HAL
open science

Modélisation multi-échelle de l'endommagement dynamique des matériaux fragiles sous chargements complexes

Megbeme Komla Atiezo

To cite this version:

Megbeme Komla Atiezo. Modélisation multi-échelle de l'endommagement dynamique des matériaux fragiles sous chargements complexes. Matériaux. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT : 2019LORR0212 . tel-02527984

HAL Id: tel-02527984

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02527984

Submitted on 1 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

École doctorale EMMA Lorraine

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 31 Mai 2019

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Spécialité : Mécanique des matériaux)

par

Megbeme Komla Atiezo

Modélisation multi-échelle de l'endommagement dynamique des matériaux fragiles sous chargements complexes

Composition du jury

Président :	Prof. Jean-François Deü	Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris
Rapporteurs :	Prof. Fabrice Gatuingt	Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay, CNRS, Université Paris Saclay
	Prof. Jia Li	Institut Galilée Université Paris 13
Directeur de thèse :	Prof. Cristian Dascalu	Université de Lorraine
Co-directeur :	Mcf. Wen Chen	Université de Lorraine

Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux — UMR CNRS 7239

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire LEM3 à Metz, sous la direction de Cristian Dascalu à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude. Je le remercie pour sa disponibilité, ses conseils scientifiques, sa contribution, sa patience et pour m'avoir permis de découvrir le monde de la recherche scientifique durant ces trois années de thèse.

Je souhaite aussi adresser mon sincère remerciement à Wen Chen d'avoir accepté de co-encadrer cette thèse, pour son implication et son apport dans ce travail de recherche.

D'autre part je souhaite adresser ma sincère reconnaissance au Professeur Jean-François Deü qui a accepté de me faire l'honneur de présider ce jury de thèse, mais aussi aux Professeurs Fabrice Gatuingt et Jia Li pour avoir accepté de rapporter sur ce mémoire.

C'est ici également pour moi l'occasion de remercier tous les membres du laboratoire LEM3, la direction, les secrétaires, les doctorants et tous les chercheurs pour leur convivialité et leur soutien durant cette période de thèse.

Je remercie particulièrement tous mes camarades Togolais avec qui j'ai partagé ces moments et tous ceux qui m'ont toujours soutenu malgré la distance.

Une mention spéciale et particulière à mon épouse Sandra pour son soutien et pour sa patience durant cette période de thèse.

Enfin je veux par cette occasion remercier toute ma famille, mes parents, mes frères, mes oncles, mes tantes pour leur soutien de tous les jours qui m'ont permis d'aller jusqu'au bout de ce travail de recherche.

Je dédie ce travail
à ma Maman et mon Papa,
à mes frères et à mes soeurs
ET AUSSI
à mon épouse Sandra

Résumé

Dans cette thèse, la modélisation de l'endommagement et de la rupture dynamique des matériaux quasi-fragiles est proposée en utilisant une approche double-échelle basée sur la méthode d'homogénéisation asymptotique. Des lois d'endommagement dynamique sont établies et des simulations numériques du comportement associé sont effectuées dans les cas de sollicitations correspondants aux trois modes classiques de la Mécanique de la Rupture.

Le premier modèle d'endommagement dynamique est proposé pour le chargement en mode de cisaillement antiplan (mode III). La loi d'endommagement est déduite à partir d'un critère énergétique de type Griffith décrivant la propagation des micro-fissures, en utilisant la méthode de changement d'échelle basée sur des développements asymptotiques. Une étude locale de la réponse macroscopique prédite par ce nouveau modèle est faite pour mettre en évidence l'influence des paramètres, comme la taille de la microstructure et la vitesse de chargement, sur l'évolution de l'endommagement. Les résultats des simulations macroscopiques de rupture dynamique et les instabilités de branchement associées sont présentés et comparés à ceux des observations expérimentales. Le modèle est implémenté dans un code Eléments finis/Différences finies en utilisant le logiciel de calcul Matlab.

Des simulations numériques de rupture rapide en mode d'ouverture (mode I) en utilisant une loi d'endommagement dynamique sont ensuite présentées. Le modèle utilisé pour ces simulations, est déduit à partir d'un critère microscopique de type Griffith en mode I en utilisant la méthode d'homogénéisation asymptotique. La loi d'endommagement obtenue est sensible à la vitesse de chargement qui influence le mode de rupture macroscopique. Des simulations numériques sont effectuées afin d'identifier les prédictions du modèle et les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux. Différents tests, comme ceux de traction directe et de l'échantillon en forme de L pour les bétons, les essais d'impact sur des échantillons CCS en PMMA et le test d'impact de Kalthoff pour des roches calcaires sont reproduits numériquement. Ces simulations montrent que la vitesse de chargement détermine essentiellement la trajectoire de rupture macroscopique et la formation des branches associées, en accord avec les résultats expérimentaux. La loi a été implémentée dans le code d'éléments finis Abaqus/Explicit via une subroutine VUMAT.

Un troisième modèle d'endommagement est obtenu pour le mode de cisaillement plan (Mode II) par une démarche de modélisation double-échelle similaire à celle utilisée dans les deux premiers modèles, en tenant compte du contact unilatéral avec frottement sur les lèvres des micro-fissures. Une étude locale concernant l'effet du chargement de compression et du coefficient du frottement sur les fissures est faite. L'influence des paramètres comme la taille de la microstructure et la vitesse de déformation sur l'évolution de l'endommagement sont étudiés. Ces études sont complétées par des simulations des essais de rupture/frottement sur des échantillons en PMMA en utilisant le logiciel Abaqus/Explicit.

Mots-clés: Matériaux quasi-fragiles, lois d'endommagement dynamique, micro-fissures, modélisation double-échelle, simulations numériques.

Abstract

In this thesis, the modeling of dynamic damage and failure of quasi-materials is addressed using a two-scale approach based on the asymptotic homogenization method. Dynamic damage laws are obtained and numerical simulations of the associated behavior are performed for loadings corresponding to the classical three modes of Fracture Mechanics.

The first dynamic model of damage is proposed for the anti-plane shear loading case (Mode III). The damage evolution law is deduced from the Griffith's energy criterion governing the dynamic propagation of microcracks, by using the homogenization method based on asymptotic expansions. A study of the local macroscopic response predicted by the new model is conducted to highlight the influence of parameters, like the size of the microstructure and the loading rate, on the evolution of damage. Results of macroscopic simulations of dynamic failure and the associated branching instabilities are presented and compared with those reported by experimental observations. The model is implemented in a Finite-Elements/Finite-Differences code using the Matlab software environment.

Numerical simulations of rapid failure in opening mode (Mode I) are using a dynamic damage law are presented subsequently. The model is deduced from a microscopic Griffith-type criterion describing the dynamic mode I propagation of microcracks, using the asymptotic homogenization approach. The resulting damage law is sensitive to the rate of loading that determines the macroscopic failure mode. Numerical simulations are performed in order to identify the model predictions and the obtained numerical results are compared with the experimental ones. Different tests, like the compact tension and L-shape specimen tests for concrete, the compact compression test for the PMMA brittle polymer and the Kalthoff impact test for limestone rocks, are considered in the numerical simulations. These simulations show that the loading rate essentially determines the macroscopic crack trajectory and the associated branching patterns, in agreement with the experimental results. The law has been implemented in a finite element code Abaqus/Explicit via a VUMAT subroutine.

A third model of damage is obtained for the in-plane shear mode (Mode II) through a similar double-scale approach by considering unilateral contact with friction conditions on the microcracks lips. A local study concerning the effects of normal compression and of the friction coefficient is carried out. The influence of the size of the microstructure and the rate of loading on damage evolution is analyzed at the local level. These studies are completed by structural failure simulations of PMMA specimens using the Abaqus/Explicit finite element software.

Keywords: Quasi-brittle materials, dynamic damage law, microcracks, two-scale modeling, numerical simulations.

Sommaire

Introduction générale **13**

Chapitre 1 Etat de l'art **17**

1.1 Introduction 17
1.2 Mécanique de la rupture en dynamique 18
1.2.1 Modes de propagation d'une fissure 19
1.2.2 Problèmes plans 19
1.2.3 Analyse asymptotique des champs de contraintes et de déplacements 20
1.2.4 Facteur d'intensité de contraintes en dynamique 24
1.2.5 Taux de restitution d'énergie dynamique 26
1.2.6 Critères de rupture 28
1.3 Endommagement dynamique 29
1.3.1 Définition de l'endommagement 29
1.3.2 Concept de contrainte effective 29
1.3.3 Quelques lois d'évolution de l'endommagement 30
1.4 Changement d'échelles 34
1.5 Homogénéisation asymptotique de structures localement périodiques 34
1.6 Effets d'échelle et de la vitesse de déformation 36
1.7 Instabilités de micro-branchement 37

Chapitre 2 Modèle double-échelle d'endommagement dynamique en mode anti-plan **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Comportement effectif des solides micro-fissurés 40

2.2.1 Equations de l'élasto-dynamique 40

2.2.2 Analyse d'homogénéisation asymptotique 41

2.3 Lois d'endommagement homogénéisées 47

2.3.1 Evolution quasi-statique 47

2.3.2 Evolution dynamique 50

2.4 La réponse locale du modèle 52

2.4.1 Influence de la longueur microscopique ε 52

2.4.2 Influence de la vitesse de chargement 53

2.4.3 Influence de l'endommagement initial 56

2.5 Simulation d'endommagement dynamique 56

2.5.1 Problème de rupture et aspects de simulation numérique 56

2.5.2 Indépendance de maillage 57

2.5.3 Instabilités de branchement en rupture dynamique 59

2.6 Conclusions 65

Chapitre 3 Effets de vitesse de chargement sur la rupture dynamique des structures **67**

3.1 Introduction 67

3.2 Modèle d'endommagement dynamique 69

3.3 Essai de traction directe 73

3.4 Essai sur l'échantillon en forme de L 77

3.5 Essai d'impact sur échantillon CCS 81

3.6 Essai LECEI sur des échantillons de calcaire 84

3.7 Conclusions 87

Chapitre 4 Modèle d'endommagement dynamique pour les micro-fissures frottantes en mode II **89**

4.1 Introduction 89

4.2 Formulation du problème 90

4.3 Homogénéisation asymptotique et loi d'endommagement quasi-statique . . 91

4.4 Coefficients effectifs C_{mnpq} et intégrales I_{mnpq} 95

4.5 Loi d'endommagement dynamique avec frottement 97

4.6 Comportement macroscopique local 99

4.6.1 Influence du coefficient de frottement 100

4.6.2 Influence de la compression 100

4.6.3 Influence de l'endommagement initial 101

4.6.4 Influence de la vitesse de déformation 102

4.6.5 Influence de la taille de microstructure 102

4.7 Simulation des effets de compression sur l'évolution du front de rupture d'une interface avec frottement 103

4.7.1 Géométrie, chargement et maillage du spécimen 104

4.7.2 Simulations numériques 105

4.8 Conclusions 107

Conclusion générale **109**

Annexes **111**

Annexe A **111**

A.1 Intégrales I_{mnpq} 111

A.2 Calcul des I^{α}_{mnpq} 112

Bibliographie **113**

Table des figures

1.1 Les trois modes de rupture. 18
1.2 Systèmes d'axes par rapport à la fissure. 19
1.3 Courbe des fonctions universelles $k(v)$ et $g(v)$ en fonction de v/c_R en mode I [57]. 25
1.4 Contour fermé Γ autour de la pointe de la fissure se déplaçant avec une vitesse v. 27
1.5 Coupe 2D d'un élément endommagé 29
1.6 Milieu fissuré localement périodique : a) microstructure avec de fissures, b) cellules de même taille avec des fissures de longueurs différentes. 35
1.7 a) Domaine fissuré localement périodique : ε est la taille de la période et l la longueur de micro-fissure b) Cellule unitaire avec une fissure de taille normalisée d=l/ε. 36
1.8 Résistance dynamique en traction vs. vitesse de déformation pour : a) deux bétons à tailles de microstructure différente [46], b) deux nuances de carbure de silicium à microstructures différentes [148]. 37
1.9 Instabilités de micro-branchement dans le PMMA : oscillations de la vitesse de fissure à partir d'une vitesse critique d'environ 340 m/s et la formation des micro-branches associée [128]. 38

2.1 a) Domaine micro-fissuré avec microstructure localement périodique : ε est la taille de la période et l est la longueur de micro-fissure. b) Cellule unitaire avec une fissure de longueur normalisée $d = l/\varepsilon$. 41
2.2 Cellule unitaire avec une micro-fissure. Contours circulaires autour des pointes et en mouvement avec elles. 42
2.3 Maillage d'élements finis pour le calcul des solutions de cellule unitaire et l'évolution de l'erreur par rapport au nombre d'itérations. 45
2.4 Le coefficient homogénéisé $C_{3232}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour les micro-fissures dans la direction de l'axe x_1 ($\theta = 0$). . . . 45
2.5 Le coefficient homogénéisé $C_{3232}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour trois différentes orientations de micro-fissures. 46
2.6 Le coefficient homogénéisé $C_{3131}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour trois orientations de micro-fissures. 46
2.7 Le coefficient homogénéisé $C_{3132}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour trois orientations de micro-fissures. 47

2.8 Contrainte Σ_{32} et endommagement d en fonction de la déformation e_{x32} pour trois valeurs de la longueur microstructurelle ε. 52
2.9 Evolution de contrainte maximale en fonction de la taille de la microstructure ε. 53
2.10 Contrainte Σ_{32} et l'endommagement d en fonction de e_{x32} pour trois valeurs différentes de vitesse de déformation $\dot{e}_{x32}$. 54
2.11 Résistance au cisaillement en fonction de la vitesse de déformation pour différentes tailles de microstructure. 54
2.12 Contrainte Σ_{32} et endommagement d en fonction de e_{x32} prédit respectivement par les lois d'endommagement dynamique et quasi-statique. On note les seuils différents d'initiation. 55
2.13 Contrainte Σ_{32} et endommagement d en fonction de la déformation e_{x32} pour les valeurs d'endommagement inital $d_0 = 0.1$, $d_0 = 0.2$ et $d_0 = 0.5$. . . 55
2.14 Chargement et géométrie de l'échantillon. 56
2.15 Maillage structuré avec plusieurs zones de raffinement autour de la ligne horizontale centrale. 57
2.16 Carte d'endommagement décrivant la propagation de la fissure macroscopique pour un maillage élément fini de 49976 éléments et une taille d'élément central de 0.012 mm. 58
2.17 Evolution de la dissipation totale en fonction de temps pour trois tailles d'éléments du maillage : 0.012 mm, 0.006 mm et 0.0038 mm. 58
2.18 Zone d'endommagement pour deux différents types de maillages : 0.006 mm et 0.0038 mm. 59
2.19 Carte d'endommagement pour différentes valeurs de tailles de microstructure : $\varepsilon = 0.03$ mm, $\varepsilon = 0.05$ mm, $\varepsilon = 0.075$ mm et $\varepsilon = 0.1$ mm. 60
2.20 Vitesse de la fissure principale en fonction de sa longueur pour différentes valeurs de ε. 61
2.21 Zoom sur la zone d'endommagement : régime de fissure unique suivi d'une fissure principale avec des micro-branches. 61
2.22 Vitesse de la fissure principale en fonction de sa longueur pour les variations des paramètres du matériau par rapport aux paramètres initiaux du PMMA. 62
2.23 Cartes d'endommagement pour différentes vitesses de chargement : $v_{ap} = 0\,m/s$, $v_{ap} = 3\,m/s$, $v_{ap} = 6\,m/s$ et $v_{ap} = 12\,m/s$. 63
2.24 Vitesse de pointe de la fissure principale en fonction du temps pour différentes vitesses appliquées. 64
2.25 Dissipation due à l'endommagement en fonction du temps pour différentes vitesses appliquées. 64

3.1 Les réponses en contrainte (a) et endommagement (b) pour les longueurs micro-structurelles $\varepsilon = 8e-4\,m$, $\varepsilon = 4e-3\,m$, $\varepsilon = 2e-2\,m$ et le paramètre $\alpha = 1.4$. 71
3.2 Courbes contrainte-déformation (a) et endommagement-déformation (b) pour deux valeurs de l'exposant $\alpha = 1$ et $\alpha = 1.4$. 72
3.3 Géométrie (a) et maillage (b) de l'échantillon de traction directe. 73

3.4 Modes de rupture pour l'essai de traction directe, résultats expérimentaux [107] (à gauche) et numériques avec le présent modèle (à droite), correspondant aux vitesses de chargement : (a) $v = 0.5\,m/s$, (b) $v = 1.4\,m/s$, (c) $v = 3.3\,m/s$. 75
3.5 La réaction mesurée [107] fonction de temps pour des vitesses de chargement (a) $v = 1.40\,m/s$ et (b) $v = 3.3\,m/s$. 76
3.6 Réaction numérique en fonction du temps pour les vitesses appliquées (a) $v = 1.40\,m/s$ et (b)$v = 3.3\,m/s$. 76
3.7 Résultats numériques et expérimentaux de l'essai de traction directe : la charge maximale pour trois vitesses appliquées. 76
3.8 Test de traction directe : simulations avec des maillages éléments finis de a) taille d'éléments $1\,mm$ et b) taille d'élément $s0.5\,mm$. 77
3.9 Géométrie, dimensions, chargement (a) et maillage (b) pour l'échantillon en forme de L. 78
3.10 Modes de rupture, résultats expérimentaux à gauche et numériques à droite, de l'essai sur l'échantillon en forme de L, pour les vitesses de chargement : (a) $v = 0.35\,m/s$, (b) $v = 0.74\,m/s$, (c) $v = 1.1\,m/s$ et (d) $v = 2.4\,m/s$ . . . 79
3.11 Résultats expérimentaux charge-déplacement [108] pour des vitesses appliquées supérieures à $740mm/s$ (a) et courbes numériques correspondantes (b). 80
3.12 Valeurs numériques et expérimentales de la charge maximale en fonction de la vitesse appliquée pour l'essai de l'échantillon en forme de L. 80
3.13 Indépendance du maillage pour le test du spécimen en forme de L a) taille de l'élément $= 2.5\,mm$ et b) taille de l'élément $= 1.25\,mm$. 81
3.14 Géométrie (a) et maillage (b) utilisés dans les simulations de l'essai CCS. . 82
3.15 Trajectoire de fissures avec l'angle d'amorçage pour le test CCS avec des vitesses d'impact : (a) $v = 10\,m/s$, (b) $v = 20\,m/s$. 82
3.16 Energie cinétique en fonction de temps a) dans un élément endommagé et b) dans un élément voisin non endommagé, pour deux vitesses d'impact. . 83
3.17 Dissipation en fonction du temps dans un élément endommagé et sur un pas de temps de 1e-10 s, pour deux vitesses d'impact. 83
3.18 Simulations de test de compression compacte pour deux maillages EF avec a) la taille de l'élément $= 0.16\,mm$ et b) la taille de l'élément $= 0.08\,mm$. . 84
3.19 Géométrie, chargement (a) et maillage élément fini (b) pour le test LECEI. 85
3.20 Schémas de fissures du test LECEI correspondant aux vitesses d'impact : (a) $v_0 = 12\,m/s$, (b) $v_0 = 15\,m/s$, (c) $v_0 = 18\,m/s$. 85
3.21 Etapes de propagation des fissures pour le test LECEI sur une roche calcaire : (a) images expérimentales [18, 19] et (b) simulations numériques avec le modèle d'endommagement. 86
3.22 Simulations du test LECEI avec deux maillages EF de tailles d'éléments : a) $2e-5\,m$ et b) $1e-5\,m$. 86

4.1 a) Domaine micro-fissuré avec une microstructure localement périodique : ε est la taille de la période et l est la longueur de micro-fissure. b) Cellule unitaire avec une fissure de longueur normalisée $d = l/\varepsilon$. 91

4.2 Coefficients effectifs C_{1222} et C_{1212} en fonction de d, pour trois valeurs de coefficient de frottement $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$ et $\mu_f = 0.5$. 96
4.3 Intégrale I_{2222} en fonction de d, pour trois valeurs de coefficient de frottement $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$ et $\mu_f = 0.5$. 96
4.4 La fonction $g_2(v)$ et ses approximations vs v/c_R. 99
4.5 Endommagement d et contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour le coefficient de frottement : $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$, $\mu_f = 0.5$. 99
4.6 Endommagement d et la contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour trois valeurs de la déformation de compression : $e_{x22} = -1e-5$, $e_{x22} = -5e-3$, $e_{x22} = -1e-2$. 100
4.7 Vitesse de la pointe des micro-fissures en fonction de la déformation $-e_{12}$ (a) et de d (b) pour trois valeurs de la déformation de compression et $d_0 = 0.85$. 101
4.8 Vitesse de la pointe des micro-fissures en fonction de la déformation $-e_{12}$ (a) et de d (b) pour trois valeurs de de déformation de compression et $d_0 = 0.2$. 101
4.9 Endommagement d (a) et contrainte $-\Sigma_{12}$ (b) en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour six valeurs différentes de d_0. 102
4.10 Endommagement d et contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour trois valeurs de vitesse de déformation : $\dot{e}_{x12} = -100\ /s$, $\dot{e}_{x12} = -1000/s$, $\dot{e}_{x12} = -10000\ /s$. 103
4.11 Endommagement d et contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour trois valeurs différentes de taille de microstructure : $\varepsilon = 1e-3\ m$, $\varepsilon = 1e-4\ m$ et $\varepsilon = 1e-5\ m$. 103
4.12 Géométrie et chargement du spécimen PMMA pour la simulation des effets de compression. 104
4.13 Maillage de l'échantillon pour la simulation des effets de compression sur la rupture. 105
4.14 Evolution de l'endommagement à t=0.9 μs de l'initiation de la rupture, pour quatre déplacements appliqués : *a*) $u_{0y} = 0.111\ mm$, *b*) $u_{0y} = 0.110628\ mm$, *c*) $u_{0y} = 0.05\ mm$ et *d*) $u_{0y} = 0.03\ mm$. 106
4.15 Vitesse locale de propagation en fonction du rapport de contraintes Σ_{12}/Σ_{22} : *a*) simulation numérique et *b*) résultat expérimental [15]. 107
4.16 Vitesse locale en fonction du temps pour différents déplacements u_{0y} appliqués : *a*) $u_{0y} = 0.112\ mm$, *b*) $u_{0y} = 0.111\ mm$, *c*) $u_{0y} = 0.110628\ mm$, *d*) $u_{0y} = 0.110626\ mm$, *e*) $u_{0y} = 0.05\ mm$ et *f*) $u_{0y} = 0.03\ mm$. 108

Liste des tableaux

3.1 Les angles initiaux mesurés par Rittel et Maigre [122] et les valeurs prédites par les simulations numériques du CCS test. 82

Introduction générale

La modélisation du comportement de rupture des matériaux quasi-fragiles, tels que les céramiques, certains polymères, les bétons ou les roches, est nécessaire pour de nombreuses applications d'ingénierie. Les hétérogénéités à petite échelle ont une influence significative sur le comportement macroscopique observé.

Des évolutions à l'échelle de la microstructure sont souvent à l'origine de divers changements se produisant au niveau de la macrostructure tels que la dégradation des propriétés élastiques et l'initiation de la macro-rupture. Ces matériaux contiennent diverses sources d'hétérogénéités telles que des micro-fissures, des pores, des inclusions ou des joints de grains à leur échelle microscopique. La propagation des microfissures est un mécanisme d'endommagement typique des solides quasi fragiles, conduisant à une dégradation des propriétés élastiques et l'initiation des macro-fissures. Afin de bien rendre nos predictions plus efficaces, une étude de la relation entre les phénomènes micro-structurels et la réponse macroscopique permettant de prédire le comportement de ces matériaux est bénéfique.

Le choix d'une échelle pertinente pour la modélisation est souvent lié à l'apparition de nouveaux moyens d'observation et mesure des phénomènes. La mécanique des matériaux s'est progressivement développé par rapprochement entre les visions à plusieurs échelles. Les processus de rupture des matériaux fragiles ont lieu à plusieurs échelles spatiales et aujourd'hui la modélisation du comportement mécanique des matériaux fait appel à un dialogue entre ces différents niveaux d'observation. Les approches multi-échelles constituent un des outils privilégiés pour la description réaliste de ces phénomènes.

Des efforts importants ont été faits ces dernières décennies pour décrire l'évolution de l'endommagement dans les structures. Les modèles basés sur la propagation des micro-fissures, utilisant des techniques analytiques ou numériques, à différentes l'échelles, ont été proposés. On peut citer, entre autres, les contributions : [20], [49], [70], [73], [85], [90], [103], [109], [110], [111], [113], [121], [139]. Une place particulière, par rapport aux développements présentés dans ce mémoire, occupent les modèles d'endommagement visqueux ou à effet retard [41, 3, 4, 43, 132].

Parmi les nombreuses méthodes de modélisation de la rupture à plusieurs échelles, une procédure d'homogénéisation par développements asymptotiques a été développée dans les travaux : [34, 35, 37, 144, 40] pour l'obtention des lois d'endommagement à partir des équations décrivant la propagation de micro-fissures. La méthode a été appliquée au cas de propagation dynamique de micro-fissures en mode I dans [78], [39] pour la construction d'un modèle dynamique d'endommagement. Le modèle obtenu et dérivé complètement de la microstructure en évolution, sans hypothèses supplémentaires à l'échelle macroscopique, et fait apparaitre une longueur interne représentant la distance mutuelle entre les micro-

fissures voisines à petite échelle. Cette longueur contrôle la taille des zones de localisation et permet de prédire les effets combinés de la taille de microstructure et de la vitesse de déformation, comme l'illustre l'analyse effectuée dans [38].

L'objectif de cette thèse est de compléter ces développements, en construisant des nouveaux modèles d'endommagement par homogénéisation à partir des microstructures avec des micro-fissures en propagation dynamique en mode II et III, respectivement. Dans le cas du mode III les fissures sont considérées sans contact entre les lèvres, tandis que dans le cas du mode II des conditions de contact avec frottement sont adoptées. Les lois d'endommagement obtenues sont implémentées dans un code Eléments Finis afin de prédire par simulations numériques le comportement macroscopique des structures. Des nouvelles simulations macroscopiques avec le modèle initial, correspondant au mode I, compléteront ce travail.

Le présent mémoire est organisé en quatre grands chapitres. Le premier donne une présentation succincte des éléments nécessaires dans les autres chapitres, comme les bases de la Mécanique de la rupture en dynamique, des approches d'endommagement et de la méthode de changement d'échelle. Des éléments d'étude bibliographique sur les modèles d'endommagement dynamique, la dépendance de la vitesse de déformation, les effets de micro-branchement sont aussi présentés.

Dans le deuxième chapitre, la construction du modèle obtenu dans le cas anti-plan (mode III) est donnée. La méthode d'homogénéisation basée sur le développements asymptotiques permettant d'obtenir le comportement effectif des solides micro-fissurés sous la sollicitation en mode III est d'abord présentée. Après ceci la loi d'endommagement dynamique est obtenue par une approche énergétique combinée à la méthode d'homogénéisation. Une étude locale sur l'influence des paramètres comme la taille de la microstructure et la vitesse de chargement sur la propagation de fissure est ensuite faite. Les résultats des simulations macroscopiques de rupture dynamique et des instabilités de micro-branchement associées sont présentées et comparées avec ceux rapportées par des observations expérimentales et des études théoriques sur la rupture dynamique des matériaux fragiles.

Le troisième chapitre présente des simulations numériques de rupture dynamique en mode I dominant, utilisant une loi d'endommagement obtenue dans [78]. Le modèle est déduit à partir du critère énergétique décrivant la propagation des micro-fissures en mode I et en utilisant la même méthode d'homogénéisation asymptotique. Ces simulations complètent l'étude [78], en se proposant de reproduire certaines expériences comme l'essai de traction directe et de l'échantillon en forme de L pour les bétons, le test de compression compacte pour le PMMA et le test d'impact de type Kalthoff sur une roche calcaire. Des simulations par éléments finis effectuées pour reproduire ces expériences ont montré que la vitesse de chargement joue un rôle essentiel sur le mode de rupture macroscopique et sur la formation des multi-branches de rupture. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec ceux observés expérimentalement.

Enfin, le quatrième chapitre concerne la construction d'un modèle d'endommagement dynamique dans le cas des microfissures se propageant en mode II. Des conditions de contact unilatéral avec frottement sont considérées sur leurs lèvres. L'application de la méthode de changement d'échelle nécessite des développements et des résolutions numériques spécifiques à ce cas. L'approche énergétique faisant apparaitre aussi la dissipation due au frottement est utilisée par la suite pour déterminer la loi d'endommagement dyna-

mique. Une étude de la réponse macroscopique locale prédite par le modèle est effectuée pour mettre en évidence l'influence de la vitesse de déformation, de l'endommagement initial et la taille de la microstructure sur l'évolution de l'endommagement. Des simulations macroscopiques ont été réalisées pour reproduire des effets de compression sur des blocs de PMMA en glissement avec frottement, en modélisant le frottement macroscopique dans sa phase initiale comme une rupture dynamique d'une zone à fort endommagement initial.

Chapitre 1

Etat de l'art

Sommaire

1.1 Introduction **17**
1.2 Mécanique de la rupture en dynamique **18**
1.2.1 Modes de propagation d'une fissure 19
1.2.2 Problèmes plans 19
1.2.3 Analyse asymptotique des champs de contraintes et de déplacements 20
1.2.4 Facteur d'intensité de contraintes en dynamique 24
1.2.5 Taux de restitution d'énergie dynamique 26
1.2.6 Critères de rupture 28
1.3 Endommagement dynamique **29**
1.3.1 Définition de l'endommagement 29
1.3.2 Concept de contrainte effective 29
1.3.3 Quelques lois d'évolution de l'endommagement 30
1.4 Changement d'échelles **34**
1.5 Homogénéisation asymptotique de structures localement périodiques **34**
1.6 Effets d'échelle et de la vitesse de déformation **36**
1.7 Instabilités de micro-branchement **37**

1.1 Introduction

L'obtention des modèles d'endommagement dynamique à partir des microstructures contenant des fissures évolutives fait appel à des concepts de Mécanique de la rupture, des Méthodes d'homogénéisation et de la Mécanique de l'endommagement.

L'objet de la Mécanique de la rupture est l'étude de la propagation des fissures en fonction des chargements appliqués. Elle formule des critères de propagation pour les fissures pré-existantes. Ces critères décrivent quand et comment ces fissures se propagent.

La Mécanique de l'endommagement décrit la détérioration progressive du matériau jusqu'à la rupture. L'endommagement est représenté par une variable d'état interne, définie en chaque point d'une structure et caractérisant son niveau de détérioration par microfissuration. Elle sert à représenter la dégradation des capacités physiques des matériaux et, par localisation, on décrit l'initiation et l'évolution de la rupture à l'échelle de la structure.

Le but d'une théorie d'homogénéisation est d'obtenir une approximation homogène d'un milieu décrit par des propriétés microscopiques hétérogènes. Dans le cadre des milieux micro-fissurés, l'homogénéisation conduit à un problème pour un milieu homogène non-fissuré mais dont les propriétés tiennent compte de la dégradation due à la microfissuration par l'intermédiaire d'une variable de type endommagement. Si les microfissures se propagent, une méthode d'homogénéisation adaptée peut conduire à une loi d'évolution de l'endommagement.

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et les formulations des trois théories qui seront nécessaires pour les développements de cette thèse, assortis des éléments d'études bibliographiques sur certains points importants pour notre sujet.

1.2 Mécanique de la rupture en dynamique

La mécanique de la rupture dynamique décrit la propagation des fissures en prenant en compte les termes dynamiques dans les équations de bilan. Elle décrit des phénomènes de chargement et/ou de propagation rapides. Dans cette section, quelques aspects de la rupture sont présentés, avec un accent particulier sur l'approche en dynamique [57, 118, 129].

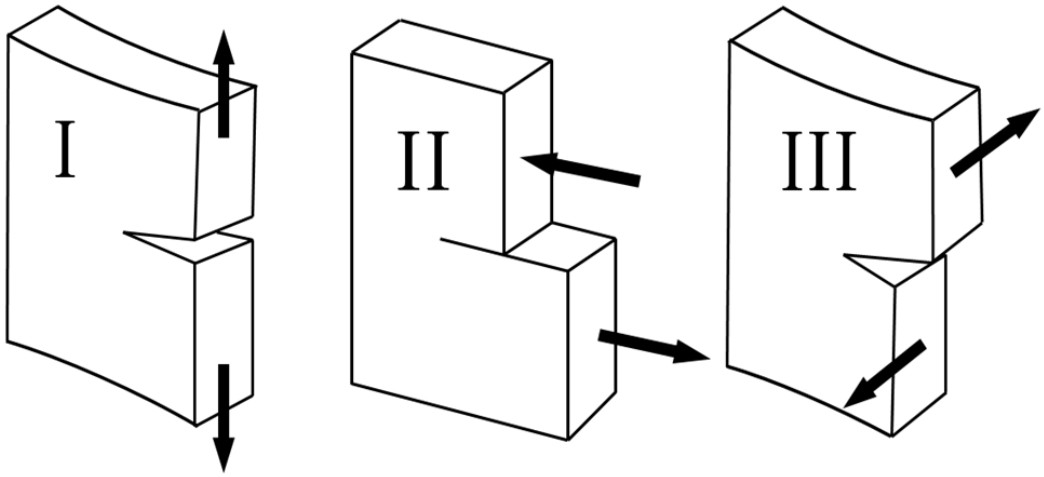

FIGURE 1.1 – Les trois modes de rupture.

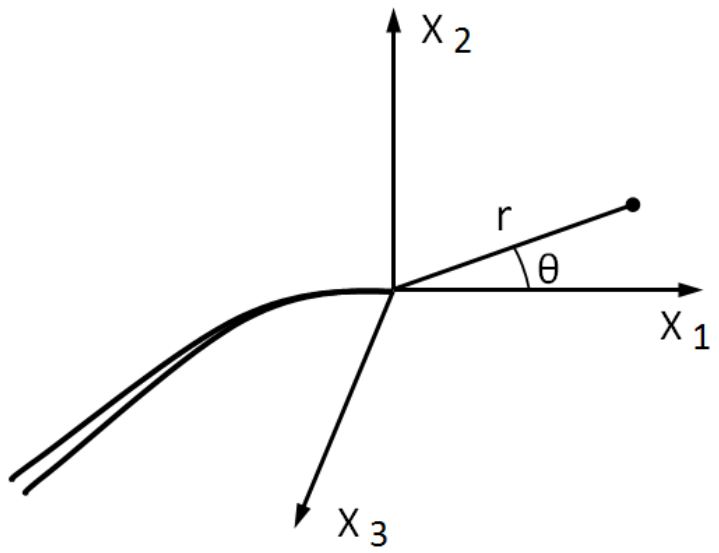

FIGURE 1.2 – Systèmes d'axes par rapport à la fissure.

1.2.1 Modes de propagation d'une fissure

La fissure est un « défaut » ou une discontinuité brutale apparue dans un matériau sous l'effet des sollicitations externes, un lieu où la matière est séparée sur une certaine surface. Le champ des déplacements est alors discontinu à travers cette surface et l'orientation des trois composantes vectorielles de ce déplacement décrit les trois modes de rupture. Dans la Figure 1.1, sont représentés ces trois modes : le mode I pour l'ouverture, le mode II pour le glissement plan et le mode III pour le glissement anti-plan. Dans la plupart des cas réels on retrouve une superposition de ces modes élémentaires, appelées des modes mixtes.

1.2.2 Problèmes plans

Les problèmes de mécanique des solides peuvent dans certains cas être considérés comme des problèmes plans ou bidimensionnels. Les états de contraintes planes et de déformations planes sont particulièrement importants pour les applications. Pour le tenseur des contraintes nous utiliserons les notations σ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ et e_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ pour les déformations dans un repère d'axes x_1, x_2, x_3 (voir un exemple dans la Figure 1.2, où les axes x_1 et x_3 sont dans le plan tangent à la surface de la fissure, en son front). Les composantes du vecteur déplacement seront notées par u_1, u_2, u_3.

Etat de déformation plane

Pour un solide élastique linéaire isotrope, un état de déformation plane par rapport au plan $x_1 - x_2$ est caractérisé par des contraintes et des déplacements tels que les déformations e_{33}, e_{13}, e_{23} et les contraintes σ_{13}, σ_{23} sont nulles et les autres quantités dépendent seulement de x_1 et x_2. Les lois de comportement pour un matériau élastique linéaire

isotrope dans ce cas s'écrivent :

$$e_{11} = \frac{1-\nu^2}{E}(\sigma_{11} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{22}), e_{22} = \frac{1-\nu^2}{E}(\sigma_{22} - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{11}), e_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}, \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (1.1)$$

où μ, ν et E sont respectivement le module de cisaillement du matériau, son coefficient de Poisson et son module d'Young.

Etat de contrainte plane

Dans le cas de contraintes planes, les valeurs des contraintes σ_{33}, σ_{13}, σ_{23} et les déformations e_{13}, e_{23} sont nulles ; les contraintes et les déformations restantes sont indépendantes de x_3. Un état correspondant apparaît approximativement dans des plaques dont l'épaisseur est faible par rapport à leurs dimensions dans le plan et soumises à des chargements parallèles à la plaque. Pour un matériau élastique linéaire isotrope, les lois constitutives s'écrivent alors :

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \;\; e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \;\; e_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu}, \;\; Ee_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (1.2)$$

Etat de déformation antiplane

Dans cette situation, les champs non nulles sont u_3, e_{13}, e_{23}, σ_{13}, σ_{23} qui sont indépendants de x_3. Pour un matériau élastique linéaire isotrope, la loi de comportement est donnée par :

$$e_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\mu}, \qquad e_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \quad (1.3)$$

1.2.3 Analyse asymptotique des champs de contraintes et de déplacements

Dans cette section, on s'intéresse au comportement asymptotique des champs de contrainte et du déplacement, au voisinage du front d'une fissure. Ces champs sont d'abord donnés dans le cas (quasi-)statique puis dans le cas dynamique.

Analyse asymptotique en statique

On considère la déformation d'un corps élastique linéaire, homogène et isotrope, qui subit de petites déformations, on note λ et μ ses coefficients de Lamé, E son module d'Young et ν son coefficient de Poisson. On suppose qu'il contient une fissure droite libre de contrainte et on note l sa longueur. Dans le repère polaire (r, θ) d'origine la pointe de fissure (Figure 1.2), avec $\theta = 0$ dans la direction de la fissure, les termes dominants dans les contraintes et les déplacements asymptotiques, au voisinage de la pointe d'une fissure sont déterminés [69, 75] :

En mode I :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.4}$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.5}$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{1.6}$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), & \text{en déformations planes} \\ 0, & \text{en contraintes planes} \end{cases} \tag{1.7}$$

En mode II :

$$\sigma_{11} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right) \tag{1.8}$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \tag{1.9}$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \tag{1.10}$$

La contrainte σ_{33} a la même expression qu'en mode I (voir equation 1.7)
En mode III :

$$\sigma_{13} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.11}$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \tag{1.12}$$

Pour les champs de déplacement, on obtient :
En mode I :

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa - \cos\theta\right)\right) \tag{1.13}$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right) = \frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa - \cos\theta\right)\right) \tag{1.14}$$

En mode II :

$$u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa + 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{1.15}$$

$$u_2 = \frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa - 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{1.16}$$

En mode III :

$$u_3 = \frac{K_{III}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{1.17}$$

où la constante κ est définie selon le cas de contraintes ou déformations planes :

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu, & \text{en déformations planes} \\ (3-\nu)/(1+\nu), & \text{en contraintes planes} \end{cases} \tag{1.18}$$

Si le corps élastique a une géométrie simple, on peut déterminer des valeurs exactes ou approchées pour les facteurs d'intensité de contrainte statiques K_I , K_{II} et K_{III}. Dans le cas particulier du plan infini, qui contient une fissure centrée, de longueur l située sur l'axe x_1 et qui est soumis à une charge à l'infini, donnée par les contraintes de traction σ_{22}^{∞}, et de cisaillements σ_{12}^{∞} et σ_{23}^{∞}. La solution analytique de ce problème peut être obtenue, en utilisant les fonctions complexes [27]. Ensuite, les facteurs d'intensité sont déduits sous la forme :

$$K_I = \sqrt{\pi\frac{l}{2}}\sigma_{22}^{\infty}; \quad K_{II} = \sqrt{\pi\frac{l}{2}}\sigma_{12}^{\infty}; \quad K_{III} = \sqrt{\pi\frac{l}{2}}\sigma_{23}^{\infty} \tag{1.19}$$

Ainsi les facteurs d'intensité sont les seules quantités dans (1.13-1.17) qui dépendent de la longueur de la fissure et du chargement. A part ces coefficients, les expressions asymptotiques des champs mécaniques sont universelles. Un critère de propagation quasi-statique de fissure doit nécessairement être formulé avec ces coefficients.

Analyse asymptotique en dynamique

On considère l'évolution dynamique d'un solide élastique linéaire homogène contenant une fissure libre de contraintes. Les équations de mouvement pour ce problème s'écrivent :

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i} = \rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \tag{1.20}$$

où u_i représente le champs de déplacement et σ_{ij} le champs de contrainte. La loi de comportement élastique s'écrit :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{u}) \tag{1.21}$$

avec ρ la densité de masse et e_{kl} le tenseur de déformation linéarisée :

$$e_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}) \tag{1.22}$$

Les coefficients élastiques linéaires a_{ijkl} pour le solide homogène élastique linéaire isotrope ont pour expression :

$$a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.23}$$

Pour ce problème de rupture élasto-dynamique, Freund [57] donne une expression des champs de contraintes et de déplacements à la pointe de la fissure, qui dépendent de la

vitesse d'avancée du front v. En considérant le repère polaire $(r;\theta)$ d'origine la pointe de la fissure (Figure1.2) défini par la relation $re^{i\theta} = x_1 + ix_2$, on adopte, pour simplifier les expressions, les changements de variables polaires :

$$(r_d;\theta_d) \text{ tels que : } r_d e^{i\theta_d} = x_1 + i\alpha x_2$$

$$(r_s;\theta_s) \text{ tels que : } r_s e^{i\theta_s} = x_1 + i\alpha_s x_2$$

où α_d et α_s sont des paramètres donnés par les formules :

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_d^2}}, \qquad \alpha_s = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_s^2}} \tag{1.24}$$

avec c_d et c_s, respectivement, les célérités des ondes longitudinales et transversales dans le matériau :

$$c_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \tag{1.25}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.26}$$

Les expressions des champs de contraintes sont données pour chaque mode de rupture.

En mode I :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I^d}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{D}\left((1+\alpha_s^2)(1+2\alpha_d^2-\alpha_s^2)\frac{\cos\frac{\theta_d}{2}}{\sqrt{r_d}} - 4\alpha_s\alpha_d\frac{\cos\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{r_s}}\right)\right] \tag{1.27}$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I^d}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{D}\left((1+\alpha_s^2)^2\frac{\cos\frac{\theta_d}{2}}{\sqrt{r_d}} - 4\alpha_s\alpha_d\frac{\cos\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{r_s}}\right)\right] \tag{1.28}$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I^d}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\alpha_d(1+\alpha_s^2)}{D}\left(\frac{\sin\frac{\theta_d}{2}}{\sqrt{r_d}} - \frac{\sin\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{r_s}}\right)\right] \tag{1.29}$$

En mode II :

$$\sigma_{11} = \frac{K_{II}^d}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2\alpha_s}{D}\left((1+2\alpha_d^2-\alpha_s^2)\frac{\sin\frac{\theta_d}{2}}{\sqrt{r_d}} - (1+\alpha_s^2)\frac{\sin\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{r_s}}\right)\right] \tag{1.30}$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}^d}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\alpha_s(1+\alpha_s^2)}{D}\left(\frac{\sin\frac{\theta_d}{2}}{\sqrt{r_d}} - \frac{\sin\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{r_s}}\right)\right] \tag{1.31}$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}^d}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{D}\left(4\alpha_s\alpha_s\frac{\cos\frac{\theta_d}{2}}{\sqrt{r_d}} - (1+\alpha_s^2)\frac{\cos\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{r_s}}\right)\right] \tag{1.32}$$

En mode III :

$$\sigma_{13} = \frac{K_{III}^d}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{\sin\frac{\theta_s}{2}}{\alpha_s\sqrt{1-(\frac{v\sin\theta}{c_s})^2}} \right] \tag{1.33}$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}^d}{\sqrt{2\pi r}} \left[-\frac{\cos\frac{\theta_s}{2}}{\sqrt{1-(\frac{v\sin\theta}{c_s})^2}} \right] \tag{1.34}$$

Dans ces formules des contraintes, K_I^d, K_{II}^d, K_{III}^d représentent des facteurs d'intensité de contraintes dynamiques correspondant à chaque mode de rupture.

Avec les mêmes coordonnées polaires, les champs de déplacements s'écrivent :
En mode I :

$$u_1 = K_I^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\mu D}\left((1+\alpha_s^2)\sqrt{r_d}\cos\frac{\theta_d}{2} - 2\alpha_s\alpha_d\sqrt{r_s}\cos\frac{\theta_s}{2}\right)\right] \tag{1.35}$$

$$u_2 = K_I^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\mu D}\left(-\alpha_d(1+\alpha_s^2)\sqrt{r_d}\sin\frac{\theta_d}{2} + 2\alpha_d\sqrt{r_s}\sin\frac{\theta_s}{2}\right)\right] \tag{1.36}$$

En mode II :

$$u_1 = K_{II}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\mu D}\left(2\alpha_s^2\sqrt{r_d}\sin\frac{\theta_d}{2} - \alpha_s(\alpha_s^2+1)\sqrt{r_s}\sin\frac{\theta_s}{2}\right)\right] \tag{1.37}$$

$$u_2 = K_{II}^d\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1}{\mu D}\left(2\alpha_d\alpha_s\sqrt{r_d}\sin\frac{\theta_d}{2} - (\alpha_s^2+1)\sqrt{r_s}\cos\frac{\theta_s}{2}\right)\right] \tag{1.38}$$

En mode III :

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu\alpha_s}\sqrt{\frac{r_s}{2\pi}}\sin\frac{\theta_s}{2} \tag{1.39}$$

Le paramètre D dans ces expressions de champs de contraintes et de déplacements dépend de α_d et α_s :

$$D = 4\alpha_d\alpha_s - (1+\alpha_s^2)^2 \tag{1.40}$$

1.2.4 Facteur d'intensité de contraintes en dynamique

On montre [57] que les facteurs d'intensité de contraintes dynamiques K_p^d peuvent être exprimés en fonction des facteurs d'intensité de contraintes quasi-statiques K_p par la relation :

$$K_p^d = k_p(v)K_p \tag{1.41}$$

où $p = I, II, III$ correspondent respectivement aux trois modes de rupture.

La fonction de correction dynamique k_p décrit la différence entre les états quasi-statiques et dynamiques et prend en compte l'influence des effets dynamiques au niveau de la fissure. Freund a déterminé les fonctions k_p pour chaque mode de rupture [57].

Pour le mode I, on obtient une approximation de k_I sous la forme :

$$k_I(v) \approx \frac{1 - \frac{v}{c_R}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c_d}}} \tag{1.42}$$

où c_R est la vitesse des ondes de Rayleigh du matériau, pour laquelle on peut utiliser l'approximation :

$$c_R \approx \frac{0.862 + 1.14\nu}{1 + \nu} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}) \tag{1.43}$$

La fonction $k_I(v)$ dépend des propriétés du matériau à travers les vitesses des ondes élastiques, mais indépendante du chargement et la géométrie du domaine. En ce sens, c'est donc une fonction universelle de la vitesse de la fissure. Ses caractéristiques générales sont simples à déduire à partir de sa formule approchée. En particulier, elle prend la valeur 1 lorsque la vitesse de la fissure v tend vers une vitesse nulle ($v = 0$) ce qui correspond à une fissure stationnaire soumise au même chargement, et devient nulle quand v tend vers c_R (($v/c_R = 1$). Comme on verra plus tard, cette dernière condition traduit le fait que la vitesse de la fissure ne peut pas dépasser la vitesse c_R. Entre ces deux valeurs elle est strictement décroissante (Figure 1.3).

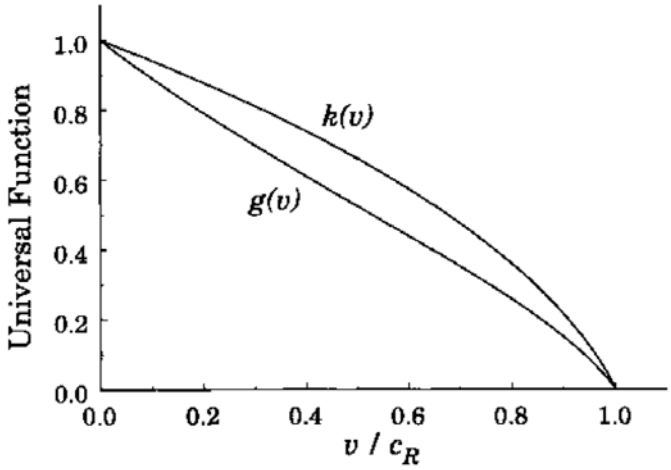

FIGURE 1.3 – Courbe des fonctions universelles $k(v)$ et $g(v)$ en fonction de v/c_R en mode I [57].

Pour la sollicitation en mode II, on trouve une approximation de la fonction k_{II} similaire à celle en mode I et qui s'écrit sous la forme suivante :

$$k_{II}(v) \approx \frac{1 - \frac{v}{c_R}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c_s}}} \tag{1.44}$$

avec la vitesse des ondes de cisaillement c_s. La fonction k_{II} prend la valeur 1 quand la vitesse v est nulle et devient nulle lorsque la fissure se propage à la vitesse c_R. Entre ces deux valeur de v elle est décroissante.

En mode antiplan la fonction k_{III} est donnée par la relation :

$$k_{III}(v) = \sqrt{1 - \frac{v}{c_s}} \tag{1.45}$$

C'est une fonction décroissante de v sur l'intervalle $[0, c_s]$, prenant respectivement les valeurs 1 et 0 à ses extrémités.

1.2.5 Taux de restitution d'énergie dynamique

Pour la description de la rupture, le bilan de l'énergie constitue un moyen puissant d'approcher le problème. Soient Ω un domaine contenant une fissure qui se propage et $\partial\Omega$ sa surface extérieure. Le bilan énergétique de ce problème s'écrit [63, 57, 118] :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(U+T)da + v\mathcal{G}^d = \int_{\partial\Omega}\sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial t}ds \tag{1.46}$$

où $\mathcal{G}^d$ est le taux de restitution d'énergie dynamique, représentant l'énergie disponible pour l'avancement de la fissure par une unité de longueur. Ce bilan est fait lors d'un avancement hypothétique de la fissure, en estimant l'énergie qui serait dissipée à la pointe. Son expression est obtenue :

$$\mathcal{G}^d = \lim_{\Gamma\to 0}\frac{1}{v}\int_{\Gamma}\left((U+T)vn_1 + \sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)d\Gamma \tag{1.47}$$

où Γ est un contour circulaire fermé autour de la pointe de fissure, et en mouvement avec elle, avec n_j sa normale unitaire extérieure, comme représenté sur la Figure 1.4. La limite signifie que le contour Γ est rétréci sur la pointe de la fissure. U est l'énergie élastique et T l'énergie cinétique dont les expressions sont respectivement :

$$U = \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} \tag{1.48}$$

$$T = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{1.49}$$

où u_i, σ_{ij}, e_{ij} sont respectivement les champs de déplacement, de contrainte et de déformation.

On peut également exprimer [57, 118, 129] le taux de restitution d'énergie dynamique en fonction de facteurs d'intensité des contraintes pour les trois modes de rupture :

$$\mathcal{G}^d = \frac{1}{E'}[A_I(v)(K_I^d)^2 + A_{II}(v)(K_{II}^d)^2] + \frac{1+\nu}{E}A_{III}(v)(K_{III}^d)^2 \tag{1.50}$$

avec E'=E en contraintes planes et E'=$\frac{E}{1-\nu^2}$ en déformations planes.

Les fonctions A_I, A_{II} et A_{III} sont des fonctions universelles, en ce sens qu'elles ne dépendent pas des détails du chargement appliqué ou de la configuration du domaine

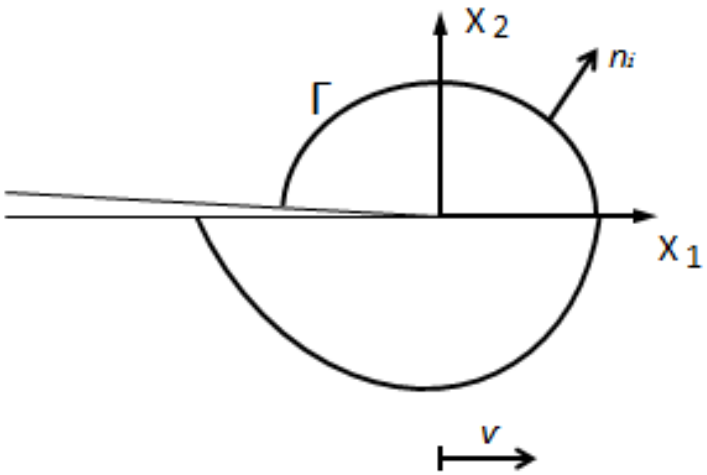

FIGURE 1.4 – Contour fermé Γ autour de la pointe de la fissure se déplaçant avec une vitesse v.

occupé du solide. Elles dépendent de la vitesse de la fissure et des propriétés du matériau et sont définies par les formules ci-après :

$$A_I = \frac{v^2 \alpha_d}{(1-\nu)c_s^2 D}, \qquad A_{II} = \frac{v^2 \alpha_s}{(1-\nu)c_s^2 D}, \qquad A_{III} = \frac{1}{\alpha_s} \tag{1.51}$$

Chacune de ces fonctions a les propriétés telles que : $A_p \to 1$ si $v \to 0^+$, $\frac{dA_p}{dv} \to 0$ si $v \to 0^+$. Ainsi on retrouve le taux de restitution d'énergie en quasi-statique déterminé par Irwin [69] à partir de l'équation (1.50) avec la condition $v \to 0^+$.

A partir de l'équation (1.50), on peut réécrire le taux de restitution d'énergie dynamique en fonction du taux de restitution quasi-statique pour les trois modes de rupture. En notant respectivement par $\mathcal{G}_I$, $\mathcal{G}_{II}$, $\mathcal{G}_{III}$ les taux de restitution quasi-statiques en mode I, II, III, calculés en quasi-statique à partir d'une formule similaire à (2.39) mais sans l'énergie cinétique U, on montre [57, 118, 129] que :

$$\mathcal{G}^d = g_I(v)\mathcal{G}_I + g_{II}(v)\mathcal{G}_{II} + g_{III}(v)\mathcal{G}_{III} \tag{1.52}$$

où $g_I(v)$, $g_{II}(v)$, $g_{III}(v)$ sont des fonctions universelles de la vitesse v ayant pour expressions :

$$g_I(v) = k_I^2(v)A_I(v), \qquad g_{II}(v) = k_{II}^2(v)A_{II}(v), \qquad g_{III}(v) = k_{III}^2(v)A_{III}(v) \tag{1.53}$$

et les taux de restitutions quasi-statiques sont exprimés en fonction des facteurs d'intensités de contraintes quasi-statiques par les relations :

$$\mathcal{G}_I = \frac{1}{E'}K_I^2 \tag{1.54}$$

$$\mathcal{G}_{II} = \frac{1}{E'}K_{II}^2 \tag{1.55}$$

$$\mathcal{G}_{III} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \tag{1.56}$$

Les fonctions $g_p(v)$ sont aussi des fonctions universelles de la vitesse de la fissure. Elles sont des fonctions décroissantes de v/c_R et prennent la valeur 1 pour $v/c_R \to 0$. Dans le cas de propagation de fissures en mode I, la fonction est représentée dans la Figure 1.3 et une approximation de la forme $g_I \approx 1 - v/c_R$ est souvent utilisée [57]. De la même manière une approximation de g_{II} sera déterminée et utilisée dans cette thèse dans le cas de propagation de fissures en mode II.

1.2.6 Critères de rupture

Plusieurs critères de propagation ont été formulés en Mécanique de la Rupture. Parmi les plus importantes, on retrouve le critère énergétique, formulé en taux de restitution d'énergie, et celui en coefficients d'intensité des contraintes.

Critère en facteur d'intensité de contrainte

C'est un des plus anciens critères de la rupture fragile. Comme les contraintes sont singulières à la pointe d'une fissure, on ne peut pas formuler un critère en contraintes. On les remplace donc par les facteurs d'intensité associés, qui dépendent du chargement appliqué.

Le critère fait intervenir une valeur seuil du facteur d'intensité de contrainte K_c, appelée ténacité, qui est une propriété caractéristique du matériau, indépendante du chargement ou de la géométrie du solide. Elle est déterminée expérimentalement.

Selon ce critère, la fissure ne se propage pas pour des valeurs $K < K_c$, mais seulement quand le facteur d'intensité atteint la valeur seuil du matériau constituant $K = K_c$. De tels critères peuvent être formulés pour les différents modes de rupture, avec des ténacités spécifiques.

Critère en taux de restitution d'énergie dynamique

Le critère en taux de restitution d'énergie dynamique est un critère introduit initialement par Griffith [63] dans les années 1920 et qui compare l'énergie disponible pour la rupture avec celle nécessaire pour rompre les liens de la matière. Comme le critère en facteur d'intensité, il fait intervenir une valeur seuil représentant énergie critique de rupture $\mathcal{G}_\mathcal{C}$, caractéristique au matériau constituant. Ainsi une fissure se propage dès que l'énergie dépensée à la pointe devient suffisamment grande pour compenser le coût nécessaire de séparation de la matière.

La propagation de la fissure se produit quand le seuil critique d'énergie $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ est atteint par le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}^d$, tandis qu'il n'y a pas de propagation pour $\mathcal{G}^d < \mathcal{G}_\mathcal{C}$. Pour une fissure de longueur $l(t)$, le critère se traduit par les relations suivantes :

$$\mathcal{G}^d \leq \mathcal{G}_\mathcal{C}, \qquad \frac{dl}{dt} \geq 0, \qquad \frac{dl}{dt}(\mathcal{G}^d - \mathcal{G}_\mathcal{C}) = 0 \tag{1.57}$$

où $\mathcal{G}_\mathcal{C}$ est l'énergie critique de rupture du matériau.

1.3 Endommagement dynamique

Dans cette section, on présente des éléments de la théorie d'endommagement et on donne quelques exemples de modèles d'endommagement dynamique qu'on retrouve souvent dans la littérature de spécialité.

1.3.1 Définition de l'endommagement

L'endommagement représente une détérioration progressive de la matière qui se produit juste avant que la rupture macroscopique ne soit observée dans le matériau. Il traduit la présence des défauts (fissures, cavités...) à une échelle inférieure à celle de la structure étudiée. Dans la Figure 1.5, un exemple de vue 2D d'un élément microscopique endommagé est donnée. Si on note par S l'aire totale de la coupe et par S_d l'aire des défauts alors l'endommgement peut étre défini comme $d = \frac{S_d}{S}$.

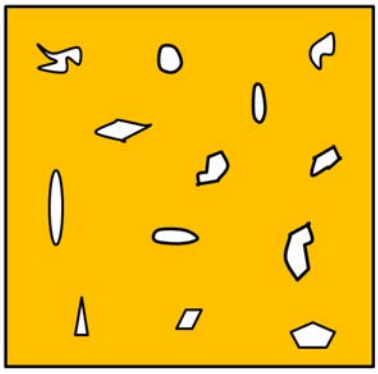

FIGURE 1.5 – Coupe 2D d'un élément endommagé

La théorie de l'endommagement, introduite dans les année 50 par Kachanov et Rabotnov [74, 115], permet la représentation de l'état de dégradation distribuée par l'intermédiaire d'une variable interne dont l'évolution en temps est à associer avec la propagation des défauts microscopiques dans la structure étudiée. Un matériau est souvent appelé sain s'il ne contient pas de fissures ni de cavités à l'échelle microscopique.

Dans notre étude une telle variable d est considérée et définie sur l'ensemble du domaine occupé par le matériau. L'endommagement d prend ses valeurs dans l'intervalle [0,1], avec d= 0 pour un état sain (sans défauts) du matériau et d= 1 pour sa dégradation totale, ce qui à l'échelle de la structure correspond à l'apparition de macro-fissures.

1.3.2 Concept de contrainte effective

Pour un matériau endommagé on peut introduire la notion de contrainte effective [115]. Pour l'élément représenté dans la Figure 1.5, la contrainte habituelle est définie comme le rapport entre l'effort appliqué F et la surface de l'élément S : $\sigma = \frac{F}{S}$. En présence des défauts, la surface résistant effectivement à l'effort est la surface saine (effective) $S - S_d$

et la contrainte effective est définie de la manière suivante :

$$\sigma_{eff} = \frac{F}{S - S_d} = \frac{F}{S(1 - \frac{S_d}{S})} \tag{1.58}$$

Le rapport $\frac{S_d}{S}$ représente la variable d'endommagement d. et la contrainte effective peut être reliée à la contrainte habituelle par :

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma}{1 - d} \tag{1.59}$$

Comme pour la contrainte effective on peut écrire la loi de comportement du matériau sain, cette dernière relation nous fournit la relation correspondante pour le matériau endommagé. Il s'agit du principe d'équivalence en déformation [83]. En version unidimensionnelle, pour E le module d'Young du matériau sain, on obtient la loi élastique avec endommagement :

$$\sigma = (1 - d)E\varepsilon \tag{1.60}$$

où $E(1 - d)$ représente le module élastique détérioré, correspondant au matériau endommagé. Quand l'endommagement se développe, le matériau offre de moins en moins de résistance, ce qui se traduit par une diminution de ses modules élastiques.

La variation en temps de la variable d doit être introduite dans le modèle par une loi d'évolution de l'endommagement. Dans ce qui suit, nous présentons quelques exemples de loi d'endommagement souvent utilisés dans la littérature.

1.3.3 Quelques lois d'évolution de l'endommagement

Pour simuler la détérioration des matériaux fragiles ou ductiles des modèles spécifiques d'endommagement ont été développés. Les exemples choisis dans cette section illustreront la manière dont le problème mathématique concernant la variable d'endommagement peut être formulé.

Modèle de Dubé, Pijaudier-Cabot et La Borderie

Le modèle présenté dans cette section est proposé par Dubé et al. [43], [42]. Il s'agit d'un modèle d'endommagement visqueux. Pour obtenir ce modèle, les auteurs utilisent la relation constitutive contraintes-déformations avec endommagement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu_0}{E_0(1 - d)}\sigma_{ij} - \frac{\nu_0}{E_0(1 - d)}[\sigma_{kk}\delta_{ij}] \tag{1.61}$$

où E_0, ν_0 sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau isotrope.

Dans le cas général, la densité d'énergie élastique est :

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1 - d)\varepsilon_{ij}C^0_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{ou} \quad \rho\chi = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{ij}D^0_{ijkl}\sigma_{kl}}{1 - d} \tag{1.62}$$

où C^0 désigne le tenseur des rigidités du matériau non endommagé, D^0 son inverse, ρ la densité de masse et $\rho\chi$ l'énergie libre de Gibbs. Si on considère cette dernière comme potentiel thermodynamique, alors le taux de restitution d'énergie d'endommagement Y et le tenseur des déformations ε_{ij} sont obtenues par :

$$Y = \rho\frac{\partial\chi}{\partial d} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{ij}D^0_{ijkl}\sigma_{kl}}{(1-d)^2} \tag{1.63}$$

$$\varepsilon_{ij} = \rho\frac{\partial\chi}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{D^0_{ijkl}\sigma_{kl}}{(1-d)} \tag{1.64}$$

L'évolution de l'endommagement nécessite l'introduction d'une fonction seuil :

$$f(Y,Z) = Y - Y_0 - Z \tag{1.65}$$

où Y_0 est un paramètre qui définit le seuil d'endommagement et Z est une force d'écrouissage.

La loi d'endommagement proposée est inspirée du modèle viscoplastique de Perzyna et prend la forme :

$$\dot{d} = \frac{1}{m}\left(\frac{\langle f(Y,Z)\rangle_+}{Y_0}\right)^n \tag{1.66}$$

où m et n sont des paramètres positifs à identifier en ajustant la réponse du modèle aux données expérimentales correspondant à plusieurs vitesses de chargement.

Une expression modifiée de la loi précédente a été proposée par Gatuingt [58] sous la forme :

$$\dot{d} = \left(\frac{\langle F_d(\bar{\varepsilon}^e)\rangle_+}{m_d}\right)^{n_d} \tag{1.67}$$

où $F_d(\bar{\varepsilon}^e)$ représente la fonction seuil d'endommagement et m_d et n_d sont des paramètres matériaux.

La fonction seuil dépend de la déformation élastique équivalente $\bar{\varepsilon}^e$ calculée avec les déformations principales positives $\langle\varepsilon_i\rangle_+$:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\Sigma\langle\varepsilon_i\rangle_+^2} \tag{1.68}$$

L'expression de la fonction seuil est :

$$F_d(\bar{\varepsilon}^e) = \bar{\varepsilon}^e - \varepsilon_{d0} - \frac{1}{a}\left(\frac{d}{1-d}\right)^{(1/b)} \tag{1.69}$$

où ε_{d0} est le seuil d'initiation de l'endommagement, a et b sont des paramètres matériaux.

Pour distinguer entre le comportement en traction et en compression, la variable d peut être écrite comme une combinaison des endommagements de compression d_c et de traction d_t par $d = \alpha_c d_c + \alpha_t d_t$. Les paramètres α_c et α_t s'annulent, respectivement, en compression et en traction avec $\alpha_c + \alpha_t = 1$. Dans ce cas, d_c et d_t vérifient des lois d'évolution (1.67-1.69) avec des jeux de paramètres distincts.

Modèle à effet retard d'Allix et Deü

Le modèle proposé par Allix et Deü [3, 41, 81, 4] est un modèle d'endommagement visqueux appliqué aux matériaux composites sous chargements dynamiques. Nous présentons ici la version unidimensionnelle du modèle. Le modèle est défini par son énergie de déformation E_D et permet de faire la distinction entre traction (microfissures ouvertes) et compression (microfissures fermées) :

$$\sigma = E(1-d)\langle\varepsilon\rangle_+ + E\langle-\varepsilon\rangle_+ \tag{1.70}$$

$$E_D = \frac{1}{2}\left[\frac{\langle\sigma\rangle_+^2}{E(1-d)} + \frac{\langle-\sigma\rangle_+^2}{E}\right] \tag{1.71}$$

$$Y = \frac{\langle\sigma\rangle_+^2}{2E(1-d)^2} = \frac{E\langle\varepsilon\rangle_+^2}{2} \tag{1.72}$$

où $\langle.\rangle_+$ est la partie positive, Y est le taux de restitution d'énergie d'endommagement - la force motrice responsable de l'évolution de d.

La loi d'évolution d'endommagement est donnée par la relation :

$$\begin{cases} \dot{d} = \frac{1}{\tau_c}(1-\exp(-a\langle f(Y)-d\rangle_+)), & \text{si d<1} \\ d = 1, & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.73}$$

où la fonction f(Y) est déterminée par :

$$f(Y) = \frac{\sqrt{Y}-\sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_c}-\sqrt{Y_0}} \tag{1.74}$$

avec a, Y_c et Y_0 sont des paramètres du modèle et τ_c est un temps caractéristique entraînant un effet retard dans l'évolution de l'endommagement. Le taux d'endommagement est limité par $1/\tau_c$.

Des études concernant l'analyse de localisation et des extensions du modèle sont présentées dans les travaux de Allix et al. [4], Suffis et al. [132, 131].

Modèle de Johnson-Cook

Le modèle de rupture proposé par Johnson et Cook [71, 72] est un modèle d'endommagement ductile. Il est souvent utilisé pour décrire la rupture dynamique des structures métalliques sous impact.

L'équation suivante décrit l'évolution de la variable d'endommagement d :

$$\dot{d} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\varepsilon_f} \tag{1.75}$$

où $\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$ est la vitesse de déformation plastique équivalente et ϵ_f la valeur de la déformation plastique de rupture dont l'expression est proposée par Johnson et Cook [71] :

$$\varepsilon_f = (D_1 + D_2\exp(D_3\sigma^*))\left(1 + D_4\ln(\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0})\right)\left(1 - D_5\frac{T-T_a}{T_f-T_a}\right) \tag{1.76}$$

avec D_1 à D_5 sont les constantes de matériau, T_a la température ambiante et T_f la température de fusion du matériau, $\dot{\bar{\varepsilon}}_0$ la vitesse de déformation de référence, σ^* la triaxialité des contraintes $\sigma^* = \frac{p}{\sigma_{eq}}$, où σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises et p la pression hydrostatique.

Une extension du modèle a été proposée par Børvik et al. [23, 24]. La variable d'endommagement d varie théoriquement entre 0 et 1, avec $d = 1$ pour un matériau complètement rompu. En général, la rupture apparaît pour une valeur critique d'endommagement $d_c \leq 1$ et le critère de rupture s'écrit alors :

$$d = d_c \leq 1 \tag{1.77}$$

L'évolution de la variable d'endommagement est reliée aux déformations plastiques. L'expérience montre, de plus, que l'endommagement reste nul au début de la déformation plastique. Il existe donc une valeur limite de la déformation plastique ε_d au delà de laquelle l'endommagement est initié. La loi d'évolution d'endommagement est alors écrite par :

$$\dot{d} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} < \varepsilon_d \\ \frac{d_c}{\varepsilon_f - \varepsilon_d} \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl} & \text{si } \bar{\varepsilon}^{pl} \geq \varepsilon_d \end{cases} \tag{1.78}$$

où ε_d est la déformation plastique seuil d'endommagement et ε_f est une déformation de rupture qui dépend de la triaxialité des contraintes, de la vitesse de déformation et de la température. L'expression de la valeur de la déformation plastique de rupture est une variante de celle donnée dans Johnson et Cook [71] :

$$\varepsilon_f = (D_1 + D_2 \exp D_3(\sigma^*)) \left(1 + \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}}{\dot{\bar{\varepsilon}}_0}\right)^{D_4} \left(1 - D_5 \frac{T - T_a}{T_f - T_a}\right) \tag{1.79}$$

où D_1 à D_5 sont des paramètres matériau à déterminer expérimentalement.

1.4 Changement d'échelles

Les matériaux réels présentent une microstructure hétérogène, contenant des inclusions, joints de grains, dislocations, pores, micro-fissures etc. Dans une démarche de modélisation, il est impossible de prendre en compte toutes ces hétérogénéités. La description de ces derniers n'est possible qu'en « moyenne », en construisant un milieu continu équivalent à l'échelle macroscopique. Ce processus est appelé homogénéisation.

L'étude de l'endommagement dans ces matériaux, peut donc être faite soit par des modélisations phénoménologiques, formulées directement à l'échelle macroscopique, soit par une méthode d'homogénéisation en partant d'une description microscopique et en obtenant le modèle macroscopique comme conséquence du processus de changement d'échelles.

Pour des milieux élastiques contenant plusieurs phases, des techniques d'homogénéisation conduisant à des descriptions du comportement effectif ont été développées, à partir des travaux initiaux de Eshelby [47], Mori et Tanaka [101], Hill [67, 68], Hashin [65]. Une présentation détaillée des méthodes de changement d'échelle est donnée dans le livre de Nemat-Nasser et Hori [102].

La méthode d'homogénéisation asymptotique, décrite dans les travaux de Bensoussan et al. [16], Sanchez-Palencia [126], Bakhvalov et Panasenko [10], est adoptée dans cette thèse pour l'obtention du comportement effectif elasto-endommageable en dynamique. Cette méthode utilise des développements asymptotiques des champs mécaniques par rapport à un paramètre de taille de microstructure microscopique, permet l'obtention des modules effectifs et des équations macroscopiques du modèle. Quelques éléments de base de la méthode seront données dans la section qui suit.

1.5 Homogénéisation asymptotique de structures localement périodiques

La méthode d'homogénéisation asymptotique appliquée aux microstructures périodiques utilise le développement asymptotique des grandeurs physiques par rapport à la taille d'une cellule de périodicité. Elle peut être appliquée de manière similaire aux milieux localement périodiques avec des cellules de périodicité de même taille mais contenant des hétérogénéités (dans notre cas des microfissures) dont la longueur varie lentement à l'échelle macroscopique. Ainsi, localement, la structure peut être considérée périodique. Une telle situation est représentée dans la Figure 1.6.

Soit la taille d'une période microscopique ε, qui est petite par rapport aux dimensions de la structure. Pour représenter les variations des champs mécaniques à l'échelle macroscopique et microscopique, on introduit deux variables d'espace notées, respectivement, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$. Pour des raisons de simplification, on se restreint ici au cas unidimensionnel. La variable $\mathbf{x}$ est la variable macroscopique ou lente tandis que $\mathbf{y}$ représente la variable microscopique ou rapide. La variable rapide $\mathbf{y}$ décrit les interactions à courte distance, alors que la variable lente $\mathbf{x}$ décrit les interactions à longue distance.

Pour un milieu fissuré localement périodique de longueur de micro-fissures l, la transformation $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ conduit à une cellule unitaire (Figure 1.7) avec une fissure de taille normalisée $d = \frac{l}{\varepsilon}$. On considère chaque grandeur physique $\mathbf{\Phi}$ comme fonction de ces deux

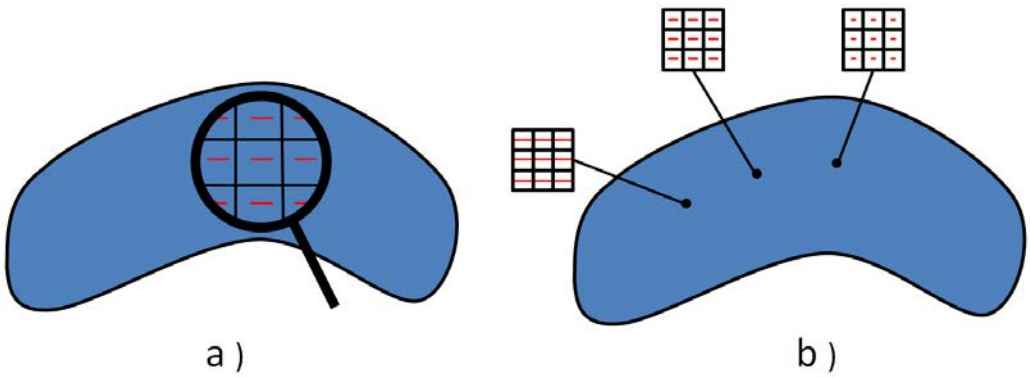

FIGURE 1.6 – Milieu fissuré localement périodique : a) microstructure avec de fissures, b) cellules de même taille avec des fissures de longueurs différentes.

variables :

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \tag{1.80}$$

En tenant compte du lien entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ on obtient la règle de dérivation :

$$\frac{d\mathbf{\Phi}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial y} \tag{1.81}$$

Pour les champs mécaniques on adopte des développements asymptotiques en puissances de ε. Ainsi, pour les déplacements et les contraintes :

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon^1 \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + ... \tag{1.82}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + ... \tag{1.83}$$

où $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ et $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ sont les fonctions périodiques en variable microscopique $\mathbf{y}$ dans la cellule unitaire.

En remplaçant le développement de (1.82-1.83) dans les équations du problème initial, formulé pour le solide microfissuré, on obtient pour les différentes puissances de ε une suite de problèmes aux limites, pour les termes de différents ordres en ε, à résoudre sur la cellule unitaire. A partir de ces solutions on introduit naturellement les champs macroscopiques et on déduit les équations qu'ils vérifient. On obtient ainsi la description macroscopique équivalente : équations de bilan, les lois de comportement et les coefficients effectifs.

Une application spécifique de la méthode d'homogénéisation décrite ci-dessus sera présentée dans les chapitres qui suivent pour l'obtention des lois d'évolution d'endommagement à partir des critères microscopiques de rupture dynamique. Une telle loi d'évolution pour la variable d complétera le problème d'élasticité couplée à l'endommagement à l'échelle macroscopique. Cette méthode de construction des lois d'endommagement à partir des critères microscopiques de rupture a été introduite dans Dascalu et al. [34, 37, 78, 39].

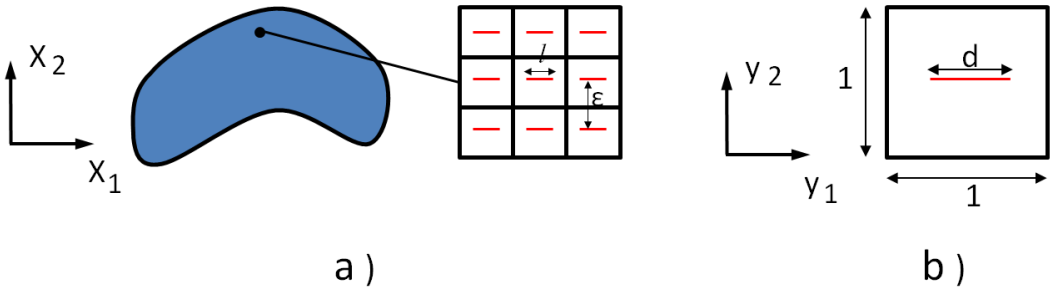

FIGURE 1.7 – a) Domaine fissuré localement périodique : ε est la taille de la période et l la longueur de micro-fissure b) Cellule unitaire avec une fissure de taille normalisée d=l/ε.

1.6 Effets d'échelle et de la vitesse de déformation

Dans le but de construire des modèles décrivant correctement le comportement ultime des structures, toute analyse de conception qui se fait à l'échelle globale de la structure doit intégrer les changements qui se produisent à des échelles plus fines dans le matériau. Dans le cas des matériaux quasi-fragiles, par exemple le béton, une longueur caractéristique définissant la taille de la zone d'élaboration de l'endommagement existe et l'interaction entre cette longueur et celle de la structure donne les effets d'échelles.

La littérature est très riche en études traitant les effets d'échelles dans quasiment tous les domaines de la mécanique, comme par exemple les travaux de Rios et Riera [124] sur les effets d'échelle sur la résistance à la fragmentation du béton armé, ceux de Carpinteri et Paggi [28] concernant les effets d'échelle sur les coefficients de frottement ou ceux de Bazant [12, 13] et Carpinteri [29, 30] sur les effets d'échelle sur la résistance des matériaux quasi-fragiles.

Un autre problème important est celui de l'effet de la vitesse de déformation sur la résistance. La résistance augmente avec la vitesse de déformation. Dans la Figure 1.8a, sont représentés les données expérimentales des tests d'écaillage [46] concernant la dépendance de la résistance de la vitesse de déformation pour deux types de bétons : R30A7 dont la taille maximale des agrégats est de 8 mm et MB50 à taille maximale des agrégats de 2 mm. En plus de l'augmentation de la résistance avec la vitesse de déformation, on observe une influence claire de la microstructure. Par exemple, pour les échantillons secs on remarque un croisement des courbes moyennes de résistance vers une vitesse de déformation de 70 /s.

La Figure 1.8b, présente les courbes de résistance en traction en fonction de la vitesse de déformation obtenues lors des tests d'écaillage avec l'outil GEPI [148] pour deux céramiques : des nuances de carbure de silicium obtenues par des procédés de fabrication différents. La nuance PS-S a une microstructure fine, avec une taille des grains de $4 - 10\,\mu m$. La SPS-S a des grains allongés dont la taille maximale peut aller jusqu'à $100\,\mu m$. Comme pour les bétons, on remarque l'augmentation de la résistance avec la vitesse de déformation en même temps que l'influence de la microstructure.

Dans les résultats présentés dans les chapitres suivants, un paramètre de taille de microstructure sera présent dans les modèles d'endommagement qui seront construits

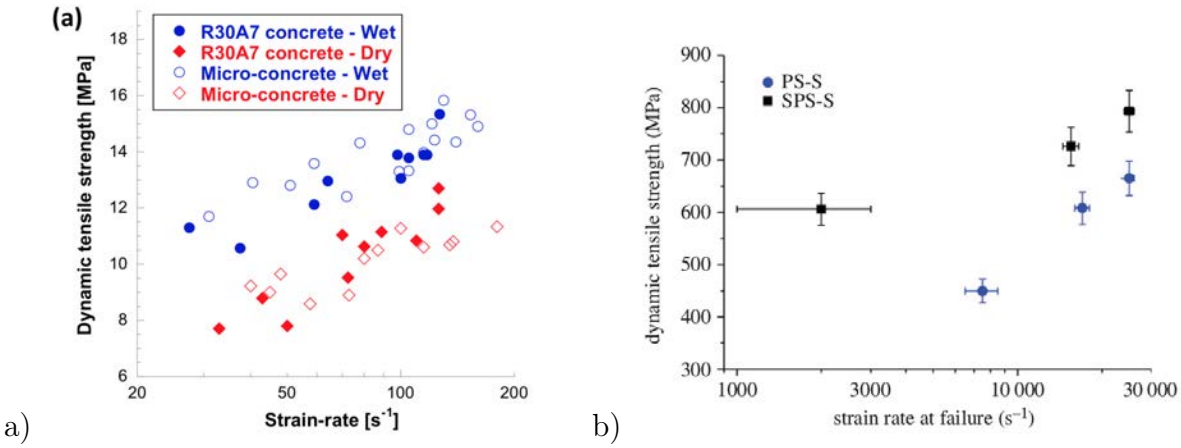

FIGURE 1.8 – Résistance dynamique en traction vs. vitesse de déformation pour : a) deux bétons à tailles de microstructure différente [46], b) deux nuances de carbure de silicium à microstructures différentes [148].

et on étudiera son influence sur la résistance prédite en comparaison avec les données expérimentales.

1.7 Instabilités de micro-branchement

Des études sur de nombreux matériaux fragiles montrent qu'au-delà d'une certaine vitesse critique, le front de fissure donne naissance à une succession de fissures secondaires appelées microbranches [53, 54, 127, 128]. Ces fissures secondaires sont éphémères ; elles s'arrêtent rapidement et restent confinées autour de la fissure principale. Leur apparition a lieu au delà d'une vitesse critique v_c de la fissure principale [116, 117, 127, 128].

Pour les polymères fragiles de type PMMA, cette vitesse v_c est de l'ordre de 340 m/s. Dans la Figure 1.9 on montre les oscillations de la vitesse de la fissure principale correspondantes à la formation successive des micro-branches. Quand une telle fissure secondaire est formée, l'énergie disponible pour la propagation de la fissure principale diminue, et aussi sa vitesse, tandis qu'après l'arrêt de la fissure secondaire il reste plus d'énergie pour la fissure principale ce qui se traduit par une augmentation de sa vitesse.

Les oscillations augmente en amplitude avec le temps et ceci correspond à la formation de branches de taille plus grande. Ainsi on observe un effet de saturation pour la vitesse (cf. Figure 1.9) qui reste significativement plus petite que la vitesse des ondes de Rayleigh C_R, représentant la limite prédite par la Mécanique de la rupture [57, 118]. Ainsi le phénomène de branchement a pour conséquence de limiter la vitesse de propagation des fissures dans les matériaux fragiles du fait de l'énergie consommée pour développer de nouvelles branches. De nombreuses expériences réalisées sur différents matériaux suggèrent une valeur de vitesse seuil égale à environ $0.4C_R$.

Nous allons montrer dans le Chapitre 2 que le modèle d'endommagement construit par homogénéisation est capable de prédire l'instabilité de micro-branchement et ses effets sur la vitesse de propagation de la macrofissure.

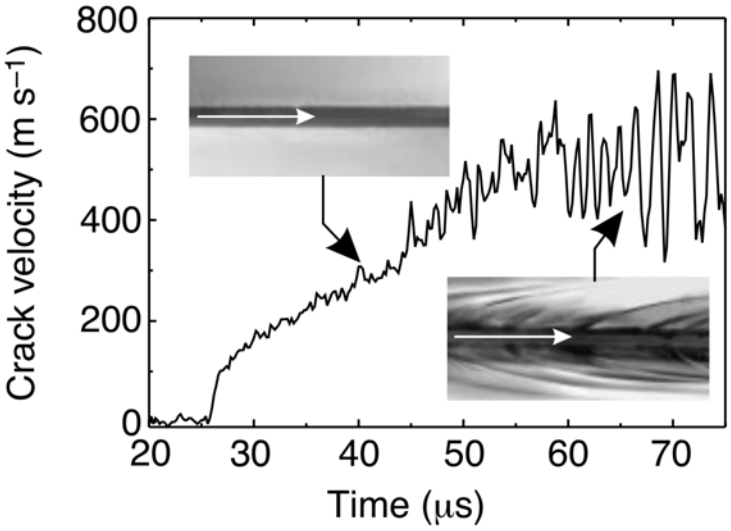

FIGURE 1.9 – Instabilités de micro-branchement dans le PMMA : oscillations de la vitesse de fissure à partir d'une vitesse critique d'environ 340 m/s et la formation des micro-branches associée [128].

Chapitre 2

Modèle double-échelle d'endommagement dynamique en mode anti-plan

Sommaire

2.1 Introduction **39**
2.2 Comportement effectif des solides micro-fissurés **40**
2.2.1 Equations de l'élasto-dynamique 40
2.2.2 Analyse d'homogénéisation asymptotique 41
2.3 Lois d'endommagement homogénéisées **47**
2.3.1 Evolution quasi-statique 47
2.3.2 Evolution dynamique 50
2.4 La réponse locale du modèle **52**
2.4.1 Influence de la longueur microscopique ε 52
2.4.2 Influence de la vitesse de chargement 53
2.4.3 Influence de l'endommagement initial 56
2.5 Simulation d'endommagement dynamique **56**
2.5.1 Problème de rupture et aspects de simulation numérique 56
2.5.2 Indépendance de maillage 57
2.5.3 Instabilités de branchement en rupture dynamique 59
2.6 Conclusions **65**

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle loi d'endommagement dynamique dans le cas du chargement anti-plan, obtenue par une méthode de changement d'échelle. Les réponses locales et globales du nouveau modèle seront analysées, ainsi que l'influence de la vitesse de déformation et de la taille de microstructure. Nous étudierons également la capacité du modèle à prédire l'émergence d'instabilités de micro-branchement pour la

rupture dynamique des échantillons de PMMA. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans [5].

Certains travaux expérimentaux sur la rupture dynamique des matériaux amorphes fragiles ont rapporté l'existence d'une vitesse critique de pointe de fissure, inférieure à la vitesse limite théorique, au-dessus de laquelle l'énergie dissipée pour la fracture augmente de façon spectaculaire [116, 117]. Sharon et al. [127, 128] ont attribué cela à l'émergence de branches microscopiques répétitives le long de la fissure principale. La conséquence de la formation d'un tel système multi-fissures est la fluctuation de la vitesse principale de la pointe de fissure sur une échelle de temps caractéristique d'une durée de vie des micro-branches. La modélisation numérique des instabilités de branchement a été abordée en utilisant les éléments cohésifs [145, 100, 147, 146], des méthodes sans maillage [114], les modèles de champs de phase [66, 130], l'approche de discontinuité forte à plusieurs niveaux [90] et des modèles d'endommagement non locaux [147].

Dans le cas anti-plan, seules quelques études théoriques ont été réalisées. Karma et Lobkovsky ont utilisé un modèle de champ de phase pour simuler la rupture dynamique du mode III des matériaux fragiles [76, 77]. Ils ont trouvé une vitesse critique pour la formation des branches d'environ $v_c = 0.41c$, où c est la vitesse d'onde de cisaillement. Ce résultat est en accord avec celui obtenu dans [2], où une analyse de bifurcation pour les fissures dynamiques en mode III a conduit à un seuil $v_c = 0.39c$ pour les instabilités de branchement.

Dans ce chapitre, nous montrerons que les caractéristiques générales observées dans les expériences peuvent être prédites par le modèle d'endommagement dynamique en mode III pour des échantillons de PMMA et que la transition entre une seule fissure et le système fissure principale plus micro-branches se fait à une vitesse critique en accord avec celle obtenue dans [2].

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, le comportement effectif des solides avec des micro-fissures sous chargement anti-plan est obtenu en utilisant la méthode d'homogénéisation asymptotique. Ensuite, dans la section 3, une approche énergétique combinée à la procédure d'homogénéisation est utilisée pour obtenir la loi d'endommagement dynamique. La réponse macroscopique locale du modèle sera analysée dans la section 4 en mettant l'accent sur les effets de vitesse de déformation et de taille de la microstructure. Enfin, les résultats des simulations de rupture dynamique macroscopique, les instabilités de branchements dans les échantillons de PMMA et la comparaison avec les résultats théoriques et expérimentaux disponibles sont présentés dans la dernière section du chapitre.

2.2 Comportement effectif des solides micro-fissurés

2.2.1 Equations de l'élasto-dynamique

Considérons l'évolution dynamique du solide élastique contenant une distribution de micro-fissures, supposées périodiques localement, comme illustré sur la Figure 2.1. Nous notons par ε la taille de la période microscopique ou, de façon équivalente, la distance entre les centres des micro-fissures voisines et par l la longueur des microfissures, considérées

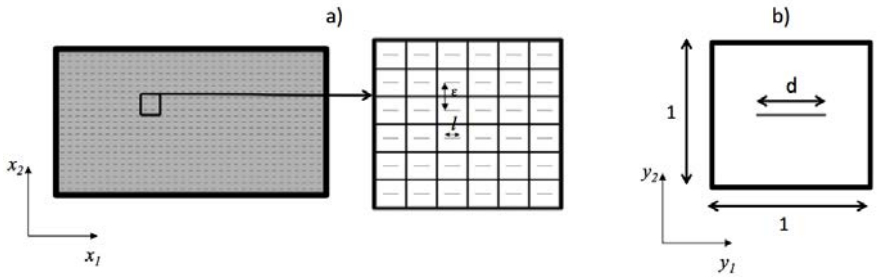

FIGURE 2.1 – a) Domaine micro-fissuré avec microstructure localement périodique : ε est la taille de la période et l est la longueur de micro-fissure. b) Cellule unitaire avec une fissure de longueur normalisée $d = l/\varepsilon$.

droites. La longueur l est une fonction supposée localement périodique [52], c'est-à-dire avoir de petites variations spatiales autour d'un point matériel donné de sorte que localement la distribution des micro-fissures puisse être considérée comme périodique. On suppose que les champs mécaniques dépendent des variables d'espace x_1, x_2 et du temps t. Pour simplifier, nous considérons d'abord le cas des micro-fissures parallèles à l'axe -x_1, comme montré dans la Figure 2.2, mais l'analyse est facilement étendue au cas de micro-fissures orientées dans une autre direction.

Pour ce problème anti-plan, le champ de déplacement a la forme particulière :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x_1, x_2, t) = (0, 0, u_3^\varepsilon(x_1, x_2, t)) \tag{2.1}$$

et les relations constitutives élastiques linéaires pour le champ de contraintes $\sigma_{3i}(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$ sont réduites à :

$$\sigma_{3i}^\varepsilon = 2\mu e_{x3i} = \mu \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_i} \tag{2.2}$$

où μ le module de cisaillement du matériau et e_{x3i} est la déformation de cisaillement calculée par rapport aux variables x_i. L'équation de mouvement correspondante s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{3i}^\varepsilon}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

où ρ la densité de masse du matériau.

Nous supposons que les bords des micro-fissures sont libres de contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} = 0 \tag{2.4}$$

où $\mathbf{N} = (N_1, N_2, 0)$ est le vecteur unitaire normal aux lèvres de la fissure, comme illustré dans la Figure 2.2.

2.2.2 Analyse d'homogénéisation asymptotique

Les équations de base à l'échelle macroscopique sont obtenues en utilisant la méthode d'homogénéisation asymptotique [16, 126] pour le milieu micro-fissuré (Figure 2.1). La

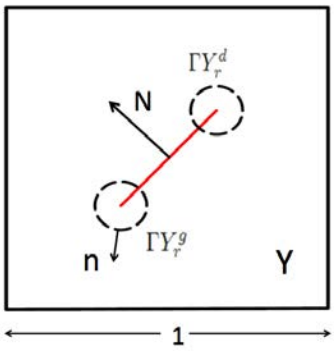

FIGURE 2.2 – Cellule unitaire avec une micro-fissure. Contours circulaires autour des pointes et en mouvement avec elles.

période élémentaire est de taille ε et contient une micro-fissure centrée sans traction de longueur l. La variable d'endommagement est définie comme le rapport $d = l/\varepsilon$, prenant des valeurs entre 0 pour le matériau saint ou vierge et 1 pour le matériau complètement endommagé. Comme représentée à la Figure 2.1b, la variable d est la longueur de fissure dans la cellule unitaire.

Dans l'analyse d'homogénéisation, la cellule unitaire Y est obtenue comme image de la période physique par la transformation

$$y_i = \frac{x_i}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

et les variables x_i et y_i, sont utilisées respectivement pour décrire les variations à grande et à petite échelle. Les développements asymptotiques des champs mécaniques sont considérés :

$$\begin{aligned} u_3^\varepsilon(x_1, x_2, t) = u_3^{(0)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t) + \varepsilon u_3^{(1)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t) \\ + \varepsilon^2 u_3^{(2)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t) + ... \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{3i}^\varepsilon(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{3i}^{(-1)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t) + \sigma_{3i}^{(0)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t) \\ + \varepsilon\sigma_{3i}^{(1)}(x_1, x_2, y_1, y_2, t) + ... \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pour un tel champ, la dérivée spatiale totale prend la forme

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{2.8}$$

La substitution des équations (2.6-2.7) dans l'équation du mouvement (2.3) et l'utilisation de (2.8) conduisent aux relations obtenues pour différents degrés de ε :

$$\frac{\partial \sigma_{3i}^{(-1)}}{\partial y_i} = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{3i}^{(-1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial y_i} = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \sigma_{3i}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{3i}^{(1)}}{\partial y_i} = \rho \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial t^2} \tag{2.11}$$

Les expressions des contraintes suivant les puissances de ε sont obtenues par le remplacement des développements asymptotiques dans la relation constitutive (2.2) et l'identification des termes pour différents ordres en ε :

$$\sigma_{3i}^{(-1)} = \mu \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial y_i} \tag{2.12}$$

$$\sigma_{3i}^{(0)} = \mu(\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_i}) \tag{2.13}$$

$$\sigma_{3i}^{(1)} = \mu(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial y_i}) \tag{2.14}$$

Les relations (2.9), (2.12) conduisent au problème pour $u_3^{(0)}$:

$$\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial {y_2}^2} = 0 \quad \text{in } Y \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial y_i} N_i = 0 \quad \text{on } CY \tag{2.16}$$

où CY représente la fissure dans la cellule unitaire Y.

A partir de (2.15-2.16) nous déduisons que $u_3^{(0)}$ est indépendant de y_1 et y_2, représentant le champs de déplacement macroscopique $u_3^{(0)} = u_3^{(0)}(x_1, x_2, t)$.

Le problème aux limites pour $u_3^{(1)}$ est obtenu à partir de (2.10) et (2.12-2.13) en tenant compte des conditions de périodicité sur les bords opposés de la cellule unitaire Y

$$\frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial {y_2}^2} = 0 \quad \text{in } Y \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_i} N_i = -\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_i} N_i \quad \text{on } CY \tag{2.18}$$

Il en résulte que le correcteur microscopique $u_3^{(1)}$ dépend linéairement des déformations macroscopiques $\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_i}$ et la solution générale de (2.17-2.18) s'écrit alors

$$u_3^{(1)} = \xi^1(y_1, y_2) \frac{\partial u_3^{(0)}(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \xi^2(y_1, y_2) \frac{\partial u_3^{(0)}(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \tag{2.19}$$

où ξ^j sont des solutions particulières du problème de cellule (2.17-2.18) correspondant à $\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_i} = \delta_{ij}$, pour $j = 1, 2$, avec δ_{ij} le symbole de Kronecker.

En introduisant l'opérateur de valeur moyenne $\langle\cdot\rangle = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_s}\cdot\, dy$, où $|Y|$ est la surface de Y, et en l'appliquant à l'équation (2.11) avec la prise en compte de la périodicité de $\sigma_{3i}^{(1)}$ sur les bords de la cellule unitaire nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Sigma_{3i}^{(0)} = \rho\frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial t^2} \tag{2.20}$$

où nous définissons la contrainte macroscopique $\Sigma_{3i}^{(0)} = \langle\sigma_{3i}^{(0)}\rangle$.

De la même manière, à partir de (2.13), nous obtenons les relations constitutives macroscopiques :

$$\Sigma_{31}^{(0)} = C_{3131}e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}) + C_{3132}e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}) \tag{2.21}$$

$$\Sigma_{32}^{(0)} = C_{3231}e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}) + C_{3232}e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}) \tag{2.22}$$

où

$$C_{3131} = \frac{2\mu}{|Y|}\int_Y (1 + \frac{\partial\xi^1}{\partial y_1})dy \tag{2.23}$$

$$C_{3132} = \frac{2\mu}{|Y|}\int_Y (\frac{\partial\xi^2}{\partial y_1})dy \tag{2.24}$$

$$C_{3231} = \frac{2\mu}{|Y|}\int_Y (\frac{\partial\xi^1}{\partial y_2})dy \tag{2.25}$$

$$C_{3232} = \frac{2\mu}{|Y|}\int_Y (1 + \frac{\partial\xi^2}{\partial y_2})dy \tag{2.26}$$

sont les coefficients homogénéisés.

En utilisant le problème aux limites (2.17-2.18) pour ξ^1 et ξ^2, on peut prouver la symétrie des coefficients.

$$C_{3132} = C_{3231} \tag{2.27}$$

Les coefficients effectifs dépendent des fonctions caractéristiques ξ^1 et ξ^2. Pour les obtenir, il faut déterminer les solutions particulières ξ^1 et ξ^2 pour une longueur d et une orientation θ de fissure dans la cellule unitaire. Le logiciel d'éléments finis Comsol multiphysique [33] a été choisi pour faire ces calculs, permettant une prise en compte directe des conditions aux limites périodiques. Les éléments de types triangulaires et des fonctions de formes quadratiques sont utilisés dans les simulations. Un exemple de maillage est présenté dans la Figure 2.3 avec un raffinement autour des pointes de la micro-fissure. Il est également représenté, à droite sur la Figure 2.3, l'évolution de l'erreur par rapport au nombre d'itérations pour le solveur GMRES utilisé dans ces calculs numériques.

Dans le cas $\theta \neq 0$ l'analyse d'homogénéisation précédente est toujours valable avec la variable d'endommagement d définie comme la plus grande projection de la longueur de fissure normalisée $d' = l/\varepsilon$ sur les bords de la cellule unitaire.

Pour un angle θ donné, les coefficients numériques sont calculés pour 24 valeurs de d et ensuite interpolés avec des fonctions polynomiales. Dans la Figure 2.4, le coefficient normalisé $C_{3232}/2\mu$ est représenté pour les micro-fissures dans la direction de l'axe x_1

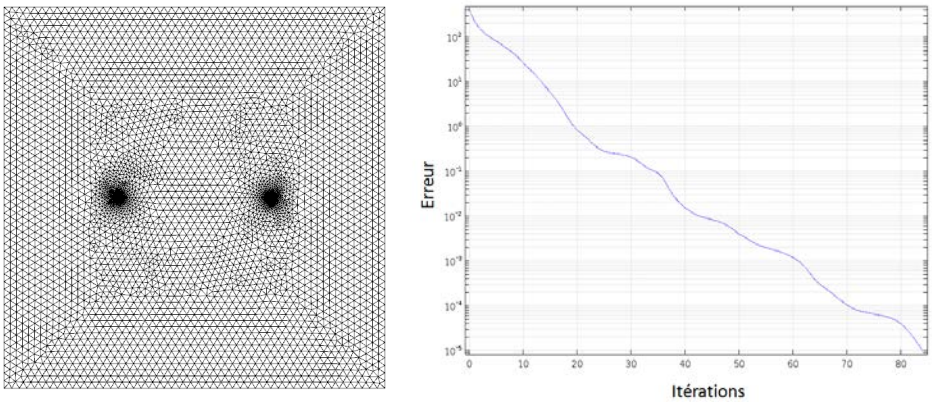

FIGURE 2.3 – Maillage d'élements finis pour le calcul des solutions de cellule unitaire et l'évolution de l'erreur par rapport au nombre d'itérations.

($\theta = 0$). Dans ce cas, les autres coefficients sont $C_{3131} = 2\mu$ et $C_{3132} = 0$. Pour $d = 0$ nous récupérons la valeur de $C_{3232} = 2\mu$ correspondant au matériau vierge, tandis que pour $d = 1$ le coefficient effectif $C_{3232} = 0$ correspondant à l'état d'endommagement complet du matériau. Nous notons la diminution brusque de C_{3232} quand on s'approche de la limite d'endommagement $d = 1$. Dans ce dernier cas ($d = 1$) la micro-fissure sépare complètement les parties supérieure et inférieure de la cellule unitaire et les solutions analytiques pour (2.17-2.18) sont facilement trouvées, dépendant seulement de la variable y_2 avec $\frac{\partial \xi^1}{\partial y_2} = 0$ et $\frac{\partial \xi^2}{\partial y_2} = -1$. Quand on les remplace dans (2.23-2.26), les valeurs numériques des coefficients effectifs sont récupérées pour $d = 1$.

L'influence de l'orientation de la fissure est illustrée dans les Figures 2.5, 2.6 et 2.7, où

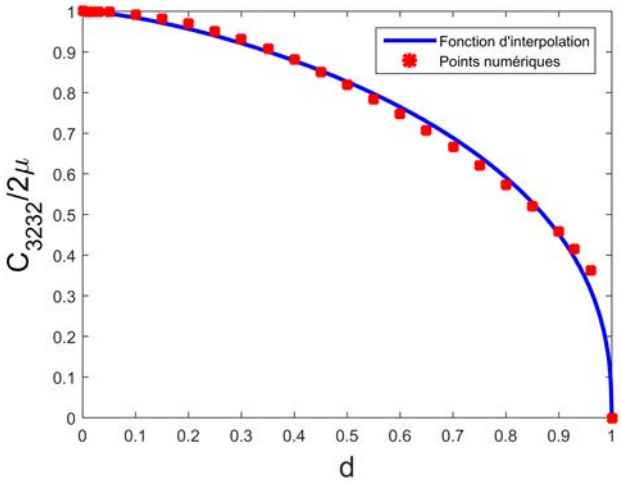

FIGURE 2.4 – Le coefficient homogénéisé $C_{3232}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour les micro-fissures dans la direction de l'axe x_1 ($\theta = 0$).

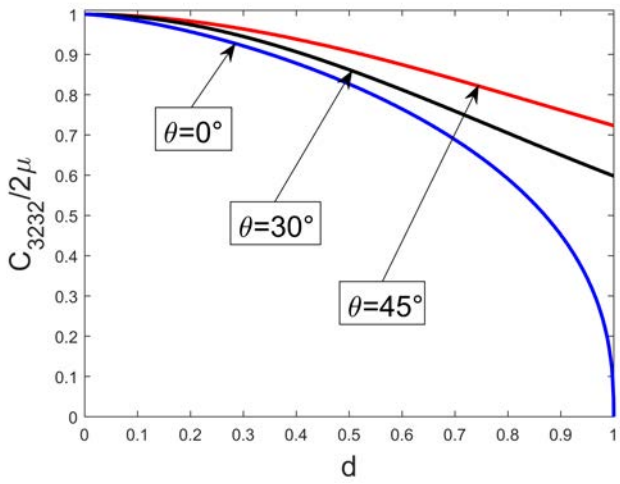

FIGURE 2.5 – Le coefficient homogénéisé $C_{3232}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour trois différentes orientations de micro-fissures.

nous représentons les coefficients homogénéisés $C_{3232}/2\mu$, $C_{3131}/2\mu$ et $C_{3132}/2\mu$ pour trois orientations de fissure $\theta = 0°$, $\theta = 30°$ et $\theta = 45°$.

La Figure 2.5 montre l'influence de l'orientation de fissure sur le coefficient effectif C_{3232}. Pour des fissures inclinées de θ par rapport à l'axe x_1, l'influence d'endommagement décroit avec l'augmentation de θ. Pour le cas limite $\theta = 90°$, les micro-fissures n'affectent pas la réponse effective caractérisée par $C_{3232} = 2\mu$.

L'augmentation de l'angle θ induit la diminution des coefficients C_{3131} comme la montre la Figure 2.6. Cet effet est plus prononcé pour des fortes valeurs d'endommagement d.

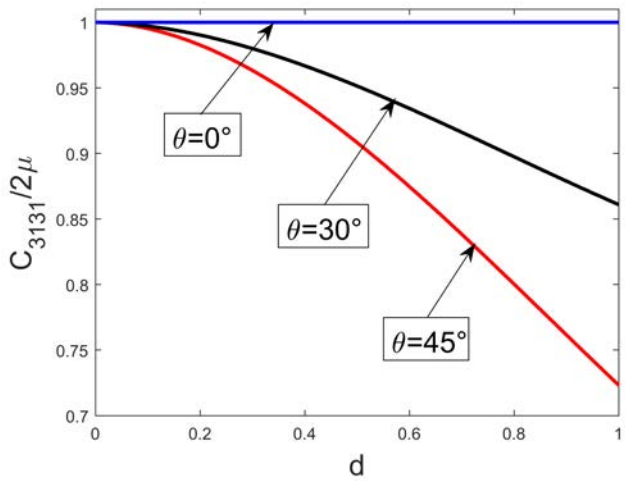

FIGURE 2.6 – Le coefficient homogénéisé $C_{3131}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour trois orientations de micro-fissures.

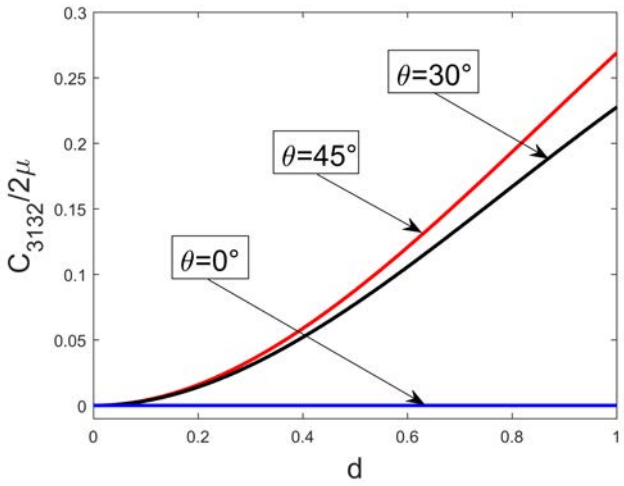

FIGURE 2.7 – Le coefficient homogénéisé $C_{3132}/2\mu$ en fonction de la variable d'endommagement d pour trois orientations de micro-fissures.

Dans le cas limite $\theta = 90°$, une dépendance similaire à celle de Figure 2.4 est obtenue pour C_{3131}.

Le coefficient C_{3132} est représenté à la Figure 2.7. Il devient nul pour l'orientation horizontale, mais pour $\theta \neq 0$ les micro-fissures induisent un couplage entre le cisaillement dans les deux directions et cet effet augmente avec la longueur des micro-fissures. L'influence de d est maximale pour $\theta = 45°$ et elle diminue symétriquement pour des orientations plus élevées jusqu'à la valeur nulle de C_{3132} pour les fissures verticales.

2.3 Lois d'endommagement homogénéisées

La procédure d'homogénéisation introduite dans [34] est adaptée dans la première partie de cette section pour déduire les équations d'endommagement macroscopiques en quasi-statique dans le cas anti-plan. Ces résultats préliminaires seront utilisés dans la deuxième partie pour le développement d'un modèle d'endommagement dynamique.

2.3.1 Evolution quasi-statique

Nous supposons que la propagation des micro-fissures est décrite par un critère énergétique de type Griffith $\mathcal{G}^\varepsilon = \mathcal{G}_c$, où $\mathcal{G}_c$ est l'énergie de rupture critique du matériau et $\mathcal{G}^\varepsilon$ est le taux de restitution d'énergie défini par

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_r} \left(U\mathbf{ne} - (\sigma^\varepsilon_{31} n_1 + \sigma^\varepsilon_{32} n_2)(\frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial x_2} e_2) \right) ds \tag{2.28}$$

où $U = \frac{1}{2}\mu \left((\frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial x_2})^2 \right)$ est l'énergie élastique, Γ_r est un contour circulaire fermé, de rayon r autour de la pointe de fissure avec $\mathbf{n}$ sa normale unitaire extérieure, $\mathbf{e}$ le vecteur unitaire le long de la ligne de fissure et orienté dans le sens de la propagation.

La la cellule unitaire Y, avec la micro-fissure CY de longueur $d' = l/\varepsilon$, est obtenue par la transformation $y = \frac{x}{\varepsilon}$ à partir de la période physique. Comme le montre la Figure 2.2, des contours circulaires autour des pointes de fissure sont introduits pour le calcul des taux de restitution d'énergie et sont notés par ΓY_r^g et ΓY_r^d.

En utilisant le développement asymptotique pour u_3^ε, en tenant compte de la singularité des dérivées de $u_3^{(1)}$ aux pointes des micro-fissures et en changeant la variable $ds = \varepsilon ds_y$ dans les intégrales, nous obtenons le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}^\varepsilon$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^\varepsilon = \varepsilon\mathcal{G}_y = \varepsilon \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma Y_r} (\frac{1}{2}\mu((\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1})^2 + (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2})^2) n_p e_p \\ -\mu(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} n_2)(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} e_1 + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} e_2))\, ds_y \end{aligned} \tag{2.29}$$

où nous introduisons le taux de restitution d'énergie dans la cellule unitaire $\mathcal{G}_y$.

On suppose que les mico-fissures s'étendent symétriquement en restant droites, de sorte que $\mathcal{G}_y^d = \mathcal{G}_y^g = \mathcal{G}_y$. Pour des micro-fissures de petite taille, cette hypothèse peut être une approximation raisonnable. Notons toutefois que les développements qui suivent peuvent être facilement adaptés à certaines situations de propagation non symétrique, comme le cas d'une seule pointe en propagation.

En considérant un contour autour de la micro-fissure formé par les cercles ΓY_r^g et ΓY_r^d et les parties des bords de fissure CY_r^+ et CY_r^- situées en dehors des deux cercles, on désigne par $Y_r \subset Y$ la partie de Y extérieure au contour défini, avec la propriété $\lim_{r\to 0} Y_r = Y$. Multiplication de (2.17) par $\dot{u}_3^{(1)}$ et intégration sur Y_r donnent :

$$\begin{aligned}\int_{Y_r} (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1}\frac{\partial \dot{u}_3^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}\frac{\partial \dot{u}_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy \\ - \int_{Y_r} (\frac{\partial}{\partial y_1}(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1}\dot{u}_3^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial y_2}(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}\dot{u}_3^{(1)})) dy = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Soit I la première intégrale et J la deuxième intégrale dans (2.30). Pour une micro-fissure de longueur $d'(t)$ s'étendant symétriquement dans sa propre direction, la vitesse des pointes est $\frac{\dot{d}'}{2}\mathbf{e}$, où $\mathbf{e}$ est le vecteur unitaire dans la direction de la ligne de fissure. Pour calculer I, le théorème de transport est utilisé pour le domaine dépendant du temps $Y_r(t)$ qui se déplace avec les pointes.

$$\begin{aligned} I = \frac{d}{dt}\int_{Y_r} \frac{1}{2}((\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1})^2 + (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2})^2) dy \\ + \int_{\Gamma Y_r^g \cup \Gamma Y_r^d} \frac{1}{2}((\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1})^2 + (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2})^2)\frac{\dot{d}'}{2} n_p e_p ds_y \end{aligned} \tag{2.31}$$

La deuxième intégrale J est calculée en utilisant la formule de divergence en tenant compte de la périodicité aux bords extérieurs de Y et des conditions limites sur les bords

des fissures :

$$J = \int_{CY_r{}^+} (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} N_1^+ + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} N_2^+) \left[\dot{u}_3^{(1)}\right] ds_y$$
$$- \int_{\Gamma Y_r^g \cup \Gamma Y_r^d} (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} n_1 \dot{u}_3^{(1)} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} n_2 \dot{u}_3^{(1)}) ds_y \tag{2.32}$$

En remplaçant les expressions de I et J dans (2.30) et en passant à la limite $r \to 0$ avec l'équation asymptotique pour les termes singuliers [57] :

$$\dot{u}_3^{(1)} = -\frac{\dot{d}'}{2} (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} e_1 + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} e_2) \tag{2.33}$$

nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_Y \frac{1}{2} \mu ((\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1})^2 + (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2})^2) dy + \dot{d}' \mathcal{G}_y$$
$$-\mu \int_{CY} (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} N_1 + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} N_2) [\dot{u}_3^{(1)}] ds_y = 0 \tag{2.34}$$

où la définition (2.29) de $\mathcal{G}_y$ et l'égalité $\mathcal{G}_y^d = \mathcal{G}_y^g = \mathcal{G}_y$ sont utilisées.

En multipliant l'équation (2.15) par $\mu \dot{u}_3^{(1)}$ et en suivant une procédure similaire, nous obtenons également :

$$\frac{d}{dt} \int_Y \mu (\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy - \int_Y \mu (\frac{\partial \dot{u}_3^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{u}_3^{(0)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy$$
$$= \int_{CY} \mu (\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} N_1 + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_2} N_2) [\dot{u}_3^{(1)}] dSy \tag{2.35}$$

En additionnant (2.34) et (2.35) et en utilisant les conditions de limites (2.18) sur les bords des fissures, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} \mu ((\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1}) \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} + (\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy + \dot{d}' \mathcal{G}_y =$$
$$\int_Y \mu (\frac{\partial \dot{u}_3^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{u}_3^{(0)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} \mu (\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy \tag{2.36}$$

L'intégration de l'équation d'équilibre (2.10) avec la loi constitutive (2.13) et en prenant compte des conditions de périodicité et de traction libre sur les bords des microfissures, nous prouvons que la première intégrale dans (2.36) est nulle. Le membre droit de (2.36) peut être exprimé en utilisant l'expression (2.19) de $u_3^{(1)}$ et en utilisant les équations (2.23-2.27) :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Y_s} \mu (\frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy - \int_{Y_s} \mu (\frac{\partial \dot{u}_3^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{u}_3^{(0)}}{\partial x_2} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2}) dy$$
$$= \dot{d}' (\frac{\partial C_{3131}}{\partial d'} (e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + \frac{\partial C_{3232}}{\partial d'} (e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + 2 \frac{\partial C_{3132}}{\partial d'} e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)})) \tag{2.37}$$

De cette façon, nous déduisons l'équation d'endommagement quasi-statique :

$$\left(\mathcal{G}_y + \frac{\partial C_{3131}}{\partial d'}(e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + \frac{\partial C_{3232}}{\partial d'}(e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + 2\frac{\partial C_{3132}}{\partial d'}e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)})e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)})\right)\dot{d'} = 0 \tag{2.38}$$

Le remplacement du critère de propagation $\mathcal{G}_y = \frac{\mathcal{G}^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon}$ dans l'équation précédente donne une loi d'endommagement qui peut être utilisée dans le cadre quasi-statique.

2.3.2 Evolution dynamique

Dans le cas de la propagation dynamique des micro-fissures, le critère de type Griffith $\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \mathcal{G}_c$ est utilisé avec le taux de restitution d'énergie dynamique défini par

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r}\left((U+T)\mathbf{ne} - (\sigma^\varepsilon_{31}n_1 + \sigma^\varepsilon_{32}n_2)(\frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial x_2}e_2)\right)ds \tag{2.39}$$

où U est l'énergie élastique définie précédemment et T est l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial t}\frac{\partial u^\varepsilon_3}{\partial t} \tag{2.40}$$

Lorsque les développements asymptotiques du déplacement et des contraintes sont considérés conjointement avec une relation similaire à (2.33) et en tenant compte de la singularité des champs mécaniques, l'expression équivalente suivante pour $\mathcal{G}^{d\varepsilon}$ est obtenue :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma Y_r}&(\frac{\mu}{2}((\frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_1})^2 + (\frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_2})^2) + \frac{\rho v^2}{2}(\frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_1}e_1 + \frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_2}e_2)^2)\mathbf{ne}\\ &-\mu(\frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_1}n_1 + \frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_2}n_2)(\frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_1}e_1 + \frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_2}e_2))\,\varepsilon ds_y\end{aligned} \tag{2.41}$$

dans laquelle nous avons fait le changement de variable $ds = \varepsilon ds_y$ et nous avons introduit la vitesse physique de la pointe de micro-fissure $v = \varepsilon\frac{\dot{d'}}{2}$.

Il est important de noter que dans le cas dynamique, les problèmes de cellule unitaire (2.15-2.16) et (2.17-2.18) sont identiques à ceux du cas quasi-statiques ce qui fait que l'analyse effectuée dans la sous-section précédente est toujours valide. Si nous considérons la définition (2.29) de $\mathcal{G}_y$ le taux de restitution d'énergie dynamique pourra être exprimé comme

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \varepsilon(\mathcal{G}_y + \frac{\rho v^2}{2}\lim_{r\to 0}\int_{\Gamma Y_r}(\frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_1}e_1 + \frac{\partial u^{(1)}_3}{\partial y_2}e_2)^2\mathbf{ne}\,ds_y) \tag{2.42}$$

Le taux de restitution d'énergie dynamique peut être exprimé en fonction des facteurs d'intensité de contrainte comme suit [57] :

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}A_{III}(v)(K^{d\varepsilon}_{III})^2 \tag{2.43}$$

où $K^{d\varepsilon}_{III}$ représente le facteur d'intensité de contrainte dynamique et $A_{III}(v)$ une fonction universelle de la vitesse de fissure dans le cas anti-plan :

$$A_{III}(v_p) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.44}$$

$$K_{III}^{d\varepsilon} = k(v) K_{III}^{\varepsilon} \tag{2.45}$$

Ici K_{III}^{ε} est le facteur d'intensité de contrainte quasi-statique pour le même problème de fissure, la dépendance de la vitesse de fissure est donnée par la fonction $k(v) = \sqrt{1 - \frac{v}{c}}$ et $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ est la vitesse des ondes de cisaillement.

Le remplacement de ces expressions dans l'équation (2.43) conduit à :

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}(K_{III}^{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2\mu}(K_{III}^{\varepsilon})^2 \left(\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} - 1 \right) \tag{2.46}$$

Le premier terme dans le membre droit représente le taux de restitution d'énergie quasi-statique $\mathcal{G}^{\varepsilon}$ et la comparaison avec (2.42) permet d'obtenir le terme intégral suivant :

$$\frac{\rho v^2}{2} \lim_{r \to 0} \int_{\Gamma Y_r} (\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_1} e_1 + \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial y_2} e_2)^2 \mathbf{n}\mathbf{e}\, ds_y) = \frac{1}{2\mu}(K_{III}^{\varepsilon})^2 \left(\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} - 1 \right) \tag{2.47}$$

L'équation (2.42) devient maintenant

$$\mathcal{G}_y = \frac{\mathcal{G}^{d\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{1}{2\mu\varepsilon}(K_{III}^{\varepsilon})^2 \left(\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} - 1 \right) = \frac{\mathcal{G}^{d\varepsilon}}{\varepsilon} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{2.48}$$

où la dernière expression est déduite à partir de (2.46).

Le remplacement de (2.48) dans (2.38) et l'utilisation du critère de propagation $\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \mathcal{G}_c$ nous permet d'obtenir la loi d'endommagement sous la forme :

$$\dot{d'} \left(\frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon} \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} + \frac{\partial C_{3131}}{\partial d'} (e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + \frac{\partial C_{3232}}{\partial d'} (e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + 2 \frac{\partial C_{3132}}{\partial d'} e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}) \right) = 0 \tag{2.49}$$

Dans cette équation en remplaçant la vitesse de pointe de fissure $v = \varepsilon \frac{\dot{d'}}{2}$, nous déduisons la loi d'évolution d'endommagement :

$$\dot{d'} = \frac{2c}{\varepsilon} \left\langle 1 - \frac{2}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\mathcal{G}_c} (\frac{\partial C_{3131}}{\partial d'} (e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + \frac{\partial C_{3232}}{\partial d'} (e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + 2 \frac{\partial C_{3132}}{\partial d'} e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)})) \right)^2} \right\rangle \tag{2.50}$$

où $\langle . \rangle$ représente la partie positive. Si nous introduisons le taux de restitution d'énergie d'endommagement $Y = -(\frac{\partial C_{3131}}{\partial d'} (e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + \frac{\partial C_{3232}}{\partial d'} (e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + 2 \frac{\partial C_{3132}}{\partial d'} e_{x31}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{x32}(\mathbf{u}^{(0)}))$ la loi d'évolution prends la nouvelle forme :

$$\frac{dd'}{dt} = \frac{2c}{\varepsilon} \left\langle \frac{\varepsilon^2 Y^2 - \mathcal{G}_c^2}{\varepsilon^2 Y^2 + \mathcal{G}_c^2} \right\rangle \tag{2.51}$$

Il est important de noter que la longueur de micro-fissure ε est présente dans la loi (2.51) et influence l'évolution de l'endommagement prédite par ce nouveau modèle.

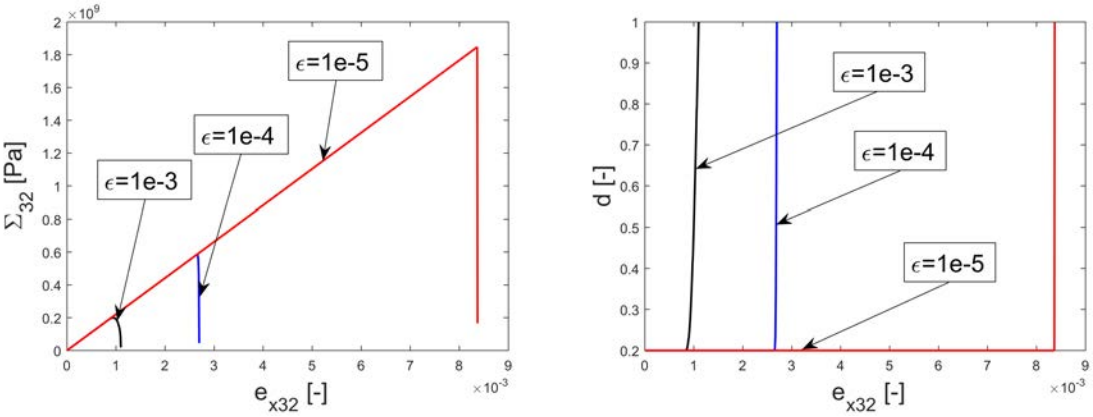

FIGURE 2.8 – Contrainte Σ_{32} et endommagement d en fonction de la déformation e_{x32} pour trois valeurs de la longueur microstructurelle ε.

2.4 La réponse locale du modèle

La réponse locale du nouveau modèle basé sur la loi d'endommagement (2.51) est étudiée dans cette section. Nous considérons les paramètres du matériau pour la céramique alumine Al_2O_3 dont le module de Young $E = 300\ GPa$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, la densité de masse $\rho = 3800\ kg/m^3$ et le résistance à la rupture $\mathcal{G}_c = 50.75\ J/m^2$. On suppose que les micro-fissures sont orientées suivant l'axe x_1, tel que $d' = d$ pour la variable d'endommagement. Nous considérons un chargement à vitesse de déformation constante pour la seule composante de déformation macroscopique non nulle $e_{x32}(t)$. [1]

2.4.1 Influence de la longueur microscopique ε

Nous analysons premièrement l'influence du paramètre ε sur la réponse macroscopique en contraintes et endommagement. Pour une vitesse de déformation imposée $\dot{e}_{x32} = 1000/s$ et la valeur initiale d'endommagement $d_0 = 0.2$, la contrainte Σ_{32} et l'endommagement d en fonction de la déformation appliquée e_{x32} sont représentés sur la Figure 2.8 pour trois valeurs différentes de la taille de microstructure : $\varepsilon = 1.10^{-3}\,m$, $\varepsilon = 1.10^{-4}\,m$ et $\varepsilon = 1.10^{-5}\,m$.

On observe qu'une diminution de la longueur de microstructure produit l'augmentation de la résistance au cisaillement et une réponse plus fragile. Le premier aspect correspond à l'effet d'échelle classique de la Mécanique de la rupture : les fissures plus grandes se propagent plus facilement que les plus petites. Cette propriété micro-structurelle a été transférée au modèle d'endommagement grâce à l'analyse d'homogénéisation. La réduction de la ductilité avec la diminution de ε est un effet dynamique puisque les cellules élémentaires de grande taille ε ont une inertie plus importante retardant la propagation des micro-fissures. Cet effet, amplifié avec la vitesse de déformation, sera mis en évidence dans ce qui suit.

1. Pour des raisons de simplicité, dans ce qui suit, l'exposant (0) dans la notation des champs macroscopiques sera omis.

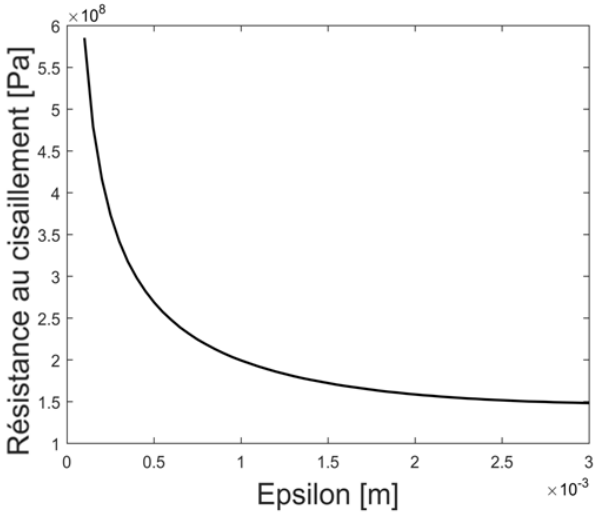

FIGURE 2.9 – Evolution de contrainte maximale en fonction de la taille de la micro-structure ε.

Comme on peut le voir à partir de la Figure 2.8, l'effet de la taille microscopique sur le pic de contrainte est plus important pour des valeurs plus petites de ε. Cette dépendance non linéaire est illustrée dans la Figure 2.9 où la résistance au cisaillement (contrainte au pic) est représentée en fonction de la taille de la microstructure. Pour des valeurs plus petites de la taille de micro-structure, la résistance au cisaillement est plus élevée alors que pour des valeurs plus grandes de ε elle devient plus petite et montre un effet de saturation, approchant une valeur constante indépendante de la taille de la microstructure. En même temps, ce dernier régime correspondant aux grandes valeurs de ε peut être aussi limité par la validité de l'analyse d'homogénéisation.

2.4.2 Influence de la vitesse de chargement

Pour étudier la dépendance de la vitesse de déformation, nous avons analysé la réponse locale pour trois valeurs des vitesses $\dot{e}_{x32} = 100/s$, $\dot{e}_{x32} = 1000/s$ et $\dot{e}_{x32} = 5000/s$, pour $\varepsilon = 1.10^{-3}\,m$ et $d_0 = 0.2$.

Les courbes des contraintes et d'endommagement correspondantes sont tracées sur la Figure 2.10. Notons que pour des faibles vitesses de déformation, l'évolution de la contrainte et de l'endommagement est caractéristique d'un comportement fragile, tandis que pour des vitesses plus élevés, le rôle de l'inertie est plus prononcé et entraîne un retard dans la propagation des micro-fissures qui, au niveau macroscopique, donne une ductilité accrue.

Dans la Figure 2.11, nous représentons la résistance au cisaillement en fonction de la vitesse de déformation pour différentes tailles de la microstructure. On peut remarquer que pour de petites valeurs de ε, la résistance au cisaillement n'est pas très sensible à la vitesse de chargement, alors que pour des valeurs plus élevées de ε l'effet de vitesse de déformation devient plus prononcé. Comme expliqué précédemment, cela est une conséquence du fait

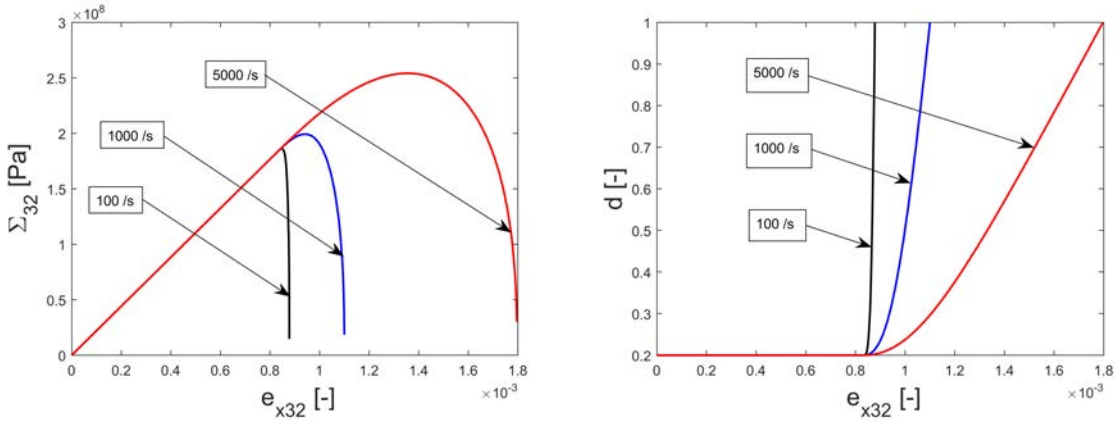

FIGURE 2.10 – Contrainte Σ_{32} et l'endommagement d en fonction de e_{x32} pour trois valeurs différentes de vitesse de déformation $\dot{e}_{x32}$.

que pour les grandes tailles des périodes microscopiques, l'énergie cinétique augmente et l'énergie disponible pour la micro-rupture est réduite.

Nous comparons maintenant la réponse prédite par la loi dynamique (2.51) pour de faibles vitesses de déformation avec la solution de l'équation d'endommagement quasi-statique (2.38), dans laquelle $\mathcal{G}_y = \frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon}$. Les évolutions de l'endommagement et de contrainte correspondantes sont représentées dans la Figure 2.12, où pour la solution dynamique, la vitesse $\dot{e}_{x32} = 1/s$ a été utilisée. Nous remarquons des différents seuils d'initiation pour les deux cas : la limite quasi-statique est bien inférieure à celle de la dynamique.

Afin de mieux comprendre ce comportement particulier, considérons une forme simple du coefficient $C_{3232}(d) = (1-d)^\alpha 2\mu$. Dans ce cas, nous avons des solutions analytiques pour

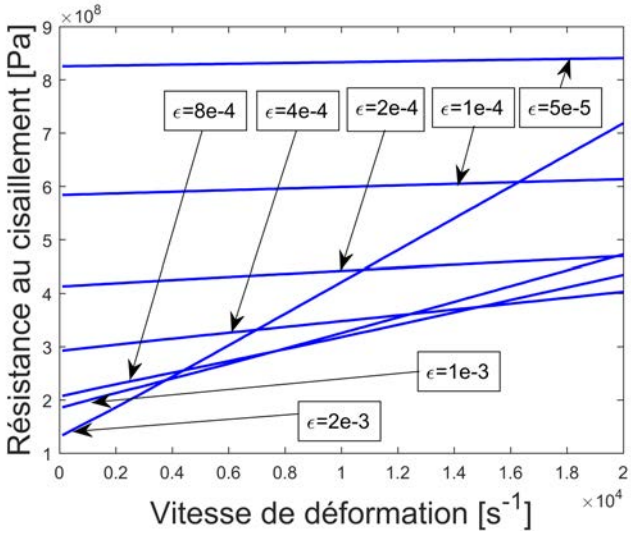

FIGURE 2.11 – Résistance au cisaillement en fonction de la vitesse de déformation pour différentes tailles de microstructure.

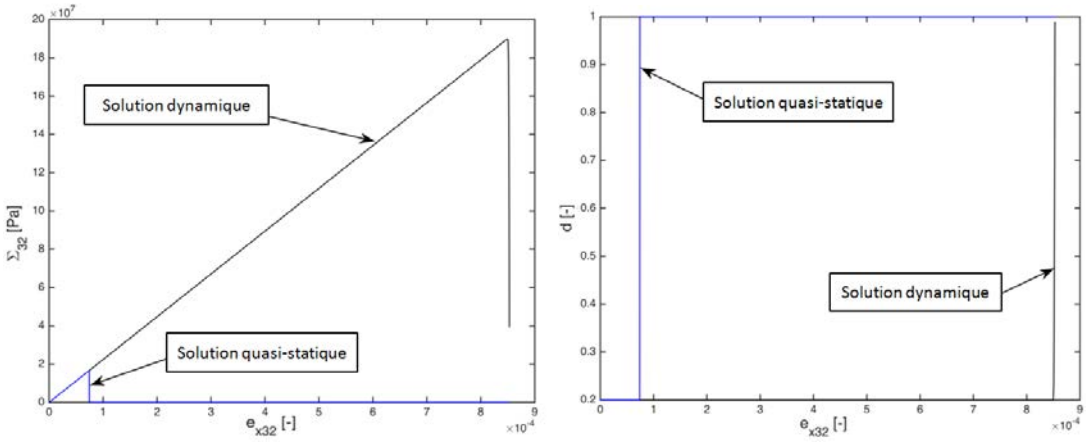

FIGURE 2.12 – Contrainte Σ_{32} et endommagement d en fonction de e_{x32} prédit respectivement par les lois d'endommagement dynamique et quasi-statique. On note les seuils différents d'initiation.

l'équation quasi-statique (2.38). On peut montrer que pour $\alpha = 2$ le seuil quasi-statique et le seuil dynamique d'initiation d'endommagement sont identiques, indépendamment de la vitesse de chargement, tandis que pour $\alpha = 0.5$, nous avons des limites d'initiation différentes, comme le montre la Figure 2.12. En utilisant la relation d'endommagement (2.38), nous prouvons que, pour une déformation macroscopique donnée, le taux de restitution d'énergie quasi-statique $\mathcal{G}^{\varepsilon}$ est une fonction décroissante de d pour $\alpha = 2$ et croissante de d pour $\alpha = 0.5$, décrivant respectivement des évolutions stables et instables de microfissures. Ce n'est que dans le cas stable que la limite d'initiation d'endommagement est identique à celle dynamique.

Ce résultat montre la différence entre les lois d'endommagement (2.38) et (2.51). Afin d'avoir une cohérence entre les évolutions lente et rapide, nous devons considérer la loi d'endommagement dynamique pour les deux régimes.

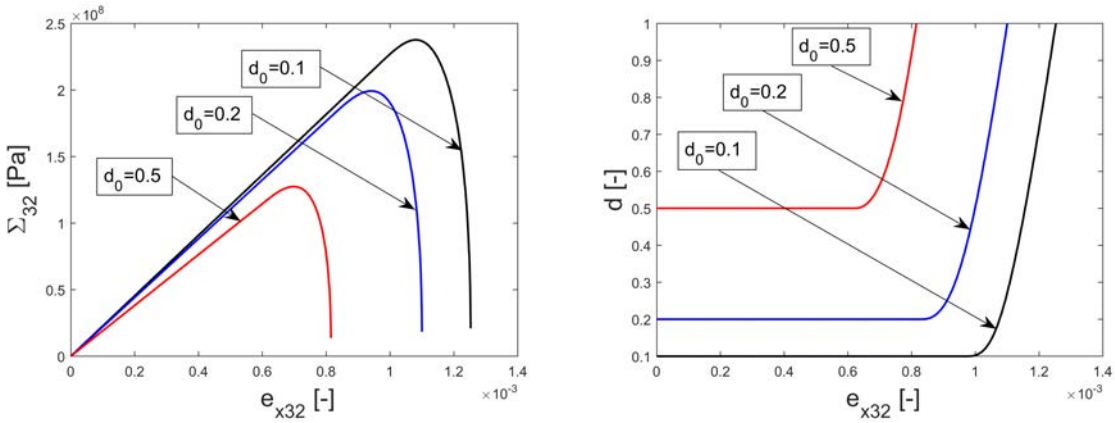

FIGURE 2.13 – Contrainte Σ_{32} et endommagement d en fonction de la déformation e_{x32} pour les valeurs d'endommagement inital $d_0 = 0.1$, $d_0 = 0.2$ et $d_0 = 0.5$.

2.4.3 Influence de l'endommagement initial

Nous considérons finalement l'influence de l'endommagement initial d_0 sur les évolutions de contrainte et d'endommagement. Pour une vitesse de chargement $\dot{e}_{x32} = 1000/s$ et pour $\varepsilon = 1.10^{-3}\,m$, les résultats sont représentés dans la Figure 2.13.

Notons que lorsque l'endommagement initial diminue la résistance et la rigidité deviennent plus élevées. Pour des valeurs initiales plus élevées de d_0, l'endommagement se développe plus rapidement avec des valeurs de résistance au cisaillement plus petites.

2.5 Simulation d'endommagement dynamique

Dans cette section, nous étudions les prédictions du modèle d'endommagement au niveau d'une macro-structure. Des simulations numériques de rupture dynamique sous chargement anti-plan seront présentées.

2.5.1 Problème de rupture et aspects de simulation numérique

Nous considérons un échantillon de dimension réduite, similaire à celui considéré dans [100, 146, 90]. La géométrie présente une entaille préexistante, comme indiquée sur la Figure 2.14, avec les dimensions $4 \times 14\ mm$. L'entaille est un rectangle de dimensions $0.4 \times 1.4\ mm$ complété par une région triangulaire à la pointe, de telle sorte que sa longueur totale soit $a = 1.68\ mm$.

Le matériau est le polymère PMMA avec le module de Young $E = 3.24\ GPa$ et le coefficient de poisson $\nu = 0.35$. Sa densité de masse est $\rho = 1190\ kg/m^3$ et son énergie de rupture est $\mathcal{G}_c = 350\ J/m^2$.

Des déplacements en mode anti-plan sont imposés sur les bords supérieurs et inférieurs, comme représenté à la Figure 2.14. Le chargement se fait en deux étapes. Premièrement, une solution d'équilibre est obtenue en appliquant le déplacement critique de la mécanique de rupture en mode III : $u_3^s = \sqrt{\frac{2h\mathcal{G}_c}{\mu}}$, où $h = 4\ mm$ est la hauteur de l'échantillon. Ensuite, la solution d'équilibre est prise comme condition initiale pour le problème d'évolution

FIGURE 2.14 – Chargement et géométrie de l'échantillon.

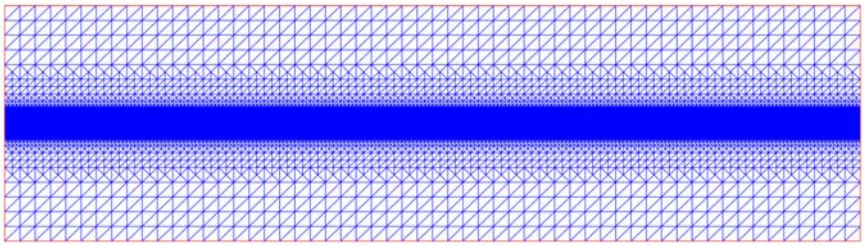

FIGURE 2.15 – Maillage structuré avec plusieurs zones de raffinement autour de la ligne horizontale centrale.

dynamique correspondant au déplacement appliqué :

$$u_3^d(t) = u_3^s + \frac{v_{ap}t^2}{2t_r} \tag{2.52}$$

où v_{ap} est une vitesse constante, t est le temps et $t_r = 8.10^{-6}s$ est un temps de référence.

La loi d'évolution d'endommagement (2.51) associée à l'équation macroscopique de mouvement (2.20) est considérée. En ce qui concerne les coefficients effectifs, nous adopterons l'approximation isotrope linéaire $C_{3131}(d) = (1-d)2\mu$, $C_{3232}(d) = (1-d)2\mu$ et $C_{3132} = 0$. Cela correspond à la relation contrainte-déformation de la mécanique d'endommagement standard appliquée au cas anti-plan (2.2) dans le cas isotrope dans lequel les deux coefficients non nuls sont affectés de la même façon par la variable d'endommagement d. Cette forme particulière peut être considérée comme une approximation de la moyenne des coefficients, calculés pour des orientations arbitraires des micro-fissures [138]. Notons que pour les micro-fissures horizontales ou verticales, les coefficients $C_{3131}(d)$ et $C_{3232}(d)$ représentent respectivement des approximations linéaires des courbes données dans les Figures 2.6 et 2.5, le coefficient $C_{3132}(d) = 0$, comme expliqué à la fin de la deuxième section.

Le domaine rectangulaire est discrétisé à l'aide de maillages structurés avec des éléments triangulaires à déplacements linéaires. Un tel maillage est reproduit dans la Figure 2.15. Le maillage est progressivement raffiné à partir des bords supérieurs/inférieurs vers la ligne centrale. Les résultats des calculs sont obtenus pour des maillages ayant une taille d'éléments dans la zone centrale égale à 0.006 mm et comptant environ 140.000 éléments au total dans le domaine de l'échantillon.

Pour la résolution en temps du système élasto-dynamique, on utilise un solveur à pas variable et ordre variable, basé sur des formules de dérivation numérique et implémenté d'origine dans le logiciel de calcul Matlab [95]. Celui-ci est couplé avec un schéma de calcul en temps explicite pour la loi d'endommagement (2.51). Le pas de temps $\Delta t = 1.5\times10^{-10}$ s est utilisé pour les simulations.

2.5.2 Indépendance de maillage

Dans cette section, nous abordons la question de l'objectivité des calculs numériques par rapport au maillage des éléments finis. On sait que les modèles dépendants de vitesse

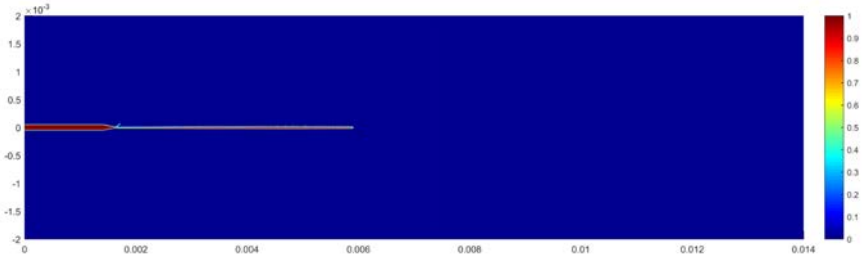

FIGURE 2.16 – Carte d'endommagement décrivant la propagation de la fissure macroscopique pour un maillage élément fini de 49976 éléments et une taille d'élément central de 0.012 mm.

et, en particulier, les modèles d'endommagement visqueux [43, 4, 132, 20] introduisent un effet de régularisation et évitent la dépendance du maillage. Le modèle d'endommagement (2.51) appartient à cette catégorie de modèles et il devrait avoir un effet de régularisation similaire.

Afin d'étudier l'influence de la maillage, nous évaluons la dissipation d'énergie due à l'évolution de l'endommagement. Sa densité volumique est donnée par :

$$\mathcal{D}(t) = \int_0^t Y(s)\frac{dd}{ds}\, ds \tag{2.53}$$

et la dissipation globale, sur l'ensemble du spécimen, est calculée en additionnant les contributions de tous les points d'intégration du maillage.

Pour le spécimen PMMA décrit précédemment, avec la vitesse appliquée $v_{ap} = 0$ et la longueur de micro-structure $\varepsilon = 0.1\ mm$, la zone endommagée correspond à une fissure macroscopique droite comme le montre la Figure 2.16. La courbe d'évolution de

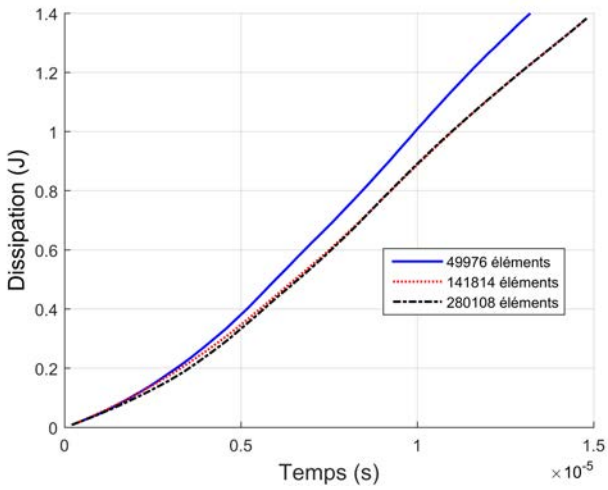

FIGURE 2.17 – Evolution de la dissipation totale en fonction de temps pour trois tailles d'éléments du maillage : 0.012 mm, 0.006 mm et 0.0038 mm.

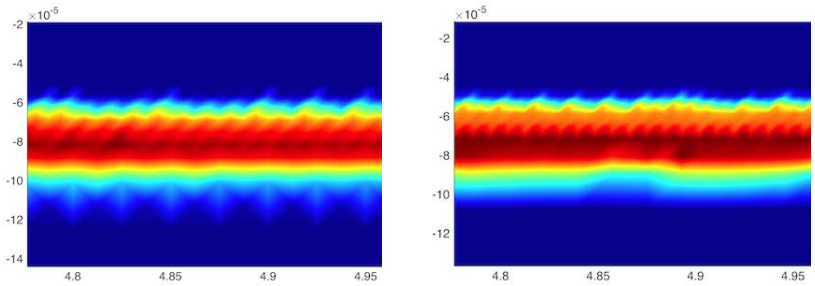

FIGURE 2.18 – Zone d'endommagement pour deux différents types de maillages : 0.006 mm et 0.0038 mm.

dissipation en fonction du temps est représentée à la Figure 2.17 pour trois différentes tailles d'éléments du maillage : 0.012 mm (49976 éléments), 0.006 mm (141814 élements) et 0.0038 mm (280108 éléments).

Nous notons une augmentation de la dissipation dans les premiers stades de la propagation jusqu'à ce que la fissure atteigne un taux de dissipation plutôt constant. Pour les deux derniers maillages raffinés, les courbes de dissipation sont quasiment identiques. Cela nous permet de conclure qu'il n'y a pas de sensibilité de la dissipation d'endommagement par rapport à la taille des éléments finis.

Les zones d'endommagement pour les deux maillages de taille 0.006 mm et 0.0038 mm sont représentées à la Figure 2.18. Nous notons que le raffinement du maillage n'a pas vraiment d'effet sur la taille de la bande d'endommagement. Ceci est la conséquence de l'effet régularisant de la loi d'évolution (2.51). Dans la section suivante, il sera démontré que la taille de la zone d'endommagement est contrôlée par la longueur de la microstructure ε, comme pour le modèle similaire obtenu dans le cas plan [78, 38, 39].

2.5.3 Instabilités de branchement en rupture dynamique

Les résultats des expériences sur la rupture dynamique des matériaux amorphes fragiles [116, 117] ont révélé l'existence d'une vitesse critique de pointe de fissure, inférieure à la vitesse limite théorique. Au-dessus de cette vitesse critique, l'énergie dissipée par la rupture augmente considérablement. Sharon et al. [127, 128] ont attribué cet effet de saturation de la vitesse à l'émergence d'événements répétitifs et frustrés de micro-branchement le long de la fissure principale. La conséquence de la formation d'un système multi-fissures avec une topologie complexe est la fluctuation de la vitesse à la pointe de la fissure principale, sur une échelle de temps caractéristique d'une durée de vie de micro-branches. Dans le PMMA, cette échelle de temps est d'environ $1\mu s$ et la taille des micro-branches est d'environ quelques centaines de μm, environ trois ordres de grandeur inférieures à celles de l'échantillon.

A notre connaissance, il n'y a pas de résultats expérimentaux disponibles concernant la vitesse critique de fissure et les instabilités de branchements pour le cas anti-plan, seules quelques études théoriques ont été réalisées. Karma et Lobkovsky [77] ont utilisé un modèle de champ de phase [76] pour simuler la rupture dynamique en mode III dans

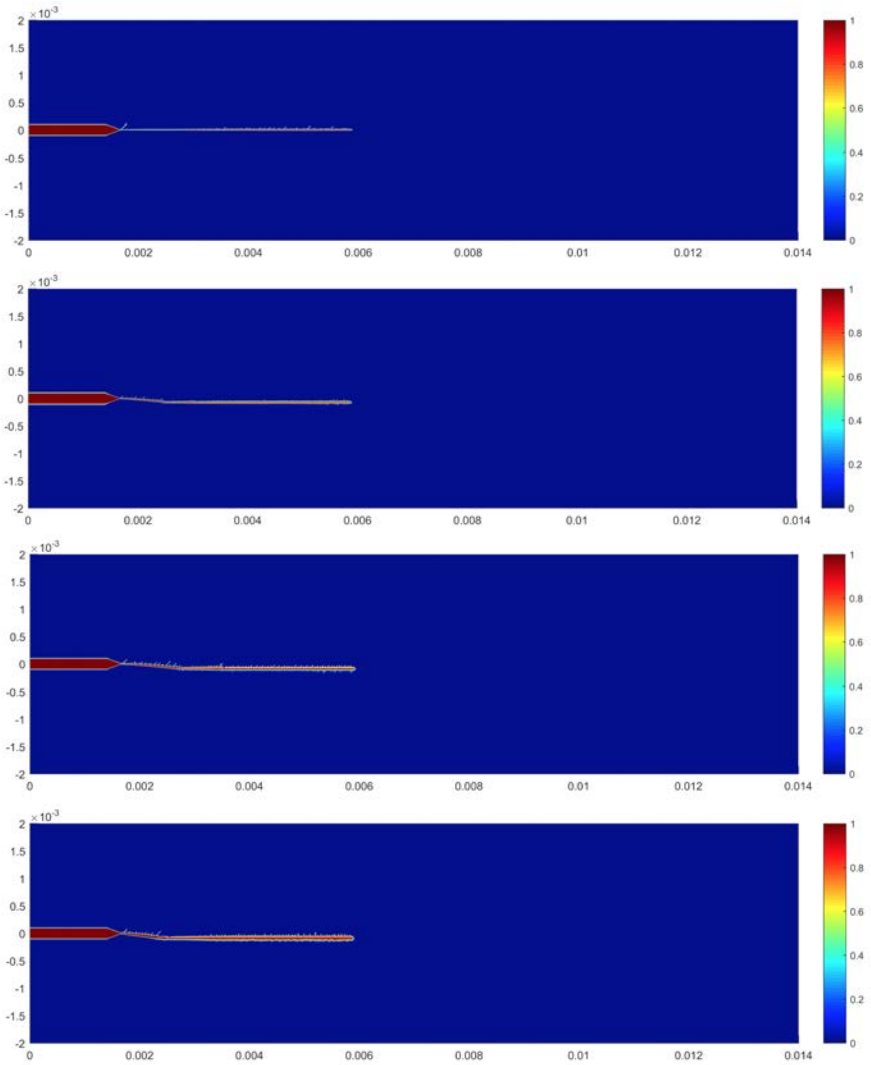

FIGURE 2.19 – Carte d'endommagement pour différentes valeurs de tailles de microstructure : $\varepsilon = 0.03\ mm$, $\varepsilon = 0.05\ mm$, $\varepsilon = 0.075\ mm$ et $\varepsilon = 0.1\ mm$.

des matériaux fragiles. Ils ont trouvé une vitesse critique pour le branchement d'environ $v_c = 0.41c$. Leur résultat est conforme à celui obtenu dans [2], où une analyse de bifurcation a été effectuée pour une rupture dynamique et a montré qu'une division de la pointe est énergiquement possible en mode III pour des vitesses supérieures à $v_c = 0.39c$.

Au-delà de la valeur critique v_c, une seule ou des multiple fissure peuvent exister, selon le mode de déclenchement, avec une probabilité finie de bifurquer dans chaque intervalle de temps [25]. On s'attend à ce qu'un tel scénario soit également vrai pour les simulations avec le modèle d'endommagement actuel. Dans les calculs éléments finis, le maillage peut jouer un rôle similaire à celui des hétérogénéités microscopiques déclenchant les instabilités de branchement. La géométrie du système multi-branchement dépendra de tous ces événements de bifurcation à différents pas de temps pendant la propagation. Afin d'avoir un certain contrôle sur la formation des branches, il peut être judicieux d'utiliser un maillage orienté structuré comme illustré sur la Figure 2.15.

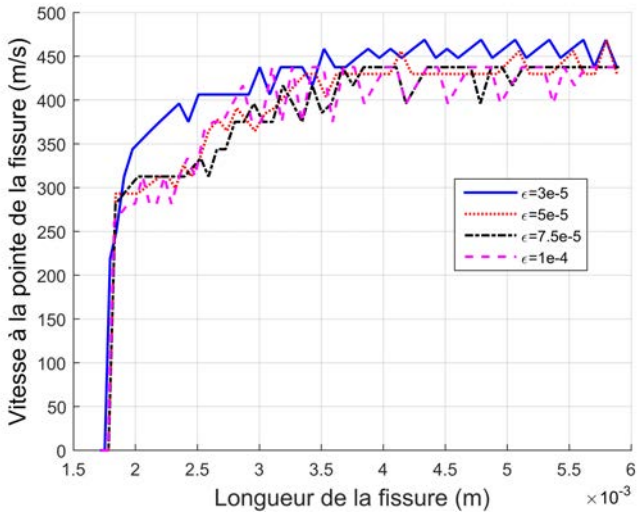

FIGURE 2.20 – Vitesse de la fissure principale en fonction de sa longueur pour différentes valeurs de ε.

Nous étudions d'abord l'influence de la longueur microscopique ε. Dans la Figure 2.19 nous représentons la distribution de l'endommagement pour différentes valeurs des tailles micro-structurelles : $\varepsilon = 0.03\ mm$, $\varepsilon = 0.05\ mm$, $\varepsilon = 0.075\ mm$ et $\varepsilon = 0.1\ mm$. Dans ces simulations, la vitesse appliquée $v_{ap} = 0$. La géométrie aiguë de l'entaille, représentée comme une zone d'endommagement initial, conduit à la formation d'une fissure secondaire dans l'étape d'initiation mais d'une durée de vie relativement courte.

L'orientation du maillage induit la formation de micro-branchement essentiellement dans la partie supérieure de la fissure principale et cela conduit à une trajectoire légèrement déviante vers le bas. L'effet de ε est observé au niveau de la taille de la région d'endommagement localisé. L'épaisseur de la fissure macroscopique et la zone d'endommagement correspondante augmentent avec ε. Ceci est conforme à l'analyse unidimensionnelle dans [38] où il a été prouvé, dans le cas plan, que ε contrôle la taille de la zone de localisation.

La Figure 2.20 montre la vitesse de fissure en fonction de la longueur de la fissure,

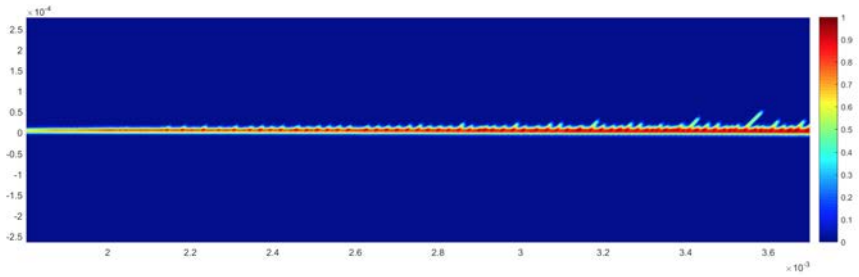

FIGURE 2.21 – Zoom sur la zone d'endommagement : régime de fissure unique suivi d'une fissure principale avec des micro-branches.

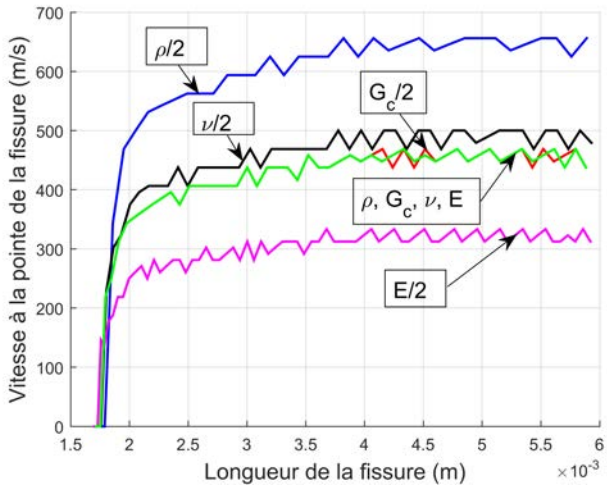

FIGURE 2.22 – Vitesse de la fissure principale en fonction de sa longueur pour les variations des paramètres du matériau par rapport aux paramètres initiaux du PMMA.

pour différentes valeurs de la longueur microscopique ε. Nous observons que, pour de petites valeurs de ε, des vitesses de fissure plus grandes sont développées. Ceci correspond à un comportement plus fragile tel que remarqué dans l'analyse locale de la section précédente. Nous notons le comportement fluctuant de la vitesse de fissure correspondant à l'émergence d'événements de micro-branchement, tel que rapporté par les recherches expérimentales.

Dans le premier cas, pour $\varepsilon = 0.03\ mm$, nous observons clairement la présence d'un seul régime de fissures avant la formation de micro-branches. Pour mieux analyser cette limite, une carte d'endommagements agrandis a été donnée à la Figure 2.21. On remarque que le régime de fissure unique se termine près de $x = 2.2 \times 10^{-3} m$. La vitesse de fissure correspondante à la Figure 2.20 est d'environ $v_c = 380 m/s$. Pour le matériau PMMA $c = 1004,2 m/s$ et nous obtenons une relation approximative $v_c = 0.38c$. Ce résultat est en accord avec l'analyse théorique [2] où le seuil $v_c = 0.39c$ a été trouvé pour l'instabilité de branchement. La valeur de v_c est également très proche de celle obtenue par Karma and Lobkovsky [77] par simulations numériques, en utilisant un modèle de champ de phase.

Le fait que les micro-branches se développent essentiellement sur le côté supérieur de la fissure principale est la conséquence de l'orientation du maillage, en tant que source d'événements de bifurcations. Une orientation de maillage arbitraire conduira à la formation de branches des deux côtés de la zone d'endommagement, comme dans les situations physiques réelles où les hétérogénéités matérielles déclenchent la formation de micro-branches.

La Figure 2.22 montre la vitesse de la poinde de la fissure principale en fonction de sa longueur, pour différentes valeurs des paramètres de matériau variés par rapport à ceux du PMMA. Des changements importants sont obtenus lorsque le module Young E ou la densité de masse ρ est divisé par deux, tandis qu'une plus petite perturbation est observée pour la diminution du coefficient de Poisson ν. Il est important de noter que ces changements conduisent à la modification de la vitesse d'onde de cisaillement c et que la

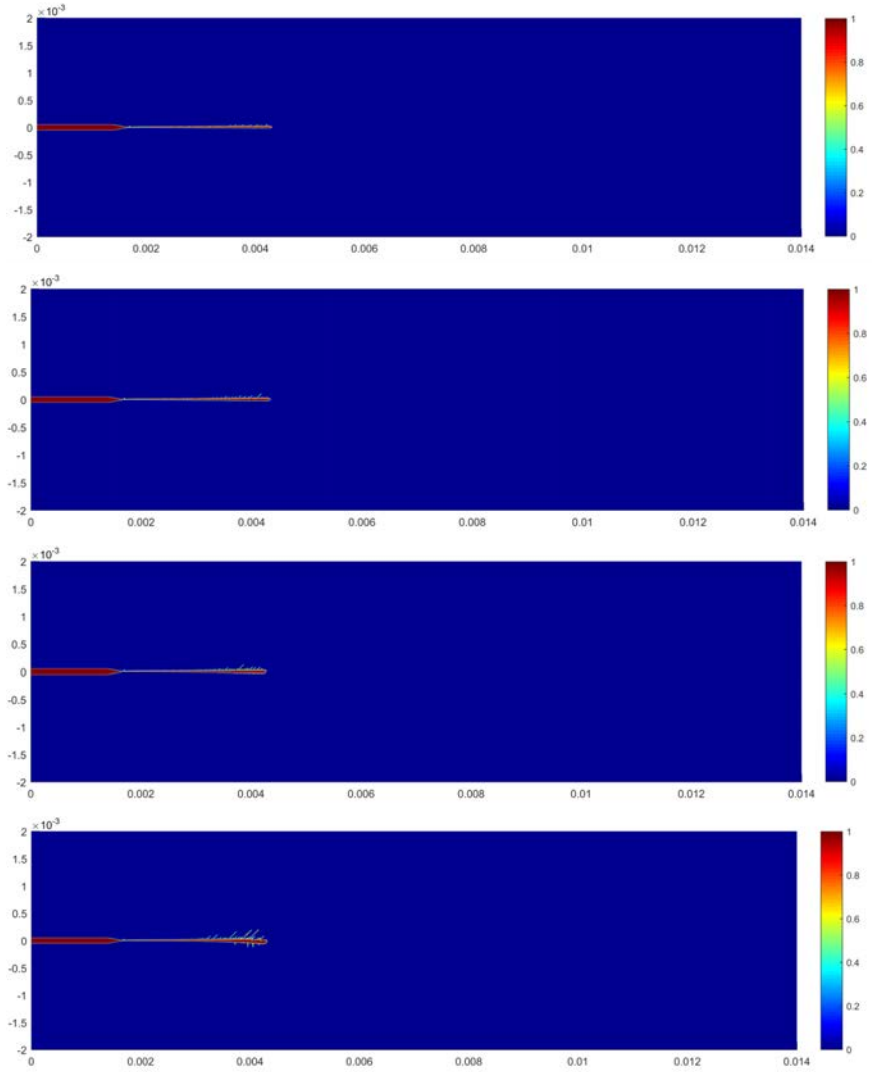

FIGURE 2.23 – Cartes d'endommagement pour différentes vitesses de chargement : $v_{ap} = 0\,m/s$, $v_{ap} = 3\,m/s$, $v_{ap} = 6\,m/s$ et $v_{ap} = 12\,m/s$.

vitesse critique vérifie encore $v_c \simeq 0.38c$. La variation de l'énergie critique de rupture G_c n'a pas d'influence majeure sur l'évolution de la vitesse de fissure macroscopique.

Enfin, nous étudions l'effet de la vitesse de chargement sur l'évolution de l'endommagement. La Figure 2.23 montre les distributions d'endommagement pour les vitesses appliquées : $v_{ap} = 0\,m/s$, $v_{ap} = 3\,m/s$, $v_{ap} = 6\,m/s$ et $v_{ap} = 12\,m/s$. Dans ces simulations $\varepsilon = 0.05\ mm$ et l'épaisseur de la zone d'endommagement initial est réduite à la moitié par rapport à celle de la Figure 2.19.

Les cartes d'endommagement montrent la formation progressive de fissures secondaires de tailles augmentant du micro aux macro-branchements, lorsque la vitesse appliquée augmente. Les évolutions correspondantes, en fonction du temps, des vitesses de la pointe de fissure macroscopique sont représentées dans la Figure 2.24. On peut remarquer que pour des valeurs élevées de v_{ap}, la macro-fissure se propage avec une vitesse légèrement

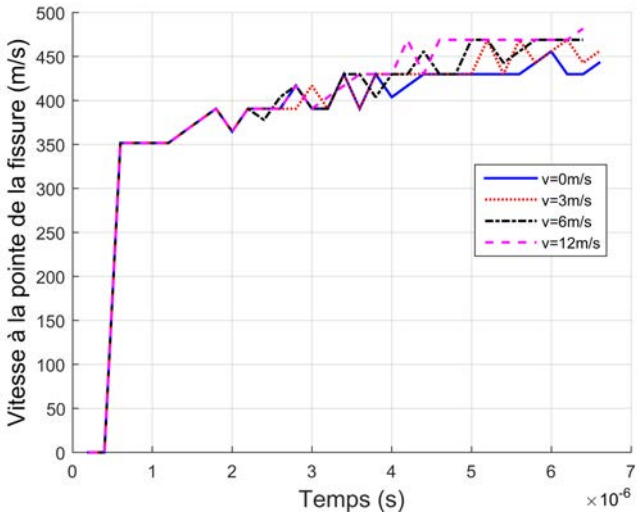

FIGURE 2.24 – Vitesse de pointe de la fissure principale en fonction du temps pour différentes vitesses appliquées.

plus grande.

L'évolution temporelle de la dissipation due à la propagation de l'endommagement est représentée dans la Figure 2.25 pour les quatre valeurs de la vitesse appliquée. On remarque une dissipation plus importante pour des vitesses élevées. Ceci est en accord avec les observations expérimentales dans le cas plan [116, 117, 127, 128,] qui rapportent l'augmentation de la dissipation d'énergie associée à l'effet de saturation pour la vitesse

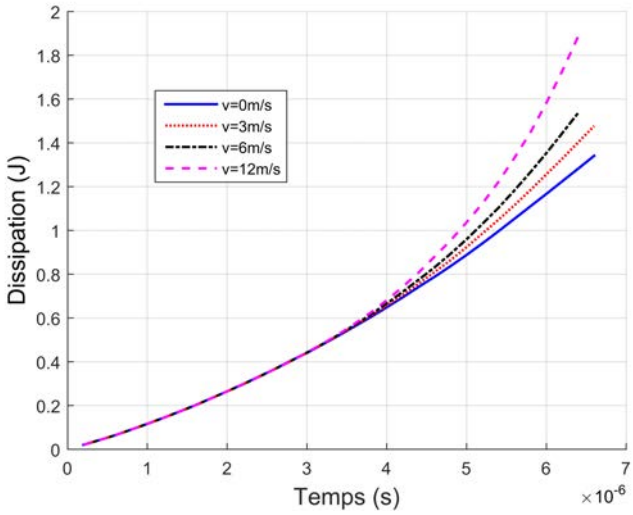

FIGURE 2.25 – Dissipation due à l'endommagement en fonction du temps pour différentes vitesses appliquées.

de la fissure.

2.6 Conclusions

Un modèle à double-échelle d'endommagement dynamique a été proposé pour le cas d'un chargement anti-plan. La loi d'endommagement a été déduite par homogénéisation asymptotique à partir d'un critère de propagation de type Griffith décrivant la propagation dynamique des micro-fissures.

Le nouveau modèle d'endommagement contient un paramètre de longueur microscopique, caractérisant la distance mutuelle entre les micro-fissures voisines. Les simulations macroscopiques des réponses locales et de structure ont révélé des influences spécifiques de la taille de microstructure et de la vitesse de chargement.

Des simulations éléments finis de la rupture dynamique d'un échantillon de PMMA à taille réduite ont été réalisées et l'émergence d'instabilités de micro-branchement a été étudiée numériquement. Les caractéristiques importantes rapportées dans les études expérimentales de solides amorphes fragiles, sollicités dans le cas plan, et des résultats théoriques concernant le cas anti-plan ont été retrouvés par les prédictions du nouveau modèle. Il a été montré que la valeur théorique de la vitesse critique, pour laquelle les bifurcations de fissure sont énergétiquement possibles en mode III, correspond bien à la transition entre un régime de fissure unique et le système multi-fissures formé par la fissure principale et les micro-branches. Les fluctuations de vitesse observées dans le deuxième régime et l'augmentation de l'énergie dissipée avec l'augmentation de la vitesse de fissure ont été reproduites par les simulations avec le nouveau modèle d'endommagement.

Chapitre 3

Effets de vitesse de chargement sur la rupture dynamique des structures

Sommaire

3.1 Introduction **67**
3.2 Modèle d'endommagement dynamique **69**
3.3 Essai de traction directe **73**
3.4 Essai sur l'échantillon en forme de L **77**
3.5 Essai d'impact sur échantillon CCS **81**
3.6 Essai LECEI sur des échantillons de calcaire **84**
3.7 Conclusions **87**

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter des résultats des simulations numériques, avec le modèle d'endommagent double-échelle proposé dans [78, 39]. Ce modèle est obtenu par homogénéisation asymptotique à partir des microstructures avec des fissures qui se propagent en mode I dynamique. L'objectif de ce chapitre est d'illustrer les capacités prédictives du modèle pour les effets de la vitesse de chargement sur différents essais de rupture dynamique. Les résultats présentés ici complètent ceux de [78, 39] et ont été publiés dans [6, 7].

Au cours des dernières décennies, de nombreux travaux expérimentaux, numériques et théoriques ont été publiés sur la rupture dynamique des matériaux (quasi-)fragiles [11, 14, 21, 26, 46, 57, 55, 80, 88, 89, 91, 93, 105, 106, 120, 140].

Pour la rupture en mode I du béton, la plupart des travaux expérimentaux se sont concentrés sur la dépendance de la résistance en traction de la vitesse de déformation, principalement en utilisant des méthodes indirectes telles que les essais avec des barres de Hopkinson, conduisant aux défauts d'écaillage après la réflexion de l'onde de compression initiale à l'extrémité libre de l'échantillon [26, 46, 55, 80, 93, 140].

Cependant, la vitesse de chargement influe non seulement sur la résistance mais aussi sur le mode de rupture en induisant des trajectoires différentes des fissures ou l'apparition de systèmes de fissures multi-branches. Pour les bétons, les essais de traction directe et de l'échantillon en forme de L effectuées par Ozbolt et al. [107, 108] indiquent que l'augmentation de la vitesse de chargement modifie les chemins de rupture montrant des déviations prononcées par rapport à la direction de propagation quasi-statique et la formation de multiples branches. Rittel et Maigre [122, 123] ont utilisé un essai d'impact (Compact Compression Test) pour caractériser l'angle initial de branchement et la ténacité dynamique en traction du PMMA. Les auteurs ont montré que cet angle initial de branchement augmente avec la vitesse d'impact. Le test classique de Kalthoff, conduisant à une rupture de mode I sous un chargement d'impact en mode II, a été utilisé par Bertram et Kalthoff [18, 19] pour des roches fragiles comme le calcaire. Un développement spécifique du système de fissures multi-branches est observé à des vitesses de chargement élevées. Le but de cet chapitre est de reproduire tous ces résultats expérimentaux en utilisant le modèle d'endommagement dynamique proposé dans [78, 39].

Malgré les progrès importants réalisés au cours des dernières décennies par les approches de la mécanique de la rupture, elles demeurent difficiles à appliquer pour la modélisation de systèmes complexes de multi-fissures. Les modèles d'endommagement sont particulièrement intéressants pour cette tâche. Des lois d'endommagement de type visqueux, à effet retard, sensibles à la vitesse de sollicitation, ont été proposées par exemple dans [3, 4, 43, 81]. Des efforts ont été faits pour construire des modèles d'dommagement tenant compte des évolutions micro-structurelles, comme ceux proposés dans [48, 113, 121].

On sait que la propagation des micro-fissures joue un rôle essentiel dans la défaillance de matériaux quasi-fragiles comme le béton et les roches. Ceci motive la construction de modèles multi-échelles d'endommagement basés sur des évolutions explicites de micro-fissures. Une telle loi d'endommagement dynamique a été proposée dans [**?**, 78, 39] pour prédire la rupture rapide des matériaux fragiles. Le modèle est déduit à partir de l'évolution des micro-fissures en mode I dynamique, en adaptant la méthode d'homogénéisation asymptotique proposée dans [34].

Ce modèle d'endommagement dynamique à deux échelles est adopté dans la présente étude pour reproduire les expériences rapportées dans [18, 107, 108, 122]. Des simulations par éléments finis de ces tests sont effectuées et les résultats sont comparés avec les résultats expérimentaux, en mettant l'accent sur les effets de la vitesse de chargement sur les modes de rupture macroscopique. On montrera que tous ces résultats expérimentaux concernant différents types d'effets de vitesse de chargement sur la rupture peuvent être simulés avec succès avec le modèle d'endommagement adopté.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, le modèle d'endommagement dynamique est présenté. Par la suite, les résultats des simulations numériques sont présentés pour les quatre tests dans les section 3 à 6. Des conclusions sont finalement formulées.

3.2 Modèle d'endommagement dynamique

Dans cette section, nous donnons les équations de base du modèle. Pour plus de détails concernant la procédure d'homogénéisation conduisant à la loi macroscopique présentée ici, le lecteur doit se référer à [78, 39].

Tous les champs mécaniques sont supposés dépendre des variables d'espace x_1, x_2, x_3 et du temps t. Les équations à l'échelle macroscopique sont obtenues en utilisant la méthode d'homogénéisation asymptotique pour un milieu micro-fissuré localement périodique. La période élémentaire est un carré de taille ε qui contient une microfissure droite, centrée, libre de contrainte, de longueur l. La variable d'endommagement est définie comme la longueur normalisée $d = l/\varepsilon$, représentant également la longueur d'une micro-fissure dans la cellule unitaire associée. L'hypothèse de périodicité locale permet des variations spatiales de la variable macroscopique $d(x_i, t)$ correspondant à des variations de la longueur de fissure microscopique l, avec une taille de période fixe ε.

Pour formuler le problème initial concernant le solide multi-fissuré, nous notons par $\sigma_{ij}^{\varepsilon}$ le champs de contrainte et par u_i^{ε} le champs de déplacement. Les équations de mouvement sont :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon}}{\partial t^2} \tag{3.1}$$

et les relations constitutives de l'élasticité linéaire isotrope :

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = a_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \tag{3.2}$$

où le tenseur de déformation linéarisé est $e_{ij}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)$. Pour un solide homogène isotrope, le tenseur d'élasticité linéaire a la forme $a_{ijkl} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, où E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et δ_{ij} le symbole de Kronecker. Les conditions de bord libre sont supposées sur les lèvres des micro-fissures :

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} N_j = 0 \tag{3.3}$$

où N_j sont les composantes de vecteur unitaire normal aux faces de la fissure. Des conditions de périodicité, en déplacements et contraintes, sont supposées sur les bords extérieurs des cellules de taille ε. Après l'utilisation des développements asymptotiques, dans le problème de cellule unitaire des chargements de type force sur les lèvres des fissures sont présents et dépendent de la déformation macroscopique [34, 78]. Ces conditions sont équivalentes à celles de périodicité via une déformation macroscopique imposée. Lorsque les microfissures se rapprochent des bords des cellules, on peut raisonnablement supposer que la rupture se produit au point macroscopique correspondant.

L'application de la méthode d'homogénéisation asymptotique [34, 78] conduit à l'équation macroscopique du mouvement :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3.4}$$

et à la relation constitutive homogénéisée

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d) e_{kl}(\mathbf{u}) \tag{3.5}$$

pour les champs de déplacement macroscopique $u_i(x_j, t)$ et d'endommagement $d(x_j, t)$ avec les coefficients effectifs C_{ijkl} dépendant de la variable d.

Dans les travaux précédents [34, 37, 40, 56, 144] les coefficients $C_{ijkl}(d)$ ont été obtenus par des calculs sur la cellule unitaire contenant une seule fissure et avec des conditions aux limites périodiques. L'orientation particulière des microfissures conduit à une anisotropie induite par l'endommagement et, comme montré dans [34], pour $d = 1$ la rigidité normale s'annule à cause de la coalescence de microfissures dans le système périodique.

Dans la présente étude, nous adopterons l'expression classique de la mécanique d'endommagement comme étant l'approximation linéaire de $C_{ijkl}(d)$:

$$C_{ijkl}(d) = (1 - d)^{\alpha} a_{ijkl} \tag{3.6}$$

où a_{ijkl} sont les coefficients élastiques du matériau vierge, supposés homogènes et isotropes. Dans toutes les simulations présentées dans les sections suivantes, les échantillons peuvent être considérés comme macroscopiquement isotropes, avec des micro-fissures se développant dans diverses directions à petite échelle. Pour les cas spéciaux, comme ceux des matériaux stratifiés, une réponse anisotrope devrait être supposée comme conséquence des directions préférentielles d'évolution des micro-fissures.

La propagation des micro-fissures est décrite à l'échelle macroscopique par l'évolution en temps de la variable d'endommagement $d(x_i, t)$ dans un point matériel donné. Afin d'obtenir une loi d'évolution d'endommagement, une approche spécifique a été proposée dans [34, 39, 56, 78] à partir d'un critère de rupture microscopique de type Griffith impliquant le taux de restitution d'énergie dynamique [57] :

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \lim_{r \to 0} \int_{\Gamma_r} (U + T) n_1 - \sigma_{ij}^{\varepsilon} n_j \frac{\partial u_i^{\varepsilon}}{\partial x_1} \, dS \tag{3.7}$$

où

$$U = \frac{1}{2} a_{mnkl} e_{kl}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) e_{mn}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \quad ; \quad T = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t} \tag{3.8}$$

sont respectivement l'énergie de déformation et la densité d'énergie cinétique. Ici Γ_r est un cercle d'un rayon infinitésimal r entourant la pointe de la fissure et $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante sur le cercle Γ_r.

La propagation de chaque microfissure est supposée être symétrique par rapport au centre de la période et se produit lorsque le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}^{d\varepsilon}$ atteint l'énergie critique de rupture $\mathcal{G}_c$ du matériau. Plus précisément, l'évolution des microfissures est gouvernée par les relations suivantes :

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} \leq \mathcal{G}_c \; ; \; \frac{dl}{dt} \geq 0 \; ; \; \frac{dl}{dt}(\mathcal{G}^{d\varepsilon} - \mathcal{G}_c) = 0 \tag{3.9}$$

En utilisant l'approche d'homogénéisation proposée dans [34, 78] on obtient la relation d'endommagement suivante :

$$\dot{d} \left(\frac{1}{2} \frac{dC_{ijkl}(d)}{dd} e_{xkl}(\mathbf{u}) e_{xij}(\mathbf{u}) + \frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon g(v)} \right) = 0 \tag{3.10}$$

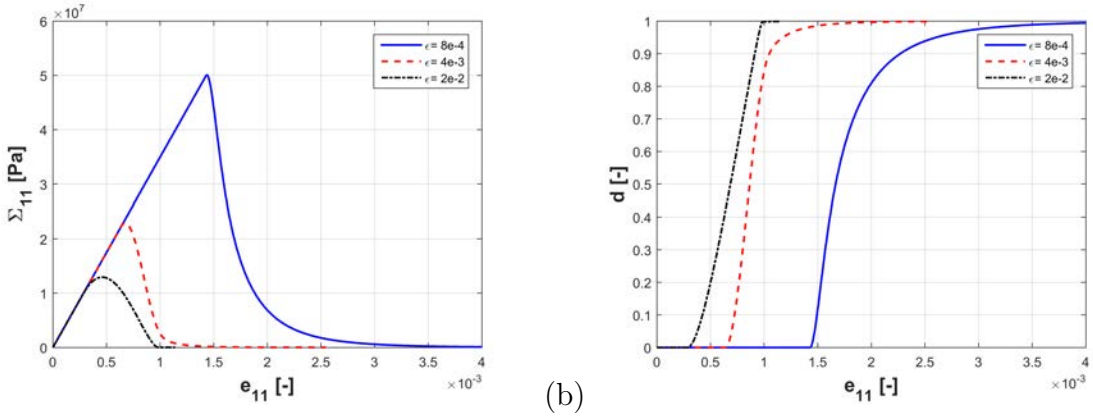

FIGURE 3.1 – Les réponses en contrainte (a) et endommagement (b) pour les longueurs micro-structurelles $\varepsilon = 8e-4\,m$, $\varepsilon = 4e-3\,m$, $\varepsilon = 2e-2\,m$ et le paramètre $\alpha = 1.4$.

La fonction universelle $g(v)$ de la vitesse de pointe de fissure v fait le lien entre les taux de restitution d'énergie dynamique et quasi-statique $\mathcal{G}^{d\varepsilon} = g(v)\mathcal{G}^{\varepsilon}$ et peut être approximée par la formule [57] :

$$g(v) \approx (1 - \frac{v}{C_R}) \tag{3.11}$$

où C_R est la vitesse des ondes de Rayleigh.

La vitesse des pointes de micro-fissure peut être écrite comme $v = \frac{d}{dt}(\frac{l}{2}) = \frac{\varepsilon}{2}\dot{d}$ et la combinaison avec (3.11) dans (3.10) conduit à la loi d'évolution d'endommagement :

$$\dot{d} = \frac{2C_R}{\varepsilon}\left\langle 1 + \frac{\mathcal{G}_c}{\frac{\varepsilon}{2}\frac{dC_{ijkl}(d)}{dd}e_{kl}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u})}\right\rangle \tag{3.12}$$

où $\langle . \rangle$ représente la partie positive. Si nous introduisons le taux de restitution d'énergie d'endommagement $Y = -\frac{1}{2}\frac{dC_{ijkl}(d)}{dd}e_{kl}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u})$ alors la loi devient [39, 78] :

$$\dot{d} = \frac{2C_R}{\varepsilon}\left\langle 1 - \frac{\mathcal{G}_c}{\varepsilon Y}\right\rangle \tag{3.13}$$

Nous notons que la compatibilité thermodynamique est assurée via la fonction d'énergie libre macroscopique $\Psi = \frac{1}{2}C_{ijkl}(d)e_{kl}(\mathbf{u})e_{ij}(\mathbf{u})$ comme potentiel pour les champs associés

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial e_{kl}} \quad ; \quad Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} \tag{3.14}$$

pour les contraintes macroscopiques $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d)e_{kl}(\mathbf{u})$ et le taux de restitution d'énergie d'endommagement Y défini avant, avec $C_{ijkl}(d) = (1-d)^{\alpha}a_{ijkl}$.

La loi d'endommagement (3.13) contient le paramètre ε, représentant la distance mutuelle entre les microfissures voisines. L'influence de ε sur la réponse macroscopique a été expliquée en détails dans les travaux [38, 39, 78]. Pour illustrer cette dépendance, dans la Fig. 3.1 les courbes contrainte-déformation et endommagement-déformation uniaxiales

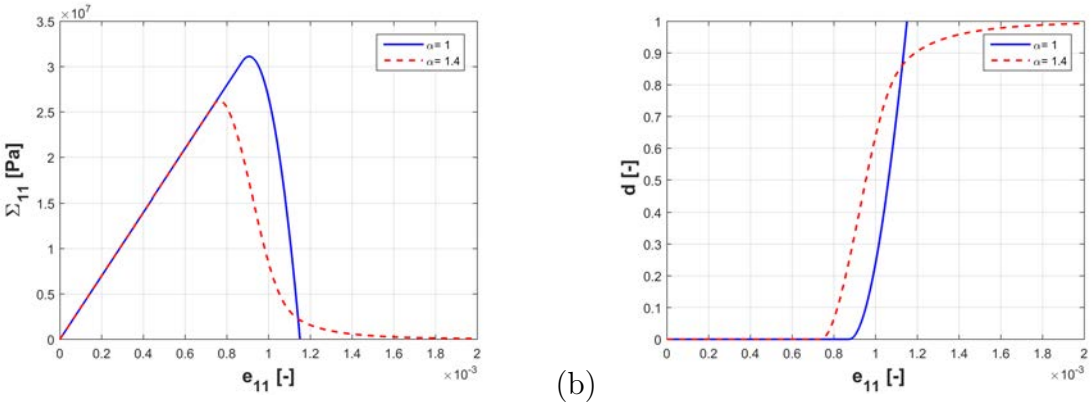

FIGURE 3.2 – Courbes contrainte-déformation (a) et endommagement-déformation (b) pour deux valeurs de l'exposant $\alpha = 1$ et $\alpha = 1.4$.

sont données pour trois longueurs micro-structurelles, avec le paramètre $\alpha = 1.4$. Notons que pour des valeurs petites de ε la résistance augmente, l'initiation de l'endommagement est retardée et le comportement est plus fragile. On retrouve ainsi le type d'influence mis en évidence pour le cas anti-plan.

Il est important de noter que sur des échantillons réels, la distribution des microfissures est beaucoup plus complexe que la distribution localement périodique supposée pour la construction du modèle. Dans ce cas, l'emploi du modèle doit être fait avec une "longueur microscopique d'un système périodique équivalent" qui permettrait des évolutions d'endommagement réalistes. Ceci implique des calibrations de ε dépendant non seulement du matériau mais aussi de la géométrie et du type de chargement appliqué.

Dans la loi (2.51), le taux de restitution d'énergie volumique Y active la propagation de l'endommagement et son expression est symétrique par rapport aux déformations de traction ou de compression. Pour éviter une rupture physiquement irréaliste en compression, nous considérons seulement la partie positive Y_+ dans l'équation (3.13). En suivant Miehe [99], nous définissons la partie positive du taux de restitution d'énergie comme suit :

$$Y_+ = \alpha(1-d)^{\alpha-1}\left(\frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left\langle tr[\mathbf{e}(\mathbf{u})]\right\rangle^2 + \frac{E}{2(1+\nu)}\,tr[\mathbf{e}_+(\mathbf{u})^2]\right) \tag{3.15}$$

avec $\langle . \rangle$ la partie positive, tr l'opérateur trace. Ici $\mathbf{e}_+(\mathbf{u})$ représente le tenseur de déformation positive, correspondant aux parties positives des déformations principales dans la décomposition spectrale de $\mathbf{e}(\mathbf{u})$.

Les expressions particulières (3.6) des coefficients effectifs combinées avec la loi d'endommagement homogénéisée (3.13) assurent une réponse d'élasto-endommagement isotrope. En ce qui concerne le paramètre α, déjà introduit dans [38], nous illustrons dans la Fig. 3.2 son influence sur la réponse locale macroscopique prédite par le modèle. Les réponses en contrainte et endommagement pour une déformation uniaxiale à vitesse de déformation constante sont tracées pour les valeurs des exposants α= 1 et $\alpha = 1.4$. Nous notons surtout les différences pour le régime post-pic : pour α= 1, nous obtenons un

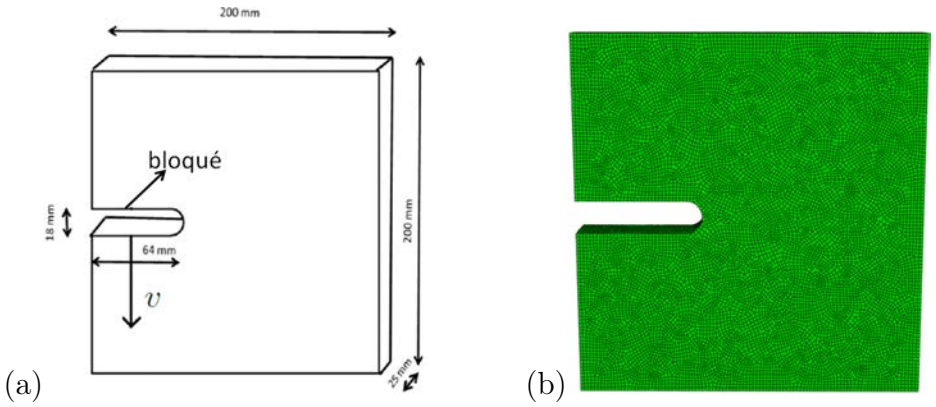

FIGURE 3.3 – Géométrie (a) et maillage (b) de l'échantillon de traction directe.

radoucissement plus fragile alors que pour $\alpha = 1.4$, le régime post-pic correspond au comportement quasi-fragile, avec une rupture complète atteinte asymptotiquement. Dans les sections qui suivent, cette dernière valeur sera utilisée dans les simulations pour les bétons et le calcaire, alors que pour le matériau PMMA la valeur α=1 sera considérée.

Dans les sections suivantes, le système d'élasticité et endommagement couplé (3.4), (3.6), (3.13) et (3.15) sera résolus numériquement pour reproduire les résultats des essais expérimentaux.

3.3 Essai de traction directe

L'essai de traction directe est un test classique qui peut être utilisé pour déterminer la résistance en traction des matériaux. Une version de ce test est schématiquement représentée dans la Figure 3.3a. Sous des chargements quasi-statiques, une seule fissure est initiée à l'extrémité de l'entaille pré-existante et se propage dans la direction normale à celle du chargement appliqué. A des vitesse de chargement élevées, des modes de rupture plus complexes sont observés, avec des fissures qui se rapprochent de la direction de chargement et des bifurcations, comme indiqué dans [107]. Notre objectif dans cette section est de modéliser numériquement l'essai, en utilisant le modèle d'endommagement décrit précédemment, et d'analyser les influences de la vitesse de chargement sur la rupture en comparaison avec les résultats expérimentaux reportés dans [107].

La longueur, la hauteur et l'épaisseur de l'échantillon utilisé dans cet essai sont respectivement de $200\,mm$, $200\,mm$ et, respectivement, $25\,mm$. L'échantillon contient une entaille initiale de longueur $64\,mm$ et de largeur $18\,mm$ avec une pointe arrondie. Le côté supérieur de l'entaille est bloqué, tandis qu'une vitesse constante v est appliquée sur son côté inférieur.

Les propriétés du matériau béton utilisé, sont : le module de Young $E = 36\,GPa$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.18$, la densité de masse $\rho = 2400\,kg/m^3$ et l'énergie de rupture $G_c = 65\,J/m^2$. Pour les simulations actuelles, la valeur appropriée de la longueur microscopique a été trouvée comme étant $\epsilon = 3\,mm$.

Le modèle d'endommagement à deux échelles a été implémenté dans le code d'élé-

ments finis Abaqus Explicit [1] via une subroutine utilisateur VUMAT. Le domaine est discrétisé à l'aide d'éléments hexaédriques linéaires à intégration réduite. La Figure 3.3b montre le maillage d'éléments finis typique utilisé pour les calculs, avec une taille d'élément approximative de $1\,mm$.

L'analyse effectué dans [38] a montré que, pour le modèle actuel, l'endommagement localise dans les régions de taille de l'ordre de ε. Pour assurer l'objectivité du maillage, nous devons considérer les maillages d'éléments finis avec une taille d'élément inférieure à la longueur de la microstructure, ce qui sera généralement le cas dans les simulations considérées dans la présente contribution.

Trois vitesses de chargement sont considérées : a) $v = 0.5\,m/s$, b) $v = 1.4\,m/s$ et c) $v = 3.3\,m/s$. Sur la Figure 3.4 les résultats expérimentaux (côté gauche) rapportés dans [107] et les simulations numériques correspondantes (côté droit) sont présentés.

On note que pour la vitesse $v = 0.5\,m/s$, plus proche du régime quasi-statique, une seule fissure se forme à partir de l'extrémité de l'entaille et se propage dans une direction sensiblement parallèle à celle de l'entaille.

Lorsque la vitesse appliquée augmente à $v = 1.4\,m/s$, nous observons qu'une trajectoire de fissure courbe est formée, montrant une tendance de changement de mode, du mode I pur au mode mixte, avec une composante de cisaillement induite par le chargement appliqué sur la face droite de l'entaille. Il est important de noter que cette rupture en mode mixte au niveau macroscopique est obtenue à l'aide d'un modèle d'endommagement basé essentiellement sur la propagation en mode I des micro-fissures.

Une autre particularité de la propagation rapide de la fissure retrouvée dans le cas de chargement $v = 3.3\,m/s$ est le branchement de la fissure principale. Les micro-branchements sont observés dans les cas b) et c) à la suite de l'augmentation de la vitesse [39] et sont précurseurs du macro-branchement qui se produit à peu près à la moitié de la longueur de la fissure principale pour $v = 3.3\,m/s$. Nous notons que les prédictions numériques correspondent bien aux observations expérimentales concernant cette trajectoire de rupture particulière.

Les résultats des simulations numériques montrent également le développement d'effets d'endommagement secondaires, proche du côté de l'entaille où le chargement est appliqué. De telles zones de détérioration peuvent être observées sur les lèvres de l'entaille sur les images des échantillons physiques, avec une étendue moins importante. Une analyse plus poussée est nécessaire pour déterminer comment contrôler ces effets, qu'on retrouvera également dans le test de l'échantillon en forme de L présenté dans la section suivante. Cependant, des simulations effectuées en désactivant l'endommagement dans ces zones ont montré des résultats similaires sur l'évolution globale de la rupture et la dépendance de la vitesse de chargement.

Dans la Figure 3.6, nous représentons la réaction calculée sur le bord fixe de l'entaille en fonction du temps. Ces résultats sont comparés aux résultats expérimentaux [107] reproduits à la Figure 3.5. Nous observons des évolutions temporelles assez proches de la réaction avec un bon accord des valeurs maximales pour les deux vitesses appliquées. Nous remarquons également que la valeur maximale de la réaction augmente avec la vitesse de chargement.

Les valeurs maximales de la réaction sont comparées avec celles obtenues expérimentalement [107] dans la Figure 3.7, pour les trois vitesses appliquées. La réaction maximale

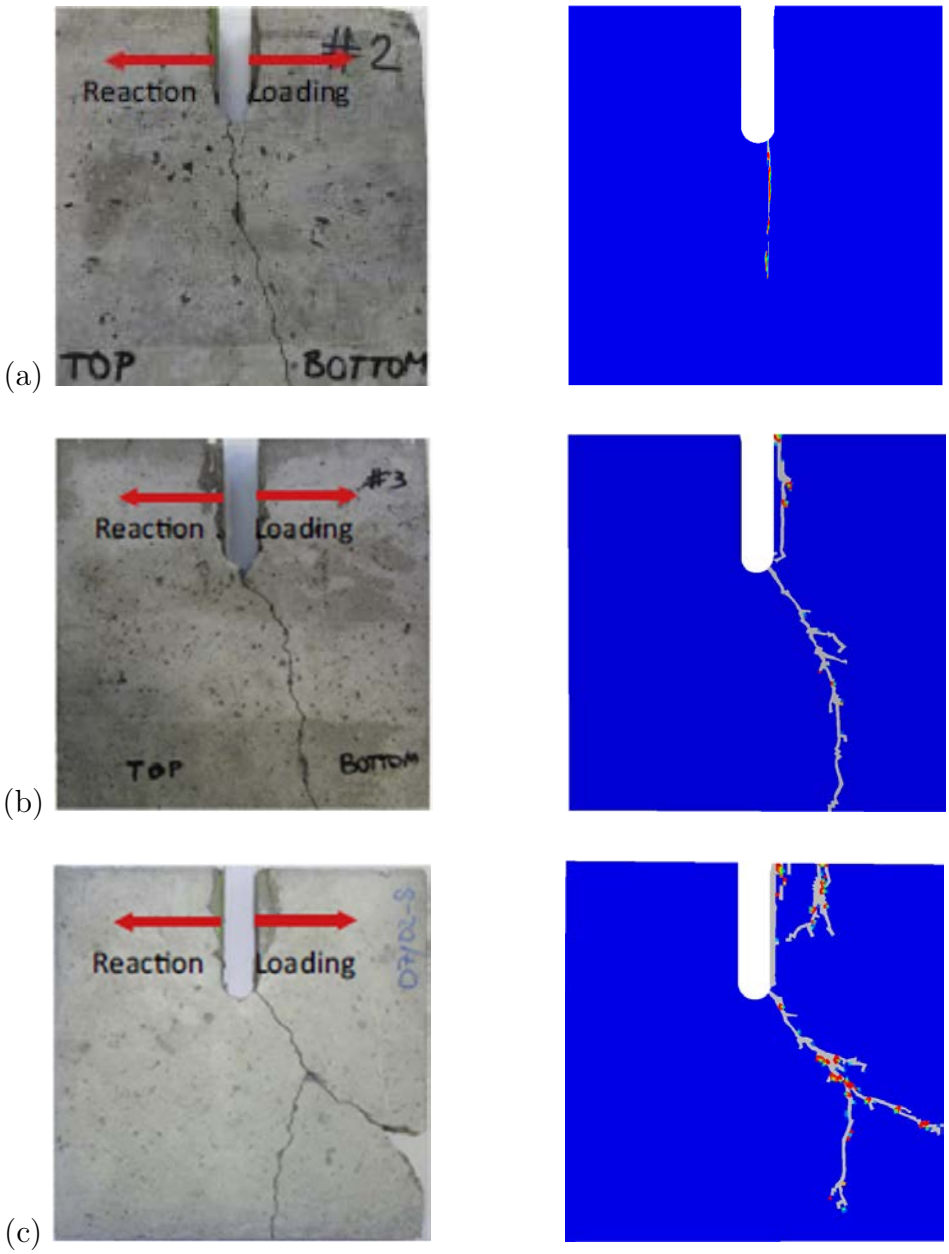

FIGURE 3.4 – Modes de rupture pour l'essai de traction directe, résultats expérimentaux [107] (à gauche) et numériques avec le présent modèle (à droite), correspondant aux vitesses de chargement : (a) $v = 0.5\,m/s$, (b) $v = 1.4\,m/s$, (c) $v = 3.3\,m/s$.

est tracée en fonction du taux de déplacement correspondant en échelle logarithmique. L'évolution prédite s'approche des valeurs expérimentales avec une augmentation plus rapide entre $v = 0.5\,m/s$ et $v = 1.4\,m/s$ et des différences de valeur de $1kN$ entre la théorie et l'essai. L'une des raisons des écarts entre les valeurs mesurées et prédites pourrait être le fait que le système de chargement complexe, avec des cadres en acier, utilisé dans [107] n'a pas été modélisé numériquement dans les présentes simulations. Pour les valeurs

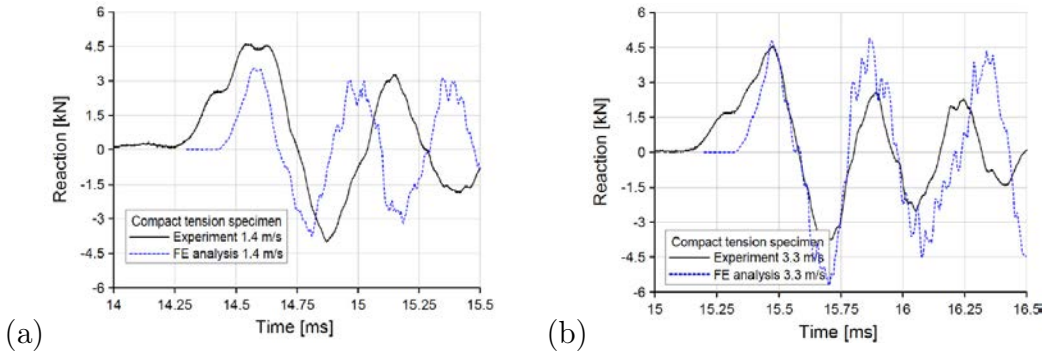

FIGURE 3.5 – La réaction mesurée [107] fonction de temps pour des vitesses de chargement (a) $v = 1.40\,m/s$ et (b) $v = 3.3\,m/s$.

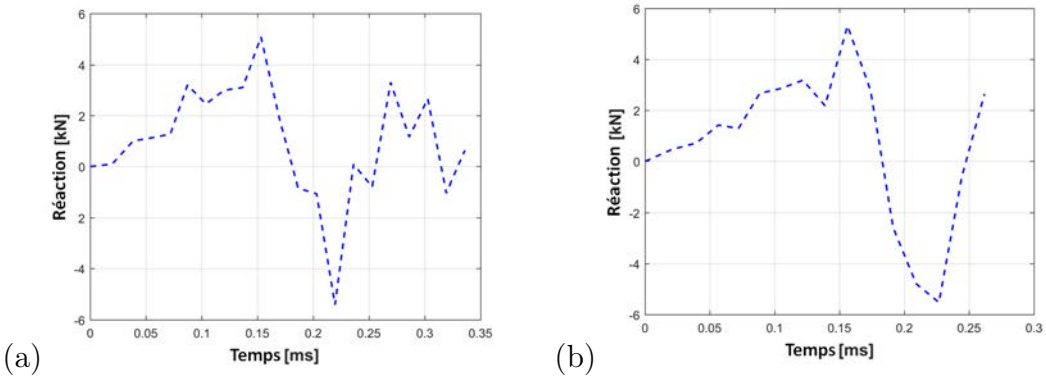

FIGURE 3.6 – Réaction numérique en fonction du temps pour les vitesses appliquées (a) $v = 1.40\,m/s$ et (b)$v = 3.3\,m/s$.

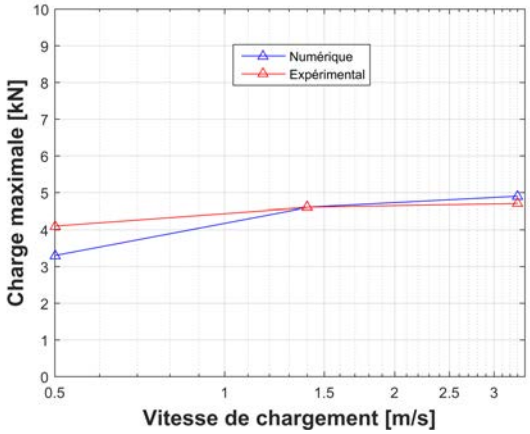

FIGURE 3.7 – Résultats numériques et expérimentaux de l'essai de traction directe : la charge maximale pour trois vitesses appliquées.

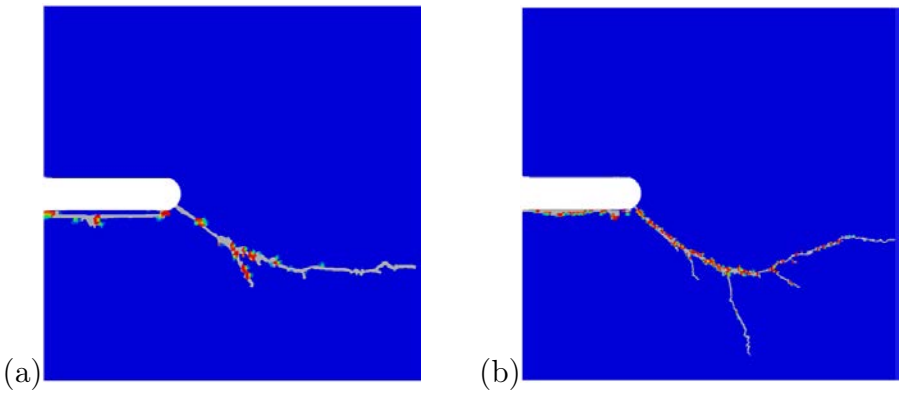

FIGURE 3.8 – Test de traction directe : simulations avec des maillages éléments finis de a) taille d'éléments $1\,mm$ et b) taille d'élément $s0.5\,mm$.

élevées de vitesse de chargement, les prédictions du modèle sont plus précises.

Nous abordons finalement la question de l'objectivité vis-à-vis du maillage éléments finis. Il est bien connu que les modèles dépendant de vitesse et, en particulier, les modèles d'endommagements visqueux introduisent un effet régularisant et évitent la dépendance pathologique au maillage. Cet effet régularisant est plus important pour des grandes vitesses de déformation. Pour une étude plus détaillée de l'objectivité de maillage du modèle d' endommagement actuel, nous renvoyons le lecteur à la référence [39].

Pour illustrer l'influence de la taille des éléments pour les simulations présentes, nous montrons dans la Fig. 3.8 les chemins de rupture pour deux maillages ayant des tailles d'éléments de $1\,mm$ et de $0.5\,mm$, dans le cas d'une vitesse de chargement $v = 1.4\,m/s$. Nous pouvons remarquer que les chemins de rupture globaux sont assez similaires, avec des trajectoires légèrement modifiées et des effets de branchement plus prononcés dans le cas du maillage raffiné. Ce dernier effet peut être compris dans le cadre des instabilités de branchement et du rôle déclencheur du maillage élément fini, comme expliqué dans [39] et dans le chapitre précédent. La comparaison des pics de chargement avec ceux présentés à la Fig. 3.7 a également révélé un bon accord.

3.4 Essai sur l'échantillon en forme de L

Le deuxième exemple que nous considérons est l'expériment du spécimen en forme de L pour le béton, tel que décrit dans [108]. La géométrie du bloc en forme de L de largeur $500\,mm$, de hauteur $500\,mm$ et d'épaisseur $50\,mm$ est illustrée sur la Figure 3.9a. Un déplacement vertical est progressivement appliqué, à vitesse constante v, sur une zone circulaire de diamètre $30\,mm$ sur le côté inférieur libre de l'échantillon (flèche à la Figure 3.9a), dont le centre est situé à $30\,mm$ du bord gauche. Des régions inférieures rectangulaires sont bloquées sur les faces avant et arrière, elles sont représentées en rouge sur la Figure 3.9a.

Les paramètre du matériau béton sont : module de Young $E = 32.2\,GPa$, coefficient de Poisson $\nu = 0.18$, densité de masse $\rho = 2210\,kg/m^3$ et énergie critique de rupture

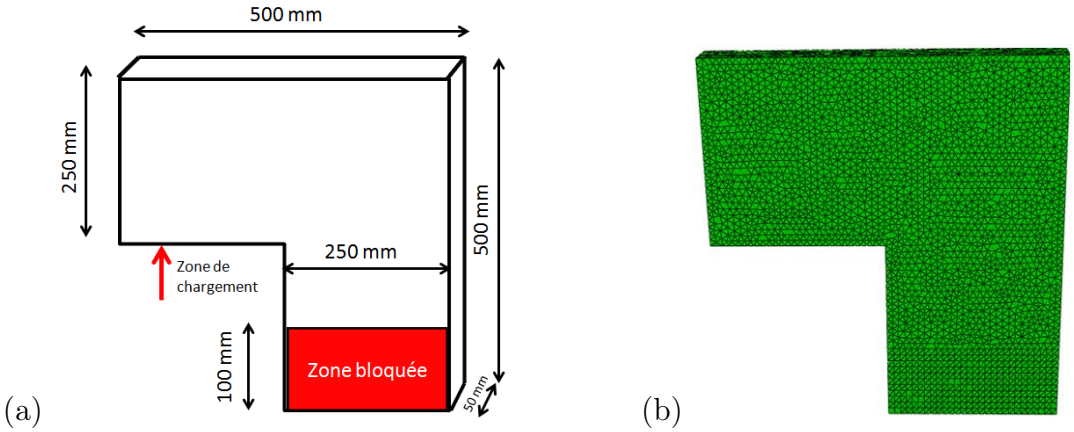

FIGURE 3.9 – Géométrie, dimensions, chargement (a) et maillage (b) pour l'échantillon en forme de L.

$G_c = 58.5\,J/m^2$. La longueur de la microstructure a été calibrée à $\epsilon = 0.006\,m$. Les calculs d'éléments finis sont effectués avec le logiciel ABAQUS. Le domaine est discrétisé avec des éléments tétraédriques à déplacement linéaire dont la taille est d'environ $2.5\,mm$. Le maillage éléments finis typique utilisé est montré à la Figure 3.9b.

Quatre taux de chargement sont pris en compte dans les simulations numériques : a) $v = 0.35\,m/s$, b) $v = 0.74\,m/s$, c) $v = 1.1\,m/s$ and d) $v = 2.4\,m/s$. Les échantillons endommagés obtenus dans les expériences [108] et les résultats numériques correspondants obtenus avec le modèle d'endommagement sont présentés dans la Figure3.10.

Comme observé dans les expériences, pour de faibles vitesses de sollicitation, une seule fissure est formée à partir du coin intérieur et après un avancement partiel dans la direction diagonale, elle tend à se rapprocher de la direction normale à celle du chargement appliqué. Cela correspond au mode I classique d'ouverture et il est ce changement de direction est retrouvé dans les simulations numériques. Dans le dernier régime, juste avant la percolation, la solution numérique devient très instable avec une tendance à développer des défauts plus distribués. Cela pourrait être lié à la capacité du modèle à induire une régularisation d'endommagement visqueux pour la dépendance au maillage et au fait que cette régularisation est moins efficace lorsque les taux de chargement sont faibles.

Avec l'augmentation de la vitesse appliquée, le mode de rupture passe progressivement du mode d'ouverture au mode de cisaillement. La trajectoire de la fissure macroscopique se rapproche progressivement de la direction de chargement, ce qui correspond à une rupture en mode II.

Une deuxième caractéristique, déjà observée dans l'exemple précédent, est le branchement de la fissure principale pour $v = 2.4\,m/s$. En effet, les deux modes se dissocient dans ce cas. Comme dans le test de traction directe, nous remarquons la concordance relativement bonne entre les résultats expérimentaux et les simulations numériques.

Dans la Figure 3.11, les courbes expérimentales charge-déplacement [108] et la réponse numérique correspondante pour $v = 0.74\,m/s$, $v = 1.1\,m/s$ et $v = 2.4\,m/s$ sont représentées. Des similitudes entre les courbes numériques et expérimentales peuvent être remarquées pour les valeurs maximales, tandis que les régimes radoucissants sont assez

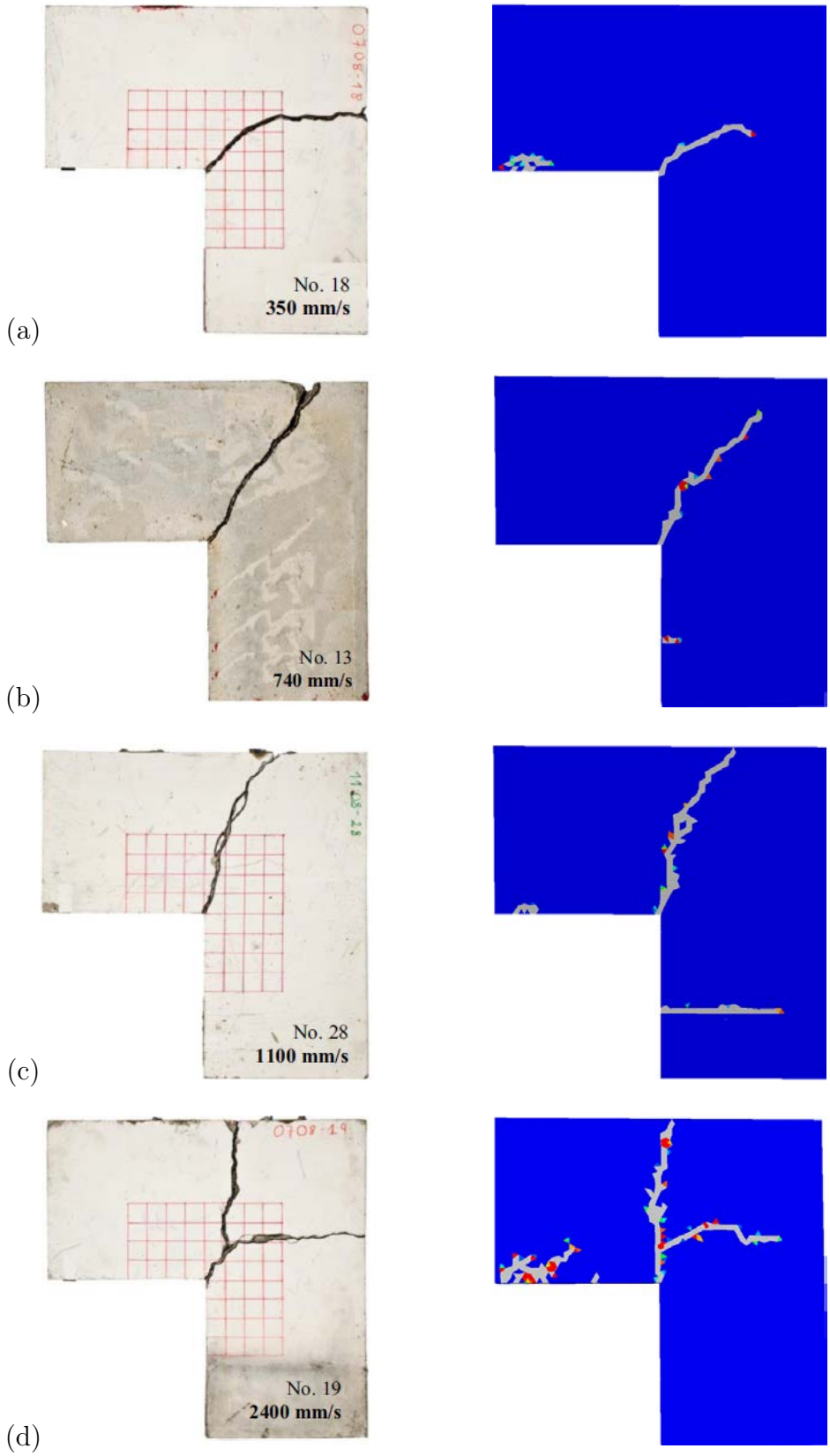

FIGURE 3.10 – Modes de rupture, résultats expérimentaux à gauche et numériques à droite, de l'essai sur l'échantillon en forme de L, pour les vitesses de chargement : (a) $v = 0.35\,m/s$, (b) $v = 0.74\,m/s$, (c) $v = 1.1\,m/s$ et (d) $v = 2.4\,m/s$.

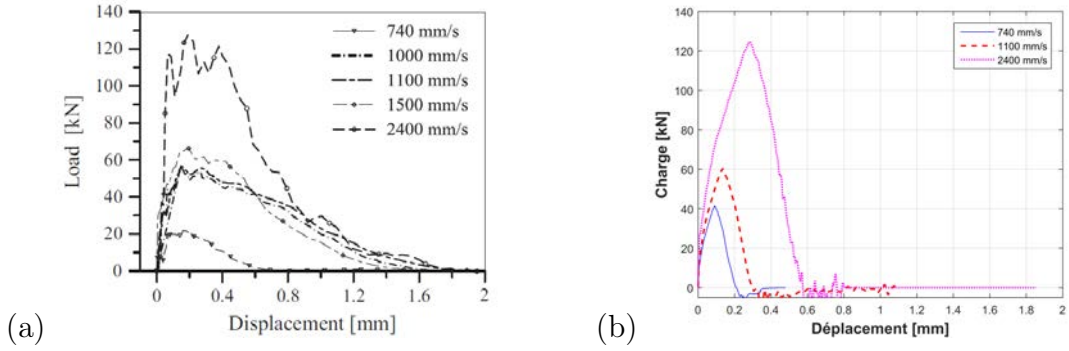

FIGURE 3.11 – Résultats expérimentaux charge-déplacement [108] pour des vitesses appliquées supérieures à $740mm/s$ (a) et courbes numériques correspondantes (b).

différents. Des ingrédients supplémentaires devraient être incorporés dans le modèle pour également récupérer le comportement expérimental proche de la rupture complète.

On peut observer que la charge maximale augmente avec la vitesse appliquée et que ses valeurs numériques sont relativement proches des valeurs expérimentales. Sur la Figure3.12, le pic de la charge est tracé en fonction du taux de déplacement correspondant en échelle logarithmique avec les valeurs expérimentales rapportées dans [108]. Comme dans le cas de l'essai de traction directe, pour les faibles vitesses appliquées on remarque une certaine différence alors que pour des taux de chargement plus élevés, il y a un bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux.

Afin d'illustrer l'influence de la taille des éléments du maillage EF sur les simulations d'endommagement, nous représentons dans la Fig. 3.13 les chemins de rupture pour deux maillages de tailles d'éléments de $2.5\,mm$ et, respectivement, $1.25\,mm$ dans le cas de la vitesse de chargement $v = 740\,mm/s$. Des évolutions de fissure assez similaires peuvent

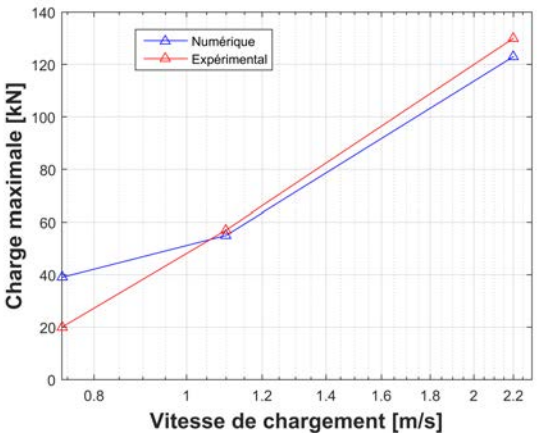

FIGURE 3.12 – Valeurs numériques et expérimentales de la charge maximale en fonction de la vitesse appliquée pour l'essai de l'échantillon en forme de L.

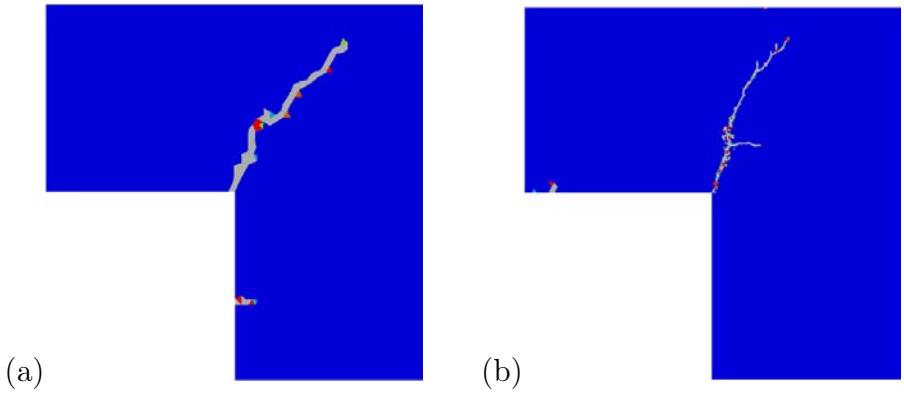

FIGURE 3.13 – Indépendance du maillage pour le test du spécimen en forme de L a) taille de l'élément = $2.5\,mm$ et b) taille de l'élément = $1.25\,mm$.

être observées, avec seulement une légère déviation induite par un effet de branchement. La taille du maillage a peu d'influence sur l'évolution de l'endommagement, tout comme sur les valeurs maximales des charges qui sont proches de celles de la Fig. 3.12.

3.5 Essai d'impact sur échantillon CCS

Le troisième exemple que nous considérons est un test d'impact sur échantillon CCS (Compact Compression Specimen). En suivant les expériences rapportées dans [122, 123], nous simulons l'amorçage et la propagation de fissures dynamiques en mode mixte dans un échantillon de PMMA sous un chargement d'impact. La géométrie de l'échantillon est représentée à la Figure 3.14a, les dimensions principales étant $60\,mm$ de largeur et $70\,mm$ de hauteur. Il contient deux encoches de dimensions : $1\,mm \times 16\,mm$ et $20\,mm \times 35\,mm$, avec des pointes semi-circulaires. L'impact est modélisé par l'application d'une vitesse sur une région de $16.5\,mm$ du côté inférieur gauche de l'échantillon, correspondant au diamètre de la barre de Hopkinson utilisée dans l'expériment.

Les paramètres du matériau PMMA sont le module d'Young dynamique $E = 5.76\,GPa$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.42$, la densité de masse $\rho = 1180\,kg/m^3$ et l'énergie critique de rupture $\mathcal{G}_c = 350\,J/m^2$. La longueur microstructurelle calibrée est $\epsilon = 3.5e^{-4}\,m$.

Les simulations sont réalisées dans le code Abaqus/Explicit sur un domaine bidimensionnel discrétisé avec des éléments bilinéaires plans à 4 nœuds avec une intégration réduite. Le maillage d'élément fini typique est montré à la Figure 3.14b avec la taille approximative de l'élément de $0.08\,mm$.

Les chemins de rupture obtenus sont illustrés dans la Figure 3.15. En fonction de la valeur de la vitesse d'impact v, les angles d'amorçage de la fissure par rapport à la direction verticale sont différents. Pour $v = 10\,m/s$ l'initiation de la fissure a lieu à un angle de 26^0, tandis que pour $v = 20\,m/s$ les simulations fournissent un angle plus grand de 62^0. Ces résultats sont en accord avec ceux mesurés et reportées dans [122]. Les auteurs ont trouvé un angle de fissure initial de $20^0 - 22^0$ pour $v = 10\,m/s$ et de $61^0 - 62^0$ pour la vitesse d'impact $v = 20\,m/s$. Ces résultats expérimentaux et de simulation sont reportés

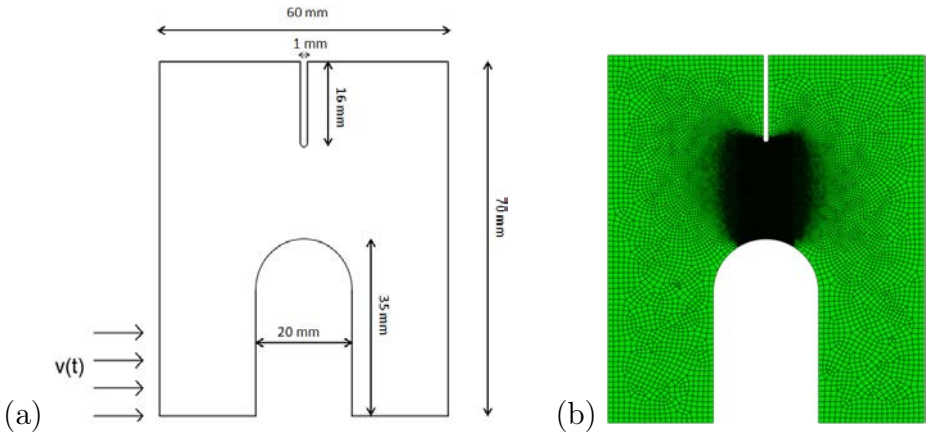

FIGURE 3.14 – Géométrie (a) et maillage (b) utilisés dans les simulations de l'essai CCS.

dans le Tableau 1.

Le modèle d'endommagement à deux échelles montre une bonne capacité de prédiction concernant la direction d'amorçage de la rupture dans le test de CCS sur des échantillons de PMMA.

Vitesse	*Essai*	*Simulation*
$10\,m/s$	$20^0 - 22^0$	26^0
$20\,m/s$	$61^0 - 62^0$	62^0

TABLE 3.1 – Les angles initiaux mesurés par Rittel et Maigre [122] et les valeurs prédites par les simulations numériques du CCS test.

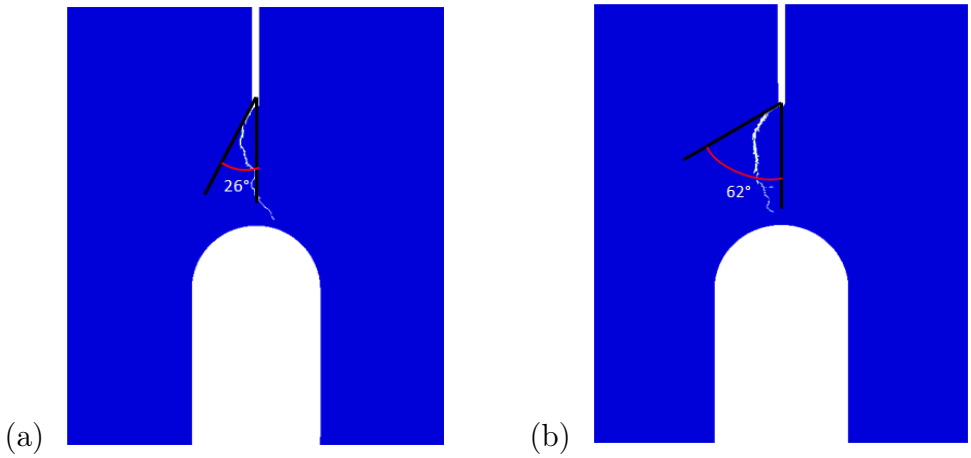

FIGURE 3.15 – Trajectoire de fissures avec l'angle d'amorçage pour le test CCS avec des vitesses d'impact : (a) $v = 10\,m/s$, (b) $v = 20\,m/s$.

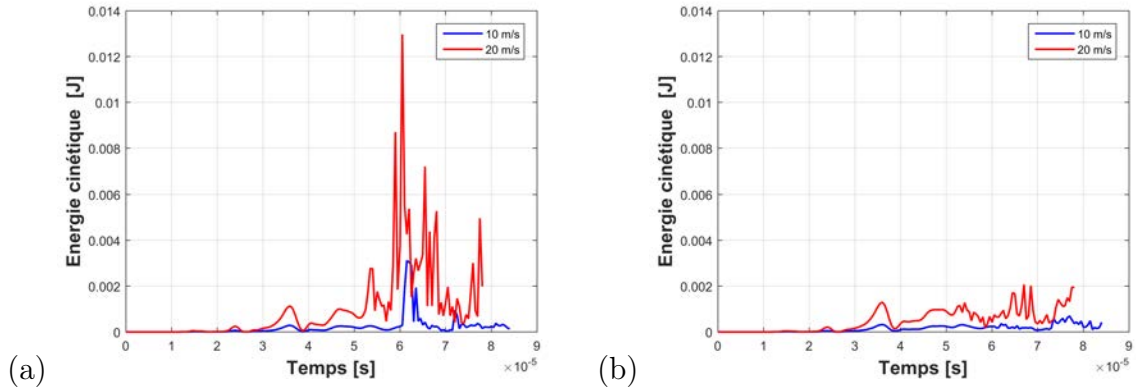

FIGURE 3.16 – Energie cinétique en fonction de temps a) dans un élément endommagé et b) dans un élément voisin non endommagé, pour deux vitesses d'impact.

Afin d'illustrer le rôle des effets d'inertie pris en compte dans le modèle d'endommagement, nous avons représenté dans la Fig. 3.16 l'évolution de l'énergie cinétique dans deux éléments voisins du maillage, pour les vitesses d'impact $v = 10\,m/s$ et $v = 20\,m/s$. La figure de gauche a) correspond à un élément endommagé, tandis que celle de droite b) correspond à un élément non endommagé. La dissipation due à l'endommagement correspondante $Y.\dot{d}$ dans l'élément endommagé, intégrée sur un pas de temps de $1e-10\,s$ est illustrée à la Fig. 3.17 pour les deux vitesses appliquées.

Nous notons une augmentation importante de l'énergie cinétique accompagnant l'évolution d'endommagement, conséquence des effets d'inertie microscopiques autour des lèvres de la microfissure. La comparaison avec l'élément non endommagé montre clairement que l'origine de cette évolution est la croissance des microfissures. La valeur maximale de l'énergie cinétique correspond au temps où l'élément est endommagé. Pour les vitesses d'impact élevées, ces effets inertiels sont amplifiés.

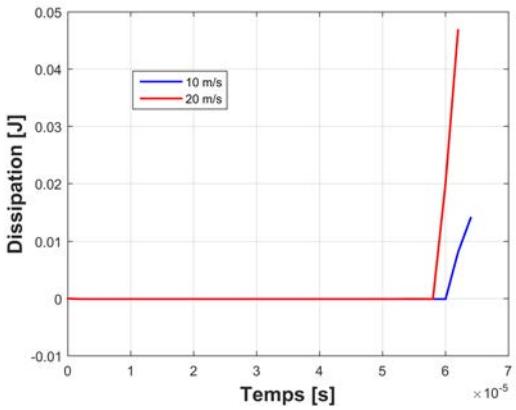

FIGURE 3.17 – Dissipation en fonction du temps dans un élément endommagé et sur un pas de temps de 1e-10 s, pour deux vitesses d'impact.

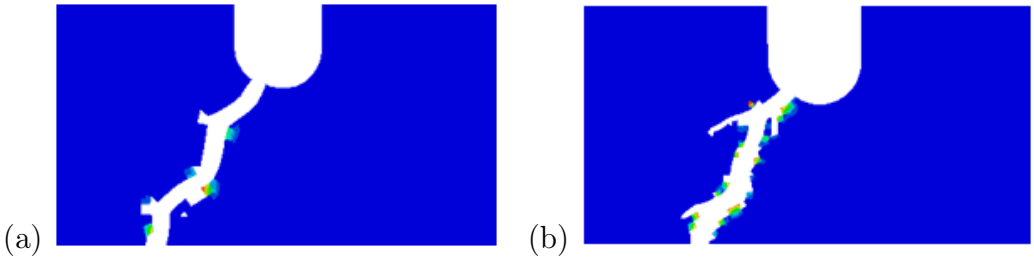

FIGURE 3.18 – Simulations de test de compression compacte pour deux maillages EF avec a) la taille de l'élément $= 0.16\,mm$ et b) la taille de l'élément $= 0.08\,mm$.

La Fig. 3.18 présente des simulations du test CCS pour deux tailles d'élément de maillage : $0.16\,mm$ et $0.08\,mm$, pour une vitesse d'impact de $v = 10\,m/s$. Les chemins de rupture sont représentés dans une petite région proche de la pointe de l'entaille préexistante. Malgré la différence observée sur les micro-branchements des deux macro-fissures, on peut remarquer que les angles initiaux par rapport à la direction de l'entaille sont similaires, avec une valeur d'environ 26^0.

3.6 Essai LECEI sur des échantillons de calcaire

Dans cette section, nous modélisons le test LECEI (Loading Edge Cracks by Edge Impact) sur les roches calcaires de Solnhofen décrit dans [18, 19]. L'échantillon avec une entaille sur un bord est soumis à un chargement de cisaillement par impact. On observe la propagation de fissure en mode I dans une direction inclinée par rapport à celle de l'entaille et de l'impacteur.

Une représentation schématique de l'expérience LECEI est donnée dans la Figure 3.19a. Les dimensions de l'éprouvette sont $200\,mm \times 200\,mm$, avec une entaille initiale de longueur $100\,mm$ et de largeur $1\,mm$ ayant une extrémité arrondie de forme semi-circulaire. Une vitesse constante v_0 est appliquée sur la moitié de la partie supérieure gauche, déclenchant une onde de compression qui produit un état de cisaillement à l'extrémité de l'entaille.

Les propriétés du matériau calcaire de Solnhofen sont : le module d'Young $E = 62\,GPa$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, la masse volumique $\rho = 2600\,kg/m^3$ et l'énergie de rupture $\mathcal{G}_c = 14.7\,J/m^2$. La longueur microstructurale utilisée pour les calculs est $\epsilon = 8e^{-6}\,m$.

Les calculs sont effectués dans des conditions de contraintes planes par le code Abaqus/Explicit, avec des éléments triangulaires linéaires de taille approximative $2e^{-5}\,m$. Un tel maillage est présenté à la Figure 3.19b.

Afin d'estimer l'influence de la vitesse d'impact v_0 sur le mode de rupture, des simulations ont été effectuées pour des valeurs $v_0 = 12\,m/s$, $v_0 = 15\,m/s$ et $v_0 = 18\,m/s$. Les chemins de fissures résultants sur une période de $40\mu s$ sont présentés sur la Figure 3.20. La fissure en mode I est formée et se propage dans la partie inférieure de l'échantillon.

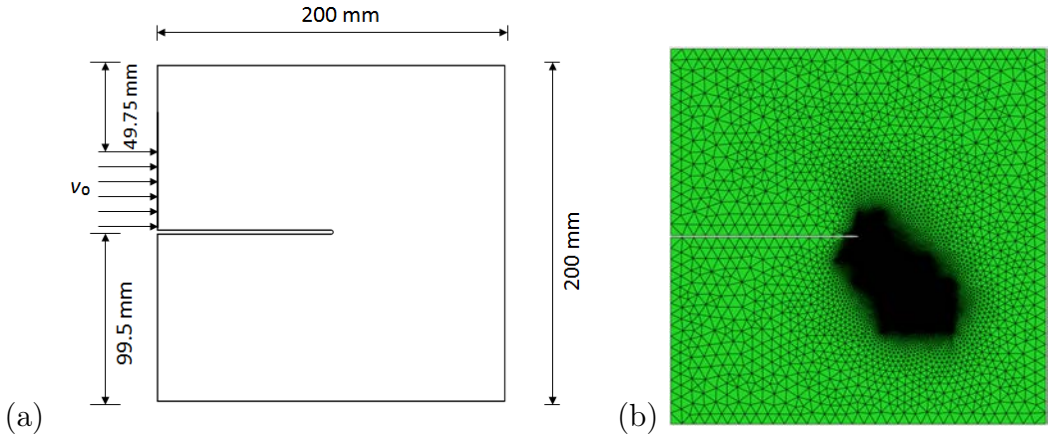

FIGURE 3.19 – Géométrie, chargement (a) et maillage élément fini (b) pour le test LECEI.

On peut remarquer que pour des vitesses d'impact plus petites une seule fissure est formée, tandis que pour des vitesses plus élevées des multiples branches sont développées. Ce système de fractures multi-branches correspond bien aux observations expérimentales rapportées dans [18, 19] et reproduites sur la Figure 3.21.

Pour une comparaison plus précise entre les prédictions du modèle et les expériences, nous présentons dans la Figure 3.21 les étapes d'évolution de la rupture en images expérimentales [18, 19] et résultats des simulations avec le modèle d'endommagement sur l' intervalle de temps de $40\mu s$. Nous remarquons la bonne correspondance entre les deux séries d'événements de rupture sur toute la plage de temps, depuis les premiers stades avec une seule fissure principale jusqu'au système de fissure à multiples branches formé à l'approche de $t = 40\mu s$.

Les zones d'endommagement obtenus par les tests LECEI avec deux maillages de tailles d'éléments différentes : a) $2e-5\,m$ et b) $1e-5\,m$ sont illustrés dans la Fig. 3.22. Le raffinement du maillage n'a pas d'effet important sur l'évolution de l'endommagement et les principaux événements de branchement se produisent de manière similaire dans les

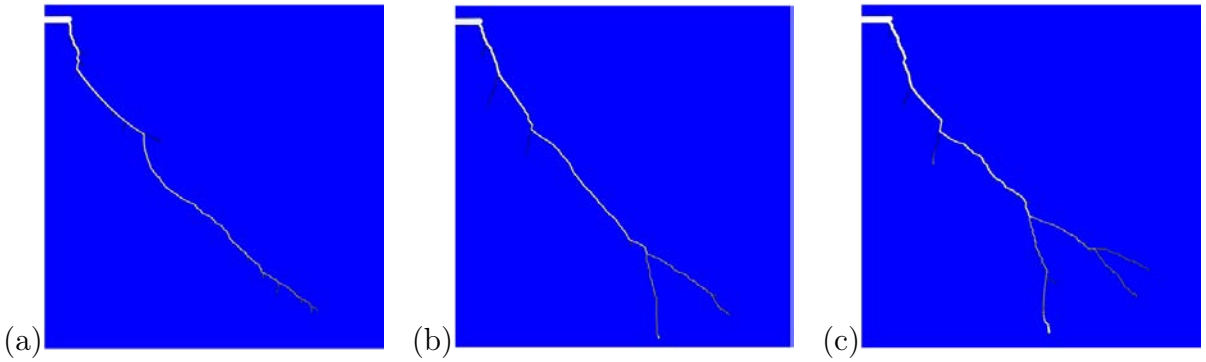

FIGURE 3.20 – Schémas de fissures du test LECEI correspondant aux vitesses d'impact : (a) $v_0 = 12\,m/s$, (b) $v_0 = 15\,m/s$, (c) $v_0 = 18\,m/s$.

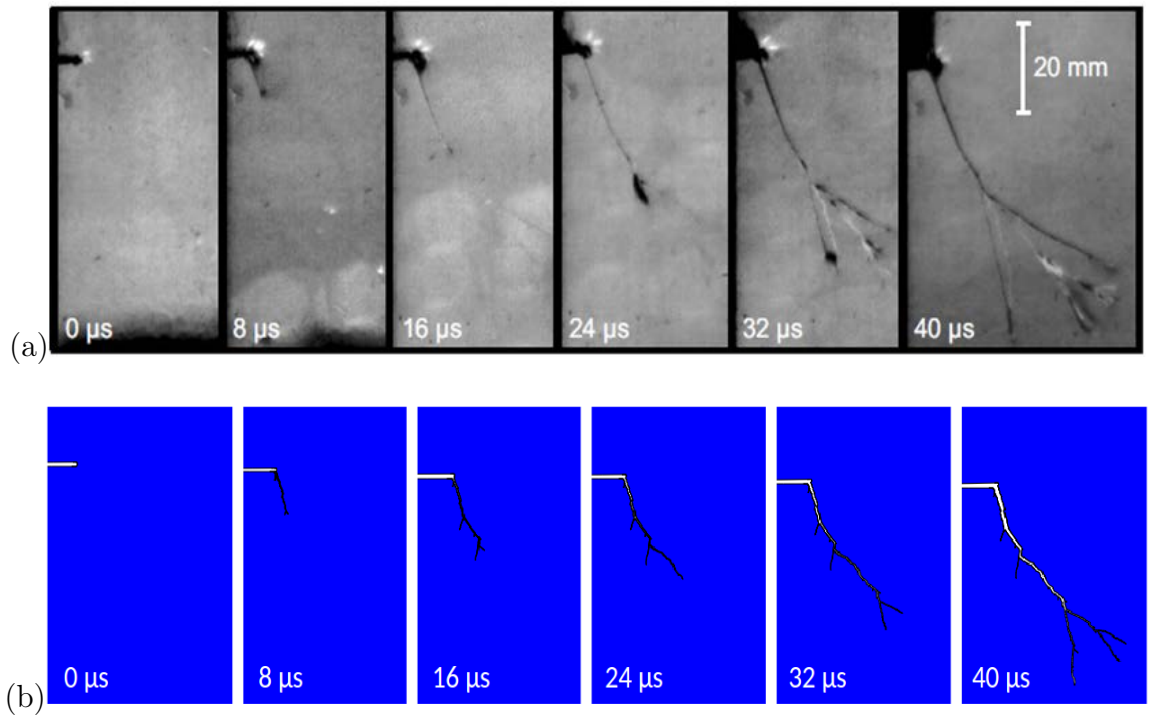

FIGURE 3.21 – Etapes de propagation des fissures pour le test LECEI sur une roche calcaire : (a) images expérimentales [18, 19] et (b) simulations numériques avec le modèle d'endommagement.

deux simulations.

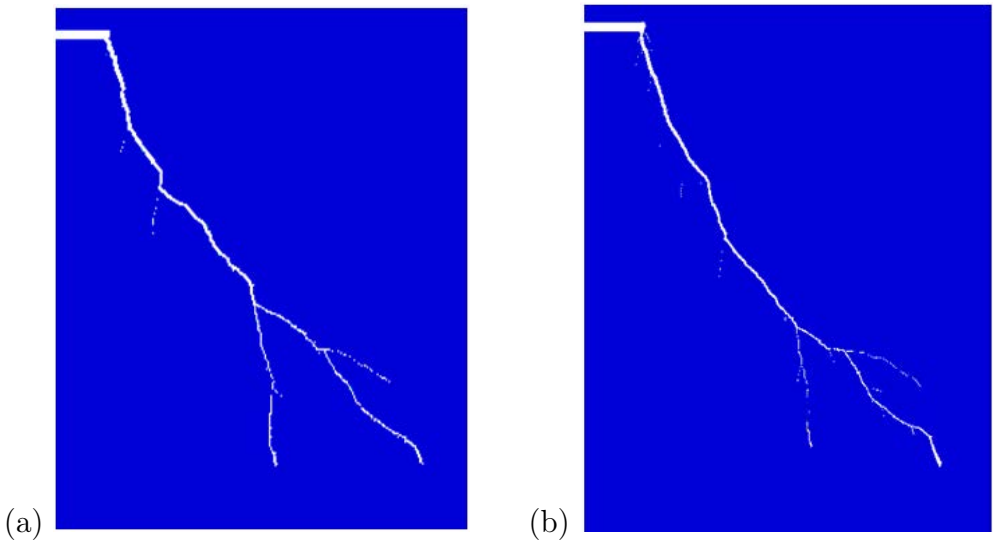

FIGURE 3.22 – Simulations du test LECEI avec deux maillages EF de tailles d'éléments : a) $2e-5\,m$ et b) $1e-5\,m$.

3.7 Conclusions

Un modèle d'endommagement double-échelle, basé sur l'évolution dynamique des micro-fissures, a été utilisé pour simuler des expériences de rupture dynamique comme les tests de traction directe et de l'échantillon en L pour les bétons, l'essai d'impact CCS pour le polymère PMMA et l'essai LECEI sur des roches calcaires fragiles. L'analyse s'est concentrée sur l'influence du taux de chargement sur les mode de rupture et sur les phénomènes de branchement, en comparant les prédictions du modèle avec les résultats expérimentaux.

Le modèle a été implémenté dans le code d'éléments finis commercial Abaqus/Explicit et les simulations des tests de rupture dynamique ont été effectués dans un cadre bi-dimensionnel ou tri-dimensionnel.

Les résultats des calculs pour les essais de traction directe et sur d'éprouvettes en L ont montré que pour les faibles taux de chargement, les fissures se développent en mode I, tandis que pour les vitesses de chargement plus élevées, la rupture passe du mode d'ouverture au mode mixte, avec une tendance d'approcher le mode II et des effets de branchement associés. Cette influence spécifique de la vitesse de chargement a été observée expérimentalement et a été retrouvée dans les simulations actuelles.

Des simulations pour le test CCS nous ont permis d'évaluer l'influence de la vitesse d'impact sur l'angle d'amorçage de la fissure. Il a été montré que l'angle de branchement augmente avec la vitesse appliquée et que les résultats numériques obtenus sont en accord les observations expérimentales.

Le développement d'une fissure macroscopique en mode I sous chargement de cisaillement a été étudié pour le test LECEI de Kalthoff sur des roches fragiles. Dans ce dernier exemple, l'analyse a porté sur le développement du système multi-fissures formées à partir de la fissure principale lors d'une vitesse d'impact élevée. La comparaison avec des images expérimentales montre une bonne correspondance avec les résultats des simulations sur toute la plage temporelle.

Une étude de la dépendance du maillage EF a été réalisée pour chaque test considéré et les résultats ont montré des influences relativement faibles. Les principaux modes de rupture ont été obtenus indépendamment du maillage, pour des tailles d'éléments suffisamment petites.

Les quatre tests considérés dans la présente étude, impliquant différents types de chargement, de modes de rupture et de matériaux constitutifs, nous ont permis d'évaluer la capacité de prédiction du modèle d'endommagement à deux échelles. Les caractéristiques expérimentales essentielles concernant les effets de vitesse de chargement sur la rupture dynamique ont été retrouvées par les simulations.

Malgré le fait que le modèle repose uniquement sur la croissance des micro-fissures en mode I, des effets macroscopiques de rupture dynamique en mode mixte ont été correctement reproduits. D'autres améliorations du présent modèle pourront inclure l'incorporation de la propagation en mode mixte à l'échelle microscopique.

Chapitre 4

Modèle d'endommagement dynamique pour les micro-fissures frottantes en mode II

Sommaire

4.1 Introduction **89**
4.2 Formulation du problème **90**
4.3 Homogénéisation asymptotique et loi d'endommagement quasi-statique **91**
4.4 Coefficients effectifs C_{mnpq} et intégrales I_{mnpq} **95**
4.5 Loi d'endommagement dynamique avec frottement **97**
4.6 Comportement macroscopique local **99**
4.6.1 Influence du coefficient de frottement 100
4.6.2 Influence de la compression 100
4.6.3 Influence de l'endommagement initial 101
4.6.4 Influence de la vitesse de déformation 102
4.6.5 Influence de la taille de microstructure 102
4.7 Simulation des effets de compression sur l'évolution du front de rupture d'une interface avec frottement **103**
4.7.1 Géométrie, chargement et maillage du spécimen 104
4.7.2 Simulations numériques 105
4.8 Conclusions **107**

4.1 Introduction

L'étude de la relation entre les phénomènes micro-structurels et la réponse macroscopique permet de mieux prédire le comportement des matériaux. Ces dernières années, des efforts considérables ont été faits pour établir un lien entre les phénomènes de rupture microscopique et les comportements macroscopiques correspondants. De nombreux chercheurs se sont concentrés sur le développement de la modélisation macroscopique à partir

de considérations d'analyse micro-mécanique d'un milieu multi-fissuré par des procédures d'homogénéisation. De cette manière, les analyses micro-mécaniques peuvent conduire à une meilleure compréhension des phénomènes observés au niveau macroscopique dans les expériences.

Des travaux récents ont permis de proposer des lois d'endommagement dans le cas de propagation quasi-statique et dynamique des micro-fissures, avec la méthode d'homogénéisation basée sur des développements asymptotiques ([34],[35],[37],[56],[78]). Par contre, ces modèles ne tiennent pas compte des effets de frottement sur les lèvres de fissures dans la modélisation.

Afin de parvenir à un véritable modèle de comportement, capable de rendre compte des phénomènes observés expérimentalement, il s'avère nécessaire de prendre en compte la dissipation liée au frottement sur les lèvres des micro-fissures en même temps que la propagation dynamique des micro-fissures.

Un modèle d'endommagement tenant compte des frottement sur les lèvres des micro-fissures a été proposé dans [141]. Cependant ce modèle reste dans le cadre d'évolution quasi-statique des micro-fissures.

L'objectif dans ce chapitre est de compléter les études précédentes en obtenant un modèle d'endommagement qui prend en compte à la fois des effets de contact avec frottement sur les lèvres des micro-fissures et des effets dynamiques sous une sollicitation en mode II.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, le problème dynamique avec contact et frottement est présenté. Ensuite, dans les sections 3, 4 et 5, la méthode d'homogénéisation est utilisée pour obtenir la loi d'endommagement dynamique avec frottement et les coefficients effectifs. La section 6 est consacrée à l'étude du comportement local du modèle. Des résultats des simulations numériques à l'échelle de structure sont présentés et le lien avec l'étude du frottement dynamique est fait dans la section 7.

4.2 Formulation du problème

Nous considérons l'évolution dynamique d'un solide élastique contenant une distribution de micro-fissures, supposée localement périodique comme illustré sur la Figure 4.1. Nous supposons que les micro-fissures sont en contact unilatéral avec frottement sur les lèvres. Pour simplifier, nous considérons le cas des micro-fissures parallèles à l'axe x_1. Par rapport à cette direction, des sollicitations en mode de cisaillement (mode II) sont appliquées. Les relations constitutives de l'élasticité linéaire peuvent être écrites :

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon} = a_{ijkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) \tag{4.1}$$

et l'équation élastodynamique correspondante est :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_j^{\varepsilon}}{\partial t^2} \tag{4.2}$$

où u^{ε} et σ^{ε} sont des champs de déplacement et de contrainte, ρ la densité de masse, e_{xkl} est le tenseur de déformation linéairisé, défini comme suit :

$$e_{xkl}(\mathbf{u}^{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}) \tag{4.3}$$

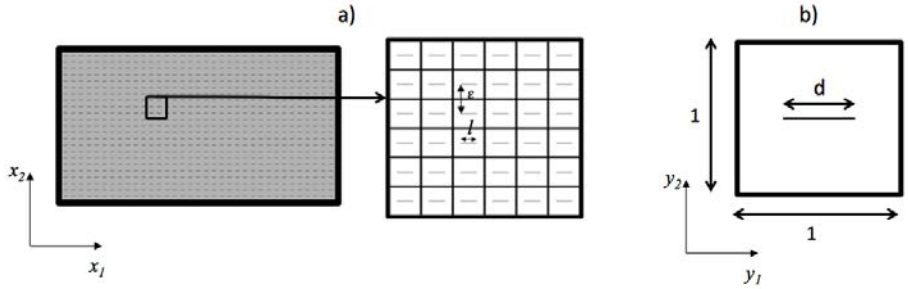

FIGURE 4.1 – a) Domaine micro-fissuré avec une microstructure localement périodique : ε est la taille de la période et l est la longueur de micro-fissure. b) Cellule unitaire avec une fissure de longueur normalisée $d = l/\varepsilon$.

par rapport à la variable x et les coefficients élastiques linéaires a_{ijkl} pour le solide homogène isotrope ont pour expression :

$$a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{4.4}$$

où λ et μ sont des constantes de Lamé.

On suppose que les micro-fissures sont fermées. Les conditions de contact unilatéral sur leurs faces peuvent être exprimées par les relations :

$$[\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N}] = 0, \quad \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} < 0, \quad [\mathbf{u}^\varepsilon.\mathbf{N}] = 0 \tag{4.5}$$

En plus de la relation de contact (4.5), les conditions de frottement de type Coulomb sont considérées sur les lèvres de la fissure en régime de glissement :

$$|\mathbf{T}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N}| = -\mu_f \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \mathbf{N} \tag{4.6}$$

où $\mathbf{N}$ et $\mathbf{T}$ sont respectivement les vecteurs unitaires normal et tangent à la fissure et [.] représente le saut à travers la ligne de la fissure et par rapport à l'orientation de $\mathbf{N}$, μ_f est le coefficient du frottement.

4.3 Homogénéisation asymptotique et loi d'endommagement quasi-statique

Dans cette section, nous utilisons la méthode d'homogénéisation asymptotique [10, 16, 126] pour déduire le comportement effectif du solide micro-fissuré. Ceci va servir de base pour la construction du modèle d'endommagement.

Deux variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont introduites pour la méthode d'homogénéisation : $\mathbf{x}$ est la variable de l'échelle macroscopique et $\mathbf{y}$ celle de l'échelle microscopique. Ces variables sont liées par la relation $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ où ε est la taille de la période.

En suivant la méthode d'homogénéisation, nous considérons les développements à deux échelles des champs de déplacement et de contrainte :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon^2\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + ... \tag{4.7}$$

$$\sigma_{ij}{}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{ij}{}^{(-1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + \sigma_{ij}{}^{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + \varepsilon\sigma_{ij}{}^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t) + ... \tag{4.8}$$

où $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ et $\sigma_{ij}{}^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ sont des fonctions Y-periodique en $\mathbf{y}$.

En remplaçant les expressions de $\mathbf{u}$ et de σ_{ij} dans les problèmes élastodynamiques (4.2) et en regroupant les termes correspondant à la même puissance de ϵ, on obtient :

$$\frac{\partial\sigma_{ij}^{(-1)}}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{ij}^{(-1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_i} = \rho\frac{\partial^2 u_j^{\varepsilon}}{\partial t^2} \tag{4.9}$$

De même, en remplaçant les développements à deux échelles dans les relations constitutives (4.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-1)} &= a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)}) \\ \sigma_{ij}^{(0)} &= a_{ijkl}(e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) \\ \sigma_{ij}^{(1)} &= a_{ijkl}(e_{xkl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(2)})) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Concernant les conditions aux limites sur les faces des fissures, pour ce cas de fissures fermées avec du frottement, nous trouvons pour différentes puissances de ε (m=-1,0,1) :

$$\left[\sigma_{ij}^{(m)}N_j\right] = 0, \;\; N_i\sigma_{ij}{}^{(m)}N_j < 0, \;\; |T_i\sigma_{ij}^{(m)}N_j| = -\mu_f N_i\sigma_{ij}{}^{(m)}N_j \text{ sur } CY^{\pm} \tag{4.11}$$

avec la continuité des déplacements normaux :

$$\left[\mathbf{u}^{(p)}.\mathbf{N}\right] = 0 \quad \text{sur} \quad CY^{\pm} \tag{4.12}$$

pour p=0,1,2...

En remplaçant la première expression de (4.10) dans la première équation de (4.9) et dans les relations de (4.11) pour m=-1, nous obtenons le problème aux valeurs limites pour $\mathbf{u}^{(0)}$:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)})) = 0 \quad \text{dans} \quad Y_s \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} \left[(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j\right] &= 0 \text{ sur } CY^{\pm} \\ N_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j &< 0 \text{ sur } CY^{\pm} \\ |T_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j| &= -\mu_f N_i(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j \text{ sur } CY^{\pm} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ce problème de $\mathbf{u}^{(0)}$ avec des conditions aux limites périodiques sur les bords extérieurs de la cellule nous permet de déduire que $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x},t)$ ne dépend pas de la variable microscopique $\mathbf{y}$ et donc devient le champ de déplacement macroscopique.

Le problème de $\mathbf{u}^{(1)}$ est obtenu en remplaçant la deuxième équation de (4.10) dans la seconde relation de (4.9) et dans les relations de (4.11) pour m=0 :

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)})) = 0 \quad \text{dans} \quad Y_s \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\left[(a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}))N_j\right] &= -\left[(a_{ijkl}e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j\right] \text{ sur } CY^{\pm} \\
N_i a_{ijkl}(e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j &< 0 \text{ sur } CY^{\pm} \\
|T_i a_{ijkl}(e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j| &= -\mu_f N_i a_{ijkl}(e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) + e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}))N_j \text{ sur } CY^{\pm}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

En choisissant le système de générateurs $\mathbf{E}^{pq}$ pour les déformations maroscopiques telles que :

$$\mathbf{E}^{11} = \begin{pmatrix} -1/\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

$$\mathbf{E}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\beta \\ -1/\beta & -1/2\beta \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{E}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\beta \\ -1/\beta & -1/\beta \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

la déformation macroscopique $e_x(\mathbf{u}^{(0)})$ peut être écrite comme combinaison linéaire de ces éléments :

$$e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)}) = \alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)})E_{ij}^{pq} \tag{4.20}$$

où $\alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)})$ sont des fonctions linéaires de $\mathbf{u}^{(0)}$ telles que : $\alpha_{11}(\mathbf{u}^{(0)}) = -\beta e_{x11}(\mathbf{u}^{(0)})$, $\alpha_{12}(\mathbf{u}^{(0)}) = \beta(e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}) - e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}))$, $\alpha_{22}(\mathbf{u}^{(0)}) = \beta(e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}) - 2e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}))$ et la constante $\beta = 800$. Cette valeur de β est choisie afin d'appliquer des déformations petites dans la résolution des problèmes de cellule pour que les conditions numériques de contact sur les lèvres des fissures soient efficaces, en évitant les pénétrations.

Soit le vecteur $\boldsymbol{\eta}^{pq}$ une solution particulière pour une déformation $e_{xij}(\mathbf{u}^{(0)})$ donnée, la solution $\mathbf{u}^{(1)}$ peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\eta}^{pq}(\mathbf{y})\alpha_{pq}(\mathbf{x}, t) \tag{4.21}$$

Le problème de la cellule peut être formulé en termes de $\boldsymbol{\eta}^{pq}$ comme :

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ijkl}e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq})) = 0 \quad \text{dans} \quad Y_s \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
[a_{ijkl}e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq})N_j] &= -[(a_{ijkl}E_{kl}^{pq})N_j] \text{ sur } CY^{\pm} \\
N_i a_{ijkl}(e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) + E_{kl}^{pq})N_j &< 0 \text{ sur } CY^{\pm} \\
|T_i a_{ijkl}(e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) + E_{kl}^{pq})N_j| &= -\mu_f N_i a_{ijkl}(e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{pq}) + E_{kl}^{pq})N_j \text{ sur } CY^{\pm}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

En introduisant la contrainte macroscopique comme la valeur moyenne sur la cellule,

$$\Sigma_{ij}^{(0)} \equiv < \sigma_{ij}^{(0)} > = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_s} a_{ijkl}(e_{xkl}(\mathbf{u}^{(0)}) + e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}))dy \tag{4.24}$$

l'équation macroscopique homogénéisée est obtenue :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Sigma_{ij}^{(0)} = \rho\frac{\partial^2 u_j^{(0)}}{\partial t^2} \tag{4.25}$$

En remplaçant les relations (4.20) et (4.21) dans (4.24), nous obtenons :

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_s} a_{ijkl}(E_{kl}^{mn} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}))dy\, \alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)}) \tag{4.26}$$

qui peut être réécrite de la façon suivante :

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijmn}^{\alpha}\alpha_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) \tag{4.27}$$

où

$$C_{ijmn}^{\alpha} = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_s} a_{ijkl}(E_{kl}^{mn} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}))dy \tag{4.28}$$

sont les coefficients effectifs. Puisque $|Y| = 1$, dans ce qui suit, $|Y|$ sera omis. En introduisant la relation (4.20) dans (4.27), on peut réécrire la contrainte macroscopique en fonction des déformations e_{xmn} :

$$\Sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijmn}e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) \tag{4.29}$$

où

$$C_{ij11} = -\int_{Y_s} \beta a_{ijkl}(E_{kl}^{11} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{11}))dy \tag{4.30}$$

$$C_{ij12} = \int_{Y_s} \frac{\beta}{2} a_{ijkl}((E_{kl}^{22} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{22})) - 2(E_{kl}^{12} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{12})))dy \tag{4.31}$$

$$C_{ij22} = \int_{Y_s} 2\beta a_{ijkl}((E_{kl}^{12} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{12})) - (E_{kl}^{22} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{22})))dy \tag{4.32}$$

L'analyse effectuée dans Wrzesniak et al. [141] a permis d'obtenir la loi quasi-statique d'endommagement pour des micro-fissures en contact avec frottement en fonction des déformations macroscopiques $\alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)})$ sous la forme :

$$\left(\frac{\mathcal{G}^{\varepsilon}}{\varepsilon} + (\frac{1}{2}\frac{\partial C_{mnpq}^{\alpha}}{\partial d} + I_{mnpq}^{\alpha})\alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)})\right)\dot{d} = 0 \tag{4.33}$$

et en fonction des déformations macroscopiques $e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)})$:

$$\left(\frac{\mathcal{G}^{\varepsilon}}{\varepsilon} + (\frac{1}{2}\frac{\partial C_{mnpq}}{\partial d} + I_{mnpq})e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)})e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)})\right)\dot{d} = 0 \tag{4.34}$$

où I_{mnpq} sont des intégrales (voir Annexe A) provenant de la présence du frottement sur les micro-fissures et se calculent à partir des combinaisons de I_{mnpq}^{α} définis par :

$$\begin{aligned} I_{mnpq}^{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{d}{dd}\int_{CY} & a_{ijkl}(E_{kl}^{mn} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}))N_j[\eta_i^{pq}]ds_y \\ & - \int_{CY} a_{ijkl}(E_{kl}^{mn} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}))N_j[\frac{d\eta_i^{pq}}{dd}]ds_y \end{aligned} \tag{4.35}$$

$[\eta_i^{pq}]$ dans cette relation représente le saut du déplacement à travers les lèvres de fissure et $[\frac{d\eta_i^{pq}}{dd}]$ le saut à travers les lèvres de fissure de la dérivée du déplacement par rapport à la variable d'endommagement d.

4.4 Coefficients effectifs C_{mnpq} et intégrales I_{mnpq}

Les coefficients homogénéisés C_{mnpq} et les intégrales I_{mnpq} présents dans la loi d'endommagement quasi-statique (4.34) sont fonctions des solutions particulières η^{pq}. Pour obtenir ces dernières il faut résoudre le problème de cellule (4.22-4.23) en appliquant les déformations macroscopiques données aux équations (4.17-4.19). Le logiciel d'éléments finis Comsol Multiphysics [33] est employé pour ces calculs. Afin de rendre plus simples les équations à résoudre numériquement, nous utilisons le changement de fonction inconnue de η_i^{pq} à v_i^{pq}, avec $\eta_i^{pq} = \mathrm{v}_i^{pq} - \bar{E}_{ij}^{pq} y_j$. Avec ce changement de variable, les conditions de périodicité sur les bords extérieurs de la cellule deviennent [133] :

$$(\mathrm{v}_i^{pq} - \bar{E}_{ij}^{pq} y_j)^+ = (\mathrm{v}_i^{pq} - \bar{E}_{ij}^{pq} y_j)^- \tag{4.36}$$

où $\mathbf{v}^{pq}$ et $\mathbf{y}$ sont respectivement les vecteurs de déplacement et de position initiale des points sur les bords extérieurs de la cellule unitaire, $\pm$ définit les deux bords opposés de la cellule unitaire. Avec ce changement, les équations (4.22-4.23) sont écrites en fonction de $\mathbf{v}^{pq}$ comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{v}^{pq})) = 0 \quad \text{dans} \quad Y \tag{4.37}$$

$$\begin{gathered} [a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{v}^{pq}) N_j] = 0 \ \text{ sur } \ CY^{\pm} \\ N_i a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{v}^{pq}) N_j < 0 \ \text{ sur } \ CY^{\pm} \\ |T_i a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{v}^{pq}) N_j| = -\mu_f N_i a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{v}^{pq}) N_j \ \text{ sur } \ CY^{\pm} \end{gathered} \tag{4.38}$$

La condition de continuité des déplacements normaux en $\mathbf{v}^{pq}$ donne :

$$[\mathbf{v}^{pq}.\mathbf{N}] = 0 \ \text{ sur } \ CY^{\pm} \tag{4.39}$$

Les solutions particulières $\mathbf{v}^{pq}$ sont déterminées pour des valeurs de la variable d données. Une fois cette solution calculée, nous utilisons l'expression de changement de variable de $\boldsymbol{\eta}^{pq}$ à $\mathbf{v}^{pq}$ dans les relations (4.30-4.32) pour calculer les coefficients effectifs C_{ijkl} et dans l'équation (4.35) pour calculer les intégrales I_{ijkl} (voir Annexe). Ces intégrales sont déterminés pour 20 valeurs de d variant de 0 à 1 et ensuite une interpolation est faite.

Pour l'implémentation, nous utilisons les paramètres du matériau PMMA avec le module de Young $E = 5.6GPa$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.33$, la densité de masse $\rho = 1170kg/m^3$ en considérant trois valeurs de coefficients de frottement $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$, $\mu_f = 0.5$.

Dans les Figures 4.2 et 4.3 nous représentons les coefficients homogénéisés C_{1222}, C_{1212} et l'intégrale I_{2222}, correspondant à la fissure horizontale considérée pour trois valeurs du coefficient de frottement μ_f. Pour $d = 0$, les coefficients homogénéisés sont égaux aux coefficients élastiques $C_{ijkl} = a_{ijkl}$, tandis que pour $d \neq 0$, les coefficients : $C_{1111} = a_{1111}$, $C_{1122} = C_{2211} = a_{1122}$, $C_{1112} = C_{1211} = 0$, $C_{2212} = 0$, $C_{2222} = a_{2222}$ ne sont pas affectés par la variation de d.

Le coefficient effectif C_{1222} illustré à la Figure 4.2, caractérise l'influence de la déformation de compression $e_{x22}(u^{(0)})$ sur la contrainte de cisaillement macroscopique $\Sigma_{12}^{(0)}$. En l'absence de frottement, la déformation de compression n'a pas d'influence sur la réponse aux contraintes de cisaillement, tandis qu'en présence de frottement, la compression

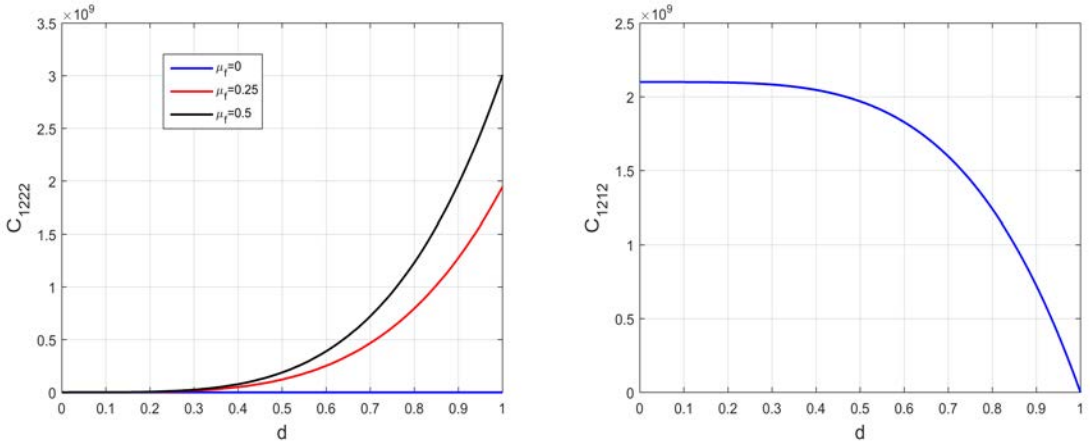

FIGURE 4.2 – Coefficients effectifs C_{1222} et C_{1212} en fonction de d, pour trois valeurs de coefficient de frottement $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$ et $\mu_f = 0.5$.

conduit à des contraintes de cisaillement globales. Cet effet est amplifié par la valeur du coefficient de frottement ainsi que par la taille de la zone de frottement, contrôlée par la longueur de microfissure normalisée. Les deux influences sont visibles sur la Figure 4.2, le coefficient effectif $C_{1222}(d)$ étant une fonction croissante et ayant les valeurs les plus élevées pour $\mu_f = 0.5$.

En ce qui concerne le coefficient C_{1212}, la Figure 4.2 montre qu'il s'agit d'une fonction décroissante de d. Son comportement n'est pas affecté par la valeur du coefficient de frottement. C'est essentiellement l'effet de la déformation de cisaillement en volume sur la réponse macroscopique des contraintes de cisaillement. Cependant, la présence de micro-fissures facilite la déformation de la cellule et réduit le niveau de contrainte de

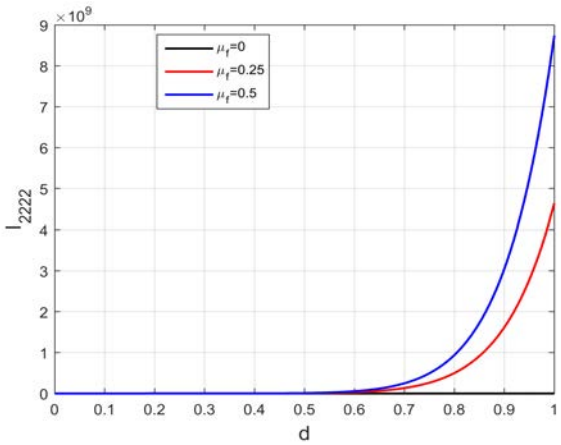

FIGURE 4.3 – Intégrale I_{2222} en fonction de d, pour trois valeurs de coefficient de frottement $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$ et $\mu_f = 0.5$.

cisaillement résultant. Ceci explique la diminution de C_{1212} par rapport à d. Pour une cellule complètement fracturée, aucune contrainte de cisaillement n'est générée puisque les deux parties se déplacent librement.

Le calcul des intégrales I_{ijkl} a révélé que le seul terme non négligeable est I_{2222}. Il est représenté dans la Figure 4.3 en fonction de l'endommagement d. Etant donné que ces coefficients caractérisent la dissipation due au frottement sur les lèvres des micro-fissures, il est évident qu'ils disparaissent pour $\mu_f = 0$ et ont des valeurs plus élevées pour des coefficients de frottement importants. De plus, $I_{2222}(d)$ est une fonction croissante du fait que le frottement sur des micro-fissures plus grandes implique une plus grande dissipation d'énergie. Ce nouveau mécanisme de dissipation réduira l'énergie disponible pour la rupture et produira un effet de ralentissement sur la propagation des micro-fissures.

4.5 Loi d'endommagement dynamique avec frottement

Dans cette section, nous utiliserons une approche énergétique de propagation dynamique des micro-fissures en vue d'obtenir la loi d'endommagement dynamique avec le frottement. Nous considérons un critère de propagation de type Griffith $\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \mathcal{G}_c$ où $\mathcal{G}^{d\varepsilon}$ est le taux de restitution d'énergie dynamique qui est exprimé par la formule :

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma_r} \left((U+T)\mathbf{ne} - \sigma^{\varepsilon}_{ij} n_j \frac{\partial u^{\varepsilon}_i}{\partial x_1} \right) ds \tag{4.40}$$

avec U est l'énergie élastique et T l'énergie cinétique qui ont respectivement pour expressions :

$$U = \frac{1}{2} a_{mnkl} e_{xkl}(\mathbf{u}^{\epsilon}) e_{xmn}(\mathbf{u}^{\epsilon}) \tag{4.41}$$

$$T = \frac{1}{2}\rho \frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{u}^{\varepsilon}}{\partial t} \tag{4.42}$$

En remplaçant dans les expressions les développements asymptotiques des champs de déplacement $\mathbf{u}^{\epsilon}$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}$ et tenant compte de la singularité des champs mécaniques, nous obtenons l'expression de $\mathcal{G}^{d\varepsilon}$ écrite sous cette forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{d\varepsilon} = \epsilon \lim_{r\to 0} \int_{\Gamma Y_r} (-a_{ijkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) n_j (\frac{\partial u^{(1)}_i}{\partial y_1}) \\ +(\frac{1}{2} a_{mnkl} e_{ykl}(\mathbf{u}^{(1)}) e_{ymn}(\mathbf{u}^{(1)})) + \frac{1}{2}\rho v^2 (\frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial y_1})^2)\, n_1 ds_y \end{aligned} \tag{4.43}$$

où le changement de la variable $dS = \epsilon ds_y$ a été effectué et la vitesse physique de pointe des micro-fissures $v = \epsilon \frac{\dot{d}}{2}$ a été introduite. Le taux de restitution d'énergie dynamique peut être exprimé comme fonction des facteurs d'intensité des contraintes comme suit [129] :

$$\mathcal{G}^{d\varepsilon} = g_2(v)\mathcal{G}^{\varepsilon} \tag{4.44}$$

où $\mathcal{G}^{\varepsilon}$ est le taux de restitution d'énergie quasi-statique exprimé en fonction du facteur d'intensité quasi-statique K_{II} en mode II :

$$\mathcal{G}^{\varepsilon} = \frac{1-\nu}{2\mu} K_{II}^2 \tag{4.45}$$

et g_2 est la fonction universelle en mode II déterminée par la formule :

$$g_2(v) = -\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c_2}}{1-\frac{v}{c_2}}} \frac{v^2(1-\frac{v}{c_R})^2}{(1-\nu)c_2^2 R(v) D_+^2(v)} \tag{4.46}$$

$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, $c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$ sont respectivement les vitesses des ondes de cisaillement et longitudinales du matériau, c_R est la vitesse de Rayleigh. $R(v)$ et $D(v)$ sont des fonctions de v et pouvant être obtenues à partir des expressions :

$$R(v) = (1+m_2^2)^2 - 4m_1 m_2 \tag{4.47}$$

$$D_+(v) = exp(\frac{1}{\pi}\int_{c2/c1}^{1} \frac{\Phi(\alpha)}{\alpha - c_2/v} d\alpha) \tag{4.48}$$

avec les constantes $m_{1,2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c_{1,2}^2}}$ et la fonction $\phi(\alpha) = \arctan \frac{4\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{\alpha^2-c_2/c_1}}{(2\alpha^2-1)^2}$.

Afin de trouver une loi d'endommagement dynamique sous une forme plus simple, nous cherchons une approximation de la fonction $g_2(v)$ comme c'était le cas pour le mode I où une approximation de $g_1(v)$ est souvent utilisée dans les applications.

En réécrivant la fonction g_2 en fonction de v/c_R et en utilisant une méthode numérique pour évaluer l'intégrale $D_+(v)$, nous pouvons calculer g_2 pour v/c_R variant de 0 à 1. Sa représentation graphique est donnée à la Figure 4.4 et comparée à d'autres fonctions plus simples ne contenant pas d'intégrale qui sont des fonctions d'approximation de $g_2(v)$:

$$g_2(v) \approx g_2^{\alpha}(v) = \sqrt{1-(\frac{v}{c_R})^{\alpha}}$$

que nous allons utiliser par la suite pour les lois dynamiques en mode II. En prenant $\mathcal{G}^{\varepsilon}$ de l'équation (4.44) et en le remplaçant dans la relation (4.34), nous obtenons la loi d'endommagement dynamique avec frottement en mode II :

$$\left(\frac{\mathcal{G}^{d\varepsilon}}{\varepsilon g_2(v)} + (\frac{1}{2}\frac{\partial C_{mnpq}}{\partial d} + I_{mnpq}) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)})\right) \dot{d} = 0 \tag{4.49}$$

En utilisant le critère de propagation de Griffith $\mathcal{G}^{d\varepsilon} = \mathcal{G}_c$ avec $\dot{d} \neq 0$ pour les micro-fissures en évolution, nous obtenons la loi d'endommagement écrite sous cette forme :

$$\dot{d} = \frac{2c_R}{\varepsilon}\left\langle 1 - \frac{\mathcal{G}_c^2}{(\varepsilon(\frac{1}{2}\frac{\partial C_{mnpq}}{\partial d} + I_{mnpq}) e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}))^2}\right\rangle^{1/\alpha} \tag{4.50}$$

où $\langle . \rangle$ représente la partie positive. Si nous introduisons la notation $Y_f = I_{mnpq} e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)}))$ pour la contribution liée au frottement et le taux de restitution d'énergie d'endommagement $Y = -\frac{1}{2}\frac{\partial C_{mnpq}}{\partial d} e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)}) e_{xpq}(\mathbf{u}^{(0)})$, alors la loi d'évolution se réécrit sous une forme plus compacte :

$$\dot{d} = \frac{2c_R}{\varepsilon}\left\langle 1 - \frac{\mathcal{G}_c^2}{\varepsilon^2 (Y - Y_f)^2}\right\rangle^{1/\alpha} \tag{4.51}$$

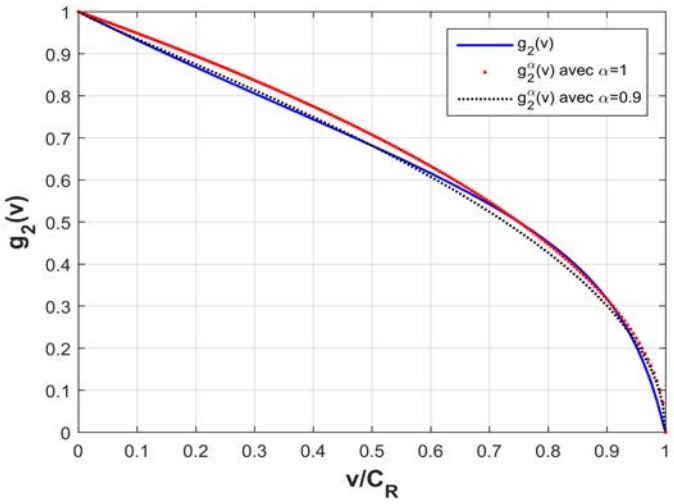

FIGURE 4.4 – La fonction $g_2(v)$ et ses approximations vs v/c_R.

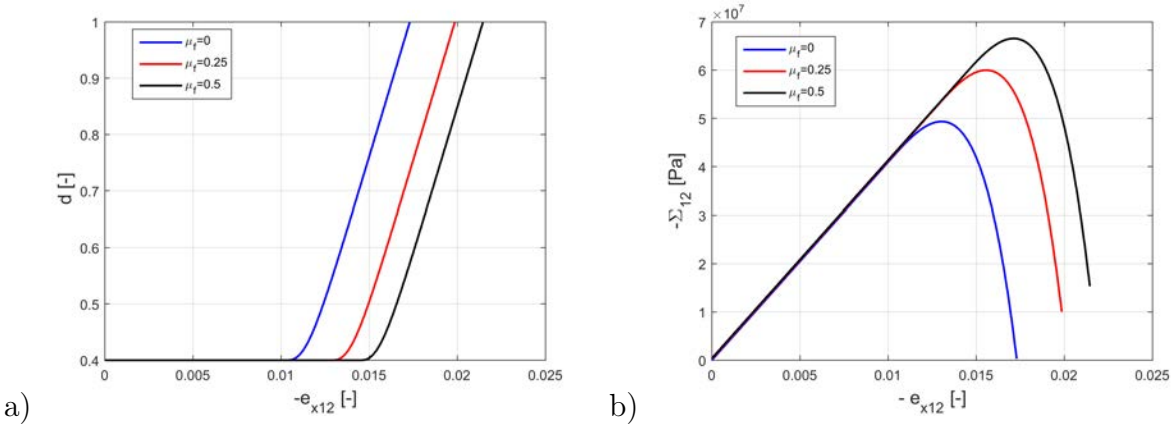

FIGURE 4.5 – Endommagement d et contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour le coefficient de frottement : $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$, $\mu_f = 0.5$.

Comme pour les modes I et III, on remarque que dans cette loi d'évolution la longueur microscopique ε est présente et sera responsable des effets de taille de microstructure.

4.6 Comportement macroscopique local

Dans cette section nous analysons la réponse locale du modèle obtenu, en prenant $\alpha = 1$ pour l'approximation de $g_2(v)$. Nous considérons pour cette étude les mêmes paramètres matériau du PMMA que pour le calcul des coefficients effectifs C_{ijkl} et des intégrales I_{ijkl} dans la section précédente. L'énergie critique de rupture est $\mathcal{G}_c = 350\ J/m^2$.

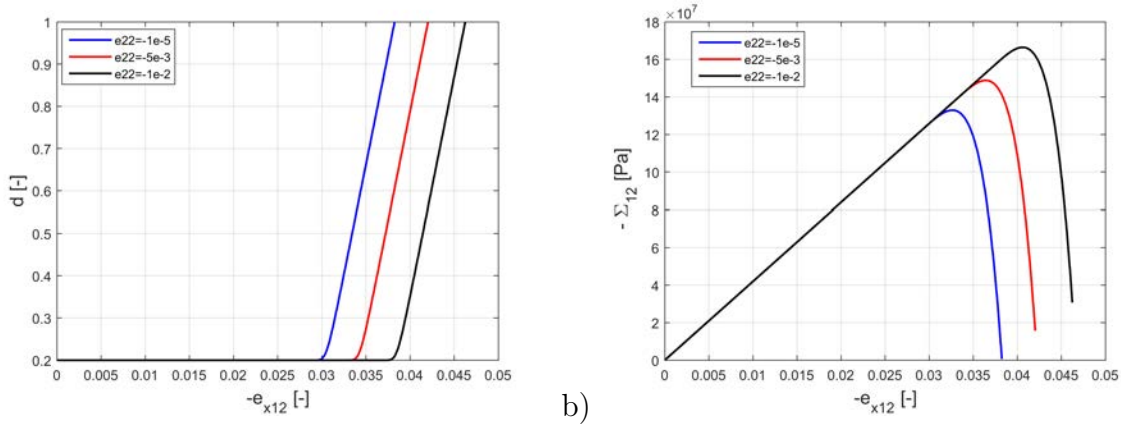

FIGURE 4.6 – Endommagement d et la contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour trois valeurs de la déformation de compression : $e_{x22} = -1e-5$, $e_{x22} = -5e-3$, $e_{x22} = -1e-2$.

4.6.1 Influence du coefficient de frottement

Pour étudier l'influence du coefficient de frottement sur la réponse locale de la cellule, nous imposons une vitesse de déformation de cisaillement constante $\dot{e}_{x12} = -8000\ /s$, une déformation de compression $e_{x22} = -5.10^{-3}$, avec l'endommagement initial $d_0 = 0.2$. La taille microscopique est $\varepsilon = 0.003\ m$. Nous représentons dans la Figure 4.5 la contrainte $-\Sigma_{12}$ et l'endommagement d en fonction de la déformation $-e_{12}$ pour trois valeurs de coefficients de frottement $\mu_f = 0$, $\mu_f = 0.25$, $\mu_f = 0.5$. On remarque une dépendance claire du coefficient de frottement du matériau. La résistance au cisaillement augmente avec le coefficient du frottement, car le frottement rend plus difficile la propagation. L'initiation de l'endommagement est retardée pour un coefficient de frottement plus élevé. Les fissures présentant un frottement plus important sur leurs lèvres sont plus difficiles à faire propager que celles ayant des frottement moins élevés. Une partie de l'énergie disponible est dissipée par frottement sur les lèvres de la fissure.

4.6.2 Influence de la compression

Nous considérons trois valeurs de la déformation $e_{x22} = -10^{-5}$, $e_{x22} = -5.10^{-3}$, $e_{x22} = -10^{-2}$. Nous étudions l'influence de la compression sur la cellule pour un coefficient de frottement $\mu_f = 0.5$, une vitesse de déformation $\dot{e}_{x12} = -8000\ /s$ et l'endommagement initial $d_0 = 0.2$.

L'influence de e_{x22} est représentée dans la Figure 4.6 qui montre la contrainte $-\Sigma_{12}$ et l'endommagement d en fonction de la déformation $-e_{12}$. Nous observons qu'une augmentation de la déformation de compression produit un retard sur l'évolution de l'endommagement et que la résistance est augmentée. Comme dans l'exemple précédent, le frottement est plus important pour des compressions plus fortes et cela rend plus difficile la propagation des microfissures.

Afin de voir l'influence de la compression sur la vitesse de la pointe des micro-fissures nous représentons dans la Figure 4.7 la vitesse à la pointe v_p comme fonction de la défor-

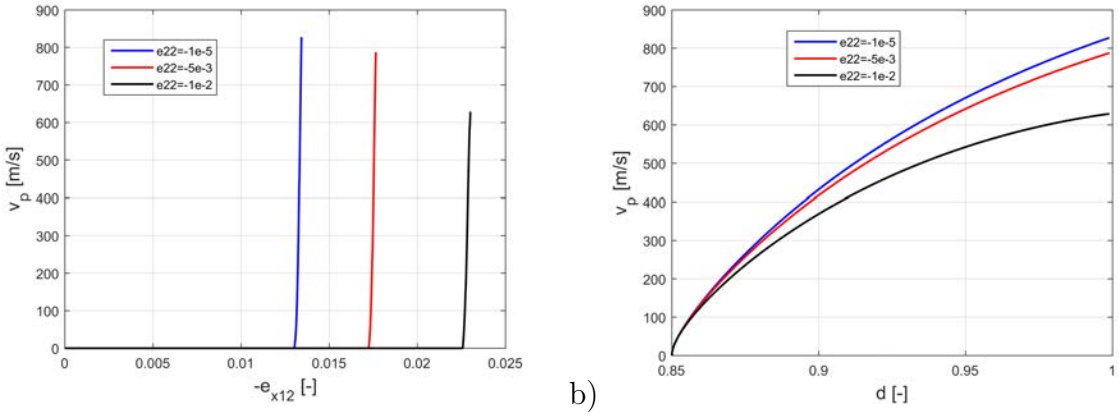

FIGURE 4.7 – Vitesse de la pointe des micro-fissures en fonction de la déformation $-e_{12}$ (a) et de d (b) pour trois valeurs de la déformation de compression et $d_0 = 0.85$.

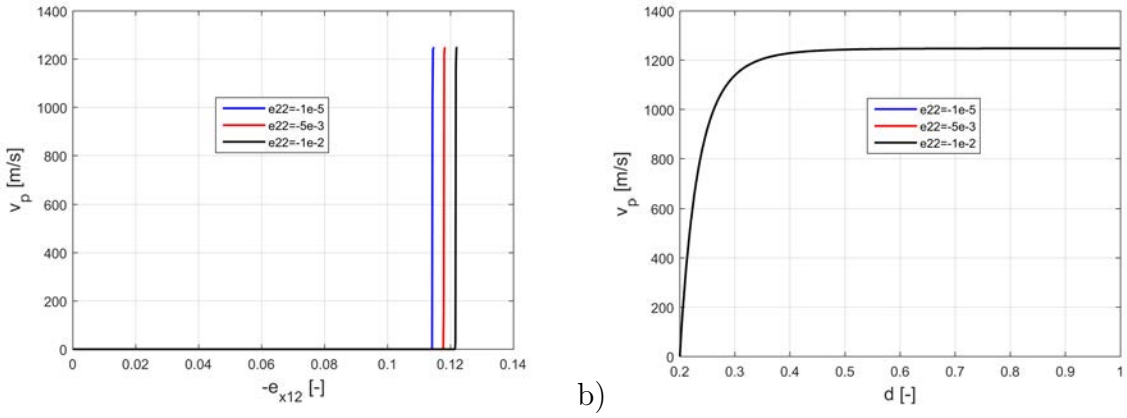

FIGURE 4.8 – Vitesse de la pointe des micro-fissures en fonction de la déformation $-e_{12}$ (a) et de d (b) pour trois valeurs de de déformation de compression et $d_0 = 0.2$.

mation $-e_{x12}$ et de la variable d pour les mêmes valeurs de la déformation de compression que précédemment, mais pour un endommagement initial $d_0 = 0.85$ et $\varepsilon = 0.0002\ m$. Pour cette valeur de d_0, on voit sur les courbes que la compression élevée a pour effet de diminuer la vitesse de propagation des micro-fissures. Si nous prenons des cellules ayant de l'endommagement initial petit, l'initiation des endommagements est retardée par la compression mais son effet sur la vitesse de la pointe est moins visible. Toutes les micro-fissures se propagent avec une vitesse qui se rapproche de C_R - la vitesse limite. Les courbes vitesses correspondantes sont représentées dans la Figure 4.8 pour un $d_0 = 0.2$.

4.6.3 Influence de l'endommagement initial

Nous nous proposons dans cette section d'étudier l'influence de l'endommagement initial sur le comportement local macroscopique. Nous appliquons une déformation de compression $e_{x22} = -1e-3$, $e_{x11} = 0$, une vitesse de déformation de cisaillement constante $\dot{e}_{x12} = -8000\ /s$ et nous prenons la taille de la période $\varepsilon = 8e-4\ m$. La courbe de

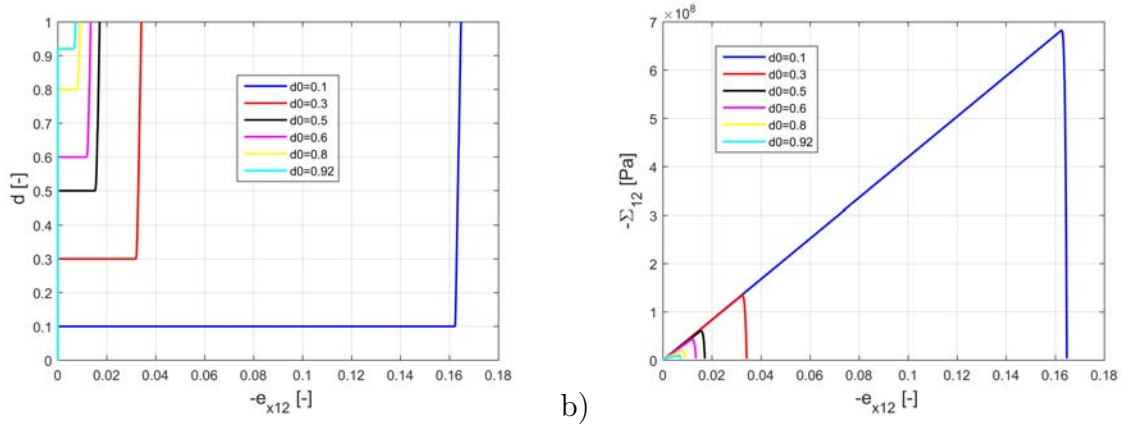

FIGURE 4.9 – Endommagement d (a) et contrainte $-\Sigma_{12}$ (b) en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour six valeurs différentes de d_0.

contrainte de cisaillement et de l'endommagement en fonction de $-e_{x12}$ est donnée dans la Figure 4.9 pour un coefficient de frottement $\mu_f = 0.5$ et pour six valeurs de l'endommagement initial.

On remarque que pour des micro-fissures de tailles initiales plus grandes, des déformations plus petites sont suffisantes pour faire rompre la cellule complètement, alors que lorsque la cellule a un d_0 petit il faut un cisaillement plus important pour faire propager les micro-fissures. On peut voir sur la Figure 4.9 qu'il y a un écart très important entre les résistances au cisaillement pour $d_0 = 0.1$ et $d_0 = 0.3$. Cet écart est six fois plus petit pour $d_0 = 0.3$ et $d_0 = 0.5$.

4.6.4 Influence de la vitesse de déformation

Nous analysons maintenant la réponse macroscopique locale pour différentes valeurs de la vitesse de déformation : $\dot{e}_{x12} = -100\ /s$, $\dot{e}_{x12} = -1000/s$, $\dot{e}_{x12} = -10000\ /s$. Les courbes contrainte $-\Sigma_{12}$ vs $-e_{x12}$ et la variable d vs $-e_{x12}$ sont données dans la Figure 4.10 pour un coefficient de frottement $\mu_f = 0.5$, une déformation de compression $e_{x22} = -1e-3$ et pour $\varepsilon = 1e-3\ m$.

Nous observons une réponse fragile sur l'évolution des contraintes et de l'endommagement pour des faibles vitesses de déformation alors qu'un effet de ductilité associé à une légère augmentation de la résistance est observée pour des plus grandes vitesses de déformation. Ce second comportement est dû à l'effet d'inertie plus important retrouvé pour des vitesses grandes et entraînant une propagation plus lente des micro-fissures. L'effet est celui déjà observé dans le cas des fissures se propageant sans frottement sur les lèvres.

4.6.5 Influence de la taille de microstructure

Nous étudions finalement l'effet de la longueur microscopique sur la réponse locale du matériau. La Figure 4.11 montre les effets de la longueur des microstructures pour le coefficient de frottement $\mu_f = 0.5$. Les tests ont été effectués pour la vitesse de déformations

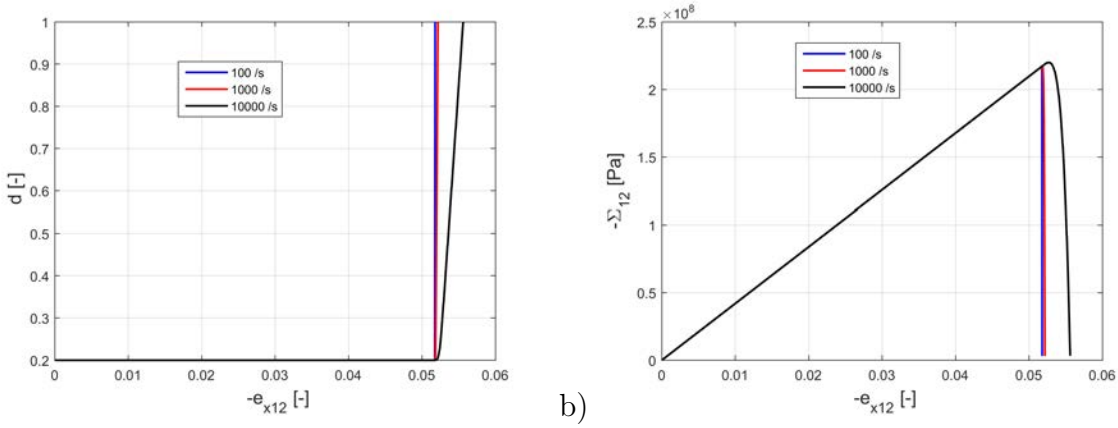

FIGURE 4.10 – Endommagement d et contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour trois valeurs de vitesse de déformation : $\dot{e}_{x12} = -100\ /s$, $\dot{e}_{x12} = -1000/s$, $\dot{e}_{x12} = -10000\ /s$.

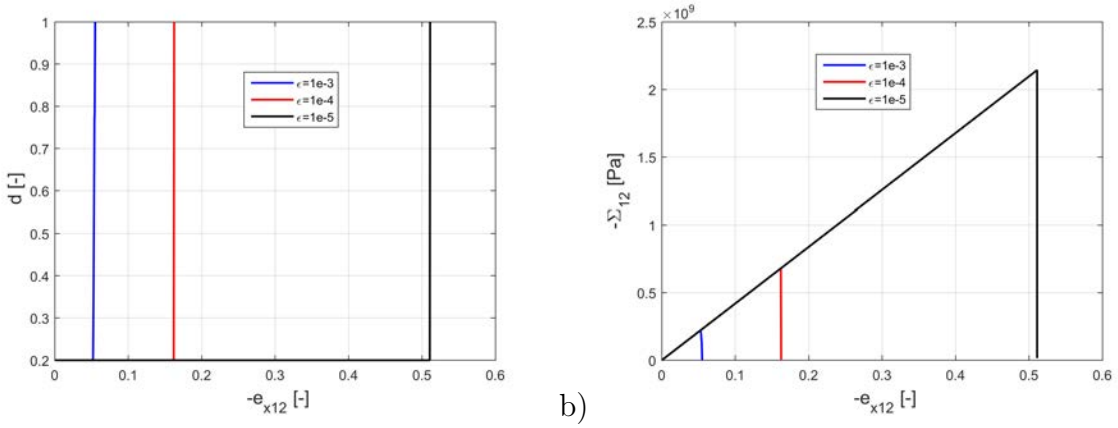

FIGURE 4.11 – Endommagement d et contrainte $-\Sigma_{12}$ en fonction de la déformation $-e_{x12}$ pour trois valeurs différentes de taille de microstructure : $\varepsilon = 1e-3\ m$, $\varepsilon = 1e-4\ m$ et $\varepsilon = 1e-5\ m$.

$\dot{e}_{x12} = -8000\ /s$ et pour des déformations $e_{x11} = 0$, $e_{x22} = -1e-3$. Trois valeurs de taille de microstructure ont été considérées : $\varepsilon = 1e-3\ m$, $\varepsilon = 1e-4\ m$ et $\varepsilon = 1e-5\ m$.

Nous observons que la résistance au cisaillement augmente lorsque la taille de la microstructure diminue. Plus la microstructure est fine, plus le matériau est résistant. L'initiation de l'endommagement est retardée pour des tailles petites de microstructure.

4.7 Simulation des effets de compression sur l'évolution du front de rupture d'une interface avec frottement

Dans cette dernière partie, nous analysons les prédictions du modèle d'endommagement dynamique au niveau structurel. Sur la base des travaux expérimentaux dans [15, 134], établissant un lien clair entre le début du glissement par frottement et la rup-

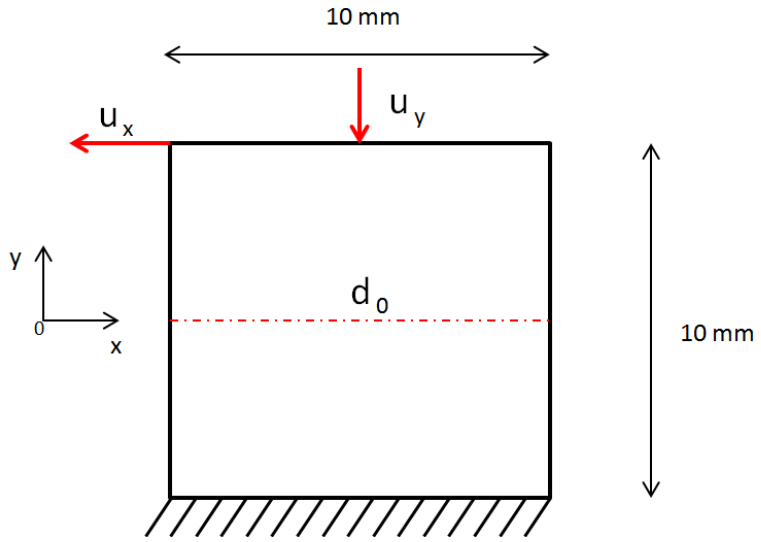

FIGURE 4.12 – Géométrie et chargement du spécimen PMMA pour la simulation des effets de compression.

ture dynamique en mode II, nous utilisons le nouveau modèle d'endommagement pour simuler cette première étape de frottement entre deux blocs en polymère PMMA. L'interface entre eux est considérée comme une ligne endommagée avec une valeur élevée de d_0. La propagation du front de fissure de cisaillement sur l'interface est ensuite simulée avec la loi d'endommagement établie qui inclut naturellement les effets de frottement.

4.7.1 Géométrie, chargement et maillage du spécimen

Nous considérons un modèle réduit d'échantillon ayant une forme carré de côté 10 mm similaire aux études faites dans [90, 100, 146]. Le matériau utilisé est le PMMA ayant les mêmes propriétés que celles utilisées dans l'étude macroscopique locale mais avec une énergie critique de rupture $\mathcal{G}_c = 400\ J/m^2$ et la taille de la microstructure considérée $\varepsilon = 1e-3\ m$.

Un chargement en compression-cisaillement est appliqué sur le bord supérieur de l'échantillon, à travers les déplacements $u_x(t)$ et $u_y(t)$ comme représenté dans la Figure 4.12, tandis que son bord inférieur reste fixe. Le déplacement de compression u_y, est appliqué en deux étapes : sur la première période de temps allant de 0 s à $t_{0y} = 1e-4\ s$ il est appliqué linéairement et après maintenu constant sur le reste du temps de chargement :

$$u_y(t) = \begin{cases} -\frac{u_{0y}}{t_{0y}} t & \text{si } t \leq t_{0y} \\ -u_{0y} & \text{si } t > t_{0y} \end{cases} \tag{4.52}$$

où u_{0y} est un déplacement constant imposé.

Le déplacement $u_x(t)$ est imposé suivant la direction x d'une manière linéaire sur toute la durée de chargement tel que :

$$u_x(t) = -\frac{u_{0x}}{t_{0x}} t \tag{4.53}$$

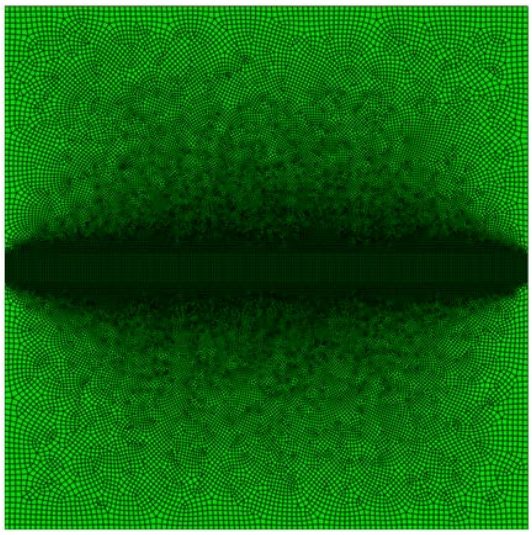

FIGURE 4.13 – Maillage de l'échantillon pour la simulation des effets de compression sur la rupture.

avec $t_{0x} = 2e - 3\ s$ le temps final du chargement et $u_{0x} = 8e - 4\ m$ le déplacement final appliqué.

Le bord inférieur de l'échantilon est bloqué suivant les axes x et y alors que ses bords latéraux sont laissés libres.

Les simulations sont réalisées dans le code Abaqus/Explicit [1] via un sous-programme VUMAT sur un domaine bi-dimensionnel discrétisé avec des éléments bilinéaires plans à 4 nœuds avec intégration réduite. Les conditions de contraintes planes sont employées et le maillage d'élément fini typique est montré à la Figure 4.13 avec la taille approximative de l'élément de $2.5e - 5\ m$.

Sur tous les éléments situés sur la ligne horizontale centrale du spécimen, la partie représentée en trait rouge discontinu sur la Figure 4.12, nous mettons de l'endommagement initial $d_0 = 0.7$ pour que la rupture macroscopique se produise dans cette zone de la structure.

Comme mentionné précédemment, le glissement avec frottement est initié par la propagation rapide d'une fissure en mode II qui traverse l'interface entre deux blocs de PMMA. Cette rupture dynamique est simulée ici par le modèle d'endommagement basé sur la propagation rapide des micro-fissures en mode II. L'interface entre les deux blocs est représentée par la zone centrale affaiblie dans laquelle l'endommagement initial est $d_0 = 0.7$. Ainsi, le lien frottement dynamique-rupture mis en évidence dans [15, 134] nous permet d'interpréter les simulations qui suivent en termes des résultats des essais de frottement réalisés par les auteurs.

4.7.2 Simulations numériques

Les résultats de calcul pour quatre valeurs distinctes des déplacements de compression $u_{0y} = 0.111\ mm$, $u_{0y} = 0.110628\ mm$, $u_{0y} = 0.05\ mm$ et $u_{0y} = 0.03\ mm$, sont représentés

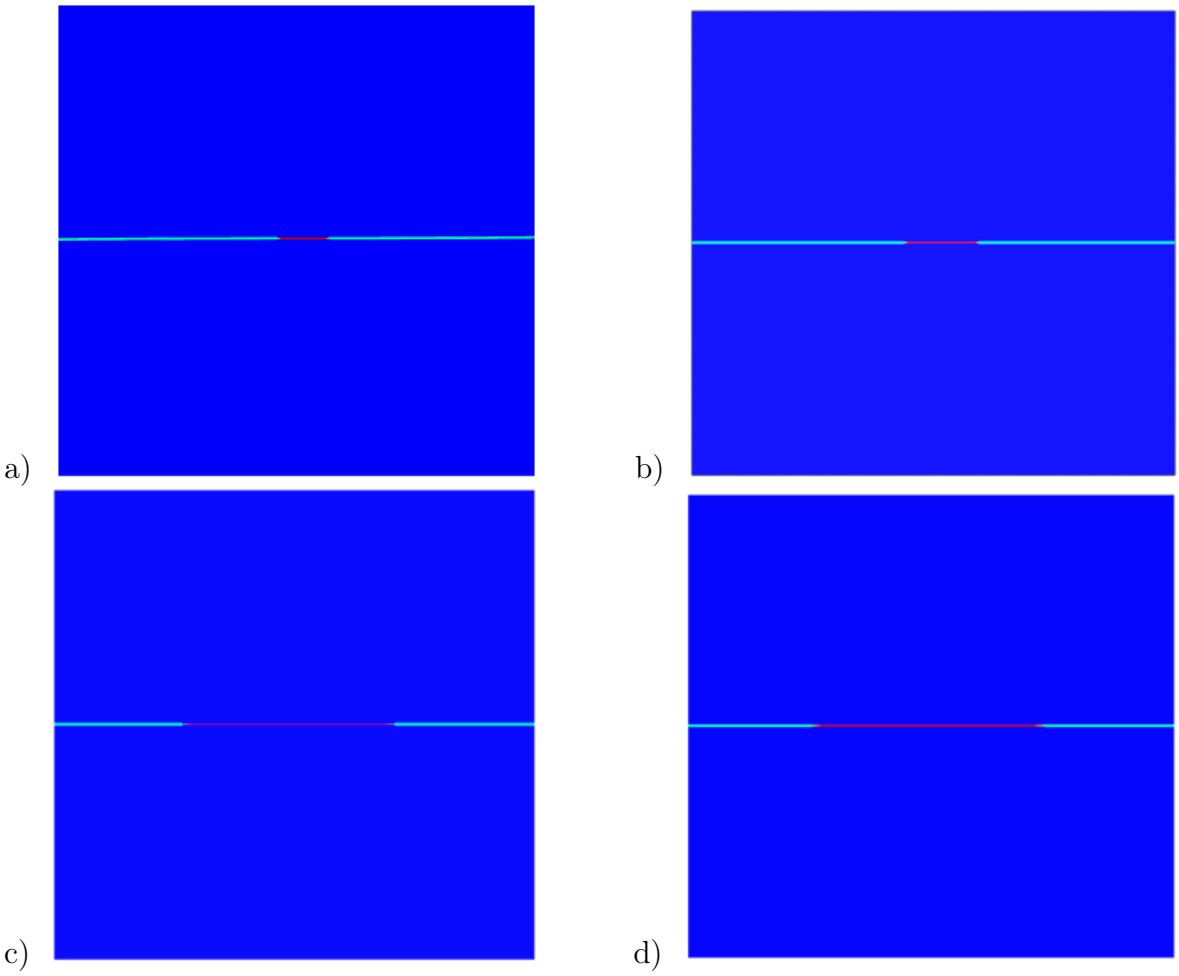

FIGURE 4.14 – Evolution de l'endommagement à t=0.9 μs de l'initiation de la rupture, pour quatre déplacements appliqués : *a)* $u_{0_y} = 0.111\ mm$, *b)* $u_{0_y} = 0.110628\ mm$, *c)* $u_{0_y} = 0.05\ mm$ et *d)* $u_{0_y} = 0.03\ mm$.

dans la Figure 4.14. Dans ces images, les distributions d'endommagement sont représentées à l'instant t=0.9 μs où t=0 correspond au moment du déclenchement de la rupture. Les points matériaux complètement endommagés ($d = 1$) sont représentés en rouge. On peut remarquer que pour des valeurs plus faibles du déplacement de compression, la fissure macroscopique évolue plus rapidement. Ceci est conforme aux résultats de l'analyse de la réponse locale.

Pour mieux comprendre les effets du chargement de compression, nous avons représenté dans la Figure 4.15 la vitesse locale à la pointe de la fissure, évaluée au moment de démarrage qui a lieu au centre de l'interface, en fonction du rapport de contrainte de cisaillement et de compression Σ_{12}/Σ_{22}. Pour représenter cette courbe, nous avons considéré les déplacements $u_{0_y} = 0.112\ mm$, $u_{0_y} = 0.111\ mm$, $u_{0_y} = 0.11095\ mm$, $u_{0_y} = 0.110625\ mm$, $u_{0_y} = 0.05\ mm$ et $u_{0_y} = 0.03\ mm$ et évalué les contraintes au moment de démarrage de la fissure au centre de l'interface.

Deux régimes de vitesses de fissure sont obtenus. Pour des faibles déplacements ap-

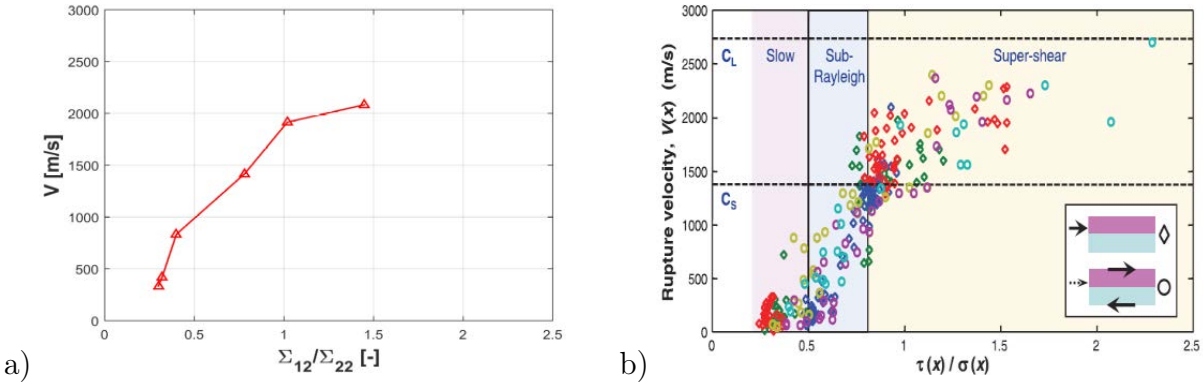

FIGURE 4.15 – Vitesse locale de propagation en fonction du rapport de contraintes Σ_{12}/Σ_{22} : *a*) simulation numérique et *b*) résultat expérimental [15].

pliqués on obtient des vitesses dans le régime super-shear : $v > c_S$, avec c_S la vitesse des ondes de cisaillement (env. 1345 m/s). Pour des déplacements appliqués plus importants, on obtient des vitesses dans le régime sub-Rayleigh : $v < c_R$, avec c_R la vitesse des ondes de Rayleigh (env. 1240 m/s). On remarque que lorsque le rapport des contraintes est inférieur à 0.5, on obtient un régime de vitesse sous-Rayleigh, qui passe en régime de super-cisaillement pour le rapport des contraintes supérieur à 0.8 environ. Les résultats numériques Figure 4.15a sont comparés à ceux obtenus expérimentalement Figure 4.15b dans [15].On trouve une bonne concordance.

Dans la Figure 4.16, sont représentées les vitesses locales pour différents temps d'évolution de l'endommagement en prenant $t = 0$ comme étant le temps au moment auquel la fissure a commencé à se propager dans le matériau. Les vitesses à la pointe de la fissure sont calculées à chaque 0.3 μs sur toute la durée de propagation. On observe sur toutes les six courbes obtenues que les vitesses locales ne sont pas comprises entre c_R et c_S. Ceci confirme la théorie de la mécanique de la rupture qui stipule qu'on ne peut pas obtenir des vitesses dans ce régime.

Ces résultats complètent ceux donnés dans la Figure 4.15, en montrant l'évolution de la vitesse macroscopique par rapport aux différents régimes sou-Rayleigh or super-cisaillement et le passage d'un régime à l'autre pendant la propagation de la macro-fissure.

4.8 Conclusions

Un modèle d'endommagement dynamique tenant compte de la dissipation liée au frottement sur les lèvres des micro-fissures a été proposé. La loi d'évolution est obtenue à partir d'un critère de propagation de type Griffith en mode II, en utilisant une méthode d'homogénéisation asymptotique.

Le nouveau modèle d'endommagement est capable de décrire l'influence du frottement sur les comportements locaux et structurels. Des études sur l'influence des paramètres comme le coefficient de frottement, la taille de microstructure, la vitesse de déformation et l'endommagement initial ont été effectuées au niveau local macroscopique.

Des simulations sur les effets de compression pour un échantillon soumis à un charge-

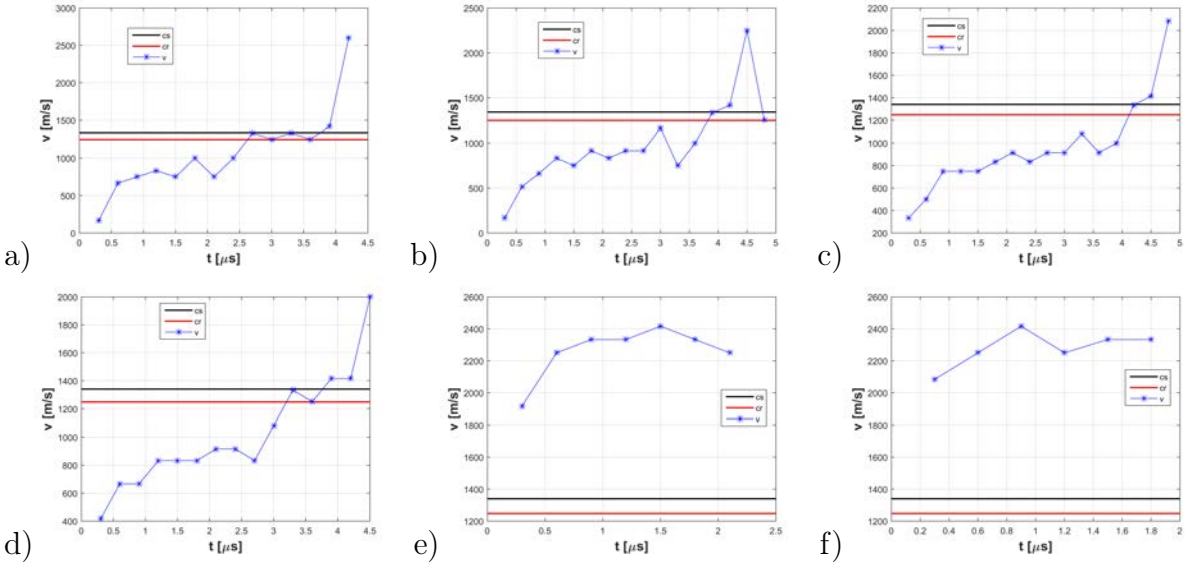

FIGURE 4.16 – Vitesse locale en fonction du temps pour différents déplacements u_{0y} appliqués : *a)* $u_{0y} = 0.112\ mm$, *b)* $u_{0y} = 0.111\ mm$, *c)* $u_{0y} = 0.110628\ mm$, *d)* $u_{0y} = 0.110626\ mm$, *e)* $u_{0y} = 0.05\ mm$ et *f)* $u_{0y} = 0.03\ mm$.

ment de cisaillement ont révélé de bonnes concordances avec des résultats expérimentaux concernant le frottement dynamique. Le modèle proposé se place dans le cadre des résultats récents concernant le lien entre le frottement dynamique et la rupture en mode de cisaillement.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons présenté des modèles d'endommagement dynamiques obtenus pour des micro-fissures soumises à des sollicitations de traction, de cisaillement plan et anti-plan. Ces modèles ont été obtenus en utilisant une approche de modélisation double-échelle basée sur la méthode d'homogénéisation asymptotique. Des simulations numériques ont été effectuées avec les nouvelles lois d'endommagement pour reproduire des phénomènes de rupture observés dans les matériaux fragiles.

Dans le chapitre 2, la méthode d'homogénéisation a été utilisée pour déduire le comportement global d'un solide élastique micro-fissuré en mode anti-plan. Une analyse énergétique de la propagation des micro-fissures associée à la technique d'homogénéisation basée sur des développements asymptotiques a permis l'obtention d'une loi d'endommagement dynamique. Les effets inertiels microscopiques ont été pris en compte dans la construction du modèle, qui présente également une sensibilité à la taille de la microstructure.

Une étude locale à l'échelle macroscopique a permis de montrer l'influence de certains paramètres sur l'évolution de l'endommagement. Il a été montré que la longueur caractéristique de la microstructure conduit à des effets d'échelle. En combinaison avec les effets inertiels, on retrouve des comportements plus fragiles ou plus ductiles, avec une résistance plus élevée ou diminuée, en fonction de la valeur de la longueur microscopique. Les effets inertiels microscopiques, en lien avec la propagation des micro-fissures, engendrent une dépendance de la vitesse de déformation à l'échelle macroscopique. L'influence des autres paramètres, comme l'endommagement initial, a été aussi étudiée.

Des simulations au niveau structurel ont permis d'étudier les phénomènes de (micro-)branchement des fissures en mode III. Il a été montré numériquement qu'il existe une vitesse critique pour l'initiation des instabilités de micro-branchement, dont la valeur est d'environ $v_c \simeq 0.39\, C_R$, avec C_R la vitesse des ondes de Rayleigh. en accord avec d'autres résultats théoriques existants. Des phénomènes associés, tels que les oscillations de la vitesse de la fissure principale comme conséquence de la formation des micro-branches ont été également mis en évidence par les simulations numériques.

Dans le chapitre 3, nous avons utilisé une loi d'endommagement dynamique pour simuler des expériments impliquant la rupture en mode I à petite échelle. Ce modèle a été obtenu précédemment, en utilisant la même technique d'homogénéisation couplée à une description énergétique de la propagation dynamique des micro-fissures en mode d'ouverture. Dans ce chapitre nous avons étudié la capacité du modèle à prédire les résultats des essais concernant l'effet de la vitesse de chargement sur le mode de rupture dynamique.

Nous avons reproduit les essais de traction directe et de l'échantillon en forme de L pour les bétons, en retrouvant les modes de rupture observées expérimentalement. Nous

avons montré que lorsque les vitesses appliquées sont petites les fissures se propagent en mode I dominant alors que pour des vitesses plus grandes, on observe un changement de mode de rupture vers le mode mixte, dans certains cas associé au branchement de la fissure principale. Pour le test de d'impact sur l'échantillon CCS en PMMA, nous avons retrouvé la dépendance de l'angle d'amorçage de la fissure de la vitesse d'impact, comme observée expérimentalement. L'essai de d'impact LECEI de Kalthoff sur des échantillons de roche calcaire a été aussi simulé avec le modèle d'endommagement dynamique. Nous avons montré que, lorsque le chargement d'impact est élevé, un système multi-fissures est formé à partir de la fissure principale. L'évolution de ce système a été obtenue en bon accord avec les résultats de l'essai. Tous ces résultats ont été obtenus avec le modèle d'endommagement basé uniquement sur le propagation des micro-fissures en mode I.

Dans le chapitre 4, une autre loi d'endommagement dynamique est établie correspondant au mode II de propagation des micro-fissures, avec prise en compte du contact avec frottement entre les lèvres. Pour obtenir ce modèle, la méthode d'homogénéisation asymptotique est encore utilisée en tenant compte de la dissipation par frottement à l'échelle microscopique. La loi d'endommagement a été obtenue précédemment dans le cas quasi-statique. En se basant sur ce résultat, nous avons étendu le modèle au cas dynamique.

Une étude locale du nouveau modèle d'endommagement a été effectuée. L'influence du coefficient de frottement et de la compression normale a été analysée, en montrant que leur augmentation retarde l'évolution de l'endommagement. D'autres effets ont été mis en évidence, concernant l'influence de l'endommagement initial, de la taille de microstructure et de la vitesse de déformation. Nous retrouvons le même type de réponse que dans le cas du modèle obtenu au chapitre 2, pour des micro-fissures se propageant en mode anti-plan.

Des simulations éléments finis ont été effectuées pour reproduire les effets des compressions obtenus expérimentalement sur les spécimens de PMMA. Et il est noté qu'en fonction du chargement appliqué, les fissures peuvent passer du régime sous-Rayleigh au régime super-cisaillement concernant leur vitesse de rupture macroscopique. Le modèle semble bien capable de décrire des comportements de frottement dynamique que des études récentes ont reliés à la propagation dynamique en mode de cisaillement.

Les résultats de ces différents chapitres ont montré que les phénomènes de rupture dynamique peuvent être reproduits avec succès à l'aide d'une modélisation multi-échelle de l'endommagement basée sur l'évolution rapide des micro-fissures. Les nouveaux modèles on fait l'objet d'une implémentation dans des logiciels de calcul en éléments finis. Pour les modèles en modes I et II il s'agit du logiciel EF Abaqus Explicit à travers des subroutines VUMAT, pour le mode III des codes maison écrits en Matlab.

Plusieurs extensions des modèles présentés dans ce mémoire sont possibles, comme la prise en compte des distributions aléatoires de micro-fissures (par exemple [59], [137], [142]), des changements de direction dans les trajectoires des micro-fissures en utilisant l'approche développée dans [56] et [40], l'extension au cas 3D en suivant le développement proposé dans [36], prise en compte de la propagation en mode mixte, de l'interaction et des effets de coalescence des micro-fissures [94].

Annexe A

A.1 Intégrales I_{mnpq}

Les coefficients I_{mnpq} sont obtenus à partir des combinaisons de I^{α}_{mnpq} exprimés par :

$$I^{\alpha}_{mnpq} = \frac{1}{2}\frac{d}{dd}\int_{CY} a_{ijkl}(E^{mn}_{kl} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}))N_j[\eta^{pq}_i]ds_y - \int_{CY} a_{ijkl}(E^{mn}_{kl} + e_{ykl}(\boldsymbol{\eta}^{mn}))N_j[\frac{d\eta^{pq}_i}{dd}]ds_y \quad \text{(A.1)}$$

En adoptant le changement de variable $\boldsymbol{\eta}^{pq}$ en $\mathbf{v}^{pq}$ défini par $\eta^{pq}_i = \mathrm{v}^{pq}_i - \bar{E}^{pq}_{ij}y_j$ dans la section (4.4), nous pouvons réécrire l'expression A.1 en fonction de $\mathbf{v}^{pq}$:

$$I^{\alpha}_{mnpq} = \frac{1}{2}\frac{d}{dd}\int_{CY} a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{v}^{mn})N_j[\mathrm{v}^{pq}_i]ds_y - \int_{CY} a_{ijkl}e_{ykl}(\mathbf{v}^{mn})N_j[\frac{d\mathrm{v}^{pq}_i}{dd}]ds_y \quad \text{(A.2)}$$

Pour exprimer les coefficients I_{mnpq} en fonction de I^{α}_{mnpq}, nous calculons l'expression du terme représentant le frottement $I^{\alpha}_{mnpq}\alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)})$ obtenu dans la loi (4.33), en fonction des déformations $e_{xmn}(\mathbf{u}^{(0)})$ pour obtenir la loi (4.34).

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{mnpq}\alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) &= I^{\alpha}_{1111}\alpha_{11}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{11}(\mathbf{u}^{(0)}) + I^{\alpha}_{1112}\alpha_{11}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{12}(\mathbf{u}^{(0)}) \\
&+ I^{\alpha}_{1122}\alpha_{11}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{22}(\mathbf{u}^{(0)}) + I^{\alpha}_{2211}\alpha_{22}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{11}(\mathbf{u}^{(0)}) + I^{\alpha}_{2212}\alpha_{22}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{12}(\mathbf{u}^{(0)}) \\
&+ I^{\alpha}_{2222}\alpha_{22}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{22}(\mathbf{u}^{(0)}) + I^{\alpha}_{1211}\alpha_{12}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{11}(\mathbf{u}^{(0)}) + I^{\alpha}_{1212}\alpha_{12}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{12}(\mathbf{u}^{(0)}) \\
&+ I^{\alpha}_{1222}\alpha_{12}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{22}(\mathbf{u}^{(0)})
\end{aligned} \quad \text{(A.3)}$$

En tenant compte des termes nuls de I^{α}_{mnpq} : I^{α}_{1111}, I^{α}_{1112}, I^{α}_{1122}, I^{α}_{2211}, I^{α}_{1211} et des termes symétriques : $I^{\alpha}_{1222} = I^{\alpha}_{2212}$ et en remplaçant les expressions des déformations $\alpha_{11} = -\beta e_{x11}$, $\alpha_{12} = \beta(e_{x22} - e_{x12})$, $\alpha_{22} = \beta(e_{x12} - 2e_{x22})$ dans l'équation (A.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{mnpq}\alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) &= 2\beta^2 I^{\alpha}_{1222}(e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}) - e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}))(e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}) - 2e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)})) \\
&+ \beta^2 I^{\alpha}_{2222}(e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}) - 2e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 + \beta^2 I^{\alpha}_{1212}(e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}) - e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}))^2
\end{aligned} \quad \text{(A.4)}$$

La relation A.4 peut être réécrite sous la forme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{mnpq}\alpha_{mn}(\mathbf{u}^{(0)})\alpha_{pq}(\mathbf{u}^{(0)}) &= (6\beta^2 I^{\alpha}_{1222} - 4\beta^2 I^{\alpha}_{2222} - 2\beta^2 I^{\alpha}_{1222})e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)})e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}) \\
&+ (-4\beta^2 I^{\alpha}_{1222} + 4\beta^2 I^{\alpha}_{2222} + \beta^2 I^{\alpha}_{1212})(e_{x22}(\mathbf{u}^{(0)}))^2 \\
&+ (-2\beta^2 I^{\alpha}_{1222} + \beta^2 I^{\alpha}_{2222} + \beta^2 I^{\alpha}_{1212})(e_{x12}(\mathbf{u}^{(0)}))^2
\end{aligned} \quad \text{(A.5)}$$

De cette dernière équation (A.6), nous déduisons les intégrales I_{1222}, I_{2222}, I_{1212} :

$$\begin{aligned} I_{1222} &= 6\beta^2 I^\alpha_{1222} - 4\beta^2 I^\alpha_{2222} - 2\beta^2 I^\alpha_{1222} = 2\beta^2(3I^\alpha_{1222} - 2I^\alpha_{2222} - I^\alpha_{1222}) \\ I_{2222} &= -4\beta^2 I^\alpha_{1222} + 4\beta^2 I^\alpha_{2222} + \beta^2 I^\alpha_{1212} = \beta^2(-4I^\alpha_{1222} + 4I^\alpha_{2222} + I^\alpha_{1212}) \\ I_{1212} &= -2\beta^2 I^\alpha_{1222} + \beta^2 I^\alpha_{2222} + \beta^2 I^\alpha_{1212} = \beta^2(-2I^\alpha_{1222} + I^\alpha_{2222} + I^\alpha_{1212}) \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2 Calcul des I^α_{mnpq}

Pour calculer les intégrales I^α_{mnpq}, nous utilisons le logiciel de calcul d'éléments finis Comsol Multiphysics. Nous avons résolu les problèmes de cellules pour différentes valeurs de la variable d'endommagement d données. Après nous avons interpolé les solutions v qui sont fonction de d. Ceci nous permet d'obtenir la première et la deuxième intégrale de A.2, évaluées sur les bords des fissures avec le même logiciel Comsol Multiphysics pour une valeur donné de d. Ces calculs ont été effectués pour une vingtaine valeurs de d variant de 0 à 1 et les résultats interpolés par des fonctions polynomiales. Le premier terme de l'expression A.2 est alors obtenu en dérivant la fonction interpolée de la première intégrale.

Bibliographie

[1] ABAQUS 6.13, Analysis User's Manual. Dassault Systemes Simulia Corporation, RI, USA, (2013).

[2] Adda-Bedia M Brittle fracture dynamics with arbitrary paths II. Dynamic crack branching under general antiplane loading. J. Mech. Phys. Solids 52, pp. 1407-1420 (2004).

[3] Allix O., Deü J.F., Delay-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading. Engineering Transactions, 45, 29-46, (1997).

[4] Allix O., Feissel P., Thévenet P., A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. Computers and Structures, 81, 1177-1191 (2003).

[5] Atiezo M.K., Dascalu C., Antiplane two-scale model for dynamic failure. Int J. Fracture, 206, 195-214 (2017).

[6] Atiezo M.K., Chen W., Dascalu C., Loading rate effects on dynamic failure of quasi-brittle solids : Simulations with a two-scale damage model. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 100, 269-280 (2019).

[7] Atiezo M.K., Chen W., Dascalu C., Simulation of Loading Rate Effects on Dynamic Brittle Failure of Concrete Structures Using a Two-Scale Damage Model. Proceedings FFW 2018, Springer, Singapore, 91-98 (2019).

[8] Auriault J.L., Bonnet G. Surface effects in composite materials : two simple examples. Int. J. Engng. Sci., 25, 3, pp. 307-323 (1987).

[9] Auriault J.L., Caillerie D. Some rernarks on homogenization processes. Rev. Française Géotechnique, 49, pp. 43-50 (1989).

[10] Bakhvalov, N., Panasenko, G. Homogenisation : Averaging Processes in Periodic Media, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1989).

[11] Banthia N.P., Mindess S., Bentur A., Impact behavior of concrete beams. Materials and Structures, 20, 293-302 (1987).

[12] Bazant Z.P., Size effect in blunt fracture : Concrete, rock, metal. J. Eng. Mech., Am. Soc. Civil Eng. 100 : 518-535, (1984).

[13] Bazant Z.P., Scaling of quasi-brittle fracture : Asymptotic analysis. Int J. Fracture 83 : 19-40 (1997).

[14] Bede N., Ozbolt J., Sharma A.,Irhan B., Dynamic fracture of notched plain concrete beams : 3D finite element study. International Journal of Impact Engineering, 77, 176-188 (2015).

[15] Ben-David O., Cohen G., Fineberg J. The dynamics of the onset of frictional slip. Science 330, 211-214 (2010).

[16] Benssousan, A., Lions, J., Papanicolaou, G., Asymptotic Analysis for Periodic Structures, Kluwer Academic Publisher, Amsterdam (1978).

[17] Beretta S., Ghidini A., Lombardo F. Fracture mechanics and scale effects in fatigue of railway axles. Engineering Fracture Mechanics 72, Elsevier Science, 195-208, (2005).

[18] Bertram A., Kalthoff J.F., Crack propagation toughness of rock for the range from low to very high crack speeds, Key Engineering Materials, 251-252, 423-430 (2003).

[19] Bertram A., Bruchenergie Laufender Risse in Gestein, Dissertation Ruhr-University, Bochum, (2008).

[20] Bhatt, H., Rosakis, A., Sammis, G., A micro-mechanics based constitutive model for brittle failure at high strain rates. J. Appl. Mech. 79(3), 1016-28 (2011).

[21] Bischoff P.H., Perry S.H., Compressive behavior of concrete at high strain rates. Materials and Structures, 24, 425-450 (1991).

[22] Bilbie, G., « Modélisation multi-échelle de l'endommagement et de la rupture dans les milieux (quasi-) fragiles ». Thèse de Doctorat, l'Université Joseph Fourier Grenoble (2007).

[23] Børvik T., Langseth M., Hopperstad O.S., and Malo K.A., Perforation of 12mm thick steel plates by 20mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses, part II : numerical simulations. International Journal of Impact Engineering, 27, 37-64 (2002).

[24] Børvik T., Langseth M., Hopperstad O.S., and Malo K.A., Ballistic penetration of steel plates. International Journal of Impact Engineering, 22 , 855-886 (1999).

[25] Bouchbinder E., Goldman T. and Fineberg J., The dynamics of rapid fracture : instabilities, nonlinearities and length scales. Rep. Prog. Phys. vol. 77, 046501 (2014).

[26] Brara A., Klepaczko J.R., Experimental characterization of concrete in dynamic tension. Mechanics of Materials, 38, 253-267 (2006).

[27] Broberg, K.B., Cracks and Fracture, Academic press, San Diego (1999).

[28] Carpinteri A., Paggi M. Size-scale effects on the friction coefficient. Int. Journal of Solids and Structures 42, Elsevier Science, 2901-2910, (2005).

[29] Carpinteri A. Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties. Mech. Mater. 18 : 89-101, (1994).

[30] Carpinteri A. Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials. Int. J. Solids Struct. 31 : 291-302, (1994).

[31] Chambart M., « Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine ». Thèse de Doctorat, L'école Normale Supérieure de Cachan (2009).

[32] Christensen, R. M., Lo, K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphère and cylinder models. J. Mech. Phys. Solids, 27, 315-330 (1997).

[33] COMSOL Multiphysics, User's Guide, Version 5.2 (2015).

[34] Dascalu, C., Bilbie, G., Agiasofitou E., Damage and size effect in elastic solids : a homogenization approach. Int. J. Solids Struct. 45, 409-430 (2008).

[35] Dascalu, C., A two-scale damage model with material length. C.R. Mecanique 337, 645-652 (2009).

[36] Dascalu, C., Dobrovat A., Tricarico M. On a 3D micromechanical damage model, International Journal of Fracture vol. 166, 153-162 (2010).

[37] Dascalu, C., François B., Keita O., A two-scale model for subcritical damage propagation. Int. J. Solids Struct. 47, 493-502 (2010).

[38] Dascalu C., Dynamic localization of damage and microstructural length influence. International Journal of Damage and Mechanics, 26, 1190-1218 (2017).

[39] Dascalu C., Multiscale modeling of rapid failure in brittle solids : branching instabilities. Mechanics of Materials, 116, 77-89 (2018).

[40] Dobrovat A., Dascalu, C., Hall S., Computational modeling of damage based on micro-crack kinking. Int. J. Multiscale Comput. Engng., vol. 13, 201-217 (2015).

[41] Deü J.F., Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique : apport des méso-modèles avec endommagement retardé. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan (1997).

[42] Dubé J.F., Modélisation simplifiée et comportement visco-endommageable des structures en béton. Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan (1994).

[43] Dubé, J.F., Pijaudier-Cabot, G., La Borderie, C., Rate dependent damage model for concrete in dynamics, Journal of Engineerings Mechanics 122, 939-947 (1996).

[44] Durville , J.-L., «Mécanique des Roches appliquée au Génie Civil ». Cours du DEA MSOE (2001).

[45] Erzar B., Buzaud E., Shockless spalling damage of alumina ceramic. European Physical Journal Special Topics, 206, 71-77 (2012).

[46] Erzar B., Forquin P., Analysis and modeling of the cohesive strength of concrete at high strain-rates. International Journal of Solids and Structures, 51, 2559-2574 (2014).

[47] Eshelby, J. D., The determination of the feld of an ellipsoidal inclusion and related problems. Proc. R. Soc. Lond A, 241, pp. 376-396 (1957).

[48] Fanella D., Krajcinovic D., A micromechanical model for concrete in compression. Engineering Fracture Mechanics, 29, 49-66 (1988).

[49] Feng, XQ. and Gross, D., Three-dimensional micromechanical model for quasi-brittle solids with residual strains under tension, Int. J. Damage Mechanics, 9, pp. 79-110 (2000).

[50] Fineberg, J., Gross, S. P., Marder, M., Swinney, H. L., Instability in Dynamic Fracture, Physical Review Letters 67 4, 457-460 (1991).

[51] Fineberg, J., Gross, S. P., Marder, M., Swinney, H. L., Instability in the propagation of fast cracks, Physical Review B. vol 45 pp 10, 5146-5154 (1992).

[52] Fish J., Practical Multiscaling, John Wiley & Sons (2014).

[53] Fineberg J., Gross S. P., Marder M., and Swinney H. L. Instability in dynamic fracture. Physical Review Letters, 67 : 457-460, (1991).

[54] Fineberg J. and Marder. M., Instability in dynamic fracture. Physics Report, 313 :1-108, (1999).

[55] Forquin P., Erzar B., Dynamic fragmentation process in concrete under impact and spalling tests. International Journal of Fracture, 163, 193-215 (2010).

[56] François B., Dascalu C., A two-scale time-dependent damage model based on non-planar growth of micro-cracks, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 58, 1928-1946 (2010).

[57] Freund L.B., Dynamic fracture mechanics, Cambridge University Press (1998).

[58] Gatuingt F., « Prévision de la rupture des ouvrages en béton sollicités en dynamique rapide ». Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure de Cachan (1999).

[59] Gambin B., Telega J.J. Effective properties of elastic solids with randomly distributed microcracks, Mech Res Commun 27(6), 697-706 (2000).

[60] Ghosh S., Lee, K., Moorthy, S. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and Voronoi cell finite element method. Int. J. Solids Structures, 32(1) :27-62 (1995).

[61] Guedes, J. M., Kikuchi, N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 83, pp. 143-198 (1990).

[62] Grégoire D., « Initiation, propagation, arrêt et redémarrage de fissures sous impact ». Thèse de Doctorat, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (2008).

[63] Griffith A. The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London CCXXI-A, 163-198 (1920).

[64] Gross D., Seelig T. Fracture Mechanics with an Introduction to Micromechanics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011).

[65] Hashin, Z. Analysis of composite materials–a survey. J. App. Mech. 50, 481-505 (1983).

[66] Henry H, Levine H., Dynamic instabilities of fracture under biaxial strain using a phase field model. Phys. Rev. Lett. 93(10),105504 (2004).

[67] Hill, R. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical pnnciples. J. Mech. Phys. Solids 11, 357-372 (1963).

[68] Hill, R. A self consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids 13, 213-222, (1965).

[69] Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, J Appl Mech, 24(3), 361-364, (1957).

[70] Jain J.R., Ghosh S., Damage Evolution in Composites with a Homogenization-based Continuum Damage Mechanics Model, Int. J. Damage Mechanics, 18, 533-568 (2009).

[71] Johnson G.R., and Cook H.W., Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures, and pressures. Engineering Fracture Mechanics, 21, 31-48 (1985).

[72] Johnson G. R., and Cook W. H., A constitutive model and data for metals subjected to large strains high strain rates. In Seventh International Symposium on Ballistics, pages 541-547, The Hague, The Netherlands, April 19-21 (1983).

[73] Ju, J.W., Lee, X., Micromechanical damage models for brittle materials. J. Eng. Mech. 117, 1495-1536 (1991).

[74] Kachanov L.M., Time of the rupture process under creep conditions. Isv. Akad. Nauk SSA Otd. Tekh. (1958).

[75] Kanninen, M.F., Popelar, C.H., Advanced Fracture Mechanics. Oxford University Press, Oxford (UK)(1985).

[76] Karma, A., Kessler D.A. and Levine H., Phase-field model of mode III dynamic fracture. Phys. Rev. Lett., 87(4) :45501 (2001).

[77] Karma, A., Lobkovsky, A. E., Unsteady Crack Motion and Branching in a Phase-Field Model of Brittle Fracture, Phys. Rev. Lett. 92(24) :245510 (2004).

[78] Keita O., Dascalu C., François B., A two-scale model for dynamic damage evolution. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 64, 170-183 (2014).

[79] Kirane K., Su Y., Bazant Z.P., Strain-rate dependent microplane model for high-rate comminution of concrete under impact based on kinetic energy release theory. Proceedings of the Royal Society, A 471, 20150535 (2015).

[80] Klepaczko J.R., Brara A., An experimental method for dynamic tensile testing of concrete by spalling. International Journal of Impact Engineering, 25, 387-409 (2001).

[81] Ladevèze P., Allix O., Deü J.F., and Lévêque D., A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 183 (1-2), 105-122 (2000).

[82] Larcher M., Development of discrete cracks in concrete loaded by shock waves. International Journal of Impact Engineering, 36, 700-710 (2009) .

[83] Lemaitre J., Evaluation of dissipation and damage in metals. In Proceedings of ICM Kyoto (1971).

[84] Lemaitre, J., A course on damage mechanics. Springer-Verlag New York, Inc., New York, N.Y (1992).

[85] Lee, K., Moorthy, S. and Ghosh, S., Multiple scale computational model for damage in composite materials. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., 172, 175-201 (1999).

[86] Levy T., Sanchez-Palencia E. On Bounday conditions for fluid flow in porous media. Int. J. Engng. Sci., 13, pp. 923-940 (1975).

[87] Levy T., Sanchez-Palencia E. Equations and interface conditions for acoustic phenomena in porous media. J. of Mathematical Analysis and Application, 61, 3, pp. 813-834 (1977).

[88] Li J., A micromechanics-based strain gradient damage model for fracture prediction of brittle materials – Part I : Homogenization methodology and constitutive relations. Int. J. Solids Structures 48 : 3336-3345 (2011).

[89] Li J., Pham T., Abdelmoula R., Song F., Jiang C.P., A micromechanics-based strain gradient damage model for fracture prediction of brittle materials – Part II : Damage modeling and numerical simulations. Int. J. Solids Structures 48 : 3346-3358 (2011).

[90] Linder C. and Raina A., A strong discontinuity approach on multiple levels to model solids at failure. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 253, 558-583 (2013).

[91] Maigre H. Contribution théorique à l'identification des grandeurs caractéristiques en mécanique de la rupture dynamique. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, France,(1990).

[92] Markenscoff, X., Dascalu, C., Asymptotic homogenization analysis for damage amplification due to singular interaction of microcracks. J. Mech. Phys. Solids, vol. 60, 1478-1485 (2012).

[93] Malvar R.J., Ross C.A., Review of strain rate effects for concrete in tension. ACI Materials Journal, 95, 735-739 (1998).

[94] Markenscoff X., Dascalu C., Asymptotic homogenization analysis for damage amplification due to singular interaction of microcracks. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 60, 1478-1485 (2012).

[95] MATLAB Release 2015, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States (2015).

[96] Mattauer , M., Ce que disent les pierres. Bibliothèque scientifique. Belin - Pour La Science (1998).

[97] Mazars, J.,« Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure ». Thèse de Doctorat d'Etat, LMT, Cachan, France (1994).

[98] Menouillard T., Rethore J., Moes N., Combescure A., Bung H., Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics : application to crack propagation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 74 (3), 447-474 (2008).

[99] Miehe C., Hofacker M., Welschinger F., A phase field model for rate-independent crack propagation : Robust algorithmic implementation based on operator splits. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199, 2765-2778 (2010).

[100] Miller, O., Freund, L.B. and Needleman A., Energy dissipation in dynamic fracture of brittle materials. Model. Simul. Mat. Sci. Engng. 7, 573-586 (1999).

[101] Mori, T., Tanaka, K., Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta. Metall., 21, pp. 571- 574 (1973).

[102] Nemat-Nasser, S., Hori, M., Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials. Elsevier, Amsterdam (1999).

[103] Nemat-Nasser, S., Obata, M., A microcrack model of dilatancy in brittle materials. ASME J. Appl. Mech. 55, 24-35 (1988).

[104] Nyoungue A. C., « Comportement à la rupture des matériaux fragiles sous sollicitations dynamiques, application sur le verre » Thèse de Doctorat, Université de Lorraine (2001).

[105] Ozbolt J., Rah K.K., Mestrovic D., Influence of loading rate on concrete cone failure. International Journal of Fracture, 139, 239-252 (2006).

[106] Ozbolt J., Sharma A., Numerical simulation of dynamic fracture of concrete through uniaxial tension and L-specimen. Engineering Fracture Mechanics, 85, 88-102 (2012).

[107] Ozbolt J., Bosnjak J., Sola E., A two-scale time-dependent model of damage : Dynamic fracture of concrete compact tension specimen : Experimental and numerical. International Journal of Solids and Structures, 50, 4270-4278 (2013).

[108] Ozbolt J., Bede N., Sharma A., Mayer A., Dynamic fracture of concrete L-specimen : Experimental and numerical study. Engineering Fracture Mechanics, 148, 27-41 (2015).

[109] Paliwal, B., and Ramesh, K. T., An Interacting Micro-Crack Damage Model for Failure of Brittle Materials Under Compression, J. Mech. Phys. Solids, 56, 896-923 (2008).

[110] Pandolfi A., Conti S. and Ortiz M., A recursive-faulting model of distributed damage in confined brittle materials, J. Mech. Phys. Solids, 54, 1972-2003 (2006).

[111] Paulino G.H., Yin H.M. and Sun L.Z., Micromechanics-based interfacial debonding model for functionally graded materials with particle interactions, Int. J. Damage Mechanics, 15, 267-288 (2006).

[112] Pijaudier-Cabot, G., Bazant, Z., Non local damage theory, Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 113, pp. 1512 - 1533 (1987).

[113] Prat, P., Bazant, Z.P., 1996. Tangential stiffness of elastic materials with systems of growing or closing cracks. J. Mech. Phys. Solids 45, 611-636 (1996).

[114] Rabczuk, T., Song J-H. and Belytschko, T., Simulations of instability in dynamic fracture by the cracking particles method. Engng. Fract. Mech. 76, 730-741 (2009).

[115] Rabotnov Y.N., Creep problems in structure members. North Holland, Amsterdam (1969).

[116] Ravi-Chandar K, Knauss WG., An experimental investigation into dynamic fracture : II. Microstructural aspects. Int J. Fract. 26, 65-80 (1984).

[117] Ravi-Chandar K, Knauss WG., An experimental investigation into dynamic fracture : III. On steady-state crack propagation and crack branching. Int J. Fract. 26, 141-154 (1984).

[118] Ravi-Chandar K., Dynamic fracture. Boston. Elsevier (2004).

[119] Ravi-Chandar, K., Yang, B., On the role of microcracks in the dynamic fracture of brittle materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 45 (4), 535–563 (1997).

[120] Reinhardt H.W., Concrete under impact loading tensile strength and bond. Heron, 27 (3), 1-48 (1982).

[121] Ren X., Chen J. S., Li J., Slawson T. R., Roth M. J., Micro-cracks informed damage models for brittle solids. International Journal of Solids and Structures, 48, 1560-1571 (2011).

[122] Rittel D., Maigre H., A study of mixed-mode dynamic crack initiation in PMMA. Mechanics Research Communications, 23 (5), 475-481 (1996).

[123] Rittel D., Maigre H., An investigation of dynamic crack initiation in PMMA. Mechanics of Materials, 23 (3), 229-239 (1996).

[124] Rios R.D., Riera J.D. Size effects in the analysis of reinforced concrete structures, Engineering Structures 26, Elsevier Science, p 1115-1125, (2004).

[125] Santana, S., U., Comportement dynamique des matériaux et structures après sollicitation en fatigue, Université des Sciences et de Technologies de Lille (2007).

[126] Sanchez-Palencia, E., Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Lecture Notes in Physics, vol.127, Springer, Berlin (1980).

[127] Sharon E., Gross SP. and Fineberg J., Energy dissipation in dynamic fracture. Phys Rev Lett 76 (12), 2117-20 (1996).

[128] Sharon E. and Fineberg J., Confirming the continuum theory of dynamic brittle fracture for fast cracks. Lett. Nature 397, 333-5 (1999).

[129] Slepyan, Leonid I., Models and Phenomena in Fracture Mechanics, Springer, Berlin (2002).

[130] Spatschek R, Brener E, Karma A. Phase field modeling of crack propagation. Philos Mag 91(1), 75-95 (2011).

[131] Suffis A., and Combescure A., Modèle d'endommagement à effet retard, étude numérique et analytique de l'évolution de la longueur caractéristique. Revue Européenne des Éléments Finis, 11(5), 593-619 (2002).

[132] Suffis, A., Lubrecht, T.A.A., Combescure A., Damage model with delay effect. Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. Int. J. Solids Struct. 40, 3463-3476 (2003).

[133] Suquet P.M., Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. In Sawczuk, A. and Bianchi, G., editors, Plasticity today : modeling, methods and applications, London. Elsevier Applied Science Publishers., 279-310 (1985).

[134] Svetlizky, I., Fineberg, J. Classical shear cracks drive the onset of dry frictional motion. Nature 509, 205–208 (2014).

[135] Terada, K., Kikuchi, N. Nonlinear homogenization method for practical applications. In Ghosh, S. and Ostoja-Starzewski, M., editors, Computational Methods in Micromechanics, AMD-Vol. 212/ MD-Vol. 62, pp.1-16. ASME (1995).

[136] Timoshenko S., Goodier J.N., Theory of elasticity. Engineering societies monograps, (1951).

[137] Torquato S., Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties, Springer-Verlag, New York (2002).

[138] Wang, X., Santare M.H., Gazonas, G.A., Anisotropic effective moduli of microcracked materials under antiplane loading, Engineering Fracture Mechanics 76, 1910-1919 (2009).

[139] Wang W., Shao JF., Zhu QZ and Xu WY. A discrete viscoplastic damage model for time-dependent behaviour of quasi-brittle rocks, Int. J. Damage Mechanics, 24, 21-40 (2015).

[140] Weerheijm J., Van Doormaal J.C.A.M., Tensile failure of concrete at high loading rates : New test data on strength and fracture energy from instrumented spalling tests. International Journal of Impact Engineering, 34, 609-626 (2007).

[141] Wrzesniak A., Dascalu C., Besuelle P., A two-scale time-dependent model of damage : Influence of micro-cracks friction. European Journal of Mechanics A/Solids 49, 345-361 (2015).

[142] Willoughby N., Parnell W.J., Hazel A.L., Abrahams I.D., Homogenization methods to approximate the effective response of random fibre-reinforced composites, Int. J. Solids Structures, 49, 1421-1433 (2012).

[143] Winkler S., Shockey D., Curran D., Crack propagation at supersonic velocities, I. International Journal of Fracture 6 (2), 151–158 (1970).

[144] Wrzesniak A., Dascalu C., Besuelle P., A two-scale time-dependent model of damage : Influence of micro-cracks friction. European Journal Mechanics A-Solids, 49, 345-361 (2015).

[145] Xu X-P., Needleman A., Numerical simulation of fast crack growth in brittle solids. J. Mech. Phys. Solids, 42(9), 1397-1434 (1994).

[146] Zhang Z., Paulino G.H., Celes W., Extrinsic cohesive modelling of dynamic fracture and microbranching instability in brittle materials, Int. J. Numer. Methods Engng. 72, 893-923 (2007).

[147] Zhou F., Molinari JF., Shioya T., A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials. Engng. Fract. Mech. 72, 1383-1410 (2005).

[148] Zinszner J.L, Erzar B., Forquin P., Strain rate sensitivity of the tensile strength of two silicon carbides : experimental evidence and micromechanical modelling. Philosophical Transactions Royal Society A 375 : 20160167 (2016).

[149] Zoumana S., « Etude du couplage thermomécanique dans la propagation dynamique de fissure » . Thèse de Doctorat, l'Ecole Polytechnique (2005).