

Lois gaussiennes inverses (généralisées), lois de Kummer et méthode de Stein

Essomanda Konzou

▶ **To cite this version:**

Essomanda Konzou. Lois gaussiennes inverses (généralisées), lois de Kummer et méthode de Stein. Mathématiques [math]. Université de Lorraine; Université de Lomé (Togo), 2020. Français. NNT : 2020LORR0147 . tel-03127767

HAL Id: tel-03127767
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03127767

Submitted on 1 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

École doctorale IAEM Lorraine

École doctorale de Mathématiques et Applications

Lois gaussiennes inverses (généralisées), lois de Kummer et méthode de Stein

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 18 novembre 2020

pour l'obtention du

Doctorat des Universités de Lorraine et de Lomé

(mention mathématiques et applications)

par

KONZOU Essomanda

Composition du jury :

Président :	Professeur NOURDIN Ivan,	Université du Luxembourg
Rapporteurs :	Professeur HASSAIRI Abdelhamid,	Université de Sfax
	Professeur LEY Christophe,	Université de Ghent
Examinatrice :	Professeur YAO-LAFOURCADE Anne-Françoise,	Université Clermont Auvergne
Directeurs de thèse :	M. KOUDOU Éfoévi, MC, HDR,	Université de Lorraine
	Professeur GNEYOU Kossi Essona,	Université de Lomé

Institut Élie Cartan de Lorraine, Nancy, UMR 7502, CNRS
Laboratoire d'Analyse, de Modélisations Mathématiques et Applications, Lomé

Résumé

Dans cette thèse, nous apportons une contribution à l'étude des propriétés des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer dans le contexte de la méthode de Stein. Il s'agit d'une part de contribuer à la mise en place des outils mathématiques nécessaires à l'application de la méthode de Stein au cas où la loi cible est l'une des deux lois précitées, d'autre part, d'appliquer la méthode de Stein pour donner une borne de la vitesse de convergence dans des théorèmes limites impliquant ces deux lois. Nous retrouvons l'opérateur de Stein de chacune de ces deux lois, résolvons l'équation différentielle correspondante et bornons la solution obtenue ainsi que ses dérivées successives (les bornes des dérivées ne sont pas toujours explicites mais obtenues par une méthode itérative). Les techniques utilisées pour obtenir les bornes de la solution et de ses dérivées sont essentiellement basées sur le fait que ces deux lois appartiennent à la famille de lois de probabilité dont la densité g vérifie l'équation différentielle $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$ avec s et τ des fonctions polynômes satisfaisant certaines conditions. Par la méthode de Stein, nous établissons une borne pour la vitesse de convergence des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer vers la loi gamma, de la loi hyperbolique généralisée vers la loi gaussienne inverse généralisée et d'une suite de variables apparaissant dans un contexte de résistances aléatoires vers la loi gaussienne inverse réciproque. Notre démarche dans l'estimation de ces vitesses de convergence par la méthode de Stein est basée essentiellement sur le fait que la loi de la suite de variables aléatoires considérées et la loi limite sont impliquées dans une relation de convolution.

Mots clés : *Lois gaussiennes inverses généralisées ; lois de Kummer ; méthode de Stein.*

Abstract

In this thesis, we make a contribution to the study of the properties of the generalized inverse Gaussian and Kummer distributions in the context of Stein's method. This is to contribute to establishing the mathematical tools necessary for the application of Stein's method to the case where the target law is one of the two aforementioned laws, on the one hand, and to applying Stein's method to give a bound of the rate of convergence in some limit theorems involving these two laws, on the other hand. We retrieve the Stein operator of each of these two laws, solve the corresponding differential equation and bound the solution obtained as well as its successive derivatives (for the derivatives, the bound is not always explicit but is established by an iterative technique). The techniques used to obtain the bounds of the solution and of its derivatives are essentially based on the fact that these two laws belong to the family of probability laws whose density g satisfies the differential equation $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$ where s and τ are polynomial functions satisfying certain conditions. By Stein's method, we establish a bound for the rate of convergence of the generalized inverse Gaussian and Kummer distributions to the gamma distribution, of the generalized hyperbolic distribution to the generalized inverse Gaussian distribution and a sequence of random variables to the reciprocal inverse Gaussian distribution. Our approach in estimating these rate of convergence by Stein's method is essentially based on the fact that the law of the sequence of random variables considered and the limit law are involved in a convolution relation.

Keywords : *Generalized inverse Gaussian distributions ; Kummer distributions ; Stein's method.*

Remerciements

Quelques fois, il suffit d'un mot écrit ou oral pour stimuler chez un jeune chercheur l'envie, la détermination et le courage nécessaires pour mener à bon terme son projet de recherche. Je remercie du fond du cœur mes deux directeurs de thèse M. Koudou Angelo E. et M. Gneyou Kossi E. pour leurs mots et surtout leur disponibilité à chaque fois que j'ai besoin de leurs contributions. Ils ont guidé mes premiers pas vers la recherche et ont supporté mes caprices. Merci à vous d'avoir eu confiance en moi en acceptant de diriger ma thèse.

À vous les membres du jury, à vos rangs et titres respectifs, merci de m'avoir honoré en acceptant d'examiner mes travaux. Malgré les conditions difficiles actuelles partout dans le monde, dues à la pandémie de Covid-19, vous avez su vous organiser afin que ma soutenance ait lieu dans les meilleures conditions possibles.

Je souhaite exprimer ma gratitude à tous les membres de l'Institut Élie Cartan de Lorraine pour l'accueil chaleureux qu'ils me réservent durant mes séjours à Nancy.

Je remercie l'Ambassade de France au Togo, la Direction des Bourses et Stages du Togo et l'Université de Lorraine pour avoir financé mes séjours à Nancy durant ma thèse.

À toute ma famille et à tous mes amis, merci pour vos encouragements et vos soutiens.

Table des matières

Résumé . . . 2
Introduction générale . . . 5

1 Fondements de la méthode de Stein **9**
1.1 Rappel des métriques usuelles . . . 9
1.2 Approximation normale par la méthode de Stein . . . 10
1.2.1 Caractérisation . . . 10
1.2.2 Distance de Wasserstein entre une variable aléatoire quelconque et une variable suivant la loi normale centrée réduite . . . 13
1.3 Exemple d'application : Somme de variables aléatoires indépendantes . . . 13
1.4 Autres exemples . . . 14
1.4.1 Loi du khi-deux . . . 14
1.4.2 Loi variance-gamma . . . 15
1.4.3 Loi de Poisson . . . 16

2 Vitesse de convergence des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer vers la loi gamma **18**
2.1 Caractérisation de Stein pour la loi gamma . . . 18
2.2 Résultats sur la convergence de la loi gaussienne inverse généralisée vers la loi gamma . . . 20
2.2.1 Définition et propriétés de la loi GIG . . . 20
2.2.2 Vitesse de convergence de la loi gaussienne inverse généralisée vers la loi gamma . . . 27
2.3 Résultats sur la convergence de la loi de Kummer vers la loi gamma . . . 34
2.3.1 Définition et propriétés . . . 34
2.3.2 Vitesse de convergence de la loi Kummer vers la loi gamma . . . 35

3 Méthode de Stein pour les lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer **40**
3.1 Extension des travaux de Schoutens sur la borne de la solution de l'équation de Stein . . . 41
3.2 Borne de Döbler de la solution f_h de l'équation de Stein . . . 45
3.2.1 Résultats de Döbler . . . 45
3.2.2 Borne de la solution de l'équation de Stein . . . 47
3.2.3 Sur la dérivée de la solution de l'équation de Stein . . . 50
3.3 Sur la caractérisation et l'équation de Stein pour la loi gaussienne inverse généralisée . . . 54
3.3.1 Caractérisation . . . 54
3.3.2 Un majorant de la norme de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG . . . 55
3.3.3 Une borne de la dérivée de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG . . . 57
3.3.4 Une borne de la dérivée seconde de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG . . . 59
3.3.5 Borne de la dérivée troisième de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG . . . 62
3.3.6 Borne des dérivées successives d'ordre supérieur à 3 de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG . . . 66
3.3.7 Sur les bornes des dérivées successives de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG au sens de Döbler . . . 69
3.4 Caractérisation de Stein pour la loi de Kummer . . . 71
3.4.1 Borne de la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer . . . 72
3.4.2 Borne de la dérivée première de la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer 74

3.4.3 Borne de la dérivée seconde de la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer 76
3.4.4 Borne de la dérivée troisième de la solution de l'équation de Stein pour la loi de Kummer 79
3.4.5 Borne de la dérivée d'ordre k de la solution de l'équation de Stein Kummer 82

4 Deux exemples d'application à des vitesses de convergence vers la loi GIG et la loi gaussienne inverse réciproque 87
4.1 Convergence de loi hyperbolique généralisée vers la loi GIG 87
4.2 Vitesse de convergence d'un modèle de résistances vers la loi gaussienne inverse réciproque . 96
4.2.1 Caractérisation de Stein pour la loi gaussienne inverse réciproque 97
4.2.2 Caractérisation de Stein pour la loi gaussienne inverse 99
4.2.3 Sur la vitesse de convergence d'une suite de résistances vers la loi gaussienne inverse réciproque 100
4.2.4 Preuve 102
Conclusion 106
Travaux en cours et perspectives 107

Introduction

La loi gaussienne inverse généralisée de paramètres $p \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$, que l'on notera GIG$(p, a, b)$ a pour densité

$$g_{p,a,b}(x) = \frac{(a/b)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}(ax+b/x)}, \quad x > 0$$

où K_p est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce.

Pour $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$, la loi de Kummer (K(a, b, c)) de paramètres a, b, c a pour densité

$$k_{a,b,c}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\psi(a, a-b+1; c)} x^{a-1}(1+x)^{-a-b} e^{-cx}, \quad x > 0$$

où ψ est la fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce.

En théorie des probabilités et en statistique, l'on s'intéresse le plus souvent aux résultats limites se rapportant aux échantillons aléatoires. Ces résultats comportent d'innombrables applications à des problèmes particuliers. Par exemple le théorème central limite qui affirme que toute somme normalisée de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées se comporte asymptotiquement comme la gaussienne normale (avec des généralisations qui donnent la convergence de cette somme sous des hypothèses beaucoup plus faibles) est un véritable pilier de la statistique. Il est naturel de chercher à estimer la vitesse de convergence dans ces théorèmes limites afin de quantifier l'erreur que l'on commet dans l'approximation de la loi d'un échantillon de taille assez élevée par une loi de probabilité bien connue. Bien que la littérature expose diverses techniques à cette fin, nous nous intéressons particulièrement à la méthode dite de Stein. Stein [63] en 1972 a proposé une méthode qui lui permettait, non seulement de prouver le théorème centrale limite, mais aussi d'estimer la vitesse de convergence dans ce théorème en majorant la métrique probabiliste de Wasserstein entre la loi de la somme de variables aléatoires et celle de la loi normale standard. Cette méthode repose essentiellement sur la détermination d'un opérateur dit de Stein, approprié, dont les propriétés déterminent la qualité de l'approximation (voir par exemple [16, 60, 63]). Cet opérateur vérifie un théorème de caractérisation de Stein qui le relie à la loi cible. De la caractérisation, on déduit l'équation différentielle de Stein correspondante. Borner la solution de cette équation différentielle ainsi que ses dérivées successives est une étape cruciale et indispensable dans la démarche à la Stein. Au fil des années, les travaux d'un bon nombre de chercheurs ont rendu cette méthode plus accessible en l'adaptant à d'autres lois de probabilité comme, la loi de Poisson [3, 15, 12], la loi exponentielle [13], la loi gamma [49], la loi multinomiale [48], la loi binomiale négative [11], la loi géométrique [55], la loi bêta [28, 18], la loi variance-gamma [25], les lois α-stables asymétriques [17], etc.

Notre objectif de recherche est d'apporter une contribution à l'étude des propriétés des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer par la méthode de Stein. Ces deux lois sont donc considérées dans le contexte de la méthode de Stein. Nous contribuons à l'élaboration des outils mathématiques indispensables à l'application de la méthode de Stein à ces deux lois et estimons la vitesse de convergence dans quelques théorèmes limites impliquant ces deux lois.

Avant d'aborder les principaux objectifs de ce mémoire, nous détaillons dans le chapitre introductif la démarche de Stein dans l'approximation par la loi normale centrée réduite, qui en fait constitue le fondement de cette méthode. On rappellera en particulier que l'équation différentielle de Stein de la loi normale centrée réduite est donnée par

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}h(Z)$$

avec h une fonction réelle absolument continue et Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'après l'équation précédente, pour toute variable aléatoire réelle X, déterminer $|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Z)|$

revient à déterminer $|\mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right]|$; c'est l'idée fondamentale de la méthode de Stein.

Pour $p > 0$ $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(W_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que W_n suit la loi GIG$\left(p, a, \frac{1}{n}\right)$ pour chaque $n \geq 1$. Alors la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge vers une variable aléatoire Λ de loi gamma de paramètres p, $\frac{a}{2}$. Notons C_b^3 la classe des fonctions bornées $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles les dérivées h', h'', $h^{(3)}$ existent et sont bornées. On a (théorème 2.2.2)

$$|\mathbb{E}h(W_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)| \leq \begin{cases} \frac{1}{n^p} \times C_1 & \text{si} \quad 0 < p < 1 \\ \frac{\ln n}{n} \times C_2 & \text{si} \quad p = 1 \\ \frac{1}{n} \times C_3 & \text{si} \quad p > 1 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes. Nous obtenons alors une vitesse de convergence de l'ordre n^{-1} pour tout $p > 1$; de l'ordre $\frac{\ln n}{n}$ pour $p = 1$ et de l'ordre n^{-p} pour $0 < p < 1$.
Pour $a > 0$, $c > 0$, soit (V_n) une suite de variables aléatoires telle que V_n suit la loi K$\left(a, -a + \frac{1}{n}, c\right)$ pour chaque entier naturel $n \geq 1$. Lorsque $n \to \infty$, la suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geq 1}$ converge vers une variable aléatoire Λ de loi gamma de paramètre a et c. De plus, pour $h \in C_b^3$, (théorème 2.3.1)

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}h(V_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)| \leq \frac{1}{cn}||h'|| + \frac{F}{c} \times \frac{1}{n} \frac{\psi(a, a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)} \\ + \frac{H}{c^2} \times \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\psi(a, -1 + a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)} \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

avec F et H des constantes. La fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce ψ étant continue, nous obtenons une vitesse de convergence de l'ordre de n^{-1}.
Après avoir présenté quelques propriétés des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer, nous détaillons dans le chapitre 2 les résultats (0.0.1) et (0.0.2).

Une étape capitale dans l'approche par la méthode de Stein est la détermination des bornes de la solution de l'équation différentielle de Stein correspondante à la loi cible et celles de ses dérivées successives éventuellement. La remarque selon laquelle la loi gaussienne inverse généralisée et la loi de Kummer appartiennent à la famille des lois de probabilité dont la densité g vérifie l'équation différentielle

$$(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x) \tag{0.0.3}$$

avec s et τ des fonctions polynômes satisfaisant certaines conditions, a permis de mettre en place des techniques permettant de majorer la norme de la convergence uniforme de la solution (et de ses dérivées) de l'équation de Stein de ces lois de probabilité. En particulier, si f_h est la solution de l'équation de Stein d'une loi de probabilité dont la densité g vérifie (0.0.3), et si s est un polynôme positif, alors :
► si τ est un polynôme non strictement croissante sur le support de g, alors (proposition 3.1.3 et proposition 3.1.4)

$$\|f_h\| \leq M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \tag{0.0.4}$$

avec M une constante explicite, h une fonction continue et bornée et W une variable aléatoire de densité g ;
► si τ est un polynôme convexe de second degré de la forme $\tau(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_0 > 0$, alors (théorème 3.2.1)

$$\|f_h\| \leq \frac{\mathbb{E}(W)}{a_0} \|h'\| \tag{0.0.5}$$

où W est une variable aléatoire de densité g et h une fonction lipschitzienne. Dans l'établissement de ce dernier résultat, nous avons remarqué que pour les lois de probabilité dont la densité g vérifie (0.0.3), $\mathbb{E}(\tau(W)) = 0$

avec W une variable aléatoire de densité g. Ce qui nous a permis d'obtenir et de retrouver certaines propriétés de la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce (propriété 7 et équation (3.3.12)) et de la fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce (propriété 8 et propriété 9) par des arguments probabilistes. Les bornes (0.0.4) et (0.0.5) sont établies dans le chapitre 3, ainsi que les bornes de la solution et de ses dérivées successives de l'équation de Stein des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer.

La loi hyperbolique généralisée (GH) de paramètres $\lambda \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha > |\beta| \geq 0$ a pour densité

$$f_{\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu}(x) = \frac{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-\frac{1}{2}}\delta^{\lambda}K_{\lambda}\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}\left(\delta^2 + (x-\mu)^2\right)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2} \times K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)e^{\beta(x-\mu)}.$$

Soit $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour chaque entier naturel $n \geq 1$, X_n suit la loi hyperbolique généralisée de paramètres λ, $a^2 n$, $a^2 n - \frac{b^2}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, 0. Lorsque $n \to \infty$, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers une variable aléatoire W de loi gaussienne inverse généralisée de paramètres λ, a^2, b^2. Pour $h \in C_b^3$, lorsque $n \to \infty$, (théorème 4.1.1)

$$|\mathbb{E}h(X_n) - \mathbb{E}h(W)| \leq A_n \sim \frac{1}{n} \times C \tag{0.0.6}$$

où C est une constante. Nous obtenons alors une vitesse de convergence de l'ordre de n^{-1}.
La loi gaussienne inverse et la loi gaussienne inverse réciproque dérivent de la loi gaussienne inverse généralisée pour le paramètre p fixé à $-1/2$ et $1/2$ respectivement. Lorsque les arêtes d'un arbre fini sont munies de résistances aléatoires indépendantes, de loi gaussienne inverse pour les arêtes intérieures et de loi gaussienne inverse réciproque pour les arêtes terminales, la résistance équivalente est de loi gaussienne inverse réciproque (Barndorff-Nielson [7]). Koudou et Barndorff-Nielson [9] ont considéré un modèle analogue sur un arbre infini et prouvé que la résistance équivalente converge presque sûrement vers une variable aléatoire de loi gaussienne inverse réciproque. Ce dernier modèle considère une suite $(R_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires telles que R_n est de loi gaussienne inverse réciproque de paramètres $\sum_{i=1}^{n} \delta_i$ et γ avec $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \delta < \infty$. Lorsque $n \to \infty$, la suite $(R_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement (et donc en loi) vers une variable aléatoire R de loi gaussienne inverse réciproque de paramètres δ et γ. Pour $h \in C_b^3$, lorsque $n \to \infty$, (théorème 4.2.5)

$$|\mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R)| \leq B\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \delta_i\right)^{1/2} \tag{0.0.7}$$

avec B une constante. Puisque la série $\sum \delta_i$ converge vers δ, $\sum_{i=n+1}^{\infty} \delta_i$ tend vers zéro quand n tend vers infini. Par conséquent, nous obtenons une vitesse de convergence de l'ordre de $\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \delta_i\right)^{1/2}$.
Le chapitre 4 expose en détail les résultats asymptotiques (0.0.6) et (0.0.7) obtenus par la méthode de Stein.

Chapitre 1

Fondements de la méthode de Stein

Dans ce chapitre dont les sections 1, 2 et 3 reprennent quelques idées exposées dans Ross [60], nous présentons la méthode de Stein pour la loi normale standard, qui en fait constitue le fondement de cette méthode. Après une brève motivation, nous présentons les métriques probabilistes couramment utilisées dans la littérature concernant la méthode de Stein dans la section 1. La section 2 présente la méthode de Stein pour la loi normale centrée réduite. Dans la section 3, nous rappelons (Stein [63], Ross [60]) comment cette méthode est utilisée pour obtenir le théorème central limite. La section 4 contient d'autres exemples d'approximation par la méthode de Stein bien connus de la littérature.

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.) telle que $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. D'après le théorème central limite, $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ converge vers la loi normale standard.
La technique classique pour prouver le théorème central limite est de démontrer la convergence en distribution

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \text{ lorsque } n \to \infty,$$

ce qui n'est pas difficile avec la condition i.i.d.
Cependant, dans les applications réelles, les variables aléatoires ne sont pas toujours indépendantes et de même loi, il faut donc un moyen plus sophistiqué pour déterminer la loi limite.
Stein en 1972 a trouvé une technique qui lui permet de prouver qu'une variable X a approximativement la loi normale standard en majorant la distance de Wasserstein entre X et Z avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Cette technique basée essentiellement sur la détermination d'un opérateur appelé opérateur de Stein, la résolution de l'équation différentielle correspondante, la majoration de la norme de la solution obtenue ainsi que celle de ses dérivées successives (si possible) permet non seulement de caractériser la loi cible, mais aussi de borner l'erreur commise dans l'approximation d'une loi de probabilité par la loi cible.

La méthode de Stein a été au fil du temps adaptée à plusieurs lois de probabilité ; ce qui rend assez dense la littérature concernant cette démarche. Par exemple, cette méthode a été développée pour les lois : de Poisson [3, 15, 12], loi exponentielle [13], loi gamma [49], variance-gamma [25], etc.

Nous présentons dans les sections 1, 2 et 3 de ce chapitre l'approximation par la méthode de Stein dans le cadre de la loi normale standard. Pour plus de détails voir [16, 46, 60, 63].

1.1 Rappel des métriques usuelles

Soit μ et ν deux mesures de probabilité, les métriques couramment utilisées pour exprimer l'écart entre les deux mesures s'écrivent sous la forme :

$$d_{\mathcal{H}}(\mu,\nu) = \sup_{h\in\mathcal{H}} \left| \int h(x)d\mu(x) - \int h(x)d\nu(x) \right| \tag{1.1.1}$$

où $\mathcal{H}$ est une famille de fonctions tests.
Si X et Y sont deux variables aléatoires, on exprime l'écart entre X et Y par l'écart entre leurs lois de

probabilités respectives :

$$d_{\mathcal{H}} = \sup_{h\in\mathcal{H}} \left| \int h(x)dF_X(x) - \int h(x)dF_Y(x) \right| = \sup_{h\in\mathcal{H}} |\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Y))| \tag{1.1.2}$$

où F_X et F_Y sont les fonctions de répartitions de X et Y respectivement.

- Si $\mathcal{H}$ est l'ensemble des fonctions indicatrices sur $\mathbb{R}$, on a la distance de Kolmogorov donnée par :

$$d_K(X,Y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{x} dF_X(x) - \int_{-\infty}^{x} dF_Y(x) \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(Y \leq x)| .$$

  Cette distance sera notée d_K.
- Si $\mathcal{H} = \{h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : |h(x) - h(y)| \leq |x - y|\}$, on a la distance de Wasserstein notée d_{Wass}.
- Si $\mathcal{H} = \left\{\mathbb{1}_{\{.\in A\}}, A \text{ un borélien de } \mathbb{R}\right\}$, on a la distance en variation totale notée d_{VT}.

Voici quelques résultats généraux sur ces distances. Pour la démonstration, voir par exemple Ross [60].

Proposition 1.1.1. *1. Pour des variables aléatoires W et Z, $d_{VT}(W,Z) \leq d_K(W,Z)$.*

2. Si Z est une variable aléatoire admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue bornée par une constante C, alors pour toute variable aléatoire W,

$$d_K(W,Z) \leq \sqrt{2C d_{Wass}(W,Z)} \tag{1.1.3}$$

3. Soient W et Z deux variables aléatoires à valeurs dans Ω.

(a) Si Ω est un espace discret, alors

$$d_{VT}(W,Z) = \frac{1}{2} \sum_{\omega\in\Omega} |\mathbb{P}(W = \omega) - \mathbb{P}(Z = \omega)|$$

(b) Si Ω est un espace continu et si W et Z admettent des fonctions densités f_W et f_Z respectivement, alors

$$d_{VT}(W,Z) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f_W(x) - f_Z(x)| \, dx.$$

1.2 Approximation normale par la méthode de Stein

Les résultats qui suivent sont principalement tirés de l'article de Ross [60].

1.2.1 Caractérisation

Commençons par le théorème suivant qui donne la caractérisation de Stein (voir [63]) pour la loi normale centré réduite. Dans toute la suite, $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ désigne la norme de la convergence uniforme.

Théorème 1.2.1. *Soit h une fonction réelle continue et bornée et Z une variable aléatoire de loi normale standard. Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si et seulement si, pour toute fonction dérivable f telle que $\mathbb{E}|f'(Z)| < \infty$,*

$$\mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right] = 0. \tag{1.2.1}$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est

$$f'(x) - xf(x) = h(x) - \mathbb{E}h(Z) \tag{1.2.2}$$

et l'opérateur de Stein correspondant est $f \mapsto (T_f)(x) = f'(x) - xf(x)$.
Avant de passer à la démonstration du Théorème 1.2.1, il est essentiel de remarquer que si f_h est la solution de l'équation différentielle (1.2.2), alors pour toute variable aléatoire X,

$$\left|\mathbb{E}\left[f_h'(X) - Xf_h(X)\right]\right| = \left|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Z)\right|.$$

Donc si l'on veut majorer $|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Z)|$ pour h donné, une manière adéquate de procéder est de majorer le premier membre de l'équation précédente, ce qui nécessite éventuellement de borner la solution f_h de l'équation de Stein (1.2.2) ainsi que ses dérivées successives.
La technique que nous adoptons dans la preuve de la condition suffisante du Théorème 1.2.1 utilise la solution de l'équation de Stein (1.2.2) pour $h(t) = \mathbb{1}_{\{t\leq x\}}$ quel que soit le réel x. Cela revient à considérer l'équation différentielle

$$f'(w) - wf(w) = \mathbb{1}_{\{w\leq x\}} - \Phi(x) \tag{1.2.3}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Lemme 1.2.1. *L'unique solution bornée de l'équation différentielle (1.2.3) est donnée par*

$$\begin{aligned} f_x(w) &= e^{w^2/2}\int_w^{+\infty} e^{-t^2/2}\left(\Phi(x) - \mathbb{1}_{\{t\leq x\}}\right)dt \\ &= -e^{w^2/2}\int_{-\infty}^{w} e^{-t^2/2}\left(\Phi(x) - \mathbb{1}_{\{t\leq x\}}\right)dt \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2\pi}e^{w^2/2}\Phi(w)(1-\Phi(x)) & si\ w \leq x \\ \sqrt{2\pi}e^{w^2/2}\Phi(x)(1-\Phi(w)) & si\ w > x \end{cases}$$

avec

$$\|f_x\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \|f_x'\| \leq 2.$$

Démontrons le théorème 1.2.1.

Preuve[du théorème 1.2.1]
Condition nécessaire
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et soit f une fonction dérivable

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f'(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-t^2/2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f'(t)e^{-t^2/2}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f'(t)e^{-t^2/2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} f'(t)\left(\int_{-\infty}^{t} -xe^{-x^2/2}dx\right)dt \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f'(t)\left(\int_{t}^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx\right)dt \end{aligned}$$

car

$$\int_{-\infty}^{t} -xe^{-x^2/2}dx = \int_{t}^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = e^{-t^2/2}.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f'(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2/2}\left(\int_x^0 f'(t)dt\right)dx \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\left(\int_0^x f'(t)dt\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\left(f(x)-f(0)\right)dx \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\left(f(x)-f(0)\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\left(f(x)-f(0)\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx - f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx \\
&= \mathbb{E}Xf(X) - f(0)\mathbb{E}X \\
&= \mathbb{E}Xf(X) \qquad \text{car } \mathbb{E}X = 0.
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}f'(X) = \mathbb{E}Xf(X) \Rightarrow \mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right] = 0.$$

Condition suffisante
Supposons maintenant que X est une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right] = 0$ pour toute fonction dérivable f avec $||f'|| < \infty$. L'idée est de montrer que la solution f_x de l'équation (1.2.3) est dérivable et est telle que $||f_x'|| < \infty$ afin d'appliquer la condition nécessaire prouvée précédemment. C'est bien le cas puisque

$$||f'|| \leq 2 < \infty$$

On a alors

$$0 = \mathbb{E}\left[f'(X) - Xf(X)\right] = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X\leq x\}}\right) - \Phi(x).$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(X \leq x\right) = \Phi(x).$$

On déduit que X et Z ont la même loi : la loi normale centré réduite.

□

Comme dit plus haut, en considérant l'équation de Stein (1.2.2), majorer l'écart $|\mathbb{E}h(X) - \mathbb{E}h(Z)|$ revient à majorer $\left|\mathbb{E}\left[f_h'(X) - Xf_h(X)\right]\right|$, ce qui nécessite une majoration de la norme de la solution f_h et certaines de ses dérivées successives si nécessaire, et c'est l'une des étapes cruciales dans l'approximation par la méthode de Stein. Le lemme suivant donne la solution de l'équation de Stein (1.2.2) ainsi qu'un majorant de la norme de cette solution et celle de ses deux premières dérivées qu'on peut par exemple trouver dans [16].

Lemme 1.2.2. *1. L'unique solution bornée de l'équation différentielle (1.2.2) est donnée par*

$$\begin{aligned}
f_h(w) &= e^{w^2/2}\int_{-\infty}^{w} e^{-t^2/2}\left(h(t) - \mathbb{E}h(Z)\right)dt \\
&= -e^{w^2/2}\int_{w}^{+\infty} e^{-t^2/2}\left(h(t) - \mathbb{E}h(Z)\right)dt.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

2. Si h est fonction lipschitzienne, alors

$$||f_h|| \leq ||h'||\,; \quad ||f_h'|| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,||h'||\,; \quad ||f_h''|| \leq 2\,||h'||\,.$$

1.2.2 Distance de Wasserstein entre une variable aléatoire quelconque et une variable suivant la loi normale centrée réduite

Rappelons que si X et Y sont deux variables aléatoires, une évaluation de la distance probabiliste entre X et Y est donnée par :

$$d_{\mathcal{H}}(X,Y) = \sup_{h\in\mathcal{H}} |\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Y))|$$

où $\mathcal{H}$ est une famille de fonctions tests. Si l'ensemble des fonctions tests est formé des fonctions 1-lipschitziennes (dans ce cas $\|h'\| \leq 1$), on obtient la distance de Wasserstein d_{Wass}. Soit

$$\mathcal{F} = \left\{ f : ||f|| \leq 1; \quad ||f'|| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad ||f''|| \leq 2 \right\}.$$

D'après le *2.* du lemme 1.2.2, on déduit que si X est une variable aléatoire et Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors

$$\begin{aligned} d_{Wass}(X,Z) = \sup_{h\in\mathcal{H}} |\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(Z))| &= \sup_{h\in\mathcal{H}} \left|\mathbb{E}[f_h'(X) - X f_h(X)]\right| \\ &\leq \sup_{f\in\mathcal{F}} \left|\mathbb{E}[f'(X) - X f(X)]\right|. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

En application, il suffit de majorer $\left|\mathbb{E}[f_h'(X) - X f_h(X)]\right|$ pour majorer d_{Wass}.

1.3 Exemple d'application : Somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de moyenne 0 telle que, pour tout i, $\mathbb{E}|X_i|^3 < +\infty$, $\mathbb{E}|X_i|^4 < \infty$ et $\mathbb{E}X_i^2 = 1$. Posons $W_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$. La suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite et la vitesse de convergence est de l'ordre de $n^{-1/2}$. Prouvons ce résultat par la méthode de Stein. Notons $W_i = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j\neq i} X_j$. Dans la suite de cette section, pour des raisons de simplicité, nous notons f la solution f_h de l'équation de Stein (1.2.2). On a les résultats suivants (Voir [60]).

Lemme 1.3.1. *W_n et W_i vérifient*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(W_n f(W_n)\right)) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i \left[f(W_n) - f(W_i) - (W_n - W_i) f'(W_n)\right]\right] \\ + \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i (W_n - W_i) f'(W_n)\right]. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.2. *W_n vérifie*

$$\left|\mathbb{E}\left[f'(W_n) - W_n f(W_n)\right]\right| \leq \frac{||f''||}{2n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right|^3 + \frac{||f'||}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4}. \tag{1.3.1}$$

Théorème 1.3.1. *Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. La distance de Wasserstein entre W_n et Z est telle que*

$$d_{Wass}(W_n, Z) \leq \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right|^3 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4} \tag{1.3.2}$$

Preuve

$$
\begin{aligned}
d_{Wass}(W_n, Z) &\leq \sup_{f\in\mathcal{F}} \left|\mathbb{E}[f'(W_n) - W_n f(W_n)]\right| \quad \text{(d'après (1.2.5))} \\
&\leq \sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \frac{||f''||}{2n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right|^3 + \frac{||f'||}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4} \right| \quad \text{(lemme 1.3.2)} \\
&\leq \frac{2}{2n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right|^3 + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4} \quad \text{(d'après la définition de } \mathcal{F}\text{).}
\end{aligned}
$$

□

Remarque 1. Si les variables X_i ont même loi avec $\mathbb{E}|X_i|^3 = \mathbb{E}|X_1|^3 < \infty$ et $\mathbb{E}X_i^4 = \mathbb{E}X_1^4 < \infty$, alors

$$
\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_i\right|^3 = n\mathbb{E}\left|X_1\right|^3 \quad \text{et} \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^4} = \sqrt{n}\sqrt{\mathbb{E}X_1^4}.
$$

Le majorant de la distance de Wasserstein donné par (1.3.2) tend bien vers 0 pour n assez grand avec une vitesse de l'ordre de $n^{-1/2}$. De plus d'après la proposition 1.1.1,

$$
d_K(W_n, Z) \leq \sqrt{2C d_{Wass}(W_n, Z)}
$$

où C est une constante et $d_K(W_n, Z) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(W_n \leq x) - \mathbb{P}(Z \leq x)|$ est la distance de Kolmogorov. Donc lorsque n est assez grand,

$$
\mathbb{P}(W_n \leq x) \simeq \mathbb{P}(Z \leq x).
$$

Dans la section suivante, nous donnons d'autres exemples bien connus d'approximation par la méthode de Stein.

1.4 Autres exemples

1.4.1 Loi du khi-deux

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, centrées et réduites telles que $\mathbb{E}\left(X_i^8\right) < \infty$. Soit

$$
W_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2.
$$

Lorsque $n \to \infty$, $(W_n)_{n\geq 1}$ converge vers la loi du khi-deux à un degré de liberté.

Soit $C_b^3(\mathbb{R}_+)$, la classe des fonctions continues bornées $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles les dérivées h', h'', $h^{(3)}$ existent et sont bornées. Par la méthode de Stein, Luk [49] obtient :

Théorème 1.4.1. *Soit Γ une variable aléatoire suivant la loi du khi-deux à un degré de liberté. Pour toute fonction $h \in C_b^3(\mathbb{R}_+)$, on a :*

$$
|\mathbb{E}h(W_n) - \mathbb{E}h(\Gamma)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\left(a_n \left(\frac{1}{2} + \left(\mathbb{E}X_i^4 - 1\right)^{1/2} \right) + \frac{\sqrt{\mathbb{E}|X_i|^6}}{2} \right) \left\|h''\right\| + \frac{2b_n}{3} \left\|h^{(3)}\right\| \right]
$$

avec

$$
a_n = \left(4 + \frac{\mathbb{E}X_i^4}{n}\right)^{1/2}, \quad b_n = \left[\mathbb{E}X_i^8 \left(48 - \frac{72}{n} + \frac{25}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\mathbb{E}X_i^4}{n}\right)\right]^{1/2}.
$$

Sous les conditions du théorème précédent, Gaunt, Pickett et Reinert [27] obtiennent :

Théorème 1.4.2.

$$|\mathbb{E}h(W_n) - \mathbb{E}h(\Gamma)| \leq \frac{4\mathbb{E}X_i^8}{3n}\left\{\alpha_0 \|h\| + \alpha_1 \|h'\| + \alpha_2 \|h''\| + \alpha_3 \left\|h^{(3)}\right\|\right\}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 2 + 69\left|\mathbb{E}X_i^3\right|,\\ \alpha_1 &= 38 + 654\left|\mathbb{E}X_i^3\right|,\\ \alpha_2 &= 203 + 1781\left|\mathbb{E}X_i^3\right|,\\ \alpha_3 &= 321 + 1320\left|\mathbb{E}X_i^3\right|.\end{aligned}$$

1.4.2 Loi variance-gamma

Soit $VG(1,0,1,0)$ la loi variance-gamma de paramètres $1,0,1,0$ ([25]). Soit $X, X_1, \cdots, X_m$, Y, $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes, centrées, réduites, de moments d'ordre six finis telles que $X_i = X$ en loi $\forall i = 1, \cdots, m$ et $Y_i = Y$ en loi $\forall j = 1, \cdots, n$. On pose

$$W_{mn} = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i,j=1}^{m,n} X_i Y_j.$$

La loi asymptotique de W_{mn} est la loi $VG(1,0,1,0)$. Par la méthode de Stein, Gaunt [25] obtient :

Théorème 1.4.3. *Soit $Z \sim VG(1,0,1,0)$. Pour toute fonction $h \in C_b^3(\mathbb{R})$, on a :*

$$|\mathbb{E}h(W_{mn}) - \mathbb{E}h(Z)| \leq \gamma_1(X,Y)M_1^2(h) + \gamma_2(X,Y)M_1^3(h) + \gamma_3(X,Y)M_1^4(h)$$

avec

$$\gamma_1(X,Y) = \frac{10}{n}\left|\mathbb{E}Y^3\right|\mathbb{E}\left|Y^3\right| + \frac{11}{\sqrt{mn}}\left|\mathbb{E}X^3\right|\mathbb{E}Y^4,$$

$$\gamma_2(X,Y) = \frac{9}{m}\mathbb{E}X^4\mathbb{E}Y^4 + \frac{30}{n}\left|\mathbb{E}Y^3\right|\mathbb{E}Y^4 + \frac{85}{\sqrt{mn}}\left|\mathbb{E}X^3\right|\mathbb{E}\left|Y^5\right| + \frac{46}{\sqrt{mn}}\mathbb{E}\left|X^3\right|\left|\mathbb{E}Y^3\right|\mathbb{E}Y^4,$$

$$\begin{aligned}\gamma_3(X,Y) = \frac{1}{n}\mathbb{E}X^4\mathbb{E}Y^4\left(1 + 15\left|\mathbb{E}Y^3\right|\right) + \frac{284}{m}\left|\mathbb{E}X^3\right|\mathbb{E}\left|X^3\right|\mathbb{E}Y^6 + \frac{148}{n}\mathbb{E}X^4\left|\mathbb{E}Y^3\right|\mathbb{E}\left|Y^5\right|\\ + \frac{135}{\sqrt{mn}}\left|\mathbb{E}X^3\right|\mathbb{E}X^4\mathbb{E}\left|Y^3\right| + \frac{248}{\sqrt{mn}}\mathbb{E}X^4\left|\mathbb{E}Y^3\right|,\end{aligned}$$

$$M_1^2 \leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 1\right)\left(3\|h'\| + 4\|h - \mathbb{E}h(Z)\|\right),$$

$$M_1^3 \leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 1\right)\left(5\|h''\| + 18\|h'\| + 19\|h - \mathbb{E}h(Z)\|\right),$$

$$M_1^2 \leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + 1\right)\left(8\left\|h^{(3)}\right\| + 52\|h''\| + 124\|h'\| + 124\|h - \mathbb{E}h(Z)\|\right).$$

1.4.3 Loi de Poisson

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i. La littérature concernant l'approximation de la loi de la somme $\sum_{i=1}^{n} X_i$ par la loi de Poisson est très vaste. Chen [15] a utilisé l'idée de Stein comme dans le cas normal pour estimer une borne de la distance en variation totale entre la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ et la loi de Poisson. On a la caractérisation de Stein suivante :

Théorème 1.4.4. *Une variable aléatoire W à valeur dans $\mathbb{Z}^+$ suit la loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si pour toute fonction réelle bornée f,*

$$\mathbb{E}\left[\lambda f(W+1) - W f(W)\right] = 0.$$

L'équation de Stein correspondante est alors :

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = h(n) - \mathbb{E}h(P) \tag{1.4.1}$$

où h est une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et P une variable aléatoire suivant loi de Poisson de paramètre λ. La solution bornée de l'équation (1.4.1) est

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[h(k) - \mathbb{E}h(P)\right] \frac{\lambda^k}{k!}, \quad n \geq 1.$$

En posant $\lambda = \sum_{k=0}^{n} p_k$ et $S = \sum_{k=0}^{n} X_k$, on a par exemple (Chen [15]) :

Théorème 1.4.5. *Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes et $\|h\| \leq 1$ pour $h : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, alors*

$$|\mathbb{E}h(S) - \mathbb{E}h(P)| \leq 6 \min\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}, 1\right) \sum_{i=0}^{n} p_i^2$$

et

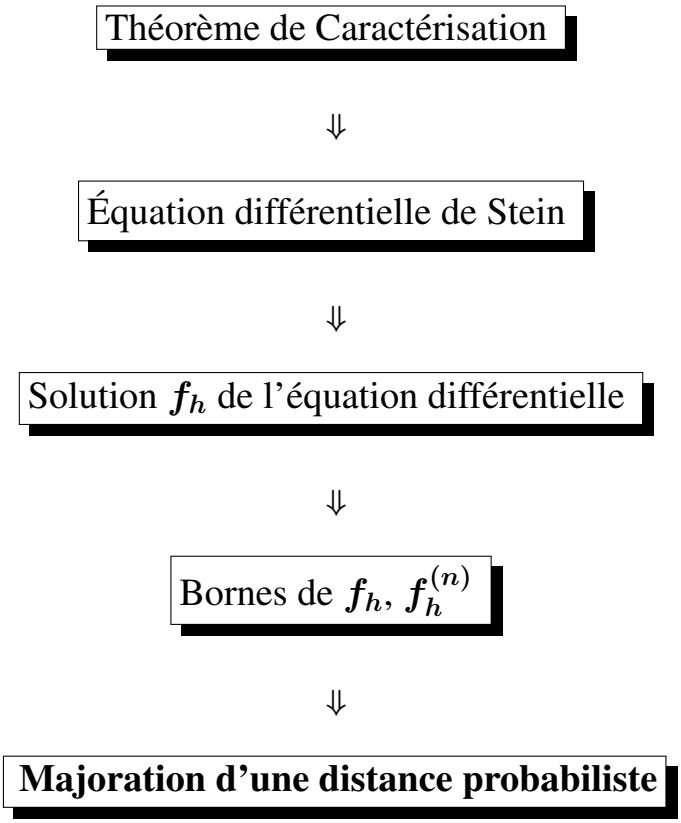
$$|\mathbb{E}h(S) - \mathbb{E}h(P)| \leq 10 \lambda^{-1} \sum_{i=0}^{n} p_i^2$$

avec P une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

Remarque 2. Il est à noter que le cas multidimensionnel a aussi retenu l'attention de plusieurs chercheurs. Entre autres, Nourdin *et al* [52] ont combiné la méthode de Stein avec les outils du calcul de Malliavin pour majorer, de manière explicite, la distance de Wasserstein entre une fonctionnelle d'un champ gaussien donné et son approximation normale multidimensionnelle. En particulier, ils ont associé des bornes à la version fonctionnelle du théorème central limite de Breuer-Major dans le cas du mouvement brownien fractionnaire.

Conclusion

Les principales étapes de l'approximation par la méthode de Stein peuvent être schématisées comme suit



Chapitre 2

Vitesse de convergence des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer vers la loi gamma

Ce chapitre présente quelques rappels sur les lois gaussiennes inverses généralisées ($\boldsymbol{GIG}$) et de Kummer ainsi qu'une contribution à l'étude des propriétés de ces deux lois par la méthode de Stein. Une suite de variables aléatoires de loi $\boldsymbol{GIG}$ ou de Kummer converge vers la loi gamma sous certaines hypothèses sur les paramètres des deux lois. Nous utilisons la méthode de Stein pour estimer la vitesse de convergence de la loi $\boldsymbol{GIG}$ (resp. de Kummer) vers la loi limite gamma. Une propriété essentielle utilisée dans notre démarche est l'implication de la loi limite et de la loi de la suite de variables aléatoires considérée dans une même convolution. La loi limite étant la loi gamma, nous présentons dans la section 1 la caractérisation à la Stein de la loi gamma. Les sections 2 et 3 présentent quelques propriétés et la vitesse de convergence des lois $\boldsymbol{GIG}$ et de Kummer, respectivement, vers la loi gamma.

2.1 Caractérisation de Stein pour la loi gamma

Comme rappelé dans le chapitre 1, l'approximation par la méthode de Stein demande une caractérisation dite de Stein pour la loi limite. Nous présentons dans cette section un bref rappel de la caractérisation de Stein pour la loi gamma, dont nous ferons usage dans l'estimation de la vitesse de convergence des lois $\boldsymbol{GIG}$ et de Kummer vers la loi gamma.

Pour $\boldsymbol{\theta > 0}$, $\boldsymbol{\lambda > 0}$, la loi gamma $\boldsymbol{\gamma(\theta, \lambda)}$ a pour densité de probabilité :

$$\boldsymbol{\gamma(\theta,\lambda)(x) = \frac{\lambda^{\theta}}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.}$$

Le résultat suivant établi par Luk [49] caractérise la loi gamma à la Stein.

Théorème 2.1.1 ([49]). *Une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ suit la loi $\boldsymbol{\gamma(\theta, \lambda)}$ si et seulement si, pour toute fonction $\boldsymbol{f}$ différentiable et bornée,*

$$\boldsymbol{\mathbb{E}\left[X f'(X) + (\theta - \lambda X) f(X)\right] = 0.} \tag{2.1.1}$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est alors :

$$\boldsymbol{x f'(x) + (\theta - \lambda x) f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(\Lambda),} \tag{2.1.2}$$

$\boldsymbol{h}$ est généralement une fonction bornée et $\boldsymbol{\Lambda}$ est une variable aléatoire suivant la loi $\boldsymbol{\gamma(\theta, \lambda)}$. Il est facile (voir [26, 61]) de prouver que la solution bornée de l'équation de Stein (2.1.2) est

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f_h(x)} &= \boldsymbol{\frac{1}{x\gamma(\theta,\lambda)(x)} \int_0^x \gamma(\theta,\lambda)(t) \left[h(t) - \mathbb{E}h(\Lambda)\right] dt} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{x\gamma(\theta,\lambda)(x)} \int_x^{\infty} \gamma(\theta,\lambda)(t) \left[h(t) - \mathbb{E}h(\Lambda)\right] dt.} \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Dans l'approximation par la technique de Stein, résoudre l'équation différentielle de Stein correspondante à la loi cible, borner la solution obtenue ainsi que ses dérivées successives est une étape obligatoire mais souvent assez délicate. Luk a utilisé l'approche par générateurs de Barbour [2] pour borner les dérivées successives de la solution de l'équation de Stein pour la loi gamma. Dans cette approche, f est remplacée par f' dans l'équation (2.1.2). La nouvelle équation considérée est alors

$$\mathcal{A}f(x) = xf''(x) + (\theta - \lambda x)f'(x) = h(x) - \mathbb{E}h(\Lambda). \tag{2.1.4}$$

Soit h une fonction bornée, la solution de l'équation (2.1.4) est donnée par :

$$f_h(x) = -\int_0^{+\infty} [T_t h(x) - \mathbb{E}h(\Lambda)]\, dt \tag{2.1.5}$$

où $T_t h(x) = \mathbb{E}\left(h(X_t)/X_0 = x\right)$ et (X_t) est un processus de Markov vérifiant $X_t = x + \int_0^t (\theta - \lambda X_s)ds + \int_0^t \sqrt{2X_s}dB_s$, de générateur $\mathcal{A}$ et de loi stationnaire $\gamma(\theta, \lambda)$, B_t est le mouvement Brownien standard.

Théorème 2.1.2 ([49]). *Soit $k > 1$ et $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction$f$. Soit*

$$C_{\lambda,k} = \{h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : \exists c > 0, a < \lambda \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall j = 0, 1, \cdots, k-1$$
$$|h^{(j)}(x)| \leq ce^{ax} \text{ et } h^{(k-1)} \text{ absolument continue } \}.$$

Si $h \in C_{\lambda,k}$, alors la solution f_h donnée par (2.1.5) est k fois différentiable et

$$\left|\left|f_h^{(k)}\right|\right| \leq \frac{\left|\left|h^{(k)}\right|\right|}{k\lambda}, \qquad k \geq 1, \tag{2.1.6}$$

où $||f|| = \sup_{x>0} |f(x)|$ et $h^{(0)} = h$.

Des bornes alternatives ont été obtenues par Picket [58] et Gaunt [23].
Picket [58] a obtenu : pour $h \in C_{\lambda,k-1}$,

$$\left|\left|f_h^{(k)}\right|\right| \leq \left[\sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} + \frac{2}{\theta}\right] \left|\left|h^{(k-1)}\right|\right|, \qquad k \geq 1, \tag{2.1.7}$$

et Gaunt [23] a prouvé que pour $h \in C_{\lambda,k-1}$,

$$\left|\left|f_h^{(k)}\right|\right| \leq \left[\frac{\sqrt{2\pi} + e^{-1}}{\sqrt{\theta + k - 1}} + \frac{2}{\theta + k - 1}\right] \left|\left|h^{(k-1)}\right|\right|, \qquad k \geq 1. \tag{2.1.8}$$

Récemment, Gaunt, Pickett et Reinert [27] ont fourni de nouvelles bornes.

Théorème 2.1.3 ([27]). *Soit $k \geq 2$, on suppose que $h \in C_{\lambda,k-1}$ et que $h^{(k-2)}$ est bornée. Alors*

$$\left|\left|f_h^{(k)}\right|\right| \leq \frac{2}{\theta + k - 1}\left(3\left|\left|h^{(k-1)}\right|\right| + 2\lambda\left|\left|h^{(k-2)}\right|\right|\right). \tag{2.1.9}$$

Dans les approximations à venir, nous considérons la forme (2.1.4) de l'équation de Stein pour la loi gamma. Donc si X est une variable aléatoire et Λ une variable aléatoire suivant la loi gamma $\gamma(\theta, \lambda)$ alors

$$\mathbb{E}\left|h(X) - \mathbb{E}h(\Lambda)\right| = \mathbb{E}\left|Xf_h''(X) + (\theta - \lambda X)f_h'(X)\right| \tag{2.1.10}$$

où h est une fonction réelle dérivable bornée ainsi que ses dérivées successives et f_h est la solution de l'équation (2.1.4).
Il suffira de majorer le membre de droite de l'équation (2.1.10) pour majorer celui de gauche afin de déterminer le comportement en distribution de X par rapport à Λ.

2.2 Résultats sur la convergence de la loi gaussienne inverse généralisée vers la loi gamma

L'histoire de la loi gaussienne inverse généralisée, encore appelée loi de Halphen de type A, remonte à Halphen [30], Good [29]. Elle intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes réels, notamment la modélisation de données concernant des temps d'attente (Jørgensen [33]), des phénomènes extrêmes en hydrologie (Chebana *et al.* [14]), l'activité neuronale (Iyengar et Liao [32]). Dans cette section, nous présentons une littérature succincte sur cette loi, ainsi qu'une estimation de la vitesse de convergence de la loi $\boldsymbol{GIG}$ vers la loi gamma.

2.2.1 Définition et propriétés de la loi GIG

Définition 1. *Une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ suit la loi gaussienne inverse généralisée de paramètres $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} > 0$ et $\boldsymbol{b} > 0$ si la densité de probabilité de $\boldsymbol{X}$ est donnée par :*

$$g_{p,a,b}(x) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}(ax+bx^{-1})} \mathbb{1}_{\{x>0\}}, \tag{2.2.1}$$

$\boldsymbol{K_p}$ est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce, appelé aussi fonction spéciale de McDonald définie par :

$$K_p(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(z) - I_p(z)}{\sin(p\pi)}; \quad I_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(k+p+1)} \tag{2.2.2}$$

avec $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$.

$\boldsymbol{K_p}$ peut prendre plusieurs formes dont une forme intégrale est :

$$K_p(z) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-\frac{1}{2}z\left(y+\frac{1}{y}\right)} dy. \tag{2.2.3}$$

Avec la forme (2.2.3) de $\boldsymbol{K_p}$, en faisant le changement de variable $t = \frac{1}{y}$, on obtient :

$$K_p(z) = K_{-p}(z).$$

On a la formule de récurrence suivante :

$$K_{p+1}(z) = \frac{2p}{z} K_p(z) + K_{p-1}(z).$$

Pour plus de détails sur les fonctions modifiées de Bessel voir par exemple [22, 34].

Définition 2. *Pour $\boldsymbol{p = -1/2}$, $g_{-1/2,a,b}(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} e^{\sqrt{ab}} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}(ax+b/x)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ est la densité de la loi gaussienne inverse de paramètres $\boldsymbol{a, b}$ que nous notons $\boldsymbol{IG(a, b)}$.*

Définition 3. *Pour $\boldsymbol{p = 1/2}$, $g_{1/2,a,b}(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{\sqrt{ab}} x^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(ax+b/x)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ est la densité de la loi gaussienne inverse réciproque de paramètres $\boldsymbol{a, b}$ que nous notons $\boldsymbol{RIG(a, b)}$.*

Définition 4. *Pour $\boldsymbol{p > 0}$ et $\boldsymbol{b \to 0}$, $g_{p,a,0}(x) = \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}ax} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ est la densité de la loi gamma de paramètres $\boldsymbol{p}, \frac{a}{2}$ que nous notons $\gamma\left(\boldsymbol{p}, \frac{a}{2}\right)$.*

Nous avons les propriétés suivantes :

Propriété 1. *$\boldsymbol{X}$ suit la loi gaussienne inverse généralisée $\boldsymbol{GIG(p, a, b)}$ (nous noterons $\boldsymbol{X \sim GIG(p, a, b)}$) si et seulement si $\boldsymbol{X^{-1} \sim GIG(-p, b, a)}$.*

Preuve

Si $\boldsymbol{X \sim GIG(p,a,b)}$ alors la densité de probabilité de $\boldsymbol{X}$ est donné par :

$$\boldsymbol{f_X(x) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(ax+bx^{-1}\right)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.}$$

Soit $\boldsymbol{\varphi : \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star}$ telle que $\boldsymbol{\varphi(x) = x^{-1}}$. D'après la formule de changement de variables, la densité de probabilité de $\boldsymbol{X^{-1}}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{f_{X^{-1}}(x) = f_X(\varphi^{-1}(x)) \left|J_{\varphi^{-1}}(x)\right| \mathbb{1}_{Im\varphi^{-1}}(x).}$$

$\boldsymbol{J_{\varphi^{-1}}}$ est le jacobien de $\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ qui est égal à la dérivée dans le cas unidimensionnel et $\boldsymbol{Im\varphi^{-1}}$ est l'image de $\boldsymbol{\varphi^{-1}}$. On a :

$$\boldsymbol{J_{\varphi^{-1}}(x) = \left(\varphi^{-1}\right)'(x) = -x^{-2}}$$

et

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f_{X^{-1}}(x)} &= \boldsymbol{f_X\left(x^{-1}\right) x^{-2} \mathbb{1}_{\{x>0\}}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})} x^{-p+1} e^{-\frac{1}{2}\left(ax^{-1}+bx\right)} \times x^{-2} \mathbb{1}_{\{x>0\}}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} x^{-p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(bx+ax^{-1}\right)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.}
\end{aligned}$$

C'est la densité de la loi $\boldsymbol{GIG(-p,b,a)}$. La réciproque est immédiate en appliquant ce qui précède à $\boldsymbol{Y = \frac{1}{X}}$.

□

Propriété 2. *$\boldsymbol{X}$ suit la loi inverse gaussienne $\boldsymbol{IG(a,b)}$ si et seulement si $\boldsymbol{X^{-1}}$ suit la loi inverse gaussienne réciproque $\boldsymbol{RIG(b,a)}$.*

Preuve

C'est une application directe de la propriété 1 pour $\boldsymbol{p = 1/2}$.

□

Propriété 3. *Si $\boldsymbol{X_1 \sim IG(a_1,b)}$, $\boldsymbol{X_2 \sim IG(a_2,b)}$ et si $\boldsymbol{X_1}$ et $\boldsymbol{X_2}$ sont indépendantes, alors $\boldsymbol{X_1 + X_2 \sim IG(a_1+a_2,b)}$.*

Preuve

La transformée de Laplace de la variable aléatoire $\boldsymbol{X_1 + X_2}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{\mathbb{E}\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{tX_2}\right)} \quad \text{(par indépendance de } \boldsymbol{X_1} \text{ et } \boldsymbol{X_2}\text{)}.$$

En outre

$$\boldsymbol{\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right) = \int_0^\infty \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} e^{a_1 b} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\left(a_1^2 x^{-1} + (b^2-2t)x\right)} dx.}$$

Posons $\boldsymbol{c^2 = b^2 - 2t}$ avec $\boldsymbol{b^2 > 2t}$. On a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right)} &= \boldsymbol{\int_0^\infty \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} e^{a_1\sqrt{c^2+2t}} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\left(a_1^2 x^{-1} + c^2 x\right)} dx} \\
&= \boldsymbol{e^{a_1\sqrt{c^2+2t}} e^{-a_1 c} \underbrace{\int_0^\infty \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} e^{a_1 c} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\left(a_1^2 x^{-1} + c^2 x\right)} dx}_{\mathbf{1}}} \\
&= \boldsymbol{e^{a_1\sqrt{c^2+2t}} e^{-a_1 c}} \\
&= \boldsymbol{e^{a_1 b - a_1\sqrt{b^2-2t}}.}
\end{aligned}$$

De façon analogue on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{tX_2}\right) = e^{a_2 b - a_2\sqrt{b^2-2t}}.$$

D'où

$$\mathbb{E}\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) = e^{(a_1+a_2)b-(a_1+a_2)\sqrt{b^2-2t}}$$

L'égalité précédente donne la transformée de Laplace d'une variable aléatoire de loi $\boldsymbol{IG(a_1+a_2,b)}$.

□

Propriété 4. *Si* $\boldsymbol{X_1 \sim IG(a_1,b)}$, $\boldsymbol{X_2 \sim RIG(a_2,b)}$ *avec* $\boldsymbol{X_1}$ *et* $\boldsymbol{X_2}$ *sont indépendantes, alors* $\boldsymbol{X_1+X_2 \sim RIG(a_1+a_2,b)}$.

Preuve

On calcule comme précédemment la fonction génératrice de moments de la variable aléatoire $\boldsymbol{X_2}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{tX_2}\right) &= \int_0^\infty \frac{b}{\sqrt{2\pi}} e^{a_2 b} x^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\left(a_2^2 x^{-1}+(b^2-2t)x\right)} dx \\ &= \frac{b}{\sqrt{b^2-2t}} e^{a_2 b - a_2\sqrt{b^2-2t}}.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{t(X_1+X_2)}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{tX_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{tX_2}\right) \\ &= \frac{b}{\sqrt{b^2-2t}} e^{(a_1+a_2)b-(a_1+a_2)\sqrt{b^2-2t}}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Remarque 3. Dans les preuves des propriétés 3 et 4, l'on a utilisé les formes suivantes des densités des lois $\boldsymbol{IG(a,b)}$ et $\boldsymbol{RIG(a,b)}$:

$$f_{IG}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{ab} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\left(a^2x^{-1}+b^2x\right)} \mathbb{1}_{\{x>0\}},$$

$$f_{RIG}(x) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} e^{ab} x^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\left(a^2x^{-1}+b^2x\right)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

On a la propriété de convolution suivante que nous allons utiliser dans l'estimation de la vitesse de convergence de la loi $\boldsymbol{GIG}$ vers la loi gamma.

Propriété 5. *Soient* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *deux variables aléatoires indépendantes telles que* $\boldsymbol{X}$ *suit la loi* $\boldsymbol{GIG(-p,a,b)}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *suit la loi* $\boldsymbol{\gamma(p,a/2)}$. *Alors* $\boldsymbol{X+Y}$ *suit la loi* $\boldsymbol{GIG(p,a,b)}$.

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{-tX} &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} \int_0^{+\infty} x^{-p-1} e^{-\frac{1}{2}\left((a+2t)x+bx^{-1}\right)} dx \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})} \times \frac{2K_p(\sqrt{(a+2t)b})}{\left(\frac{(a+2t)}{b}\right)^{-p/2}} \\ &= \left(1+\frac{2t}{a}\right)^{p/2} \times \frac{K_p(\sqrt{(a+2t)b})}{K_p(\sqrt{ab})}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{-tY} &= \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} x^{-p-1}e^{-(t+a/2)}xdx \\ &= \left(1+\frac{2t}{a}\right)^{-p}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}e^{-t(X+Y)} = \left(1+\frac{2t}{a}\right)^{-p/2} \times \frac{K_p(\sqrt{(a+2t)b})}{K_p(\sqrt{ab})}.$$

On reconnaît la transformée de Laplace de $GIG(p,a,b)$.

□

L'espérance et la variance de la loi GIG sont données par la propriété suivante.

Propriété 6. *Si $X \sim GIG(p,a,b)$ alors l'espérance mathématique et la variance de X sont données par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})},$$

$$V(X) = \frac{b}{a}\left(\frac{K_{p+2}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})} - \left(\frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}\right)^2\right).$$

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})}\int_0^{\infty} x^p e^{-\frac{1}{2}\left(ax+bx^{-1}\right)}dx \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})}\frac{2K_{p+1}(\sqrt{ab})}{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2+1/2}}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2+1/2}}{2K_{p+1}(\sqrt{ab})}x^{(p+1)-1}e^{-\frac{1}{2}\left(ax+bx^{-1}\right)}dx}_{1} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})}\int_0^{\infty} x^{p+1} e^{-\frac{1}{2}\left(ax+bx^{-1}\right)}dx \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})}\frac{2K_{p+2}(\sqrt{ab})}{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2+1}}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{p/2+1}}{2K_{p+2}(\sqrt{ab})}x^{(p+2)-1}e^{-\frac{1}{2}\left(ax+bx^{-1}\right)}dx}_{1} \\ &= \frac{b}{a}\frac{K_{p+2}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}.\end{aligned}$$

On obtient la variance de X avec la relation $V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$.

□

Remarque 4. On démontre aisément que si $X \sim GIG(p,a,b)$ alors : le moment d'ordre m de X est

$$\mathbb{E}X^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{m/2} \times \frac{K_{p+m}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}.$$

Le résultat suivant établi dans [45, 42] donne une propriété d'indépendance de type Matsumoto-Yor.

Théorème 2.2.1. *Soit $p > 0$, $a > 0$, $b > 0$. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $GIG(-p, a, b)$ et $\gamma(p, \frac{1}{2}a)$, alors les variables aléatoires*

$$U = \frac{1}{X+Y} \quad et \quad V = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+Y}$$

sont indépendantes et de lois respectives $GIG(-p, b, a)$ et $\gamma(p, \frac{1}{2}b)$.

Preuve[Première méthode utilisant la formule de changement de variables]

Les densités de probabilité de X et Y sont respectivement

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} x^{-p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(ax+bx^{-1}\right)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

et

$$f_Y(y) = \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-\frac{1}{2}ay} \mathbb{1}_{\{y>0\}}.$$

Notons $C_1 = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})}$ et $C_2 = \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)}$.

La densité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y) &= f_X(x) \times f_Y(y) \qquad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\ &= C_1 C_2 x^{-p-1} y^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(ax+bx^{-1}+ay\right)} \mathbb{1}_{\{x>0, y>0\}}. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star &\longrightarrow \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \\ (x,y) &\longmapsto (u,v) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\right). \end{aligned}$$

φ est un C^1-difféomorphisme d'inverse

$$\varphi^{-1}(u,v) = (x,y) = \left(\frac{1}{u+v}, \frac{1}{u} - \frac{1}{u+v}\right).$$

Le jacobien de φ^{-1} est :

$$J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} -(u+v)^{-2} & -(u+v)^{-2} \\ -u^{-2} + (u+v)^{-2} & (u+v)^{-2} \end{vmatrix} = -u^{-2}(u+v)^{-2}.$$

La formule de changement de variables donne :

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f_{(X,Y)}\left(\varphi^{-1}(u,v)\right) \left|J_{\varphi^{-1}}(u,v)\right| \mathbb{1}_{\mathrm{Im}\varphi^{-1}}(u,v) \\ &= C_1 C_2 H(u,v) G(u,v) \mathbb{1}_{\{u>0, v>0\}} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

avec

$$H(u,v) = (u+v)^{p+1} \left(u^{-1} - (u+v)^{-1}\right)^{p-1} u^{-2}(u+v)^{-2}$$

et

$$G(u,v) = e^{-\frac{1}{2}\left(a(u+v)^{-1} + b(u+v) + a\left(u^{-1} - (u+v)^{-1}\right)\right)}.$$

On obtient

$$H(u,v) = u^{-p-1} v^{p-1}; \quad G(u,v) = e^{-\frac{1}{2}\left(bu + au^{-1} + bv\right)} = e^{-\frac{1}{2}\left(bu + au^{-1}\right)} e^{-\frac{1}{2}bv}.$$

$$
\begin{aligned}
C_1C_2 &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} \times \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)} \\
&= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{-p/2} \times \left(\frac{b}{a}\right)^{p/2} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} \times \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)} \\
&= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} \times \frac{(b/2)^p}{\Gamma(p)}.
\end{aligned}
$$

En reportant C_1C_2, $H(u,v)$ et $G(u,v)$ dans (2.2.4), on obtient :

$$
\begin{aligned}
f_{(U,V)}(u,v) &= \underbrace{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} u^{-p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(bu+au^{-1}\right)} \mathbb{1}_{\{u>0,\}}}_{f_U(u)} \times \underbrace{\frac{(b/2)^p}{\Gamma(p)} v^{p-1} e^{-\frac{1}{2}bv} \mathbb{1}_{\{v>0\}}}_{f_V(v),} \\
&=
\end{aligned}
$$

ce qui prouve le théorème.

□

La deuxième méthode de démonstration du théorème 2.2.1 utilise le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Soient Z et T deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement. Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}\left(e^{s(Z+T)+tZ^{-1}}\right) < \infty$, on définit*

$$
M_{Z,T}(s,t) = \mathbb{E}\left(e^{s(Z+T)+tZ^{-1}}\right).
$$

La fonction $M_{Z,T}$ ainsi définie détermine de façon unique la loi du couple (Z,T).

Preuve

Supposons que le vecteur aléatoire (Z_1,T_1) est tel que $M_{Z,T}(s,t) = M_{Z_1,T_1}(s,t)$, c'est-à-dire

$$
\mathbb{E}\left(e^{s(Z+T)+tZ^{-1}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{s(Z_1+T_1)+tZ_1^{-1}}\right).
$$

Alors les transformées de Laplace des vecteurs aléatoires $\left(Z+T, Z^{-1}\right)$ et $\left(Z_1+T_1, Z_1^{-1}\right)$ sont égales. Donc $\left(Z+T, Z^{-1}\right)$ et $\left(Z_1+T_1, Z_1^{-1}\right)$ sont identiquement distribués.
soit $g:\quad \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ bijective telle que $g(x,y) = \left(y^{-1}, x-y^{-1}\right)$. Comme $\left(Z+T, Z^{-1}\right)$ et $\left(Z_1+T_1, Z_1^{-1}\right)$ sont identiquement distribués, en notant $\overset{\mathcal{L}}{=}$ l'égalité en loi, on a :

$$
\begin{aligned}
\left(g\left(Z+T, Z^{-1}\right)\right) &\overset{\mathcal{L}}{=} \left(g\left(Z_1+T_1, Z_1^{-1}\right)\right) \\
\left((Z, Z+T-Z)\right) &\overset{\mathcal{L}}{=} \left((Z_1, Z_1+T_1-Z_1)\right) \\
\left((Z,T)\right) &\overset{\mathcal{L}}{=} \left((Z_1,T_1)\right).
\end{aligned}
$$

Les couples (Z,T) et (Z_1,T_1) ont alors même loi.

□

Donnons maintenant la deuxième façon de prouver le théorème 2.2.1.

Preuve[du théorème 2.2.1]

Hypothèses : $X \sim GIG(-p,a,b)$, $Y \sim \gamma(p, \frac{1}{2}a)$; X et Y indépendantes.
On veut montrer que les variables aléatoires $U = \dfrac{1}{X+Y}$ et $V = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+Y}$ sont indépendantes

de lois respectives $GIG(-p, b, a)$ et $\gamma(p, \frac{1}{2}b)$.

Méthode
On calcule $M_{U,V}(s,t)$. On considère ensuite un couple de variables aléatoires indépendantes (U_1, V_1) de lois respectives $GIG(-p, b, a)$ et $\gamma(p, \frac{1}{2}b)$. On montre que $M_{U,V}(s,t) = M_{U_1,V_1}(s,t)$. On applique le lemme 2.2.1 d'unicité pour obtenir le résultat.

On a :

$$\begin{aligned} M_{U,V}(s,t) &= \mathbb{E}\left(e^{s(U+V)+tU^{-1}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{sX^{-1}+t(X+Y)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tX+sX^{-1}+tY}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{tX+sX^{-1}}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right). \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left(e^{tX+sX^{-1}}\right) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})}\int_0^{+\infty} x^{-p-1}e^{-\frac{1}{2}\left((a-2t)x+(b-2s)x^{-1}\right)}dx.$$

Posons $c = a - 2t$ et $d = b - 2s$. Alors

$$\mathbb{E}\left(e^{tX+sX^{-1}}\right) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{ab})} \times \frac{2K_{-p}(\sqrt{cd})}{\left(\frac{c}{d}\right)^{-p/2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{c}{d}\right)^{-p/2}}{2K_{-p}(\sqrt{cd})} x^{-p-1}e^{-\frac{1}{2}\left(cx+dx^{-1}\right)}dx}_{1}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{K_{-p}(\sqrt{ab})}\left(\frac{a-2t}{b-2s}\right)^{p/2} K_{-p}(\sqrt{(a-2t)(b-2s)})$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{tY}\right) &= \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-\frac{1}{2}(a-2t)y}dy \\ &= \left(\frac{a}{a-2t}\right)^p. \end{aligned}$$

On a :

$$M_{U,V}(s,t) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-p/2}}{K_{-p}(\sqrt{ab})}\left(\frac{a-2t}{b-2s}\right)^{p/2} K_{-p}(\sqrt{(a-2t)(b-2s)}) \times \left(\frac{a}{a-2t}\right)^p$$

Après simplification, on obtient

$$M_{U,V}(s,t) = \frac{\sqrt{ab}}{K_p(\sqrt{ab})} \times \frac{K_p(\sqrt{(a-2t)(b-2s)})}{\sqrt{(a-2t)(b-2s)}}. \tag{2.2.5}$$

Maintenant, calculons $M_{U_1,V_1}(s,t)$ pour U_1 et V_1 indépendantes de lois respectives $GIG(-p, b, a)$ et $\gamma(p, \frac{1}{2}b)$.

$$\begin{aligned} M_{U_1,V_1}(s,t) &= \mathbb{E}\left(e^{s(U_1+V_1)+tU_1^{-1}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{sU_1+tU_1^{-1}}\right)\mathbb{E}\left(e^{sV_1}\right). \end{aligned}$$

De même que précédemment, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{sU_1+tU_1^{-1}}\right) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{-p/2}}{K_p(\sqrt{ab})}\left(\frac{b-2s}{a-2t}\right)^{p/2} K_{-p}(\sqrt{(b-2s)(a-2t)});$$

$$\mathbb{E}\left(e^{sV_1}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{b}{b-2s}\right)^p$$

et

$$M_{U_1,V_1}(s,t) = \frac{\sqrt{ab}}{K_p(\sqrt{ab})} \times \frac{K_p(\sqrt{(a-2t)(b-2s)})}{\sqrt{(a-2t)(b-2s)}}. \tag{2.2.6}$$

Les équations (2.2.5), (2.2.6) et le lemme 2.2.1 d'unicité permettent de conclure.

□

Des propriétés statistiques de la loi GIG peuvent être trouvées dans [33, 41, 56, 57].

Dans la suite de cette section, nous présentons une contribution aux propriétés des lois gaussiennes inverses généralisées ainsi qu'à l'étude de ces lois par la méthode de Stein. Nous utilisons la méthode de Stein pour déterminer une estimation de la vitesse de convergence de la loi gaussienne inverse généralisée vers la loi gamma.

2.2.2 Vitesse de convergence de la loi gaussienne inverse généralisée vers la loi gamma

Lorsque le paramètre b de la loi $GIG(p,a,b)$ tend vers 0, la loi gaussienne inverse généralisée tend vers la loi gamma. Nous rappelons ce résultat dans la proposition suivante avant de donner notre premier résultat principal contenu dans le théorème 2.2.2 ci-dessous.

Proposition 2.2.1. *Pour $p > 0$ $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(W_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que W_n suit la loi gaussienne inverse généralisée $GIG\left(p,a,\frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \geq 1$. Alors la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi gamma $\gamma\left(p,\frac{a}{2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.*

Preuve

Pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}(W_n < x) = \frac{(an)^{p/2}}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \int_0^x t^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(at+\frac{1}{nt}\right)} dt.$$

En utilisant l'équivalence suivante (voir par exemple [24, 53]),

$$\text{lorsque } x \text{ décroît vers } 0, \quad K_p(x) \sim \begin{cases} 2^{|p|-1}\Gamma(|p|)x^{-|p|}, & p \neq 0 \\ -\log x, & p = 0 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n < x) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(an)^{p/2}}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}\right) \int_0^x \lim_{n\to\infty} t^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(at+\frac{1}{nt}\right)} dt \\ &= \int_0^x \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)} t^{p-1} e^{-\frac{1}{2}at} dt. \end{aligned}$$

Le membre de droite de la dernière égalité est bien la fonction de répartition de la loi gamma $\gamma\left(p,\frac{a}{2}\right)$.

□

On rappelle (voir propriété 5) que

$$GIG(-p,a,b) * \gamma(p,a/2) = GIG(p,a,b). \tag{2.2.8}$$

En utilisant la propriété de convolution ci-dessus et la proposition 2.2.1, on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.2.2. *Soit* $p > 0$, $a > 0$, Y *une variable aléatoire de loi* $\gamma(p, a/2)$. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires telle que pour chaque* $n \geq 1$, X_n *est indépendante de* Y *et* X_n *suit la loi* $GIG\left(-p, a, \frac{1}{n}\right)$. *Soit* $W_n = X_n + Y,\ n \geq 1$. *Alors*

1. W_n *suit la loi* $GIG\left(p, a, \frac{1}{n}\right)$.
2. *Lorsque* $n \to \infty$, *la suite de variables aléatoires* $(W_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers une variable aléatoire* Λ *suivant la loi* $\gamma\left(p, \frac{a}{2}\right)$.

Compte tenu de la proposition précédente, il est naturel de se demander à quel ordre est la vitesse de convergence de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geq 1}$ de loi $GIG\left(p, a, \frac{1}{n}\right)$ vers la variable Λ de loi $\gamma\left(p, \frac{a}{2}\right)$ pour n assez grand. Le résultat suivant propose une réponse à cette question en fournissant un majorant explicite de $|\mathbb{E}h(W_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)|$ pour toute fonction $h \in C_b^3$, où C_b^3 désigne la classe des fonctions bornées $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles les dérivées h', h'', $h^{(3)}$ existent et sont bornées.

Théorème 2.2.2 (théorème 3.1 Konzou *et al.[38]*). *Soit* $(W_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires de loi* $GIG\left(p, a, \frac{1}{n}\right)$ *et* Λ *une variable aléatoire de loi* $\gamma(p, a/2)$. *Pour toute fonction* $h \in C_b^3$,

$$|\mathbb{E}h(W_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)| \leq \frac{A}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} + \frac{B}{a} \times \frac{1}{n} \frac{K_{-p+2}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \tag{2.2.9}$$

avec

$$A = 2a\left(1 + \frac{p}{1+p}\right)||h|| + \left(7 + \frac{6p}{1+p} + \frac{4p}{2+p}\right)||h'|| + \frac{12p}{a(2+P)}||h''|| \tag{2.2.10}$$

et

$$B = \frac{4ap}{2+p}||h'|| + \left(\frac{12p}{2+p} + \frac{4p}{3+p}\right)||h''|| + \frac{12p}{a(3+p)}\left|\left|h^{(3)}\right|\right|. \tag{2.2.11}$$

L'équivalence (2.2.7) permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 2.2.3 (proposition 3.3 Konzou *et al. [38]*). *Lorsque* $n \to +\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \sim \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{a}}{2p} \quad et \quad \frac{K_{-p+2}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \sim \frac{1}{n^2} \times \frac{a}{4p(p-1)} \quad pour \ \ p > 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \sim \begin{cases} \frac{1}{n^p} \times 2^{1-2p} \times a^{p-1/2} \times \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(p)} & si \quad 0 < p < 1 \\ \frac{1}{n} \times \frac{\sqrt{a} \times \Gamma(p-1)}{2\Gamma(p)} & si \quad 1 < p \leq 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{a}{n}} \log\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right) & si \quad p = 1, \end{cases}$$

$$\frac{1}{n}\frac{K_{-p+2}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \sim \begin{cases} \frac{1}{n^p} \times 2^{2-2p} \times a^{p-1} \times \frac{\Gamma(2-p)}{\Gamma(p)} & si \quad 0 < p < 2 \\ -\frac{1}{n^{3/2}} \times \frac{\sqrt{a}}{2} \times \sqrt{\frac{a}{n}} \log\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right) & si \quad p = 2. \end{cases}$$

Par conséquent, le majorant fourni par le théorème 2.2.2 a une vitesse de convergence de l'ordre de n^{-1} *pour tout* $p > 1$ *; de l'ordre de* $\frac{\log n}{n}$ *pour* $p = 1$ *et de l'ordre de* n^{-p} *pour* $0 < p < 1$.

La preuve du théorème 2.2.2 est donnée en fin de cette section.

Il est intéressant de comparer l'ordre de la vitesse de convergence obtenu dans le théorème 2.2.2 à un autre obtenu autrement que par la méthode de Stein. La proposition suivante donne un majorant de la distance en variation totale d_{VT} entre W_n et Λ.

Proposition 2.2.4 (proposition 3.4 Konzou *et al. [38]*)**.** *Sous les notations du théorème 2.2.2, pour tout* $n \geq 1$,

$$d_{VT}(W_n, \Lambda) \leq \frac{\beta}{p}\left(\frac{-1}{2n \ln\left(\frac{\beta}{\beta_n}\right)}\right)^p$$

avec

$$\beta_n = \frac{(an)^{p/2}}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}; \qquad \beta = \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)}.$$

Remarque 5. Pour $p = \frac{1}{2}$, $K_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$ et $\left(\frac{-1}{2n \ln\left(\frac{\beta}{\beta_n}\right)}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a}}} \times \frac{1}{n^{1/4}}$.

La proposition 2.2.4 donne alors une vitesse de convergence de l'ordre de $n^{-1/4}$ tandis qu'elle est de l'ordre de $n^{-1/2}$ dans le théorème 2.2.2. L'ordre de la vitesse de convergence obtenue est donc meilleur avec la méthode de Stein.

Preuve[proposition 2.2.4]

Soit g_n et γ les densités des lois $GIG\left(p, a, \frac{1}{n}\right)$ et $\gamma\left(p, \frac{a}{2}\right)$ respectivement. Soit

$$\beta_n = \frac{(an)^{p/2}}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}; \qquad \beta = \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)}.$$

On a

$$g_n(x) = \frac{(an)^{p/2}}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}x^{p-1}e^{-\frac{1}{2}\left(ax+\frac{1}{nx}\right)} = \beta_n x^{p-1}e^{-\frac{1}{2}\left(ax+\frac{1}{nx}\right)},$$

$$\gamma(x) = \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\frac{a}{2}x} = \beta x^{p-1}e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Puisque $\boldsymbol{W_n \sim GIG\left(p, a, \frac{1}{n}\right)}$ et $\boldsymbol{\Lambda \sim \gamma(p, a/2)}$, la distance en variation totale entre $\boldsymbol{W_n}$ et $\boldsymbol{\Lambda}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} d_{VT}(W_n, \Lambda) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} |g_n(x) - \gamma(x)|\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left|\beta_n x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{1}{nx}\right)} - \beta x^{p-1} e^{-\frac{a}{2}x}\right| dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left|\beta_n e^{-\frac{1}{2nx}} - \beta\right| x^{p-1} e^{-\frac{a}{2}x} dx. \end{aligned}$$

Considérons $\boldsymbol{v_n(x) = \beta_n e^{-\frac{1}{2nx}} - \beta}$.
$\boldsymbol{v_n}$ est une fonction croissante sur $\boldsymbol{(0, +\infty)}$ avec $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} v_n(x) = -\beta < 0}$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} v_n(x) &= \beta_n - \beta \\ &= \frac{(an)^{p/2}}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} - \frac{(a/2)^p}{\Gamma(p)} \\ &= \frac{1}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)\Gamma(p)}\left[(an)^{p/2}\Gamma(p) - (a/2)^p \times 2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)\Gamma(p)}\left[(an)^{p/2}\Gamma(p) - (a/2)^p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{n}}\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx\right]. \end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{0 < e^{-1/2x} < 1}$ pour tout $\boldsymbol{x > 0}$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} v_n(x) &\geq \frac{1}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)\Gamma(p)}\left[(an)^{p/2}\Gamma(p) - (a/2)^p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{n}}x} dx\right] \\ &= \frac{1}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)\Gamma(p)}\left[(an)^{p/2}\Gamma(p) - (a/2)^p \int_0^{+\infty} \left(2\sqrt{\frac{n}{a}}t\right)^{p-1} e^{-t}\left(2\sqrt{\frac{n}{a}}dt\right)\right] \\ &= \frac{1}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)\Gamma(p)}\left[(an)^{p/2}\Gamma(p) - (a/2)^p \left(2\sqrt{\frac{n}{a}}\right)^p \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt\right] \\ &= \frac{1}{2K_p\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)\Gamma(p)}\left((an)^{p/2}\Gamma(p) - (an)^{p/2}\Gamma(p)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $\boldsymbol{v_n}$ admet une unique racine $\boldsymbol{\lambda_n = \frac{-1}{2n \ln\left(\frac{\beta}{\beta_n}\right)}}$. On a :

$$
\begin{aligned}
d_{VT}(W_n, \Lambda) &= \frac{1}{2}\int_0^{\lambda_n} \gamma(x) - g_n(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\lambda_n}^{+\infty} g_n(x) - \gamma(x)dx \\
&= \int_0^{\lambda_n} \gamma(x) - g_n(x)dx \\
&\leq \int_0^{\lambda_n} \gamma(x)dx \\
&= \beta\int_0^{\lambda_n} x^{p-1}e^{-\frac{1}{2}ax}dx \\
&\leq \beta\int_0^{\lambda_n} x^{p-1}dx \\
&= \frac{\beta}{p}\lambda_n^p.
\end{aligned}
$$

□

D'après l'égalité (2.1.10), la preuve du théorème 2.2.2 consiste à majorer de manière adéquate

$$
\left|\mathbb{E}\left[W_n f_h''(W_n) + (p - \frac{a}{2}W_n)f_h'(W_n)\right]\right|.
$$

Pour cela nous établissons ci-dessous quelques lemmes.
Pour rendre les preuves plus lisibles, dans toute la suite de ce chapitre, nous notons f la solution f_h de l'équation de Stein (2.1.4). En outre rappelons que si X suit la loi $GIG(p, a, b)$ alors

$$
\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{b}{a}} \times \frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}; \qquad \mathbb{E}(X^2) = \frac{b}{a} \times \frac{K_{p+2}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}; \tag{2.2.12}
$$

Lemme 2.2.2. *X_n et W_n satisfont*

$$
\left|\mathbb{E}\left[X_n f''(W_n) - \frac{a}{2}X_n f'(W_n)\right]\right| \leq \left[\frac{a}{2}||f'|| + ||f''||\right]\frac{1}{\sqrt{an}}\frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}. \tag{2.2.13}
$$

Preuve

Par l'inégalité triangulaire,

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[X_n f''(W_n) - \frac{a}{2}X_n f'(W_n)\right]\right| &\leq \left|\mathbb{E}\left[X_n f''(W_n)\right]\right| + \left|\frac{a}{2}\mathbb{E}X_n f'(W_n)\right| \\
&\leq \left(||f''|| + \frac{a}{2}||f'||\right)\mathbb{E}(X_n) \\
&= \left(||f''|| + \frac{a}{2}||f'||\right)\frac{1}{\sqrt{an}}\frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}.
\end{aligned}
$$

□

Lemme 2.2.3. *Y et W_n vérifient :*

$$
\left|\mathbb{E}\left[\left(p - \frac{a}{2}Y\right)(W_n - Y)f''(Y)\right]\right| \leq 2p||f''||\frac{1}{\sqrt{an}}\frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \tag{2.2.14}
$$

$$\left|\mathbb{E}\left[Y(W_n-Y)f^{(3)}(Y)\right]\right| \leq \frac{2p}{a}||f^{(3)}||\frac{1}{\sqrt{an}}\frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \tag{2.2.15}$$

$$\left|\mathbb{E}\left[\left(p-\frac{a}{2}Y\right)\int_Y^{W_n}(W_n-t)f^{(3)}(t)dt\right]\right| \leq 2p||f^{(3)}||\frac{1}{an}\frac{K_{-p+2}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)} \tag{2.2.16}$$

$$\left|\mathbb{E}\left[Y\int_Y^{W_n}(W_n-t)f^{(4)}(t)dt\right]\right| \leq \frac{2p}{a}||f^{(4)}||\frac{1}{a^2n}\frac{K_{-p+2}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}. \tag{2.2.17}$$

Preuve

On utilise l'inégalité triangulaire et le fait que les variables X_n et Y sont indépendantes. On a :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\left(p-\frac{a}{2}Y\right)(W_n-Y)f''(Y)\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\left(p-\frac{a}{2}Y\right)X_nf''(Y)\right]\right| \\ &\leq p\left|\mathbb{E}\left[X_nf''(Y)\right]\right| + \frac{a}{2}\left|\mathbb{E}\left[YX_nf''(Y)\right]\right| \\ &\leq \left(p+\frac{a}{2}\mathbb{E}(Y)\right)\mathbb{E}(X_n)||f''|| \\ &= \left(p+\frac{a}{2}\times\frac{2p}{a}\right)||f''||\times\frac{1}{\sqrt{an}}\frac{K_{-p+1}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)},\end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité (2.2.14).
En remarquant que

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y(W_n-Y)f^{(3)}(Y)\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[YX_nf^{(3)}\right]\right| \\ &\leq ||f^{(3)}||\mathbb{E}(YX_n) \\ &= ||f^{(3)}||\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X_n),\end{aligned}$$

on obtient l'inégalité (2.2.15).

Pour l'inégalité (2.2.16), on a :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[\left(p-\frac{a}{2}Y\right)\int_Y^{W_n}(W_n-t)f^{(3)}(t)dt\right]\right| &\leq ||f^{(3)}||\mathbb{E}\left[\left|\left(p-\frac{a}{2}Y\right)\int_Y^{W_n}(W_n-Y)dt\right|\right] \\ &= ||f^{(3)}||\mathbb{E}\left[\left|\left(p-\frac{a}{2}Y\right)(W_n-Y)^2\right|\right] \\ &= ||f^{(3)}||\mathbb{E}\left[\left|\left(p-\frac{a}{2}Y\right)X_n^2\right|\right] \\ &\leq ||f^{(3)}||\left(p+\frac{a}{2}\mathbb{E}(Y)\right)\mathbb{E}X_n^2 \\ &= 2p||f^{(3)}||\times\frac{1}{an}\frac{K_{-p+2}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}{K_{-p}\left(\sqrt{\frac{a}{n}}\right)}.\end{aligned}$$

L'inégalité (2.2.17) s'obtient par le fait que

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y\int_Y^{W_n}(W_n-t)f^{(4)}(t)dt\right]\right| &\leq ||f^{(4)}||\mathbb{E}\left[\left|Y(W_n-Y)^2\right|\right] \\ &= ||f^{(4)}||\mathbb{E}Y\mathbb{E}X_n^2.\end{aligned}$$

□

Prouvons à présent le théorème 2.2.2.

Preuve[théorème 2.2.2]
On a :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left[W_n f''(W_n) + \left(p - \frac{a}{2}W_n\right) f'(W_n)\right]\right| \\
&\qquad = \left|\mathbb{E}\left[(X_n + Y) f''(W_n) + \left(p - \frac{a}{2}(X_n + Y)\right) f'(W_n)\right]\right| \\
&\qquad = \left|\mathbb{E}\left[X_n f''(W_n) - \frac{a}{2}X_n f'(W_n) + Y f''(W_n) + \left(p - \frac{a}{2}Y\right) f'(W_n)\right]\right| \\
&\qquad \leq \left|\mathbb{E}\left[X_n f''(W_n) - \frac{a}{2}X_n f'(W_n)\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[Y f''(W_n) + \left(p - \frac{a}{2}Y\right) f'(W_n)\right]\right|.
\end{aligned}$$

Un majorant du premier terme de l'inégalité précédente est donné par le lemme 2.2.2 en fonction de $||f'||$ et $||f''||$. Par le développement de Taylor de $f''(W_n)$ et $f'(W_n)$ au voisinage de Y, on a :

$$Y f''(W_n) = Y f''(Y) + Y(W_n - Y) f^{(3)}(Y) + Y \int_Y^{W_n} (W_n - t) f^{(4)}(t) dt$$

et

$$\begin{aligned}
\left(p - \tfrac{a}{2}Y\right) f'(W_n) &= \left(p - \tfrac{a}{2}Y\right) f'(Y) + \left(p - \tfrac{a}{2}Y\right)(W_n - Y) f''(Y) \\
&\quad + \left(p - \frac{a}{2}Y\right) \int_Y^{W_n} (W_n - t) f^{(3)}(t) dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\mathbb{E}\left[Y f''(W_n) + \left(p - \frac{a}{2}Y\right) f'(W_n)\right]\right| \leq I + II + III + IV + V \tag{2.2.18}$$

avec

$$\begin{aligned}
I &= \left|\mathbb{E}\left[Y f''(Y) + \left(p - \frac{a}{2}Y\right) f'(Y)\right]\right| \\
II &= \left|\mathbb{E}\left[Y(W_n - Y) f^{(3)}(Y)\right]\right| \\
III &= \left|\mathbb{E}\left[\left(p - \frac{a}{2}Y\right)(W_n - Y) f''(Y)\right]\right| \\
IV &= \left|\mathbb{E}\left[Y \int_Y^{W_n} (W_n - t) f^{(4)}(t) dt\right]\right| \\
V &= \left|\mathbb{E}\left[\left(p - \frac{a}{2}Y\right) \int_Y^{W_n} (W_n - t) f^{(3)}(t) dt\right]\right|.
\end{aligned}$$

De la caractérisation de Stein pour la loi $\gamma(p, a/2)$, on déduit de l'équation (2.1.4) que $I = 0$. On obtient un majorant de II, III, IV et V par le lemme 2.2.3 en fonction de $||f'||$, $||f''||$, $\left|\left|f^{(3)}\right|\right|$ et $\left|\left|f^{(4)}\right|\right|$. L'inégalité (2.1.6) donne

$$||f'|| \leq \frac{2}{a}||h'|| \tag{2.2.19}$$

et l'inégalité (2.1.9) donne

$$\begin{aligned}
||f''|| &\leq \frac{2}{1+p}\left(3||h'|| + a||h||\right) \\
\left|\left|f^{(3)}\right|\right| &\leq \frac{2}{2+p}\left(3||h''|| + a||h'||\right) \\
\left|\left|f^{(4)}\right|\right| &\leq \frac{2}{3+p}\left(3||h^{(3)}|| + a||h''||\right).
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Le théorème 2.2.2 s'obtient en substituant $||f'||$, $||f''||$, $\left|\left|f^{(3)}\right|\right|$ et $\left|\left|f^{(4)}\right|\right|$ par leurs majorants respectifs.

□

2.3 Résultats sur la convergence de la loi de Kummer vers la loi gamma

Cette section présente un aperçu très bref sur les propriétés de la loi de Kummer ainsi qu'une de nos contributions à l'étude des propriétés de cette loi. La contribution apportée est une estimation de la vitesse de convergence de la loi de Kummer vers la loi gamma.

2.3.1 Définition et propriétés

Définition 5. *La loi de Kummer de type* **2** *(que nous appelons simplement la loi de Kummer)* $(\boldsymbol{K(a,b,c)})$ *de paramètres* $\boldsymbol{a>0}$, $\boldsymbol{b\in\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{c>0}$, *a pour fonction densité*

$$k_{a,b,c}(x)=\frac{1}{\Gamma(a)\psi(a,1-b;c)}x^{a-1}(1+x)^{-a-b}e^{-cx},\ (x>0) \tag{2.3.1}$$

où ψ *est la fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce, définie par*

$$\psi(a,b;c)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}e^{-ct}dt. \tag{2.3.2}$$

Cette loi bien connue en contexte bayésien [1] possède quelques propriétés similaires à la loi $\boldsymbol{GIG}$, entre autres la propriété d'indépendance de type Matsumoto-Yor. Pour plus de détails sur les propriétés de la loi de Kummer voir par exemple [43, 42, 31]. La propriété de convolution suivante est indispensable dans l'estimation de la vitesse de convergence de la loi de Kummer vers la loi gamma.

Proposition 2.3.1. *Si* $\boldsymbol{Z}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *sont deux variables aléatoires indépendantes telles que* $\boldsymbol{Z}$ *suit la loi* $\boldsymbol{K(a,b,c)}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *suit la loi* $\boldsymbol{\gamma(b,c)}$, *alors* $\boldsymbol{Z+Y}$ *suit la loi* $\boldsymbol{K(b+a,-b,c)}$.

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{tZ}\right)&=\int_0^\infty\frac{1}{\Gamma(a)\psi(a,1-b;c)}x^{a-1}(1+x)^{-a-b}e^{-(c-t)x}dx\\&=\frac{\psi(a,1-b;c-t)}{\psi(a,1-b;c)},\\\mathbb{E}\left(e^{tY}\right)&=\frac{c^b}{(c-t)^b}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{t(Z+Y)}\right)&=\mathbb{E}\left(e^{tZ}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right)\quad\text{(par indépendance de } \boldsymbol{Z} \text{ et } \boldsymbol{Y})\\&=\frac{\psi(a,1-b;c-t)}{\psi(a,1-b;c)}\times\frac{c^b}{(c-t)^b}\\&=\frac{c^{-b}\psi(a,1-b;c-t)}{(c-t)^{-b}\psi(a,1-b;c)}\\&=\frac{\psi(a+b,1+b;c-t)}{\psi(a+b,1+b;c)}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par la relation suivante (voir [22]).

$$\psi(a,b;x)=x^{1-b}\psi(a-b+1,2-b;x). \tag{2.3.3}$$

□

Nous donnons ci-dessous les moments d'ordre 1 et 2 de cette loi qui nous seront utiles dans la démonstration du résultat principal de cette section contenu dans le théorème 2.3.1. Si $\boldsymbol{X}$ suit la loi $\boldsymbol{K(a,b,c)}$, alors

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{\psi(a+1,2-b;c)}}{\boldsymbol{\psi(a,1-b;c)}}; \qquad \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X^2}\right) = \boldsymbol{a(a+1)}\frac{\boldsymbol{\psi(a+2,3-b;c)}}{\boldsymbol{\psi(a,1-b;c)}}. \tag{2.3.4}$$

2.3.2 Vitesse de convergence de la loi Kummer vers la loi gamma

Le résultat suivant donne une estimation de la vitesse de convergence de la loi de Kummer vers la loi gamma.

Théorème 2.3.1 (théorème 3.2 Konzou *et al. [38]*). *Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n \geq 1}$, soit $\boldsymbol{Z_n}$ et $\boldsymbol{Y_n}$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\boldsymbol{Z_n \sim K(\frac{1}{n}, a-\frac{1}{n}, c)}$ et $\boldsymbol{Y_n \sim \gamma(a-\frac{1}{n}, c)}$ avec $\boldsymbol{a>0}$, $\boldsymbol{c>0}$. Soit $\boldsymbol{V_n = Z_n + Y_n}$. Alors*

1. $\boldsymbol{V_n \sim K\left(a, -a+\frac{1}{n}, c\right)}$.
2. *Lorsque $\boldsymbol{n \to \infty}$, la suite de variables aléatoires $\boldsymbol{(V_n)_{n\geq 1}}$ converge en loi vers une variable aléatoire $\boldsymbol{\Lambda}$ de loi $\boldsymbol{\gamma(a,c)}$.*
3. *Pour tout $\boldsymbol{h \in C_b^3}$,*

$$|\mathbb{E}h(V_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)| \leq \frac{1}{cn}||h'|| + \frac{F}{c} \times \frac{1}{n}\frac{\psi(a, a-\frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1+a-\frac{1}{n}; c)}$$

$$+ \frac{H}{c^2} \times \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\psi(a, -1+a-\frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1+a-\frac{1}{n}; c)}$$

où

$$F = \left(4c + \frac{4c}{1+c}\left|a-\frac{1}{n}\right|\right)||h|| + \left(7 + \left(\frac{6}{1+a} + \frac{4}{2+a}\right)\left|a-\frac{1}{n}\right|\right)||h'||$$

$$+ \frac{6}{c(2+a)}\left|a-\frac{1}{n}\right|||h''||$$

et

$$H = \frac{4c}{2+a}\left(a + \left|a-\frac{1}{n}\right|\right)||h'|| + \frac{6}{c(3+a)}\left|a-\frac{1}{n}\right|\left|\left|h^{(3)}\right|\right|$$

$$+ \left(\frac{6a}{2+a} + \left(\frac{6}{2+a} + \frac{4}{3+a}\right)\left|a-\frac{1}{n}\right|\right)||h''||.$$

Remarque 6. Puisque ψ est une fonction continue,

$$\frac{\psi(a, a-\frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1+a-\frac{1}{n}; c)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\psi(a,a;c)}{\psi(a,1+a;c)} < \infty;$$

$$\frac{\psi(a, -1+a-\frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1+a-\frac{1}{n}; c)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\psi(a,-1+a;c)}{\psi(a,1+a;c)} < \infty.$$

Ainsi la vitesse de convergence en loi de la suite $\boldsymbol{(V_n)_{n\geq 1}}$ vers $\boldsymbol{\Lambda}$ fournie dans le théorème 2.3.1 est de l'ordre de $\boldsymbol{n^{-1}}$.

Tout comme dans le cas de la loi GIG, pour prouver le dernier point du théorème 2.3.1 on va majorer $|\mathbb{E}\left[V_n f''(V_n) + (a - cV_n)\, f'(V_n)\right]|$ avec f solution de l'équation de Stein (2.1.4). Pour cela, commençons par établir les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. *V_n et Z_n satisfont*

$$\left|\mathbb{E}\left[Z_n f''(V_n) - cZ_n f'(V_n)\right]\right| \leq \left[c||f'|| + ||f''||\right] \frac{1}{cn} \frac{\psi(a, a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)}. \tag{2.3.5}$$

Preuve

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\mathbb{E}\left[Z_n f''(V_n) - cZ_n f'(V_n)\right]\right| \leq \left(c||f'|| + ||f''||\right) \mathbb{E}Z_n$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_n &= \frac{1}{n} \frac{\psi\left(1 + \frac{1}{n}, 2 - a + \frac{1}{n}; c\right)}{\psi\left(\frac{1}{n}, 1 - a + \frac{1}{n}; c\right)} \\ &= \frac{1}{cn} \frac{\psi(a, a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)}.\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en utilisant la relation (2.3.3).

□

Lemme 2.3.2. *V_n et Y_n vérifient*

$$\left|\mathbb{E}\left[Y_n f''(Y_n) + (a - cY_n) f'(Y_n)\right]\right| \leq \frac{||f'||}{n} \tag{2.3.6}$$

$$\left|\mathbb{E}\left[(a - cY_n)(V_n - Y_n) f''(Y_n)\right]\right| \leq \left(a + \left|a - \frac{1}{n}\right|\right) ||f''|| \frac{1}{cn} \frac{\psi(a, a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)} \tag{2.3.7}$$

$$\left|\mathbb{E}\left[Y_n (V_n - Y_n) f^{(3)}(Y_n)\right]\right| \leq \frac{1}{c} \left|a - \frac{1}{n}\right| ||f^{(3)}|| \frac{1}{cn} \frac{\psi(a, a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)} \tag{2.3.8}$$

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[(a - cY_n) \int_{Y_n}^{V_n} (V_n - t) f^{(3)}(t) dt\right]\right| \leq \left(a + \left|a - \frac{1}{n}\right|\right) ||f^{(3)}|| \frac{1}{c^2 n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \times \frac{\psi(a, -1 + a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)}\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y_n \int_{Y_n}^{V_n} (V_n - t) f^{(4)}(t) dt\right]\right| \leq \frac{1}{c} \left|a - \frac{1}{n}\right| ||f^{(4)}|| \frac{1}{c^2 n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times \\ \frac{\psi(a, -1 + a - \frac{1}{n}; c)}{\psi(a, 1 + a - \frac{1}{n}; c)}.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Preuve

Pour l'inégalité (2.3.6), on a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y_n f''(Y_n) + (a - cY_n) f'(Y_n)\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[Y_n f''(Y_n) + (a - \frac{1}{n} - cY_n) f'(Y_n) + \frac{1}{n} f'(Y_n)\right]\right| \\ &\leq \left|\mathbb{E}\left[Y_n f''(Y_n) + (a - \frac{1}{n} - cY_n) f'(Y_n)\right]\right| + \\ &\frac{1}{n} \left|\mathbb{E}\left[f'(Y_n)\right]\right| \\ &\leq \frac{||f'||}{n}.\end{aligned}$$

Puisque Y_n suit la loi $\gamma(a-\frac{1}{n},c)$, la caractérisation à la Stein de la loi $\gamma(a-\frac{1}{n},c)$ permet d'avoir

$$\mathbb{E}\left[Y_n f''(Y_n)+(a-\frac{1}{n}-cY_n)f'(Y_n)\right]=0.$$

D'où l'inégalité (2.3.6).
L'inégalité (2.3.7), s'obtient comme suit

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[(a-cY_n)(V_n-Y_n)f''(Y_n)\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[(a-cY_n)(Z_n)f''(Y_n)\right]\right| \\ &\leq ||f''||\,(a+c|\mathbb{E}(Y_n)|)\,\mathbb{E}(Z_n) \\ &= \left(a+\left|a-\frac{1}{n}\right|\right)||f''||\frac{1}{cn}\frac{\psi(a,a-\frac{1}{n};c)}{\psi(a,1+a-\frac{1}{n};c)}.\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité (2.3.8) par

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y_n(V_n-Y_n)f^{(3)}(Y_n)\right]\right| &= \left|\mathbb{E}\left[Y_n(Z_n)f^{(3)}(Y_n)\right]\right| \\ &\leq ||f^{(3)}|||\mathbb{E}Y_n\mathbb{E}Z_n| \quad (\text{ Par indépendance de } Y_n \text{ et } Z_n) \\ &= \frac{1}{c}\left|a-\frac{1}{n}\right|||f^{(3)}||\frac{1}{cn}\frac{\psi(a,a-\frac{1}{n};c)}{\psi(a,1+a-\frac{1}{n};c)}.\end{aligned}$$

Pour l'inégalité (2.3.9), on a :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[(a-cY_n)\int_{Y_n}^{V_n}(V_n-t)f^{(3)}(t)dt\right]\right| &\leq (a+c|\mathbb{E}Y_n|)||f^{(3)}||\mathbb{E}\left(\int_{Y_n}^{V_n}|V_n-Y_n|dt\right) \\ &= (a+c|\mathbb{E}Y_n|)||f^{(3)}||\mathbb{E}(Z_n^2) \\ &= \left(a+\left|a-\frac{1}{n}\right|\right)||f^{(3)}||\frac{1}{c^2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\times \\ &\frac{\psi(a,-1+a-\frac{1}{n};c)}{\psi(a,1+a-\frac{1}{n};c)},\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n^2) &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\psi\left(2+\frac{1}{n},3-a+\frac{1}{n};c\right)}{\psi\left(\frac{1}{n},1-a+\frac{1}{n};c\right)} \\ &= \frac{1}{c^2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\psi(a,-1+a-\frac{1}{n};c)}{\psi(a,1+a-\frac{1}{n};c)}.\end{aligned}$$

La dernière inégalité du lemme 2.3.2 est donnée par

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y_n\int_{Y_n}^{V_n}(V_n-t)f^{(4)}(t)dt\right]\right| &\leq ||f^{(4)}|||\mathbb{E}Y_n|\mathbb{E}Z_n^2 \\ &= \frac{1}{c}\left|a-\frac{1}{n}\right|||f^{(4)}||\frac{1}{c^2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\times \\ &\frac{\psi(a,-1+a-\frac{1}{n};c)}{\psi(a,1+a-\frac{1}{n};c)}.\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant établir plus aisément la preuve du théorème 2.3.1.

Preuve[théorème 2.3.1]

Le première assertion est une conséquence directe de la propriété de convolution établie dans la proposition 2.3.1. Pour la seconde assertion, on a :

Pour tout $x > 0$, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le fait que ψ est continue, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(V_n < x\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(a)\psi\left(a, 1+a-\frac{1}{n}; c\right)} \int_0^x t^{a-1}(1+t)^{-1/n} e^{-ct} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\psi\left(a, 1+a; c\right)} \int_0^x t^{a-1} e^{-ct} dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\psi\left(a, 1+a; c\right) &= \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ct} dt \\ &= \frac{\Gamma(a)}{c^a} \int_0^\infty \frac{c^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-ct} dt \\ &= \frac{\Gamma(a)}{c^a}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(V_n < x\right) = \int_0^x \frac{c^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-ct} dt.$$

Le membre de droite de la dernière égalité est bien la fonction de répartition de la loi gamma $\gamma\left(a, c\right)$. Ce qui prouve l'assertion 2.

Pour la troisième assertion, nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}h(V_n) - \mathbb{E}h(\Lambda)\right| &= \left|\mathbb{E}\left[V_n f''(V_n) + (a - cV_n) f'(V_n)\right]\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[(Z_n + Y_n) f''(V_n) + (a - c(Z_n + Y_n)) f'(V_n)\right]\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left[Z_n f''(V_n) - cZ_n f'(V_n) + Y_n f''(V_n) + (a - cY_n) f'(V_n)\right]\right| \\ &\leq \left|\mathbb{E}\left[Z_n f''(V_n) - cZ_n f'(V_n)\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[Y_n f''(V_n) + (a - cY_n) f'(V_n)\right]\right|.\end{aligned}$$

Le lemme 2.3.1 donne un majorant de $|\mathbb{E}\left[Z_n f''(V_n) - cZ_n f'(V_n)\right]|$ en fonction de $||f'||$ et $||f''||$. Le développement de Taylor de $f''(V_n)$ et $f'(V_n)$ au voisinage de Y_n donne

$$Y_n f''(V_n) = Y_n f''(Y_n) + Y_n(V_n - Y_n) f^{(3)}(Y_n) + Y_n \int_{Y_n}^{V_n} (V_n - t) f^{(4)}(t) dt$$

et

$$\begin{aligned}(a - cY_n) f'(V_n) = (a - cY_n) f'(Y_n) + (a - cY_n)(V_n - Y_n) f''(Y_n) \\ + (a - cY_n) \int_{Y_n}^{V_n} (V_n - t) f^{(3)}(t) dt.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[Y_n f''(V_n) + (a - cY_n) f'(V_n)\right]\right| \leq \left|\mathbb{E}\left[Y_n f''(Y_n) + (a - cY_n) f'(Y_n)\right]\right| + \\ \left|\mathbb{E}\left[Y_n(V_n - Y_n) f^{(3)}(Y_n)\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[(a - cY_n)(V_n - Y_n) f''(Y_n)\right]\right| + \\ \left|\mathbb{E}\left[Y_n \int_{Y_n}^{V_n} (V_n - t) f^{(4)}(t) dt\right]\right| + \left|\mathbb{E}\left[(a - cY_n) \int_{Y_n}^{V_n} (V_n - t) f^{(3)}(t) dt\right]\right|. \quad (2.3.11)\end{aligned}$$

Le lemme 2.3.2 donne un majorant de chacun des termes de droite de l'inégalité (2.3.11) en fonction de $||f'||$, $||f''||$, $||f^{(3)}||$ et $||f^{(4)}||$.
L'inégalité (2.1.6) donne

$$||f'|| \leq \frac{1}{c}||h'||. \tag{2.3.12}$$

De l'inégalité (2.1.9), on a

$$\begin{aligned} ||f''|| &\leq \frac{2}{1+a}\left(3||h'|| + 2c||h||\right) \\ ||f^{(3)}|| &\leq \frac{2}{2+a}\left(3||h''|| + 2c||h'||\right) \\ ||f^{(4)}|| &\leq \frac{2}{3+a}\left(3||h^{(3)}|| + 2c||h''||\right). \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Le reste de la démonstration est constitué de substitutions. □

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons contribué à fournir une estimation de la vitesse de convergence de la loi gaussienne inverse généralisée (reps. de Kummer) vers la loi gamma par la méthode de Stein. Les principaux résultats obtenus (théorème 2.2.2 et théorème 2.3.1) peuvent être consultés dans l'article [38].

Chapitre 3

Méthode de Stein pour les lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer

Dans ce chapitre, les lois gaussiennes inverses généralisées ($\boldsymbol{GIG}$) et de Kummer sont considérées dans le contexte de la méthode de Stein. Nous établissons les outils mathématiques nécessaires pour l'application de la méthode de Stein dans le cas où la loi cible est l'une de ces deux lois. Il s'agit précisément de donner les opérateurs de Stein de ces deux lois, les solutions des équations différentielles correspondantes, et établir des bornes de ces solutions et de leurs dérivées successives.

La littérature concernant la méthode de Stein pour les lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer est récente et pauvre. Elle caractérise les variables aléatoires suivant ces deux lois à la Stein [40, 26], mais ne fournit pas les outils mathématiques nécessaires à l'approximation de la loi de probabilité d'une variable aléatoire par l'une de ces deux lois par la méthode de Stein. En effet, il est nécessaire de borner explicitement la solution de l'équation différentielle de Stein de ces deux lois ainsi que, éventuellement, ses dérivées successives si elles sont considérées comme lois cibles dans l'approximation par la méthode de Stein, or ces questions n'ont pas été traitées dans la littérature. Les travaux remarquables de Gaunt [26] sur les lois hyperboliques généralisées dont les lois $\boldsymbol{GIG}$ sont un cas limite dans le contexte de la méthode de Stein et celles de Döbler [18] sur la loi bêta constituent l'origine des techniques que nous avions développées pour borner la solution de l'équation de Stein des lois $\boldsymbol{GIG}$ et de Kummer. La remarque très utile de Gaunt [26], selon laquelle la loi gaussienne inverse généralisée est contenue dans la famille des lois de probabilité dont la densité $\boldsymbol{g}$ vérifie l'équation différentielle

$$(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))' = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{3.0.1}$$

avec $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{\tau}$ des fonctions polynômiales, lui a permis de résoudre l'équation de Stein pour la loi $\boldsymbol{GIG}$ et de donner une première majoration de la norme de la solution obtenue en appliquant un résultat général établi par Schoutens [61] pour $\boldsymbol{\tau}$ une fonction linéaire et décroissante. Or pour la loi $\boldsymbol{GIG}$, $\boldsymbol{\tau}$ est non linéaire et non nécessairement décroissante. Cette borne n'est donc pas valable et nous l'avons rectifiée.

Nous obtenons dans la section 1 une extension du résultat de Schoutens pour les lois de probabilités dont la densité vérifie l'équation (3.0.1) avec des conditions plus faibles sur $\boldsymbol{\tau}$. Nous utilisons l'opérateur de Stein donné dans [61] et développé dans [47]. Nous appliquons le résultat obtenu pour borner la solution de l'équation de Stein des lois de probabilité dont la densité satisfait (3.0.1) pour une classe de fonctions $\boldsymbol{\tau}$ donnée incluant les lois $\boldsymbol{GIG}$ et de Kummer.

Döbler [18], dans l'étude de la méthode de Stein pour la loi bêta a aussi établi des bornes de la solution de l'équation de Stein pour les lois de probabilité dont la densité $\boldsymbol{g}$ vérifie (3.0.1). Dans la section 2, nous développons les travaux de Döbler dans le cas où $\boldsymbol{\tau}$ est un polynôme convexe de second degré (ce qui est le cas pour les lois $\boldsymbol{GIG}$ et de Kummer). Ce qui permet d'obtenir une nouvelle borne de la solution de l'équation de Stein des lois de probabilité dont la densité satisfait (3.0.1). Cette borne se révèle optimale pour les fonctions tests lipschitziennes.

Nous appliquons les résultats des sections 1 et 2 aux lois $\boldsymbol{GIG}$ et de Kummer pour fournir un majorant explicite de la norme de la solution de l'équation de Stein de ces deux lois. Nous établissons ensuite une borne explicite des trois premières dérivées de la solution de l'équation de Stein des lois $\boldsymbol{GIG}$ et de Kummer. Enfin, par un

calcul itératif, nous déterminons une borne de la dérivée d'ordre k, $k \geq 4$ de ces solutions, qui dépend de celle des dérivées inférieures. Les sections 3 et 4 exposent ces résultats pour les lois GIG et de Kummer respectivement.

3.1 Extension des travaux de Schoutens sur la borne de la solution de l'équation de Stein

Le théorème 1 dans [61] établit une caractérisation de Stein pour les lois de probabilité dont la densité vérifie l'équation (3.0.1) où s et τ sont des fonctions polynômiales, et démontre que l'opérateur de Stein dans ce cas est $f \mapsto sf' + \tau f$. Nous avions réalisé (voir le théorème suivant) que cet opérateur peut être obtenu en utilisant l'approche par densité donnée dans [47] et [61]. Le support de la densité peut être tout intervalle de $\mathbb{R}$, mais nous le restreignons à $(0, +\infty)$ en rapport avec le support des densités des lois cibles : la loi GIG et la loi de Kummer.

Théorème 3.1.1. *Considérons une densité de probabilité g sur $(0, \infty)$ satisfaisant (3.0.1) pour des fonctions polynômiales s et τ. Alors g est la densité de probabilité d'une variable aléatoire positive X si et seulement si pour toute fonction différentiable f telle que $\lim_{x\to 0} s(x)g(x)f(x) = \lim_{x\to\infty} s(x)g(x)f(x) = 0$, on a*

$$\mathbb{E}\left[s(X)f'(X) + \tau(X)f(X)\right] = 0. \tag{3.1.1}$$

Nous utilisons la définition suivante (définition **2.1** dans [47]) dans la preuve du théorème 3.1.1.

Définition 6. *Soit g une densité de probabilité vérifiant (3.0.1) et f une fonction réelle d'une variable réelle positive telle que gf soit dérivable et telle que $\lim_{x\to 0} g(x)f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x)f(x) = 0$. Alors l'opérateur de Stein correspondant à g est*

$$f \mapsto T_g f = \frac{1}{g}(fg)'.$$

Preuve[du théorème (3.1.1)]

En faisant $f := sf$ dans la définition précédente, on a

$$\begin{aligned} T_g(sf)(x) &= \frac{1}{g(x)}(sfg)'(x) \\ &= \frac{1}{g(x)}(f'(x)s(x)g(x) + f(x)(sg)'(x)) \end{aligned}$$

qui, par (3.0.1) donne

$$\begin{aligned} T_g(sf)(x) &= \frac{1}{g(x)}(f'(x)s(x)g(x) + f(x)\tau(x)g(x)) \\ &= f'(x)s(x) + f(x)\tau(x). \end{aligned}$$

□

Le théorème 3.1.1 montre que l'équation de Stein correspondant à toute densité de probabilité g vérifiant (3.0.1) est de la forme

$$s(x)f'(x) + \tau(x)f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W) \tag{3.1.2}$$

avec W une variable aléatoire de densité g et h une fonction absolument continue et bornée.
Schoutens [61] a déterminé la solution de l'équation de Stein (3.1.2). Il a aussi borné la solution obtenue sous l'hypothèse que τ est linéaire et décroissante. La classe des lois de probabilités vérifiant cette hypothèse est connue dans la littérature sous le nom de "famille de lois de Pearson et Ord" dans [61].

Le résultat suivant donnant la solution de l'équation de Stein (3.1.2) sur $(0, +\infty)$ vient de Schoutens [61].

Proposition 3.1.1. *Soit $g > 0$ une densité de probabilité définie sur $(0, +\infty)$ et satisfaisant la relation (3.0.1), pour des fonctions polynômiales s et τ. Alors une solution f_h de l'équation de Stein (3.1.2) est donnée par*

$$\begin{aligned} f_h(x) =& \frac{1}{s(x)g(x)} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt \\ =& \frac{-1}{s(x)g(x)} \int_x^{+\infty} g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Preuve

Il suffit de vérifier que f_h ainsi définie vérifie l'équation (3.1.2). On a

$$\begin{aligned} f_h'(x) &= -\frac{(s(x)g(x))'}{(s(x)g(x))^2} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt + \frac{h(t) - \mathbb{E}h(W)}{s(x)} \\ &= -\frac{\tau(x)g(x)}{(s(x)g(x))^2} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt + \frac{h(t) - \mathbb{E}h(W)}{s(x)} \\ &= -\frac{\tau(x)}{s^2(x)g(x)} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt + \frac{h(t) - \mathbb{E}h(W)}{s(x)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s(x)f'(x) + \tau(x)f(x) &= -\frac{\tau(x)}{s(x)g(x)} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt + h(t) - \mathbb{E}h(W) \\ &\quad + \frac{\tau(x)}{s(x)g(x)} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt \\ &= h(t) - \mathbb{E}h(W). \end{aligned}$$

La seconde expression de f_h est due au fait que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt &= \int_0^{+\infty} h(t)g(t)dt - \mathbb{E}h(W) \int_0^{+\infty} g(t)dt \\ &= \mathbb{E}h(W) - \mathbb{E}h(W) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car W a pour densité g.

□

Nous complétons le résultat précédent par la proposition suivante

Proposition 3.1.2. *Sous les notations et les hypothèses de la proposition 3.1.1,*

1. *les solutions de l'équation de Stein (3.1.2) sont de la forme*

$$\begin{aligned} f_h(x) =& \frac{1}{s(x)g(x)} \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt + \frac{C}{s(x)g(x)} \\ =& \frac{-1}{s(x)g(x)} \int_x^{+\infty} g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt + \frac{C}{s(x)g(x)} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

   où C est une constante.

2. *Supposons $\lim_{x\to 0} s(x)g(x) = 0$. Pour que la solution précédente soit bornée, il est nécessaire que C soit égale à 0.*

Preuve

En multipliant l'équation de Stein (3.1.2) par $g(x)$, on a

$$s(x)g(x)f'(x) + \tau(x)g(x)f(x) = g(x)(h(x) - \mathbb{E}h(W))$$

qui, par la relation (3.0.1) s'écrit

$$s(x)g(x)f'(x) + (sg)'(x)f(x) = g(x)(h(x) - \mathbb{E}h(W)),$$

soit

$$(sgf)'(x) = g(x)(h(x) - \mathbb{E}h(W)).$$

Par conséquent, il existe une constante C telle que

$$s(x)g(x)f(x) = \int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right]dt + C \tag{3.1.5}$$

d'où (3.1.4).
Supposons f bornée. Puisque $\lim_{x\to 0} s(x)g(x) = 0$, en faisant tendre x vers 0 dans (3.1.5), on obtient $C = 0$.
□

La proposition suivante montre que la solution f_h donnée par (3.1.3) est bornée si h est bornée, et f_h est la seule solution bornée de l'équation de Stein correspondant à la densité g.

Proposition 3.1.3 (proposition 2.5.1. Konzou *et al. [35]*). *Soit $g > 0$ une densité de probabilité définie sur $(0, +\infty)$ et satisfaisant la relation (3.0.1) avec s une fonction polynômiale telle que $s > 0$ sur $(0, +\infty)$ et τ une fonction polynomiale décroissante, admettant une seule racine α sur $(0, +\infty)$. Supposons que $\lim_{x\to 0} s(x)g(x) = \lim_{x\to+\infty} s(x)g(x) = 0$. Si h est une fonction continue et bornée, alors*

$$\|f_h\| \leq M\,\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \tag{3.1.6}$$

avec

$$M = \max\left(\frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)}\int_0^\alpha g(t)dt;\ \ \frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)}\int_\alpha^{+\infty} g(t)dt\right),$$

et W une variable aléatoire de densité g. $||f_h|| = \sup_{x>0}|f_h(x)|$.

Remarque 7. Le résultat précédent est une reformulation du lemme 1 dans [61] sans l'hypothèse que τ est linéaire. Sous cette dernière hypothèse, Schoutens [61] a établi le même résultat, mais dans ce cas $\alpha = \mathbb{E}(W)$, ce qui n'est pas le cas sans l'hypothèse de linéarité de τ.

La preuve de la proposition 3.1.3 utilise le lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *Sous les hypothèses de la proposition 3.1.3,*

$$\int_0^x g(t)dt \leq \frac{s(x)g(x)}{\tau(x)} \quad \textit{pour} \quad x < \alpha$$

et

$$\int_x^{+\infty} g(t)dt \leq \frac{-s(x)g(x)}{\tau(x)} \quad \textit{pour} \quad x > \alpha.$$

Preuve

Supposons $x < \alpha$. Puisque τ est positive et décroissante sur $(0, \alpha)$, on a $\frac{\tau(t)}{\tau(x)} \geq 1$ pour tout $t \leq x$. Par conséquent, en utilisant (3.0.1) et le fait que $\lim_{x\to 0} s(x)g(x) = 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^x g(t)dt &\leq \int_0^x g(t)\frac{\tau(t)}{\tau(x)}dt\\ &= \frac{1}{\tau(x)}\int_0^x \tau(t)g(t)dt\\ &= \frac{s(x)g(x)}{\tau(x)}\end{aligned}$$

Pour $x > \alpha$, τ est négative et décroissante sur (α, ∞) donc $\frac{\tau(t)}{\tau(x)} \geq 1$ pour tout $t \geq x$ et

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} g(t)dt \leq & \int_x^{+\infty} g(t)\frac{\tau(t)}{\tau(x)}dt \\ = & \frac{-s(x)g(x)}{\tau(x)}\end{aligned}$$

puisque $\lim_{t\to\infty} s(t)g(t) = 0$.

□

A présent, prouvons la proposition 3.1.3.

Preuve[proposition 3.1.3]

Pour $x < \alpha$,

$$\begin{aligned}|f_h(x)| = & \left|\frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right]dt\right| \\ \leq & \frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)\left|h(t) - \mathbb{E}h(W)\right|dt \\ \leq & \left|\left|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right|\right|\frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)dt.\end{aligned}$$

Soit $l(x) = \frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)dt$.
l est dérivable sur $(0, \infty)$ et

$$\begin{aligned}l'(x) = & \frac{-\left(s(x)g(x)\right)'}{\left(s(x)g(x)\right)^2}\int_0^x g(t)dt + \frac{1}{s(x)} \\ = & \frac{-\tau(x)}{s^2(x)g(x)}\int_0^x g(t)dt + \frac{1}{s(x)}.\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1.1, on conclut que $l'(x) \geq 0$. Donc $l(x) \leq l(\alpha)$.

Pour $x > \alpha$,

$$|f_h(x)| \leq \left|\left|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right|\right|\frac{1}{s(x)g(x)}\int_x^{+\infty} g(t)dt.$$

Considérons $u(x) = \frac{1}{s(x)g(x)}\int_x^{+\infty} g(t)dt$. La fonction u est dérivable sur $(0, \infty)$ et

$$u'(x) = \frac{-\tau(x)}{s^2(x)g(x)}\int_x^{+\infty} g(t)dt - \frac{1}{s(x)}.$$

Le lemme 3.1.1 permet de conclure que $u'(x) \leq 0$. D'où $u(x) \leq u(\alpha)$.

□

Nous établissons le résultat suivant qui donne une extension de la proposition 3.1.3 à une classe de fonctions polynômes τ incluant les lois GIG et Kummer.

Proposition 3.1.4 (proposition 2.5.2 Konzou *et al. [35]*). *Soit $g > 0$ une densité de probabilité définie sur $(0, \infty)$ et vérifiant $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$ pour des fonctions polynômes s et τ avec $s > 0$ sur $(0, \infty)$. Supposons que $\lim_{t\to 0} s(t)g(t) = \lim_{t\to\infty} s(t)g(t) = 0$. Supposons en outre que $\tau(0) > 0$ et qu'il existe $\beta > 0$ tel que τ est croissante sur $(0, \beta]$, décroissante sur $[\beta, \infty)$ et admet une et une seule racine α sur $[\beta, \infty)$. Si h une fonction continue et bornée, alors*

$$\left|\left|f_h\right|\right| \leq M_0\left|\left|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right|\right|, \tag{3.1.7}$$

avec

$$M_0 = \max\left(\frac{1}{\tau(0)};\ \frac{1}{s(\beta)g(\beta)}\right).$$

Preuve

Comme τ est croissante et positive sur $(0,\beta]$, on a $\dfrac{\tau(t)}{\tau(0)} \geq 1$ pour $0 \leq t \leq \beta$. Par conséquent, pour $x \leq \beta$,

$$\begin{aligned}
|f_h(x)| &= \left|\frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)\left[h(t)-\mathbb{E}h(W)\right]dt\right| \\
&\leq \frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)\left|h(t)-\mathbb{E}h(W)\right|dt \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)dt \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x \frac{\tau(t)}{\tau(0)}g(t)dt \\
&= \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{\tau(0)s(x)g(x)}\int_0^x (s(t)g(t))'\,dt \\
&= \frac{1}{\tau(0)}\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|.
\end{aligned}$$

Pour $\beta \leq x \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned}
|f_h(x)| &\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(x)g(x)}\int_0^x g(t)dt \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(x)g(x)} \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(\beta)g(\beta)}
\end{aligned}$$

car $x \mapsto s(x)g(x)$ est croissante sur $[\beta,\alpha]$ $\left((s(t)g(t))' = \tau(x)g(x) > 0 \text{ sur } [\beta,\alpha]\right)$.
Pour $x > \alpha$, en utilisant un raisonnement similaire à celui dans la preuve de la proposition 3.1.3, on a

$$\begin{aligned}
|f_h(x)| &\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)}\int_x^{+\infty} g(t)dt \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)} \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1}{s(\beta)g(\beta)},
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

□

Remarque 8. Un résultat similaire à la proposition 3.1.4 obtenu dans [62] (lemme 4.2), sous des hypothèses assez fortes sur la densité ([62], hypothèses (B1),(B2), (B3), (B4)), n'incluant pas les lois ***GIG*** et de Kummer a permis de borner la solution f_h de l'équation (3.1.2) et sa dérivée, mais notre résultat (proposition 3.1.4) donne une meilleure majoration de $\|f_h\|$ sous des hypothèses plus faibles.

3.2 Borne de Döbler de la solution f_h de l'équation de Stein

3.2.1 Résultats de Döbler

Döbler dans [18] a établi des bornes de la solution (3.1.3) de l'équation de Stein (3.1.2) dans un contexte assez général. Les résultats de Döbler reposent sur la condition suivante vérifiée par la densité g.

Condition A : g est positive sur $(0,\infty)$ et il existe des fonctions dérivables s et τ sur $(0,\infty)$, avec s positive, $\lim_{x\to 0} s(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} s(x)g(x) = 0$ et, pour tout $x > 0$,

$$(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x).$$

L'intervalle $(0,\infty)$ peut être remplacé par n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$, nous avons choisi $(0,\infty)$ puisque c'est le support des lois GIG et de Kummer.

Le résultat suivant est de Döbler [18] :

Proposition 3.2.1. *(proposition 3.9 de [18]). Supposons τ décroissante. Soit W une variable aléatoire de densité g. Soit f_h la solution de l'équation de Stein (3.1.2) donnée par (3.1.3). Pour toute fonction bornée h,*

$$|f_h(x)| \leq \frac{\|h - E(h(W))\|}{2s(q_{0.5})g(q_{0.5})} \tag{3.2.1}$$

où $q_{0.5}$ est la médiane de W.

Dans le souci de déterminer les bornes optimales, l'on peut se demander comment se comparent la borne de f_h donnée dans la proposition 3.2.1 et celle établie dans la proposition 3.1.3, puisque les deux résultats sont établis sous la même hypothèse τ décroissante. Rappelons que dans la proposition 3.1.3, f_h est telle que

$$||f_h|| \leq M\,||h(.) - \mathbb{E}h(W)|| \tag{3.2.2}$$

avec

$$M = \max\left(\frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)}\int_0^\alpha g(t)dt; \frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)}\int_\alpha^{+\infty} g(t)dt\right)$$

et α est l'unique solution de τ sur $(0,\infty)$.
τ est une fonction décroissante admettant une seule racine α et $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$ avec $g(x) > 0$. Donc la fonction $x \mapsto s(x)g(x)$ atteint son maximum en $x = \alpha$. Par conséquent,

$$\frac{1}{2s(\alpha)g(\alpha)} \leq \frac{1}{2s(q_{0.5})g(q_{0.5})}.$$

De plus, puisque

$$\frac{1}{2} \leq \max\left(\int_0^\alpha g(t)dt; \int_\alpha^{+\infty} g(t)dt\right) \leq 1,$$

$$\frac{1}{2s(\alpha)g(\alpha)} \leq M \leq \frac{1}{s(\alpha)g(\alpha)}.$$

On ne peut donc pas dire clairement laquelle des bornes $M\,||h(.) - \mathbb{E}h(W)||$ et $\frac{\|h - E(h(W))\|}{2s(q_{0.5})g(q_{0.5})}$ est meilleure, c'est-à-dire plus petite en général.
Cependant, on observe que la borne (3.2.2) est un peu plus explicite que celle donnée par (3.2.1) dans le cas des lois GIG et Kummer, où l'on a une expression explicite de α et non de $q_{0.5}$.

À présent, rappelons les résultats de Döbler [18] que nous utiliserons dans la section suivante.

Proposition 3.2.2 (proposition 3.13 dans [18]). *Soit W une variable aléatoire dont la densité de probabilité g satisfait la **condition A**, et de fonction de répartition F, telle que $\mathbb{E}(W) < \infty$. Soit f_h la solution de l'équation de Stein (3.1.2) donnée par (3.1.3). Pour toute fonction test h, lipschitzienne,*

1.

$$|f_h(x)| \leq \|h'\|\frac{F(x)\mathbb{E}(W) - \int_0^x yg(y)dy}{s(x)g(x)} = \|h'\|\frac{\int_0^x (\mathbb{E}(W) - yg(y))\,dy}{s(x)g(x)}; \tag{3.2.3}$$

2. si τ est décroissante, alors

$$|f_h'(x)| \leq \|h'\| \frac{\int_0^x F(y)dyG(x) + \int_x^\infty (1 - F(y))\, dyH(x)}{s^2(x)g(x)} \tag{3.2.4}$$

où, pour tout $x \in (0, \infty)$, les fonctions positives $H(x)$ et $G(x)$ sont définies par :

$$H(x) := s(x)g(x) - \tau(x)F(x) \quad et \quad G(x) := H(x) + \tau(x).$$

En vue d'appliquer les résultats de la proposition 3.2.2 à la solution de l'équation de Stein des lois gaussiennes inverses généralisée et Kummer, τ sera dans la suite un polynôme de second degré vérifiant certaines conditions.

3.2.2 Borne de la solution de l'équation de Stein

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 (théorème 3.1 Konzou *et al. [37]*). *Considérons une densité de probabilité g définie sur $(0, \infty)$ satisfaisant la **condition A** pour des fonctions s et τ, où τ un polynôme de second degré de la forme*

$$\tau(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{3.2.5}$$

avec $a_2 < 0$ et $a_0 > 0$. Soit f_h la solution de l'équation de Stein (3.1.2) définie par (3.1.3). Pour toute fonction test h, lipschitzienne,

$$\|f_h\| \leq \frac{\mathbb{E}(W)}{a_0} \|h'\| \tag{3.2.6}$$

où W est une variable aléatoire de densité g.

Pour établir la preuve du théorème précédent, nous établissons la proposition suivante qui montre que la fonction majorant $|f_h(x)|$ donnée par (3.2.3) est bornée. Nous déterminons explicitement la borne supérieure de cette fonction en prouvant que la fonction $U : x \mapsto \frac{\int_0^x (\mathbb{E}(W) - t)g(t)dt}{s(x)g(x)}$ est décroissante sur $(0, \infty)$, ce qui n'est pas évident.

Proposition 3.2.3. *Soit $U : x \mapsto \frac{\int_0^x (\mathbb{E}(W) - t)g(t)dt}{s(x)g(x)}$. On a*

1.

$$\lim_{x \to 0} U(x) = \frac{\mathbb{E}(W)}{a_0} < \infty. \tag{3.2.7}$$

2.

$$\lim_{x \to \infty} U(x) = 0. \tag{3.2.8}$$

3. La fonction U est décroissante sur $(0, \infty)$.

4.

$$\sup_{x > 0} U(x) = \frac{\mathbb{E}(W)}{a_0} < \infty. \tag{3.2.9}$$

5.

$$U(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{-1}{a_2 x}. \tag{3.2.10}$$

6.

$$\sup_{x>0} xU(x) < \infty. \tag{3.2.11}$$

En appliquant la caractérisation de Stein donnée par (3.1.1) à la fonction $x \mapsto f(x) = 1$, on a le lemme suivant nécessaire pour établir la preuve de la proposition précédente.

Lemme 3.2.1. *Considérons une variable aléatoire W de densité g. On a :*

$$\mathbb{E}\left(\tau(W)\right) = a_2\mathbb{E}\left(W^2\right) + a_1\mathbb{E}\left(W\right) + a_0 = 0. \tag{3.2.12}$$

Preuve [proposition 3.2.3]

En appliquant la règle de l'Hôpital, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} U(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(\mathbb{E}(W)-x)g(x)}{(s(x)g(x))'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\mathbb{E}(W)-x)g(x)}{\tau(x)g(x)} \\
&= \frac{\mathbb{E}(W)}{\tau(0)} \\
&= \frac{\mathbb{E}(W)}{a_0} < \infty
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \infty} U(x) &= \lim_{x\to \infty} \frac{(\mathbb{E}(W)-x)g(x)}{(s(x)g(x))'} \\
&= \lim_{x\to \infty} \frac{(\mathbb{E}(W)-x)g(x)}{\tau(x)g(x)} \\
&= \lim_{x\to \infty} \frac{\mathbb{E}(W)-x}{a_2x^2+a_1x+a_0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Soit $m := \mathbb{E}(W)$. Pour tout $x > 0$, puisque $(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$, on a

$$\begin{aligned}
U'(x) &= \frac{(m-x)s(x)g^2(x) - \tau(x)g(x)\int_0^x (m-t)g(t)\,dt}{(s(x)g(x))^2} \\
&= \frac{(m-x)s(x)g(x) - \tau(x)\int_0^x (m-t)g(t)\,dt}{s^2(x)g(x)}.
\end{aligned}$$

Nous allons prouver que $A(x)$ définie par

$$A(x) := (m-x)s(x)g(x) - \tau(x)\int_0^x (m-t)g(t)\,dt \tag{3.2.13}$$

est négative pour tout $x > 0$.
On a :

$$s(x)g(x) = \int_0^x \tau(t)g(t)\,dt.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
A(x) &= \int_0^x (m-x)\tau(t)g(t)\,dt - \tau(x)\int_0^x (m-t)g(t)\,dt \\
&= \int_0^x \left[(m-x)\tau(t) - (m-t)\tau(x)\right] g(t)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Pour tout $x > 0$, soit

$$B_x(t) := (m-x)\tau(t) - (m-t)\tau(x). \tag{3.2.15}$$

On a

$$\begin{aligned}
B_x(t) &= (m-x)\tau(t) - (m-x+x-t)\tau(x) \\
&= (m-x)\tau(t) - (m-x)\tau(x) + (t-x)\tau(x) \\
&= (m-x)(\tau(t)-\tau(x)) + (t-x)\tau(x) \\
&= (m-x)\left(a_2t^2 + a_1t + a_0 - \left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right)\right) + (t-x)\tau(x) \\
&= (m-x)\left(a_1(t-x) + a_2(t^2-x^2)\right) + (t-x)\tau(x) \\
&= (m-x)(t-x)\left(a_1 + a_2(t+x)\right) + (t-x)\tau(x) \\
&= (t-x)\left[(m-x)\left(a_1 + a_2t + a_2x\right) + a_2x^2 + a_1x + a_0\right] \\
&= (t-x)\left[ma_1 + a_2(m-x)t + a_2mx + a_0\right] \\
&= (x-t)\left[a_2(x-m)t - a_2mx\ - a_1m - a_0\right].
\end{aligned}$$

Supposons $0 < x \leq m$. Définissons

$$C_x(t) := a_2(x-m)t - a_2mx\ - a_1m - a_0. \tag{3.2.16}$$

Alors, $t \mapsto C_x(t)$ est croissante. Donc pour tout $t \in (0, x]$,

$$\begin{aligned}
C_x(t) &\leq C_x(x) \\
&= a_2(x-m)x - a_2mx\ - a_1m - a_0 \\
&= a_2x^2 - 2a_2mx\ - a_1m - a_0.
\end{aligned}$$

On observe que $a_2x^2 - 2a_2mx\ - a_1m - a_0$ est un polynôme de second degré en x dont le discriminant est

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4a_2^2m^2 + 4a_2(a_1m + a_0) \\
&= 4a_2\left[a_2m^2 + a_1m + a_0\right] \\
&= 4a_2\left[a_2\left(\mathbb{E}(W)\right)^2 + a_1\mathbb{E}(W) + a_0\right].
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Par le lemme 3.2.1, on a $a_2\mathbb{E}\left(W^2\right) + a_1\mathbb{E}\left(W\right) + a_0 = 0$, ce qui implique

$$a_1\mathbb{E}\left(W\right) + a_0 = -a_2\mathbb{E}(W^2),$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4a_2\left[a_2\left(\mathbb{E}(W)\right)^2 - a_2\mathbb{E}(W^2)\right] \\
&= 4a_2^2[(E(W))^2 - \mathbb{E}(W^2)] \\
&= -4a_2^2Var(W) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $a_2x^2 - 2a_2mx\ - a_1m - a_0 < 0$ pour tout $x > 0$ puisque $a_2 < 0$. Il s'ensuit que si $0 < x \leq m$, alors $C_x(t) < 0$ pour $t \in (0, x]$, et donc

$$B_x(t) = (x-t)C_x(t) \leq 0$$

pour tout $t \in (0, x]$. Ainsi, par (3.2.14), pour tout $x \in (0, m]$,

$$A(x) = \int_0^x B_x(t)g(t)\,dt \leq 0.$$

Supposons maintenant que $x > m$. La fonction A définie par (3.2.13) peut s'écrire comme suit.

$$\begin{aligned} A(x) &= (m-x)s(x)g(x) + \tau(x)\int_x^\infty (m-t)g(t)\,dt \\ &= \int_x^\infty -\left[(m-x)\tau(t) - (m-t)\tau(x)\right] g(t)\,dt \\ &= \int_x^\infty -B_x(t)g(t)\,dt \\ &= \int_x^\infty (t-x)C_x(t)g(t)\,dt \end{aligned}$$

où $B_x(t)$ et $C_x(t)$ sont définies comme précédemment par les équations (3.2.15) et (3.2.16) respectivement. Puisque $x > m$, la fonction $t \mapsto C_x(t)$ est décroissante. De ce fait, pour tout $t \in [x, \infty)$, $C_x(t) \leq C_x(x)$ et la conclusion s'ensuit comme précédemment. D'où les assertions 1, 2, 3 et 4 de la proposition 3.2.3.
Pour les assertions 5 et 6, on a d'après la règle de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} U(x) &\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(W) - x}{a_2x^2 + a_1x + a_0} \\ &\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-1}{a_2x} \end{aligned}$$

et $\lim\limits_{x\to\infty} xU(x) < \infty$. De plus $\lim\limits_{x\to 0} xU(x) = 0$, ce qui finit la démonstration.

□

Remarque 9.

1. Nous décrivons ici une autre manière de prouver que $C_x(x)$ est négative.
   Le discriminant Δ défini par (3.2.17) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a_2\left[a_2\left(\mathbb{E}(W)\right)^2 + a_1\mathbb{E}(W) + a_0\right] \\ &= 4a_2\tau(\mathbb{E}(W)). \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

   Puisque $\tau(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec $a_2 < 0$, la fonction $-\tau$ est strictement convexe, et, par l'inégalité de Jensen,

$$\tau(\mathbb{E}(W)) \geq \mathbb{E}(\tau(W)).$$

   Et, comme W n'est pas une constante,

$$\tau(\mathbb{E}(W)) > \mathbb{E}(\tau(W)).$$

   Par le lemme 3.2.1, $\mathbb{E}(\tau(W)) = 0$. Ainsi, $\tau(\mathbb{E}(W)) > 0$ et l'on conclut par (3.2.18) que $\Delta < 0$.
2. Le fait $\sup\limits_{x>0} xU(x) < \infty$ nous serait utile pour démontrer que la dérivée de la solution de l'équation de Stein est bornée.

3.2.3 Sur la dérivée de la solution de l'équation de Stein

Comme dans le cas de la borne de la solution de l'équation de Stein, nous étudions ici la borne de la dérivée dans le cas où τ est un polynôme convexe, de second degré, décroissant sur $(0, \infty)$.

Théorème 3.2.2 (théorème 4.1 Konzou *et al. [37]*). *Considérons une densité de probabilité g définie sur $(0, \infty)$ satisfaisant la **condition** A pour des fonctions s et τ, avec τ définie par (3.2.5). Soit f_h la solution de l'équation de Stein (3.1.2) définie par (3.1.3). Supposons τ décroissante. Alors pour toute fonction test h, lipschitzienne, il existe des constantes B et C telles que,*

$$\left|f_h'(x)\right| \leq B\left\|h'\right\|, \tag{3.2.19}$$

$$\left|xf_h'(x)\right| \leq C\left\|h'\right\|. \tag{3.2.20}$$

La preuve du théorème précédent est basée sur le résultat suivant.

Théorème 3.2.3 (proposition 4.1 Konzou *et al. [37]*). *Soit* g *une densité de probabilité définie sur* $(0,\infty)$, *vérifiant la* ***condition A*** *pour des fonctions* s *et* τ. *Supposons qu'il existe une constante* $a_2 < 0$ *telle que*

$$\tau(x) \underset{x\to\infty}{\sim} a_2 s(x), \quad \tau(0) > 0, \quad s(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^2, \quad s(0) = 0, \tag{3.2.21}$$

$$\tau(0) + s'(0) \neq 0, \lim_{x\to 0} s(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} s(x)g(x) = 0. \tag{3.2.22}$$

Soit

$$G(x) = s(x)g(x) + \tau(x)(1 - F(x)),$$
$$H(x) = s(x)g(x) - \tau(x)F(x),$$
$$R(x) = \frac{G(x)\displaystyle\int_0^x F(t)dt + H(x)\int_x^{+\infty}(1 - F(t))dt}{s(x)^2 g(x)}.$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} R(x) = \frac{1}{\tau(0) + s'(0)} - \frac{\tau'(0)\mathbb{E}(W)}{\tau(0)(\tau(0) + s'(0))}, \tag{3.2.23}$$

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = 0. \tag{3.2.24}$$

Par conséquent,

$$\sup_{x\geq 0} R(x) < \infty, \tag{3.2.25}$$

$$\sup_{x\geq 0} xR(x) < \infty. \tag{3.2.26}$$

et

$$\sup_{x\geq 0} x^2 R(x) < \infty. \tag{3.2.27}$$

Remarque 10. Nous n'avons pas pu obtenir l'expression explicite de la borne supérieure de R sur $(0,\infty)$.

Pour établir la preuve du théorème 3.2.2, commençons par établir la proposition suivante.

Proposition 3.2.4. *Sous les hypothèses et les notations de la proposition 3.2.2, considérons*

$$R_1(x) = \frac{G(x)\displaystyle\int_0^x F(t)dt}{s(x)^2 g(x)},$$

$$R_2(x) = \frac{H(x)\displaystyle\int_x^{+\infty}(1 - F(t))dt}{s(x)^2 g(x)}.$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} R_1(x) = \frac{1}{\tau(0) + s'(0)}. \tag{3.2.28}$$

$$\lim_{x\to 0} R_2(x) = -\frac{\tau'(0)\mathbb{E}(W)}{\tau(0)(\tau(0) + s'(0))}. \tag{3.2.29}$$

$$R_1(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -\frac{\tau'(x)}{a_2(x\tau(x) + s(x))}, \quad \lim_{x\to\infty} R_1(x) = 0. \tag{3.2.30}$$

$$R_2(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -\frac{1}{\tau(x)}, \quad \lim_{x\to\infty} R_2(x) = 0. \tag{3.2.31}$$

Preuve[proposition 3.2.4]

• Calcul de $\lim_{x\to 0} R_1(x)$

La définition de G permet d'avoir

$$\lim_{x\to 0} G(x) = \tau(0). \tag{3.2.32}$$

On a aussi $\lim_{x\to 0} \int_0^x F(t)dt = 0$ et $\lim_{x\to 0} s(x)^2 g(x) = 0$. Lorsque $x \to 0$, par la règle de l'Hôpital,

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^x F(t)dt}{s(x)^2 g(x)} &\sim \frac{F(x)}{(s(x)^2 g(x))'} \\ &= \frac{F(x)}{s(x)g(x)(\tau(x) + s'(x))} \\ &\sim \frac{F(x)}{s(x)g(x)(\tau(0) + s'(0))}. \end{aligned}$$

En dérivant une fois encore, on a

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^x F(t)dt}{s(x)^2 g(x)} &\sim \frac{g(x)}{\tau(x)g(x)(\tau(0) + s'(0))} \\ &= \frac{1}{\tau(x)(\tau(0) + s'(0))}. \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

En combinant (3.2.33) avec (3.2.32), on obtient (3.2.28).

• Calcul de $\lim_{x\to 0} R_2(x)$

Rappelons que

$$R_2(x) = \frac{H(x)\int_x^{+\infty}(1 - F(t))dt}{s(x)^2 g(x)}.$$

Puisque $H(x) = G(x) - \tau(x)$,

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \tau(0) - \tau(0) = 0.$$

Une intégration par parties permet d'avoir

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty}(1 - F(t))dt &= \int_x^{+\infty} tg(t)dt - x(1 - F(x)) \\ &= \mathbb{E}(W) - \int_0^x tg(t)dt - x(1 - F(x)), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{+\infty}(1 - F(t))dt = \mathbb{E}(W) < \infty.$$

D'où

$$\lim_{x\to 0} H(x)\int_x^{+\infty}(1 - F(t))dt = 0.$$

De plus

$$\lim_{x\to 0} s(x)^2 g(x) = 0.$$

D'après la règle de l'Hôpital, lorsque $x \to 0$,

$$\begin{aligned} R_2(x) &\sim \frac{H(x)}{s(x)^2 g(x)}\mathbb{E}(W) \\ &= \frac{H'(x)}{s(x)g(x)(\tau(x)+s'(x))}\mathbb{E}(W) \\ &= \frac{-\tau'(x)F(x)}{s(x)g(x)(\tau(x)+s'(x))}\mathbb{E}(W) \\ &\sim \mathbb{E}(W)\frac{-\tau'(0)}{\tau(0)+s'(0)} \times \frac{F(x)}{s(x)g(x)} \\ &\sim \mathbb{E}(W)\frac{-\tau'(0)}{\tau(0)+s'(0)} \times \frac{g(x)}{\tau(x)g(x)} \\ &\sim \mathbb{E}(W)\frac{-\tau'(0)}{\tau(0)+s'(0)} \times \frac{1}{\tau(0)} \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.2.29).

• Calcul de $\lim_{x\to+\infty} R_1(x)$

Une intégration par parties permet d'avoir

$$\int_0^x F(t)dt = xF(x) - \int_0^x tg(t)dt.$$

Quand $x \to \infty$, puisque $F(x) \to 1$ et $\int_0^x tg(t)dt \to \mathbb{E}(W)$, on a

$$\int_0^x F(t)dt \sim x.$$

Donc, lorsque $x \to \infty$,

$$R_1(x) \sim \frac{xG(x)}{s(x)^2 g(x)}$$

et, puisque $s(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^2$,

$$R_1(x) \sim \frac{G(x)}{xs(x)g(x)}.$$

Par la règle de l'Hôpital, à l'infini,

$$\begin{aligned} R_1(x) &\sim \frac{G'(x)}{(xs(x)g(x))'} \\ &= \frac{\tau'(x)(1-F(x))}{x\tau(x)g(x)+s(x)g(x)} \\ &= \frac{\tau'(x)(1-F(x))}{g(x)(x\tau(x)+s(x))}. \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1-F(x)}{g(x)} &\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-g(x)}{g'(x)} \\ &= \frac{-s(x)}{\tau(x)-s'(x)} \\ &\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-x^2}{\tau(x)} \\ &= \frac{-1}{a_2}. \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to\infty} R_1(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\tau'(x)}{x\tau(x)+s(x)} = 0,$$

et l'on obtient (3.2.30).

• Calcul de $\lim_{x\to\infty} R_2(x)$

$$\begin{aligned} H(x) &= s(x)g(x) - \tau(x)F(x) \\ &= -\tau(x)F(x)\left(1 - \frac{s(x)g(x)}{\tau(x)F(x)}\right) \\ &\underset{x\to\infty}{\sim} -\tau(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \frac{\int_x^{+\infty}(1-F(t))dt}{s(x)g(x)} \times \frac{H(x)}{s(x)} \\ &\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{F(x)-1}{\tau(x)g(x)} \times \frac{-\tau(x)}{s(x)} \\ &= \frac{1-F(x)}{s(x)g(x)} \\ &\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-g(x)}{\tau(x)g(x)} = \frac{-1}{\tau(x)} \to 0. \end{aligned}$$

□

Nous abordons dans la section suivante, le cas particulier de la loi gaussienne inverse généralisée.

3.3 Sur la caractérisation et l'équation de Stein pour la loi gaussienne inverse généralisée

Cette section est consacrée à la caractérisation de type Stein de la loi gaussienne inverse généralisée. Nous donnons l'opérateur de Stein pour la loi gaussienne inverse généralisée, la solution de l'équation différentielle correspondante et une majoration de la norme de la convergence uniforme de la solution obtenue ainsi que celle de ses dérivées successives.

3.3.1 Caractérisation

Rappelons que la densité de la loi GIG de paramètres $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ est

$$g_{p,a,b}(x) = \frac{(a/b)^{p/2}}{2K_p(\sqrt{ab})} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}(ax+b/x)}, \quad x > 0, \tag{3.3.1}$$

où K_p est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce donnée par (2.2.3).
Soit

$$s(x) = x^2 \quad \text{et} \quad \tau_{p,a,b}(x) = \frac{b}{2} + (p+1)x - \frac{a}{2}x^2. \tag{3.3.2}$$

Alors par un simple calcul (observation faite par Gaunt dans [26]), on déduit que la densité $g_{p,a,b}$ satisfait

$$(s(x)g_{p,a,b}(x))' = \tau_{p,a,b}(x)g_{p,a,b}(x). \tag{3.3.3}$$

Cette dernière observation nous permet d'appliquer le théorème 3.1.1 pour retrouver la caractérisation suivante de Stein de la loi GIG donnée dans [40] et [26] :

Théorème 3.3.1. *Une variable aléatoire X suit la loi GIG de densité $g_{p,a,b}$ si et seulement si, pour toute fonction réelle f d'une variable réelle positive, dérivable telle que $\lim_{x\to\infty} g_{p,a,b}(x)f(x) = \lim_{x\to 0} g_{p,a,b}(x)f(x) = 0$, et telle que l'espérance suivante existe, on a :*

$$\mathbb{E}\left[X^2 f'(X) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)X - \frac{a}{2}X^2\right) f(X)\right] = 0. \tag{3.3.4}$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est alors

$$x^2 f'(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)x - \frac{a}{2}x^2\right) f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W) \tag{3.3.5}$$

où h est une fonction bornée et W une variable aléatoire suivant la loi GIG de paramètres p, a, b.

La proposition suivante permet d'obtenir l'unique solution bornée de l'équation (3.3.5) :

Proposition 3.3.1. *La solution bornée de l'équation de Stein (3.3.5) de la loi GIG est donnée par*

$$\begin{aligned} f_h(x) =& \frac{1}{s(x)g_{p,a,b}(x)} \int_0^x g_{p,a,b}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt \\ =& \frac{-1}{s(x)g_{p,a,b}(x)} \int_x^{+\infty} g_{p,a,b}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

où h est une fonction bornée et W une variable aléatoire suivant la loi GIG de paramètres p, a, b.

Nous allons aborder dans la suite de cette section une étape importante dans l'approche par la méthode de Stein à savoir borner la solution de l'équation de Stein ainsi que ses dérivées successives.

3.3.2 Un majorant de la norme de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG

Nous appliquons ici les résultats des sections 1 et 2 à la solution de l'équation de Stein de la loi GIG.

Nous obtenons un majorant de la norme de la solution (3.3.6) en appliquant la proposition 3.1.3 pour $p \leq -1$.

Théorème 3.3.2 (théorème 3.2 Konzou *et al. [35]*)**.** *Si h est une fonction continue et bornée, alors pour $p \leq -1$, la fonction f_h définie par (3.3.6) est bornée et on a :*

$$||f_h|| \leq N\, ||h(.) - \mathbb{E}h(W)|| \tag{3.3.7}$$

où

$$N = \max\left(\frac{1}{\alpha^2 g_{p,a,b}(\alpha)} \int_0^\alpha g_{p,a,b}(t)dt; \frac{1}{\alpha^2 g_{p,a,b}(\alpha)} \int_\alpha^{+\infty} g_{p,a,b}(t)dt\right)$$

et

$$\alpha = \frac{p+1+\sqrt{(p+1)^2+ab}}{a}. \tag{3.3.8}$$

Remarque 11.

i. C'est précisément ce résultat que Gaunt a établi sous un angle particulier dans [26] en appliquant la proposition 1 de Schoutens [61], mais il commet une petite erreur en écrivant $\alpha = \mathbb{E}(W)$. Il aurait raison si $\tau_{p,a,b}$ était une fonction affine, ce qui n'est pas le cas.

ii. En majorant les intégrales dans l'expression de N par 1, on a

$$\begin{aligned} \|f_h\| &\leq \frac{1}{\alpha^2 g_{a,b,c}(\alpha)} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \\ &= \frac{a^2 \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|}{\left(ab + 2(p+1)\left(p+1+\sqrt{(p+1)^2+ab}\right)\right) g_{a,b,c}\left(\frac{p+1+\sqrt{(p+1)^2+ab}}{a}\right)}. \end{aligned}$$

Pour $p > -1$, on a le résultat suivant :

Théorème 3.3.3 (théorème 3.5 Konzou *et al. [35]*). *Considérons $p > -1$, $a > 0$, $b > 0$ et α défini par (3.3.8). Soit $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. La solution f_h donnée par (3.3.6) de l'équation de Stein de la loi $GIG(p, a, b)$ de densité $g_{p,a,b}$ est telle que*

$$\|f_h\| \leq \max\left(\frac{2}{b}, \frac{a^2}{(p+1)^2 g_{p,a,b}(\frac{p+1}{a})}\right) \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|.$$

Preuve

C'est une application de la Proposition 3.1.4 avec $\tau(x) = \tau_{p,a,b}(x) = \frac{b}{2} + (p+1)x - \frac{a}{2}x^2, \tau(0) = b/2$ et $\beta = (p+1)/a$.

□

Dans la suite de cette section, nous établissons une borne de la solution de l'équation Stein de la loi gaussienne inverse généralisée en utilisant la technique de Döbler (théorème 3.2.1).

Les équations (2.2.1), (3.3.2) et (3.3.3) montrent que $\tau_{p,a,b}$ et $g_{p,a,b}$ vérifient les hypothèses du Théorème 3.2.1 avec

$$s(x) = x^2, \ \ \tau(x) = \tau_{p,a,b}(x) = \frac{b}{2} + (p+1)x - \frac{a}{2}x^2, \ \ g = g_{p,a,b}.$$

Rappelons que si W est une variable aléatoire suivant la loi GIG de paramètres p, a, b, alors

$$\mathbb{E}(W) = \frac{\sqrt{b} K_{p+1}\sqrt{ab}}{\sqrt{a} K_p \sqrt{ab}}. \tag{3.3.9}$$

En appliquant le théorème 3.2.1, on obtient la borne suivante de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG.

Théorème 3.3.4 (théorème 5.1 Konzou *et al. [37]*). *Soit $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Soit f_h la solution de l'équation de Stein de la loi GIG définie par l'équation (3.3.6). Pour toute fonction test h, lipschitzienne,*

$$\|f_h\| \leq \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})} \|h'\|. \tag{3.3.10}$$

Le fait $\tau_{p,a,b}(\mathbb{E}(W)) \geq 0$ (voir remarque 1) implique $\mathbb{E}(W) \leq \alpha$, où

$$\alpha = \frac{p + 1 + \sqrt{(p+1)^2 + ab}}{a}$$

est l'unique racine de $\tau_{p,a,b}$ sur $(0, \infty)$. Ce qui permet d'obtenir la propriété suivante de la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce.

Propriété 7 (remarque 5.1 Konzou *et al. [37]*). *Soit, $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. La fonction K_p de Bessel modifiée de troisième espèce définie par (2.2.3) satisfait*

$$\sqrt{ab}\frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})} \leq p + 1 + \sqrt{(p+1)^2 + ab}. \tag{3.3.11}$$

Du lemme 3.2.1, on a

$$\frac{b}{2} + (p+1)\mathbb{E}(W) - \frac{a}{2}\mathbb{E}(W^2) = 0. \tag{3.3.12}$$

Avec $\mathbb{E}(W)$ donnée par (3.3.9) et

$$\mathbb{E}(W^2) = \frac{bK_{p+2}\sqrt{ab}}{aK_p\sqrt{ab}},$$

on obtient

$$\frac{K_{p+2}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})} = 1 + \frac{2(p+1)}{\sqrt{ab}} \frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}$$

On obtient alors par des arguments probabilistes, la relation de récurrence suivante de la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce bien connue de la littérature.

$$K_{p+2}(x) = K_p(x) + \frac{2(p+1)}{x} K_{p+1}(x). \tag{3.3.13}$$

3.3.3 Une borne de la dérivée de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG

Le résultat suivant propose une borne de la dérivée de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG.

Théorème 3.3.5 (théorème 3.6 Konzou *et al. [35]*). *Soit $W \sim GIG(p,a,b)$. Considérons encore α défini par (3.3.8), soit*

$$\alpha_1 = \frac{p+3+\sqrt{(p+3)^2+ab}}{a}$$

et soit M donné par

$$M = \begin{cases} \max\left(\dfrac{1}{\alpha^2 g_{p,a,b}(\alpha)} \displaystyle\int_0^{\alpha} g_{p,a,b}(t)dt; \dfrac{1}{\alpha^2 g_{p,a,b}(\alpha)} \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} g_{p,a,b}(t)dt\right) & si \;\; p \leq -1 \\ \max\left(\frac{2}{b}, \dfrac{a^2}{(p+1)^2 g_{p,a,b}(\frac{p+1}{a})}\right) & si \;\; p > -1. \end{cases} \tag{3.3.14}$$

Soit $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, dérivable et de dérivée h' bornée. Considérons

$$G_1^1 = \frac{2}{b}\left(\|h'\| + \max(2,|p+1|) M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$G_2^1 = \left(\|h'\| + (2+\sqrt{(p+3)^2+ab}) M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \frac{1}{\alpha_1^2 g_{p+2,a,b}(\alpha_1)} \times \int_0^{\alpha_1} g_{p+2,a,b}(t)dt,$$

$$G_3^1 = \frac{2}{\alpha_1^2} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|,$$

$$G_4^1 = \left(\|h'\| + (2+\sqrt{(p+3)^2+ab}) M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \frac{a^2}{(p+3)^2 g_{p+2,a,b}(\frac{p+3}{a})}.$$

Alors la dérivée f_h' de la solution f_h de l'équation (3.3.5) est telle que

$$\|f_h'\| \leq M_1 = \begin{cases} \max\left(G_2^1, G_3^1\right) & si \;\; p \leq -3 \\ \max\left(G_1^1, G_3^1, G_4^1\right) & si \;\; p > -3. \end{cases} \tag{3.3.15}$$

Preuve

D'abord, supposons que $p \leq -3$. f_h vérifie l'équation différentielle

$$x^2 f''(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+3)x - \frac{a}{2}x^2\right) f'(x) = h'(x) - (p+1-ax) f(x). \tag{3.3.16}$$

Soit $h_1(x) = h'(x) - (p+1-ax) f_h(x)$. L'équation (3.3.16) montre que f_h' est solution de l'équation différentielle

$$x^2 f'(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+3)x - \frac{a}{2}x^2\right) f(x) = h_1(x). \tag{3.3.17}$$

Puisque $\mathbb{E}h_1(Z) = \mathbb{E}(Z^2 f'(Z) + \left(\frac{b}{2} + (p+3)Z - \frac{a}{2}Z^2\right) f(Z) = 0$, si Z suit la loi $GIG(p+2,a,b)$ (par la caractérisation de Stein la loi $GIG(p+2,a,b)$), l'équation (3.3.17) est l'équation de Stein (f remplacée par f') de la loi $GIG(p+2,a,b)$.

Notons que la méthode itérative consistant à remplacer la fonction f par l'une de ses dérivée a été utilisé par exemple dans [27] pour borner les dérivées successives de la solution de l'équation de Stein de la loi gamma.

Par suite, pour $p \leq -3$ c'est-à-dire $p+2 \leq -1$, le théorème 3.3.2 permet de déduire que si $x < \alpha_1$ et h_1 est bornée, alors

$$\left|f_h'(x)\right| \leq \|h_1\| \frac{1}{s(\alpha_1)g_1(\alpha_1)} \int_0^{\alpha_1} g_1(t)dt,$$

où $g_1 := g_{p+2,a,b}$ est la densité de la loi $GIG(p+2,a,b)$ et $\alpha_1 = \dfrac{p+3+\sqrt{(p+3)^2+ab}}{a}$.
On a :

$$\begin{aligned}
|h_1(x)| &= |h'(x) - (p+1-ax)f(x)| \\
&\leq \|h'\| + |p+1-ax| \, \|f_h\| \\
&= \|h'\| + (-p-1+ax) \, \|f_h\| \quad (p+1-ax<0 \ \forall p \leq -3, x>0) \\
&\leq \|h'\| + (-p-1+a\alpha_1) \, \|f_h\| \quad (x<\alpha_1) \\
&= \|h'\| + (2+\sqrt{(p+3)^2+ab}) \, \|f_h\| \\
&\leq \|h'\| + (2+\sqrt{(p+3)^2+ab}) M \, \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \, .
\end{aligned}$$

Donc, pour $p \leq -3$ et $x \leq \alpha_1$,

$$\left|f_h'(x)\right| \leq \left(\|h'\| + (2+\sqrt{(p+3)^2+ab}) M \, \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \frac{1}{s(\alpha_1)g_1(\alpha_1)} \times \int_0^{\alpha_1} g_1(t)dt.$$

Si $p \leq -3$ et $x \geq \alpha_1$, la fonction $\tau := \tau_{p,a,b}$ (donnée par (3.3.2)) est décroissante et négative. Par l'équation (3.3.6) et (3.3.3),

$$\begin{aligned}
f_h'(x) &= \frac{h(x) - \mathbb{E}h(W)}{s(x)} - \frac{\tau(x) f_h(x)}{s(x)} \\
|f_h'(x)| &\leq \frac{\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|}{s(x)} + \frac{|\tau(x) f_h(x)|}{s(x)}.
\end{aligned}$$

De plus, en notant $g := g_{p,a,b}$ la densité de la loi $GIG(p,a,b)$, on a

$$\begin{aligned}
|\tau(x) f_h(x)| &= \left| \frac{-\tau(x)}{s(x)g(x)} \int_x^{+\infty} g(t)[h(t) - \mathbb{E}h(W)]dt \right| \\
&\leq \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \frac{-\tau(x)}{s(x)g(x)} \int_x^{+\infty} g(t)dt \quad (\tau \text{ est négative}) \\
&\leq \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \frac{-\tau(x)}{s(x)g(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\tau(t)}{\tau(x)} g(t)dt \quad \left(\frac{\tau(t)}{\tau(x)} \geq 1 \ \forall x \leq t\right) \\
&= \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \, .
\end{aligned}$$

Donc

$$|f_h'(x)| \leq \frac{2}{s(x)} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \leq \frac{2}{\alpha_1^2} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \, .$$

Maintenant supposons $p > -3$.

Sur $\left(0, \frac{p+3}{a}\right)$, $\tau_1 := \tau_{p+2,a,b}$ est telle que $\frac{\tau_1(t)}{\tau_1(0)} \geq 1, \forall 0 \leq t \leq \frac{p+3}{a}$, et du fait que

$$\begin{aligned}
|h_1(x)| &\leq \|h'\| + |p+1-ax| \, \|f_h\| \\
&\leq \|h'\| + \max(2, |p+1|) \, \|f_h\| \\
&\leq \|h'\| + \max(2, |p+1|) M \, \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| .
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
|f_h'(x)| &\leq \|h_1\| \frac{1}{s(x)g_1(x)} \int_0^x g_1(t)dt \\
&\leq \|h_1\| \frac{1}{\tau_1(0)s(x)g_1(x)} \int_0^x \tau_1(t)g_1(t)dt \\
&= \frac{1}{\tau_1(0)} \|h_1\| \\
&= \frac{2}{b} \|h_1\| .
\end{aligned}$$

D'où

$$\|f_h'\| \leq \frac{2}{b} \left(||h'|| + \max(2, |p+1|) M \, \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) .$$

Sur $\left(\frac{p+3}{a}, \infty\right)$, la fonction τ_1 est décroissante. On utilise une argumentation similaire au cas $p \leq -3$ et le fait que

$$\frac{1}{\alpha_1^2 g_{p+2,a,b}(\alpha_1)} \int_0^{\alpha_1} g_{p+2,a,b}(t)dt \leq \frac{a^2}{(p+3)^2 g_{p+2,a,b}(\frac{p+3}{a})}$$

sur cet intervalle.

□

3.3.4 Une borne de la dérivée seconde de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG

Théorème 3.3.6 (théorème 3.7 Konzou *et al. [35]*). *Soit* $W \sim GIG(p, a, b)$. *Notons* $g_2 := g_{p+4,a,b}$ *la densité de la loi* $GIG(p+4, a, b)$ *et définissons* $\alpha_2 = \dfrac{p+5+\sqrt{(p+5)^2+ab}}{a}$. *Soit* $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée, deux fois différentiable telle que* h' *et* h'' *soient bornées. La dérivée seconde* f_h'' *de la solution* f_h *de l'équation de Stein* (3.3.5) *est telle que*

$$\|f_h''\| \leq M_2 = \begin{cases} \max\left(G_2^2, G_3^2\right) & si \;\; p \leq -5 \\ \max\left(G_1^2, G_3^2, G_4^2\right) & si \;\; p > -5 \end{cases} \tag{3.3.18}$$

avec

$$G_1^2 = \frac{2}{b} \left(\|h''\| + \max(6, |2p+4|) M_1 + aM \, \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) ,$$

$$G_2^2 = \left(\|h''\| + (6 + 2\sqrt{(p+5)^2+ab}) M_1 + aM \, \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \frac{1}{\alpha_2^2 g_2(\alpha_2)} \times \int_0^{\alpha_2} g_2(t)dt,$$

$$G_3^2 = \frac{2}{\alpha_2^2} \left(\|h'\| + \frac{4a + a\sqrt{(p+5)^2+ab}}{4p+20+4\sqrt{(p+5)^2+ab}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) ,$$

$$G_4^2 = \left(\|h''\| + (6 + 2\sqrt{(p+5)^2 + ab})M_1 + aM \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \times \frac{a^2}{(p+5)^2 g_2\left(\frac{p+5}{a}\right)},$$

M est donné par (3.3.14) *et M_1 par* (3.3.15).

Preuve

Premièrement, supposons $p \leq -5$. f_h'' satisfait l'équation différentielle

$$x^2 f^{(3)}(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+5)x - \frac{a}{2}x^2 \right) f''(x) = h''(x) - 2(p+2-ax)f'(x) + af(x). \quad (3.3.19)$$

Soit $h_2(x) = h''(x) - 2(p+2-ax)f_h'(x) + af_h(x)$. L'équation (3.3.19) montre que f_h'' est la solution de l'équation de Stein pour la loi $GIG(p+4, a, b)$ dont le second membre est $h_2(x) = h''(x) - 2(p+2-ax)f_h'(x) + af_h(x)$. Soit

$$s(x) = x^2 \quad \text{and} \quad \tau_2(x) = \frac{b}{2} + (p+5)x - \frac{a}{2}x^2,$$

on a

$$(s(x)g_2(x))' = \tau_(x)g_2(x)$$

avec g_2 la densité de la loi $GIG(p+4, a, b)$.
Pour $p \leq -5$, τ_2 est décroissante sur $(0, \infty)$ et admet un seul zéro

$$\alpha_2 = \frac{p+5+\sqrt{(p+5)^2+ab}}{a}.$$

Si $x < \alpha_2$, le théorème 3.3.2 montre que si h_2 est bornée, alors la solution f_h'' de l'équation (3.3.19) est telle que

$$\|f_h''\| \leq \|h_2\| \frac{1}{s(\alpha_2)g_2(\alpha_2)} \int_0^{\alpha_2} g_2(t)dt.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
|h_2(x)| &= |h''(x) - 2(p+2-ax)f_h'(x) + af_h(x)| \\
&\leq \|h''\| + 2|p+2-ax| \|f_h'\| + a\|f_h\| \\
&= \|h''\| + 2(-p-2+ax)\|f_h'\| + a\|f_h\| \quad (p+2-ax < 0 \ \forall p \leq -5, x > 0) \\
&\leq \|h''\| + 2(-p-2+a\alpha_2)\|f_h'\| + a\|f_h\| \quad (x < \alpha_2) \\
&= \|h''\| + (6 + 2\sqrt{(p+5)^2+ab})\|f_h'\| + a\|f_h\| \\
&\leq \|h''\| + (6 + 2\sqrt{(p+5)^2+ab})M_1 + aM\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|.
\end{aligned}$$

Donc pour $p \leq -5$ et $x \leq \alpha_2$,

$$|f_h''(x)| \leq \left(\|h''\| + (6 + 2\sqrt{(p+5)^2+ab})M_1 + aM\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \times \frac{1}{s(\alpha_2)g_2(\alpha_2)} \int_0^{\alpha_2} g_2(t)dt.$$

Si $p \leq -5$ et $x \geq \alpha_2$, la fonction τ_1 définie par $\tau_1(x) = \frac{b}{2} + (p+3)x - \frac{a}{2}x^2$ est décroissante et négative. D'après l'équation (3.3.32),

$$
\begin{aligned}
f_h''(x) &= \frac{h_1(x)}{s(x)} - \frac{\tau_1(x) f_h'(x)}{s(x)}, \\
|f_h''(x)| &\leq \frac{\|h_1\|}{s(x)} + \frac{|\tau_1(x) f_h'(x)|}{s(x)} \\
|\tau_1(x) f_h'(x)| &= \left| \frac{-\tau_1(x)}{s(x) g_1(x)} \int_x^{+\infty} g_1(t) h_1(t) dt \right| \\
&\leq \|h_1\| \frac{-\tau_1(x)}{s(x) g_1(x)} \int_x^{+\infty} g_1(t) dt \quad (\tau_1 \text{ est négative}) \\
&\leq \|h_1\| \frac{-\tau_1(x)}{s(x) g_1(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\tau_1(t)}{\tau_1(x)} g_1(t) dt \quad \left(\frac{\tau_1(t)}{\tau_1(x)} \geq 1 \ \forall x \leq t \right) \\
&= \|h_1\| .
\end{aligned}
$$

$$
h_1(x) = h'(x) - (p+1-ax) f_h(x) \implies |h_1(x)| \leq \|h'\| + |(p+1-ax) f_h(x)| .
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
|(p+1-ax) f_h(x)| &= \left| -\frac{p+1-ax}{s(x) g_{p,a,b}(x)} \int_x^{+\infty} g_{p,a,b}(t) \left[h(t) - \mathbb{E}h(W) \right] dt \right| \\
&\leq \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \frac{-p-1+ax}{s(x) g_{p,a,b}(x) \tau_{p,a,b}(x)} \int_x^{+\infty} \tau_{p,a,b}(t) g_{p,a,b}(t) dt \\
&= \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \frac{p+1-ax}{\tau_{p,a,b}(x)}
\end{aligned}
$$

parce que pour $p \leq -5$ et $x \geq \alpha_2$, $p+1-ax \leq 0$, la fonction $\tau_{p,a,b}$ définie par (3.3.2) est décroissante et négative, donc telle que $1 \leq \frac{\tau_{p,a,b}(t)}{\tau_{p,a,b}(x)}$ pour $x \leq t$. Aussi $\lim_{x \to +\infty} s(x) g_{p,a,b}(x) = 0$. Soit $\kappa_2(x) = \dfrac{p+1-ax}{\tau_{p,a,b}(x)}$. κ_2 est dérivable sur (α_2, ∞) et

$$
\kappa_2'(x) = -\frac{ab + (p+1)^2 + (p+1-ax)^2}{2\tau_{p,a,b}^2(x)} \leq 0.
$$

Donc $\kappa_2(x) < \kappa_2(\alpha_2) = \dfrac{4a + a\sqrt{(p+5)^2 + ab}}{4(p+5) + 4\sqrt{(p+5)^2 + ab}}$.
Ainsi, pour $p \leq -5$ et $x \geq \alpha_2$,

$$
\|f_h''\| \leq \frac{2}{\alpha_2^2} \left(\|h'\| + \frac{4a + a\sqrt{(p+5)^2 + ab}}{4(p+5) + 4\sqrt{(p+5)^2 + ab}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) .
$$

A présent, supposons $p > -5$.
Sur $\left(0, \frac{p+5}{a}\right)$, τ_2 est telle que $\frac{\tau_2(t)}{\tau_2(0)} \geq 1$, $\forall 0 \leq t \leq \frac{p+5}{a}$, et puisque,

$$
\begin{aligned}
||h_2(x)|| &\leq \|h''\| + 2|p+2-ax| \|f_h'\| + a \|f_h\| \\
&\leq \|h''\| + \max(6, |2p+4|) \|f_h'\| + a \|f_h\| \\
&\leq \|h''\| + \max(6, |2p+4|) M_1 + aM \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| ,
\end{aligned}
$$

on a

$$\begin{aligned}|f_h''| &\leq \|h_2\| \frac{1}{s(x)g_2(x)} \int_0^x g_2(t)dt \\ &\leq \|h_2\| \frac{1}{\tau_2(0)s(x)g_2(x)} \int_0^x \tau_2(t)g_2(t)dt \\ &= \frac{1}{\tau_2(0)} \|h_2\| \\ &= \frac{2}{b} \|h_2\| .\end{aligned}$$

D'où

$$\|f_h''\| \leq \frac{2}{b} \left(\|h''\| + \max(6, |2p+4|)M_1 + aM \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right).$$

Sur $\left(\frac{p+5}{a}, \infty\right)$, la fonction τ_2 est décroissante et un raisonnement analogue au cas $p \leq -5$ et le fait que

$$\frac{1}{\alpha_2^2 g_2(\alpha_2)} \int_0^{\alpha_2} g_2(t)dt \leq \frac{a^2}{(p+5)^2 g_2(\frac{p+5}{a})}$$

sur cet intervalle permettent de conclure.

□

3.3.5 Borne de la dérivée troisième de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG

Théorème 3.3.7 (théorème 2.1 Konzou *et al. [36]*). *Soit $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, trois fois dérivable telle que les dérivées h', h'' et $h^{(3)}$ sont bornées. Notons $g_3 := g_{p+6,a,b}$ la densité de la loi $GIG(p+6, a, b)$. La dérivée troisième $f_h^{(3)}$ de la solution f_h de l'équation de Stein (3.3.5) est telle que*

$$\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq M_3 = \begin{cases} \max(G_1^3, G_2^3) & si \quad p \leq -7 \\ \max(G_3^3, G_4^3, G_2^3) & si \quad p > -7 \end{cases} \tag{3.3.20}$$

avec

$$\alpha_3 = \frac{p+7+\sqrt{(p+7)^2+ab}}{a},$$

$$G_1^3 = \left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(|p+3|, (4+\sqrt{(p+7)^2+ab})\right) M_2 + 3aM_1\right) \times \frac{1}{\alpha_3^2 g_3(\alpha_3)} \int_0^{\alpha_3} g_3(t)dt,$$

$$G_2^3 = \frac{5a + a\sqrt{(p+7)^2+ab}}{\alpha_3^2\left(p+7+\sqrt{(p+7)^2+ab}\right)} \times \left(||h'|| + \frac{6a + a\sqrt{(p+7)^2+ab}}{6p+42+6\sqrt{(p+7)^2+ab}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) + \frac{2}{\alpha_3^2}\left(\|h''\| + aM \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$G_3^3 = \frac{2}{b}\left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(4, |p+3|\right) M_2 + 3aM_1\right),$$

$$G_4^3 = \left(\left\| h^{(3)} \right\| + 3 \max \left(|p+3|, (4 + \sqrt{(p+7)^2 + ab}) \right) M_2 + 3aM_1 \right) \times \frac{a^2}{(p+7)^2 g_3\left(\frac{p+7}{a}\right)},$$

M, M_1, M_2 sont donnés par (3.3.14), (3.3.15), (3.3.18), $W \sim GIG(p, a, b)$.

Preuve

Supposons $p \leq -7$. $f_h^{(3)}$ satisfait l'équation différentielle

$$x^2 f^{(4)}(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+7)x - \frac{a}{2}x^2 \right) f^{(3)}(x) = h^{(3)}(x) - 3(p+3-ax) f''(x) + 3af'(x), \quad (3.3.21)$$

équation montrant que $f_h^{(3)}$ est la solution de l'équation de Stein de la loi $GIG(p+6, a, b)$ dont le second membre est $h_3(x) = h^{(3)}(x) - 3(p+3-ax)f''(x) + 3af'(x)$. Soit

$$s(x) = x^2 \text{ et } \tau_3(x) = \frac{b}{2} + (p+7)x - \frac{a}{2}x^2.$$

On a

$$(s(x)g_3(x))' = \tau_3(x) g_3(x)$$

et

$$\begin{aligned} f_h^{(3)}(x) &= \frac{1}{s(x)g_3(x)} \int_0^x g_3(t) h_3(t) dt \\ &= \frac{-1}{s(x)g_3(x)} \int_x^{+\infty} g_3(t) h_3(t) dt \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

avec g_3 la densité de la loi $GIG(p+6, a, b)$.

Pour $p \leq -7$, τ_3 est décroissante sur $(0, \infty)$ d'unique racine $\alpha_3 = \frac{p+7+\sqrt{(p+7)^2+ab}}{a}$. Si $x \leq \alpha_3$ et si h_3 est bornée, alors

$$\left| f_h^{(3)}(x) \right| \leq \|h_3\| \frac{1}{s(x)g_3(x)} \int_0^x g_3(t) dt.$$

Soit $\ell(x) = \dfrac{1}{s(x)g_3(x)} \displaystyle\int_0^x g_3(t)dt$. ℓ est dérivable sur $(0, \infty)$ et

$$\begin{aligned} \ell'(x) &= \frac{-(s(x)g_3(x))'}{(s(x)g_3(x))^2} \int_0^x g_3(t)dt + \frac{1}{s(x)} \\ &\geq -\frac{(s(x)g_3(x))'}{(s(x)g_3(x))^2} \frac{1}{\tau_3(x)} \int_0^x \tau_3(t) g_3(t) dt + \frac{1}{s(x)} \quad \left(1 \leq \frac{\tau_3(t)}{\tau_3(x)} \ \forall t \leq x \right) \\ &= -\frac{1}{s(x)} + \frac{1}{s(x)} = 0 \quad \left((s(x)g_3(x))' = \tau_3(x) g_3(x) \text{ et } \lim_{t \to 0} s(t) g_3(t) = 0 \right). \end{aligned}$$

Donc pour $x \leq \alpha_3$, $\ell(x) \leq \ell(\alpha_3)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} |h_3(x)| &= \left| h^{(3)}(x) - 3(p+3-ax) f_h''(x) + 3af_h'(x) \right| \\ &\leq \left\| h^{(3)} \right\| + 3|p+3-ax| \left\| f_h'' \right\| + 3a \left\| f_h' \right\| \\ &\leq \left\| h^{(3)} \right\| + 3 \max \left(|p+3|, 4 + \sqrt{(p+7)^2 + ab} \right) \left\| f_h'' \right\| + 3a \left\| f_h' \right\| \quad (0 < x < \alpha_3) \\ &\leq \left\| h^{(3)} \right\| + 3 \max \left(|p+3|, 4 + \sqrt{(p+7)^2 + ab} \right) M_2 + 3aM_1 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $p \leq -7$ et $x \leq \alpha_3$, on a

$$\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq \left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(|p+3|, 4+\sqrt{(p+7)^2+ab}\right) M_2 + 3aM_1\right) \times \frac{1}{\alpha_3^2 g_3(\alpha_3)} \int_0^{\alpha_3} g_3(t)dt.$$

Pour $p \leq -7$ et $x > \alpha_3$, de l'équation (3.3.19), on a

$$f_h^{(3)}(x) = \frac{h_2(x)}{s(x)} - \frac{\tau_2(x) f_h''(x)}{s(x)}$$

$$\left|f_h^{(3)}(x)\right| \leq \frac{\|h_2\|}{s(x)} + \frac{\left|\tau_2(x) f_h''(x)\right|}{s(x)}.$$

Pour $p \leq -7$ et $x > \alpha_3$, en se rappelant que τ_2 est décroissante et négative, donc telle que $\frac{\tau_2(t)}{\tau_2(x)} \geq 1 \ \forall x \leq t$, on a

$$f_h''(x) = \frac{-1}{s(x)g_2(x)} \int_x^{+\infty} g_2(t)h_2(t)dt$$

et

$$\begin{aligned}
|\tau_2(x) f_h''(x)| &= \left|\frac{-\tau_2(x)}{s(x)g_2(x)} \int_x^{+\infty} g_2(t)h_2(t)dt\right| \\
&\leq \|h_2\| \frac{-\tau_2(x)}{s(x)g_2(x)} \int_x^{+\infty} g_2(t)dt \\
&\leq \|h_2\| \frac{-\tau_2(x)}{s(x)g_2(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\tau_2(t)}{\tau_2(x)} g_2(t)dt \\
&= \|h_2\| \frac{-1}{s(x)g_2(x)} \int_x^{+\infty} (s(t)g_2(t))' dt \\
&= \|h_2\|.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
|h_2(x)| &= \left|h''(x) - 2(p+2-ax) f_h'(x) + a f_h(x)\right| \\
&\leq \|h''\| + 2\left|(p+2-ax) f_h'(x)\right| + a\|f_h\|
\end{aligned}$$

et

$$f_h'(x) = \frac{-1}{s(x)g_1(x)} \int_x^{+\infty} g_1(t)h_1(t)dt$$

donc

$$\left|(p+2-ax) f_h'(x)\right| \leq \|h_1\| \frac{-(p+2-ax)}{s(x)g_1(x)} \int_x^{+\infty} g_1(t)dt \leq \|h_1\| \frac{p+2-ax}{\tau_1(x)}.$$

Soit

$$\kappa(x) = \frac{p+2-ax}{b/2 + (p+3)x - ax^2/2} = \frac{p+2-ax}{\tau_1(x)}.$$

κ est dérivable sur (α_3, ∞) et

$$\begin{aligned}
\kappa'(x) &= -\frac{ab + 2(p+2)(p+3) - 2a(p+2)x + a^2x^2}{2\tau_1^2(x)} \\
&= -\frac{ab + (p+2)^2 + 2(p+2) + (p+2-ax)^2}{2\tau_1^2(x)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $p \leq -3$ ou $p \geq -2$, on a $\kappa'(x) \leq 0$. Pour $-3 < p < -2$, si $1 - ab - (p+3)^2 > 0$, alors la seule possible racine positive du trinôme au numérateur de κ' est

$$\frac{p + 2 + \sqrt{1 - ab - (p+3)^2}}{a},$$

qui est inférieure à α_3. Donc pour tout $p \in \mathbb{R}$, κ est décroissante sur (α_3, ∞) et

$$\kappa(x) \leq \kappa(\alpha_3) = \frac{5a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{4p + 28 + 4\sqrt{(p+7)^2 + ab}}.$$

La fonction $h_1(x) = h'(x) - (p + 1 - ax) f_h(x)$ est telle que

$$\begin{aligned} |h_1(x)| &\leq \|h'\| + \left| \frac{-(p+1-ax)}{s(x) g_{p,a,b}(x)} \int_x^{+\infty} g_{p,a,b}(t)(h(t) - \mathbb{E}h(W))dt \right| \\ &\leq \|h'\| + \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \frac{p+1-ax}{\tau_{p,a,b}(x)}. \end{aligned}$$

La fonction $v : x \mapsto \dfrac{p+1-ax}{\tau_{p,a,b}(x)}$ étant décroissante sur (α_3, ∞), pour tout $x > \alpha_3$, on a

$$v(x) \leq v(\alpha_3) = \frac{6a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{6p + 42 + 6\sqrt{(p+7)^2 + ab}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left|(p + 2 - ax) f_h'(x)\right| \leq \frac{5a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{4p + 28 + 4\sqrt{(p+7)^2 + ab}} \times \\ \left(\|h'\| + \frac{6a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{6p + 42 + 6\sqrt{(p+7)^2 + ab}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|h_2\| \leq \|h''\| + a\|f_h\| + \frac{5a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{2p + 14 + 2\sqrt{(p+7)^2 + ab}} \times \\ \left(\|h'\| + \frac{6a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{6p + 42 + 6\sqrt{(p+7)^2 + ab}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \end{aligned}$$

D'où pour $p \leq -7$ et $x > \alpha_3$, on a

$$\begin{aligned} \left\|f_h^{(3)}\right\| \leq \frac{5a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{\alpha_3^2 \left(p + 7 + \sqrt{(p+7)^2 + ab}\right)} \times \\ \left(\|h'\| + \frac{6a + a\sqrt{(p+7)^2 + ab}}{6p + 42 + 6\sqrt{(p+7)^2 + ab}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \\ + \frac{2}{\alpha_3^2} \left(\|h''\| + aM \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right). \end{aligned}$$

Soit $p > -7$.

– Sur $\left(0, \frac{p+7}{a}\right)$, τ_3 est telle que $\frac{\tau_3(t)}{\tau_3(0)} \geq 1, \ \ \forall 0 \leq t \leq \frac{p+7}{a}$, et puisque

$$\begin{aligned} |h_3(x)| &\leq \left\|h^{(3)}\right\| + 3|p + 3 - ax| \left\|f_h''\right\| + 3a \left\|f_h'\right\| \\ &\leq \left\|h^{(3)}\right\| + 3\max(4, |p+3|) \left\|f_h''\right\| + 3a \left\|f_h'\right\| \\ &\leq \left\|h^{(3)}\right\| + 3\max(4, |p+3|) M_2 + 3aM_1, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}|f_h^{(3)}(x)| &\leq \|h_3\| \frac{1}{s(x)g_3(x)} \int_0^x g_3(t)dt \\ &\leq \|h_3\| \frac{1}{\tau_3(0)s(x)g_3(x)} \int_0^x \tau_3(t)g_3(t)dt \\ &= \frac{1}{\tau_3(0)} \|h_3\| \\ &= \frac{2}{b} \|h_3\| .\end{aligned}$$

D'où

$$\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq \frac{2}{b}\left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(4, |p+3|\right) M_2 + 3aM_1\right).$$

– Sur $\left(\frac{p+7}{a}, \infty\right)$, les arguments sont les mêmes que dans les cas précédents.

□

3.3.6 Borne des dérivées successives d'ordre supérieur à 3 de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG

Le résultat suivant permet de borner la dérivée d'ordre k, $k \geq 4$ par un calcul itératif. Il exprime notamment une borne de $f_h^{(k)}$ en fonction des bornes des dérivées inférieures.

Théorème 3.3.8 (théorème 2.2 Konzou *et al. [36]*). *Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Soit $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, k fois différentiable telle que la j-ième dérivée $h^{(j)}$ de h est bornée pour tout entier $j \leq k$. Alors la dérivée d'ordre k de la solution f_h de l'équation de Stein (3.3.5) est telle que*

$$\left\|f_h^{(k)}\right\| \leq M_k = \begin{cases} \max(G_1^k, G_2^k), & si \quad p \leq -2k-1 \\ \max(G_3^k, G_4^k, G_2^k), & si \quad p > -2k-1 \end{cases} \tag{3.3.23}$$

avec

$$G_1^k = H \times \frac{1}{\alpha_k^2 g_k(\alpha_k)} \int_0^{\alpha_k} g_k(t)dt,$$

$$G_2^k = \frac{2}{\alpha_k^2} \|h_{k-1}\| ,$$

$$\|h_{k-1}\| \leq \left\|h^{(k-1)}\right\| + \frac{a(k-1)\left(k+2+\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}\right)}{4p+8k+4+4\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}} \|h_{k-2}\| + a\left(3 + \frac{(k-4)(k+1)}{2}\right) M_{k-3},$$

$$G_3^k = \frac{2}{b}\left(\left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(k+1, |p+k|\right) M_{k-1} + a\left(3 + \frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) M_{k-2}\right),$$

$$G_4^k = H \times \frac{a^2}{(p+2k+1)^2 g_k\left(\frac{p+2k+1}{a}\right)},$$

$$H = \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|p+k|, k+1+\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}\right) M_{k-1} + a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) M_{k-2},$$

et

$$\alpha_k = \frac{p+2k+1+\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}}{a},$$

où g_k *désigne la densité de la loi* $GIG(p+2k,a,b)$ *et la constante* M_i *est telle que* $\left\|f_h^{(i)}\right\| \leq M_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \cdots, k$.

Remarque 12. Döbler *et al.* [19] ont développé une technique itérative assez générale pour borner explicitement les dérivées successives de la solution de l'équation de Stein (3.1.2), mais nous n'avons pas pu adapter cette technique à la solution de l'équation de Stein des lois GIG et de Kummer. En effet, cette technique utilise l'opérateur $T_j f_h = \alpha_{j+1} f_h + \beta_{j+1} f_h'$ où f_h est la solution de l'équation de Stein (3.1.2), α_{j+1} et β_{j+1} sont des coefficients constants (lemme 2.5 dans [19]). Dans le cas des lois GIG et de Kummer, β_{j+1} n'est ni constant, ni borné.

Preuve[du théorème 3.3.8]

Supposons $p \leq -2k-1$. La fonction $f_h^{(k)}$ satisfait l'équation différentielle

$$x^2 f^{(k+1)}(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+1+2k)x - \frac{a}{2}x^2\right) f^{(k)}(x) = h_k(x) \tag{3.3.24}$$

avec

$$h_k(x) = h^{(k)}(x) - k(p+k-ax) f^{(k-1)}(x) + \left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) a f^{(k-2)}(x). \tag{3.3.25}$$

De l'équation (3.3.24), on déduit que $f_h^{(k)}$ résout l'équation de Stein de la loi $GIG(p+2k,a,b)$ dont le second membre est h_k donné par (3.3.25). Soit g_k, la densité de probabilité de la loi $GIG(p+2k,a,b)$. Alors

$$\begin{aligned} f_h^{(k)}(x) &= \frac{1}{s(x)g_k(x)} \int_0^x g_k(t)h_k(t)dt \\ &= \frac{-1}{s(x)g_k(x)} \int_x^{+\infty} g_k(t)h_k(t)dt. \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

Pour $p \leq -2k-1$, τ_3 est décroissante sur $(0,\infty)$ d'unique racine α_k. Si $x \leq \alpha_k$ et si h_k est bornée, alors des résultats précédents, on a

$$\left|f_h^{(k)}(x)\right| \leq \|h_k\| \frac{1}{\alpha_k^2 g_k(\alpha_k)} \int_0^{\alpha_k} g_k(t)dt.$$

h_k est telle que

$$\begin{aligned} |h_k(x)| &= \left|h^{(k)}(x) - k(p+k-ax) f_h^{(k-1)}(x) + \left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) a f_h^{(k-2)}(x)\right| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k|p+k-ax| \left\|f_h^{(k-1)}\right\| + a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) \left\|f_h^{(k-2)}\right\| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|p+k|, k+1+\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}\right) \left\|f_h^{(k-1)}\right\| \\ &+ a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) \left\|f_h^{(k-2)}\right\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $p \leq -2k-1$ et $x \leq \alpha_k$, en définissant M_k tel que $\left\|f_h^{(k)}\right\| \leq M_k \; \forall k \geq 1$,

$$\left\|f_h^{(k)}\right\| \leq H \times \frac{1}{\alpha_k^2 g_k(\alpha_k)} \int_0^{\alpha_k} g_k(t)dt$$

avec

$$H = \left\|h^{(k)}\right\| + k \max\left(|p+k|, k+1+\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}\right) M_{k-1} + a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) M_{k-2}.$$

Pour $p \leq -2K-1$ et $x > \alpha_k$, en remplaçant k par $k-1$ dans l'équation (3.3.24) , on déduit

$$f_h^{(k)}(x) = \frac{h_{k-1}(x)}{s(x)} - \frac{\tau_{k-1}(x) f_h^{k-1}(x)}{s(x)}$$

$$\left|f_h^{(k)}(x)\right| \leq \frac{\|h_{k-1}\|}{s(x)} + \frac{\left|\tau_{k-1}(x) f_h^{k-1}(x)\right|}{s(x)}.$$

Pour $p \leq -2k-1$ et $x \leq \alpha_k$, τ_{k-1} est décroissante et négative, donc telle que $\dfrac{\tau_{k-1}(t)}{\tau_k(x)} \geq 1, \;\; \forall x \leq t$.
On a

$$\begin{aligned}
|\tau_{k-1}(x) f_h^{(k-1)}(x)| &= \left|\frac{-\tau_{k-1}(x)}{s(x)g_{k-1}(x)} \int_x^{+\infty} g_{k-1}(t)h_{k-1}(t)dt\right| \\
&\leq \|h_{k-1}\| \frac{-\tau_{k61}(x)}{s(x)g_{k-1}(x)} \int_x^{+\infty} g_{k-1}(t)dt \\
&\leq \|h_{k-1}\| \frac{-\tau_{k-1}(x)}{s(x)g_{k-1}(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\tau_{k-1}(t)}{\tau_{k-1}(x)} g_{k-1}(t)dt \\
&= \|h_{k-1}\| \frac{-1}{s(x)g_{k-1}(x)} \int_x^{+\infty} (s(t)g_{k-1}(t))' dt \\
&= \|h_{k-1}\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|h_{k-1}(x)| &\leq \left\|h^{(k-1)}\right\| + (k-1)\left|(p+k-1-ax)f^{(k-2)}(x)\right| \\
&+ \left(3+\frac{(k-4)(k+1)}{2}\right) a \left\|f^{(k-3)}\right\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|(p+k-1-ax)f^{(k-2)}(x)\right| &= \left|\frac{-(p+k-1-ax)}{s(x)g_{k-2}} \int_x^{\infty} g_{k-2}(t)h_{k-2}(t)dt\right| \\
&\leq \|h_{k-2}\| \frac{-(p+k-1-ax)}{s(x)g_{k-2}} \int_x^{\infty} g_{k-2}(t)(t)dt \\
&\qquad (p+k-1-ax < 0 \;\; \forall x > \alpha_k) \\
&\leq \|h_{k-2}\| \frac{-(p+k-1-ax)}{s(x)g_{k-2}\tau_{k-2(x)}} \int_x^{\infty} \tau_{k-2}(t)g_{k-2}(t)(t)dt \\
&= \|h_{k-2}\| \frac{-(p+k-1-ax)}{s(x)g_{k-2}\tau_{k-2(x)}} \int_x^{\infty} (s(t)g_{k-2}(t)(t))' dt \\
&= \|h_{k-2}\| \frac{p+k-1-ax}{\tau_{k-2(x)}}.
\end{aligned}$$

Considérons

$$\varphi(x) = \frac{p+k-1-ax}{\tau_{k-2(x)}} = \frac{p+k-1-ax}{\frac{b}{2}+(p+2k-3)x-\frac{a}{2}x^2}.$$

φ est dérivable sur (α_k, ∞) et

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\frac{ab + 2(p+k-1)(p+2k-3) - 2a(p+k-1)x + a^2x^2}{2\tau_{k-2}^2(x)} \\ &= -\frac{ab + (p+k-1)^2 + 2(p+k-1)(k-2) + (p+k-1-ax)^2}{2\tau_{k-2}^2(x)}.\end{aligned}$$

Pour $p \leq -2k+3$ ou $p \geq -k+1$, $\varphi'(x) \leq 0$ et $\varphi(x) \leq \varphi(\alpha_k)$ pour tout $x > \alpha_k$.
Pour $-2k+3 < p < -k+1$, si $(k-2)^2 - (p+2k-3)^2 - ab > 0$, alors l'unique zéro positif possible du trinôme au numérateur de φ' est

$$\frac{p+k-1+\sqrt{(k-2)^2-(p+2k-3)^2-ab}}{a} < \alpha_k.$$

Donc pour tout $x > \alpha_k$ et pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) \leq \varphi(\alpha_k) = \frac{(k+2)a + a\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}}{4p+8k+4+4\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}}.$$

Par conséquent, pour $x > \alpha_k$,

$$\begin{aligned}\|h_{k-1}\| \leq \left\|h^{(k-1)}\right\| + \frac{a(k-1)\left(k+2+\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}\right)}{4p+8k+4+4\sqrt{(p+2k+1)^2+ab}} \|h_{k-2}\| \\ + a\left(3+\frac{(k-4)(k+1)}{2}\right) M_{k-3}.\end{aligned}$$

Supposons $p > -2k-1$.
– Sur $\left(0, \frac{p+2K+1}{a}\right)$, τ_k est telle que $\frac{\tau_k(t)}{\tau_k(0)} \geq 1, \ \ \forall 0 \leq t \leq \frac{p+2k+1}{a}$, et du fait que

$$\begin{aligned}|h_k(x)| &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k|p+k-ax| \left\|f_h^{k-1}\right\| + a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right)\left\|f_h^{k-2}\right\| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|p+k|, k+1\right)\left\|f_h^{k-1}\right\| + a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right)\left\|f_h^{k-2}\right\| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|p+k|, k+1\right) M_{k-1} + a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) M_{k-2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f_h^{(k)}(x)| &\leq \|h_k\| \frac{1}{s(x)g_k(x)} \int_0^x g_k(t)dt \\ &\leq \|h_k\| \frac{1}{\tau_k(0)s(x)g_k(x)} \int_0^x \tau_k(t)g_k(t)dt \\ &= \frac{1}{\tau_k(0)} \|h_k\| \\ &= \frac{2}{b} \|h_k\|,\end{aligned}$$

$$\left\|f_h^{(k)}\right\| \leq \frac{2}{b}\left(\left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|p+k|, k+1\right) M_{k-1} + a\left(3+\frac{(k-3)(k+2)}{2}\right) M_{k-2}\right).$$

– Sur $\left(\frac{p+2k+1}{a}, \infty\right)$, on raisonne de façon analogue que dans les cas précédents.

□

Nous disons dans ce qui suit un mot sur les bornes des dérivées successives de la solution de l'équation de Stein de la loi GIG au sens du théorème 3.2.2. Bien que les bornes ne soient pas explicitement fournies, elles sont optimales pour les fonctions tests lipschitziennes.

3.3.7 Sur les bornes des dérivées successives de la solution de l'équation de Stein pour la loi GIG au sens de Döbler

Soit $F_{p,a,b}$ la fonction de répartition de $W \sim GIG(p,a,b)$. Définissons

$$G_{p,a,b}(x) := x^2 g_{p,a,b}(x) + \tau_{p,a,b}(x)(1 - F_{p,a,b}(x)), \tag{3.3.27}$$

$$H_{p,a,b}((x) := x^2 g_{p,a,b}(x) - \tau_{p,a,b}(x) F_{p,a,b}(x) \tag{3.3.28}$$

et

$$A_{p,a,b} := \frac{2}{\sqrt{ab}} \frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}. \tag{3.3.29}$$

Des équations (3.2.25) et (3.2.26) du théorème 3.2.2, si $p \leq -1$ (dans ce cas $\tau_{p,a,b}$ est décroissante), alors

$$B_{p,a,b} := \sup_{x>0} \frac{G_{p,a,b}((x) \int_0^x F_{p,a,b}((t)dt + H_{p,a,b}(x) \int_x^{+\infty} (1 - F_{p,a,b}(t))dt}{x^4 g_{p,a,b}((x)} < \infty \tag{3.3.30}$$

et

$$C_{p,a,b} := \sup_{x>0} \frac{G_{p,a,b}((x) \int_0^x F_{p,a,b}(t)dt + H_{p,a,b}((x) \int_x^{+\infty} (1 - F_{p,a,b}(t))dt}{x^3 g_{p,a,b}(x)} < \infty. \tag{3.3.31}$$

Un fait intéressant dans le théorème 3.3.4 est que l'on a pu déterminer explicitement un majorant de la norme de la solution de l'équation de Stein en fonction de la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce. Ce qui n'a pas été le cas pour les dérivées de cette solution. Nous avons tout de même les bornes suivantes, qui sont intéressantes par leur simplicité.

Théorème 3.3.9 (théorème 5.2 Konzou *et al. [37]*). *Soit $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$. Soit f_h la solution de l'équation de Stein de la loi GIG définie par (3.3.6).*

1. *Supposons $p \leq -1$. Si h est une fonction dérivable de dérivée bornée, alors*

$$|f_h'(x)| \leq B_{p,a,b} \|h'\|, \quad |x f_h'(x)| \leq C_{p,a,b} \|h'\|.$$

2. *Supposons $p \leq -3$. si h est une fonction deux fois dérivables, de dérivée première et seconde bornées, alors*

$$|f_h''(x)| \leq B_{p+2,a,b} \left[\|h''\| + (A_{p,a,b} + (p+1)B_{p,a,b} + aC_{p,a,b}) \|h'\|\right],$$

$$|x f_h''(x)| \leq C_{p+2,a,b} \left[\|h''\| + (A_{p,a,b} + (p+1)B_{p,a,b} + aC_{p,a,b}) \|h'\|\right].$$

3. *Soit $k \geq 1$. Supposons $p \leq -2k+1$. Si h est k fois dérivable avec $h^{(j)}$ bornée pour $j = 1, \ldots, k$, alors*

$$\left|f_h^{(k)}(x)\right| \leq B_{p+2k-2,a,b} \left\|h'_{k-1}\right\|$$

et

$$\left|x f_h^{(k)}(x)\right| \leq C_{p+2k-2,a,b} \left\|h'_{k-1}\right\|$$

où

$$h_{k-1}(x) = h^{(k-1)}(x) - (k-1)(p+k-1-ax) f^{(k-2)}(x) + \left(3 + \frac{(k-4)(k+1)}{2}\right) a f^{(k-3)}(x).$$

Preuve

Pour $p \leq -1$, la fonction $\tau_{p,a,b}$ est décroissante et l'on obtient la première assertion par le théorème 3.2.2.

La dérivée f_h' de f_h satisfait l'équation différentielle

$$x^2 f''(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+3)x - \frac{a}{2}x^2\right) f'(x) = h'(x) - (p+1-ax)f(x). \tag{3.3.32}$$

Soit $h_1(x) = h'(x) - (p+1-ax)f_h(x)$. Alors, l'équation (3.3.32) montre que f_h' résout l'équation différentielle

$$x^2 f'(x) + \left(\frac{b}{2} + (p+3)x - \frac{a}{2}x^2\right) f(x) = h_1(x) \tag{3.3.33}$$

qui est l'équation de Stein de la loi $GIG(p+2, a, b)$. Puisque $p \leq 3$, on a $p+2 \leq -1$ et par l'assertion 1,

$$\left|f_h''(x)\right| \leq B_{p+2,a,b} \left\|h_1'\right\| \quad \text{et} \quad \left|x f_h''(x)\right| \leq C_{p+2,a,b} \left\|h_1'\right\|.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left|h_1'(x)\right| &= \left|h''(x) - (p+1-ax)f_h'(x) + a f_h(x)\right| \\
&\leq \left\|h''\right\| - (p+1)\left\|f_h'\right\| + a\left|x f_h'(x)\right| + a\left\|f_h\right\| \\
&\leq \left\|h''\right\| - (p+1)B_{p,a,b}\left\|h'\right\| + aC_{p,a,b}\left\|h'\right\| + a\frac{2}{\sqrt{ab}}\frac{K_{p+1}(\sqrt{ab})}{K_p(\sqrt{ab})}\left\|h'\right\| \\
&= \left\|h''\right\| + \left(\frac{2\sqrt{a}K_{p+1}(\sqrt{ab})}{\sqrt{b}K_p(\sqrt{ab})} - (p+1)B_{p,a,b} + aC_{p,a,b}\right)\left\|h'\right\|,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion 2.

Par récurrence, la fonction $f_h^{(k-1)}$ vérifie l'équation différentielle

$$x^2 f^{(k)}(x) + \left(\frac{b}{2} + (p-1+2k)x - \frac{a}{2}x^2\right) f^{(k-1)}(x) = h_{k-1}(x) \tag{3.3.34}$$

avec

$$h_{k-1}(x) = h^{(k-1)}(x) - (k-1)(p+k-1-ax)f^{(k-2)}(x) + \left(3 + \frac{(k-4)(k+1)}{2}\right) a f^{(k-3)}(x). \tag{3.3.35}$$

L'équation (3.3.34) prouve que $f_h^{(k)}$ est la solution de l'équation de Stein de la loi GIG$(p+2(k-1), a, b)$ dont le second membre est h_k donné par (3.3.35). Pour $p \leq -2k+1$, on a $(p+2(k-1) \leq -1$ et toutes les hypothèses des théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 sont satisfaites. Ainsi,

$$\left|f_h^{(k)}(x)\right| \leq B_{p+2(k-1),a,b}\left\|h_{k-1}'\right\| \quad \text{et} \quad \left|x f_h^{(k)}(x)\right| \leq C_{p+2(k-1),a,b}\left\|h_{k-1}'\right\|.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\left|h_{k-1}'(x)\right| &\leq \left|h^{(k)}(x) - (k-1)(p+k-1-ax)f^{(k-1)}(x) + (k-1)af^{(k-2)}(x)\right| \\
&\quad + \left|\left(3 + \frac{(k-4)(k+1)}{2}\right) a f^{(k-2)}(x)\right| \\
&\leq \left\|h^{(k)}\right\| - (k-1)(p+k-1)\left\|f^{(k-1)}\right\| + (k-1)a\left|x f_h^{(k-1)}(x)\right| \\
&\quad + \left(3 + \frac{(k-4)(k+1)}{2}\right) a \left\|f^{(k-2)}\right\|.
\end{aligned}$$

Par un calcul de proche en proche, h_{k-1}' est bornée. D'où l'assertion 3.

□

Nous établissons dans la section suivante des résultats similaires à ceux de la section précédente pour la loi de Kummer.

3.4 Caractérisation de Stein pour la loi de Kummer

Nous établissons dans cette section des résultats similaires à ceux obtenus dans la section précédente pour la loi de Kummer. Nous commençons par caractériser cette dernière loi à la Stein, ensuite nous déterminons des bornes de la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer ainsi que de ses dérivées successives. Rappelons que pour $a > 0, b \in \mathbb{R}, c > 0$, la loi de Kummer $K(a,b,c)$ a pour densité

$$k_{a,b,c}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\psi(a, a-b+1; c)} x^{a-1}(1+x)^{-a-b}e^{-cx},\ (x > 0)$$

où ψ est la fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce donnée par (2.3.2).
Soit

$$s(x) = x(1+x) \quad \text{et} \quad \tau(x) = (1-b)x - cx(1+x) + a. \tag{3.4.1}$$

Alors

$$(s(x)k_{a,b,c}(x))' = \tau(x)k_{a,b,c}(x).$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.1.1 pour obtenir la caractérisation suivante de la loi de Kummer :

Théorème 3.4.1. *Une variable aléatoire X suit la loi $K(a,b,c)$ si et seulement si, pour toute fonction différentiable f telle que l'espérance suivante existe, on ait*

$$\mathbb{E}\left[X(X+1)(f'(X) + ((1-b)X - cX(1+X) + a)f(X)\right] = 0.$$

L'équation différentielle correspondante est alors

$$x(x+1)f'(x) + [(1-b)x - cx(1+x) + a]f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W) \tag{3.4.2}$$

où $W \sim K(a,b,c)$ et h une fonction réelle bornée.

On a

$$s(x)k_{a,b,c}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\psi(a, a-b+1; c)} x^{a}(1+x)^{1-a-b}e^{-cx},\ \ x > 0$$

et on voit bien que $\lim\limits_{x\to\infty} s(x)k_{a,b,c}(x) = \lim\limits_{x\to 0} s(x)k_{a,b,c}(x) = 0$.

3.4.1 Borne de la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer

Théorème 3.4.2 (théorèmes 4.2 et 4.4 Konzou *et al. [35]*). *L'unique solution bornée de l'équation de Stein (3.4.2) de la loi de Kummer est*

$$\begin{aligned} f_h(x) =& \frac{1}{s(x)k_{a,b,c}(x)} \int_0^x k_{a,b,c}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right]dt \\ =& \frac{-1}{s(x)k_{a,b,c}(x)} \int_x^{+\infty} k_{a,b,c}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right]dt \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

avec W une variable aléatoire de loi $K(a,b,c)$.
Si h est une fonction continue et bornée, alors f_h définie par (3.4.3) est l'unique solution bornée de (3.4.2) et

$$||f_h|| \leq K\,||h(.) - \mathbb{E}h(W)||$$

avec

$$K = \begin{cases} \max\left(\dfrac{1}{s(\alpha)k_{a,b,c}(\alpha)}\displaystyle\int_0^{\alpha} k_{a,b,c}(t)dt; \dfrac{1}{s(\alpha)k_{a,b,c}(\alpha)}\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} k_{a,b,c}(t)dt\right), & si\ 1 \leq b+c \\ \max\left(\frac{1}{a}, \dfrac{c^2}{(1-b)(1-b-c)k_{a,b,c}(\frac{1-b-c}{c})}\right), & si\ 1-b-c > 0 \end{cases} \tag{3.4.4}$$

et

$$\alpha = \frac{1-b-c+\sqrt{(1-b-c)^2+4ac}}{2c}. \tag{3.4.5}$$

Remarque 13. Pour $1-b-c \leq 0$, en majorant les intégrales dans l'expression de K par 1, on a

$$K \leq \frac{1}{\alpha(\alpha+1)k_{a,b,c}(\alpha)}$$
$$= \frac{2c^2}{\left(2ac+(1-b)\left(1-b-c+\sqrt{(1-b-c)^2+4ac}\right)\right)k_{a,b,c}\left(\frac{1-b-c+\sqrt{(1-b-c)^2+4ac}}{2c}\right)}.$$

Preuve[du théorème 3.4.2]

La proposition 3.1.2 permet d'obtenir la solution (3.4.3) de l'équation (3.4.2). Les propositions 3.1.6 et 3.1.7 permettent d'obtenir une borne de f_h pour $1-b-c \leq 0$ et $1-b-c > 0$ respectivement.

□

Tout comme dans le cas de la loi gaussienne inverse généralisée, les hypothèses du Théorème 3.2.1 sont vérifiées avec

$$s(x) = x(x+1), \;\; \tau(x) = (1-b)x - cx(1+x) + a, \;\; g = k_{a,b,c}.$$

De ce fait, en rappelant que si $W \sim K(a,b,c)$ alors

$$\mathbb{E}(W) = a\frac{\psi(a+1,2-b;c)}{\psi(a,1-b;c)}, \tag{3.4.6}$$

nous avons la borne suivante de la solution f_h de l'équation de Stein de la loi de Kummer

Théorème 3.4.3 (théorème 5.3 Konzou *et al. [37]*). *Soit f_h la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer définie par (3.4.3). Pour toute fonction test h, lipschitzienne,*

$$\|f_h\| \leq \frac{\psi(a+1,2-b;c)}{\psi(a,1-b;c)}\|h'\|. \tag{3.4.7}$$

Comme remarqué dans le cas de la loi GIG, le fait $\tau(\mathbb{E}(W)) \geq 0$ implique $\mathbb{E}(W) \leq \beta$, où

$$\beta = \frac{1-b-c+\sqrt{(1-b-c)^2+4ac}}{2c}$$

est l'unique zéro de τ sur $(0,\infty)$. Ce qui permet d'avoir la propriété suivante de la fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce

Propriété 8 (remarque 5.2 Konzou *et al. [37]*). *Soit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$. La fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce ψ définie par (2.3.2) vérifie*

$$2ac\frac{\psi(a+1,2-b;c)}{\psi(a,1-b;c)} \leq 1-b-c+\sqrt{(1-b-c)^2+4ac}. \tag{3.4.8}$$

Du lemme 3.2.1, on a :

$$\mathbb{E}\left(\tau(W)\right) = 0 \tag{3.4.9}$$

En considérant l'expression de $\mathbb{E}(W)$ donnée par (3.4.6) et celle de $\mathbb{E}(W^2)$ donnée par

$$\mathbb{E}(W^2) = a(a+1)\frac{\psi(a+2,3-b;c)}{\psi(a,1-b;c)},$$

on obtient

$$-ac(a+1)\frac{\psi(a+2,3-b;c)}{\psi(a,1-b;c)} + (1-b-c)a\frac{\psi(a+1,2-b;c)}{\psi(a,1-b;c)} + a = 0$$

Et l'on obtient la relation de récurrence suivante vérifiée par ψ.

Propriété 9. *Soit $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$. La fonction hypergéométrique confluente de deuxième espèce ψ définie par (2.3.2) vérifie*

$$\psi(a+2,b+2;c) = \frac{1}{c(a+1)}\left((b-c)\psi(a+1,b+1;c) + \psi(a,b;c)\right). \tag{3.4.10}$$

3.4.2 Borne de la dérivée première de la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer

Théorème 3.4.4 (théorème 4.5 Konzou *et al. [35]*). *Soit* $\boldsymbol{h}$ *une fonction continue, bornée et dérivable telle que la dérivée* $\boldsymbol{h'}$ *de* $\boldsymbol{h}$ *est bornée. Considérons la solution* $\boldsymbol{f_h}$ *de l'équation de Stein* (3.4.2) *associée à la loi de Kummer de paramètres* $\boldsymbol{a, b, c}$.

Soit $\boldsymbol{\alpha_1 = \dfrac{3-b-c+\sqrt{(3-b-c)^2+4c(a+1)}}{2c}}$. *Alors*

$$\|f_h'\| \leq K_1 = \begin{cases} \max\left(K_2^1, K_3^1\right), & si \;\; 3-b-c \leq 0 \\ \max\left(K_1^1, K_3^1, K_4^1\right), & si \;\; 3-b-c > 0 \end{cases} \tag{3.4.11}$$

avec

$$K_1^1 = \frac{1}{a+1}\left(\|h'\| + \max(2, |1-b-c|)K\,\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$K_2^1 = \left(\|h'\| + (2+\sqrt{(3-b-c)^2+4ab})K\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right) \times \frac{1}{\alpha_1(1+\alpha_1)k_{a+1,b-2,c}(\alpha_1)}\int_0^{\alpha_1} k_{a+1,b-2,c}(t)dt,$$

$$K_3^1 = \frac{2}{\alpha_1(1+\alpha_1)}\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|,$$

$$K_4^1 = \left(\|h'\| + (2+\sqrt{(3-b-c)^2+4c(a+1)})K\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right) \times \frac{c^2}{(3-b)(3-b-c)k_{a+1,b-2,c}(\frac{3-b-c}{c})},$$

$\boldsymbol{K}$ *est donné par* (3.4.4), $\boldsymbol{W \sim K(a+1, b-2, c)}$.

Preuve

Supposons $\boldsymbol{3-b-c \leq 0}$. $\boldsymbol{f_h'}$ vérifie l'équation différentielle

$$x(1+x)f''(x)+((3-b)x - cx(1+x)+a+1)\,f'(x) = h'(x)-(1-b-c-2cx)f(x). \tag{3.4.12}$$

Considérons $\boldsymbol{h_1(x) = h'(x) - (1-b-c-2cx)f_h(x)}$. $\boldsymbol{f_h'}$ résout l'équation (3.4.12) qui est l'équation de Stein de la loi $\boldsymbol{K(a+1, b-2, c)}$, le second membre étant $\boldsymbol{h_1(x) = h'(x) - (1-b-c-2cx)f_h(x)}$. Soit

$$s(x) = x(1+x) \quad \text{et} \quad \tau_1(x) = (3-b)x - cx(1+x) + a + 1, \tag{3.4.13}$$

on a

$$(s(x)k_1(x))' = \tau_1(x)k_1(x)$$

où $\boldsymbol{k_1 := k_{a+1,b-2,c}}$ est la densité de la loi $\boldsymbol{K(a+1, b-2, c)}$. Pour $\boldsymbol{3-b-c \leq 0}$, τ_1 est décroissante sur $(0, \infty)$ et admet une seule racine

$$\alpha_1 = \frac{3-b-c+\sqrt{(3-b-c)^2+4ab}}{2c}.$$

Si $x < \alpha_1$, et si h_1 est bornée alors la solution f_h' de l'équation (3.4.12) est telle que

$$\begin{aligned} \|f_h'\| &\leq \|h_1\|\,\frac{1}{s(x)k_1(x)}\int_0^x k_1(t)dt \\ &\leq \|h_1\|\,\frac{1}{s(\alpha_1)k_1(\alpha_1)}\int_0^{\alpha_1} k_1(t)dt \;\; \left(x \mapsto \frac{1}{s(x)k_1(x)}\int_0^x k_1(t)dt \;\text{ est croissante sur } (0, \alpha_1)\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
|h_1(x)| &= |h'(x) - (1-b-c-2cx)f(x)| \\
&\leq \|h'\| + |1-b-c-2cx|\,\|f_h\| \\
&= \|h'\| + (-1+b+c+2cx)\,\|f_h\| \quad (1-b-c-2cx<0) \\
&\leq \|h'\| + (-1+b+c+2c\alpha_1)\,\|f_h\| \quad (x<\alpha_1) \\
&= \|h'\| + (2+\sqrt{(3-b-c)^2+4c(a+1)})\,\|f_h\| \\
&\leq \|h'\| + (2+\sqrt{(3-b-c)^2+4c(a+1)})K\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $3-b-c\leq 0$ et $x\leq\alpha_1$,

$$\|f_h'\| \leq \left(\|h'\| + (2+\sqrt{(3-b-c)^2+4c(a+1)})K\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right)\times \frac{1}{s(\alpha_1)k_1(\alpha_1)}\int_0^{\alpha_1} k_1(t)dt.$$

Si $3-b-c\leq 0$ et si $x\geq\alpha_1$, τ (donné par (3.4.1)) est décroissante et négative. De l'équation (3.4.2),

$$\begin{aligned}
f_h'(x) &= \frac{h(x)-\mathbb{E}h(W)}{s(x)} - \frac{\tau(x)f_h(x)}{s(x)} \\
|f_h'(x)| &\leq \frac{\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|}{s(x)} + \frac{|\tau(x)f_h(x)|}{s(x)} \\
|\tau(x)f_h(x)| &= \left|\frac{-\tau(x)}{s(x)k(x)}\int_x^{+\infty} k(t)[h(t)-\mathbb{E}h(W)]dt\right| \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\,\frac{-\tau(x)}{s(x)k(x)}\int_x^{+\infty} k(t)dt \quad (\tau \text{ est négative}) \\
&\leq \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\,\frac{-\tau(x)}{s(x)k(x)}\int_x^{+\infty} \frac{\tau(t)}{\tau(x)}k(t)dt \quad \left(\frac{\tau(t)}{\tau(x)}\geq 1\ \forall x\leq t\right) \\
&= \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\,.
\end{aligned}$$

D'où

$$|f_h'(x)| \leq \frac{2}{s(x)}\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\,.$$

Sur $(\alpha_1,+\infty)$, $\dfrac{2}{s(x)} \leq \dfrac{2}{s(\alpha_1)} = \dfrac{2}{\alpha_1(1+\alpha_1)}$ et

$$\|f_h'\| \leq \frac{2}{\alpha_1(1+\alpha_1)}\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\,.$$

Supposons $3-b-c>0$

– Sur $\left(0,\frac{3-b-c}{2c}\right)$, puisque

$$\begin{aligned}
||h_1|| &\leq \|h'\| + |1-b-c-2cx|\,\|f_h\| \\
&\leq \|h'\| + \max(2,|1-b-c|)\,\|f_h\| \\
&\leq \|h'\| + \max(2,|1-b-c|)K\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|
\end{aligned}$$

et que $\frac{\tau_1(t)}{\tau_1(0)} \geq 1, \ \ \forall 0 \leq t \leq \frac{3-b-c}{2c}$, on a

$$\begin{aligned}
|f_h'| &\leq \|h_1\| \frac{1}{s(x)k_1(x)} \int_0^x k_1(t)dt \\
&\leq \|h_1\| \frac{1}{\tau_1(0)s(x)k_1(x)} \int_0^x \tau_1(t)k_1(t)dt \\
&= \frac{1}{\tau_1(0)} \|h_1\| \\
&= \frac{1}{a+1} \|h_1\| .
\end{aligned}$$

D'où

$$\|f_h'\| \leq \frac{1}{a+1} \left(||h'|| + \max(2, 1-b-c)K \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right).$$

– Sur $\left(\frac{3-b-c}{2c}, \infty\right)$, on utilise les mêmes arguments que dans le cas $3-b-c \leq 0$ et le fait que sur ce dernier intervalle,

$$\frac{1}{\alpha_1(1+\alpha_1)k_{a+1,b-2,c}(\alpha_1)} \int_0^{\alpha_1} k_{a+1,b-2,c}(t)dt \leq \frac{c^2}{(3-b)(3-b-c)k_{a+1,b-2,c}(\frac{3-b-c}{c})}.$$

□

3.4.3 Borne de la dérivée seconde de la solution de l'équation de Stein de la loi de Kummer

Théorème 3.4.5 (théorème 4.6 Konzou *et al. [35]*). *Soit h une fonction bornée, deux fois dérivable telle que h' et h'' sont bornées. Soit*

$$\alpha_2 = \frac{5-b-c+\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)}}{2c}.$$

La dérivée seconde f_h'' de la solution f_h de l'équation (3.4.2) est telle que

$$\|f_h''\| \leq K_2 = \begin{cases} \max\left(K_2^2, K_3^2\right), & si \ \ 5-b-c \leq 0 \\ \max\left(K_1^2, K_3^2, K_4^2\right), & si \ \ 5-b-c > 0 \end{cases}$$

avec

$$K_1^2 = \frac{1}{a+2} \left(\|h''\| + \max(6, |4-2b-2c|)K_1 + 2cK \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right),$$

$$K_2^2 = \left(\|h''\| + (6 + 2\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)})K_1 + 2cK \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \times \frac{1}{\alpha_2(\alpha_2+1)k_{a+2,b-4,c}(\alpha_2)} \int_0^{\alpha_2} k_{a+2,b-4,c}(t)dt,$$

$$K_2^3 = \frac{2}{\alpha_2(1+\alpha_2)} \left(||h'|| + \frac{4c + c\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)}}{10-2b+2\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right),$$

$$K_4^2 = \left(\|h''\| + (6 + 2\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)})K_1 + 2cK \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \right) \times \frac{c^2}{(5-b)(5-b-c)k_{a+2,b-4,c}\left(\frac{5-b-c}{c}\right)},$$

K *est donné par (3.4.4) et K_1 par (3.4.11).* $W \sim K(a,b,c)$.

Preuve

Cas $5-b-c\leq 0$:

f_h'' vérifie l'équation différentielle

$$x(1+x)f^{(3)}(x)+(a+2+(5-b)x-cx(1+x))\,f''(x)=h_2(x) \tag{3.4.14}$$

avec $h_2(x)=h''(x)-2(2-b-c-2cx)f'(x)+2cf(x)$. C'est l'équation de Stein pour la loi $K(a+2,b-4,c)$ avec f remplacée par f'' et dont le second membre est h_2.

Soit

$$s(x)=x(1+x)\quad\text{et}\quad\tau_2(x)=a+2+(5-b)x-cx(1+x), \tag{3.4.15}$$

On a

$$(s(x)k_2(x))'=\tau_2(x)k_2(x)$$

où $k_2:=k_{a+2,b-4,c}$ désigne la densité de la loi $K(a+2,b-4,c)$.

Pour $5-b-c\leq 0$, τ_2 est décroissante sur $(0,\infty)$ et a pour seule racine

$$\alpha_2=\frac{5-b-c+\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)}}{2c}.$$

Si $x<\alpha_2$ et si h_2 est bornée, alors la solution f_h'' de l'équation (3.4.14) est telle que

$$\|f_h''\|\leq\|h_2\|\,\frac{1}{s(\alpha_2)k_2(\alpha_2)}\int_0^{\alpha_2}k_2(t)dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
|h_2(x)| &= |h''(x)-2(2-b-c-2cx)f_h'(x)+2cf_h(x)|\\
&\leq \|h''\|+2|2-b-c-2cx|\,\|f_h'\|+2c\,\|f_h\|\\
&= \|h''\|+2(-2+b+c+2cx)\,\|f_h'\|+2c\,\|f_h\| \quad (2-b-c\leq 0)\\
&\leq \|h''\|+2(-2+b+c+2c\alpha_2)\,\|f_h'\|+2c\,\|f_h\| \quad (x<\alpha_2)\\
&= \|h''\|+(6+2\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)})\,\|f_h'\|+2c\,\|f_h\|\\
&\leq \|h''\|+(6+2\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)})K_1+2cK\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $5-b-c\leq 0$ et $x\leq\alpha_2$, on a

$$\|f_h''\|\leq\left(\|h''\|+(6+2\sqrt{(5-b-c)^2+4c(a+2)})K_1+2cK\,\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right)\times\frac{1}{s(\alpha_2)k_2(\alpha_2)}\int_0^{\alpha_2}k_2(t)dt.$$

Si $5-b-c\leq 0$ et $x\geq\alpha_2$, τ_1 (définie par (3.4.13)) est négative et décroissante. L'équation (3.4.12) donne

$$\begin{aligned}
f_h''(x) &= \frac{h_1(x)}{s(x)}-\frac{\tau_1(x)f_h'(x)}{s(x)}\\
|f_h''(x)| &\leq \frac{\|h_1\|}{s(x)}+\frac{|\tau_1(x)f_h'(x)|}{s(x)}\\
|\tau_1(x)f_h'(x)| &= \left|\frac{-\tau_1(x)}{s(x)k_1(x)}\int_x^{+\infty}k_1(t)h_1(t)dt\right|\\
&\leq \|h_1\|\,\frac{-\tau_1(x)}{s(x)k_1(x)}\int_x^{+\infty}k_1(t)dt \quad (\tau_1 \text{ est négative})\\
&\leq \|h_1\|\,\frac{-\tau_1(x)}{s(x)k_1(x)}\int_x^{+\infty}\frac{\tau_1(t)}{\tau_1(x)}k_1(t)dt \quad \left(\frac{\tau_1(t)}{\tau_1(x)}\geq 1\ \forall x\leq t\right)\\
&= \|h_1\|.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|h_1| &= \left|h'(x) - (1-b-c-2cx) f_h(x)\right| \\
&\leq \left\|h'\right\| + |(1-b-c-2cx) f_h(x)| \\
&= \left\|h'\right\| + \left| -\frac{(1-b-c-2cx)}{s(x)k_{a,b,c}(x)} \int_x^{+\infty} k_{a,b,c}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt \right| \\
&\leq \left\|h'\right\| + \left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\| \frac{-(1-b-c-2cx)}{\tau(x)s(x)k_{a,b,c}(x)} \int_x^{+\infty} \tau(t)k_{a,b,c}(t)dt \\
&= \left\|h'\right\| + \left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\| \frac{1-b-c-2cx}{\tau(x)}.
\end{aligned}
$$

Considérons la fonction

$$
\beta(x) = \frac{1-b-c-2cx}{\tau(x)} = \frac{1-b-c-2cx}{a+(1-b-c)x-cx^2}.
$$

β est dérivable sur (α_2, ∞) et

$$
\beta'(x) = -\frac{2ac + (1-b-c-cx)^2 + c^2x^2}{\tau^2(x)} < 0.
$$

Par conséquent, pour tout $x \geq \alpha_2$,

$$
\beta(x) \leq \beta(\alpha_2) = \frac{4c + c\sqrt{(5-b-c)^2 + 4c(a+2)}}{10 - 2b + 2\sqrt{(5-b-c)^2 + 4c(a+2)}}.
$$

Donc pour $5-b-c \leq 0$ et $x \geq \alpha_2$,

$$
\left\|f_h''\right\| \leq \frac{2}{\alpha_2(1+\alpha_2)} \left(\left\|h'\right\| + \frac{4c + c\sqrt{(5-b-c)^2 + 4c(a+2)}}{10 - 2b + 2\sqrt{(5-b-c)^2 + 4c(a+2)}} \left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\| \right).
$$

Cas $5-b-c > 0$:

$-$ Sur $\left(\frac{5-b-c}{2c}, \infty\right)$, on argumente de la même manière que précédemment. De plus sur cet intervalle,

$$
\frac{1}{s(\alpha_2)k_2(\alpha_2)} \int_{\alpha_2}^{\infty} k_2(t)dt \leq \frac{c^2}{(5-b)(5-b-c)k_{a+2,b-4,c}\left(\frac{5-b-c}{c}\right)}.
$$

$-$ Sur $\left(0, \frac{5-b-c}{2c}\right)$, puisque

$$
\begin{aligned}
||h_2|| &\leq \left\|h''\right\| + 2|2-b-c-2cx| \left\|f_h'\right\| + 2c\left\|f_h\right\| \\
&\leq \left\|h''\right\| + \max(6, |4-2b-2c|) \left\|f_h'\right\| + 2c\left\|f_h\right\| \\
&\leq \left\|h''\right\| + \max(6, |4-2b-2c|)K_1 + 2cK\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\|
\end{aligned}
$$

et que τ_2 vérifie $\frac{\tau_2(t)}{\tau_2(0)} \geq 1, \ \ \forall 0 \leq t \leq \frac{5-b-c}{2c}$, on a

$$
\begin{aligned}
|f_h''| &\leq \|h_2\| \frac{1}{s(x)k_2(x)} \int_0^x k_2(t)dt \\
&\leq \|h_2\| \frac{1}{\tau_2(0)s(x)k_2(x)} \int_0^x \tau_2(t)k_2(t)dt \\
&= \frac{1}{\tau_2(0)} \|h_2\| \\
&= \frac{1}{a+2} \|h_2\|.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\left\|f_h''\right\| \leq \frac{1}{a+2} \left(\left\|h''\right\| + \max(6, |4-2b-2c|)K_1 + 2cK\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\| \right).
$$

□

3.4.4 Borne de la dérivée troisième de la solution de l'équation de Stein pour la loi de Kummer

Théorème 3.4.6 (théorème 3.2 Konzou *et al. [36]*). *Soit* $\boldsymbol{h:(0,\infty)\to\mathbb{R}}$ *une fonction bornée, trois fois dérivable telle que* $\boldsymbol{h'}$, $\boldsymbol{h''}$ *et* $\boldsymbol{h^{(3)}}$ *sont bornées. Soit* $\boldsymbol{\alpha_3=\dfrac{7-b-c+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{2c}}$. *Notons* $\boldsymbol{k_3}$ *la densité de la loi* $\boldsymbol{K(a+3,b-6,c)}$. *La dérivée troisième* $\boldsymbol{f_h^{(3)}}$ *de la solution* $\boldsymbol{f_h}$ *de l'équation* (3.4.2) *est telle que*

$$\left\|f_h^{(3)}\right\|\leq K_3=\begin{cases}\max(K_1^3,K_2^3), & si \quad 7-b-c\leq 0\\ \max(K_3^3,K_4^3,K_2^3), & si \quad 7-b-c>0\end{cases} \tag{3.4.16}$$

avec

$$K_1^3=\left(\left\|h^{(3)}\right\|+3\max\left(|3-b-c|,4+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}\right)K_2+6cK_1\right)\times \frac{1}{\alpha_3^2k_3(\alpha_3)}\int_0^{\alpha_3}k_3(t)dt,$$

$$K_2^3=\frac{10c+2c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{\alpha_3(1+\alpha_3)\left(7-b+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}\right)}\times \left(\|h'\|+\frac{6c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4(a+3)}}{21-3b+3\sqrt{(7-b-c)^2+4(a+3)}}\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right) +\frac{2}{\alpha_3(1+\alpha_3)}\left(\|h''\|+2cK\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$K_3^3=\frac{1}{a+3}\left(\left\|h^{(3)}\right\|+3\max\left(4,|3-b-c|\right)K_2+6cK_1\right),$$

$$K_4^3=\left(\left\|h^{(3)}\right\|+3\max\left(|3-b-c|,4+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}\right)K_2+6cK_1\right)\times \frac{4c^2}{(7-b-c)(7-b+c)k_3\left(\frac{7-b-c}{2c}\right)},$$

$\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K_1}$ *et* $\boldsymbol{K_2}$ *sont donné respectivement par* (3.4.4), (3.4.11) *et* (3.4.5), $\boldsymbol{W\sim K(a,b,c)}$.

Preuve

Supposons $\boldsymbol{7-b-c\leq 0}$. $\boldsymbol{f_h^{(3)}}$ satisfait l'équation différentielle

$$x(x+1)f^{(4)}(x)+[(7-b)x-cx(1+x)+a+3]\,f^{(3)}(x)=h_3(x) \tag{3.4.17}$$

avec

$$h_3(x)=h^{(3)}(x)-3(3-b-c-2cx)f''(x)+6cf'(x).$$

Si $\boldsymbol{U\sim K(a+3,b-6,c)}$, la caractérisation de Stein de la loi $\boldsymbol{K(a+3,b-6,c)}$ permet d'avoir

$$0=\mathbb{E}\left[U(U+1)f^{(4)}(U)+[(7-b)U-cU(1+U)+a+3]\,f^{(3)}(U)\right]=\mathbb{E}h_3(U).$$

L'équation (3.4.17) montre alors que $\boldsymbol{f_h^{(3)}}$ est la solution de l'équation de Stein de la loi $\boldsymbol{K(a+3,b-6,c)}$ dont le second membre est $\boldsymbol{h_3}$. Soit

$$s(x)=x(1+x)\ \text{ et }\ \tau_3(x)=(7-b)x-cx(1+x)+a+3.$$

En notant k_3 la densité de la loi $K(a+3, b-6, c)$, on a

$$(s(x)k_3(x))' = \tau_3(x)k_3(x)$$

et

$$\begin{aligned} f_h^{(3)}(x) =& \frac{1}{s(x)k_3(x)} \int_0^x k_3(t)h_3(t)dt \\ =& \frac{-1}{s(x)k_3(x)} \int_x^{+\infty} k_3(t)h_3(t)dt. \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Pour $7-b-c \leq 0$, τ_3 est décroissante sur $(0,\infty)$ et admet pour seule racine $\alpha_3 = \frac{7-b-c+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{2c}$. Si $x \leq \alpha_3$ et si h_3 est bornée, alors

$$\left|f_h^{(3)}(x)\right| \leq \|h_3\| \frac{1}{s(\alpha_3)g_3(\alpha_3)} \int_0^{\alpha_3} g_3(t)dt.$$

$$\begin{aligned} |h_3(x)| &= \left|h^{(3)}(x) - 3(3-b-c-2cx)f_h''(x) + 6cf_h'(x)\right| \\ &\leq \left\|h^{(3)}\right\| + 3|3-b-c-2cx| \left\|f_h''\right\| + 6c \left\|f_h'\right\| \\ &\leq \left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(|3-b-c|, 4+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}\right) \left\|f_h''\right\| + 6c \left\|f_h'\right\| \\ &\leq \left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(|3-b-c|, 4+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}\right) K_2 + 6cK_1. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $7-b-c \leq 0$ et $x \leq \alpha_3$,

$$\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq \left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(|3-b-c|, 4+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}\right) K_2 + 6cK_1\right) \times \frac{1}{\alpha_3^2 k_3(\alpha_3)} \int_0^{\alpha_3} k_3(t)dt.$$

Pour $7-b-c \leq 0$ et $x > \alpha_3$, de l'équation différentielle suivante vérifiée par f_h'', on a :

$$s(x)f^{(3)}(x) + \tau_2(x)f''(x) = h_2(x) = h''(x) - 2(2-b-c-2cx)f'(x) + 2cf(x)$$

$$f_h^{(3)}(x) = \frac{h_2(x)}{s(x)} - \frac{\tau_2(x)f_h''(x)}{s(x)}$$

$$\left|f_h^{(3)}(x)\right| \leq \frac{\|h_2\|}{s(x)} + \frac{\left|\tau_2(x)f_h''(x)\right|}{s(x)}.$$

Pour $7-b-c \leq 0$ et $x > \alpha_3$, $\tau_2 : x \mapsto a+2+(5-b)x - cx(1+x)$ est décroissante et négative, donc telle que $\dfrac{\tau_2(t)}{\tau_2(x)} \geq 1, \ \forall x \leq t$. On a

$$\begin{aligned} f_h''(x) &= \frac{-1}{s(x)k_2(x)} \int_x^{+\infty} k_2(t)h_2(t)dt \\ |\tau_2(x)f_h''(x)| &= \left|\frac{-\tau_2(x)}{s(x)k_2(x)} \int_x^{+\infty} k_2(t)h_2(t)dt\right| \\ &\leq \|h_2\| \frac{-\tau_2(x)}{s(x)k_2(x)} \int_x^{+\infty} k_2(t)dt \\ &\leq \|h_2\| \frac{-\tau_2(x)}{s(x)k_2(x)} \int_x^{+\infty} \frac{\tau_2(t)}{\tau_2(x)} k_2(t)dt \\ &= \|h_2\| \frac{-1}{s(x)k_2(x)} \int_x^{+\infty} (s(t)k_2(t))'dt \\ &= \|h_2\|. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|h_2(x)| &= \left|h''(x) - 2(2-b-c-2cx)f_h'(x) + 2cf_h(x)\right| \\
&\leq \|h''\| + 2\left|(2-b-c-2cx)f_h'(x)\right| + 2c\|f_h\|,
\end{aligned}
$$

$$
f_h'(x) = \frac{-1}{s(x)k_1(x)}\int_x^{+\infty} k_1(t)h_1(t)dt
$$

$$
\left|(2-b-c-2cx)f_h'(x)\right| \leq \|h_1\|\frac{-(2-b-c-2cx)}{s(x)k_1(x)}\int_x^{+\infty}k_1(t)dt \leq \|h_1\|\frac{2-b-c-2cx}{\tau_1(x)}.
$$

Soit $\rho(x) = \dfrac{2-b-c-2cx}{\tau_1(x)} = \dfrac{2-b-c-2cx}{a+1+(3-b)x-cx(1+x)}$. ρ est dérivable sur (α_3,∞) et

$$
\begin{aligned}
\rho'(x) &= -\frac{2c(a+1)+(2-b-c)(3-b-c)-2c(2-b-c)x+2c^2x^2}{\tau_1^2(x)} \\
&= -\frac{2c(a+1)+(2-b-c)+(2-b-c)^2+(2-b-c-cx)^2+c^2x^2}{\tau_1^2(x)}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour $3-b-c\leq 0$ ou $2-b-c\geq 0$, $\rho'(x)\leq 0$.

Pour $2<b+c<3$, si $1-4c(a+1)-(3-b-c)^2>0$, alors la seule possible racine positive du trinôme au numérateur de ρ' est $\dfrac{2-b-c+\sqrt{1-4c(a+1)-(3-b-c)^2}}{2c}$, qui est inférieure à α_3. Donc, ρ est décroissante sur (α_3,∞) et

$$
\rho(x)\leq\rho(\alpha_3) = \frac{5c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{14-2b+2\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}.
$$

La fonction $h_1(x) = h'(x) - (1-b-c-2cx)f_h(x)$ est telle que

$$
\begin{aligned}
|h_1(x)| &\leq \|h'\| + \left|\frac{-(1-b-c-2cx)}{s(x)k_{a,b,c}(x)}\int_x^{+\infty}k_{a,b,c}(t)(h(t)-\mathbb{E}h(W))dt\right| \\
&\leq \|h'\| + \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\frac{1-b-c-2cx}{\tau(x)}.
\end{aligned}
$$

$\varrho : x\mapsto \dfrac{1-b-c-2cx}{\tau(x)} = \dfrac{1-b-c-2cx}{(1-b)x-cx(1+x)+a}$ étant décroissante sur (α_3,∞), pour tout $x>\alpha_3$

$$
\varrho(x)\leq\varrho(\alpha_3) = \frac{6c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{21-3b+3\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\left|(2-b-c-2cx)f_h'(x)\right| \leq{}& \frac{5c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{14-2b+2\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}\times \\
&\left(\|h'\| + \frac{6c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{21-3b+3\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|h_2\| \leq{}& \|h''\| + 2c\|f_h\| + \frac{5c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{7-b+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}\times \\
&\left(\|h'\| + \frac{6c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{21-3b+3\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right).
\end{aligned}
$$

D'où pour $7-b-c\leq 0$ et $x>\alpha_3$

$$\begin{aligned}\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq \frac{2}{\alpha_3(1+\alpha_3)}\left(\left\|h''\right\|+2cK\left\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\right\|\right)\\ +\frac{10c+2c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{\alpha_3(1+\alpha_3)\left(7-b+\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}\right)}\times\\ \left(\left\|h'\right\|+\frac{6c+c\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}{21-3b+3\sqrt{(7-b-c)^2+4c(a+3)}}\left\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\right\|\right).\end{aligned}$$

Supposons maintenant $7-b-c>0$.

$-$ Sur $\left(0,\frac{7-b-c}{2c}\right)$, τ_3 est telle que $\frac{\tau_3(t)}{\tau_3(0)}\geq 1\ \forall 0\leq t\leq\frac{7-b-c}{2c}$, et puisque

$$\begin{aligned}|h_3(x)| &\leq \left\|h^{(3)}\right\|+3|3-b-c-2cx|\left\|f_h''\right\|+6c\left\|f_h'\right\|\\ &\leq \left\|h^{(3)}\right\|+3\max\left(4,|3-b-c|\right)\left\|f_h''\right\|+6c\left\|f_h'\right\|\\ &\leq \left\|h^{(3)}\right\|+3\max\left(4,|3-b-c|\right)K_2+6cK_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f_h^{(3)}(x)| &\leq \|h_3\|\frac{1}{s(x)k_3(x)}\int_0^x k_3(t)dt\\ &\leq \|h_3\|\frac{1}{\tau_3(0)s(x)k_3(x)}\int_0^x \tau_3(t)k_3(t)dt\\ &= \frac{1}{\tau_3(0)}\|h_3\|\\ &= \frac{1}{a+3}\|h_3\|,\end{aligned}$$

on a

$$\left\|f_h^{(3)}\right\|\leq\frac{1}{a+3}\left(\left\|h^{(3)}\right\|+3\max\left(4,|3-b-c|\right)K_2+6cK_1\right).$$

$-$ Sur $\left(\frac{7-b-c}{2c},\infty\right)$, les arguments sont les mêmes que dans les cas précédents.

□

3.4.5 Borne de la dérivée d'ordre k de la solution de l'équation de Stein Kummer

Nous proposons ici une borne de la dérivée d'ordre k, $k\geq 4$ de la solution de l'équation de Stein pour la loi de Kummer qu'on peut obtenir par un calcul de proche en proche. Cette borne dépend des bornes de des dérivées d'ordre inférieur.

Dans la suite de cette section, on définit

$$\alpha_k=\frac{2k+1-b-c+\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}}{2c},\ \forall k\geq 1;$$

$$\tau_k(x)=(2k+1-b)x-cx(1+x)+a+k,\ \forall k\geq 1;$$

$$h_k(x)=h^{(k)}(x)-k(k-b-c-2cx)f^{(k-1)}(x)+k(k-1)cf^{(k-2)}(x)\quad\forall k\geq 1$$

et, pour éviter de confusion, on note par $d_k:=d_{a+k,b-2k,c}$ la densité de la loi $K(a+k,b-2k,c)$. On a :

$$(s(x)d_k(x))'=\tau_k(x)d_k(x)\ \text{ et }\ \lim_{x\to 0}s(x)d_k(x)=\lim_{x\to\infty}s(x)d_k(x)=0,\ \forall k\geq 1. \tag{3.4.19}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.4.7 (théorème 3.3 Konzou *et al. [36]*). *Soient* $k \geq 1, k \in \mathbb{N}$ *et* $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction bornée,* k *fois différentiable telle que* $h^{(i)}$ *est bornée pour tout entier* $i \leq k$*. Alors la* k*-ième dérivée* $f_h^{(k)}$ *de la solution* f_h *de l'équation de Stein* (3.4.2) *est telle que*

$$\left\|f_h^{(k)}\right\| \leq K_k = \begin{cases} \max(K_1^k, K_2^k), & si \quad 2k+1-b-c \leq 0 \\ \max(K_2^k, K_3^k, K_4^k), & si \quad 2k+1-b-c > 0 \end{cases} \tag{3.4.20}$$

avec

$$K_1^k = T \times \frac{1}{\alpha_k(1+\alpha_k)d_k(\alpha_k)} \int_0^{\alpha_k} d_k(t)dt,$$

où

$$T = \left\|h^{(k)}\right\| + k \max\left(|k-b-c|, k+1+\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}\right) K_{k-1} + k(k-1)cK_{k-2},$$

$$K_2^k = \frac{2}{\alpha_k(\alpha_k+1)} \|h_{k-1}\|,$$

$$\|h_{k-1}\| \leq \left\|h^{(k-1)}\right\| + \frac{c(k-1)\left(k+2+\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}\right)}{4k+2-2b+2\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}} \|h_{k-2}\| + (k-1)(k-2)cK_{k-3},$$

$$K_3^k = \frac{1}{a+k}\left(\left\|h^{(k)}\right\| + k \max\left(k+1, |k-b-c|\right) K_{k-1} + k(k-1)cK_{k-2}\right)$$

$$K_4^k = T \times \frac{4c^2}{(2k+1-b-c)(2k+1-b+c)d_k\left(\frac{2k+1-b-c}{2c}\right)},$$

la constante K_j *est telle que* $\left\|f_h^{(j)}\right\| \leq K_j$ *pour tout entier* $j \geq 1$*.*

Preuve

Supposons $2k+1-b-c \leq 0$. La fonction $f_h^{(k)}$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$x(1+x)f^{(k+1)}(x) + [(2k+1-b)x - cx(1+x) + a + k]\, f^{(k)}(x) = h_k(x) \tag{3.4.21}$$

avec

$$h_k(x) = h^{(k)}(x) - k(k-b-c-2cx)f^{(k-1)}(x) + k(k-1)cf^{(k-2)}(x). \tag{3.4.22}$$

L'équation (3.4.21) montre que $f_h^{(k)}$ est solution de l'équation de Stein de la loi $K(a+k, b-2k, c)$ dont le second membre h_k est donné par (3.4.22). Soit d_k, la densité de la loi $K(a+k, b-2k, c)$. Alors

$$\begin{aligned} f_h^{(k)}(x) &= \frac{1}{s(x)d_k(x)} \int_0^x d_k(t)h_k(t)dt \\ &= \frac{-1}{s(x)d_k(x)} \int_x^{+\infty} d_k(t)h_k(t)dt. \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

Pour $2k+1-b-c \leq 0$, τ_k est décroissante sur $(0,\infty)$ et a pour unique zéro α_k. Si $x \leq \alpha_k$ et si h_k est bornée, alors

$$\left|f_h^{(k)}(x)\right| \leq \|h_k\| \frac{1}{\alpha_k^2 d_k(\alpha_k)} \int_0^{\alpha_k} d_k(t)dt.$$

h_k est telle que

$$\begin{aligned}|h_k(x)| &= \left|h^{(k)}(x) - k(k-b-c-2cx)f^{(k-1)}(x) + k(k-1)cf^{(k-2)}(x)\right| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k|k-b-c-2cx|\left\|f_h^{(k-1)}\right\| + k(k-1)c\left\|f_h^{(k-2)}\right\| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|k-b-c|, k+1+\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}\right)\left\|f_h^{(k-1)}\right\| \\ &\quad + k(k-1)c\left\|f_h^{(k-2)}\right\|.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $2k+1-b-c \leq 0$ et $x \leq \alpha_k$,

$$\left\|f_h^{(k)}\right\| \leq T \times \frac{1}{\alpha_k(\alpha_k+1)d_k(\alpha_k)}\int_0^{\alpha_k} d_k(t)dt$$

avec

$$\begin{aligned}T = \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|k-b-c|, k+1+\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}\right)K_{k-1} \\ + k(k-1)cK_{k-2}.\end{aligned}$$

Pour $2k+1-b-c \leq 0$ et $x > \alpha_k$, τ_{k-1} et décroissante et négative et $\dfrac{\tau_{k-1}(t)}{\tau_{k-1}(x)} \geq 1 \ \ \forall x \leq t$. En remplaçant k par $k-1$ dans l'équation (3.4.21), on déduit

$$f_h^{(k)}(x) = \frac{h_{k-1}(x)}{s(x)} - \frac{\tau_{k-1}(x)f_h^{k-1}(x)}{s(x)}$$

$$\left|f_h^{(k)}(x)\right| \leq \frac{\|h_{k-1}\|}{s(x)} + \frac{\left|\tau_{k-1}(x)f_h^{k-1}(x)\right|}{s(x)}.$$

$$\begin{aligned}\left|\tau_{k-1}(x)f_h^{k-1}(x)\right| &= \left|\frac{-\tau_{k-1}(x)}{s(x)d_{k-1}(x)}\int_x^{+\infty} d_{k-1}(t)h_{k-1}(t)dt\right| \\ &\leq \|h_{k-1}\|\frac{-\tau_{k-1}(x)}{s(x)d_{k-1}(x)}\int_x^{+\infty} d_{k-1}(t)dt \\ &\leq \|h_{k-1}\|\frac{-\tau_{k-1}(x)}{s(x)d_{k-1}(x)}\int_x^{+\infty}\frac{\tau_{k-1}(t)}{\tau_{k-1}(x)}d_{k-1}(t)dt \\ &= \|h_{k-1}\|\frac{-1}{s(x)d_{k-1}(x)}\int_x^{+\infty}(s(t)d_{k-1}(t))'dt \\ &= \|h_{k-1}\|.\end{aligned}$$

$$|h_{k-1}(x)| \leq \left\|h^{(k-1)}\right\| + (k-1)\left|(k-1-b-c-2cx)f^{(k-2)}(x)\right| + (k-1)(k-2)c\left\|f^{(k-3)}\right\|.$$

$$\begin{aligned}\left|(k-1-b-c-2cx)f^{(k-2)}(x)\right| &= \left|\frac{-(k-1-b-c-2cx)}{s(x)d_{k-2}}\int_x^{\infty} d_{k-2}(t)h_{k-2}(t)dt\right| \\ &\leq \|h_{k-2}\|\frac{-(k-1-b-c-2cx)}{s(x)d_{k-2}}\int_x^{\infty} d_{k-2}(t)(t)dt \\ &\qquad (k-1-b-c-2cx < 0 \ \ \forall x > \alpha_k) \\ &\leq \|h_{k-2}\|\frac{-(k-1-b-c-2cx)}{s(x)d_{k-2}\tau_{k-2(x)}}\int_x^{\infty}\tau_{k-2}(t)d_{k-2}(t)(t)dt \\ &= \|h_{k-2}\|\frac{-(k-1-b-c-2cx)}{s(x)d_{k-2}\tau_{k-2(x)}}\int_x^{\infty}(s(t)d_{k-2}(t)(t))'dt \\ &= \|h_{k-2}\|\frac{k-1-b-c-2cx}{\tau_{k-2(x)}}.\end{aligned}$$

Soit $\phi(x) = \dfrac{k-1-b-c-2cx}{\tau_{k-2(x)}} = \dfrac{k-1-b-c-2cx}{a+k-2+(2k-3-b-c)x-cx^2}$.
ϕ est dérivable sur (α_k, ∞) et

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= -\frac{2c(a+k-2)+(k-1-b-c)(2k-3-b-c)-2c(k-1-b-c)x+2c^2x^2}{\tau_{k-2}^2(x)} \\ &= -\frac{2c(a+k-2)+2(k-1-b-c)(k-2)+(k-1-b-c-cx)^2+c^2x^2}{\tau_{k-2}^2(x)}.\end{aligned}$$

Des expressions précédentes, pour $2k-3-b-c \leq 0$ ou $k-1-b-c \geq 0$, $\phi'(x) \leq 0$ et $\phi(x) \leq \phi(\alpha_k)$ pour tout $x > \alpha_k$.

Pour $k-1 < b+c < 2k-3$, si $(k-2)^2-(b+c-2k+3)^2-4c(a+k-2) > 0$, alors la seule possible racine positive de ϕ' est

$$\frac{k-1-b-c+\sqrt{(k-2)^2-(b+c-2k+3)^2-4c(a+k-2)}}{2c} < \alpha_k.$$

Donc pour tout $x > \alpha_k$,

$$\phi(x) \leq \phi(\alpha_k) = \frac{(k+2)c+c\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}}{4k+2-2b+2\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}}.$$

Comme conséquence, pour $x > \alpha_k$,

$$\begin{aligned}\|h_{k-1}\| \leq \left\|h^{(k-1)}\right\| + \frac{c(k-1)\left(k+2+\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}\right)}{4k+2-2b+2\sqrt{(2k+1-b-c)^2+4c(a+k)}}\|h_{k-2}\| \\ + (k-1)(k-2)cK_{k-3}.\end{aligned}$$

A présent, supposons $2k+1-b-c > 0$.

$-$ Sur l'intervalle $\left(0, \frac{2k+1-b-c}{2c}\right)$, τ_k est telle que $\frac{\tau_k(t)}{\tau_k(0)} \geq 1\,,\ \ \forall 0 \leq t \leq \frac{2k+1-b-c}{2c}$. Puisque

$$\begin{aligned}|h_k(x)| &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k|k-b-c-2cx|\left\|f_h^{k-1}\right\| + k(k-1)c\left\|f_h^{k-2}\right\| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|k-b-c|, k+1\right)\left\|f_h^{k-1}\right\| + k(k-1)c\left\|f_h^{k-2}\right\| \\ &\leq \left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|k-b-c|, k+1\right)K_{k-1} + k(k-1)cK_{k-2},\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}|f_h^{(k)}(x)| &\leq \|h_k\|\frac{1}{s(x)d_k(x)}\int_0^x d_k(t)dt \\ &\leq \|h_k\|\frac{1}{\tau_k(0)s(x)d_k(x)}\int_0^x \tau_k(t)d_k(t)dt \\ &= \frac{1}{\tau_k(0)}\|h_k\| \\ &= \frac{1}{a+k}\|h_k\|.\end{aligned}$$

D'où,

$$\left\|f_h^{(k)}\right\| \leq \frac{1}{a+k}\left(\left\|h^{(k)}\right\| + k\max\left(|k-b-c|, k+1\right)K_{k-1} + k(k-1)cK_{k-2}\right).$$

– Sur $\left(\frac{2k+1-b-c}{2c}, \infty\right)$, les arguments sont les mêmes que dans le cas $2k+1-b-c \leq 0$.

□

Remarque 14. Les bornes des dérivées successives de la solution de l'équation de Stein au sens de Döbler peuvent s'écrire de la même manière que dans le cas de la loi GIG.

Conclusion

Il est maintenant possible d'approcher la loi d'une variable aléatoire X par la loi gaussienne inverse généralisée ou la loi de Kummer par la méthode de Stein en déterminant un majorant adéquat de :

- $\left|\mathbb{E}\left[X^2 f'(X) + \left(\frac{b}{2} + (p+1)X - \frac{a}{2}X^2\right) f(X)\right]\right|$ pour la loi gaussienne inverse généralisée,
- $|\mathbb{E}\left[X(X+1)(f'(X) + ((1-b)X - cX(1+X) + a)\, f(X)\right]|$ pour la loi de Kummer

où f est la solution de l'équation de Stein correspondant à la loi cible. Cette approche fait appel aux bornes de la solution de l'équation différentielle de Stein correspondante et (éventuellement) celles de ses dérivées successives. Ces bornes qui n'étaient pas établies explicitement dans la littérature ont fait l'objet de nos travaux dont les premiers résultats concernant la borne de la solution et de ses deux premières dérivées ont été publiés et sont contenus dans [35]. Les autres résultats ont fait l'objet d'un article en révision [37] et d'un document de travail [36].

Chapitre 4

Deux exemples d'application à des vitesses de convergence vers la loi GIG et la loi gaussienne inverse réciproque

Sous certaines conditions sur ses paramètres, la loi hyperbolique généralisée ($\boldsymbol{GH}$) converge vers la loi gaussienne inverse généralisée ($\boldsymbol{GIG}$).
Les travaux effectués par Barndorff-Nielson [7] ont révélé que lorsque les arêtes d'un arbre fini sont munies de résistances aléatoires indépendantes, de loi gaussienne inverse pour les arêtes intérieures et de loi gaussienne inverse réciproque pour les arêtes terminales, la résistance équivalente est de loi gaussienne inverse réciproque. Koudou et Barndorff-Nielson [9] ont considéré un modèle analogue sur un arbre infini et prouvé que la résistance équivalente converge presque sûrement vers une variable aléatoire suivant la loi gaussienne inverse réciproque.
Dans la section 1, nous établissons une borne pour la vitesse de convergence de la loi $\boldsymbol{GH}$ vers la loi $\boldsymbol{GIG}$. Dans la section 2, avant d'étudier la vitesse de convergence dans le modèle de résistances évoqué plus haut, nous présentons les caractérisations de Stein pour les lois gaussienne inverse et gaussienne inverse réciproque qui sont des cas particuliers de la loi gaussienne inverse généralisée.

4.1 Convergence de loi hyperbolique généralisée vers la loi GIG

La loi hyperbolique généralisée (GH) introduite dans la littérature par Barndorff-Nielsen [5] a eu une attention particulière au fil du temps surtout pour ses applications en finance (voir par exemple [6, 8, 20, 59, 10, 51, 50]). Cette distribution de paramètres $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\delta > 0}$, $\boldsymbol{\mu \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{\alpha > |\beta| \geq 0}$ a pour densité

$$f_{\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu}(x) = \frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-\frac{1}{2}}\delta^{\lambda}K_{\lambda}\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}\left(\delta^2+(x-\mu)^2\right)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2}\times K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)e^{\beta(x-\mu)}. \quad (4.1.1)$$

La loi GIG est une loi limite de la loi GH. Pour plus de détails sur les lois limites de la loi GH, voir par exemple [21, 54]. La proposition suivante établit la convergence en distribution d'une suite de variables aléatoires de loi GH vers une variable aléatoire de loi GIG.

Proposition 4.1.1. *Soit $\boldsymbol{\lambda, a, b \in \mathbb{R}}$. Soit $\boldsymbol{(X_n)}$ une suite de variables aléatoires telle que pour chaque entier naturel $\boldsymbol{n \geq 1}$, $\boldsymbol{X_n}$ suit la loi hyperbolique généralisée de paramètres $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{a^2n}$, $\boldsymbol{a^2n - \frac{b^2}{2}}$, $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $\boldsymbol{0}$. Lorsque $\boldsymbol{n \to \infty}$, la suite $\boldsymbol{(X_n)_{n\geq 1}}$ converge en loi vers une variable aléatoire $\boldsymbol{W}$ suivant la loi gaussienne inverse généralisée de paramètres $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{b^2}$, $\boldsymbol{a^2}$.*

La preuve de la proposition 4.1.1, bien qu'élémentaire s'obtient comme suit.

Preuve
La loi $\mathrm{GH}\left(\lambda, a^2 n, a^2 n - \frac{b^2}{2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right)$ a pour densité

$$f_n(x) = \frac{\left(a^2 b^2 n - \frac{b^4}{4}\right)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi}\,(a^2 n)^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\lambda} K_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{a^2 b^2 n - \frac{b^4}{4}}\right)}\left(\frac{1}{n}+x^2\right)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2} \times$$
$$K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(a^2 n\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}\right) e^{\left(a^2 n - \frac{b^2}{2}\right)x}.$$

Lorsque $n \to \infty$, on a l'équivalence suivante (voir [24]) :

$$K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(a^2 n\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2a^2 n\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}}} e^{-a^2 n\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}}.$$

Donc lorsque n est suffisamment grand,

$$\frac{\left(\frac{1}{n}+x^2\right)^{(\lambda-\frac{1}{2})/2}}{\sqrt{2\pi}\,(a^2 n)^{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\lambda}} K_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(a^2 n\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}\right) \sim \frac{\left(\frac{1}{n}+x^2\right)^{(\lambda-1)/2}}{2a^{2\lambda}n^{\lambda/2}} e^{-a^2 n\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}}$$

et

$$f_n(x) \sim \frac{\left(a^2 b^2 - \frac{b^4}{4n}\right)^{\lambda/2}\left(\frac{1}{n}+x^2\right)^{(\lambda-1)/2}}{2a^{2\lambda}K_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{a^2 b^2 n - \frac{b^4}{4}}\right)} e^{\left(a^2 n - \frac{b^2}{2}\right)x - a^2 n\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}}.$$

Pour $x > 0$, quand $n \to \infty$, un développement en série de Taylor donne

$$\sqrt{\frac{1}{n}+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{nx^2}} = x\left(1+\frac{1}{2nx^2}+o\left(\frac{1}{nx^2}\right)\right)$$

Ainsi, lorsque n est assez grand,

$$f_n(x) \sim \frac{\left(a^2 b^2 - \frac{b^4}{4n}\right)^{\lambda/2}\left(\frac{1}{n}+x^2\right)^{(\lambda-1)/2}}{2a^{2\lambda}K_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{a^2 b^2 n - \frac{b^4}{4}}\right)} e^{\left(a^2 n - \frac{b^2}{2}\right)x - a^2 nx\left(1+\frac{1}{2nx^2}\right)}$$

et $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction

$$g_{\lambda,a,b}(x) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda}}{2K_\lambda(ab)} x^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}(a^2/x + b^2 x)}, \quad x > 0$$

c'est la densité de la loi gaussienne inverse généralisée de paramètres λ, b^2 a^2.

□

Il est tout à fait naturel de se demander à quel ordre de vitesse la loi de la suite (X_n) s'approche de celle de la variable W lorsque n est suffisamment grand.

Rappelons que si $f := f_h$ est la solution de l'équation de Stein (3.3.5) de la loi $\mathrm{GIG}(\lambda, b^2, a^2)$ et si $W \sim GIG(\lambda, b^2, a^2)$, alors :

- pour toute fonction test h, lipschitzienne,

$$\|f\| \leq \frac{2}{ab}\frac{K_{\lambda+1}(ab)}{K_\lambda(ab)}\|h'\|,$$

- pour h une fonction bornée, dérivable et de dérivée h' bornée,

$$\|f'\| \leq M' = \begin{cases} \max\left(G_2^1, G_3^1\right) & \text{si } \lambda \leq -3 \\ \max\left(G_1^1, G_3^1, G_4^1\right) & \text{si } \lambda > -3 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

avec

$$G_1^1 = \frac{2}{a^2}\left(\|h'\| + \max(2, |\lambda+1|)M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$G_2^1 = \left(\|h'\| + (2 + \sqrt{(\lambda+3)^2 + a^2b^2})M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \frac{1}{\alpha_1^2 g_{\lambda+2,b^2,a^2}(\alpha_1)} \times \int_0^{\alpha_1} g_{\lambda+2,b^2,a^2}(t)dt,$$

$$G_3^1 = \frac{2}{\alpha_1^2}\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|,$$

$$G_4^1 = \left(\|h'\| + (2 + \sqrt{(\lambda+3)^2 + a^2b^2})M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \frac{b^4}{(\lambda+3)^2 g_{\lambda+2,b^2,a^2}(\frac{\lambda+3}{b^2})},$$

$$M = \begin{cases} \max\left(V_1; V_2\right), \text{ si} & \lambda \leq -1 \\ \max\left(\frac{2}{a^2}, \dfrac{b^4}{(\lambda+1)^2 g_{\lambda,b^2,a^2}(\frac{\lambda+1}{b^2})}\right) & \text{si } \lambda > -1, \end{cases} \tag{4.1.3}$$

$$V_1 = \frac{1}{\alpha^2 g_{\lambda,b^2,a^2}(\alpha)} \int_0^{\alpha} g_{\lambda,b^2,a^2}(t)dt, \quad V_2 = \frac{1}{\alpha^2 g_{\lambda,b^2,a^2}(\alpha)} \int_{\alpha}^{+\infty} g_{\lambda,b^2,a^2}(t)dt,$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + 3 + \sqrt{(\lambda+3)^2 + a^2b^2}}{b^2}, \qquad \alpha = \frac{\lambda + 1 + \sqrt{(\lambda+1)^2 + a^2b^2}}{b^2};$$

- pour h une fonction bornée, deux fois dérivable telle que h' et h'' soient bornées,

$$\|f''\| \leq M'' = \begin{cases} \max\left(G_2^2, G_3^2\right) & \text{si } \lambda \leq -5 \\ \max\left(G_1^2, G_3^2, G_4^2\right) & \text{si } \lambda > -5 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

avec

$$G_1^2 = \frac{2}{a^2}\left(\|h''\| + \max(6, |2\lambda+4|)M' + b^2 M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$G_2^2 = \left(\|h''\| + (6 + 2\sqrt{(\lambda+5)^2 + a^2b^2})M' + b^2 M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \frac{1}{\alpha_2^2 g_2(\alpha_2)} \times \int_0^{\alpha_2} g_2(t)dt,$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda + 5 + \sqrt{(\lambda+5)^2 + a^2b^2}}{b^2},$$

$$G_3^2 = \frac{2}{\alpha_2^2}\left(\|h'\| + \frac{4b^2 + b^2\sqrt{(\lambda+5)^2 + a^2b^2}}{4\lambda + 20 + 4\sqrt{(\lambda+5)^2 + a^2b^2}} \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$G_4^2 = \left(\|h''\| + (6 + 2\sqrt{(\lambda+5)^2 + a^2b^2})M' + b^2 M \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \times \frac{b^4}{(\lambda+5)^2 g_2\left(\dfrac{\lambda+5}{b^2}\right)},$$

$g_2 := g_{\lambda+4,b^2,a^2}$ est la fonction densité de la loi $GIG(\lambda+4, b^2, a^2)$,
M est donné par (4.1.3) et M' par (4.1.2) ;

- pour h une fonction bornée, trois fois dérivable telle que les dérivées h', h'' et $h^{(3)}$ sont bornées,

$$\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq M''' = \begin{cases} \max(G_1^3, G_2^3) & \text{si} \quad \lambda \leq -7 \\ \max(G_3^3, G_4^3, G_2^3) & \text{si} \quad \lambda > -7 \end{cases} \tag{4.1.5}$$

avec

$$G_1^3 = \left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(|\lambda+3|, (4+\sqrt{(\lambda+7)^2+a^2b^2})\right) M'' + 3b^2M'\right) \times \frac{1}{\alpha_3^2 g_3(\alpha_3)} \int_0^{\alpha_3} g_3(t)dt,$$

$$\alpha_3 = \frac{\lambda+7+\sqrt{(\lambda+7)^2+a^2b^2}}{b^2},$$

$$G_2^3 = \frac{5b^2+b^2\sqrt{(\lambda+7)^2+a^2b^2}}{\alpha_3^2\left(\lambda+7+\sqrt{(\lambda+7)^2+a^2b^2}\right)} \times \left(||h'|| + \frac{6b^2+b^2\sqrt{(\lambda+7)^2+a^2b^2}}{6\lambda+42+6\sqrt{(\lambda+7)^2+a^2b^2}} \|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right) + \frac{2}{\alpha_3^2}\left(\left\|h''\right\| + b^2M\|h(.)-\mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$G_3^3 = \frac{2}{a^2}\left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max(4, |\lambda+3|) M'' + 3b^2M'\right),$$

$$G_4^3 = \left(\left\|h^{(3)}\right\| + 3\max\left(|\lambda+3|, (4+\sqrt{(\lambda+7)^2+a^2b^2})\right) M'' + 3b^2M'\right) \times \frac{b^4}{(\lambda+7)^2 g_3\left(\frac{\lambda+7}{b^2}\right)},$$

$g_3 := g_{\lambda+6,b^2,a^2}$ est la densité de la loi $GIG(\lambda+6, b^2, a^2)$. M, M', M'' sont donnés par (4.1.3), (4.1.2), (4.1.4).

Nous proposons dans le théorème suivant un majorant de l'écart $|\mathbb{E}h(X_n) - \mathbb{E}h(W)|$ en utilisant la technique de Stein, pour des fonctions h suffisamment régulières.

Théorème 4.1.1 (Konzou *et al. [39]*). *Soit C_b^3 la classe de fonctions $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pour lesquelles h', h'', $h^{(3)}$ existent et sont bornées. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim GH(\lambda, a^2n, a^2n - \frac{b^2}{2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0)$ et soit $W \sim GIG(\lambda, b^2, a^2)$. Si $h \in C_b^3$, alors*

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{E}h(X_n) - \mathbb{E}h(W)| \\
&\leq \frac{1}{nc_n}\left[\frac{2\sqrt{2}}{ab\sqrt{\pi}}\left\|h'\right\||\lambda+1|\frac{K_{\lambda+1}(ab)K_{\lambda+\frac{1}{2}}(c_n)}{K_\lambda(ab)K_\lambda(c_n)} + M'\left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_nY_n)\right)^{1/2}\sqrt{\frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{K_\lambda(c_n)}}\right] \\
&+ \frac{1}{n^2c_n^2}\left[\left(M' + \frac{bK_{\lambda+1}(ab)}{aK_\lambda(ab)}\left\|h'\right\|\right)\frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{K_\lambda(c_n)} + M''\left(\mathbb{E}\left(\tau^2(\beta_nY_n)\right)\right)^{1/2}\sqrt{\frac{K_{\lambda+2}(c_n)}{K_\lambda(c_n)}}\right] \\
&+ \frac{1}{n^2c_n^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2bK_{\lambda+1}(ab)}{aK_\lambda(ab)}\left\|h'\right\| + 2M'\right)\frac{\left|a^2 - \frac{b^2}{2n}\right|K_{\lambda+3/2}(c_n)}{K_\lambda(c_n)} \\
&+ \frac{1}{n^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}M''\frac{\left(a^2-\frac{b^2}{2n}\right)^2K_{\lambda+5/2}(c_n)}{c_n^5K_\lambda(c_n)} \\
&+ \frac{1}{n^4}M'''\frac{\left(a^2-\frac{b^2}{2n}\right)^2K_{\lambda+3}(c_n)}{c_n^6K_\lambda(c_n)} \\
&+ \left|\mathbb{E}\left[(\beta_nY_n)^2f'(\beta_nY_n) + \tau(\beta_nY_n)f(\beta_nY_n)\right]\right|.
\end{aligned}
\tag{4.1.6}
$$

avec

$$
c_n = \sqrt{a^2b^2 - \frac{b^4}{4n}}, \qquad \beta_n = a^2n - \frac{b^2}{2},
$$

$$
\tau(\beta_nY_n) = \frac{a^2}{2} + (\lambda+1)(\beta_nY_n) - \frac{b^2}{2}(\beta_nY_n)^2, \qquad Y_n \sim GIG\left(\lambda, \frac{1}{n}, a^2b^2n - \frac{b^4}{4}\right),
$$

f *est la solution de l'équation de Stein de la loi GIG*(λ, b^2, a^2).

On a le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.1. *Le majorant fourni par le théorème 4.1.1 est de l'ordre de* n^{-1}.

Preuve

On a :

$$
\begin{aligned}
\tau^2(\beta_nY_n) &= \left(\frac{a^2}{2} + (\lambda+1)\beta_nY_n - \frac{b^2}{2}(\beta_nY_n)^2\right)^2 \\
&= \frac{a^4}{4} + (\lambda+1)^2\beta_n^2Y_n^2 + \frac{b^4}{4}\beta_n^4Y_n^4 + a^2(\lambda+1)\beta_nY_n \\
&- \frac{a^2b^2}{2}\beta_n^2Y_n^2 - b^2(\lambda+1)\beta_n^3Y_n^3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\tau^2(\beta_nY_n) &= \frac{a^4}{4} + a^2(\lambda+1)\beta_n\mathbb{E}Y_n + \left((\lambda+1)^2 - \frac{a^2b^2}{2}\right)\beta_n^2\mathbb{E}Y_n^2 \\
&- b^2(\lambda+1)\beta_n^3\mathbb{E}Y_n^3 + \frac{b^4}{4}\beta_n^4\mathbb{E}Y_n^4.
\end{aligned}
$$

Puisque $Y_n \sim GIG\left(\lambda, \frac{1}{n}, a^2b^2n - \frac{b^4}{4}\right)$,

$$
\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n^2\left(a^2b^2 - \frac{b^4}{4n}\right)}\frac{K_{\lambda+1}\left(\sqrt{a^2b^2 - \frac{b^4}{4n}}\right)}{K_\lambda\left(\sqrt{a^2b^2 - \frac{b^4}{4n}}\right)} = \frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{n^2c_n^2K_\lambda(c_n)};
$$

$$\mathbb{E}Y_n^2 = \frac{1}{n^4\left(a^2b^2-\frac{b^4}{4n}\right)^2}\frac{K_{\lambda+2}\left(\sqrt{a^2b^2-\frac{b^4}{4n}}\right)}{K_\lambda\left(\sqrt{a^2b^2-\frac{b^4}{4n}}\right)} = \frac{K_{\lambda+2}(c_n)}{n^4c_n^4K_\lambda(c_n)};$$

$$\mathbb{E}Y_n^3 = \frac{1}{n^6\left(a^2b^2-\frac{b^4}{4n}\right)^3}\frac{K_{\lambda+3}\left(\sqrt{a^2b^2-\frac{b^4}{4n}}\right)}{K_\lambda\left(\sqrt{a^2b^2-\frac{b^4}{4n}}\right)} = \frac{K_{\lambda+3}(c_n)}{n^6c_n^6K_\lambda(c_n)};$$

$$\mathbb{E}Y_n^4 = \frac{1}{n^8\left(a^2b^2-\frac{b^4}{4n}\right)^4}\frac{K_{\lambda+4}\left(\sqrt{a^2b^2-\frac{b^4}{4n}}\right)}{K_\lambda\left(\sqrt{a^2b^2-\frac{b^4}{4n}}\right)} = \frac{K_{\lambda+4}(c_n)}{n^8c_n^8K_\lambda(c_n)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\tau^2(\beta_nY_n) = \frac{a^4}{4} &+ a^2(\lambda+1)\frac{a^2-\frac{b^2}{2n}}{nc_n^2}\frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{K_\lambda(c_n)}\\ &+\left((\lambda+1)^2-\frac{a^2b^2}{2}\right)\frac{\left(a^2-\frac{b^2}{2n}\right)^2}{n^2c_n^4}\frac{K_{\lambda+2}(c_n)}{K_\lambda(c_n)}\\ &-b^2(\lambda+1)\frac{\left(a^2-\frac{b^2}{2n}\right)^3}{n^3c_n^6}\frac{K_{\lambda+3}(c_n)}{K_\lambda(c_n)}+\frac{b^4}{4n^4c_n^8}\frac{K_{\lambda+4}(c_n)}{K_\lambda(c_n)},\end{aligned}$$

d'où $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\tau^2(\beta_nY_n) = \frac{a^4}{4} < \infty$.

Puisque $Y_n \sim \text{GIG}\left(\lambda, \frac{1}{n}, a^2b^2n-\frac{b^4}{4}\right)$, $\beta_nY_n \sim \text{GIG}\left(\lambda, \frac{1}{n\beta_n}, \beta_n\left(a^2b^2n-\frac{b^4}{4}\right)\right)$ et il est facile de prouver que la suite de variables aléatoires (β_nY_n) converge en distribution vers une variable aléatoire suivant la loi $\text{GIG}(\lambda, b^2, a^2)$. Par conséquent, lorsque n tend vers infini, la caractérisation de Stein de la loi $\text{GIG}(\lambda, b^2, a^2)$ permet d'avoir

$$\mathbb{E}\left[(\beta_nY_n)^2f'(\beta_nY_n)+\tau(\beta_nY_n)f(\beta_nY_n)\right] = 0.$$

□

Nous utilisons le résultat suivant dans l'établissement de la preuve du théorème 4.1.1 (voir par exemple [4])

Proposition 4.1.2. *Soit* $Y_n \sim GIG\left(\lambda, \frac{1}{n}, a^2b^2n-\frac{b^4}{4}\right)$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ *avec* Y_n *indépendante de* Z. *Soit* $X_n \sim GH\left(\lambda, a^2n, a^2n-\frac{b^2}{2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right)$. *Alors,* $X_n = \beta_nY_n + \sqrt{Y_n}Z$ *en loi avec* $\beta_n = a^2n-\frac{b^2}{2}$.

La preuve du théorème 4.1.1 est basée sur les lemmes suivants.

Lemme 4.1.1. *Les variables* X_n *et* Y_n *définies dans la proposition 4.1.2 vérifient*

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[(\beta_nY_n)^2f'(X_n)+\left(\frac{a^2}{2}+(\lambda+1)(\beta_nY_n)-\frac{b^2}{2}(\beta_nY_n)^2\right)f(X_n)\right]\right| &\\ \leq \left|\mathbb{E}\left[(\beta_nY_n)^2f'(\beta_nY_n)+\tau(\beta_nY_n)f(\beta_nY_n)\right]\right| &\\ +\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\|f''\right\|\beta_n^2\mathbb{E}\left(Y_n^{5/2}\right)+\left\|f'\right\|\left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_nY_n)\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}Y_n\right)^{1/2} &\\ +\left\|f''\right\|\left(\mathbb{E}\left(\tau^2(\beta_nY_n)\right)\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}Y_n^2\right)^{1/2}+\left\|f^{(3)}\right\|\left|\beta_n^2\right|\mathbb{E}Y_n^3.&\end{aligned}$$

Preuve

Par le développement de Taylor de $f'(X_n)$ et $f(X_n)$ au voisinage de $\beta_n Y_n$, on a

$$(\beta_n Y_n)^2 f'(X_n) = (\beta_n Y_n)^2 f'(\beta_n Y_n) + (\beta_n Y_n)^2 (X_n - \beta_n Y_n) f''(\beta_n Y_n) + (\beta_n Y_n)^2 \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} (X_n - t) f^{(3)}(t) dt$$

et, en notant $\tau(\beta_n Y_n) = \frac{a^2}{2} + (\lambda + 1)(\beta_n Y_n) - \frac{b^2}{2}(\beta_n Y_n)^2$,

$$\tau(\beta_n Y_n) f(X_n) = \tau(\beta_n Y_n) f(\beta_n Y_n) + \tau(\beta_n Y_n)(X_n - \beta_n Y_n) f'(\beta_n Y_n) + \tau(\beta_n Y_n) \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} (X_n - t) f''(t) dt.$$

On a alors

$$\left| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 f'(X_n) + \left(\frac{a^2}{2} + (\lambda + 1)(\beta_n Y_n) - \frac{b^2}{2}(\beta_n Y_n)^2 \right) f(X_n) \right] \right| \leq \left| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 f'(\beta_n Y_n) + \tau(\beta_n Y_n) f(\beta_n Y_n) \right] \right| + \rho_{n_1} + \rho_{n_2}$$

avec

$$\rho_{n_1} = \left| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 (X_n - \beta_n Y_n) f''(\beta_n Y_n) + \tau(\beta_n Y_n)(X_n - \beta_n Y_n) f'(\beta_n Y_n) \right] \right|$$

$$\rho_{n_2} = \left| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} (X_n - t) f^{(3)}(t) dt + \tau(\beta_n Y_n) \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} (X_n - t) f''(t) dt \right] \right|.$$

Des inégalités triangulaires et de Cauchy-Schwartz et du fait que Y_n et Z sont indépendantes, on déduit

$$\begin{aligned}
\rho_{n_1} &\leq \|f''\| \, \mathbb{E}\left(\beta_n^2 Y_n^{5/2} |Z| \right) + \|f'\| \, \mathbb{E}\left| \tau(\beta_n Y_n) \sqrt{Y_n} Z \right| \\
&\leq \|f''\| \, \beta_n^2 \mathbb{E}\left(Y_n^{5/2} \right) \mathbb{E}|Z| + \|f'\| \left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_n Y_n) \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\left(Y_n Z^2 \right) \right)^{1/2} \\
&= \|f''\| \, \beta_n^2 \mathbb{E}\left(Y_n^{5/2} \right) \mathbb{E}|Z| + \|f'\| \left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_n Y_n) \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} Y_n \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Comme $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{E}|Z| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et

$$\rho_{n_1} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f''\| \, \beta_n^2 \mathbb{E}\left(Y_n^{5/2} \right) + \|f'\| \left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_n Y_n) \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} Y_n \right)^{1/2}.$$

$$\begin{aligned}
\rho_{n_2} &\leq \left\| f^{(3)} \right\| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} |X_n - t| dt \right] + \|f''\| \, \mathbb{E}\left[|\tau(\beta_n Y_n)| \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} |X_n - t| dt \right] \\
&\leq \left\| f^{(3)} \right\| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} |X_n - \beta_n Y_n| dt \right] \\
&+ \|f''\| \, \mathbb{E}\left[|\tau(\beta_n Y_n)| \int_{\beta_n Y_n}^{X_n} |X_n - \beta_n Y_n| dt \right] \\
&= \left\| f^{(3)} \right\| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 Y_n Z^2 \right] + \|f''\| \, \mathbb{E}\left[|\tau(\beta_n Y_n)| Y_n Z^2 \right] \\
&= \left\| f^{(3)} \right\| \mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 Y_n \right] \mathbb{E} Z^2 + \|f''\| \, \mathbb{E}\left[|\tau(\beta_n Y_n)| Y_n \right] \mathbb{E} Z^2 \\
&\leq \left\| f^{(3)} \right\| |\beta_n^2| \, \mathbb{E} Y_n^3 + \|f''\| \left(\mathbb{E}\left(\tau^2(\beta_n Y_n) \right) \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} Y_n^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.2. *Z et Y_n définies dans la proposition 4.1.2 satisfont*

$$|\mathbb{E}(U_1+U_2)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|f\||\lambda+1|\mathbb{E}\left(\sqrt{Y_n}\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(b^2\|f\|+2\|f'\|\right)|\beta_n|\mathbb{E}\left(Y_n^{3/2}\right) + \left(\|f'\|+\frac{b^2\|f\|}{2}\right)\mathbb{E}Y_n.$$

avec

$$U_1 = (2\beta_n Y_n\sqrt{Y_n}Z + Y_nZ^2)f'(X_n)$$

et

$$U_2 = \left((\lambda+1)(\sqrt{Y_n}Z) - \frac{b^2}{2}(2\beta_nY_n\sqrt{Y_n}Z+Y_nZ^2)\right)f(X_n).$$

Preuve

Comme dans la preuve du lemme précédent,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(U_1+U_2)| &\leq \|f\|\left(|\lambda+1|\mathbb{E}\left(\sqrt{Y_n}|Z|\right)+b^2|\beta_n|\mathbb{E}\left(Y_n^{3/2}|Z|\right)+\frac{b^2}{2}\mathbb{E}Y_nZ^2\right)\\
&\quad+\|f'\|\left(2|\beta_n|\mathbb{E}\left(Y_n^{3/2}|Z|\right)+\mathbb{E}Y_nZ^2\right)\\
&= \mathbb{E}|Z|\left[\|f\||\lambda+1|\mathbb{E}\left(\sqrt{Y_n}\right)+\left(b^2\|f\|+2\|f'\|\right)|\beta_n|\mathbb{E}\left(Y_n^{3/2}\right)\right]\\
&\quad+\left(\frac{b^2}{2}\|f\|+\|f'\|\right)\mathbb{E}Y_n\mathbb{E}Z^2\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\|f\||\lambda+1|\mathbb{E}\left(\sqrt{Y_n}\right)+\left(b^2\|f\|+2\|f'\|\right)|\beta_n|\mathbb{E}\left(Y_n^{3/2}\right)\right]\\
&\quad+\left(\frac{b^2}{2}\|f\|+\|f'\|\right)\mathbb{E}Y_n.
\end{aligned}$$

□

A présent démontrons le théorème 4.1.1.

Preuve[théorème 4.1.1]

La caractérisation de Stein de la loi GIG établie dans le chapitre 2 et la proposition 4.1.2 permettent d'avoir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}h(X_n)-\mathbb{E}h(W) &= \mathbb{E}\left[X_n^2f'(X_n)+\left(\frac{a^2}{2}+(\lambda+1)X_n-\frac{b^2}{2}X_n^2\right)f(X_n)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{a^2}{2}+(\lambda+1)(\beta_nY_n+\sqrt{Y_n}Z)-\frac{b^2}{2}(\beta_nY_n+\sqrt{Y_n}Z)^2\right)f(X_n)\right]\\
&\quad+\mathbb{E}\left[(\beta_nY_n+\sqrt{Y_n}Z)^2f'(X_n)\right].
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}h(X_n)-\mathbb{E}h(W)| &\leq \left|\mathbb{E}\left[(\beta_nY_n)^2f'(X_n)+\left(\frac{a^2}{2}+(\lambda+1)(\beta_nY_n)-\frac{b^2}{2}(\beta_nY_n)^2\right)f(X_n)\right]\right|\\
&\quad+|\mathbb{E}[U_1+U_2]|.
\end{aligned}$$

Les lemmes 4.1.1 et 4.1.2 donnent

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}h(X_n) - \mathbb{E}h(W)| \leq & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f\| \, |\lambda + 1| \mathbb{E}\left(\sqrt{Y_n}\right) + \|f'\| \left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_n Y_n)\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}Y_n\right)^{1/2} \\
& + \left(\|f'\| + \frac{b^2 \|f\|}{2}\right) \mathbb{E}Y_n + \|f''\| \left(\mathbb{E}\left(\tau^2(\beta_n Y_n)\right)\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}Y_n^2\right)^{1/2} \\
& + \left\|f^{(3)}\right\| |\beta_n^2| \, \mathbb{E}Y_n^3 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(b^2 \|f\| + 2\|f'\|\right) |\beta_n| \mathbb{E}\left(Y_n^{3/2}\right) \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f''\| \, \beta_n^2 \mathbb{E}\left(Y_n^{5/2}\right) \\
& + \left|\mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 f'(\beta_n Y_n) + \tau(\beta_n Y_n) f(\beta_n Y_n)\right]\right|.
\end{aligned}
\tag{4.1.7}
$$

Rappelons que si $Y_n \sim GIG\left(\lambda, \frac{1}{n}, a^2b^2n - \frac{b^4}{4}\right)$, alors

$$
\mathbb{E}\left(\sqrt{Y_n}\right) = \frac{K_{\lambda+1/2}(c_n)}{nc_n K_\lambda(c_n)}; \qquad \mathbb{E}Y_n = \frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{n^2 c_n^2 K_\lambda(c_n)};
$$

$$
\mathbb{E}\left(Y_n^{3/2}\right) = \frac{K_{\lambda+3/2}(c_n)}{n^3 c_n^3 K_\lambda(c_n)}; \qquad \mathbb{E}Y_n^2 = \frac{K_{\lambda+2}(c_n)}{n^4 c_n^4 K_\lambda(c_n)};
$$

$$
\mathbb{E}\left(Y_n^{5/2}\right) = \frac{K_{\lambda+5/2}(c_n)}{n^5 c_n^5 K_\lambda(c_n)}; \qquad \mathbb{E}Y_n^3 = \frac{K_{\lambda+3}(c_n)}{n^6 c_n^6 K_\lambda(c_n)}; \qquad \mathbb{E}Y_n^4 = \frac{K_{\lambda+4}(c_n)}{n^8 c_n^8 K_\lambda(c_n)},
$$

avec

$$
c_n = \sqrt{a^2b^2 - \frac{b^4}{4n}}.
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}h(X_n) - \mathbb{E}h(W)| \leq & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f\| \, |\lambda + 1| \frac{K_{\lambda+1/2}(c_n)}{nc_n K_\lambda(c_n)} + \left(\|f'\| + \frac{b^2 \|f\|}{2}\right) \frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{n^2 c_n^2 K_\lambda(c_n)} \\
& + \|f'\| \left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_n Y_n)\right)^{1/2} \left(\frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{n^2 c_n^2 K_\lambda(c_n)}\right)^{1/2} \\
& + \|f''\| \left(\mathbb{E}\left(\tau^2(\beta_n Y_n)\right)\right)^{1/2} \left(\frac{K_{\lambda+2}(c_n)}{n^4 c_n^4 K_\lambda(c_n)}\right)^{1/2} \\
& + \left\|f^{(3)}\right\| |\beta_n^2| \, \frac{K_{\lambda+3}(c_n)}{n^6 c_n^6 K_\lambda(c_n)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|f''\| \, \beta_n^2 \left(\frac{K_{\lambda+5/2}(c_n)}{n^5 c_n^5 K_\lambda(c_n)}\right) \\
& + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(b^2 \|f\| + 2\|f'\|\right) |\beta_n| \left(\frac{K_{\lambda+3/2}(c_n)}{n^3 c_n^3 K_\lambda(c_n)}\right) \\
& + \left|\mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 f'(\beta_n Y_n) + \tau(\beta_n Y_n) f(\beta_n Y_n)\right]\right|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
&|\mathbb{E}h(X_n) - \mathbb{E}h(W)| \\
&\quad \leq \frac{1}{nc_n}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|f\|\,|\lambda+1|\frac{K_{\lambda+\frac{1}{2}}(c_n)}{K_\lambda(c_n)} + \|f'\|\left(\mathbb{E}\tau^2(\beta_n Y_n)\right)^{1/2}\sqrt{\frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{K_\lambda(c_n)}}\right] \\
&\quad + \frac{1}{n^2c_n^2}\left[\left(\|f'\| + \frac{b^2\,\|f\|}{2}\right)\frac{K_{\lambda+1}(c_n)}{K_\lambda(c_n)} + \|f''\|\left(\mathbb{E}\left(\tau^2(\beta_n Y_n)\right)\right)^{1/2}\sqrt{\frac{K_{\lambda+2}(c_n)}{K_\lambda(c_n)}}\right] \\
&\quad + \frac{1}{n^2c_n^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(b^2\,\|f\| + 2\,\|f'\|\right)\frac{\left|a^2 - \frac{b^2}{2n}\right| K_{\lambda+3/2}(c_n)}{K_\lambda(c_n)} \\
&\quad + \frac{1}{n^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|f''\|\,\frac{\left(a^2-\frac{b^2}{2n}\right)^2 K_{\lambda+5/2}(c_n)}{c_n^5 K_\lambda(c_n)} \\
&\quad + \frac{1}{n^4}\left\|f^{(3)}\right\|\frac{\left(a^2-\frac{b^2}{2n}\right)^2 K_{\lambda+3}(c_n)}{c_n^6 K_\lambda(c_n)} \\
&\quad + \left|\mathbb{E}\left[(\beta_n Y_n)^2 f'(\beta_n Y_n) + \tau(\beta_n Y_n) f(\beta_n Y_n)\right]\right|.
\end{aligned}
$$

En remplaçant $\|f\|$, $\|f'\|$, $\|f''\|$ et $\left\|f^{(3)}\right\|$ par leur majorant, on obtient le résultat.

□

4.2 Vitesse de convergence d'un modèle de résistances vers la loi gaussienne inverse réciproque

Les rappels ci-dessous nous seront utiles dans la suite. Pour $\delta > 0$, $\gamma > 0$, la loi gaussienne inverse réciproque (RIG) de paramètres δ et γ a pour densité

$$
f_{RIG}(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} x^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\left(\delta^2/x + \gamma^2 x\right)}, \quad x > 0. \tag{4.2.1}
$$

La loi gaussienne inverse (IG) de paramètres $\delta > 0$ et $\gamma > 0$ a pour densité de probabilité

$$
f_{IG}(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} x^{-3/2} e^{-\frac{1}{2}\left(\delta^2/x + \gamma^2 x\right)}, \quad x > 0. \tag{4.2.2}
$$

Les lois RIG et IG étant des cas particuliers ($p = 1/2$ et $p = -1/2$ respectivement) très importants de la loi gaussienne inverse généralisée (GIG) de paramètres $p \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$, nous donnons ici la caractérisation de Stein de ces deux lois.

Rappelons la densité de la loi GIG de paramètres $p \in \mathbb{R}$, $\delta > 0, \gamma > 0$

$$
g_{p,\delta,\gamma}(x) = \frac{\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^p}{2K_p(\delta\gamma)} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x\right)} \mathbb{1}_{\{x>0\}}. \tag{4.2.3}
$$

K_p est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce dont nous rappelons quelques unes des valeurs nécessaires dans la suite (voir par exemple [53, 24]).

$$
\begin{aligned}
&K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-1/2} e^{-z}; \quad K_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-1/2}\left(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2}\right) e^{-z}; \\
&K_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-1/2}\left(1 + z^{-1}\right) e^{-z}; \\
&K_{7/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-1/2}\left(1 + 6z^{-1} + 15z^{-2} + 15z^{-3}\right) e^{-z}; \\
&K_{9/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-1/2}\left(1 + 10z^{-1} + 45z^{-2} + 105z^{-3} + 105z^{-4}\right) e^{-z}.
\end{aligned} \tag{4.2.4}
$$

Les formules suivantes peuvent être déduites des moments d'ordres successifs de la loi $\boldsymbol{GIG}$ donnés dans le chapitre 2. Si $\boldsymbol{X}$ suit la loi $\boldsymbol{IG(\delta,\gamma)}$, alors

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X^k}) = \left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\gamma}}\right)^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{e^{\delta\gamma}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{2\delta\gamma}}{\boldsymbol{\pi}}}\boldsymbol{K_{k-\frac{1}{2}}(\delta\gamma)} \quad \text{pour tout} \quad \boldsymbol{k \geq 1;} \tag{4.2.5}$$

et si $\boldsymbol{X}$ si la loi $\boldsymbol{RIG(\delta,\gamma)}$, alors

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{X^k}) = \left(\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\gamma}}\right)^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{e^{\delta\gamma}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{2\delta\gamma}}{\boldsymbol{\pi}}}\boldsymbol{K_{k+\frac{1}{2}}(\delta\gamma)} \quad \text{pour tout} \quad \boldsymbol{k \geq 1.} \tag{4.2.6}$$

La propriété de convolution suivante, bien connue dans la littérature, peut être facilement obtenue par les transformées de Laplace des lois considérées :

$$\boldsymbol{RIG(\delta_1,\gamma) * IG(\delta_2,\gamma) = RIG(\delta_1+\delta_2,\gamma).} \tag{4.2.7}$$

4.2.1 Caractérisation de Stein pour la loi gaussienne inverse réciproque

Nous avons la caractérisation de Stein suivante de la loi $\boldsymbol{RIG}$ déduite de celle de la loi $\boldsymbol{GIG}$ établie dans le chapitre 3.

Théorème 4.2.1. *Une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ suit la loi $\boldsymbol{RIG(\delta,\gamma)}$ de densité $\boldsymbol{f_{RIG}}$ si et seulement si, pour toute fonction réelle différentiable $\boldsymbol{f}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f_{RIG}(x)f(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \boldsymbol{f_{RIG}(x)f(x)} = \boldsymbol{0}$, et telle que l'espérance suivante existe, on a*

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{X^2 f'(X)} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{\delta^2 + 3X - \gamma^2 X^2}\right)\boldsymbol{f(X)}\right] = \boldsymbol{0.} \tag{4.2.8}$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est alors

$$\boldsymbol{x^2 f'(x)} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{\delta^2 + 3x - \gamma^2 x^2}\right)\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{h(x)} - \mathbb{E}\boldsymbol{h(R)} \tag{4.2.9}$$

avec $\boldsymbol{h}$ une fonction réelle continue et $\boldsymbol{R}$ une variable aléatoire suivant la loi $\boldsymbol{RIG}$ de paramètres $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$.
L'unique solution bornée de l'équation de Stein (4.2.9) est donnée par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f_h(x)} =& \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2 f_{RIG}(x)}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f_{RIG}(t)}\left[\boldsymbol{h(t)} - \mathbb{E}\boldsymbol{h(R)}\right]\boldsymbol{dt} \\ =& \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{x^2 f_{RIG}(x)}}\int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{+\infty}} \boldsymbol{f_{RIG}(t)}\left[\boldsymbol{h(t)} - \mathbb{E}\boldsymbol{h(R)}\right]\boldsymbol{dt.} \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Les bornes suivantes de $\boldsymbol{f_h}$, $\boldsymbol{f_h'}$, $\boldsymbol{f_h''}$ et $\boldsymbol{f_h^{(3)}}$ se déduisent de celles établies dans le chapitre 3 pour la solution de l'équation de Stein de la loi $\boldsymbol{GIG(p,a,b)}$, il suffit de prendre $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}, a = \gamma^2}$ et $\boldsymbol{b = \delta^2}$.

Théorème 4.2.2. *Soit $\boldsymbol{h : (0,\infty) \to \mathbb{R}}$ une fonction continue et $\boldsymbol{R \sim RIG(\delta,\gamma)}$. Soit $\boldsymbol{f_h}$ la solution (4.2.10) de l'équation de Stein (4.2.9) de la loi $\boldsymbol{RIG(\delta,\gamma)}$.*

1. - *Si $\boldsymbol{h}$ bornée, alors*

$$\|\boldsymbol{f_h}\| \leq \boldsymbol{C}\,\|\boldsymbol{h(.)} - \mathbb{E}\boldsymbol{h(R)}\| \tag{4.2.11}$$

avec

$$\boldsymbol{C} = \max\left(\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{\delta^2}}, \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{9}}\sqrt{\boldsymbol{3\pi}}\boldsymbol{\gamma^2} e^{\frac{(\delta\gamma)^2}{3} - \delta\gamma + \frac{3}{4}}\right). \tag{4.2.12}$$

- *Si $\boldsymbol{h}$ est lipschitzienne, alors*

$$\|\boldsymbol{f_h}\| \leq \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{\delta\gamma}}\left(\boldsymbol{1} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\delta\gamma}}\right)\|\boldsymbol{h'}\|. \tag{4.2.13}$$

2. *Si* $\boldsymbol{h}$ *est bornée, dérivable de dérivée* $\boldsymbol{h'}$ *bornée, alors*

$$\left\|f_h'\right\| \leq C' = \max\left(C_1, C_2, C_3\right) \tag{4.2.14}$$

avec

$$C_1 = \frac{2}{\delta^2}\left(\left\|h'\right\| + 2C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|\right),$$

$$C_2 = \frac{8\gamma^4}{\left(7 + \sqrt{49 + (2\delta\gamma)^2}\right)^2}\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|,$$

$$C_3 = \left(\left\|h'\right\| + \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{49 + (2\delta\gamma)^2}\right)C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|\right) \times \frac{16\sqrt{2}}{343\sqrt{7}}\delta^2\gamma^4\sqrt{\delta\gamma}K_{5/2}(\delta\gamma)e^{(\delta\gamma)^2/7+7/4}.$$

3. *Si* $\boldsymbol{h}$ *est bornée, deux fois différentiable telle que les dérivées* $\boldsymbol{h'}$ *et* $\boldsymbol{h''}$ *sont bornées, alors*

$$\left\|f_h''\right\| \leq C'' = \max\left(C_4, C_5, C_6\right) \tag{4.2.15}$$

avec

$$C_4 = \frac{2}{\delta^2}\left(\left\|h''\right\| + 6C' + \gamma^2 C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|\right),$$

$$C_5 = \left(||h'|| + \frac{\gamma^2}{4}\left(1 - \frac{3}{11 + \sqrt{121 + (2\delta\gamma)^2}}\right)\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|\right) \times \frac{8\gamma^4}{\left(11 + \sqrt{121 + (2\delta\gamma)^2}\right)^2},$$

$$C_6 = \left(\left\|h''\right\| + \left(6 + \sqrt{121 + (2\delta\gamma)^2}\right)C' + \gamma^2 C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|\right) \times \frac{64\sqrt{2}}{11^5\sqrt{11}}\delta^4\gamma^6\sqrt{\delta\gamma}K_{9/2}(\delta\gamma)e^{(\delta\gamma)^2/11+11/4}.$$

4. *Si* $\boldsymbol{h}$ *est bornée, trois fois dérivable telles que* $\boldsymbol{h'}$, $\boldsymbol{h''}$ *et* $\boldsymbol{h^{(3)}}$ *sont bornées, alors*

$$\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq C''' = \max\left(C_7, C_8, C_9\right) \tag{4.2.16}$$

avec

$$C_7 = \frac{2}{\delta^2}\left(\left\|h^{(3)}\right\| + 12C'' + 3\gamma^2 C'\right),$$

$$C_8 = \frac{8\gamma^4}{\left(15 + \sqrt{225 + (2\delta\gamma)^2}\right)^2}\left(\left\|h''\right\| + \gamma^2 C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|\right) + \frac{4\gamma^6}{15 + \sqrt{225 + (2\delta\gamma)^2}}\left(1 - \frac{5}{15 + \sqrt{225 + (2\delta\gamma)^2}}\right) \times \left[||h'|| + \left(\frac{\gamma^2}{6} - \frac{\gamma^2}{30 + 2\sqrt{225 + (2\delta\gamma)^2}}\right)\left\|h(.) - \mathbb{E}h(R)\right\|\right],$$

$$C_9 = \left(\left\|h^{(3)}\right\| + \left(12 + \frac{3}{2}\sqrt{225 + (2\delta\gamma)^2}\right)C'' + 3\gamma^2 C'\right) \times \frac{256\sqrt{2}}{15^7\sqrt{15}}\delta^6\gamma^8\sqrt{\delta\gamma}K_{13/2}(\delta\gamma)e^{(\delta\gamma)^2/15+15/4}.$$

4.2.2 Caractérisation de Stein pour la loi gaussienne inverse

De la caractérisation de Stein de la loi $\boldsymbol{GIG}$ établie dans le chapitre 3, on a :

Théorème 4.2.3. *Une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ suit la loi $\boldsymbol{IG(\delta,\gamma)}$ de densité $\boldsymbol{f_{IG}}$ si et seulement si, pour toute fonction réelle différentiable $\boldsymbol{f}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{IG}(x)f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_{IG}(x)f(x) = 0$, et telle que l'espérance suivante existe, on a*

$$\mathbb{E}\left[X^2 f'(X) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + X - \gamma^2 X^2\right) f(X)\right] = 0. \tag{4.2.17}$$

L'équation différentielle de Stein correspondante est alors

$$x^2 f'(x) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + x - \gamma^2 x^2\right) f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(W) \tag{4.2.18}$$

avec $\boldsymbol{h}$ une fonction réelle continue et $\boldsymbol{W}$ une variable aléatoire suivant la loi $\boldsymbol{IG}$ de paramètres $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$.
L'unique solution bornée de l'équation de Stein (4.2.18) est donnée par

$$\begin{aligned} f_h(x) =& \frac{1}{x^2 f_{IG}(x)} \int_0^x f_{IG}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt \\ =& \frac{-1}{x^2 f_{IG}(x)} \int_x^{+\infty} f_{IG}(t)\left[h(t) - \mathbb{E}h(W)\right] dt. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Les bornes suivantes de f_h, f_h', f_h'' et $f_h^{(3)}$ se déduisent de celles établies dans le Chapitre 3 pour la solution de l'équation de Stein de la loi $\boldsymbol{GIG(p,a,b)}$, il suffit de prendre $p = -\frac{1}{2}$, $a = \gamma^2$ et $b = \delta^2$.

Théorème 4.2.4. *Soit $\boldsymbol{h : (0,\infty) \to \mathbb{R}}$ une fonction continue et $\boldsymbol{W \sim RIG(\delta,\gamma)}$. Soit $\boldsymbol{f_h}$ la solution (4.2.19) de l'équation de Stein (4.2.18) de la loi $\boldsymbol{IG(\delta,\gamma)}$.*

1. - *Si $\boldsymbol{h}$ bornée, alors*

$$\|f_h\| \leq C \|h(.) - \mathbb{E}h(W)\| \tag{4.2.20}$$

avec

$$C = \max\left(\frac{2}{\delta^2}, \frac{4\sqrt{\pi}}{\delta\gamma} e^{(\delta\gamma)^2 - \delta\gamma + \frac{1}{4}}\right).$$

- *Si $\boldsymbol{h}$ est lipschitzienne, alors*

$$\|f_h\| \leq \frac{2}{\delta\gamma}\|h'\|. \tag{4.2.21}$$

2. *Si $\boldsymbol{h}$ est bornée, dérivable de dérivée $\boldsymbol{h'}$ bornée, alors*

$$\|f_h'\| \leq C' = \max(C_1, C_2, C_3) \tag{4.2.22}$$

avec

$$C_1 = \frac{2}{\delta^2}\left(\|h'\| + 2C\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right),$$

$$C_2 = \frac{8\gamma^4}{\left(5 + \sqrt{25 + (2\delta\gamma)^2}\right)^2}\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|,$$

$$C_3 = \left(\|h'\| + \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{25 + (2\delta\gamma)^2}\right) C\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\|\right) \times \frac{8\sqrt{2}}{25\sqrt{5}} \delta\gamma\sqrt{\delta\gamma} K_{3/2}(\delta\gamma) e^{(\delta\gamma)^2/5 + 5/4}.$$

3. Si $\boldsymbol{h}$ est bornée, deux fois différentiable telle que les dérivées $\boldsymbol{h'}$ et $\boldsymbol{h''}$ sont bornées, alors

$$\left\|f_h''\right\| \leq C'' = \max\left(C_4, C_5, C_6\right) \tag{4.2.23}$$

avec

$$C_4 = \frac{2}{\delta^2}\left(\left\|h''\right\| + 6C' + \gamma^2 C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\|\right),$$

$$C_5 = \left(||h'|| + \frac{\gamma^2}{4}\left(1 - \frac{1}{9 + \sqrt{81 + (2\delta\gamma)^2}}\right)\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\|\right) \times \frac{8\gamma^4}{\left(9 + \sqrt{81 + (2\delta\gamma)^2}\right)^2},$$

$$C_6 = \left(\left\|h''\right\| + \left(6 + \sqrt{81 + (2\delta\gamma)^2}\right)C' + \gamma^2 C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\|\right) \times \frac{32\sqrt{2}}{19683}\delta^3\gamma^5\sqrt{\delta\gamma}K_{7/2}(\delta\gamma)e^{(\delta\gamma)^2/9+9/4}.$$

4. Si $\boldsymbol{h}$ est bornée, trois fois dérivable telles que $\boldsymbol{h'}$, $\boldsymbol{h''}$ et $\boldsymbol{h^{(3)}}$ sont bornées, alors

$$\left\|f_h^{(3)}\right\| \leq C''' = \max\left(C_7, C_8, C_9\right) \tag{4.2.24}$$

avec

$$C_7 = \frac{2}{\delta^2}\left(\left\|h^{(3)}\right\| + 12C'' + 3\gamma^2 C'\right),$$

$$C_8 = \frac{8\gamma^4}{\left(13 + \sqrt{169 + (2\delta\gamma)^2}\right)^2}\left(\left\|h''\right\| + \gamma^2 C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\|\right) + \frac{4\gamma^6}{\left(13 + \sqrt{169 + (2\delta\gamma)^2}\right)^2}\left(1 - \frac{3}{13 + \sqrt{169 + (2\delta\gamma)^2}}\right) \times \left[||h'|| + \left(\frac{\gamma^2}{6} - \frac{\gamma^2}{78 + 6\sqrt{169 + (2\delta\gamma)^2}}\right)\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\|\right],$$

$$C_9 = \left(\left\|h^{(3)}\right\| + \left(12 + \frac{3}{2}\sqrt{169 + (2\delta\gamma)^2}\right)C'' + 3\gamma^2 C'\right) \times \frac{128\sqrt{2}}{13^6\sqrt{13}}\delta^5\gamma^7\sqrt{\delta\gamma}K_{11/2}(\delta\gamma)e^{(\delta\gamma)^2/13+13/4}.$$

4.2.3 Sur la vitesse de convergence d'une suite de résistances vers la loi gaussienne inverse réciproque

Proposition 4.2.1. *On considère une suite $(\boldsymbol{R_n})_{n\geq 1}$ telle que $\boldsymbol{R_n}$ est de loi $\boldsymbol{RIG}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i, \gamma\right)$ avec $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i = \delta < \infty$, une suite $(\boldsymbol{r_n})_{n\geq 1}$ telle que $\boldsymbol{r_n}$ est indépendante de $\boldsymbol{R_n}$, et de loi $\boldsymbol{IG}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i, \gamma\right)$.*
Alors :

1. *Lorsque* $\boldsymbol{n \to \infty}$, *la suite* $\boldsymbol{(R_n)_{n\geq 1}}$ *converge presque sûrement (et donc en loi) vers une variable aléatoire* $\boldsymbol{R}$ *de loi* $\boldsymbol{RIG\,(\delta, \gamma)}$.
2. $\boldsymbol{R = R_n + r_n}$ *en loi.*

Remarque 15. Les variables considérées dans la proposition précédente apparaissent dans le contexte d'un modèle de résistances évoqué plus haut.

Vu la proposition précédente, il est naturel de se demander à quel ordre est la vitesse de convergence de la suite de variables aléatoires $\boldsymbol{(R_n)_{n\geq 1}}$ de loi $\boldsymbol{RIG}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\delta_i}, \gamma\right)$ vers la variable $\boldsymbol{R}$ de loi $\boldsymbol{RIG}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\delta_i}, \gamma\right)$ pour $\boldsymbol{n}$ assez grand.

Le théorème 4.2.5 ci-dessous propose une réponse à cette question en fournissant un majorant explicite de $|\mathbb{E}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R_n}) - \mathbb{E}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R})|$ pour une famille de fonctions tests $\boldsymbol{h}$. Le résultat a été établi par l'approche de Stein.

Théorème 4.2.5 (Konzou *et al. [39]*). *Soit* $\boldsymbol{C_b^3}$ *la classe des fonctions bornées* $\boldsymbol{h}$ *:* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *pour lesquelles les dérivées* $\boldsymbol{h'}$, $\boldsymbol{h''}$, $\boldsymbol{h^{(3)}}$ *existent et sont bornées. Sous les hypothèses et notations de la proposition 4.2.1, si* $\boldsymbol{h \in C_b^3}$ *alors*

$$|\mathbb{E}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R_n}) - \mathbb{E}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{R})| \leq \left[\mathcal{Y}_{||h||} \times \mathcal{K} + \mathcal{Z}_{||h||} \times \mathcal{X}\right] \left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)^{1/2} \tag{4.2.25}$$

avec

$$\mathcal{K} = \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)^{1/2},$$

$$\mathcal{X} = \left[\frac{15}{\gamma^7} + \frac{15}{\gamma^6}\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i} + \frac{6}{\gamma^5}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^4}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)^3\right]^{1/2},$$

$$\mathcal{Y}_{||h||} = C''\sqrt{K_1} + \frac{1}{2}C'\sqrt{K_2} + C'\sqrt{K_3} + \frac{1}{2}C\,\|h(.) - \boldsymbol{E}h(\boldsymbol{W})\|\sqrt{K_4},$$

$$\mathcal{Z}_{||h||} = C'''\sqrt{K_1} + \frac{1}{2}C''\sqrt{K_2},$$

$$K_1 = \frac{105}{\gamma^8} + \frac{105\delta}{\gamma^7} + \frac{45\delta^2}{\gamma^6} + \frac{10\delta^3}{\gamma^5} + \frac{\delta^4}{\gamma^4},$$

$$K_2 = \frac{42}{\gamma^4} + \frac{42\delta}{\gamma^3} + \frac{24\delta^2}{\gamma^2} + \frac{10\delta^3}{\gamma},$$

$$K_3 = 4\left(\frac{3}{\gamma^4} + \frac{3\delta}{\gamma^3} + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) + \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}$$
$$+ 4\left[\left(\frac{3}{\gamma^4} + \frac{3\delta}{\gamma^3} + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right]^{1/2},$$

$$K_4 = 9 + 4\delta^2\gamma^2 + 7\gamma\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i} + \gamma^2\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)^2 +$$
$$+ 4\gamma^4\left[\left(\frac{3}{\gamma^4} + \frac{3\delta}{\gamma^3} + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\boldsymbol{\delta_i}\right]^{1/2},$$

les constantes C, C', C'', C''' *sont données par* (4.2.12), (4.2.22), (4.2.15), (4.2.16) *respectivement ;* $W \sim RIG(\delta, \gamma)$.

Remarque 16. Puisque la série $\sum \delta_i$ converge vers δ par hypothèse, $\sum_{i=n+1}^{\infty} \delta_i$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent, le majorant fourni par le théorème 4.2.5 a une vitesse de convergence de l'ordre de $\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \delta_i \right)^{1/2}$.

4.2.4 Preuve

Pour plus de lisibilité, nous notons par $f := f_h$ la solution de l'équation de Stein de la loi gaussienne inverse réciproque.

La démonstration du théorème 4.2.5 est basée sur les lemmes suivants :

Lemme 4.2.1. *Soit* $E_{1,n} = \mathbb{E}\left[R^2 f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) f(R_n) \right]$. *On a*

$$
\begin{aligned}
|E_1| \leq & \left(\|f''\| \left[\mathbb{E}\left(R^4\right)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f'\| \left[\mathbb{E}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right)^2\right]^{1/2} \right) \left[\mathbb{E}(r_n^2)\right]^{1/2} \\
& + \left(\left\|f^{(3)}\right\| \left[\mathbb{E}(R^4)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f''\| \left[\mathbb{E}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right)^2\right]^{1/2} \right) \left[\mathbb{E}(r_n^4)\right]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.2.26}
$$

Preuve

Le développement de Taylor de $f'(R)$ et de $f(R)$ au voisinage de R_n donne

$$f'(R) = f'(R_n) + (R - R_n) f''(R_n) + \int_{R_n}^{R} (R - t) f^{(3)}(t) dt$$

et

$$f(R) = f(R_n) + (R - R_n) f'(R_n) + \int_{R_n}^{R} (R - t) f''(t) dt.$$

Ainsi,

$$R^2 f'(R_n) = R^2 f'(R) - R^2 (R - R_n) f''(R_n) - R^2 \int_{R_n}^{R} (R - t) f^{(3)}(t) dt;$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) f(R_n) = & -\frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right)(R - R_n) f'(R_n) \\
& \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) f(R) - \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) \int_{R_n}^{R} (R - t) f''(t) dt.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
E_{1,n} &= \mathbb{E}\left[R^2 f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) f(R_n) \right] \\
&= \mathbb{E}\left[R^2 f'(R) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) f(R) \right] \\
&- \mathbb{E}\left[R^2 (R - R_n) f''(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right)(R - R_n) f'(R_n) \right] \\
&- \mathbb{E}\left[R^2 \int_{R_n}^{R} (R - t) f^{(3)}(t) dt + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) \int_{R_n}^{R} (R - t) f''(t) dt \right].
\end{aligned}
$$

Puisque $R \sim RIG(\delta, \gamma)$, par la caractérisation (4.2.8) de la loi RIG,

$$\mathbb{E}\left[R^2 f'(R) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) f(R) \right] = 0.$$

Soit

$$e_1 = \mathbb{E}\left[R^2(R-R_n)f''(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)(R-R_n)f'(R_n)\right]$$

et

$$e_2 = \mathbb{E}\left[R^2\int_{R_n}^{R}(R-t)f^{(3)}(t)dt + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)\int_{R_n}^{R}(R-t)f''(t)dt\right].$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que $R = R_n + r_n$ en loi, on a

$$\begin{aligned}
|e_1| &= \left|\mathbb{E}\left[R^2r_nf''(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)r_nf'(R_n)\right]\right| \\
&\leq \|f''\|\,\mathbb{E}|R^2r_n| + \frac{1}{2}\|f'\|\,\mathbb{E}\left|\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)r_n\right| \\
&\leq \|f''\|\left[\mathbb{E}\left(R^4\right)\mathbb{E}(r_n^2)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f'\|\left[\mathbb{E}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)^2\mathbb{E}(r_n^2)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|e_2| &= \left|\mathbb{E}\left[R^2\int_{R_n}^{R}(R-t)f^{(3)}(t)dt + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)\int_{R_n}^{R}(R-t)f''(t)dt\right]\right| \\
&\leq \left\|f^{(3)}\right\|\mathbb{E}\left[R^2\int_{R_n}^{R}|R-t|dt\right] + \frac{1}{2}\|f''\|\,\mathbb{E}\left[\left|\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right|\int_{R_n}^{R}|R-t|dt\right] \\
&\leq \left\|f^{(3)}\right\|\mathbb{E}\left[R^2\int_{R_n}^{R}|R-R_n|dt\right] + \frac{1}{2}\|f''\|\,\mathbb{E}\left[\left|\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right|\int_{R_n}^{R}|R-R_n|dt\right] \\
&= \left\|f^{(3)}\right\|\mathbb{E}\left[R^2(R-R_n)^2\right] + \frac{1}{2}\|f''\|\,\mathbb{E}\left[\left|\gamma^2 + 3R - \gamma R^2\right|(R-R_n)^2\right] \\
&= \left\|f^{(3)}\right\|\mathbb{E}\left[R^2r_n^2\right] + \frac{1}{2}\|f''\|\,\mathbb{E}\left[\left|\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right|r_n^2\right] \\
&\leq \left\|f^{(3)}\right\|\left[\mathbb{E}\left(R^4\right)\mathbb{E}\left(r_n^4\right)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f''\|\left[\mathbb{E}\left(\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)^2\right)\mathbb{E}\left(r_n^4\right)\right]^{1/2},
\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
|E_1| &\leq |e_1| + |e_2| \\
&\leq \left(\|f''\|\left[\mathbb{E}\left(R^4\right)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f'\|\left[\mathbb{E}\left(\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)^2\right)\right]^{1/2}\right)\left[\mathbb{E}(r_n^2)\right]^{1/2} \\
&+ \left(\left\|f^{(3)}\right\|\left[\mathbb{E}\left(R^4\right)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f''\|\left[\mathbb{E}\left(\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2R^2\right)^2\right)\right]^{1/2}\right)\left[\mathbb{E}(r_n^4)\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwartz permettent d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 4.2.2. *Soit* $E_{2,n} = \mathbb{E}\left[\left((r_n - 2R)f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(2\gamma^2R - \gamma^2r_n - 3\right)f(R_n)\right)r_n\right]$. *Alors*

$$|E_{2,n}| \leq \left(\|f'\|\left[\mathbb{E}(r_n - 2R)^2\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f\|\left[\mathbb{E}\left(2\gamma^2R - \gamma^2r_n - 3\right)^2\right]^{1/2}\right)\left[\mathbb{E}(r_n^2)\right]^{1/2}. \quad (4.2.27)$$

Abordons maintenant la démonstration du théorème 4.2.5.

Preuve[théorème 4.2.5]

Rappelons que l'équation de Stein de la loi RIG est

$$x^2f'(x) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3x - \gamma^2x^2\right)f(x) = h(x) - \mathbb{E}h(R) \quad (4.2.28)$$

avec $\boldsymbol{R \sim RIG(\delta, \gamma)}$. Dans l'équation (4.2.28), en remplaçant x par R_n et en prenant l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}\left[R_n^2 f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R_n - \gamma^2 R_n^2\right) f(R_n)\right] = \mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R).$$

Ainsi, majorer $|\mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R)|$ est équivalent à majorer

$$\left|\mathbb{E}\left[R_n^2 f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R_n - \gamma^2 R_n^2\right) f(R_n)\right]\right|.$$

On a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R)| &= \mathbb{E}\left[R_n^2 f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R_n - \gamma^2 R_n^2\right) f(R_n)\right] \\
&= \left|\mathbb{E}\left[(R - r_n)^2 f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - 3r_n - \gamma^2(R - r_n)^2\right) f(R_n)\right]\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\left[R^2 f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right) f(R_n)\right]\right| \\
&+ \left|\mathbb{E}\left[\left((r_n - 2R) f'(R_n) + \frac{1}{2}\left(2\gamma^2 R - \gamma^2 r_n - 3\right) f(R_n)\right) r_n\right]\right| \\
&= |E_{1,n}| + |E_{2,n}|.
\end{aligned}$$

La seconde égalité est due au fait que $\boldsymbol{R = R_n + r_n}$ en distribution. Par les lemmes 4.2.1 et 4.2.2, on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R)| &\leq \left(\|f''\|\left[\mathbb{E}\left(R^4\right)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f'\|\left[\mathbb{E}\left(\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right)^2\right)\right]^{1/2}\right)\left[\mathbb{E}(r_n^2)\right]^{1/2} \\
&+ \left(\left\|f^{(3)}\right\|\left[\mathbb{E}\left(R^4\right)\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f''\|\left[\mathbb{E}\left(\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right)^2\right)\right]^{1/2}\right)\left[\mathbb{E}(r_n^4)\right]^{1/2} \\
&+ \left(\|f'\|\left[\mathbb{E}(r_n - 2R)^2\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\|f\|\left[\mathbb{E}\left(2\gamma^2 R - \gamma^2 r_n - 3\right)^2\right]^{1/2}\right)\left[\mathbb{E}(r_n^2)\right]^{1/2}. \quad (4.2.29)
\end{aligned}$$

Du fait que $\boldsymbol{r_n \sim IG\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \delta_i, \gamma\right)}$ et $\boldsymbol{R \sim RIG\left(\delta, \gamma\right)}$, des équations (4.2.5), (4.2.6) et (4.2.4), on obtient

$$\mathbb{E}(r_n) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i; \qquad \mathbb{E}\left(r_n^2\right) = \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i;$$

$$\mathbb{E}\left(r_n^3\right) = \left[\frac{3}{\gamma^5} + \frac{3}{\gamma^4}\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i + \frac{1}{\gamma^3}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)^2\right]\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i;$$

$$\mathbb{E}\left(r_n^4\right) = \left[\frac{15}{\gamma^7} + \frac{15}{\gamma^6}\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i + \frac{6}{\gamma^5}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)^2 + \frac{1}{\gamma^4}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)^3\right]\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i;$$

$$\mathbb{E}(R) = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\delta}{\gamma}; \qquad \mathbb{E}\left(R^2\right) = \frac{3}{\gamma^4} + \frac{3\delta}{\gamma^3} + \frac{\delta^2}{\gamma^2};$$

$$\mathbb{E}\left(R^3\right) = \frac{15}{\gamma^6} + \frac{15\delta}{\gamma^5} + \frac{6\delta^2}{\gamma^4} + \frac{\delta^3}{\gamma^3}; \qquad \mathbb{E}\left(R^4\right) = \frac{105}{\gamma^8} + \frac{105\delta}{\gamma^7} + \frac{45\delta^2}{\gamma^6} + \frac{10\delta^3}{\gamma^5} + \frac{\delta^4}{\gamma^4}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\delta^2 + 3R - \gamma^2 R^2\right)^2 &= \mathbb{E}\left[\delta^4 + 6\delta^2 R + \left(9 - 2\delta^2\gamma^2 R^2\right) - 6\gamma^2 R^3 + \gamma^4 R^4\right] \\
&= \frac{42}{\gamma^4} + \frac{42\delta}{\gamma^3} + \frac{24\delta^2}{\gamma^2} + \frac{10\delta^3}{\gamma},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(r_n - 2R)^2 &= \mathbb{E}\left(r_n^2 + 4R^2 - 4Rr_n\right) \\
&\leq 4\mathbb{E}\left(R^2\right) + \mathbb{E}\left(r_n^2\right) + 4\left[\mathbb{E}\left(R^2\right)\mathbb{E}\left(r_n^2\right)\right]^{1/2} \\
&= 4\left(\frac{3}{\gamma^4} + \frac{3\delta}{\gamma^3} + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right) + \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i \\
&+ 4\left[\left(\frac{3}{\gamma^4} + \frac{3\delta}{\gamma^3} + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right]^{1/2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(2\gamma^2 R - \gamma^2 r_n - 3\right)^2 &= 4\gamma^4\mathbb{E}(R^2) - 12\gamma^2\mathbb{E}(R) + 9 + \gamma^4\mathbb{E}\left(r_n^2\right) + 6\gamma^2\mathbb{E}(r_n) - 4\gamma^4\mathbb{E}(Rr_n) \\
&= 9 + 4\delta^2\gamma^2 + \left(\gamma + \gamma^2\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i \\
&+ 6\gamma\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i - 4\gamma^4\mathbb{E}(Rr_n) \\
&\leq 9 + 4\delta^2\gamma^2 + 7\gamma\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i + \gamma^2\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)^2 \\
&+ 4\gamma^4\left[\left(\frac{3}{\gamma^4} + \frac{3\delta}{\gamma^3} + \frac{\delta^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right)\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Le théorème 4.2.2 permet d'avoir

$$
\|f\| \leq C\left\|h(.) - \mathbb{E}h(W)\right\|; \qquad \left\|f'\right\| \leq C'; \qquad \left\|f''\right\| \leq C''; \qquad \left\|f^{(3)}\right\| \leq C'''.
$$

Pour finir la preuve du théorème, il suffit de faire des substitutions dans le membre de droite de l'inégalité (4.2.29).

□

Par un calcul direct, nous avons la majoration suivante de $\left|\mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R)\right|$.

Théorème 4.2.6 (Konzou *et al. [39]*). *Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Sous les hypothèses et notations de la proposition 4.2.1, on a*

$$
\left|\mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R)\right| \leq \left\|h'\right\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i. \tag{4.2.30}
$$

Preuve

Comme h est lipschitzienne, h' est bornée et

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}h(R_n) - \mathbb{E}h(R)\right| &\leq \left\|h'\right\|\mathbb{E}|R_n - R| \\
&= \left\|h'\right\|\mathbb{E}|r_n| \\
&= \left\|h'\right\|\mathbb{E}r_n \\
&= \left\|h'\right\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i.
\end{aligned}
$$

□

Remarque 17. Le majorant fourni par le théorème 4.2.6 a une vitesse de convergence de l'ordre de $\sum_{i=n+1}^{\infty}\delta_i$, ce qui est meilleur que celui du théorème 4.2.5.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu une borne de la vitesse de convergence de la loi hyperbolique généralisée vers la loi gaussienne inverse généralisée et aussi d'une suite de variables, apparaissant dans un contexte particulier, vers la loi gaussienne inverse réciproque par la méthode de Stein. Il est aussi à noter que la méthode de Stein, n'est pas dans tous les cas optimale comme le montre la remarque 17. Les résultats ont fait l'objet du document de travail [39].

Conclusion

Les résultats établis sur la caractérisation de Stein des lois gaussiennes inverses généralisées et de Kummer rendent maintenant possible l'approximation de la loi d'une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ par la loi gaussienne inverse généralisée ou la loi de Kummer via la méthode de Stein en déterminant un majorant adéquat de :

- $\left|\mathbb{E}\left[\boldsymbol{X^2 f'(X)} + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}} + (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{1})\boldsymbol{X} - \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{X^2}\right)\boldsymbol{f(X)}\right]\right|$ pour la loi gaussienne inverse généralisée,
- $|\mathbb{E}\left[\boldsymbol{X(X+1)(f'(X)} + \boldsymbol{((1-b)X - cX(1+X)+a)\, f(X)}\right]|$ pour la loi de Kummer

où $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ sont les paramètres de ces deux lois et $\boldsymbol{f}$ la solution de l'équation de Stein correspondante à la loi cible. Cette approche fait appel aux bornes de la solution de l'équation différentielle de Stein correspondante et (éventuellement) celles de ses dérivées successives. Ces bornes n'étaient pas établies explicitement dans la littérature, ce qui a fait l'objet de nos travaux (voir [35, 37, 36]). D'autre part, les vitesses de convergence de la loi gaussienne inverse généralisée et de la loi de Kummer vers la loi gamma, de la loi hyperbolique généralisée vers la loi gaussienne inverse généralisée, puis de la résistance totale d'un circuit arborescent vers la loi gaussienne inverse réciproque ont été étudiées par la méthode de Stein dans [38] et [39] respectivement.

Travaux en cours et perspectives

Travaux en cours

►Nouvelle borne explicite de la dérivée de la solution de l'équation de Stein pour les lois GIG et de Kummer

Pour les lois de probabilité dont la densité g vérifie

$$(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)$$

avec s un polynôme et τ un polynôme convexe de second degré décroissant, le théorème 3.2.2 établit qu'il existe des constantes B et C telles que pour toute fonction test h, lipschitzienne,

$$\left|f_h'(x)\right| \leq B\left\|h'\right\|,$$

$$\left|xf_h'(x)\right| \leq C\left\|h'\right\|$$

où f_h est la solution de l'équation de Stein correspondante.
Nous travaillons pour déterminer les valeurs explicites de B et C.

►Les lois GIG et de Kummer comme loi d'une fraction continue

Rappelons le résultat suivant dû à Letac Seshadri.

Théorème 4.2.7. *[44]*

- *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X > 0$ et $Y \sim \gamma(p, a/2)$ avec $p, a > 0$, où $\gamma(p, c)$ est la loi gamma de densité proportionnelle à $x^{p-1}e^{-cx}$. Alors $X =_d \frac{1}{Y+X}$ si et seulement si $X \sim \mathbf{GIG}(-p, a, a)$.*
- *Soit X, Y_1 et Y_2 trois variables aléatoires indépendantes telles que $X > 0$, $Y_1 \sim \gamma(p, b/2)$ et $Y_2 \sim \gamma(p, a/2)$ pour $p, a, b > 0$. Alors $X =_d \frac{1}{Y_1+\frac{1}{Y_2+X}}$ si et seulement si $X \sim \mathbf{GIG}(-p, a, b)$.*
- *Si $(Y_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires telles que*

$$\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1) = \gamma(p, b/2) \quad et \quad \mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(p, a/2); \quad i \geq 1,$$

alors

$$\mathcal{L}\left(\cfrac{1}{Y_1 + \cfrac{1}{Y_2 + \cfrac{1}{Y_3 + \ddots}}}\right) = GIG(-p, a, b)$$

où $=_d$ désigne l'égalité en loi et $\mathcal{L}(X)$ désigne la loi de X.
On a aussi

Théorème 4.2.8. *[31]*

— *Soit* $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y_1}$ *et* $\boldsymbol{Y_2}$ *trois variables aléatoires indépendantes telles que* $\boldsymbol{Y_1 \sim \gamma(a,c)}$ *et* $\boldsymbol{Y_2 \sim \gamma(a+b,c)}$ *pour* $\boldsymbol{a,c>0}$ *et* $\boldsymbol{b>-a}$. *Alors* $\boldsymbol{X =_d \frac{Y_1}{1+\frac{Y_2}{1+X}}}$ *si et seulement si* $\boldsymbol{X \sim \mathbf{K}(a,b,c)}$.

— *Si* $\boldsymbol{(Y_i)_{i\geq 1}}$ *est une suite de variables aléatoires telles que*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(Y_{2i-1}) = \mathcal{L}(Y_1) = \gamma(a,c) \quad et \quad \mathcal{L}(Y_{2i}) = \mathcal{L}(Y_2) = \gamma(a+b,c); \quad i \geq 1,}$$

alors

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left(\cfrac{Y_1}{1+\cfrac{Y_2}{1+\cfrac{Y_3}{1++\ddots}}}\right) = K(a,b,c).}$$

Naturellement, il serait intéressant de borner l'écart entre

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left(\cfrac{1}{Y_1+\cfrac{1}{Y_2+\cfrac{1}{\cdots+\frac{1}{Y_n}}}}\right)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{GIG(-p,a,b),}$$

ainsi que celui entre

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left(\cfrac{Y_1}{1+\cfrac{Y_2}{1+\cfrac{Y_3}{1+\cdots+\frac{Y_{n-1}}{1+Y_n}}}}\right)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{K(a,b,c)}$$

afin d'estimer une vitesse de convergence pour ces résultats asymptotiques. Nous nous proposons d'estimer une telle vitesse par la méthode de Stein.

Perspectives

Aussitôt les travaux en cours achevés, nous nous proposons d'aborder les points suivants :

- La loi GIG comme loi limite d'un schéma triangulaire.
  La famille des lois $\boldsymbol{\Gamma}-$convolutions généralisées est constituée de lois de probabilités définies sur $\boldsymbol{[0,\infty)}$ dont la fonction caractéristique est de la forme

$$\boldsymbol{\phi(u) = \exp\left[iu\alpha - \int_0^\infty \log\left(1-\frac{iu}{y}\right) dU(y)\right]}$$

  où $\boldsymbol{\alpha \geq 0}$ et $\boldsymbol{U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+}$ une fonction non décroissante telle que

$$\boldsymbol{U(0) = 0, \quad \int_0^1 |\log y|\, dU(y) < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{1}{y} dU(y) < \infty.}$$

  La loi GIG$\boldsymbol{(p,a,b)}$ appartient à la famille des lois $\boldsymbol{\Gamma}-$convolutions généralisées (voir [21]) avec

$$\boldsymbol{\alpha = 0, \quad U(x) = \left[\max(0,p) + b\int_{a/2}^x g_{|p|}(2by-ab)dy\right] \mathbb{1}_{(a/2,\infty)}(x),} \tag{4.2.31}$$

  où

$$\boldsymbol{g_\nu(x) = \frac{2}{\pi^2 x\left[J_\nu^2(\sqrt{x}) + Y_\nu^2(\sqrt{x})\right]}, \quad x>0,}$$

  $\boldsymbol{J_\nu}$ et $\boldsymbol{Y_\nu}$ sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce respectivement.
  On a le résultat limite suivant dû à Eberlein et Hammerstein [21].

Théorème 4.2.9. *Considérons une loi GIG*$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *arbitraire de fonction* $\boldsymbol{U}$ *correspondante définie par* (4.2.31). *Soit* $(\boldsymbol{K_n})_{n\geq 1}$ *une suite telle que* $\boldsymbol{K_n} > \boldsymbol{a/2}$. *Pour chaque* $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}$, *considérons la partition*

$$\boldsymbol{a/2 = x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,k_n} = K_n}$$

de $[\boldsymbol{a/2, K_n}]$. *Soit* $(\boldsymbol{X_{n,i}, 1 \leq i \leq k_n, n \geq 1})$ *une famille indépendante de variables aléatoires telle que*

— $\boldsymbol{X_{n,i} \sim \gamma(p, a/2)}$ *si* $\boldsymbol{p > 0}$ *ou* $\boldsymbol{X_{n,i} = 0}$ *sinon.*

— *Pour* $\boldsymbol{2 \leq i \leq k_n}$, $\boldsymbol{X_{n,i} \sim \gamma\left(x_{n,i}, U(x_{n,i}) - U(x_{n,i-1})\right)}$.

Alors, si $\boldsymbol{K_n \to \infty}$ *et* $\boldsymbol{\sup_{1\leq i\leq k_n} |X_{n,i} - X_{n,i-1}|}$ *tend vers* $\boldsymbol{0}$, *lorsque* $\boldsymbol{n \to \infty}$, *alors* $\boldsymbol{\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{K_n} X_{n,i}\right)}$ *converge vers la loi GIG*$(\boldsymbol{p, a, b})$.

On se propose d'utiliser la méthode de Stein pour borner la distance entre $\boldsymbol{\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{K_n} X_{n,i}\right)}$ et GIG$(\boldsymbol{p, a, b})$.

- Pour les lois de probabilité dont la densité $\boldsymbol{g}$ vérifie $\boldsymbol{(s(x)g(x))' = \tau(x)g(x)}$ avec $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{\tau}$ des fonction polynomiales, nous nous proposons de borner les dérivées successives de la solution de l'équation différentielle de Stein correspondante.
- Étudier la convergence vers la loi normale des estimateurs de maximum de vraisemblance des paramètres de la loi GIG [40] via la méthode de Stein.

Bibliographie

[1] C. Armero and M. J. Bayarri, *A bayesian analysis of a queueing system with unlimited service*, J. Statist. Plann. Inference **58** (1997), no. 2, 241–261, MR1450015.

[2] A. D. Barbour, *Stein's method and poisson process approximations*, J. Appl. Probab. **25A** (1988), 175–184, MR0974580.

[3] A. D. Barbour, L. Holst, and S. Janson, *Poisson approximation*, vol. 2, Oxford Studies in Probability, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 192, MR1163825 .

[4] O. Barndorff-Nielsen, J. Kent, and M. Sørensen, *Normal variance-mean mixtures and z distributions*, Internat. Statist. Rev. **50** (1982), no. 2, 145–159, MR0678296.

[5] O. E. Barndorff-Nielsen, *Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size*, Proc Roy Soc Lond A **353** (1977), 401–419, 10.1098/rspa.1977.0041.

[6] _____, *Models for non-gaussian variation, with applications to turbulence*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **368** (1979), no. 1735, 501–520, MR0554672 .

[7] _____, *A note on electrical networks and the inverse gaussian distribution*, Adv. Appl. Prob. **26** (1994), no. 1, 63–67, MR1260303 .

[8] O. E. Barndorff-Nielsen and P. Blasœld, *Hyperbolic distributions and ramifications : contributions to theory and application*, Statistical distributions in scientific work, (Trieste, 1980), NATO Adv. Study Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci., 79, Reidel, Dordrecht-Boston, Mass **4** (1981), 19–44, MR0656143 .

[9] O. E. Barndorff-Nielsen and A. E. Koudou, *Trees with random conductivities and the (reciprocal) inverse gaussian distribution*, Adv. in Appl. Prob. **30** (1998), no. 2, 409–424, MR1642846.

[10] B. M. Bibby and M. Sørensen, *Hyperbolic processes in finance*, In : Rachev ST (ed) Handbook of heavy tailed distributions in finance. Elsevier, Amsterdam, 2003.

[11] T. C. Brown and M. J. Phillips, *Negative binomial approximation with stein's method*, Methodol. Comput. Appl. Probab. **1** (1999), no. 4, 407–421, MR1770372.

[12] S. Chatterjee, P. Diaconis, and E. Meckes, *Exchangeable pairs and poisson approximation*, Probab. Surv. **2** (2005), 64–106, MR2121796 .

[13] S. Chatterjee, J. Fulman, and A. Röllin, *Exponential approximation by stein's method and spectral graph theory*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **8** (2011), 197–223, MR2802856.

[14] F. Chebana, S. El Adlouni, and A. Bobée, *Mixed estimation methods for halphen distributions with applications in extreme hydrologic events*, Stoch. Environ. Res. Risk Assess **24** (2010), 59–376, 10.1007/s00477-009-0325-z.

[15] L. H. Y. Chen, *Poisson approximation for dependent trials*, Ann. Probability **3** (1975), no. 3, 534–545, MR0428387.

[16] L. H. Y. Chen, L. Goldstein, and Q-M. Shao, *Normal approximation by stein's method*, Probability and its Applications (New York). Springer, Heidelberg, 2011, MR2732624.

[17] P. Chen, I. Nourdin, and L. Xu, *Stein's method for asymmetric α-stable distributions, with application to the stable CLT*, J. Theoret. Probab, to appear. (2020), doi.org/10.1007/s10959-020-01004-1.

[18] C. Döbler, *Stein's method of exchangeable pairs for the beta distribution and generalizations*, Electron. J. Probab. **20** (2015), no. 109, 34 pp, MR3418541.

[19] C. Döbler, R. E. Gaunt, and S. J. Vollmer, *An iterative technique for bounding derivatives of solutions of stein equations*, Electron. J. Probab. **22** (2017), no. 96, 39 pp, MR3724564.

[20] E. Eberlein and U. Keller, *Hyperbolic distributions in finance*, Bernoulli **1(3)** (1995), 281–299.

[21] E. Eberlein and E. A. v. Hammerstein, *Generalized hyperbolic and inverse gaussian distributions : limiting cases and approximation of processes*, Progr. Probab. **58** (2004), 221–264, MR2096291.

[22] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vol. 1,2,3, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1953, authors.library.caltech.edu/43491/.

[23] R. E. Gaunt, *Rates of convergence of variance-gamma approximations via stein's method*, Ph.D. thesis, Universityof Oxford, 2013.

[24] _____, *Inequalities for modified bessel functions and their integrals*, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), no. 1, 373–386, MR3229830.

[25] _____, *Variance-gamma approximation via stein's method*, Electron. J. Probab. **19** (2014), no. 38, 33, MR3194737.

[26] _____, *A stein characterisation of the generalized hyperbolic distribution*, ESAIM Probab. Stat. **21** (2017), 303–316, MR3743916.

[27] R. E. Gaunt, A. M. Pickett, and G. Reinert, *Chi-square approximation by stein's method with application to pearson's statistic*, Ann. Appl. Probab. **27** (2017), no. 2, 720–756, MR3655852.

[28] L. Goldstein and G. Reinert, *Stein's method for the beta distribution and the pólya-eggenberger urn*, J. Appl. Probab. **50** (2013), no. 4, 1187–1205, MR3161381.

[29] I. J. Good, *The population frequencies of species and the estimation of population parameters*, Biometrika **40** (1953), 237–264, MR0061330 .

[30] E. Halphen, *Sur un nouveau type de courbe de fréquence*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **213** (1941), 633–635, Published under the name of "*Dugué* " due to war constraints.

[31] M. Hamza and P. Vallois, *On kummer's distribution of type two and a generalized beta distribution*, Statist. Probab. Lett. **118** (2016), 60–69, MR3531483.

[32] S. Iyengar and Q. Liao, *Modeling neural activity using the generalized inverse gaussiandistribution*, Biol. Cybern. **77** (1997), 289–295.

[33] B. Jøgensen, *Statistical properties of the generalized inverse gaussian distribution*, Lecture Notes in Statistics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982, MR0648107.

[34] A. Kesarwani, *Theory of the generalized modified bessel function kz,w(x) and 2-adic valuations of integer sequences*, Ph.D. thesis, Tulane University School of Science and Engineering, 2017, MR3797355, p. 124.

[35] E. Konzou and A. E. Koudou, *About the stein equation for the generalized inverse gaussian and kummer distributions*, ESAIM Probab. Stat. **24** (2020), 607–626, MR4170177.

[36] E. Konzou, E. Koudou, and K. E. Gneyou, *Bounds of derivatives of the solution of the Stein equation for the generalized inverse Gaussian and Kummer distributions, document de travail*, https://hal.univ-lorraine.fr/hal-02419186, 2019.

[37] _____, *New bounds for the solution and derivatives of the stein equation for the generalized inverse gaussian and kummer distributions*, Bull. Belgian Math. Soc. (2020), en révision.

[38] _____, *Rate of convergence of generalized inverse gaussian and kummer distributions to the gamma distribution via stein's method*, Statist. Probab. Lett. **159** (2020), 11, MR4046408.

[39] _____, *Stein's method in two limit theorems involving the generalized inverse gaussian distribution*, 2020, document de travail.

[40] A. E. Koudou and C. Ley, *Characterizations of gig laws : a survey*, Probab. Surv. **11** (2014), 161–176, MR3264557.

[41] _____, *Efficiency combined with simplicity : new testing procedures for generalized inverse gaussian models*, TEST **23** (2014), no. 4, 708–724, MR3274471.

[42] A. E. Koudou and P. Vallois, *Independence properties of the matsumoto-yor type*, Bernoulli **18** (2012), no. 1, 119–136, MR2888701.

[43] E. Koudou and P. Vallois, *Which distributions have the matsumoto-yor property ?*, Electron. Commun. Probab **16** (2011), no. 1, 556–566, MR2888701.

[44] G. Letac and V. Seshadri, *A characterization of the generalized inverse gaussian distribution by continued fractions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **62** (1983), no. 4, 485–489, MR0690573 .

[45] G. Letac and J. Wesołowski, *An independence property for the product of gig and gamma laws*, Ann. Probab. **28** (2000), no. 3, 1371–1383, MR1797878.

[46] C. Ley, G. Reinert, and Y. Swan, *Stein's method for comparison of univariate distributions*, Probab. Surv. **14** (2017), 1–52, MR3595350.

[47] C. Ley and Y. Swan, *Stein's density approach and information inequalities*, Electron. Commun. Probab. **18** (2013), no. 7, 1–14, MR3019670.

[48] W.-L. Loh, *Stein's method and multinomial approximation*, Ann. Appl. Probab. **2** (1999), no. 3, 536–554, MR1177898.

[49] H. M. Luk, *Stein's method for the gamma distribution and related statistical applications*, Ph.D. thesis, University of Southern California, 1994, MR2693204, p. 74.

[50] A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, *Quantitative risk management. concepts, techniques and tools*, Princeton Series in Finance. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[51] F.J. Mencía and E. Sentana, *Estimation and testing of dynamic models with generalised hyperbolic innovations*, CMFI Working Paper 0411, madrid, Spain (2004), 536–554, ftp.cemfi.es/wp/04/0411.pdf.

[52] I. Nourdin, G. Peccati, and A. Réveillac, *Multivariate normal approximation using stein's method and malliavin calculus*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **46** (2010), no. 1, 45–58, MR2641769 .

[53] F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, *Nist handbook of mathematical functions*, Cambridge University Press, 2010.

[54] M. S. Paolella, *Intermediate probability : a computational approach*, Wiley, Chichester, 2007, epdf.pub/intermediate-probability-a-computational-approach.html.

[55] E. A. Peköz, *Stein's method for geometric approximation*, J. Appl. Probab. **33** (1996), no. 3, 707–713, MR1401468.

[56] L. Perreault, B. Bobée, and P. F. Rasmussen, *Halphen distribution system. I : Mathematical and statistical properties*, J. Hydrol. Eng. **4** (1999a), 189–199.

[57] _____, *Halphen distribution system. II : Parameter and quantile estimation*, J. Hydrol. Eng. **4** (1999b), 200–208.

[58] A. Pickett, *Rates of convergence of χ^2 approximations via stein's method*, Ph.D. thesis, Universityof Oxford, 2004.

[59] K. Prause, *The generalized hyperbolic model : estimation, financial derivatives, and risk measures*, Universität Freiburg, 1999, d-nb.info/961152192/34.

[60] N. Ross, *Fundamentals of stein's method*, Probab. Surv. **8** (2011), 210–293, MR2861132.

[61] W. Schoutens, *Orthogonal polynomials in stein's method*, J. Math. Anal. Appl. **253** (2001), no. 2, 515–531, MR1808151.

[62] Q-M. Shao and Z-S Zhang, *Identifying the limiting distribution by a general approach of stein's method*, Sci. China Math. **59** (2016), no. 12, 2379–2392, MR3578962.

[63] C. Stein, *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley : University of California Press **2** (1972), 583–602, MR0402873.