 \text{Ra}_2 + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (22)$$

En introduisant (20)-(22) dans (9)-(11), on aboutit à un système d'équations différentielles ordinaires pour \mathbf{v}_p et θ_p à chaque ordre δ^p pour $p \geq 1$.

A l'ordre δ , on retrouve le problème linéaire qui admet une infinité de solutions de nombre d'onde k_c . Différents motifs de convection peuvent alors être considérés. Mathématiquement, les champs de vitesse \mathbf{v}_1 et de température θ_1 peuvent être décrits comme différentes séries de Fourier selon la nature de la structure considérée :

- pour un rouleau, \mathbf{v}_1 et θ_1 sont caractérisés par un seul mode.
- pour un carré, deux modes de Fourier avec des vecteurs d'ondes orthogonaux sont nécessaires.
- pour un hexagone, trois modes avec des vecteurs d'ondes inclinés de $2\pi/3$ les uns par rapport aux autres doivent être utilisés.

Aux ordres δ^p où $p \geq 2$, les systèmes obtenus admettent des seconds membres comportant, entre autres, les grandeurs Ra_{p-1} qui sont des inconnues du problème et des termes dits résonants. Ces derniers conduisent lors de la résolution du système d'équations à des termes « séculaires » à savoir des termes croissant linéairement avec le temps. Ces termes séculaires ne pouvant exister physiquement, les coefficients Ra_{p-1} doivent donc être déterminés de sorte à annuler les différents termes résonants. Une condition de solvabilité doit donc être appliquée afin de résoudre les systèmes d'équations différentielles ordinaires obtenus aux différents ordres $\delta^p, p \geq 2$. La plus couramment utilisée est l'alternative de Fredholm : elle stipule que « toute équation de la forme $\mathcal{L}u(t) = f(t)$ n'a de solution que si la fonction $f(t)$ du membre de droite est orthogonale au noyau de l'opérateur adjoint de \mathcal{L} » (cf [11]).

En appliquant la démarche précédente, Malkus et Veronis sont parvenus à déterminer de proche en proche les inconnues \mathbf{v}_p, θ_p pour des motifs de convection en rouleaux, en carrés et en hexagones dans le cas de parois libres et dans le cadre des approximations de Boussinesq. Une fois ces différentes solutions stationnaires déterminées, ces auteurs se sont interrogés sur le critère permettant de prédire l'émergence de tel ou tel motif. Leurs calculs suggèrent que la structure qui se développe est celle donnant lieu au plus grand gradient thermique quadratique moyen. Ainsi, selon ces auteurs, les carrés qui maximisent cette quantité, seraient les motifs les plus probables.

En 1965, Schlüter, Lortz et Busse reprennent la démarche adoptée dans [10] et l'étendent au cas de parois rigides. Leurs calculs viennent infirmer les résultats de Malkus et Veronis concernant la stabilité des différents motifs de convection. En effet, Schlüter et al montrent dans [12] que les rouleaux de convection sont les seules structures stables

dans l'approximation de Boussinesq et ce, que l'on considère adhérence ou glissement parfait aux parois.

En revanche, quand les gradients thermiques sont trop importants pour que les hypothèses de Boussinesq restent valables, d'autres motifs de convection peuvent être stables. Dans un article [13] paru en 1967, Busse montre comment la convection d'un fluide thermodépendant s'organise au fur et à mesure qu'on s'éloigne des conditions critiques. A proximité du seuil de l'instabilité, les motifs hexagonaux sont les seules structures stables. Puis, quand la convection gagne en intensité, des rouleaux émergent aux côtés des hexagones donnant ainsi naissance à un domaine de bistabilité. Enfin, quand les écarts relatifs au seuil deviennent trop importants, les hexagones perdent leur stabilité et il ne subsiste que des rouleaux. Dans le cas de fluides très fortement thermodépants, des études menées par Jenkins [14] et Busse [15] ont montré que les carrés étaient les motifs de convection stables au détriment des rouleaux.

L'approche faiblement non linéaire mise en place par Malkus et Veronis et reprise par Busse est désormais très fréquemment utilisée dans de nombreux travaux. Dans les études les plus récentes, cette méthode est employée pour déterminer les équations d'amplitude du système. Plus précisément, ces équations sont obtenues à partir de l'application de l'alternative de Fredholm pour déterminer les inconnues Ra_1 , Ra_2 . Ce formalisme décrit la dynamique du système à proximité des conditions critiques et a l'avantage de permettre d'étudier simplement la stabilité des motifs. A titre d'exemple, l'équation d'amplitude pour un rouleau de convection est donnée à l'ordre cubique par :

$$\frac{dA}{dt} = g_0 A - g_1 A |A|^2 \quad (23)$$

où A est l'amplitude de la perturbation suivant l'axe du rouleau et g_0 , g_1 des constantes.

Les différents motifs de convection qui émergent au seuil de la convection vont ensuite perdre leur stabilité par le biais d'instabilités dites « secondaires ». Pour comprendre l'origine de ces dernières, on peut effectuer un développement en série de Taylor du taux de croissance σ au voisinage du seuil de la convection suivant :

$$\sigma(k, Ra) = \frac{1}{\tau_0} \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} (k - k_c)^2 \quad (24)$$

Dans l'expression précédente, τ_0 désigne le temps de relaxation des perturbations et ξ_0 est la longueur de cohérence. Ces deux grandeurs sont évaluées aux conditions critiques et sont définies par :

$$\frac{1}{\tau_0} = Ra_c \frac{\partial \sigma}{\partial Ra} \quad \frac{\xi_0^2}{\tau_0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2}$$

En fonction des valeurs du paramètre de contrôle Ra , plusieurs situations, représentées sur la Figure 4, sont possibles :

- si $Ra \leq Ra_c$, tous les nombres d'onde ont un taux de croissance négatif et l'état conductif est stable.
- si $Ra = Ra_c$, il existe un nombre d'onde k_c pour lequel le taux de croissance est nul et on a bifurcation de l'état conductif vers un état convectif ordonné.
- si $Ra \geq Ra_c$, toute une bande de nombres d'onde centrée sur k_c ont un taux de croissance positif.

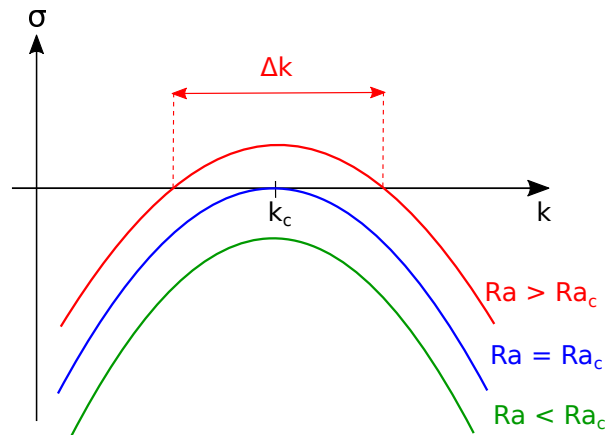


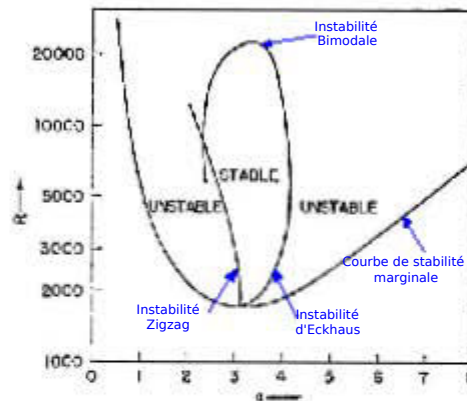
FIGURE 4 – Taux de croissance des perturbations à proximité du seuil.

L'existence de cette gamme de nombres d'ondes instables va induire une modulation spatiale des motifs de convection quand on s'éloigne des conditions critiques. Du fait de cette modulation, les différents motifs vont subir des instabilités dites « secondaires », qualificatif employé en opposition à la bifurcation « primaire » désignant la transition de l'état conductif à convectif.

Les différentes instabilités secondaires délimitant le domaine de stabilité des rouleaux de convection ont d'abord été identifiées dans la limite des grands nombres de Prandtl par Busse d'abord théoriquement dans [16] puis expérimentalement dans [17]. Le domaine de stabilité des rouleaux est ainsi appelé « Ballon de Busse » : pour de fortes valeurs du nombre de Prandtl, il est délimité (cf Figure 3.4) par :

- l'instabilité d'Eckhaus.
- l'instabilité Zigzag.
- l'instabilité en rouleaux croisés.
- l'instabilité bimodale.

L'instabilité d'Eckhaus est une instabilité de compression/dilatation, de grande longueur d'onde. Elle se produit soit dans des zones où des rouleaux sont trop comprimés (leur nombre d'onde est très supérieur à k_c) soit au contraire dans des zones où ceux ci se trouvent dilatés (leur nombre d'onde est très inférieur à k_c). L'instabilité d'Eckhaus conduit à une réorganisation spatiale des rouleaux de convection. Dans le cas de rouleaux trop comprimés, on a d'abord amplification de la modulation initiale avant d'avoir fusion de paires de rouleaux (cf Figure 6). La structure finale qui en résulte a une longueur d'onde supérieure à celle de la structure initiale : autrement dit, le nombre d'onde k de la structure

FIGURE 5 – Ballon de Busse pour $Pr \rightarrow \infty$

a diminué pour se rapprocher du nombre d'onde critique k_c . Dans le cas d'une structure dilatée, l'instabilité d'Eckhaus se manifeste par la création de rouleaux de convection dans les zones sur-dilatées ce qui aboutit à une augmentation du nombre d'onde k .

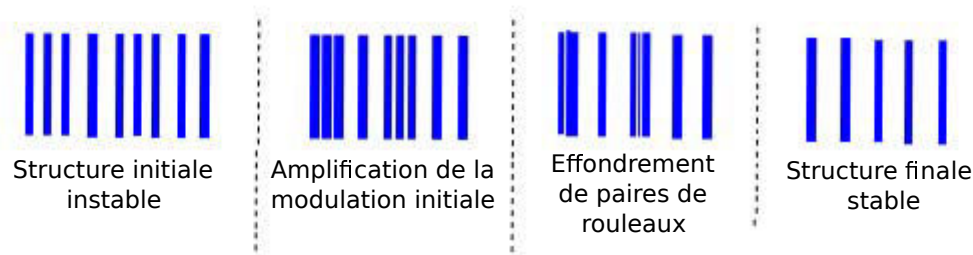


FIGURE 6 – Illustration de l'instabilité de compression/ dilatation d'Eckhaus tirée de [18]

L'instabilité Zigzag, quant à elle, est une instabilité de torsion qui a lieu dans la direction perpendiculaire au vecteur d'onde des rouleaux et qui conduit en conséquence à une ondulation le long de leur axe. A proximité du seuil, elle se produit quand le nombre d'onde des motifs est inférieur à k_c . La structure ondulée qui émerge a une longueur d'onde plus faible que la structure initiale comme l'illustre la Figure 7 : le nombre d'onde se rapproche donc du nombre d'onde critique k_c comme pour l'instabilité d'Eckhaus.

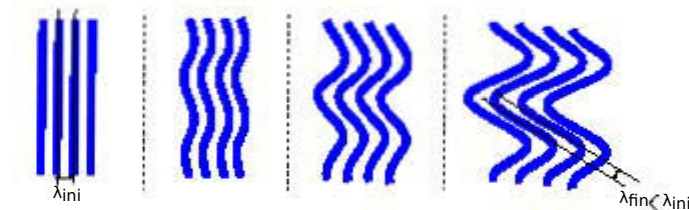


FIGURE 7 – Illustration de l'instabilité de torsion Zigzag tirée de [18]

L'instabilité en rouleaux croisés est une instabilité directement liée à l'intensité de la convection. Un ensemble de rouleaux instables est progressivement remplacé par un autre réseau de rouleaux qui se développe orthogonalement au détriment du premier. La Figure 8 illustre le développement de cette instabilité. Comme pour les instabilités précédentes,

la nouvelle structure est caractérisée par un nombre d'onde plus proche du nombre d'onde critique.

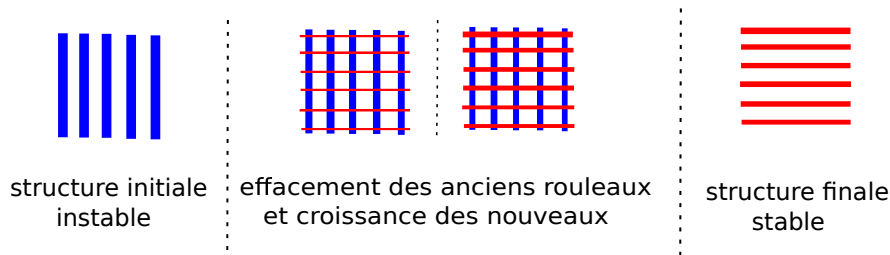


FIGURE 8 – Illustration de l’instabilité rouleaux croisés tirée de [18].

Pour des valeurs élevées du nombre de Prandtl $Pr \geq 10$, deux couches limites thermiques se développent au niveau des parois chaude et froide quand les valeurs du nombre de Rayleigh deviennent suffisamment importantes. Ces couches peuvent à leur tour devenir instables et on assiste dans ce cas à la formation d’ensembles de rouleaux « secondaires » perpendiculaires aux rouleaux primaires à proximité des plaques : on parle d’instabilité bimodale.

Pour de faibles valeurs du nombre de Prandtl, d’autres instabilités secondaires viennent délimiter les frontières du domaine de stabilité des rouleaux loin du seuil de la convection. Il s’agit des « oscillations de Busse » et de l’instabilité variqueuse oblique, toutes deux mises en évidence par Busse et ses collaborateurs. Dans [19] et [20], il est montré que la vorticité n’est pas nulle à faible nombre de Prandtl, ce qui engendre un « écoulement de dérive ». Le couplage entre cet « écoulement de dérive » et les perturbations en vitesse et en température se révèle être à l’origine de ces deux instabilités. Dans la thèse, on s’intéresse uniquement aux fluides à grands nombres de Prandtl, on ne détaille donc pas davantage la manière dont ces deux instabilités se manifestent ou l’allure de la section du « Ballon de Busse » obtenue à faible nombre de Prandtl. Le lecteur intéressé pourra trouver de plus amples informations dans [18] ou [21].

La stabilité des autres motifs de convection vis à vis d’une modulation spatiale a également été considéré dans un certain nombre de travaux. La stabilité des carrés a ainsi été étudiée par Hoyle dans [22] et par Holmedal dans [23]. En ce qui concerne les structures hexagonales, leur stabilité vis à vis d’une modulation spatiale a fait l’objet d’une série d’études dont les plus significatives sont dues à Sushchik et Tsimring [24], Hoyle [25], Echebarria et Pérez-Garcia [26] et Kuske et Milewski [27]. Les principaux résultats de ces travaux sont présentés dans les deux premiers chapitres de la thèse, on ne les explicite donc pas ici.

Les différents travaux précédents, aussi bien ceux s’intéressant aux conditions critiques que ceux cherchant à déterminer la nature du motif de convection et sa stabilité, font intervenir des fluides Newtoniens. Toutefois, dans de nombreuses situations, les fluides rencontrés ont un comportement rhéologique plus complexe. C’est le cas dans de

nombreux procédés industriels ou en géophysique où la majorité des fluides rencontrés sont non-Newtoniens. Le caractère rhéofluidifiant, décroissance non linéaire de la viscosité avec le cisaillement est le caractère le plus commun. Dans ce qui suit, on présente une revue bibliographique des travaux théoriques numériques et expérimentaux consacrés à l'influence du comportement rhéofluidifiant sur la convection de Rayleigh-Bénard et le démarrage de celle-ci. Dans les études théoriques et numériques, le caractère rhéofluidifiant peut être isolé. Par contre dans les études expérimentales, les fluides peuvent être à un certain degré viscoélastiques ou thixotropes. Les résultats expérimentaux doivent être interprétés avec précaution.

A notre connaissance, la première étude expérimentale de convection de Rayleigh-Bénard dans une couche de fluide rhéofluidifiant confinée entre deux parois a été effectuée par [28]. Les fluides utilisés sont des solutions aqueuses de Methocel à 1% en masse, de Carbopol 934 à 0.5, 0.75 et 0.1 % en masse. Le comportement rhéologique de ces fluides est décrit par le modèle en loi puissance, $\boldsymbol{\tau} = K\Gamma^{(n_p-1)/2}\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, avec un indice de rhéofluidification, n_p , compris entre 0.4 et 1. Ici, $\boldsymbol{\tau}$ est le déviateur du tenseur des contraintes, K , la consistance, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ le tenseur des taux de déformation, et Γ son deuxième invariant. Le dispositif expérimental est cylindrique avec un rapport de diamètre sur épaisseur du fluide égal à 4. Les résultats sont présentés sous forme de corrélations reliant le nombre de Nusselt aux nombres de Rayleigh et de Prandtl dans la gamme $10^5 \leq Ra \leq 10^6$. Les nombres de Rayleigh et de Prandtl sont définis en utilisant une viscosité nominale déduite de la mise sous forme adimensionnelle des équations.

La première étude théorique portant sur la détermination du nombre de Rayleigh critique pour un fluide rhéofluidifiant, à partir duquel la convection démarre a été menée par [29]. Le comportement rhéologique du fluide est décrit par un modèle en loi puissance. Pour contourner la singularité de ce modèle à cisaillement nul, qui ne permet pas d'effectuer une analyse linéaire de stabilité classique, les auteurs étendent sans justification, l'approche énergétique développée par [30] pour un fluide Newtonien à un fluide en loi puissance. De plus, les auteurs utilisent, les mêmes fonctions propres que celles obtenues en Newtonien ! Moyennant ces approximations, les auteurs trouvent que la valeur critique du nombre de Rayleigh généralisé décroît lorsque l'indice de rhéofluidification diminue. Cette tendance a été vérifiée expérimentalement par les auteurs en utilisant des solutions aqueuses de CarboxyMéthylCellulose (CMC) à différentes concentrations. Par ailleurs, Liang et Acrivos [31] ont étudié expérimentalement la convection de Rayleigh-Bénard pour des solutions aqueuses de polyacrylamide (Separan AP30) à 0.1 et 0.5% en masse. Ces fluides ont l'avantage de présenter clairement un plateau Newtonien pour les très faibles cisaillements. Les auteurs constatent que la valeur critique du nombre de Rayleigh défini avec la viscosité à cisaillement nul est la même que celle pour un fluide Newtonien. Ce résultat n'est pas étonnant puisque l'état de base correspond à une situation où le fluide est au repos i.e à cisaillement nul. Dans [31], les auteurs montrent que le coefficient de transfert de chaleur augmente avec le caractère rhéofluidifiant.

La première étude numérique du démarrage de la convection et de l'évolution du coefficient de transfert de chaleur pour un fluide rhéofluidifiant a été effectuée par [32]. Leur démarche sera d'ailleurs reprise par la suite par plusieurs auteurs. Les équations aux perturbations en situation bidimensionnelle sont écrites en termes de fonction de courant et vorticité. Elles sont r solv es par une méthode aux différences finies dans un domaine carré. Deux modèles rhéologiques ont été considérés : modèle en loi puissance et modèle d'Ellis $\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta_0} \left(1 + \left| \frac{\sqrt{\tau_{II}}}{\tau_{12}} \right|^{n_e - 1} \right)$, où τ_{II} est le deuxième invariant du déviateur du tenseur des contraintes. Globalement, l'approche utilisée consistait à déterminer une solution stationnaire à un nombre de Rayleigh élevé, ensuite faire décroître le nombre de Rayleigh jusqu'à atteindre le régime conductif. Les auteurs montrent que la valeur critique du nombre de Rayleigh à partir de laquelle la convection démarre diminue lorsque l'indice de structure décroit. La notion de bifurcation sous critique n'est pas évoquée. Il est aussi montré que le coefficient de transfert de chaleur augmente avec le caractère rhéofluidifiant. Une corrélation reliant le nombre de Nusselt à l'indice de structure n_p est proposée [33]

$$\frac{Nu}{Nu_{newt}} = 0.87n_p^2 - 2.28n_p + 2.41 \quad (25)$$

qui peut être utilisée pour $Ra \leq Ra_c \leq 2Ra_c$ avec $0.5 \leq n_p < 1$. Un accord qualitatif avec les résultats expérimentaux [29] est observé.

La décroissance du nombre de Rayleigh critique avec la diminution de l'indice de structure pour un fluide en loi puissance a été confirmée par des simulations numériques 2D effectuées par [34] et [35]. Dans cette dernière référence, les auteurs montrent clairement que pour un nombre de Rayleigh donné, l'intensité de convection augmente avec le caractère rhéofluidifiant. C'est ce qui explique l'augmentation du coefficient de transfert de chaleur.

[36] a étudié numériquement, la structure de l'écoulement et du champ thermique en convection de Rayleigh-Bénard pour un fluide rhéofluidifiant avec un nombre de Prandtl très élevé de façon à négliger les termes d'inertie. Le comportement rhéologique du fluide est décrit par un modèle en loi puissance. Les résultats obtenus mettent en évidence des modifications fondamentales dans la structure de l'écoulement lorsque l'indice de structure n_p est inférieur à 0.3. Ces modifications se caractérisent en particulier par le développement de zones de fluide stagnant avec une forte viscosité. Pour corréler l'augmentation du coefficient de transfert avec la diminution de l'indice de structure, Parmentier utilise dans [36] un nombre de Rayleigh basé sur une viscosité moyenne pondérée par le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation :

$$\bar{\mu} = \frac{\int_S \mu \Gamma dS}{\int_S \Gamma dS}, \quad (26)$$

où S définit le domaine délimité verticalement par les deux parois et horizontalement par une période. Cette modélisation se révèle pertinente pour des fluides faiblement à

modérément rhéofluidifiant ($n_p > 0.5$).

Balmforth et Rust [37] ont effectué une analyse faiblement non linéaire de la convection de Rayleigh-Bénard pour un fluide rhéofluidifiant. En considérant une situation bidimensionnelle, avec des conditions aux limites du type glissement parfait, les auteurs montrent que lorsque le degré de rhéofluidification défini par $\alpha = \left(\frac{d\mu}{dT}\right)_{\Gamma=0}$ est supérieur à $24/(601\pi^4)$ la bifurcation du régime conductif au régime convectif devient sous critique. Dans l'expression précédente, il est supposé qu'à cisaillement nul, le comportement rhéologique est régulier et la viscosité est finie. Pour un fluide du type loi puissance, l'état conductif est inconditionnellement stable vis à vis de perturbations infinitésimales. Bouteraa et al [38] ont étendu les calculs de [37] au cas général de glissement avec frottement. En situation de non-glissement, les auteurs trouvent $\alpha_c \approx 2.15 \cdot 10^{-4}$. Ils montrent aussi que la variation non linéaire de la viscosité avec le cisaillement favorise une convection sous forme de rouleaux contrairement à ce qui a été indiqué par [39].

Les simulations numériques de convection de Rayleigh-Bénard pour un fluide en loi puissance dans une cavité horizontale allongée ont été reprises par [40]. Les auteurs montrent clairement que la bifurcation est sous critique et que l'amplitude de la perturbation pour le démarrage de la convection augmente avec le caractère rhéofluidifiant. Cette étude a été reprise dans [41] pour un fluide de Carreau dans une cavité ayant un rapport d'aspect de 1 ou de 10. La constante de temps adimensionnelle dans le modèle rhéologique est fixée à $\lambda = 0.4$. Dans le même ordre d'idées, Jenny et al [42] se sont focalisés sur les fluides fortement rhéofluidifiants, où la constante de temps adimensionnelle du fluide $\lambda \gg 1$. Les auteurs définissent, une viscosité caractéristique de telle façon que le nombre de Rayleigh nécessaire pour le démarrage de la convection dans le cas d'une bifurcation sous-critique soit égale à la valeur critique en Newtonien. Une corrélation est proposée pour la viscosité effective : $\mu_e \approx n^{2.2411} \lambda^{n-1}$.

Les études expérimentales de thermoconvection pour des fluides rhéofluidifiants sont rares. Ceci est probablement lié aux difficultés rencontrées dans le choix de fluide modèle où d'autres caractères non-Newtoniens tels que la viscoélasticité ne soient pas dominants. En outre, les fluides non-Newtoniens sont généralement très visqueux. Un écart de température assez important doit donc être appliqué entre les deux parois pour que la convection démarre. Les hypothèses de Boussinesq risquent de ne plus être valables, au démarrage même de la convection.

Récemment des études expérimentales [43] [44] ont été effectuées au laboratoire. Les fluides utilisés sont des solutions aqueuses de Xanthane-Gum (polymère semi-rigide) à différentes concentrations. La rhéologie de ces fluides est décrite par le modèle de Carreau. Le dispositif expérimental est cylindrique avec un diamètre de 120 mm et une hauteur (épaisseur de la couche fluide) de 15 mm et 20 mm. Ce faible rapport d'aspect

a été imposé par des raisons techniques liées à l'utilisation d'un instrument d'Imagerie par Résonance Magnétique pour mesurer le champ de vitesse à l'intérieur de la cellule. Les motifs de convection sont mis en évidence par ombroscopie. La figure 9 montre un exemple de résultat obtenu pour une solution de Xanthan à 0.1% en masse. Bien que la taille de la cellule soit du même ordre que la période spatiale des structures convectives, elle montre clairement la complexité dans l'organisation des motifs.

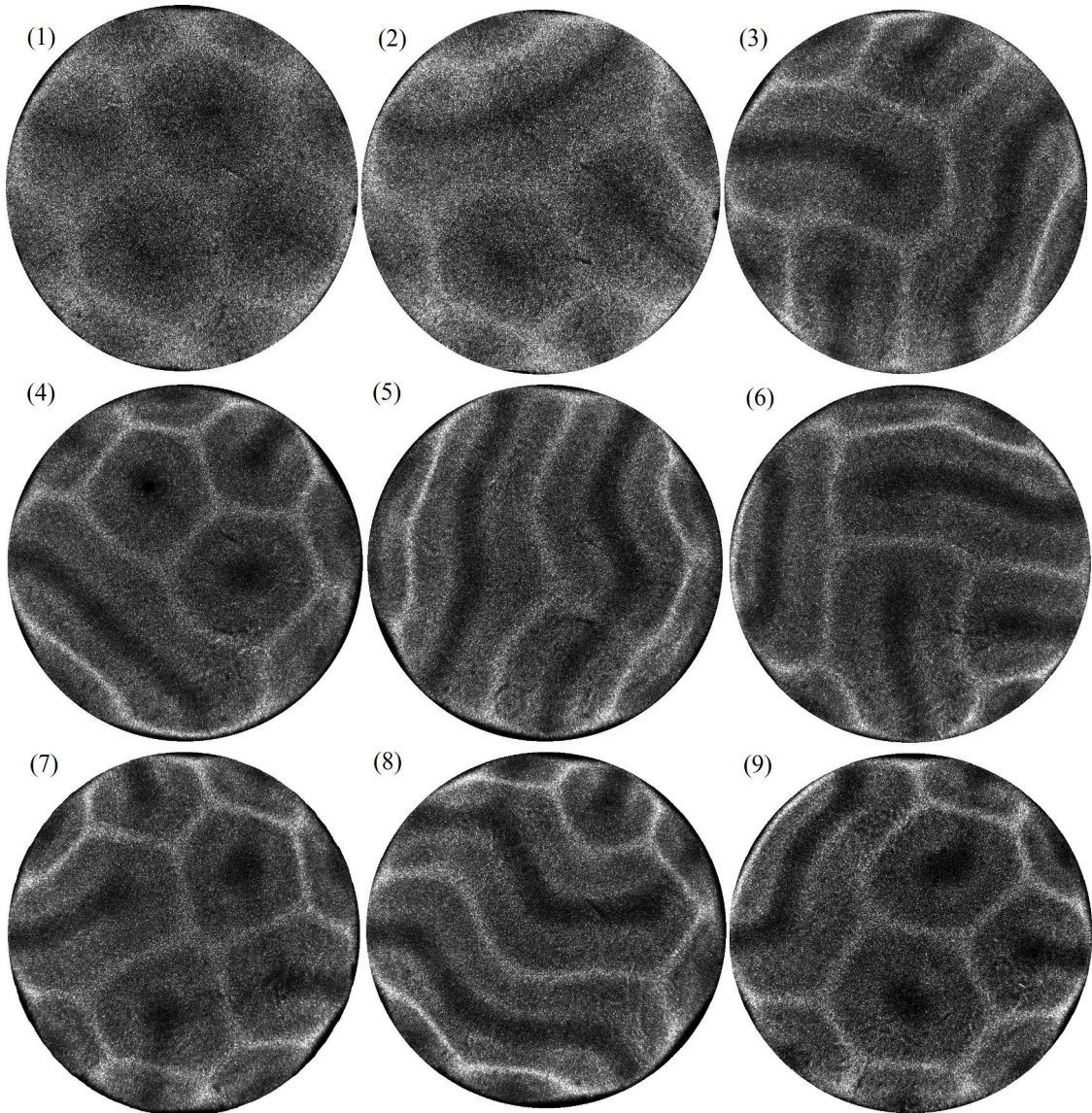


FIGURE 9 – Transition hexagones-rouleaux pour une solution de Xanthan à 0.1% avec un rapport d'aspect de 3. (1) $\epsilon = 0$; (2) $\epsilon = 1$; (3) $\epsilon = 1.40$; (4) $\epsilon = 1.44$; (5) $\epsilon = 1.45$; (6) $\epsilon = 1.46$; (7) $\epsilon = 1.48$; (8) $\epsilon = 1.50$; (9) $\epsilon = 1.52$

La présente thèse s'inscrit directement dans la continuité des travaux menés par Bouteraa [43]. Il s'agit d'étudier l'influence de l'effet rhéofluidifiant d'une part sur les instabilités secondaires survenant à proximité du seuil de la convection et d'autre part

sur le devenir des motifs de convection loin des conditions critiques. Les deux premiers chapitres de la thèse répondent au premier point tandis que le troisième chapitre est consacré au second.

Dans le premier chapitre de la thèse, on considère des plaques de conductivité finie où les motifs de convection sont soit des rouleaux soit des carrés. Une analyse multi-échelles est menée afin de mettre en évidence l'influence de la rhéologie sur les différentes instabilités secondaires limitant la gamme de nombres d'onde stables des différentes structures. Dans le deuxième chapitre de la thèse, on s'intéresse à un fluide thermodépendant et rhéofluidifiant pour lequel la convection s'organise en rouleaux ou en hexagones. A nouveau, une approche faiblement non linéaire est utilisée pour étudier l'impact du comportement rhéofluidifiant sur la stabilité des motifs vis à vis d'une modulation spatiale à proximité du seuil. Dans le troisième et dernier chapitre, une approche fortement non linéaire reposant sur une procédure de continuation est mise en œuvre. On considère un fluide purement rhéofluidifiant placé entre deux plaques parfaitement conductrices. Dans cette configuration, les rouleaux de convection sont les motifs rencontrés. Il s'agit de déterminer de proche en proche les grandeurs caractéristiques de l'écoulement comme les champs de vitesse, de température ou encore le nombre de Nusselt au fur et à mesure que la convection gagne en intensité.

Le premier chapitre a fait l'objet d'un article intitulé « Instabilities of convection patterns in a shear-thinning fluid between plates of finite conductivity », paru dans *Physical Review E* en Novembre 2017 : il est ainsi écrit en anglais. Le deuxième chapitre qui constitue un projet d'article l'est également.

Bibliographie

- [1] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Rev. Gén. Sci. pures et appl.* 11, pages 1261–1271 & 1309–1328, 1900.
- [2] Lord Rayleigh. On the convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.* 32, pages 529–546, 1916.
- [3] JRA Pearson. On convection cells induced by surface tension. *Journal of fluid mechanics*, 4(5) :489–500, 1958.
- [4] M Rieutord. *Fluid Dynamics : An Introduction*. Springer, 2015.
- [5] A. Pellew and Southwell R.V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. *Proc. R. Soc. Lond.* 176, pages 312–343, 1940.
- [6] RJ Goldstein and DJ Graham. Stability of a horizontal fluid layer with zero shear boundaries. *The Physics of Fluids*, 12(6) :1133–1137, 1969.
- [7] DTJ Hurle, Eric Jakeman, and Edward Roy Pike. On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 296(1447) :469–475, 1967.

- [8] Mark Webber. The destabilizing effect of boundary slip on Bénard convection. *Mathematical methods in the applied sciences*, 29(7) :819–838, 2006.
- [9] L-S Kuo and P-H Chen. Effects of slip boundary conditions on Rayleigh-Bénard convection. *Journal of Mechanics*, 25(2) :205–212, 2009.
- [10] W. V. R. Malkus and G. Veronis. Finite amplitude cellular convection. *J. Fluid Mech.* 4, pages 225–260, July 1958.
- [11] C. Misbah. *Dynamiques complexes et morphogénèse : Introduction aux sciences non linéaires*. Springer, 2011.
- [12] A Schlüter, D Lortz, and F Busse. On the stability of steady finite amplitude convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 23(1) :129–144, 1965.
- [13] FH Busse. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(4) :625–649, 1967.
- [14] DR Jenkins and MRE Proctor. The transition from roll to square-cell solutions in Rayleigh-Bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 139 :461–471, 1984.
- [15] FH Busse and H Frick. Square-pattern convection in fluids with strongly temperature-dependent viscosity. *Journal of fluid mechanics*, 150 :451–465, 1985.
- [16] F.H. Busse. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. Math. Phys.* 46, pages 140–150, 1967.
- [17] F H Busse and JA Whitehead. Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 47(2) :305–320, 1971.
- [18] P Manneville. *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Commissariat à l'énergie atomique, year=1991.
- [19] FH Busse. The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 52(1) :97–112, 1972.
- [20] FH Busse and RM Clever. Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number. *Journal of Fluid Mechanics*, 91(2) :319–335, 1979.
- [21] R.B. Hoyle. *Pattern formation : An Introduction to Methods*. Cambridge University Press, 2006.
- [22] R.B Hoyle. Long wavelength instabilities of square patterns. *Physica D*, pages 198–223, 1993.
- [23] B. Holmedal, M. Tveitereid, and E. Palm. Planform selection in Rayleigh-Bénard convection between finite slabs. *J. Fluid Mech.* 537, pages 255–270, March 2005.
- [24] MM Sushchik and LS Tsimring. The Eckhaus instability in hexagonal patterns. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 74(1-2) :90–106, 1994.
- [25] RB Hoyle. Nonlinear phase diffusion equations for the long-wave instabilities of hexagons. *Applied mathematics letters*, 8(3) :81–85, 1995.
- [26] Blas Echebarría and C Pérez-García. Phase instabilities in hexagonal patterns. *EPL (Europhysics Letters)*, 43(1) :35, 1998.

- [27] R Kuske and P Milewski. Modulated two-dimensional patterns in reaction–diffusion systems. *European Journal of Applied Mathematics*, 10(2) :157–184, 1999.
- [28] Carl St Pierre and Chi Tien. Experimental investigation of natural convection heat transfer in confined space for non-newtonian fluid. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 41(3) :122–127, 1963.
- [29] C. Tien, H. Sheng, and Z.S. Sun. Thermal instability of a horizontal layer of non-newtonian fluid heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 12(9) :1173–1178, 1969.
- [30] Subrahmanyam Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation, 1981.
- [31] SF Liang and A Acrivos. Experiments on buoyancy driven convection in non-newtonian fluid. *Rheologica Acta*, 9(3) :447–455, 1970.
- [32] Hiroyuki Ozoe and Stuart W Churchill. Hydrodynamic stability and natural convection in oswald-de waele and ellis fluids : The development of a numerical solution. *AIChE Journal*, 18(6) :1196–1207, 1972.
- [33] H Ozoe. Hydrodynamic stability and natural convection in newtonian and non-newtonian fluids heated from below. In *AIChE Symposium Series Heat Transfer*, volume 69, pages 126–133, 1973.
- [34] Hideo Inaba, Chuanshan Dai, and Akihiko Horibe. Numerical simulation of Rayleigh–Bénard convection in non-newtonian phase-change-material slurries. *International journal of thermal sciences*, 42(5) :471–480, 2003.
- [35] M Lamsaadi, M Naimi, and M Hasnaoui. Natural convection heat transfer in shallow horizontal rectangular enclosures uniformly heated from the side and filled with non-newtonian power law fluids. *Energy conversion and Management*, 47(15-16) :2535–2551, 2006.
- [36] EM Parmentier. A study of thermal convection in non-newtonian fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 84(1) :1–11, 1978.
- [37] Neil J Balmforth and Alison C Rust. Weakly nonlinear viscoplastic convection. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1-3) :36–45, 2009.
- [38] Mondher Bouteraa, Chérif Nouar, Emmanuel Plaut, Christel Métivier, and Aurélie Kalck. Weakly nonlinear analysis of rayleigh–bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection. *Journal of Fluid Mechanics*, 767 :696–734, 2015.
- [39] Bashar Albaalbaki and Roger E Khayat. Pattern selection in the thermal convection of non-newtonian fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 668 :500–550, 2011.
- [40] Z Alloui, N Ben Khelifa, H Beji, P Vasseur, and A Guizani. The onset of convection of power-law fluids in a shallow cavity heated from below by a constant heat flux. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 196 :70–82, 2013.

- [41] Ouahiba Benouared, Mahmoud Mamou, and Noureddine Ait Messaoudene. Numerical nonlinear analysis of subcritical rayleigh-bénard convection in a horizontal confined enclosure filled with non-newtonian fluids. *Physics of Fluids*, 26(7) :073101, 2014.
- [42] Mathieu Jenny, Emmanuel Plaut, and Antoine Briard. Numerical study of subcritical rayleigh-bénard convection rolls in strongly shear-thinning carreau fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 219 :19–34, 2015.
- [43] M. Bouteeraa. *Convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants : Approche théorique et expérimentale*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2016.
- [44] Mohamed Darbouli, Christel Métivier, Sébastien Leclerc, Chérif Nouar, Mondher Bouteera, and Didier Stemmelen. Natural convection in shear-thinning fluids : Experimental investigations by mri. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 95 :742–754, 2016.

Chapitre 1

Instabilities of convection patterns for a shear-thinning fluid between slabs of finite conductivities

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1.1 | Abstract | 28 |
| 1.2 | Introduction | 28 |
| 1.3 | Problem formulation | 31 |
| 1.4 | Linear stability analysis | 34 |
| 1.4.1 | Critical conditions | 34 |
| 1.4.2 | Characteristic time of the instability | 37 |
| 1.5 | Pattern selection at the onset of convection | 37 |
| 1.5.1 | Principles of the amplitude expansion method : case of square | 38 |
| 1.5.2 | Nature of the primary bifurcation | 39 |
| 1.5.3 | Convective patterns at threshold | 39 |
| 1.5.4 | Flow structure, viscosity and temperature fields | 41 |
| 1.5.5 | Comparison between roll and square solutions for fixed χ and λ | 43 |
| 1.5.6 | Heat transfer | 43 |
| 1.6 | Secondary instabilities | 46 |
| 1.6.1 | Stability of a roll modulated solution | 46 |
| 1.6.2 | Stability of a square modulated solution | 51 |
| 1.7 | Numerical solutions of amplitude equations | 54 |
| 1.7.1 | Numerical simulation | 54 |
| 1.7.2 | Numerical results | 56 |
| 1.8 | Conclusion | 63 |
| 1.A | Eigenvalues versus Q_1 and Q_2 | 64 |
| 1.B | Stability of the ETD2 scheme | 64 |
| 1.B.1 | Case of a single ODE | 64 |
| 1.B.2 | Extension to two coupled Ginzburg-Landau equations | 66 |

1.1 Abstract

Rayleigh-Bénard convection in a horizontal layer of a non-Newtonian fluid between slabs of arbitrary thickness and finite thermal conductivity is considered. The first part of the paper deals with the primary bifurcation and the relative stability of convective patterns at threshold. Weakly nonlinear analysis combined with Stuart-Landau equation is used. The competition between squares and rolls, as a function of the shear-thinning degree of the fluid, the slabs' thickness and the ratio of the thermal conductivity of the slabs to that of the fluid, is investigated. Computations of heat transfer coefficients are in agreement with the maximum heat transfer principle. The second part of the paper concerns the stability of the convective patterns towards spatial perturbations and the determination of the band width of the stable wavenumber in the neighborhood of the critical Rayleigh number. The approach used is based on the Ginzburg-Landau equations. The study of rolls stability shows that : (i) for low shear-thinning effects, the band of stable wavenumbers is bounded by zigzag instability and cross-roll instability. Furthermore, the marginal cross-roll stability boundary enlarges with increasing shear-thinning properties ; (ii) for high shear-thinning effects, Eckhaus instability becomes more dangerous than cross-roll instability. For square patterns, the wavenumber selection is always restricted by zigzag instability and by 'rectangular Eckhaus' instability. In addition, the width of the stable wavenumber decreases with increasing shear-thinning effects. Numerical simulations of the planform evolution are also presented to illustrate the different instabilities considered in the paper.

1.2 Introduction

Studies on patterns formation and their stability in Rayleigh-Bénard convection for Newtonian fluids have been considered in several papers. A review can be found in books of Getling [1] and Koschmieder [2] and more recently in Bodenschatz *et al.* [3] where the most significant progress in the field is identified. Comparatively to the Newtonian case, only a limited number of studies were devoted to non-Newtonian fluids and still fewer to nonlinear developments. Yet, non-Newtonian fluids intervene in a very broad range of industrial processes such as polymer and foodstuffs processing and in complex physical phenomena such as the convective movements in the earth's mantle. Here, we focus on the shear-thinning behavior, i.e. non linear decrease of the effective viscosity with the shear-rate, which is the most common property of non-Newtonian fluids. In recent articles ([4],[5] and [6]), the nature and the stability of patterns which emerge in Rayleigh-Bénard convection for shear-thinning fluids have been studied using a weakly non linear analysis. Boussinesq approximations have been adopted and the slabs have been considered as

perfectly conducting. Using Carreau model to describe the shear-thinning behavior of the fluid, it has been shown in [6] that : (i) rolls are the only stable convective patterns at threshold and (ii) there is a critical value of the shear-thinning degree α defined by Eq.(1.12) above which the bifurcation becomes subcritical.

Most analyzes consider ideal situations where the bounding horizontal surfaces are perfect conductors of heat. However in many laboratory experiments and in engineering and geophysical problems, the slabs have a finite conductivity and they are not better conductor than the fluid itself. In this case, the temperature disturbances do not vanish on the boundaries. The thermal boundary conditions that have to be satisfied are the continuity of temperature and heat flux. According to Cerisier *et al.* [7], the temperature fluctuation occurring in the liquid close to a nearly insulating slab distorts the temperature distribution. This temperature distortion can lead to an instability of the fluid layer. As a consequence, at threshold, the temperature gradient is small and the fluid organizes in a pattern with a small wavenumber. Furthermore, theoretical and experimental studies show that squares may be the convection patterns at the onset instead of rolls. Experimental evidence of square patterns was reported by Legal Pocheau and Croquette [8] and Legal and Croquette [9]. The competition between roll and square patterns for a Newtonian fluid has been examined in weakly supercritical Rayleigh-Bénard convection by Busse and Riahi [10], Proctor [11] and Jenkins and Proctor [12]. The results are presented in terms of the Prandtl number Pr , and the ratio χ of the thermal conductivities of slabs and fluid. It has been shown for instance that for $Pr \geq 10$ and for slabs with thickness equal to the width of the fluid layer, that the convective pattern at threshold is in form of squares when $\chi < \chi_c = 1$. These studies were extended recently to shear-thinning fluids by Bouteraa and Nouar [13]. It has been found that the critical value χ_c , below which squares are stable, decreases with increasing shear-thinning effects. Recently, experiments were done by Kebiche [14], using *carboxymethylcellulose* (CMC) solutions as shear-thinning fluid. In the Rayleigh-Bénard setup, the slabs are made of polycarbonate with a ratio of thermal conductivities $\chi \approx 0.25$. PIV measurements done in one vertical section do not allow the determination of convection pattern type.

These studies are valid only in the immediate vicinity of the threshold with perfectly periodic pattern. However, as the Rayleigh number Ra is increased above the onset Ra_c , the growth-rate of the perturbation is positive for any wavenumber within a band $\sqrt{\epsilon}$ with $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$, around the critical wavenumber k_c . A wavepacket centered on k_c can be constructed with the unstable modes. The corresponding convective pattern is modulated spatially on a scale of $\mathcal{O}(1/\sqrt{\epsilon})$. The stability analysis of these convective patterns with respect to long wavelength perturbations is of great interest. It allows in particular, the determination of the range of stable wavenumbers. Typical instability mechanisms are Eckhaus (E), zigzag (ZZ) and cross-roll (CR) instabilities [15]. Eckhaus instability is a phase instability which acts on the roll phase to change the wavelength,

compressing or dilating the pattern. Zigzag is also a phase instability which arises from perturbations parallel to the roll axes : it creates undulations along the roll axes when the wavelength is too large. Cross-roll instability is an amplitude instability which consists of a set of rolls growing perpendicularly to the original pattern. For a Newtonian fluid with perfectly heat conductive slabs, the instability mechanisms which tend to limit the stability region of rolls depend on the Prandtl number and on the boundary conditions, rigid or stress-free boundary conditions, as shown by Busse [15] and Bolton and Busse [16]. At large Prandtl number, say $Pr > 10$, with no-slip conditions the region of stable convection rolls is bounded by the zigzag instability and the cross-roll instability, which is followed by the bimodal convection when Ra is increased. At low Prandtl number, say $Pr < 1$, Eckhaus instability becomes more dangerous than cross-roll instability and the domain of stable zigzag enlarges as Pr decreases. Furthermore, other specific secondary instabilities like “skewed-varicose instability” and oscillatory instability [17] participate in bounding the stability domain of rolls. Generally, non-Newtonian fluids are highly viscous and so the corresponding Prandtl number is large. Therefore, only universal secondary instabilities, Eckhaus, zigzag and cross-roll, are considered in this paper.

Square patterns are also subject to long wavelength instabilities. In the case of poorly conducting slabs and for Newtonian fluids, Hoyle [18] has shown that the range of stable wavenumbers is restricted by zigzag instability and by Eckhaus rectangular instability. According to Hoyle [18], this latter instability has a three-dimensional character since the system responds differently in each of the two horizontal directions. It behaves like, one of two rolls, that constitute square pattern, grows locally at the expense of the other. This is why, Holmedal *et al.* [19] called this instability “*Long wavelength cross-roll instability*”. This study was extended by Holmedal [19] to the general case of slabs with different finite conductivities and thicknesses of the slabs.

The objective of this paper is to investigate the influence of shear-thinning effects on the stability of the convective patterns and the width of the stable band of wavenumbers in Rayleigh-Bénard convection with slabs of finite conductivity and arbitrary thickness. The rheological law introduces additional nonlinearity and coupling between flow variables. This additional nonlinearity will induce stronger interactions between the two sets of rolls that constitute square patterns, than in the Newtonian case. Therefore, shear-thinning effects will modify not only the range of stable wavenumber but also the more restrictive instability mechanism. A weakly nonlinear analysis based on the amplitude equations formalism ([18], [20]) is adopted as a first approach to examine nonlinear effects arising from the rheology.

To our knowledge, the present study is the first one which considers the influence of the rheology on secondary instabilities. The structure of the paper is as follows. In §2 the problem is formulated. Linear stability analysis is briefly considered in §3. The nature of the primary bifurcation and pattern selection are discussed in §4. It is observed that

shear-thinning effects favor formation of rolls. The stability of the convective patterns with respect to inhomogeneous spatial perturbations is investigated in §5, using the amplitude equations formalism. Influence of shear-thinning effects is highlighted. In §6, time evolution of the convective pattern is illustrated from the numerical simulation of amplitude equations. The paper ends with a conclusion where the relevant results are summarized.

1.3 Problem formulation

We consider a shear-thinning fluid layer of infinite horizontal extent which is heated from below and cooled from above. We assume that the rigid slabs which enclose the fluid have arbitrary conductivities and thicknesses. The thermal conductivity and diffusivity are noted \hat{K} and $\hat{\kappa}$ for the fluid and \hat{K}_p and $\hat{\kappa}_p$ for the slabs. We define χ as the ratio of \hat{K}_p and \hat{K} and we assume as in [11] and [21] that $\chi = \frac{\hat{K}_p}{\hat{K}} = \frac{\hat{\kappa}_p}{\hat{\kappa}}$. This assumption is reasonable for several couples (fluid, slab) where the ratio of the thermal capacities of the fluid and the slabs $r = \frac{(\hat{\rho}\hat{C}_p)_{fluid}}{(\hat{\rho}\hat{C}_p)_{slabs}}$ remains of order 1 : for instance, $r(\text{water, copper}) = 1.22$ and $r(\text{glycerin, glass}) = 1.67$.

Dimensional quantities are denoted with the symbol hat ($\hat{\cdot}$). In the following, we note \hat{d} the depth of the fluid layer, $\Delta\hat{T} = \hat{T}_1 - \hat{T}_2$, the temperature difference between the outer surfaces of the upper and lower slabs. Because of the thermal expansion, the temperature difference between the two plates induces a vertical density stratification. Heavy cold fluid is above a warm light fluid. For small $\Delta\hat{T}$, the fluid remains motionless and the heat is transferred by conduction with a linear temperature profile across the fluid layer. In the fluid, $-\hat{d}/2 < \hat{z} < \hat{d}/2$, the hydrostatic solution and the temperature profile are :

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{z}} = -\hat{\rho}_0\hat{g} \left[1 - \hat{\beta} \left(\hat{T} - \hat{T}_0 \right) \right] \quad \text{and} \quad \hat{T}_{cond} = \hat{T}_0 - \frac{\Delta\hat{T}}{1 + 2\Lambda/\chi} \frac{\hat{z}}{\hat{d}}, \quad (1.1)$$

where \hat{g} is the acceleration due to gravity and Λ the dimensionless thickness of slabs. The z -axis is directed upwards with the origin located at the middle of the fluid layer. The reference temperature \hat{T}_0 is the temperature at the middle of the fluid layer, $\hat{\rho}_0$ the fluid density at \hat{T}_0 and $\hat{\mu}_0$ is the zero-shear rate viscosity at \hat{T}_0 . The temperature difference between the top and the bottom of the fluid layer is $\Delta\hat{T}_f = \Delta\hat{T} [1 + 2\Lambda/\chi]$. The temperature profiles in top and bottom plates are

$$\hat{T}_{cond} = \hat{T}_0 + \frac{\Delta\hat{T}}{2\Lambda + \chi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\chi - \frac{\hat{z}}{\hat{d}} \right] \quad ; \quad \frac{\hat{d}}{2} \leq \hat{z} \leq \left(\frac{1}{2} + \Lambda \right) \hat{d} \quad (1.2)$$

and

$$\hat{T}_{cond} = \hat{T}_0 + \frac{\Delta\hat{T}}{2\Lambda + \chi} \left[\frac{1}{2}\chi - \frac{1}{2} - \frac{\hat{z}}{\hat{d}} \right] \quad ; \quad - \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \hat{d} \leq \hat{z} \leq -\frac{\hat{d}}{2}. \quad (1.3)$$

When the top and bottom plates are poor thermal conductors, a large part of $\Delta\hat{T}$ occurs across the plates, and remains only a small part $\Delta\hat{T}_f$ of $\Delta\hat{T}$, acting as a driving force for the convection. When $\Delta\hat{T}_f$ exceeds a critical value, the convection sets in and convective patterns emerge. The stability of the hydrostatic solution is considered by introducing temperature and pressure perturbations as well as a fluid motion. The fluid is incompressible and Boussinesq approximations are adopted. We use \hat{d} , $\hat{\mu}_0$, $\frac{\hat{d}^2}{\hat{\kappa}}$, $\frac{\hat{\kappa}}{\hat{d}}$, $\frac{\hat{\rho}_0\hat{\kappa}^2}{\hat{d}^2}$ and $\frac{\Delta\hat{T}}{\text{Ra}}$ as characteristic scales of length, viscosity, time, velocity, pressure and temperature. Using these scales, the perturbation equations read

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \theta \mathbf{e}_z + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \text{Ra } w + \Delta \theta, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \chi \Delta \theta_p, \quad (1.7)$$

where $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$, p are respectively the velocity and pressure perturbations, θ and θ_p are temperature perturbations in the fluid and the slabs respectively and $\boldsymbol{\tau}$ the deviatoric of the stress tensor. The Prandtl Pr and Rayleigh Ra numbers are defined by :

$$\text{Pr} = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0\hat{\kappa}} \quad \text{Ra} = \frac{\hat{\rho}_0\hat{g}\hat{\beta}\Delta\hat{T}\hat{d}^3}{\hat{\kappa}\hat{\mu}_0}.$$

We consider a purely viscous shear-thinning fluid,

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\Gamma)\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (1.8)$$

where Γ is the second invariant of the strain-rate tensor :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij} ; \quad \dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (1.9)$$

where v_i are the components of the velocity and x_i are the spatial coordinates.

Concerning the nonlinear rheological law $\mu(\Gamma)$, we have used a Carreau model [22]. In dimensional form, it is given by :

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty} = (1 + \hat{\lambda}^2 \hat{\Gamma})^{\frac{n_c - 1}{2}}, \quad (1.10)$$

where $\hat{\mu}_\infty$ is the infinite-shear viscosity, $\hat{\mu}_0$ the zero-shear viscosity, $\hat{\lambda}$ a characteristic time of the fluid, n_c the shear-thinning index. For several polymer solutions, $\hat{\mu}_\infty \ll \hat{\mu}_0$ [23]. Hence neglecting $\hat{\mu}_\infty$ with respect to $\hat{\mu}_0$, we have in dimensionless form :

$$\mu = (1 + \lambda^2 \Gamma)^{\frac{n_c - 1}{2}}, \quad (1.11)$$

A Taylor series expansion of μ around the base state (where the fluid is at rest) allows to define the degree of shear-thinning of the fluid as :

$$\alpha = \left| \frac{d\mu}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=0} = \frac{1-n_c}{2} \lambda^2. \quad (1.12)$$

No-slip and non penetration boundary conditions as well as continuity of temperature and heat flux at the interface slabs-fluid read :

$$\mathbf{v} \left(z = \pm \frac{1}{2} \right) = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

$$\theta \left(z = \pm \frac{1}{2} \right) = \theta_p \left(z = \pm \frac{1}{2} \right), \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \left(z = \pm \frac{1}{2} \right) = \chi \frac{\partial \theta_p}{\partial z} \left(z = \pm \frac{1}{2} \right). \quad (1.15)$$

Temperatures of the outer surfaces of the upper and lower slabs are fixed, thus :

$$\theta_p \left(z = \frac{1}{2} + \Lambda \right) = \theta_p \left(z = -\frac{1}{2} - \Lambda \right) = 0 \quad (1.16)$$

In the momentum equations, the pressure field can be eliminated using the *curl* of Eq. (2.3). We then take the *curl* of Eq. (2.3) one more time. Using the continuity equation, and projecting onto \mathbf{e}_z , we get the following evolution equations for the vertical vorticity ζ and the vertical velocity w :

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \right] = \Delta \zeta + \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times [\nabla \cdot (\mu - 1) \dot{\gamma}], \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial t} - \mathbf{e}_z \cdot [\nabla \times \nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]] \right] = \Delta^2 w + \nabla_H^2 \theta - [\nabla \times \nabla \times [\nabla \cdot (\mu - 1) \dot{\gamma}]] \cdot \mathbf{e}_z, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \text{Ra} w + \nabla^2 \theta, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \chi \nabla^2 \theta_p, \quad (1.20)$$

where

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{and} \quad \nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

From the continuity equation and the vertical vorticity definition, one can deduce the horizontal velocity components (u, v) :

$$\nabla_H^2 u = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad ; \quad \nabla_H^2 v = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (1.21)$$

The boundary conditions for w are :

$$w = Dw = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm 1/2, \quad (1.22)$$

For the temperature, the boundary conditions are :

$$\theta_p = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm (1/2 + \Lambda), \quad (1.23)$$

$$\theta = \theta_p \quad \text{at} \quad z = \pm 1/2, \quad (1.24)$$

$$D\theta = \chi D\theta_p \quad \text{at} \quad z = \pm 1/2. \quad (1.25)$$

Five dimensionless parameters appear in the governing equations : the Rayleigh number Ra , the Prandtl number Pr , the thermal conductivities ratio χ , the dimensionless thickness of the slab Λ , and the shear-thinning degree α . In the present study, $Pr = 10$. Actually, our results do not vary significantly with Pr when $Pr \geq 10$.

1.4 Linear stability analysis

1.4.1 Critical conditions

For infinitesimal perturbations, the Boussinesq equations (1.17)-(1.20) are linearized, and one obtains

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Delta \zeta, \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \Delta w}{\partial t} = \Delta^2 w + \Delta_H \theta, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = Ra w + \Delta \theta, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \chi \nabla^2 \theta_p. \quad (1.29)$$

At the linear level, the rheology of the fluid does not play any role. Furthermore, the vertical vorticity decouples and obeys a diffusion equation (1.26) and thus can be neglected in the linear theory. Assuming a spatial periodicity in the horizontal plane, we seek a normal mode solution under the form

$$\begin{bmatrix} w(x, y, z, t) \\ \theta(x, y, z, t) \\ \theta_p(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(z) \\ G_{11}(z) \\ G_{p11}(z) \end{bmatrix} \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + s t), \quad (1.30)$$

where $\mathbf{r} = (x, y)$ is the vector position in the horizontal plane, and \mathbf{k} is the wave-vector. Substituting (1.30) into (1.27)-(1.29) leads to the differential equations

$$s \text{Pr}^{-1} (D^2 - k^2) F_{11} = -k^2 G_{11} + (D^2 - k^2)^2 F_{11}, \quad (1.31)$$

$$s G_{11} = \text{Ra} F_{11} + (D^2 - k^2) G_{11}, \quad (1.32)$$

$$s G_{p11} = \chi (D^2 - k^2) G_{p11}, \quad (1.33)$$

with $k = |\mathbf{k}|$. The boundary conditions are :

$$F_{11} = DF_{11} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1 \quad (1.34)$$

$$G_{p11} = 0 \quad \text{at} \quad z = -\Lambda, 1 + \Lambda, \quad (1.35)$$

$$G_{11} = G_{p11} \quad \text{at} \quad z = 0, 1 \quad (1.36)$$

$$DG_{11} = \chi DG_{p11} \quad \text{at} \quad z = 0, 1. \quad (1.37)$$

The eigenvalue problem (1.31)-(1.33) with the boundary conditions (1.34)-(1.37) is solved using a Chebyshev collocation method. The marginal stability curve $\text{Ra}(k)$ is determined by the condition $s = 0$. The minimum of the marginal stability curve gives the critical Rayleigh number Ra_c and critical wavenumber k_c . We recover the results of [13] for $\Lambda = 1$ and we extend them to other thicknesses Λ on Fig.1.1. We observe that k_c and Ra_c decrease with decreasing the ratio χ of conductivities. Actually, k_c and Ra_c vary from respectively, 3.11 and 1708 to 0 and 720 ([24], [11]). An explanation of this evolution can be found in [25] in the limit of perfectly insulating slabs. From a physical point of view, such configuration means that the temperature field is fixed in the solid (or evolves on a very long time scale compared to that of the fluid). As a consequence, the temperature gradient, and therefore the energy flux, is fixed in the solid. Hence, the temperature fluctuations at the interface do not propagate inside the solid and primary bifurcation needs less energy to occur which explains the decrease of Ra_c with decreasing χ .

Remark

Linear stability analysis gives the critical Rayleigh number Ra_c for instability onset and determines the modulus k_c of the critical wave-vector \mathbf{k} of the unstable modes. The direction of \mathbf{k} is arbitrary. This orientation degeneracy is related to the isotropy of the horizontal plane [26]. There is also a pattern degeneracy that results from the linear theory itself; indeed, any superposition of normal modes

$$[w(\mathbf{r}, z), \theta(\mathbf{r}, z), \theta_p(\mathbf{r}, z)] = \sum_{\ell} c_{\ell} \exp(i\mathbf{k}_{\ell} \cdot \mathbf{r}) [F_{11}(z), G_{11}(z), G_{11p}(z)] \quad (1.38)$$

with $|\mathbf{k}_{\ell}| = k_c$ and where the c_{ℓ} 's are constant coefficients, is also a solution of the linear problem with a zero growth rate at criticality.

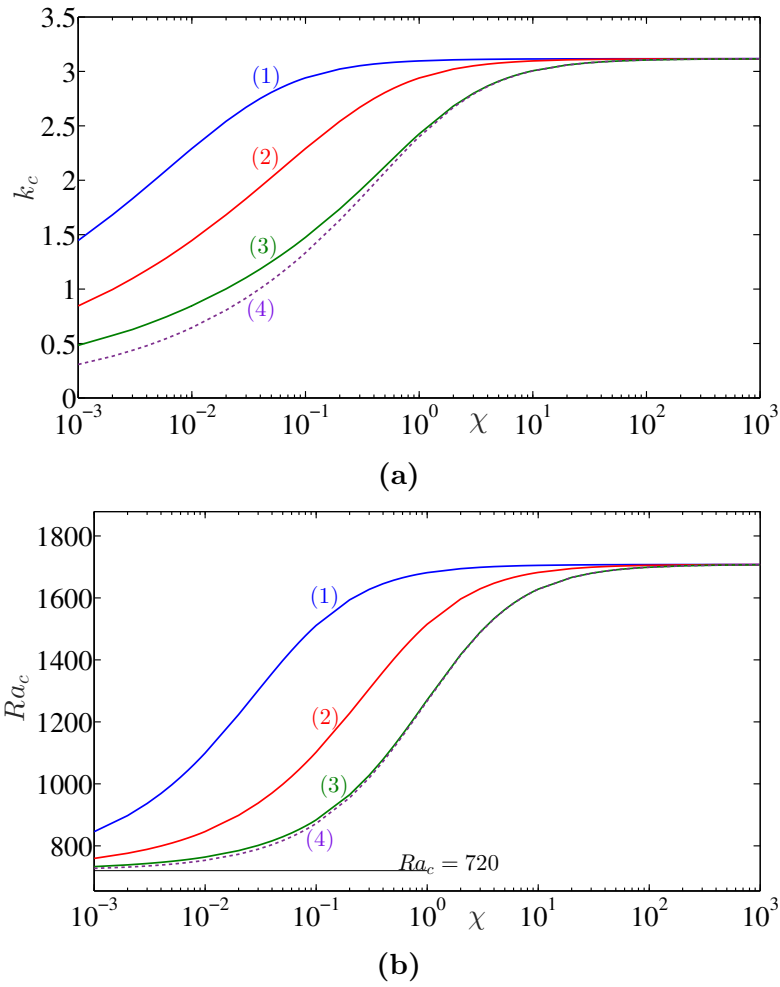


FIGURE 1.1 – Evolution of the critical wave number k_c (a) and the critical Rayleigh number Ra_c (b) as a function of ratio of the thermal conductivities χ for different values of the slab thickness Λ : (1) $\Lambda = 0.01$, (2) $\Lambda = 0.1$, (3) $\Lambda = 1$, (4) $\Lambda = 10$.

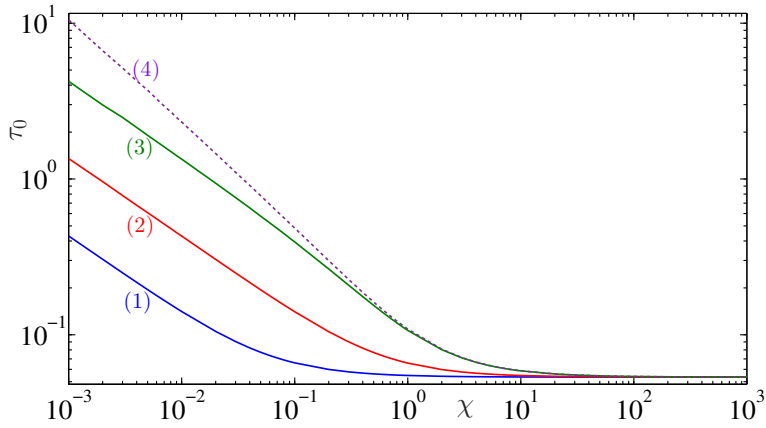


FIGURE 1.2 – Evolution of τ_0 versus χ for $\text{Pr} = 10$ and different values of Λ . (1) $\Lambda = 0.01$, (2) $\Lambda = 0.1$, (3) $\Lambda = 1$, (4) $\Lambda = 10$.

1.4.2 Characteristic time of the instability

Near the onset of convection, the growth rate s of the perturbation may be approximated using Taylor expansion

$$s = \frac{\epsilon}{\tau_0} + O(\epsilon^2) \quad \text{with} \quad \epsilon = \frac{\text{Ra} - \text{Ra}_c}{\text{Ra}_c}, \quad (1.39)$$

where τ_0 is the characteristic time for the instability to grow. It is given by $\tau_0 = \text{Ra}_c \left(\frac{\partial s}{\partial \text{Ra}} \right)_{k_c, \text{Ra}_c}$. It is obtained from the curve, temporal amplification rate s versus Rayleigh number Ra , at the critical conditions. Its evolution is represented in Fig.1.2. The increase of τ_0 with decreasing χ is related to the increase of the thermal diffusion time in the slab as \hat{k}_p diminishes. For $\chi > 10$, we recover the value corresponding to a perfect heat conductor, $\tau_0 = 0.053$. Note that τ_0 does not depend on the rheological parameters.

1.5 Pattern selection at the onset of convection

The selection of the convective pattern is determined by the non linearities of the problem, i.e. nonlinear inertial and nonlinear viscous terms. A weakly nonlinear analysis based on amplitude expansion method similar to that considered in [27], [28], [29], [30], [6] is used as a first approach to investigate nonlinear effects on the competition between convective patterns. Actually, the patterns that emerge near the onset of convection are either rolls or squares. Further calculations show that hexagons are unstable ([6], [12]).

1.5.1 Principles of the amplitude expansion method : case of square

For a square pattern, the fundamental solution in the linear regime is $\left(A e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + B e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\right) \psi_{11}$, with \mathbf{k}_2 orthogonal to \mathbf{k}_1 (the two vectors \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 have the same modulus), A and B are the complex amplitudes of the perturbation along the two wavevectors and $\psi_{11}(z)$ stands for $F_{11}(z)$, $G_{11}(z)$ or $G_{p11}(z)$. The interaction of the fundamental solution with itself, through the quadratic nonlinear inertial terms produces the first harmonic $\left(A^2 e^{2i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + B^2 e^{2i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\right) \psi_{22}$ and a coupling between modes \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 , $AB e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \psi_{AB}$. The interaction of the fundamental with its complex conjugate leads to an other coupling between modes \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 , $AB^* e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \psi_{AB^*}$, where $(\cdot)^*$ denotes the complex conjugate and a correction of the base state, $(|A^2| + |B^2|) \psi_{02}$. The feedback at the cubic order on the fundamental solution through nonlinear inertial and viscous terms is $(|A^2| + |B^2|) \left(A e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + B e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\right) \psi_{13}$. From this cascade of nonlinear interactions, the nonlinear solution can be written as

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, z, t) = & \left(A(t) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + B(t) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\right) \psi_{11}(z) + c.c. + \\ & \left(A^2(t) e^{2i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + B^2(t) e^{2i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\right) \psi_{22}(z) + A(t)B(t) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \psi_{AB}(z) + c.c. + \\ & (|A^2(t)| + |B^2(t)|) \psi_{02}(z) + A(t)B^*(t) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \psi_{AB^*}(z) + c.c. + \\ & (|A^2(t)| + |B^2(t)|) \left(A(t) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + B(t) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}\right) \psi_{13}(z) + c.c. + \dots \end{aligned} \quad (1.40)$$

In Eq. (1.40), $\psi(\mathbf{r}, z, t)$ stands for the vertical velocity perturbation, w , or the temperature perturbation θ or θ_p . For the vertical velocity perturbation, ψ_{ij} is denoted F_{ij} , and for the temperature perturbation, ψ_{ij} is denoted G_{ij} .

In the square lattice, time evolution of the amplitude perturbations is governed by Stuart-Landau amplitude equations,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\epsilon}{\tau_0} A - (g_1 |A|^2 + \beta |B|^2) A, \quad (1.41)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\epsilon}{\tau_0} B - (g_1 |B|^2 + \beta |A|^2) B, \quad (1.42)$$

where g_1 and β are respectively self-saturation and crossed-saturation coefficients. The form of the amplitude equations (1.41) and (1.42) is completely determined by the rules of invariance via symmetry by rotation of an angle $\pi/2$ and by translation [31], [32]. Substituting (1.40)-(1.42) into (1.18)-(1.20) yields after some algebra to a set of differential equations for each mode that are solved sequentially. To avoid secular terms at the cubic order, compatibility conditions have to be enforced using the Fredholm alternative. The latter states that the resonating forcing terms have to be orthogonal to the kernel of the adjoint of the linear operator. This allows the determination of Landau saturation coefficients g_1 and β .

1.5.2 Nature of the primary bifurcation

As shown in [6], the self-saturation g_1 and crossed saturation β coefficients can be written as the sum of Newtonian (N superscript) and non-Newtonian contributions (nN superscript) :

$$g_1 = g_1^N - \alpha g_1^{nN}, \quad (1.43)$$

$$\beta = \beta^N - \alpha \beta^{nN}. \quad (1.44)$$

It is therefore possible to define a critical value α_c of the shear-thinning degree above which the bifurcation becomes subcritical.

In the case of rolls, $\beta = 0$ and

$$\alpha_c = \frac{g_1^N}{g_1^{nN}}. \quad (1.45)$$

In the case of squares, $\beta \neq 0$ and

$$\alpha_c = \frac{g_1^N + \beta^N}{g_1^{nN} + \beta^{nN}}. \quad (1.46)$$

Variations of α_c with χ for different Λ are depicted in Fig.1.3 (a) and (b) for rolls and squares respectively. For large χ , the asymptotic limit of α is $\alpha_c = 2.15 \times 10^{-4}$ in agreement with [6] and [4]. With decreasing \hat{K}_p (decreasing χ), the intensity of convection decreases, therefore, it is not surprising that stronger shear-thinning effects are needed to obtain a subcritical bifurcation.

1.5.3 Convective patterns at threshold

A linear stability analysis of stationary roll and square solutions of Eqs. (41) and (42) allows to show that squares are stable when $\beta < g_1$, i.e. when the coupling between the two orthogonal modes that describe the square pattern is weak enough. By contrast, when $\beta > g_1$, the coupling is too strong, the squares lose their stability and rolls are the stable nonlinear state. A similar phenomenological description can be found in [26]. Figure 1.4 shows that with increasing α , $\frac{\beta}{g_1}$ increases and thus the interaction between the two orthogonal modes \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 becomes stronger. A possible interpretation may be related to the reduction of viscosity with increasing shear-thinning effects, which leads to an increase of the convection intensity. Nonlinearities and coupling between modes become stronger which favor roll patterns.

Using shear-thinning decomposition of g_1 and β (Eqs. (1.43) and (1.44)), it is found that rolls are stable when $\alpha > \alpha_{S-R}$, with :

$$\alpha_{S-R} = \frac{\beta^N - g_1^N}{\beta^{nN} - g_1^{nN}}. \quad (1.47)$$

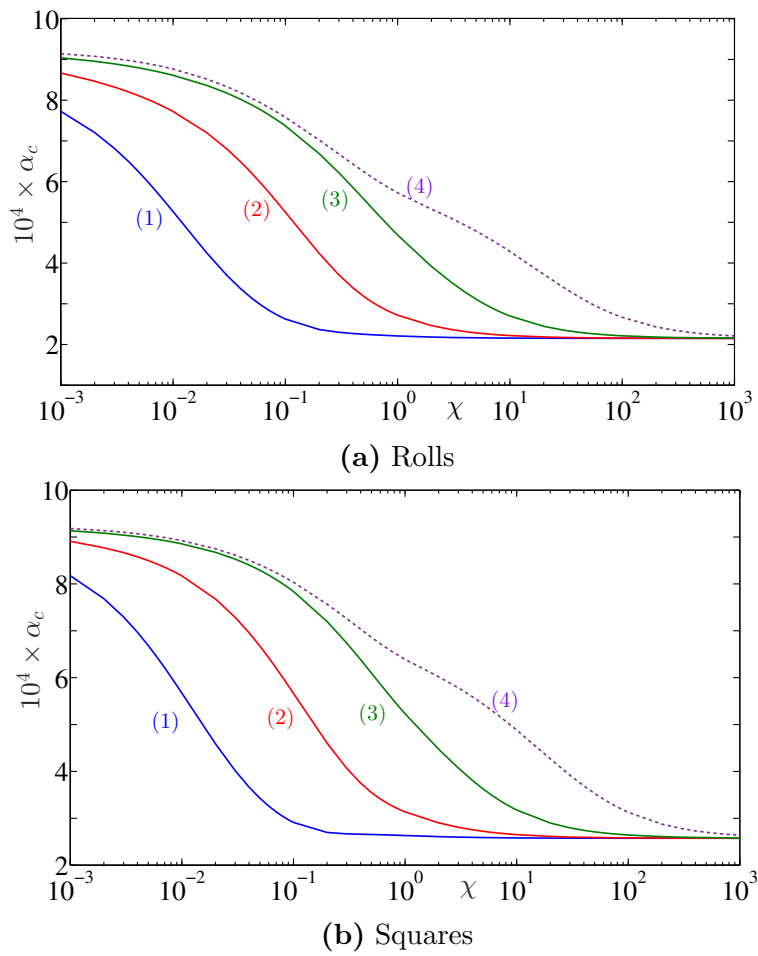


FIGURE 1.3 – Critical degree of shear-thinning, above which the primary bifurcation becomes subcritical, versus χ for rolls **(a)** and squares **(b)**. (1) $\Lambda = 0.01$, (2) $\Lambda = 0.1$, (3) $\Lambda = 1$, (4) $\Lambda = 10$.

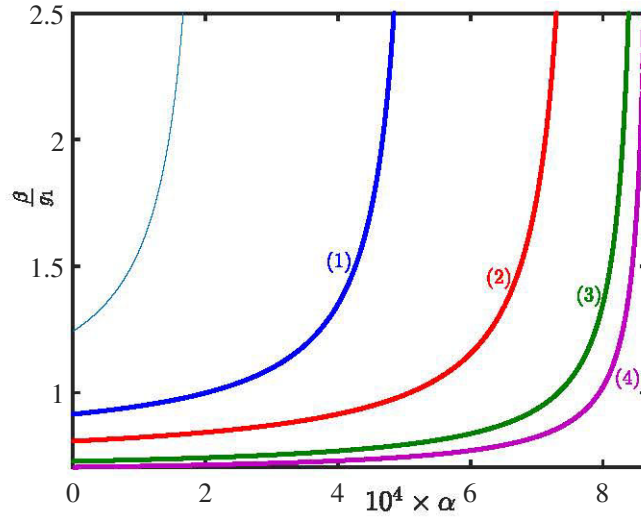


FIGURE 1.4 – The ratio $\frac{\beta}{g_1}$ as a function of α for $\chi = 10^{-2}$ and different values of Λ : (1) $\Lambda = 0.01$, (2) $\Lambda = 0.1$, (3) $\Lambda = 1$, (4) $\Lambda = 10$. The thin curve corresponds to the case of perfect heat conductor plates. It is represented as a reference curve.

Stability domains of squares and rolls are represented in the plane (χ, α) for different Λ in Fig.1.5. The curves represent the boundaries between squares and rolls : below the boundary, squares are stable, and above the boundary, rolls are the stable convective patterns. For the limit of Newtonian fluids i.e. $\alpha = 0$, we recover the results of the literature [12] : for $\text{Pr} \geq 10$ and $\Lambda = 1$, rolls are stable patterns provided that $\chi > \chi_c = 1$. We notice that the domain of stability of squares shrinks when Λ decreases which is understandable. Indeed, the thinner the slabs are, the weaker the thermal resistance is. Then the problem is closer to the case of perfectly conducting slabs where rolls are the preferred patterns. For $\Lambda > 1$, the dependence of α_{S-R} with respect to Λ is weak. Finally, we observe that α_{S-R} increases as χ decreases. Poorly conducting slabs favor square patterns as shown in [10], [11] and [12], so stronger shear-thinning effects are necessary so that rolls become the preferred planform. This last result is in agreement with [13].

1.5.4 Flow structure, viscosity and temperature fields

In this section, features of the flow, temperature distribution and shear-thinning effects on the viscosity field in a roll and a square solutions are studied for highly and poorly conducting slabs.

Case of highly conducting walls : $\chi = 100, \Lambda = 1$

The flow structure and the viscosity field for a roll solution are illustrated by Fig.1.6. The interior of the roll is practically isoviscous with $\mu \approx 1$. The viscosity is minimal at the walls where the shear-rate $\dot{\gamma}_{xz}$ is maximal. It is also weakly reduced at the four corners

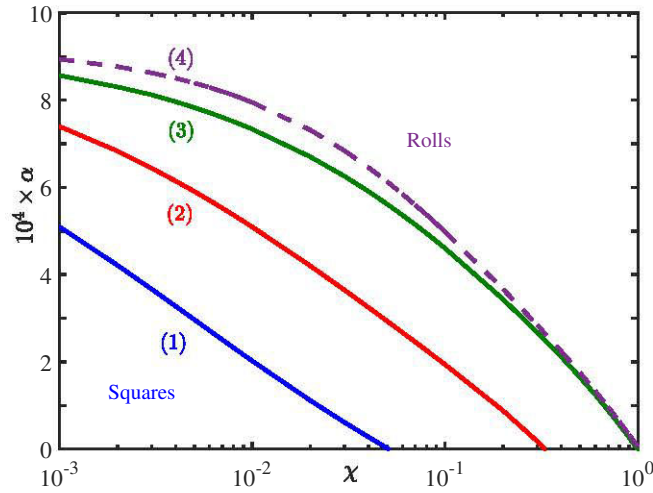


FIGURE 1.5 – Stability domains of rolls and squares as a function of χ and α for different values of Λ : (1) $\Lambda = 0.01$, (2) $\Lambda = 0.1$, (3) $\Lambda = 1$, (4) $\Lambda = 10$.

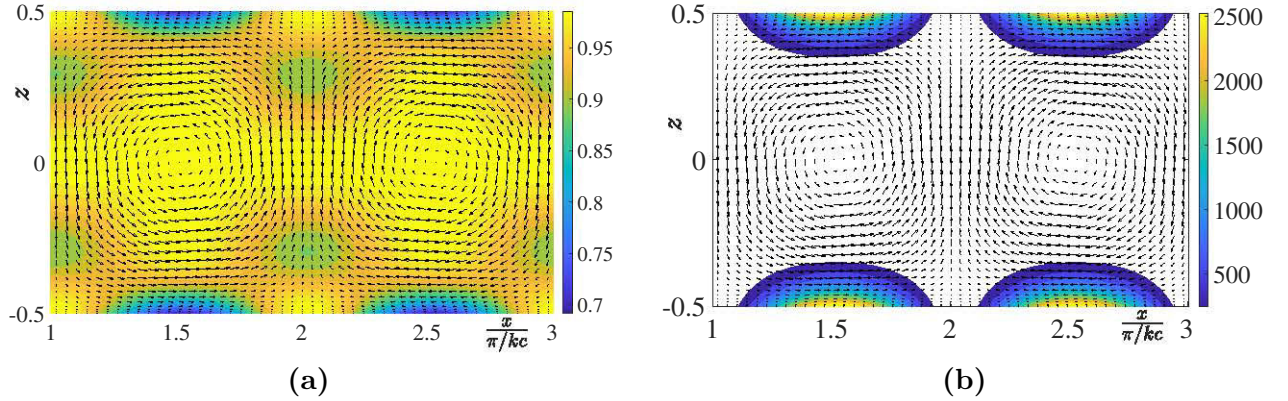


FIGURE 1.6 – Rolls. (a) Velocity vectors and viscosity field over a roll for a Carreau fluid with $\alpha = 10^{-4}$ at $\epsilon = 0.1$. (b) Distribution of $\dot{\gamma}_{xz}^2$. In the white zone, $\dot{\gamma}_{xz}^2 < 200$.

for a roll because of the elongational rate $\dot{\gamma}_{zz} = -\dot{\gamma}_{xx}$.

The distribution of the temperature perturbation over a roll with hot ascending flow and cold descending flow is illustrated by Fig. 1.7. It vanishes at the walls, because of the high value of the thermal conductivities ratio, χ .

Case of poorly conducting walls : $\chi = 0.01, \Lambda = 1$

Because of the symmetries of the square solution, no fluid passes through the vertical diagonal planes and the vertical cell boundaries. The sides of the square have a length equal to $2\pi/k_c$. The viscosity distribution and the velocity field in a horizontal plane close to the upper wall ($z = 0.49$) and in a vertical diagonal planes are illustrated by Fig. 1.8 for Carreau fluid with $\alpha = 10^{-4}$ at $\epsilon = 0.1$. The viscosity is minimal at location where the shear rate $\dot{\gamma}_{xz}$ and $\dot{\gamma}_{yz}$ (dark regions in Fig. 1.8(a)). Contours of the temperature perturbation in a diagonal square cell section and in a lateral section which delimits the

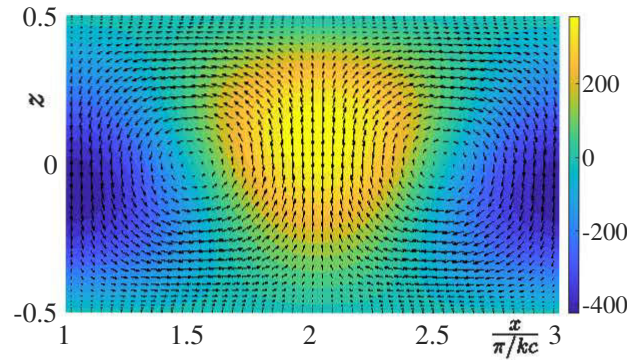


FIGURE 1.7 – Rolls. Contours of temperature perturbation over a roll with hot ascending flow and cold descending flow. Case of Carreau fluid with $\alpha = 10^{-4}$ at $\epsilon = 0.1$.

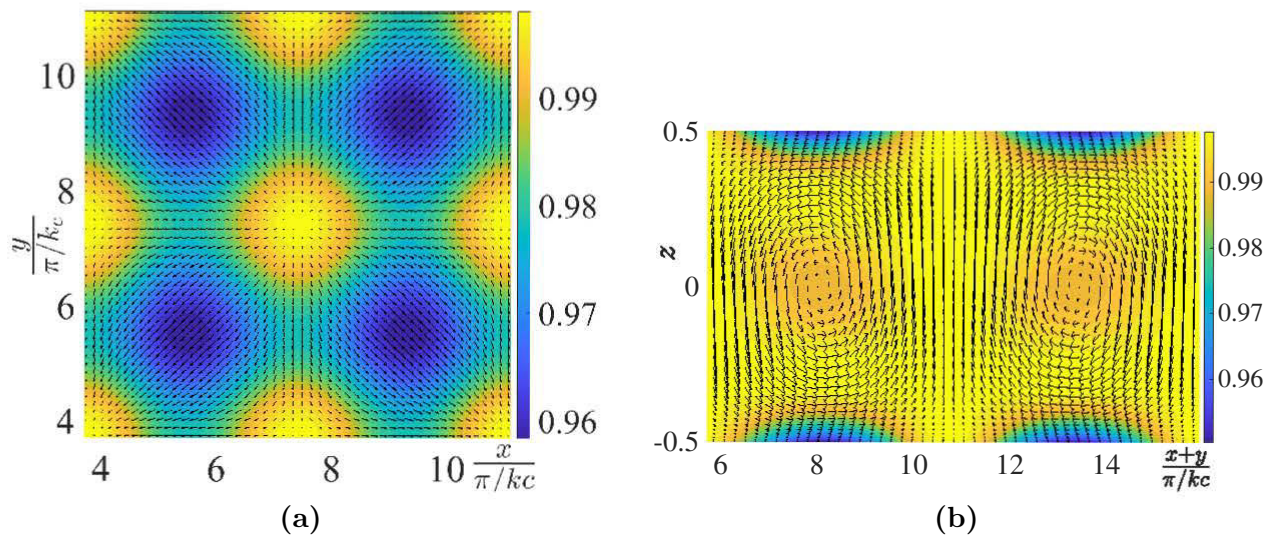


FIGURE 1.8 – Squares, $\chi = 0.01, \Lambda = 1$. Velocity vectors and viscosity field in (a) a horizontal plane close to the upper wall and (b) in a vertical diagonal plane. Case of Carreau fluid with $\alpha = 10^{-4}$ at $\epsilon = 0.1$.

square cell are shown in Fig. 1.9. It is worthy to note that the temperature perturbation does not vanish at the walls and the vertical thermal gradient is weak.

1.5.5 Comparison between roll and square solutions for fixed χ and λ

For fixed values χ and λ , velocity and viscosity fields are determined for roll and square solutions. It is observed that the maximum of shear rate and therefore the minimum of viscosity occurs for the stable pattern.

1.5.6 Heat transfer

The heat transfer through the horizontal fluid layer is described by the Nusselt number, Nu , the ratio of the total heat to the purely conductive heat flux, i.e. when the fluid is at

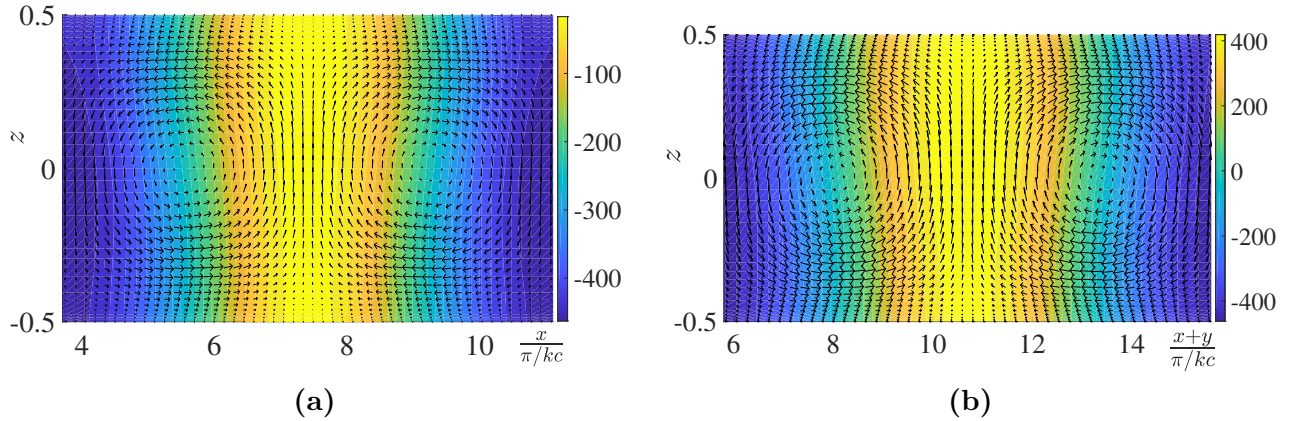


FIGURE 1.9 – Squares, $\chi = 0.01$, $\Lambda = 1$. Temperature distribution and velocity vectors in (a) a lateral section which delimits the square cell, $y = \pi/k_c$ and (b) in a vertical diagonal section. Case of Carreau fluid with $\alpha = 10^{-4}$ at $\epsilon = 0.1$.

rest.

$$\text{Nu} = 1 - \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)_{z=-1/2} = 1 - (|A|^2 + |B|^2) (DG_{02})_{z=-1/2}. \quad (1.48)$$

where $(|A|^2 + |B|^2) G_{02}$ is the modification at the second order of the conductive temperature profile due to the interaction of the fundamental mode with its complex conjugate. The overbar denotes the average over one wavelength. Using the stationary solutions of the amplitude equations, one obtains :

$$\text{Nu}_r = 1 - \frac{\epsilon}{\tau_0 g_1} (DG_{02})_{z=-1/2} \quad \text{for rolls}, \quad (1.49)$$

$$\text{Nu}_s = 1 - \frac{2\epsilon}{\tau_0 (g_1 + \beta)} (DG_{02})_{z=-1/2} \quad \text{for squares}. \quad (1.50)$$

The Figure 1.10 shows the variation of the Nusselt number as a function of the shear-thinning degree at $\epsilon = 0.1$, $\chi = 0.01$ and four different values of Λ . The Nusselt number increases with increasing shear-thinning effects in agreement with [33], [34], [6]. This is a consequence of the increase of the rolls amplitude. As expected, the Nusselt number decreases significantly with increasing the slab thickness. The difference between Nu_r and Nu_s is small. Nevertheless, Nu is larger for the stable convective pattern in agreement with the maximum heat transfer principle : “the only stable solution is the one of maximum heat transport [35], [36]”. This is also illustrated by Fig. 1.11 where Nu is represented as a function of ϵ for given $\alpha = 4 \times 10^{-4}$ and $\chi = 10^{-2}$. At $\Lambda = 1$ and $\Lambda = 0.1$ squares are stable and rolls are unstable, whereas at $\Lambda = 0.01$, rolls are stable. Other principles can be considered to predict the stable pattern such the maximum entropy production or the maximum viscous dissipation [37], [38]. Indeed, it can be shown that for a steady solution, $\text{Ra} (\text{Nu} - 1) = \int_{\Omega} \tau_{ij} \dot{\gamma}_{ij} d\Omega$ [39], where Ω is a domain delimited by the top and bottom walls and one wavelength in the x - and y - directions. For shear-thinning

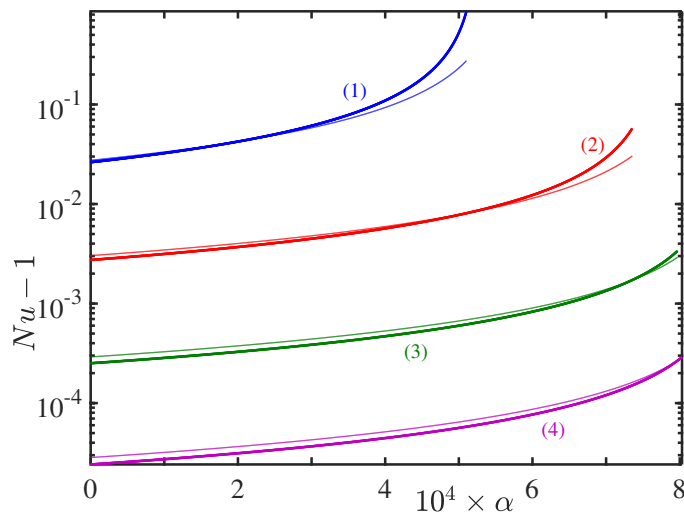


FIGURE 1.10 – The Nusselt number as a function of the shear-thinning degree α at $\epsilon = 0.1$, $\chi = 0.01$, $\text{Pr} = 10$ and different values of Λ : (1) $\Lambda = 0.01$, (2) $\Lambda = 0.1$, (3) $\Lambda = 1$ and (4) $\Lambda = 10$. (thick lines) Rolls, (thin lines) Squares.

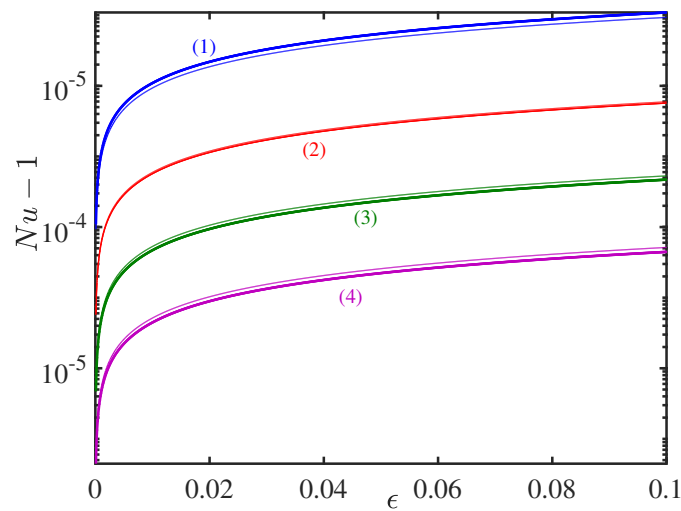


FIGURE 1.11 – Nusselt number vs ϵ at $\alpha = 4 \times 10^{-4}$, $\chi = 10^{-2}$ and four different values of Λ . (thick lines) Rolls, (thin lines) Squares.

fluids one can consider the principle of maximum viscosity reduction, as indicated in the previous section.

1.6 Secondary instabilities

Departing from the critical conditions, a band of wavenumbers of width $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$, centered on $k = k_c$ will now have a positive growth-rate. The wavepacket centered on the most unstable wavenumber can be considered as a monochromatic wave, with complex amplitude modulated in space and time.

In a square lattice, and up to third order in the perturbations, the spatio-temporal evolution of the amplitudes is described by a set of two coupled Ginzburg-Landau equations derived by Newell & Whitehead [20] and Segel [40] :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\epsilon}{\tau_0} A + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 A - (g_1 |A|^2 + \beta |B|^2) A, \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\epsilon}{\tau_0} B + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{i}{2k_c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 B - (g_1 |B|^2 + \beta |A|^2) B, \quad (1.52)$$

where the coherence length ξ_0 is defined by $\xi_0^2 = \frac{1}{2\text{Ra}_c} \left(\frac{\partial^2 \text{Ra}}{\partial k^2} \right)_{\text{Ra}_c, k_c}$. It does not depend on rheological properties and can be calculated from the curve of the growth-rate σ versus $(k - k_c)$. For $\chi \leq 10$, the coherence length ξ_0 varies between 0.375 and 0.415. For $\chi > 10$, we obtain $\xi_0 = 0.386$ which is in agreement with the literature [41].

1.6.1 Stability of a roll modulated solution

In the following, we consider first the case where rolls emerge at primary bifurcation ($\alpha > \alpha_{S-R}$). We look for a stationary solution of the system (1.51)-(1.52), of the form :

$$A_0 = R_0 \exp(iqx) \quad \text{where } q = k - k_c, \quad (1.53)$$

$$B_0 = 0. \quad (1.54)$$

Substituting the above expressions into (1.51) leads to :

$$R_0 = \sqrt{\frac{\epsilon - \xi_0^2 q^2}{g_1 \tau_0}}. \quad (1.55)$$

Thereafter, we examine the stability of the stationary solution (1.53), (1.54) with respect to infinitesimal perturbations, in terms of amplitudes r_A and r_B and phases Φ_A and Φ_B .

The perturbed solution can be written as :

$$A(x, y, t) = (R_0 + r_A(x, y, t)) \exp(i(\Phi_A(x, y, t) + qx)) \quad (1.56)$$

$$B(x, y, t) = r_B(x, y, t) \exp(i\Phi_B(x, y, t)) \quad (1.57)$$

Substituting expressions (1.56) and (1.57) into (1.51) and (1.52), we obtain after linearization and separating the real and imaginary parts of the equations :

$$\frac{\partial r_A}{\partial t} = -2g_1 R_0^2 r_A + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 r_A}{\partial x^2} - 2qR_0 \frac{\partial \Phi_A}{\partial x} + \frac{q}{k_c} \frac{\partial^2 r_A}{\partial y^2} + \frac{R_0}{k_c} \frac{\partial^3 \Phi_A}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^4 r_A}{\partial y^4} \right), \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial x^2} + \frac{2q}{R_0} \frac{\partial r_A}{\partial x} + \frac{q}{k_c} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial y^2} - \frac{1}{k_c R_0} \frac{\partial^3 r_A}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^4 \Phi_A}{\partial y^4} \right), \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial r_B}{\partial t} = (g_1 - \beta) R_0^2 r_B + q^2 \frac{\xi_0^2}{\tau_0} r_B + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 r_B}{\partial y^2} - \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^4 r_B}{\partial x^4} \right). \quad (1.60)$$

Equation associated with $\partial \Phi_B / \partial t$ does not contain linear terms so Φ_B does not intervene at the first order. Using normal mode decomposition i.e. $\Psi(x, y, t) = \tilde{\Psi} \exp(\sigma t + i(Q_1 x + Q_2 y))$ where Ψ stands for r_A , Φ_A and r_B , an eigenvalue problem is derived :

$$\mathbf{L}\mathbf{X} = \sigma\mathbf{X} \quad (1.61)$$

where $\mathbf{X} = (\tilde{r}_A, \tilde{\Phi}_A, \tilde{r}_B)^T$ is the eigenvector, σ the eigenvalue and \mathbf{L} a 3×3 square matrix arising from equations (1.58), (1.59) and (1.60). Note that the eigenvalue problem corresponding to (1.60) can be solved independently from the whole system.

We consider the long wavelength limit where $Q_1 \rightarrow 0$ and $Q_2 \rightarrow 0$. In that case, the relevant eigenvalues of the former system are given by :

$$\sigma_1 = -2g_1 R_0^2 + \mathcal{O}(Q_1), \quad (1.62)$$

$$\sigma_2 = -\frac{\xi_0^2}{\tau_0} Q_1^2 \left[1 - \frac{2\xi_0^2}{\tau_0} \frac{q^2}{g_1 R_0^2} \right] - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{qQ_2^2}{k_c} + \mathcal{O}(Q_1^2 Q_2^2), \quad (1.63)$$

$$\sigma_3 = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} q^2 + (g_1 - \beta) R_0^2 + \mathcal{O}(Q_1^4, Q_2^2). \quad (1.64)$$

The eigenvector $(\tilde{r}_A, \tilde{\Phi}_A)$ associated with the first eigenvalue $\sigma_1 = -2g_1 R_0^2 < 0$ is $(\mathcal{O}(1/Q_1), 1)$. Therefore, σ_1 describes the relatively rapid relaxation of the amplitude perturbation r_A to its equilibrium value. The eigenvector $(\tilde{r}_A, \tilde{\Phi}_A)$ associated with σ_2 is $(\mathcal{O}(Q_1), 1)$. The second eigenvalue describes the evolution of the phase perturbation Φ_A . The third root σ_3 describes the evolution of rolls growing perpendicularly to the original ones.

The eigenvalue σ_2 can also be derived using the phase approximation. This ap-

proach described in [32] and [42] relies on the fact that the amplitude r_A relaxes quickly with time, it can be considered to be adiabatically slaved to the phase Φ_A . This comes down to writing $\partial r_A / \partial t = 0$. Furthermore, in the long wavelength limit, spatial derivatives are very small compared to the variables themselves. Therefore, the amplitude r_A is approximately given by its adiabatic value

$$r_A = -\frac{q\xi_0^2}{g_1 R_0 \tau_0} \frac{\partial \Phi_A}{\partial x}. \quad (1.65)$$

This expression is substituted in (1.59) to determine the evolution of ϕ_A . A phase-diffusion equation is then derived :

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} = D_{\parallel} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial x^2} + D_{\perp} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial y^2}. \quad (1.66)$$

The longitudinal D_{\parallel} and transverse D_{\perp} phase diffusion coefficients are given by

$$D_{\parallel} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(1 - \frac{2q^2 \xi_0^2}{g_1 R_0^2 \tau_0} \right) \quad \text{and} \quad D_{\perp} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{q}{k_c}. \quad (1.67)$$

Equation (1.66) shows that a perturbation of the wavenumber leads to a readjustment of the system through a phase diffusion process. The eigenvalue which stems from (1.66) is the same as σ_2 .

Eckhaus instability

For perturbations that vary only in the x -direction ($Q_2 = 0$), the eigenvalue σ_2 (1.63) reduces to

$$\sigma_2 = -Q_1^2 D_{\parallel} + \mathcal{O}(Q_1^4). \quad (1.68)$$

For positive longitudinal phase-diffusion coefficient D_{\parallel} , σ_2 is negative, the perturbation is damped and the roll solution (1.53) is stable. Using (1.55), the stability is satisfied if

$$\epsilon > \epsilon_E = 3q^2 \xi_0^2, \quad (1.69)$$

where the subscript E means ‘‘Eckhaus’’. Note that, this instability does not depend on the rheological parameters.

Zigzag instability

For perturbations that vary only in the y -direction ($Q_1 = 0$), the eigenvalue σ_2 (1.63) reduces to

$$\sigma_2 = -Q_2^2 D_{\perp} + \mathcal{O}(Q_2^4) \quad (1.70)$$

For negative D_{\perp} , i.e. when q is negative ($k < k_c$), rolls at wavelength greater than the critical one, the eigenvalue σ_2 is positive, the perturbation is amplified and the roll solution (1.53) is unstable. In this case, the rolls will saturate into bends that decrease the wavelength.

Cross-Roll instability

The eigenvalue σ_3 (1.64) corresponds to the cross-roll (CR) instability. The system is CR stable if $\sigma_3 < 0$. Using (1.55), the system is CR stable if

$$\epsilon > \epsilon_{CR} = \frac{\beta}{\beta - g_1} q^2 \xi_0^2, \quad (1.71)$$

where the subscript CR means "cross-roll". When $\epsilon < \epsilon_{CR}$, the stationary roll solution (1.53) becomes unstable : new rolls expand perpendicularly. It can be shown straightforwardly that the cross-roll is a more restrictive instability than the Eckhaus instability, when

$$\beta < \frac{3}{2} g_1. \quad (1.72)$$

- For a Newtonian fluid at $\text{Pr} = 10$ and in the case of perfectly conducting walls, $\beta/g_1 = 1.242$. Decreasing the conductivity of the wall, χ , will decrease (β/g_1) and will give a narrow band of stable rolls. The width of this band vanishes as the singularity $\beta/g_1 \rightarrow 1^+$ is approached.

- For a shear-thinning fluid, β/g_1 increases with increasing shear-thinning effects. Combining (1.72) with (1.43) and (1.44), we can define a shear-thinning degree α_{CR-E} , below which cross-roll is the more restrictive instability :

$$\alpha_{CR-E} = \frac{3g_1^N - 2\beta^N}{3g_1^{nN} - 2\beta^{nN}}. \quad (1.73)$$

For $\alpha > \alpha_{CR-E}$, the Eckhaus instability takes over as the most restrictive of the two. The Figure 1.12 shows the variation of α_{CR-E} as a function of the conductivity of the walls and for different values of the thickness Λ . We have also represented the boundaries α_{S-R} and α_c (limit of subcritical bifurcation). As expected, α_{CR-E} increasing with decreasing χ . In the Figure 1.13, we have represented in the plane (k, Ra) the curves which delimit the stability domain of rolls with respect to (i) cross-roll instability for different α and (ii) Eckhaus instability (which is independent of α). With increasing shear-thinning effects (β/g_1 increases), the CR stability boundary enlarges and becomes less restrictive than Eckhaus instability for $\alpha > \alpha_{CR-E}$.

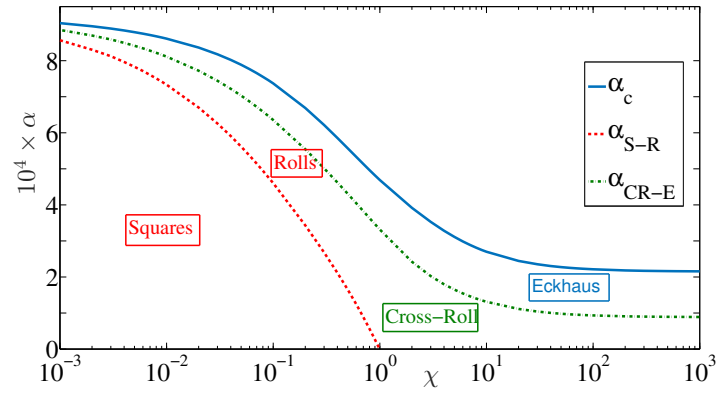
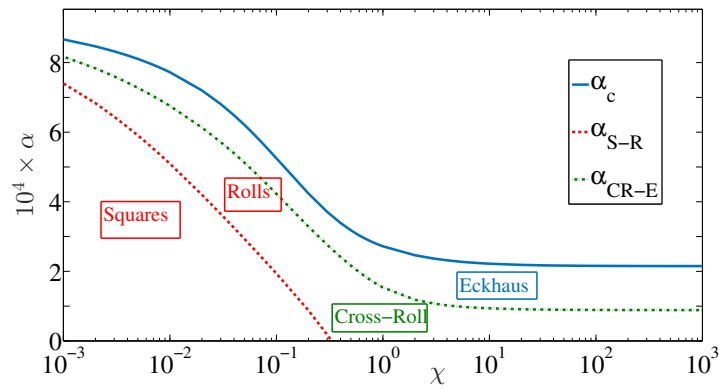
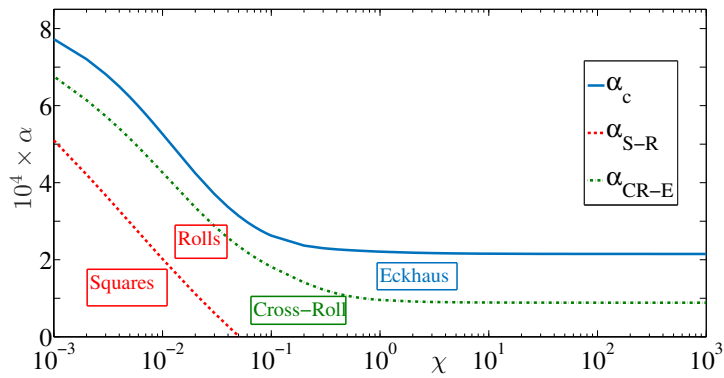
(a) $\Lambda = 1$ (b) $\Lambda = 0.1$ (c) $\Lambda = 0.01$

FIGURE 1.12 – Boundary between Eckhaus and cross-roll instabilities for different slabs' thicknesses Λ : (a) $\Lambda = 1$ and (b) $\Lambda = 0.1$, (c) $\Lambda = 0.01$

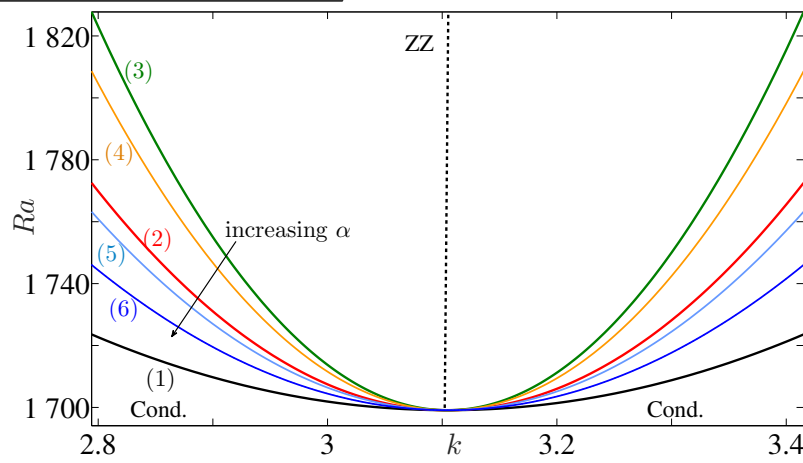


FIGURE 1.13 – Influence of shear thinning effects on stability boundaries for convection rolls as a function of the Rayleigh number Ra and the wavenumber k for $\Lambda = 1$, $Pr = 10$ and $\chi = 100$. (1) Marginal stability curve, (2) Eckhaus boundary, (3) CR boundary for a Newtonian fluid, (4) CR boundary for a shear-thinning fluid with $\alpha = 0.2 \times \alpha_c = 4.3 \cdot 10^{-5}$, (5) CR boundary for $\alpha = 0.7 \times \alpha_c = 1.5 \cdot 10^{-4}$, (6) CR boundary for $\alpha = 0.9 \times \alpha_c = 1.93 \cdot 10^{-4}$. The vertical dotted line is the zigzag (ZZ) boundary. The conductive state labeled Cond., is stable below curve (1).

1.6.2 Stability of a square modulated solution

In the case where the convection starts with perfect square patterns, a stationary solution is given by :

$$A_0(x) = R_0 \exp(iqx) \quad \text{where} \quad q = k - k_c, \quad (1.74)$$

$$B_0(y) = R_0 \exp(iqy). \quad (1.75)$$

Replacing these expressions in (1.51) and (1.52) leads to :

$$R_0 = \sqrt{\frac{\epsilon - \xi_0^2 q^2}{(g_1 + \beta)\pi_0}}. \quad (1.76)$$

As in the case of rolls, we carry out a linear stability analysis of the stationary square solution (1.74)-(1.76). A perturbation of the form

$$A(x, y, t) = (R_0 + r_A(x, y, t)) \exp(i(\Phi_A(x, y, t) + qx)), \quad (1.77)$$

$$B(x, y, t) = (R_0 + r_B(x, y, t)) \exp(i(\Phi_B(x, y, t) + qy)), \quad (1.78)$$

is introduced. Substituting, the amplitudes A and B by their expressions (1.77), (1.78) into (1.51) and (1.52) leads after linearization :

$$\frac{\partial r_A}{\partial t} = -2g_1 R_0^2 r_A - 2\beta R_0^2 r_B + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 r_A}{\partial x^2} - 2qR_0 \frac{\partial \Phi_A}{\partial x} + \frac{q}{k_c} \frac{\partial^2 r_A}{\partial y^2} + \frac{R_0}{k_c} \frac{\partial^3 \Phi_A}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^4 r_A}{\partial y^4} \right), \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial x^2} + \frac{2q}{R_0} \frac{\partial r_A}{\partial x} - \frac{1}{k_c R_0} \frac{\partial^3 r_A}{\partial x \partial y^2} + \frac{q}{k_c} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial y^2} - \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^4 \Phi_A}{\partial y^4} \right), \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial r_B}{\partial t} = -2g_1 R_0^2 r_B - 2\beta R_0^2 r_A + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 r_B}{\partial y^2} - 2qR_0 \frac{\partial \Phi_B}{\partial y} + \frac{q}{k_c} \frac{\partial^2 r_B}{\partial x^2} + \frac{R_0}{k_c} \frac{\partial^3 \Phi_B}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^4 r_B}{\partial x^4} \right), \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial y^2} + \frac{2q}{R_0} \frac{\partial r_B}{\partial y} - \frac{1}{k_c R_0} \frac{\partial^3 r_B}{\partial x^2 \partial y} + \frac{q}{k_c} \frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial x^2} - \frac{1}{4k_c^2} \frac{\partial^4 \Phi_B}{\partial x^4} \right). \quad (1.82)$$

Using a normal modes decomposition, i.e. $\Psi(x, y, t) = \tilde{\Psi} \exp(\sigma t + i(Q_1 x + Q_2 y))$, where Ψ stands for r_A, Φ_A, r_B, Φ_B , the following eigenvalue problem is derived :

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \sigma\mathbf{X}. \quad (1.83)$$

In Equation (1.83), $\mathbf{X} = (\tilde{r}_A, \tilde{\Phi}_A, \tilde{r}_B, \tilde{\Phi}_B)^T$ is the eigenvector, σ the eigenvalue and \mathbf{M} the 4×4 square matrix arising from equations (1.79)-(1.82). The eigenvalues and eigenvectors can be determined numerically using Matlab. Examples of results are shown in Appendix 1.A.

Actually, we are particularly interested by the long wavelength limit approach, i.e. $Q_1 \rightarrow 0$ and $Q_2 \rightarrow 0$. In this approach, the eigenvalues σ_1 and σ_2 associated with the amplitudes r_A and r_B respectively, are given by

$$\sigma_1 = -2R_0^2 (g_1 + \beta) + \mathcal{O}(Q_1^2, Q_2^2) \quad ; \quad \sigma_2 = -2R_0^2 (g_1 - \beta) + \mathcal{O}(Q_1^2, Q_2^2) \quad (1.84)$$

Since, in this case β and g_1 are positive and $\beta < g_1$, the amplitude modes r_A and r_B decrease quickly with time and can be considered adiabatically slaved to the phase modes Φ_A and Φ_B . They can be approximated by their adiabatic values :

$$r_A = \frac{q}{R_0(g_1^2 - \beta^2)} \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\beta \frac{\partial \Phi_B}{\partial y} - g_1 \frac{\partial \Phi_A}{\partial x} \right), \quad (1.85)$$

$$r_B = \frac{q}{R_0(g_1^2 - \beta^2)} \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(\beta \frac{\partial \Phi_A}{\partial x} - g_1 \frac{\partial \Phi_B}{\partial y} \right). \quad (1.86)$$

Substituting these expressions in (1.80) and in (1.82) leads to the following diffusion equations of phases Φ_A and Φ_B :

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} = D_{\parallel} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial x^2} + D_{\perp} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial x \partial y}, \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = D_{\parallel} \frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial y^2} + D_{\perp} \frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial y \partial x}, \quad (1.88)$$

where the coefficients phase-diffusion have the following expressions

$$D_{\parallel} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(1 - \frac{2q^2 g_1}{R_0^2 (g_1^2 - \beta^2)} \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \right); \quad D_{\perp} = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{q}{k_c}; \quad D_{xy} = \frac{2q^2 \beta}{R_0^2 (g_1^2 - \beta^2)} \left(\frac{\xi_0^2}{\tau_0} \right)^2. \quad (1.89)$$

Using normal mode decomposition, an eigenvalue problem is derived. The eigenvalues are

$$\sigma_3 = -(Q_1^2 D_{\parallel} + Q_2^2 D_{\perp}) - Q_1 Q_2 D_{xy} \quad ; \quad \sigma_4 = -(Q_1^2 D_{\parallel} + Q_2^2 D_{\perp}) + Q_1 Q_2 D_{xy} \quad (1.90)$$

Phase instabilities : case where $Q_1 = Q_2$

Considering the case where $Q_1 = Q_2 = Q$ and a long wavelength limit, i.e. $Q \rightarrow 0$, the eigenvalues (1.90) reduce to

$$\sigma_3 = -Q^2 [D_{\parallel} + D_{\perp} + D_{xy}] = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} Q^2 \left[2 \frac{\xi_0^2}{\tau_0 R_0^2} \frac{q^2}{(g_1 + \beta)} - \frac{k_c + q}{k_c} \right], \quad (1.91)$$

$$\sigma_4 = -Q^2 [D_{\parallel} + D_{\perp} - D_{xy}] = \frac{\xi_0^2}{\tau_0} Q^2 \left[2 \frac{\xi_0^2}{\tau_0 R_0^2} \frac{q^2}{(g_1 - \beta)} - \frac{k_c + q}{k_c} \right]. \quad (1.92)$$

Square Eckhaus instability

The eigenvalue σ_3 (1.91) states that the system is stable provided that :

$$\epsilon > \epsilon_{SE} = \left(\frac{3k_c + q}{k_c + q} \right) \xi_0^2 q^2, \quad (1.93)$$

where ϵ_{SE} is the boundary of the square Eckhaus instability. When $q \ll k_c$, the universal expression $\epsilon = 3\xi_0^2 q^2$ is recovered. In the phase approximation, the eigenvector corresponding to σ_3 is (1, 1). The wavenumbers in the x - and y - directions evolve in the same way. Note that like for two-dimensional rolls, ϵ_{SE} does not depend on the rheological parameters.

Rectangular Eckhaus instability

The eigenvalue σ_4 (1.92) states that the system is stable provided that :

$$\epsilon > \epsilon_{RI} = \xi_0^2 q^2 \left[1 + 2 \frac{g_1 + \beta}{g_1 - \beta} \frac{k_c}{k_c + q} \right]. \quad (1.94)$$

When $q \ll k_c$, we recover the expression given by Holmedal [19] and Hoyle [18], i.e. $\epsilon_{RI} = (3g_1 + \beta)/(g_1 - \beta)$. An eigenvector associated with σ_4 (1.92) is (1, -1), therefore the wavenumbers in the x - and y - directions don't have the same time evolution. Hoyle [18] denoted ϵ_{RI} (1.94) as rectangular Eckhaus instability. An other point of view was given by Holmedal [19]. According to this author, *since the eigenvector is (-1, 1) one of the two rolls will grow at the expense of the other at a particular horizontal location. The decreasing mode will be the growing one at another location.* This instability is denoted by Holmedal [19] as "long wavelength cross-roll instability". Concerning the influence of the rheological parameters, it can be shown straightforwardly that ϵ_{RI} boundary shrinks with increasing shear-thinning effects.

Phase instabilities : case where either Q_1 or Q_2 is zero

In the case where either Q_1 or Q_2 is zero, the phase equations (1.87) and (1.88) reduce to

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} = D_{\parallel} \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial x^2} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = D_{\perp} \frac{\partial^2 \Phi_B}{\partial x^2}. \quad (1.95)$$

The eigenvalues σ_3 and σ_4 of phase-diffusion equations (1.95) are then

$$\sigma_3 = -Q_1^2 D_{\parallel} \quad \text{and} \quad \sigma_4 = -Q_1^2 D_{\perp}. \quad (1.96)$$

$$(1.97)$$

Zigzag instability

The eigenvalue σ_4 (1.96) which is independent of the rheological parameters causes an instability of the squares if $q < 0$, i.e. $k < k_c$. This is similar to the condition for zigzag instability of the rolls.

2D Eckhaus instability

The eigenvalue σ_3 (1.96) leads to another phase instability boundary given by

$$\epsilon_{2DE} = \xi_0^2 q^2 \left(\frac{3g_1 - \beta}{g_1 - \beta} \right), \quad (1.98)$$

which can be considered as a 2D Eckhaus instability [18].

Finally, it can be shown straightforwardly that $\epsilon_{RI} > \epsilon_{2DE} > \epsilon_{SE}$ when $\beta < g_1$. Therefore, the stability boundaries of the square pattern are given by the condition $k > k_c$ (zigzag instability) and (1.94), i.e. Eckhaus rectangular instability. Figure 1.14 depicts the domain of stability of the square stationary solution for different values of the shear thinning degree α . The range of stable wavenumber for square patterns decreases with increasing shear-thinning effects, in contrast with the case of roll patterns.

1.7 Numerical solutions of amplitude equations

1.7.1 Numerical simulation

The secondary instabilities described in the previous section are studied here by solving numerically the Ginzburg-Landau equations. For the numerical integration of Eqs. (1.51) and (1.52), we employed a Fourier pseudo-spectral method on a square mesh with periodic boundary conditions. The square domain $[-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2]$ is discretized into $N \times N$ uniformly spaced grid points $M_{\ell p} = (x_{\ell}, y_p)$ with $x_{\ell} = -L/2 + \ell \Delta x$, (similarly for y_p), $\Delta x = \Delta y = L/N$ and N even. Given $A_{M_{\ell p}} = A_{\ell p}$, $\ell, p = 1, 2, \dots, N$ (similarly for $B_{\ell p}$),

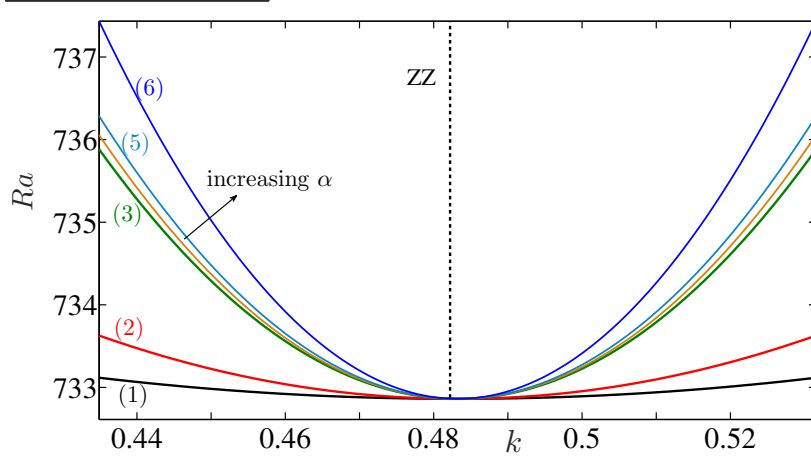


FIGURE 1.14 – Influence of shear thinning effects on stability boundaries of squares as a function of the Rayleigh number Ra and the wavenumber k for $\Lambda = 1$, $Pr = 10$ and $\chi = 10^{-3}$. (1) Marginal stability curve, (2) Square Eckhaus boundary, (3) RI boundary for a Newtonian fluid, (4) RI boundary for Carreau fluid with $\alpha = 0.5 \times \alpha_{S-R} = 4.25 \times 10^{-4}$, (5) $\alpha = 0.75 \times \alpha_{S-R} = 6.37 \times 10^{-4}$ and (6) $\alpha = 0.5 \times \alpha_{S-R} = 7.65 \times 10^{-4}$. (ZZ) is the zigzag boundary.

the 2D Discrete Fourier Transform (2DFT) is defined as

$$\hat{A}_{k_x k_y} = \Delta x \Delta y \sum_{\ell=1}^N \sum_{p=1}^N A_{\ell p} e^{-i(k_x x_{\ell} + k_y y_p)}, \quad k_x, k_y = \frac{2\pi}{L} \left(\frac{-N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right) \quad (1.99)$$

Leaving the time stepping in Fourier space, gives the following system of ODEs

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_{k_x k_y} = \left[\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(k_x^2 + \frac{k_x k_y^2}{k_c} + \frac{k_y^4}{4k_c^2} \right) \right] \hat{A}_{k_x k_y} - \mathcal{N}_{1, k_x k_y}(A, B), \quad (1.100)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{B}_{k_x k_y} = \left[\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(k_y^2 + \frac{k_y k_x^2}{k_c} + \frac{k_x^4}{4k_c^2} \right) \right] \hat{B}_{k_x k_y} - \mathcal{N}_{2, k_x k_y}(A, B), \quad (1.101)$$

with Fourier transformed initial conditions. The nonlinear terms $\mathcal{N}_{1, k_x k_y}$ and $\mathcal{N}_{2, k_x k_y}$ are evaluated in physical space and then transformed to Fourier space :

$$\mathcal{N}_{1, k_x k_y}(A, B) = -g_1 \mathcal{F} \left(|A(x, y, t)|^2 A(x, y, t) \right) - \beta \mathcal{F} \left(|B(x, y, t)|^2 A(x, y, t) \right) \quad (1.102)$$

and

$$\mathcal{N}_{2, k_x k_y}(A, B) = -g_1 \mathcal{F} \left(|B(x, y, t)|^2 B(x, y, t) \right) - \beta \mathcal{F} \left(|A(x, y, t)|^2 B(x, y, t) \right) \quad (1.103)$$

where \mathcal{F} designates the 2D discrete Fourier transform. For the temporal discretization, the time domain $[0, t_{max}]$ is discretized with equal time step of width Δt as $t_m = m\Delta t$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Exponential Time Differencing method of second order (ETD2) proposed by Cox and Matthews [43] is used. Additional details can be found in [44]. The pseudo-spectral method is implemented in Matlab. Finally, to check the convergence, several simulations are carried out with increasing numbers of grid points and refining the time step. The

stability properties of ETD2 are given in Appendix 1.B.

1.7.2 Numerical results

Instability of a roll solution

Integration of the amplitude equations (1.51) and (1.52) is performed at some representative points shown in Fig. 1.15 by the symbol (+), for two cases : (a) low or moderate shear-thinning effects and (b) high shear-thinning effects. The position of these points with respect to Eckhaus (E) and cross-roll (CR) boundaries is clearly indicated.

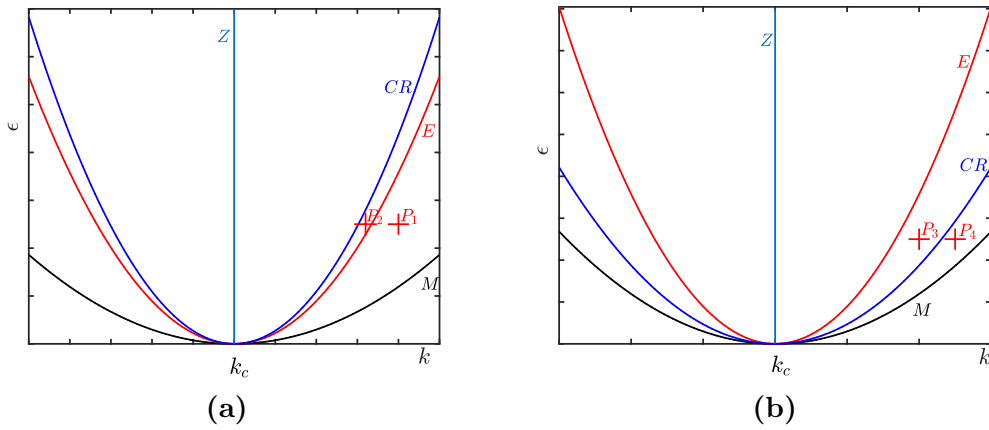


FIGURE 1.15 – **Rolls** : Points P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , where numerical simulations were performed. (a) Low or moderate shear thinning effects, (b) strong shear thinning effects. (M) Marginal stability curve, (E) Eckhaus boundary, (CR) cross-roll boundary, (Z) zigzag boundary.

Cross-roll instability : For moderate shear-thinning effects, i.e. $\alpha < \alpha_{CR-E}$ given by Eq. (1.73), the stability diagram (Fig. 1.13) indicates that the region of stable rolls is bounded by the CR instability. For a given Rayleigh number not too far above the critical value, roll solution with a wavenumber k outside the CR boundary is either CR unstable (point P_2 in Fig. 1.15(a)) or Eckhaus and CR unstable (point P_1 in Fig. 1.15(a)) if k is sufficiently large. At the point P_1 , we have the following parameters : $q = 0.4$, $\epsilon = 0.05$, $\alpha = 5 \times 10^{-5}$, $\Lambda = 1$ and $\chi = 100$. The convective pattern is Eckhaus and CR unstable, but CR is dominant. This is indeed what happens as illustrated in Fig. 1.16, where the planform function, $f(x, y, t) = A(x, y, t)e^{ik_c x} + B(x, y, t)e^{ik_c y} + c.c.$ is represented. Initially, we have a uniform set of rolls, $A = R_0 \exp(iqx)$ and $B = 0$, with R_0 given by Eq. (1.55). Small random perturbations have been added to this initial stationary solution. Due to the CR instability, perpendicular rolls grow and the initial rolls decay until the initial rolls with their too short wavelength are taken over by the perpendicular cross-roll with a wavenumber close to the critical value. Similar results are obtained at point P_2 and therefore are not represented.

Eckhaus instability : For sufficiently strong shear-thinning effects, i.e. $\alpha > \alpha_{CR-E}$, a

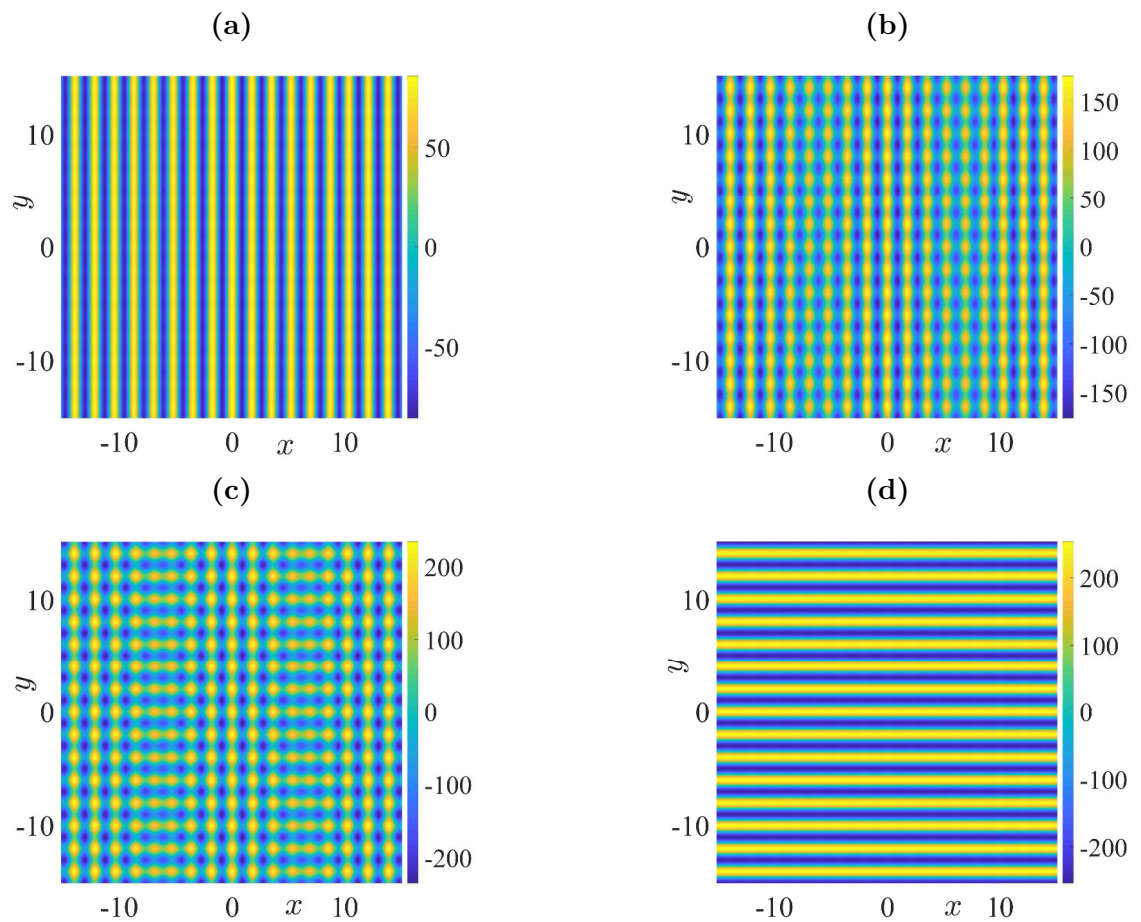


FIGURE 1.16 – Four subsequent stages in the simulation of the coupled amplitude equations (1.51) and (1.52), evolving from CR unstable roll to CR stable roll. (a) $t = 0$, (b) $t = 4.5$, (c) $t = 6$, (d) $t = 21$.

roll solution with a wavenumber outside Eckhaus boundary (curve 2, Fig. 1.13), can be either Eckhaus unstable and CR stable (P_3 in Fig. 1.15(b)) or Eckhaus and CR unstable (P_4 in Fig. 1.15(b)). For these two situations, Eckhaus instability mechanism is dominant. This is illustrated by Figs. 1.17 and 1.18 where the planform function $f(x, y, t)$ is represented. At point P_3 , the initial state is a uniform roll solution with $q = k - k_c = 0.4$, $\epsilon = 0.05$ and $\alpha = 1.6 \cdot 10^{-4}$. It is in CR-stable and in Eckhaus unstable region, where the pattern wavelength is too short. A small random perturbation is added in the x - and y -directions. Figure 1.17 shows the time evolution of the convective pattern. The system eliminates two pairs of rolls in order to augment its wavelength. After the local elimination of the wavelength, the system readjusts through a process of phase diffusion. The system reaches a wavenumber inside the Eckhaus stable region. Actually, the final wavenumber is close to k_c . Note that, unlike the one dimensional situation, where the defect exists only for an instant while a pair of rolls is created or eliminated, in two-dimensional situation, the defects persist for some time, as shown by Figs. 1.17(b) and (c). At point P_4 , the initial state is a uniform roll with $q = 0.5$. In this case, the system is CR and Eckhaus unstable. Figure 1.18 shows the time evolution of the structure. In the first stage, a competition between CR and Eckhaus instability mechanisms is observed, before a phase diffusion process.

Instability of a square solution

Figure 1.19 shows two representative points, denoted by the symbole (+), where the integration of amplitude equations (1.51) and (1.52) is performed.

At point P_5 , we have the following parameters : $q = 0.2$, $\epsilon = 0.05$, $\alpha = 5 \times 10^{-5}$, $\Lambda = 0.01$ and $\chi = 0.01$. With these parameters, square solution is *RI* unstable and *SE* stable. In addition $|D_{\parallel}| < D_{xy}$. The Figure 1.20 shows the evolution of the convective pattern with time. We have represented $f(x, y, t) = A(x, y, t)e^{ik_c x} + B(x, y, t)e^{ik_c y} + c.c.$ at four different chosen times. Initially, the convective pattern is a perfect square. A small random perturbation is added in the x - and y -directions. After elimination and adjustment of wavelengths, the structure reaches a stable state with a wavenumber very close to the critical value.

At point P_6 , the parameters are $q = 0.4$, $\epsilon = 0.05$, $\alpha = 5 \times 10^{-5}$, $\Lambda = 0.01$ and $\chi = 0.01$. In this case, the square solution is *RI* and *SE* unstable, furthermore $|D_{\parallel}| > D_{xy}$. The time evolution of the structure is shown in Fig. 1.21. It is not surprising that the dynamics is faster than in the previous case, since P_6 is farther for *IR* stability curve than P_5 . The process of wavelength elimination is also quite different. This could be related to the fact that at P_5 , $|D_{\parallel}| < D_{xy}$, whereas at P_6 , $|D_{\parallel}| > D_{xy}$.

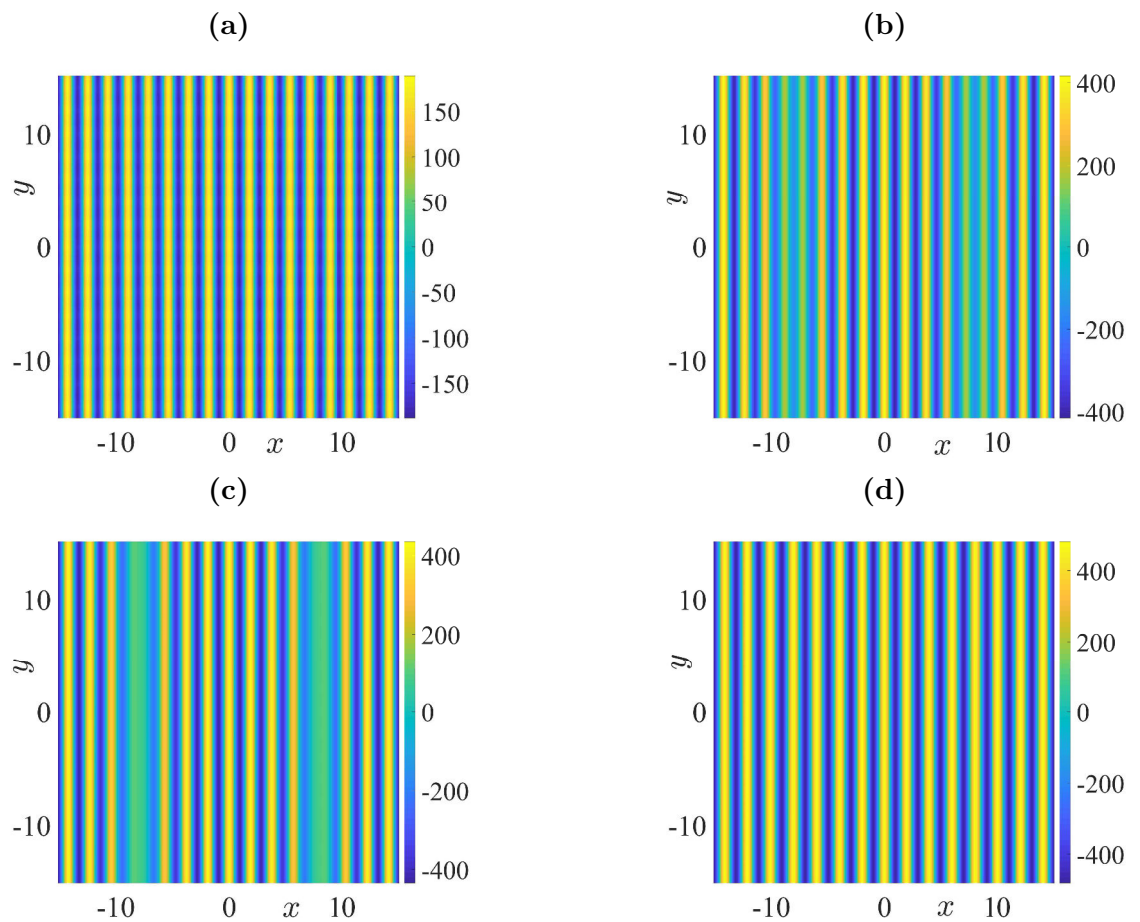


FIGURE 1.17 – Four subsequent stages in the simulation of the coupled amplitude equations (1.51) and (1.52), evolving from Eckhaus unstable roll to Eckhaus stable roll. (a) $t = 0$, (b) $t = 27$, (c) $t = 29.25$, (d) $t = 33$.

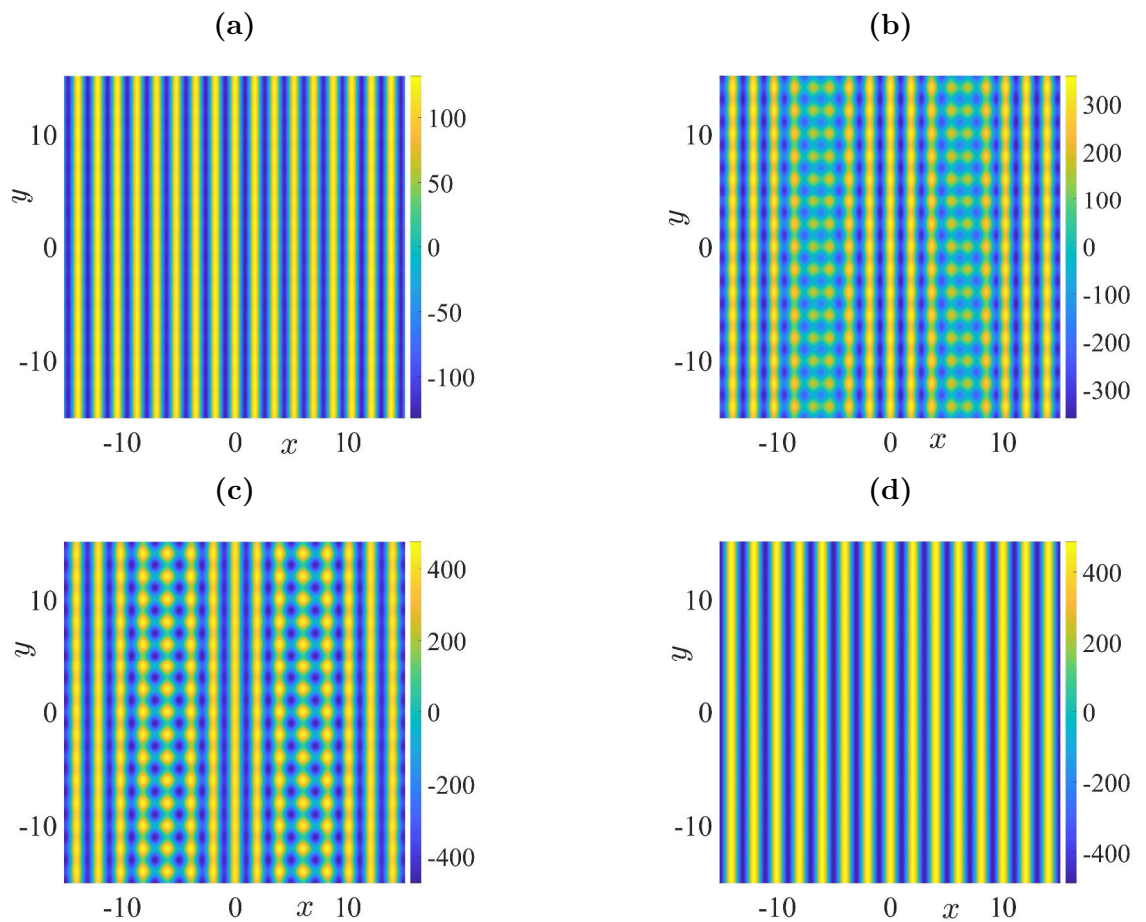


FIGURE 1.18 – Four subsequent stages in the simulation of the coupled amplitude equations (1.51) and (1.52), evolving from Eckhaus and CR unstable roll to Eckhaus stable roll. (a) $t = 0$, (b) $t = 6$, (c) $t = 8.25$, (d) $t = 12$.

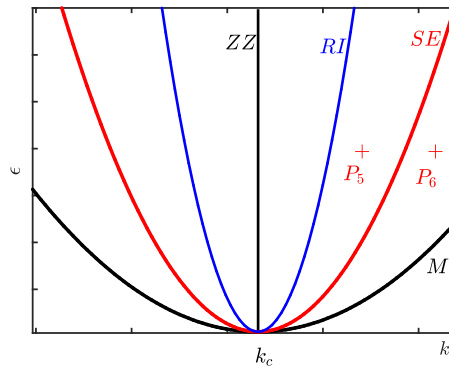


FIGURE 1.19 – **Squares** : Points P_5, P_6 , where numerical simulations were performed. (M) Marginal stability curve, (SE) square Eckhaus boundary, (RI) rectangular instability boundary, (ZZ) zigzag boundary.

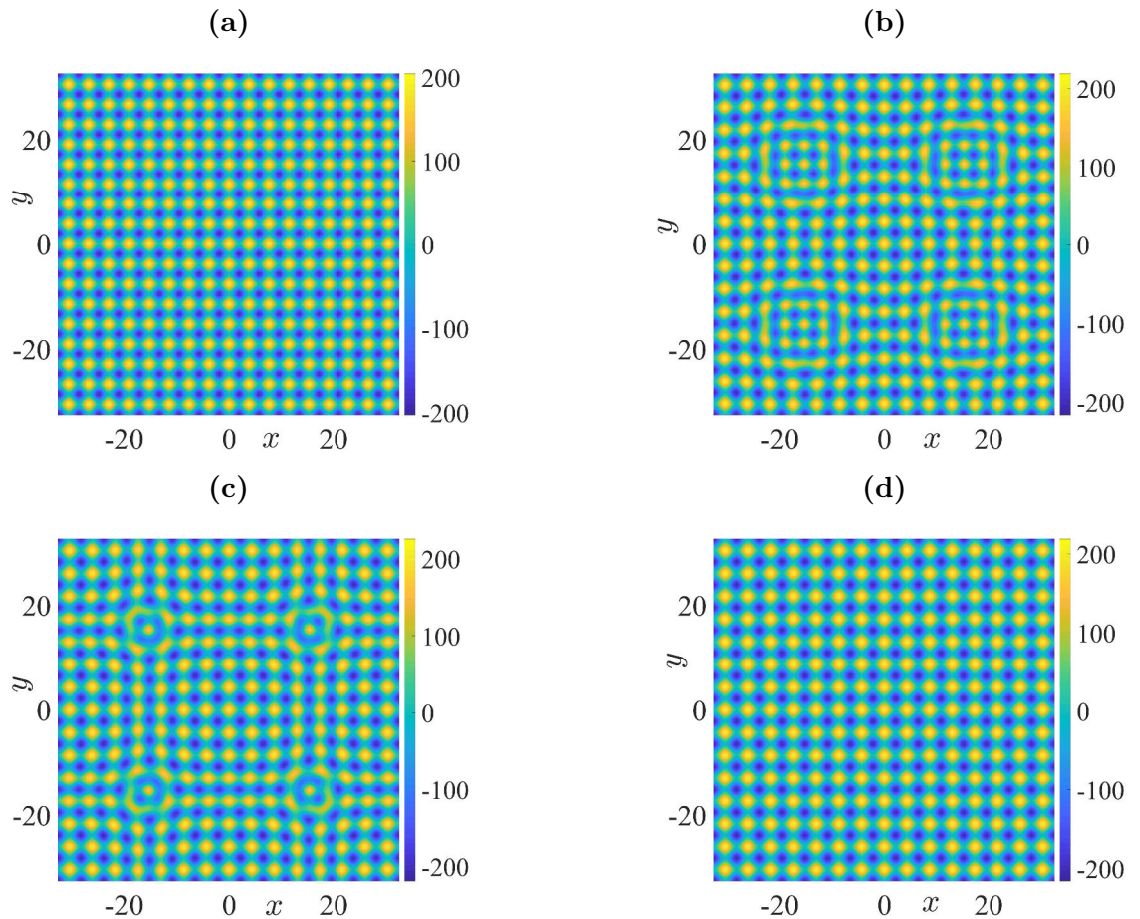


FIGURE 1.20 – Four subsequent stages in the simulation of the coupled amplitude equations (1.51) and (1.52), evolving from RI unstable and SE stable square to RI stable square. (a) $t = 0$, (b) $t = 1900$, (c) $t = 2200$, (d) $t = 3000$.

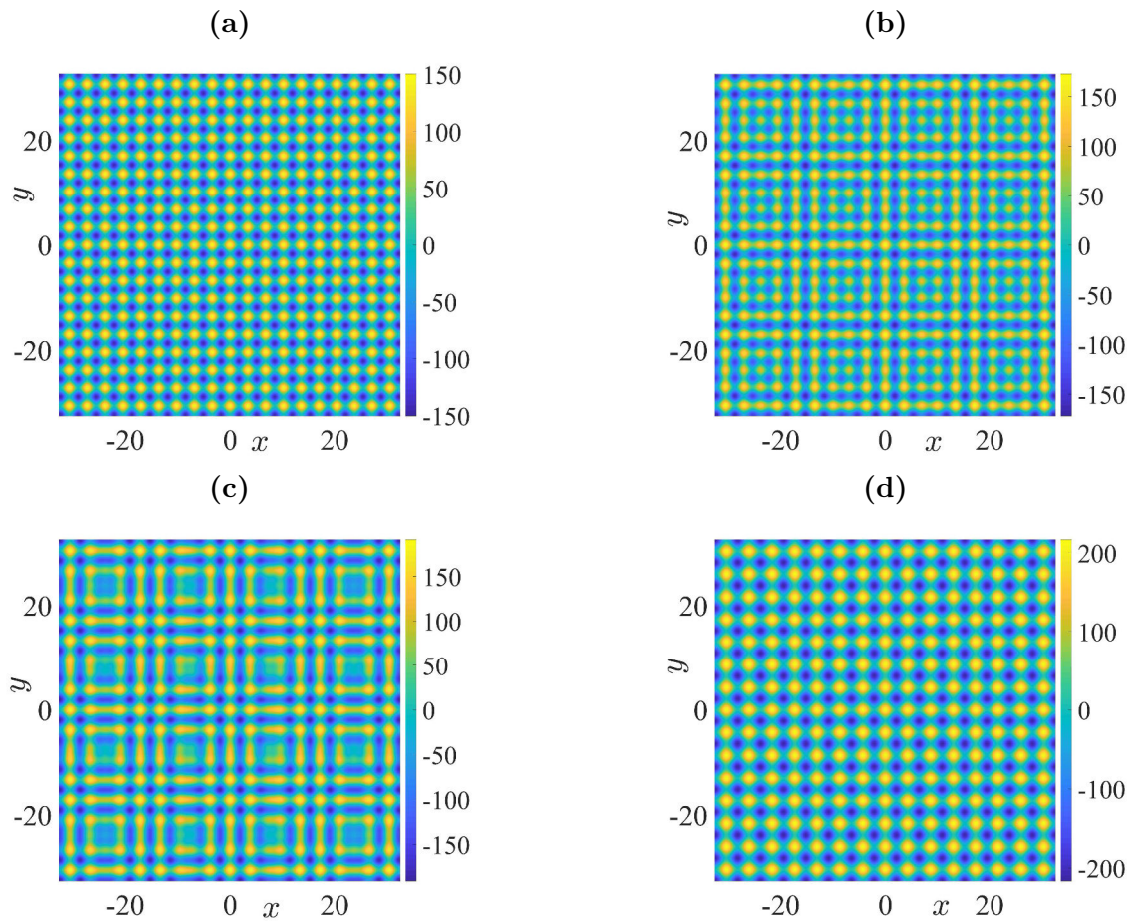


FIGURE 1.21 – Four subsequent stages in the simulation of the coupled amplitude equations (1.51) and (1.52), evolving from RI and SE unstable square to RI stable square. **(a)** $t = 0$, **(b)** $t = 72$, **(c)** $t = 92$, **(d)** $t = 132$.

1.8 Conclusion

In this paper, long wavelength instabilities of roll and square patterns which emerge in the Rayleigh-Bénard convection for shear-thinning fluids, in the situation where the slabs have finite conductivities and thicknesses, is studied. The influence of the shear-thinning behavior on the range of stable wavenumbers and the instability mechanisms that bound the stability diagram is clearly highlighted.

The rheological behavior of fluids considered is described by the Carreau model. For this model, the rheology does not play any role on the onset of convection. The nature of the primary bifurcation and the selection of the convective pattern at threshold are investigated as a function of the shear-thinning degree α , the slabs thickness Λ and the ratio of thermal conductivities χ . Comparison between the self-saturated and the cross-saturated coefficients in the Landau equation indicates that shear-thinning effects favor formation of rolls rather than squares. Indeed, with increasing shear-thinning effects, the intensity of convection increases due to a decrease of the viscosity. The nonlinearities and the coupling between the modes that constitute the square pattern become stronger, which may lead to a destabilization of the square solution. On the other hand, the intensity of convection for poorly conducting walls is lower than that for highly conducting walls, thus the critical shear-thinning degree, α_{S-R} , below which squares are stable increases with decreasing χ . The influence of the slabs thickness Λ on α_{S-R} is weak when $\Lambda > 1$.

The Nusselt number is roughly the same for rolls and squares and the stable structure has the highest Nusselt number, in agreement with the maximum heat transfer principle. Subsequently, the stability of modulated rolls and squares with respect to inhomogeneous spatial perturbation is analyzed. The influence of shear-thinning effects is clearly highlighted. In the case of modulated rolls, contrary to the Newtonian case where cross-roll instability is always dominant, except at low Prandtl number, it is shown that for a non-Newtonian shear-thinning fluid, this instability prevails only when α is less than a critical value denoted α_{CR-E} . Under this condition, the domain of stable rolls is bounded by zigzag instability for $k < k_c$ and by cross-roll instability for $k > k_c$. Furthermore, the marginal cross-roll curve enlarges with increasing shear-thinning effects. For sufficiently strong shear-thinning effects, here $\alpha > \alpha_{CR-E}$, Eckhaus instability which is independent of the rheology becomes dominant. The stable rolls are bounded by zigzag and Eckhaus instabilities.

In the case of modulated squares, i.e. $\alpha < \alpha_{S-R}$, it is observed that the rectangular instability is dominant and the width of the stable wavenumbers band decreases as α increases.

The time evolution of the convective pattern initially in the unstable part of the stability-diagram is obtained from the numerical computation of the amplitude equations. The instability mechanisms are illustrated, and for all the cases considered, it is observed at the final state the structure reaches a wavenumber very close to the critical value.

In this study, the variation of the fluid properties and particularly the viscosity with temperature is not taken into account. Generally, non-Newtonian fluids are highly viscous and thermodependent. The thermodependency of the fluid properties leads to hexagonal patterns at the onset [45], [46], [47]. Analysis of the stability of this convective pattern is the next step of our work, dealing with the influence of the rheology on the pattern selection.

An other direction of the present study is the determination of the Busse Balloon for highly shear-thinning fluids. This is particularly interesting, since the lower part of this balloon is delimited by zigzag and Eckhaus boundaries.

1.A Eigenvalues versus Q_1 and Q_2 arising from the full dispersion relation

The dispersion relation arising from the system (1.79)-(1.82) is solved numerically for different values of the parameters $(q, \alpha, \epsilon, \Lambda, \chi)$. It is observed that the two first eigenvalues σ_1 and σ_2 are always negative. They are associated with the amplitudes which are damped. Figure 1.22 shows the four eigenvalues as a function of Q_1 and Q_2 for the case where $(q + k_c, \epsilon)$ is square Eckhaus stable and Rectangular Eckhaus unstable. The eigenvalues σ_1 and σ_2 are negative as indicated above. The eigenvalue σ_3 is negative because the point considered is square Eckhaus stable. The eigenvalue σ_4 is positive and is associated with the Eckhaus rectangular instability. It is interesting to note that the maximum of σ_4 is reached at $|Q_1| = |Q_2|$. Further calculations indicate that for a given a wavenumber q , σ_4 increases with increasing shear-thinning effects.

The case where $(q + k_c, \epsilon)$, is zigzag unstable ($q < 0$) and Eckhaus stable is illustrated by Fig. 1.23. The eigenvalues σ_1 and σ_2 are negative and their variations on Q_1 and Q_2 are similar to those in Fig. 1.22 and are therefore not represented. The eigenvalue σ_3 is negative and may be associated with the Eckhaus stability, whereas σ_4 is positive and is associated with the zigzag instability which is maximum along the axis.

1.B Stability of the ETD2 scheme : Extension to two coupled Ginzburg-Landau equations

1.B.1 Case of a single ODE

We consider first a single ordinary differential equation (ODE) of the form :

$$\frac{du(t)}{dt} = cu(t) + F(u(t)) \quad (1.104)$$

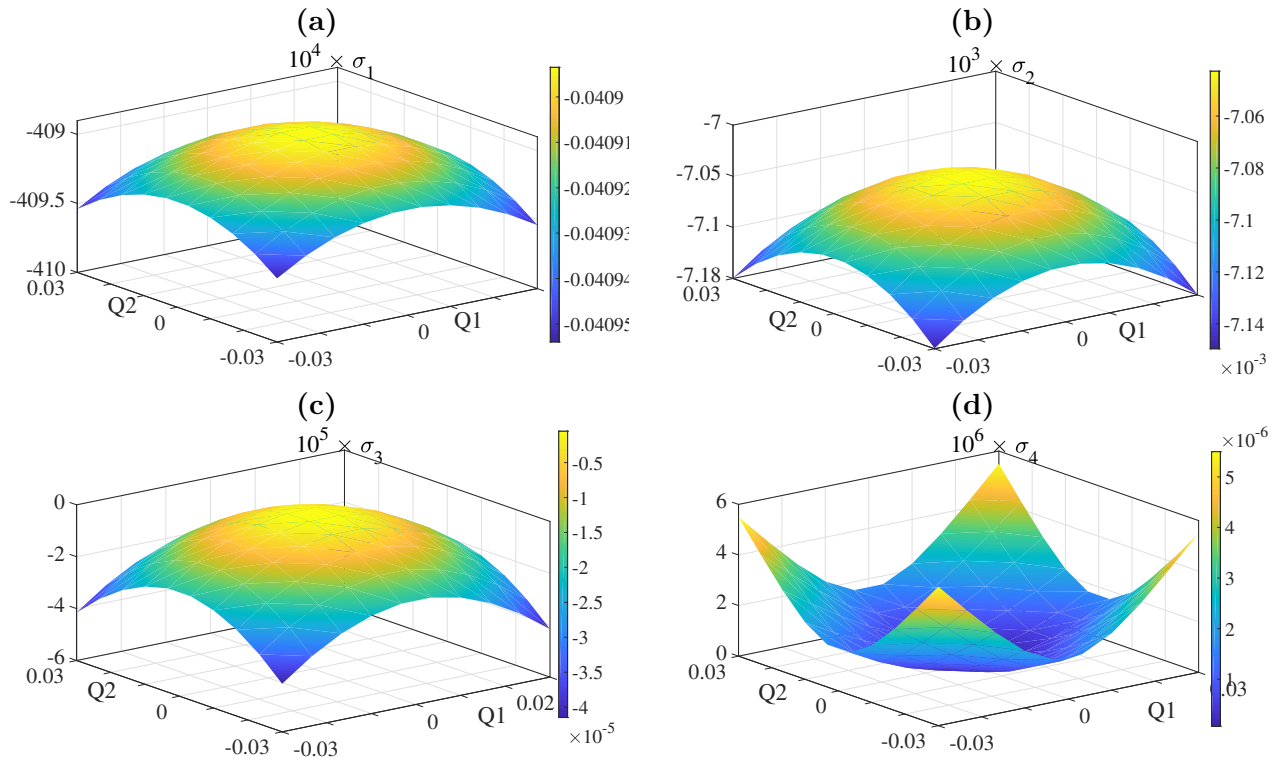


FIGURE 1.22 – Variations on Q_1 and Q_2 of the four eigenvalues in the situation where the square pattern is RI unstable only. Here $\epsilon = 0.1$, $q = 0.3$, $\alpha = 0.5 \times \alpha_c$, $\Lambda = 1$, $\chi = 10^{-3}$. (a) σ_1 , (b) σ_2 , (c) σ_3 , (d) σ_4

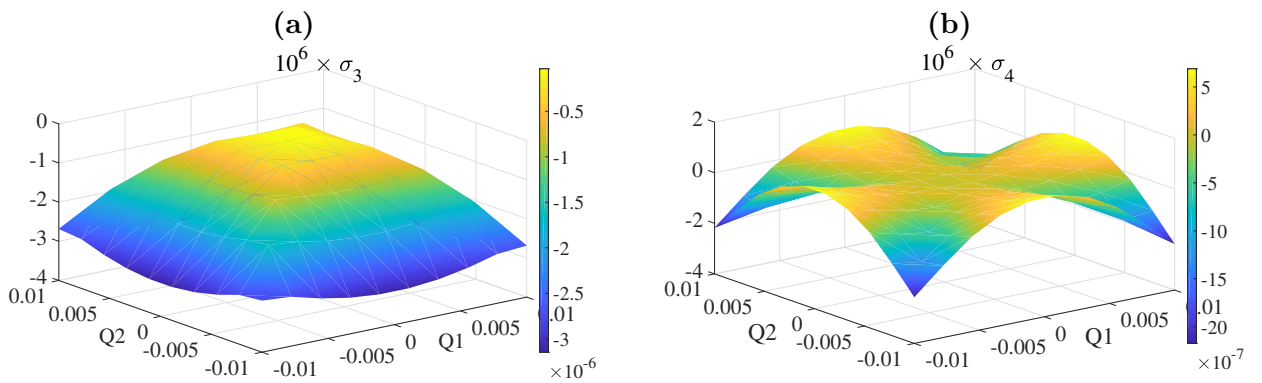


FIGURE 1.23 – Variations on Q_1 and Q_2 of the eigenvalues σ_3 (a) and σ_4 (b) in the situation where the square pattern is only zigzag unstable. Here $\epsilon = 0.1$, $q = -0.1$, $\alpha = 0.5 \times \alpha_c$, $\Lambda = 1$, $\chi = 10^{-3}$.

Using the second order exponential time differencing scheme for the time discretization leads to :

$$u_{n+1} = u_n e^{c\Delta t} + F_n \frac{(1 + c\Delta t)e^{c\Delta t} - 1 - 2c\Delta t}{c^2\Delta t} + F_{n-1} \frac{1 + c\Delta t - e^{c\Delta t}}{c^2\Delta t} \quad (1.105)$$

To evaluate the stability domain of this scheme, we have adopted the same approach as in [43] and in [48]. We suppose that there is a fixed point u_0 , so that $cu_0 + F(u_0) = 0$. Linearizing about this fixed point leads to

$$\frac{du(t)}{dt} = cu(t) + \lambda u(t), \quad (1.106)$$

where u is now the perturbation to u_0 and $\lambda = F'(u_0)$. The fixed point, u_0 , is stable provided that $Re(c + \lambda) < 0$.

It can be shown straightforwardly that the fixed points of the ETD2 scheme are the same as those of the ODE (1.104) : consequently, the linear stability analysis of the ETD2 scheme can be performed by replacing F_n by λu_n in (1.105). A recurrence relation involving u_{n+1} , u_n and u_{n-1} is obtained :

$$u_{n+1} = u_n e^{c\Delta t} + \lambda u_n \frac{(1 + c\Delta t)e^{c\Delta t} - 1 - 2c\Delta t}{c^2\Delta t} + \lambda u_{n-1} \frac{1 + c\Delta t - e^{c\Delta t}}{c^2\Delta t} \quad (1.107)$$

Defining $r = u_{n+1}/u_n$, $x = \lambda\Delta t$, $y = c\Delta t$, the following quadratic equation for the factor r by which the solution is multiplied after each step is derived :

$$y^2 r^2 - r(y^2 e^y + x[(1 + y)e^y - 2y - 1]) + (e^y - 1 - y)x = 0 \quad (1.108)$$

r is the factor by which the solution is multiplied after each step so ETD2 scheme is stable provided that $|r| < 1$. In general, both c and λ are complex and consequently, the stability domain of the ETD2 scheme is four dimensional. To simplify, we choose to determine the stability region in the real plane ($Re(x)$, $Re(\lambda)$). The boundaries of this domain are obtained for the values $r=1$ and $r=-1$ and correspond to the curves :

$$y = -x \quad \text{and} \quad x = \frac{-y^2(1 + e^y)}{(y + 2)e^y - 3y - 2}. \quad (1.109)$$

1.B.2 Extension to two coupled Ginzburg-Landau equations

In our case, we have the following set of ODE for each couple (k_x, k_y) :

$$\frac{d\hat{A}_{k_x, k_y}(t)}{dt} = \left(\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_x^2 + \frac{k_x k_y^2}{k_c} + \frac{k_y^4}{4k_c^2} \right] \right) \hat{A}_{k_x, k_y}(t) + \mathcal{N}_{1, k_x k_y} \quad (1.110)$$

$$\frac{d\hat{B}_{k_x, k_y}(t)}{dt} = \left(\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_y^2 + \frac{k_y k_x^2}{k_c} + \frac{k_x^4}{4k_c^2} \right] \right) \hat{B}_{k_x, k_y}(t) + \mathcal{N}_{2, k_x k_y} \quad (1.111)$$

where $\hat{A}_{k_x, k_y}(t) = \mathcal{F}(A(x, y, t))$ and $\hat{B}_{k_x, k_y}(t) = \mathcal{F}(B(x, y, t))$. $\mathcal{F}(\cdot)$ designates the 2D discrete Fourier transform. We add small perturbations a and b to the initial stationary solutions A_0 and B_0 . Replacing $A = A_0 + a$ and $B = B_0 + b$ in the former equations and after linearization, we get :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_{k_x, k_y}(t)}{dt} &= \left(\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_x^2 + \frac{k_x k_y^2}{k_c} + \frac{k_y^4}{4k_c^2} \right] - 2g_1 |A_0|^2 - \beta |B_0|^2 \right) \hat{a}_{k_x, k_y}(t) \\ &\quad - g_1 \mathcal{F}(A_0^2 \bar{a})_{k_x, k_y} - \beta \mathcal{F}(A_0 \bar{B}_0 b)_{k_x, k_y} - \beta \mathcal{F}(A_0 B_0 \bar{b})_{k_x, k_y} \end{aligned} \quad (1.112)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{b}_{k_x, k_y}(t)}{dt} &= \left(\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_y^2 + \frac{k_y k_x^2}{k_c} + \frac{k_x^4}{4k_c^2} \right] - 2g_1 |B_0|^2 - \beta |A_0|^2 \right) \hat{b}_{k_x, k_y}(t) \\ &\quad - g_1 \mathcal{F}(B_0^2 \bar{b})_{k_x, k_y} - \beta \mathcal{F}(B_0 \bar{A}_0 a)_{k_x, k_y} - \beta \mathcal{F}(B_0 A_0 \bar{a})_{k_x, k_y} \end{aligned} \quad (1.113)$$

Since we consider infinitesimal perturbations, we assume that we can simplify the former equations according to :

$$\frac{d\hat{a}_{k_x, k_y}(t)}{dt} = \left(\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_x^2 + \frac{k_x k_y^2}{k_c} + \frac{k_y^4}{4k_c^2} \right] - 2g_1 |A_0|^2 - \beta |B_0|^2 \right) \hat{a}_{k_x, k_y}(t) \quad (1.114)$$

$$\frac{d\hat{b}_{k_x, k_y}(t)}{dt} = \left(\frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_y^2 + \frac{k_y k_x^2}{k_c} + \frac{k_x^4}{4k_c^2} \right] - 2g_1 |B_0|^2 - \beta |A_0|^2 \right) \hat{b}_{k_x, k_y}(t) \quad (1.115)$$

We deduce that the values of c and λ in this approximation are given by :

$$c_a(k_x, k_y) = \frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_x^2 + \frac{k_x k_y^2}{k_c} + \frac{k_y^4}{4k_c^2} \right] ; \quad \lambda_a(k_x, k_y) = -2g_1 |A_0|^2 - \beta |B_0|^2 \quad (1.116)$$

$$c_b(k_x, k_y) = \frac{\epsilon}{\tau_0} - \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left[k_y^2 + \frac{k_y k_x^2}{k_c} + \frac{k_x^4}{4k_c^2} \right] ; \quad \lambda_b(k_x, k_y) = -2g_1 |B_0|^2 - \beta |A_0|^2. \quad (1.117)$$

We have checked that for our time step Δt and for each couple (k_x, k_y) , the points $(x_a, y_a) = (c_a(k_x, k_y)\Delta t, \lambda_a(k_x, k_y)\Delta t)$ and $(x_b, y_b) = (c_b(k_x, k_y)\Delta t, \lambda_b(k_x, k_y)\Delta t)$ lie in the stability domain whose boundaries are defined by (1.109). To illustrate, we have represented below the stability domain of the ETD2 scheme and the repartition of the points (x_a, y_a) and (x_b, y_b) in the case of squares for $\Lambda = 0.1$ and $\chi = 10^{-2}$:

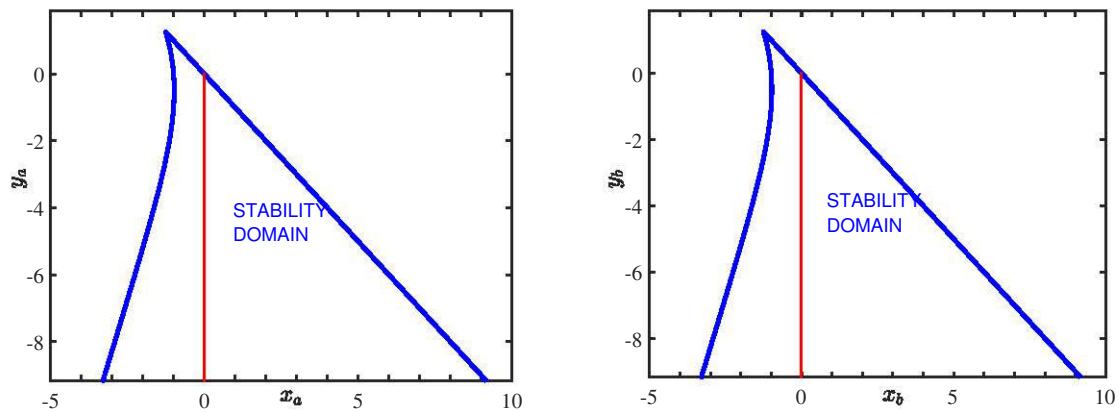


FIGURE 1.24 – The stability domain of ETD2 scheme and the repartition of the points (x_a, y_a) and (x_b, y_b) along the vertical line.

Bibliographie

- [1] A.V. Getling. Rayleigh-Bénard Convection. Structures and Dynamics. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, (11), 1998.
- [2] E.L. Koschmieder. *Bénard cells and Taylor vortices*. Cambridge University Press, 1993.
- [3] E. Bodenschatz, W. Pesch, and G. Ahlers. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 :709–778, 2000.
- [4] N.J. Balmforth and A.C. Rust. Weakly nonlinear viscoplastic convection. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 158(1-3) :36–45, 2008.
- [5] B. Albaalbaki and R. Khayat. Pattern selection in the thermal convection of non-Newtonian fluids. *J. Fluid Mech.*, 668 :500–550, 2011.
- [6] M. Bouteraa, C. Nouar, E. Plaut, C. Metivier, and A. Kalck. Weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection. *J. Fluid Mech.*, 767 :696–734, March 2015.
- [7] P. Cerisier, S. Rahal, J. Cordonnier, and G. Lebon. Thermal influence of boundaries on the onset of Rayleigh-Bénard convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41(21) :3309–3320, 1998.
- [8] P. Le Gal, A. Pocheau, and V. Croquette. Square versus roll pattern at convective threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 54(23) :2501, 1985.
- [9] P. Le Gal and V. Croquette. Appearance of a square pattern in a Rayleigh-Bénard experiment. *Phys. Fluids*, 31(11) :3440–3442, 1988.
- [10] F. Busse and H. Riahi. Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries. *J. Fluid Mech.*, 96 :243–256, 1980.
- [11] M.R.E. Proctor. Planform selection by finite-amplitude thermal convection between poorly conducting slabs. *J. Fluid. Mech.*, 113 :469–485, 1981.

- [12] D.R. Jenkins and M.R.E. Proctor. The transition from roll to square-cell solutions in Rayleigh–Bénard convection. *J. Fluid Mech.*, 139 :461–471, 1984.
- [13] M. Bouteraa and C. Nouar. Weakly nonlinear analysis of Rayleigh–Bénard convection in a non-Newtonian fluid between plates of finite conductivity : Influence of shear-thinning effects. *Phys. Rev. E*, 92(6) :063017, 2015.
- [14] Z Kebiche. *Etude expérimentale de l’instabilité de Rayleigh–Bénard dans les fluides non-Newtoniens*. PhD thesis, Université de Nantes, 2014.
- [15] F. Busse and J. Whitehead. Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid. *J. Fluid. Mech.*, 47 :305–320, 1971.
- [16] F.H. Busse and E.W. Bolton. Instabilities of convection rolls with stress-free boundaries near threshold. *J. Fluid Mech.*, 146 :115–125, 1984.
- [17] F.H. Busse. The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid. *J. Fluid Mech.*, 52(1) :97–112, 1972.
- [18] R. Hoyle. Long wavelength instabilities of square patterns. *Physica D*, pages 198–223, 1993.
- [19] B. Holmedal, M. Tveitereid, and E. Palm. Planform selection in Rayleigh–Bénard convection between finite slabs. *J. Fluid Mech.*, 537 :255–270, March 2005.
- [20] A.C. Newell and J.A. Whitehead. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38(02) :279–303, 1969.
- [21] P. Carriere, A. Bottaro, and P. Metzener. Wavelength selection in Rayleigh–Bénard convection between horizontal boundaries of finite conductivity. *Eur. J. Mech. B-Fluid*, 16(4) :483–508, 1997.
- [22] R.B. Bird, R.C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids : Fluids Mechanics*. Wiley-Blackwell, 1987.
- [23] Roger I. Tanner. *Engineering Rheology*. Oxford University Press, 2000.
- [24] D.T.J. Hurle, E. Jakeman, and E.R. Pike. On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 296, pages 469–475. The Royal Society, 1967.
- [25] M. Rieutord. *Fluid Dynamics : An introduction*. Springer, 2014.
- [26] S. Fauve. *Pattern forming instabilities*. Cambridge University Press, In Hydrodynamics and nonlinear instabilities, edited by P. Huerre and M. Rossi, 1998.
- [27] J. T. Stuart. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. part 1. the basic behaviour in plane Poiseuille flow. *J. Fluid. Mech*, 9 :353–370, 1960.
- [28] J. Watson. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. the development of a solution for plane Poiseuille flow and for plane Couette flow. *J. Fluid. Mech*, 9 :371–389, 1960.

- [29] T. Herbert. On perturbation methods in nonlinear stability theory. *J. Fluid. Mech.*, 126 :167–186, 1983.
- [30] K. Fujimura. Centre manifold reduction and the Stuart-Landau equation for fluid motions. *Proc. R. Soc. Lond A*, 453 :181–203, 1997.
- [31] M Golubitsky, J.W Swift, and E Knobloch. Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 10(3) :249–276, 1984.
- [32] R. Hoyle. *Pattern Formation : An introduction to methods*. Cambridge University Press, 2006.
- [33] S.F. Liang and A. Acrivos. Experiments on buoyancy driven convection in non-Newtonian fluid. *Rheol. Acta*, 9(3) :447–455, 1970.
- [34] H. Ozoe and S.W. Churchill. Hydrodynamic stability and natural convection in Newtonian and non-Newtonian fluids heated from below. In *AICHE Symposium Series, Heat Transfer*, volume 69, pages 126–133, 1973.
- [35] W.V.R. Malkus and G. Veronis. Finite amplitude cellular convection. *J. Fluid. Mech.* 4, pages 225–260, July 1958.
- [36] A Schlüter, D Lortz, and F Busse. On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 23(1) :129–144, 1965.
- [37] E. Palm. A note on a maximum principle in Bénard convection, 1970.
- [38] Takafumi Kita. Principle of maximum entropy applied to Rayleigh-Bénard convection. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 75(12) :124005, 2006.
- [39] E.M Parmentier. A study of thermal convection in non-Newtonian fluids. *J. Fluid Mech.*, 84(1) :1–11, 1978.
- [40] L.A. Segel. Distant side walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.*, 38(02) :203–224, 1969.
- [41] M.C. Cross. Derivation of the amplitude equation at the Rayleigh-Bénard instability. *Phys. Fluids*, 23(9) :1727–1731, 1980.
- [42] Y. Pomeau and P. Manneville. Stability and fluctuations of a spatially periodic flow. *J. Physique Lett.* 44, 1979.
- [43] M. Steven Cox and C. Paul Matthews. Exponential time differencing for stiff systems. *J. Comput. Phys.*, 176(2) :430–455, 2002.
- [44] A.K. Kassam and L.N. Trefethen. Fourth-order time-stepping for stiff pdes. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(4) :1214–1233, 2005.
- [45] F. Busse. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. *J. Fluid. Mech.*, 30 :625–649, 1967.
- [46] C.Q. Hoard, C.R. Robertson, and A. Acrivos. Experiments on the cellular structure in Bénard convection. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13(5) :849–856, 1970.

- [47] M. Darbouli, C. Métivier, S. Leclerc, C. Nouar, M. Bouteera, and D. Stemmelen. Natural convection in shear-thinning fluids : Experimental investigations by MRI. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 95 :742–754, 2016.
- [48] Hala Ashi. *Numerical methods for stiff systems*. PhD thesis, University of Nottingham, 2008.

*

Chapitre 2

Rayleigh-Bénard convection for thermodependent shear-thinning fluids

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 2.1 | Abstract | 74 |
| 2.2 | Introduction | 74 |
| 2.3 | Basic equations | 77 |
| 2.3.1 | Rheological model and parameters | 78 |
| 2.3.2 | Boundary conditions | 79 |
| 2.3.3 | Reduction : elimination of the pressure | 79 |
| 2.4 | Linear stability analysis | 80 |
| 2.4.1 | Onset of convection : direct eigenvalue problem | 80 |
| 2.4.2 | Adjoint eigenvalue problem : Adjoint mode | 83 |
| 2.5 | Amplitude equations in a hexagonal lattice | 84 |
| 2.5.1 | Multiple scales method | 84 |
| 2.5.2 | Derivation of the Ginzburg-Landau equation | 85 |
| 2.5.3 | Solution at order δ^3 | 87 |
| 2.6 | Amplitude instabilities | 91 |
| 2.7 | Competition between rolls and squares | 92 |
| 2.8 | Phase instabilities | 95 |
| 2.9 | Conclusion | 97 |
| 2.A | Operators and matrix coefficients | 100 |
| 2.A.1 | The operator \mathbf{M} | 100 |
| 2.A.2 | The operator \mathbf{L} | 101 |
| 2.A.3 | sub-scale $\mathbf{L}^{(0)}$ | 101 |
| 2.A.4 | sub-scale $\mathbf{L}^{(1)}$ | 102 |
| 2.A.5 | sub-scale $\mathbf{L}^{(2)}$ | 102 |
| 2.B | Second-order solution (hexagons) | 102 |

| | | |
|----------------------|--|------------|
| 2.B.1 | Solution proportional to $ A_p ^2$ (zero mode) | 102 |
| 2.B.2 | Solution proportional to $A_p^2 \exp(2i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$ | 103 |
| 2.B.3 | Solution proportional to $A_p A_q^* E_p E_q^*$ | 103 |
| 2.B.4 | Solution proportional to $\exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$ | 104 |
| Bibliographie | | 105 |

2.1 Abstract

In a recent article (Bouteraa et al. J. Fluid Mech., vol. 767, 2015, pp. 696-734) a weakly nonlinear analysis of the Rayleigh-Bénard convection for shear-thinning fluids between two horizontal plates heated from below has been performed. A Landau-Stuart equation is used. Competition between homogeneous rolls, squares and hexagons is investigated. The authors found that in the supercritical regime, only rolls are stable near onset. In this paper, the variation of the viscosity with temperature is taken into account. The variation of the viscosity in the convection layer breaks the up-down symmetry causing a subcritical convection onset to hexagonal pattern. This convection pattern is studied in the framework of amplitude equations. Ginzburg-Landau equations including nonvariational quadratic spatial terms are established using a multiple-scale expansion method. The stability of hexagonal patterns towards homogeneous perturbations (amplitude instabilities) and long wavelength perturbations (phase instabilities) is analyzed for different values of the shear-thinning degree α (Eq. 2.11) and the ratio r of the viscosities at the top and bottom walls. The rheological behavior of the fluid is described by the Carreau model and the relationship between the viscosity and the temperature is of exponential type. It is shown that the range of the reduced Rayleigh number $\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$ where both hexagons (with up flow at the center) and rolls are stable decreases with increasing shear-thinning effects, whereas the viscosity contrast has the opposite effect. The stability diagram of hexagons determined from the phase equations is closed for low values of r and becomes open and asymmetric for moderate values of r . Shear-thinning effects reduce the range of stable wave numbers. For the parameters considered here, the stable hexagons domain remains delimited mainly by the transverse phase instability.

2.2 Introduction

Rayleigh-Bénard convection in a fluid layer which viscosity depends on temperature is an important problem, because of its interest in many industrial and natural systems such as the convection in the Earth mantle and in magma chambers. The viscosity, μ , is usually much lower near the heated lower plate than near the cold upper plate. This spatially varying viscosity modifies the onset of convection. Furthermore, the variation of μ with the temperature, T , causes an additional nonlinear coupling between the velocity and the temperature fields and breaks the up-down reflection symmetry with respect to the mid-

plane of the fluid layer. These features will affect the onset of convection and the selection of the pattern convection.

For Newtonian fluids, the effect of a temperature dependent viscosity on the onset of convection was first studied by Palm [1] in the case of free-free boundary conditions. [1] assumed that the kinematic viscosity ν varies as $\nu = \nu_1 + \Delta\nu \cos(b(T - T_1))$ where $\Delta\nu$ is the difference in the viscosity between the top and the bottom boundaries, b a constant and T_1 is the temperature at the bottom of the fluid layer. In this analysis, it is required that $\Delta\nu/\nu_1 \ll 1$. It is found that the critical Rayleigh number Ra_c defined with the average viscosity ν_0 as well as the critical wavenumber k_c decreases with increasing the viscosity variation $\Delta\nu$. They differ by $O(\Delta\nu/\nu_0)^2$ from that obtained with constant viscosity. The decrease of Ra_c and k_c with increasing $\Delta\nu$ was confirmed by Stengel et al [2] in Free-Free and Rigid-Rigid boundary conditions when a cosine law is used for $\mu(T)$. Busse and Frick [3] assumed, for numerical convenience, a linear dependence of the viscosity on temperature. The onset of convection is determined in the case of rigid boundary conditions. The variation of Ra_c and k_c as a function of the viscosity ratio $r = \mu_{max}/\mu_{min}$ is quite similar to that obtained by [1] using cosine law for $\mu(T)$. As pointed out by [3], for cosine and linear functions $\mu(T)$, the viscosity at the midplane equals to the average viscosity of the static layer, this is why Ra_c decreases with increasing r . However, if an exponential viscosity variation is used, the average viscosity exceeds the value used in the definition of Ra_c . In this case, the critical Rayleigh number Ra_c increases, reaches a maximum of $Ra_c \approx 2200$ at a viscosity ratio $r \approx 3000$ and then decreases [2]. This result was confirmed by White [4]. It can be explained by a simple physical argument based on the idea that convection begins first in the sublayer with maximum Rayleigh-number. Actually, for a large viscosity contrast, the convection is confined to the sublayer near the hot boundary, and a stagnant zone develops near the cold (top) boundary. [2, 5, 6]. Whereas, for cosine and linear laws $\mu(T)$, the convection occurs throughout the entire fluid layer. The onset of two-dimensional convection with strongly temperature dependent viscosity has been also considered by Bottaro et al. [7], assuming Arrhenius law. In this case, the viscosity ratio depends on the temperature difference across the fluid layer and on the temperature level, while for exponential law, the viscosity ratio depends only on the temperature difference. [7] found that depending on the reference temperature, the dependence of the critical Rayleigh-number Ra_c on the viscosity ratio across the layer, may have one of the two behaviors described previously. Either, Ra_c decreases with increasing the viscosity ratio as predicted by [1] and [3], or Ra_c increases initially with increasing the viscosity ratio, reaches a maximum and then decreases as predicted by [2]. Actually, there are two controlling factors that play opposing roles. The reduced thickness of the active layer on one hand requires a larger Rayleigh number for the onset of convection. On the other hand, the fluid layer near the heated wall is less stable because of the decrease of the viscosity. The effect of weakly temperature-dependent viscosity on the planform near the critical conditions, has been studied by [1], [8], [9]. They found that near the onset, the convection occurs in the form of hexagons, when r is small. The occurrence of hexagonal pattern

can be explained by the triadic wavevector interactions enabled by the quadratic term in the amplitude equation. If the Rayleigh number is increased slightly, hexagons become unstable to rolls solution. A formula for the range of Rayleigh numbers where the hexagons are stable was proposed by [8]. It is shown that the extent of the interval where the hexagons are stable is proportional to the inverse of the fluid depth to the sixth power. Experimental planform studies performed by Hoard et al [10] and Stengel [2] confirm qualitatively the results of the weakly nonlinear theory at low values of r . The quantitative disagreement may be due partly to the influence of the lateral walls and also to the fact that the Rayleigh numbers considered are probably outside the domain of validity of the theory.

Besides rolls and hexagons, a new planform in the form of squares was observed when the viscosity contrast between upper and lower boundaries exceed a value of order ten, [2] and [4]. The planform selection problem between rolls and squares was analyzed by [3] with the assumption that the viscosity varies linearly with temperature. They found that near the critical conditions, rolls are preferred for low values of r , but squares are preferred for large values of r . The change from rolls to squares occurs at $r \approx 2$. Jenkins[11] used a weakly nonlinear method to investigate the stability of squares. In the case of a linear variation of the viscosity with temperature, he found that the transition from rolls to squares occurs at $r \approx 3.2$. The disagreement with [3] was not clarified in the literature. For exponential fluids, Jenkins [11] found that the transition occurs at $r \approx 3$.

Above onset, the wavenumber k of the pattern is selected from a continuous band of allowed wavenumbers, that is bounded by secondary instabilities. In [12] and [13], the authors identified the mechanisms of secondary instability that restrict the region of stable straight convection rolls in Rayleigh-Bénard convection. The nature of secondary instabilities in more complex patterns such as squares or hexagons is not as well studied as rolls. In the case of hexagonal pattern, it is shown that the secondary instability is induced by long wavelength modulation of the phase of the pattern. In Bénard-Marangoni problem, estimates of the size and shape of stable band of wavenumbers have been made by Echebarria and Pérez-García[14] and Young and Riecke [15] using amplitude equations.

To our knowledge, the influence of viscosity temperature dependence of a non-Newtonian fluid on the pattern selection and the phase instabilities that delimit the stable band of wavenumbers in Rayleigh-Bénard convection problem has not been considered in the literature. Shear-thinning fluids are the most kind of non-Newtonian fluids and are characterized by a decreasing viscosity with increasing shear rate. Furthermore, their viscosity may vary strongly with temperature. The decrease of the viscosity with temperature modifies the flow structure. The shear rate is higher near the heated wall. This leads to a further decrease of the viscosity near the heated wall because of the shear-thinning behavior of the fluid. Hence, the degree of asymmetry with respect to the midplane becomes more significant.

The objective of the present paper is to investigate the influence of shear-thinning effects on the pattern selection and their stability, taking into account the dependence of the

viscosity on temperature. This paper is organized as follows. We start with the governing equations in Sec. 2.3. The linear stability analysis is presented in Sec. 2.4. In Sec. 2.5, the weakly nonlinear analysis using a multiple scale method is presented, the amplitude equations for hexagons are derived and the different coefficients are determined as a function of shear-thinning effects and the viscosities ratio. First homogeneous hexagons and rolls are considered and their relative stability is discussed in Sec. 2.6. In the Section 2.7, the limit value of the viscosity ratio above which rolls become unstable to square is determined as a function of shear-thinning effects. The stability of hexagons with respect to long wavelength perturbations is addressed in Sec. 2.8 in which the phase equations are derived. Finally, a brief summary of the results is given in Sec.2.9.

2.3 Basic equations

Hereafter, quantities with hats are dimensional quantities. We consider a layer of shear-thinning fluid of depth \hat{d} confined between two impermeable horizontal plates, infinite in extent, which are perfect heat conductors. The bottom and top plates are kept at constant temperatures, respectively $\hat{T}_0 + \delta\hat{T}/2$ and $\hat{T}_0 - \delta\hat{T}/2$, with $\delta\hat{T} > 0$. The fluid has density $\hat{\rho}$, thermal diffusivity $\hat{\kappa}$, thermal expansion coefficient $\hat{\beta}$ and viscosity $\hat{\mu}_0$ at zero shear-rate. In the absence of convection, the stationary heat conducting state is described by

$$\hat{\mathbf{u}} = 0 \quad , \quad \frac{d\hat{P}}{d\hat{z}} = -\hat{\rho}_0\hat{g} \left[1 - \hat{\beta} \left(\hat{T}_{cond} - \hat{T}_0 \right) \right] \quad , \quad \hat{T}_{cond} - \hat{T}_0 = \frac{\delta\hat{T}}{2} \left(1 - \frac{2\hat{z}}{\hat{d}} \right) \quad , \quad (2.1)$$

where $\hat{\mathbf{u}}$ is the fluid velocity, \hat{P} the pressure and \hat{T}_0 the mean of the boundary temperatures. The z -axis is directed upwards, with its origin located at the bottom plate. The stability of the hydrostatic solution is considered by introducing temperature and pressure perturbation as well as a fluid motion. Using the units $\hat{d}^2/\hat{\kappa}$, \hat{d} , $\hat{\kappa}/\hat{d}$ and $\delta\hat{T}$ for time, length, velocity and temperature, the dimensionless perturbation equations are :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + Ra \theta \mathbf{e}_z + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad , \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z + \nabla^2 \theta \quad . \quad (2.4)$$

Here, \mathbf{e}_z denotes the unit vector in the vertical direction, $p(\mathbf{x}, t)$ and $\theta(\mathbf{x}, t)$ represent the pressure and temperature deviations from their values in the conductive state. The Boussinesq approximations are taken into account, i.e., the variation of the density is neglected except in the buoyancy term. Denote (x, y, z) the components of the position vector \mathbf{x} , and (u, v, w) the components of the velocity vector \mathbf{u} . The Rayleigh number Ra and the Prandtl number Pr are

$$Ra = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \delta\hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\kappa} \hat{\mu}_0} \quad ; \quad Pr = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{\kappa}} \quad . \quad (2.5)$$

The reference viscosity, $\hat{\mu}_0$, is the zero-shear rate viscosity evaluated at \hat{T}_0 , i.e. the mean of the boundary temperatures.

2.3.1 Rheological model and parameters

The fluid is assumed to be purely viscous and shear-thinning. The viscous stress-tensor writes

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\Gamma) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.6)$$

with $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T$ the rate-of-strain tensor and $\Gamma = \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}$ its second invariant.

We assume a Carreau-law fluid where the viscosity depends exponentially on temperature,

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \exp \left[-\hat{b} (\hat{T} - \hat{T}_0) \right] \left(1 + \hat{\lambda}^2 \hat{\Gamma} \right)^{\frac{n_c - 1}{2}}, \quad (2.7)$$

with $\mu_0 = \hat{\mu}_0 / \hat{\mu}_0$ and $\mu_\infty = \hat{\mu}_\infty / \hat{\mu}_0$ the viscosities at low and high shear rate, \hat{b} the thermodependency coefficient which measures the sensitivity of viscosity to variation in temperature, $n_c < 1$ the shear-thinning index, $\hat{\lambda}$ the characteristic time of the fluid. The characteristic shear rate for the onset of shear-thinning is determined by $1/\hat{\lambda}$. The infinite shear viscosity, $\hat{\mu}_\infty$, is generally significantly smaller (10^3 to 10^4 times smaller) than $\hat{\mu}_0$, [16, 17]. The ratio $\hat{\mu}_\infty / \hat{\mu}_0$ will be thus neglected in the following. The exponential model used for the viscosity thermodependency is referred in the literature as Frank-Kamenetski model and can be derived from the Arrhenius law by expanding the arguments of the exponential (in the Arrhenius law) in a Taylor series about the reference temperature \hat{T}_0 [7].

The dimensionless effective viscosity is then

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_0} = \mu_b(z) \exp(-c\theta) \left(1 + \lambda^2 \Gamma \right)^{\frac{n_c - 1}{2}}, \quad (2.8)$$

where, $\mu_b(z) = \exp(c(z - 1/2))$ is the viscosity profile at quiescent state and $c = \hat{b} \delta \hat{T}$ is a measure of the viscosity contrast. The Newtonian behavior, $\hat{\mu} = \hat{\mu}_0$, is obtained by setting $n_c = 1$ or $\hat{\lambda} = 0$. The viscosity ratio across the fluid layer,

$$r = \frac{\mu_b(z=1)}{\mu_b(z=0)} = \exp(\hat{b} \delta \hat{T}), \quad (2.9)$$

depends on \hat{b} and $\delta \hat{T}$, but not on the temperature level. For a small amplitude disturbance, the viscosity can be expanded about the hydrostatic solution,

$$\mu = \mu_b [1 - c\theta + \dots] \left[1 + \left(\frac{n_c - 1}{2} \right) \lambda^2 \Gamma + \dots \right] \quad (2.10)$$

At the second order Taylor expansion of $(1 + \lambda^2 \Gamma)^{\frac{n_c - 1}{2}}$, a relevant rheological parameter, i.e., the ‘degree of shear-thinning’ appears :

$$\alpha = \left. \frac{d\mu}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=0} = \frac{1 - n_c}{2} \lambda^2. \quad (2.11)$$

2.3.2 Boundary conditions

For the velocity field, no-slip boundary conditions (NSBC) are considered. Isothermal conditions are used at slabs. For the temperature deviation θ , the thermal conductivity of the boundaries is assumed much larger than that of the fluid, so that slabs’ temperature remains ‘fixed’. The boundary conditions are :

$$\theta = u = v = w = 0 \quad \text{on} \quad z = 0, 1. \quad (2.12)$$

2.3.3 Reduction : elimination of the pressure

Applying twice the *curl* to momentum equations (2.3) and using the continuity equation, we get the following evolution equations for the velocity components w , u and v :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w &= \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathcal{N}(v) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathcal{N}(u) - \Delta_H \mathcal{N}(w) \right] + Ra \Delta_H \theta + \\ &\quad \mu_b \Delta^2 w + 2 \left(\frac{d\mu_b}{dz} \right) \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{d^2 \mu_b}{dz^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \Delta_H w \right) + \\ &\quad \left[\Delta_H \mathcal{N} V_z - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \mathcal{N} V_x - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \mathcal{N} V_y \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta_H u + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] &= \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathcal{N}(v) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{N}(u) \right] + \mu_b \Delta \left[\Delta_H u + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] + \\ &\quad \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta_H u + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N} V_z \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta_H v + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] &= \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathcal{N}(u) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{N}(v) \right] + \mu_b \Delta \left[\Delta_H v + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] + \\ &\quad \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta_H v + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N} V_z, \end{aligned} \quad (2.15)$$

where the ‘horizontal Laplacian’ is

$$\Delta_H = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

The nonlinear inertial terms $\mathcal{N}(\cdot)$ and nonlinear viscous terms $\mathcal{N}V_x$ are defined by

$$\mathcal{N}(\cdot) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\cdot) ; \quad \mathcal{N}V_x = [\nabla \cdot ((\mu - \mu_b) \dot{\gamma})] \cdot \mathbf{e}_x, \quad (2.16)$$

similarly for $\mathcal{N}V_y$ and $\mathcal{N}V_z$. The boundary conditions are

$$\theta = w = \frac{\partial w}{\partial z} = u = v = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1 \quad (2.17)$$

The condition $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ comes from the incompressibility condition.

In a matrix notation, the above system can be written formally as

$$\mathbf{M} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathbf{L} \Psi + \mathbf{N} \mathbf{I} + \mathbf{N} \mathbf{V}, \quad (2.18)$$

where $\Psi = (w, u, v, \theta)^T$, the operators \mathbf{M} , \mathbf{L} , $\mathbf{N} \mathbf{I}$ and $\mathbf{N} \mathbf{V}$ represent the weight matrix, the linear operator, the nonlinear inertial operator and the nonlinear viscous operator respectively. The nonlinear operators can also be decomposed as

$$\mathbf{N} \mathbf{I} = [NI_w, NI_u, NI_v, NI_\theta]^t \quad \text{and} \quad \mathbf{N} \mathbf{V} = [NV_w, NV_u, NV_v, 0]^t. \quad (2.19)$$

2.4 Linear stability analysis

2.4.1 Onset of convection : direct eigenvalue problem

In the linear theory, \mathbf{u} and θ are assumed infinitesimal. By neglecting the nonlinear terms in (2.13)- (2.15) and (2.4), one obtains the linear problem :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \Delta w = \mu_b \Delta^2 w + 2 \frac{d\mu_b}{dz} \Delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{d^2 \mu_b}{dz^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \Delta_H w \right) + Ra \Delta_H \theta, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta_H u + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] = \mu_b \Delta \left[\Delta_H u + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta_H u + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right] \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta_H v + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] = \mu_b \Delta \left[\Delta_H v + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left[\Delta_H v + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right] \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = w + \Delta \theta. \quad (2.23)$$

At this order, no non-Newtonian effects enter the problem and the thermodependency appears through the viscosity profile of the base state $\mu_b(z)$. The disturbance quantities w, u, v, θ are assumed periodic and of the form :

$$(w, u, v, \theta) = (F_{11}(z), U_{11}(z), V_{11}(z), G_{11}(z)) f(x, y) \exp(st) \quad (2.24)$$

with $f(x, y) = \exp(ik_x x + ik_y y)$, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ the horizontal wavenumber and $s = s_r + is_i$

a complex number. This leads to the differential equations

$$s Pr^{-1} (D^2 - k^2) F_{11} = \mu_b (D^2 - k^2)^2 F_{11} + 2D\mu_b (D^2 - k^2) DF_{11} + \quad (2.25)$$

$$D^2 \mu_b (D^2 + k^2) F_{11} - k^2 Ra G_{11},$$

$$s Pr^{-1} (-k^2 U_{11} + ik_x DF_{11}) = \mu_b (D^2 - k^2) (-k^2 U_{11} + ik_x DF_{11}) + \quad (2.26)$$

$$D\mu_b (-k^2 DU_{11} + ik_x D^2 F_{11})$$

$$s Pr^{-1} (-k^2 V_{11} + ik_y DF_{11}) = \mu_b (D^2 - k^2) (-k^2 V_{11} + ik_y DF_{11}) + \quad (2.27)$$

$$D\mu_b (-k^2 DV_{11} + ik_y D^2 F_{11})$$

$$s G_{11} = F_{11} + (D^2 - k^2) G_{11}, \quad (2.28)$$

with D the derivative with respect to z and k the norm of the vector \mathbf{k} . The boundary conditions are

$$F_{11} = DF_{11} = U_{11} = V_{11} = G_{11} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, 1. \quad (2.29)$$

The solutions of equations (2.25)-(2.28) can be divided into two eigenmode classes. The first one corresponds to the set of eigenmodes of (2.25), (2.28) with a particular solution of (2.26) and (2.27). The second class represents the set of eigenmodes of (2.26) and (2.27) with $F_{11} = 0$. For this class of eigenmodes, it can be shown that

$$s_i = 0 \quad \text{and} \quad s_r = - \frac{k^2 \langle \mu_b (|U_{11}|^2 + |V_{11}|^2) \rangle + \langle \mu_b (|DU_{11}|^2 + |DV_{11}|^2) \rangle}{\langle |U_{11}|^2 + |V_{11}|^2 \rangle} < 0. \quad (2.30)$$

These eigenmodes are thus always damped. The first class of eigenmodes corresponds to the eigenvalue problem (2.25) and (2.28) where s is the eigenvalue and $\mathbf{X}_{11} = (F_{11}, G_{11})$ the eigenvector. It can be written

$$s \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{X}_{11} = \tilde{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{X}_{11}. \quad (2.31)$$

It is easy to show that the principle of exchange of stability still holds, i.e. $s_i = 0$, when the viscosity profile is not uniform. Since any multiple of the eigenvector \mathbf{X}_{11} is also a solution of (2.31) \mathbf{X}_{11} has to be normalized. We have adopted the same normalization as in [18] :

$$G_{11}(z = 1/2) = 1. \quad (2.32)$$

A spectral Chebyshev method is used to determine the critical Rayleigh number and the critical wave number [18]. The marginal stability curve $Ra(k)$ is obtained by the condition $s(Ra, k) = 0$. Using 20 Chebyshev polynomials, the first eigenvalue, i.e. that for which the real part is the largest, is calculated with an accuracy of 10^{-4} . The minimum of the marginal stability curves gives the critical Rayleigh number Ra_c and critical wave number k_c . In the case of exponential fluids, figure 2.1 displays the variation of the critical

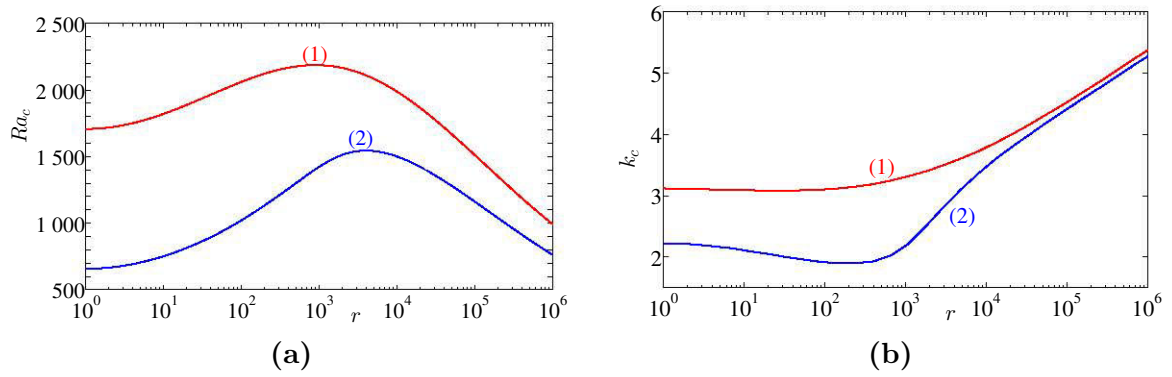


FIGURE 2.1 – Exponential fluid. Critical Rayleigh number (a) and critical wavenumber (b) as function of the viscosity ratio. (1) NSBC, (2) SFBC.

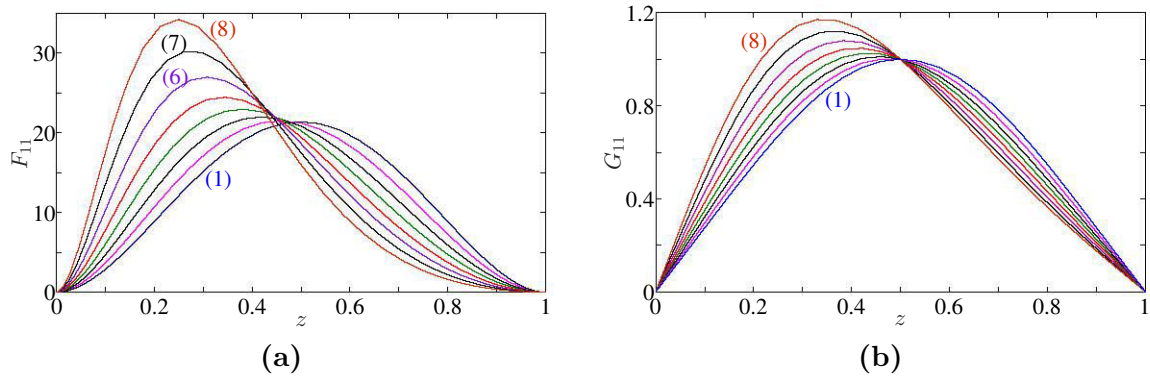


FIGURE 2.2 – Exponential fluid. (a) Vertical velocity eigenfunction and (b) temperature perturbation at the first order as function of the depth z for different values of the thermodependency coefficient c . (1) $c = 0$; (2) $c = 1$; (3) $c = 2$; (4) $c = 3$...increasing c by step 1 until curve (8) $c = 7$.

Rayleigh number for the onset of convection, Ra_c , as well as the critical wave number, k_c , as a function of the viscosity ratio r for no-slip boundary conditions (NSBC) and stress-free boundary conditions (SFBC). This later was added only as a validation test. Our results are in very good quantitative agreement with those obtained by [2]. As indicated by these authors, three different ranges of the viscosity ratio can be distinguished : (i) At low viscosity ratio, $1 \leq r \leq 1.5$, Ra_c and k_c are almost constant ; (ii) at moderate viscosity ratio, $1.5 \leq r \leq 8$, Ra_c increases with increasing r and k_c is nearly constant or decreases slightly for SFBC. The viscosity variation in the moderate viscosity ratio stabilizes the onset of convection ; (iii) for large viscosity ratio, Ra_c decreases with increasing r and k_c increases rapidly. In this regime, the convection is governed by a sublayer that is more unstable than the full layer [2].

The results of [3] can be reproduced by a linear approximation of the exponential law (2.8).

Figure 2.2 displays the profiles of the vertical velocity eigenfunction and the temperature perturbation at the first order for different values of the thermodependency coefficient.

With increasing the viscosity contrast c , the maximum of $F_{11}(z)$ takes place near the bottom plate where the fluid is less viscous, i.e., the center of the convection rolls is shifted towards the bottom plate, and the fluid motion is significantly reduced near the top wall. The shear rate increases near the lower boundary and decreases near the upper. The viscosity contrast between the top and the lower boundaries will be reinforced by the shear-thinning effects. The temperature perturbation becomes more confined near the heated wall. As expected, when $c = 0$, the eigenfunctions, $F_{11}(z)$ and $G_{11}(z)$, are symmetric with the respect to the midplane of the fluid layer.

2.4.2 Adjoint eigenvalue problem : Adjoint mode

In the analysis developed in the next section, it will be necessary to eliminate secular terms in non homogeneous differential equations, i.e. the solvability condition must be applied. It is therefore necessary to determine the linear adjoint of the direct problem at the critical conditions. For vector fields \mathbf{f} and \mathbf{g} , one defines an inner product between two vector functions $\mathbf{f}(z)$ and $\mathbf{g}(z)$ by

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{g} dz, \quad (2.33)$$

where \mathbf{f}^* is the complex conjugate of \mathbf{f} . To the direct eigenvalue problem (2.31) corresponds the following adjoint problem

$${}_s \tilde{\mathbf{M}}^+ \cdot \mathbf{X}_{ad} = \tilde{\mathbf{L}}^+ \cdot \mathbf{X}_{ad} \quad \text{with} \quad \mathbf{X}_{ad} = (F_{ad}, G_{ad}), \quad (2.34)$$

where the adjoint operators \mathbf{M}^+ and \mathbf{L}^+ are defined by

$$\langle \mathbf{X}_{ad}, \tilde{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{X}_{11} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{M}}^+ \cdot \mathbf{X}_{ad}, \mathbf{X}_{11} \rangle, \quad \langle \mathbf{X}_{ad}, \tilde{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{X}_{11} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{L}}^+ \cdot \mathbf{X}_{ad}, \mathbf{X}_{11} \rangle, \quad (2.35)$$

where \mathbf{X}_{11} fulfills the ‘linear’ boundary conditions (2.29). By integrating by part we get the linear adjoint problem and the corresponding boundary conditions

$${}_s Pr^{-1} (D^2 - k^2) F_{ad} = \mu_b (D^2 - k^2)^2 F_{ad} + 2D\mu_b (D^2 - k^2) DF_{ad} + D^2 \mu_b (D^2 + k^2) F_{ad} + G_{ad}, \quad (2.36)$$

$${}_s G_{ad} = -k^2 Ra F_{ad} + (D^2 - k^2) G_{ad}, \quad (2.37)$$

with

$$F_{ad} = 0 \quad , \quad DF_{ad} = 0 \quad , \quad G_{ad} = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (2.38a)$$

$$F_{ad} = 0 \quad , \quad DF_{ad} = 0 \quad , \quad G_{ad} = 0 \quad \text{at} \quad z = 1. \quad (2.38b)$$

The solution of these equations is obtained using the same method as for the direct problem. Similarly, the normalization adopted for the adjoint mode is

$$G_{ad}(z = 1/2) = 1. \quad (2.39)$$

At $Ra = Ra_c$, the so-called adjoint critical mode does not depend on the Prandtl number.

2.5 Amplitude equations in a hexagonal lattice

The critical Rayleigh number for the onset of convection determined from the linear stability analysis depends only on the norm k_c of the wavevector. Because of the isotropy of the extended horizontal plane, the direction of the wavevector is arbitrary. In addition any linear combination of modes $A_p \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}) (F_{11}(z), G_{11}(z))$ where $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{k}_p = (k_{px}, k_{py})$, $|\mathbf{k}_p| = k_c$ and A_p 's are constant coefficients is a solution of the linear problem, i.e. there is also a pattern degeneracy. In this section, we consider the case where the wavevectors lie on a hexagonal lattice

$$(w, \theta) = \sum_{p=1}^3 A_p (F_{11}, G_{11}) \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}) + c.c. + \text{h.o.t.}, \quad (2.40)$$

where "c.c." denotes the complex conjugate of the prior expression and "h.o.t." means "higher order terms". The hexagon patterns are made of three pairs of wavevectors at $2\pi/3$ angles apart : $\mathbf{k}_1 = k_c \mathbf{e}_x$, $\mathbf{k}_2 = k_c \left(-\mathbf{e}_x/2 + \left(\sqrt{3}/2\right) \mathbf{e}_y\right)$ and $\mathbf{k}_3 = k_c \left(-\mathbf{e}_x/2 - \left(\sqrt{3}/2\right) \mathbf{e}_y\right)$. The objective is to determine the spatio-temporal evolution of the amplitude A_p , above threshold, due to different nonlinearities of the problem.

2.5.1 Multiple scales method

As the Rayleigh number is increased above the onset Ra_c , the growth-rate of the perturbation is positive for any wavenumber within a band $\sqrt{\epsilon}$ around the critical wavenumber, where $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$ is the distance from the onset. Indeed, Taylor expansion of the dispersion relation near its maximum shows that $s \propto \epsilon$, $k - k_c \propto \sqrt{\epsilon}$. For $\epsilon > 0$, emergent patterns are described by an infinite sum of unstable modes (in a continuous band) of the form $\exp\left(\frac{\epsilon t}{\tau_0}\right) \exp(ik_c x) \exp\left(i\frac{\sqrt{\epsilon}x}{\xi_0}\right)$. Here, τ_0 is the characteristic time for the instability to grow and ξ_0 is the coherence length. For small ϵ , we can separate the dynamics into fast eigenmodes and slow modulation of the form $\exp\left(\frac{\epsilon t}{\tau_0}\right) \exp\left(\frac{i\sqrt{\epsilon}x}{\xi_0}\right)$. A similar reasoning can be done for the y -direction.

Let us denote $\delta = \sqrt{\epsilon}$. The multiple-scales approach is used to obtain the amplitude equation, which describes the slow temporal and spatial variation of the field variables. The slow scales

$$X = \delta x \quad , \quad Y = \delta y \quad \text{and} \quad T = \delta^2 t \quad \text{with} \quad \delta \ll 1 \quad (2.41)$$

are treated as independent of the fast scales x , y and t . The derivatives with respect to the new variables are

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \delta^2 \frac{\partial}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial}{\partial Y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.42)$$

The fast spatial variables vary on the order of a typical wavelength. The slow variables describe, the temporal and the spatial modulations of these fast variables. Furthermore, as the marginal mode is stationary, then

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \delta^2 \frac{\partial}{\partial T}. \quad (2.43)$$

The solution of the nonlinear problem in the neighborhood of the critical conditions, corresponding to the onset of convection is developed with respect to the parameter δ by

$$\Psi = \delta \Psi^{(1)} + \delta^2 \Psi^{(2)} + \delta^3 \Psi^{(3)} + O(\delta^4), \quad (2.44)$$

$$Ra = Ra_c + \delta Ra^{(1)} + \delta^2 Ra^{(2)} + O(\delta^3). \quad (2.45)$$

The Taylor expansion is also applied to the operators

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(0)} + \delta \mathbf{M}^{(1)} + O(\delta^2), \quad (2.46)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{(0)} + \delta \mathbf{L}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{L}^{(2)} + O(\delta^3), \quad (2.47)$$

$$\mathbf{NI} = \delta^2 \mathbf{NI}^{(2)} + \delta^3 \mathbf{NI}^{(3)} + O(\delta^3), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{NV} = \delta^2 \mathbf{NV}^{(2)} + \delta^3 \mathbf{NV}^{(3)} + O(\delta^3). \quad (2.49)$$

The explicit expressions of \mathbf{M} , \mathbf{L} , \mathbf{NI} and their sub-scales are given in appendices. The expressions of \mathbf{NV} and its sub-scales are too lengthy, and thus are not shown.

2.5.2 Derivation of the Ginzburg-Landau equation

Taking (2.42), (2.43) into account, the expansion of variables (2.44), (2.45) and operators (2.46)-(2.49) are substituted formally into the nonlinear system of equations (2.4), (2.13)-(2.15). After ordering according to the power of δ , a sequence of systems of equations is obtained. In the following, the first three orders are determined.

Solution at order δ

At the first order of δ , the linearized problem is obtained

$$\mathbf{L}^{(0)} \Psi^{(1)} = 0. \quad (2.50)$$

The system (2.50) corresponds to the linear problem discussed in Sec.2.4. However, now $\Psi^{(1)}$ is also a function of the slow variables X , Y and T . These variables do not appear in the linear stability analysis section. For hexagon patterns, the first order solution $\Psi^{(1)} =$

$[w^{(1)}, u^{(1)}, v^{(1)}, \theta^{(1)}]^t$ is

$$w^{(1)} = F_{11}(z) [A_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + A_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) + A_3 \exp(i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r})] + c.c., \quad (2.51)$$

$$\theta^{(1)} = G_{11}(z) [A_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + A_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) + A_3 \exp(i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r})] + c.c., \quad (2.52)$$

$$\mathbf{u}_H^{(1)} = \frac{DF_{11}}{k^2} \nabla_{Hx} [A_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + A_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) + A_3 \exp(i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r})] + c.c. \quad (2.53)$$

where ∇_{Hx} denotes the horizontal gradient for the fast variables, $\mathbf{u}_H = (u, v)$ the horizontal velocity components, and A_p the amplitude of the perturbation :

$$A_p = A_p(X, Y, T) \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.54)$$

Solution at order δ^2

At the next order δ^2 , we have

$$\mathbf{L}^{(0)} \Psi^{(2)} = -\mathbf{L}^{(1)} \Psi^{(1)} - \mathbf{N} \mathbf{I}^{(2)} - \mathbf{N} \mathbf{V}^{(2)}. \quad (2.55)$$

The forcing terms in the right-hand side of equation (2.55) are computed by introducing the first order solution (2.51)-(2.53). This forcing is composed of four components : (1) Terms proportional to $|A_p|^2$ ($p = 1, 2, 3$), with the wavenumber modulus $|\mathbf{k}| = 0$, due to the interaction of the eigenmode with its complex conjugate. (2) Terms proportional to $A_p^2 \exp(2i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$, $|\mathbf{k}| = 2k_c$, due to the interaction of the eigenmode with itself, (3) terms proportional to $A_p A_q^* \exp(i(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r})$, $|\mathbf{k}| = \sqrt{3}k_c$ and (4) resonant forcing with wavevector \mathbf{k}_ℓ ($\ell = 1, 2, 3$ and $|\mathbf{k}_\ell| = k_c$). Four separate sets of non homogeneous differential equations are then derived for each component. They are given in Appendix 2.B. For the fourth component, the right-hand side of the non-homogeneous differential contains secular terms. A solvability condition, known as the Fredholm alternative should then be applied for a solution to exist, i.e. the left hand side of equation (2.55) has to be orthogonal to the null-space of the adjoint operator. We obtain

$$\begin{aligned} & A_2^* A_3^* \int_0^1 G_{ad} (2F_{11} D G_{11} + G_{11} D F_{11}) dz + \\ & A_2^* A_3^* \frac{1}{Pr} \int_0^1 F_{ad} (2D F_{11} D^2 F_{11} + F_{11} D^3 F_{11} - 3k_c^2 F_{11} D F_{11}) dz - \\ & A_2^* A_3^* \int_0^1 F_{ad} [\mathbf{N} \mathbf{V}_w]_{A_2^* A_3^*}^{(2)} dz - \\ & 2i(\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{HX}) A_1 \left[2 \int_0^1 \mu_b (D^2 F_{11} - k_c^2 F_{11}) F_{ad} dz + 2 \int_0^1 \frac{d\mu_b}{dz} \frac{dF_{11}}{dz} F_{ad} dz \right] - \\ & 2i(\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{HX}) A_1 \left[- \int_0^1 \frac{d^2 \mu_b}{dz^2} F_{11} F_{ad} dz + Ra_c \int_0^1 G_{11} F_{ad} dz \right] - \\ & k_c^2 Ra_1 A_1 \int_0^1 G_{11} F_{ad} dz = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Two other similar relations are obtained by circular permutation of the indices. The integrals in (2.56) are evaluated numerically by means of the Clenshaw and Curtis method. The calculation leads to a result of the form

$$Ra_1 A_1 + b A_2^* A_3^* = 0. \quad (2.57)$$

Again, two other similar relations are obtained by circular permutation. These expressions allow to determine the solution at the second order.

2.5.3 Solution at order δ^3

At this order, we obtain the equation for the evaluation of $\Psi^{(3)}$:

$$\mathbf{L}^{(0)} \Psi^{(3)} = \mathbf{M}^{(0)} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T} - \mathbf{L}^{(1)} \Psi^{(2)} - \mathbf{L}^{(2)} \Psi^{(1)} - \mathbf{N} \mathbf{I}^{(3)} - \mathbf{N} \mathbf{V}^{(3)} \quad (2.58)$$

The solvability condition at this order, yields an equation for Ra_2 . To obtain the amplitude equations at cubic order, we use equation (2.45), combined with $\epsilon = (Ra - Ra_c)/Ra_c$, the departure from the linear threshold. We have

$$\epsilon A_1 = \frac{\delta}{Ra_c} Ra^{(1)} + \frac{\delta^2}{Ra_c} Ra^{(2)} A_1. \quad (2.59)$$

We substitute in (2.59), $Ra^{(1)}$ and $Ra^{(2)}$ by their expressions derived from the solvability conditions at orders δ^2 and δ^3 . Finally, returning to the fast variable $\delta A_j(X, Y, T) = A'_j(x, y, t)$, $\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial x}$, ..., we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} = & \epsilon \alpha_l A_1 + \alpha_d (\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{Hx})^2 A_1 + \gamma A_2^* A_3^* - \\ & g_1 |A_1|^2 A_1 - g_2 (|A_2|^2 + |A_3|^2) A_1 + \\ & i\beta_1 [A_2^* (\mathbf{k}_3 \cdot \nabla_{Hx}) A_3^* + A_3^* (\mathbf{k}_2 \cdot \nabla_{Hx}) A_2^*] + \\ & i\beta_2 [A_2^* (\mathbf{k}_2 \cdot \nabla_{Hx}) A_3^* + A_3^* (\mathbf{k}_3 \cdot \nabla_{Hx}) A_2^*]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Companion equations for A_2 and A_3 are obtained by subindex permutation.

Following [14], it is useful to express the derivatives in equation (2.61) in terms of unitary vectors of the corresponding mode. One obtains

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} = & \frac{\epsilon}{\tau_0} A_1 + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} (\mathbf{n}_1 \cdot \nabla_{Hx})^2 A_1 + \gamma A_2^* A_3^* - \\ & g_1 |A_1|^2 A_1 - g_2 (|A_2|^2 + |A_3|^2) A_1 + \\ & i\alpha_1 [A_2^* (\mathbf{n}_3 \cdot \nabla_{Hx}) A_3^* + A_3^* (\mathbf{n}_2 \cdot \nabla_{Hx}) A_2^*] + \\ & i\alpha_2 [A_2^* (\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \nabla_{Hx}) A_3^* + A_3^* (\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \nabla_{Hx}) A_2^*], \end{aligned} \quad (2.61)$$

where \mathbf{n}_i is the unitary vector in the direction of \mathbf{k}_i and $\boldsymbol{\tau}_i$ orthogonal to \mathbf{n}_i . As indicated by [19, 20], there is no Lyapunov functional for Eqs (2.61) and it is possible that the steady state cannot be reached. In contrast, when α_1 and α_2 vanish, a Lyapunov functional can be written down in a straightforward way.

The characteristic time for the instability to grow τ_0 and the coherence length ξ_0 are shown in figure 2.3 as a function of r and for different values of Pr . The coefficient γ arises from non Oberbeck-Boussinesq effects. It increases with increasing the viscosity ratio, since $\gamma \propto c = \ln(r)$. The coefficient γ , also increases with the Prandtl number as it is shown in figure 2.4. From $Pr \approx 50$, there is no significant effect of Pr . The coefficient g_1 refers to the self-saturation coefficient and g_2 the cross-saturation coefficient. It can be shown straightforwardly that g_1 and g_2 can be written as the sum of two contributions. The first one (g_1^N, g_2^N) similar to that obtained for a Newtonian fluid arises from the nonlinear inertial terms and the thermodependency of the viscosity. The second contribution (g_1^V, g_2^V) arises from the nonlinear variation of the viscosity with the shear-rate :

$$g_1 = g_1^N + g_1^V \quad \text{with} \quad g_1^V = -\alpha g_1^{NN}, \quad (2.62)$$

and similarly for g_2 . Variations of g_1^N, g_1^{NN}, g_2^N and g_2^{NN} as a function of the viscosity ratio for different values of Pr are displayed in Fig 2.6. The coefficients g_1 and g_2 increase significantly with Prandtl number up to $Pr = 50$. Whereas, the dependency of g_1 and g_2 on r is quiet modest. The coefficients α_1 and α_2 are real. The term with α_1 accounts for distortions in the directions of rolls and therefore corresponds physically to wavenumber dilatation. The coefficient α_1 is positive and takes values of the same order as γ . Note also that α_1 vanishes when $r = 1$, and increases with increasing r . The terms with α_2 account for distortions in the hexagonal form. The coefficient α_2 , is negative and smaller (in absolute value) than α_1 . For the set of coefficients discussed above, the following correlations can be used for $1 \leq r \leq 3$ and $1 < Pr < \infty$:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0.0508 + 0.026Pr^{-1} ; \quad \xi_0 = 0.385 - 3.6510^{-4}r - 1.70810^{-4}r^2, & (2.63) \\ \gamma &= (9.80 - 2.9Pr^{-1} + 0.22Pr^{-2}) \log(r), \\ g_1^N &= 254.3 (1.0037 - 0.4722Pr^{-1} + 0.1392Pr^{-2}) (1.0067 - 0.0037r - 0.002r^2) \\ g_1^{NN} &= 11.86 \cdot 10^5 (1.0038 - 0.4808Pr^{-1} + 0.1422Pr^{-2}) (0.9733 + 0.0128r + 0.0094r^2), \\ g_2^N &= 375.9 (1.0029 - 0.3545Pr^{-1} + 0.1020Pr^{-2}) (1.0091 - 0.0047r - 0.0029r^2), \\ g_2^{NN} &= 1.343 \cdot 10^6 (1 - 0.476Pr^{-1} + 0.146Pr^{-2}) (0.9756 + 0.0117r + 0.0086r^2) \\ \alpha_1 &= 12.5 (1 - 0.504Pr^{-1} + 0.148Pr^{-2}) \log(r), \\ \alpha_2 &= -2.1 (1.003 - 0.238Pr^{-1} + 0.069Pr^{-2}) \log(r). \end{aligned}$$

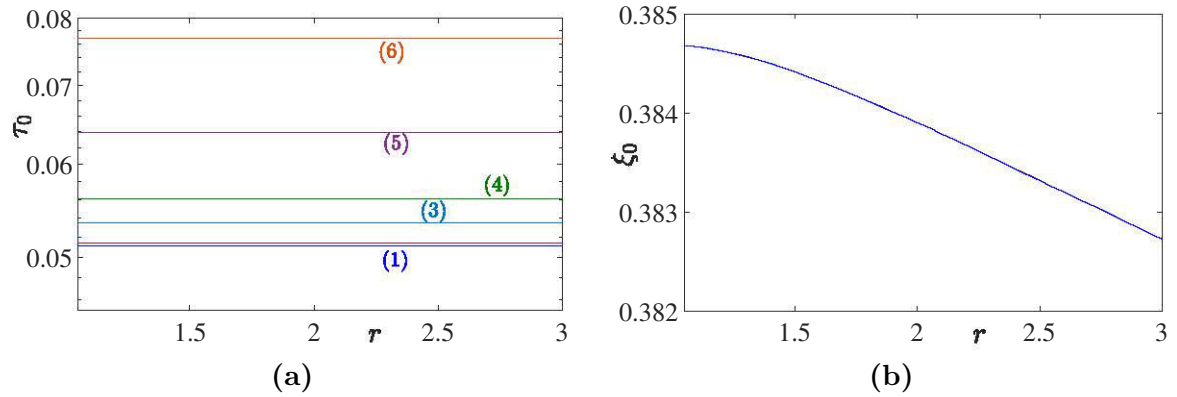


FIGURE 2.3 – Variation of the characteristic time τ_0 (a) and the coherence length ξ_0 (b) as a function of the viscosities ratio, for different values of Prandtl number. (1) $Pr = 100$; (2) $Pr = 50$; (3) $Pr = 10$; (4) $Pr = 5$; (5) $Pr = 2$; (6) $Pr = 1$.

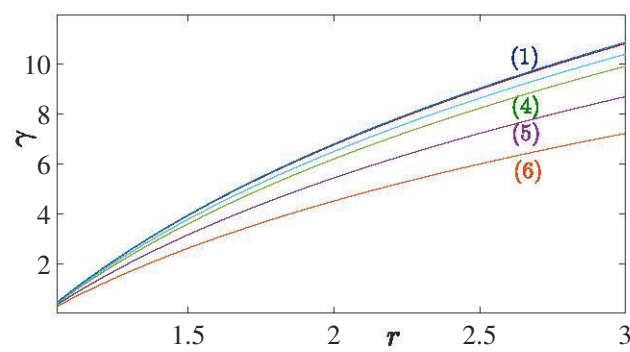


FIGURE 2.4 – Variation of γ with the ratio viscosity r for different values of the Prandtl number. (1) $Pr = 100$; (2) $Pr = 50$; (3) $Pr = 10$; (4) $Pr = 5$; (5) $Pr = 2$; (6) $Pr = 1$.

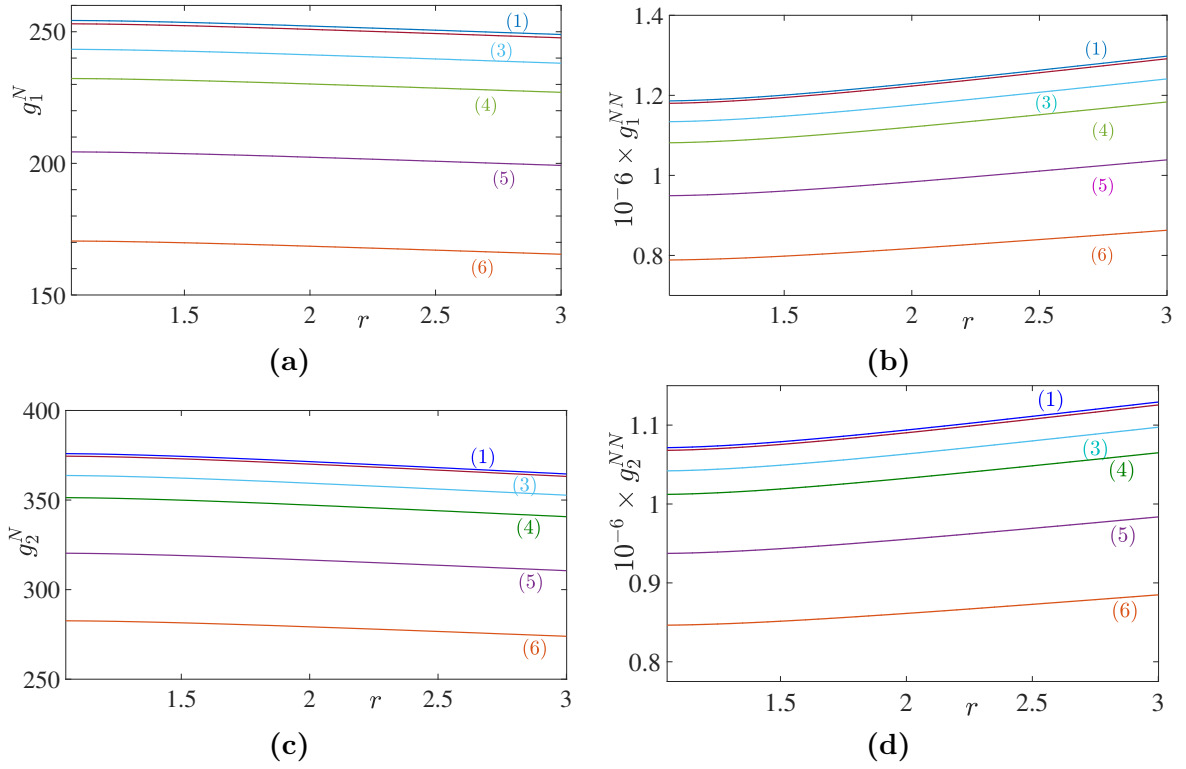


FIGURE 2.5 – (a) “Newtonian” and (b) non-Newtonian contribution to the first Landau coefficient and to the cross-saturation coefficient (c) and (d) respectively as a function of r for different values of Pr . (1) $Pr = 100$; (2) $Pr = 50$; (3) $Pr = 10$; (4) $Pr = 5$; (5) $Pr = 2$; (6) $Pr = 1$.

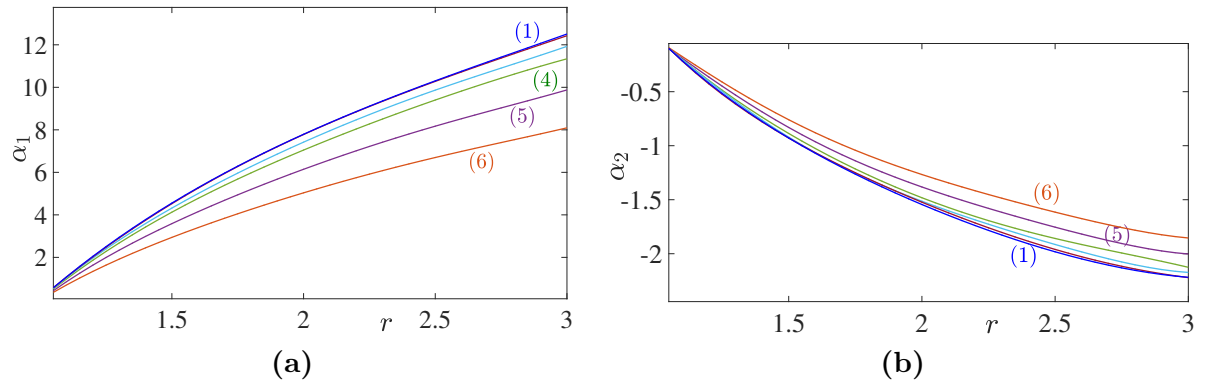


FIGURE 2.6 – (a) α_1 and (b) α_2 coefficients as a function of r for different values of Pr . (1) $Pr = 100$; (2) $Pr = 50$; (3) $Pr = 10$; (4) $Pr = 5$; (5) $Pr = 2$; (6) $Pr = 1$.

2.6 Amplitude instabilities

We study the stability of homogeneous and stationary solutions of equations (2.61) by including slightly off-critical wavenumber in the amplitudes.

(i) Roll solution with a wavenumber slightly off-critical $k = k_c + q$. It is given by $A_1 = R_0 \exp(iqx)$, $A_2 = A_3 = 0$, and any circular permutation with $R_0 = \sqrt{\frac{\epsilon - \xi_0^2 q^2}{\tau_0 g_1}}$. A linear stability analysis of this solution with respect to uniform perturbations $A_1 = (R_0 + r_1) \exp(iqx_1)$, $A_2 = r_2 \exp(iqx_2)$ and $A_3 = r_3 \exp(iqx_3)$ shows that the roll solution is stable when $g_2 > g_1$ and

$$\epsilon > \epsilon_r(q) = \frac{\tau_0 g_1 (\gamma + 2\alpha_1 q)^2}{(g_2 - g_1)^2} + \xi_0^2 q^2. \quad (2.64)$$

(ii) Hexagon solution is given by three sets of rolls of equal amplitude, $A_p = H_0 \exp(iq x_p)$ with $p = 1, 2, 3$ and

$$H_0 = \frac{(\gamma + 2\alpha_1 q) + \sqrt{(\gamma + 2\alpha_1 q)^2 + 4(g_1 + 2g_2)(\epsilon - \xi_0^2 q^2)/\tau_0}}{2(g_1 + 2g_2)}, \quad (2.65)$$

called up-hexagons, that correspond to up flow in the center, and

$$H_0 = \frac{-(\gamma + 2\alpha_1 q) + \sqrt{(\gamma + 2\alpha_1 q)^2 + 4(\epsilon - \xi_0^2 q^2)(g_1 + 2g_2)/\tau_0}}{2(g_1 + 2g_2)}, \quad (2.66)$$

called down hexagons, that correspond to down flow motion in the center.

Solutions called *up-hexagons* exist for

$$\epsilon > \epsilon_a = -\frac{(\gamma + 2\alpha_1 q)^2 \tau_0}{4(g_1 + 2g_2)} + \xi_0^2 q^2, \quad (2.67)$$

and are linearly stable for $\epsilon_a < \epsilon < \epsilon_h$, with

$$\epsilon_h = \frac{\tau_0 (\gamma + 2\alpha_1 q)^2 (2g_1 + g_2)}{(g_1 - g_2)^2} + \xi_0^2 q^2 \quad (2.68)$$

Solutions called *down hexagons* exist for $\epsilon > \xi_0^2 q^2$ and are linearly unstable.

(iii) The "mixed states" given by

$$A_1 = \frac{\gamma - 2\alpha_1 q}{g_2 - g_1}, \quad A_2 = A_3 = \sqrt{\frac{(\epsilon - \xi_0^2 q^2)/\tau_0 - g_1 A_1^2}{g_1 + g_2}} \quad (2.69)$$

and any circulation permutation exist for $\epsilon > \frac{(\gamma + 2\alpha_1 q)^2 g_1}{(g_1 - g_2)^2} + \xi_0^2 \tau_0$ and are linearly unstable.

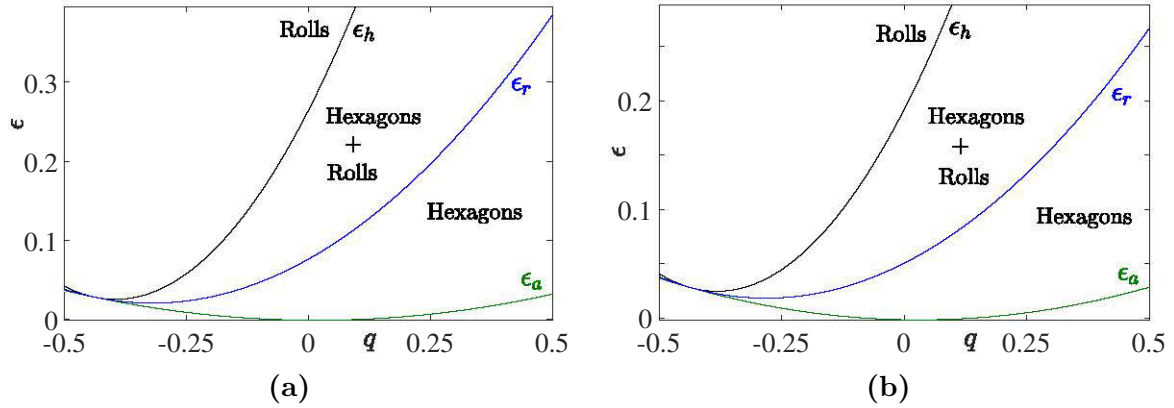


FIGURE 2.7 – Amplitude stability curves in (ϵ, q) plane at $r = 2.5$ and two different values of α : (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 10^{-4}$

An example of amplitude stability curves in (ϵ, q) space and the associated bifurcation diagram for $q = 0$ is given in figures 2.7 and 2.8. Hexagons bifurcate transcritically from the conductive state where they are unstable. Both hexagons and the conductive state are stable in the range $\epsilon_a \leq \epsilon \leq 0$ and both hexagons and rolls are stable in the range $\epsilon_r \leq \epsilon \leq \epsilon_h$. In this range, rolls and hexagons are linked via a branch of mixed modes which are always unstable.

Variations of ϵ_a , ϵ_r , ϵ_h and $(\epsilon_h - \epsilon_r)$ as a function of the viscosities ratio, r for different values of the shear-thinning degree are depicted in Fig. 2.9. Overall, the thermodependency of the viscosity favors convection in form of hexagons and their stability whereas shear-thinning effects favor convection in form of rolls and their stability. For instance, in Fig. 2.9(b), the domain of stability of hexagons increases with increasing r and decreases with increasing shear-thinning effects. In the same way, the domain of bistability rolls and hexagons shrinks with increasing α , and increases with increasing the viscosities ratio, i.e. the thermodependency effect.

2.7 Competition between rolls and squares

From a limit value of the viscosity ratio r_ℓ , rolls become unstable with respect to squares as it was shown theoretically by [3] and [11] and experimentally by [4]. In this section, we investigate the influence of shear-thinning effects on this limit value r_ℓ . Here, we consider only competition between perfect rolls and squares without spatial modulation. In a square lattice, the solution at order δ is

$$w^{(1)} = F_{11}(z) [A_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + A_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})] + c.c. , \quad (2.70)$$

$$\theta^{(1)} = G_{11}(z) [A_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) + A_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})] + c.c. , \quad (2.71)$$

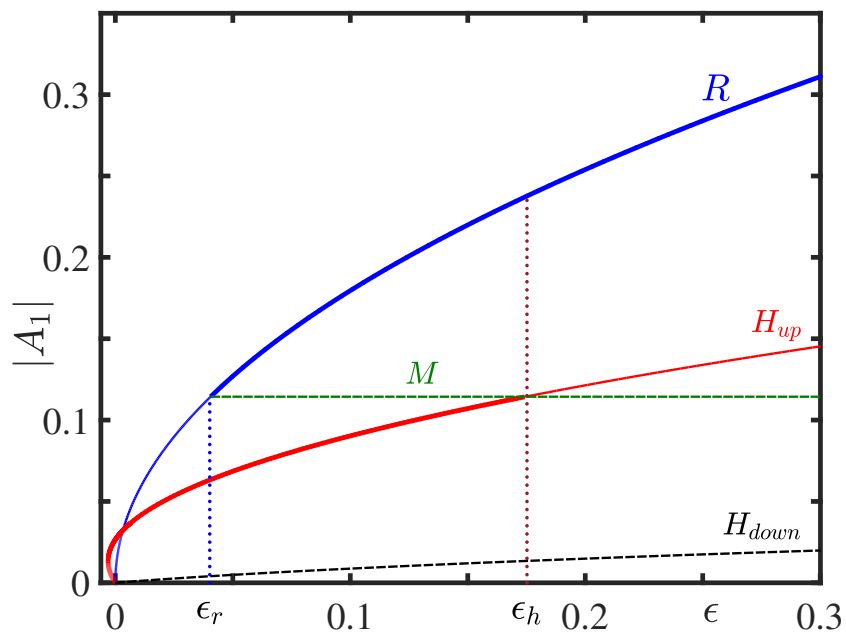


FIGURE 2.8 – Bifurcation diagram for hexagons in the case where $g_2 > g_1$, $r = 2.5$ and $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-4}$. The amplitude $|A_1|$ is plotted against the distance to the threshold ϵ , for the roll-solution branch (labeled R), for the mixed mode branch (labeled M) and for the two hexagon-solution branches, up- and down-hexagons. Solid lines indicate stable solutions and dashed lines represent unstable solutions.

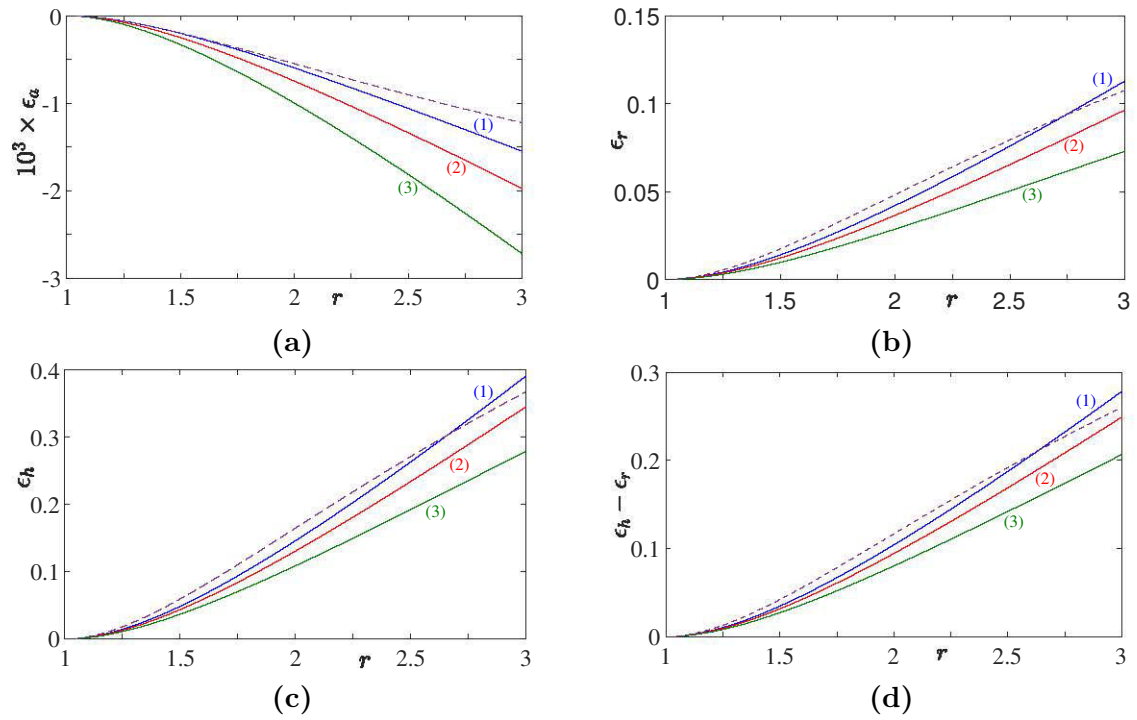


FIGURE 2.9 – Variations of ϵ_a , ϵ_r , ϵ_h and $(\epsilon_h - \epsilon_r)$ versus r for three values of the shear-thinning degree α . The Prandtl number is fixed, $Pr = 100$. (1) Newtonian fluid, $\alpha = 0$; (2) Carreau fluid with $\alpha = 1.07 \cdot 10^{-4}$; (3) Carreau fluid with $\alpha = 1.43 \cdot 10^{-4}$. The dashed line is the correlation proposed par [9] for a Newtonian fluid.

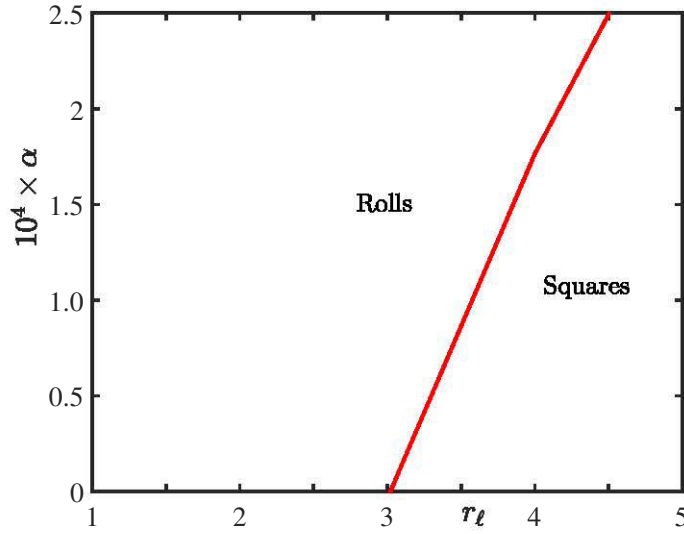


FIGURE 2.10 – Domains of stability of rolls and squares in the plane (α, r) .

The derivation of amplitude equations without spatial terms, for the two modes A_1 and A_2 forming an angle of 90° follows the same procedure as in §2.5. They are given by

$$\frac{dA_1}{dt} = sA_1 - \left[g_1 |A_1|^2 + g_{2s} |A_2|^2 \right] A_1 + \dots \quad (2.72)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = sA_2 - \left[g_1 |A_2|^2 + g_{2s} |A_1|^2 \right] A_2 + \dots \quad (2.73)$$

Note that Eqs (2.72), (2.73) can be obtained using symmetries introduced by the square lattice [21, 22]. A linear stability analysis of stationary rolls and squares solutions of Eqs (2.72), (2.73) allows to show that squares are stable when $g_{2s} < g_1$ i.e when the cross-coupling between two orthogonal modes that describe the square pattern is weak enough. The numerical results are displayed in figure where stability domains of squares and rolls are represented in the plane (α, r) for $Pr = 10$. The curve is a boundary between squares and rolls : below the boundary, squares are stable and above the boundary, rolls are the stable convective pattern. It can be observed that r_ℓ increases with increasing shear-thinning effects.

2.8 Phase instabilities

The stability of the stationary up-hexagons solution (2.65) is investigated by adding small amplitude and phase perturbations of the form

$$A_p = (H_0 + r_p) \exp [i (qx_p + \phi_p)], \quad p = 1, 2, 3, \quad (2.74)$$

where A_p represents the amplitude of a slightly distorted hexagonal patterns, $|r_p(x_1, x_2, x_3, t)| \ll 1$ and $|\phi_p(x_1, x_2, x_3, t)| \ll 1$ are the amplitude and the phase

of the perturbation respectively. Substitution of (2.74) into (2.61) and linearizing with respect to r_p and ϕ_p leads to the following set of equations

$$\frac{\partial r_p}{\partial t} = -[2g_1 H_0 + (\gamma + 2\alpha_1 q)] H_0 r_p + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{\partial^2 r_p}{\partial x_p^2} + \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} & [(\gamma + 2\alpha_1 q) - 2g_2 H_0] H_0 (r_j + r_k) - 2q H_0 \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{\partial \phi_p}{\partial x_p} + \\ & \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}} \right) H_0^2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{3}} H_0^2 \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial t} = -(\gamma + 2\alpha_1 q) H_0 (\phi_p + \phi_j + \phi_k) + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x_p^2} + \frac{2q}{H_0} \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \frac{\partial r_p}{\partial x_p} + \quad (2.76)$$

$$\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_j} + \frac{\partial r_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_k} + \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \right).$$

In the following, we consider long-wavelength perturbations, in the region of parameters where hexagons are stable with respect to spatially homogeneous disturbances. In this case, it can be shown that to the leading order, i.e, in the limit of zero wavenumber, the amplitudes r_p and the total phase $\Phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$ are fastly decaying variables, whereas the remaining two phase modes are neutral (the growth rate vanishes). Actually, a spatially uniform modification of the phase corresponds to a shift of a periodic pattern, and thus is neutral because of translational invariance in space [23]. When the spatial modulation is considered in the long wavelength limit, the two phase modes are no longer neutral, but evolve on long space and time scales [24]. The dynamics are therefore dominated by these two phase modes. Instead of using ϕ_2 and ϕ_3 , it is convenient to consider $\phi_x = -(\phi_2 + \phi_3)$ and $\phi_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\phi_2 + \phi_3)$, which are related to the two translational symmetries in the x and y directions respectively [25, 14]. Using the phase approximation, the amplitudes perturbations and the global phase Φ are slaved adiabatically to the slow phase modes. Adiabatic elimination, reduces then (2.75), (2.76) to

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D_{\perp} \nabla^2 \phi + (D_{\parallel} - D_{\perp}) \nabla (\nabla \cdot \phi), \quad (2.77)$$

where the phase vector $\phi = (\phi_x, \phi_y)$, D_{\perp} and D_{\parallel} are the transverse and longitudinal phase diffusion coefficients, given by

$$D_{\perp} = \frac{1}{4} \frac{\xi_0^2}{\tau_0} - \frac{q^2}{2u} \left(\frac{\xi_0^2}{\tau_0} \right)^2 + \frac{H_0^2}{8u} \left(\alpha_1 - \sqrt{3} \alpha_2 \right)^2 \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{3}{4} \frac{\xi_0^2}{\tau_0} - \frac{q^2 (4u + v)}{2uv} \left(\frac{\xi_0^2}{\tau_0} \right)^2 + \frac{H_0^2}{8u} \left(\alpha_1 - \sqrt{3} \alpha_2 \right)^2 - \\ & \frac{H_0^2 \alpha_1}{v} \left(\alpha_1 + \sqrt{3} \alpha_2 \right) + \frac{H_0 q}{v} \frac{\xi_0^2}{\tau_0} \left(3\alpha_1 + \sqrt{3} \alpha_2 \right), \end{aligned} \quad (2.79)$$

with

$$u = H_0^2 (g_1 - g_2) + (\gamma + 2\alpha_1 q) H_0, \quad (2.80)$$

$$v = 2H_0^2 (g_1 + 2g_2) - (\gamma + 2\alpha_1 q) H_0. \quad (2.81)$$

The phase equation (2.77) allows to split the phase vector ϕ into a longitudinal ϕ_ℓ and a transverse ϕ_t modes, $\phi = \phi_\ell + \phi_t$, that satisfy $\nabla \times \phi_\ell = 0$ and $\nabla \cdot \phi_t = 0$ respectively. This leads to the uncoupled phase diffusion equations [25, 14, 26, 27]

$$\frac{\partial \phi_\ell}{\partial t} = D_{\parallel} \nabla^2 \phi_\ell \quad , \quad \frac{\partial \phi_t}{\partial t} = D_{\perp} \nabla^2 \phi_t. \quad (2.82)$$

The normal modes ϕ_t and ϕ_ℓ correspond to Eckhaus rectangular and rhomboidal perturbations, respectively. The hexagons are stable to phase modes in the domain defined by $D_{\parallel} > 0$ and $D_{\perp} > 0$. In the figure 2.11, we show the phase stability diagrams for a Newtonian fluid and two different values of the viscosities ratio r . Curves (1) and (2) correspond to $D_{\perp} = 0$ and $D_{\parallel} = 0$, respectively. Curve (4) is the upper stability amplitude where a bifurcation to rolls occurs. The minimum of the curve (4) is located in the region $q < 0$. Below curve (3), no hexagons exist. Hexagons are stable in the shaded region. For viscosities ratio $1 \leq r \leq 2$, the region of stability to amplitude and phase modes is closed. Whereas for larger values of r , the stability domain is open. Note also that the domain of stability is decentered towards the right. It is delimited mainly by the stability amplitude curves and the phase instability boundary. Nevertheless, the numerical results show that close to the threshold, the longitudinal mode is the relevant destabilizing mode. The region where the longitudinal mode destabilizes the pattern increases with increasing r . The influence of shear-thinning effects is clearly illustrated by figures 2.12 and 2.13. The stability domain of hexagons reduces with increasing shear-thinning effects. The region where the longitudinal mode is the relevant destabilizing mode remains small, even if the numerical results show that it increases with increasing shear-thinning effects. For comparison, we have represented in figure 2.13(b), the stability region of hexagons when $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. This region is symmetrical with respect to the vertical axis.

2.9 Conclusion

We have investigated the influence of shear-thinning effects on Rayleigh-Bénard convection for a Carreau fluid, taking into account the variation of the viscosity with temperature. The dependence of the viscosity on temperature was assumed of exponential type. The critical Rayleigh number Ra_c for the onset of convection was determined as a function of the viscosity ratio, r , across the fluid layer. The results are in very good agreement with those given in the literature for a Newtonian fluid. The shear-thinning behavior does not play a role in the linear stability analysis of the conduction state.

In order to investigate nonlinear effects on bifurcation characteristics of convection onset,

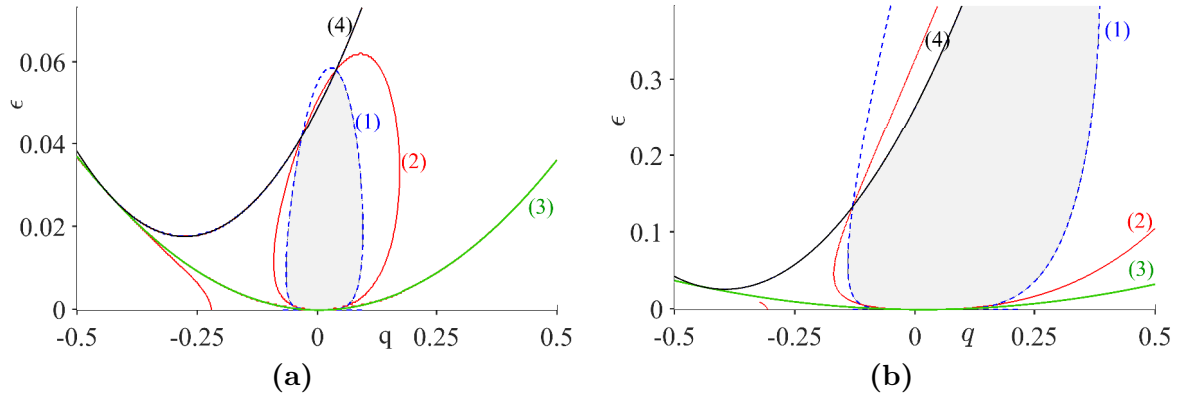


FIGURE 2.11 – Hexagon stability diagram for a Newtonian fluid at $Pr = 100$ and two different values of the viscosities ratio : **(a)** $r = 1.5$ and **(b)** $r = 2.5$. Curve (1) : $D_{\perp} = 0$, curve (2) $D_{\parallel} = 0$, curve (3) bifurcation from the conductive state to convection with hexagons, curve(4) bifurcation from hexagons to rolls.

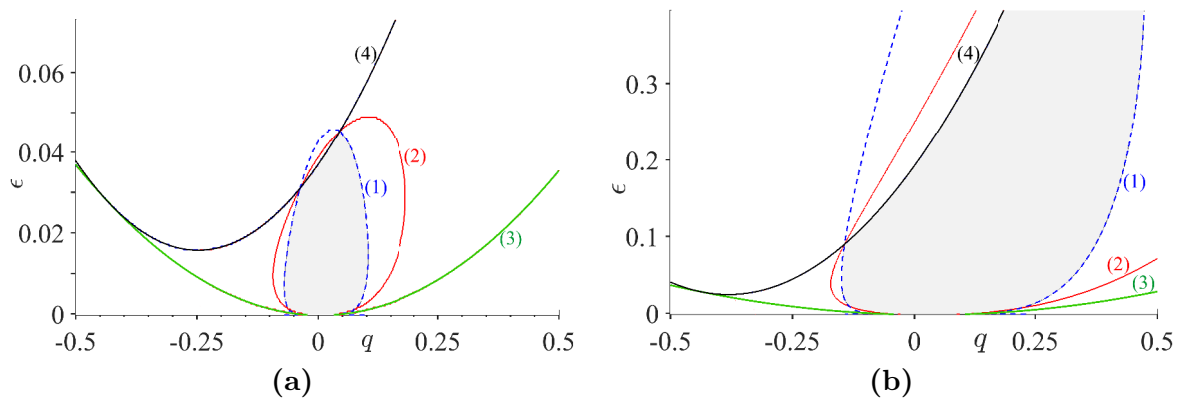


FIGURE 2.12 – Hexagon stability diagram for a shear-thinning fluid with $\alpha = 10^{-4}$ at $Pr = 100$ and two different values of the viscosities ratio : **(a)** $r = 1.5$ and **(b)** $r = 2.5$.

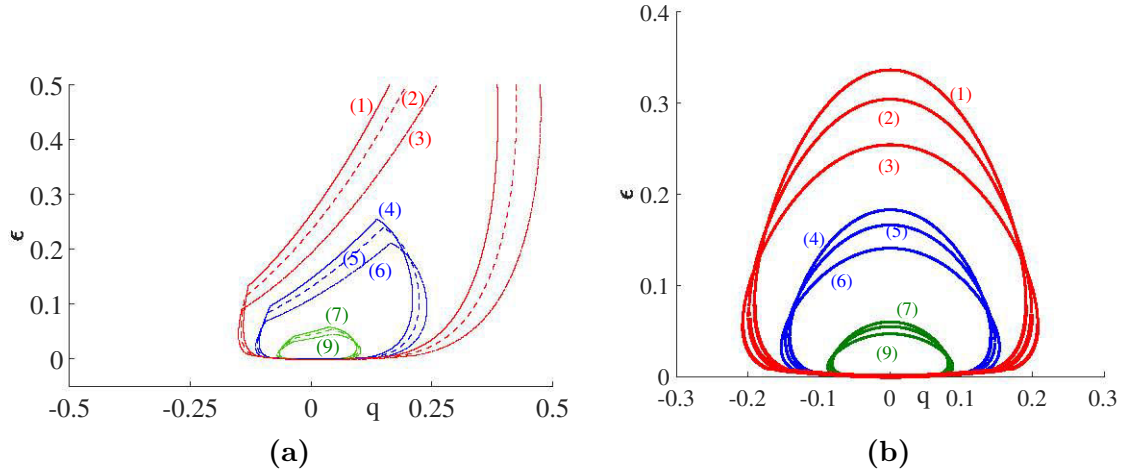


FIGURE 2.13 – Influence of shear-thinning effects and viscosities ratio on the hexagons stability diagram at $Pr = 100$. Curves (1), (4) and (7) correspond to a Newtonian fluid and three different values of r : 2.5, 2.0 1.5 respectively. Curves (2), (5) and (6) correspond to a shear-thinning fluid with $\alpha = 5 \times 10^{-5}$. Curves (3), (6) and (9) correspond to a shear-thinning fluid with $\alpha = 10^{-4}$. (a) With quadratic spatial terms (b) Without quadratic spatial terms

a weakly nonlinear analysis is performed using a multiple scale method. The procedure to derive amplitude equations is illustrated for a hexagonal lattice. Generalized Ginzburg-Landau equations are obtained including spatial nonvariational terms which describe distortion of hexagons. The stability analysis of the spatially homogeneous rolls and hexagons is first performed. It is shown that the threshold value of the relative Rayleigh-number ϵ_h above which hexagons become unstable to rolls increases with the viscosity ratio and decreases with increasing shear-thinning effects. Similar evolution is observed for the threshold value ϵ_r above which the rolls are stable. This behavior is qualitatively in agreement with [18]. The stability of hexagons with respect to long-wave perturbations is then addressed. Phase equation is derived and the stable band of wavenumbers is determined. For moderate viscosity ratios, the domain of stable hexagons is open and decentered. It is clearly shown that shear-thinning effects reduce significantly the stable domain of hexagons. As for a Newtonian fluid, the stable hexagons domain is delimited mainly by the transverse phase instability. The longitudinal phase instability is relevant only for a very small range of ϵ .

2.A Operators and matrix coefficients

2.A.1 The operator M

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ M_{31} & 0 & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

with

$$\begin{aligned} M_{11} &= Pr^{-1}\Delta, & M_{21} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, & M_{22} &= \nabla_{Hx}^2, \\ M_{31} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, & M_{33} &= \nabla_{Hx}^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

The sub-scale M^0

The coefficients of M^0 in eq. (2.46) are

$$\begin{aligned} M_{11}^{(0)} &= Pr^{-1} \left(\Delta_{Hx} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \\ M_{21}^{(0)} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, & M_{22}^{(0)} &= \Delta_{Hx}, \\ M_{31}^{(0)} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, & M_{33}^{(0)} &= \Delta_{Hx}, \\ M_{44}^{(0)} &= 1, \end{aligned} \quad (2.85)$$

The sub-scale M^1

The coefficients of M^1 in eq. (2.46) are

$$M_{11}^{(1)} = 2Pr^{-1} \nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}, \quad (2.86)$$

$$M_{21}^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial X \partial z}, \quad M_{22}^{(1)} = 2 \nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX},$$

$$M_{31}^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial Y \partial z}, \quad M_{33}^{(1)} = 2 \nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX},$$

$$M_{44}^{(1)} = 0; \quad (2.87)$$

2.A.2 The operator \mathbf{L}

The coefficients of the 4×4 matrix \mathbf{L} in eq. (2.18) are given by

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & 0 & L_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

with

$$\begin{aligned} L_{11} &= \mu_b \Delta^2 + 2 \frac{d\mu_b}{dz} \Delta \frac{\partial}{\partial z} + \frac{d^2 \mu_b}{dz^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta_H \right), & L_{14} &= Ra \Delta_H, \\ L_{21} &= \mu_b \Delta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right), & L_{22} &= \mu_b \Delta \Delta_H + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_H, \\ L_{31} &= \mu_b \Delta \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right), & L_{33} &= \mu_b \Delta \Delta_H + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_H. \end{aligned} \quad (2.89)$$

2.A.3 sub-scale $\mathbf{L}^{(0)}$

The components of $\mathbf{L}^{(0)}$ in eq. (2.47) are

$$\begin{aligned} L_{11}^{(0)} &= \mu_b \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \frac{d\mu_b}{dz} \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{d^2 \mu_b}{dz^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \nabla_{Hx}^2 \right), \\ L_{14}^{(0)} &= Ra_c \nabla_{Hx}^2, \\ L_{21}^{(0)} &= \mu_b \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right), \\ L_{22}^{(0)} &= \mu_b \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \nabla_{Hx}^2 + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \nabla_{Hx}^2 \\ L_{31}^{(0)} &= \mu_b \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right), \\ L_{33}^{(0)} &= L_{22}^{(0)}, \\ L_{41}^{(0)} &= 1, \quad L_{44}^{(0)} = \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

2.A.4 sub-scale $L^{(1)}$

The components of $L^{(1)}$ in eq. (2.47) are

$$\begin{aligned}
L_{11}^{(1)} &= 4\mu_b \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}) + 4 \frac{d\mu_b}{dz} (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}) \frac{\partial}{\partial z} - 2 \frac{d^2\mu_b}{dz^2} (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}) \\
L_{14}^{(1)} &= Ra^{(1)} \nabla_{Hx}^2 + 2Ra_c \nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}, \\
L_{21}^{(1)} &= \mu_b \left(\nabla_{Hx}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial X \partial z} + 2\mu_b (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial X} \\
L_{22}^{(1)} &= 2\mu_b \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}) \\
L_{31}^{(1)} &= \mu_b \left[\nabla_{Hx}^2 \frac{\partial^2}{\partial Y \partial z} + 2 \nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial Y \partial z} \right] + \frac{d\mu_b}{dz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial Y} \\
L_{41}^{(1)} &= 0, \quad L_{44}^{(1)} = 2 \nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}.
\end{aligned} \tag{2.91}$$

2.A.5 sub-scale $L^{(2)}$

The components of $L^{(2)}$ in eq. (2.47) are

$$\begin{aligned}
L_{14}^{(2)} &= Ra_c \nabla_{HX}^2 + 2Ra^{(1)} \nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX} + Ra^{(2)} \nabla_{Hx}^2, \\
L_{21}^{(2)} &= \mu_b \left[2 (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}) \frac{\partial^2}{\partial X \partial z} + \nabla_{HX}^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right] \\
L_{22}^{(2)} &= \mu_b \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nabla_{Hx}^2 \right) \nabla_{HX}^2 + 4\mu_b (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX})^2 + \mu_b \nabla_{HX}^2 \nabla_{Hx}^2, \\
L_{31}^{(2)} &= \mu_b \left[2 (\nabla_{Hx} \cdot \nabla_{HX}) \frac{\partial^2}{\partial Y \partial z} + \nabla_{HX}^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right] \\
L_{41}^{(2)} &= 0, \quad L_{44}^{(2)} = \nabla_{HX}^2
\end{aligned} \tag{2.92}$$

2.B Second-order solution (hexagons)

2.B.1 Solution proportional to $|A_p|^2$ (zero mode)

The first component of the second order solution, proportional to $|A_p|^2$, provides a correction of the basic state. Considering the w -equation, it is shown that the factor of $|A_1|^2$, $|A_2|^2$ and $|A_3|^2$ in the non linear inertial $NI_w^{(2)}$ and viscous $NV_w^{(2)}$ terms vanishes, therefore

$$w_1^{(2)} = 0. \tag{2.93}$$

Here $w_1^{(2)}$ means the first component of the second order solution. Similarly, for the horizontal velocity, we have

$$u_1^{(2)} = v_1^{(2)} = 0. \tag{2.94}$$

There is no velocity for the zero mode. The correction of the conductive temperature profile can be written as $\theta_1^{(2)} = T_1(z) [|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2]$, where $T_1(z)$ satisfies

$$D^2 T_1 = 2 [G_{11} (DF_{11}) + F_{11} (DG_{11})], \quad (2.95)$$

with

$$T_1 = 0 \quad \text{at} \quad z = 0 \text{ and } z = 1. \quad (2.96)$$

As for the linear problem, equation (2.95) with the boundary conditions (2.96) is solved numerically using a spectral Chebyshev collocation method.

2.B.2 Solution proportional to $A_p^2 \exp(2i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$

The second component of the second order solution, proportional to $A_p^2 E_p^2$, where $E_p = \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$ represents the first harmonic of the fundamental. We have

$$(w_2^{(2)}, \theta_2^{(2)}) = (W_2(z), T_2(z)) (A_1^2 E_1^2 + A_2^2 E_2^2 + A_3^2 E_3^2) + c.c., \quad (2.97)$$

with

$$\left[\mu_b (D^2 - 4k_c^2)^2 + 2 \frac{d\mu_b}{dz} (D^3 - 4k_c^2 D) + \frac{d^2 \mu_b}{dz^2} (D^2 + 4k_c^2) \right] W_2 - 4k_c^2 Ra_c T_2 = \frac{2}{Pr} (F_{11} D^3 F_{11} - DF_{11} D^2 F_{11}) - [NV_w]_{A_p^2 E_p^2}^{(2)}, \quad (2.98)$$

$$W_2 + (D^2 - 4k_c^2) T_2 = F_{11} DG_{11} - G_{11} DF_{11}. \quad (2.99)$$

The boundary conditions on W_2 and T_2 are identical to those on F_{11} and G_{11} , (2.29).

Concerning the horizontal velocity, we have

$$\nabla_{Hx}^2 \mathbf{u}_{H2}^{(2)} + \nabla_{Hx} \frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial z} = 0. \quad (2.100)$$

We obtain,

$$\mathbf{u}_{H2}^{(2)} = \frac{DW_2}{4k_c^2} \nabla_{Hx} [A_1^2 E_1^2 + A_2^2 E_2^2 + A_3^2 E_3^2] + c.c.. \quad (2.101)$$

2.B.3 Solution proportional to $A_p A_q^* E_p E_q^*$

The third component of the second order solution, proportional to $A_p A_q^* E_p E_q^*$, reads

$$(w_3^{(2)}, \theta_3^{(2)}) = (W_3(z), T_3(z)) (A_1 A_2^* E_1 E_2^* + A_1 A_3^* E_1 E_3^* + A_2 A_3^* E_2 E_3^*) + c.c., \quad (2.102)$$

with

$$\left[\mu_b (D^2 - 3k_c^2)^2 + 2 \frac{d\mu_b}{dz} (D^3 - 3k_c^2 D) + \frac{d^2\mu_b}{dz^2} (D^2 + 3k_c^2) \right] W_3 - 3k_c^2 Ra_c T_3 = \frac{3}{Pr} (F_{11} D^3 F_{11} - k_c^2 F_{11} D F_{11}) - [NV_w]_{E_p E_q^*}^{(2)} \quad (2.103)$$

$$W_3 + (D^2 - 3k_c^2) T_3 = 2F_{11} D G_{11} - G_{11} D F_{11}. \quad (2.104)$$

Boundary conditions on (W_3, T_3) are the same as the ones on (F_{11}, G_{11}) .

The horizontal velocity components satisfy

$$\nabla_{Hx}^2 \mathbf{u}_{H3}^{(2)} + \nabla_{Hx} \frac{\partial w_3^{(2)}}{\partial z} = 0. \quad (2.105)$$

We obtain

$$\mathbf{u}_{H3}^{(2)} = \frac{DW_3}{3k_c^2} \nabla_{Hx} (A_1 A_2^* E_1 E_2^* + A_1 A_3^* E_1 E_3^* + A_2 A_3^* E_2 E_3^*) + c.c. \quad (2.106)$$

2.B.4 Solution proportional to $\exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$

The fourth component of the second order solution is proportional to $\exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r})$ (resonant term). The solution is achieved using the solvability condition.

$$\left(w_4^{(2)}, \theta_4^{(2)} \right) = (W_{41}, T_{41}) E_1 + (W_{42}, T_{42}) E_2 + (W_{43}, T_{43}) E_3 + c.c., \quad (2.107)$$

with

$$\begin{aligned} & \left[\mu_b \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_c^2 \right)^2 + 2 \frac{d\mu_b}{dz} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_c^2 \right) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{d^2\mu_b}{dz^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_c^2 \right) \right] W_{41} - Ra_c k_c^2 T_{41} = \\ & \left[-4i\mu_b (D^2 F_{11} - k_c^2 F_{11}) - 4i \frac{d\mu_b}{dz} D F_{11} + 2i \frac{d^2\mu_b}{dz^2} F_{11} \right] (\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{HX}) A_1 + \\ & k_c^2 Ra_1 G_{11} A_1 - 2i Ra_c G_{11} (\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{HX}) A_1 + \\ & \frac{1}{Pr} (F_{11} D^3 F_{11} + 2D F_{11} D^2 F_{11} - 3k_c^2 F_{11} D F_{11}) A_2^* A_3^* - [NV_w]_{E_1}^{(2)} A_2^* A_3^*, \\ & W_{41} + (D^2 - k_c^2) G_{11} + T_{41} = -2i G_{11} (\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{HX}) A_1 + (2F_{11} D G_{11} + G_{11} D F_{11}) A_2^* A_3^*. \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$(2.109)$$

Similar equations are obtained for the amplitudes A_2 and A_3 . The boundary conditions on W_{41} and T_{41} are the same as the ones on (F_{11}, G_{11}) .

For the horizontal velocity, we have

$$\mathbf{u}_{H4}^{(2)} = \mathbf{U}_{H41} E_1 + \mathbf{U}_{H42} E_2 + \mathbf{U}_{H43} E_3 + c.c., \quad (2.110)$$

with

$$\begin{aligned} & \mu_b \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_c^2 \right) \left(-k_c^2 \mathbf{U}_{H41} + i (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \frac{\partial W_{41}}{\partial z} \right) + \\ & \frac{d\mu_b}{dz} \left(-k_c^2 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{U}_{H41} + i (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) \frac{\partial^2 W_{41}}{\partial z^2} \right) = 2 \frac{d\mu_b}{dz} D^2 F_{11} \nabla_{HX} A_1 + \\ & \left[\mu_b (D^3 F_{11} - k_c^2 D F_{11}) + \frac{d\mu_b}{dz} D^2 F_{11} \right] \left[2 \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}{k_c^2} \cdot (\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{HX} A_1) - \nabla_{HX} A_1 \right] \end{aligned} \quad (2.111)$$

Bibliographie

- [1] E. Palm. On the tendency towards hexagonal cells in steady convection,. *J. Fluid Mech.*, 8 :183–192, 1960.
- [2] Karl C. Stengel, Dean S. Olivier, and John R. Booker. Onset of convection in a variable-viscosity fluid. *J. Fluid. Mech*, 120 :411–431, 1982.
- [3] F. H. Busse and H. Frick. Square-pattern convection in fluids with strongly temperature-dependent viscosity. *J. Fluid. Mech*, 150 :451–465, 1985.
- [4] D. B. White. The planforms and the onset of convection with a temperature dependent-viscosity. *J. Fluid. Mech*, 191 :2247–286, 1988.
- [5] V. S. Solomatov. Scaling of temperature-and-stress-dependent viscosity convection. *Phys. Fluids*, 7 :266–274, 1995.
- [6] A. Davaille and P. Jaupart. Transient high Rayleigh number thermal convection with large viscosity variation. *J. Fluid. Mech*, 253 :141–166, 1993.
- [7] Alessandro Bottaro, Philippe Metzener, and Moshe Matalon. Onset and two-dimensional patterns of convection with strongly temperature-dependent viscosity. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 4(4) :655–663, 1992.
- [8] E. Palm, T. Ellingsen, and B. Gjevik. On the occurrence of cellular motion in bénard convection,. *J. Fluid Mech.*, 30 :651–661, 1967.
- [9] F.H. Busse. The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. *J. Fluid Mech.*, 30 :625–649, 1967.
- [10] C. Q. Hoard, C. R. Robertson, and A. Acrivos. Experiments on the cellular structure in bénard convection. *Int. J. Heat. Mass Transfer*, 13 :849–856, 1970.
- [11] D. R. Jenkins. Rolls versus squares in thermal convection of fluids with temperature-dependent viscosity. *J. Fluid. Mech*, 178 :491–506, 1987.
- [12] F He Busse and JA Whitehead. Instabilities of convection rolls in a high prandtl number fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 47(2) :305–320, 1971.
- [13] RM Clever and FH Busse. Transition to time-dependent convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 65(4) :625–645, 1974.
- [14] Blas Echebarria and C Pérez-Garcia. Phase instabilities in hexagonal patterns. *EPL (Europhysics Letters)*, 43(1) :35, 1998.

- [15] Yuan-Nan Young and Hermann Riecke. Mean flow in hexagonal convection : stability and nonlinear dynamics. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 163(3-4) :166–183, 2002.
- [16] R. B. Bird, R. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids*. Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [17] R. Tanner. *Engineering rheology*. Oxford University Press, New York, 2000.
- [18] M. Bouteraa, C. Nouar, E. Plaut, C. M'vivier, and A. Kalck. Weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection. *J. Fluid. Mech.*, 767 :696–734, 2015.
- [19] J Bragard and MG Velarde. Bénard–Marangoni convection : planforms and related theoretical predictions. *Journal of Fluid Mechanics*, 368 :165–194, 1998.
- [20] HR Brand. Envelope equations near the onset of a hexagonal pattern. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 99 :442–449, 1989.
- [21] M. Golubitsky, J.W. Swift, and E. Knoblock. Symmetries and pattern selection in Rayleigh-Bénard convection. *Physica D.*, 10 :249–276, 1984.
- [22] D. McKenzie. The symmetry of convective transitions in space and time. *J. Fluid. Mech.*, 191 :287–339, 1988.
- [23] S. Fauve. *Pattern forming instabilities*. Cambridge University Press, In Hydrodynamics and nonlinear instabilities, edited by P. Huerre and M. Rossi, 1998.
- [24] R. Hoyle. *Pattern formation. An introduction methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [25] B. Echebarria and C. Perez-Garcia. Stability of hexagonal pattern in Bénard-marangoni convection. *Phys. Rev. E*, 63 :066307.1–13, 2001.
- [26] B Pena and C Perez-Garcia. Stability of turing patterns in the brusselator model. *Physical review E*, 64(5) :056213, 2001.
- [27] J Lauzeral, S Metens, and D Walgraef. On the phase dynamics of hexagonal patterns. *EPL (Europhysics Letters)*, 24(9) :707, 1993.

Chapitre 3

Approche fortement non linéaire

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| 3.1 | Introduction | 108 |
| 3.2 | Equations gouvernant le problème | 108 |
| 3.3 | Méthode Pseudo-Spectrale | 110 |
| 3.3.1 | Décomposition de Fourier-Chebyshev | 110 |
| 3.3.2 | Projection des termes linéaires | 112 |
| 3.3.3 | Projection des termes non linéaire d'inertie | 112 |
| 3.3.4 | Projection des termes non linéaire visqueux | 114 |
| 3.4 | Nombre de Nusselt | 117 |
| 3.5 | Procédure de continuation | 118 |
| 3.5.1 | Prédiction | 121 |
| 3.5.2 | Paramétrisation | 123 |
| 3.5.3 | Correction | 124 |
| 3.5.4 | Contrôle du pas | 126 |
| 3.6 | Résultats pour des fluides Newtoniens | 126 |
| 3.6.1 | Les principaux travaux existants | 127 |
| 3.6.2 | Convergence de la méthode de continuation en Newtonien | 128 |
| 3.6.3 | Évolution des différents modes de Fourier avec l'écart au seuil de la convection | 128 |
| 3.6.4 | Évolution des champs de vitesse et de température avec l'écart au seuil de la convection | 131 |
| 3.6.5 | Influence du nombre de Prandtl | 133 |
| 3.7 | Résultats pour des fluides rhéofluidifiants | 135 |
| 3.7.1 | Les principaux travaux existants en non-Newtoniens | 135 |
| 3.7.2 | Convergence de la méthode de continuation pour un fluide rhéofluidifiant | 138 |
| 3.7.3 | Évolution des différents modes de Fourier avec l'écart au seuil de la convection | 139 |
| 3.7.4 | Évolution des champs de vitesse, de température et de viscosité avec l'écart au seuil de la convection | 142 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.7.5 | Influence de l'indice de rhéofluidification n_c sur les échanges de chaleur | 145 |
| 3.7.6 | Influence du paramètre λ sur les échanges de chaleur et la nature de la bifurcation | 148 |
| 3.8 | Conclusion et perspectives | 149 |
| | Bibliographie | 150 |

3.1 Introduction

Les approches faiblement non linéaires mises en œuvre dans les chapitres précédents permettent d'étudier la compétition et la stabilité des motifs de convection à proximité du seuil de l'instabilité. En revanche, elles se révèlent inappropriées pour étudier les structures dès lors qu'on s'éloigne trop des conditions critiques. En effet, elles conduisent à considérer des développements asymptotiques à des ordres de plus en plus élevés et donc des équations de plus en plus complexes au fur et à mesure que la convection gagne en intensité et que les effets non linéaires deviennent de plus en plus importants. La difficulté calculatoire qui en résulte s'avère rédhibitoire et on est contraint d'employer une approche alternative appelée procédure de continuation pour étudier l'évolution des structures. Cette méthode, fréquemment utilisée dans les problèmes de bifurcation, consiste à suivre de proche en proche la branche de solutions stationnaires lorsque le paramètre de contrôle du problème varie. Dans ce chapitre, les principes de cette technique sont tout d'abord exposés avant de l'appliquer au cas d'un fluide rhéofluidifiant non thermodépendant où les rouleaux sont les seuls motifs de convection stables [1]. On s'intéresse notamment à l'influence de la rhéofluidification d'une part sur les champs de vitesse, de température et de viscosité et d'autre part sur les échanges de chaleur dans le fluide. Le choix des paramètres numériques utilisés ainsi que les performances en terme de temps de calcul sont également discutés.

3.2 Equations gouvernant le problème

On considère un fluide rhéofluidifiant non thermodépendant, placé entre deux plaques séparées d'une distance \hat{d} , qui est chauffé par le bas à une température \hat{T}_1 et refroidi par le haut à une température \hat{T}_2 (Figure 3.1).

On note $\hat{\mu}_0$ sa viscosité dynamique à cisaillement nul et $\hat{\kappa}_0$ sa diffusivité thermique. Sa masse volumique $\hat{\rho}$ varie linéairement avec la température dans le terme de poussée, conformément à l'hypothèse de Boussinesq :

$$\hat{\rho}(\hat{T}) = \hat{\rho}_0(1 - \hat{\beta}(\hat{T} - \hat{T}_0)) \text{ avec } \hat{T}_0 = \frac{\hat{T}_1 + \hat{T}_2}{2} \quad (3.1)$$

Le champ de température et la structure de l'écoulement sont décrits de manière classique par les équations de conservations de l'énergie et de la quantité de mouvement. Le champ de pression est éliminé en appliquant deux fois le rotationnel à l'équation de la quantité de

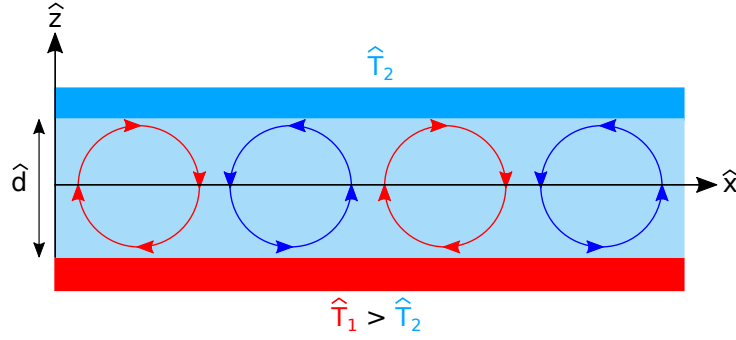


FIGURE 3.1 – Configuration de Rayleigh-Bénard.

mouvement. On rend ces équations adimensionnelles en utilisant \hat{d} , $\Delta\hat{T} = \hat{T}_1 - \hat{T}_2$, $\hat{d}^2/\hat{\kappa}_0$ et $\hat{\kappa}_0/\hat{d}$ comme échelles caractéristiques respectivement de distance, de température, de temps et de vitesse. Enfin, on cherche des solutions stationnaires. Dans ce contexte, les équations aux perturbations adimensionnées qui décrivent le système s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}} \text{NI}_w + \Delta^2 \mathbf{w} + \text{Ra} \Delta_H \theta - \text{NV} = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{NI}_\theta - \mathbf{w} - \Delta \theta = 0 \quad (3.4)$$

où $\mathbf{v} = (u, w)$ et θ sont les perturbations respectivement en vitesse et en température, avec :

$$\text{NI}_w = (\nabla \times \nabla \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{e}_z) \quad (3.5)$$

$$\text{NV} = (\nabla \times \nabla \times [\nabla \cdot (\mu - 1) \dot{\gamma}] \cdot \mathbf{e}_z) \quad (3.6)$$

$$\text{NI}_\theta = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta \quad (3.7)$$

qui correspondent respectivement aux termes non-linéaires d'inertie, visqueux et de convection.

Les paramètres de contrôle du problème sont les nombres de Rayleigh et de Prandtl définis par :

$$\text{Ra} = \frac{\hat{\rho}_0 \hat{g} \hat{\beta} \Delta \hat{T} \hat{d}^3}{\hat{\mu}_0 \hat{\kappa}_0} \quad \text{Pr} = \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho}_0 \hat{\kappa}_0} \quad (3.8)$$

Le comportement rhéofluidifiant est décrit par le modèle de Carreau :

$$\mu = (1 + \lambda^2 \dot{\gamma})^{\frac{n_e - 1}{2}} \quad (3.9)$$

Les plaques sont rigides et parfaitement conductrices de la chaleur, les conditions aux limites associées à (3.2)-(3.4) en $z = \pm \frac{1}{2}$ s'écrivent alors :

$$w = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.11)$$

$$\theta = 0. \quad (3.12)$$

La condition (3.11) est une conséquence de l'équation de continuité (3.2).

3.3 Méthode Pseudo-Spectrale

3.3.1 Décomposition de Fourier-Chebyshev

Les structures périodiques que l'on cherche à étudier sont des rouleaux de convection. Ces motifs émergent avec un nombre d'onde k_c , il est alors pertinent de décomposer les champs de température et de vitesse en série de Fourier comme suit :

$$\begin{pmatrix} w(x, z) \\ \theta(x, z) \end{pmatrix} = \sum_{n=-N}^{n=N} \begin{pmatrix} w_n(z) \\ \theta_n(z) \end{pmatrix} \exp(ink_c x) \quad (3.13)$$

Comme w et θ sont réels, alors $w_{-n} = w_n^*$ et $\theta_{-n} = \theta_n^*$ (où $*$ désigne le complexe conjugué). Chaque mode de Fourier est projeté sur la base des polynômes de Chebyshev de première espèce :

$$\begin{pmatrix} w_n(z) \\ \theta_n(z) \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^M \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix} T_m(Z) \quad \text{où } Z = 2z \quad (3.14)$$

avec $T_m(Z)$ le polynôme de Chebyshev de degré m .

En combinant les Eqs.(3.13) et (3.14), les approximations spectrales des champs de température et de vitesse sont données par :

$$\begin{pmatrix} w_S(x, z) \\ \theta_S(x, z) \end{pmatrix} = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix} T_m(Z) \exp(ink_c x) \quad (3.15)$$

La condition $w_{-n} = w_n^*$ et $\theta_{-n} = \theta_n^*$ se traduit par :

$$a_{-nm} = a_{nm}^* \quad \text{et} \quad b_{-nm} = b_{nm}^* \quad (3.16)$$

Ainsi, on peut considérer uniquement les modes tels que $n \geq 0$.

On peut également noter que l'approximation spectrale de u s'obtient directement à partir de celle pour w en considérant l'équation de continuité (3.2).

Ces différentes approximations spectrales sont évaluées aux points de collocation

de Gauss-Lobatto définis par :

$$Z_j = \cos\left(\frac{j\pi}{M}\right), \quad j = 0 \dots M \quad (3.17)$$

Ce choix permet en effet d'éviter l'apparition du phénomène de Runge qui peut survenir avec des points équirépartis (cf [2] ou [3]).

Pour un mode $E^n = \exp(ink_c x)$, on note \mathbf{a}_n et \mathbf{b}_n les vecteurs des coefficients spectraux associés aux champs de vitesse et de température aux différents points de Gauss-Lobatto (3.17) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{nM}] \\ [b_{n0}, b_{n1}, \dots, b_{nM}] \end{pmatrix}, \quad \forall 0 \leq n \leq N. \quad (3.18)$$

Les valeurs prises par les approximations spectrales et leurs dérivées peuvent être reliées aux coefficients spectraux en introduisant les matrices de dérivation D0, D1, D2, D3 et D4 par rapport à z , définis par :

$$(D\alpha)_{i,j} = 2^\alpha T_i^{(\alpha)}(Z_j), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (3.19)$$

où $T_i^{(\alpha)}$ désigne la α ième dérivée du polynôme T_i .

On adopte la notation $[\Phi_S]_{E^n}$ pour désigner la composante de Φ_S suivant le mode E^n pour tous les points de Gauss-Lobatto. Toutes les expressions du type $[\Phi_S]_{E^n}$ sont donc des vecteurs de taille $M+1$.

Les approximations spectrales et leurs dérivées pour le mode E^n sont alors données par :

$$\frac{\partial^\alpha \partial^\beta}{\partial z^\alpha \partial x^\beta} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_S \\ \theta_S \end{bmatrix}_{E^n} = (ink_c)^\beta \begin{bmatrix} D\alpha \times \mathbf{a}_n \\ D\alpha \times \mathbf{b}_n \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

En introduisant les expressions de \mathbf{w}_S et de θ_S (Eq.(3.15)) dans les équations (3.3) et (3.4), on aboutit à un système d'équations algébriques non linéaires pour chaque mode de Fourier et en chaque point de Gauss-Lobatto.

Ce système d'équations peut être écrit formellement sous la forme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, Ra) = \mathbf{0} \quad \text{avec } \mathbf{F} : \mathbb{R}^{NT} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{NT} \quad \text{où } NT = 2(N+1)(M+1) \quad (3.21)$$

où \mathbf{X} est le vecteur des coefficients spectraux de dimension NT :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N, \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_N] \quad (3.22)$$

La fonction \mathbf{F} peut se décomposer en :

- termes linéaires $\mathbf{L}_w, \mathbf{L}_\theta$,
- termes non linéaires d'inertie $\mathbf{NI}_w, \mathbf{NI}_\theta$,

— termes non linéaires visqueux \mathbf{NV} ,

Ainsi :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_w \\ \mathbf{F}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_w + \mathbf{NI}_w + \mathbf{NV} \\ \mathbf{L}_\theta + \mathbf{NI}_\theta \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Dans les paragraphes suivants, on explicite la manière dont ces différents termes sont projetés dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev.

3.3.2 Projection des termes linéaires

Les termes linéaires \mathbf{L}_w et \mathbf{L}_θ sont évalués directement dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev. D'après l'Eq. (3.20), les expressions des termes linéaires projetées sur le mode $E^n = \exp(ink_c x)$ sont données par :

$$[\mathbf{L}_w]_{E^n} = (D4 - 2n^2 k_c^2 D2 + n^4 k_c^4 D0) \times \mathbf{a}_n - n^2 k_c^2 Ra D0 \times \mathbf{b}_n \quad (3.24)$$

$$[\mathbf{L}_\theta]_{E^n} = -D0 \times \mathbf{a}_n - (D2 - n^2 k_c^2 D0) \times \mathbf{b}_n \quad (3.25)$$

3.3.3 Projection des termes non linéaire d'inertie

Les termes non linéaires d'inertie présentent une non linéarité quadratique, il est possible d'obtenir directement leur décomposition dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev à partir des équations (3.5) et (3.7).

Ainsi la projection du terme \mathbf{NI}_θ sur un mode E^n s'obtient par :

$$[\mathbf{NI}_\theta]_{E^n} = \sum_{l=n-N}^N [\mathbf{u}]_{E^l} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^{n-l}} + [\mathbf{w}]_{E^l} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} \quad (3.26)$$

En utilisant (3.20), on obtient :

$$\begin{aligned} [\mathbf{w}]_{E^l} &= D0 \times \mathbf{a}_l & \left[\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} &= D1 \times \mathbf{b}_{n-l} \\ [\mathbf{u}]_{E^l} &= \begin{cases} \frac{i}{l k_c} D1 \times \mathbf{a}_l & \text{si } l \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{si } l = 0 \end{cases} & \left[\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^{n-l}} &= i(n-l) k_c D0 \times \mathbf{b}_{n-l} \end{aligned}$$

On peut procéder de la même manière pour le terme \mathbf{NI}_w . En explicitant tous les calculs, on obtient :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{NI}_w]_{E^n} &= \sum_{l=n-N}^N 2 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^{n-l}} + [\mathbf{u}]_{E^l} \left[\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^{n-l}} \\
&+ \left[\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} + \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}^2} \right]_{E^{n-l}} + [\mathbf{w}]_{E^l} \left[\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}^2} \right]_{E^{n-l}} \\
&+ \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} - \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^{n-l}} - 2 \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^{n-l}} \\
&- [\mathbf{u}]_{E^l} \left[\frac{\partial^3 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^3} \right]_{E^{n-l}} - \left[\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} - 2 \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^l} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} \\
&- [\mathbf{w}]_{E^l} \left[\frac{\partial^3 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2 \partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}}
\end{aligned}$$

Chaque terme entre crochets est ensuite exprimé en fonction des coefficients spectraux et des matrices de dérivation de manière analogue au terme $[\mathbf{NI}_\theta]_{E^n}$. On obtient ainsi :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^l} = \begin{cases} -D1 \times \mathbf{a}_l & \text{si } l \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} = \begin{cases} -D2 \times \mathbf{a}_{n-1} & \text{si } n \neq l \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^l} = \begin{cases} \frac{i}{lk_c} D2 \times \mathbf{a}_l & \text{si } l \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^{n-l}} = -i(n-l)k_c D1 \times \mathbf{a}_{n-1}$$

$$\left[\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^{n-l}} = -i(n-l)k_c D2 \times \mathbf{a}_{n-1} \quad \left[\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}} \right]_{E^l} = ilk_c D1 \times \mathbf{a}_l$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} = \begin{cases} \frac{i}{(n-l)k_c} D2 \times \mathbf{a}_{n-1} & \text{si } n \neq l \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{E^l} = ilk_c D0 \times \mathbf{a}_l$$

$$\left[\frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{z}^2} \right]_{E^{n-l}} = \begin{cases} -D3 \times \mathbf{a}_{n-1} & \text{si } n \neq l \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} \right]_{E^l} = D1 \times \mathbf{a}_l$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{E^{n-l}} = -(n-l)^2 k_c^2 D0 \times \mathbf{a}_{n-1}$$

$$\left[\frac{\partial^3 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^3} \right]_{E^{n-l}} = -i(n-l)^3 k_c^3 D0 \times \mathbf{a}_{n-1}$$

$$\left[\frac{\partial^3 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2 \partial \mathbf{z}} \right]_{E^{n-l}} = -(n-l)^2 k_c^2 D1 \times \mathbf{a}_{n-1}$$

3.3.4 Projection des termes non linéaire visqueux

A cause de la non linéarité complexe (non polynomiale) du modèle de Carreau, on ne peut pas calculer directement les termes non linéaires visqueux dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev comme on l'a fait pour les termes linéaires et les termes non linéaires d'inertie. Pour obtenir la projection de ces termes, on est amené à utiliser une **méthode pseudospectrale** : elle consiste à évaluer d'abord les termes visqueux dans l'espace physique avant de les projeter dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev. La procédure est détaillée dans les paragraphes suivants.

Evaluation des termes visqueux dans l'espace physique

L'espace physique Ω considéré est une grille bidimensionnelle construite sur une longueur d'onde $L_c = \frac{2\pi}{k_c}$ suivant x et délimitée par les deux parois en $z = -\frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{2}$: $\Omega = \{(x, z) \in [0, L_c] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$.

Les termes non linéaires visqueux NV sont évalués à l'aide des approximations spectrales de u_S et w_S (3.15) et des matrices de dérivation $D\alpha$ (3.19) aux points de grille :

$$(x_i, z_j) = \left(\frac{iL_c}{N_d}, \frac{Z_j}{2} \right) \quad \text{où } Z_j = \cos\left(\frac{j\pi}{M_d - 1}\right) \quad (3.27)$$

avec $i = 0, \dots, N_d - 1$ et $j = 0, \dots, M_d - 1$ où N_d et M_d désignent les nombres de points dans les directions tangentielle et normale aux parois.

On a donc une discrétisation uniforme dans la direction horizontale et une discrétisation non-uniforme utilisant les points de Gauss-Lobatto dans la direction verticale.

Les nombres de points N_d et M_d doivent au minimum respecter la règle d'Orszag permettant d'éviter les erreurs de repliement spectral (erreurs d'aliasing) lors de la projection dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev (cf [4] et [5]). Cette règle stipule qu'on doit avoir :

$$N_d \geq \frac{3}{2}(2N + 1) \quad \text{et} \quad M_d \geq 2M \quad (3.28)$$

Toutefois dans la pratique, il est souvent nécessaire de considérer des nombres de points bien supérieurs aux valeurs minimales fournies par la règle d'Orszag. C'est particulièrement le cas pour le nombre de points N_d . Cela s'explique par le fait que les termes non linéaires visqueux NV varient fortement sur de faibles distances. Si on ne considère pas suffisamment de points, on ne parvient pas à capter ces variations ce qui conduit à une estimation trop grossière et finalement à une mauvaise projection dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev.

Projection dans l'espace spectral de Fourier Chebyshev

Dans cette section, on explique comment une fonction $F(x, z)$ quelconque évaluée aux points (3.27) est projetée dans l'espace de Fourier Chebyshev. Concrètement, cela revient, connaissant $F(x, z)$, à déterminer les coefficients f_{nm} tels que :

$$F(x, z) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M f_{nm} T_m(Z) E^n \quad (3.29)$$

Les fonctions E^n où $n = 0 \dots N$ sont orthogonales vis à vis du produit scalaire défini par :

$$\langle f(x), g(x) \rangle_E = \int_0^{\frac{2\pi}{k_c}} f(x) g(x)^* dx \quad (3.30)$$

En effet, on a :

$$\langle E^n, E^p \rangle_E = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \frac{2\pi}{k_c} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.31)$$

De la même manière, les polynômes de Chebyshev sont orthogonaux vis à vis de l'application :

$$\langle F(Z), G(Z) \rangle_T = \int_{-1}^1 \frac{F(Z) G(Z)}{\sqrt{1-Z^2}} dZ \quad (3.32)$$

On montre que (cf [3]) :

$$\langle T_m, T_q \rangle_T = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq q \\ c_q \frac{\pi}{2} & \text{si } m = q \end{cases} \quad \text{où } c_q = \begin{cases} 2 & \text{si } q = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.33)$$

On réalise le produit scalaire, défini par (3.30), de $F(x, z)$ et d'un mode E^p soit :

$$F_p = \langle F(x, z), E^p \rangle_E = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M f_{nm} T_m(z) \langle E^n, E^p \rangle_E \quad (3.34)$$

D'après (3.31), on obtient :

$$F_p = \langle F(x, z), E^p \rangle_E = \sum_{m=0}^M f_{pm} T_m(z) \times \frac{2\pi}{k_c} \quad (3.35)$$

En appliquant maintenant $\langle . , . \rangle_T$ défini par (3.32) à l'expression précédente et à un polynôme $T_q(Z)$ quelconque, on obtient :

$$\langle F_p, T_q(Z) \rangle_T = \frac{2\pi}{k_c} \sum_{m=0}^M f_{pm} \langle T_m(Z), T_q(Z) \rangle_T \quad (3.36)$$

soit avec (3.31) :

$$\langle F_p, T_q(Z) \rangle_T = \frac{2\pi}{k_c} \frac{\pi}{2} c_q f_{pq} \quad (3.37)$$

Ainsi, le coefficient f_{pq} s'obtient par :

$$f_{pq} = \frac{k_c}{2\pi} \frac{2}{\pi} \frac{1}{c_q} \langle F_p, T_q(Z) \rangle_T, \forall 0 \leq p \leq N \text{ et } 0 \leq q \leq M \quad (3.38)$$

Or par définition,

$$F_p = \langle F(x, z), E^p \rangle_E = \int_0^{\frac{2\pi}{k_c}} F(x, z) \exp(-ipk_c x) dx \quad (3.39)$$

donc finalement en substituant l'expression (3.39) dans (3.38), on obtient pour f_{pq} , ($\forall 0 \leq p \leq N$ et $0 \leq q \leq M$) :

$$f_{pq} = \frac{k_c}{2\pi} \frac{2}{\pi} \frac{1}{c_q} \int_0^{\frac{2\pi}{k_c}} \int_{-1}^1 \frac{F(x, z) T_q(Z) \exp(-ipk_c x)}{\sqrt{1-Z^2}} dx dZ \quad (3.40)$$

$$\text{avec } Z = 2z \text{ et } c_q = \begin{cases} 2 & \text{si } q = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la pratique, on ne dispose que de l'évaluation de $F(x, z)$ aux points de la grille définis par (3.27). Pour évaluer (3.40), on est donc amené à utiliser une formule de quadrature. Dans notre cas, où on interpole les grandeurs par des polynômes de Chebyshev évalués aux points de Gauss-Lobatto, la version discrète de (3.40) est donnée par la formule suivante (cf [6] et [5]) :

$$f_{pq} = \frac{1}{\gamma_q} \frac{1}{N_d} \sum_{i=0}^{N_d-1} \sum_{j=0}^{M_d-1} F(x_i, z_j) T_q(Z_j) \exp(-ipk_c x_i) W_j \quad (3.41)$$

où W_j sont les poids de la formule de quadrature définis par :

$$\begin{cases} W_0 = W_{M_d-1} = \frac{\pi}{2(M_d-1)} \\ W_j = \frac{\pi}{M_d-1}, 1 \leq j \leq M_d-2 \end{cases} \quad (3.42)$$

Le coefficient γ_q est quant à lui défini par :

$$\begin{cases} \gamma_q = \frac{\pi}{2} c_q \text{ si } q < N \text{ où } c_q = \begin{cases} 2 & \text{si } q = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ \gamma_N = \pi \end{cases} \quad (3.43)$$

La démarche précédente consistant à évaluer des termes dans l'espace physique avant de les projeter dans l'espace spectral, peut être appliquée aussi bien aux termes d'inertie qu'aux termes visqueux. Cependant, elle se révèle très coûteuse en temps de calcul et requiert parfois un grand nombre de points pour être précise. En l'utilisant pour projeter les termes d'inertie à la place de la procédure donnée dans 3.3.3, on perd en précision et

on augmente fortement la durée des calculs. C'est pour ces raisons qu'on la réserve au traitement des termes visqueux où il n'existe pas d'alternative.

3.4 Nombre de Nusselt

Le nombre de Nusselt Nu est la grandeur adimensionnelle qui caractérise l'influence de la convection sur les échanges de chaleur dans la couche de fluide. C'est le rapport entre le flux de chaleur total et le flux de chaleur dans l'état conductif de base. Le champ de température étant périodique suivant la direction horizontale de période $\hat{L}_c = \frac{2\pi}{k_c} \hat{d}$, on peut calculer le nombre de Nusselt en considérant uniquement une longueur d'onde. A la paroi inférieure, le nombre de Nusselt est défini par :

$$\text{Nu} = \frac{\int_{\hat{L}_c} -\hat{\lambda} \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{z}} \right)_{\hat{z}=-\frac{\hat{d}}{2}} d\hat{x}}{\int_{\hat{L}_c} -\hat{\lambda} \left(\frac{d\hat{T}_b}{d\hat{z}} \right)_{\hat{z}=-\frac{\hat{d}}{2}} d\hat{x}} = \frac{\int_{L_c} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=-\frac{1}{2}} dx}{\int_{L_c} \left(\frac{dT_b}{dz} \right)_{z=-\frac{1}{2}} dx}$$

Le champ de température \hat{T} correspond à la superposition de la perturbation en température au champ conductif de l'état de base soit $T = T_b + \theta$ où $T_b(z) = -z + T_0$. Le nombre de Nusselt s'écrit alors :

$$\text{Nu} = 1 - \frac{1}{L_c} \int_{L_c} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=-\frac{1}{2}} dx$$

Il est possible d'évaluer l'intégrale intervenant dans l'expression du nombre de Nusselt en utilisant les valeurs des variables en différents points de l'écoulement i.e. pour différentes valeurs de z comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ [7].

Pour s'en rendre compte, on peut réécrire l'équation de l'énergie (3.4) en tenant compte du fait que le fluide est incompressible :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= w + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\ \Leftrightarrow u \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= w \\ \Leftrightarrow \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} - \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(w\theta)}{\partial z} - \theta \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} &= w \\ \Leftrightarrow \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial(w\theta)}{\partial z} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \underbrace{\theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{=0} &= w \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(u\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) &= w \end{aligned}$$

On peut intégrer l'équation précédente sur une période :

$$\int_{L_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(u\theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx + \int_{L_c} \frac{\partial}{\partial z} \left(w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx = \int_{L_c} w dx$$

Compte tenu de la décomposition des variables en série de Fourier (3.13), la première intégrale du membre de gauche s'annule par périodicité. La vitesse verticale moyenne étant nulle dans le fluide ($w_0 = 0$), le membre de droite s'annule également. On obtient :

$$\int_{L_c} \frac{\partial}{\partial z} \left(w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx = 0, \forall -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$$

En intervertissant les opérateurs de dérivation et d'intégration, on obtient finalement :

$$\int_{L_c} \left(w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx = cste, \forall -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$$

En évaluant cette expression en $z = -\frac{1}{2}$ où $w = \theta = 0$, on a :

$$\int_{L_c} \left(w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx = - \int_{L_c} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=0} dx, \forall -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$$

On en déduit donc que :

$$Nu = 1 + \frac{1}{L_c} \int_{L_c} \left(w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dx, \forall -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$$

En tenant compte du fait que $w_n = w_{-n}, \theta_n = \theta_{-n}$ dans (3.13) et de la périodicité de l'écoulement, on a finalement :

$$Nu = 1 - \frac{\partial \theta_0}{\partial z} + w_0 \theta_0 + 2 \sum_{n=1}^N w_n \theta_n, \forall -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$$

On est ainsi en mesure de calculer le nombre de Nusselt en utilisant les données en différents points de l'écoulement. Cela permet d'avoir une garantie supplémentaire sur la validité des calculs numériques.

3.5 Procédure de continuation

On a vu que la méthode pseudo-spectrale décrite précédemment conduisait à l'obtention d'un système d'équations non linéaires de la forme :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, Ra) = \mathbf{0} \text{ avec } \mathbf{F} : \mathbb{R}^{NT} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{NT} \text{ et } NT = 2(N+1)(M+1) \quad (3.44)$$

où les inconnues du problème X_k , $k = 1 \dots NT$ étaient les coefficients spectraux associés aux champs de vitesse et de température.

Étudier les caractéristiques de l'écoulement quand on s'éloigne du seuil de la convection

revient donc à résoudre le système (3.44) pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

Généralement, un problème tel que (3.44) admet des branches continues de solutions, fonctions du paramètre de contrôle à savoir ici le nombre de Rayleigh. Les procédures de continuation désignent l'ensemble des techniques permettant de suivre ces branches. Ce sont des processus itératifs permettant de déterminer de proche en proche les solutions du problème au fur et à mesure que le paramètre de contrôle varie : on obtient des couples (\mathbf{X}_i, Ra_i) solutions de (3.44).

De manière générale, de telles procédures se font en 4 étapes (Figure 3.2) :

1. Une étape de prédiction $(\bar{\mathbf{X}}_{i+1}, \bar{Ra}_{i+1})$ de la solution recherchée à partir de la solution précédente (\mathbf{X}_i, Ra_i) sur la branche.
2. Une étape de paramétrisation de la branche de solution $\mathbf{X}(Ra)$ telle que $\mathbf{F}(\mathbf{X}(Ra), Ra) = \mathbf{0}$.
3. Une étape de correction permettant de déterminer la solution exacte $(\mathbf{X}_{i+1}, Ra_{i+1})$ à partir de la prédiction $(\bar{\mathbf{X}}_{i+1}, \bar{Ra}_{i+1})$.
4. Une étape de contrôle de la taille du pas utilisé lors de la phase de prédiction suivante.

La mise en place des différentes étapes est détaillée dans les paragraphes suivants. On

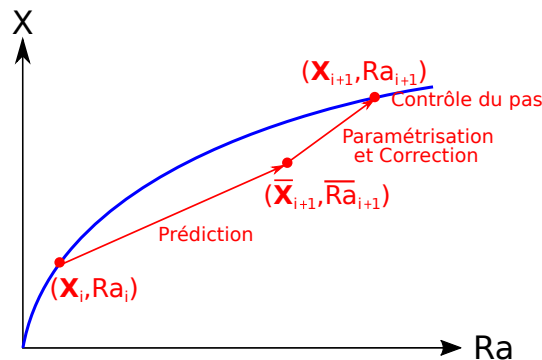


FIGURE 3.2 – Les différentes étapes des méthodes de continuation.

peut signaler, avant de poursuivre, que les procédures de continuation peuvent être très difficiles à mener dans la pratique. Ceci est dû aux comportements parfois extrêmement complexes des branches de solution. Par exemple, deux branches de solution peuvent se croiser : on parle alors de **points de bifurcation** pour désigner leur intersection. Il est également fréquent de rencontrer des configurations où les branches de solution n'existent localement qu'en deçà ou qu'au delà d'une valeur du paramètre de contrôle : on parle alors de **points de retournement**. La Figure 3.3 illustre ces différents cas.

Une description plus mathématique est donnée par Seydel dans [8]. Cet auteur considère le problème général $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \lambda) = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{NT} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{NT}$ où \mathbf{X} est le vecteur des inconnus et λ le paramètre de contrôle (dans notre cas $\lambda = Ra$).

Il définit alors les opérateurs matriciels $\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}$ et $\partial_{\lambda}\mathbf{F}$ respectivement de dimensions $(NT,$

NT) et (NT, 1) tels que :

$$[\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}]_{pq} = \frac{\partial F_p}{\partial X_q} \quad [\partial_{\lambda}\mathbf{F}]_p = \frac{\partial F_p}{\partial \lambda} \quad \forall 1 \leq p, q \leq \text{NT} \quad (3.45)$$

L'opérateur $\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}$ est la matrice jacobienne associée à $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \lambda)$.

$(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ est un **point de bifurcation** à condition que :

1. $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$;
2. $\text{rang}(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)) = \text{NT} - 1$;
3. $\partial_{\lambda}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ appartienne au sous espace vectoriel engendré par les colonnes de $\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$;
4. deux branches de solutions se croisent avec des tangentes distinctes.

Un **point de retournement** $(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ vérifie, quant à lui, les propriétés suivantes :

1. $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$;
2. $\text{rang}(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)) = \text{NT} - 1$;
3. $\partial_{\lambda}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$ n'appartient pas au sous espace vectoriel engendré par les colonnes de $\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)$;
4. il existe une paramétrisation $\mathbf{X}(\sigma)$ et $\lambda(\sigma)$ telle que $\mathbf{X}(\sigma_0) = \mathbf{X}_0$, $\lambda(\sigma_0) = \lambda_0$ et $\frac{d^2\lambda(\sigma_0)}{d\sigma^2} \neq 0$.

On peut retenir de ces deux définitions que la matrice jacobienne $\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}$ n'est inversible ni aux points de retournement ni aux points de bifurcation puisque $\text{rang}(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \lambda_0)) = \text{NT} - 1$.

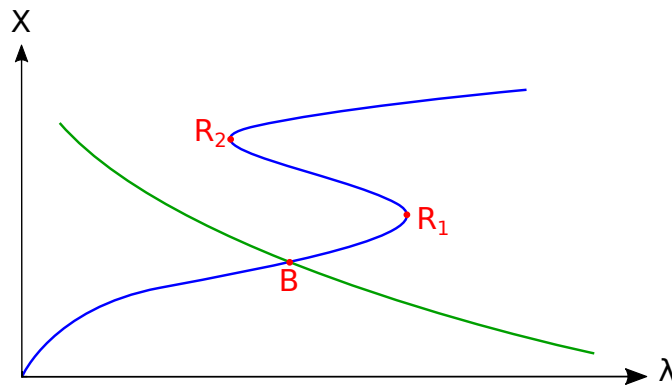


FIGURE 3.3 – Points de bifurcation (B) et de retournement (R_1 et R_2)

3.5.1 Prédiction

La phase de prédiction consiste à définir une approximation $(\bar{\mathbf{X}}_{i+1}, \bar{\mathbf{R}}_{i+1})$ de la solution à partir du point précédent $(\mathbf{X}_i, \mathbf{R}_{i+1})$ sur la branche. Le premier point $(\mathbf{X}_0, \mathbf{R}_{i+1})$ provient d'une analyse faiblement non linéaire de stabilité semblable à celle utilisée dans les chapitres précédents.

Il existe différents prédicteurs. Le plus simple d'entre eux, dénommé prédicteur trivial, consiste à choisir comme approximation en \mathbf{R}_{i+1} la solution obtenue précédemment sur la branche soit :

$$(\bar{\mathbf{X}}_{i+1}, \bar{\mathbf{R}}_{i+1}) = (\mathbf{X}_i, \mathbf{R}_{i+1}) \quad (3.46)$$

Dans la pratique, ce prédicteur conduit à une approximation très grossière de la solution ce qui s'avère très pénalisant pendant la phase de correction où de nombreuses itérations sont alors nécessaires pour obtenir la solution exacte.

Pour obtenir une meilleure approximation, on peut commencer par calculer la différentielle de (3.44) ce qui conduit à la relation :

$$d\mathbf{F} = \mathbf{0} = (\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F})d\mathbf{X} + (\partial_{\mathbf{R}_a}\mathbf{F})d\mathbf{R}_a \quad (3.47)$$

où \mathbf{X} est le vecteur des coefficients spectraux et où $\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}$ et $\partial_{\mathbf{R}_a}\mathbf{F}$ sont les opérateurs matriciels définis par (3.45).

A partir de (3.47), on a :

$$\frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{R}_a} = -(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F})^{-1}(\partial_{\mathbf{R}_a}\mathbf{F}) \quad (3.48)$$

On peut alors obtenir une approximation de la solution en \mathbf{R}_{i+1} en intégrant cette dernière relation, soit :

$$\bar{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{X}_i + (\mathbf{R}_{i+1} - \mathbf{R}_i) \left(\frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{R}_a} \right)_i \quad (3.49)$$

Cette estimation de la solution se révèle bien meilleure que celle obtenue dans le cas du prédicteur trivial : elle permet des incréments plus grands du paramètre de contrôle \mathbf{R}_a au cours de la procédure de continuation. Toutefois elle présente l'inconvénient important d'échouer aux points de retournement où $(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F})^{-1}$ n'est pas définie.

Le prédicteur de la tangente présenté dans [8] permet de s'affranchir de ce problème. On introduit un vecteur tangent \mathbf{T} défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k = d\mathbf{X}_k \text{ pour } 1 \leq k \leq N_T \\ \mathbf{T}_{N_T+1} = d\mathbf{R}_a \end{cases}$$

On peut alors réécrire (3.47) sous la forme :

$$(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}|\partial_{\mathbf{R}_a}\mathbf{F})\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

où $(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}|\partial_{\mathbf{Ra}}\mathbf{F})$ est l'opérateur matriciel de dimensions $(\text{NT}, \text{NT}+1)$ obtenu par concaténation des deux opérateurs $\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}$ et $\partial_{\mathbf{Ra}}\mathbf{F}$.

Le système (3.50) faisant intervenir NT équations pour $\text{NT} + 1$ inconnues, on doit imposer une condition de normalisation pour que \mathbf{T} soit déterminé de manière unique. De manière très générale, une telle condition s'écrit $\mathbf{c}^{tr}\mathbf{T} = 1$ où \mathbf{c} est un vecteur « approprié » et où tr désigne l'opération de transposition.

Un choix possible est de contraindre une composante du vecteur tangent à valoir 1 : on prend alors $\mathbf{c} = \mathbf{e}_k$ où \mathbf{e}_k désigne le vecteur unitaire de taille NT dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la k ième qui vaut 1 soit :

$$(\mathbf{e}_k^{tr})\mathbf{T} = T_k = 1 \quad (3.51)$$

En associant (3.50) et (3.51), on détermine le vecteur tangent par résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}|\partial_{\mathbf{Ra}}\mathbf{F} \\ \mathbf{e}_k^{tr} \end{pmatrix} \mathbf{T} = \mathbf{e}_{\text{NT}+1} \quad (3.52)$$

A condition que $\text{rang}(\partial_{\mathbf{X}}\mathbf{F}|\partial_{\mathbf{Ra}}\mathbf{F}) = \text{NT}$, le vecteur tangent est bien défini le long de la branche. En particulier, il est possible de le déterminer aux points de retournement ce que ne permettent ni (3.46) ni (3.49).

Une fois le vecteur tangent \mathbf{T} calculé, l'approximation $(\overline{\mathbf{X}}_{i+1}, \overline{\mathbf{Ra}}_{i+1})$ de la solution est donnée par :

$$(\overline{\mathbf{X}}_{i+1}, \overline{\mathbf{Ra}}_{i+1}) = (\mathbf{X}_i, \mathbf{Ra}_i) + \sigma_i \mathbf{T} \quad (3.53)$$

La grandeur σ_i qui intervient dans la formule précédente (3.53) est le pas de la méthode de prédiction. Le choix d'une valeur adéquate de ce paramètre s'avère délicat. Considérer un faible pas va aboutir à avoir une bonne estimation de la solution et peu d'itérations lors de la phase de correction ; en revanche, on risque de peu se déplacer le long de la branche de solution. A l'inverse si on choisit un pas trop grand, l'estimation de la solution va être mauvaise et la phase de correction risque d'échouer ou d'être excessivement longue. Différentes stratégies mises en œuvre dans le choix de ce paramètre sont présentées ultérieurement.

Dans le code numérique mis en place, c'est le prédicteur de la tangente qui est utilisé. Il est à noter que d'autres prédicteurs basés sur une approximation polynomiale locale de la courbe de solutions peuvent également être employés. Le plus commun d'entre eux, appelé prédicteur de la sécante, consiste à choisir comme approximation :

$$(\overline{\mathbf{X}}_{i+1}, \overline{\mathbf{Ra}}_{i+1}) = (\mathbf{X}_i, \mathbf{Ra}_i) + \sigma_i(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{Ra}_i - \mathbf{Ra}_{i-1}) \quad (3.54)$$

D'après [8], l'erreur sur la solution fournie par ce prédicteur est du même ordre de grandeur que celle obtenue dans le cas de la tangente. Elle requiert cependant les données en deux points précédents : c'est pour cette raison que la tangente lui a été préférée.

3.5.2 Paramétrisation

Une branche de solutions peut être décrite mathématiquement par l'intermédiaire d'une grandeur appelée paramètre : on parle alors de paramétrisation. Une fois la paramétrisation effectuée, chaque point de la courbe de solutions est parfaitement identifié par une valeur du paramètre.

Pour une courbe donnée, différentes paramétrisations peuvent être possibles. Le paramètre le plus naturel pour décrire une branche de solutions est le paramètre de contrôle du problème, dans notre cas le nombre de Rayleigh Ra . Ce choix permet de conserver la dimension physique du problème mais s'avère inapproprié aux points de retournement : en conséquence, on choisit généralement d'autres paramétrisations.

De manière générale, utiliser une grandeur γ comme paramètre revient à considérer que les solutions de $\mathbf{F}(\mathbf{X}, Ra) = \mathbf{0}$ sont des fonctions continues de γ soit :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\gamma) \quad Ra = Ra(\gamma) \quad (3.55)$$

Dans cette approche, Ra devient donc une inconnue du problème fonction de γ . Le système $\mathbf{F}(\mathbf{X}, Ra) = \mathbf{0}$ admet alors NT équations pour $NT + 1$ inconnues (\mathbf{X}, Ra) . Il est alors nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire liant \mathbf{X} , Ra et γ . Une telle équation est appelée équation de paramétrisation et a la forme générale suivante :

$$p(\mathbf{X}, Ra, \gamma) = 0 \quad (3.56)$$

En l'associant avec (3.44), on obtient un système étendu qui admet bien autant d'équations que d'inconnues :

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}, Ra, \gamma) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{X}, Ra) \\ p(\mathbf{X}, Ra, \gamma) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

Pour résoudre le système étendu (3.57), il reste à définir une paramétrisation. Une manière très courante de procéder est de choisir la longueur d'arc s comme paramètre. Cette dernière vérifie la relation :

$$\sum_{k=1}^{NT} \left(\frac{dX_k}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dRa}{ds} \right)^2 = 1 \quad (3.58)$$

Cette égalité présente l'inconvénient de faire intervenir les dérivées de \mathbf{X} et de Ra . Mathématiquement, utiliser (3.58) comme équation de paramétrisation conduit à faire de $\mathcal{F}(\mathbf{X}, Ra, s) = \mathbf{0}$ un système de $NT + 1$ équations à $2(NT + 1)$ inconnues puisqu'on doit considérer à la fois les inconnues et leurs dérivées. Pour cette raison, on ne travaille pas directement avec (3.58) mais avec une approximation de cette dernière. s correspond alors à une approximation de la longueur d'arc et on parle de **continuation par pseudo longueur d'arc**. Cette technique introduite par Keller en 1977 [9] est très fréquemment utilisée dans les problèmes de continuation .

Plusieurs équations de paramétrisation sont alors possibles. Une des plus fréquentes repose sur une approximation par différences finies des dérivées de (3.58) soit :

$$p_1(\mathbf{X}, \text{Ra}, s) = \sum_{k=1}^{\text{NT}} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k(s_i)) \left(\frac{d\mathbf{X}}{ds} \right)_{s_i} + (\text{Ra} - \text{Ra}(s_i)) \left(\frac{d\text{Ra}}{ds} \right)_{s_i} - (s - s_i)^2 = 0 \quad (3.59)$$

Cette paramétrisation fait intervenir les dérivées de \mathbf{X} et de Ra par rapport à l'abscisse curviligne s évaluées au point précédent. Une façon pratique de les évaluer est présentée dans [4]. Toutefois, il semblerait qu'il existe des configurations dans lesquelles cette évaluation se révèle imprécise et où la procédure de continuation échoue (cf [10]).

Une autre équation de paramétrisation fréquemment utilisée est donnée par :

$$p_2(\mathbf{X}, \text{Ra}, s) = \sum_{k=1}^{\text{NT}} (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k(s_i))^2 + (\text{Ra} - \text{Ra}(s_i))^2 - (s - s_i)^2 = 0 \quad (3.60)$$

Elle présente l'avantage de ne pas faire intervenir de dérivées : c'est pour cette raison qu'elle a été choisie dans le code numérique mis en place.

La plupart des autres équations de paramétrisation pour la longueur d'arc sont basées sur (3.59) et (3.60) : elles introduisent un facteur d'atténuation $0 \leq \xi \leq 1$ qui permet de donner plus de poids à \mathbf{X} ou à Ra dans l'équation de paramétrisation. Par souci de simplicité, ces équations de paramétrisation n'ont pas été retenues pour le code numérique.

Enfin, on peut signaler qu'il existe des alternatives aux paramétrisations par longueur d'arc et pseudo longueur d'arc. On peut notamment mentionner les paramétrisations locales qui permettent également de franchir les points de retournement. Dans ces approches, le paramètre utilisé, une composante de \mathbf{X} ou Ra, est déterminé localement à chaque pas de la méthode de continuation. On pourra se tourner vers [8] pour de plus amples informations.

3.5.3 Correction

La phase de correction a pour but de déterminer une solution exacte $(\mathbf{X}_{i+1}, \text{Ra}_{i+1})$ du système étendu $\mathcal{F}(\mathbf{X}, \text{Ra}, s) = \mathbf{0}$ à partir de l'estimation $(\overline{\mathbf{X}}_{i+1}, \overline{\text{Ra}}_{i+1})$ obtenue lors de la phase de prédiction.

La correction à faire à partir de l'estimation est déterminée en appliquant la méthode de Newton au système étendu. Cette dernière appartient à la classe des méthodes de points fixes et permet de déterminer les zéros d'une fonction de manière itérative. Ainsi, à partir d'un point initial $(\mathbf{X}_i^0, \text{Ra}_i^0) = (\overline{\mathbf{X}}_{i+1}, \overline{\text{Ra}}_{i+1})$, suffisamment proche de la solution du problème, on construit une suite de points $(\mathbf{X}_i^1, \text{Ra}_i^1)$, $(\mathbf{X}_i^2, \text{Ra}_i^2)$, ..., $(\mathbf{X}_i^j, \text{Ra}_i^j)$..., qui

converge vers une solution de $\mathcal{F}(\mathbf{X}, \text{Ra}, s) = \mathbf{0}$ soit :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_i^j \\ \text{Ra}_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{i+1} \\ \text{Ra}_{i+1} \end{pmatrix} \text{ où } \mathcal{F}(\mathbf{X}_{i+1}, \text{Ra}_{i+1}, s_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

Les itérations de Newton successives s'obtiennent par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_i^{j+1} \\ \text{Ra}_i^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_i^j \\ \text{Ra}_i^j \end{pmatrix} - \mathcal{J}_{(\mathbf{X}_i^j, \text{Ra}_i^j)}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ p_2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{X}_i^j, \text{Ra}_i^j)} \quad (3.62)$$

où $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{X}} \mathbf{F} & \partial_{\text{Ra}} \mathbf{F} \\ \partial_{\mathbf{X}} p_2 & \partial_{\text{Ra}} p_2 \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne du système étendu (3.57). Son inverse \mathcal{J}^{-1} est bien défini aux points de retournement contrairement à la jacobienne $(\partial_{\mathbf{X}} \mathbf{F})^{-1}$ du système de base (3.44).

L'opérateur matriciel $\partial_{\mathbf{X}} \mathbf{F}$ de dimensions (NT, NT) intervenant dans la jacobienne \mathcal{J} est calculé par différences finies centrées :

$$[\partial_{\mathbf{X}} \mathbf{F}]_{pq} = \frac{\partial F_p}{\partial X_q} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_p(\mathbf{X} + \delta \mathbf{e}_q) - F_p(\mathbf{X} - \delta \mathbf{e}_q)}{\delta} \quad (3.63)$$

où $[\mathbf{e}_q]_k = \delta_{qk}$ pour $k = 1 \dots \text{NT}$.

Les autres opérateurs $\partial_{\text{Ra}} \mathbf{F}$, $\partial_{\mathbf{X}} p_2$ respectivement de dimensions (NT, 1) et (1, NT) ainsi que le scalaire $\partial_{\text{Ra}} p_2$ sont quant à eux calculés analytiquement.

La convergence de la méthode de Newton est quadratique (cf [11]) :

$$\|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i^{j+1}\|_2 \leq C \|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i^j\|_2^2 \quad (3.64)$$

où C est une constante et où $\|\mathbf{X}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\text{NT}} X_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Dans la pratique, on a considéré que la fonction \mathcal{F} s'annulait lorsque sa norme devenait inférieure à une valeur ζ choisie très faible. Les itérations de Newton sont ainsi menées jusqu'à ce que :

$$\|\mathcal{F}(\mathbf{X}_i^{j+1}, \text{Ra}_i^{j+1}, s_{i+1})\|_2 \leq \zeta \quad (3.65)$$

Dans les simulations numériques, on a fixé : $\zeta = 10^{-6}$.

Plusieurs difficultés peuvent survenir dans l'application de la méthode de Newton. La première, inhérente à la méthode, réside dans le fait que la convergence est locale : si le point initial $(\mathbf{X}_i^0, \text{Ra}_i^0) = (\bar{\mathbf{X}}_{i+1}, \bar{\text{Ra}}_{i+1})$ est trop éloigné de la solution du problème, les itérés risquent de diverger. La seconde difficulté provient de l'impossibilité de calculer de manière analytique le terme $\partial_{\mathbf{X}} \mathbf{F}$: on est obligé de procéder par différences finies. Numériquement, définir une valeur pour la grandeur δ considérée comme infiniment petite dans (3.63) peut se révéler ardu : si la valeur est trop faible, les variations de la fonction

\mathbf{F} risquent d'être trop faibles pour être perceptibles alors qu'à l'inverse une valeur trop forte mène à une estimation grossière de $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$. Par tâtonnement, la valeur retenue a été fixée à $\delta = 10^{-7}$. Par ailleurs, déterminer $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{F}$ numériquement nécessite des temps de calcul importants : la raison en incombe aux multiples projections dans l'espace spectral nécessaires pour évaluer \mathbf{F} aux différents points.

3.5.4 Contrôle du pas

Le comportement des branches de solution peut varier fortement en fonction des valeurs du paramètre de contrôle. Dans certaines gammes de valeurs, les branches vont avoir une allure monotone alors que dans d'autres, leurs évolutions seront erratiques. Dans le premier cas, utiliser de grands incréments du paramètre de contrôle permet à la fois de bien capter la forme de la branche et de réduire les temps de calcul. En revanche dans le second cas, de plus petits incréments sont nécessaires afin de capter l'allure des branches de solutions. Il paraît alors nécessaire d'adapter les incréments du paramètre de contrôle en fonction du comportement des branches de solutions au cours de la procédure de continuation : c'est l'objectif de l'étape de contrôle du pas.

On utilise généralement des arguments empiriques pour esquisser l'allure des branches. On peut par exemple considérer le nombre d'itérations effectuées lors de la phase de correction comme un bon indicateur de leurs variations : un faible nombre d'itérations indique une évolution monotone tandis qu'un fort nombre d'itérations correspond à une évolution brusque. Dans la pratique, on a estimé que la situation optimale permettant de bien saisir l'allure de la branche tout en minimisant les temps de calcul correspondait à faire une dizaine d'itérations par étape de correction. Ainsi, quand le nombre d'itérations effectuées N_{it} est trop en dessous de cette valeur $N_{opt} = 10$, on choisit d'augmenter les incréments d'abscisses curvilignes $\Delta s = s_{i+1} - s_i$ et le pas σ_i utilisé lors de l'étape de prédiction. De manière similaire, on diminue ces grandeurs quand on se trouve trop au dessus de N_{opt} . Plus précisément, dans le code mis en place, on a choisi :

- si $N_{it} \leq 5$, $\Delta s_{i+1} = 1.1\Delta s_i$ et $\sigma_{i+1} = 1.1\sigma_i$
- si $N_{it} \geq 20$, $\Delta s_{i+1} = \frac{1}{2}\Delta s_i$ et $\sigma_{i+1} = \frac{1}{2}\sigma_i$

3.6 Résultats pour des fluides Newtoniens

Dans cette section, on présente les résultats obtenus en appliquant la procédure de continuation au cas Newtonien. On donne les évolutions des différents modes de Fourier, des champs de vitesse et de température et des transferts thermiques au fur et à mesure qu'on s'éloigne des conditions critiques. Les résultats sont comparés avec ceux issus de différentes études qui sont présentées en premier lieu.

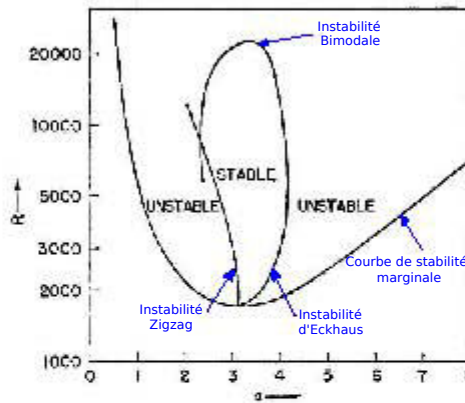
3.6.1 Les principaux travaux existants

Dans le cas Newtonien, différentes approches ont été mises en place pour étudier les grandeurs caractéristiques de l'écoulement ainsi que les transferts thermiques au fur et à mesure que la convection gagne en intensité.

Une démarche alternative à la procédure de continuation, présentée précédemment, a été élaborée par A. Chorin en 1967 [12]. La méthode proposée par cet auteur consiste à remplacer le système d'équations initial par un autre système faisant intervenir une compressibilité artificielle. Un schéma numérique explicite basé sur les différences finies est ensuite utilisé afin de le résoudre. La compressibilité artificielle introduite fait office de paramètre de relaxation et permet d'avoir une convergence rapide vers une solution stationnaire du système initial. A. Chorin est parvenu à déterminer l'évolution des échanges de chaleur en calculant le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh dans le cas $Pr = 1$. Ce travail a ensuite été approfondi par W. Plows [7] qui a notamment considéré différents nombres de Prandtl et s'est interrogé sur la possibilité d'extrapoler les résultats à un maillage infiniment fin. Soulignons que cette méthode possède d'autres avantages que sa convergence rapide vers une solution stationnaire : elle permet notamment de traiter aussi bien des problèmes bidimensionnels que tridimensionnels et est transposable à d'autres sujets que la convection thermique. En revanche, à notre connaissance, elle n'a pas été utilisée pour étudier la stabilité des motifs.

Une autre approche a été utilisée par F.H. Busse en 1967 [13]. Cette dernière repose sur la décomposition en séries de Fourier des variables du problème. Les équations descriptives de la convection de Rayleigh-Bénard conduisent alors à un système d'équations algébriques (une par mode de Fourier). La résolution numérique de ces équations permet de déterminer les caractéristiques de l'écoulement. Les calculs effectués par F.H. Busse sont menés dans le cas d'un fluide avec un nombre de Prandtl infini où les termes d'inertie de l'équation de quantité de mouvement peuvent être négligés. L'avantage de cette méthode sur celle mise en oeuvre par A. Chorin réside dans le fait qu'elle permet d'étudier la stabilité des motifs de convection et de mettre en évidence les différentes instabilités secondaires (Eckhaus, Zigzag, Bimodale) qui limitent la gamme de nombres d'ondes stables. Le domaine de stabilité des rouleaux peut être représenté dans le plan (nombre d'onde, nombre de Rayleigh) : le diagramme ainsi obtenu, cf Figure 3.4, est appelé « Ballon de Busse ». Il montre notamment que les rouleaux de convection ne sont plus stables au delà d'un nombre de Rayleigh de 22 600. L'approche utilisée par F.H. Busse dans [13] a l'inconvénient d'être assez peu flexible et paraît difficilement transposable telle quelle à des situations plus complexes où l'on considère des fluides avec des nombres de Prandtl finis ou avec un comportement rhéologique particulier. En effet, elle fait intervenir des développements analytiques qui paraissent difficiles à mener quand on ajoute des non-linéarités dans les équations descriptives du problème.

Enfin, des travaux expérimentaux ont été menés par H.T. Rossby [14] afin d'étudier la stabilité des rouleaux de convection ainsi que l'évolution des transferts thermiques avec

FIGURE 3.4 – Ballon de Busse pour $Pr \rightarrow \infty$

l'écart au seuil de la convection.

3.6.2 Convergence de la méthode de continuation en Newtonien

La procédure de continuation a été menée en utilisant différents nombres N de modes de Fourier afin de s'assurer de sa convergence dans le cas Newtonien. Les résultats numériques montrent que le nombre de modes nécessaire à la convergence ne dépend pas du nombre de Prandtl lorsque $Pr \geq 1$. On présente donc uniquement le cas $Pr = 10$ dans ce paragraphe. Le nombre de Nusselt Nu a été utilisé comme grandeur physique représentative de la convergence de la méthode. La Figure 3.5 montre ainsi ses variations avec l'écart relatif au seuil $\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$ pour différentes valeurs de N (des valeurs numériques précises sont répertoriées dans le tableau 3.1). On constate que pour $0 \leq \epsilon \leq 2$, les nombres de Nusselt obtenus sont identiques quelque soit le nombre de modes de Fourier utilisés : 4 modes sont donc suffisants pour décrire les champs de vitesse et de température dans cette gamme. Pour des écarts au seuil plus importants, les nombres de Nusselt ne convergent vers une valeur fixe qu'au delà d'un certain nombre de modes : par exemple, pour $\epsilon = 4$ et $\epsilon = 8$, il faut respectivement 5 et 6 modes d'après le tableau 3.1. On constate que ce nombre minimal de modes de Fourier à considérer pour avoir convergence augmente quand l'écart relatif au seuil s'accroît. Pour converger, la procédure de continuation requiert donc d'autant plus de modes de Fourier que l'écart relatif au seuil est important : cela s'explique par le fait que les harmoniques issus des interactions non linéaires entre modes de Fourier deviennent de plus en plus importants au fur et à mesure que la convection gagne en intensité.

3.6.3 Évolution des différents modes de Fourier avec l'écart au seuil de la convection

On s'intéresse ici aux évolutions des différents modes de Fourier avec ϵ , l'écart relatif au seuil de la convection. Comme précédemment, on se limite au cas $Pr = 10$ et on considère uniquement l'intervalle $0 \leq \epsilon \leq 6$ où 7 modes de Fourier ($N=6$) sont suffisants pour garantir la convergence de la procédure de continuation comme développé à la section

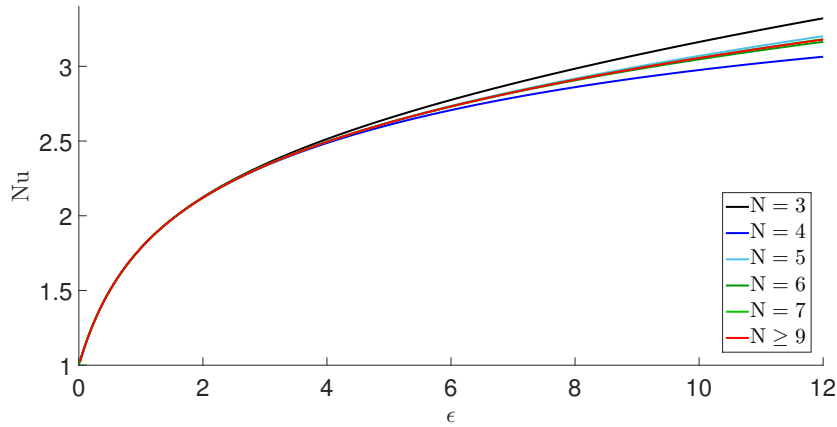


FIGURE 3.5 – Convergence de la procédure de continuation pour $Pr = 10$ pour un fluide Newtonien

| ϵ | $N = 3$ | $N = 4$ | $N = 5$ | $N = 6$ | $N = 7$ | $N = 9$ | $N \geq 11$ |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|
| 1 | 1.785 | 1.785 | 1.785 | 1.785 | 1.785 | 1.785 | 1.785 |
| 2 | 2.125 | 2.121 | 2.122 | 2.122 | 2.122 | 2.122 | 2.122 |
| 3 | 2.363 | 2.332 | 2.336 | 2.335 | 2.335 | 2.335 | 2.335 |
| 4 | 2.513 | 2.487 | 2.496 | 2.495 | 2.495 | 2.495 | 2.495 |
| 6 | 2.775 | 2.707 | 2.735 | 2.731 | 2.732 | 2.732 | 2.732 |
| 8 | 2.984 | 2.860 | 2.918 | 2.906 | 2.911 | 2.910 | 2.910 |
| 10 | 3.163 | 2.975 | 3.07 | 3.047 | 3.057 | 3.055 | 3.055 |
| 12 | 3.321 | 3.064 | 3.202 | 3.164 | 3.181 | 3.179 | 3.179 |

TABLE 3.1 – Comparaison des nombres de Nusselt obtenus pour $Pr = 10$ avec différents nombres N de modes de Fourier. A ϵ donné, les valeurs en **bleu** correspondent à des écarts relatifs avec la valeur obtenue pour $N \geq 11$ inférieurs à 1%. Celles en **rouge** correspondent à des écarts supérieurs à 1%.

3.6.2.

Afin de quantifier la contribution des différents modes des champs de vitesse et de température, on introduit les énergies $E(w_n)$, $E(\theta_n)$ associées aux modes w_n et θ_n où $n = 0 \dots N$:

$$E(w_n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} w_n^2(z) dz \quad E(\theta_n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \theta_n^2(z) dz \quad (3.66)$$

On définit aussi les valeurs relatives $E_r(w_n)$ et $E_r(\theta_n)$ comme suit :

$$E_r(w_n) = \frac{E(w_n)}{\sum_{n=0}^N E(w_n)} \quad E_r(\theta_n) = \frac{E(\theta_n)}{\sum_{n=0}^N E(\theta_n)} \quad (3.67)$$

La Figure 3.6 montre les modes de Fourier associés à la composante verticale de la vitesse w pour différentes valeurs de l'écart relatif au seuil ϵ . Les énergies des différents modes sont représentées sur la Figure 3.7 en fonction de ϵ en échelles arithmétique et logarithmique . Conformément à nos attentes, on observe que le mode w_0 est nul aux erreurs numériques

près : il n'y a pas de mouvement d'ensemble du fluide. L'amplitude de chaque mode w_n et l'énergie correspondante $E(w_n)$ augmentent quand on s'éloigne du seuil de la convection. Le mode fondamental w_1 est le mode ayant la plus grande amplitude. Il concentre la majeure partie de l'énergie du champ de vitesse et l'apport des autres modes reste marginal : on observe ainsi que la contribution relative du fondamental $E_r(w_1)$ reste proche de l'unité et diminue très légèrement avec ϵ au profit des autres modes (surtout w_3). Enfin, on constate que dans l'absolu il n'y a pas de relation entre l'ordre des harmoniques et leurs amplitudes et énergies : par exemple, l'amplitude et l'énergie du 3ème harmonique w_3 sont supérieures à celles de w_2 à partir de $\epsilon = 0.65$.

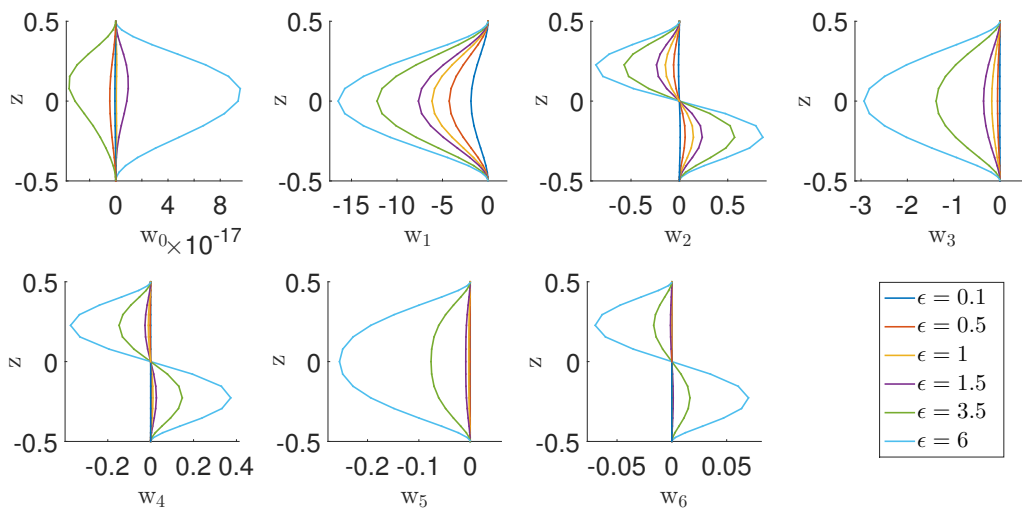


FIGURE 3.6 – Modes de Fourier associés à w pour un fluide Newtonien

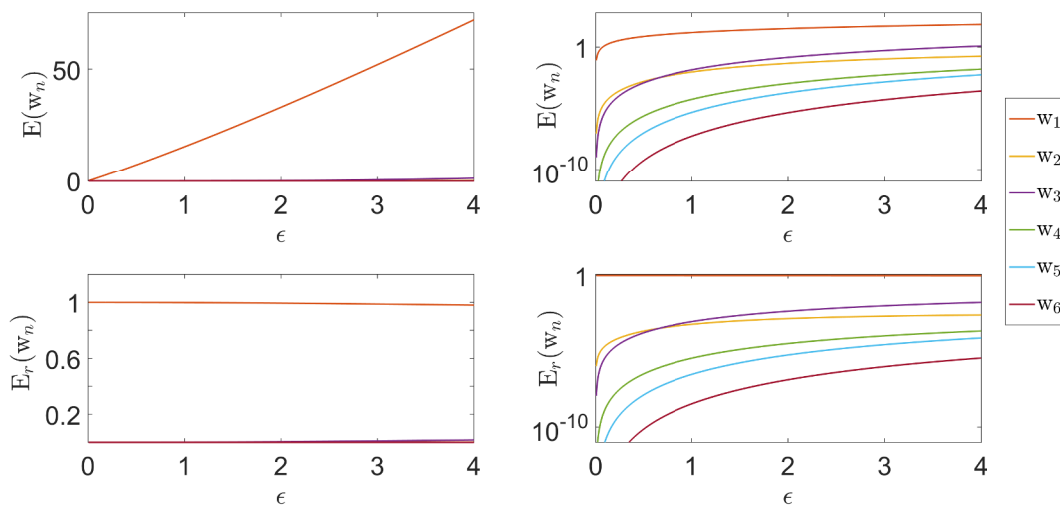


FIGURE 3.7 – Répartition de l'énergie des modes du champ de vitesse w pour un fluide Newtonien

En ce qui concerne le champ de température, les modes θ_n ainsi que les différentes énergies associées $E(\theta_n)$ et $E_r(\theta_n)$ sont représentés respectivement sur les Figures 3.8 et 3.9. Ces dernières montrent notamment une saturation du mode fondamental θ_1 : l'amplitude et l'énergie de ce dernier augmentent jusqu'à $\epsilon = 1$ avant de décroître progressivement pour des valeurs plus importantes de l'écart relatif au seuil. Les amplitudes et énergies des autres modes ne font, quant à elles, qu'augmenter avec ϵ . Avant de commencer à saturer, on observe que c'est le mode θ_1 qui présente les plus grandes amplitudes et énergies. En revanche, une fois la saturation amorcée, c'est le mode θ_0 qui devient dominant. Son amplitude et son énergie continuent ensuite d'augmenter fortement avec ϵ . En conséquence, la prédominance de θ_0 sur les autres modes ne fait alors que se renforcer quand on s'éloigne du seuil de la convection. Seuls θ_0 et θ_1 contribuent significativement à l'énergie du champ de température : les participations des autres modes $\theta_l, l = 2..6$ demeurent négligeables.

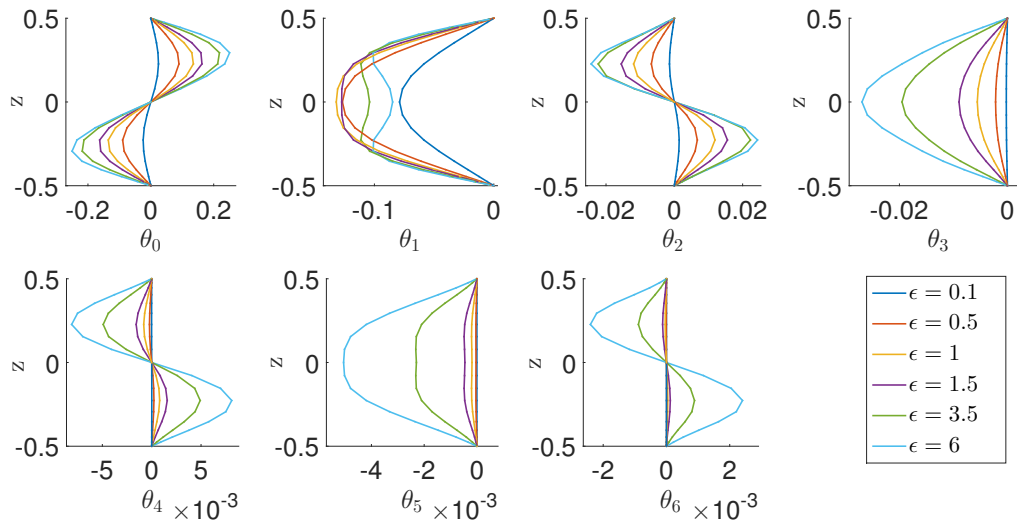


FIGURE 3.8 – Modes de Fourier associés à θ pour un fluide Newtonien

3.6.4 Évolution des champs de vitesse et de température avec l'écart au seuil de la convection

On donne ici les évolutions des champs de vitesse et de température dans l'intervalle $0 \leq \epsilon \leq 12$. Pour s'assurer de la convergence de la procédure de continuation, 12 modes de Fourier ($N = 11$) ont été utilisés. Comme dans les paragraphes précédents, on présente uniquement le cas $Pr = 10$, les résultats étant qualitativement semblables dans l'intervalle $1 \leq Pr \leq \infty$.

La composante verticale w du champ de vitesse est représentée sur la Figure 3.10 pour différents écarts relatifs au seuil de la convection. Les zones en rouge correspondent à des zones ascendantes de fluide tandis que les zones en bleu indiquent des zones descendantes.

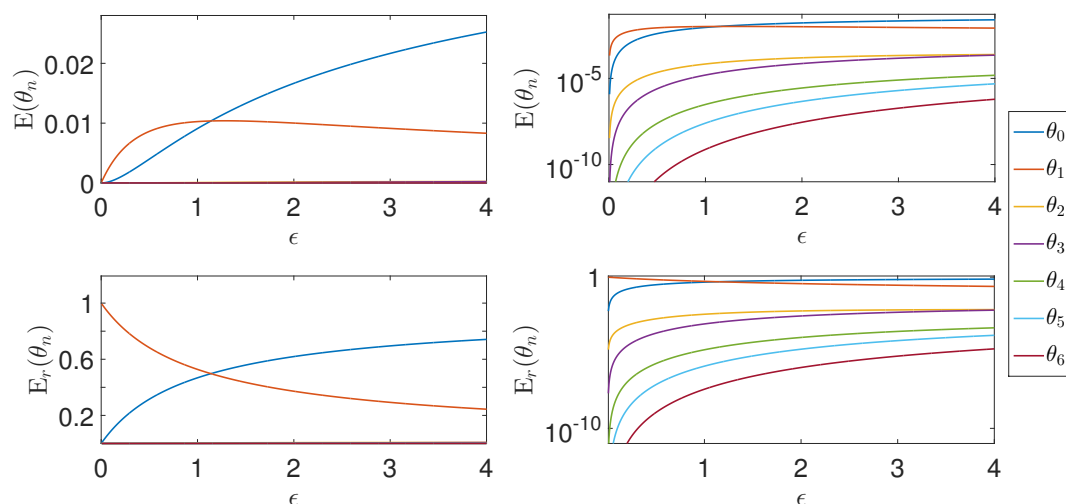


FIGURE 3.9 – Répartition de l'énergie des modes du champ de température θ pour un fluide Newtonien

On constate que les vitesses de montée et de descente augmentent fortement pour de faibles valeurs de ϵ : les valeurs maximale et minimale de w sont ainsi presque multipliées par 5 dans l'intervalle $0.1 \leq \epsilon \leq 1$. Pour de plus grands écarts au seuil, les fluctuations sont en revanche bien moindres : w ne varie ainsi que très faiblement de $\epsilon = 8$ à $\epsilon = 12$. Enfin, on peut également noter que, bien qu'elles s'amplifient, les montées et descentes de fluide semblent davantage confinées lorsque la convection gagne en intensité.

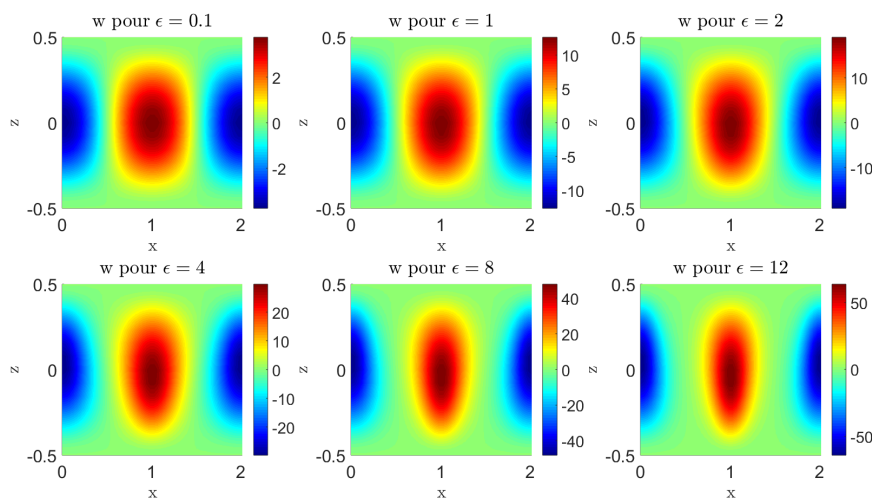
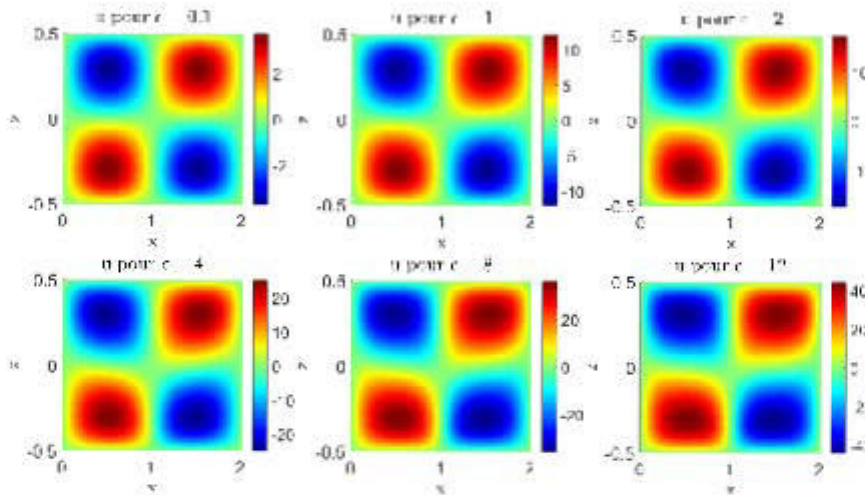
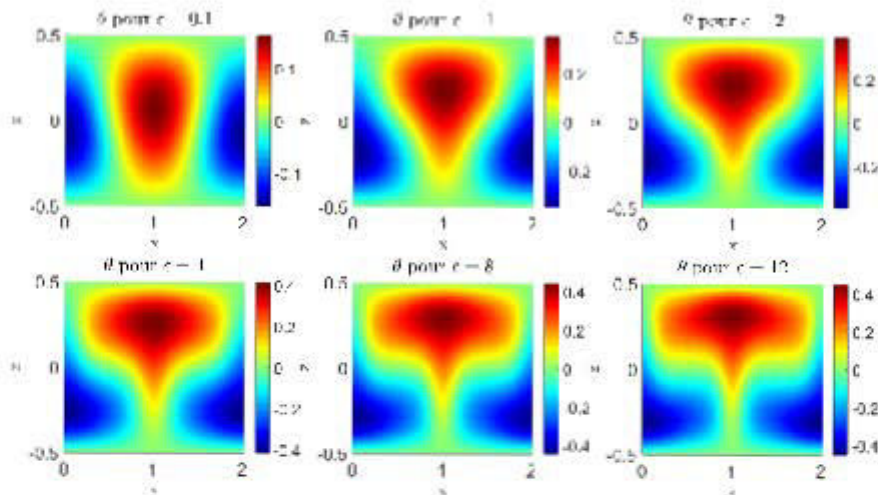


FIGURE 3.10 – Champs de vitesse w pour un fluide Newtonien

La Figure 3.11 montre les évolutions de la composante horizontale u du champ de vitesse avec ϵ . Les zones en rouge indiquent des mouvements du fluide vers la droite alors que les zones en bleu correspondent à des mouvements vers la gauche. Comme le champ w , le champ u varie d'abord fortement à proximité du seuil de la convection puis de façon modérée au fur et à mesure que ϵ augmente.

FIGURE 3.11 – Champs de vitesse u pour un fluide Newtonien

Les évolutions de la perturbation en température θ avec ϵ sont quant à elles données sur la Figure 3.12. Les zones en rouge et en bleu correspondent respectivement à des élévations et à des diminutions de température. On constate que les variations de θ sont plus fortes à proximité du seuil de la convection. A mesure que la convection s'intensifie, les élévations de température se concentrent dans la partie supérieure de la couche de fluide tandis que les diminutions se font à proximité de la plaque inférieure. La modification du champ de température θ tend donc à s'opposer au gradient thermique $\Delta\hat{T}/\hat{d} = (\hat{T}_1 - \hat{T}_2)/\hat{d}$ quand on s'éloigne des conditions critiques : on a donc un phénomène d'homogénéisation de la température dans la couche de fluide.

FIGURE 3.12 – Champs de température θ pour un fluide Newtonien

3.6.5 Influence du nombre de Prandtl

L'influence du nombre de Prandtl Pr sur les échanges de chaleur a été étudiée dans l'intervalle $1 \leq Pr \leq \infty$ pour des écarts relatifs au seuil ϵ compris dans la gamme $0 \leq \epsilon \leq 12$. Si

l'on se réfère au tableau 3.1, 6 modes de Fourier sont suffisants pour garantir la convergence de la méthode. Toutefois, en Newtonien, tous les calculs peuvent être menés en restant dans l'espace de Fourier-Chebyshev ce qui rend la procédure de continuation rapide. Pour cette raison, on a choisi d'utiliser 12 modes de Fourier afin d'avoir les résultats les plus précis possibles. Les évolutions des nombres de Nusselt avec ϵ , issus des différentes simulations, sont présentées sur la Figure 3.13. Cette dernière montre que les courbes $Nu = f(\epsilon)$, obtenues pour différents nombres de Prandtl, sont toutes confondues pour de faibles écarts relatifs au seuil $0 \leq \epsilon \leq 2$: le nombre de Prandtl n'a donc pas d'influence sur les transferts thermiques à proximité du seuil de l'instabilité, du moins pour $Pr \geq 1$. Cela se comprend bien quand on considère les équations descriptives du problème (3.2)-(3.4). En effet, le nombre de Prandtl n'intervient que dans les termes non linéaires d'inertie $\frac{1}{Pr}NI_w$ qui sont négligeables au voisinage du seuil de la convection. Quand on s'éloigne suffisamment des conditions critiques, ces non-linéarités deviennent suffisamment importantes pour influencer les échanges de chaleur et les courbes $Nu = f(\epsilon)$ dépendent du nombre de Prandtl. Cette dépendance s'avère toutefois faible même pour des écarts au seuil importants. Dans la limite des grands nombres de Prandtl, le terme $\frac{1}{Pr}NI_w$ est négligeable, on s'attend donc à ce que les échanges de chaleur soient indépendants du nombre de Prandtl au delà d'une valeur suffisamment grande de ce dernier : c'est effectivement ce que montre la Figure 3.13 où les courbes $Nu = f(\epsilon)$ sont identiques pour $Pr \geq 10$.

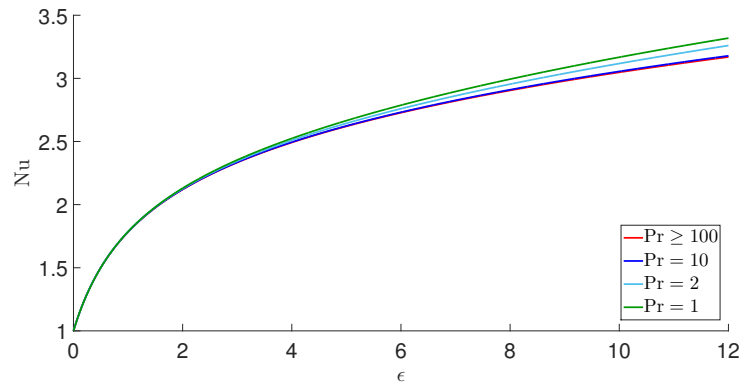


FIGURE 3.13 – Evolution du nombre de Nusselt avec Pr pour un fluide Newtonien

Les résultats obtenus sont très semblables à ceux issus des études numériques et expérimentales présentées dans le paragraphe 3.6.1. Le tableau 3.2 compare les nombres de Nusselt calculés avec notre procédure de continuation à ceux provenant des travaux de F.H. Busse [13], de W.Plows [7] et de H.T. Rossby [14] dans la limite des grands nombres de Prandtl. Notre simulation de ce cas limite a été réalisée avec $Pr = 200$ afin de pouvoir comparer le plus précisément possible nos résultats avec ceux de W.Plows qui avait utilisé cette valeur dans [7]. Rappelons que les résultats de F.H. Busse figurant dans le tableau 3.2 sont obtenus en considérant un nombre de Prandtl infini. Pour des nombres de Rayleigh Ra inférieurs à 5000, ce sont les résultats de F.H. Busse qui sont les plus semblables aux nôtres. En revanche, pour des valeurs plus importantes de Ra , nous nous rapprochons plus

| Ra | Rossby | Plows | Busse | Continuation | Continuation vs Rossby (%) | Continuation vs Busse (%) | Continuation vs Plows (%) |
|-------|--------|-------|-------|--------------|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 2000 | 1.13 | 1.20 | 1.215 | 1.211 | 6.7 | 0.3 | 0.9 |
| 2500 | X | 1.46 | 1.481 | 1.474 | X | 0.5 | 0.9 |
| 3000 | 1.60 | 1.65 | 1.671 | 1.661 | 3.7 | 0.6 | 0.7 |
| 5000 | 2.03 | 2.09 | 2.111 | 2.101 | 3.4 | 0.5 | 0.5 |
| 6000 | 2.15 | 2.23 | X | 2.24 | 4.0 | X | 0.4 |
| 8000 | 2.35 | 2.43 | X | 2.447 | 4.0 | X | 0.7 |
| 10000 | 2.50 | 2.60 | 2.613 | 2.604 | 4.0 | 0.3 | 0.2 |
| 20000 | 2.93 | 3.09 | 3.114 | 3.092 | 5.2 | 0.7 | 0.1 |

TABLE 3.2 – Comparaison des nombres de Nusselt obtenus par différents auteurs dans la limite des grands nombres de Prandtl

| ϵ | Chorin | Plows | Continuation | Continuation vs Chorin (%) | Continuation vs Plows (%) |
|------------|--------|-------|--------------|----------------------------|---------------------------|
| 2 | 2.099 | 2.13 | 2.13 | 1.5 | 0 |
| 4 | 2.478 | 2.53 | 2.524 | 1.8 | 0.2 |
| 6 | 2.734 | 2.79 | 2.788 | 1.9 | 0.1 |
| 8 | 2.936 | 3 | 2.994 | 1.9 | 0.2 |
| 10 | 3.098 | 3.17 | 3.168 | 2.2 | 0.1 |
| 12 | 3.241 | 3.32 | 3.319 | 2.4 | 0 |

TABLE 3.3 – Comparaison des nombres de Nusselt obtenus par différents auteurs pour $Pr = 1$.

des résultats de W. Plows. Enfin, on peut signaler que nos résultats sont en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Rossby [14].

Des comparaisons ont également été réalisées avec les travaux de W. Plows [7] et de A. Chorin [12] pour $Pr = 1$. Les valeurs des nombres de Nusselt obtenues par ces auteurs sont comparées à celles provenant de la procédure de continuation dans le tableau 3.3 pour différents ϵ . Là encore, les écarts entre nos résultats et ceux de ces deux auteurs sont minimales. Toutefois, on peut signaler que nos résultats se rapprochent davantage de ceux de W. Plows qui a repris la démarche de A. Chorin en considérant des maillages plus fins ce qui est censé conduire à des simulations plus précises.

3.7 Résultats pour des fluides rhéofluidifiants

3.7.1 Les principaux travaux existants en non-Newtoniens

A notre connaissance, les premières études numériques concernant la convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides non-Newtoniens remontent aux années 1970 avec les travaux de H. Ozoe, S.T. Churchill [15] et de E.M Parmentier [16]. Ces travaux, reposant sur la méthode des différences finies, se sont focalisés sur l'influence d'un comportement rhéofluidifiant sur les évolutions des transferts de chaleur quand la convection s'intensifie. H. Ozoe et S.T. Churchill ont considéré deux modèles rhéologiques dans leur approche :

le premier est le modèle en loi puissance, aussi appelé modèle de Ostwald-de Waele, et le second est le modèle d'Ellis (cf [17]). Comme le soulignent ces deux auteurs, le modèle en loi puissance a l'avantage d'être simple mais conduit à une viscosité infinie pour un taux de cisaillement nul. C'est cette raison qui les a amenés à considérer également le modèle d'Ellis qui ne présente pas cet inconvénient. Quelque soit le modèle adopté, H. Ozoe et S.T. Churchill ont montré que les échanges de chaleur sont d'autant plus importants que le comportement rhéofluidifiant est marqué.

Ce résultat a été confirmé en 1978 par E.M. Parmentier dans [16]. Cet auteur s'est notamment interrogé sur la possibilité d'établir une corrélation entre les échanges de chaleur et les paramètres rhéologiques m (consistance) et n (indice de structure) d'un fluide décrit par une loi puissance :

$$\mu = m\Gamma^{\frac{n-1}{2}}, \quad (3.68)$$

où Γ désigne le deuxième invariant du tenseur des taux de déformations.

En se basant sur des considérations énergétiques, il a introduit une grandeur appelée « viscosité de Parmentier », notée μ_P , définie comme la moyenne de la viscosité pondérée par Γ dans la couche de fluide Ω :

$$\mu_P = \frac{\int_{\Omega} \mu \Gamma dx dz}{\int_{\Omega} \Gamma dx dz} \quad (3.69)$$

et il a construit un « nombre de Rayleigh de Parmentier Ra_p » :

$$Ra_p = \frac{Ra}{\mu_P}. \quad (3.70)$$

E.M. Parmentier a ensuite montré que $Nu = f(Ra_p)$ était une courbe maîtresse permettant de décrire les évolutions des transferts de chaleur indépendamment des paramètres m et n de la loi puissance (3.68).

D'autres études, plus récentes, se sont quant à elles intéressées à l'influence d'un effet rhéofluidifiant sur les motifs de convection et leurs stabilités à proximité du seuil de la convection. Dans ces travaux, le comportement rhéofluidifiant est décrit par le modèle de Carreau (3.9) introduit dans [18] qui permet d'éviter les singularités à taux de cisaillement nul et qui a l'avantage de reposer sur des considérations physiques et théoriques. Les différentes structures convectives sont étudiées grâce à des approches faiblement non linéaire similaires à celles menées dans les chapitres précédents. Le travail le plus ancien a été réalisé par N.J. Balmforth et A.C. Rust en 2008 dans [19] en considérant des parois libres. Ces auteurs sont parvenus à établir un certain nombre de résultats :

- les conditions critiques (k_c, Ra_c) à partir desquelles se développe la convection sont indépendantes du comportement rhéofluidifiant décrit par le modèle de Carreau,
- pour un effet rhéofluidifiant suffisamment fort, la convection débute à une valeur du nombre de Rayleigh Ra_{sc} inférieure à celle prédite par l'analyse linéaire de stabilité

soit $Ra_{sc} < Ra_c$: la bifurcation de l'état conductif à l'état convectif devient donc sous-critique.

En 2011, B. Albaalbaki et R.E. Khayat se sont plus spécifiquement intéressés à la stabilité des motifs. Dans [20], ils montrent que :

- les rouleaux de convection ne sont stables à proximité du seuil que pour une faible rhéofluidification,
- les hexagones et les carrés sont stables quand le caractère rhéofluidifiant est très prononcé.

Une étude menée en 2015 par M. Bouteraa et al. [1] vient confirmer, nuancer et infirmer certains des résultats établis par [20]. Elle vient notamment conforter le fait que les conditions critiques restent effectivement les mêmes qu'en Newtonien conformément à [19] et [20]. Les calculs de M. Bouteraa et al. effectués à la fois dans le cas de parois rigides et libres indiquent également que la transition d'une bifurcation surcritique à sous-critique survient quand le caractère rhéofluidifiant est suffisamment marqué. Plus précisément, cette transition ne dépend que d'un seul paramètre rhéologique α appelé « degré de rhéofluidification » et défini par :

$$\alpha = \frac{1 - n_c}{2} \lambda^2. \quad (3.71)$$

Pour des nombres de Prandtl $Pr \geq 1$ et des parois rigides, il est montré que la bifurcation est :

- surcritique si $\alpha \leq \alpha_c = 2.15 \times 10^{-4}$,
- sous-critique si $\alpha > \alpha_c = 2.15 \times 10^{-4}$.

Dans le cas de parois libres, M. Bouteraa et al. trouvent que la transition d'une bifurcation surcritique à sous-critique a lieu pour $\alpha_c = 1.025 \times 10^{-4}$ ce qui est en accord avec la valeur trouvée par N.J. Balmforth et A.C. Rust dans [19]. En revanche, elle ne correspond pas à celle obtenue par B. Albaalbaki et R.E. Khayat dans [20] qui est de $\alpha_c^{AK} = 7 \times 10^{-4}$. Les trois études s'accordent donc sur l'existence d'une bifurcation sous-critique pour un caractère rhéofluidifiant suffisamment marqué mais s'opposent quant à la valeur de α_c nécessaire.

En ce qui concerne les motifs de convection, M. Bouteraa et al. montrent que seuls les rouleaux sont stables à proximité du seuil de la convection et ce quelque soit la rhéologie du fluide, infirmant ainsi les résultats de B. Albaalbaki et R.E. Khayat.

Récemment, des travaux numériques ont été menés afin de suivre la branche stable de solution sous-critique mise en évidence dans [20] et [1] lorsque les effets rhéofluidifiants sont suffisamment importants. Une première étude a été réalisée par O. Benouared, M. Mahmoud et N.A. Messaoudene en 2014 [21]. Ces auteurs ont considéré un fluide rhéofluidifiant confiné dans une cavité rectangulaire. La rhéologie a été décrite en utilisant le modèle de Carreau-Yasuda (cf [17]) :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{1 - \mu_\infty} = (1 + (\lambda\sqrt{\Gamma})^a)^{\frac{n_c - 1}{a}}, \quad (3.72)$$

qui est une généralisation du modèle de Carreau (3.9). Les caractéristiques de l'écoulement ont été calculées à l'aide de la méthode des différences finies en considérant différents types de conditions limites (température imposée, flux imposé, parois rigides ou libres) et différents confinements. Quelle que soit la configuration envisagée, O. Benouared, M. Mahmoud et N.A. Messaoudene montrent que le nombre de Rayleigh sous-critique Ra_{sc} à partir duquel démarre la convection diminue lorsque les effets rhéofluidifiants s'intensifient (quand n_c diminue ou λ augmente dans la loi (3.72)).

Une seconde étude [22] réalisée par M. Jenny, E. Plaut et A. Briard en 2015 vient confirmer ce résultat. Les équations (3.2)-(3.12) y sont simulées à l'aide du logiciel Freefem++, basé sur la méthode des éléments finis. Ces auteurs ont travaillé dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$ où le modèle de Carreau(3.9) approche la loi puissance (3.68) avec $m = \lambda^{n-1}$. Ils ont confirmé que, dans cette limite, la courbe $Nu = f(Ra_p)$ obtenue par E.M. Parmentier pour une loi puissance était bien une courbe maîtresse permettant de caractériser les transferts de chaleur. Le principal apport de leur travail réside dans l'établissement de corrélations permettant de déterminer le nombre de Rayleigh sous-critique Ra_{sc} ainsi que l'évolution du nombre de Nusselt Nu en fonction des paramètres rhéologiques λ et n_c du modèle de Carreau.

Les travaux de Benouared et al. [21] et de Jenny et al.[22] se sont concentrés sur la bifurcation sous-critique qui survenait pour de forts effets rhéofluidifiants : en conséquence, la gamme de nombres de Rayleigh explorée est relativement restreinte ($0 \leq Ra \leq 10000$ dans [21] et $0 \leq Ra \leq 5000$ dans [22]). Notre démarche vise davantage à étudier l'influence d'un effet rhéofluidifiant sur le devenir des rouleaux de convection quand on s'éloigne des conditions critiques : on cherche donc à mener la procédure de continuation dans une plage de nombres de Rayleigh plus étendue que dans [21] et [22].

3.7.2 Convergence de la méthode de continuation pour un fluide rhéofluidifiant

La principale difficulté dans l'application de la procédure de continuation à un fluide rhéofluidifiant provient de la projection des termes non linéaires visqueux dans l'espace de Fourier Chebyshev suivant la procédure décrite dans 3.3.4. Comme mentionné précédemment, cette projection nécessite d'abord l'évaluation des termes visqueux sur une grille de l'espace physique constituée de M_d points de Gauss-Lobatto dans la direction verticale et de N_d points équirépartis dans la direction horizontale. En fonction de la finesse du maillage, la projection sera plus ou moins précise : une série de simulations a donc été menée afin de déterminer les nombres de points M_d et N_d nécessaires à une décomposition rigoureuse dans l'espace de Fourier Chebyshev. Ces simulations ont été menées en considérant un fluide rhéofluidifiant pour lequel $n_c = 0.5$ et $\lambda = 0.02$ et en utilisant 7 modes de Fourier ($N = 6$). Pour raffiner le maillage, on a choisi d'augmenter uniquement N_d ; le nombre de points de Gauss-Lobatto dans la direction verticale a été fixé à $M_d = 42$.

Les évolutions des nombres de Nusselt avec l'écart relatif au seuil ϵ sont représentées sur la Figure 3.14 pour différentes valeurs de N_d . Pour des écarts relatifs au seuil modérés $0 \leq \epsilon \leq 4$, toutes les courbes $Nu = f(\epsilon)$ sont confondues quel que soit le nombre de points dans la direction horizontale. Au fur et à mesure que l'écart relatif au seuil augmente, on observe qu'il faut considérer davantage de points N_d pour converger. En outre, une fois le nombre de points N_d devenu insuffisant, la divergence de la procédure de continuation est rapide et il devient vite impossible de prolonger la branche de solutions. La Figure 3.14 montre que pour garantir une décomposition précise des termes visqueux dans l'espace de Fourier Chebyshev, il faut considérer $N_d = 500$ points dans la direction horizontale pour $0 \leq \epsilon \leq 12$.

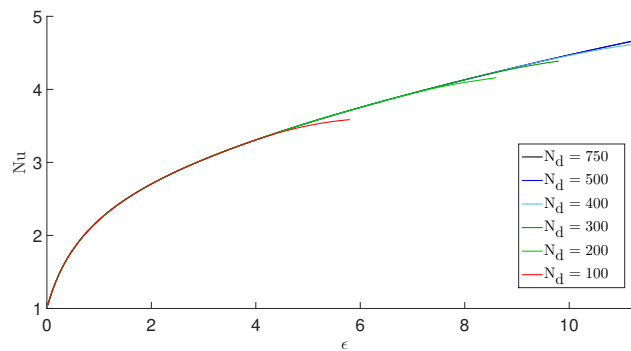


FIGURE 3.14 – Convergence nombre de points N_d pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

La convergence de la procédure de continuation avec le nombre N de modes de Fourier a ensuite été étudiée de manière analogue au cas Newtonien. Afin d'éviter toute imprécision lors de la projection des termes visqueux dans l'espace de Fourier Chebyshev, on a choisi $M_d = 42$ et $N_d = 1000$ conformément à la Figure 3.14. Les évolutions du nombre de Nusselt avec l'écart relatif au seuil ϵ déterminées en utilisant différentes valeurs de N sont données sur la Figure 3.15. Le tableau 3.4 recense les valeurs de Nusselt correspondantes. Comme dans le cas Newtonien, on constate que plus l'écart relatif au seuil est important et plus il faut considérer un nombre important de modes de Fourier pour avoir convergence de la procédure de continuation. Par ailleurs, le nombre de modes requis pour garantir la convergence est d'autant plus important que le caractère rhéofluidifiant est marqué : dans l'intervalle $0 \leq \epsilon \leq 12$, 6 modes de Fourier sont suffisants en Newtonien (cf 3.6.2) alors que dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant avec $n_c = 0.5$ et $\lambda = 0.02$, 10 modes doivent être utilisés.

3.7.3 Évolution des différents modes de Fourier avec l'écart au seuil de la convection

Dans ce paragraphe, les variations des différents modes de Fourier avec l'écart relatif au seuil ϵ sont données dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant tel que $n_c = 0.5$ et $\lambda = 0.02$. Les simulations ont été menées dans la limite des grands nombres de Prandtl $Pr \geq 10$ (cf

| ϵ | N = 3 | N = 4 | N = 5 | N = 6 | N = 7 | N = 8 | N = 9 | N \geq 11 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| 1 | 2.218 | 2.213 | 2.215 | 2.214 | 2.214 | 2.214 | 2.214 | 2.214 |
| 2 | 2.732 | 2.692 | 2.708 | 2.706 | 2.707 | 2.706 | 2.707 | 2.707 |
| 3 | 3.112 | 2.992 | 3.051 | 3.039 | 3.044 | 3.043 | 3.044 | 3.044 |
| 4 | 3.448 | 3.209 | 3.343 | 3.308 | 3.326 | 3.322 | 3.324 | 3.324 |
| 6 | 4.039 | 3.507 | 3.873 | 3.753 | 3.827 | 3.803 | 3.816 | 3.814 |
| 8 | 4.534 | 3.713 | 4.369 | 4.131 | 4.293 | 4.234 | 4.27 | 4.264 |
| 10 | X | X | 4.8 | 4.472 | 4.74 | 4.636 | 4.709 | 4.697 |
| 12 | X | X | X | 4.784 | 5.162 | 5.008 | 5.113 | 5.102 |

TABLE 3.4 – Comparaison des nombres de Nusselt obtenus pour $Pr = 10$ avec différents nombres N de modes de Fourier pour $n_c = 0.5$ et $\lambda = 0.02$. A ϵ donné, les valeurs en **bleu** correspondent à des écarts relatifs avec la valeur obtenue pour $N \geq 11$ inférieurs à 1%. Celles en **rouge** correspondent à des écarts supérieurs à 1%.

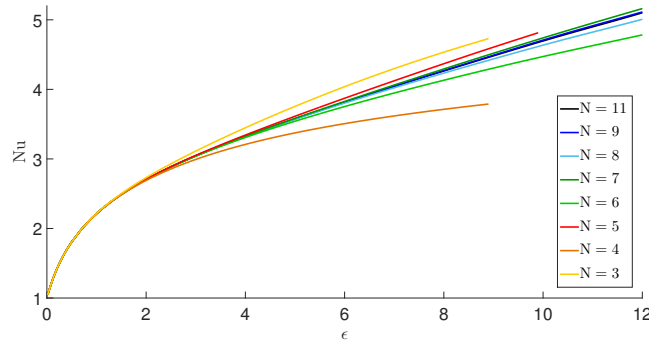


FIGURE 3.15 – Convergence nombre de modes pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

paragraphe 3.6.5) et dans l'intervalle $0 \leq \epsilon \leq 4$ où 7 modes de Fourier ($N=6$) sont suffisants pour décrire les champs de vitesse et de température d'après le paragraphe 3.7.2. Comme dans le cas Newtonien, on caractérise la contribution des différents modes des champs de vitesse et de température en utilisant les énergies $E(w_n)$, $E(\theta_n)$ et les énergies relatives $E_r(w_n)$, $E_r(\theta_n)$ définies par les équations (3.66) et (3.67).

Les modes associés à la composante verticale de la vitesse w sont représentés sur la Figure 3.16 pour différentes valeurs de ϵ . Les énergies correspondantes sont quant à elles représentées sur la Figure 3.19. Qualitativement, on observe que les évolutions des différents modes avec ϵ sont analogues à celles obtenues dans le cas Newtonien :

- le mode w_0 est nul aux erreurs numériques près,
- l'amplitude et l'énergie de chaque mode augmentent avec l'écart relatif au seuil,
- le mode fondamental w_1 a la plus grande amplitude et contient l'essentiel de l'énergie du champ de vitesse,

On peut observer que l'effet rhéofluidifiant provoque une augmentation des amplitudes des différents modes associés à w : par exemple, l'amplitude du mode fondamental w_1 à $\epsilon = 3.5$ est deux fois plus grande pour un fluide rhéofluidifiant avec $n_c = 0.5$ et $\lambda = 0.02$ qu'en Newtonien. Toutefois, le comportement rhéologique du fluide n'affecte pas de la même

manière les différents modes dans l'intervalle $0 \leq \epsilon \leq 4$: le fondamental est très sensible à la rhéofluidification quel que soit ϵ ; le premier harmonique w_2 diffère significativement du cas Newtonien uniquement pour de faibles écarts relatifs au seuil $0 \leq \epsilon \leq 1.5$; les autres amplitudes augmentent quant à elles très fortement avec le caractère rhéofluidifiant et ce d'autant plus que les ordres des modes associés sont grands. Comme le montre la Figure 3.17, les énergies associées aux modes w_n où $n = 0 \dots N$ sont bien plus fortes dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant.

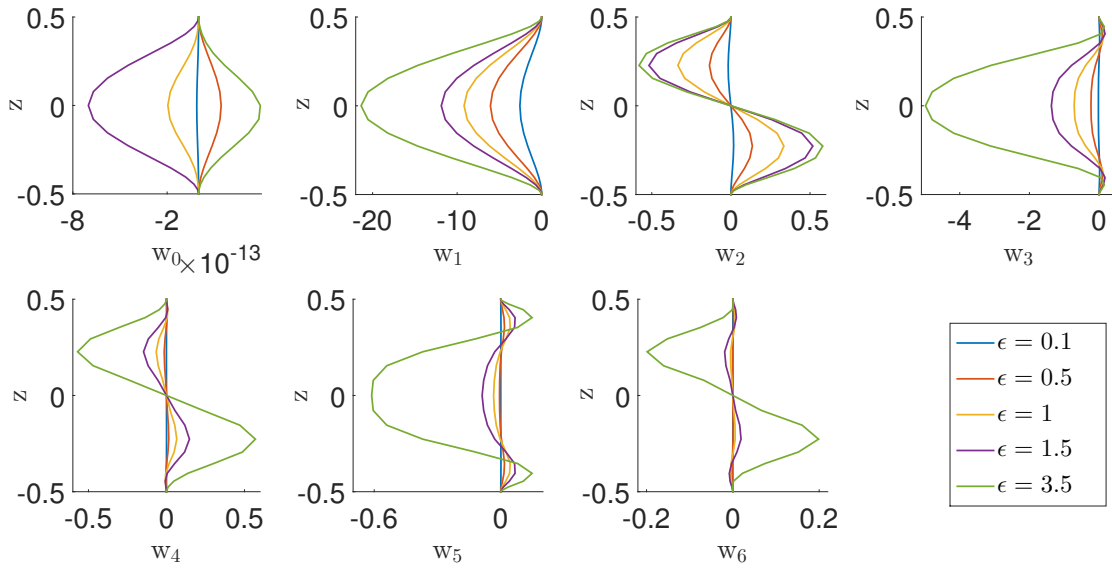


FIGURE 3.16 – Modes de Fourier associés à w pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

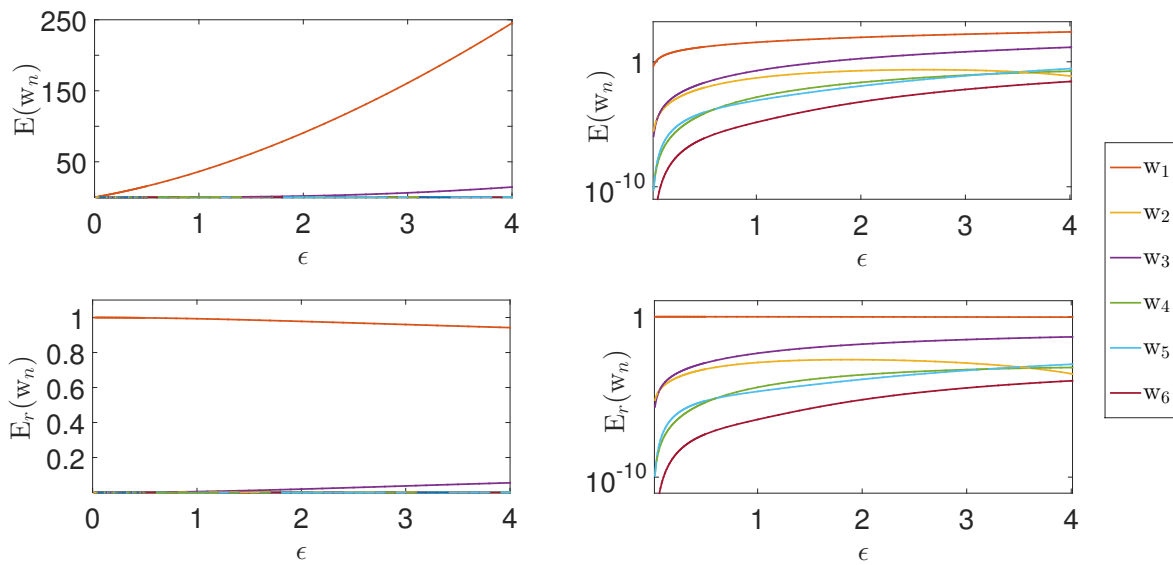


FIGURE 3.17 – Répartition de l'énergie des modes du champ de vitesse w pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

Les modes θ_n du champ de température ainsi que les énergies $E(\theta_n)$ et $E_r(\theta_n)$ correspondantes sont représentées sur les Figures 3.18 et 3.19. A nouveau, les variations des différentes grandeurs sont similaires à celles observées dans le cas Newtonien :

- le mode fondamental θ_1 sature à partir d'un écart relatif au seuil suffisamment grand,
- le mode θ_0 devient dominant une fois la saturation de θ_1 amorcée,
- les énergies des autres modes augmentent avec ϵ mais ne contribuent pas significativement à l'énergie totale du champ de température.

On observe notamment que le comportement rhéofluidifiant cause la saturation du mode fondamental θ_1 pour des écarts relatifs au seuil moindres que dans le cas Newtonien. Le Figure 3.18 montre ainsi que l'énergie $E(\theta_1)$ associée au fondamental devient inférieure à celle du mode θ_0 pour $\epsilon = 0.6$ alors que cette inversion avait lieu en Newtonien à partir de $\epsilon = 1.1$ d'après la Figure (3.9). Le mode θ_1 saturé en Newtonien à $\epsilon = 6$ est par ailleurs extrêmement semblable à celui obtenu dans le cas rhéofluidifiant à $\epsilon = 3.5$. Comme pour le champ de vitesse w , la rhéofluidification cause un accroissement important des amplitudes des modes d'ordre élevé.

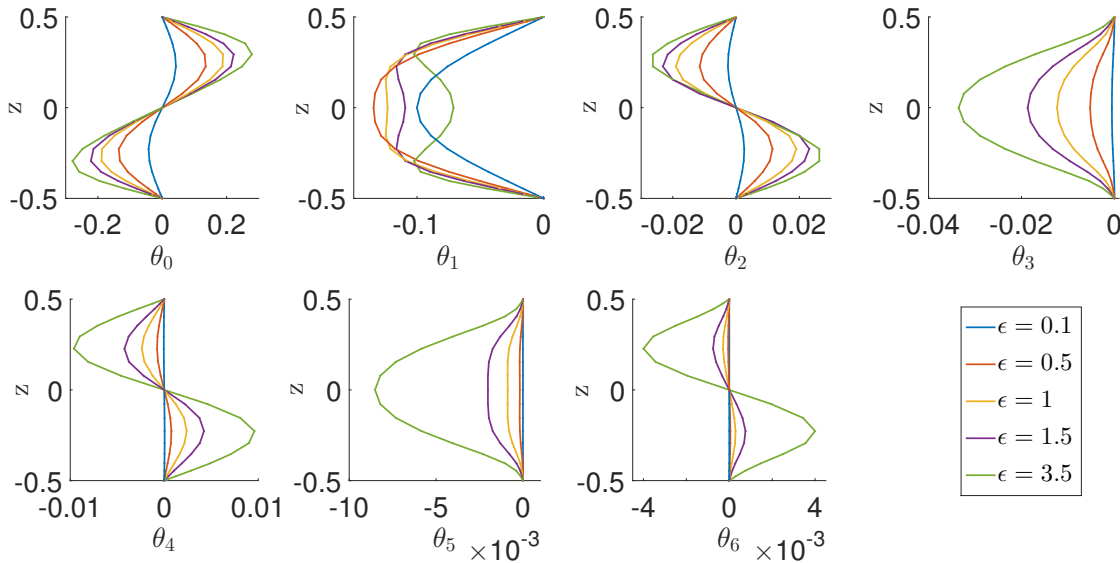


FIGURE 3.18 – Modes de Fourier associés à θ pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

3.7.4 Évolution des champs de vitesse, de température et de viscosité avec l'écart au seuil de la convection

Comme précédemment, on considère un fluide rhéofluidifiant décrit par le modèle de Carreau (3.9) avec $n_c = 0.5$ et $\lambda = 0.02$ et on se place dans la limite des grands nombres de Prandtl $Pr \geq 10$ mise en exergue dans 3.6.5. On présente ici les évolutions des champs de vitesse et de température dans l'intervalle $0 \leq \epsilon \leq 12$ obtenues en appliquant la procédure de continuation. Conformément à 3.7.2, 12 modes de Fourier ($N = 11$) ont été utilisés pour

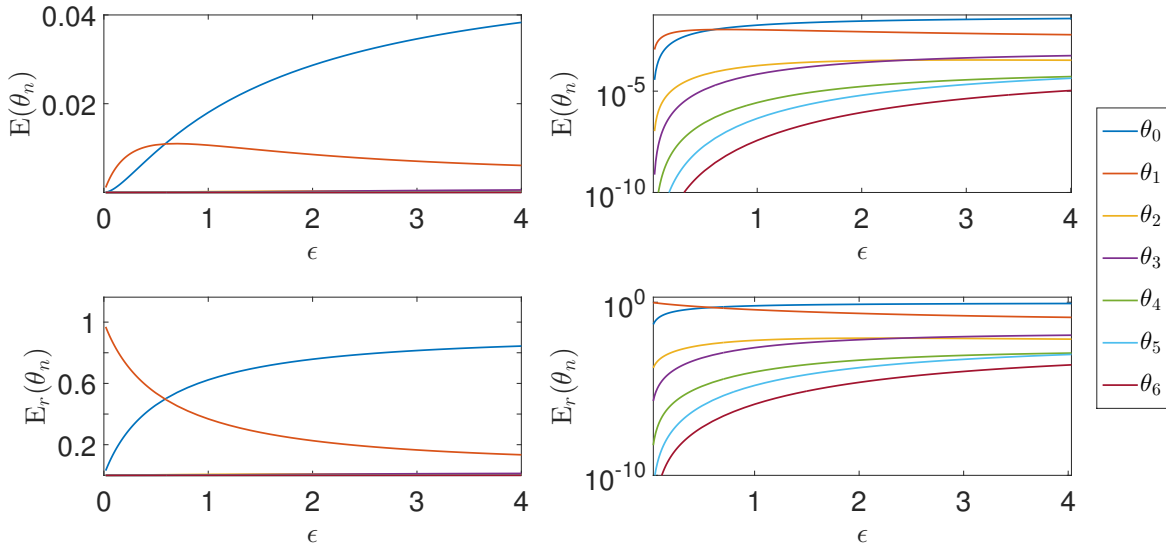
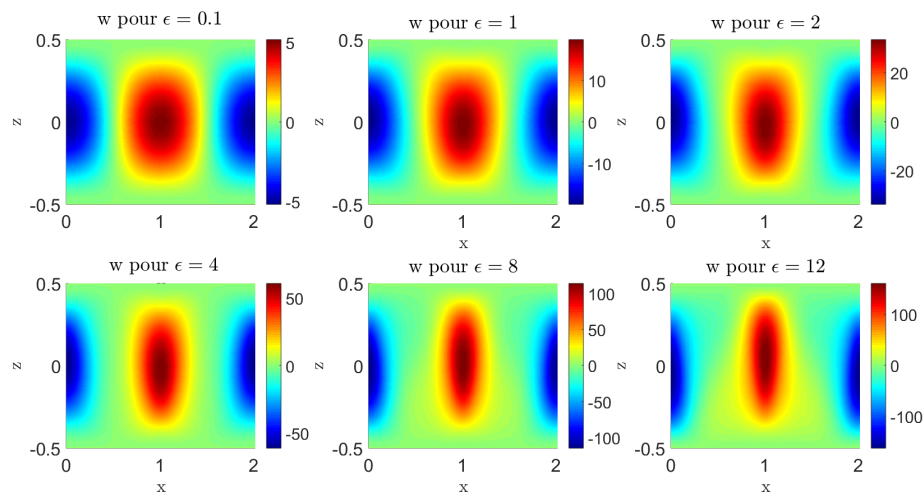
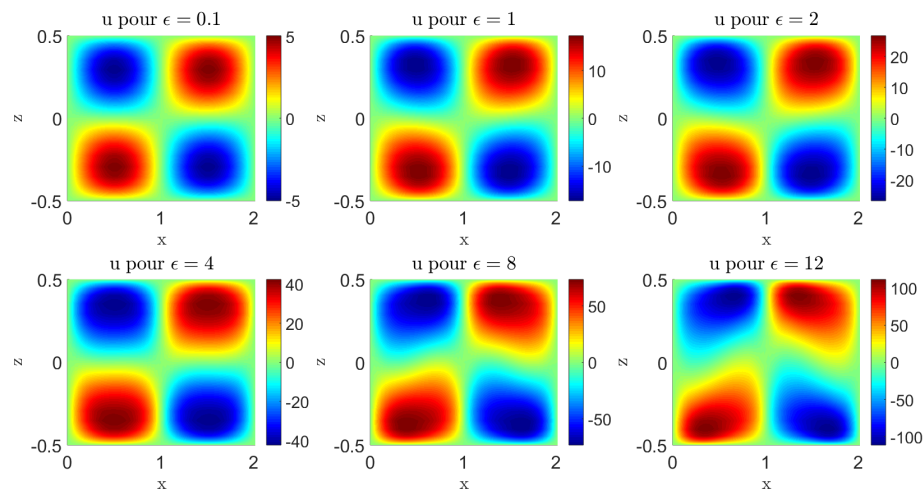


FIGURE 3.19 – Répartition de l'énergie des modes du champ de température θ pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

garantir la convergence de la méthode et une grille composée de $M_d = 42$ points verticaux de Gauss-Lobatto et $N_d = 1000$ points horizontaux uniformément répartis a été employée lors de la projection des termes non linéaires visqueux.

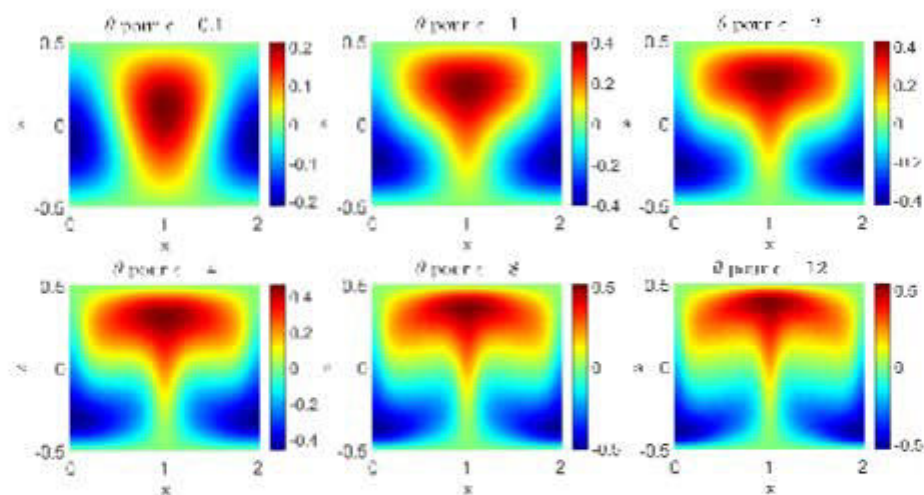
Sur la Figure 3.20 est représentée la composante verticale w du champ de vitesse pour différents écarts relatifs ϵ au seuil de la convection. Comme dans le cas Newtonien, les vitesses de montée et de descente augmentent d'abord fortement puis modérément au fur et à mesure que la convection gagne en intensité. On observe à nouveau l'apparition d'un effet de confinement lorsqu'on s'éloigne des conditions critiques. La composante horizontale u du champ de vitesse augmente en valeur absolue avec l'écart au seuil comme le montre la Figure 3.21. La comparaison des Figures 3.10, 3.11 3.20 et 3.21 montre que les composantes w et u du champ de vitesse calculées dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant sont supérieures à celles déterminées pour un fluide Newtonien. Pour un même écart relatif au seuil, la convection est donc plus forte quand le fluide présente un effet rhéofluidifiant. Physiquement, l'influence de la rhéologie est cohérente : la rhéofluidification provoque une réduction des frottements visqueux qui s'opposent à la mise en mouvement du fluide ce qui conduit donc à des mouvements de fluide plus importants pour une même valeur de ϵ . On peut également relever le fait que l'effet de confinement des montées et descentes de fluide est plus prononcé et intervient à de plus faibles écarts relatifs au seuil dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant.

La Figure 3.22 présente la perturbation en température θ pour différents écarts relatifs au seuil ϵ . Avec l'accroissement des effets convectifs, les élévations et réductions de température se concentrent respectivement dans les parties supérieure et inférieure de la couche de fluide, s'opposant ainsi au gradient thermique $\Delta\hat{T}/\hat{d} = (\hat{T}_1 - \hat{T}_2)/\hat{d}$ conductif comme dans le cas Newtonien. La rhéofluidification favorisant la convection,

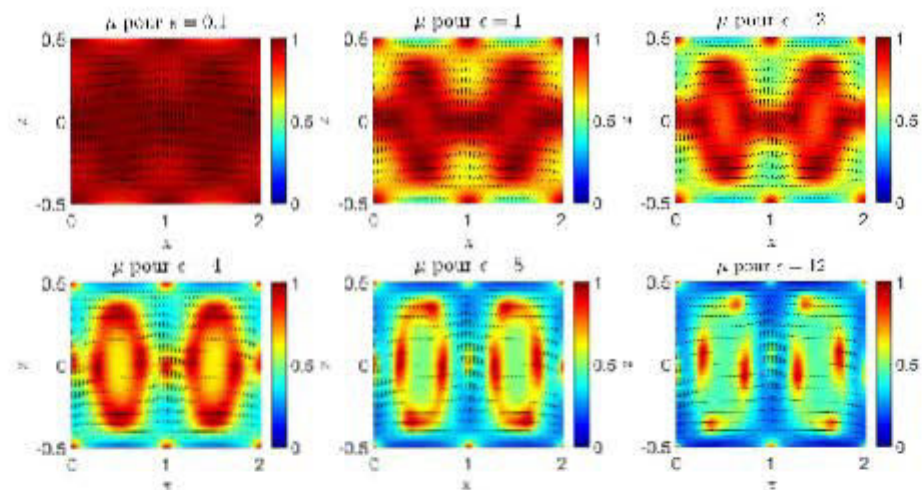
FIGURE 3.20 – Champs de vitesse w pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$ FIGURE 3.21 – Champs de vitesse u pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

cette répartition des augmentations et diminutions de température dans la couche de fluide est, en conséquence, plus marquée que dans le cas Newtonien pour une valeur de ϵ donnée. Le comportement rhéofluidifiant tend ainsi à homogénéiser davantage le champ de température dans la couche de fluide.

Les évolutions du champ de viscosité avec l'écart relatif au seuil sont quant à elles données sur la Figure 3.23. Quand la convection s'intensifie, les cisaillements sont plus importants et on observe alors des diminutions de viscosité induites par le comportement rhéofluidifiant. Le champ de viscosité présente une organisation très spécifique. On distingue ainsi des régions de très fortes viscosités en forme d'« anneaux ». Le domaine à l'extérieur de ces dernières est le siège d'importantes contraintes de cisaillement et la viscosité y est en conséquence très faible. Ce sont dans ces zones qu'ont principalement lieu les montées et descentes de fluide. A l'intérieur des « anneaux » de forte viscosité se

FIGURE 3.22 – Champs de température θ pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

trouvent d'autres régions où les contraintes de cisaillement sont plus faibles et la viscosité plus forte que dans le domaine extérieur : le fluide y subit une circulation très restreinte.

FIGURE 3.23 – Champs de viscosité μ pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 0.02$

3.7.5 Influence de l'indice de rhéofluidification n_c sur les échanges de chaleur

Dans cette section, on s'intéresse à l'influence du paramètre n_c de la loi de Carreau (3.9) sur les échanges de chaleur au sein de la couche de fluide. Plusieurs simulations ont donc été menées en faisant varier n_c et en fixant $\lambda = 0.02$. Afin de garantir la précision et la convergence de la procédure de continuation, on a utilisé comme précédemment $N = 11$, $M_d = 42$ et $N_d = 1000$. L'ampleur des effets rhéofluidifiants mis en jeu a été quantifiée par deux grandeurs représentatives :

- la viscosité de Parmentier μ_P déjà introduite dans 3.7.1 et définie par l'éq. (3.69).

— la viscosité moyenne μ_M aussi utilisée dans [22] et définie par :

$$\mu_M = \frac{\int_{\Omega} \mu dx dz}{\int_{\Omega} dx dz} \quad (3.73)$$

où Ω désigne le domaine occupé par la couche de fluide.

La Figure 3.24 montre les évolutions du nombre de Nusselt Nu , quantifiant les échanges de chaleur, avec l'écart relatif au seuil ϵ pour différentes valeurs de n_c .

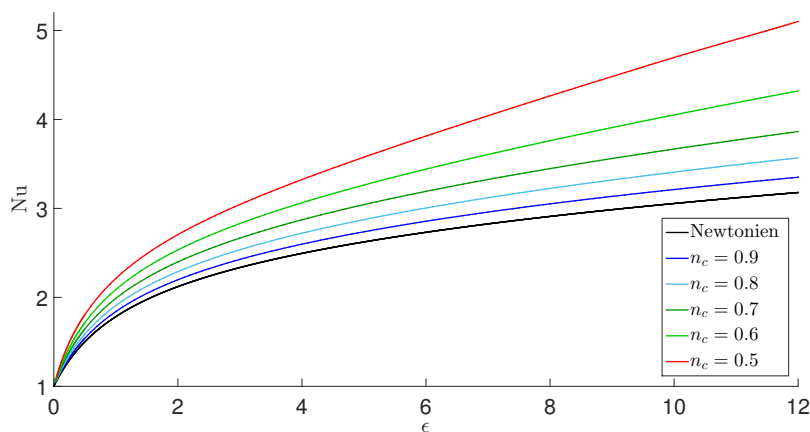


FIGURE 3.24 – Influence du paramètre n_c sur les échanges de chaleur.

Les variations des viscosités de Parmentier (3.69) et moyenne (3.73) correspondantes sont données sur la Figure 3.25.

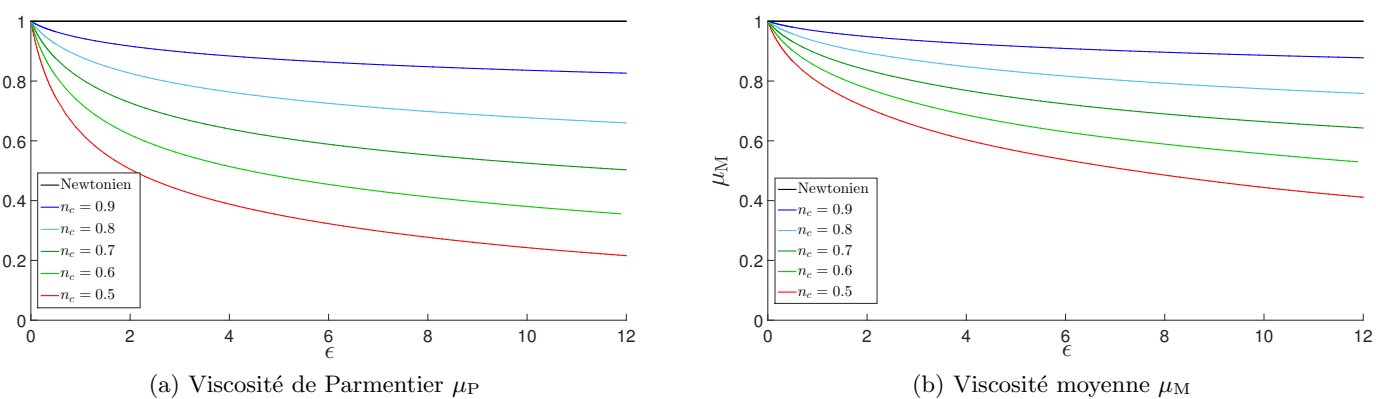


FIGURE 3.25 – Évolution des viscosités (a) μ_P et (b) μ_M avec l'écart relatif au seuil pour différentes valeurs de n_c

Nos simulations démontrent que plus l'indice de rhéofluidification n_c est faible, plus le nombre de Nusselt est grand pour une valeur de ϵ donnée. Ce résultat a déjà été observé sur des gammes d'écart relatif au seuil plus limitées par [21] et [22]. Signalons que pour

les mêmes valeurs de n_c et λ , en l'occurrence $n_c = 0.5$ et $\lambda = 0.02$, notre courbe $Nu = f(\epsilon)$ est identique à celle obtenue par Jenny et al. dans [22] dans leur gamme de ϵ . Cette influence de n_c sur les échanges de chaleur se justifie physiquement. Quand n_c diminue, les effets rhéofluidifiants deviennent plus importants et la viscosité globale est réduite : la Figure 3.24 montre ainsi que μ_P et μ_M décroissent d'autant plus rapidement avec l'écart relatif au seuil que n_c est faible. Pour de faibles valeurs de n_c , les frottements visqueux sont donc moindres et en conséquence, la convection et les échanges de chaleur induits par cette dernière sont supérieurs.

Dans [22], M.Jenny, E.Plaut et A.Briard ont montré que dans la limite des grandes valeurs de λ , les échanges de chaleur pouvaient être caractérisés indépendamment des paramètres rhéologiques à l'aide de la courbe maîtresse $Nu = f(\epsilon_P)$, la grandeur ϵ_P étant définie comme le rapport du nombre de Rayleigh réduit ϵ et de la viscosité de Parmentier μ_P introduite dans [16]. Il paraît légitime de se demander si cette courbe $Nu = f(\epsilon_P)$ reste une courbe maîtresse pour des valeurs plus raisonnables de λ . Pour répondre à cette interrogation, les courbes $Nu = f(\epsilon_P)$ ont ainsi été déterminées pour $\lambda = 0.02$ et pour les différentes valeurs de n_c précédentes. Nos simulations montrent que ces courbes, représentées sur la Figure 3.26-(a) ne se superposent pas, démontrant donc l'impossibilité d'obtenir une courbe maîtresse en utilisant la viscosité de Parmentier dans le cas des faibles valeurs de λ .

La viscosité moyenne μ_M a également été envisagée afin d'établir une corrélation. La courbe $Nu = f(\epsilon_M)$ où $\epsilon_M = \epsilon/\mu_M$ a donc été construite pour les différentes valeurs de n_c : là encore, les différentes courbes représentées sur la Figure 3.26-(b) ne coïncident pas. Signalons qu'on constate que les courbes s'écartent davantage lorsque n_c diminue.

Pour des valeurs raisonnables de λ , il semblerait donc qu'il n'existe pas de viscosité de référence permettant l'obtention d'une courbe maîtresse.

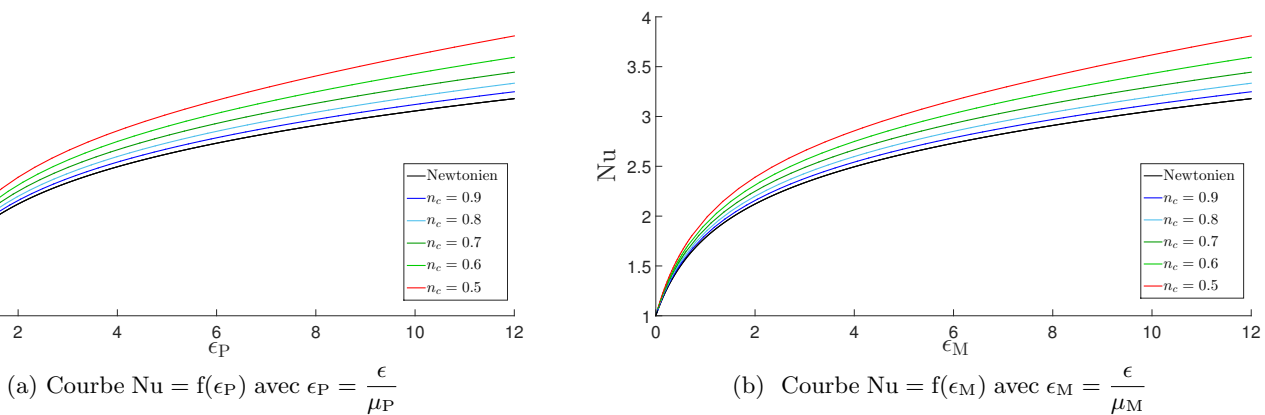


FIGURE 3.26 – Tentatives d'obtention d'une courbe maîtresse en utilisant les viscosités μ_P et μ_M .

3.7.6 Influence du paramètre λ sur les échanges de chaleur et la nature de la bifurcation

Plusieurs simulations ont été menées pour différentes valeurs du paramètre λ du modèle de Carreau afin d'étudier son influence sur la convection thermique (le coefficient n_c a été fixé à 0.5). Les résultats en terme de variations du nombre de Nusselt avec l'écart relatif au seuil ϵ sont présentés sur la Figure 3.27. Quand λ augmente, le caractère rhéofluidifiant est plus marqué ce qui conduit à des échanges de chaleur plus importants en accord avec le paragraphe 3.7.5. Pour des valeurs suffisamment grandes de λ , on constate l'existence de la convection pour des valeurs négatives de l'écart relatif au seuil : la bifurcation de l'état conductif à l'état convectif devient donc sous-critique en augmentant λ . Par ailleurs, les valeurs de ϵ à partir desquelles naissent ces bifurcations sous-critiques sont d'autant plus faibles que λ est grand, résultat qui a déjà été observé par [21] et [22]. La courbe $Nu = f(\epsilon)$ à partir de laquelle on observe une bifurcation sous-critique est obtenue pour $\lambda = 0.03$ ce qui correspond à un degré de rhéofluidification $\alpha_c = 2.25 \times 10^{-4}$. Cette valeur est très proche de celle obtenue théoriquement par Bouteraa et al [1] grâce à une analyse faiblement non linéaire et qui est de $\alpha_c = 2.15 \times 10^{-4}$. Signalons que dans son état actuel, le code mis en œuvre ne permet pas de franchir le point de retournement malgré la continuation par pseudo longueur d'arc : cela est probablement dû au fait que la branche devienne instable après ce point.

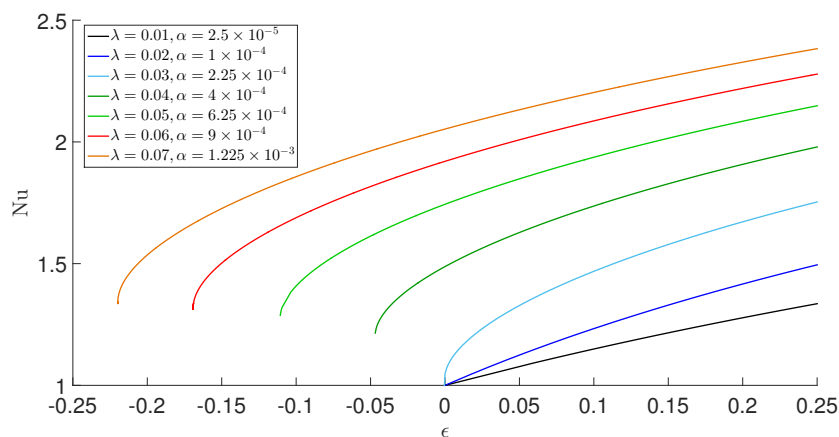


FIGURE 3.27 – Influence du paramètre λ sur les échanges de chaleur.

3.8 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, une procédure de continuation a été mise en place afin de déterminer des branches de solutions stationnaires en rouleaux apparaissant dans la convection de Rayleigh-Bénard. Afin de tester sa validité, la méthode a d'abord été utilisée en considérant un fluide Newtonien. Les résultats obtenus se sont avérés en excellent accord avec plusieurs articles [12], [14], [7], [13].

Le code a ensuite été utilisé dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant. Là encore, on est parvenu à retrouver les principaux résultats de la littérature [21], [22] :

- en diminuant le paramètre n_c ou en augmentant le paramètre λ du modèle de Carreau, les effets rhéofluidifiants sont plus importants ce qui réduit les frottements visqueux et renforce en conséquence la convection et les échanges de chaleur induits par cette dernière.
- quand le caractère rhéofluidifiant est suffisamment prononcé, la bifurcation de l'état conductif à l'état convectif devient sous critique.

Nos travaux se distinguent de ceux de Benouared et al. [21] et de Jenny et al. [22] parce qu'ils font intervenir des valeurs de λ plus faibles et plus couramment rencontrées et que la gamme d'écart relatif au seuil explorée est beaucoup plus large.

Plusieurs perspectives sont possibles à la suite de ce travail. La première serait de déterminer les branches instables de la bifurcation sous-critique observée dans le cas de forts effets rhéofluidifiants. La méthode de continuation permettrait alors d'obtenir l'intégralité des branches. La deuxième serait d'étudier la stabilité des rouleaux de convection qui se développent vis à vis de perturbations tridimensionnelles. C'est d'ailleurs l'objectif principal de cette étude. En Newtonien, ce travail a déjà été réalisé dans [13] : un diagramme appelé « ballon de Busse », en hommage à son créateur, représentant le domaine de stabilité des rouleaux dans le plan (k, Ra) a ainsi été établi. Nous souhaitons examiner l'influence du caractère rhéofluidifiant sur la gamme des nombres d'ondes stables et les mécanismes d'instabilité qui délimitent les frontières du domaine de stabilité. A notre connaissance, l'impact de la rhéologie sur la stabilité des rouleaux loin du seuil n'a jamais été considéré.

Enfin, on pourrait étendre la procédure de continuation à d'autres motifs de convection comme les hexagones qui se développent quand on considère des fluides thermodépendants. Pour de tels fluides, la théorie faiblement non linéaire classique prévoit l'existence d'hexagones uniquement à proximité du seuil de la convection, ces derniers laissant place à des rouleaux quand la convection gagne en intensité. Toutefois, des travaux expérimentaux [23], [24] rapportent la réapparition d'hexagones pour des écarts relatifs au seuil suffisamment importants : on parle d'« hexagones ré-entrants ». La seule étude théorique justifiant ce phénomène a été menée par Madruga et al. dans [25] : ces auteurs ont montré qu'une analyse faiblement non linéaire permettait de mettre en évidence des « hexagones ré-entrants » à condition de considérer un fluide dont les propriétés thermophysiques varient explicitement avec l'écart relatif au seuil. Cette approche apporte une justification

formelle : comme toute analyse faiblement non linéaire, elle n'est valable qu'à proximité des conditions critiques alors que les « hexagones ré-entrants » se manifestent loin de ces dernières. Il paraît légitime de penser qu'une approche fortement non linéaire comme celle présentée dans ce chapitre serait plus adaptée pour étudier ce phénomène.

Bibliographie

- [1] M. Bouteraa, C. Nouar, E. Plaut, C. Metivier, and Kalck A. Weakly nonlinear analysis of Rayleigh-Bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection. *J. Fluid Mech.* 767, pages 696–734, March 2015.
- [2] L.N. Trefethen. *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, 2000.
- [3] F. Jędrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques*. Springer, 2005.
- [4] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications, 2000.
- [5] A. Chekila. *Analyse non linéaire de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide rhéofluidifiant*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2014.
- [6] B. Fornberg. *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, 1998.
- [7] W. Plows. Some numerical results for two-dimensional steady laminar Bénard convection. *Phys. Fluids* 11, pages 1593–1599, August 1968.
- [8] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer, 2010.
- [9] H.B. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. *Applications of Bifurcation Theory*, pages 359–384, 1977.
- [10] N. Roland. *Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2010.
- [11] J. Rappaz and M. Picasso. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.
- [12] A.J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J Comput Phys* 135, pages 118–125, August 1997.
- [13] F.H. Busse. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. Math. Phys.* 46, pages 140–150, 1967.
- [14] H.T. Rossby. *An experimental study of Bénard convection with and without rotation*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1966.
- [15] H. Ozoe and S.W. Churchill. Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-de Waele and Ellis fluids : the development of a numerical solution. *AIChE J.* 18, pages 1196–1207, 1972.
- [16] E.M. Parmentier. A study of thermal convection in non-Newtonian fluids. *J. Fluid Mech.* 84, pages 1–11, 1978.

- [17] B.R. Bird, R.C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids*. Wiley-Interscience, 1987.
- [18] J.P. Carreau. Rheological equations from molecular network theories. *J. Rheol.* 16, pages 99–127, 1972.
- [19] N. J. Balmforth and A.C. Rust. Weakly nonlinear viscoplastic convection. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 158, pages 36–45, 2009.
- [20] B. Albaalbaki and R. Khayat. Pattern selection in the thermal convection of non-newtonian fluids. *J. Fluid Mech.* 668, pages 500–550, 2011.
- [21] O. Benouared, M. Mamou, and N.A. Messaoudene. Numerical nonlinear analysis of subcritical rayleigh-Bénard convection in a horizontal confined enclosure filled with non-newtonian fluids. *Phys. Fluids* 26, page 073101, 2014.
- [22] M. Jenny, E. Plaut, and A. Briard. Numerical study of subcritical rayleigh-Bénard convection rolls in strongly shear-thinning carreau fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 219, pages 19–34, March 2015.
- [23] M. Assenheimer and V Steinberg. Observation of coexisting upflow and downflow hexagons in boussinesq rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* 76, pages 756–759, 1996.
- [24] M. Bouteraa. *Convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants : Approche théorique et expérimentale*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2016.
- [25] S. Madruga, H. Riecke, and W. Pesch. Re-entrant hexagons in non-boussinesq convection. *J. Fluid Mech.* 548, pages 341–360, February 2006.

Conclusion et perspectives

L'objectif de cette thèse était d'étudier l'influence d'un effet rhéofluidifiant, qui correspond à une diminution non linéaire de la viscosité quand le cisaillement augmente, sur les motifs de convection se développant dans la convection de Rayleigh Bénard. Pour ce faire, on a commencé par considérer la convection à proximité des conditions critiques. Deux configurations ont été étudiées : la première fait intervenir des plaques de conductivité finie et la seconde fait intervenir un fluide thermodépendant.

Dans le cas de plaques de conductivité finie, on montre que les motifs de convection émergeant sont soit des rouleaux soit des carrés en fonction de l'épaisseur des plaques, de leur conductivité et du degré de rhéofluidification α . On montre qu'une faible conductivité des plaques favorise l'apparition de structures carrées. En effet, plus la conductivité est faible et moins la convection est forte ce qui conduit à un couplage entre les modes décrivant les carrés suffisamment faible pour que ces derniers soient stables. De manière semblable, une grande épaisseur de plaques favorise les carrés au détriment des rouleaux. A l'inverse, un effet rhéofluidifiant prononcé conduit à une convection plus marquée et donc à des couplages non linéaires supérieurs entre les différents modes caractérisant les carrés. Pour un effet rhéofluidifiant suffisamment marqué, ces couplages deviennent assez forts pour déstabiliser les carrés : le caractère rhéofluidifiant favorise donc les rouleaux de convection. L'influence du caractère rhéofluidifiant sur les instabilités secondaires a également été étudié. Pour les rouleaux, il a été démontré que l'instabilité secondaire qui restreignait le plus la gamme de nombres d'ondes stables dépendait du degré de rhéofluidification α . Pour de faibles valeurs de ce paramètre, c'est l'instabilité rouleaux croisés qui est dominante comme en Newtonien. En revanche pour des valeurs élevées de α , c'est l'instabilité d'Eckhaus qui l'emporte. A noter qu'on constate dans les deux cas la présence de l'instabilité Zigzag qui ne dépend pas des paramètres rhéologiques à proximité du seuil et rend instables les nombres d'ondes k tels que $k \leq k_c$. Pour les carrés, c'est l'instabilité rectangulaire qui est dominante et qui restreint d'autant plus la gamme de nombres d'ondes stables que le caractère rhéofluidifiant est prononcé.

Dans la deuxième configuration, on considère un fluide rhéofluidifiant dont la viscosité varie avec la température. On a étudié la compétition rouleaux/carrés et rouleaux/hexagones pour différentes valeurs du degré de rhéofluidification, α , et du rapport de viscosité, r . Dans le cas Newtonien, le motif stable au démarrage de la convection passe de rouleaux à carrés à $r = r_c \approx 3$ en accord avec [1]. Pour un fluide rhéofluidifiant,

le motif stable de convection passe de rouleaux à carrés pour des valeurs de r qui augmentent avec le degré de rhéofluidification. Cette variation est en accord avec les conclusions de [2]. Pour des valeurs modérées de r (disons $r < 3$), l'étude de la compétition rouleaux/hexagones montre que l'étendue du domaine de bistabilité rouleaux/hexagones diminue de manière significative avec le degré de rhéofluidification et augmente avec r . En s'écartant des conditions critiques, une gamme continue de nombres d'onde d'étendue $\sqrt{\epsilon}$ participe à la convection conduisant à une modulation spatiale de la solution stationnaire. La stabilité des hexagones présentant une modulation spatiale est étudiée dans le cadre des équations de Ginsburg-Landau qui incluent les dérivées spatiales quadratiques de l'amplitude. Après avoir évalué les différents coefficients qui interviennent dans ces équations, une analyse de stabilité par rapport à des perturbations de grande longueur d'onde est effectuée. On montre que pour des valeurs modérées du rapport de viscosité, le domaine du plan (ϵ, q) où $q = k - k_c$ où les hexagones sont stables est ouvert et décentré vers les valeurs positives de q . Il est délimité essentiellement par une instabilité de phase transverse. Le caractère rhéofluidifiant, encore une fois, réduit ce domaine de stabilité. La résolution numérique des équations de Ginsburg-Landau montre en particulier la formation de défauts probablement du type heptagone-pentagone liés à l'instabilité de phase transverse [3].

Après avoir considéré les motifs de convection à proximité du seuil, nous nous sommes intéressés à leur devenir loin des conditions critiques. Pour cela, une approche fortement non linéaire reposant sur une procédure de continuation a été mise en place afin de déterminer de proche en proche les caractéristiques de l'écoulement. On a considéré lors de cette approche un fluide purement rhéofluidifiant confiné entre deux plaques parfaitement conductrices : dans cette configuration, seuls les rouleaux sont stables. Le comportement rhéologique est décrit par le modèle de Carreau. La méthode mise en oeuvre a d'abord été validée par comparaison avec différents travaux réalisés en Newtonien tels que [4], [5], [6] et [7]. On a pu mettre en évidence l'influence de la rhéologie : (i) quand on augmente l'effet rhéofluidifiant (que ce soit en diminuant le paramètre n_c ou en augmentant le paramètre λ du modèle de Carreau), on réduit les frottements visqueux ce qui a pour conséquence de faciliter la convection thermique et les échanges de chaleur dus à cette dernière, (ii) à partir d'une certaine valeur du degré de rhéofluidification α , la bifurcation de l'état conductif à l'état convectif devient sous-critique. Ces résultats sont en adéquation avec ceux obtenus dans la littérature [8], [9].

Plusieurs perspectives s'ouvrent suite aux travaux réalisés dans cette thèse :

- A court terme, on souhaite complexifier le modèle faiblement non linéaire mis en place pour décrire la convection d'un fluide thermodépendant à proximité du seuil en considérant un développement au second ordre de la masse volumique avec la température. En effet, les fluides rhéofluidifiants utilisés expérimentalement sont très visqueux et les écarts de température nécessaires pour déclencher la convection sont importants dans la pratique (de l'ordre d'une dizaine de degrés). En conséquence, on peut s'attendre à ce que les hypothèses de Boussinesq qui

considèrent une variation linéaire de la masse volumique avec la température uniquement dans le terme de flottabilité ne constituent plus une bonne approximation du comportement physique du système. Un autre objectif à court terme serait d'étudier la compétition hexagones-carrés qui peut survenir si l'on considère un fluide très fortement thermodépendant [10], [1]. Il faudrait alors mener l'analyse faiblement non linéaire en considérant des champs de vitesse et de température décomposés sur deux réseaux de 3 modes de Fourier décalés l'un par rapport à l'autre d'un angle $\pi/6$.

- A moyen terme, on souhaite étudier la stabilité des branches de solution déterminées grâce à l'approche fortement non linéaire. Pour ce faire, on pourra mener aux différents points des branches une analyse linéaire de stabilité semblable à celle employée par F.H. Busse dans [5]. L'objectif est ici de déterminer le domaine de stabilité des rouleaux de convection pour un fluide rhéofluidifiant. On cherchera à voir quelles sont les différentes instabilités secondaires délimitant ce domaine et comment ces dernières sont impactées par le comportement rhéofluidifiant. Un autre objectif à moyen terme serait d'améliorer la procédure de continuation de sorte qu'elle permette de suivre les branches instables sous critiques de solutions.
- A long terme, on cherchera à étendre la procédure de continuation mise en place dans le dernier chapitre au cas d'un fluide rhéofluidifiant et thermodépendant. Des travaux récents aussi bien expérimentaux [11], [12] que théoriques [13] ont montré que l'écoulement pouvait s'organiser sous forme d'hexagones loin des conditions critiques, ce que ne prévoit pas une analyse faiblement non linéaire de stabilité. Une approche fortement non linéaire permettrait d'apporter un nouvel éclairage sur ce phénomène d'« hexagones réentrants ».

Bibliographie

- [1] D. R. Jenkins. Rolls versus squares in thermal convection of fluids with temperature-dependent viscosity. *J. Fluid. Mech.*, 178 :491–506, 1987.
- [2] Mondher Bouteraa, Chérif Nouar, Emmanuel Plaut, Christel Métivier, and Aurélie Kalck. Weakly nonlinear analysis of rayleigh-bénard convection in shear-thinning fluids : nature of the bifurcation and pattern selection. *Journal of Fluid Mechanics*, 767 :696–734, 2015.
- [3] R Hoyle. *Pattern Formation : An introduction to methods*. Cambridge University Press, 2006.
- [4] H.T. Rossby. *An experimental study of Bénard convection with and without rotation*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1966.
- [5] F.H. Busse. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. Math. Phys.* 46, pages 140–150, 1967.

- [6] W. Plows. Some numerical results for two-dimensional steady laminar Bénard convection. *Phys. Fluids* 11, pages 1593–1599, August 1968.
- [7] A.J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J Comput Phys* 135, pages 118–125, August 1997.
- [8] M. Jenny, E. Plaut, and A. Briard. Numerical study of subcritical rayleigh-Bénard convection rolls in strongly shear-thinning carreau fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 219, pages 19–34, March 2015.
- [9] O. Benouared, M. Mamou, and N.A. Messaoudene. Numerical nonlinear analysis of subcritical rayleigh-Bénard convection in a horizontal confined enclosure filled with non-newtonian fluids. *Phys. Fluids* 26, page 073101, 2014.
- [10] F. H. Busse and H. Frick. Square-pattern convection in fluids with strongly temperature-dependent viscosity. *J. Fluid. Mech.*, 150 :451–465, 1985.
- [11] M. Assenheimer and V Steinberg. Observation of coexisting upflow and downflow hexagons in boussinesq rayleigh-bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* 76, pages 756–759, 1996.
- [12] M. Bouteraa. *Convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants : Approche théorique et expérimentale*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2016.
- [13] S. Madruga, H. Riecke, and W. Pesch. Re-entrant hexagons in non-boussinesq convection. *J. Fluid Mech.* 548, pages 341–360, February 2006.

Résumé de la thèse en français

On désigne par convection thermique le phénomène physique par lequel un fluide se met en mouvement sous l'effet d'un gradient thermique. Pour l'étudier, on considère comme configuration de référence un fluide placé entre deux plaques horizontales chauffé par le bas et refroidi par le haut dans le champ de gravité. Pour un gradient thermique suffisamment important, le fluide initialement au repos se met en mouvement. Les premiers à étudier expérimentalement et théoriquement cette transition d'un état conductif à un état convectif dans cette configuration furent Lord Rayleigh et Henri Bénard ; aussi on parle de convection de Rayleigh-Bénard pour qualifier ce phénomène. Henri Bénard a notamment montré que la convection du fluide se faisait de manière ordonnée, on constate ainsi l'émergence de différents motifs de convection tels des rouleaux, des carrés ou des hexagones. L'origine de la convection fut quant à elle donnée par Lord Rayleigh. Ce dernier montre que, dans la configuration utilisée, deux mécanismes antagonistes entrent en jeu :

- D'un côté, les forces de poussée d'Archimède induites par les variations de la masse volumique avec la température tendent à faire s'élever les couches de fluides basses plus chaudes donc moins denses.
- De l'autre, les forces de frottement visqueux et la conduction thermique s'opposent à la mise en mouvement du fluide.

Le rapport de force entre ces deux phénomènes peut être quantifié par une grandeur adimensionnelle appelée nombre de Rayleigh Ra . Ainsi pour une valeur suffisamment grande de ce paramètre, les forces de poussée d'Archimède l'emportent sur les forces de friction et la diffusion thermique ce qui se traduit par le déclenchement de la convection : on parle alors de bifurcation primaire. En considérant des surfaces libres comme conditions limites, Lord Rayleigh a déterminé théoriquement la valeur Ra_c à partir de laquelle le fluide se met en mouvement ainsi que le nombre d'onde k_c des structures qui se développent.

En s'éloignant des conditions critiques, les différents motifs de convection vont à leur tour subir des instabilités qualifiées de « secondaires » (par opposition à la bifurcation primaire) qui vont engendrer une modulation spatiale des structures. Pour les rouleaux de convection et dans la limite des grands nombres de Prandtl, la littérature répertorie à proximité des conditions critiques (k_c , Ra_c) trois mécanismes d'instabilités distincts : l'instabilité d'Eckhaus, l'instabilité Zigzag et l'instabilité rouleaux croisés. L'instabilité d'Eckhaus est une instabilité de grande longueur d'onde qui se manifeste par une dilatation ou une compression des rouleaux de convection. L'instabilité Zigzag est elle aussi une

instabilité de grande longueur d'onde mais elle opère dans la direction perpendiculaire à l'axe des rouleaux donnant ainsi lieu à l'apparition d'ondulations. L'instabilité rouleaux croisés, quant à elle, se traduit par le développement progressif d'un réseau de rouleaux perpendiculairement à un premier ensemble de motifs. Comparativement aux rouleaux, les instabilités secondaires des autres structures de convection (carrés, hexagones) ne sont que peu étudiées.

Que ce soit au niveau de la bifurcation primaire ou des instabilités secondaires, les principaux travaux de la littérature font intervenir des fluides newtoniens. Or dans de nombreux domaines tels que la géologie ou les industrie alimentaire et pétrochimique, les fluides rencontrés ont un comportement rhéologique plus complexe. Le cas le plus fréquemment rencontré est celui où les fluides ont une viscosité qui diminue avec le taux de cisaillement ce qui correspond au comportement rhéofluidifiant. L'objectif de la thèse est ainsi de déterminer l'influence d'une telle rhéologie sur les motifs de convection et leur stabilité à la fois à proximité du seuil de la convection et loin des conditions critiques. La thèse compte trois chapitres : les deux premiers sont consacrés aux instabilités secondaires des motifs de convection à proximité des conditions critiques tandis que le dernier traite du devenir des structures loin du seuil de la convection.

Dans le premier chapitre de la thèse, on étudie le cas où les plaques confinant le fluide ont une conductivité thermique finie. Les équations descriptives du comportement du fluide à savoir les équations de conservation de quantité de mouvement, de continuité et de la chaleur sont écrites dans le cadre des approximations de Boussinesq. Celles ci stipulent que :

- la masse volumique ne varie avec la température que dans le terme de flottabilité de l'équation de la conservation de quantité de mouvement.
- la dissipation visqueuse ainsi que la dépendance de l'énergie interne avec la pression sont négligées dans l'équation de l'énergie.
- les coefficients thermodynamiques sont considérés constants et la masse volumique ne varie qu'avec la température (pas de compressibilité).

Les plaques sont considérées rigides et le comportement rhéofluidifiant est décrit par le modèle de Carreau. Une étude linéaire de stabilité est d'abord menée pour déterminer les conditions critiques (k_c , Ra_c) à partir desquelles la convection s'amorce. Pour ce faire, on considère des perturbations infinitésimales et on linéarise les équations descriptives du système. On cherche ensuite une solution sous forme de modes normaux ce qui permet d'aboutir à un problème aux valeurs propres. Ce dernier est résolu numériquement en utilisant une méthode spectrale reposant sur les polynômes de Chebyshev et les points de collocation de Gauss-Lobatto. En cherchant les couples (k, Ra) qui annule le taux de croissance des perturbations, on détermine la courbe de stabilité marginale $Ra(k)$ dont le minimum correspond aux conditions critiques. L'évolution de ces conditions critiques en fonction de la conductivité des plaques a été déterminée pour différentes épaisseurs de ces dernières. Signalons que la rhéologie n'intervient pas à l'ordre linéaire. Dans la limite

de plaques parfaitement conductrices, on retrouve les valeurs $k_c = 3.11$, $Ra_c = 1707.76$ bien connues dans la littérature. Quand la conductivité des plaques diminue ou que leur épaisseur augmente, les conditions critiques diminuent jusqu'à valoir $k_c = 0$ et $Ra_c = 720$ dans le cas de plaques parfaitement isolantes. Physiquement, de telles évolutions s'expliquent par le fait que dans le cas de parois isolantes, les perturbations en température ne sont pas éliminées aux parois internes ce qui se traduit par un effet d'accumulation des perturbations dans la couche de fluide. De ce fait, la bifurcation primaire a besoin de moins d'énergie pour se produire ce qui explique la diminution de Ra_c avec la réduction de la conductivité des plaques.

Pour étudier les motifs de convection au seuil de l'instabilité, on utilise une approche multi-échelle. Cette dernière consiste à décomposer les différentes variables du problème en série d'un petit paramètre δ . La substitution de ces décompositions dans les équations descriptives du système conduit à un ensemble d'équations différentielles ordinaires pour chaque puissance de δ que l'on vient résoudre. L'application d'une condition de compatibilité (alternative de Fredholm) permet de déterminer les équations de Ginzburg-Landau décrivant la dynamique du système à proximité des conditions critiques. En menant une analyse linéaire de stabilité sur ces équations, on est en mesure de déterminer la nature du motif émergent à la bifurcation primaire ainsi que les différentes instabilités secondaires subies par ce dernier. En ce qui concerne les structures émergentes au seuil de la convection, il est montré que le caractère isolant favorise l'émergence de motifs en carrés tandis que le comportement rhéofluidifiant avantage les rouleaux de convection. Ces motifs subissent différentes instabilités secondaires. Pour les rouleaux, trois instabilités viennent limiter la gamme de nombres d'onde stables : il s'agit des instabilités d'Eckhaus, Zigzag et rouleaux-croisés. A proximité du seuil de la convection, il est montré que la rhéologie a une influence uniquement sur l'instabilité rouleaux croisés : en effet, la gamme de nombres d'onde stables est d'autant plus étendue que le caractère rhéofluidifiant est prononcé. Contrairement au cas Newtonien, il est montré que l'instabilité d'Eckhaus peut être plus restreignante que rouleaux-croisés à condition que l'effet rhéofluidifiant soit suffisamment marqué. Pour les carrés, on met en évidence deux instabilités secondaires : l'instabilité d'Eckhaus et l'instabilité rectangulaire. Le comportement rhéofluidifiant n'a d'influence que sur l'instabilité rectangulaire et limite d'autant plus la gamme de nombre d'ondes que la rhéofluidification est forte. Par ailleurs, on constate que l'instabilité rectangulaire est toujours dominante devant Eckhaus. Ce premier chapitre se termine par une simulation numérique directe des équations de Ginzburg-Landau qui permet d'une part de confirmer les résultats précédents et d'autre part d'observer l'évolution temporelle des diverses instabilités secondaires.

Dans le deuxième chapitre de la thèse, on s'intéresse aux motifs de convection qui se développent dans la convection de Rayleigh-Bénard lorsqu'on considère un fluide thermodépendant et rhéofluidifiant. La thermodépendance est prise en compte en considérant une variation exponentielle de la viscosité du fluide avec la température tandis que le

comportement rhéofluidifiant est décrit par le modèle de Carreau comme dans le chapitre précédent. L'approximation de Boussinesq est utilisée pour la masse volumique. On adopte la même démarche que précédemment : on commence par écrire les équations de conservation de la quantité de mouvement, de continuité et de l'énergie puis on procède à une analyse linéaire de stabilité. On détermine ainsi l'évolution des conditions critiques avec le rapport r des viscosités aux plaques supérieure et inférieure. L'analyse linéaire de stabilité révèle que (i) pour de faibles rapports de viscosité $1 \leq r \leq 1.5$, k_c et Ra_c sont presque constants, (ii) pour des valeurs de r modérées $1.5 \leq r \leq 8$, Ra_c augmente avec r tandis que k_c varie peu, (iii) pour des rapports de viscosités importants, la convection est gouvernée par une sous-couche plus instable que la couche complète ce qui conduit à une diminution de Ra_c avec r et une augmentation de k_c avec r . L'étude des motifs de convection et des instabilités secondaires se fait grâce à une approche multi-échelles semblable à celle du chapitre précédent. A proximité du seuil de la convection, on montre que deux types de structures entrent en compétition : ce sont les rouleaux de convection et les motifs hexagonaux. Pour la bifurcation primaire, on met en évidence différents domaines d'existence des structures en fonction de l'écart relatif au seuil $\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$. Ainsi, on montre que pour de faibles valeurs ϵ soit $\epsilon_a \leq \epsilon \leq \epsilon_r$, les hexagones sont les seules structures stables. Signalons que ϵ_a est négatif ce qui indique que la bifurcation primaire est sous critique. Pour $\epsilon_r \leq \epsilon \leq \epsilon_h$, on a un domaine de coexistence des deux motifs. Enfin quand $\epsilon \geq \epsilon_h$, les hexagones perdent leur stabilité et il ne subsiste que des rouleaux. L'évolution de la taille de ces différents domaines a été étudiée en fonction des caractères plus ou moins marqués de la thermodépendance et de la rhéofluidification. En faisant croître le rapport des viscosités r , on constate que ϵ_r et ϵ_h augmentent. Les rouleaux de convection apparaissent donc à partir d'une valeur supérieure de l'écart relatif au seuil tandis que les hexagones perdurent jusqu'à des valeurs plus élevées de ϵ : la thermodépendance favorise donc les motifs hexagonaux au détriment des rouleaux. A l'inverse, en augmentant les effets rhéofluidifiants, on constate que ϵ_r et ϵ_h diminuent : la rhéofluidification favorise donc les rouleaux de convection aux dépens des hexagones. L'impact de la rhéologie sur les instabilités secondaires et la gamme de nombres d'ondes stables est étudié en utilisant, comme dans le chapitre précédent, le formalisme des équations de Ginzburg-Landau. On se place dans la limite des perturbations de grandes longueurs d'ondes et on procède à une élimination adiabatique. Une telle approche consiste à mettre en évidence les variables lentes qui dirigent la dynamique du système et les variables rapides qui s'adaptent automatiquement aux variations des variables lentes (elles sont « éliminées adiabatiquement »). On montre que les phases des perturbations sont des variables lentes tandis que les amplitudes et la phase globale sont des variables rapides. La dynamique du système se réduit alors à deux équations de diffusion de phase qui permettent de déterminer le domaine de stabilité des hexagones, délimité par les instabilités secondaires, dans le plan (q, Ra) où q désigne l'écart au nombre critique. Les calculs montrent que ce domaine de stabilité est d'autant plus vaste que le caractère thermodépendant est important et qu'il est d'autant plus réduit que la rhéofluidification

est forte : la thermodépendance et la rhéofluidifiacion jouent donc des rôles antagonistes.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des motifs loin du seuil de la convection. Un fluide purement rhéofluidifiant confiné entre deux plaques rigides est considéré. Dans cette configuration, les motifs se développant sont des rouleaux de convection. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le devenir de ces structures quand on s'éloigne des conditions critiques. Pour cela, on a recours à une méthode de continuation. Cette dernière est un processus itératif qui permet de déterminer de proche en proche les solutions stationnaires des équations descriptives du problème au fur et à mesure que le paramètre de contrôle, ici le nombre de Rayleigh Ra , varie. Les différentes étapes de cette procédure (prédiction, paramétrisation, correction et contrôle du pas) sont présentées. Les solutions du problème sont cherchées en séries de Fourier et les différents modes associés sont décomposés sur une base de polynômes de Chebyshev. Les termes linéaires et non linéaires d'inertie des équations descriptives du système sont calculés directement dans l'espace spectral de Fourier-Chebyshev tandis que les termes non linéaires visqueux sont d'abord évalués dans l'espace physique puis projetés dans l'espace spectral. Le code numérique mis en place permet de déterminer les champs de vitesse et de température ainsi que les échanges de chaleur via le calcul du nombre de Nusselt Nu . Le cas d'un fluide Newtonien est d'abord considéré. Une étude de convergence est menée pour déterminer le nombre adéquat de modes de Fourier : on constate qu'il est logiquement d'autant plus élevé qu'on s'éloigne des conditions critiques. On montre que le champ de vitesse croît d'abord rapidement à proximité du seuil puis que ses augmentations sont plus modérées. Au fur et à mesure que la convection gagne en intensité, on constate que les élévations de température se concentrent dans la partie supérieure de la couche de fluide tandis que les réductions ont lieu à proximité de la plaque chaude. L'évolution du nombre de Nusselt avec l'écart relatif au seuil ϵ est déterminée pour différentes valeurs du nombre de Prandtl $1 \leq Pr \leq \infty$. Pour de faibles valeurs de l'écart relatif au seuil $0 \leq \epsilon \leq 2$, on observe que toutes les courbes sont confondues ce qui signifie que le nombre de Prandtl n'a pas d'impact sur les échanges de chaleur à proximité des conditions critiques. Loin de ces dernières, les courbes $Nu = f(\epsilon)$ tendent vers une courbe unique quand $Pr \geq 10$ ce qui permet de mettre en évidence une limite des grands nombres de Prandtl. Les nombres de Nusselt obtenus se révèlent en très bon accord avec ceux issus de divers travaux de la littérature ce qui permet de valider le code en Newtonien.

On s'est ensuite intéressé au cas de fluides rhéofluidifiants. Comme pour le cas Newtonien, plusieurs simulations sont d'abord menées en faisant varier la finesse du maillage de l'espace physique ainsi que le nombre de modes de Fourier pour déterminer les conditions de convergence. On observe que plus les écarts relatifs au seuil sont importants et plus la finesse du maillage doit être grande et le nombre de modes de Fourier important pour s'assurer de la convergence de la méthode. Pour une valeur donnée de l'écart relatif au seuil, on observe que les amplitudes des champs de vitesse et de température sont plus importants pour un fluide rhéofluidifiant. En effet, les forces de frottement sont

moindres pour un tel fluide ce qui engendre une convection plus forte. Le champ de viscosité présente une organisation spécifique. On distingue ainsi des zones en forme d'« anneaux » où les cisaillements sont très faibles et qui sont donc le siège de fortes viscosités. Ces dernières sont entourées de zones fortement cisillées où règnent de faibles viscosités. On observe que les échanges de chaleur sont d'autant plus importants que le comportement rhéofluidifiant est prononcé ce qui semble cohérent puisqu'une telle rhéologie favorise la convection et donc les échanges de chaleur induits par cette dernière. Conformément à ce qu'avaient prédites différentes approches faiblement non linéaires, la bifurcation de l'état conductif à l'état convectif devient sous critique si les effets rhéofluidifiants sont suffisamment forts. Signalons que dans son état actuel, le code ne permet pas de suivre la branche sous critique au delà de son point de retournement.

En conclusion, la thèse aura permis dans un premier temps de mettre en évidence l'influence d'un effet rhéofluidifiant sur les instabilités secondaires des motifs de convection à proximité des conditions critiques. Dans un second temps, elle aura permis de poser les jalons nécessaires à l'étude des structures convectives loin du seuil de la convection à travers la détermination des branches de solutions stationnaires des équations descriptives du comportement d'un fluide purement rhéofluidifiant. Plusieurs perspectives s'offrent à la suite de ce travail. En premier lieu, on pourra améliorer le modèle mathématique développé dans l'approche faiblement non linéaire en considérant des variations à l'ordre cubique de la masse volumique avec la température. Cela devrait permettre de mieux prendre en considération les gradients de températures importants qui peuvent exister dans les dispositifs expérimentaux faisant intervenir des fluides rhéofluidifiants. Dans le cas de fluides très fortement thermodépendants, différents articles de la littérature rapportent l'existence de structures en carrés : un autre enjeu serait alors d'étudier la compétition entre ces derniers et les hexagones qui existent déjà lorsque les effets thermodépendants sont moindres. En second lieu, on cherchera à développer l'approche fortement non linéaire. On pourra commencer par étudier la stabilité des branches de solutions stationnaires mises en évidence et observer l'influence du caractère rhéofluidifiant sur le domaine de stabilité des rouleaux de convection. On pourra poursuivre en mettant en place une procédure permettant de franchir le point de retournement des branches sous critiques de solutions ce qui nous permettra d'avoir accès à l'intégralité des branches. Enfin, on pourra étendre l'approche fortement non linéaire au cas de fluides rhéofluidifiants et thermodépendants et étudier la stabilité d'autres motifs de convection comme les hexagones. On pourra ainsi apporter un nouvel éclairage au phénomène d'« hexagones ré-entrants » à savoir l'existence d'hexagones loin des conditions critiques ce que ne prédit pas une approche faiblement non linéaire.

Instabilités secondaires dans la convection de Rayleigh-Bénard pour des fluides rhéofluidifiants.

Dans la configuration de Rayleigh-Bénard, on considère une fine couche de fluide placée entre deux parois horizontales, chauffée par le bas et refroidie par le haut. Cette couche peut être le siège d'une instabilité si le gradient thermique est suffisamment important : on passe alors de l'état conductif à l'état convectif et on parle de bifurcation primaire pour qualifier cette première transition. Cette mise en mouvement du fluide se fait de manière ordonnée : on constate ainsi l'émergence de différents motifs de convection comme des rouleaux, des carrés ou encore des hexagones. Ces structures vont à leur tour subir des instabilités qualifiées de « secondaires » qui vont limiter la gamme de nombres d'onde stables. On étudie ici théoriquement ces instabilités d'une part à proximité du seuil de la convection grâce à une approche faiblement non linéaire, d'autre part loin des conditions critiques grâce à une approche fortement non linéaire. Le fluide est rhéofluidifiant, ce qui correspond au comportement rhéologique le plus fréquemment rencontré, et est décrit par le modèle de Carreau.

A proximité du seuil, on considère deux situations : la première correspond au cas où les plaques ont une conductivité finie, la seconde à celui d'un fluide thermodépendant. Dans chaque cas, l'influence du caractère rhéofluidifiant sur la nature du motif émergeant à la bifurcation primaire et sur les instabilités secondaires est mise en évidence.

Pour étudier les motifs de convection loin des conditions critiques, on a recours à une procédure de continuation permettant de déterminer de proche en proche les caractéristiques de l'écoulement comme les champs de vitesse ou de température ainsi que le nombre de Nusselt.

Mots clés : Convection, Rayleigh-Bénard, Rhéologie, Bifurcation, Instabilités secondaires.

Abstract

In the Rayleigh-Bénard configuration, we consider a thin layer of fluid confined between two horizontal slabs which is heated from below and cooled from above. This layer undergoes an instability if the thermal gradient is strong enough : a transition from the conductive state to the convective state and called « primary bifurcation » occurs. Moreover, it happens in an ordered way : we can notice the emergence of various convection patterns such as rolls, squares or hexagons. In their turn, these patterns undergo « secondary instabilities » that limit the range of stable wavenumbers. These instabilities are studied theoretically firstly near the threshold thanks to a weakly nonlinear approach, and secondly far from critical conditions thanks to a strongly nonlinear approach. We consider a shear thinning fluid, the most common rheological behavior, which is described by the Carreau model. Near the threshold, two situations are considered : the first corresponds to finite conductivity plates, the second corresponds to a thermodependent fluid. In each case, the influence of the shear thinning effect on the nature of the pattern emerging at the primary bifurcation and on secondary instabilities is highlighted. To study the convection patterns far from the critical conditions, a continuation procedure is used to determine, step by step, the characteristics of the flow, such as the velocity or temperature fields and the Nusselt number.

Keywords : Convection, Rayleigh-Bénard, Rheology, Bifurcation, Secondary instabilities