



HAL
open science

Résolutions symplectiques et de contact de variétés de Poisson et de Jacobi

Hichem Lassoued

► **To cite this version:**

Hichem Lassoued. Résolutions symplectiques et de contact de variétés de Poisson et de Jacobi. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT : 2019LORR0211 . tel-02527779

HAL Id: tel-02527779

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02527779>

Submitted on 1 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Résolutions symplectiques et de contact de variétés de Poisson et de Jacobi

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 23 août 2019

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine
(mention Mathématiques)

par

Hichem Lassoued

Composition du jury

Président : Le président

Rapporteurs : Mohamed Belkhefha Professeur à l'Université de Mascara
Martin Bordemann Professeur à l'Université de Haute Alsace
Mohamed Boucetta Professeur à l'Université de Marrakech

Examineurs : Said Benayadi Maître de Conférences à l'Université de Lorraine
HongLei Lang Maître de Conférences à China Agricultural University
Camille Laurent-Gengoux Professeur à l'Université de Lorraine
Mathieu Stiénon Professeur à l'Université de Pennsylvania
Angela Pasquale Professeur à l'Université de Lorraine

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Ce travail a été réalisé, dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'université de Lorraine, à l'institut Élie Cartan sous la direction de Monsieur Camille Laurent-Gengoux, Professeur à l'université de Lorraine et l'université d'Annaba, au laboratoire de l'analyse numérique et d'optimisation et de statistique sous la direction de Madame Zoubida Benhamadi, Maître de conférences à l'université d'Annaba.

Tout d'abord, je voudrais exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Camille Laurent-Gengoux, pour ses hautes qualités humaines, sa disponibilité, ses discussions fructueuses. Je tiens, à le remercier pour l'attention et la patience qu'il m'a accordées.

Je suis reconnaissant à Madame Zoubida Benhamadi, qui m'a fait l'honneur de bien vouloir m'encadrer et m'avoir présenté à Monsieur Camille Laurent-Gengoux.

Je tiens également à remercier Monsieur Mohamed Boucetta, Professeur à l'université de Marrakech, Mohamed Belkhef Professeur à l'université de Mascara et Martin Bordemann Professeur à l'université de Haute Alsace pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer à l'évaluation de ce travail en tant que rapporteurs.

Je tiens à remercier Monsieur Said Benayadi, Maître de Conférences à l'université de Lorraine et Monsieur Stiénon Mathieu Professeur à l'université de Pennsylvania pour le grand honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membre du jury de cette thèse.

Mes remerciements s'étendent à l'ensemble du personnel à l'institut Élie Cartan de lorraine : étudiants, doctorants, post-doctorants, enseignants, chercheurs que j'ai pu côtoyer au cours de ces années de thèse.

Je suis reconnaissant à tous les chercheurs du laboratoire LANOS à la Faculté des Sciences de l'université d'Annaba, pour les encouragements et les conseils qu'ils m'ont réservés.

Enfin, j'aimerais remercier tous mes amis et les membres de ma famille : mes parents, mes frères, mes sœurs, ma tante et son mari et leurs enfants « mes petits cousins », pour leur soutien tout au long de ces années.

À mes parents.

Table des matières

Introduction Générale	ix
-----------------------	----

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1	Rappels sur les variétés	3
1.1.1	Morphismes de variétés	4
1.1.2	Autres notions de variétés	5
1.2	Les fonctions complexes à plusieurs variables et les fonctions analytiques réelles	5
1.3	Autour de la notion de variété de Poisson	8
1.3.1	Structures de Poisson	10
1.3.2	Morphismes de Poisson	12
1.3.3	Théorème de Darboux-Weinstein	13
1.4	Sous-variétés de Poisson-Dirac	14
1.5	Variété de Jacobi	19
1.5.1	Morphismes de Jacobi	20
1.5.2	Structure de Jacobi sur \mathbb{R}^3	21
1.6	Objet géométrique	21
1.7	Objet de Poisson	25
1.8	Rang d'une structure de Poisson sur un objet géométrique	27

Chapitre 2

Résolutions symplectiques des structures de Poisson singulières

2.1	Introduction	31
2.2	Exemples de résolutions symplectiques en dimension 2 et 4	33
2.3	Structures de Poisson qui n'admettent pas de résolutions symplectiques	37

Chapitre 3

Résolutions de contact des structures de Jacobi singulière

3.1	Introduction	51
3.2	Existence de résolutions de contact en dimension 3	52
3.3	Non-existence de résolutions de contact	59

Chapitre 4

Résolution symplectique de quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe fini

4.1	Action de groupe fini et espace quotient	65
-----	--	----

4.2	Actions de Poisson et espaces de quotient	66
4.3	Surfaces de Poisson dans \mathbb{C}^3 et singularités Du Val	69

Chapitre 5

Résolution symplectique de quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe infini
--

5.1	Introduction	73
5.2	Résolution symplectique d'une variété affine singulière de Poisson sur \mathbb{R}^n .	74
5.3	Résolution symplectique d'une variété affine singulière de Poisson sur \mathbb{K}^3	78
5.4	Exemple d'un quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe infini et de sa résolution symplectique	85

Bibliographie	95
----------------------	-----------

Introduction Générale

Afin de donner un sens à mes travaux, et en particulier de comprendre ce qu'est la notion de la résolution des singularités, tout d'abord, nous nous tournerons vers Hironaka dont le théorème le plus fameux "la résolution des singularités en géométrie algébrique" date de 1964. Le résultat de Hironaka est le suivant :

Théorème 1. *Soit M une variété algébrique sur un corps \mathbb{K} de caractéristique nulle, et U la partie régulière. Il existe alors une variété algébrique non singulière Σ et un morphisme propre $\varphi : \Sigma \rightarrow M$, tels que le morphisme $\varphi^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un isomorphisme.*

Il y a des résultats plus précis on peut supposer que $E = \Sigma \setminus \varphi^{-1}(U)$ soit un diviseur « à croisements normaux » dans Σ (c'est-à-dire localement donné par une équation de la forme $f_1 f_2 \dots f_k = 0$, où les f_i sont des formes linéaires).

En fait le théorème complet de Hironaka est encore plus précis : il donne une information sur la façon d'obtenir une telle résolution d'une variété singulière M à l'aide d'une suite d'éclatements bien choisis.

Les singularités dont il s'agit sont des variétés affines algébriques et leurs résolutions sont des variétés affines-projectives. Celles-ci sont définies localement comme des ensembles de points d'un espace vectoriel ou projectif dont les coordonnées annulent des polynômes. Les singularités sont les points au voisinage desquels la géométrie présente des caractères différents des autres points.

La résolution de la singularité est, intuitivement, obtenue par un procédé de projection à partir d'un objet sans singularités. La construction demande donc un mélange de géométrie et d'algèbre.

Maintenant entrons dans le vif de notre sujet. Les variétés de Jacobi et de Poisson, qui formalisent la géométrie hamiltonienne et servent à quantifier des systèmes physiques, peuvent être singulières de deux façons : la structure peut être singulière mais aussi la variété elle-même peut avoir des singularités.

Parmi les structures de Poisson, respectivement les structures de Jacobi, il y a un type "régulier" qui sont les structure symplectiques, respectivement de contact. Résoudre la singularité, c'est en ce cas obtenu un objet lisse muni d'une structure symplectique ou, éventuellement, de contact et le projeté sur l'objet initial.

Il y a deux types de singularités qui rendent délicates l'étude des variétés de Jacobi et de Poisson singulières. Plusieurs travaux de Arnaud Beauville [1], Baohua Fu [12], Ping Xu [4] ou Alan Weinstein [7] s'intéressent à ces différents types de singularités :

les deux premiers auteurs proposent des méthodes de type Hironaka pour résoudre les singularités des variétés tout en préservant les structures de Poisson. Les seconds auteurs cherchent plutôt à changer la structure de Poisson en une structure symplectique quitte à doubler la dimension tandis que Claude Albert s'intéresse à généraliser les résultats de Alan Weinstein en changeant la structure de Jacobi d'une variété de Jacobi singulière de dimension n , en une structure de contact d'une variété de contact de dimension $2n + 1$. Le but de cette thèse est de commencer une théorie cohérente de la résolution des deux types de singularités pour des variétés de Jacobi et de Poisson. Mais nous voulons faire cela

1. sans augmenter la dimension, comme pour Hironaka,
2. mais en restant dans le cadre de la géométrie différentielle.

Réalisation et résolution

Tout d'abord, on définit ce que l'on entend par la réalisation symplectique.

Définition 1. *Soit M une variété de Poisson de dimension n , une réalisation symplectique de M est une variété symplectique Σ de dimension $2n$ dont le bivecteur correspondant à la structure symplectique sur Σ est projetable via une submersion surjective φ et a pour projection le bivecteur de Poisson sur M .*

Le résultat principal de Karasev et Weinstein sur les résolutions symplectiques est :

Théorème 2. [5] *Toute variété de Poisson de dimension n admet une réalisation symplectique de dimension $2n$.*

La méthode de A. Weinstein consiste à construire un groupoïde symplectique (Γ, η) à fibres connexes et simplement connexes dont l'espace des unités (Γ_0, π_0) est isomorphe à (M, π) . Il y a aussi la méthode de [11] chapitre 1 section 9.

Donnons maintenant un exemple explicatif de structure de Poisson qui admet une réalisation symplectique suivant la méthode de A. Weinstein. Nous allons démontrer dans le chapitre 2 que cette structure n'admet pas de résolution symplectique de même dimension.

Exemple 1. [5] Munissons $M = \mathbb{R}^2$ du crochet de Poisson défini par $\{x, y\} = x$. Nous cherchons ensuite une réalisation symplectique $\mathbb{R}^4 \rightarrow M$. En termes de coordonnées symplectiques (p_1, p_2, q_1, q_2) sur \mathbb{R}^4 , les deux fonctions

$$f = q_1 \quad \text{et} \quad g = p_1 q_1$$

satisfont la même relation de crochet que les coordonnées sur M

$$\{f, g\} = \{q_1, p_1 q_1\} = q_1 \{q_1, p_1\} = q_1 = f.$$

Autrement dit, le champ de bivecteurs correspondant à la 2-forme symplectique sur \mathbb{R}^4 (i.e, $\pi_{\mathbb{R}^4} = \frac{\partial}{\partial p_2} \wedge \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \frac{\partial}{\partial q_1}$) est projetable sur M , et a pour projection le champs de bivecteurs correspondant à la structure de Poisson sur M (i.e, $\pi_M = x \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$).

L'application $(f, g) : \mathbb{R}^4 \rightarrow M$ est une réalisation symplectique avec une singularité à l'origine.

Pour en faire une submersion non singulière, il suffit de redéfinir g par $p_1q_1 + q_2$. Cela reste de Poisson et est maintenant une submersion.

Il est évidemment impossible de trouver une réalisation symplectique de dimension n d'une variété de Poisson de dimension n , à moins que cette dernière ne soit symplectique. Mais il est possible d'affaiblir la notion de réalisation en imposant seulement que φ soit surjective et non pas une submersion. Dans le chapitre 2, on définit les résolutions symplectiques comme suit :

Définition 2. *Une résolution symplectique d'une variété de Poisson singulière (M, π_M) de dimension n , est un triplet $(\Sigma, \pi_\Sigma, \varphi)$ où (Σ, π_Σ) est une variété symplectique de même dimension n , et φ est un morphisme de Poisson surjectif.*

On commence par un exemple où il existe une résolution symplectique pour montrer que la théorie n'est pas vide. Par exemple, pour la structure de Poisson sur $M = \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\{x, y\}_M = x^2 + y^2,$$

où (x, y) sont des coordonnées locales sur $M = \mathbb{R}^2$. Cette structure admet une résolution symplectique $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ définie par $\Sigma = \mathbb{R}^2$ muni des coordonnées de Darboux (p, q) et du Π_Σ le bivecteur associé à la 2-forme symplectique canonique $dp \wedge dq$ et de $\varphi = (p \cos(pq), p \sin(pq))$.

Nous nous proposons maintenant d'introduire quelques résultats (que nous allons démontrer ensuite) qui décrivent une classe de variété de Poisson simple qui n'admettent pas de résolution symplectique propre dans le cas réel et de résolution symplectique semi-connecte dans le cas complexe (dont la structure de Poisson résolu par la méthode de Weinstein en fait partie). Une résolution symplectique d'une variété de Poisson est dite *semi-connecte* si aucune composante connexe de la variété symplectique n'a une image incluse dans le lieu singulier par le morphisme de Poisson. Si une résolution symplectique est connexe, alors elle est également semi-connecte.

Les résultats qui suivent feront l'objet de mon premier article qui sera la première publication tirée de cette thèse. Le premier résultat que l'on montrera dans le chapitre 2, section 2.3, est le suivant :

Théorème 3. *Une variété de Poisson (M, π) qui admet une résolution symplectique (Σ, w, φ) avec Σ séparable est symplectique sur un ouvert dense. En particulier, M est de dimension paire.*

A partir de maintenant, on ne considérera que des variétés séparables.

Par exemple on se place dans le plan $M = \mathbb{R}^2$, ou \mathbb{C}^2 muni d'une structure de Poisson, définie par :

$$\{x, y\}_M = f(x, y) \tag{1}$$

où x, y sont les coordonnées canoniques sur $M = \mathbb{R}^2$, ou \mathbb{C}^2 et $f(x, y)$ est une fonction lisse, réelle analytique ou holomorphe. Supposons que la variété de Poisson (M, π) admette une résolution symplectique (Σ, φ) . L'application φ est de la forme $\varphi = (u, v)$ où u

et v sont deux fonctions lisses, réelles analytiques ou holomorphes sur Σ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Pour tout choix (p, q) de coordonnées de Darboux locales sur (Σ, Π_Σ) , les fonctions u et v sont localement des fonctions des variables p et q .

Une paire (Σ, ϕ) , où Σ est une variété symplectique, et $\phi : \Sigma \rightarrow M$ une application surjective, est une résolution symplectique de la variété de Poisson (M, π_M) donnée par (1) si et seulement si

$$\{q, p\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} \right) = f(u, v) \quad (2)$$

où p, q sont des coordonnées locales locales sur (Σ, Π_Σ) , et $\phi = (u, v)$. On se ramène donc à un problème d'équations aux dérivées partielles.

Plaçons nous, dans le plan \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C}^2 (ou un ouvert de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C}^2 intersectant l'axe des ordonnées) muni d'une structure de Poisson donnée par :

$$\{x, y\}_M = xg(x, y). \quad (3)$$

où x, y sont des coordonnées locales sur \mathbb{R}^2 et g est une fonction lisse.

Théorème 4. *La variété de Poisson (M, π) décrite par (3) n'admet pas de résolution symplectique propre. Elle n'admet pas non plus de résolution symplectique semi-connecte réelle analytique ou holomorphe.*

Nous sous-entendons de résolution symplectique réelle analytique ou holomorphe que la fonction $f(x, y) = xg(x, y)$ est réelle analytique ou holomorphe, ainsi que les données $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ de la résolution.

Pour généraliser ce théorème ou bien élargir la classe des variétés de Poisson qui n'admettent pas de résolution symplectique. Nous utilisons la notion de sous-variété de Poisson-Dirac et le théorème lui même.

Théorème 5. *Une variété de Poisson (M, π_M) de dimension $n \in \mathbb{N}$, symplectique sur un ouvert dense qui contient une sous-variété P de codimension 1 inclus dans le lieu singulier de π_M , n'admet pas de résolution symplectique propre. Elle n'admet non plus une résolution symplectique semi-connecte pour le cas complexe.*

Dans le cas holomorphe, le résultat est beaucoup plus fort car la sous-variété de codimension 1 qui apparaît dans le théorème 5 existe toujours.

Théorème 6. *À part les variétés symplectiques, aucune variété de Poisson holomorphe n'admet de résolution symplectique semi-connecte.*

Jusqu'à maintenant, on n'a considéré que les variétés de dimension paire et le cas Poisson-symplectique. Pour rendre les résultats plus généraux, on passe à la dimension impaire et au cas Jacobi-contact. Introduisons la notion de réalisation de contact.

Définition 3. [8] *Une réalisation de contact d'une variété de Jacobi singulière (M, π_M, E_M) de dimension n est un triplet $(\Sigma, \alpha, \varphi)$ où (Σ, α) est une variété de contact et φ est un morphisme de Jacobi qui est également une submersion surjective.*

Le résultat de Claude Albert est le suivant

Théorème 7. [8] *Soit (M, π_M, E_M) une variété de Jacobi. Alors il existe une variété Σ munie d'une forme de contact α , admettant M comme une sous-variété de Legendre, et une projection $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ qui est un morphisme de Jacobi de (Σ, α) (M, π_M, E_M) et qui est également une submersion tel que $\varphi|_M = id_M$.*

L'idée de la preuve est de "poissonnifier" la variété de Jacobi singulière (M, π_M, E_M) . Puis, en utilisant le théorème de réalisation symplectique de Weinstein 2, pour la variété de Poisson homogène $(\widetilde{M}, \pi_{\widetilde{M}}, Z_{\widetilde{M}})$ obtenu, relever le champ d'homothéties \widetilde{Z} dans la variété symplectique obtenu, et terminer par passage au quotient par rapport au champ d'homothéties \widetilde{Z} .

Il est évidemment impossible de trouver une réalisation de contact de dimension $2n + 1$ d'une variété de Jacobi de dimension $2n + 1$, à moins que cette dernière ne soit de contact. Mais il est possible d'affaiblir la notion de réalisation en imposant seulement que φ soit surjective, comme on l'a fait pour le cas Poisson. Plus exactement, on définit les résolutions de contact comme suit :

Définition 4. *Une résolution de contact d'une variété de Jacobi singulière (M, π_M, E_M) de dimension $2n + 1$, est un triple (Σ, w, φ) où (Σ, w) est variété de contact de dimension $2n + 1$, et φ est un morphisme de Jacobi surjectif.*

Nous introduisons maintenant quelques résultats (que nous allons démontrer ensuite) afin de prouver que la théorie de résolution de contact n'est pas vide et de démontrer qu'une classe de variété de Jacobi simple n'admet pas de résolution de contact propre dans le cas réel et de résolution de contact semi-connexe dans le cas complexe.

Pour l'étude de l'existence d'une telle résolution, il y a un équivalent de l'équation (2). Dans ce cas, on se ramène donc à nouveau à un problème d'équations aux dérivées partielles.

Nous donnons d'abord un exemple non trivial. Tout d'abord, on se place dans \mathbb{R}^3 , on considère $M = \mathbb{R}^3$ muni des coordonnées locales (x, y, z) , un bivecteur $\pi_M \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ et un champ de vecteurs $E_M \in \Gamma(TM)$ définis par :

$$\pi_M = (x^4 + y^4) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_M = 2 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4)$$

On vérifie facilement que π_M et E_M satisfaisaient les relations

$$[\pi_M, \pi_M] = 2E_M \wedge \pi_M \quad [E_M, \pi_M] = 0.$$

Nous introduisons maintenant le premier résultat en dimension impaire

Théorème 8. *La structure de Jacobi décrite par (4) admet une résolution de contact.*

Nous donnons un résultat très utile dans cette partie et qui sera utilisé pour prouver qu'une classe de variétés de Jacobi n'admette pas de résolution de contact propre dans le cas lisse et de résolution de contact semi-connexe dans le cas réel analytique ou holomorphe. Nous démontrera ce résultat dans le chapitre 3 section 3.3.

Proposition 1. *Une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) de dimension $2n + 1$ admet une résolution de contact si et seulement si la poissonification (P, π_P, Z_P) admet une résolution symplectique homogène.*

Il y a donc une équivalence entre les résolutions symplectiques et celles de contact ce qui nous permet de conclure les résultats suivants :

Théorème 9. *Dans le cas lisse une variété de Jacobi de dimension $2n + 1$ dont le lieu singulier contient une sous-variété de codimension 1, n'admet pas de résolution de contact propre. Elle n'admet pas non plus de résolution de contact semi-connexe dans le cas réel analytique.*

Dans le cas holomorphe, tout comme pour les résolutions symplectiques, le résultat est beaucoup plus fort car la sous-variété de codimension 1 qui apparaît dans le théorème 9 existe toujours.

Théorème 10. *À part les variétés de contact, les variétés de Jacobi holomorphes n'admettent pas de résolutions de contact semi-connexe.*

Passons à la seconde partie de la thèse. Nous allons étudier maintenant le deuxième type de singularité, c'est-à-dire, le cas où la variété est singulière. Rappelons que nous voulons travailler en géométrie différentielle, mais que l'on veut imiter la géométrie algébrique. On procède de la façon suivante. Qu'est une qu'une variété affine ? C'est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Qu'est qu'une qu'une fonction sur une variété affine ? C'est la restriction à ce sous-ensemble d'une fonction sur l'espace \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . De la même manière, on va considérer des objets, que l'on dira en section 1.6 être *munis d'une structure d'inclusion* qui sont des sous-ensembles d'une variété et on va appeler fonction lisse sur cet objet les restrictions des fonctions lisses sur l'espace ambiant. Néanmoins, tout comme en géométrie algébrique, on aura aussi à considérer des objets qui sont des quotients de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n par un groupe. Il est en effet bien connu qu'un quotient d'une variété affine par un groupe fini est une variété affine. On va imiter cela dans le cas lisse en appelant appelant objet géométrique muni d'une structure quotient des ensembles qui sont le quotient d'une variété M par une relation d'équivalence fermée. Et on appellera fonction lisse ou de classe C^∞ sur cet objet une fonction de classe C^∞ sur M constante sur les classes d'équivalence de la relation.

Nous avons donc deux types d'objet : les sous-ensembles et les quotients. Dans un cas comme dans l'autre, nous avons une bonne notion de fonction lisse sur cet objet. L'avantage de ce point de vue est qu'il est facile de définir alors les morphismes lisses entre objets : ce sont tout simplement des applications dont le tiré en arrière est un morphisme d'algèbre entre les fonctions lisses. Nous expliquons tout cela en section 1.6. Il est intéressant de voir que les objets "quotients" et les objets de type "inclusions" peuvent très bien être isomorphes en tant que objets. L'équivalent en géométrie algébrique est bien connu. Pour le cas lisse, qui nous intéresse, de tels résultats sont étrangement compliqués à obtenir.

Nous l'avons fait dans un cas où le quotient est défini par \mathbb{R}^2/G tel que G agit sur \mathbb{R}^2 muni des coordonnées (x, y) par $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ dont le sous ensemble correspondant est le cône défini sur \mathbb{R}^3 par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$.

Théorème 11. *Les deux objets définis ci-dessus sont isomorphes en tant qu'objets (en d'autres mots, leurs algèbres de fonctions lisses sont isomorphes en tant qu'algèbres).*

La preuve va essentiellement utiliser le théorème de préparation différentielle de Malgrange [22]. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ muni de coordonnées (x_1, \dots, x_n) . On écrit $x = (x_1, x')$ avec $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Étant donné f , de classe C^∞ au voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , à valeurs réelles, on dit que f est un « polynôme distingué en x_1 » de degré p si est de la forme $f(x) = x_1^p + \sum_{i=1}^p a_i(x')x_1^{p-i}$, avec la condition $a_i(0) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$.

Théorème 12 (B.Malgrange). *Soit f est un polynôme distingué en x_1 de degré p . Soit g de classe C^∞ , au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$. Il existe h de classe C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, et r_i de classe C^∞ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que*

$$g = fh + \sum_{i=1}^p r_i(x')x_1^{p-i}$$

Nous n'avons pas fait la théorie générale, vu la difficulté qu'il y a dans ce cas simple. L'intérêt de la notion d'objet est qu'il est très facile de définir ce qu'est un *objet de Poisson* : c'est un objet, (qu'il soit une variété ordinaire, un sous-ensemble d'une variété, un quotient d'une variété par une relation d'équivalence) muni d'un crochet de Poisson sur les fonctions. Un morphisme de Poisson d'un objet dans un autre est juste une application dont le tiré en arrière est un morphisme de Poisson. En conséquence, la notion de résolution de Poisson est aussi très facile à obtenir : c'est tout simplement une variété symplectique de même dimension que l'objet de Poisson muni d'un morphisme de Poisson vers l'objet, tout comme dans la définition 2.

On montre dans le dernier chapitre 5 des exemples où cette notion donne quelque chose d'intéressant. Le premier exemple regarder est une classe de structures de Poisson sur l'algèbre $\mathcal{F} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Il est bien connu, en géométrie algébrique, que si on prend G un groupe fini de $Sl(\mathbb{R}^2)$ qui préserve la structure de Poisson canonique $\{x, y\} = 1$, le quotient, qui est une variété affine de Poisson car G préserve la structure de Poisson, admet des résolutions symplectiques, qui sont les résolutions de du Val.

Disons quelques mots à ce sujet. Ce résultat est bien connu, certes, mais nous voulons revenir sur cette construction. Nous allons résoudre dans le chapitre 5 la singularité du Du Val dans le cas lisse pour les types de singularités A_n et D_n dont les sous groupes respectivement G_1 et G_2 agissent sur $(\mathbb{C}^2, \{x, y\} = 1)$ par $(x, y) \rightarrow (\alpha x, \alpha^{-1}y)$ et par $(x, y) \rightarrow (y, -x)$ et $(x, y) \rightarrow (\beta x, \beta^{-1}y)$ où $\alpha = \exp(\frac{\pi i}{n}), \beta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$.

Il est bien connu [18] que chacun de ces quotients est isomorphe au lieu des zéros d'un polynôme sur \mathbb{C}^3 à singularités isolées (à l'origine) de valuation 2. Tout d'abord, nous allons introduire des structures de Poisson sur l'algèbre $\mathcal{F} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ un $(n-2)$ -uplet d'éléments de \mathcal{F} . Considérons la variété affine

$$W_\Phi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \Phi(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n,$$

c'est-à-dire, l'ensemble des zéros communs des polynômes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$. Nous pouvons construire naturellement un crochet de Poisson sur \mathcal{F} [25], en posant que

$$\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi} = i_{d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{n-2}} \pi_{top}, \text{ où } \pi_{top} \text{ désigne la multidérivation } \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \text{ et } i \text{ la}$$

contraction d'une multidérivation par $(n - 2)$ -forme différentielle. Autrement dit, cette structure est définie pour toutes fonctions $F, G \in \mathcal{F}$ par :

$$\{F, G\}_{W_\Phi} = \frac{dF \wedge dG \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{n-2}}{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}. \quad (5)$$

On vérifie que cette structure est de Poisson [25]. Elle admet $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$ comme Casimirs donc elle se restreint à la variété affine W_Φ . On appelle encore $\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi}$ la restriction. Le résultat suivant sur l'éclatement en zéro de cette variété affine n'est pas inconnu. Nous l'écrivons de façon très explicite, car nous ne l'avons pas trouvé ainsi dans la littérature sur le sujet et nous pensons que le résultat écrit de cette manière est intéressant en lui-même. Nous renvoyons au chapitre 5 pour les notions d'éclatements en 0.

Théorème 13. *Soit $W_\Phi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \Phi = 0\}$ le lieu des zéros des polynômes composant $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$. Soient a_1, \dots, a_{n-2} les valuations de $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$. Soit $\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi}$ le crochet de Poisson comme en (5). Soit $P : Z \rightarrow \mathbb{K}^n$ un éclatement en $(0, \dots, 0)$.*

1. *La transformée-strictes \widetilde{W}_Φ de W_Φ , dans chaque carte U_j de cet éclatement, est une variété de la forme $W_{\Phi^{(j)}}$, où $\Phi^{(j)}$ est $(n - 2)$ -uplet de polynômes dont le i^{me} a une valuation inférieure ou égale à a_i .*
2. *Il existe une structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi}$ sur \widetilde{W}_Φ telle que $P : \widetilde{W}_\Phi \rightarrow W_\Phi$ est un morphisme de Poisson. Dans la carte U_1 , on a de plus*

$$\{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi} = x_1^{\sum_{i=1}^{n-2} a_i - n + 1} \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi^{(1)}}}$$

et de même pour les autres cartes.

3. *Quand $n = 3$ et que l'unique polynôme qui compose Φ est de valuation 2, la restriction de $\{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi}$ à la carte U_i est $\{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi^{(i)}}}$.*

En s'appuyant sur des constructions bien connues par exemple celles des singularités de Du Val, on voit que les résolutions classiques de ces singularités sont toujours du type étudiées dans le troisième point du théorème précédent et on retrouve le résultat suivant :

Corollaire 1. *Une variété affine de Poisson $(W_\Phi, \{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi})$ définie par $\Phi = 0$, où Φ est un polynôme qui apparaît dans l'étude des singularités de du Val, admet une résolution symplectique. Ceci fonctionne aussi bien sur \mathbb{R} que sur \mathbb{C} .*

En particulier, nous pouvons obtenir des résolutions symplectiques lisses des deux objets suivants :

1. L'objet A_{2k} donné dans des coordonnées locales (x, y, z) dans \mathbb{R}^3 par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^{2k}, \}$.
2. L'objet D_{2k+1}^+ est la partie positive de D_{2k+1} que l'on définit ainsi, dans des coordonnées locales (x, y, z) sur \mathbb{R}^3 , $D_{2k+1}^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid zx^2 + y^2 = z^{2k+1}, z \geq 0\}$.

Ceci est assez classique, et n'a pas encore de liens évidents avec le cas lisse, car tout cela peut se faire en géométrie algébrique. Le premier exemple intéressant qui est un vrai phénomène C^∞ et n'a pas d'équivalent dans le cas lisse consiste à considérer un sous groupe infini de $SL_2(\mathbb{R})$. Nous allons étudier en détail deux exemples. Ce sont en un sens les plus simples possibles mais la difficulté des raisonnements dans ces exemples montre combien la théorie générale sera difficile. Munissons \mathbb{R}^2 des coordonnées (a, b) . Considérons les groupes infinis $G = \mathbb{Z}$ et $G' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ils agissent sur \mathbb{R}^2 par $n \cdot (a, b) := (a + nb, b)$ et par $(n, \epsilon) \cdot (a, b) := (a + nb, \epsilon b)$ pour tout $(n, \epsilon) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, respectivement.

L'action de groupe $G = \mathbb{Z}$ ci-dessus revient à considérer la relation d'équivalence \sim sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$(a, b) \sim (a + nb, b), \quad (6)$$

pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{Z}$ et $(a, 0) \sim (a', 0)$ pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$. Pour $G' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il faut encore identifier (a, b) et $(a, -b)$. Pour cela nous considérons la relation \sim' est donc donnée par

$$(a, b) \sim' (a + nb, \pm b). \quad (7)$$

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes finis, y compris dans le cas lisse, l'algèbre des fonctions invariantes $\mathcal{F}[\mathbb{R}^2]^G$ ou $\mathcal{F}[\mathbb{R}^2]^{G'}$ n'est pas finiment engendrée. Intéressons-nous un peu à cette algèbre.

Lemme 1. *Toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ invariante par l'action de G ou G' , pour tous $j \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$ satisfait*

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial a^i \partial b^j}(a, 0) = 0.$$

En particulier (et en rappelant que $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ dont les fonctions lisses sur l'objet géométrique \mathbb{R}^2/\sim et sont donc les fonctions dont le tiré en arrière sur \mathbb{R}^2 sont lisses) :

Proposition 2. *L'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ (resp, $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim')$) des fonctions lisses sur \mathbb{R}^2/\sim (resp, \mathbb{R}^2/\sim') se décompose ainsi*

$$C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim) = C^\infty(b) + \tilde{C},$$

où $C^\infty(b)$ est l'algèbre des fonctions lisses qui ne dépendent que de la variable b (resp, b^2), et $\tilde{C} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ (resp, $\tilde{C} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim')$) est la sous-algèbre des fonctions lisses nulles avec toutes leurs dérivées partielles le long de la droite $b = 0$.

Le résultat suivant qu'on démontrera au chapitre 5 montre que la théorie est non-intéressante dans le cas complexe.

Corollaire 2. *Les fonctions holomorphes ou réelles analytiques invariantes par les actions de groupe G , G' sont les fonctions qui ne dépendent que de la variable b .*

Revenons au cas lisse. Une analyse un peu plus fine de $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ donne le résultat suivant :

Proposition 3. Une fonction F est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 / \sim si et seulement si F s'écrit sous la forme

$$F(a, b) = \alpha_0(b) + \sum_{n \geq 1} \alpha_n(b) \cos\left(2n\pi \frac{a}{b}\right) + \sum_{n \geq 1} \beta_n(b) \sin\left(2n\pi \frac{a}{b}\right),$$

où les fonctions $(\alpha_n, \beta_n)_{n \geq 1}$ sont lisses et nulles avec toutes leurs dérivées en $b = 0$. La série ci-dessus, qui plus est, est absolument convergente sur toute boule ouverte. Si de plus α_n est paire et β_n est impaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 / \sim')$.

Ce qui est intéressant, c'est que les deux actions considérées préservent le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}'$ défini par

$$\{a, b\}' = b,$$

où a, b sont des coordonnées locales sur \mathbb{R}^2 .

Lemme 2. \mathbb{R}^2/G et \mathbb{R}^2/G' sont des objets de Poisson munis de structures quotients.

On va démontrer dans le chapitre 5 que l'un et l'autre objet sont des objets de Poisson qui

1. admettent des résolutions symplectiques au sens des objets lisses, c'est à dire qu'il existe un variété symplectique de dimension 2 et un morphisme de Poisson surjectif surr
2. et que des exemples de celles-ci sont les résolutions au sens de la géométrie algébrique de A_{2k} et D_{2k+1}^+ respectivement, où k est en entier arbitraire.

Il est étonnant de voir ces structures apparaître ici.

Nous procédons ainsi. Nous commençons par le cas du groupe G . Considérons les fonctions $x = (b^k \cos(2\pi \frac{a}{b}), y = b^k \sin(2\pi \frac{a}{b}), z = b)$ pour tout entier $k > 2$. Ces fonctions sont invariantes par G : elles ne sont par contre pas de classe C^∞ , mais on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x, y, \}' = -2kz^{2k-1} \in \mathcal{A} \\ \{y, z\}' = 2x \in \mathcal{A} \\ \{z, x\}' = 2y \in \mathcal{A}. \end{array} \right.$$

Le triplet (x, y, z) définit une application

$$\phi : \mathbb{R}^2/G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

et ils vérifient la relation

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(b^k \cos\left(2\pi \frac{a}{b}\right)\right)^2 + \left(b^k \sin\left(2\pi \frac{a}{b}\right)\right)^2 \\ &= b^{2k} \\ &= z^{2k}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ils sont donc à valeurs dans la sous-variété affine donnée par $x^2 + y^2 = z^{2k}$. On reconnaît là celle qui correspond à la singularité de Du Val de type A_{2k} . Mis ensembles, ces résultats

indiquent que l'application $\phi : \mathbb{R}^2/G \rightarrow A_{2k}$ est un morphisme de Poisson de classe \mathbb{C}^k , (voir 5.2).

Ces deux ensembles sont en bijection en tant qu'ensemble car ils ont les mêmes parties régulières et même lieu singulier, qui est un point. Considérons maintenant $\psi : A_{2k} \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ la bijection réciproque de ϕ . On a étudié précédemment et on avait noté $\varphi : Z_{2k} \rightarrow A_{2k}$ la résolution symplectique usuelle de la singularité de Du Val A_{2k} décrite par l'application 1 dans la section 5.2. Le résultat auquel nous parvenons est que cette résolution, composée avec la réciproque de la bijection ensembliste entre \mathbb{R}^2/G et A_{2k} que nous venons de décrire et dont nous avons dit qu'elle respectait la structure de Poisson est une résolution de classe C^∞ . Ceci est surprenant car ϕ était une bijection mais qui n'était pas lisse.

Dans une première partie, nous allons montrer qu'il s'agit bien d'une application lisse (ce qui n'a rien d'évident et est fait à la fin de la thèse, on verra qu'on utilise des propriétés assez curieuses des résolutions symplectiques de A_n et D_n et la proposition ci-dessus).

Proposition 4. *L'application $\psi \circ \varphi$ est un morphisme d'objet lisse de $(Z_{2k}, \{\cdot, \cdot\}_{Z_{2k}})$ vers $(\mathbb{R}^2/G, \{\cdot, \cdot\}')$.*

Le théorème suivant est ensuite facile à prouver mais montre que la notre théorie est non vide.

Théorème 14. *L'application $\psi \circ \varphi : Z_{2k} \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ est une résolution symplectique lisse de l'objet de Poisson $(\mathbb{R}^2/G, \{\cdot, \cdot\}')$.*

Afin de clarifier les choses nous pouvons représenter ces objets et applications par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & Z_{2k} & \\ \psi \circ \varphi \swarrow & & \searrow \varphi \\ \mathbb{R}^2/G & \xleftarrow{\psi} & A_{2k} \end{array}$$

Le cas du quotient \mathbb{R}^2/G' est similaire. Nous avons des résultats identiques au cas \mathbb{R}^2/G et le diagramme commutatif associé est le suivant

$$\begin{array}{ccc} & Z_{2k+1} & \\ \psi \circ \varphi \swarrow & & \searrow \varphi \\ \mathbb{R}^2/G' & \xleftarrow{\psi} & D_{2k+1}^+ \end{array}$$

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre nous allons voir les prérequis nécessaires pour la lecture de ce manuscrit. En outre, différents théorèmes de bases qui seront utilisés dans les démonstrations de résultats importants seront explicités.

1.1 Rappels sur les variétés

On redonne, suivant [10] comme exemple, les bases sur les variétés différentielles.

Définition 5. Soit X un ensemble. On appelle *carte* de X un triplet $c = (U, \varphi, E)$, où U est une partie de X , E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie et φ une bijection de U sur un ouvert de l'espace E . On dit que U est le domaine de la carte et que la dimension n de E est la dimension de la carte.

Soient $c = (U, \varphi, E)$ et $c' = (U', \varphi', E')$ deux cartes de X . La bijection entre $\varphi(U \cap U')$ et $\varphi'(U \cap U')$ qui à x associe $\varphi'(\varphi^{-1}(x))$ est appelée l'application de changement de carte de c à c' . Deux cartes c et c' sont dites compatibles, si :

1. les ensembles $\varphi(U \cap U')$ et $\varphi'(U \cap U')$ sont ouverts dans E et E' respectivement,
2. les applications de changement de carte de c à c' et de c' à c sont de classe C^∞ selon le contexte.

Toutes les cartes de X en un point donné a ont une même dimension, que l'on appelle la dimension de X en a . En effet, soient $c = (U, J, E)$ et $c' = (U', J', E')$ deux cartes de la variété X en a . Les différentielles des applications de changement de carte de c à c' en $J(a)$ et de c' à c en $J'(a)$ sont des applications linéaires qui sont inverses l'une de l'autre. cela impose que E et E' ont la même dimension.

Définition 6. [10] Soit X un ensemble. On appelle *atlas* de X , un ensemble de cartes de X deux à deux C^∞ -compatibles dont l'union des domaines est X . Deux atlas de X sont dits équivalents, si leur réunion est un atlas, autrement dit si une carte quelconque de l'un est compatible à une carte quelconque de l'autre.

C'est une relation d'équivalence entre atlas de classe C^∞ de X . Plutôt que de dire "de classe C^∞ ", on dira souvent "lisse".

Définition 7. [10] *On appelle variété lisse (ou différentielle ou de classe C^∞) un ensemble X muni d'une classe d'équivalence d'atlas. Tout atlas de cette classe est appelé un atlas de la variété X , et toute carte de ces atlas est appelée une carte de la variété X .*

Soient A un atlas d'une variété lisse X . Pour qu'une carte de l'ensemble X soit une carte de la variété X , il faut et il suffit qu'elle soit C^∞ -compatible à toute carte appartenant à l'atlas A .

Nous n'avons pas demandé qu'une variété différentielle soit munie d'une topologie. Mais il existe en fait une unique topologie sur X donnée par les cartes. Pour qu'une partie Y de X soit ouverte, il faut et il suffit que, pour toute carte (U, φ, E) appartenant à l'atlas A , l'ensemble $\varphi(Y \cap U)$ soit un ouvert de l'espace vectoriel E . Pour toute carte (U, φ, E) de la variété X , U est une partie ouverte de X et φ un homéomorphisme de U sur $\varphi(U)$. Dans les exemples usuels, X vient souvent dès le début avec une topologie pour laquelle les cartes sont des homéomorphisme locaux.

On dit qu'une variété est *séparable* si elle admet un ensemble dénombrable dense. On peut alors supposer que le nombre de cartes composant un atlas est dénombrable.

Tout point d'une variété différentielle possède un voisinage ouvert homéomorphe à un espace vectoriel réel de dimension finie, et par conséquent chaque point possède un voisinage compact et connexe par arc. Celui-ci peut toujours être un sous-ensemble d'un voisinage de x donné. Toute variété différentielle est donc un espace topologique localement connexe. Pour toute partie connexe, la dimension des points est la même.

Soient X une variété différentielle et U une partie de X . On appelle **système de coordonnées** de X dans U un n -uplet $u = (u_1, \dots, u_n)$ de fonctions sur U à valeurs réelles telle que le triplet (U, u, \mathbb{R}^n) soit une carte de la variété X . Les fonctions u_i sont appelées les *fonctions coordonnées*. Si a est un point de U , on dit que u est un *système de coordonnées de X en a* , si de plus $u_i(a) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, on dit que les coordonnées sont *centrées* en a .

Soit X une variété différentielle. Soit Y une partie de X telle que pour tout $a \in Y$, il existe une carte (U, φ, E) de X en a et un sous-espace vectoriel F de E vérifiant $\varphi(U \cap Y) = \varphi(U) \cap F$. Il existe alors une unique structure de variété différentielle sur Y . Un atlas est formé tout simplement par les cartes $(U \cap Y, \varphi|_F, F)$, où (U, φ, E) est une carte de X satisfaisant les conditions ci-dessus. L'ensemble Y , muni de cette structure de variété différentielle, est appelé une **sous-variété** de X . Il est localement fermé dans X et l'inclusion est une application lisse.

1.1.1 Morphismes de variétés

On suit toujours [10] dans cette section. Soient X et Y deux variétés et f une application de X dans Y . Soient $c = (U, \varphi, E)$ et $c' = (V, \phi, F)$ des cartes de X et Y respectivement telles que $f(U) \subset V$. L'application $\phi \circ f \cdot \varphi : \varphi(U) \rightarrow \phi(V)$ est appelée *l'expression* de f dans ces cartes.

Lorsque ces cartes sont définies par des systèmes de coordonnées $u = (u_1, \dots, u_m)$ dans U et $v = (v_1, \dots, v_n)$ dans V , f s'exprime par la suite (f_1, \dots, f_n) de fonctions réelles sur $u(U)$ qui dépendent des variables (u_1, \dots, u_m) .

Soit $r \in \mathbb{N}$. On dit que l'application $f : X \rightarrow Y$ est lisse si son expression dans tout couple de cartes satisfaisant les conditions ci-dessus est de classe C^∞ .

Une application lisse de X dans Y est aussi appelée un *morphisme de variétés*. Si elle est bijective et que sa réciproque elle aussi est une fonction C^∞ , on emploie le mot *difféomorphisme*.

Il est classique que $f : X \rightarrow Y$ est une application lisse si et seulement si le tiré en arrière $f^* : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ envoie une fonction lisse dans une fonction lisse.

1.1.2 Autres notions de variétés

La définition d'une variété différentielle de classe C^k , où k est un entier ≥ 1 , que nous avons vu, est analogue à celle d'une variété différentielle de classe C^∞ , sauf que l'on remplace dans toutes les définitions C^∞ par C^k . Pour $k = 0$, on obtient ce que l'on appelle une variété topologique. Celles-ci peuvent être définies plus simplement, et on peut montrer que la définition est équivalente.

Définition 8. *On appelle variété topologique un espace topologique dont tout point possède un voisinage ouvert homéomorphe à un espace \mathbb{R}^n .*

On rappelle que les fonctions réelles analytiques et holomorphes seront définies après.

Définition 9. *Les variétés réelles analytiques se définissent comme les variétés différentielles, sauf que l'on remplace dans toutes les définitions "de classe C^∞ " par "réelle analytique". Il en va de même pour les variétés complexes, qui proviennent des fonctions holomorphes à plusieurs variables*

Toute variété analytique réelle est en particulier une variété différentielle de classe C^∞ .

Définition 10. *Les variétés complexes se définissent comme les variétés réelles, sauf que les espaces vectoriels qui interviennent dans les cartes sont des espaces vectoriels sur \mathbb{C} et que les applications de changement de carte sont analytiques complexes.*

1.2 Les fonctions complexes à plusieurs variables et les fonctions analytiques réelles

Maintenant, on rappelle les notions de fonctions holomorphes et fonctions réelles analytiques qui seront utilisées dans le deuxième et troisième chapitre.

On s'inspire dans toute cette section de [23]

On choisit $n \geq 1$. Considérons l'espace vectoriel complexe \mathbb{C}^n dont les coordonnées canoniques seront notées par z_1, \dots, z_n de telle sorte que tout point $z \in \mathbb{C}^n$, peut s'exprimer comme $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. En considérant que \mathbb{C}^n est aussi \mathbb{R}^{2n} , on peut considérer un système de $2n$ coordonnées réelles $\{(x_k, y_k)\}_{k=1, \dots, n}$ où $z_k = x_k + iy_k$.

Si l'on dispose d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ définie sur un ouvert U de \mathbb{C}^n , en considérant que \mathbb{C}^n est aussi \mathbb{R}^{2n} , cela a un sens de demander qu'elle soit différentielle au sens usuel sur \mathbb{R} . On dira alors qu'elle est \mathbb{R} -différentiable. On peut aussi imiter cette définition et définir la différentiabilité complexe comme cela :

Définition 11. *Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n . Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite \mathbb{C} -différentiable sur U si f est \mathbb{R} -différentiable et pour tout point $a \in U$ il existe une application linéaire $T_a : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :*

$$f(z) = f(a) + T_a(z - a) + o(\|z - a\|).$$

La forme linéaire T_a s'appelle *différentielle de f en a* .

On reprend [23] dans les lignes suivantes. Soit U un ouvert quelconque de \mathbb{C}^n . Considérons une fonction complexe f définie sur $U \in \mathbb{C}^n$. Supposons que la fonction f , en tant que fonction complexe de $2n$ variables réelles à valeurs dans \mathbb{C} , soit \mathbb{R} -différentiable. On peut écrire donc sa différentielle dans un point $a \in \Omega$:

$$d_a f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) d_a x_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}(a) d_a y_k.$$

En conséquence, on peut considérer son développement de Taylor au premier ordre au voisinage d'un point $a \in \Omega$, en écrivant

$$f(z) = f(a) + d_a f(z - a) + o(\|z - a\|).$$

Pour transformer cette expression, définissons les opérateurs différentiels suivants :

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \quad (1.1)$$

pour chaque $k = 1, \dots, n$. On a les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y_k} = i \left(\frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right) \quad (1.2)$$

A l'aide de ces opérateurs différentiels, l'expression de la différentielle réelle devient :

$$f(z) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k}(a)(z_k - a_k) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}(a)(\overline{z_k - a_k}) + o(\|z - a\|). \quad (1.3)$$

cela implique qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathbb{C} -différentiable si et seulement si elle est \mathbb{R} -différentiable et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0$, pour tout $k = 1, \dots, n$. Et dans ce cas, la différentielle de f , en tant que fonction à variables complexes, est donnée par :

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

où on pose $dz_k = dx_k + idy_k$ et $d\bar{z}_k = dx_k - idy_k$ pour chaque $k = 1, \dots, n$.

Définition 12. Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction vue comme une fonction réelle différentiable sur \mathbb{R} . On dit que la fonction f est une fonction holomorphe sur Ω si elle vérifie les n équations (dites de Cauchy-Riemann) :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = 0.$$

L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω est noté $O(\Omega)$. On a en fait démontré la proposition suivante :

Proposition 5. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction \mathbb{R} -différentiable. La fonction f est holomorphe si et seulement si f est \mathbb{C} -différentiable.

Remarque 1. 1. Il découle de la définition précédente que si f est une fonction holomorphe, alors f est une fonction holomorphe en chaque variable séparément.
2. C'est théorème très difficile que l'inverse de l'implication de la proposition précédente est vrai.

On rappelle la définition des fonctions complexes analytiques. pour tout $z \in D(a, R)$ le polydisque (ouvert) de centre a et rayon R est l'ensemble défini par :

$$D(a, R) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < R_k \text{ pour tout } k = 1, \dots, n\}$$

où les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est un ensemble rangé de n entier non négatifs.

Définition 13. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C}^n . Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique sur Ω si f coïncide au voisinage de chaque point avec la somme d'une série entière convergente, c'est à dire, si pour chaque point $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ il existe $R = (R_1, \dots, R_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et des nombres complexes $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ tels que

$$f(z) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - a_n)^{\alpha_n}$$

pour tout $z \in D(a, R)$.

L'expression $f(z) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (z_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (z_n - a_n)^{\alpha_n}$ s'appelle développement de f au voisinage de a .

Le théorème suivant est classique.

Théorème 15. Soit U un ouvert de \mathbb{C}^n . Une fonction f est une fonction holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique sur U .

Une fonction analytique réelle sur un ouvert de \mathbb{R}^n est une fonction f telle que chaque point $a \in U$ soit le centre d'une boule ouverte où la fonction est donnée par

$$f(x) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_n - a_n)^{\alpha_n}$$

où a_1, \dots, a_n sont les coordonnées de a .

Je me contente de cela pour les fonctions complexe à plusieurs variables, et je passe au structures de Poisson et symplectique sur les variétés différentiables. Tout d'abord, je vais préciser les notations et rappeler quelques résultats classiques qui nous seront utiles par la suite.

1.3 Autour de la notion de variété de Poisson

On introduit les structures de Poisson en se basant sur un cours de monsieur Boucetta [3]. Parfois, [18] sera aussi utilisée. On fixera, comme lui les notations suivantes :

- 0 $C^\infty(M)$ les fonctions lisses à valeurs réelles sur M .
- 1. Pour tout entier $1 \leq q \leq d$, $\Omega^q(M)$ les q -formes différentielles sur M .
- 2 $X^1(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteur sur M , que l'on peut voir comme les sections lisses du fibré tangent $TM \rightarrow M$. Plus généralement, on notera, pour tout entier $2 \leq q \leq d$, $X^q(M)$ l'espace des champs des multivecteurs que l'on voit comme étant les sections lisses du fibré vectoriel $\wedge^q TM \rightarrow M$.

Un point fondamental de géométrie différentielle est que $X^q(M)$ et $\Omega^q(M)$ ont une seconde description équivalente à la première.

- 1. Pour tout $1 \leq q \leq d$, $\Omega^q(M)$ s'identifie à l'espace des applications

$$\overbrace{X^1(M) \times \dots \times X^1(M)}^{q \text{ termes}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

qui sont $C^\infty(M)$ -linéaires en chaque variables et alternées.

- 2. Pour tout $1 \leq q \leq d$, l'espace des multichamps de vecteurs $X^q(M)$ s'identifie à l'espace des applications

$$\overbrace{\Omega^1(M) \times, \dots, \times \Omega^1(M)}^{q \text{ termes}} \longrightarrow C^\infty(M)$$

qui sont $C^\infty(M)$ -linéaires en chaque variables et alternées.

Il existe encore une autre caractérisation. Pour tout $1 \leq q \leq d$, l'espace des multichamps de vecteur s'identifient aux multidérivation sur M et peuvent être vues comme des applications

$$\begin{aligned} \overbrace{C^\infty(M) \times, \dots, \times C^\infty(M)}^{q \text{ termes}} &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f_1, \dots, f_q) &\longmapsto \{f_1, \dots, f_q\}, \end{aligned}$$

telles que

- 1. $\{\cdot, \dots, \cdot\}$ est \mathbb{R} -multilinéaire alternée,
- 2. $\{\cdot, \dots, \cdot\}$ vérifie la règle de Leibniz, c'est-à-dire, qu'elle est une dérivation en la première variable, pour tout $f, g, f_2, \dots, f_q \in C^\infty(M)$,

$$\{fg, f_2, \dots, f_q\} = g \{f, f_2, \dots, f_q\} + f \{g, f_2, \dots, f_q\}.$$

Par antisymétrie, $\{\cdot, \dots, \cdot\}$ est une dérivation en chaque variable, d'où le nom.

Nous utiliserons ces diverses caractérisations dans tout ce travail. Intéressons nous au crochets d'ordre 2. On définit le Jacobiateur dans ce cas comme étant l'application

$$J : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

donnée par

$$J(f, g, h) = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}.$$

Proposition 6. *Le Jacobiateur est un-3 champ de vecteurs.*

Proofs. Si $f = g$ ou $f = h$ ou $g = h$ alors $J(f, g, h) = 0$, ce qui implique que J est alternée. De plus un calcul long mais élémentaire donne :

$$J(f_1 f_2, g, h) = f_1 J(f_2, g, h) + f_2 J(f_1, g, h).$$

En d'autres mots J est une multidérivation d'ordre 3. Ceci, comme on a vu, est la même chose qu'un 3-champ de vecteurs. \square

On va interpréter ce résultat, qui est un cas particulier d'un cas plus général. Le crochet des champs de vecteurs est une loi de composition interne bien connue sur $X^1(M)$, se prolonge de manière unique en une loi de composition bilinéaire gradué sur $X(M)$, noté $(P, Q) \rightarrow [P, Q]$ et appelé crochet de Schouten-Nijenhuis. Nous donnons ici sans le démontrer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du crochet de Schouten-Nijenhuis et donne ses propriétés (qui en fait une algèbre de Gerstenhaber).

Théorème 16. [11] *Soit M une variété lisse. Alors il existe sur $X(M) = \bigoplus_p X^p(M)$ un crochet $[\cdot, \cdot]$ appelé crochet de Schouten-Nijenhuis et vérifiant les propriétés suivantes :*

1. (gradué de degré -1) $[X^a(M)X^b(M)] \subset X^{a+b-1}(M)$.
2. (anti-commutativité graduée) pour tout $A \in X^a(M)$ et $B \in X^b(M)$, alors

$$[A, B] = -(-1)^{(a-1)(b-1)} [B, A].$$

3. (Leibniz gradué) pour tous $A \in X^a(M)$, $B \in X^b(M)$ et $C \in X^c(M)$, alors

$$[A, B \wedge C] = [A, B] \wedge C + (-1)^{(a-1)b} B \wedge [A, C],$$

$$[A \wedge B, C] = A \wedge [B, C] + (-1)^{(c-1)b} [A, C] \wedge B.$$

4. (Jacobi gradué) Pour tous $A \in X^a(M)$, $B \in X^b(M)$ et $C \in X^c(M)$,

$$(-1)^{(a-1)(c-1)} [A, [B, C]] + (-1)^{(b-1)(a-1)} [B, [C, A]] + (-1)^{(c-1)(b-1)} [C, [A, B]].$$

5. Pour X est un champ de vecteur, $A \in X^a(M)$, le crochet de Schouten-Nijenhuis de X et A coïncide avec le crochet de Lie au sens usuel (vu comme dérivée en temps 0 du flot).

6. Pour tout champ de vecteur X , le crochet de Schouten-Nijenhuis de X et f est $X(f)$.

Soit $\{\cdot, \cdot\}$ une bidérivation que l'on va voir comme un champs de vecteurs d'ordre 2 appelé π . Soit J le Jacobiateur défini par la proposition 6, celui-ci peut se voir comme un champ 3-vecteur Π . Par définition

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) \quad \text{et} \quad J(f, g, h) = \Pi(df, dg, dh).$$

pour $f, g, h \in C^\infty$.

Proposition 7. *Le champ de 3-vecteur Π est la moitié du crochet de Schouten-Nijenhuis de π par lui même, c'est-à-dire,*

$$\Pi = \frac{1}{2} [\pi, \pi].$$

Le " $\frac{1}{2}$ " peut être éliminé en choisissant d'autres conventions. Il sera important de s'en souvenir quand on étudiera la structure de Jacobi.

1.3.1 Structures de Poisson

Nous donnons dans cette section deux définitions équivalentes d'une structure de Poisson.

Définition 14. [3] *Une structure de Poisson sur une variété lisse M est la donnée d'une bidérivation antisymétrique sur $C^\infty(M)$ dont le Jacobiateur est nul, c'est-à-dire, la donnée de*

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f, g) &\mapsto \{f, g\}, \end{aligned}$$

tel que

1. $\{\cdot, \cdot\}$ est une application \mathbb{R} -bilinéaire alternée,
2. $\{\cdot, \cdot\}$ vérifie la règle de Leibniz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}, \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M),$$

3. $\{\cdot, \cdot\}$ vérifie l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M).$$

La proposition 6 donne une autre définition équivalente d'une structure de Poisson.

Définition 15. *Une structure de Poisson sur une variété lisse M est un champ de bivecteurs $\pi \in X^2(M)$ tel que*

$$[\pi, \pi] = 0.$$

Dans la suite on utilisera π ou $\{\cdot, \cdot\}$ en alternance

$$\pi = \{\cdot, \cdot\}.$$

On écrira π pour dire qu'on le pense comme un bivecteur (section de $\wedge^2 TM$) et $\{\cdot, \cdot\}$ pour dire qu'on le pense comme bidéivation. Dans un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) , nous notons indifféremment ∂_i ou $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le i -ème vecteur de la base canonique de l'espace tangent et dx_i la i -ème forme de la base canonique de l'espace dual.

Maintenant, ∂_i signifie $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Un champ de bivecteurs exprimé dans un système de coordonnées (x_1, \dots, x_d) par

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{ij} \partial_i \wedge \partial_j,$$

où $\pi_{ij} = \{x_i, x_j\} = \pi(dx_i, dx_j)$, est de Poisson si et seulement si

$$\sum_{j=1}^d (\pi_{mj} \partial_j \pi_{np} + \pi_{nj} \partial_j \pi_{pm} + \pi_{pj} \partial_j \pi_{mn}) = 0$$

pour tout $1 \leq m < n < p \leq d$.

Exemple 2. *Tout champ de bivecteurs sur \mathbb{R}^2 est de Poisson.*

Soit (M, π) une variété de Poisson et soit (x_1, \dots, x_d) un système de coordonnées et

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{ij} \partial_i \wedge \partial_j.$$

Le crochet de Poisson de deux fonctions f et g est donné par

$$\{x_i, x_j\} = \pi(dx_i, dx_j),$$

soit, localement

$$\{f, g\} = \sum_{i < j} \pi_{ij} (\partial_i f \partial_j g - \partial_i g \partial_j f).$$

Le champ de vecteurs X_f défini par la dérivation des fonctions lisses

$$g \mapsto \{f, g\}$$

est appelé *champ hamiltonien* de f . Dans des coordonnées on a

$$X_f = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \pi_{ij} \partial_i f \right) \partial_j$$

Le crochet de Schouten-Nijenhuis donne l'expression :

$$X_f = -[\pi, f] = -[f, \pi]$$

Le champ de bivecteurs π définit un morphisme de fibrés vectoriels, appelé *ancree*,

$$\pi^\# : T^*M \rightarrow TM,$$

donné par

$$\beta(\pi^\#(\alpha)) = -\alpha(\pi^\#(\beta)) = \pi(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in T^*M.$$

Notons que $X_f = \pi^\#(df)$. Par définition

$$\pi^\#(dx_i) = \sum_{j=1}^d \pi_{ij} \partial_j. \quad (1.4)$$

Dans les bases (dx_1, \dots, dx_d) et $(\partial_1, \dots, \partial_d)$ Le rang (dimension de l'image) de l'application linéaire

$$\pi^\#(p) : T_p^*M \rightarrow T_pM$$

est appelé rang de π au point $p \in M$. En vertu de (1.4), $\pi^\#$ est donné par la matrice anti-symétrique

$$(\pi_{ij}(p))_{1 \leq i < j \leq d}$$

et il est donc pair en tout point p . Il n'est pas constant sur la variété.

1.3.2 Morphismes de Poisson

Soient (M_1, π_1) et (M_2, π_2) deux variétés de Poisson et $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ une application lisse. Contrairement aux formes différentielles qui se tirent en arrière, les champs de vecteurs ne se poussent pas en avant, ni ne se tirent en arrière. Du coup, on ne peut pas dire que " φ " est de Poisson si $\varphi^* \pi_1 = \pi_2$, cela n'a aucun sens. Il y a néanmoins une manière naturelle de définir les morphismes. En utilisant le fait que π_1 et π_2 peuvent être vus comme des crochets de Lie $\{\cdot, \cdot\}_1$ et $\{\cdot, \cdot\}_2$ sur $C^\infty(M_1)$ et $C^\infty(M_2)$. φ est un *morphisme de Poisson* si $\varphi^* : C^\infty(M_2) \rightarrow C^\infty(M_1)$ est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire,

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_1 = \varphi^* \{f, g\}_2 \quad \forall f, g \in C^\infty(M_2).$$

Revenons aux bivecteurs, on calcul pour tout $m \in M$,

$$\begin{aligned} \{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{1|m} &= \pi_{1|m}(d\varphi^* f, d\varphi^* g) \\ &= \pi_{1|m}(\varphi^*(d_{\varphi(m)} f), \varphi^*(d_{\varphi(m)} g)) \\ &= (\wedge^2 T_m \varphi \pi_1)(d_{\varphi(m)} f, d_{\varphi(m)} g) \end{aligned}$$

On a donc

$$\wedge^2 T_m \varphi (\pi_{1|m}) = \pi_{2|m}. \quad (1.5)$$

Inversement, si (1.5) est vérifié pour tout $m \in M_1$, on vérifie que φ est de Poisson. l'équation (1.5) s'écrit encore :

$$\begin{array}{ccc}
 T_m^* M_1 & \xrightarrow{\pi_1^\#} & T_m M_1 \\
 T_m^* \varphi \uparrow & & \downarrow T_m \varphi \\
 T_{\varphi(m)}^* M_2 & \xrightarrow{\pi_1^\#} & T_{\varphi(m)} M_2
 \end{array} \tag{1.6}$$

Proposition 8. *Soit (M, π) une variété de Poisson. Alors :*

1. *Tout champ de vecteurs hamiltonien est un champ de Poisson.*
2. *Le flot d'un champ de Poisson X est un isomorphisme de Poisson.*

1.3.3 Théorème de Darboux-Weinstein

Le théorème suivant est fondamental. On l'appelle en anglais Weinstein splitting Theorem.

Théorème 17 (Théorème de Darboux-Weinstein).

Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $p \in M$ un point où le rang de π est $2r$. Alors il existe un système de coordonnées $(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, x_1, \dots, x_d)$ centré en p et tel que

$$\pi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \pi_{ij}(x_1, \dots, x_d) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{1.7}$$

où $\pi_{ij}(0) = 0$ pour $i, j = 1, \dots, d$.

Ces coordonnées sont appelées coordonnées de Darboux-Weinstein. Une conséquence est le suivant

Corollaire 3. *Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $p \in M$ un point régulier où le rang de π est $2r$. Alors il existe un système de coordonnées*

$$(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, x_1, \dots, x_d)$$

centré en p , tel que

$$\pi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} \tag{1.8}$$

Un cas particulier important est le cas où le rang du champ de bivecteurs de Poisson est égal à la dimension de la variété. On appelle une variété de Poisson symplectique la variété de Poisson (M, π) telle que le rang de π est égal à la dimension de M en tout point.

Corollaire 4. *Soit (M, π) une variété de Poisson symplectique de dimension $2r$ et soit $p \in M$. Alors il existe un système de coordonnées $(p_1, q_1, \dots, p_r, q_r)$ centré en p , tel que*

$$\pi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}. \tag{1.9}$$

Ces coordonnées sont appelées coordonnées de Darboux.

En ce cas, $\pi^\#(p) : T_p^*M \rightarrow T_pM$ est un isomorphisme de fibré et on peut alors définir la 2-forme w par

$$w(u, v) = \pi(\pi^{\#-1}(u), \pi^{\#-1}(v)) \quad (1.10)$$

On obtient ainsi une 2-forme différentielle non dégénérée par construction. Dans un système de coordonnées :

$$w = \sum_{i=1}^r dq_i \wedge dp_i. \quad (1.11)$$

Cette relation montre que w est une 2-forme fermée. On a donc montré les résultats suivants.

Proposition 9. *Soit (M, w) une variété symplectique. Alors le champ de bivecteurs π associé à w est de Poisson. Inversement, soit (M, π) une variété de Poisson telle que le rang de π est égale à la dimension de M en tout point de M . Alors la 2-forme w associé à π est symplectique.*

1.4 Sous-variétés de Poisson-Dirac

Nous allons introduire suivant [18] un point de vue algébrique sur les sous-variétés de Poisson-Dirac (voir aussi [29]).

Soit $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ une algèbre de Poisson, soit $I \subset \mathcal{A}$ un idéal de l'algèbre \mathcal{A} , que l'on ne suppose pas être un idéal pour le crochet de Poisson.

Soit $N(I)$ le normalisateur de I pour $\{\cdot, \cdot\}$ défini ainsi :

$$N(I) = \{F \in \mathcal{A} \mid \{I, F\} \subset I\}.$$

Il est clair que $N(I)$ est une sous algèbre de Poisson de $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$, car $N(I)$ est stable pour chacune des trois lois $+$, \times et $\{\cdot, \cdot\}$,

1. pour tous $F, G \in N(I)$ et $H \in I$ on a, par l'identité de Jacobi, $\{\{F, G\}, H\} = \{\{G, H\}, F\} - \{\{H, F\}, G\}$. Le terme de droite est dans I pour tout $H \in I$. Donc $\{F, G\}$ est aussi dans $N(I)$ et $N(I)$ est stable par $\{\cdot, \cdot\}$.
2. pour tous $F, G \in N(I)$ et $H \in I$ on a $\{F + G, H\} = \{F, H\} + \{G, H\}$. Cet élément est dans I , donc $F + G \in N(I)$. Donc $N(I)$ est stable par $+$.
3. pour tous $F, G \in N(I)$ et $H \in I$ on a $\{F \times G, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$. Le terme de gauche est dans I pour tout $H \in I$, donc $F \times G \in N(I)$. Donc $N(I)$ est stable par \times .

Par définition $I \cap N(I)$ est un idéal de Poisson de $N(I)$. Donc le quotient $\frac{N(I)}{N(I) \cap I}$ hérite d'une structure d'algèbre de Poisson $(\frac{N(I)}{N(I) \cap I}, \{\cdot, \cdot\}_I)$.

Soit maintenant h_1, \dots, h_m des éléments de \mathcal{A} telle que la matrice dite "de Poisson" $C = (\{h_i, h_j\})_{i,j=1}^m$ soit inversible dans \mathcal{A} . On note C^{-1} son inverse et C_{ij}^{-1} ses coefficients. On définit une bidérivation de \mathcal{A} par :

$$\{a, b\}' = \{a, b\} - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) \{h_j, b\}, \quad (1.12)$$

où $a, b \in \mathcal{A}$. Le crochet $\{a, b\}'$ est antisymétrique car C^{-1} est une matrice antisymétrique.

Lemme 3. Soient I l'idéal engendré par des éléments h_1, \dots, h_m d'une algèbre de Poisson $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ telle que la matrice $C = (\{h_i, h_j\})_{i,j=1}^m$ est inversible dans \mathcal{A} . L'idéal I est un idéal du crochet (1.12) c'est-à-dire que $\{A, I\}' \subset I$.

Démonstration. Pour tout entier k compris entre 1 et m ,

$$\begin{aligned} \{a, h_k\}' &= \{a, h_k\} - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) \{h_j, h_k\} \\ &= \{a, h_k\} - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) C_{jk} \\ &= \{a, h_k\} - \sum_{i=1}^m \{a, h_i\} \sum_{j=1}^m (C_{ij}^{-1}) C_{jk} \\ &= \{a, h_k\} - \{a, h_k\} = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ceci implique $\{A, I\}' \subset I$. □

En conséquence du lemme précédent, le crochet $\{\cdot, \cdot\}'$ passe au quotient sur $X = \mathcal{A}/I$ en un crochet $\{\cdot, \cdot\}^X$. Nous allons comparer $(\mathcal{A}/I, \{\cdot, \cdot\}^X)$ et $\left(\frac{N(I)}{N(I) \cap I}, \{\cdot, \cdot\}_I\right)$. Nous commençons par une définition :

Définition 16. Soit $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ une algèbre de Poisson, un idéal I de l'algèbre (\mathcal{A}, \cdot) est dit un idéal de Poisson-Dirac si

$$I + N(I) = \mathcal{A}. \tag{1.14}$$

Lemme 4. Soient I l'idéal engendré par des éléments h_1, \dots, h_m d'une algèbre de Poisson $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ telle que la matrice $C = (\{h_i, h_j\})_{i,j=1}^m$ est inversible dans \mathcal{A} . Alors I est un idéal de Poisson-Dirac de $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$.

Preuve. On observe que pour tout $a \in \mathcal{A}$ s'écrit

$$a = a - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j + \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j.$$

Le terme $\left[a - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j \right]$ est dans $N(I)$ car, par un calcul direct, on a pour

tout k :

$$\begin{aligned}
 \left\{ a - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j, h_k \right\} &= \{a, h_k\} - \left\{ \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j, h_k \right\} \\
 &= \{a, h_k\} - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) \{h_j, h_k\} \\
 &\quad - \left\{ \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}), h_k \right\} h_j \\
 &= \{a, h_k\} - \sum_{i=1}^m \{a, h_i\} \sum_{j=1}^m (C_{ij}^{-1}) C_{jk} \\
 &\quad - \left\{ \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j, h_k \right\} h_j \\
 &= \{a, h_k\} - \{a, h_k\} - \left\{ \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j, h_k \right\} h_j \\
 &= 0 - \left\{ \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j, h_k \right\} h_j.
 \end{aligned}$$

Cet élément est dans I . Ceci implique que $\left\{ a - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j, F \right\} \in I$ pour tout $F \in I$. Donc $\left[a - \sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j \right] \in N(I)$. Maintenant,

$$\left[\sum_{i,j=1}^m \{a, h_i\} (C_{ij}^{-1}) h_j \right],$$

est dans I car $h_1, \dots, h_m \in I$. On a donc $I + N(I) = \mathcal{A}$. \square

Quand I est un idéal de Poisson-Dirac de $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\}^X)$, on a un isomorphisme naturel Φ d'algèbre $\mathcal{A}/I \simeq \frac{N(I)}{I \cap N(I)}$ qui envoie $\widehat{F} \in \mathcal{A}$ la classe de $\underline{F} \in N(I)$ modulo $N(I) \cap I$ où $\underline{F} \in N(I)$ est choisi tel que sa classe modulo I soit \widehat{F} .

Théorème 18. *Soit $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ une algèbre de Poisson et $I \subset \mathcal{A}$ un idéal de l'algèbre \mathcal{A} .*

1. *Le quotient $N(I)/(N(I) \cap I)$ est muni d'un crochet de Poisson naturel $\{\cdot, \cdot\}_I$.*
2. *Si I est de Poisson-Dirac dans $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$, alors \mathcal{A}/I est isomorphe à $N(I)/(N(I) \cap I)$. La structure de Poisson transportée est définie pour tout $\widehat{F}, \widehat{G} \in \mathcal{A}/I$ par*

$$\left\{ \widehat{F}, \widehat{G} \right\}_{\mathcal{A}/I} = \{ \underline{F}, \underline{G} \} \text{ modulo } I$$

où $\underline{F}, \underline{G} \in N(I)$ sont tels que leur classe modulo I est \widehat{F}, \widehat{G} respectivement.

3. Quand I est l'idéal engendré par des éléments h_1, \dots, h_m d'une algèbre de Poisson $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ telle que la matrice $C = (\{h_i, h_j\})_{i,j=1}^m$ est inversible dans \mathcal{A} , alors I est de Poisson-Dirac et la structure de Poisson $\{\widehat{F}, \widehat{G}\}_{\mathcal{A}/I}$ coïncide avec la structure $\{\cdot, \cdot\}^X$ induite par le crochet (1.12) dont I est un idéal.

Preuve. Il ne reste à montrer que le troisième point. Pour $\underline{F}, \underline{G} \in N(I)$, il découle de (1.12) que

$$\{\underline{F}, \underline{G}\}' - \{\underline{F}, \underline{G}\} = \sum_{i,j} \{\underline{F}, h_i\} C_{ij}^{-1} \{h_j, \underline{G}\}$$

est un élément de I^2 (car $h_i, h_j \in I$). Or $I^2 \subset I$ et $I^2 \subset N(I)$. En particulier, $\{\underline{F}, \underline{G}\}' \in N(I)$ et sa classe modulo $N(I) \cap I$ est la même que celle de $\{\underline{F}, \underline{G}\}$, et les deux structures induisent donc le même crochet. \square

On va interpréter ceci de façon géométrique.

Définition 17. Soit $(M, \{\cdot, \cdot\})$ une variété de Poisson, une sous variété $N \subset M$ est dite sous-variété de Poisson-Dirac si chaque fonction au voisinage d'un point de N est la restriction d'une fonction sur M dont le champ de vecteur hamiltonien est tangent à N .

Le lien est le suivant : une sous variété N est, par définition, une sous variété de Poisson-Dirac si et seulement si l'idéal I_N des fonctions nulles sur N est un idéal de Poisson-Dirac de $C^\infty(M)$.

Corollaire 5. Soit N une sous-variété de Poisson-Dirac d'une variété de Poisson $(M, \{\cdot, \cdot\})$. Il existe une structure de Poisson unique $\{\cdot, \cdot\}_N$ sur N telle que, pour chaque $F, G \in C^\infty(N)$, on a

$$\{F, G\}_N = \left\{ \widetilde{F}, \widetilde{G} \right\}_{|_N},$$

où \widetilde{F} est une extension arbitraire de F à M , tel que le champ de vecteurs hamiltonien $X_{\widetilde{F}}$ est tangent à N en tous les points de N , et \widetilde{G} est une extension arbitraire de G à M ¹

En particulier, chaque champ de vecteur hamiltonien sur $(N, \{\cdot, \cdot\}_N)$ est la restriction à N d'un champ de vecteur hamiltonien sur $(M, \{\cdot, \cdot\})$. La structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_N$ est appelée *réduction de Poisson-Dirac* de la structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$.

On va résumer la théorie géométrique ainsi

Proposition 10. Soit (M, π) une variété de Poisson. Si on a

1. N une sous-variété de Poisson-Dirac de M ,
2. S une sous-variété de Poisson de M ,

1. Il n'est pas nécessaire que $X_{\widetilde{G}}$ soit tangent à N si $X_{\widetilde{F}}$ est tangent à N car $\{\widetilde{F}, \widetilde{G}\} = X_{\widetilde{F}}[\widetilde{G}]$ ne dépend pas, en ce cas, de l'extension \widetilde{G} . Il suffit bien entendu que les extensions de $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ soient des extensions locales : il est inutile qu'elles soient définies sur M tout entier.

Contexte	Structure réduite
Algébrique : I est de Poisson-Dirac si $I + N(I) = A$ où $(A, \{\cdot, \cdot\})$ une algèbre de Poisson.	$\frac{N(I_N)}{N(I_N) \cap I} \simeq A/I$ hérite d'une structure de Poisson
Géométrique : $N \subset (M, \{\cdot, \cdot\})$ sous variété telle que $\forall F \in C^\infty(N), \exists \tilde{F} \in C^\infty(M)$ telle que $\tilde{F} _N = F$ et $X_{\tilde{F}}$ tangent à N	La structure réduite est $\{F, G\}_N = \left\{ \tilde{F}, G \right\} _N$, où $X_{\tilde{F}}$ est tangent à N
$N \subset M$ est de Poisson-Dirac si il existe $E \subseteq TM _N$ un sous fibré tel que $E_n \oplus T_n N = T_n M$ et $\pi_n^\#(T_n N)^\perp \subset E_n$. Autrement dit $\pi_n = \pi_n^N + \pi_n'$, où $\pi_n^N \in \Lambda^2 T_n N$ et $\pi_n' \in \Lambda^2 E_n$.	La structure réduite est π^N .
$N \subset M$ est de Poisson-Dirac si Il existe des coordonnées $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r$ telle que $\pi = \sum_{i,j=1}^n G_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ $+ \sum_{i,j=1}^r H_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r F_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}$ où F_{ij} s'annulent en $y = 0$.	La structure réduite est $\pi^N = \sum_{i,j=1}^n G_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$.

TABLE 1.1 – Sous variétés de Poisson-Dirac.

3. Pour tout $n \in S \cap N$, on a $T_n S + T_n N = T_n M$

alors $S \cap N$ est une sous-variété de Poisson de N , et une sous-variété de Poisson-Dirac de S .

Proofs. Le fait que $S \cap N$ est une sous-variété est un théorème classique [1]. Pour montrer que $S \cap N \subset N$ est une sous-variété de Poisson, il faut montrer que pour tout $F \in C^\infty(N)$ $(\pi^N)^\# dF = X_F^N$ est tangent à $S \cap N$ où π^N est la structure de Poisson réduite sur N . Soit $F \in C^\infty(N)$ une fonction locale et X_F^N son champ hamiltonien. On sait qu'il existe une extension \tilde{F} de F à M dont le champ hamiltonien $X_{\tilde{F}}$ est tangent à N . Par définition de la structure de Poisson réduite, on a $X_{\tilde{F}}|_N = X_F^N$. Or $X_{\tilde{F}}$ est tangent à S car S est une sous-variété de Poisson de M . Pour tout point $m \in N \cap S$, le vecteur $X_F^N|_m$ étant égal à $X_{\tilde{F}}|_m$ est donc un élément de $T_m S$. Comme c'est aussi un élément de $T_n N$ par définition, c'est un élément de $T_n S \cap T_n N = T_n(N \cap S)$. Autrement dit, X_F^N est tangent à $S \cap N$, ce qui signifie sur $S \cap N$ est une sous-variété de Poisson dans (N, π^N) .

Pour la seconde partie, nous suivons [19]. Montrons maintenant le deuxième point " $S \cap N$ est une sous-variété de Poisson-Dirac de S ". Soient $p \in S \cap N$ et une fonction H définie sur un voisinage V de p dans $S \cap N$. Comme $S \cap N$ est une sous-variété de Poisson de N , il existe une extension locale H' de H définie sur un voisinage U' de p dans N , telle que

$$H'|_{U'} = H|_V.$$

Où V' est un voisinage de p dans $S \cap N$, d'une part, on a N est une sous-variété de Poisson-Dirac de M , il existe donc une extension locale H'' de $H'|_{U'}$, définie sur un voisinage U''

de p dans M , telle que $X_{H''}$ est tangent à N en tout point de $V'' = V' \cap U''$ où V'' est un voisinage de p dans N telle que

$$H''|_{V''} = H'|_{V''} = H|_{V''}.$$

D'autre part, comme S est une sous variété de Poisson de M , $X_{H''}$ est tangent à S en tout point de S . On en déduit donc que H admet une extension locale $H''|_S$ défini sur un voisinage $U'' \cap S$ de p dans S telle que $X_{H''|_S}$ est tangent à $S \cap N$ en tout point de $V'' \cap S$ où $V'' \cap S$ est un voisinage de p dans $S \cap N$, telle que

$$H''|_{V'' \cap S} = H'|_{V'' \cap S} = H|_{V'' \cap S}.$$

Ceci prouve le deuxième point et finit la démonstration. □

Exemple 3. Soit L une feuille symplectique d'une variété de Poisson M , et $N \subset M$ une sous variété qui transversale à L en n ,

$$T_n M = T_n L \oplus T_n N.$$

On peut alors vérifier que les conditions 1,2 et 3 de la proposition 10 sont satisfaites dans un voisinage ouvert dans N contenant n . Ceci découle de l'existence des coordonnées de Weinstein.

Exemple 4. Soient (M, w) une variété symplectique et $N \subset M$ une sous variété de Poisson-Dirac de M , la restriction $w|_N$ dans N de la forme symplectique w est inversible et la réduction de Dirac sur N est $w|_N$, autrement dit les sous variétés de Poisson-Dirac des variétés symplectique sont exactement les sous variétés symplectiques. Ce que l'on vérifie ainsi, comme N est une sous variété de Poisson-Dirac de M , Alors pour toute fonction F défini sur un voisinage V d'un point n dans N il existe une extension locale F' de F défini sur un voisinage V' de n dans N telle que $X_{F'}$ est tangent à N en tout point de $U = V \cap V'$, ainsi $X_F(n) = X_{F'}(n)$. Puisque $X_F \neq 0$ car $dF \neq 0$, et $X_F(n) = X_{F'}(n)$ n'est pas nul. Donc la structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}'$ sur N est inversible donc elle est symplectique.

1.5 Variété de Jacobi

Les variétés de Jacobi contiennent les Poisson (donc les variétés symplectiques) et les variétés de contacts comme cas particulier. Plus précisément, on peut retenir que les variétés de Jacobi sont au Poisson ce que les variétés de contacts sont au symplectiques. Nous suivons ici [8]. Soit une variété M lisse. Considérons le crochet sur $C^\infty(M)$ donné par

$$\{f, g\}_M = i(\pi_M)(df \wedge dg) + fi(E_M)dg - gi(E_M)df \quad (f, g \in M), \quad (1.15)$$

où π_M est un bivecteur et E_M est un champ de vecteurs. On vérifie que ce crochet est de Lie si et seulement si (π_M, E_M) est de Jacobi au sens suivant :

Définition 18. [8] Une structure de variété de Jacobi sur une variété M est une paire formé d'un bivecteur π_M et d'un champ de vecteurs E_M vérifiant :

$$[E_M, \pi_M] = 0, \quad [\pi_M, \pi_M] = 2E_M \wedge \pi_M. \quad (1.16)$$

Le champ de vecteur E_M est identiquement nul si et seulement si le crochet (1.15) est une dérivation en chacun de ses arguments. L'identité (1.16) se réduit alors à

$$[\pi_M, \pi_M] = 0. \quad (1.17)$$

C'est à dire que π_M est de Poisson. Rappelons ce qu'est un contact.

Définition 19. Une variété de contact (M, w) est une variété M de dimension impaire $m = 2n + 1$ munie d'une 1-forme α telle que

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0 \quad \text{en tout point de } M. \quad (1.18)$$

Une variété de Jacobi (M, E, π) est dite régulière si, en tout point x de M . Le champ de vecteur $E|_x$ est non-nul et $\pi|_x^\#(T_x^*M) \oplus \mathbb{R}E|_x = T_xM$. Autrement dit, M est de dimension impaire $2p + 1$, $\pi^\#$ est en tout point de rang $2p$ et, en tout point x de M , le champ de vecteurs $E|_x$ engendre un supplémentaire de l'image de $\pi|_x^\#$. La variété M est alors une variété de contact par [8], c'est à dire une variété munie d'une 1-forme de contact α . Le champ de vecteurs E et le 2-tenseur π sont les uniques champs de bivecteurs et champs de vecteurs à vérifier les relations :

$$i(E)\alpha = 1, \quad i(E)d\alpha = 0; \quad (1.19)$$

$$i(\pi^\#\beta)\alpha = 0 \text{ et } i(\pi^\#\beta)d\alpha = -(\beta - \alpha i(E)\beta) \text{ pour tout } \beta \in T^*M. \quad (1.20)$$

Il existe une autre définition de structure de Jacobi régulière en dimension paire qui ne nous concerne pas, et donne des structures conformément symplectiques, voir [9] pour plus de détail.

Champs de vecteurs hamiltoniens. Soit (M, E, π) une variété de Jacobi. A toute fonction différentiable f définie sur M , on peut associer le champ de vecteur X_f donné par l'expression

$$X_f = \pi^\#(df) + fE := [\pi, f] + fE.$$

Comme dans [8], on l'appelle champ de vecteurs hamiltonien associé à f . On vérifie que $f \mapsto X_f$ est un morphisme d'algèbre de Lie. Nous n'allons en fait pas utiliser cette notion.

1.5.1 Morphismes de Jacobi

Soient (M_1, E_1, π_1) et (M_2, E_2, π_2) deux variétés de Jacobi, et $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ une application différentiable.

On dit que φ est un *morphisme de Jacobi* si et seulement si pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M_2 ,

$$\{\varphi^*f, \varphi^*g\}_{M_1} = \varphi^*\{f, g\}_{M_2},$$

où $\{\cdot, \cdot\}_{M_1}$ et $\{\cdot, \cdot\}_{M_2}$ sont définies comme en (1.15). On vérifie que cela revient à dire que $\wedge^2 \pi_{1|m} = \pi_{2|\varphi(m)}$ et $\wedge^2 T_m \varphi(\pi_{1|m}) = \pi_{2|\varphi(m)}$ et que $T_m \varphi(E_{1|m}) = E_{2|\varphi(m)}$. Quand φ est une submersion surjective, cela signifie que π_1 se projette sur π_2 et E_1 se projette sur E_2 .

1.5.2 Structure de Jacobi sur \mathbb{R}^3

Soit (x, y, z) un système de coordonnées locales sur \mathbb{R}^3 . On définit sur \mathbb{R}^3 un champ de vecteurs E et un 2-tenseur π par

$$E = F \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial y} + H \frac{\partial}{\partial z}, \quad \pi = f \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + h \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x}.$$

où les fonctions $F, G, H, f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. On montre que E et π définissent une structure de Jacobi sur \mathbb{R}^3 si et seulement si,

1. $h = \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}$, $f = \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}$, $G = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial z}$, en vertu de la deuxième égalité de (1.15).

2.

$$f \frac{\partial F}{\partial x} + g \frac{\partial F}{\partial y} + h \frac{\partial F}{\partial z} + F \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) - G \frac{\partial f}{\partial z} - H \frac{\partial g}{\partial z} = 0,$$

$$f \frac{\partial G}{\partial x} + g \frac{\partial G}{\partial y} + h \frac{\partial G}{\partial z} - F \frac{\partial h}{\partial x} + G \frac{\partial g}{\partial y} + G \frac{\partial h}{\partial z} - H \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

et

$$f \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} + h \frac{\partial H}{\partial z} - F \frac{\partial h}{\partial y} - G \frac{\partial f}{\partial y} + H \frac{\partial f}{\partial x} + H \frac{\partial g}{\partial z} = 0,$$

en vertu de la première égalité de (1.15).

En vertu du fait que $[\pi, \pi] = 0$, on dit que E et π définissent une structure de Poisson s'ils définissent une structure de Jacobi et

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial z} = 0;$$

autrement dit, le champ de vecteur E est identiquement nul.

On dit que E et π définissent une structure de contact s'ils définissent une structure de Jacobi et $fG + gH + hF \neq 0$ en tout point de M , en vertu de (1.18).

1.6 Objet géométrique

Nous souhaitons travailler sur des structures de Poisson sur des objets qui ne sont pas des variétés, mais des sous-ensembles de variétés ou des quotients de variétés. Nous construisons un cadre unificateur pour ses différents objets, en introduisant un objet comme étant un sous-ensemble, ou bien un quotient. Nous verrons par un exemple qu'un "quotient" peut très bien être un difféomorphisme à "sous-ensemble", en utilisant un résultat subtil de Malgrange [22]. Nous n'avons pas souhaité utiliser les difféologies, qui

nous semblent trop compliquées par notre but ici. Soit X un ensemble. Rappelons qu'une relation binaire sur X est un sous-ensemble R du produit $X \times X$; pour $(x, y) \in R$, on note $x \sim y$, et on dit que x est en relation avec y , ou que x est dans la même classe que y .

Définition 20. Une *relation d'équivalence* sur un ensemble X est une relation binaire $R \subset X \times X$ qui vérifie les trois axiomes :

1. $x \sim x$ (reflexivité)
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (symétrie)
3. $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitivité).

Lorsque X est un espace topologique, on dit que la relation d'équivalence $R \subset X \times X$ est **fermée** si R est une partie fermée de $X \times X$.

Définition 21. On dit qu'un ensemble X est muni

1. d'une *structure de variété* si X est muni d'un atlas de classe C^∞ .
2. d'une **structure de quotient** si on se donne une variété P , une \sim relation d'équivalence fermée et un isomorphisme $\psi_x : P/\sim \simeq X$.
3. d'une **structure de sous-ensemble d'une variété** si on se donne une variété P et une injection $i : X \rightarrow P$.

On appelle **projection canonique** de la structure de quotient (P, \sim) , l'application $\pi : P \rightarrow X$ qui à $p \in P$ associe la classe $\pi(p)$ de p modulo \sim .

Deux structures de quotients (P_1, ψ_{x_1}) et (P_2, ψ_{x_2}) sur même ensemble X seront dites **équivalentes** s'il existe un difféomorphisme de variété $\psi : P_1 \rightarrow P_2$ tel que $x \sim y$ si et seulement si $\psi(x) \sim \psi(y)$.

En général, on notera seulement (P, \sim) une structure de quotient sur X . On considère que les applications ψ_x et i sont implicites et que X est un sous-ensemble de P . Il est important de constater qu'une structure de quotient ce n'est pas juste X , même muni de sa topologie induite.

Définition 22. *fobjet*

On dira que X est un *objet géométrique* si X est un des trois types suivants :

1. Un ensemble X muni d'une structure de variété différentielle de classes C^∞ .
2. Un ensemble X muni d'une structure de quotient par une relation d'équivalence fermée.
3. Un ensemble X muni d'une structure de sous-ensemble d'une variété.

Rappelons qu'un quotient et un sous ensemble d'une variété sont munis d'une topologie induite. Soit (P, i) une structure d'inclusion. On dit que $V \subset X$ est un ouvert de X si c'est l'intersection de X avec un ouvert de P . La topologie obtenue sur X est appelée **topologie induite** par τ sur X .

De même, soit $X = P / \sim$ une structure de quotient, on appelle **topologie quotient** la topologie définie comme suit : un sous-ensemble $U \in X$ est dite ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de P .

On va définir les fonctions lisses sur ces objets géométriques. Si c'est une variété, c'est évident, mais sur le quotient d'une variété par une relation d'équivalence fermée ou le sous-ensemble d'une variété, on le définit comme ceci :

Définition 23. Soit X un ensemble muni d'une structure de quotient (P, \sim) et soit π la projection canonique $\pi : P \rightarrow X$. Une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ à valeurs réelle sera dite lisse si π^*f est de classe C^∞ sur P .

Soit X un ensemble muni d'une structure de sous-ensemble (P, i) , une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est dite lisse s'il existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $i^*F = f$.

On va uniformiser les notations ainsi :

Note 1. Soit X un objet géométrique d'une des trois types précédents, on note $C^\infty(X, \mathbb{R})$ l'algèbre commutative des fonctions lisses sur X .

On va définir les applications lisses entre objets géométriques,

Définition 24. Soient X et Y deux objets géométriques dont on ne suppose pas qu'ils soient de même type. Une application $\varphi : X \rightarrow Y$ est dite lisse si $\varphi^*F = F \circ \varphi$ est un élément de $C^\infty(X, \mathbb{R})$, pour tout $F \in C^\infty(Y, \mathbb{R})$.

Une application $\varphi : X \rightarrow Y$ tel que $\varphi^* : C^\infty(Y, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(X, \mathbb{R})$ est un isomorphisme d'algèbre sera dit un difféomorphisme.

Exemple 5. 1. Soit (p, i) une structure d'inclusion. L'inclusion $i : U \rightarrow X$ est lisse puisque $i^*F = F \circ i$ est un élément de $C^\infty(U, \mathbb{R})$, pour tout $F \in C^\infty(X, \mathbb{R})$.

2. Soit (p, \sim) une structure de quotient. La projection canonique $\pi : P \rightarrow X$ est lisse. Évidemment les applications lisses entre variétés sont lisses en notre sens.

Proposition 11. Soient X et Y deux objets géométriques, si $\varphi : X \rightarrow Y$ est un difféomorphisme, alors $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ est lisse, et est aussi un difféomorphisme.

Preuve. Par construction, on a bien, $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$. Ceci démontre le résultat. \square

Nous allons montrer qu'un objet géométrique de type quotient (non trivial) peut être difféomorphisme à un objet géométrique de type inclusion (non trivial).

Exemple 6. Sur \mathbb{R}^2 on peut définir la relation d'équivalence :

$$(p, q) \sim (-p, -q),$$

pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Par construction $X := \mathbb{R}^2 / \sim$ est un objet géométrique.

Exemple 7. On considère le cône T^+ défini par :

$$T^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}. \quad (1.21)$$

Le cône T^+ est un objet géométrique, muni d'une structure de sous-ensemble de \mathbb{R}^3 , par construction.

Exemple 8. Il existe une application lisse de X de l'exemple 13 vers le cône T^+ de l'exemple 7. Si $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $[p, q]$ désigne sa classe d'équivalence dans X , on pose

$$\varphi : ([p, q]) \rightarrow (\alpha(p, q), \beta(p, q), \gamma(p, q)). \quad (1.22)$$

où

$$\begin{cases} \alpha(p, q) = ap^2 - bq^2 \\ \beta(p, q) = 2pq\sqrt{ab} \\ \gamma(p, q) = ap^2 + bq^2 \end{cases}$$

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Cette application est à valeurs dans T^+ car pour tout $(p, q) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha^2(p, q) + \beta^2(p, q) = \gamma^2(p, q)$$

c'est-à-dire

$$(ap^2 - bq^2)^2 + (\sqrt{2}pq\sqrt{ab})^2 = (ap^2 + bq^2)^2.$$

De plus, elle passe au quotient car (p, q) et $(-p, -q)$ ont la même image. Elle définit donc une application φ de X dans T^+ . Vérifions que cette application est lisse. Soit $f \in C^\infty(T^+)$. Par définition, il existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que $F|_{T^+} = f$, De plus $\pi^*\varphi^*f = (\varphi \circ \pi)^*f = \phi^*F$, est un élément de $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ car $\phi : C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ est de classe C^∞ et $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nous avons donc montré que $\pi^*\varphi^*f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire que $\varphi^*f \in C^\infty(X)$.

Pour clarifier les choses, on peut donc représenter ces espaces et applications par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \pi & \nearrow & \uparrow i \\ \mathbb{R}^2 / \sim & \xrightarrow{\varphi} & T^+ \end{array} \quad (*)$$

L'application φ de l'exemple 3, est-il un difféomorphisme ?, il suffit de vérifier que $\varphi^* : C^\infty(T^+) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2 / \sim)$ est surjective car elle est évidemment injective car φ est une bijection entre les ensembles \mathbb{R}^2 / \sim et T^+ .

Proposition 12. Soient X l'objet géométrique muni d'une structure de quotient défini dans l'exemple 13 et T^+ l'objet géométrique muni d'une structure de sous ensemble défini par l'équation 1.21. Pour toute fonction $g \in C^\infty(X)$, il existe $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que $\varphi^* F|_{T^+} = g$.

Preuve. Appliquons le théorème de préparation différentiable de Malgrange 12 à notre exemple. Dans le cas $p = 2$, on a $g = Ph + xr_1(y, t) + r_2(y, t)$, où P est un polynôme de degré 1 distingué en x donné par $P = x_1^2 - t$, h est de classe C^∞ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^3$ et r_1, r_2 sont des fonction de classe C^∞ en $0 \in \mathbb{R}^2$, on écrit alors

$$g = (x^2 - t)h(x, y, t) + xr_1(y, t) + r_2(y, t) \quad (1.23)$$

Soit $g(x, y, t) = F(x, y)$ où F est une fonction qui ne dépend pas de t . On pose $x^2 = t$, alors on a

$$F(x, y) = xr_1(y, x^2) + r_2(y, x^2).$$

On pose maintenant $\bar{r}_1(y, u, t) =: r_1(y, u)$. En appliquant le théorème de Malgrange à $y^2 - t$, on trouve

$$\bar{r}(y, u, t) = (y^2 - t)h(y, u, t) + yr_{1,1}(u, t) + r_{1,2}(u, t),$$

On pose, $u = x^2$ et $t = y^2$, on a

$$r_1(y, x^2) = yr_{1,1}(x^2, y^2) + r_{1,2}(x^2, y^2).$$

De même,

$$r_2(y, x^2) = yr_{2,1}(x^2, y^2) + r_{2,2}(x^2, y^2).$$

Cela implique que

$$F(x, y) = xy r_{1,1}(x^2, y^2) + xr_{1,2}(x^2, y^2) + yr_{2,1}(x^2, y^2) + r_{2,2}(x^2, y^2).$$

De plus, si $F(-x, -y) = F(x, y)$, on a

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{2}[F(-x, -y) + F(x, y)] = xy r_{1,1}(x^2, y^2) + r_{2,2}(x^2, y^2) \\ &= g(xy, x^2, y^2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

où $g(u, v, w) = ur_{1,1}(v, w) + r_{2,2}(v, w)$ pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Une fonction sur $C^\infty(X)$ se relève en une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ invariante par $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. Elle s'écrit comme en (1.24), $g(xy, x^2, y^2) = \varphi^* F|_{T^+}$ où $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Donc φ^* est surjective. \square

1.7 Objet de Poisson

Dans cette section, on définit les objets géométriques singuliers de Poisson dont nous avons besoin dans ce qui suit.

Rappel 1. Soit \mathcal{A} une algèbre commutative. on rappelle que

Une **structure de Poisson** sur une variété M (resp, un sous ensemble de \mathbb{R}^n , resp, un quotient) est la donnée d'un crochet de Poisson sur l'algèbre $\mathcal{A} = C^\infty(M)$.

Une application lisse $\varphi : M \rightarrow N$ est un **morphisme de Poisson** si et seulement si $\varphi^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$ est un morphisme d'algèbre de Poisson.

Un idéal $I \subset \mathcal{A}$ de l'algèbre commutative \mathcal{A} est un idéal de Poisson si :

$$\{I, \mathcal{A}\} \subset I.$$

Dans ce cas, \mathcal{A}/I est muni d'un crochet de poisson de \mathcal{A} .

Soit $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{A}})$ une algèbre de Poisson, un sous espace H de \mathcal{A} est appelé **sous algèbre de Poisson** si H admet une structure d'algèbre de Poisson.

Ceci s'adapte aisément aux objets géométriques.

Maintenant, en s'inspirant des rappels ci-dessus, on définit les objets géométriques de Poisson et leurs morphismes.

Définition 25. *Un objet de Poisson est un objet géométrique X muni d'un crochet de Poisson sur $C^\infty(X)$. Soient X, Y deux objets de Poisson et $\varphi : X \rightarrow Y$ une application lisse, on dit que φ est un morphisme de Poisson si $\varphi^* : C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$ est un morphisme d'algèbres Poisson.*

Proposition 13. *Soit X un objet.*

1. *Si X est muni d'une structure de quotient (P, \sim) avec P une variété de Poisson. Si $\{F, G\} \in C^\infty(P/\sim)$ pour tous F, G dans $C^\infty(P/\sim)$, où $C^\infty(P/\sim)$ est l'algèbre des fonctions sur P qui passe au quotient modulo \sim , alors X est un objet de Poisson et $\pi : P \rightarrow X$ est un morphisme de Poisson .*
2. *Soit X un sous-ensemble de P , avec P variété de Poisson. Si $I_X \subset C^\infty(P)$ est un idéal de Poisson, alors X est un objet de Poisson et $i : X \rightarrow P$ est un morphisme de Poisson.*

On rappelle que les structures symplectiques sont exactement les Poisson non dégénérées.

Exemple 9. *Munissons \mathbb{R}^2 des coordonnées (a, b) . Considérons la relation d'équivalence définie par $(a, b) \rightarrow (-a, -b)$, on prend sur \mathbb{R}^2 le crochet de Poisson canonique $\{a, b\} = 1$. L'ensemble quotient \mathbb{R}^2/\sim est un objet de Poisson.*

Exemple 10. *On munit la variété \mathbb{R}^3 du crochet donné dans les coordonnées canoniques par :*

$$\begin{cases} \{x, y\}_{\mathbb{R}^3} = z \\ \{y, z\}_{\mathbb{R}^3} = x \\ \{z, x\}_{\mathbb{R}^3} = y \end{cases}$$

On vérifie aisément que le crochet définit sur la variété \mathbb{R}^3 est de Poisson.

L'idéal $I_{T^+} \subset C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ associé au cône

$$T^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\},$$

c'est-à-dire l'idéal des fonctions lisses nulles sur le cône T^+ , est l'idéal des fonctions de la forme $(x^2 + y^2 - z^2)F(x, y, z)$, avec $F(x, y, z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, comme $\gamma = x^2 + y^2 - z^2$ est un Casimir pour $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire, pour tous F et $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on a $\{\gamma F, G\} =$

$F\{\gamma, G\} + \gamma\{F, G\} = \gamma\{F, G\} \in I_{T^+}$, alors $I_{T^+} \subset C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est un idéal de Poisson, cela implique que T^+ est un sous-objet de Poisson.

On a de l'exemple précédent que $(\mathbb{R}^2, \{\cdot, \cdot\})$ est une variété de Poisson, et l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $\phi : ([p, q]) \rightarrow (F, G, H)$ est un morphisme de Poisson, c'est-à-dire, $\{\phi^*F, \phi^*G\}_{\mathbb{R}^2} = \phi^*\{F, G\}_{\mathbb{R}^3}$, pour toutes $F, G, H \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

On reprend le contexte de l'exemple 2, du diagramme commutatif entre objets géométriques (*), on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\phi^*} & C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ i^* \downarrow & & \uparrow \pi^* \\ C^\infty(T^+) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim) \end{array}$$

On considère les fonction $f, g \in C^\infty(T^+)$, alors il existe $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ telles que $i^*F = f$ et $i^*G = g$ donc $\phi^*F = \pi^*\varphi^*f$ et $\phi^*G = \pi^*\varphi^*g$, comme $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un morphisme de Poisson, c'est-à-dire

$$\{\phi^*F, \phi^*G\}_{\mathbb{R}^2} = \phi^*\{F, G\}_{\mathbb{R}^3},$$

alors on a

$$\{\pi^*\varphi^*f, \pi^*\varphi^*g\} = \pi^*\varphi^*(i^*\{F, g\}_{\mathbb{R}^3}),$$

donc $\pi^*\{\varphi^*f, \varphi^*g\}_{\mathbb{R}^2} = \pi^*\varphi^*\{f, g\}_{T^+}$.

De plus, π^* est injectif, donc φ^* est un morphisme de Poisson.

1.8 Rang d'une structure de Poisson sur un objet géométrique

Maintenant, nous introduisons le rang d'une structure de Poisson à un point d'une variété de Poisson et d'un objet de Poisson. Notre définition est basée sur le fait que pour une variété de Poisson ou un objet de Poisson M , le rang de sa structure de Poisson à un point ne dépend pas des générateur choisis pour l'algèbre des fonctions régulières sur M . On suit ici au début [18]

Définition 26. [18] Soit $(M, \{\cdot, \cdot\})$ une variété de Poisson et soit (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées locales de M , on appelle matrice de Poisson du crochet $(\{\cdot, \cdot\})$ la matrice A définie par :

$$A = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} := (\{x_i, x_j\})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On note $\mathcal{F}(M)$ l'algèbre des fonctions lisses sur la variété de Poisson M dans cette section. Le rang de la matrice de Poisson A par rapport à un système arbitraire de générateurs de \mathcal{F} , évaluée au point m , est appelé le rang de $\{\cdot, \cdot\}$ en m , et est noté $\text{Rg}_m\{\cdot, \cdot\}$.

On dit que le point $m \in M$ est régulier sur $(M, \{\cdot, \cdot\})$, si $\text{Rg}_m\{\cdot, \cdot\} = \text{Rg}\{\cdot, \cdot\}$, dans le cas contraire, on dit que m est un point singulier de $(M, \{\cdot, \cdot\})$.

L'ensemble des points singuliers de $(M, \{\cdot, \cdot\})$ est appelé *lieu singulier* de $(M, \{\cdot, \cdot\})$.

Maintenant qu'on l'a fait pour une variété, on peut définir le rang d'une structure de Poisson sur un objet de Poisson en termes de l'espace cotangent de M à m . Rappelons que cet espace vectoriel est défini par $I_{M,m}/I_{M,m}^2$, où $I_{M,m}$ désigne l'idéal de $\mathcal{F}(M)$, constitué de toutes les fonctions nulles en m . Un point m de M où la dimension de T_m^*M atteint sa valeur minimale est appelé un point *régulier de l'objet* M (il ne faut pas confondre avec les points singuliers de la structure de Poisson : ici on ne parle que de variétés affines). Ceci donne que $\dim T_m^*M$ augmente alors que le rang d'une structure de Poisson diminue aux points singuliers.

Par l'identité de Leibniz, on a $\{I_{M,m}^2, I_{M,m}\} \subset I_{M,m}$, par conséquent, le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ induit pour chaque point $m \in M$ une application bilinéaire antisymétrique bien définie :

$$\pi_m : \frac{I_{M,m}}{I_{M,m}^2} \times \frac{I_{M,m}}{I_{M,m}^2} \rightarrow \frac{\mathcal{F}(M)}{I_{M,m}} \simeq \mathbb{R}$$

L'application bilinéaire π_m est liée à la matrice de Poisson de $\{\cdot, \cdot\}$ à m , c'est à dire, pour tous $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$ générateurs de $\mathcal{F}(M)$ (ce qui existe toujours pour un objet géométrique muni d'une structure d'inclusion mais pas pour un objet géométrique muni d'une structure de quotient), tels que $\bar{x}_1 - \bar{x}_1(m), \dots, \bar{x}_d - \bar{x}_d(m)$ générateurs de l'idéal $I_{M,m}$, si on exprime l'application bilinéaire π_m en terme de classes d'équivalences $[\bar{x}_i - \bar{x}_i(m)] \in I_{M,m}/I_{M,m}^2$, alors on trouve la matrice

$$\pi_m([\bar{x}_i - \bar{x}_i(m)], [\bar{x}_j - \bar{x}_j(m)]) = \{\bar{x}_i - \bar{x}_i(m), \bar{x}_j - \bar{x}_j(m)\} = \{\bar{x}_i, \bar{x}_j\}(m) \quad (1.25)$$

qui est la matrice de Poisson de $\{\cdot, \cdot\}$ par rapport à $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d$, évaluée au point m .

Définition 27. Soit M un objet de Poisson muni d'une structure d'inclusion, le rang de $\{\cdot, \cdot\}$ au point m est le rang de la forme bilinéaire π_m défini sur T_m^*M .

Le rang peut très bien être infini pour un objet quotient.

Remarque 2. Pour tout sous objet de Poisson $M \subset \mathbb{R}^d$, le rang de la structure de Poisson est toujours pair, et la $\dim(M) \leq d$.

Exemple 11. On considère l'objet de Poisson défini par

$$T := \{x^2 + y^2 = z^2 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

Soit le point $m = (a, b, c) \in T$. Les coordonnées x, y, z sont des générateurs de $\mathcal{F}(T)$, et $F = x - a, G = y - b, H = z - c$ générateurs de l'idéal de Poisson $I_{T,m}$. Comme $x^2 + y^2 = z^2$, ce qui implique $(F + a)^2 + (G + b)^2 - (H + c)^2 = 0$, de plus l'idéal $I_{T,m}^2$ du produit des fonctions nulles sur T , est engendré par :

$$I_{T,m}^2 = \{F^2, G^2, H^2, FG, FH, GH, x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Soit \bar{F}, \bar{G} et \bar{H} des générateurs de $\frac{I_{T,m}}{I_{T,m}^2}$, on voit que $\dim(\frac{I_{T,m}}{I_{T,m}^2}) \leq 3$.

De plus, on a

$$(\bar{F} + a)^2 + (\bar{G} + b)^2 - (\bar{H} + c)^2 = 0.$$

Par un calcul direct, on trouve

$$2a\overline{F} + 2b\overline{G} - 2c\overline{H} = 0.$$

Si $m = (a, b, c) = (0, 0, 0)$, il n'existe aucune relation entre les générateurs, donc le rang est égal à 3 au point $(0, 0, 0)$, c'est-à-dire, le point $(0, 0, 0)$ est un point singulier, la dimension de T^*M est 3. Si $m = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on voit que $\dim(\frac{I_{T,m}}{I_{T,m}^2}) \leq 2$, comme $\overline{F}, \overline{G}$ et \overline{H} ne sont pas indépendants, et donc la dimension de T_m^*M est 2.

On peut maintenant déterminer le rang de la structure de Poisson par défini le rang de la forme bilinéaire (1.25). On définit le crochet de Poisson sur T par

$$\{f, g\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & x \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & y \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & z \end{vmatrix}$$

Pour tous $f, g \in \mathcal{F}(T)$, alors la matrice de Poisson associée est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

Pour tout point $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\text{Rg}_m(\{\cdot, \cdot\}) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Donc les points singuliers de l'objet de Poisson T , sont également les points pour lesquels le rang est 0, c'est-à-dire, précisément le point $(0, 0, 0)$.

Exemple 12. On muni \mathbb{R}^2 de la structure de Poisson définie par $\{x, y\} = x$. On définit le crochet de Poisson sur $(\mathbb{R}^2, \{\cdot, \cdot\})$ par

$$\{f, g\} = \{x, y\} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Pour tous $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, alors la matrice de Poisson associée est

$$B = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$$

Pour tout point $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\text{Rg}_m(\{\cdot, \cdot\}) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \neq (0, y) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, y) \end{cases}$$

Donc les points singuliers de la variété de Poisson $(\mathbb{R}^2, \{\cdot, \cdot\})$, sont également les points pour lesquels le rang est 0, c'est-à-dire, précisément l'ensemble des point défini par $\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = (0, y)\}$.

Remarque 3. *Au vu de ce qui précède, nous voyons que la structure de Poisson sur une variété de Poisson ou un objet de Poisson M peut-être dégénérée aux points réguliers, tandis que, aux points singuliers de M , la structure de Poisson peut-être soit régulière où singulière.*

Chapitre 2

Résolutions symplectiques des structures de Poisson singulières

2.1 Introduction

Il est bien connu que les variétés de Poisson de dimension n admettent des réalisations symplectiques de dimension $2n$ (voir [6], [11], [14], [28] pour le cas lisse et [17] pour le cas réel analytique ou holomorphe). Rappelons qu'on appelle *réalisation symplectique* d'une variété de Poisson (M, π_M) un triplet $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ où (Σ, Φ_Σ) est une variété symplectique et $\phi : \Sigma \rightarrow M$ une submersion surjective qui est également un morphisme de Poisson. Il est évidemment impossible de trouver une réalisation symplectique de dimension n d'une variété de Poisson de dimension n , sauf si celle-ci est symplectique. Nous ne pouvons en effet évidemment plus imposer que φ soit une submersion, sans quoi ce serait un difféomorphisme local, et (M, π) doit alors être symplectique. Mais il est possible d'affaiblir la notion de réalisation en imposant seulement que φ soit surjective, mais pas nécessairement une submersion. Plus précisément, nous définissons les résolutions symplectiques comme suit :

Définition 28. *Soit (M, π_M) une variété de Poisson réelle ou complexe de dimension n . On appelle résolution symplectique un triplet $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ où (Σ, Π_Σ) est une variété symplectique de même dimension que M et $\phi : \Sigma \rightarrow M$ est un morphisme de Poisson surjectif.*

Cette définition n'a de sens que lorsque n est pair, ainsi, nous verrons que, sous des conditions modérées, les seules variétés de Poisson réelles ou complexes pouvant admettre une résolution symplectique sont celles qui admettent des feuilles symplectiques ouvertes (voir Proposition 14). Ceci exclut une grande classe de variétés de Poisson : la plupart des structures de Poisson n'ont pas de feuilles symplectiques ouvertes.

La terminologie "résolution symplectique" a déjà été utilisée par Arnaud Beauville [1] ou BaoHua Fu [12] dans un cadre de géométrie algébrique. La notion que nous avons introduite est cohérente avec celle-ci, car nos résolutions symplectiques, tout comme celles précédemment citées sont inversibles sur les points réguliers et surjectives. Nous

verrons également dans la Proposition 14 que la Définition 28 correspond à la définition de la résolution symplectique donnée dans [17], section 4. Nous invitons le lecteur à consulter [2] pour une liste d'exemples. Nous ne pouvons pas comparer les définitions de manière rigoureuse : nous travaillons en géométrie différentielle et ils travaillent en géométrie algébrique. De plus, les points singuliers sont pour ces auteurs des points où la variété est singulière et pour nous des points singuliers sont ceux où la structure de Poisson est singulière. En géométrie algébrique, les structures de Poisson résolubles sont symplectiques aux points réguliers, et leurs résolutions sont birationnelles en ces points et nos résolutions sont des difféomorphismes locaux en ces points. En conséquence, il est logique d'utiliser le même nom.

Plusieurs exemples de résolutions symplectiques lisses existent. Par exemple, pour la structure de Poisson sur $M = \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\{x, y\} = x^2 + y^2,$$

il est montré dans [17] que cette structure admet une résolution symplectique. Des exemples triviaux et non-triviaux sont donnés dans la section 2.2. Cependant, nous donnons dans ce chapitre une structure de Poisson de dimension 2 très élémentaire qui n'admet pas de résolution symplectique propre, à savoir la structure de Poisson sur $M = \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\{x, y\}_M = x.$$

Nous montrons aussi dans le cas complexe (c'est-à-dire que $M = \mathbb{C}^2$) que cette structure n'admet pas une résolution symplectique semi-connexe. En fait, nous montrons le résultat suivant : Pour M une variété de dimension 2, les résolutions lisses propres ne peuvent pas exister lorsque le lieu singulier de la structure de Poisson contient une courbe, voir Théorèmes 20 et [12]. Ceci exclut une classe encore plus grande de variétés de Poisson : seules celles qui admettent une feuille symplectique ouverte et une sous-variété de codimension 1 dans leur lieu singulier, qui ne peuvent admettre des résolutions symplectiques propres lisses. Ceci est également vrai dans le cas réel analytique, nous pouvons même montrer qu'aucune résolution connexe peut exister. Dans le cas holomorphe, nous prouvons un résultat encore plus fort : les résolutions symplectiques holomorphes connexes n'existent pas pour les variétés de Poisson non symplectiques, de sorte que la théorie des résolutions symplectiques holomorphes est essentiellement vide.

Conventions : Tout au long de ce chapitre, nous notons indifféremment une structure de Poisson sur une variété lisse/réelle analytique/holomorphe M par π_M ou $\{\cdot, \cdot\}_M$. Par π_M , nous entendons plutôt une section de $\wedge^2 TM$ et par $\{\cdot, \cdot\}_M$ une bidérivation antisymétrique sur l'anneau des fonctions lisses/réelles analytiques/holomorphes sur M . Comme nous n'aurons que rarement à considérer deux structures de Poisson sur la même variété, cette notation n'est nullement ambiguë. Pour nous, une structure symplectique sur variété Σ est un champ de bivecteurs de Poisson qui est non dégénéré en tout point $\sigma \in \Sigma$. Il sera noté par une lettre grecque capitale : Π_Σ . Un point symplectique d'une variété de Poisson (M, π_M) est un point dans un voisinage duquel π_M est symplectique.

Nous notons par \mathbf{M}_{sing} l'ensemble des points singuliers de la structure de Poisson π_M . Pour (M, π_M) une variété de Poisson de dimension $2n$ admettant une feuille symplectique ouverte dense, on note :

$$\mathbf{M}_{sing} := \left\{ m \in M, \text{Rk} \left(\pi_{M|m}^\# \right) \neq 2n \right\}.$$

Dit différemment, \mathbf{M}_{sing} est l'ensemble des points où $\pi_M^\#$ n'est pas inversible. C'est aussi le complémentaire de l'union de toutes les feuilles symplectiques de dimension $2n$.

2.2 Exemples de résolutions symplectiques en dimension 2 et 4

Nous donnons dans cette section des exemples de variétés de Poisson lisses et complexes de dimension 2 pour lesquelles des résolutions symplectiques existent. En prenant des produits de structures de Poisson de dimension 2 et des produits de leurs résolutions symplectiques correspondantes, on obtient des exemples de dimension paire arbitraire. Rappelons quelques notions que nous utiliserons tout au long de ce chapitre. Une structure de Poisson lisse [18] sur une variété M est une section π_M de $\wedge^2 TM \rightarrow M$ qui commute avec elle-même par rapport au crochet de Schouten-Nijenhuis : $[\pi_M, \pi_M] = 0$. Les structures de Poisson sont en correspondance biunivoque avec les crochets d'algèbre de Lie $\{.,.\}_M$ sur $C^\infty(M, \mathbb{R})$ qui sont des dérivations en chaque variable (appelées crochets de Poisson). Les structures de Poisson réelles analytiques et holomorphes sur une variété réelle analytique ou complexe M sont également définies comme étant des champs de bivecteurs réels analytiques ou holomorphes π_M sur M satisfaisant $[\pi_M, \pi_M] = 0$. Pour tout $U \subset M$, une structure de Poisson réelle analytique ou holomorphe sur M induit un crochet de Poisson sur l'algèbre des fonctions holomorphes définies sur U . Lorsque U est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , les structures de Poisson sur U sont en correspondance biunivoque avec les crochets de Poisson sur les fonctions réelles analytiques ou holomorphes sur U voir par exemple [16].

Puisque, en dimension 2, chaque champ de bivecteurs est de Poisson, l'identité de Jacobi ne joue aucun rôle. Mais le cas de la dimension 2 est un exemple intéressant car il existe des feuilles symplectiques ouvertes, et elles sont denses (sauf si nous choisissons un champ de bivecteurs égal à zéro sur un sous-ensemble ouvert).

Considérons sur $M := \mathbb{R}^2$ (ou un ouvert de \mathbb{R}^2) la structure de Poisson donnée par :

$$\{x, y\}_M = f(x, y) \tag{2.1}$$

où x, y sont les coordonnées canoniques sur M , et $f(x, y)$ est une fonction lisse. Supposons que la variété de Poisson (M, π) , décrite par (2.1) admette une résolution symplectique $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \phi)$, avec Π_Σ la structure de Poisson sur Σ (structure qui, par définition, est symplectique). L'application ϕ est de la forme $\phi = (u, v)$ où u et v sont deux fonctions lisses sur Σ à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout choix (p, q) de coordonnées de Darboux locales sur (Σ, Π_Σ) , les fonctions u et v sont localement des fonctions des variables p et q .

Proposition 14. *Une paire (Σ, ϕ) , où Σ est une variété symplectique, et $\phi : \Sigma \rightarrow M$ une application surjective, est une résolution symplectique de la variété de Poisson (M, π_M) donnée par (2.1) si et seulement si*

$$\{q, p\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} \right) = f(u(p, q), v(p, q)) \quad (2.2)$$

où p, q sont des coordonnées locales sur (Σ, Π_Σ) et $\phi = (u, v)$.

Preuve. L'application ϕ est de Poisson si et seulement si $\{\phi^*x, \phi^*y\}_\Sigma = \phi^*\{x, y\} = \phi^*f(x, y)$. Puisque $u = \phi^*x$ et $v = \phi^*y$, cela donne $\{u, v\}_\Sigma = f(u(p, q), v(p, q))$. Le résultat s'obtient en écrivant dans des coordonnées le crochet $\{u, v\}_\Sigma$. \square

Remarque 4. *La proposition 14 s'étend de manière évidente à la structure de Poisson réelle analytique et holomorphe.*

Exemple 13. Cet exemple apparaît déjà dans [17], section 6. Utilisons cette proposition pour construire une résolution symplectique de la structure de Poisson sur $M := \mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\{x, y\}_M = x^2 + y^2, \quad (2.3)$$

où x, y désignent les coordonnées canoniques de $M = \mathbb{R}^2$.

Notre candidat de résolution symplectique est donné par $\Sigma := \mathbb{R}^2$ muni du crochet de Poisson canonique $\{q, p\}_\Sigma = 1$, où on désigne cette fois par (p, q) les coordonnées de $\Sigma := \mathbb{R}^2$, afin d'éviter une confusion avec les coordonnées de M (puisque ici, par accident, les deux sont ici isomorphes). On définit une application φ de Σ dans M par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Sigma &\rightarrow M \\ (p, q) &\mapsto (q \sin(pq), q \cos(pq)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Il est facile de vérifier que φ est surjective. Il reste donc à montrer que c'est un morphisme de Poisson, ce pour quoi il suffit de vérifier que la condition donnée par l'équation (2.2) est satisfaite. Ceci se fait par un calcul direct. Puisque $u(p, q) = q \sin(pq)$ et $v(p, q) = q \cos(pq)$, on a d'une part $f(u(p, q), v(p, q)) = (q \sin(pq))^2 + (q \cos(pq))^2 = q^2$ et d'autre part, par un calcul direct :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} &= \frac{\partial q \sin(pq)}{\partial p} \frac{\partial q \cos(pq)}{\partial q} \\ &\quad - \frac{\partial q \sin(pq)}{\partial q} \frac{\partial q \cos(pq)}{\partial p} \\ &= q^2(\sin^2(pq) + \cos^2(pq)) = q^2. \end{aligned}$$

Puisque $\{p, q\} = 1$ et $f(u(p, q), v(p, q)) = q^2$. Cela prouve l'assertion.

Remarque 5. La résolution symplectique de l'exemple 13 est une résolution symplectique réelle analytique. Mais ce n'est pas une résolution symplectique holomorphe. L'application φ de l'exemple 13 s'étend naturellement à une application de Poisson holomorphe de $\Sigma_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$ à $M_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, muni des extensions holomorphes naturelles des structures de Poisson qui apparaissent dans l'Exemple 13. Cette application est encore de Poisson et $\Sigma_{\mathbb{C}}$ est encore symplectique. Mais φ , tel qu'elle est défini dans (2.4), n'est pas surjectif de $\Sigma_{\mathbb{C}}$ à $M_{\mathbb{C}}$, donc ceci ne définit pas une résolution symplectique holomorphe.

On peut construire une résolution symplectique d'une structure de Poisson lisse et réelle analytique plus générale que celle de (2.3) en changeant la structure de symplectique sur Σ .

Exemple 14. On munit $\mathbb{R}^2 := M$ de la structure de Poisson définie par

$$\{x, y\}_M = x^{2n} + y^{2m},$$

où (x, y) désigne les coordonnées canoniques de M , et n et m sont des nombres entiers avec $n \geq m \geq 1$.

Notre candidat de résolution symplectique est donné par $\Sigma := \mathbb{R}^2$ muni du crochet de Poisson

$$\{p, q\}_{\Sigma} = q^{2n-2m} \sin^2(pq^{2m-1}) + \cos^2(pq^{2m-1}), \quad (2.5)$$

où (p, q) sont les coordonnées canoniques de Σ . Ce crochet de Poisson est symplectique, car $q^{2n-2m} \sin^2(pq^{2m-1}) + \cos^2(pq^{2m-1})$ est strictement positif pour tout $p, q \in \mathbb{R}$.

On définit une application φ de Σ dans M par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Sigma &\rightarrow M \\ (p, q) &\mapsto (q \sin(pq^{2m-1}), q \cos(pq^{2m-1})). \end{aligned}$$

Pour démontrer que (Σ, φ) est une résolution symplectique de M , il suffit de vérifier que la condition donnée par l'équation (2.2) est satisfaite. Puisque $u(p, q) = q \sin(pq^{2m-1})$ et $v(p, q) = q \cos(pq^{2m-1})$, on a d'une part

$$f(u(p, q), v(p, q)) = (q \sin(pq))^{2n} + (q \cos(pq))^{2m} \quad (2.6)$$

et d'autre part, par un calcul direct :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} &= \frac{\partial q \sin(pq^{2m-1})}{\partial p} \frac{\partial q \cos(pq^{2m-1})}{\partial q} \\ &\quad - \frac{\partial q \sin(pq^{2m-1})}{\partial q} \frac{\partial q \cos(pq^{2m-1})}{\partial p} \\ &= q^{2m} (\sin^2(pq^{2m-1}) + \cos^2(pq^{2m-1})) = q^{2m}. \end{aligned}$$

Les valeurs explicites de $\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p}$, $\{p, q\}_{\Sigma}$ et $f(u(p, q), v(p, q))$ données respectivement dans l'équation précédente, dans l'équation (2.5) et dans l'équation (2.6) satisfont l'équation (2.2).

Cela prouve que le triple $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ est une résolution symplectique. Plus généralement, pour toute structure de Poisson de la forme

$$\{x, y\}_M = \kappa(x, y)(x^{2n} + y^{2m}),$$

avec $\kappa(x, y)$ une fonction strictement positive sur M , le triplet $(\Sigma, (\varphi^* \kappa) \Pi_\Sigma, \varphi)$ est une résolution symplectique.

Exemple 15. Les deux premiers exemples étaient des structures de Poisson à singularités isolées. Voici un exemple où la singularité n'est pas isolée, mais Σ n'est pas connexe. On munit $M = \mathbb{R}^2$ du crochet linéaire (appelé aussi "de Lie-Poisson") non-nul, à savoir le crochet donné dans les coordonnées canoniques par $\{x, y\}_M = x$. On définit $\Sigma := \mathbb{R}^2 \amalg \mathbb{R}^2 \amalg \mathbb{R}^2$ l'union disjointe de trois copies de \mathbb{R}^2 . Munissons chaque copie de \mathbb{R}^2 par la structure symplectique canonique. On considère l'application $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ définie par

$$\varphi := \begin{cases} (\exp(p), q) \text{ sur la première copie} \\ (-\exp(p), q) \text{ sur la deuxième copie} \\ (0, q) \text{ sur la troisième copie.} \end{cases}$$

Un calcul direct à l'aide de la condition (2.2), montre que la restriction à chacune des trois copies est un morphisme de Poisson, ce qui suffit à faire de φ un morphisme de Poisson. L'application φ est surjective. La paire (Σ, φ) est donc une résolution symplectique de (M, π) . Notez que Σ n'est pas semi-connexe (voir la définition 29). Nous imposerons plus tard que l'application φ est une application propre. Ce qui exclura ce type de résolution.

Voici un exemple non-trivial en dimension 4 d'un champ de bivecteurs de Poisson qui admet une résolution symplectique.

Exemple 16. Soit (M, π_M, E_M) une variété de Jacobi de dimension 3 dont la structure de Jacobi est donnée par le champ de vecteurs et le champ bivecteurs suivants :

$$E_M = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad \pi_M = (x^4 + y^4) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \wedge \left[x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right].$$

On vérifie facilement que cette structure est de Jacobi :

$$[\pi_M, \pi_M] = 2E_M \wedge \pi; \quad [E, \pi] = 0.$$

Considérons la structure de Poisson sur $P = M \times \mathbb{R}$ induite par la structure de Jacobi (la «Poissonification» de la structure de Jacobi précédente voir [8], page 113). Elle est définie par

$$\pi_P = e^{-t}(\pi + Z \wedge E),$$

où t est la coordonnée canonique sur le facteur \mathbb{R} , et $Z = \frac{\partial}{\partial t}$. Une résolution symplectique de la variété de Poisson (P, π_P) est le triple $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ où Σ est une variété symplectique dont la structure symplectique est donnée par le champ de bivecteurs de Poisson non

dégénéré $\Pi_\Sigma = e^{-\frac{q_2}{2}} (\cos^4(p_1^3 q_1) + \sin^4(p_1^3 q_1)) \frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \frac{\partial}{\partial q_1} + 4e^{-\frac{3q_2}{4}} \frac{\partial}{\partial p_2} \wedge \frac{\partial}{\partial q_2}$. Il définit une structure symplectique sur Σ . L'application $\varphi : \Sigma \rightarrow P$ définie par

$$\varphi = (f_1, f_2, f_3, f_4),$$

avec $f_1 = e^{-\frac{q_2}{4}} p_1 \cos(p_1^3 q_1)$, $f_2 = e^{-\frac{q_2}{4}} p_1 \sin(p_1^3 q_1)$, $f_3 = p_2$, $f_4 = q_2$, est un morphisme de Poisson (un calcul direct le montre en utilisant la Proposition 14). Nous avons donc une résolution symplectique de P , qui est une variété de dimension 4.

Exemple 17. Il existe une construction générale mais pas convaincante pour construire une résolution symplectique de toute variété de Poisson de dimension paire. Soit (M, π) une variété de Poisson lisse (resp, réelle analytique ou holomorphe) de dimension $2d$. Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} selon le contexte. Pour toute feuille symplectique \mathcal{S} de π_M , considérons le produit direct $\Sigma = \mathcal{S} \times \mathbb{K}^{2d-2s}$ où $2s$ est la dimension de la feuille \mathcal{S} .

Munissons $\Sigma_{\mathcal{S}}$ avec le produit direct de la structure symplectique $\Pi_{\Sigma_{\mathcal{S}}}$ de la feuille symplectique \mathcal{S} avec la structure symplectique canonique sur l'espace vectoriel de dimension paire \mathbb{K} . Cette structure de Poisson est symplectique par construction. L'application naturelle φ obtenue d'abord en projetant $\mathcal{S} \times \mathbb{K}^{2d-2s}$ sur \mathcal{S} , puis par l'inclusion \mathcal{S} dans M , est une application de Poisson. Maintenant, soit S l'ensemble de toutes les feuilles symplectiques. Soit Σ l'union disjointe $\Sigma := \coprod_{\mathcal{S} \in S} \Sigma_{\mathcal{S}}$. Tous les composants connexes de cette variété sont de dimension $2d$ et sont des variétés symplectiques. Cela implique que Σ est de dimension $2d$ donc symplectique. L'application $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ dont la restriction à $\mathcal{S} \in S$ est $\varphi_{\mathcal{S}}$ est surjective. C'est une application de Poisson car sa restriction à chaque composante connexe $\Sigma_{\mathcal{S}}$ est une application de Poisson. Par conséquent, $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ définit une résolution symplectique.

En utilisant cette construction, nous voyons que toute variété de Poisson de dimension paire admet une résolution symplectique. Cependant, cette construction n'est pas satisfaisante. En général, les feuilles symplectiques forment une famille non dénombrable qui a la cardinalité de \mathbb{K} . Donc Σ peut ne pas admettre un sous-ensemble dénombrable dense, c'est-à-dire être séparable. Même quand il y a un nombre fini de feuilles symplectiques, la résolution décrite dans cet exemple n'est pas semi-connexe (voir Définition 29). Cet exemple n'est donc pas convaincant, et nous imposerons des conditions qui excluent de telles résolutions symplectiques.

2.3 Structures de Poisson qui n'admettent pas de résolutions symplectiques

Nous décrivons dans cette section de larges classes de variétés de Poisson qui ne peuvent pas admettre de résolutions symplectiques raisonnables.

Comme le montre l'exemple 17, il est raisonnable de supposer que les résolutions symplectiques sont séparables - sans quoi il en existe toujours, mais elles ne sont guère intéressantes. Dans cette section, comme dans la précédente, certaines des affirmations portent sur des variétés de Poisson réelles analytiques et holomorphes, certaines concernent le cas lisse. Le contexte sera clairement indiqué s'il y a lieu.

Plusieurs preuves doivent faire appel au théorème de Sard (voir par exemple [24]). Donnons la version de ce théorème qui est requise ici. Pour Σ, M des variétés et $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ une application surjective lisse ou holomorphe, un point $m \in M$ est dite une valeur régulière si $T_\sigma\varphi$ est surjective pour tout $\sigma \in \Sigma$ avec $\varphi(\sigma) = m$. Une valeur critique d'une application $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ est un point $m \in M$ pour lequel il existe $\sigma \in \Sigma$ avec $\varphi(\sigma) = m$ tel que $T_\sigma\varphi : T_\sigma\Sigma \rightarrow T_mM$ n'est pas surjective. Pour une application surjective $\varphi : \Sigma \rightarrow M$, l'ensemble des valeurs critiques et l'ensemble des valeurs régulières forment une partition de M .

Théorème 19. [24] [Théorème de Sard.] Soit P, N des variétés (lisses ou complexes) séparables et $\varphi : P \rightarrow N$ une application surjective lisse ou holomorphe. L'ensemble de toutes les valeurs critiques est de mesure de Lebesgue nulle. En particulier, l'ensemble des valeurs régulières est dense en N .

Voyons maintenant quelles sont les conditions que les variétés de Poisson doivent satisfaire pour admettre une résolution symplectique séparable.

Proposition 15. Soit (Σ, ϕ) une résolution symplectique lisse, réelle analytique ou holomorphe d'une variété de Poisson lisse, réelle analytique ou holomorphe (M, π_M) .

1. Le lieu singulier de π_M coïncide avec l'ensemble des valeurs critiques de ϕ .
2. la différentielle de ϕ en un point $y \in \Sigma$ est inversible si et seulement si $\phi(y)$ est un point régulier pour ϕ .

Preuve. L'application ϕ est de Poisson si et seulement si le diagramme suivant est commutatif : pour tout $x \in M$ et tout $y \in \Sigma$ avec $\varphi(y) = x$:

$$\begin{array}{ccc} T_y^*\Sigma & \xrightarrow{\Pi_{\Sigma|y}^\#} & T_y\Sigma \\ T_y^*\phi \uparrow & & \downarrow T_y\phi \\ T_x^*M & \xrightarrow{\pi_{M|x}^\#} & T_xM \end{array} \quad (2.7)$$

Cette commutativité et le caractère inversible de $\Pi_{\Sigma|\sigma}^\#$ font que $\pi_{M|x}^\#$ est inversible si et seulement si les flèches verticales sont inversibles pour tout $y \in \phi^{-1}(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $T_y\phi$ est inversible pour tout $y \in \phi^{-1}(x)$, ce qui démontre le résultat. \square

Pour des variétés de Poisson symplectiques sur un ouvert dense, les points singuliers sont très exactement les points où le bivecteur n'est pas inversible. La proposition suivante sera utilisée plusieurs fois.

Proposition 16. Une variété de Poisson (M, π) qui admet une résolution symplectique séparable est symplectique sur un ouvert dense.

Preuve. Comme ϕ est surjectif, il découle du théorème de Sard (qui est valable pour les applications lisses (resp. holomorphe) entre variétés séparables) que l'image de l'ensemble des points où la différentielle de ϕ est surjective (et donc bijective) est un ouvert dense de M . Par la proposition 15, les valeurs régulières de φ sont des points réguliers de π_M . Par conséquent, les points réguliers de π_M sont denses. Puisque les valeurs régulières d'une structure de Poisson sont toujours un sous-ensemble ouvert, cela prouve la revendication. \square

On déduit de la proposition 16 qu'un point m dans une variété de Poisson (M, π_M) qui admet une résolution symplectique séparable, est

1. un point régulier pour la structure de Poisson π_M si et seulement si, c'est un point symplectique, (c'est-à-dire, un point m où $\pi_{M|m}^\# : T^*M \rightarrow TM$ est bijective),
2. un point singulier pour la structure de Poisson π_M si et seulement si, ce n'est pas un point symplectique.

On déduit de la proposition 16 qu'un point $m \in M$ est

1. un point régulier pour la structure de Poisson π_M si et seulement si $T_\sigma\varphi$ est bijective pour tout point $\sigma \in \varphi^{-1}(m)$,
2. un point singulier pour la structure de Poisson π_M si et seulement si, $T_\sigma\varphi$ est non-bijective pour tout point $\sigma \in \varphi^{-1}(m)$.

Imposer que les résolutions symplectiques soient séparable n'est pas suffisant ainsi que suggéré par l'exemple 15 qui décrit une résolution symplectique de la structure de Poisson sur \mathbb{R}^2 donnée par $\{x, y\} = x$. Clairement, nous ne voulons pas considérer de telles résolutions symplectiques. Pour éviter les résolutions symplectiques comme décrites dans l'exemple 15, on peut supposer que l'application $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ soit une application propre, c'est-à-dire l'image inverse par φ d'un sous-ensemble compact de M est un sous-ensemble compact de Σ . Dans ce cas, on dit que la résolution est une résolution symplectique propre. La résolution symplectique de l'Exemple 15 n'est pas propre. Afin de ne pas confondre le cas lisse avec le cas holomorphe (ou réel analytique), nous les distinguerons en donnant deux théorèmes. Nous allons commencer avec le cas lisse. Considérons à nouveau la structure de Poisson donnée par :

$$\{x, y\}_M = f(x, y). \quad (2.8)$$

où x, y sont des coordonnées locales sur $M = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y)$ est une fonction lisse qui s'annule si $x = 0$.

Théorème 20. *La variété de Poisson (M, π) décrite par l'Equation (2.8) n'admet pas de résolution symplectique lisse propre.*

Remarque 6. *Le problème suivant reste ouvert : la variété de Poisson (M, π) décrite par (2.8) admet-elle une résolution symplectique lisse connexe ?*

Démontrons maintenant le Théorème 20.

Preuve. Soit (Σ, φ) une résolution symplectique propre de (M, π_M) . Comme $M \simeq \mathbb{R}^2$, on écrit $\phi = (u, v)$ où u, v sont des fonctions lisses à valeurs réelles sur Σ . D'après le théorème de Sard (Théorème 19), appliqué à la fonction différentiable $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, laquelle est surjective car ϕ est surjective, les valeurs critiques de v ont un complémentaire dense dans \mathbb{R} . Soit $v_0 \in \mathbb{R}$ en dehors des valeurs critiques de v . Puisque v_0 n'est pas une valeur critique, et puisque la dimension de Σ est 2, l'image réciproque par $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ de v_0 est une union $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ de courbes.

Considérons le point $(0, v_0) \in M = \mathbb{R}^2$. Ce point est un point singulier de π_M par définition de celui-ci. Considérons un point $\sigma \in \Sigma$ de son image réciproque, point qui appartient à une courbe \mathcal{C}_{i_0} pour un certain $i_0 \in I$. Nous allons montrer que l'image de \mathcal{C}_{i_0} par ϕ est réduite au point $(0, v_0)$, c'est-à-dire que u est nulle sur cette courbe.

Comme la fonction v a une différentielle non nulle en σ , il existe une autre fonction locale p , définie au voisinage de σ telle que le couple (p, q) forme des coordonnées de Darboux locales sur un ouvert $U_\sigma \subset \Sigma$. Sur $U_\sigma \subset \Sigma$ l'application φ s'écrit $\phi : (p, q) \rightarrow (u(p, q), q)$ tandis que la restriction à $U_\sigma \subset \Sigma$ de \mathcal{C}_{i_0} est donnée par $v = v_0$. Par la proposition 14, comme l'application φ est un morphisme de Poisson, l'équation différentielle en la variable p suivante est satisfaite pour toute valeur de v dans un voisinage de v_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial p}(p, v) = f(u(p, v), v). \quad (2.9)$$

En particulier, pour $v = v_0$, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial p}(p, v_0) = f(u(p, v_0), v_0) \\ \text{et } u(p_0, v_0) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ici (p_0, v_0) sont les coordonnées du point σ . Puisque $f(0, v) = 0$ pour toute valeur de v et en particulier $f(0, v_0) = 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que l'équation différentielle (2.9) admet pour une solution unique la fonction nulle, c'est-à-dire, $u(p, v_0) = 0$ pour tout p dans un voisinage de p_0 . Par conséquent, la restriction de u à \mathcal{C}_{i_0} est une fonction qui est nulle dans un voisinage de tout point où elle est nulle. Puisque \mathcal{C}_{i_0} est connexe, la fonction u s'annule identiquement sur toute la courbe \mathcal{C}_{i_0} si et seulement si elle s'annule en un point de \mathcal{C}_{i_0} . La conclusion de ce qui précède est qu'il y a deux types de courbes dans $v^{-1}(v_0)$, celles sur lesquelles la restriction de la fonction u n'est jamais nulle (courbes que nous appelons courbes du premier type) et celles où u est identiquement nulle, (courbes que nous appelons les courbes du second type). Puisque l'application φ est surjective, il y a nécessairement au moins une courbe de chaque type. Puisque l'union de toutes les courbes du second type est l'image inverse $\varphi^{-1}(0, v_0)$, cette union est un ensemble compact. (Remarquons aussi que chacune de ces courbes est compacte, donc est isomorphe à un cercle). Soit K l'image inverse par φ de $[-1, 1] \times \{v_0\} \subset M$. Puisque φ est propre, l'ensemble K est compact. Appelons maintenant courbes du bon type celles qui se rencontrent K . Les courbes du second type sont toujours du bon type.

Par définition de v_0 , $T_\sigma v : T_\sigma \Sigma \rightarrow T_\sigma \mathbb{R}$ est surjective pour chaque $\sigma \in v^{-1}(v_0)$, donc, v est une submersion dans un voisinage de tout point dans $v^{-1}(v_0)$, les courbes $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ dont l'union forme $\phi^{-1}(0, v_0)$ peuvent être séparées, c'est-à-dire qu'il y a des ensembles ouverts

$(U_i)_{i \in I}$, avec U_i contenant \mathcal{C}_i pour tous distincts $i, j \in I$ tels que $U_i \cap U_j \cap v^{-1}(0) = \emptyset$. Les sous-ensembles ouverts $(U_i \cap K)_{i \in I}$ recouvrent K . C'est aussi une partition. Or, dans une partition d'un ensemble compact par des sous-ensembles ouverts, seulement un nombre fini d'entre eux peut être non vide. Le sous-ensemble fini de courbes du bon type peut donc être séparé en deux sous-ensembles : ceux qui sont du second type et ceux qui sont du premier type. Ces deux sous-ensembles étant fini, les courbes des deux types peuvent être séparées par deux sous-ensembles ouverts V et W de Σ qui ne se rencontrent pas dans Σ .

Considérons maintenant une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma$, telle que $\phi(y_n) = (\frac{1}{n}, q_0)$. Comme ϕ est propre, de la suite y_n , on peut extraire une sous-suite convergente. Soit $\tilde{y} \in \Sigma$ sa limite. Par construction, $\phi(\tilde{y}) = (0, v_0)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'élément y_n appartient à une courbe du premier type et du bon type, et est donc dans V , mais sa limite est dans une courbe du second type et du bon type, et est donc dans W . Cela contredit le fait que $V \cap W = \emptyset$ et permet de finir la preuve. \square

Nous regardons maintenant le cas réel analytique ou holomorphe. Comme dans l'équation (2.8), nous considérons la structure de Poisson réelle analytique (resp, holomorphe) sur $M := \mathbb{C}^2$, ou un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 (resp, \mathbb{C}^2) contenant au moins un point de l'axe verticale $\{x = 0\}$, donné par :

$$\{x, y\}_M = f(x, y) \tag{2.11}$$

avec $f(x, y)$ une fonction analytique (ou holomorphe) réelle qui s'annule sur l'axe vertical $\{x = 0\}$. Le théorème 20 implique que, dans le cas réel analytique, aucune résolution propre n'existe. Mais il y a une affirmation plus forte, et de ce fait, nous introduirons la notion de résolution symplectique semi-connecte (pour le cas réel analytique ou holomorphe).

Définition 29. Une résolution symplectique $(\Sigma, \varphi, \Pi_\Sigma)$ d'une variété de Poisson (M, π_M) est dite semi-connecte si aucune composante connexe de Σ , par l'application φ n'a une image incluse dans le lieu singulier de π_M .

Remarque 7. Si une résolution symplectique $(\Sigma, \varphi, \Pi_\Sigma)$ de M avec Σ est connexe, alors elle est également semi-connecte.

Théorème 21. La variété de Poisson réelle analytique (ou holomorphe) (M, π_M) décrite par l'équation (2.11) n'admet pas de résolution symplectique semi-connecte réelle analytique (ou holomorphe).

Nous montrons le Théorème 21 pour le cas holomorphe, la preuve pour le cas analytique réel étant similaire. On suppose $M = \mathbb{C}^2$, la preuve s'adapte facilement au cas général. Soit (Σ, Π, φ) une résolution symplectique réelle analytique ou holomorphe semi-connecte de la structure de Poisson décrite par l'équation (2.11). On écrit $\varphi = (u, v)$ avec u, v fonctions holomorphes de Σ dans \mathbb{C} . Considérons $\Gamma = u^{-1}(0) \subset \Sigma$. L'ensemble Γ est un sous-ensemble fermé de Σ qui est l'union disjointe de

$$\Gamma_{sing} = \{\sigma \in \Sigma \mid u = 0 \text{ and } d_\sigma v = 0\}$$

et

$$\Gamma_{reg} = \{\sigma \in \Sigma \mid u = 0 \text{ and } d_\sigma v \neq 0\}.$$

Nous commençons avec un lemme :

Lemme 5. *Pour tout point $\sigma \in \Gamma_{reg}$, il existe un voisinage U_σ de σ dans Σ tel que $v(U_\sigma \cap \Gamma_{reg})$ est réduit à un point.*

Preuve. Pour tout point $\sigma \in \Gamma_{reg}$ tel que $d_\sigma v \neq 0$ il existe un voisinage U_σ de σ dans Σ et une fonction p définie sur U_σ telle que le couple (p, v) forme des coordonnées locales de Darboux sur Σ . L'application φ s'écrit dans ces coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi : U_\sigma \subset \Sigma &\rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto (u(p, v), v) \end{aligned}$$

Soit (p_0, v_0) les coordonnées du point $\sigma \in \Sigma$. La proposition 14 implique que l'équation différentielle (2.9) est satisfaites.

Considérons la fonction $h : v \rightarrow u(p_0, v)$, comme la fonction h est réelle analytique ou holomorphe et nulle en v_0 , il existe deux possibilités : soit cette fonction est identiquement nulle, soit elle a un zéro isolé en v_0 . L'équation différentielle (2.9) et le théorème de Cauchy-Lipschitz donnent que si h est identiquement nulle sur un voisinage de v_0 , la fonction u est nulle sur U_σ (qui est un ouvert dans un fermé donc une union dénombrable de compacts). Étant donné que la fonction u est réelle analytique ou holomorphe, ceci implique que $u = 0$ sur toute la composante connexe Σ_σ de σ dans la variété Σ . Mais ceci est impossible parce que Σ est semi-connexe : $\varphi(\Sigma_\sigma)$ ne peut pas être inclus dans le lieu singulier de π_M . Donc v_0 est nécessairement un zéro isolé de h et l'équation (2.9) et le théorème de Cauchy-Lipschitz impliquent que $u(p, v)$ ne peut pas être nulle pour $v \neq v_0$ tandis que $(P, v_0) = 0$ pour tous p . Donc $U_\sigma \cap \Gamma_{reg}$ est donné dans les coordonnées (p, v) par $v = v_0$ et son image par φ est réduite au point $(0, v_0)$. Ceci complète la preuve. \square

Exemple 18. Pour expliquer le lemme 5, considérons la structure de Poisson $\{x, y\} = x$ sur $M := \mathbb{C}^2$. Considérons $\Sigma := \mathbb{C}^2$ avec la structure symplectique canonique et $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ l'application définie par $\varphi : (p, q) \mapsto (p, pq)$. L'application φ est un morphisme de Poisson mais $\varphi(\Sigma) \cap \{x = 0\}$ est réduit au point $(0, 0) \in M$. Il est en particulier non surjective et $(\Sigma, \varphi, \Pi_\Sigma)$ n'est pas une résolution symplectique.

Nous pouvons démontrer maintenant le Théorème 5 :

Preuve. Soit $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ une résolution symplectique semi-connexe réelle analytique ou holomorphe. Par construction $\varphi = (u, v)$ avec u, v sont deux fonctions réelles analytiques ou holomorphes sur Σ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} comme dans le lemme 5. Par souci de

simplicité, nous nous mettons dans le cas holomorphe. Soit $\Gamma = u^{-1}(0)$, Γ_{sing} et Γ_{reg} comme dans les ligne qui précèdent le lemme 5. Comme φ est supposée être surjectif,

$$v(\Gamma) = \mathbb{C}.$$

D'après le théorème 19 [Théorème de Sard], appliqué à la fonction différentiable $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, qui est surjective car φ l'est. Les valeurs critiques de v forment un ensemble de mesure nulle dans \mathbb{C} . Par construction, $v(\Gamma_{sing})$ est inclus dans ce sous-ensemble et est donc de mesure 0. Montrons que $v(\Gamma_{reg})$ est un sous-ensemble dénombrable ou fini de \mathbb{C} . Pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe par le lemme 5 un voisinage U_σ de $\sigma \in \Sigma$ tel que $\varphi(U_\sigma) \cap \mathbf{M}_{sing}$ est réduit à un point. L'ensemble Γ_{reg} est un sous ensemble ouvert du sous ensemble fermé Γ . Γ_{reg} est un ensemble localement compact et nous pouvons extraire de n'importe quelle recouvrement ouvert de Γ_{reg} une recouvrement ouvert fini ou dénombrable.

Cela implique que $\varphi(\Gamma_{reg})$, tout comme $v(\Gamma)$, est un ensemble fini ou dénombrable de \mathbb{C} . On peut extraire de la recouvrement des ensembles ouverts $(V_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ une famille finie ou dénombrable $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Cela implique que $\varphi(\Gamma)$, tout comme $v(\Gamma)$, est un ensemble fini ou dénombrable. Par conséquent, il est de mesure nulle. Or, $v(\Gamma)$ ne peut pas être l'union de deux sous-ensembles de mesure nulle. Par conséquent, aucune résolution symplectique semi-connexe peut exister. \square

Nous utilisons maintenant les théorèmes 20 et 21 pour donner une classe de variétés de Poisson qui n'admettent pas de résolutions symplectiques raisonnables, bien qu'elles soient symplectiques sur un sous-ensemble ouvert dense.

Nous disons qu'une sous-variété N d'une variété de Poisson (M, π_M) qui peut être lisse, réelle analytique ou holomorphe, telle que

$$T_n N \oplus \pi_{M|_n}^\#(T_n N^\perp) = T_n M, \quad \forall n \in N \quad (2.12)$$

est de Poisson-Dirac. La définition usuelle est plus générale (voir [18], chapitre 5) mais nous nous contentons ici de cette définition. Rappelons que toute sous-variété Poisson-Dirac admet une structure de Poisson induite unique appelée structure de Poisson réduite et notée par $\{\cdot, \cdot\}_N$ qui satisfait pour toutes les fonctions locales F, G sur N

$$\{F, G\}_N = i_N^* \left\{ \tilde{F}, \tilde{G} \right\}_M$$

où \tilde{F} et \tilde{G} sont des extensions locales de F et G à M dont les champs de vecteurs hamiltoniens sont tangents à N et $i_N^* : N \hookrightarrow M$ est l'inclusion. L'équation (2.12) implique que de telles extensions existent toujours, voir [18], chapitre 5.

Remarque 8. (voir [29], corollary 2.11) Les sous-variétés de Poisson-Dirac des variétés symplectiques sont exactement des sous-variétés symplectiques, c'est-à-dire des sous-variétés sur lesquelles la 2-forme symplectique se restreint à une 2-forme non dégénérée.

Nous donnons maintenant une caractérisation des sous-variétés de Poisson-Dirac, pour plus de détails voir [18], page 163.

Proposition 17. *Soit (M, π_M) une variété de Poisson (lisse / réelle analytique / holomorphe) de dimension $2r + d$ et N une sous-variété de M de dimension d . Alors N est une sous-variété de Poisson-Dirac si et seulement si pour tout $n \in N$, N est localement défini par $2r$ fonctions indépendantes $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ satisfaisant les relations suivantes :*

$$\mathfrak{i}_N^* \{p_i, q_j\}_M = \delta_i^j, \quad \mathfrak{i}_N^* \{p_i, p_j\}_M = \mathfrak{i}_N^* \{q_i, q_j\}_M = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, r. \quad (2.13)$$

Les sous-variétés N, S de M sont dites en *somme directe* en $n \in S \cap N$ si $T_n S \oplus T_n N = T_n M$.

Lemme 6. *Soient (M, π_M) une variété de Poisson (lisse/réelle analytique/holomorphe) de dimension $2r + d$, S une feuille symplectique de dimension $2r$ et $N \subset M$ une sous-variété en somme directe avec S en un point $n \in S \cap N$. Pour chaque résolution symplectique $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ de (M, π_M) , il existe un voisinage N' de n dans N tel que :*

1. N' est une sous-variété de Poisson-Dirac,
2. $\varphi^{-1}(N')$ est une sous-variété de Σ ,
3. la restriction $\varphi_{N'} : \varphi^{-1}(N') \rightarrow N'$ est une résolution symplectique pour les structures de Poisson réduites de $\varphi^{-1}(N')$ et N' respectivement Si $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ est propre (resp, semi-connexe, alors cette restriction l'est aussi)

Preuve. Il existe, dans un voisinage U de n , des coordonnées de Weinstein (p, q, z) telles que la sous-variété $N' := N \cap U$ est donnée par les équations : $p_1 = \dots = p_r = q_1 = \dots = q_r = 0$ (voir [18] chapitre 1 pour la définition des coordonnées de Weinstein). Les fonctions $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ ayant des champs de vecteurs hamiltoniens indépendants à tous les points de U , leur tirés en arrière $\varphi^* p_1, \dots, \varphi^* p_r, \varphi^* q_1, \dots, \varphi^* q_r$ ont également des champs de vecteurs hamiltoniens indépendants en tout point dans $\varphi^{-1}(U)$. Par conséquent, leurs tirés en arrière par φ sont des fonctions indépendantes. Le lieu des zéros de ces fonctions qu'ils définissent est $\varphi^{-1}(N')$ par construction, qui est donc une sous-variété de Σ que nous appelons Σ_N . La proposition 2.13 implique que N' et $\varphi^{-1}(N')$ sont des sous-variétés de Poisson-Dirac. Cela prouve le premier et le deuxième point.

Si pour toute fonction $F \in M$ telle que

$$\{F, q_i\}_{N'} = 0 = \{F, p_i\}_{N'}$$

pour tout $i = 1, \dots, r$, alors

$$\{\varphi^* F, \varphi^* q_i\}_{\Sigma_N} = 0 = \{\varphi^* F, \varphi^* p_i\}_{\Sigma_N}$$

pour tout $i = 1, \dots, r$, Ainsi, une fonction F sur M telle que le champ de vecteurs hamiltonien X_F tangent à N' vérifie que le champ de vecteurs hamiltonien $X_{\varphi^* F}$ est tangent à $\varphi^{-1}(N')$. Maintenant, pour toutes fonctions $F, G \in C^\infty(N')$, nous avons par définition de la structure réduite

$$\{F, G\}_{N'} = \left\{ \tilde{F}, \tilde{G} \right\}_{|_{N'}},$$

où \tilde{F} et \tilde{G} sont des extensions locales de F et G à M telles que les champs de vecteurs hamiltoniens sont tangents à N' . Par conséquent

$$\varphi^* \{F, G\}_{N'} = \left(\varphi^* \circ i_{N'}^* \{ \tilde{F}, \tilde{G} \} \right) = i_{\varphi^{-1}(N')}^* \{ \varphi^* \tilde{F}, \varphi^* \tilde{G} \} = \{ \varphi^* F, \varphi^* G \}_{\varphi^{-1}(N')}.$$

Cela prouve que φ se restreint en un morphisme de Poisson de $\varphi^{-1}(N')$ à N' munis de leurs structures de Poisson réduites. Cette restriction est propre si φ est propre et semi-connexe si φ est semi-connexe. Cela prouve le troisième point. \square

Corollaire 6. *Une variété de Poisson (M, π_M) de dimension $2r + 2$*

1. *qui est symplectique sur un ouvert dense*
2. *qui contient une sous-variété P de codimension 1 incluse dans le lieu singulier de π_M ,*
3. *laquelle a au moins un point où le rang de π_M est $2r$.*

n'admet pas de résolution symplectique propre.

Preuve. Nous reprenons le contexte du corollaire 6. Soit F une fonction locale dans un voisinage de $n \in M$. Montrons que le champ vecteurs hamiltonien X_F de F est tangent à P . Puisque P est de codimension 1, s'il existe un point $n' \in P$ où X_F n'est pas tangent à P , tout point dans un voisinage de n' dans M est obtenu à partir d'un point de P en suivant le flot de X_F . Mais puisque tout point de P est un point singulier pour π_M , et puisque le flot de X_F est constitué de difféomorphismes de Poisson, cela implique que tout point dans un voisinage de n' dans M est un point singulier, ce qui contredit l'hypothèse sur π_M .

Soit N soit une sous-variété de dimension 2 en somme directe avec la feuille symplectique \mathcal{S}_n à n où $n \in P$ est un point où le rang de π_M est $2r$. Puisque $T_n N + T_n P = T_n M$, l'intersection $P \cap N$ est une courbe dans N , au moins dans un voisinage de $n \in N$. Nous désignons par P_N cette courbe.

Supposons que (M, π_M) admet une résolution symplectique propre. Par le lemme 6, il y a un voisinage N' de n dans N qui admet une résolution symplectique propre.

Mais en remplaçant N' par un ouvert de celui-ci, si nécessaire, on peut supposer que N' est difféomorphe à un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 , difféomorphisme sous lequel la courbe P_N est donnée par l'équation $x = 0$, avec x, y les coordonnées canoniques sur \mathbb{R}^2 . La structure de Poisson sur N' étant maintenant sous la forme (2.8), elle n'admet pas de résolution symplectique propre par le théorème 20, ce qui contredit le résultat précédent. Par conséquent, (M, π_M) n'admet pas de résolution symplectique propre. \square

Une vérification pas à pas de la preuve du corollaire 6 montre qu'il reste valable en géométrie réelle analytique ou holomorphe. Nous donnons maintenant un exemple (trivial dans un sens) d'une variété de Poisson de dimension 4 qui satisfait aux conditions du corollaire 6.

Exemple 19. Soit (M, π_M) une variété de Poisson définie par $M = \mathbb{R}^4$ et

$$\pi_M = x \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.14)$$

Le champ de bivecteurs π_M satisfait aux conditions du corollaire 6, (c'est-à-dire que l'ensemble des points singuliers de π_M contient une sous-variété de codimension 1), puisque $\mathbf{M}_{sing} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0\}$. La sous-variété de Poisson-Dirac $(N, \pi_N) \subset M$ définie par $\{z = t = 0\}$ est de Poisson-Dirac et la structure de Poisson réduite est $x \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$. Cette sous-variété n'admet pas de résolution symplectique propre par Corollaire 6.

Il est vrai que le morphisme de Poisson donné par $\phi = (q_1, p_1 q_1 + q_2, p_2, q_2)$ est un morphisme de Poisson de \mathbb{R}^4 , muni de la structure symplectique canonique, dans M . Mais l'application $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow M$ n'est pas surjective. Donc ce n'est pas une résolution symplectique, bien qu'elle admette une sous-variété de dimension 2 : (donnée par $y = z$ et $x = 0$) de points singuliers dans son image.

Corollaire 7. *Une variété de Poisson réelle analytique (resp. holomorphe) (M, π_M) de dimension $2r + 2$ qui est symplectique sur un sous-ensemble ouvert dense et qui admet une sous-variété P de codimension 1 inclus dans \mathbf{M}_{sing} , et a au moins un point $n \in P$ où le rang de π_M est $2r$, n'admet pas une résolution symplectique semi-connexe.*

Le lemme suivant est valable pour les cas lisses, réelles analytiques et holomorphes : Il utilise principalement le théorème de Sard (théorème 19). Nous le prouvons seulement dans le cas lisse, mais la preuve s'adapte facilement.

Lemme 7. *Soit (M, π_M) une variété de Poisson de dimension $2n \geq 4$, telle que le lieu singulier de π_M contient une sous-variété $P \subset M$ de codimension 1. Si une résolution symplectique existe, alors le rang de π sur P ne peut pas être nul.*

Preuve. On considère la projection $\psi : U \rightarrow P$ avec U un voisinage tubulaire de P dans M . Soit $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ une résolution symplectique de (M, π) . L'application $\psi \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \rightarrow P$ est surjective car φ et ψ sont surjectifs. Par le théorème de Sard 19 il existe au moins une valeur régulière pour $\psi \circ \varphi$, c'est-à-dire qu'il existe un point $p \in P$ tel que pour tous $\sigma \in \varphi^{-1}(U) \subset \Sigma$, la composition $T_{\varphi(\sigma)}\psi \circ T_\sigma\varphi$ est une application linéaire surjective. Puisque φ est surjectif, il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que $\varphi(\sigma) = p$. Un tel point appartient à $\varphi^{-1}(U)$ par construction, et vérifie que $T_{\varphi(\sigma)}\psi \circ T_\sigma\varphi$ est une application linéaire surjective. En conséquence, cela implique que pour tout choix x_1, \dots, x_{2n-1} de coordonnées locales sur P dans M , les fonctions $(\psi \circ \varphi)^*x_1, \dots, (\psi \circ \varphi)^*x_{2n-1}$ sont linéairement indépendantes au point $\sigma \in \varphi^{-1}(U)$.

Calculons les crochets de Poisson de ces fonctions au point σ . Puisque l'application φ est un morphisme de Poisson, pour tous $i, j = 1, \dots, 2n - 1$:

$$\begin{aligned} \{(\psi \circ \varphi)^*x_i, (\psi \circ \varphi)^*x_j\}_\Sigma(\sigma) &= \{\varphi^*\psi^*x_i, \varphi^*\psi^*x_j\}_\Sigma(\sigma) \\ &= \{\psi^*x_i, \psi^*x_j\}_P(\varphi(\sigma)) = 0. \end{aligned}$$

Mais il est impossible d'avoir $2n - 1$ fonctions indépendantes sur une variété symplectique dont les crochets sont égaux à zéro en un point donné. Cela complète la preuve. \square

Théorème 22. *Une variété de Poisson lisse (M, π_M) qui contient une sous-variété de codimension 1 de points singuliers pour π_M n'admet pas de résolution symplectique propre.*

Preuve. Nous allons démontrer le théorème par récurrence sur $2n = \dim(M)$. Si $n = 1$, le théorème se réduit à l'énoncé du théorème 20 en coordonnées locales. Puisque, dans un voisinage d'un sous-ensemble $N \subset M$ de dimension 1, la structure de Poisson s'écrit $\{x, y\} = f(x, y)$ avec (x, y) des coordonnées locales telles que N est donnée, localement, par l'équation $x = 0$. Si N est constituée de points singuliers $f(0, y) = 0$. Ceci signifie que nous sommes dans la situation de (20). Supposons que le théorème est vrai pour tout $1, \dots, n$ et démontrons le pour $n + 1 = \frac{1}{2} \dim(M)$. Supposons que le lieu singulier de π_M contient une sous-variété P de codimension 1. D'après le lemme 7 le rang de π_M sur P ne peut pas être nul. Soit m un point dans P où $\pi_{M|m} \neq 0$. Si une résolution symplectique $(\Sigma, \Pi_\Sigma, \varphi)$ de (M, π_M) existe, par le lemme 6, toute sous-variété N en somme directe avec la feuille symplectique en un point m admet un voisinage N' de m tel que l'application $\varphi_N : \varphi^{-1}(N) \rightarrow N$ est une résolution symplectique de dimension $2(n + 1 - r)$ où $2r$ est le rang de π_M en m .

Or, $P \cap N'$ est une sous-variété de codimension 1 dans N' (au moins dans un voisinage de m dans N'). Nous obtenons une contradiction avec l'hypothèse de récurrence. Cela démontre le résultat. □

Exemple 20. Considérons l'algèbre de Lie affine, c'est-à-dire le produit semi-direct

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n,$$

muni de

$$[(A, u), (B, v)] = (AB - BA, Av - Bu).$$

On identifie \mathfrak{g} et son espace vectoriel dual \mathfrak{g}^* via la forme bilinéaire symétrique définie pour tous $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \ll (A, u), (B, v) \gg &\mapsto \text{Tr}(AB) + \langle u, v \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sous cette identification, l'action coadjointe devient une action de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g} donnée en un point (B, v) par

$$(A, u) \mapsto \text{ad}_{(A, u)}^*(B, v) = (AB - BA + u^t \otimes v, A^t(v)) \quad (2.16)$$

où A^t est la matrice transposée de A , et

$$u^t \otimes v := \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_i v_1 & \cdots & u_n v_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1 v_j & \cdots & u_i v_j & \cdots & u_n v_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_1 v_n & \cdots & u_i v_n & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}.$$

Pour une matrice diagonale B à valeurs propres distinctes deux à deux et pour v_1, \dots, v_n toutes différentes de zéro, l'application linéaire (2.16) est injective, donc bijective. vérifions ce point. Pour tout (A, u) dans le noyau de (2.16), les termes diagonaux de la matrice $AB - BA + u^t \otimes v$ sont égaux à $u_1 v_1, \dots, u_n v_n$. S'ils sont nuls, alors $u = 0$. On a alors $AB - BA = 0$, ce qui implique que A est une matrice diagonale. Mais, l'égalité $A^t(v) = 0$ implique que tous les termes diagonaux de la matrice A sont nuls. Cela prouve l'injectivité. Puisqu'il y a au moins un point (B, v) où l'application linéaire (2.16) est bijective, et puisque le déterminant de cette application est une fonction polynomiale en les coefficients de B et v , cette application linéaire doit être bijective sur un sous-ensemble ouvert dense. Maintenant, en tout point α du dual \mathfrak{g}^* d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , la structure de Lie-Poisson (ou structure de Kirillov-Kostant-Souriau) sur \mathfrak{g}^* est donnée par l'action coadjointe. Dans notre cas, le Lie-Poisson est transporté sur \mathfrak{g}^* via (2.15) et l'application $\pi_{\mathfrak{g}}^{\#}$ est donnée comme dans (2.16). Sur les sous-ensembles ouverts denses, pour tout $(B, v) \in \mathfrak{g}$ où (2.16) est injective, la structure Lie-Poisson $\pi_{\mathfrak{g}}$ est donc symplectique.

Il est alors naturel de demander si \mathfrak{g} admet des résolutions symplectiques propres.

La réponse est non. Supposons que B est une matrice diagonalisable à valeurs propres distinctes deux à deux. Ainsi que alors B^t l'est aussi. Soit v_1, \dots, v_n une base de vecteurs propres de B^t . Supposons que $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_1 = 0$. Alors (2.16) n'est pas injectif car (A, u) avec $u = 0$ et $A^t(v_1) = v_1$ et $A^t(v_i) = 0$ pour $i = 2, \dots, n$ est dans le noyau de l'action coadjointe (2.16). Dans un voisinage de (B, v) avec B une matrice diagonale à valeurs propres distinctes et $v = (0, 1, 0, \dots, 0)$, la condition $\lambda_1 = 0$ définit une sous-variété de codimension 1. Le lieu singulier de $\pi_{\mathfrak{g}}$ contient donc une sous-variété de codimension 1, et le théorème 22 implique qu'aucune résolution symplectique propre ne peut exister.

Théorème 23. *Une variété de Poisson réelle analytique (M, π_M) , qui contient une sous-variété de codimension 1 des points singuliers de π_M , n'admet pas une résolution symplectique semi-connexée.*

La preuve de ce résultat est identique à celle du théorème 22. Nous utilisons simplement le théorème 21 au lieu du théorème 20 dans le cas où $\dim(M) = 2$ pour l'hypothèse de récurrence afin de dire que M , dans ce cas, n'admet pas une résolution symplectique semi-connexée.

Dans le cas holomorphe, le résultat est beaucoup plus fort car la sous-variété de codimension 1 qui apparaît dans les deux théorèmes 22 et 23 existe toujours.

Théorème 24. *Hormis les variétés symplectiques, aucune variété de Poisson holomorphe n'admet de résolution symplectique semi-connexée.*

Démonstration. Toute variété de Poisson (M, π_M) qui admet une résolution symplectique doit être symplectique sur un ouvert dense (voir la Proposition 16). Pour toute telle variété, le multivecteur $\pi_M^n = \pi_M \wedge \dots \wedge \pi_M$ (n fois, où $2n$ est la dimension de la variété) est une section d'un fibré vectoriel de rang 1, le fibré $\wedge^{2n} TM$. Cette section s'annule précisément aux points singuliers. Si elle s'annule en au moins un point, c'est-à-dire que si M n'est pas symplectique, elle s'annule le long d'une sous-variété de codimension 1 (par le théorème de préparation de Weierstrass qui dit que le lieu singulier de toute

fonction holomorphe contient des points réguliers, autour desquels le lieu singulier est simplement d'une sous-variété de codimension 1). Le théorème 22 permet de conclure qu'aucune résolution symplectique existe. \square

Chapitre 3

Résolutions de contact des structures de Jacobi singulière

3.1 Introduction

Les variétés de Jacobi sont aux variétés de Poisson ce que les variétés de contact sont aux variétés symplectiques. En particulier, les variétés de Jacobi non-dégénérées sont exactement les variétés de contact. Leur structure locale riche rend l'étude sur les variétés de Jacobi difficile et compliquée. Grâce à ce que l'on appelle "Poissonnification" ou "symplectification" [7], beaucoup de travaux sur les variétés de Jacobi ou contact consistent à se replacer dans un cadre "Poisson" et se ramener aux travaux relatifs aux variétés symplectiques ou de Poisson.

Après un rappel des notions essentielles concernant les variétés de Jacobi et de contact, on étudie les relations entre leurs structures. Nous nous inspirons de la notion de réalisation de contact qui a été introduite par Claude Albert [8]. On appelle réalisation de contact d'une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) un triplet $(\Sigma, \alpha, \varphi)$ où (Σ, α) est une variété de contact et $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ une submersion surjective sur (M, π_M, E_M) qui est également un morphisme de Jacobi. Il est possible de trouver une réalisation de contact de dimension $2n + 1$ d'une variété de Jacobi de dimension n voir [8]. Il est évidemment impossible de trouver une réalisation de contact de dimension $2n + 1$ d'une variété de Jacobi de dimension $2n + 1$, sauf si cette dernière est de contact. Mais il est possible d'affaiblir la notion de réalisation en imposant seulement que φ soit surjective, Plus exactement, on définit les résolutions de contact comme suit :

Définition 30. *Une résolution de contact d'une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) de dimension n , est un triplet (Σ, w, φ) où (Σ, w) est une variété de contact de dimension n , et φ est un morphisme de Jacobi surjectif.*

Propre et semi-connexe sont définis exactement comme dans le cas Poisson et symplectique. Nous verrons que, si on suppose Σ séparable, les seules variétés de de Jacobi pouvant admettre une résolution de contact sont les variétés de Jacobi qui sont de contact sur un ouvert dense.

Nous allons donner dans la première section des exemples de variétés de Jacobi singulières qui admettent des résolutions de contact, ce qui montre que la théorie n'est pas vide. Puis, dans la deuxième section, nous montrons aussi que certaines variété de Jacobi n'admettent pas de résolution de contact.

Il y a deux manières de définir une structure de Poisson à partir d'une structure de Jacobi. Il y a la notion de Poissonification des structures de Jacobi, qui est une manière de changer une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) en une variété de Poisson homogène (P, π_P, Z_P) avec $P = M \times \mathbb{R}$. Une autre manière est, sur une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) telle que le champ de vecteur E_M est non-dégénéré, de définir une structure de Poisson homogène sur une sous-variété de codimension 1 transverse à E_M . Nous pouvons donc définir une résolution de contact d'une variété de Jacobi à partir d'une résolution symplectique de sa Poissonification. Inversement, nous pouvons utiliser la seconde construction pour démontrer la non-existence de résolution de contact dans certains cas.

Conventions : Tout au long de ce chapitre, nous désignons par (M, Π_M, E_M) une structure de Jacobi sur une variété lisse, réelle analytique ou complexe M , où π_M est un champ de bivecteurs et E_M un champ de vecteurs. Comme nous ne considérerons pas en général deux structures de Jacobi sur la même variété, cette notation n'est pas ambiguë. Pour nous, une structure de contact sur une variété Σ de dimension $2n + 1$ est une structure de contact (Π_Σ, E_Σ) où Π_Σ est un champ de bivecteurs et E_Σ est un champ de vecteurs telle que le produit extérieur $E_\Sigma \wedge \Pi_\Sigma^n$ n'est nul en aucun point de Σ . Pour l'équivalence avec la définition usuelle, voir [21].

Étant donné une structure de Jacobi (π_M, E_M) qui est de contact sur un ouvert dense. Un point où $E_M \wedge \Pi_M^n$ est non-nul sera dit *régulier*. Il sera dit *singulier* sinon. On note par \mathbf{M}_{sing} l'ensemble des points singuliers de la structure de Jacobi π_M et E_M . Il faut ici faire attention aux mots. Pour (M, π_M, E_M) une variété de Jacobi, on dit en général que \mathbf{M}_{sing} est l'ensemble des points $m \in M$ tels que le champ de vecteurs E_M et l'image de l'application $\pi_{M|m}^\# : T_m^*M \rightarrow T_mM$ associée à π_M ne sont pas de dimension maximale. Pour les variétés de Jacobi qui sont de contact sur un ouvert dense, les deux notions sont bien les mêmes.

En dimension 3, par exemple, nous pouvons avoir un point $m \in M$ tels que $\pi_m \neq 0$, $E_m \neq 0$ et $\pi_m \wedge E_m = 0$. Ces points sont singuliers pour la structure de Jacobi.

Remarque 9. *Pour une structure de Jacobi (M, π_M, E_M) en dimension 3, telle que $E_M \notin \pi_M^\#(T^*M)$ sur un ouvert dense. Les points singuliers sont des points $m \in M$ où $\pi_{M|m} = 0$ ou $E_{M|m} \in \pi_{M|m}^\#(T_m^*M)$.*

3.2 Existence de résolutions de contact en dimension 3

Considérons maintenant la variété différentielle (M, π_M, E_M) de dimension 3 muni du champ de bivecteurs et champ de vecteurs suivant

$$\pi_M = f_z \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + f_y \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_M = g_x \frac{\partial}{\partial x} + g_y \frac{\partial}{\partial y} + g_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.1)$$

où x, y, z sont les coordonnées canoniques sur M , et $f_z, f_y, f_x, g_x, g_y, g_z$ sont des fonctions lisses sur M .

On montre que E_M et π_M définissent une structure de Jacobi sur M si et seulement si,

1. $f_x(\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} - g_x) + f_y(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} - g_y) + f_z(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} - g_z) = 0$ en vertu de l'hypothèse $[\pi_M, \pi_M] = 2E_M \wedge \pi_M$.

En particulier si $g_x = \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y}$, $g_y = \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z}$ et $g_z = \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x}$, c'est-à-dire, quand $E_M = \text{div}(\pi_M)$, alors la première condition est satisfaite.

En particulier pour toute structure de Jacobi (π_M, E_M) en dimension 3, on a $(E_M - \text{div}(\pi_M)) \wedge \pi_M = 0$ ce qui est toujours vrai quand $E_M = \text{div}(\pi_M) + \pi_M^\#(\alpha)$, pour une certaine forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(M)$.

2. Les relations suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} f_z \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) - g_x \frac{\partial f_z}{\partial x} - g_y \frac{\partial f_z}{\partial y} - g_z \frac{\partial f_z}{\partial z} - f_y \frac{\partial g_y}{\partial z} - f_x \frac{\partial g_x}{\partial z} = 0 \\ f_x \left(\frac{\partial g_z}{\partial z} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right) - f_z \frac{\partial g_z}{\partial x} - f_y \frac{\partial g_y}{\partial x} + g_x \frac{\partial f_x}{\partial x} - g_y \frac{\partial f_x}{\partial y} - g_z \frac{\partial f_x}{\partial z} = 0 \\ f_y \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \right) - f_z \frac{\partial g_z}{\partial y} - g_x \frac{\partial f_y}{\partial x} - g_y \frac{\partial f_y}{\partial y} - g_z \frac{\partial f_y}{\partial z} - f_x \frac{\partial g_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

en vertu de l'hypothèse $[E_M, \pi_M] = 0$.

Supposons que la variété de Jacobi (M, π_M, E_M) décrite par (3.1) admet une résolution de contact $(\Sigma, \alpha, \varphi)$. Puisque M est de dimension 3, l'application φ est de la forme $\varphi = (u, v, w)$, où u, v et w sont des fonctions lisses sur Σ à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout choix (p_1, p_2, p_3) de coordonnées locales sur (Σ, α) , les fonctions u, v et w sont des fonctions des variables p_1, p_2 et p_3 .

Proposition 18. *Soit Σ une variété différentielle de dimension 3, α une structure de contact sur Σ , et $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ une application surjective lisse, le triplet $(\Sigma, \alpha, \varphi)$ est une résolution de contact de la variété de Jacobi (M, π, E) décrite par (3.1) si et seulement si les six relations suivantes sont satisfaites :*

1.z

$$\begin{aligned} f_z(u, v, w) &= \{p_1, p_2\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial p_2} - \frac{\partial u}{\partial p_2} \frac{\partial v}{\partial p_1} \right) + \{p_2, p_3\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p_2} \frac{\partial v}{\partial p_3} - \frac{\partial u}{\partial p_3} \frac{\partial v}{\partial p_2} \right) \\ &\quad + \{p_3, p_1\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p_3} \frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial p_3} \right), \end{aligned}$$

1.y

$$\begin{aligned} f_y(u, v, w) &= \{p_1, p_2\}_\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial p_2} - \frac{\partial w}{\partial p_2} \frac{\partial u}{\partial p_1} \right) + \{p_2, p_3\}_\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial p_2} \frac{\partial u}{\partial p_3} - \frac{\partial w}{\partial p_3} \frac{\partial u}{\partial p_2} \right) \\ &\quad + \{p_3, p_1\}_\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial p_3} \frac{\partial u}{\partial p_1} - \frac{\partial w}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial p_3} \right), \end{aligned}$$

1.x

$$\begin{aligned} f_x(u, v, w) &= \{p_1, p_2\}_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial p_1} \frac{\partial w}{\partial p_2} - \frac{\partial v}{\partial p_2} \frac{\partial w}{\partial p_1} \right) + \{p_2, p_3\}_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial p_2} \frac{\partial w}{\partial p_3} - \frac{\partial v}{\partial p_3} \frac{\partial w}{\partial p_2} \right) \\ &\quad + \{p_3, p_1\}_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial p_3} \frac{\partial w}{\partial p_1} - \frac{\partial v}{\partial p_1} \frac{\partial w}{\partial p_3} \right), \end{aligned}$$

$$2.x \ E_{\Sigma} [u(p_1, p_2, p_3)] = g_x(u, v, w),$$

$$2.y \ E_{\Sigma} [v(p_1, p_2, p_3)] = g_y(u, v, w),$$

$$2.z \ E_{\Sigma} [w(p_1, p_2, p_3)] = g_z(u, v, w),$$

où $\varphi = (u(p_1, p_2, p_3), v(p_1, p_2, p_3), w(p_1, p_2, p_3))$ avec p_1, p_2, p_3 sont des coordonnées locales sur Σ , et où Π_{Σ} et E_{Σ} définissent la structure de Jacobi sur Σ associée à la forme de contact α .

Preuve. Ceci est un calcul immédiat. Car E_{Σ}, Π_{Σ} sont projetables par φ sur E_M, π_M si et seulement si les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}(\Sigma) & \xrightarrow{E_{\Sigma}} & C^{\infty}(\Sigma) \\ \uparrow \varphi^* & & \uparrow \varphi^* \\ C^{\infty}(M) & \xrightarrow{E_M} & C^{\infty}(M) \end{array} \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}(\Sigma) \times C^{\infty}(\Sigma) & \xrightarrow{\Pi_{\Sigma}} & C^{\infty}(\Sigma) \\ \uparrow \varphi^* \times \varphi^* & & \uparrow \varphi^* \\ C^{\infty}(M) \times C^{\infty}(M) & \xrightarrow{\pi_M} & C^{\infty}(M) \end{array} \quad (3.3)$$

La commutativité de (3.2) et (3.3) est vérifiée si et seulement si elle est vérifiée pour les fonctions coordonnées. La relation (3.2) redonne 2.x, 2.y, 2.z et la relation (3.3) donne 1.x, 1.y, 1.z. \square

Remarque 10. *La proposition 18 s'étend de manière évidente au cas des structures de Jacobi réelles analytiques et holomorphes.*

Soit M une variété différentielle de dimension 3. On considère sur un système de coordonnées locales (x, y, z) au voisinage $m \in M$ le champ de bivecteurs $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ et un champ de vecteurs $E \in \Gamma(TM)$ définis par :

$$\pi = (x^4 + y^4) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \quad E = 2 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.4)$$

Un calcul direct montre que ceci est de Jacobi. C'est évidemment de contact sur l'ouvert dense $\{x \neq 0\}$ ou $\{y \neq 0\}$. Les seuls points singuliers sont la droite $\{x = y = 0\}$.

Dans ce cas, le crochet de Jacobi sur $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ est donc pour tout couple (f, g) de fonctions différentiables sur M défini par

$$\{f, g\} = i_{\pi}(df \wedge dg) + fi_E dg - gi_E df.$$

Afin de prouver que la théorie de résolution de contact n'est pas vide, nous établissons maintenant le résultat suivant

Théorème 25. *La structure de Jacobi décrite par (3.4) admet une résolution de contact.*

Preuve. Notre candidat de résolution de contact est donné par : $\Sigma = \mathbb{R}^3$ muni de la structure de contact donnée par la 1-forme $\alpha = dp_3 + p_1 dp_2 - 3p_2 dp_1$, avec (p_1, p_2, p_3) les coordonnées sur $\Sigma = \mathbb{R}^3$. Vérifions que ceci est de contact. Nous définissons le morphisme de Jacobi φ de (Σ, α) vers (M, π, E) par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \Sigma &\rightarrow M \\ (p_1, p_2, p_3) &\mapsto (p_1 \sin(p_1^3 p_2), p_1 \cos(p_1^3 p_2), p_3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Il est facile de vérifier que cette application est surjective. Il nous reste à montrer que cette application est un morphisme de Jacobi, ce pourquoi il suffit de vérifier que les relations de la proposition 18 sont satisfaites. Ceci se fait par calcul direct. Afin de simplifier les calculs, nous reprenons les notations de la proposition 18, donc on a

$$u(p_1, p_2, p_3) = p_1 \sin(p_1^3 p_2), v(p_1, p_2, p_3) = p_1 \cos(p_1^3 p_2), w(p_1, p_2, p_3) = p_3,$$

et

$$f_z = x^4 + y^4, f_y = x, f_x = -y, g_x = g_y = 0, g_z = 2.$$

Commençons par la première relation 1.z dans la proposition 18. D'une part, on a $f_z(u, v, w) = p_1^4 (\sin^4(p_1^3 p_2) + \cos^4(p_1^3 p_2))$. D'une autre part, on a

$$\begin{aligned} f_z(u, v, w) &= \{p_1, p_2\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial p_2} - \frac{\partial u}{\partial p_2} \frac{\partial v}{\partial p_1} \right) + \{p_2, p_3\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p_2} \frac{\partial v}{\partial p_3} - \frac{\partial u}{\partial p_3} \frac{\partial v}{\partial p_2} \right) \\ &+ \{p_3, p_1\}_\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial p_3} \frac{\partial v}{\partial p_1} - \frac{\partial u}{\partial p_1} \frac{\partial v}{\partial p_3} \right) = \{p_1, p_2\}_\Sigma p_1^4 + 0 + 0 = p_1^4 \{p_1, p_2\}_\Sigma. \end{aligned}$$

Donc la première relation est satisfaite si on impose

$$\{p_1, p_2\}_\Sigma = (\sin^4(p_1^3 p_2) + \cos^4(p_1^3 p_2)).$$

Les relations 1.y et 1.x reviennent à

$$\begin{aligned} f_y(u, v, w) &= \{p_1, p_2\}_\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial p_2} - \frac{\partial w}{\partial p_2} \frac{\partial u}{\partial p_1} \right) + \{p_2, p_3\}_\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial p_2} \frac{\partial u}{\partial p_3} - \frac{\partial w}{\partial p_3} \frac{\partial u}{\partial p_2} \right) \\ &+ \{p_3, p_1\}_\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial p_3} \frac{\partial u}{\partial p_1} - \frac{\partial w}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial p_3} \right) = 0 - p_1^4 \cos(p_1^3 p_2) \{p_2, p_3\}_\Sigma \\ &+ (\sin(p_1^3 p_2) + 3p_1^3 p_2 \cos(p_1^3 p_2)) \{p_3, p_1\}_\Sigma = p_1 \sin(p_1^3 p_2). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_x(u, v, w) &= \{p_1, p_2\}_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial p_1} \frac{\partial w}{\partial p_2} - \frac{\partial v}{\partial p_2} \frac{\partial w}{\partial p_1} \right) + \{p_2, p_3\}_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial p_2} \frac{\partial w}{\partial p_3} - \frac{\partial v}{\partial p_3} \frac{\partial w}{\partial p_2} \right) \\ &+ \{p_3, p_1\}_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial p_3} \frac{\partial w}{\partial p_1} - \frac{\partial v}{\partial p_1} \frac{\partial w}{\partial p_3} \right) = 0 - p_1^4 \sin(p_1^3 p_2) \{p_2, p_3\}_\Sigma \\ &+ (-\cos(p_1^3 p_2) + 3p_1^3 p_2 \sin(p_1^3 p_2)) \{p_3, p_1\}_\Sigma = -p_1 \cos(p_1^3 p_2). \end{aligned}$$

Ces deux relations sont satisfaites si et seulement si $\{p_3, p_1\}_\Sigma = p_1$ et $\{p_2, p_3\}_\Sigma = 3p_2$.

Les relations restantes 2.x, 2.y, 2.z donnent : $E_\Sigma [u(p_1, p_2, p_3)] = 0 = g_1(u, v, w)$, $E_\Sigma [v(p_1, p_2, p_3)] = 0 = g_2(u, v, w)$, $E_\Sigma [w(p_1, p_2, p_3)] = 2 = g_3(u, v, w)$. Elle sont donc satisfaites pour $E_\Sigma = 2 \frac{\partial}{\partial p_3}$.

□

Remarque 11. *La résolution de contact donnée par le théorème 25 est connexe donc semi-connexe, mais elle n'est pas propre.*

Nous allons évoquer le lien avec la Poissonification.

Définition 31. *On appelle variété de Poisson homogène et on note (M, π_M, Z_M) , une variété de Poisson (M, π_M) munie d'un champ de vecteurs intégrable Z_M , appelé champ d'homothéties², qui vérifie*

$$[Z_M, \pi_M] = L_{Z_M} \pi_M = \pi_M.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la définition de "résolution symplectique homogène" dont nous allons avoir besoin tout au long de ce chapitre.

Définition 32. *Soit (M, π_M, Z_M) une variété de Poisson homogène. Une résolution symplectique homogène de (M, π_M, Z_M) est une résolution symplectique (P, π_P, φ) tel que P est homogène via un champ d'homothéties Z_P sur P qui est projetable par φ sur M et a pour projection Z_M .*

Nous donnons ici un résultat classique (voir [9], pour plus de détails) dont nous allons avoir besoin plus tard, et qui nous permet de construire une variété de Poisson homogène à partir d'une variété de Jacobi.

Proposition 19. *Soit (M, π_M, E_M) une variété de Jacobi. On pose*

$$P = \mathbb{R} \times M.$$

On note t la coordonnée canonique sur le facteur \mathbb{R} , et $Z = \frac{\partial}{\partial t}$. Soit $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction homogène de degré 1 relativement à Z définie par

$$h(t, x) = \exp(t), \text{ pour tout } (t, x) \in P = \mathbb{R} \times M.$$

On définit sur P un bivecteur π_P en posant

$$\pi_P = \frac{1}{h} (\pi_M + Z \wedge E_M).$$

Le triplet (P, π_P, Z_P) est une variété de Poisson homogène.

Preuve. La preuve consiste à démontrer que $[\pi_P, \pi_P] = 0$, cela se fait par un calcul direct en utilisant les identités de Jacobi : $[\pi_M, \pi_M] = 2E_M \wedge \pi_M$ et $[E_M, \pi_M] = 0$. \square

Définition 33. *On appelle poissonification de la variété de Jacobi (M, π_M, E_M) la variété de Poisson homogène (P, π_P, Z_P) construite dans la proposition 19*

2. Tout les champ d'homothéties que nous allons utiliser dans ce chapitre sont intégrables, c'est-à-dire que ce seront des champs de vecteurs dont les flots sont définis pour tout temps.

Lemme 8. Soit \mathbf{M}_{sing} le lieu singulier d'une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) . Le lieu singulier de la poissonification (P, π_P, Z_P) est $\mathbf{M}_{sing} \times \mathbb{R}$.

Preuve. Reprenons le contexte du lemme précédent. D'après la définition de la structure de Poisson π_P sur la poissonification (P, π_P, Z_P) , celle-ci dégénère lorsque la structure de Jacobi (π_M, E_M) dégénère. En effet, on a pour tout entier positif k ,

$$\pi_P^{k+1} = (k+1) \frac{\pi_M^k \wedge E_M \wedge Z_P}{h^{k+1}} + \frac{\pi_M^{k+1}}{h^{k+1}}.$$

Pour k est le rang de π_M , on a $\pi_M^{k+1} = 0$ et on a $\pi_P^{k+1} = (k+1) \frac{\pi_M^k \wedge E_M \wedge Z_P}{h^{k+1}}$. Ceci est nul en $m \in M$ si et seulement si m est un point singulier de π ou si et seulement si $E_M|_m \in \text{Im } \pi_{M|m}^\#$. Donc $\mathbf{P}_{sing} = \mathbf{M}_{sing} \times \mathbb{R}$ \square

La proposition suivante montre la construction d'une variété symplectique à partir d'une variété de contact.

Proposition 20. La poissonification d'une variété de contact (M, π_M, E) est une variété symplectique homogène, que l'on note (P, π_P, Z_P) .

En ce cas on appelle cette opération symplectifier une variété de contact.

Preuve. La démonstration de cette proposition consiste à prouver que la structure de Poisson sur la variété poissonifiée est non-dégénérée. Soit (P, π_P, Z_P) une variété de Poisson homogène construite à partir d'une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) . En vertu de la proposition 19, la structure de Poisson sur P est définie par

$$\pi_P = \frac{1}{h} (\pi_M + Z_P \wedge E_M),$$

où $Z_P = \frac{\partial}{\partial t}$ est le champ de vecteurs associé à la coordonnée canonique t sur le facteur \mathbb{R} , et $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction homogène de degré 1 relativement à Z définie par

$$h(t, x) = \exp(t), \quad (t, x) \in P = \mathbb{R} \times M.$$

Un calcul direct donne $\pi_P^{n+1} = \frac{1}{h^n} \pi_M^n \wedge Z_P \wedge E_M$. Comme $\frac{1}{h^n} \pi_M^n \wedge E_M$ n'est nul en aucun point de $\wedge^{2n} TM$ et $Z_P = \frac{\partial}{\partial t}$ n'est nul en aucun point, alors π_P est symplectique sur P . Ceci complète la preuve. \square

Nous allons donner ici sans démontrer une proposition utile pour faire le lien entre les résolutions symplectiques et celles de contact. Pour la preuve de cette proposition voir [Pierre Dazord, André Lichnerowicz, Charles-Michel Marle]

Proposition 21. Soit (M, π_M, Z) une variété de Poisson homogène, et N une sous-variété de codimension 1 de M transverse au champ d'homothéties Z , alors il existe sur

N une structure de Jacobi (π_N, E_N) . Cette structure de Jacobi sur N est dite induite par la structure de Poisson homogène de M . Elle vérifie

$$\pi_M|_n = \pi_N|_n + Z \wedge E_N|_n$$

pour tout point $n \in N$. Si (M, π_M, Z) est symplectique et Z ne s'annule jamais, alors la structure de Jacobi induite est de contact.

Si on prend en particulier la variété N donnée par $t = 0$ dans la "poissonification" de la Proposition 19, on retrouve la structure de Jacobi initiale. Revenons maintenant sur la poissonification.

Proposition 22. *Une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) de dimension $2n+1$ admet une résolution de contact si et seulement si la poissonification (P, π_P, Z_P) admet une résolution symplectique homogène.*

Preuve. Nous commençons par l'implication la plus simple : s'il existe une résolution de contact $(\Sigma, \pi_\Sigma, E_\Sigma, \varphi)$ de (M, π_M, E_M) , alors la variété poissonifiée (P, π_P, Z_P) définie comme dans la proposition 19 admet une résolution symplectique homogène.

On considère $(\Sigma, \pi_\Sigma, E_\Sigma, \varphi)$ la résolution de contact de (M, π_M, E_M) . Par la proposition 20, la poissonification de la variété de contact $(\Sigma, \pi_\Sigma, E_\Sigma)$ est une variété symplectique $(\tilde{\Sigma} = \Sigma \times \mathbb{R}, \pi_{\tilde{\Sigma}}, Z_{\tilde{\Sigma}})$. Regardons maintenant l'application $\tilde{\varphi} = \varphi \times id_{\mathbb{R}}$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \quad \tilde{\Sigma} &\rightarrow P \\ (\sigma, t) &\mapsto (\varphi(\sigma), t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Il est clair que $Z_{\tilde{\Sigma}} = \frac{\partial}{\partial t}$ est projetable par $\tilde{\varphi}$ et se projette sur $Z_P = \frac{\partial}{\partial t}$. Comme φ est un morphisme de Jacobi, cela implique que π_Σ et E_Σ sont projetables par φ sur M et ont pour projection π_M et E_M . En conséquence de quoi, le bivecteur $\pi_\Sigma + Z_{\tilde{\Sigma}} \wedge E_\Sigma$ est projetable par $\tilde{\varphi}$ sur P et a pour projection le bivecteur $\pi_M + Z_P \wedge E_M$. Il s'en suit que le bivecteur de Poisson sur $\tilde{\Sigma}$ associé à la structure symplectique est projetable par $\tilde{\varphi}$ sur P et a pour projection le bivecteur de Poisson sur P . Donc $\tilde{\varphi}$ est morphisme de Poisson. Il est surjectif car φ l'est, ceci implique que $(\tilde{\Sigma}, \Pi_{\tilde{\Sigma}})$ est une résolution symplectique de (P, π_P) . Comme $Z_{\tilde{\Sigma}}$ se projette sur Z_P cette résolution est homogène, cela prouve la première implication.

Démontrons maintenant la deuxième implication : s'il existe une résolution symplectique homogène de (P, π_P, Z_P) , alors la variété de Jacobi (M, π_M, E_M) définie comme dans la proposition 21 admet une résolution de contact.

Tout d'abord, nous pouvons considérer la sous-variété $M \subset P$ donnée par $\{t = 0\}$ dans P . Soit $(\tilde{\Sigma}, \pi_{\tilde{\Sigma}}, Z_{\tilde{\Sigma}}, \tilde{\varphi})$ une résolution symplectique homogène de (P, π_P, Z_P) . Soit $\Sigma = \{\sigma \in \tilde{\Sigma} \mid t(\tilde{\varphi}(\sigma)) = 0\}$. Puisque $Z_P[t] = 1$ alors $Z_{\tilde{\Sigma}}[\tilde{\varphi}^*t] = 1$, ceci implique que la fonction $\tilde{\varphi}^*t$ a une différentielle non nulle et donc $\Sigma \subset \tilde{\Sigma}$ est une sous-variété de $\tilde{\Sigma}$ transverse à $Z_{\tilde{\Sigma}}$. En vertu de la proposition 21, il existe une structure de contact (Π_Σ, E_Σ) sur $\Sigma \subset \tilde{\Sigma}$. La restriction de $\tilde{\varphi}$ à Σ est surjective sur M car $\tilde{\varphi}$ est surjective. Il nous reste à démontrer que la restriction est un morphisme de Jacobi.

Puisque, $\tilde{\varphi}$ est un morphisme de Poisson, donc $\Pi_{\tilde{\Sigma}}$ et $Z_{\tilde{\Sigma}}$ sont projetables par $\tilde{\varphi}$ sur P et ont pour projection π_P et Z_P respectivement. De plus, les structures de Poisson sur $\tilde{\Sigma}$ et P sont de la forme :

$$\Pi_{\tilde{\Sigma}} = \pi_{\Sigma} + Z_{\tilde{\Sigma}} \wedge E_{\Sigma}, \quad \pi_P = \pi_M + Z_P \wedge E_M, \quad (3.7)$$

Cela n'est possible que si pour tout $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, on a $\wedge^2 T_{\sigma} \tilde{\varphi}(\Pi_{\tilde{\Sigma}}) = \wedge^2 T_{\sigma} \tilde{\varphi}(\pi_{\Sigma}) + T_{\sigma} \tilde{\varphi}(Z_{\tilde{\Sigma}}) \wedge T_{\sigma} \tilde{\varphi}(E_{\Sigma}) = \wedge^2 T_{\sigma} \tilde{\varphi}(\pi_{\Sigma}) + Z_P \wedge T_{\sigma} \tilde{\varphi}(E_{\Sigma}) = \pi_M + Z_P \wedge E_M = \pi_P$.

Donc, $\wedge^2 T_{\sigma} \tilde{\varphi}(\pi_{\Sigma}) = \pi_M$ et $T_{\sigma} \tilde{\varphi}(E_{\Sigma}) = E_M$. Ce qui implique que $\tilde{\varphi}|_{\Sigma}$ est un morphisme de Jacobi. Ceci prouve la deuxième implication et finit la preuve. \square

Nous pouvons préciser le résultat précédent

Proposition 23. *Une variété de Jacobi (M, π_M, E_M) lisse (resp, réelle analytique ou holomorphe) de dimension $2n + 1$ admet une résolution de contact propre (resp, semi-connexes) si et seulement si la poissonification (P, π_P, Z_P) admet une résolution symplectique homogène propre (resp, semi-connexes).*

Preuve. Soient $(\Sigma, \alpha, \varphi)$ une résolution de contact de la variété de Jacobi (M, π_M, E_M) et $(\tilde{\Sigma}, \Pi_{\tilde{\Sigma}}, Z_{\tilde{\Sigma}}, \tilde{\varphi})$ une résolution symplectique homogène de la poissonification (P, π_P, Z_P) . Nous allons démontrer que la résolution de contact est propre (resp, semi-connexes) si et seulement si la résolution symplectique homogène est propre (resp, semi connexes).

Si $\varphi : \Sigma \rightarrow M$ est propre (resp, semi-connexes), alors $\varphi \times id_{\mathbb{R}} : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ est propre (resp, semi-connexes par le lemme 8).

Inversement, si $\tilde{\varphi} : \tilde{\Sigma} \rightarrow P$ est propre (resp, semi-connexes), alors sa restriction $\tilde{\varphi}|_{\Sigma}$ sur Σ est propre car la restriction d'une fonction propre à un fermé est propre. De même, si $\tilde{\varphi}$ est semi-connexes, alors sa restriction $\tilde{\varphi}|_{\Sigma}$ l'est, car Σ est un fermé de $\tilde{\Sigma}$ (Σ est défini par les zéros de la fonction continue φ^*t), c'est aussi semi-connexes car Z_P est intégrable et tout point de $\tilde{\Sigma}$ peut être obtenu à partir d'un point de Σ en suivant le flot de Z_P . Donc $\tilde{\Sigma}$ et Σ ont les mêmes composantes connexes. Par le lemme 8, une composante connexe de $\tilde{\Sigma}$ s'envoie sur le lieu singulier de π_P si et seulement si sa restriction à Σ s'envoie sur le lieu singulier de (π_M, E_M) . Ceci finit la preuve de la proposition. \square

Conclusion 1. *Nous avons vu dans le chapitre précédent que seules les variétés de Poisson symplectiques sur un ouvert dense admettent une résolution symplectique séparable (proposition 23), nous pouvons conclure que seules les variétés de Jacobi de dimension impaires de contact sur un ouvert dense peuvent admettre une résolution de contact séparable. A partir de maintenant, toutes les variétés seront supposées être séparables, et ceci devient automatique.*

3.3 Non-existence de résolutions de contact

On introduit dans cette section des exemples de champs de bivecteurs et champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n dont nous allons démontrer qu'ils définissent une structure de Jacobi

si l'on impose sur ceux-ci des conditions supplémentaires. Puis nous décrivons de larges classes de variétés de Jacobi qui ne peuvent pas admettre des résolutions de contact propres. Certaines des affirmations dans cette section portent sur des variétés de Jacobi réelles analytiques et holomorphes, certaines concernent le cas lisse. Le contexte sera clairement indiqué s'il y a lieu.

Proposition 24. *On considère sur $M = \mathbb{R}^{2m+1}$ muni de coordonnées $x, z, y_1, \dots, y_{2m-1}$, le bivecteur défini par*

$$\pi_M = \left(\sum_{i=1}^{2m-1} f(y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \wedge \frac{\partial}{\partial z} - \left(\sum_{i=1}^{2m-1} y_i^n f(y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \wedge \frac{\partial}{\partial x},$$

et le champ de vecteurs défini par

$$E_M = \left(\sum_{i=1}^{2m-1} g(y_i) \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{i=1}^{2m-1} h(y_i) \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ici n est un entier positif et f, g, h sont des fonctions sur \mathbb{R} . Pour tout choix de f , il existe g et h tel que le bivecteur π_M et le champ de vecteurs E_M définissent une structure de Jacobi sur \mathbb{R}^{2m+1} si $n \geq 2$ et la fonction f est polynômiale sans terme constant ou si $n = 1$ et f est un polynôme quelconque.

Preuve. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned} [\pi_M, \pi_M] &= 2 \sum_{i=1}^{2m-1} \left((\{x, \{y_i, z\}\} + \{y_i, \{z, x\}\} + \{z, \{x, y_i\}\}) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= -2n \left(\sum_{i=1}^{2m-1} y_i^{n-1} f^2(y_i) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

et

$$[\pi_M, \pi_M] = 2E_M \wedge \pi_M = -2n \left(\sum_{i=1}^{2m-1} y_i^{n-1} f^2(y_i) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Par ailleurs, $[E_M, \pi_M] = (g'(y_i)f(y_i) + y_i^n h'(y_i)) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial z} = 0$. Les deux identités $[\pi_M, \pi_M] = 2E_M \wedge \pi_M$ et $[E_M, \pi_M] = 0$ imposent que les fonctions g et h doivent satisfaire les relations pour tout $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{cases} g(y_i)f(y_i) + f(y_i)h(y_i)y_i^n = -ny_i^{n-1}f^2(y_i) \\ g'(y_i)f(y_i) + y_i^n h'(y_i)f(y_i) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ce qui équivaut au système linéaire,

$$\begin{cases} g(t) + h(t)t^n = -nt^{n-1}f(t) \\ g'(t) + t^n h'(t) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Par linéarité de (3.9), il suffit de montrer l'existence d'une solution pour f un monôme.

Prenons le cas $n = 1$, on considère $f(t) = t^k$, $g(t) = at^k$ et $h(t) = bt^{k-1}$. Remplacer les fonctions g, h et f dans (3.9) par ces polynômes donne

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ ka + (k - 1)b = 0 \end{cases}$$

Il est facile de voir que ce système admet au moins une solution pour tout entier $k \geq 0$. Si $k = 0$ on a $b = 0$ et $h(t) = 0$, il n'y a donc pas de terme en $\frac{1}{t}$. Ceci implique que le système (3.9) admet une solution polynomiale.

En ce qui concerne le cas $n \geq 2$, nous allons démontrer l'existence de solution pour tout polynôme f sans le terme constant. Par linéarité de (3.9), il suffit de montrer l'existence d'une solution pour f un monôme. On considère $f(t) = t^k$, $g(t) = at^{k+n-1}$ et $h(t) = bt^{k-1}$ pour tout entier $k \geq n$. Remplacer les fonctions g, h et f dans (3.9) par ces polynômes donne,

$$\begin{cases} a + b = -n \\ (k + n - 1)a + (k - 1)b = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équation admet toujours une seule solution. Comme $k \geq 1$, $h(t)$ est bien un polynôme et donc pour tout polynôme f sans le terme constant le système (3.9) admet une solution.

Si on suppose que f est une fonction constante, il est facile de voir que le système n'admet pas de solution pour toutes fonctions g, h . \square

Remarque 12. Si la fonction f est un polynôme de degré 1 alors les fonctions g et h sont des fonctions constantes ce qui rend le champ de vecteurs E_M non-dégénéré en tout point de la variété considérée M .

Afin de clarifier les choses, nous donnons une série d'exemples.

Exemple 21. Munissons \mathbb{R}^3 du champ de bivecteur π défini par

$$\pi = (2 + 3y) \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y(2 + 3y) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

et du champ de vecteurs E défini par

$$E = -2 \frac{\partial}{\partial x} - 3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dans cet exemple, on a $f(y) = 2 + 3y$ donc un calcul direct montre que

$$[\pi, \pi] = -2f^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} = 2(-9y^2 - 4 - 12y) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \quad [E, \pi] = 0.$$

Exemple 22. Munissons \mathbb{R}^3 du champ de bivecteur π défini par

$$\pi = (y^3 + y^2 + y) \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y(y^3 + y^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

et du champ de vecteurs E défini par

$$E = (2y^3 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (-3y^2 - 2y - 1) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dans cet exemple, on a $f(y) = y^3 + y^2 + y$ donc un calcul direct montre que

$$[\pi, \pi] = -2f^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \quad [E, \pi] = 0.$$

Exemple 23. Munissons \mathbb{R}^3 du champ de bivecteur π défini par

$$\pi = (y^2 + y + 1) \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y(y^2 + y + 1) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

et du champ de vecteurs E défini par

$$E = (y^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} + (-2y - 1) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dans cet exemple, on a $f(y) = y^2 + y + 1$ donc un calcul direct montre que

$$[\pi, \pi] = -2f^2 \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}, \quad [E, \pi] = 0.$$

Remarque 13. Lorsque f est une fonction constante et $n = 1$, alors on obtient une structure de contact.

Proposition 25. Les variétés de Jacobi des exemples 21, 22 et 23 contiennent une sous-variété de codimension 1 dans leurs lieux singuliers si et seulement si le polynôme f admet un zéro. Autrement dit, au point $y = y_0$, on a

$$[\pi, \pi] = 2E \wedge \pi = 0$$

La preuve est évidente. Toutes les sous-variétés $y = y_0$ avec y_0 est un zéro de f , sont singulières.

Le premier résultat dans cette section est le suivant,

Théorème 26. Les variétés de Jacobi dont le lieu singuliers contient une sous-variété de codimension 1, n'admettent pas de résolution de contact propre.

Preuve. Supposons que $(\Sigma, \pi_\Sigma, E_\Sigma)$ une résolution de contact propre de la variété de Jacobi (M, π_M, E_M) dont π_M et E_M sont définis comme dans la proposition 24. Soit (P, π_P, Z_P) la variété de Poisson homogène associée à M définie comme dans la proposition 19 (la poissonification). D'une part, la variété de Poisson (P, π_P, Z_P) admet une résolution symplectique propre d'après la proposition 23. D'autre part, en vertu de la proposition 19, le bivecteur de Poisson sur P est défini par

$$\pi_P = \frac{1}{h} (\pi_M + Z \wedge E_M),$$

où $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction homogène de degré 1 relativement à Z_P définie par

$$h(t, x) = \exp(t), \quad (t, x) \in P = \mathbb{R} \times M.$$

Le bivecteur π_P dégénère sur $\mathbf{M}_{sing} \times \mathbb{R}$ par le lemme 8. Donc si le lieu singulier de π_M contient une sous-variété de codimension 1, celui de π_P aussi, ce qui contredit d'après [15] l'hypothèse sur l'existence de résolution symplectique propre, ce qui achève la preuve. \square

Corollaire 8. *Les variétés de Jacobi (M, π_M, E_M) décrites par la proposition 24 n'admettent pas de résolutions de contact propres sauf si $n = 1$ et f est constante (ou sans zéro réel).*

La preuve est similaire à celle du théorème 26 car les lieux singuliers des variétés de Jacobi décrites par la proposition 24 contiennent sous-variété de codimension 1.

Théorème 27. *Les variétés de Jacobi (M, π_M, E_M) n'admettent pas de résolutions de contact réelles analytiques semi-connexe sauf si $n = 1$ et f est constante.*

La preuve de théorème 27 est identique à celle du théorème 26.

Corollaire 9. *Les variétés de Jacobi (M, π_M, E_M) décrites par la proposition 24 n'admettent pas de résolutions de contact réelles analytiques semi-connexe sauf si $n = 1$ et f est constante.*

Dans le cas holomorphe, le résultat est beaucoup plus fort car la sous-variété de codimension 1 qui apparaît dans les deux théorèmes 26 et 27 existe toujours.

Théorème 28. *À l'exception des variétés de contact, les variétés de Jacobi holomorphes n'admettent pas de résolutions de contact semi-connexe.*

Preuve. La structure de Jacobi (π_M, E_M) d'une variété de Jacobi holomorphe M de dimension $2n + 1$ qui n'est pas de contact dégénère en un point singulier $m \in M$ si le produit extérieur $\pi_M^n \wedge E_M$ s'annule. Mais s'il s'annule en au moins un point, c'est-à-dire que si M n'est pas de contact comme nous avons considéré au début, il s'annule le long d'une sous-variété de codimension 1 (par le théorème de préparation de Weierstrass qui dit que le lieu singulier de toute fonction holomorphe contient des points réguliers, autour desquels le lieu singulier est simplement d'une sous-variété de codimension 1). Le théorème 27 permet de conclure qu'aucune résolution de contact semi-connexe existe. \square

En particulier les variétés de la proposition 24 n'ont pas de résolution symplectique sauf si $n = 1$ et f est constante, au quel cas elles sont de contact

Chapitre 4

Résolution symplectique de quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe fini

4.1 Action de groupe fini et espace quotient

Nous rappelons dans cette section des conditions générales sous lesquelles l'espace quotient M/G d'une action de groupe $G \times M \rightarrow M$ est du même type que M , c'est-à-dire, est une variété affine ou une variété différentiable. Nous verrons éventuellement quels sont ses points singuliers, et le lien avec les points où la structure de Poisson est singulière. Ce chapitre contient essentiellement des résultats classiques, et prépare au chapitre suivant.

Le résultat suivant est par exemple classique [18]. Supposons que M soit une variété affine sur laquelle agit un groupe fini. Soit $\mathcal{F}(M)$ les fonctions régulières sur M . L'algèbre des fonctions G -invariantes $\mathcal{F}(M)^G$ a un nombre fini de générateurs. C'est donc une variété affine, et cette variété est en bijection avec l'espace orbite M/G . Autrement dit, le quotient d'une variété affine par un groupe fini est une variété affine.

En géométrie différentielle, il y a des résultats similaires. Supposons que M est une variété différentiable et que G soit un groupe de Lie, qui agit proprement et librement sur M . Alors l'espace d'orbite M/G a une unique structure de variété lisse pour laquelle l'application canonique $p : M \rightarrow M/G$ est lisse. Des cas particuliers intéressants sont ceux des actions libres d'un groupe fini et des actions libres d'un groupe compact sur une variété. Nous rappelons qu'une action $\chi : G \times M \rightarrow M$ est appelée une action propre, si l'application

$$\begin{aligned} \chi \times p_2 : G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto (gm, m). \end{aligned} \tag{4.1}$$

est une application propre, c'est-à-dire que l'image inverse de chaque sous-ensemble compact de $M \times M$ est un sous-ensemble compact de $G \times M$. Si G est compact ou fini, toute application est propre.

4.2 Actions de Poisson et espaces de quotient

Tout d'abord, nous introduisons la définition d'une action de Poisson dont nous allons avoir besoin après. On suit ici [18].

Définition 34. *Soient G un groupe et (M, π) une variété de Poisson affine. On dit qu'une action $\chi : G \times M \rightarrow M$ préserve la structure de Poisson lorsque, pour tout $g \in G$, l'application $\chi_g : M \rightarrow M$, définie pour tout $m \in M$ par $\chi_g(m) := \chi(g, m)$, est un morphisme de Poisson.*

Nous donnons ici sans la démontrer une proposition qui montre qu'une action de Poisson $G \times M \rightarrow M$ conduit à une structure de Poisson sur l'espace quotient M/G . Pour la preuve de cette proposition voir [18] pour une démonstration. Rappelons qu'en général, une action de Poisson ne préserve pas la structure de Poisson.

Proposition 26. *Soit $\chi : G \times M \rightarrow M$ une action de groupe telle que $(M, \{\cdot, \cdot\})$ et $(G, \{\cdot, \cdot\}_G)$ sont des variétés de Poisson affines, et G étant un groupe algébrique réductif; Si χ est une action de Poisson, alors M/G est muni d'une structure de Poisson unique telle que la projection canonique $p : M \rightarrow M/G$ est un morphisme de Poisson.*

Soit (V, w) un espace vectoriel symplectique de dimension $2d$. Nous désignons par $Sp(V)$ le groupe de tous les symplectomorphismes linéaires de V , autrement dit le groupe de tous les endomorphismes φ de V qui préservent w , c'est-à-dire, $w(\varphi(x), \varphi(y)) = w(x, y)$ pour tous $x, y \in V$. Soit G un sous-groupe fini de $Sp(V)$. Nous allons maintenant étudier la variété affine singulière V/G , à la fois comme variété affine et comme variété de Poisson. Le cas où la dimension de V est égale à 2 sera étudié plus en détail.

Nous nous inspirons de ce qui a été dit dans la section 4.1 sur le quotient d'une variété affine par un groupe fini. Puisque G est un sous-groupe fini de $Sp(V)$, le groupe G agit sur V , et l'espace quotient V/G est une variété affine dont l'algèbre des fonctions lisses $\mathcal{F}(V/G)$ est l'algèbre $\mathcal{F}(V)^G$ de tous les polynômes G -invariants sur V . Le tiré en arrière de la projection canonique $p : V \rightarrow V/G$ est l'inclusion des algèbres $\mathcal{F}(V/G) \simeq \mathcal{F}(V)^G \hookrightarrow \mathcal{F}(V)$. De plus, comme tout symplectomorphisme linéaire de (V, w) préserve la structure de Poisson canonique (correspondant à la 2-forme symplectique) de (V, w) , le sous-groupe fini $G \subset Sp(V)$ agit par isomorphismes de Poisson. Par conséquent, selon la proposition 26, V/G est muni d'une structure de Poisson unique telle que $p : V \rightarrow V/G$ est un morphisme de Poisson. Cela justifie la définition suivante [18].

Définition 35. *Soit (V, w) un espace vectoriel symplectique et soit G un sous-groupe fini de $Sp(V)$. La structure unique de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{V/G}$ sur V/G telle que la projection canonique $p : V \rightarrow V/G$ est une application de Poisson, est appelée la structure de Poisson quotient associée à G . La paire $(V/G, \{\cdot, \cdot\}_{V/G})$ est appelée variété de Poisson quotient associée à G .*

Puisque l'espace quotient V/G est, en général, singulier, cela n'a aucun sens de se demander s'il s'agit d'une variété symplectique. Mais, quand même, nous allons démontrer

que l'espace quotient V/G ne pourrait pas être une variété symplectique pour tout sous-groupe fini de $Gl(V)$ le groupe de tous les endomorphismes linéaires de V . On rappelle que $Sp(V)$ est le groupe des application linéaires qui préservent une forme symplectique.

Proposition 27. [18] *Soit (V, w) un espace vectoriel symplectique de dimension $2d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$ et soit G un sous-groupe fini de $Sp(V)$ non-trivial, le groupe de tous les symplectomorphismes de V . Notons p la projection canonique $p : V \rightarrow V/G$ et par $U \subseteq V$ le sous-ensemble ouvert (non-vide par hypothèse) de tous les points $x \in V$ pour lequel le stabilisateur G_x est trivial.*

1. *Un point dans V/G est un point régulier si et seulement s'il appartient à $p(U)$,*
2. *Le rang de $\{\cdot, \cdot\}_{V/G}$ est égal à $2d$ à chaque point régulier de V/G .*

Par conséquent, la restriction de $\{\cdot, \cdot\}_{V/G}$ à $p(U)$ est une structure de Poisson holomorphe, qui est la structure de Poisson canonique associée à une 2-forme holomorphe symplectique sur $p(U)$.

Preuve. C'est un résultat classique (valable pour l'action d'un groupe fini arbitraire sur un espace vectoriel) que, pour tout $x \in V$, le point $p(x)$ est un point régulier de V/G si et seulement si son stabilisateur G_x est un groupe de réflexion complexe, c'est-à-dire un groupe engendré par des éléments pour lesquels l'espace des points fixes est un hyperplan. Mais l'ensemble des points fixes d'un symplectomorphisme linéaire ne peut pas être un hyperplan sinon c'est l'identité. En conséquence, dans ce cas, le point $p(x)$ est régulier si et seulement si $G_x = e$. Cela prouve le premier point.

Le sous-ensemble ouvert $U \subset V$ est un sous-ensemble G -invariant, l'action de G sur U est libre puisque le stabilisateur de chaque point de U est par définition trivial et U est muni d'une structure de Poisson holomorphe. Ceci implique d'une part que la projection $p : U \rightarrow U/G = p(U)$ est un biholomorphisme local (quand les deux ensembles sont considérés comme des variétés holomorphes), et d'autre part, puisque p est de plus un morphisme de Poisson entre les variétés de Poisson, que p préserve le rang de la structure de Poisson en chaque point, de sorte que le rang de $\{\cdot, \cdot\}_{V/G}$ est $2d$ en tout point de $p(U)$. Par conséquent, $\{\cdot, \cdot\}_{V/G}$ est muni d'une structure de Poisson holomorphe régulière de rang maximal sur $p(U)$, c'est la structure de Poisson canonique, associée à une structure symplectique sur la variété holomorphe $p(U)$. Cela prouve le second point et complète la preuve. \square

Nous finissons cette section par une petite discussion. Regardons maintenant par exemple l'action du groupe de permutation $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendrée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sur $V = \mathbb{R}^2$ muni de la structure de Poisson donnée par le bivecteur

$$\pi = f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \tag{4.2}$$

avec f est une fonction lisse ou holomorphe selon le contexte anti-symétrique sur V . L'action de G sur V est de Poisson. Donc le quotient est de Poisson. La variété quotient V/G est lisse car G est un groupe de permutation de cardinal 2 égal à la dimension de V (les éléments de G sont diagonalisables en des pseudo-réflexion). On peut aussi voir que $\mathcal{F}(V)^G = \mathbb{C}[xy, x + y]$ est une variété lisse et V/G est donc de Poisson.

Question : peut-elle être symplectique pour une fonction $f(x, y)$ bien choisie ?

La réponse est non. Un calcul direct le montre. Mais en toute généralité, nous avons la proposition suivante

Proposition 28. *Il n'existe pas de sous groupe $G \subset Gl_2(\mathbb{C})$ et de bivecteurs π sur V tels que l'action de G sur V préserve la structure de Poisson et tels que la variété quotient V/G soit symplectique.*

Nous allons avoir besoin du Lemme suivant lors de la démonstration de la proposition 28. La preuve est évidente.

Lemme 9. *Soient N une variété symplectique et M une variété de Poisson, il n'existe pas de morphisme de Poisson surjectif tel que le bivecteur de Poisson sur M est projectable sur N et a pour projection le bivecteur de Poisson sur N correspondant à la 2-forme symplectique.*

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 28.

Preuve. Soient (V, π) une variété de Poisson de dimension n et G un sous groupe fini de $Sl(\mathbb{C}, n)$ qui préserve la structure de Poisson. La variété quotient V/G muni du champ de bivecteurs Π est de Poisson si et seulement si le diagramme suivant est commutatif pour tout $v \in V$ et pour tout $m \in V/G$ tel que $\varphi(v) = m$:

$$\begin{array}{ccc} V_v & \xrightarrow{T_v\varphi} & T_m(V/G) \\ \pi_v^\# \uparrow & & \uparrow \Pi_m^\# \\ V_v & \xleftarrow{T_v\varphi^*} & T_m^*(V/G) \end{array} \quad (4.3)$$

Dans le cas où G préserve la structure de Poisson mais pas la structure symplectique (c'est-à-dire, le cas où G n'est pas un sous groupe de $Sp(\mathbb{C}, n)$), le quotient V/G ne peut pas être symplectique d'après le lemme 9. Dans le cas où G est un sous groupe de $Sp(\mathbb{C}, n)$, la structure symplectique sur le quotient dégénère à l'origine. Donc le quotient ne peut pas être symplectique, ce qui achève la preuve. \square

Proposition 29. *L'image de la structure de Poisson décrite par (4.2) sous V/G n'admet pas de résolution symplectique propre. Elle n'admet pas non plus de résolution symplectique semi-connexe dans le cas réel analytique ou holomorphe.*

Preuve. Soit le groupe de permutation $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce groupe agit sur $V = \mathbb{R}^2$ muni de la structure de Poisson décrite par (4.2), par $x, y \rightarrow y, x$. L'action de G sur V préserve la structure de Poisson si et seulement si f est anti-symétrique, cela implique que la

structure de Poisson sur V dégénère sur la diagonale donc le lieu singulier de la structure de Poisson contient une sous variété de codimension 1. Il en va de même pour la structure de Poisson sur le quotient. D'après le théorème 22, la structure de Poisson sur le quotient dans ce cas n'admet pas de résolution symplectique propre. Elle n'admet pas non plus de résolution symplectique semi-connexe dans le cas réel analytique ou holomorphe, d'après le théorème 23. \square

On verra dans la dernière section de cette thèse que avec un groupe infini, ce genre de quotient peuvent admettre des résolutions symplectiques. Le cas où la dimension de V est 2 sera étudié plus en détail plus tard. Ici, nous donnons un corollaire immédiat de la proposition 28, qui sera utile ensuite.

Corollaire 10. *Soit V un espace vectoriel symplectique de dimension 2 et soit $G \neq e$ un sous-groupe fini de $Sp(V)$. Alors l'image de l'origine 0 de V par la projection canonique $p : V \rightarrow V/G$ est le seul point de V/G qui soit singulier. C'est aussi le seul point où le rang de la structure de Poisson quotient est nul.*

Preuve. Pour un espace vectoriel V de dimension 2, le groupe $Sp(V)$ coïncide avec le groupe $Sl(V)$ de toutes les applications linéaires du déterminant +1. Chaque élément d'un sous-groupe fini G de $Sl(V)$ est d'ordre fini, donc diagonalisable. Clairement, un élément diagonalisable de $Sl(V)$, différent de l'unité, admet $0 \in V$ comme son point fixe unique, donc $U = V \setminus \{0\}$. Clairement, le rang de $\{\cdot, \cdot\}_{V/G}$ en $p(0)$ est nul. Selon la proposition 28, le rang de $\{\cdot, \cdot\}_{V/G}$ est 2 à chaque autre point de V/G . \square

4.3 Surfaces de Poisson dans \mathbb{C}^3 et singularités Du Val

Nous introduisons ici les singularités de du Val dont nous reparlons plus en détail au chapitre suivant.

3. Soit G un sous-groupe fini de $Sl_2(\mathbb{C})$. L'action standard de G sur \mathbb{C}^2 induit sur l'espace quotient \mathbb{C}^2/G une structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^2/G}$, ce qui en fait une surface de Poisson singulière.

4. Soit ϕ un polynôme en trois variables. La structure de Poisson $\pi_\phi = \{\cdot, \cdot\}_\phi$ sur \mathbb{C}^3 , donnée par

$$\pi_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y},$$

admet ϕ comme un Casimir, donc la surface (singulière en général) affine $\Sigma_\phi \subset \mathbb{C}^3$, donnée par $\phi = 0$, est une surface de Poisson (singulière en général).

Le but de cette section est de montrer comment ces deux constructions sont liées. Nous montrerons que toute surface de Poisson \mathbb{C}^2/G du premier type est également du second type Σ_ϕ , pour un polynôme ϕ qui sera donné explicitement (pour chaque sous-groupe G). Avant de faire cela, rappelons quelques faits sur la classification des sous-groupes finis de $Sl_2(\mathbb{C})$. Suivant par exemple [18], considérons la liste des sous-groupes A_k , pour k_1, D_k pour k_4 , ou T, Q, I ,

1. Le groupe diédral A_n est le sous-groupe de Sl_2 engendré par

$$a = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } \epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right).$$

2. Le groupe diédral D_n est le sous-groupe de Sl_2 engendré par

$$a = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}, \text{ avec } \epsilon = \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right), \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le groupe des automorphismes d'un tétraèdre régulier $T = A_4$, on note que $|T| = 12$. Ce groupe est engendré par $T = \langle \sigma, \tau, \mu \rangle$, où

$$\sigma = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \epsilon^7 & \epsilon^7 \\ \epsilon^5 & \epsilon \end{pmatrix}, \text{ et } \epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right).$$

4. Le groupe des automorphismes d'un octaèdre régulier $Q = S_4$, on note que $|Q| = 24$. Ce groupe est engendré par σ, τ, μ comme dans le cas de T et par

$$\kappa = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^7 \end{pmatrix}.$$

5. Finalement, on a le groupe des automorphismes d'un icosaèdre $I = A_5$, on note que $|I| = 60$. Ce groupe est engendré par σ, τ où

$$\sigma = - \begin{pmatrix} \epsilon^3 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\epsilon + \epsilon^4 & \epsilon^2 - \epsilon^3 \\ \epsilon^2 - \epsilon^3 & \epsilon - \epsilon^4 \end{pmatrix}, \text{ et } \epsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right).$$

Chaque sous-groupe fini G de $Sl_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'un de ces sous-groupes A_1, A_2, \dots, I . On dit alors que G est de type A_1, A_2, \dots, I . La surface quotient \mathbb{C}^2/G est singulière à l'image de l'origine 0 de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C}^2/G , et à aucun autre point, une singularité ainsi obtenue s'appelle une singularité de Du Val ou singularité kleinienne, selon la référence. C'est un résultat classique ([18] page 264) que la variété affine \mathbb{C}^2/G est, en tant que variété affine, isomorphe à Σ_ϕ , où ϕ est le polynôme, selon le type de G , qui apparaît dans la deuxième colonne du tableau 1.

Tableau 1. Pour chacun des sous-groupes finis G de $Sl_2(\mathbb{C})$, la surface quotient \mathbb{C}^2/G est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène ϕ donné dans la deuxième colonne du tableau 1.

Type de G	ϕ
$A_k, k \geq 1$	$x^2 + y^2 - z^{k+1}$
$D_k, k \geq 4$	$x^2 + y^2 z + z^{k-1}$
T	$x^2 + y^3 + z^4$
Q	$x^2 + y^3 + yz^3$
I	$x^2 + y^3 + z^5$

Notons que cela signifie que, pour chaque groupe G qui apparaît dans le tableau 1, l'algèbre des polynômes sur \mathbb{C}^2 G -invariants est une algèbre à trois générateurs P_1, P_2, P_3 , et que tout polynôme $R \in \mathbb{C}[x, y, z]$, satisfaisant $R(P_1, P_2, P_3) = 0$, est divisible par ϕ . L'isomorphisme $\mathbb{C}^2/G \simeq \Sigma_\phi$ est induit par l'application $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, donnée par (P_1, P_2, P_3) . Ce que l'on exprime dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{(P_1, P_2, P_3)} & \mathbb{C}^3 & \\ p \downarrow & \uparrow & \\ \mathbb{C}^2/G \xrightarrow{\simeq} & \Sigma_\phi & \end{array} \quad (4.4)$$

Nous avons vu que $\mathcal{F}(\mathbb{C}^2)^G \simeq \mathcal{F}(\mathbb{C}^2/G)$ (puisque G est un groupe fini). D'autre part, puisque Σ_ϕ est la surface affine de \mathbb{C}^3 , définie par le polynôme ϕ , son algèbre de fonctions $\mathcal{F}(\Sigma_\phi)$ est donnée par $\mathbb{C}[x, y, z] / \langle \phi \rangle$. En un mot, nous avons un isomorphisme d'algèbre

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}^2)^G \simeq \mathbb{C}[x, y, z] / \langle \phi \rangle.$$

Nous montrerons dans la section suivante que l'isomorphisme $\mathbb{C}^2/G \simeq \Sigma_\phi$ est en fait un isomorphisme de variétés de Poisson. La structure de Poisson sur W_ϕ sera redéfinie au chapitre suivant. Elle est donnée par :

$$\{x, y\}_{W_\phi} = \frac{\partial}{\partial z}, \{y, z\}_{W_\phi} = \frac{\partial}{\partial x}, \{z, x\}_{W_\phi} = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour la démonstration, voir par exemple [18] à nouveau.

Proposition 30. *Soit G un sous-groupe fini de $Sl_2(\mathbb{C})$ et soit $\{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^2/G}$ la structure de Poisson sur \mathbb{C}^2/G , induite par l'action de G sur \mathbb{C}^2 . La surface de Poisson $(\mathbb{C}^2/G, \{\cdot, \cdot\}_{\mathbb{C}^2/G})$ est isomorphe, comme variété de Poisson, à la surface de Poisson $(\Sigma_\phi, \{\cdot, \cdot\}_{W_\phi})$, où ϕ est le polynôme associé à G , comme indiqué dans le tableau 1.*

Ces structures de Poisson admettent des résolutions symplectiques. Elles seront elles-aussi étudiées au chapitre suivant, en particulier dans les cas A_k et D_k .

Chapitre 5

Résolution symplectique de quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe infini

5.1 Introduction

Ce chapitre porte sur l'étude locale des quotients de variétés lisses de Poisson ou symplectiques de dimensions deux par des groupes infinis d'automorphismes, c'est-à-dire des quotients \mathbb{C}^2/G où G est un sous-groupe infini de $GL(2, \mathbb{C})$. En particulier, nous cherchons des résolutions symplectiques d'objets quotients munis de structure de Poisson. Nous allons en fait surtout donner un exemple donc montrer que la théorie développée en Chapitre est non-vide.

Le cas des quotients d'espaces vectoriels de Poisson (resp, symplectiques) par des sous-groupes finis est classique (c'est ce que l'on appelle les singularités de Du Val) et a été largement étudié (du Val et Nicolas Pouyanne, voir [1] [12], chapitre 4.3) en correspondance avec la géométrie de la désingularisation de ces variétés quotients, et la notion de résolution symplectique. Le cas des groupes infinis mais discrets est tout à fait nouveau, en particulier parce que l'algèbre des fonctions lisses G -invariantes $C^\infty[V]^G$ n'est pas finiment engendrée.

Tout d'abord, dans la section 5.2, nous allons introduire des structures de Poisson sur $\mathcal{A} = \mathcal{F}[x_1, \dots, x_n]$ qui admettent des fonctions $f_1, \dots, f_{n-2} \in \mathcal{A}$ comme des casimirs pour tous entiers positifs n et k tel que $n-1 > k$, suivant la thèse [Pichereau]. Nous démontrons ensuite que sous certaines conditions la variété de Poisson définie par $\mathcal{G} : \{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ admet une résolution symplectique. On reviendra sur le cas de dimension deux des singularités de Du Val dans le cas réel, où nous construirons des résolution symplectique $Z_k \rightarrow A_k$ et $Z_k \rightarrow D_{2k}^+$ où D_{2k}^+ est la partie positif de D_{2k} .

Nous allons étudier ensuite l'algèbre $C^\infty[V]^G$ où G est un sous-groupe infini de $GL(2, \mathbb{Z})$ isomorphe à \mathbb{Z} ou à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Les propriétés des fonctions G -invariantes sont totalement différentes. Nous allons remarquer que le cas réel analytique ou holomorphe n'est pas intéressant car il n'y a pas assez de fonctions invariantes. En revanche, les fonctions invariantes lisses sont une algèbre intéressante que nous allons étudier. En munissant \mathbb{R}^2 du crochet de Poisson $\{a, b\}' = b$, qui est invariant par les deux groupes considérés,

on définit sur l'espace quotient \mathbb{R}^2 / \sim une structure quotient sur un objet de Poisson. Le quotient $(\mathbb{R}^2, \{a, b\} = b)$ par le sous-groupe \mathbb{Z} (identifié aux matrices triangulaires supérieures de dimension 2×2 dont la diagonale est $(1, 1)$) est en bijection (ensembliste) avec la singularité quotient A_k pour tout $k \geq 2$, et cette bijection se comporte bien vis-à-vis des structures de Poisson. Le phénomène très curieux que nous montrons est que la résolution symplectique usuelle de $P : Z_k \rightarrow A_k$ de la singularité de du Val A_k donne une résolution symplectique lisse de l'objet de Poisson $(\mathbb{R}^2 / \sim, P(\{a, b\}))$. Ce n'est pas un résultat simple, et nous devons déployer pour y arriver des techniques variées, entre autre d'analyse de Fourier. Cela sera fait dans la dernière osus-section de cette section.

Nous montrons aussi la même chose pour le second groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais c'est alors les singularités de type D_n qui interviennent. Le quotient $(\mathbb{R}^2, \{a, b\} = b)$ par le sous-groupe infini des matrices triangulaires supérieures de dimension 2×2 dont la diagonale est $(1, \pm 1)$ est en bijection avec la singularité quotient D_n^+ et la résolution symplectique usuelle de $P : Z_n \rightarrow D_n$ donne une résolution symplectique lisse de l'objet de Poisson $(\mathbb{R}^2 / \sim, \{a, b\}')$ dans ce cas. Il est tout à fait étrange de trouver A_n dans un cas et D_n dans l'autre. Nous sentons bien qu'il doit y avoir des phénomènes généraux derrière ce résultat étonnant. Mais la difficulté des raisonnements fait qu'il est bien difficile de voir ce que peut être cette théorie pour le moment.

5.2 Résolution symplectique d'une variété affine singulière de Poisson sur \mathbb{R}^n

Tout d'abord, nous allons introduire des structures de Poisson sur l'algèbre $\mathcal{F} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ un $(n-2)$ -uplet d'éléments de \mathcal{F} . Considérons la variété affine

$$W_\Phi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \Phi(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n,$$

c'est-à-dire, l'ensemble des zéros communs des polynômes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$. Nous pouvons construire naturellement un crochet de Poisson sur \mathcal{F} , en posant que

$\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi} = i_{d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{n-2}} \pi_{top}$, où π_{top} désigne la multidérivation $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ et i la contraction d'une multidérivation par $(n-2)$ -forme différentielle. Autrement dit, cette structure est définie pour toutes fonctions $F, G \in \mathcal{F}$ par :

$$\{F, G\}_{W_\Phi} = \frac{dF \wedge dG \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{n-2}}{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}. \quad (5.1)$$

On vérifie que cette structure est de Poisson [25]. Elle admet $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$ comme Casimirs donc elle se restreint à la variété affine W_Φ . On appelle encore $\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi}$ la restriction.

Le résultat suivant est évident.

Lemme 10. *La variété $(W_\Phi, \{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi})$ est symplectique si et seulement si W_Φ est régulière c'est-à-dire, si et seulement si les différentielles $d\varphi_1, \dots, d\varphi_{n-2}$ sont indépendantes en tout point où $\varphi_1 = \dots = \varphi_{n-2} = 0$.*

On suppose que $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$ sont des polynômes qui admettent l'origine comme seule singularité. On parlera alors de *singularité isolée*. Cela signifie à la fois que l'origine est le seul point singulier de la variété W_Φ , aussi que le lieu singulier de la structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi}$ est réduit à l'origine.

Nous allons chercher à trouver une résolution de Poisson de $(W_\Phi, \{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi})$ en faisant un éclatement en zéro. Cependant, avant de donner ces résultats, il est essentiel d'introduire la notion de l'éclatement en l'origine, dont nous allons avoir besoin tout au long de ce chapitre.

Rappel 2. L'éclatement de l'origine dans \mathbb{K}^n s'obtient comme suit. Considérons \mathbb{P}^{n-1} l'espace projectif muni de coordonnées $u = [u_1, \dots, u_n] \in \frac{\mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}}{\mathbb{K}^*}$. Soit Z le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ défini par les équations $x_i u_j = x_j u_i$ pour $i, j = 1, \dots, n$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées sur \mathbb{K}^n . La projection

$$h : \mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n,$$

induit une application

$$P : Z \rightarrow \mathbb{K}^n.$$

Géométriquement Z est l'ensemble des paires formées d'une droite passant par l'origine et un point de cette droite. La fibre $P^{-1}(0)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ des droites passant par l'origine, tandis que pour tout $m \neq 0 \in \mathbb{K}^n$ la fibre $P^{-1}(m)$ ne contient qu'un seul point. L'application P est appelée *éclatement* du point 0, et la fibre $P^{-1}(0)$ est appelée *diviseur exceptionnel* de P . Afin de définir localement la notion d'éclatement, nous considérons l'ensemble des cartes recouvrant Z défini par $\{U_i\}_{i=1, \dots, n}$ où $U_i = \{(x, u) \in Z \mid u_i \neq 0\}$. En clair, U_i est l'ensemble des points $u = (u_1, \dots, u_n)$ tels que $u_i \neq 0$ et des droites D passant par l'origine et x . On peut aussi dire que, pour U_i , on ne considère pas les couples de droites contenues dans l'hyperplan $x_i = 0$. Une carte U_i sur Z est donnée par l'application $\mathbb{K}^n \rightarrow U_i$ définie par $u_1, \dots, u_{i-1}, x_i, u_{i+1}, \dots, u_n \mapsto (x_i u_1, x_i u_2, \dots, x_i u_{i-1}, x_i, x_{i+1} u_{i+1}, \dots, x_i u_n) \times [u_1, \dots, u_{i-1}, 1, \dots, u_n]$. Dans ces cartes (par exemple U_1) on a

$$P : x_1, u_2, \dots, u_{n-2} \mapsto x_1, x_1 u_1, \dots, x_n u_n \quad (5.2)$$

Soit maintenant $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ des fonctions polynômes nulles en 0 définissant une variété W_Φ . On considère les compositions $\varphi_j \circ P : Z \rightarrow \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ avec $j = 1, \dots, n-2$. L'ensemble des zéros de $(\varphi_1 \circ P, \dots, \varphi_{n-2} \circ P)$ est appelée la *transformée totale* de W_Φ . Cette transformée totale contient le diviseur exceptionnel $E = P^{-1}(0)$. On appelle *transformée stricte* \widetilde{W}_Φ de W_Φ la variété que l'on obtient en enlevant le diviseur exceptionnel E à la transformée totale de W_Φ . C'est du moins l'idée intuitive. Plus précisément, on a, dans une carte, par exemple U_1 ,

$$\varphi_1 \circ P(x_1, u_2, \dots, u_{n-2}) = \varphi_1(x_1, x_1 u_2, \dots, x_n u_n) = x_1^{a_1} \widetilde{\varphi}_1^{(1)}(x_1, u_2, \dots, u_{n-2}),$$

où a_1 est la valuation de φ_1 . On définit de même $\widetilde{\varphi}_2^{(1)}, \dots, \widetilde{\varphi}_{n-2}^{(1)}$. Comme le diviseur exceptionnel E , dans la carte U_1 , est défini par $x_1 = 0$, la transformée-strictes \widetilde{W}_Φ de W_Φ

est donnée dans la carte U_1 par

$$\{\tilde{\varphi}_1^{(1)} = \dots = \tilde{\varphi}_{n-2}^{(1)} = 0\} \subseteq U_1.$$

Ceci revient bien à l'opération précédente. Disons le autrement. Soit $\Phi^{(1)} := (\tilde{\varphi}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\varphi}_{n-2}^{(1)})$. On a un isomorphisme :

$$U_1 \cap \widetilde{W}_\Phi \simeq W_{\Phi^{(1)}}.$$

et la transformée stricte $\widetilde{W}_\Phi \subset Z$ est l'union $\widetilde{W}_\Phi = W_{\Phi^{(1)}} \cup \dots \cup W_{\Phi^{(n)}}$, où $\Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$ ont été définis de la même manière dans les autres cartes.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant, dont nous venons de montrer le premier point.

Théorème 29. *Soit $W_\Phi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \Phi = 0\}$ le lieu des zéros des polynômes composant $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$. Soient a_1, \dots, a_{n-2} les valuations de $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$. Soit $\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi}$ le crochet de Poisson comme en (5.1). Soit $P : Z \rightarrow \mathbb{K}^n$ un éclatement en $(0, \dots, 0)$.*

1. *La transformée-strictée \widetilde{W}_Φ de W_Φ , dans chaque carte U_j définie comme dans le rappel, est une variété de la forme $W_{\Phi^{(j)}}$, où $\Phi^{(j)}$ est $(n-2)$ -uplet de polynômes dont le i^{me} a une valuation inférieure ou égale à a_i .*
2. *Il existe une structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi}$ sur \widetilde{W}_Φ telle que $P : \widetilde{W}_\Phi \rightarrow W_\Phi$ est un morphisme de Poisson. Dans la carte U_1 , on a de plus*

$$\{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi} = x_1^{\sum_{i=1}^{n-2} a_i - n + 1} \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi^{(1)}}}$$

et de même pour les autres cartes.

Preuve. Soit $W_\Phi = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \varphi_i = 0, i = 1, \dots, n-2\}$, l'ensemble des zéros de polynômes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dont les valuations sont respectivement a_1, \dots, a_{n-2} . On le munit du crochet de Poisson défini comme en (5.1). L'éclatement de \mathbb{K}^n est la variété de dimension n :

$$Z = \{((x_1, \dots, x_n), [u_1, \dots, u_n]) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x_1 u_2 = x_2 u_1, x_1 u_3 = x_3 u_1 \dots\},$$

muni de la projection $((x_1, \dots, x_n), [u_1, \dots, u_n]) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$. Prenons la carte $u_1 = 1$, ce qui revient à $x_1 u_2 = x_2, x_1 u_3 = x_3 \dots$ de sorte que x_1, u_2, \dots, u_n sont des coordonnées locales. Dans cette carte, la projection P s'écrit :

$$P : (x_1, u_2, \dots, u_n) \rightarrow (x_1, x_1 u_2, \dots, x_1 u_n).$$

Comme pour tout $i = 1, \dots, n-2$, φ_i n'a pas de terme constant et est de valuation a_i , $x_1^{a_i}$ divise $\varphi_i(x_1, x_1 u_2, \dots, x_1 u_n)$, ce qui permet de définir $\tilde{\varphi}_i$ par :

$$p^* \varphi_i(x_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi_i(x_1, x_1 u_2, \dots, x_1 u_n) = x_1^{a_i} \tilde{\varphi}_i(x_1, u_2, \dots, u_n). \quad (5.3)$$

Par construction, $\tilde{\varphi}_i$ est un polynôme dont la valuation est inférieure ou égale à a_i . Dans la carte $u_1 = 1$, $W_{\tilde{\Phi}_1}$ est donc donnée par la variété affine $\{\tilde{\Phi}_1 = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n-2}) = 0\}$. On fait de même dans les autres cartes et on obtient $\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_n$ les familles de fonctions qui définissent \tilde{W}_{Φ} . Ceci démontre le premier point.

Plaçons nous dans la carte U_1 . De l'équation (5.3), une conséquence est que en tout point (x_1, u_2, \dots, u_n) où $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ sont nuls de Z :

$$\begin{aligned} P^* \{F, G\}_{W_{\Phi}}(x_1, u_2, \dots, u_n) &= P^* \left[\frac{dF \wedge dG \wedge d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_{n-2}}{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n} \right] \\ &= \frac{d(P^*F) \wedge d(P^*G) \wedge d(x_1^{a_1} \tilde{\varphi}_1) \wedge \dots \wedge d(x_1^{a_{n-2}} \tilde{\varphi}_{n-2})}{dx_1 \wedge d(x_1 u_2) \wedge \dots \wedge d(x_1 u_n)} \\ &= \left(\frac{x_1^{\sum_{i=1}^{n-2} a_i}}{x_1^{(n-1)}} \right) \left(\frac{d(P^*F) \wedge d(P^*G) \wedge d\tilde{\varphi}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\varphi}_{n-2}}{dx_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_n} \right) \\ &= \frac{x_1^{\sum_{i=1}^{n-2} a_i}}{x_1^{(n-1)}} \left(\{P^*F, P^*G\}_{\tilde{W}_{\Phi_1}} \right) \\ &= x_1^{\sum_{i=1}^{n-2} a_i - n + 1} \left(\{P^*F, P^*G\}_{\tilde{W}_{\Phi_1}} \right). \end{aligned}$$

Cela fonctionne de la même manière dans les autres cartes. Ceci démontre le second point. \square

Du théorème 29 et du lemme 10, il suit que

Corollaire 11. *Soit $W_{\Phi} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \Phi = 0\}$ le lieu des zéros des polynômes composant $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ qui ont une singularité isolée en l'origine. On suppose que les valuations a_1, \dots, a_{n-2} de $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$ satisfont $\sum_{i=1}^{n-2} a_i = n - 1$.*

1. *La transformée-stricte $(\tilde{W}_{\Phi}, \{\cdot, \cdot\}_{\tilde{W}_{\Phi}})$ est une variété de Poisson, qui, dans chaque carte U_j définie comme dans le rappel, est isomorphe à $(W_{\Phi^{(j)}}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi^{(j)}}})$ où le $(n - 2)$ -uplet $W_{\Phi^{(j)}} = (\varphi_1^{(j)}, \dots, \varphi_{n-2}^{(j)})$ est construit comme ci-dessus.*
2. *Si de plus, les fonctions définissant $\Phi^{(j)}$ sont indépendantes en tout point où elles sont nulles, alors $(\tilde{W}_{\Phi}, \{\cdot, \cdot\}_{\tilde{W}_{\Phi}})$ a une restriction à la j^{me} carte qui est symplectique.*
3. *En particulier, si cela est vrai dans chaque carte, $(\tilde{W}_{\Phi}, \{\cdot, \cdot\}_{\tilde{W}_{\Phi}}, P)$ est une résolution symplectique de $(W_{\Phi}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi}})$.*

Pour rendre plus parlants les résultats que nous avons obtenus, nous allons donner un cas particulier du théorème précédent pour $n = 3$.

5.3 Résolution symplectique d'une variété affine singulière de Poisson sur \mathbb{K}^3

[26] Nous pouvons construire une structure de Poisson sur l'algèbre $\mathcal{F} = \mathbb{K}[x, y, z]$ en posant, pour toute fonction φ sur \mathcal{F} que $\{\cdot, \cdot\}_\varphi = i_{d\varphi}\pi$, où π désigne la multidérivation $\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}$ et i la contraction d'une multidérivation par une 1-forme. Autrement dit, cette structure est définie par :

$$\{x, y\}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \{y, z\}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \{z, x\}_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (5.4)$$

On vérifie que cette structure est de Poisson [25]. La fonction φ étant un Casimir de $\{\cdot, \cdot\}_\varphi$, la structure de Poisson se restreint à la surface $W_\varphi : \{\varphi = 0\}$. Nous demandons aussi que la valuation soit 2. Les deux premiers points du théorème se déduisent du précédent mais nous préférons redonner une preuve.

Théorème 30. *Soit $W_\Phi = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$ le lieu des zéros d'un polynôme Φ de valuation 2 qui admet une singularité isolée à l'origine. Soit $\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi}$ le crochet de Poisson comme en (5.4). Soit $P : Z \rightarrow \mathbb{K}^3$ un éclatement en $(0, 0, 0)$.*

1. *La transformée-strictée \widetilde{W}_Φ de W_Φ , dans chacune des trois cartes de cet éclatement, est une variété du type $W_{\Phi^{(i)}}$ où $\Phi^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, est un polynôme à trois variables dont la valuation est inférieure ou égale à 2.*
2. *Il existe une structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi}$ sur \widetilde{W}_Φ telle que $P : \widetilde{W}_\Phi \rightarrow W_\Phi$ est de Poisson et, dans la carte U_i , elle est isomorphe à*

$$(\widetilde{W}_\Phi \cap U_i, \{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi}) \simeq (W_{\Phi^{(i)}}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi^{(i)}}})$$

3. *De plus $(\widetilde{W}_\Phi \cap U_i, \{\cdot, \cdot\}_{\widetilde{W}_\Phi})$ est symplectique si et seulement si $W_{\Phi^{(i)}}$ est lisse si et seulement si la fonction $\Phi^{(i)}$ est régulière.*

Preuve. Soit $\Phi(x, y, z)$ un polynôme qui admet une singularité isolée à l'origine de valuation 2. Soit $W_\Phi : \{\Phi(x, y, z) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^3$ une variété algébrique, munie du crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{W_\Phi}$ défini comme en (5.4). L'éclatement de W_Φ est la variété de dimension 2 :

$$Z = \{((x, y, z), [u, v, w]) \in \mathbb{K}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid xv = yu, xw = zu, zv = yw\}.$$

Muni de la projection $((x, y, z), [u, v, w]) \rightarrow (x, y, z)$. On considère \widetilde{W}_Φ l'image réciproque de W_Φ . Prenons la carte $u = 1$, où la projection s'écrit

$$P : (x, v, w) \rightarrow (x, xv, xw).$$

Comme Φ n'a pas de terme constant et est de valuation 2, x^2 divise $\Phi(x, xv, xw)$, ce qui permet de définir $\widetilde{\Phi}$ par :

$$P^*\Phi(x, v, w) = \Phi(x, xv, xw) = x^2\widetilde{\Phi}^{(1)}(x, v, w) \quad (5.5)$$

Ici $\tilde{\Phi}$ est un polynôme de valuation inférieure ou égale à 2. Par ailleurs, $\tilde{\Phi}$ n'est pas divisible par x . Dans la carte $u = 1$, la variété résolue est donc donnée par $\{\tilde{\Phi} = 0\}$, variété affine que l'on appelle $\widetilde{W}_{\tilde{\Phi}}$. Ceci démontre le premier point.

De (5.5), il suit que $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y}(x, xv, xw) = x \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v}(x, v, w)$ et $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z}(x, xv, xw) = x \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial w}(x, v, w)$, cela implique que $\{x, v\}_{\widetilde{W}_{\tilde{\Phi}(1)}} = \frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z}(x, xv, xw) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial w}(x, v, w)$, de même, on a $\{x, w\}_{\widetilde{W}_{\tilde{\Phi}(1)}} = -\frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y}(x, xv, xw) = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v}(x, v, w)$. Par un simple calcul, on trouve $\{v, w\}_{\widetilde{W}_{\tilde{\Phi}(1)}} = 2 \frac{\tilde{\Phi}}{x}(x, v, w) + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x}(x, v, w)$.

Donc, sur la variété $W_{\tilde{\Phi}}$ donnée par $\{\tilde{\Phi} = 0\}$, on a :

$$\begin{cases} \{x, v\}_{\widetilde{W}_{\tilde{\Phi}(1)}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial w} \\ \{w, x\}_{\widetilde{W}_{\tilde{\Phi}(1)}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial v} \\ \{v, w\}_{\widetilde{W}_{\tilde{\Phi}(1)}} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \end{cases}$$

Il en va de même pour les autres cartes. Le troisième point suit de lemme 10. Ceci démontre le second point. \square

Corollaire 12. *Une variété affine de Poisson $(W_{\Phi}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi}})$ définie par $\Phi = 0$, où Φ est un polynôme qui apparaît dans l'étude des singularités de du Val³, admet une résolution symplectique.*

Preuve. Par définition, Φ est un des 5 types A_n, D_n, E_6, E_7 et E_8 , et il est bien connu [18] que par des éclatements successifs en des points en lesquels la fonction qui définit la variété singulière a une valuation toujours inférieure à 2, on se ramène à une fonction qui est lisse dans les cartes. Le Théorème 30 permet alors de conclure. \square

On va étudier en détail deux exemples de la situation du corollaire 12 : les singularités A_n et D_n . Il est vrai que cela est très classique, mais on va se placer sur \mathbb{R} et non sur \mathbb{C} , et, du reste, on se va regarder qu'une "moitié" de D_n que l'on va appeler D_n^+ . Ceci n'aurait aucun sens sur \mathbb{C} .

Application 1. [La singularité $A_{2k-1} : x^2 + y^2 = z^{2k}$ dans \mathbb{R}^3]

Soit $\Phi_k(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^{2k}$. Considérons la variété algébrique

$$W_{\Phi_k} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi_k = x^2 + y^2 - z^{2k} = 0 \right\},$$

munie du crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\Phi_k}$ défini comme en (5.4). Soit $P : \widetilde{W}_{\Phi_k} \rightarrow W_{\Phi_k}$ l'éclatement en $(0, 0, 0)$ de W_{Φ_k} . On cherche la transformée-strictée. On regarde pour cela ce qui se passe dans les trois cartes recouvrant Z et données par $u = 1, v = 1$ et $w = 1$, cartes qui ont pour coordonnées $(x, v, w), (u, y, w)$ et (u, v, z) respectivement. On rappelle que $P : Z \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la projection, déjà décrite dans des cartes en (5.2).

3. C'est à dire un des polynômes qui apparaît dans la colonne de droite du tableau du chapitre 4 et qui correspondent aux quotients \mathbb{C}^2/G avec G un groupe fini de $SL_2(\mathbb{C})$

6. Prenons d'abord la carte $u = 1$, on obtient par (5.2)

$$\begin{cases} P^*x = x \\ P^*y = xv \\ P^*z = xw. \end{cases}$$

et donc $P^*\Phi_k(x, v, w) = x^2\Phi_k^{(1)}(x, v, w)$ où

$$\Phi_k^{(1)}(x, v, w) = 1 + v^2 - x^{2k-2}w^{2k}.$$

Par le premier point du théorème 30, la restriction à la carte $u = 1$ de la transformée stricte \widetilde{W}_{Φ_k} est donnée par $\Phi_k^{(1)}(x, v, w) = 0$, c'est à dire que c'est une surface du type $W_{\Phi_k^{(1)}}$. Par le premier point du théorème 30, sa structure de Poisson induite est associée à la fonction $\Phi_k^{(1)}$. Dans cette carte, le diviseur exceptionnel, qui est par la définition l'intersection $\widetilde{W}_{\Phi_k} \cap \{(0, 0, 0), (u, v, w)\}$ ou encore l'image réciproque de $0 \in \mathbb{R}^3$ par $P : \widetilde{W}_{\Phi_k} \rightarrow W_{\Phi_k}$, est obtenu en prenant $x = 0$ dans l'équation de $\Phi_k^{(1)} = 0$. Cet ensemble est donc vide. Par ailleurs, la différentielle de $\Phi_k^{(1)}$ est non nulle en chaque point où $\Phi_k^{(1)} = 0$, et donc la surface $\Phi_k^{(1)}(x, v, w) = 0$ est régulière. Par le second point du théorème 30, la transformée stricte est lisse et symplectique dans cette carte.

7. Il en va de même dans la carte $v = 1$.

8. Dans la carte $w = 1$, on a

$$\begin{cases} P^*x = zu \\ P^*y = zv \\ P^*z = z. \end{cases}$$

On a donc $P^*\Phi_k(u, v, z) = z^2(u^2 + v^2 - z^{2(k-1)}) = z^2\Phi_{k-1}(u, v, z)$. Par le premier point du théorème 30, la transformée stricte dans cette carte est donc donnée par $\Phi_{k-1}(u, v, z) = 0$, c'est donc isomorphe à la variété $W_{\Phi_{k-1}}$. Par le premier point encore, la structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{\Phi_{k-1}}$ est celle associée à Φ_{k-1} . Le diviseur exceptionnel, dans cette carte, est l'intersection de $\Phi_{k-1}(u, v, z) = 0$ avec $z = 0$, il est donc donné, si $k \neq 1$ par

$$u^2 + v^2 = 0.$$

Il est donc réduit à l'origine, qui est aussi le seul point singulier de $\Phi_{k-1}(u, v, z) = 0$. On est donc ramené au cas précédent en remplaçant k par $k - 1$. On peut donc continuer le raisonnement, mais pour $k = 1$, on trouve une situation différente. La variété W_{Φ_0} est alors donnée par les zéros de $\Phi_0(u, v, z) = u^2 + v^2 - 1$. C'est un cylindre. Le diviseur exceptionnel est donné par $z = 0$ et est un cercle. Enfin, comme W_{Φ_0} est lisse, par le théorème 30, la variété $(W_{\Phi_0}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi_0}})$ est symplectique.

Récapitulons. On a éclaté en 0 la variété de Poisson $(W_{\Phi_k}, \{\cdot, \cdot\}_{\Phi_k})$, dont l'origine est le seul point singulier. Dans les deux premières cartes, la variété obtenue est lisse et symplectique. De plus, le diviseur exceptionnel n'y apparaît pas. Dans la troisième carte,

on trouve $(W_{\Phi_{k-1}}, \{\cdot, \cdot\}_{\Phi_{k-1}})$ et le diviseur exceptionnel est réduit à l'origine. On continue la procédure jusqu'à ce que l'on obtienne $(W_{\Phi_0}, \{\cdot, \cdot\}_{\Phi_0})$ qui est une variété lisse et symplectique, dont le diviseur exceptionnel est un cercle.

On a ainsi obtenue une variété Z_{Φ_k} qui est lisse et symplectique et un morphisme de Poisson surjectif $Z_{\Phi_k} \rightarrow W_{\Phi_k}$ dont le diviseur exceptionnel est un cercle.

Application 2. Considérons la singularité D_{2k+1}^+ donnée par $\{\Phi_k = x^2z + y^2 - z^{2k+1} = 0 \mid z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Nous allons regarder la résolution de Du Val de la singularité D_{2k+1}^+ mais nous nous plaçons sur \mathbb{R} .

Le seul point singulier de $D_{2k+1}^+ = W_{\Phi_k}$ est $(0, 0, 0)$, car le critère de Jacobi implique les relations :

$$\begin{cases} 2xz = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 - (2k+1)z^{2k} = 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $x = 0$, $y = 0$, et $z = 0$ est la seule solution de ce système.

Considérons la variété algébrique $W_{\Phi_k} : \{\Phi(x, y, z) = x^2z + y^2 - z^{2k+1} = 0\}$ munie du crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi_k}}$ définie comme en (5.4). Soit $P : \widetilde{W}_{\Phi_k} \rightarrow W_{\Phi_k}$ la transformée stricte de W_{Φ_k} qui est un sous-ensemble de

$$Z = \{((x, y, z), [u, v, w]) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid xv = yu, xw = zu, zv = yw\}$$

qui s'envoie sur \mathbb{R}^3 comme en 5.2. Regardons les trois cartes U_1, U_2, U_3 données par $u = 1$, $v = 1$ et $w = 1$.

6. Prenons d'abord la carte $v = 1$, on obtient

$$\begin{cases} P^*x = yu \\ P^*y = y \\ P^*z = yw. \end{cases}$$

Pour obtenir l'équation de transformée-strictes $\Phi_k^{(2)}$ on suppose que $y \neq 0$, par un simple calcul, on trouve

$$\Phi_k^{(2)}(u, y, w) = wu^2y + 1 - w^{2k+1}y^{2k-1} = 0.$$

La restriction à la carte $v = 1$ de la transformée stricte \widetilde{W}_{Φ_k} est donnée par $\Phi_k^{(2)}(u, y, w) = 0$, c'est-à-dire que c'est une surface du type $W_{\Phi_k^{(2)}}$.

Par le premier point du théorème 30, sa structure de Poisson induite est associée à la fonction $\Phi_k^{(2)}(u, y, w)$. La différentielle de $\Phi_k^{(2)}$ est non nulle en tout point où $\Phi_k^{(2)} = 0$, et donc la surface $W_{\Phi_k^{(2)}}$ est régulière, par le second point du théorème 30, la transformée-strictes \widetilde{W}_{Φ_k} est lisse et symplectique sur l'ouvert U_2 . Le diviseur exceptionnel dans cette carte est l'intersection $\widetilde{W}_{\Phi_k} \cap \{(0, 0, 0), [u, v, w]\}$. Pour obtenir son équation locale dans la carte U_2 donnée par $v = 1$, on doit mettre $y = 0$ dans l'équation de $\Phi_k^{(2)}(u, y, v) = 0$. Cet ensemble est donc vide.

7. Dans la carte U_1 donnée par $u = 1$, la transformée-stricté $\Phi_k^{(1)}$ est

$$\Phi_k^{(1)}(x, v, w) = wx + v^2 - w^{2k+1}x^{2k-1} = 0.$$

La surface $W_{\Phi_k^{(1)}}$ a un point singulier unique en $x = 0, v = 0$ et $w = 0$. Par le premier point du théorème 30, sa structure de Poisson induite est associée à la fonction $\Phi_k^{(1)}$. Le diviseur exceptionnel $E^{(1)}$, qui est par définition, l'intersection $W_{\Phi_k^{(1)}} \cap \{(0, 0, 0), [u, v, w]\}$. Pour obtenir son équation locale dans la carte $u = 1$, on doit mettre $x = 0$ dans l'équation de $\Phi_k^{(1)} = 0$. Ici $x = 0$ implique $v = 0$ et que w est libre. Dans la carte $u = 1$, $E^{(1)}$ est la droite $\{x = v = 0\}$. Le diviseur exceptionnel de $P : \widetilde{W}_{\Phi_k} \rightarrow W_{\Phi_k}$ contient donc le cercle⁴

$$C^{(1)} = \{(0, 0, 0), [1, 0, w]\} \subset Z.$$

On renomme les coordonnées locales de la carte U_1 par $u = 1$ par les lettres (x, y, z) . Ce qui fait que $\Phi_k^{(1)}$ devient $\Phi_k^{(1)} = zx + y^2 - x^{2k-1}z^{2k+1} = 0$. Récapitulons

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_k^{(1)} = zx + y^2 - x^{2k-1}z^{2k+1} = 0 \\ \text{Le diviseur exceptionnel } x = 0, y = 0. \end{array} \right.$$

Le seul point singulier est $(0, 0, 0)$. On éclate encore une fois en l'origine. Dans la carte $u = 1$, la transformée-stricté est donnée par

$$\Phi_k^{(1,1)}(x, v, w) = w + v^2 - x^{4k-2}w^{2k+1} = 0.$$

La différentielle de $\Phi_k^{(1,1)}$ est non nulle en tout point où $\Phi_k^{(1,1)} = 0$, et donc la surface $\widetilde{W}_{\Phi_k^{(1,1)}}$ est régulière. Par le second point du théorème 30, la transformée stricte est une surface lisse et symplectique. Le diviseur exceptionnel est donné dans cette carte par $w + v^2 = 0$ et $x = 0$. Il contient donc

$$\{(0, 0, 0), [1, v, -v^2]\},$$

qui a la topologie d'un cercle que l'on note C' . Dans les autres cartes, on vérifie directement que la transformée stricte est lisse. Ce cercle intersecte l'image réciproque du cercle $C^{(1)}$ dans les deux autres cartes, en un point.

8. Dans la carte U_3 donnée par $w = 1$, la transformée-stricté est donnée par la fonction $\Phi_k^{(3)}$ est

$$zu^2 + v^2 = z^{2k-1}.$$

La restriction de \widetilde{W}_{Φ_k} à la carte U_3 est isomorphe à la variété de Poisson $(W_{\Phi_{k-1}}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi_{k-1}}})$ par le théorème 30. On est donc ramené au cas précédent en remplaçant k par $k - 1$.

Le diviseur exceptionnel est donné par $z = 0, v = 0$ et u libre dans cette carte. Il comprend donc un cercle $C^{(3)} = \{(0, 0, 0), [u, 0, 1]\}$ (en ajoutant le point à l'infini). Ce cercle coïncide avec le cercle $C^{(1)}$.

4. Il faut ajouter le point $(0, 0, 0), [0, 0, 1]$ qui correspond à $w = \infty$.

Récapitulons. Un premier éclatement à l'origine de $(W_{\Phi_k}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi_k}})$ a conduit à ajouter le cercle $C^{(1)} = C^{(3)}$. Ce cercle contient deux points singuliers. Un éclatement du premier a conduit à ajouter un cercle C' et a permis d'obtenir une surface lisse et symplectique. Ces deux cercles s'intersectent en un point. L'autre point singulier est, dans la carte, de la forme $(W_{\Phi_{k-1}}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\Phi_{k-1}}})$

On peut donc continuer le raisonnement, jusqu'à ce que l'on arrive à $k = 1$. On obtiendra comme lieux singuliers $2k$ cercle dont chacun intersecte le suivant en un point. En $k = 1$, on trouve alors une situation véritablement différente. On désignera les coordonnées locales par les lettres (x, y, z) . La dernière fonction que l'on va obtenir est en effet

$$\Phi_0(x, y, z) = zx^2 + y^2 - z = 0$$

Cette fonction admet deux points singuliers $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$. On éclate W_{Φ_0} en $(1, 0, 0)$. Après changement de variable pour se ramener en l'origine, la fonction devient $\varphi(x, y, z) = z(x+1)^2 + y^2 - z = 0$, c'est-à-dire, $\varphi(x, y, z) = zx^2 + 2zx + y^2 = 0$. Notons que cette fonction est encore de valuation 2, ce qui permet d'appliquer le théorème 30.

(a) Dans la carte $v = 1$, la transformée-strictes est

$$\varphi^{(2)} = ywu^2 + 2wu + 1 = 0.$$

La différentielle de $\Phi_0^{(2)}$ est non nulle en tout point où $\varphi^{(2)} = 0$, et donc la surface $\widetilde{W}_{\varphi^{(2)}}$ est régulière, par le second point du théorème 30, la transformée stricte est lisse et symplectique.

(b) Dans la carte $w = 1$, la transformée-strictes est

$$\varphi^{(3)} = zu^2 + 2u + v^2 = 0. \quad z \neq 0.$$

Si $z = 0$ implique $2u + v^2 = 0$, ainsi on obtient

$$E_0 = \left\{ ((0, 0, 0), \left(\frac{-v^2}{2}, v, 1\right)) \right\}.$$

La différentielle de $\varphi^{(3)}$ est non nulle en tout point où $\varphi^{(3)} = 0$, et donc la surface $\widetilde{W}_{\varphi^{(3)}}$ est régulière, par le second point du théorème 30, la transformée-strictes est lisse et symplectique

(c) Dans la carte $u = 1$, la transformée-strictes est donnée par

$$\varphi^{(1)}(x, v, w) = wx + 2w + v^2 = 0.$$

La critère de Jacobi implique que cette surface a un point singulier unique $x = -2, v = 0, w = 0$.

(d) Le lieu singulier de cet éclatement est obtenu dans la dernière carte, par $x = 0$. Ceci implique $2w + v^2 = 0$, ainsi on obtient $\left\{ ((0, 0, 0), [1, v, \frac{-v^2}{2}]) \right\}$, qui est un cercle (en ajoutant $((0, 0, 0), [0, 0, 1])$ qui correspond à $v = \infty$).

On désigne les coordonnées locales de la carte $u = 1$, par les lettres (x, y, z) .

(e) On va éclater la dernière singularité obtenue, qui est associée à la fonction : On a

$$\begin{cases} \varphi^{(3)}(x, y, z) = zx + 2z + y^2 = 0 \\ \text{Le diviseur exceptionnel } 2z + y^2 = 0. \end{cases}$$

Cette fonction a en effet une seule singularité en $(-2, 0, 0)$. Un changement de variable permet d'obtenir la fonction $\psi(x, y, z) = zx + y^2 = 0$ qui est encore une fois de valuation 2. C'est une équation de type A_1 .

(f) Dans la carte $u = 1$, la transformée stricte est

$$\psi^{(1)}(x, v, w) = w + v^2 = 0.$$

Le diviseur exceptionnel E'_0 est donnée par $w + v^2 = 0$ et $x = 0$, qui correspond encore une fois à un cercle. La différentielle de $\psi^{(1)}$ est non nulle en tout point où $\psi^{(1)} = 0$, et donc la surface $(W_{\psi^{(1)}}, \{\cdot, \cdot\}_{W_{\psi^{(1)}}})$ est régulière et symplectique, par le second point du théorème 30.

Il en va de même pour les autres cartes.

Un calcul similaire montre qu'il en va de même pour l'éclatement de $\tilde{\varphi}_w$ en $(-1, 0, 0)$.

On a donc obtenu par des éclatements successifs une résolution symplectique de $(W_{\Phi_k}, \{\cdot, \cdot\}_{\Phi_k})$ que l'on note $(Z_k, \{\cdot, \cdot\}_{Z_k})$

Le point suivant est facile à vérifier et sera important.

Proposition 31. *Les tirés en arrière des fonctions $\frac{x}{z^k}$ et $\frac{y}{z^k}$ par l'application $Z_k \rightarrow W_{\Phi_k}$ sont lisses sur Z_k .*

Preuve. Dans le cas réel, la fonction $\frac{x}{z^k}$ admet $x = y = z = 0$ comme unique point où elle est non définie car $z = 0$ implique $x = y = 0$. Pour l'éclatement de la singularité A_n à l'origine il se produit le phénomène suivant :

Dans la carte $w = 1$, le tiré en arrière de $\frac{x}{z^k}$ est la fonction $\frac{u}{z^{k-1}}$ qui n'est pas définie en $(0, 0, 0)$ sur $W_{\Phi_{k-1}} \simeq Z_k$, c'est-à-dire, une fonction de la même forme sur $W_{\Phi_{k-1}}$, on est donc ramené au problème précédent en changement k par $k - 1$. De plus, pour $k = 1$, la fonction $\frac{x}{z}$ se tire en arrière en u qui est lisse sur $\Phi_0^{(3)} = u^2 + v^2 - 1 = 0$, $z \neq 0$. Le tiré en arrière sur cette carte est donc lisse. Dans les autres cartes, l'intersection de la transformée-stricta avec le diviseur exceptionnel est vide, donc le dénominateur du tiré en arrière de la fonction $\frac{x}{z^k}$ n'est jamais nul, donc la fonction $\frac{x}{z^k}$ se tire en arrière en une fonction lisse.

De manière analogue, nous pouvons démontrer que la fonction $\frac{y}{z^k}$ se tire en arrière en une fonction lisse sur Z_k . \square

Définissons deux suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ de fractions rationnelles sur $A_k \subset \mathbb{R}^3$ par $x_1(x, y, z) := x$, $y_1(x, y, z) := y$ pour tout $(x, y, z) \in A_k$ et

$$\begin{cases} x_n = \frac{x_1}{z^k} x_{n-1} - \frac{y_1}{z^k} y_{n-1} \\ y_n = \frac{x_1}{z^k} y_{n-1} + \frac{y_1}{z^k} x_{n-1}. \end{cases} \quad (5.6)$$

De la proposition 31, il découle que

5.4. Exemple d'un quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe infini et de sa résolution symplectique

Corollaire 13. *Les tirés en arrière $X_n := \varphi^* x_n$ et $Y_n = \varphi^* y_n$ des fractions rationnelles x_n, y_n définies en (5.6), par $\varphi : Z_k \rightarrow A_{2k}$ sont des fonctions polynomiales sur Z_k .*

Pour le cas D_n , on a aussi le résultat suivant.

Proposition 32. *Les tirés en arrière $\frac{x}{z^{k+\frac{1}{2}}}$ et $\frac{y}{z^{k+\frac{1}{2}}}$ par l'application $Z_k \rightarrow W_{\Phi_k}$ sont lisses sur Z_k .*

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 31. Nous la laissons au lecteur. \square

Dans ce cas, le système d'équation (5.6) devient

$$\begin{cases} x_n = \frac{x_1}{z^{k+1/2}} x_{n-1} - \frac{y_1}{z^{k+1/2}} y_{n-1} \\ y_n = \frac{x_1}{z^{k+1/2}} y_{n-1} + \frac{y_1}{z^{k+1/2}} x_{n-1}. \end{cases} \quad (5.7)$$

il résulte de tout ce qui précède que

Corollaire 14. *Les tirés en arrière $X_n := \varphi^* x_n$ et $Y_n = \varphi^* y_n$ des fractions rationnelles x_n, y_n définies en (5.7), par $\varphi : Z_k \rightarrow D_{2k+1}$ sont des fonctions polynomiales sur Z_k .*

5.4 Exemple d'un quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe infini et de sa résolution symplectique

Munissons \mathbb{R}^2 des coordonnées (a, b) . Considérons les groupes infinis $G = \mathbb{Z}$ et $G' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ces groupes agissent sur \mathbb{R}^2 par $n \cdot (a, b) := (a + nb, b)$ et par $(n, \epsilon) \cdot (a, b) := (a + nb, \epsilon b)$ pour tout $(n, \epsilon) \in \mathbb{Z} \times \{-1, 1\}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, respectivement. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des groupes finis, y compris dans le cas lisses (cf proposition 30), l'algèbre des fonctions invariantes $\mathcal{F}[\mathbb{R}^2]^G$ ou $\mathcal{F}[\mathbb{R}^2]^{G'}$ n'est pas finiment engendrée. On rappelle la définition suivante, venue du chapitre 1 où les objets géométriques ont été introduits.

Définition 36. *Soit \sim une relation d'équivalence fermée sur une variété M . On appelle algèbre des fonctions de classe C^∞ sur M/\sim les fonctions de $C^\infty(M)$ constantes sur les classes d'équivalence. On la note $C^\infty(M/\sim)$, et les éléments de cette algèbre sont appelées les fonctions sur l'objet $X = M/\sim$ (que l'on dit "muni d'une structure de quotient").*

On prend les notations suivantes.

L'action de groupe $G = \mathbb{Z}$ ci-dessus revient à considérer la relation d'équivalence \sim sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$(a, b) \sim (a + nb, b), \quad (5.8)$$

pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{Z}$ et $(a, 0) \sim (a', 0)$ pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$. Cette relation est fermée c-à-d $\{(a, b) \times (c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid (a, b) \sim (c, d)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Pour $G' = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il faut encore identifier (a, b) et $(a, -b)$. L'action de groupe G'

ci-dessus revient à considérer la relation d'équivalence ainsi obtenue, et on note \sim' cette relation, nous voulons dire que $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim) = \mathcal{F}[\mathbb{R}^2]^{G'}$. La relation \sim' est donc donnée par

$$(a, b) \sim' (a + nb, \pm b). \quad (5.9)$$

On prend $G = \mathbb{Z}$ et on commence par étudier $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim) = \mathcal{F}[\mathbb{R}^2]^G$.

Lemme 11. *Toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ invariante par la relation d'équivalence donnée par (5.8), pour tous $j \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$ satisfait*

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial a^i \partial b^j}(a, 0) = 0.$$

Preuve. La dérivée k^{eme} de la relation $f(a, b) = f(a + nb, b)$ par rapport à b donne la formule :

$$\frac{\partial^k f}{\partial b^k}(a, b) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^{k-i} \frac{\partial^k f}{\partial a^i \partial b^{k-i}}(a + nb, b).$$

Pour $b = 0$, on a

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i \frac{\partial^k f}{\partial a^i \partial b^{k-i}}(a, 0) = \frac{\partial^k f}{\partial b^k}(a, 0).$$

Pour $i = 0$, le terme de gauche égal au terme de droite. On obtient donc :

$$\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^i \frac{\partial^k f}{\partial a^i \partial b^{k-i}}(a, 0) = 0.$$

Si un polynôme admet une infinité de racines, alors ses coefficients sont nuls. En particulier, les coefficients du polynôme

$$P_{k,a}(X) := \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial a^i \partial b^{k-i}}(a, 0) X^i$$

sont nuls pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, ce qui démontre le résultat. \square

Il en va de même pour la relation d'équivalence \sim' .

Proposition 33. *L'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ des fonctions lisses sur \mathbb{R}^2/\sim , où la relation \sim est définie par (5.8) se décompose ainsi*

$$C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim) = C^\infty(b) + \tilde{C},$$

où $C^\infty(b)$ est l'algèbre des fonctions lisses qui ne dépendent que de la variable b , et $\tilde{C} \subset C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ est la sous-algèbre des fonctions lisses nulles avec toutes leurs dérivées partielles le long de la droite $b = 0$.

5.4. Exemple d'un quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe infini et de sa résolution symplectique

Preuve. Les fonctions lisses sur \mathbb{R}^2 qui ne dépendent que de la variable b sont constantes sur les classes d'équivalences et donc sont dans $C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ par définition des fonctions sur un objet géométrique.

Considérons une fonction $g(a, b)$ de classe C^∞ constantes sur les classes d'équivalence. Soient les fonctions $f, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2/\sim)$ définies par $h(b) := g(0, b)$ et $f(a, b) := g(a, b) - h(b)$. On a $g = h + f$ par construction, il reste donc à montrer que f est un élément de \tilde{C} . Par le lemme 11, on sait déjà que pour tout $i \geq 1$:

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial a^i \partial b^j}(a, 0) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

On sait aussi que $\frac{\partial^j f}{\partial b^j}(0, 0) = 0$ car $f(0, b) = 0$ par définition de la fonction f . Par intégration, on a encore

$$\frac{\partial^j f}{\partial b^j}(a, 0) = \frac{\partial^j f}{\partial b^j}(0, 0) + \int_{t=0}^a \frac{\partial^{1+j} f}{\partial b^j \partial t}(t, 0) dt.$$

Par le lemme 11, ceci est nul. Ceci finit la preuve. \square

Il existe un résultat similaire pour \sim' : le premier terme sera formé de fonctions qui dépendent de b^2 .

Le corollaire suivant montre que la théorie est vide dans le cas complexe.

Corollaire 15. *Les fonctions holomorphes ou réelles analytiques invariantes par les relations d'équivalences (5.8), (5.9) sont les fonctions qui ne dépendent que de la variable b .*

Autrement dit, le quotient \mathbb{R}^2/\sim ou \mathbb{C}^2/\sim (resp, \mathbb{R}^2/\sim' ou \mathbb{C}^2/\sim') n'est pas intéressant dans le cas réel analytique ou holomorphe, respectivement.

Preuve. Une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^2 qui s'annule le long d'une droite avec toutes ses dérivées partielles est nulle sur \mathbb{C}^2 . Il en va de même dans le cas réel analytique. \square

Nous donnons ici un lemme dont nous allons avoir besoin ci-après.

Lemme 12. *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout entier positif n , il existe ϵ_n avec*

$$|f(x)| \leq k_n |x|^n, \quad \text{pour tout } x \in]-\epsilon_n, \epsilon_n[,$$

où k_n est un réel positif, alors f est nulle avec toutes ces dérivées en $x = 0$.

Preuve. S'il existe un entier positif n_0 tel que $f(0) = f'(0) = \dots = f^{n_0-1}(0) = 0$ et $f^{n_0}(0) \neq 0$, alors d'après la formule de Taylor $f(x) \approx \frac{1}{n_0!} f^{n_0}(0) x^{n_0}$. Ce qui contredit l'hypothèse $|f(x)| \leq k |x|^{n_0+1}$ sur $]-\epsilon, \epsilon[$. \square

La proposition suivante donne une description précise des fonctions lisses sur l'objet géométrique \mathbb{R}^2/\sim .

Proposition 34. Une fonction F est de classe C^∞ sur l'objet géométrique \mathbb{R}^2 / \sim muni d'une structure quotient si et seulement si F s'écrit sous la forme

$$F(a, b) = \alpha_0(b) + \sum_{n \geq 1} \alpha_n(b) \cos\left(2n\pi \frac{a}{b}\right) + \sum_{n \geq 1} \beta_n(b) \sin\left(2n\pi \frac{a}{b}\right),$$

où les fonctions $(\alpha_n, \beta_n)_{n \geq 1}$ sont lisses et nulles avec toutes leurs dérivées en $b = 0$. La série ci-dessus, qui plus est, est absolument convergente sur toute boule ouverte.

Preuve. Pour $b \in \mathbb{R}^*$ fixé, la fonction $F(a, b) \in C^{\infty, k}(\mathbb{R}^2 / \sim)$ est b -périodique. Elle est développable en série de Fourier par rapport à la variable a , avec des coefficients de Fourier qui dépendent de b :

$$F(a, b) = \alpha_0(b) + \sum_{n \geq 1} \alpha_n(b) \cos\left(2n\pi \frac{a}{b}\right) + \sum_{n \geq 1} \beta_n(b) \sin\left(2n\pi \frac{a}{b}\right), \quad \forall b \neq 0,$$

Faisons le changement de variables $u = \frac{a}{b}$. Cela donne

$$\begin{aligned} \alpha_0(b) &= \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} F(a, b) da \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} F(ub, b) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n(b) &= \frac{2}{b} \int_{-b/2}^{b/2} F(a, b) \cos\left(2n\pi \frac{a}{b}\right) da, \\ &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} F(ub, b) \cos(2n\pi u) du \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_n(b) &= \frac{2}{b} \int_{-b/2}^{b/2} F(a, b) \sin\left(2n\pi \frac{a}{b}\right) da, \\ &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} F(ub, b) \sin(2n\pi u) du \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Montrons que pour tout $n \geq 1$ les coefficients de Fourier $\alpha_n(b), \beta_n(b) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des fonctions lisses qui sont nulles avec toutes leurs dérivées en $b = 0$.

Si F ne dépend que de b , alors $\alpha_n(0) = \beta_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et le résultat est vrai. Supposons que F est nul en $b = 0$ avec toutes ses dérivées partielles (autrement dit, $F \in \tilde{C}$). Alors d'après la formule de Taylor, il existe un entier positif n_0 et pour tout a , il existe $b_0 \in [0, b]$ tel que $F(a, b) = \frac{b^{n_0}}{n_0!} \frac{\partial^{n_0} f}{\partial b^{n_0}}(a, b_0)$. Or la fonction $\left| \frac{\partial^{n_0} f}{\partial b^{n_0}}(a, b_0) \right|$ est bornée par un réel k_{n_0} car $[-1, 1]^2$ est compact. Ceci donne

$$|F(a, b)| \leq |b|^{n_0} \frac{k_{n_0}}{n_0!} \text{ pour tous } (a, b) \in [-1, 1]^2.$$

5.4. Exemple d'un quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe infini et de sa résolution symplectique

Les coefficients de Fourier $\alpha_n(b), \beta_n(b)$ sont obtenus par intégration sur $]-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}[\times \{b\} \subseteq [-1, 1]^2$ pour tout $b \in [-1, 1]$. Donc $|\alpha_n(b)| \leq \frac{2}{b} b b^{n_0} k_{n_0} = 2b^{n_0} k_{n_0}$. De même, pour $\beta_n(b)$. Par le Lemme 12, les fonctions α_n, β_n sont nulles en 0 avec toutes leurs dérivées. Ce qui démontre le résultat. minimale Il découle des formules explicites données ci-dessus que, pour tout (a, b) dans une boule ouverte, $|\alpha_n(b)|$ et $|\beta_n(b)|$ sont inférieures à K/n^2 . Deux intégrations par parties donnent en effet :

$$\alpha_n(b) = \frac{-1}{n^2} \frac{b}{2\pi^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial a^2} \cos(2n\pi a/b) da,$$

ce qui donne facilement la majoration voulue avec $K = \frac{B^2}{2\pi^2} N$ où B est la plus grande valeur possible de $|b|$ sur la boule considérée et N est la borne supérieure de $|\frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial a^2}|$. Cela montre que la série est absolument convergente sur tout compact. Le même raisonnement peut être fait pour β_n . \square

Pour la relation d'équivalence \sim' , on obtient :

Proposition 35. Une fonction F est de classe C^∞ sur l'objet géométrique \mathbb{R}^2 / \sim (muni de sa structure quotient) si et seulement si F s'écrit sous la forme

$$F(a, b) = \alpha_0(b) + \sum_{n \geq 1} \alpha_n(b) \cos\left(2n\pi \frac{a}{b}\right) + \sum_{n \geq 1} \beta_n(b) \sin\left(2n\pi \frac{a}{b}\right),$$

où les fonctions $(\alpha_n, \beta_n)_{n \geq 1}$ sont lisses et nulles avec toutes leurs dérivées en $b = 0$, de plus les α_n sont des fonctions paires et les β_n sont des fonctions impaires pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série ci-dessus, qui plus est, est absolument convergente sur toute boule ouverte.

La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la proposition précédente. On va maintenant introduire le crochet de Poisson. On commence par muni $M = \mathbb{R}^2$ du crochet de Poisson canonique (symplectique) $\{a, b\} = 1$. Il est invariant par l'action de $G = \mathbb{Z}$ que l'on considère.

Proposition 36. L'objet $(\mathbb{R}^2 / \sim, \{\cdot, \cdot\})$ est un objet de Poisson de classe C^∞ .

Preuve. La preuve a été traitée dans le chapitre préliminaire, section 1.7, exemple 10. \square

Un calcul du crochet donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_\alpha, y_\beta\}_{\mathbb{R}^2 / \sim} = 2\pi \left(x_{\alpha'(z)} x_{\frac{\beta(z)}{z}} + y_{\frac{\alpha(z)}{z}} y_{\beta'(z)} \right) \\ \{y_\beta, z\}_{\mathbb{R}^2 / \sim} = 2\pi x_{\frac{\beta(z)}{z}} \\ \{z, x_\alpha\}_{\mathbb{R}^2 / \sim} = 2\pi y_{\frac{\alpha(z)}{z}}. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

où $x_\alpha = \alpha(b) \cos\left(2\pi \frac{a}{b}\right)$, $y_\beta = \beta(b) \sin\left(2\pi \frac{a}{b}\right)$, $z = b$ et $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont des fonctions nulles en 0 avec toutes leurs dérivées. Or $\frac{\alpha(z)}{z}$, $\frac{\beta(z)}{z}$ sont à nouveau des fonctions lisses. L'algèbre des fonctions lisses sur \mathbb{R}^2 / \sim est stable par le crochet de Poisson canonique.

On aimerait bien trouver une résolution symplectique de \mathbb{R}^2/\sim en utilisant les fonctions lisses, mais on n'a pas réussi à le faire. De ce fait, nous avons choisi de considérer un autre crochet de Poisson sur \mathbb{R}^2 que l'on définit par $\{a, b\}' = \frac{b}{2\pi}$. Il est à nouveau invariant par $G = \mathbb{Z}$ mais aussi par $G = \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 37. *Les objets $(\mathbb{R}^2/\sim, \{\cdot, \cdot\}')$ et $(\mathbb{R}^2/\sim', \{\cdot, \cdot\}')$ sont des objets géométriques de Poisson de classe C^∞ .*

On va introduire pour $k \geq 2$ une nouvelle classe de fonctions notée $C^k(\mathbb{R}^2/\sim)$, ce sont les fonctions lisses en dehors du lieu singulier et $E(k/2)$ -fois dérivables en $b = 0$. La proposition suivante se vérifie aisément

Proposition 38. *Soit $k \in \{2, 3, \dots, +\infty\}$. Pour toutes fonctions F et G de classe C^k sur \mathbb{R}^2/\sim , le crochet de Poisson $\{F, G\}$ est dans $C^{k-1}(\mathbb{R}^2/\sim)$. Par convention $+\infty - 1 = +\infty$. De plus $b\{a, b\}$ est dans $C^k(\mathbb{R}^2/\sim)$.*

Essayons maintenant de trouver une résolution symplectique de \mathbb{R}^2/G en faisant de celui-ci un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 . L'action de G sur \mathbb{R}^2 revient à considérer la relation d'équivalence donnée par (5.8). La structure de Poisson $\{a, b\}' = \frac{b}{2\pi}$ sur \mathbb{R}^2 est invariante par G donc le quotient \mathbb{R}^2/G est muni de la structure de Poisson induite.

Soit \mathcal{A} la sous algèbre de $C^k(\mathbb{R}^2/\sim)$ engendrée par $(b^k \cos(2\pi \frac{a}{b}), b^k \sin(2\pi \frac{a}{b}), b)$ pour tout entier $k > 2$. Elle est stable par le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}'$:

$$\begin{cases} \{x, y, \}' = -2kz^{2k-1} \in \mathcal{A} \\ \{y, z\}' = 2x \in \mathcal{A} \\ \{z, x\}' = 2y \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Soit k un entier positif. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ des coordonnées locales avec $b \neq 0$ et soit $[a, b]$ la classe de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2/\sim . On définit une application $\phi : \mathbb{R}^2/\sim \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$\phi([a, b]) = \left(b^k \cos\left(2\pi \frac{a}{b}\right), b^k \sin\left(2\pi \frac{a}{b}\right), b \right).$$

On prolonge cette application par

$$\phi([a, 0]) = (0, 0, 0)$$

Par ailleurs, les quantités

$$x = b^k \cos\left(2\pi \frac{a}{b}\right), \quad y = b^k \sin\left(2\pi \frac{a}{b}\right), \quad z = b$$

vérifient la relation

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(b^k \cos\left(2\pi \frac{a}{b}\right) \right)^2 + \left(b^k \sin\left(2\pi \frac{a}{b}\right) \right)^2 \\ &= b^{2k} \\ &= z^{2k}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Il en découle que ϕ est à valeurs dans $A_{2k} = W_{\Phi_{2k}} \subset \mathbb{R}^3$ où $\Phi_{2k}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^{2k}$.

Proposition 39. *L'application $\phi : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow A_{2k}$ induit un isomorphisme de Poisson $\phi^* : \mathcal{F}(W_{\Phi_{2k}}) \hookrightarrow \mathcal{A}$.*

Preuve. Montrons que l'application $\phi^* : \mathcal{F}(W_{\Phi_{2k}}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ est un isomorphisme de Poisson. Le tiré en arrière ϕ^* est par construction un isomorphisme d'algèbre entre la sous-algèbre $\mathcal{A} \subset C^k(\mathbb{R}^2 / \sim)$ qui est en bijection avec les fonctions polynomiales sur A_{2k} , il faut encore montrer qu'il est de Poisson.

Munissons \mathbb{R}^2 des coordonnées locales (a, b) . On désigne par $[a, b]$ sa classe d'équivalence dans \mathbb{R}^2 / \sim , on pose maintenant :

$$\phi : [a, b] \mapsto (x, y, z),$$

où x, y et z sont fonctions des variables a et b définies comme en (5.11). Cette application est à valeurs dans $W_{\Phi_{2k}}$ car pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$x^2 + y^2 = z^{2k}.$$

De plus, elle passe au quotient car (a, b) et $(a + nb, b)$ ont la même image. Donc cette application est bien définie de \mathbb{R}^2 / \sim dans $W_{\Phi_{2k}}$. Vérifions que cette application est de classe partie entière de $k/2$. Soit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow P & \nearrow \text{dotted} & \uparrow i \\ \mathbb{R}^2 / \sim & \xrightarrow{\phi} & W_{\Phi_{2k}} \end{array} \quad (5.12)$$

Pour tout $f \in C^{E(k/2)}(W_{\Phi_{2k}})$, il existe $F \in C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^3)$ tel que $F|_{W_{\Phi_{2k}}} = f$, De plus $P^* \phi^* f = (\phi \circ P)^* f = h^* F$, est un élément de $C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^2)$ car $h : C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $F \in C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^3)$. Nous avons donc montré que $P^* \phi^* f \in C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire que $\phi^* f \in C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^2 / \sim)$. Cette application est un difféomorphisme de classe $C^{E(k/2)}$ d'après la proposition 12 page 25 chapitre préliminaire. On a vu de ce qui précède que les objets $W_{\Phi_{2k}}$, \mathcal{A} et \mathbb{R}^2 / \sim sont de Poisson. Du diagramme commutatif entre objets (5.12), on a le diagramme commutatif entre algèbres des fonctions lisses associé :

$$\begin{array}{ccc} C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{h^*} & C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^2) \\ i^* \downarrow & & \uparrow P^* \\ C^{E(k/2)}(W_{\Phi_{2k}}) & \xrightarrow{\phi^*} & C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^2 / \sim) \end{array}$$

Pour tous $f, g \in C^{E(k/2)}(W_{\Phi_{2k}})$, il existe $F, G \in C^{E(k/2)}(\mathbb{R}^3)$ telles que $i^* F = f$ et $i^* G = g$ donc $h^* F = P^* \phi^* f$ et $h^* G = P^* \phi^* g$, comme $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un morphisme de Poisson, c'est-à-dire

$$\{h^* F, h^* G\}_{\mathbb{R}^2} = h^* \{F, G\}_{\mathbb{R}^3},$$

alors on a

$$\{P^* \phi^* f, P^* \phi^* g\} = P^* \phi^* (i^* \{F, G\}_{\mathbb{R}^3}),$$

donc $P^* \{ \phi^* f, \phi^* g \}_{\mathbb{R}^2} = P^* \phi^* \{ f, g \}_{E(k/2)}$.

De plus, le morphisme d'algèbre P^* est injectif, donc ϕ^* est un morphisme de Poisson. \square

L'application $\phi : \mathbb{R}^2 / \sim \rightarrow A_{2k}$ est bijective (au sens ensembliste). Appelons $\psi : A_{2k} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim$ l'application réciproque. On note $\varphi : Z_{2k} \rightarrow A_{2k}$ la résolution symplectique de A_{2k} qui a décrite en section 5.2.

Le corollaire 13 va maintenant être utilisé pour montrer le résultat très surprenant est suivant :

Proposition 40. *L'application $\psi \circ \varphi$ est un morphisme d'objet lisse de $(Z_{2k}, \{ \cdot, \cdot \}_{Z_{2k}})$ vers $(\mathbb{R}^2 / \sim, \{ \cdot, \cdot \}')$.*

Preuve. Soit $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2 / \sim)$. Par la proposition 34, on a

$$F(a, b) = \alpha_0(b) + \sum_{n \geq 1} \alpha_n(b) \cos \left(2n\pi \frac{a}{b} \right) + \sum_{n \geq 1} \beta_n(b) \sin \left(2n\pi \frac{a}{b} \right)$$

et donc :

$$F(a, b) = \alpha_0(b) + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(b)}{b^k} b^k \cos \left(2n\pi \frac{a}{b} \right) + \sum_{n \geq 1} \frac{\beta_n(b)}{b^k} b^k \sin \left(2n\pi \frac{a}{b} \right)$$

Soit $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ la fonction définie par :

$$G(x, y, z) = \alpha_0(z) + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n(z)}{z^k} x_n + \sum_{n \geq 1} \frac{\beta_n(z)}{z^k} y_n$$

où x_n, y_n sont les fonctions définies en (5.6). On a par construction $\psi^* F = G$ (autrement dit on a $\phi^* G = F$). et G est l'unique fonction à vérifier cette propriété. Soient maintenant la fonction H sur Z_{2k} définie par :

$$\alpha_0(\varphi^* z) + \sum_{n \geq 1} \varphi^* \left(\frac{\alpha_n(z)}{z^k} \right) X_n + \sum_{n \geq 1} \varphi^* \left(\frac{\beta_n(z)}{z^k} \right) Y_n$$

où les fonctions $X_n, Y_n \in C^\infty(Z_k)$ sont les fonctions du corollaire 13. On a par construction $\varphi^* \circ \psi^* F = H$. Montrons que H est une fonction lisse sur Z_k . Tout d'abord, les fonctions $\frac{\alpha_n(z)}{z^k}$ et $\frac{\beta_n(z)}{z^k}$ sont des fonctions lisses car $\alpha_n(z), \beta_n(z)$ sont nulles en 0 avec toutes leurs dérivées. Les fonctions X_n, Y_n sont lisses par le corollaire 13. Il reste à montrer la convergence de la série et de toutes ses dérivées. Cela vient du fait que les normes des dérivées de X_n, Y_n sont inférieures, sur un compact assez proche du lieu singulier, à une suite géométrique de raison inférieure à 1.

D'un part, on a d'après la preuve du corollaire 13, les suites x_n et y_n sont majorés sur A_{2n} alors X_n et Y_n les sont sur Z_k . D'un autre part, les coefficients de Fourier α_n, β_n sont majorés par $\frac{K}{n^2}$ d'après la preuve de la proposition 34, alors $\left(\frac{\alpha_n(z)}{z^k} \right)$ et $\varphi^* \left(\frac{\beta_n(z)}{z^k} \right)$ sont majorés sur Z_k . Ceci donne la convergence de la série. On peut aussi démontrer la convergence de toutes les dérivées partielles. \square

On en arrive au résultat principal de ce chapitre :

Théorème 31. *L'application $\psi \circ \varphi : Z_{2k} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim$ est une résolution symplectique lisse de l'objet de Poisson $(\mathbb{R}^2 / \sim, \{\cdot, \cdot\}')$.*

Preuve. Cela découle de la proposition précédente, du fait que $(Z_k, \{\cdot, \cdot\}_{Z_k})$ est symplectique, que φ est de Poisson ainsi que ψ . \square

Pour le cas G' , on considère la sous algèbre $\mathcal{A}' \subset C^k(\mathbb{R}^2 / \sim)$ engendrée par

$$\left(b^{2k} \cos\left(2\pi \frac{a}{b}\right), b^{2k+1} \sin\left(2\pi \frac{a}{b}\right), b^2 \right), \text{ pour tout entier } k > 2.$$

On calcule

$$\begin{cases} \{x, y, \}' = -(2k+1)z^{2k} + 2x^2 \in \mathcal{A}' \\ \{y, z\}' = 2zx \in \mathcal{A}' \\ \{z, x\}' = 2y \in \mathcal{A}'. \end{cases}$$

Proposition 41. *L'application $\phi : \mathbb{R}^2 / \sim' \rightarrow D_{2k+1}^+$ est un morphisme de Poisson de classe C^k qui est également une bijection au sens ensembliste.*

On note $\varphi : Z_{2k+1} \rightarrow D_{2k+1}$ est la résolution symplectique de D_{2k+1} .

Proposition 42. *L'application $\psi \circ \varphi$ est un morphisme d'objet lisse de $(Z_{2k}, \{\cdot, \cdot\}_{Z_{2k}})$ vers $(\mathbb{R}^2 / \sim', \{\cdot, \cdot\}')$.*

La preuve de ce résultat est identique à celle de la proposition 40. Nous utilisons simplement la proposition 35 au lieu de la proposition 34, et le corollaire 14 au lieu du corollaire 13.

Théorème 32. *L'application $\psi \circ \varphi : Z_{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim'$ est une résolution symplectique lisse de l'objet de Poisson $(\mathbb{R}^2 / \sim', \{\cdot, \cdot\}')$.*

Bibliographie

- [1] Arnaud Beauville, *Symplectic singularities*, Invent. Math., **139**, (2000), 541–549.
- [2] Travis Schedler, *A new linear quotient of \mathbf{C}^4 admitting a symplectic resolution*, Math. Z., **273**, (2013), 753–769.
- [3] Mohamed Boucetta. *Introduction à la géométrie de Poisson*, mini-cours a été donné à l'université de Méknes au Maroc, entre 19 et 23 Novembre (2013).
- [4] Damien Broka, Ping Xu, *Symplectic Realizations of Holomorphic Poisson Manifolds*, arXiv, 1512.08847v1. (2015).
- [5] Ana Cannas da Silva, Alan Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, University of California at Berkeley, December 1, (1998).
- [6] Marius Crainic, Ioan Marcuț, *A Normal Form Theorem Around Symplectic Leaves*, J. Diff Geom., **12**, 92 (2012) 417–461.
- [7] Alain Coste, Pierre Dazord, Alan Weinstein, *Groupoïdes symplectiques*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon, **2A**, (1987), 1–62.
- [8] Claude Albert, *Un théorème de réalisation des vaitétés de Jacobi*, C. R. Acad. Sci. Paris, t 317, Série I, 1993, p. 77–88.
- [9] P. Dazord, A. Lichnerowicz, M. Marle *Structure Locale des Variété de Jacobi*, J. Math. pures et appl., 70. 1991, p. 101–152.
- [10] [Docplayer](#)
- [11] Jean-Paul Dufour, Nguyen Tien Zung, *Poisson Structures and Their Normal Forms*, Springer Birkhauser, (2005).
- [12] BaoHua Fu, *Symplectic Resolutions for Nilpotent Orbits*, Invent. math., **151**, (2003), 157–186.
- [13] Brad Jones. *Weierstrass theorems*, lecture on complex analysis and combinatorics, SITE October, 29 (2012).
- [14] M.V. Karasev, *Analogues of objects of the theory of Lie groups for nonlinear Poisson brackets*, Math. USSR-Izv., **28**, (1987), 497–527.
- [15] Hichem Lassoued, *Dimension preserving resolutions of singularities of Poisson structures*, March 2017Differential Geometry and its Applications 65 DOI : 10.1016/j.difgeo.2019.04.001.

- [16] Camille Laurent-Gengoux, Mathieu Stiénon, Ping Xu, *Holomorphic Poisson Manifolds and Holomorphic Lie Algebroids*, Int Math Res Notices. Volume 2008, 1 January(2008), rnn088.
- [17] Camille Laurent-Gengoux, *From Lie groupoids to resolutions of singularities. Applications to symplectic and Poisson resolution*, arXiv. (2007).
- [18] Camille Laurent-Gengoux, Anne Pichereau, Pol Vanhaecke, *Poisson Structures*, Springer, (2013).
- [19] Caroline Lemarié. *Quelques structures de Poisson et équations de Lax associées au réseau de Toeplitz et au réseau de Schur*, PhD thesis in mathematics under the direction of Pol Vanhaecke, Université de Poitiers, (2012).
- [20] André Lichnerowicz, *Variétés de Poisson et leurs algèbres*, J. Diff. Geom., **12**, (1977), 253–300.
- [21] André Lichnerowicz, *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées*, J. Math. pures et app., **51**, (1978), 453–488.
- [22] B. Malgrange, *Idéaux de fonctions différentiables et division des distributions*, in : Dans le sillage de Laurent Schwartz, Actes des journées XUPS 2003, École Polytechnique, Palaiseau, 2003. Available online at : .
- [23] Rubén Martos Prieto. *Analyse Complexe à plusieurs variables, Le Théorème de Hartogs*, Dossier de synthèse réalisé sous la direction de M. Dinh Tien-Cuong dans le cadre de l’UE Travaux d’étude et de Recherche (T.E.R.) en Master 1. Université Pierre et Marie Curie (Paris).
- [24] John W. Milnor. *Topology from the differential viewpoint*, The University Press of Virginia, (1965).
- [25] Anne Pichereau. *(Co)homologie de Poisson et singularités isolées en petites dimensions, avec une application en théorie des déformations*, PhD thesis in mathematics under the direction of Pol Vanhaecke, Université de Poitiers, (2006).
- [26] Anne Pichereau. *Cohomologie de Poisson en dimension trois*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 151.154.
- [27] Nicolas Pouyanne, *Une résolution en singularités toriques simpliciales des singularités-quotient de dimension trois*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol. I num. 3, (1992), 363-398.
- [28] Alan Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom., **18**, (1983), 523–557.
- [29] Ping Xu, *Dirac submanifolds and Poisson involution*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., **36**, (2003), 403–430.

Résumé

Les structures de Poisson et de Jacobi peuvent être singulières de deux façons : la structure peut être singulière (que l'on appelle singularité du premier type), mais aussi la variété elle-même peut avoir des singularités (ce que l'on appelle deuxième type de singularité). Dans un cas comme dans l'autre, résoudre la singularité consiste à trouver un objet lisse muni d'une structure symplectique ou de contact qui se projette sur l'objet singulier.

Plusieurs travaux s'intéressent à ces différents types de singularités, pour celles du second type, des méthodes de type Hironaka ont été proposées dans le cadre de la géométrie algébrique. Pour celles du premier type, dans un cadre de la géométrie différentielle, il est bien connu qu'il est possible de changer la structure de Poisson et la structure de Jacobi en une structure symplectique et en une structure de contact quitte à doubler la dimension.

Le but de cette thèse est de donner quelques jalons pour une théorie cohérente de la résolution des deux types de singularités pour des variétés de Poisson et de Jacobi sans augmenter la dimension et en restant dans le cadre de géométrie différentielle, c'est à dire en travaillant avec des fonctions lisses.

Le premier de ses jalons est un résultat négatif : nous montrons qu'il n'existe pas de résolutions raisonnables de singularités du premier type quand le lieu singulier est de codimension 1. Nous donnons aussi des exemples qui montrent qu'en codimension deux une telle résolution peut exister. Nous faisons ceci aussi bien pour les structures de Poisson que celles de Jacobi. Les deux derniers chapitres sont consacrés à la résolution du deuxième type de singularité. Nous commençons par redonner un point de vue nouveau sur des résultats connus sur la singularité du Du Val qui sont des quotients de \mathbb{R}^2 par des groupes finis de $Sl(2, \mathbb{R})$. Enfin, en s'appuyant sur les résolutions de Du Val, on donne au dernier chapitre des résolutions symplectiques propres d'objets de Poisson singuliers définis par le quotient de \mathbb{R}^2 par un sous groupe infini de $Gl(2, \mathbb{R})$.

Mots-clés: Géométrie de Poisson, variété de Jacobi, résolution des singularité.

Abstract

Poisson and Jacobi structures can be singular in two ways : the structure can be singular (we then say : singularity of the first type), but the variety itself can also have singularities (we then say : singularity of the second type). In both cases, solving the singularity consists in finding a smooth object equipped a symplectic or contact structure that projects onto the singular object under consideration.

Several works deal with these different types of singularities. For those of the second type, Hironaka type methods have been proposed in the framework of algebraic geometry.

For those of the first type, in a framework of differential geometry, it is well known that it is possible to turn the Poisson structure and the Jacobi structure into a symplectic structure and a contact structure if we allow to double the dimension.

The aim of this thesis is to give some milestones for a coherent theory of the resolution of the two types of singularities for Poisson and Jacobi varieties. We want, however, 1) not to increase the dimension and 2) to remain within the framework of differential geometry—i.e. we work with smooth functions.

The first of its milestones is a negative result : we show that there are no reasonable resolutions of singularities of the first type when the singular locus is of codimension one. We also give examples that show that in codimension two such a resolution can exist. We do this for both Poisson and Jacobi structures. The last two chapters are devoted to solving the second type of singularity. We begin by suggesting a new point of view on known results on the Du Val singularity which are quotients of \mathbb{R}^2 by finite groups of $Sl(2, \mathbb{R})$. Finally, when using Du Val's symplectic resolutions, we give in the last chapter an example of a proper symplectic resolution of a singular Poisson object : the quotient of \mathbb{R}^2 by an infinite subgroup of $Gl(2, \mathbb{R})$.

Keywords: Symplectic, Poisson, realization.