Rhéologie et propriétés de vidange de milieux granulaires modèles : application à l'écoulement en silo

Arthur Pascot

▶ **To cite this version:**

Arthur Pascot. Rhéologie et propriétés de vidange de milieux granulaires modèles : application à l'écoulement en silo. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Lorraine, 2020. Français. NNT : 2020LORR0156 . tel-03132596

HAL Id: tel-03132596
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03132596

Submitted on 5 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THÈSE

Présentée par :

Arthur PASCOT

Pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Mention : Énergie et Mécanique École doctorale : SIMPPÉ

Rhéologie et propriétés de vidange de milieux granulaires modèles : Application à l'écoulement en silo

---

Préparée au Laboratoire LEMTA, UMR 7563

Sous la direction de **Sébastien KIESGEN DE RICHTER**

Thèse soutenue à :

Nancy le 1 Décembre 2020

Devant le jury composé de :

Axelle AMON
Maître de Conférence à l'Université de Rennes 1, Rapporteur

Guillaume OVARLEZ
Directeur de Recherche au CNRS, Rapporteur

Nicolas VANDEWALLE
Professeur à l'Université de Liège, Examinateur

Claire GAIANI
Professeur à l'Université de Lorraine, Examinateur

Sébastien KIESGEN DE RICHTER
Maître de Conférence à l'Université de Lorraine, Directeur de thèse

Salaheddine SKALI-LAMI
Maître de Conférence à l'Université de Lorraine, Co-directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier toute l'équipe du groupe milieux fluides / rhéophysique pour l'excellent accueil, la très bonne ambiance et les nombreux échanges qui m'ont permis de réaliser ma thèse dans les meilleures conditions. Merci en particulier à Mathieu et Nicolas pour l'aide et les conseils qu'ils m'ont apportés pendant ces trois années, le tout dans la bonne humeur. Merci également à Salaheddine pour ses conseils et son point de vue qui m'ont permis de voir certains problèmes sous un autre angle. Je remercie toute l'équipe technique, sans qui je n'aurais jamais pu faire d'expériences pendant cette thèse. Un grand merci à Jeremy et Jean-Yves pour leur implication constante et leur réactivité pour résoudre les problèmes techniques que j'ai rencontrés lors de la thèse. Je remercie aussi Ludovic et Valérie pour leur aide face aux (très) nombreux problèmes informatiques et surtout administratifs qui ont parsemé ces trois années.

Je tiens à remercier sincèrement Sébastien pour m'avoir offert la chance de faire cette thèse et toute l'aide qu'il m'a apportée au cours de trois années. C'est en grande partie grâce à lui que j'ai choisi de faire de la mécanique des fluides lors de mon master, puis me diriger vers l'étude des milieux granulaires et cette thèse en particulier. Merci pour toutes ces longues et intéressantes discussions qui m'ont permis d'avancer et d'en apprendre beaucoup sur la physique et la recherche. Je le remercie aussi pour toute l'aide qu'il m'a apportée pour rédiger mon premier article et ce manuscrit.

Ces trois années auraient été aussi bien moins agréables sans mes camarades de bureau. Merci à Alexandre, Badre et Mahdi pour leur aide, nos discussions sur la physique (et bien d'autres sujets) et surtout pour la bonne ambiance et les franches rigolades. Je remercie aussi les autres doctorants du LEMTA avec qui j'ai pu échanger et qui ont participé à cette bonne ambiance. Merci à Thomas, Naima, Marc, Célien, Shirin, Romain, Anas, Axel, Mehdi et Mylène. Je leur souhaite toute la réussite possible pour la suite et bon courage pour ceux qui n'ont pas encore passé leur thèse.

Enfin, je tiens à remercier ma famille et mes amis pour tout le soutien qu'ils m'ont apporté durant ces trois ans. Un grand merci à mes parents sans qui tout ceci n'aurait jamais été possible et pour m'avoir supporté dans tous les sens du terme pendant ces longues années d'études. Merci à Jordan pour toutes nos discussions et moments de rigolade. Et pour terminer, merci à mon meilleur ami Thomas à qui je dois mes plus grands fous rires et qui m'a permis de décompresser pendant ces trois années chargées.

Ce travail de thèse a été conduit dans le cadre du projet "PowderReg", financé par le programme Européen Interreg VA GR au sein de l'axe prioritaire 4 "Renforcer la compétitivité et l'attractivité de la Grande Région / Großregion".

Sommaire

Sommaire **5**

Liste des figures **9**

Liste des tableaux **10**

Notations usuelles **11**

Introduction générale **13**

I État de l'art

Chapitre 1 Introduction aux milieux granulaires **17**
1.1 Les milieux granulaires . . . 17
1.2 Enjeux des milieux granulaires . . . 19
1.2.1 Enjeux industriels et environnementaux . . . 19
1.2.2 Enjeux théoriques . . . 19
1.3 Les forces dans les milieux granulaires . . . 21
1.3.1 Forces dans les milieux granulaires secs . . . 21
1.3.2 Forces dans les milieux granulaires mouillés . . . 23
1.4 Simuler les milieux granulaires . . . 25
1.4.1 Intérêts et approches . . . 25
1.4.2 Simulations par éléments discrets . . . 26

Chapitre 2 Rhéologie des écoulements granulaires **29**
2.1 Les liquides granulaires . . . 29
2.2 Rhéologie et loi d'écoulement . . . 31
2.2.1 Le nombre inertiel . . . 31
2.2.2 La rhéologie $\mu(I)$ . . . 32
2.3 Les écoulements granulaires vibrés . . . 34
2.3.1 Intérêts des écoulements vibrés . . . 34
2.3.2 Rhéologie des milieux granulaires vibrés . . . 34
2.3.3 Un exemple d'écoulement vibré : le plan incliné . . . 36

Chapitre 3 La vidange de silos granulaires **39**
3.1 Introduction et intérêts . . . 39
3.2 Approche théorique et loi de Beverloo . . . 40
3.2.1 L'étude de Jansen . . . 40
3.2.2 La loi de Beverloo . . . 41
3.3 Au delà de la Loi de Beverloo . . . 42
3.3.1 Lois basées sur la dilatation à l'ouverture . . . 42
3.3.2 Impact de la cohésion et de la forme des particules . . . 44
3.3.3 Formation d'arches et blocage de l'écoulement . . . 46
3.4 Effet des vibrations sur la vidange . . . 48
3.4.1 Déblocage de l'écoulement par vibrations . . . 48
3.4.2 Impact des vibrations sur l'écoulement et le débit . . . 49
3.5 Conclusion et motivations . . . 52

II Étude expérimentale de la vidange d'un silo vibré

Chapitre 4 Dispositif expérimental **55**

4.1 Montage expérimental . . . 55
4.1.1 Éléments du dispositif . . . 55
4.1.2 Dispositif complémentaire . . . 58
4.2 Méthodes de mesure et de suivi . . . 59
4.2.1 Mesure du débit . . . 59
4.2.2 Suivi des particules . . . 60
4.2.3 Suivi du mouvement du silo . . . 62
4.3 Réalisation des expériences . . . 66
4.3.1 Préparation des particules et du silo . . . 66
4.3.2 Étapes des expériences . . . 66

Chapitre 5 Loi d'échelle pour le débit **69**
5.1 Mesures de débit sans vibration . . . 69
5.2 Effet des vibrations sur le débit . . . 71
5.2.1 Impact du diamètre d'ouverture et des vibrations . . . 71
5.2.2 Loi d'échelle pour le débit . . . 72
5.2.3 Second régime des vibrations . . . 75
5.3 Impact des autres paramètres . . . 80
5.3.1 Effet de l'angle d'ouverture . . . 80
5.3.2 Effet des propriétés des grains . . . 81
5.4 Conclusion . . . 83

Chapitre 6 Étude de la dynamique à l'échelle locale **85**
6.1 Méthodes d'analyse de l'écoulement . . . 85
6.1.1 Reconstruction des motifs d'écoulement . . . 85
6.1.2 Calcul des champs de grandeurs sur le maillage . . . 86
6.1.3 Calcul des grandeurs le long de profil . . . 89
6.1.4 Analyse statistique . . . 89
6.2 Étude de l'écoulement dans le silo . . . 90
6.2.1 Premier régime des vibrations . . . 90
6.2.2 Second régime des vibrations . . . 96
6.3 Étude de l'écoulement au niveau de l'ouverture . . . 98
6.3.1 Premier régime des vibrations . . . 98
6.3.2 Second régime des vibrations . . . 103
6.4 Conclusion . . . 106

Chapitre 7 Ouverture : Étude de l'effet de la cohésion **107**
7.1 Dispositif et protocole expérimental . . . 107
7.1.1 Modification du dispositif expérimental . . . 107
7.1.2 Protocole expérimental . . . 109
7.2 Impact sur le débit et transition de Jamming . . . 110
7.2.1 Mesure de débit . . . 110
7.2.2 Transition de Jamming pour la cohésion . . . 112
7.3 Influence de la cohésion sur la dynamique locale de l'écoulement . . . 114
7.3.1 Étude de l'écoulement dans le silo . . . 114
7.3.2 Étude de l'écoulement en sortie . . . 116
7.4 Conclusion . . . 120

III Étude numérique de la vidange d'un silo vibré

Chapitre 8 Modèles numériques **123**
8.1 Simulations par méthode des éléments discrets (DEM) . . . 123
8.1.1 Modélisation du silo sous Liggghts . . . 123
8.2 Simulation des contacts . . . 125
8.2.1 Modèle pour les contacts sans cohésion . . . 125
8.2.2 Modèle pour les contacts avec cohésion . . . 128

8.3 Mesure et traitement des données . . . 129

Chapitre 9 Étude numérique par DEM du débit du silo 131
9.1 Simulations sans vibration . . . 131
9.2 Simulation de l'effet des vibrations . . . 132
9.2.1 Régimes d'écoulement . . . 132
9.2.2 Lois d'écoulement . . . 134
9.3 Impact des autres paramètres . . . 138
9.3.1 Effet de la densité et de la taille des grains . . . 138
9.3.2 Effet de la friction entre grains et aux parois . . . 139
9.3.3 Effet de l'accélération de la gravité . . . 140
9.3.4 Effet de l'angle d'ouverture . . . 141
9.4 Ouverture : simulation de la cohésion . . . 143
9.5 Conclusion . . . 145

Chapitre 10 Étude numérique de la rhéologie locale 147
10.1 Étude de l'écoulement dans le silo . . . 147
10.1.1 Motifs d'écoulement lors de la vidange . . . 147
10.1.2 Évolution des champs de grandeurs dans le silo . . . 149
10.2 Étude de l'écoulement au niveau de l'ouverture . . . 154
10.2.1 Profils d'écoulement en sortie . . . 154
10.2.2 Analyse temporelle et statistique . . . 154
10.2.3 Analyse et interprétation physique . . . 156
10.3 Modèles rhéologiques pour l'écoulement . . . 156
10.3.1 Loi rhéologique dans le silo . . . 157
10.3.2 Dissipation de l'énergie dans le premier régime . . . 160
10.3.3 Modélisation de la vitesse . . . 161
10.4 Conclusion . . . 171

Conclusion générale et perspectives 173

Annexes 177
Annexe A : Détail du calcul des champs sur le maillage du silo . . . 177
Annexe B : Code pour les simulations sous Liggghts . . . 180
Annexe C : Influence de vibrations mécaniques sur la vidange de silo quasi-2D . . . 185

Bibliographie 205

Abstract 208

Liste des figures

1.1 Exemples de milieux divisés dans la Nature et l'industrie . . . 17
1.2 Les différents types de milieux divisés . . . 18
1.3 Diagramme de phase hypothétique pour la transition de jamming . . . 20
1.4 Contact élastique entre deux grains sphériques et frottement solide d'un bloc sur un plan . . . 22
1.5 Exemples de l'effet de la teneur en eau dans le sable . . . 23
1.6 Schéma d'un pont capillaire entre deux sphères lisses . . . 24
1.7 Schéma du mouillage d'une surface solide par un liquide . . . 25
1.8 Exemples de simulations d'écoulement granulaire par DEM . . . 27

2.1 Exemples d'écoulements granulaires . . . 29
2.2 Schéma du cisaillement plan d'un fluide . . . 30
2.3 Évolution typique de la contrainte et de la viscosité en fonction du taux de cisaillement . . . 31
2.4 Illustration de l'interprétation physique du nombre inertiel . . . 32
2.5 Illustration de l'interprétation physique du nombre inertiel . . . 32
2.6 Schémas d'écoulements granulaires dans lesquels la loi $\mu(I)$ est applicable . . . 34
2.7 Exemples de milieux granulaires vibrés . . . 35
2.8 Schéma de la cellule de rhéomètre d'étude de la rhéologie des milieux granulaires vibrés . . . 35
2.9 Schéma d'un écoulement granulaire uniforme sur un plan incliné rugueux . . . 37
2.10 Transition de jamming et loi d'échelle pour l'écoulement sur plan incliné . . . 37

3.1 Exemples d'écoulements granulaires en trémie . . . 39
3.2 Exemples de problèmes lors de la vidange de silo . . . 40
3.3 Schéma et évolution des contraintes dans un silo granulaire . . . 41
3.4 Schémas de principe de l'ouverture réduite du silo et de la dilatation de l'écoulement en sortie 43
3.5 Simulations numériques de la vidange d'un silo 2D : débit et fraction volumique en sortie . . . 43
3.6 Schéma du dispositif expérimental de silo quasi-2D à ouverture variable . . . 44
3.7 Mesures expérimentales du débit et de la fraction volumique en sortie lors d'une vidange de silo quasi-2D . . . 44
3.8 Débit cohésif adimensionnel en fonction du nombre de Bond . . . 45
3.9 Vidange au cours du temps selon la cohésion dans le silo . . . 45
3.10 Exemples d'arches en sortie dans deux silos quasi-2D . . . 47
3.11 Probabilité de formation des arches . . . 48
3.12 fraction temporelle et limite d'écoulement en fonction de l'ouverture et de l'accélération des vibrations . . . 49
3.13 Vibrations localisées lors de la vidange de silo . . . 49
3.14 Débit relatif du silo en fonction de l'accélération des vibrations . . . 50
3.15 Débit normalisé du silo en fonction du nombre de Froude des vibrations . . . 50
3.16 Motifs d'écoulement lors de la vidange avec et sans vibrations . . . 51

4.1 Schéma du dispositif expérimental . . . 56
4.2 Dispositif expérimental . . . 57
4.3 Dispositif expérimental : contrôle de l'ouverture . . . 57
4.4 Schéma de la boucle de rétroaction . . . 58
4.5 Dispositif expérimental complémentaire . . . 59
4.6 Mesure du débit du silo . . . 60
4.7 Calibration de la caméra . . . 61
4.8 Principe du suivi des particules lors de la vidange . . . 62
4.9 Écoulement sans vibration : trajectoires et champs de vitesse . . . 63
4.10 Photo et principe du repère lumineux . . . 64
4.11 Détermination de la position du silo au cours du temps . . . 65

4.12 Suivi de la position du silo au cours du temps . . . 65
4.13 Photo et principe du repère lumineux . . . 67

5.1 Modélisation du débit sans vibration . . . 70
5.2 Évolution du débit normalisé en fonction des différents paramètres . . . 72
5.3 Évolution du débit normalisé en fonction de l'amplitude des vibrations . . . 73
5.4 Évolution du débit normalisé en fonction du nombre de Froude . . . 76
5.5 Images de la dynamique de jets . . . 77
5.6 Schéma de la dynamique de jets . . . 77
5.7 Débit instantané normalisé durant la vidange . . . 77
5.8 Évolution du débit normalisé dans le second régime . . . 79
5.9 Évolution du débit en fonction de l'angle d'ouverture . . . 80
5.10 Évolution du débit normalisé en fonction des propriétés des grains . . . 82

6.1 Exemple de motifs d'écoulement au cours du temps . . . 86
6.2 Mesure de la vitesse pour plusieurs tailles de maille . . . 87
6.3 Maillage du silo . . . 87
6.4 Profils le long du silo . . . 89
6.5 Exemple d'analyse statistique . . . 90
6.6 Motifs d'écoulement durant la vidange à différents instants . . . 91
6.7 Motifs d'écoulement durant la vidange dans différents cas . . . 91
6.8 Champs de vitesse dans le silo . . . 92
6.9 Champs de taux de déformation dans le silo . . . 92
6.10 Champs de température granulaire dans le silo . . . 93
6.11 Champs de vitesse dans le silo . . . 93
6.12 Évolution des grandeurs moyennes dans le silo (1^{er} régime) . . . 95
6.13 Évolution des grandeurs dans les différentes zones du silo (1^{er} régime) . . . 95
6.14 Motifs d'écoulement durant la vidange pour le second régime . . . 96
6.15 Champs de vitesse dans le silo . . . 97
6.16 Évolution des grandeurs dans les différentes zones du silo (2^{nd} régime) . . . 98
6.17 Profil radial de vitesse en sortie du silo . . . 99
6.18 Profils radial de fraction en sortie du silo . . . 99
6.19 Densité de probabilité pour la vitesse v_z en sortie . . . 100
6.20 Densité de probabilité pour la fraction Φ_c en sortie . . . 100
6.21 Analyse de Fourier (FFT) des vitesses v_z en sortie . . . 101
6.22 Évolution des pics de vitesse dans le spectre de Fourier . . . 101
6.23 Profil radial de vitesse dans du silo . . . 102
6.24 Profil radial de débit en sortie du silo . . . 103
6.25 Profils radiaux en sortie du silo dans le second régime . . . 104
6.26 Densité de probabilité et spectre de Fourier en sortie . . . 104
6.27 Évolution des pics de vitesse dans le spectre de Fourier (2^{nd} régime) . . . 104

7.1 Dispositif expérimental pour la cohésion . . . 108
7.2 Évolution du débit normalisé dans le cas cohésif . . . 111
7.3 Images de la vidange cohésive . . . 112
7.4 Images de la vidange cohésive . . . 113
7.5 Champs de vitesse dans le silo avec cohésion (1^{er} régime) . . . 114
7.6 Champs de vitesse dans le silo avec cohésion (2^{nd} régime) . . . 115
7.7 Profil radial de vitesse en sortie du silo avec cohésion . . . 116
7.8 Profils radial de fraction en sortie du silo avec cohésion . . . 117
7.9 Densité de probabilité et spectre de Fourier en sortie (cohésion, 1^{er} régime) . . . 117
7.10 Densité de probabilité et spectre de Fourier en sortie (cohésion, 2^{nd} régime) . . . 118
7.11 Évolution des pics de vitesse dans le spectre de Fourier avec cohésion . . . 118

8.1 Maillages des parois du silo . . . 124
8.2 Modélisation numérique du silo . . . 125

8.3 Modélisation des contacts entre grains . . . 126
8.4 Effet des propriétés de contact sur les simulations . . . 127
8.5 Modélisation du pont capillaire entre deux grains . . . 128

9.1 Simulation du débit sans vibration . . . 131
9.2 Simulation du débit sans vibration . . . 133
9.3 Analyse du débit instantané dans le second régime . . . 133
9.4 Débit normalisé en fonction de l'amplitude et du nombre de Froude . . . 134
9.5 Loi d'échelle pour le premier régime en simulation . . . 135
9.6 $\mathcal{F}_2$ en fonction de l'amplitude et du nombre de Froude . . . 136
9.7 Loi d'échelle pour le second régime en simulation . . . 137
9.8 Illustration du principe des lois d'échelle . . . 138
9.9 Effet de la densité et de la taille des grains . . . 139
9.10 Effet de la friction entre grains et avec les parois . . . 140
9.11 Effet de la friction entre grains et avec les parois . . . 141
9.12 Effet de l'angle d'ouverture . . . 142
9.13 Loi d'échelle avec l'angle d'ouverture . . . 142
9.14 Simulation de la vidange avec cohésion . . . 143

10.1 Comparaison des motifs d'écoulement durant la vidange . . . 148
10.2 Motifs d'écoulement durant la vidange dans différents cas . . . 149
10.3 Champs de grandeur dans le silo . . . 150
10.4 Évolution des grandeurs dans les différentes zones du silo simulé . . . 151
10.5 Champs des grandeurs dans le silo liés aux contraintes . . . 153
10.6 Évolution des grandeurs issues des contraintes dans les différentes zones du silo simulé . . . 154
10.7 Profils radiaux en sortie du silo simulé . . . 155
10.8 Densité de probabilité et spectre de Fourier en sortie . . . 155
10.9 Évolution des pics de vitesse dans le spectre de Fourier . . . 155
10.10 Corrélation entre la viscosité effective et le nombre inertiel . . . 158
10.11 Variation de la friction effective avec les vibrations . . . 158
10.12 Modèle d'évolution de la friction effective avec les vibrations . . . 159
10.13 Différence de trajet pour un grain dans le canal . . . 161
10.14 Évolution de la charge au centre du canal selon les vibrations . . . 161
10.15 Schéma des mesures de vitesse sur des profils horizontaux . . . 162
10.16 Vérification de la condition d'incompressibilité dans le silo . . . 163
10.17 Corrélation entre la vitesse v_x et le gradient $\partial v_z/\partial x$ selon la hauteur z . . . 163
10.18 Profils horizontaux des vitesses selon la hauteur z . . . 164
10.19 Corrélation entre la vitesse v_x et le gradient $\partial v_z/\partial x$ selon les vibrations . . . 165
10.20 Profils horizontaux des vitesses selon les vibrations . . . 165
10.21 Profils de variation de vitesse selon les vibrations et la hauteur . . . 167
10.22 Évolution des paramètres de la modélisation de Δv_z . . . 167
10.23 Profils et modélisation de la vitesse v_z dans le silo . . . 168
10.24 Profils de variation de vitesse v_x selon les vibrations et la hauteur . . . 169
10.25 Profils de variation de vitesse au cours d'un cycle de vibration . . . 170
A.1 Schéma du calcul du volume inclus . . . 177
A.2 Schéma du calcul du volume de Voronoi . . . 179

Liste des tableaux

1.1 États d'un milieu granulaire mouillé en fonction de la teneur en liquide 24

5.1 Propriétés physiques des particules étalon 69
5.2 Gammes explorées pour les principaux paramètres de l'expérience 71
5.3 Vibrations utilisées lors des expériences 72
5.4 Vibrations utilisées lors des expériences complémentaires 75
5.5 Propriétés physiques des particules 81
5.6 Débits sans vibration pour les différents types de particules 81

7.1 Propriétés physiques des particules cohésives 109
7.2 Propriétés physiques du liquide 109

8.1 Propriétés générales des simulations 125
8.2 Propriétés de contact utilisées lors des simulations 127
8.3 Propriétés de cohésion utilisées lors des simulations 129

9.1 Gammes explorées pour les paramètres principaux de la simulation 132
9.2 Vibrations utilisées lors des simulations 134
9.3 Gammes explorées pour les paramètres secondaires de la simulation 138

Notations usuelles

Lettres grecques

$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement (s^{-1})
η	Viscosité dynamique (Pa.s)
Γ	Accélération adimensionnelle des vibrations
γ	Tension superficielle (N/m)
μ	Coefficient de friction
ν	Coefficient de Poisson
Ω	Fréquence relative des vibrations
ω	Pulsation des vibrations (s^{-1})
ϕ	Fraction volumique
ρ	Masse volumique (kg/m^3)
σ	Tenseur des contraintes (Pa)
τ	Contrainte de cisaillement (Pa)
θ	Angle d'ouverture du silo (°)
θ_c	Angle de contact (°)
X_e	Teneur en liquide volumqiue (%)

Lettres latines

A	Amplitude des vibrations (m)
Bo	Nombre de Bond
D	Diamètre d'ouverture du silo (m)
d	Diamètre des grains (m)
E	Module d'Young (Pa)
e	Coefficient d'inélasticité
F	Force (N)
f	Fréquence des vibrations (s^{-1})
F_{cap}	Force capillaire (N)
Fr	Nombre de Froude
g	Accélération de la gravité (m/s^2)
H	Hauteur du silo (m)
I	Nombre inertiel
L	Largeur du silo (m)
m	Masse (kg)
P	Pression (Pa)
Q	Débit massique du silo (kg/s)
Q_0	Débit massique du silo sans vibration (kg/s)
t	Temps (s)
T_g	Température granulaire (m/s^2)
v	Vitesse (m/s)
W	Épaisseur du silo (m)

Introduction générale

Comment s'écoulent des grains de sable dans un sablier ? Une question en apparence simple en comparaison d'avancées récentes en physique comme la détection des ondes gravitationnelles et du Boson de Higgs. Et pourtant, c'est une question à laquelle nous ne pouvons pas encore répondre entièrement. Le sable fait en effet partie de ce que l'on appelle les milieux granulaires. Ces milieux sont complexes et ont la particularité de se comporter tantôt comme un solide (un château de sable), tantôt comme un fluide (le sable dans le sablier) et tantôt comme un gaz (une tempête de sable). Ces particularités font qu'il n'existe encore pas de loi de comportement pour ces milieux valable en toutes circonstances.

Ces milieux sont pourtant omniprésents dans le monde qui nous entoure. On les retrouve ainsi dans de nombreux domaines de l'industrie : le génie civil (bétons, stabilité des sols), l'industrie minière, la pharmaceutique (médicaments et poudres cosmétiques) ou encore l'agroalimentaire (stockage et transport des céréales). Ils sont aussi très présents dans la Nature, en particulier dans le domaine de la géophysique : dunes de sable, avalanches de roches, glissements de terrain ou encore liquéfaction des sols. Autant de phénomènes qu'il est nécessaire de comprendre pour prévenir l'Homme de leurs risques.

L'écoulement dans un sablier est justement à rapprocher d'une mise en œuvre de la matière granulaire omniprésente dans l'agroalimentaire : la vidange de silos. Cette application souffre de divers problèmes, comme le blocage de l'écoulement ou la présence de dépôts après la vidange. Comprendre comment les milieux granulaires s'écoulent à l'intérieur du silo permettrait d'éviter ces problèmes et d'optimiser la vidange. Dans cette thèse, nous avons donc mené des expériences et des simulations pour mieux comprendre cet écoulement.

Dans la première partie, nous présenterons tout d'abord les bases de la rhéologie des milieux granulaires : quels sont leurs enjeux ? quels sont les forces les contrôlant ? Nous verrons ensuite des résultats importants obtenus ces dernières années concernant leur écoulement. Enfin nous décrirons en détail la vidange de silo et les principaux résultats de la littérature, en particulier l'utilité de mettre l'écoulement en vibration pour mieux contrôler la vidange.

Dans la seconde partie, nous présenterons le dispositif expérimental mis en place pour étudier la vidange dans le silo de milieux granulaires modèles (des billes sphériques sèches). On s'intéressera alors à mieux comprendre l'écoulement et l'effet des différents paramètres du problème : forme de l'ouverture, propriétés des grains et caractéristiques des vibrations appliquées. Cette étude sera présentée selon deux points de vue : le point de vue macroscopique, caractérisé par le débit du silo, et le point de vue microscopique, caractérisé par la rhéologie locale de l'écoulement. On étendra ensuite cette étude au cas de milieux granulaires mouillés pour comprendre les effets des vibrations en présence de cohésion entre grains.

Dans la dernière partie, on utilisera des simulations numériques par méthode des éléments discrets (DEM) pour mieux comprendre l'écoulement dans le silo. Enfin, on utilisera les résultats de ces simulations pour proposer une loi de comportement décrivant l'écoulement dans un silo en présence de vibrations.

Première partie

État de l'art

Chapitre 1

Introduction aux milieux granulaires

1.1 Les milieux granulaires 17
1.2 Enjeux des milieux granulaires 19
1.2.1 Enjeux industriels et environnementaux 19
1.2.2 Enjeux théoriques 19
1.3 Les forces dans les milieux granulaires 21
1.3.1 Forces dans les milieux granulaires secs 21
1.3.2 Forces dans les milieux granulaires mouillés 23
1.4 Simuler les milieux granulaires 25
1.4.1 Intérêts et approches 25
1.4.2 Simulations par éléments discrets 26

1.1 Les milieux granulaires

On définit par *milieu granulaire* une assemblée de grains solides [1]. Ces grains ou particules peuvent être de formes, tailles et matériaux divers. Le sable d'une dune, les céréales dans un bol, un paquet de bonbons ou encore la glace composant les anneaux de Saturne sont autant d'exemples de milieux granulaires. On rencontre cette matière divisée partout dans notre quotidien et ils sont omniprésents dans la Nature et dans de nombreux domaines de l'industrie (voir Fig. 1.1).

Figure 1.1 Exemples de milieux divisés dans la Nature et l'industrie : anneaux de Saturne, dunes de sable, coulée de lave, coulée de boue, minerais d'une carrière, grains de blé, comprimés pharmaceutiques et poudre cosmétique.

Le terme *milieu granulaire* au sens large englobe donc une vaste gamme de matériaux avec des comportements très divers. En effet, de la farine humide n'aura pas le même comportement que des gros

1. On considère essentiellement le cas de grains *rigides*, qui sont faiblement déformables et ne se fragmentant pas.

gravats de béton. Dans le premier cas, le comportement est influencé par les forces de Van der Waals et la présence de ponts capillaires entre les particules dus à l'humidité, alors que dans le second ce sont surtout les contacts qui contrôleront le comportement (en plus des forces extérieures liées à l'environnement).

De ce fait, on restreint généralement le terme *milieu granulaire* aux milieux composés d'éléments de taille supérieure à 100 µm (voir Fig. 1.2), car les grains ne sont alors pas soumis au mouvement brownien [2] et interagissent principalement par contact. Au contraire, on parlera plutôt de *poudre* pour un milieu composé d'éléments plus fin (entre 1 et 100 µm) et généralement cohésif [3]. Dans ce cas, ce sont en effet principalement les forces de Van der Waals, l'humidité et l'interaction avec l'air qui contrôlent le comportement du milieu. Enfin, on parlera de *colloïde* dans le cas de particules de taille inférieure à 1 µm, pour lesquelles l'agitation thermique n'est plus négligeable.

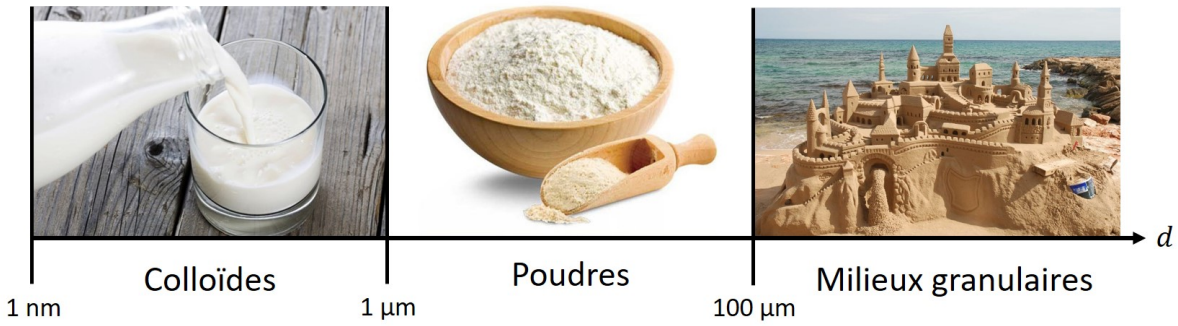


Figure 1.2 Les différents types de milieux divisés en fonction de la taille des éléments qui les constituent : les colloïdes (ex : le lait), les poudres (ex : la farine de blé) et les milieux granulaires (ex : le sable).

En plus de ces particularités sur la taille, il faut aussi prendre en compte la présence entre les grains d'un *fluide interstitiel*. On parlera alors de milieux granulaires *secs*, lorsque l'effet de ce fluide sur les grains peut être négligé (comme par exemple dans le cas de grosses billes d'acier dans l'air). À l'inverse, on parlera de milieux granulaires *mouillés*, ou *suspensions*, lorsque les grains sont immergés dans un liquide où les forces hydrodynamiques ne sont plus négligeables.

Une quantité importante pour caractériser un milieu divisé est la fraction volumique, ϕ, définie par le rapport entre le volume occupé par l'ensemble des grains sur le volume total du milieu :

$$\phi = \frac{Volume\ des\ grains}{Volume\ total} \tag{1.1}$$

Cette fraction est donc théoriquement comprise entre 0 (pas de grain) et 1 (grains occupant tout l'espace). Ces limites ne sont pas atteignables pour la plupart des milieux granulaires, ou alors uniquement de manière très localisée. Dans le cas d'un empilement 3D de sphère, la fraction volumique maximale atteignable est $\phi = 0.72$, ce qui correspond au cas d'un empilement ordonné hexagonal ou cubique faces centrées [4]. Ce type d'empilement, dit *cristallin*, est néanmoins extrêmement difficile à atteindre en pratique. Dans le cas d'un empilement créé aléatoirement (en versant les grains dans un seau par exemple), on aura : $0.64 > \phi > 0.55$. Le cas $\phi = 0.64$ correspond à l'empilement aléatoire le plus dense qu'il est possible d'obtenir [2, 3]. À l'inverse, le cas $\phi = 0.55$ correspond à l'empilement aléatoire le plus lâche tout en restant capable de supporter des contraintes [2, 4].

Une des caractéristiques majeures de ces milieux est leur capacité à se comporter comme un solide, un liquide ou un gaz selon les forces et contraintes appliquées, et se sans changer d'état. Un même milieu granulaire peut d'ailleurs montrer ces trois comportements en même temps, comme par exemple la migration d'une dune sous l'effet du vent ou l'écoulement à la surface d'un tas de grains. Ceci est lié au fait que, contrairement à des solides ou fluides classiques (acier, eau, air), il est difficile de relier le comportement macroscopique (à l'échelle du milieu entier) au comportement microscopique (à l'échelle des grains), donnant lieu à un comportement plus ou moins localisé. Ces phénomènes, couplés aux nombreuses

2. Mouvement aléatoire d'une particule dans un fluide, dû aux chocs entre celle-ci et les molécules du fluide.
3. Cette distinction entre milieu granulaire et poudre n'est pas universelle, les deux étant parfois utilisés pour les mêmes milieux.
4. Ce résultat a été conjecturé par Kepler en 1611 et démontré par Hales en 2005 [1]

forces pouvant affecter les milieux granulaires, rendent difficile la compréhension et la prédiction du comportement de ces milieux.

1.2 Enjeux des milieux granulaires

1.2.1 Enjeux industriels et environnementaux

Comme mentionné précédemment, les milieux granulaires sont très présents dans l'industrie. Ils interviennent dans la fabrication de 50% des produits vendus dans le monde et sont le deuxième élément le plus utilisé après l'eau [5, 6]. On les rencontre dans l'agroalimentaire (transport et stockage des céréales), l'industrie pharmaceutique (poudres cosmétiques et médicaments), le bâtiment et génie civil (béton, asphalte, stabilité des sols), l'industrie minière (extraction de minerais, transport, broyage) ainsi que bien d'autres domaines. Or, il existe de nombreux problèmes concernant le mélange, le transport et le stockage de ces milieux du fait de leur complexité. Le mélange de milieux granulaires par exemple entraine en général une ségrégation des grains selon leur taille est leur forme, donnant au final des produits peu homogènes (raison pour laquelle le fond des paquets de céréales contient surtout des miettes). Concernant le transport, de nombreux procédés se heurtent à l'apparition de bouchons ou blocages, comme c'est le cas dans les silos à grains, où la formation d'une arche bouche la sortie et stoppe la vidange. Enfin, le stockage est une étape importante en industrie où il est nécessaire d'optimiser l'espace et donc de condenser au maximum ces matériaux, un problème loin d'être trivial [7, 8]. De nombreuses solutions existes à ces problèmes mais elles sont le plus souvent empiriques et donc mal optimisées et propres à une seule application, comme dans le cas du silo où on vient simplement heurter la paroi manuellement pour caser l'arche. Comprendre le comportement des milieux granulaires est donc un point d'optimisation majeur en industrie.

On rencontre aussi les milieux granulaires de manière abondante dans la Nature, en particulier dans le domaine de la géophysique (voir Fig. 1.1). Notre planète regorge de phénomènes où les milieux granulaires interviennent : la migration des dunes de sable, l'érosion et la liquéfaction des sols, les coulées de lave ou de boues, les avalanches, etc. À des échelles encore plus vastes, nous pouvons aussi citer la glace composant les anneaux de Saturne, les roches des astéroïdes ou encore les poussières des nuages stellaires. Certains de ces phénomènes peuvent avoir des conséquences catastrophiques sur notre société, comme les avalanches ou la liquéfaction des sols dans les zones habitées. Comprendre la physique de ces milieux est donc primordial pour prévenir les risques qui leur sont liés.

1.2.2 Enjeux théoriques

Malgré l'omniprésence des milieux granulaires et le nombre grandissant d'études à leur sujet, le comportement de ces milieux est encore mal compris. En effet, il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie décrivant entièrement la physique de ces milieux. La plupart des lois utilisées sont généralement spécifiques à une situation particulière et semi-empiriques (voir complètement empiriques). La physique de ces milieux est extrêmement complexe, les principales raisons étant les suivantes :

- **Des interactions complexes entre les grains :** comme mentionné précédemment, de nombreuses forces régissent les interactions entre grains. Un simple contact avec frottement entre deux grains sphériques (cas modèle) est loin d'être un problème trivial, du fait des termes non-linéaires et inélastiques. Il faut de plus prendre en compte les effets dus aux forces cohésives. Ces forces peuvent être dues aux propriétés de surface des grains, à la présence de ponts capillaires créés par un liquide interstitiel, ou encore aux forces électromagnétiques pour des particules chargées. À cela se rajoutent les forces hydrodynamiques lorsque les grains sont immergés. Enfin, ces interactions ne se font pas qu'entre deux grains, puisque chaque grain possède plusieurs voisins et que certaines forces peuvent avoir des effets à longue portée.
- **Le grand nombre de particules composant un milieu granulaire :** un sceau d'un kilogramme de sable d'une plage, par exemple, contient plus d'un million de grains de sable. Un tel système ne peut être résolu théoriquement et simuler entièrement une telle quantité de particules demande une puissance de calcul gigantesque. C'est en particulier le cas lorsque les grains possèdent une forme et des interactions complexes.

- **Un problème multi-échelle :** dans un milieu granulaire, les phénomènes à l'échelle microscopique (taille des grains) influent sur les phénomènes à l'échelle macroscopique (taille du milieu), et inversement. De nombreux phénomènes sont en effet localisés, comme par exemple l'écoulement sur un tas de sable qui se fait uniquement sur quelques couches de grains. Cela rend la définition d'un volume élémentaire représentatif [5] extrêmement difficile, contrairement au cas de matériaux classiques. L'agitation thermique étant négligeable, on ne peut pas non plus décrire facilement ces milieux de la même manière que les fluides simples tels que l'eau ou l'air [6].
- **Les milieux granulaires peuvent prendre plusieurs états :** comme expliqué dans la section précédente, les milieux granulaires peuvent se comporter comme des solides (ex : un tas de grains), mais peuvent aussi se mettre à s'écouler comme des fluides selon les contraintes appliquées. On distingue dans ce cas les gaz granulaires (écoulements dilués et collisionnels) et les liquides granulaires (écoulements denses et frictionnels). Ces états ont même tendance à coexister dans de nombreux cas, comme lors de la vidange d'un silo : les céréales s'écoulent à l'intérieur du silo (liquide granulaire), puis se dispersent en sortant (gaz granulaire) et créent un tas en dessous du silo (solide granulaire).

La dualité solide/fluide des milieux granulaires fait l'objet de nombreuses études. Elle est d'ailleurs partagée par d'autres milieux complexes comme les mousses, les émulsions, les solides vitreux (verres) et les pâtes [9]. Dans chaque cas, on note la présence d'un état bloqué, un phénomène appelé *jamming* en anglais (analogie aux bouchons sur les autoroutes). Pour pouvoir mettre en écoulement le milieu, il faut passer une limite qui dépend de la température, de la contrainte ou de la densité selon le milieu. Ce phénomène, qu'on appelle *transition de jamming*, a été étudié par Liu & Nagel [10] qui ont proposé un diagramme de phase hypothétique le décrivant pour tous les milieux cités (voir Fig. 1.3). Le but final étant d'obtenir une physique unifiée permettant de décrire ces milieux, bien que cela reste encore aujourd'hui un problème ouvert.

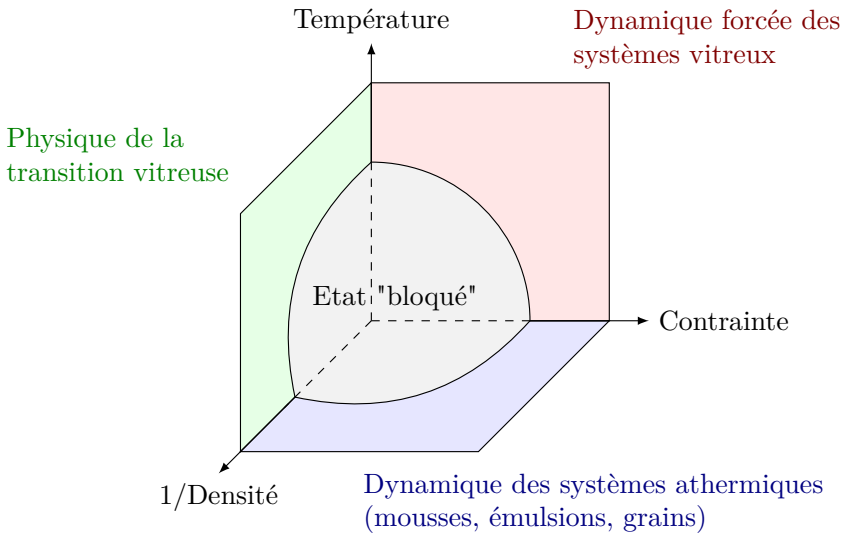


Figure 1.3 Diagramme de phase hypothétique pour la *transition de jamming* proposé par Liu & Nagel [10]. Augmenter les contraintes et diminuer la densité permet de mettre en écoulement les milieux granulaires, mousses et émulsions, tandis qu'augmenter la température permet aux solides vitreux de passer à l'état liquide.

5. Le volume élémentaire représentatif (ou VER) est une division d'un milieu dont on souhaite étudier le comportement. Le VER doit être suffisamment petit pour décrire le comportement de ce milieu mais aussi suffisamment grand pour représenter statistiquement sa composition.

6. Dans le cas de fluides simples, l'agitation thermique permet aux molécules d'explorer tout l'espace disponible. On peut alors décrire leur comportement par des équations telles que Navier-Stokes en moyennant ces mouvements.

1.3 Les forces dans les milieux granulaires

La physique des milieux granulaires dépend des forces régissant les interactions entre ses particules. De nombreuses forces peuvent agir sur ces interactions, de diverses manières et à différentes échelles. Nous présenterons dans cette section les principales interactions entre particules que l'on rencontre dans ces milieux. On rencontrera principalement des forces de contact (contact solide, frottement, déformation...), des forces électromagnétiques (électricité statique, adhésion) et des forces dues à la présence d'un liquide interstitiel (forces capillaires et hydrodynamiques). Dans les deux derniers cas, un phénomène important engendré par ces forces est l'apparition de cohésion dans le milieu granulaire. Les grains vont alors avoir tendance à rester collés les uns aux autres, créant ainsi des paquets, ou *clusters*, de différentes tailles. La présence et la diversité de ces clusters changent alors complètement le comportement du milieu.

1.3.1 Forces dans les milieux granulaires secs

Interactions de contact

Lorsque deux grains secs sont en contact, ils créent une force de réaction l'un sur l'autre, qui dépend de mécanismes microscopiques complexes (état de surface à l'échelle microscopique, propriétés physico-chimiques et mécaniques locales des grains). Pour simplifier le problème, on préférera une approche plus macroscopique, en utilisant des lois décrivant le contact à l'échelle des grains. Dans ce cas, on décrit respectivement les composantes normale et tangentielle de la force de réaction par la *répulsion élastique* (contact de Hertz) et le *frottement solide* (lois de Coulomb) :

- **La répulsion élastique :** pour décrire cette force, nous considérons le cas de deux grains sphériques de rayon R, pressés l'un contre l'autre par une force normale $\mathbf{F_N}$ (voir Fig. 1.4a). L'écrasement δ de chaque sphère crée une force de répulsion élastique d'intensité égale à F_N mais de direction opposée (principe d'action-réaction). On peut déterminer cette force en partant de la loi de Hooke ($Contrainte = E \times Déformation$), un calcul réalisé par Hertz [5] :

$$F_N = \frac{E\sqrt{2R}\ \delta^{3/2}}{3(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

  où E est le *module d'Young* et ν le *coefficient de Poisson* du matériau. On voit que la force n'augmente pas linéairement avec la déformation, et de ce fait, plus on appuie plus il est difficile de déformer un matériau (celui-ci se durcit). Il est important de noter que cette équation est vérifiée uniquement si la déformation reste dans le domaine élastique. Si la contrainte dépasse la limite élastique, on entre dans le domaine plastique où les déformations ne sont pas entièrement réversibles. Les équations régissant ce domaine sont différentes, mais nous ne les détaillerons pas car elles sortent du cadre de cette thèse.

- **Le frottement solide :** outre cette force normale, le contact de deux solides engendre généralement une force tangentielle provenant du frottement entre les surfaces en contact. Tout comme la répulsion élastique, elle dépend de phénomènes microscopiques complexes, ce qui rend sa description difficile. Du point de vue macroscopique, le contact entre solides suit les lois empiriques d'Amontons-Coulomb [5]. Pour décrire ces lois, considérons le cas d'un patin posé sur un plan et soumis à une force normale $\mathbf{F_N}$ et une force tangentielle $\mathbf{F_T}$ (voir Fig. 1.4b). Le plan engendre alors une réaction normale $\mathbf{R_N}$ et une réaction tangentielle $\mathbf{R_T}$ sur le patin. Le patin sera alors mis en mouvement si :

$$|\mathbf{R_T}| \geq \mu_s |\mathbf{R_N}| \tag{1.3}$$

  où μ_s est le *coefficient de friction statique* entre les deux solides. Lorsque le patin est en mouvement, la norme de la force de frottement vaut :

$$|\mathbf{R_T}| = \mu_d |\mathbf{R_N}| \tag{1.4}$$

  où μ_d est le *coefficient de friction dynamique*. Ces coefficients de friction μ_s et μ_d sont des constantes dépendant uniquement de la nature des matériaux en contact (principalement leur état de surface) et vérifient généralement : $1 > \mu_s > \mu_d > 0$. En effet, dans de nombreux cas la force nécessaire pour initier le mouvement est supérieure à la force de frottement lorsque le patin glisse. Malgré leur nature empirique, ces lois restent très souvent utilisées car particulièrement robustes, bien qu'elles n'expliquent

pas l'origine du frottement et ne rendent pas compte de tous les phénomènes rencontrés (vieillissement statique, affaiblissement cinétique, phénomènes d'hystérésis...). Une approche microscopique est alors nécessaire [11], un problème encore ouvert qui sort du cadre de cette thèse.

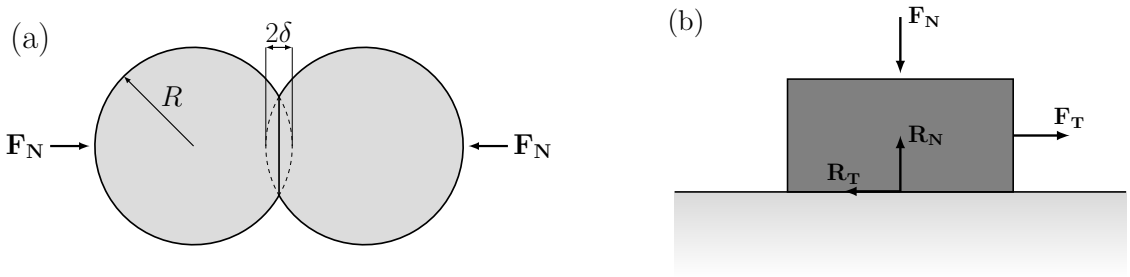


Figure 1.4 (a) Contact élastique entre deux particules sphériques de rayon R. Chaque grain se déforme d'une épaisseur δ. (b) Schéma du frottement solide d'un bloc sur un plan.

Un dernier point concernant ces interactions de contact qu'il est important de noter est la perte d'énergie lors d'une collision entre particules. En effet, dans un écoulement granulaire de nombreux contacts entre particules se font sous la forme d'une collision. Lors de ces collisions, les particules vont se déformer plus ou moins selon leurs vitesses. Cette déformation engendre une répulsion élastique, et donc un rebond des deux particules. On a alors deux conversions d'énergie lors de ce choc :

$$E_{cinétique} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \quad \rightarrow \quad E_{déformation} \quad \rightarrow \quad E'_{cinétique} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{1.5}$$

avec $m_{1/2}$ les masses des grains, $v_{1/2}$ les vitesses avant le choc et $v'_{1/2}$ les vitesses après le choc. Dans un cas parfait, dit élastique, il n'y a pas de perte d'énergie et on a : $E'_{cinétique} = E_{cinétique}$. En réalité, il existe toujours des pertes d'énergie dues à divers effets inélastiques : déformations plastiques du grain, élévation de la température, rayonnement en ondes de surface ou modes de vibrations propres, fracture, etc. C'est pour ces raisons qu'une balle ne remonte pas à la même hauteur que celle à laquelle on la lâche. On a dans ce cas :

$$E'_{cinétique} = e \times E_{cinétique} \tag{1.6}$$

où $0 \leq e < 1$ est le *coefficient d'inélasticité* ou *coefficient de restitution de l'énergie*. Il dépend des matériaux et de la géométrie des grains et peut généralement être pris constant. Ceci n'est néanmoins qu'une approximation, car il peut aussi varier en fonction de la vitesse tout comme le coefficient de friction. Tout comme la friction, cette dissipation d'énergie peut influer grandement sur le comportement des milieux granulaires.

Interactions électrostatiques

Pour des milieux granulaires secs, la friction et la répulsion élastique sont les forces prépondérantes, en particulier pour des gros grains. D'autres forces peuvent néanmoins influer sur le comportement de ces milieux, que cela soit au contact ou à distance. On rencontra principalement l'adhésion et l'électricité statique, toutes deux issues d'interactions électrostatiques :

- **L'électricité statique :** Un effet cohésif que l'on rencontre très souvent dans les milieux granulaires secs est l'électricité statique. Elle apparaît quand on frotte deux objets l'un contre l'autre, comme lorsque l'on frotte un ballon avec un pull pour le faire tenir au plafond. Dans les milieux granulaires, elle est créée par les frottements et les collisions des grains entre eux et avec les parois. Les grains vont alors acquérir une charge électrique, créant ainsi une force électrostatique entre eux. Ces charges sont difficiles à prévoir et dépendent de nombreux facteurs comme les matériaux, la température ou encore l'humidité. En général, des matériaux peu conducteurs et une atmosphère sèche favorisent la création d'électricité statique. Cette interaction peut créer une cohésion importante dans les milieux granulaires, mais peut tout aussi bien engendrer des répulsions entre les grains. Dans les deux cas, il est quasiment impossible de contrôler cette force, ce qui rend le comportement du milieu difficile à modéliser et prévoir. Un autre problème, bien plus dangereux, est la création d'un arc électrique entre les grains. Pour des grains dispersés dans l'air, cet arc peut enflammer le milieu et causer une explosion de poussière. On rencontre en particulier ce risque lors de la vidange d'un silo à grains.

- **La force d'adhésion :** Lorsque deux solides sont proches, ils exercent l'un sur l'autre une force attractive même s'ils ne sont pas chargés. Cette force provient de différentes interactions entre les atomes des solides, comme les forces de Van der Waals ou les liaisons hydrogènes. Plus exactement, elle est issue de la partie attractive du potentiel d'interaction entre deux molécules et possède un effet limité au-delà d'une portée de l'ordre de la taille de ces molécules. De ce fait, c'est uniquement lorsque les solides sont en contact que l'attraction est notable, d'où le nom de *force d'adhésion*. Cette force dépend des principalement des propriétés des matériaux (module d'Young, énergie de surface [12, 13]).

1.3.2 Forces dans les milieux granulaires mouillés

De nombreuses études portent sur les milieux granulaires secs, néanmoins dans la réalité on rencontre le plus souvent des milieux granulaires mouillés. Le sable au bord de la mer, le béton, la boue ou encore des céréales dans du lait en sont autant d'exemples. De même, la simple présence d'humidité dans l'air suffit pour que de l'eau liquide imprègne les grains [14, 15]. Selon la teneur et la nature de ce (ou ces) fluide(s), les forces agissant sur les grains peuvent grandement variées, modifiant radicalement le comportement du milieu [16, 17, 18]. Pour ces milieux, on distinguera en général les cas *non saturés* et *saturés*. Dans le premier cas, on a une quantité peu importante de liquide entre les grains, ce qui donne lieu à de la cohésion capillaire (sable humide sur la Fig. 1.5). Dans le second, les grains sont englobés par la phase fluide, on parlera plutôt de *suspensions* dans laquelle les grains sont soumis aux forces hydrodynamiques (boue liquide sur la Fig. 1.5).

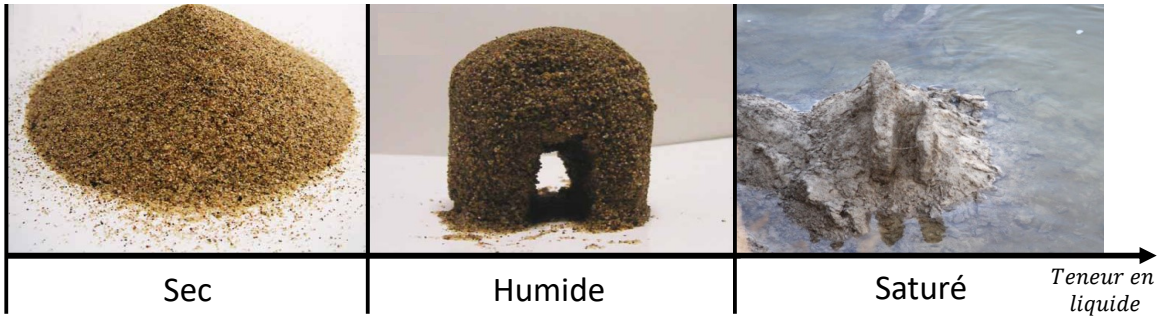


Figure 1.5 Exemples de l'effet de la teneur en eau dans le sable : en augmentant la teneur en liquide, on passe d'un sable sec non cohésif à du sable humide fortement cohésif, puis à une boue liquide non cohésive.

Cohésion capillaire

Comme nous venons de le mentionner, on trouve très souvent un liquide entre les grains d'un milieu granulaire. Ce liquide va former des ponts liquides, ou *ponts capillaires*, entre les différents grains. La tension de surface au niveau de ces ponts va alors créer une force de cohésion entre les grains, qu'on nomme *force capillaire* ou *cohésion capillaire*. L'impact de cette force dépend fortement de la teneur en liquide dans le milieu, que l'on distingue en cinq régimes [18, 19] décrit dans la Table 1.1. La cohésion capillaire n'apparaît que dans trois de ces cinq régimes : pendulaire, funiculaire et capillaire. Cette force dépend de la géométrie, des propriétés de surface des grains, des propriétés physiques du liquide et du milieu ambiant (nature et pression du gaz autour des grains).

Dans le cas d'un pont liquide de longueur h entre deux grains sphériques de rayon R entourés d'air (voir Fig. 1.6), la force capillaire F_{cap} entre les grains est donnée par [18, 20] :

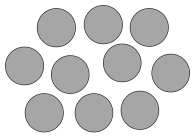
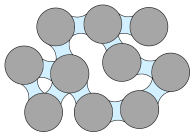
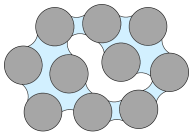
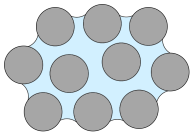
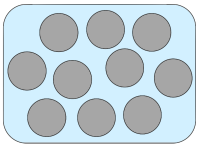
$$F_{cap} = 2\pi r_2 \gamma_{lv} + \pi r_2^2 \Delta P \tag{1.7}$$

avec ΔP la différence de pression entre le liquide et l'air, aussi appelée succion, donnée par :

$$\Delta P = P_a - P_l = \gamma_{lv} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{1.8}$$

où r_1 et r_2 sont les rayons de courbures du pont, γ_{lv} la *tension superficielle* entre le liquide et l'air (liquide-vapeur).

Table 1.1 États d'un milieu granulaire mouillé en fonction de la teneur en liquide. Les grains du milieu sont représentés en gris et le liquide en bleu sur les schémas.

Teneur en liquide	**Régime**	**Schéma**	**Description physique**
Aucune	Sec		Cohésion entre les grains négligeable devant les forces de contact.
Faible	Pendulaire		Des ponts liquides se forment au niveau des contacts entre les grains, donnent lieu à une force de cohésion (voir Eq. 1.7).
Moyenne	Funiculaire		En plus des ponts liquides aux contacts entre grains, certains pores se remplissent entièrement de liquide, renforçant la force de cohésion.
Quasi-saturation	Capillaire		Presque tout les pores sont remplis et la pression du liquide est inférieure à celle de l'air, créant un effet de succion et donc de la cohésion entre les grains.
Saturation et au-delà	Suspension		La pression du liquide est égale ou supérieure à celle de l'air. Les grains sont entièrement dans le liquide et il n'y a plus de force de cohésion entre eux.

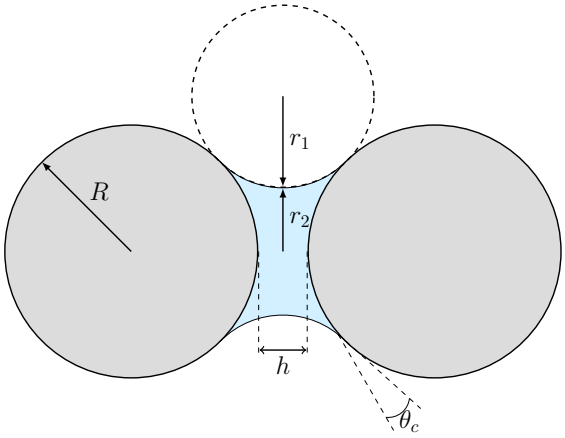


Figure 1.6 Schéma d'un pont capillaire de longueur h entre deux sphères lisses de rayon R. Les rayons r_1 et r_2 sont les rayons de courbures du pont, tandis que θ_c est l'angle de contact solide-liquide.

La cohésion capillaire est donc créée par la succion due à la différence de pression entre le liquide interstitiel et le milieu ambiant ainsi que par la tension superficielle à la surface du pont. Un autre paramètre important est l'*angle de contact* θ_c entre le liquide et le solide. Comme son nom l'indique, il représente l'angle entre la surface du liquide et la surface du solide en contact (voir Fig. 1.7) et est donné par la relation suivante :

$$\cos\theta_c = \frac{\gamma_{sv} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lv}} \tag{1.9}$$

où γ_{sv} et γ_{sl} représentent la tension superficielle respectivement entre le solide et l'air (solide-vapeur) et

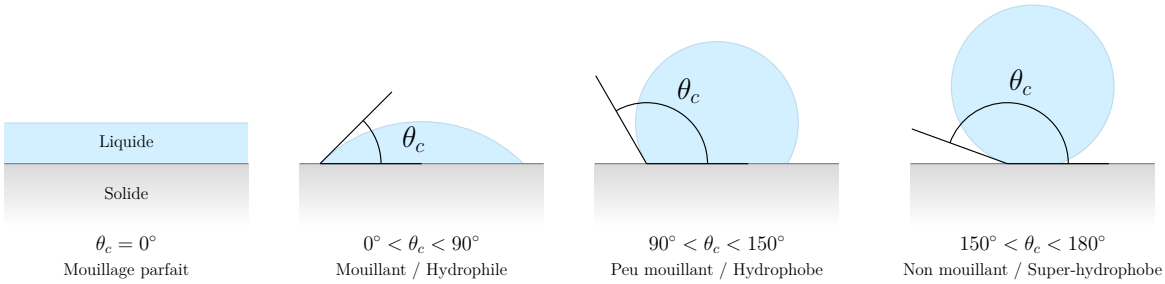


Figure 1.7 Schéma des différents cas de mouillage d'une surface solide par un liquide et de l'angle de contact θ_c résultant. Les termes *hydrophile*, *hydrophobe* et *super-hydrophobe* sont utilisés lorsque le liquide est de l'eau.

entre le solide et le liquide (solide-liquide).

Un faible angle de contact (voir Fig. 1.7) correspond au cas d'un matériau très *mouillant* sur lequel le liquide s'étalera et adhérera, aussi appelé *hydrophile* pour l'eau. Inversement, sur un matériau peu mouillant, dit *hydrophobe* pour l'eau, le liquide *perlera*, formant des gouttes n'adhérant pas ou peu à la surface. Le premier cas augmentera grandement la cohésion dans le milieu alors qu'elle sera quasiment nulle pour des grains non mouillants (*super-hydrophobe* pour l'eau).

Forces hydrodynamiques

Dans le cas d'une suspension, où les grains sont entièrement immergés dans un fluide, il est nécessaire de prendre en compte l'effet des forces hydrodynamiques créées par le mouvement du fluide. Ce mouvement peut être intrinsèque au fluide, comme dans le cas du transport de sédiments dans une rivière, ou dû aux mouvements des grains, comme dans le cas des avalanches sous-marines. Dans les deux cas, le problème est complexe car le fluide et le milieu granulaire agissent l'un sur l'autre, leurs mouvements et les forces auxquelles ils sont soumis étant liés. Un fluide en écoulement par exemple modifiera la trajectoire d'un grain, qui lui-même modifiera l'écoulement à proximité, et ainsi de suite. La poussée d'Archimède, l'effet Magnus sur un grain en rotation [7] ou la lubrification des contacts entre les grains sont autant de phénomènes dus aux forces hydrodynamiques. Nous ne détaillerons néanmoins pas toutes ces forces car elles sortent du cadre de cette thèse.

1.4 Simuler les milieux granulaires

1.4.1 Intérêts et approches

Le comportement global d'un milieu granulaire résulte des différentes interactions entre ses grains que nous venons de décrire. L'important nombre de grains composant le milieu (plusieurs milliers à plusieurs millions ou plus) rend toute résolution théorique de ce comportement impossible. Il est néanmoins possible de le prédire en simulant numériquement le milieu. Les simulations numériques sont en effet un outil puissant pour étudier les milieux granulaires, possédant plusieurs avantages majeurs mais aussi des limites.

Un premier avantage vient du fait qu'il est bien plus aisé, pour des raisons pratiques et économiques, d'effectuer des simulations plutôt que de développer un dispositif expérimental. Ceci est particulièrement intéressant en industrie pour dimensionner et optimiser un système utilisant des milieux granulaires. Un second avantage est de pouvoir suivre parfaitement l'écoulement, et donc d'extraire toutes les informations souhaitées, ce qui n'est généralement pas possible en pratique. On peut par exemple citer le cas des contraintes sur les grains à l'intérieur d'un écoulement granulaire en 3D, qui sont impossibles à obtenir expérimentalement. Enfin, elles permettent de tester des cas critiques, difficilement atteignables en réalité mais permettant d'éprouver les limites de la théorie. Des conditions de température ou pression extrêmes, la présence d'un champ électromagnétique spécifique ou l'influence de très puissantes vibrations en sont des exemples.

7. Une sphère en rotation dans un écoulement subira une force perpendiculaire à la direction de l'écoulement. C'est l'effet Magnus, dû à une asymétrie des forces de pression de chaque côté de la sphère, créée par sa rotation. Cet effet est à l'origine des "effets" donnés aux balles de tennis ou football.

La principale limite des simulations numériques est la validité des résultats qu'elles calculent par rapport la réalité. Il est en effet parfois difficile de déterminer si les résultats simulés sont corrects, ironiquement en particulier dans les cas extrêmes. Une seconde limite, plus pratique, est le temps de calcul nécessaire pour simuler un problème complexe, qui peut devenir gigantesque dû au très grand nombre de grains dans les milieux granulaires et aux interactions complexes. Ces limites dépendent en particulier de l'approche utilisée pour simuler le milieu granulaire. Les deux approches les plus utilisées sont :

- **L'approche discrète :** on considère tous les grains composant le milieu et l'on simule numériquement les interactions entre les grains décrites précédemment. On utilise principalement des simulations par éléments discrets dans ce cas, que nous décrirons juste après. Cette approche permet de se rapprocher au mieux de la réalité mais nécessite une importante puissance de calcul et un temps considérable du fait du grand nombre de grains et des interactions complexes. Les modèles utilisés pour décrire ces interactions sont très importants puisqu'ils déterminent la précision des résultats par rapport à la réalité tout en influençant le temps de calcul (plus long pour les modèles complexes).
- **L'approche continue :** on simule le milieu granulaire comme un milieu continu classique. On utilisera ainsi différentes méthodes issues de la mécanique du solide et *mécanique des fluides numériques* (ou "CFD" pour Computational Fluid Dynamics) pour résoudre le comportement du milieu. Cette approche nécessite une puissance de calcul plus faible et est bien plus rapide que l'approche discrète. Elle nécessite cependant de connaitre les lois régissant le comportement du milieu (tel Navier-Stokes pour les fluides classiques). Il n'existe cependant pas encore de lois permettant de décrire le comportement d'un milieu granulaire dans toutes les situations de mise en écoulement. De plus, l'approche continue ne permet pas de décrire la nature discrète du milieu et les effets non-locaux entre les grains, dont l'influence est parfois primordiale.

Dans le cadre de cette thèse, nous effectuerons principalement des simulations par éléments discrets pour nous rapprocher au mieux du comportement réel du milieu. Nous allons donc décrire de manière plus précise cette méthode de simulation.

1.4.2 Simulations par éléments discrets

La simulation par *méthode des éléments discrets*, ou DEM (Discrete Elements Method), est de loin la méthode la plus utilisée pour modéliser les milieux granulaires, et en particulier les écoulements granulaires. Cette méthode de calcul a été introduite par Cundall et Strack [21] en 1979 et s'est rapidement imposée comme référence pour simuler les milieux granulaires. Le principe de base de la méthode est de simuler le mouvement et les contacts de chaque particule du milieu. Une simulation par DEM suit généralement les étapes suivantes :

- Définition de la géométrie : la géométrie du problème est créée, et potentiellement divisée sur un maillage plus ou moins fin dans certains cas (généralement lorsque l'on étudie les forces sur les parois).
- Initialisation : la position, la vitesse ainsi que les propriétés physiques des particules et des parois sont fournies à l'algorithme.
- Recherche des voisins de chaque particule : l'algorithme détermine pour chaque particule les parois et autres particules proches, c'est-à-dire se trouvant dans un volume V centré autour de la particule.
- Calcul des forces : l'algorithme calcule les forces s'exerçant sur chaque particule dues à ses voisins (contact, frottement, cohésion...) et aux autres forces dans l'écoulement (gravité, champs électromagnétiques...).
- Calcul des déplacements : l'algorithme calcule le déplacement de chaque particule à partir de sa vitesse et des forces qu'elle subit en résolvant numériquement les équations du mouvement.
- Boucle temporelle : les informations de chaque particule sont mises à jour et le calcul recommence à partir de ces nouvelles valeurs. Cette suite d'étapes se répète jusqu'au temps final de la simulation.

La Fig. 1.8 présente des exemples de simulation de milieux granulaires par DEM, avec l'écoulement de grains dans une cellule poudre, le long d'un plan incliné et dans un tambour tournant.

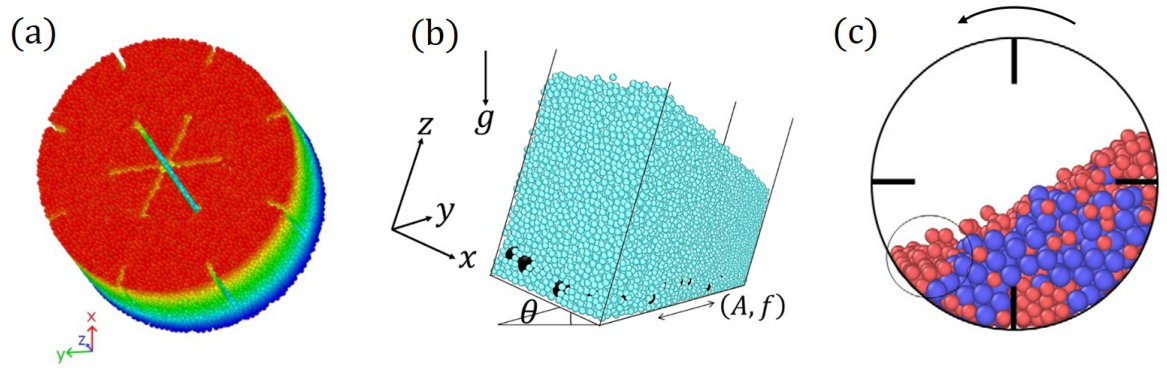


Figure 1.8 Exemples de simulations de l'écoulement de grains par DEM dans (a) une cellule poudre (coloration par hauteur dans la cellule), (b) une tranche de l'écoulement sur un plan incliné vibré (extrait de [22]) et (c) dans un tambour tournant (coloration par taille des grains, extrait de [23]).

Les simulations par DEM possèdent différents avantages expliquant leur utilisation intensive, mais elles ont aussi leurs limites :

+ Simuler directement le mouvement des grains permet de se rapprocher au maximum de la réalité. Le comportement du milieu est en effet créé par tous les mouvements et forces entre ses grains comme en réalité, on a donc une description plus fondamentale qu'avec une approche par milieux continus. Dans la plupart des cas, les équations du mouvement combinées aux forces de contact élastique et de frottement solide (voir chapitre 1, section 1.3) suffisent pour obtenir des très bons résultats qualitatifs et quantitatifs.

+ Il est possible de simuler les phénomènes discrets, à l'échelle d'un grain contrairement à l'approche continue. On peut citer comme exemple la formation d'arche en sortie d'un silo ou le simple rebond d'une bille sur le sol.

+ Il est possible de simuler des milieux polydispersés (grains de différentes tailles) et avec des particules anisotropes (formes particulières, comme les grains de blé). Cela permet d'observer des phénomènes comme la ségrégation en taille, l'orientation des grains anisotropes, la variation de fraction volumique ou encore la formation de paquets de grains (ou *clusters*) par cohésion.

+ La géométrie du système peut être très complexe sans nécessiter la création d'un maillage très fin, sauf bien sur si le but est d'étudier l'effet sur les parois à très petite échelle. Pour les géométries simples (un mur ou une boîte rectangulaire par exemple), il n'est même pas nécessaire de créer un maillage.

– Le temps de calcul augmente exponentiellement avec le nombre de grains dans la simulation. Or dans de nombreux cas, les milieux granulaires contiennent des centaines de milliers voire des millions de grains. C'est d'autant plus vrai lorsque les forces entre les grains sont complexes (ajout de cohésion par exemple). De plus, le pas de temps entre chaque itération doit être suffisamment faible pour éviter que des particules s'interpénètrent (dans de nombreux cas, $\Delta t \leq 10^{-5}$ s).

– Les propriétés physiques des grains utilisées dans la simulation ne sont pas toujours réalistes et il est parfois difficile d'obtenir des résultats quantitatifs en parfaite adéquation avec la théorie. Ces résultats sont en effet très dépendants des modèles utilisés pour simuler les interactions entre grains. Un modèle complexe permettra de mieux simuler ces interactions mais sera plus difficile à implémenter et augmentera le temps de calcul.

Au final, la DEM est très pratique pour simuler les milieux granulaires (en particulier les écoulements) de manière réaliste mais elle est limitée par un temps de calcul parfois gigantesque. La plupart de ces simulations sont donc faites sur des centres de calcul (ou "clusters") disposant de dizaines, voire centaines, de processeurs. Néanmoins, même avec ces outils, la simulation d'un écoulement de plusieurs millions de grains secs pendant quelques secondes peut durer des jours ou semaines entières. C'est principalement pour cette raison que des méthodes de calcul par approche continue sont développées, dans le but de simuler ces écoulements bien plus rapidement et ainsi d'économiser du temps et de l'argent. Néanmoins,

pour que ces méthodes fonctionnent, il est nécessaire de déterminer les lois régissant le comportement du milieu, souvent par expérience ou justement avec des simulations DEM. Pour les écoulements granulaires, on rentre alors dans le domaine de la *rhéologie* que nous allons voir dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Rhéologie des écoulements granulaires

2.1 Les liquides granulaires 29
2.2 Rhéologie et loi d'écoulement 31
2.2.1 Le nombre inertiel 31
2.2.2 La rhéologie μ(I) 32
2.3 Les écoulements granulaires vibrés 34
2.3.1 Intérêts des écoulements vibrés 34
2.3.2 Rhéologie des milieux granulaires vibrés 34
2.3.3 Un exemple d'écoulement vibré : le plan incliné 36

2.1 Les liquides granulaires

Une des particularités majeures des milieux granulaires est leur capacité à s'écouler comme un fluide, en fonction des contraintes auxquelles ils sont soumis. On parlera alors de *liquide granulaire* dans le cas d'écoulements *denses*, où les grains sont en contact ($\phi \sim 0.5$) et coulent de manière similaire à un liquide. Ces écoulements sont très présents dans le domaine de la géophysique (voir Fig. 2.1) : les éboulements de roches, avalanches de sable sur le flanc d'une dune, glissements de terrain ou encore les coulées pyroclastiques (nuées ardentes) en sont autant d'exemples. Ces écoulements sont aussi très présents dans l'industrie, comme lors du transport de minerais ou la vidange de silos à céréales.

Figure 2.1 Exemples d'écoulements granulaires : coulée pyroclastique le long d'un volcan (nuée ardente), glissement de terrain au japon, transport de grains de blé, vidange d'un sablier.

Ces liquides granulaires font partie de ce qu'on appelle les fluides *non-newtoniens*. Cela signifie que leur viscosité dépend des contraintes dans le fluide et du temps, contrairement aux fluides dits *newtoniens*, comme l'eau et l'air, dont la viscosité reste constante. De nombreux fluides font partie de cette catégorie, on peut citer par exemple la maïzena, le ketchup, le dentifrice ou encore le sang. Plus exactement, cette propriété de la viscosité vient du fait que la contrainte, τ, dans le fluide n'évolue pas linéairement avec le *taux de cisaillement* $\dot{\gamma}$, qui correspond dans ce cas au gradient de vitesse et rend compte des déformations

dans le fluide. On a en effet la relation suivante entre la contrainte et le taux de cisaillement :

$$\tau = \eta\dot{\gamma} \tag{2.1}$$

où η est la viscosité dynamique du fluide selon l'axe du cisaillement. Pour illustrer, considérons le cas d'un cisaillement simple d'une couche de fluide de largeur L entre deux plaques (voir Fig. 2.2). On applique pour ce faire une contrainte de cisaillement τ sur la plaque supérieure, tandis que la plaque inférieure est maintenue immobile. La plaque supérieure va alors se déplacer à une vitesse v et entraîner le fluide, créant un gradient $\dot{\gamma} = v/L$. On aura donc la relation :

$$\tau = \eta\frac{v}{L} \tag{2.2}$$

Dans le cas d'un fluide newtonien, η est une constante et on obtient une droite lorsque trace la contrainte en fonction du taux de cisaillement (courbes rouges sur la Fig. 2.3). En revanche, pour les fluides non-newtoniens, la viscosité n'est plus constante et les deux grandeurs ne sont plus reliées linéairement. On rencontrera alors principalement quatre cas :

- Les *fluides rhéofluidifiants* (ou pseudoplastique), dont la viscosité diminue avec le gradient de vitesse. Dans ce cas, plus le cisaillement est important, plus le système devient fluide (courbes vertes sur la Fig. 2.3). On peut citer dans cette catégorie le ketchup et le sang.
- Les *fluides rhéoépaississants* (ou dilatant), dont la viscosité augmente avec le gradient de vitesse. Dans ce cas, plus le cisaillement est important, plus le système devient visqueux (courbes bleues sur la Fig. 2.3). La maïzena est un exemple bien connu de fluide rhéoépaississant.
- Les *fluides à seuil* (ou viscoplastique), qui ne s'écoulent qu'à partir d'une certaine contrainte appelée *seuil d'écoulement*. Une fois cette contrainte dépassée, le fluide s'écoule généralement comme un fluide newtonien ou un fluide rhéofluidifiant (courbes violette sur la Fig. 2.3). On peut citer comme exemple le dentifrice ou la mousse à raser.
- Les *fluides thixotropes* ou *antithixotropes*, dont la viscosité diminue ou augmente respectivement avec le temps. Ce phénomène est dû à l'évolution de la structure du fluide lors du cisaillement. Cette structure se réorganise avec le temps lorsque le fluide est au repos. Les sables mouvants et le yaourt en sont des exemples.

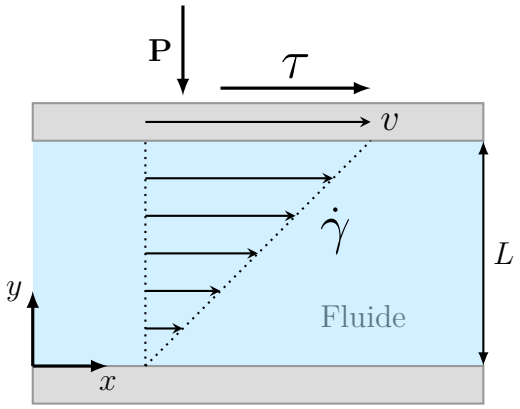


Figure 2.2 Schéma du cisaillement plan d'un fluide : la paroi supérieure subit une contrainte de cisaillement τ, la faisant se déplacer à la vitesse v. La paroi basse reste immobile, ce qui créé un gradient de vitesse dans le fluide, et donc un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. La paroi supérieure impose aussi une pression de confinement P sur le fluide.

Les écoulements granulaires sont quand à eux des fluides à seuil, d'où leur dualité solide/liquide, et présentent aussi souvent certains des autres comportements décrits. Du fait de ces propriétés, la géométrie de l'écoulement aura un impact majeur sur la manière dont le milieu granulaire s'écoule. En effet, l'écoulement d'une mince couche de milieu granulaire sur un plan incliné sera bien différent de la vidange d'un silo ou de l'écoulement dans un tambour tournant. Contrairement aux écoulements newtoniens, il n'existe pas encore d'équation constitutive permettant de décrire tous les écoulements granulaires.

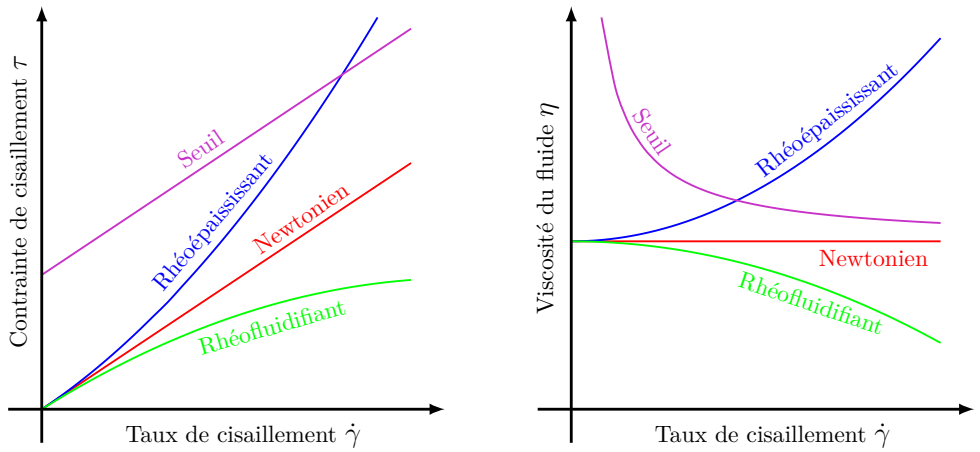


Figure 2.3 Évolution typique de (à gauche) la contrainte de cisaillement τ et de (à droite) la viscosité du fluide η en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Dans chaque graphe, les cas de fluides newtonien, rhéoépaississant, rhéofluidifiant et à seuil sont présentés.

2.2 Rhéologie et loi d'écoulement

La *rhéologie* est la science qui étudie la déformation et l'écoulement de la matière sous l'effet de contrainte. Un de ces principaux objectifs est d'établir des lois permettant de décrire l'écoulement de la matière, appelées *lois de comportement* ou *lois rhéologiques*. Dans le cas de l'étude des milieux granulaires, on parlera aussi très souvent de rhéologie *locale*. On s'intéressera en effet au comportement à l'échelle microscopique du milieu, intrinsèquement lié à l'écoulement global dans la plupart des cas. Cette propriété est un frein majeur dans la compréhension et la description des liquides granulaires. De ce fait, il n'existe toujours pas de loi constitutive permettant de décrire tous les écoulements granulaires, malgré des efforts de recherche intensifs. Il existe cependant des lois, souvent empiriques ou semi-empirique, permettant de décrire le comportement de ces écoulements dans des cas particuliers. Parmi ces lois, la plus connue et utilisée est la loi $\mu(I)$, qui relie la friction à un nombre sans dimension I, appelé *nombre inertiel*. Cette loi, basée sur les travaux de Da Cruz et al. [24] en 2005, s'est montrée capable de décrire les écoulements granulaires dans de nombreuses situations. Bien qu'elle possède ses limites, elle est une référence pour décrire et simuler les liquides granulaires.

2.2.1 Le nombre inertiel

Repartons du cisaillement simple présenté précédemment (voir Fig. 2.2), cette fois pour un écoulement granulaire composé de grains rigides (module d'Young E très grand devant la pression P) et suffisamment petit devant la taille de l'écoulement (diamètre des grains $d \ll L$). Dans ce cas, les seuls paramètres de contrôle sont la contrainte de cisaillement τ, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, la pression de confinement P et la densité des grains ρ. En utilisant l'analyse dimensionnelle à partir de ces quatre grandeurs, on peut créer un nombre sans dimension I, qu'on appelle le nombre inertiel [24, 25] :

$$I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}} \tag{2.3}$$

Il est possible de donner une interprétation physique à ce nombre :

$$I = \frac{t_{micro}}{t_{macro}} \tag{2.4}$$

où $t_{macro} = 1/\dot{\gamma}$ est un temps caractéristique de l'écoulement macroscopique dû au cisaillement (Fig. 2.4a) et $t_{micro} = d/\sqrt{P/\rho}$ est un temps caractéristique de réarrangement des grains dû à la pression de confinement (Fig. 2.4b). Cette interprétation permet de caractériser les différents états des milieux granulaires : un faible nombre inertiel ($I \lesssim 10^{-3}$) correspond à un écoulement quasi-statique, où les particules se réarrangent très rapidement par rapport au mouvement macroscopique global. On tend dans ce cas vers un état solide pour le milieu. À l'opposé, un nombre inertiel important ($I \gtrsim 0.1$) correspond à

un régime rapide, et donc à un milieu dilué dans un état gazeux. Enfin, un nombre inertiel intermédiaire correspond au cas des liquides granulaires, où le mouvement macroscopique et les réarrangements se déroulent sur des échelles de temps similaires.

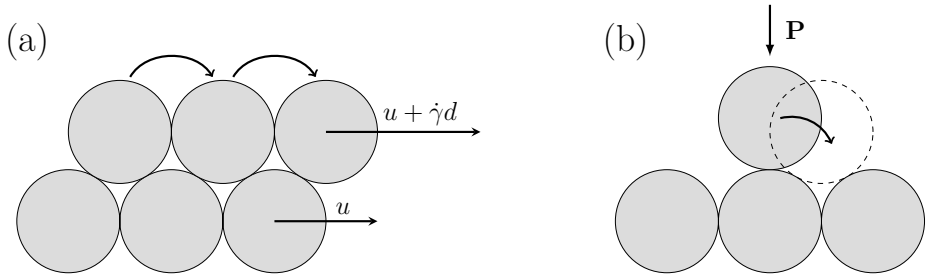


Figure 2.4 Illustration de l'interprétation physique du nombre inertiel : (a) mouvement des grains dû au gradient de vitesse dans l'écoulement et (b) réarrangement d'un grain dû à la pression de confinement.

La théorie prédit que l'écoulement doit être entièrement contrôlé par ce nombre inertiel. L'analyse dimensionnelle permet d'en déduire que la fraction volumique ϕ dans l'écoulement est une fonction de ce nombre uniquement. On aura aussi une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et la pression de confinement. Au final, on obtient les relations suivantes :

$$\tau = \mu(I)P \qquad \text{et} \qquad \phi = \phi(I) \tag{2.5}$$

où μ est ici un coefficient de friction effectif dépendant entièrement du nombre inertiel. On appelle alors *loi de friction $\mu(I)$* la relation décrivant le lien entre μ et I. De même, on appelle *loi de fraction $\phi(I)$* la relation liant ϕ et I.

2.2.2 La rhéologie μ(I)

L'étude des lois $\mu(I)$ et $\phi(I)$ a été réalisée pour la première fois en 2005 par Da Cruz et al. [24]. Pour ce faire, ils ont simulé un cisaillement plan d'un écoulement de disques 2D et mesuré l'évolution de μ et ϕ en fonction de I (voir Fig. 2.5). Dans chaque cas, ils ont bien obtenu une seule courbe liant chaque grandeur au nombre inertiel. Le coefficient de friction μ augmente avec I, en partant d'une valeur statique μ_1 pour $I = 0$. La fraction volumique quant à elle diminue linéairement avec I à partir d'une valeur statique ϕ_1.

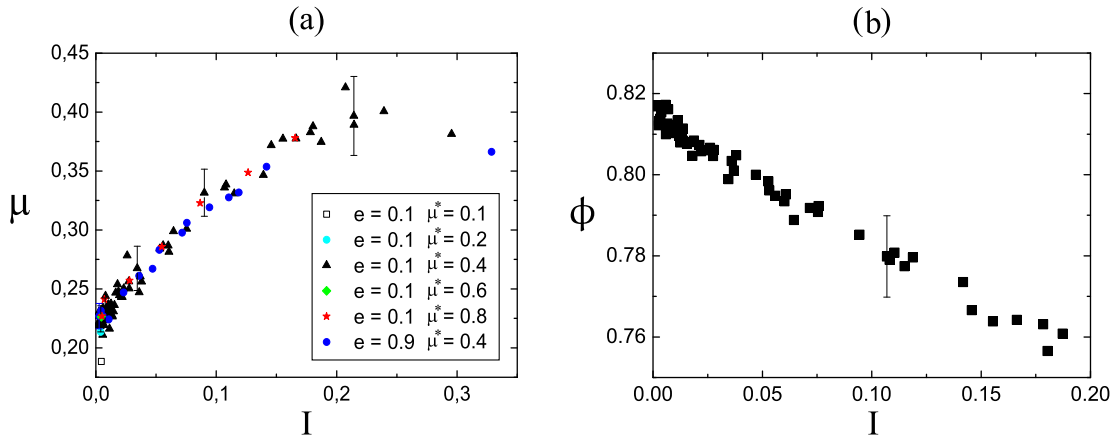


Figure 2.5 Évolution (a) du coefficient de friction effectif μ et (b) de la fraction volumique ϕ en fonction du nombre inertiel I. Les résultats présentés proviennent de simulations numériques 2D du cisaillement simple d'un milieu granulaire, réalisées par Da Cruz et al. [24]. Sur (a), les résultats pour différents coefficients de restitution e et de frottement μ^* entre les grains s'alignent sur une même courbe.

Des lois empiriques pour $\mu(I)$ et $\phi(I)$ peuvent être déterminées à partir des mesures précédentes [26, 27] :

$$\mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + I_0/I} \qquad \text{et} \qquad \phi(I) = \phi_1 - (\phi_1 - \phi_2)I \tag{2.6}$$

où μ_1, μ_2, I_0, ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes dépendant du milieu granulaire. Pour des billes de verre monodispersées, on a typiquement $\mu_1 = \tan 21°$, $\mu_2 = \tan 33°$, $I_0 = 0.3$, $\phi_1 = 0.6$ et $\phi_2 = 0.4$. On peut noter que lorsque $I \gg 1$, la friction sature vers une limite dynamique μ_2. Cette croissance du frottement avec le nombre inertiel s'explique par une augmentation des collisions et de l'anisotropie des contacts entre particules. Pour la fraction volumique, la décroissance provient simplement d'une transition vers un régime moins dense, c'est-à-dire vers un gaz granulaire.

Les relations que nous venons de présenter sont valables dans le cas d'un cisaillement unidirectionnel. Néanmoins, dans la plupart des écoulements le cisaillement se fait dans les trois directions de l'espace. Il est possible de généraliser la loi de friction précédente en supposant que l'écoulement est incompressible et la pression P est isotrope. On a alors une relation entre le tenseur des contraintes σ et le *tenseur des taux de déformation* $\dot{\gamma}$:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \qquad \text{et} \qquad \tau_{ij} = \eta_{\text{eff}}\dot{\gamma}_{ij} \tag{2.7}$$

où δ_{ij} est le tenseur unité, τ_{ij} le tenseur des contraintes de cisaillement et η_{eff} la *viscosité effective* du liquide granulaire donnée par :

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} \qquad \text{avec} \qquad I = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P/\rho}} \tag{2.8}$$

Le tenseur des taux de déformation est donné dans ce cas par :

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad |\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ij}} \tag{2.9}$$

Le milieu granulaire est dans ce cas décrit comme un fluide non-newtonien incompressible de viscosité η_{eff}. Lorsque le gradient $|\dot{\gamma}| \to 0$, la viscosité diverge et l'on obtient bien un seuil d'écoulement.

Applications et limites de la rhéologie μ(I)

La validité de la rhéologie $\mu(I)$ a été confirmée expérimentalement et numériquement pour d'autres géométries [5]. En effet, elle décrit généralement très bien les écoulements uniformes et stationnaires. On peut en particulier citer :

- Les écoulements sur plan incliné rugueux (Fig. 2.6a), dont les éboulements et les avalanches sont des exemples naturels .
- Les écoulements de couette cylindrique (Fig. 2.6b), rencontrés dans la plupart des *rhéomètres* pour caractériser les propriétés rhéologiques du fluide.
- Les écoulements sur tas (Fig. 2.6c), que l'on rencontre souvent en industrie lors du transport et la vidange de milieux granulaires.

Cette approche possède néanmoins ses limites et ne permet pas de décrire n'importe quel type d'écoulement. C'est généralement le cas lorsque l'on a des phénomènes complexes ou instationnaires, en particulier pour les cas proches du seuil d'écoulement, où la transition solide/liquide intervient. Cette transition est très sensible à l'état initial du milieu et montre souvent une hystérésis lorsqu'on change la contrainte, deux phénomènes dont la rhéologie $\mu(I)$ ne rend pas compte. Ces caractéristiques proviennent de l'apparition d'événements localisés, qui influent sur l'écoulement macroscopique [28, 29]. La rhéologie $\mu(I)$ étant une approche purement continue, elle ne permet pas de décrire certains de ces comportements discrets des écoulements granulaires dus à la taille finie des grains (écoulement de seulement quelques couches de grains par exemple). De plus, lors de cette transition, l'écoulement passe par un régime quasi-statique qui est mal décrit par la rhéologie $\mu(I)$. Ces problèmes peuvent être expliqués par l'existence de corrélations spatiales à grande échelle dans l'écoulement [30, 31, 32, 33]. On a alors des effets non locaux dont on doit tenir compte dans la loi constitutive, ce qui n'est pas décrit par la rhéologie $\mu(I)$.

De manière similaire, la transition liquide/gaz met aussi en défaut la rhéologie $\mu(I)$ ainsi que la théorie cinétique utilisée pour décrire le comportement des gaz granulaires. Enfin, cette rhéologie a été établie de manière phénoménologique pour des particules modèles, son extension au cas d'écoulements de particules complexes (formes irrégulières, polydispersées...) reste donc encore à résoudre.

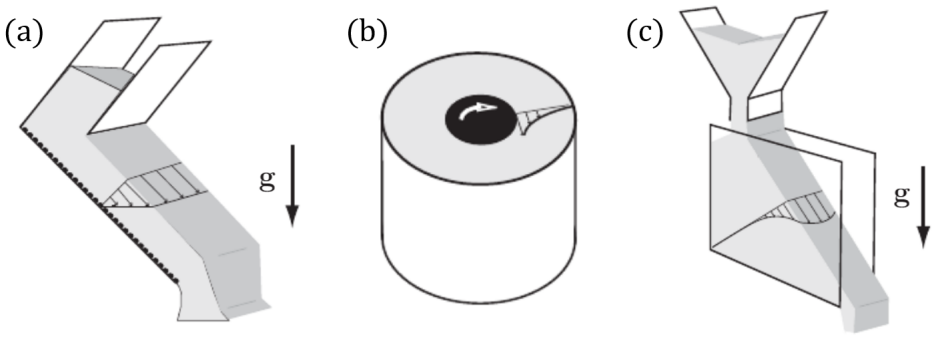


Figure 2.6 Schémas d'écoulements granulaires dans lesquels la loi $\mu(I)$ est applicable : (a) Écoulement le long d'un plan incliné rugueux sous l'effet de la gravité, (b) écoulement dans un couette cylindrique imposé par la rotation du cylindre intérieur et (c) écoulement le long d'un tas granulaire (images extraites de [5]).

2.3 Les écoulements granulaires vibrés

Un point particulièrement intéressant en rhéologie est l'étude de l'effet des vibrations sur les écoulements granulaires. Il n'est en effet pas rare qu'un milieu granulaire soit soumis à des vibrations dans l'industrie et dans la nature (particulièrement en géophysique). La présence de ces vibrations peut alors changer complètement le comportement du milieu, en lui permettant par exemple de s'écouler en deçà de son seuil d'écoulement. La rhéologie de ces milieux vibrés diverge alors du cas sans vibration et nécessite d'établir de nouvelles lois. Dans cette partie, nous allons présenter l'intérêt des vibrations et des résultats intéressants concernant les écoulements granulaires sous vibrations.

2.3.1 Intérêts des écoulements vibrés

On peut distinguer deux types d'écoulements granulaires vibrés selon la nature des vibrations auxquelles ils sont soumis : non contrôlées et contrôlées.

Le premier cas correspond à des vibrations non contrôlées, qui vont avoir un effet "parasite" sur l'écoulement. Dans la nature, les séismes sont un excellent exemple de vibrations non contrôlées qui peuvent mettre en écoulement un milieu granulaire (éboulement, avalanche, liquéfaction des sols...). La présence de vibrations parasites (créées par des dispositifs mécaniques comme un moteur ou une foreuse par exemple) est aussi un problème assez commun en industrie, bien qu'il soit généralement possible de le minimiser. Dans ce cas, comprendre l'effet des vibrations sur l'écoulement permet de prédire le comportement du milieu pour anticiper, voire endiguer, les risques et problèmes liés.

Le second cas correspond à des vibrations contrôlées, que l'on applique pour changer les propriétés de l'écoulement. On peut citer comme exemples l'utilisation d'aiguille vibrante pour fluidifier le béton et éviter les vides lors du coffrage d'une structure, les tables vibrantes pour compacter des céréales dans un sac ou encore l'application de vibrations à la sortie d'un silo pour éviter les blocages. Comprendre l'effet des vibrations permet donc de contrôler le milieu et d'optimiser les procédés qui en dépendent.

La présence de ces vibrations rajoute néanmoins une complexité supplémentaire aux écoulements granulaires. En effet, tous les milieux granulaires ne réagiront pas de la même façon aux vibrations selon leurs propriétés. De même, le type (périodique, sinusoïdale, intermittente...) et la façon (direction, locale ou globale...) dont les vibrations sont appliquées peuvent changer complètement l'effet sur l'écoulement. De ce fait, et tout comme dans le cas sans vibration, il n'existe pas de loi constitutive globale permettant de rendre compte du comportement des écoulements granulaires vibrés. Différentes études ont néanmoins permis de mettre en évidence certains résultats généraux concernant les effets des vibrations.

2.3.2 Rhéologie des milieux granulaires vibrés

Si on regarde les différents exemples mentionnés précédemment, on voit que l'effet principal des vibrations est de fluidifier le milieu, ce qui permet l'écoulement en dessous de la transition solide-liquide. Les vibrations vont en effet exciter le système en apportant de l'énergie et permettre ainsi aux grains composant le milieu de se réorganiser. C'est cette brisure des contacts et chaines de forces qui permet au

Figure 2.7 Exemples de l'effet des vibrations sur les milieux granulaires : (a) Liquéfaction des sols lors d'un séisme, (b) Homogénéisation et compaction du béton par vibration et (c) Trémie d'alimentation vibrée pour contrôler le débit de particules.

milieu de passer de l'état solide à l'état liquide. Nous allons dans cette partie décrire ce phénomène du point de vue rhéologique et présenter certains effets sur les milieux granulaires.

Différentes études ont été menées pour caractériser cet effet de fluidisation des vibrations sur la rhéologie des milieux granulaires [29, 34, 35, 36, 37]. Pour ce faire, l'écoulement de billes sphériques dans une cellule vibrée d'un rhéomètre a été étudié. La cellule utilisée dans les études réalisées par le groupe de Kiesgen De Richter et al. [35, 36, 37] est présentée sur la Fig. 2.8a. Il s'agit d'une cellule de couette cylindrique modifiée, dite *cellule poudre* : le cylindre externe possède des chicanes tandis que le cylindre interne est composé d'ailettes et appelé *vane*. Cette géométrie permet de simuler la rotation de parois granulaires en entrainant les grains proches de la vane et des chicanes. La cellule repose sur un pot vibrant permettant d'appliquer des vibrations verticales et sinusoïdales contrôlées par un accéléromètre.

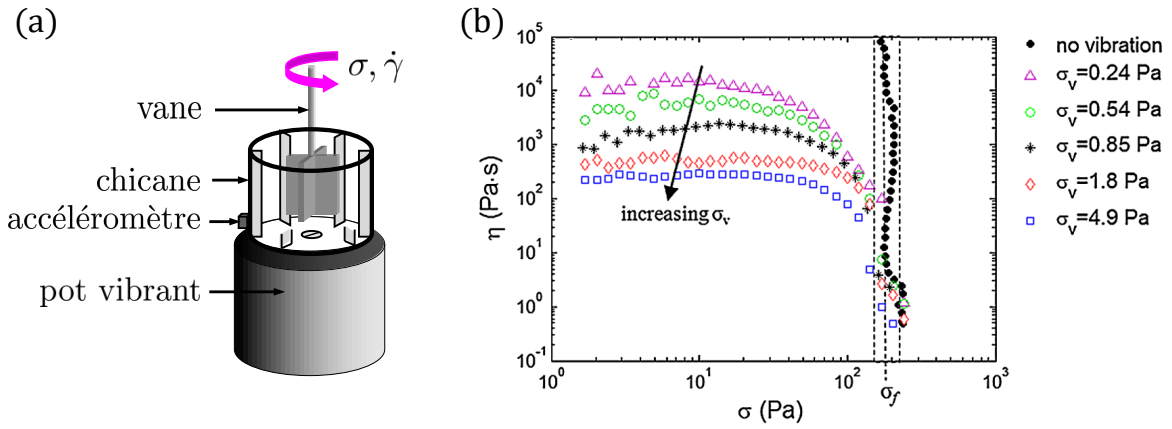


Figure 2.8 (a) Schéma de la cellule utilisée par le groupe de Kiesgen De Richter et al. [35, 36, 37] pour caractériser la rhéologie de milieux granulaires vibrés. La contrainte σ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ sont suivis et contrôlés par le rhéomètre. (b) Viscosité η en fonction de la contrainte appliquée σ d'un milieu granulaire composé de billes de verres sèches de 100 µm. Dans chaque cas, les mesures sont effectuées sans vibration et pour plusieurs contraintes de vibrations $\sigma_v = \rho A^2\omega^2/2$ (résultats extraits de l'étude de Hanotin et al. [35]).

Le rhéomètre permet d'imposer une contrainte σ et mesurer le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ (déduit de la vitesse de rotation), ou inversement d'imposer un gradient et de mesurer la contrainte. Hanotin et al. [35] ont ainsi mesuré la viscosité du milieu en fonction de la contrainte pour différentes vibrations (Fig. 2.8b). Sans vibration (ronds noirs), on retrouve un comportement typique d'un fluide à seuil, avec une viscosité qui diverge en dessous d'une contrainte seuil σ_f. En revanche, lorsqu'on applique des vibrations, la viscosité ne diverge plus et tend vers un maximum lorsque la contrainte diminue. Cette viscosité limite décroît avec l'augmentation de la contrainte de vibrations σ_v, donnée par :

$$\sigma_v = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \qquad \text{avec :} \quad \omega = 2\pi f \tag{2.10}$$

où A est l'amplitude des vibrations et f la fréquence des vibrations. Au-delà de la contrainte seuil, les résultats convergent vers une même courbe et ne dépendent plus des vibrations. Ce comportement peut être décrit par un modèle à deux régimes (ou *two-state model*) dépendant des chaines de forces entre les grains du milieu et des vibrations [36].

Pour des faibles contraintes ($\sigma < \sigma_f$), l'écoulement est contrôlé par les vibrations et on parle alors de *régime visqueux* (ou Newtonien). Les vibrations engendrent dans ce cas des fluctuations de vitesse dans le milieu, et donc des réarrangements de particules, donnant ainsi lieu à un écoulement similaire à un fluide visqueux [37]. Plus la contrainte de vibrations est élevée, plus les réarrangements sont rapides, engendrant ainsi une baisse de la viscosité.
Pour des fortes contraintes ($\sigma > \sigma_f$), l'écoulement est contrôlé à la fois par la contrainte de cisaillement et les vibrations, on parle alors de *régime frictionnel* (ou Coulombien). La contrainte de cisaillement est ici suffisante pour briser les contacts et mettre les grains en écoulement. Les vibrations ne semblent alors plus jouer sur la viscosité globale du milieu et on retrouve une seule courbe dans les différents cas. Les comportements sans et avec vibrations sont néanmoins différents à l'échelle locale. Sans vibration, d'importants effets non-locaux et plastiques apparaissent dans le milieu et sont d'ailleurs responsables de la présence du seuil d'écoulement. L'ajout de vibrations permet d'homogénéiser le milieu et d'éliminer ces comportements non-locaux, ce qui donne alors une rhéologie entièrement locale.

Ces effets de fluidisation et d'homogénéisation dus aux vibrations sont très intéressants du point de vue pratique et théorique. Pour le premier, cela permet d'éviter de nombreux problèmes comme les blocages et de mieux contrôler les écoulements. Pour le second, l'élimination des effets non-locaux simplifie en partie le problème et pourrait permettre d'obtenir une loi rhéologique locale, de façon similaire à la loi $\mu(I)$. Un paramètre important pour une telle loi est la *température granulaire* T_g, qui rend compte des fluctuations de vitesse $\delta\mathbf{v}$ dans le milieu [5] :

$$T_g = \langle \delta \mathbf{v}^2 \rangle = \langle (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \rangle \tag{2.11}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de chaque particule et $\mathbf{u}$ la vitesse moyenne des particules. Cette grandeur est très utilisée pour caractériser le comportement des gaz granulaires, par analogie à la température thermodynamique pour les gaz. Elle est aussi liée aux effets des vibrations dans les milieux plus denses comme nous venons d'en discuter.

2.3.3 Un exemple d'écoulement vibré : le plan incliné

Pour illustrer les effets des vibrations, penchons-nous sur le cas de l'écoulement sur un plan incliné rugueux, un écoulement granulaire très commun dans la Nature et l'industrie : avalanches sur une montagne, éboulements le long d'un flanc de côte ou encore transport de céréales et minerais. Ce sujet à donc fait l'objet d'un nombre important de recherches [33, 38, 39, 40, 41].

Dans le cas d'un écoulement granulaire uniforme sur un plan rugueux, incliné d'un angle θ, on obtient un écoulement stationnaire d'épaisseur h et de vitesse moyenne en surface $\bar{u}$ (voir Fig. 2.9). Si l'on arrête l'écoulement (en fermant l'alimentation), il reste alors un dépôt d'hauteur h_{stop} sur le plan dépendant de l'angle d'inclinaison. Les différentes études ont montré qu'il existe une limite pour que cet écoulement s'établisse, dépendant de l'angle θ et de la taille des grains d (voir Fig. 2.10a). En dessous de cette limite, l'écoulement n'a pas lieu, montrant bien l'aspect fluide à seuil des milieux granulaires et l'existence d'une transition de jamming. On peut d'ailleurs noter que cette limite diverge pour $\theta < 21°$, ce qui implique qu'on ne peut pas avoir d'écoulement pour des faibles angles, qu'importe la hauteur. Lorsque l'on a un écoulement, Pouliquen et al. [38] ont aussi montré qu'il existe une *loi d'échelle* (ou *scaling*) entre la vitesse $\bar{u}$ et la hauteur de l'écoulement h, tel que :

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \alpha + \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)} \tag{2.12}$$

avec α et β deux constantes et $\bar{u}/\sqrt{gh}$ aussi appelé le *nombre de Froude*, Fr, de l'écoulement. Cette relation est valable qu'importe l'angle d'inclinaison, qui n'agit que sur h_{stop}, comme le montre la Fig. 2.10b.

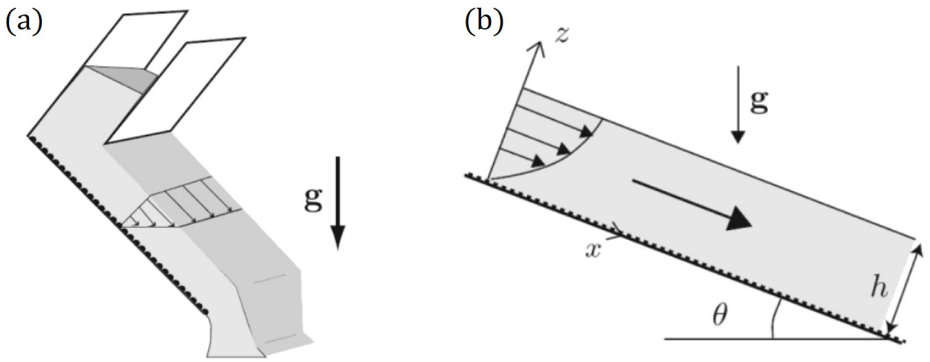


Figure 2.9 Schéma d'un écoulement granulaire uniforme sur un plan incliné (inclinaison θ) rugueux sous l'effet de la gravité en vues (a) 3D et (b) 2D de profil. Un régime stationnaire est rapidement atteint, avec une hauteur d'écoulement h et une vitesse moyenne en surface $\bar{u}$ (figures extraites de [5]).

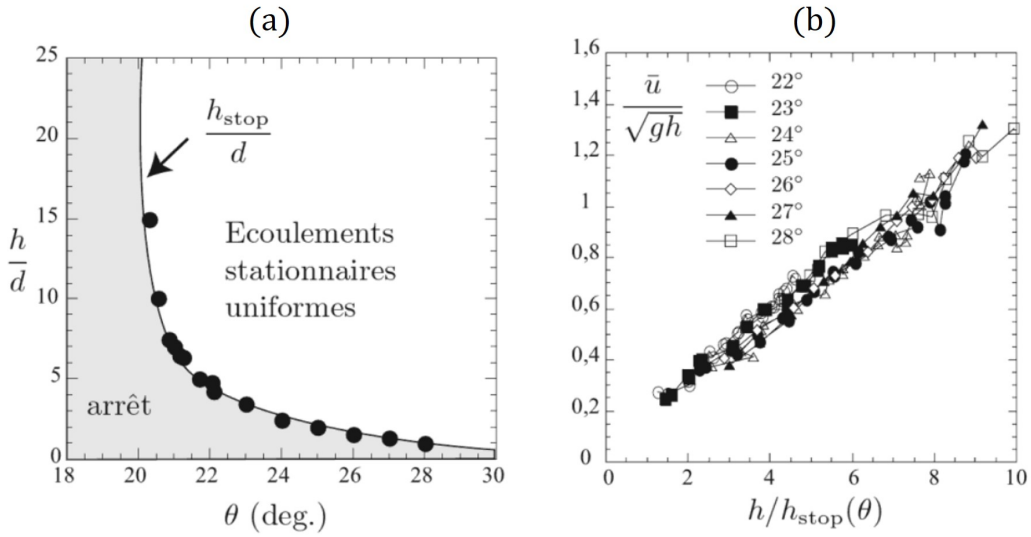


Figure 2.10 (a) Rapport entre la hauteur d'écoulement h et la taille des grains d en fonction de l'angle d'inclinaison du plan θ. La courbe noire représente la limite $h_{stop}(\theta)/d$, en dessous de laquelle l'écoulement s'arrête. (b) Vitesse moyenne adimensionnée à la surface de l'écoulement en fonction du rapport h/h_{stop} pour différents angles d'inclinaison (figures extraites de [5]).

Dans un grand nombre d'applications, ce type d'écoulement est soumis à des vibrations, comme dans le cas des éboulements lors d'un séisme ou de l'utilisation de pots vibrants pour améliorer l'écoulement. Gaudel et al. [22, 42] ont donc étudié l'effet de vibrations périodiques et sinusoïdales selon l'axe y (voir Fig. 2.9b) sur ce type d'écoulement. Tout comme pour l'écoulement dans la cellule poudre, on constate l'existence de deux régimes, dépendant de l'angle d'ouverture et séparés par un angle critique θ_l.

Le premier régime correspond au cas des grands angles d'inclinaison ($\theta > \theta_l$), pour lesquels on a déjà un écoulement sans vibration. Les vibrations ne modifient pas le comportement global, mais permettent de mettre en écoulement les grains des couches proches du fond rugueux. La hauteur de dépôt h_{stop} décroît alors avec les vibrations, et la loi d'échelle précédente devient :

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{gh}} = \alpha + \beta \frac{h}{h^{\text{eff}}_{stop}(\theta)} \qquad \text{avec :} \quad h^{\text{eff}}_{stop} = h^{\text{sv}}_{stop}(\theta)\frac{d}{\lambda} \tag{2.13}$$

où h^{eff}_{stop} est la hauteur de dépôt avec vibrations, h^{sv}_{stop} la hauteur de dépôt sans vibration et λ la rugosité du fond. Ce dernier paramètre a un effet déterminant sur la hauteur du dépôt. En effet, une faible rugosité devant la taille des grains signifie que les grains peuvent couler facilement sur le fond du plan et donc une faible hauteur h_{stop} (dans le cas extrême $\lambda = 0$, il n'y a plus de dépôt). À l'inverse, si la rugosité est grande devant la taille des grains, alors ceux-ci seront à l'arrêt au niveau du fond. Les vibrations permettent dans ce cas d'injecter suffisamment d'énergie aux grains pour leur permettre de s'écouler,

diminuant la hauteur de dépôt.

Le second régime correspond au cas des faibles angles d'inclinaison ($\theta < \theta_l$), pour lesquels il n'y a pas d'écoulement sans vibration. Dans ce cas, en dessous de la contrainte seuil les vibrations permettent de mettre le milieu en écoulement, comme pour l'écoulement dans la cellule poudre. On a alors une nouvelle loi d'échelle :

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{g\bar{h}}}\left(\frac{h_{stop}}{d}\right)^2 \propto \exp\left(-\frac{\Gamma}{\Gamma_a}\right) \qquad \text{avec :} \quad \Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \tag{2.14}$$

où Γ est l'accélération adimensionnelle des vibrations et Γ_a une constante. Ce comportement est similaire à un processus d'activation en physique statistique au-delà d'un certain potentiel. L'accélération Γ permet d'exciter le système, brisant ainsi les contacts et permettant aux grains de se réorganiser et s'écouler.

Chapitre 3

La vidange de silos granulaires

3.1 Introduction et intérêts 39
3.2 Approche théorique et loi de Beverloo 40
3.2.1 L'étude de Jansen. 40
3.2.2 La loi de Beverloo. 41
3.3 Au delà de la Loi de Beverloo 42
3.3.1 Lois basées sur la dilatation à l'ouverture. 42
3.3.2 Impact de la cohésion et de la forme des particules 44
3.3.3 Formation d'arches et blocage de l'écoulement 46
3.4 Effet des vibrations sur la vidange 48
3.4.1 Déblocage de l'écoulement par vibrations. 48
3.4.2 Impact des vibrations sur l'écoulement et le débit 49
3.5 Conclusion et motivations 52

3.1 Introduction et intérêts

La vidange de matériaux granulaires à travers l'orifice d'une trémie (Fig. 3.1a) est un problème ancien. L'exemple le plus connu est le sablier (Fig. 3.1b), utilisé pour mesurer le passage du temps depuis le XIII^{ème} siècle. Cette utilisation est due à une propriété importante de ce type d'écoulement granulaire : le débit de la trémie est constant au cours du temps et dépend principalement de la taille de l'ouverture. De ce fait, la hauteur de grains à l'intérieur n'a quasiment pas d'impact sur le débit du sablier. Ce comportement est très différent de celui d'un fluide newtonien, comme l'eau dans une clepsydre (équivalent du sablier pour un fluide) dont le débit augmente avec la hauteur d'eau. Cet effet provient d'une saturation de la pression causée par les chaines de forces existant entre les grains, un phénomène que nous décrirons plus en détail dans la suite.

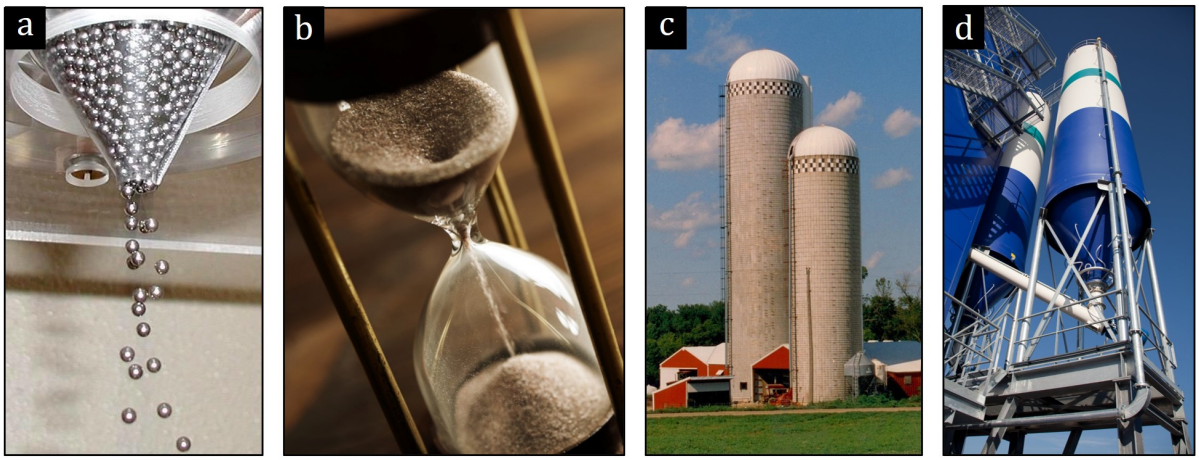


Figure 3.1 Exemples d'écoulements granulaires en trémie : (a) étude de la vidange de bille d'acier à travers une trémie, (b) mesure du temps avec un sablier, (c) silos à grains en agriculture et (d) silos pour le stockage de minerais.

De nos jours, on rencontrera très souvent ce type d'écoulement lors de la vidange de silo dans l'industrie (Fig. 3.1c et d). Les silos et trémies sont en effet très utilisés lors du stockage et transport de matériaux granulaires dans divers domaines, comme l'industrie agroalimentaire et l'industrie minière. Ces

procédés souffrent néanmoins de divers problèmes, les deux plus importants étant la difficulté de vidanger entièrement le silo et le risque d'effondrement. Le premier se traduit sous différents phénomènes comme un blocage dû à la formation d'arches en sortie du silo ou une canalisation de l'écoulement (voir Fig. 3.2). Ces problèmes viennent des propriétés d'écoulement du milieu granulaire, en particulier la transition de solide-liquide et les effets de cohésion en présence de fluide ou même simplement d'humidité. Une intervention manuelle est généralement nécessaire pour débloquer l'écoulement, entrainant des pertes de temps et d'argent. Le second problème vient d'une répartition particulière de la pression dans le silo créée par les chaines de forces entre grains, en particulier sur les parois latérales. Dans certains cas, les parois peuvent se briser, libérant le contenu du silo et pouvant engendrer une explosion de poudre extrêmement dangereuse. À ces deux problèmes, on peut rajouter aussi la nécessité dans certaines applications de bien contrôler le débit du silo et les propriétés du matériau en sortie (son homogénéité par exemple).

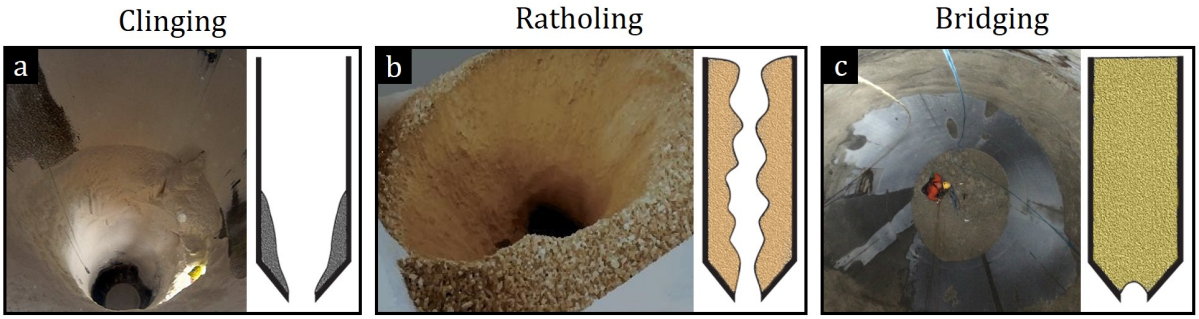


Figure 3.2 Exemples de problèmes lors de la vidange de silo : (a) adhérence ("clinging") de matériaux granulaires aux parois du silo, (b) canalisation ("ratholing") de l'écoulement seulement au milieu du silo et (c) création d'une arche ("bridging" ou "arching") bloquant le silo.

La compréhension du comportement de ces écoulements granulaires est donc essentielle pour prévoir et éviter ces problèmes tout en optimisant la vidange. L'utilisation de vibrations est une voie prometteuse pour mieux contrôler l'écoulement tout en évitant certains de ces problèmes. L'application de vibrations permet par exemple de caser les arches et de faire s'écouler les zones à l'arrêt. Malheureusement, la plupart des connaissances et développements réalisés sur la vidange de silo sont de nature empirique, et donc difficilement généralisables à tous les écoulements. De ce fait, il apparaît nécessaire de mieux comprendre la rhéologie de ces écoulements, et à termes d'établir les lois les régissant.

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord les premiers résultats théoriques et expérimentaux obtenus sur l'écoulement de milieux granulaires à travers un orifice, en particulier la loi de Beverloo. Nous évoquerons ensuite les limites de cette loi et des corrections plus récentes. Nous discuterons ensuite de la formation des arches lors de la vidange. Enfin, nous parlerons de l'impact des vibrations sur les arches et le débit du silo.

3.2 Approche théorique et loi de Beverloo

3.2.1 L'étude de Jansen

La première approche théorique détaillée du comportement de milieux granulaires dans un silo fut réalisée par l'ingénieur allemand H.A. Janssen en 1895 [43]. Il observe que lorsque l'on rempli un silo la pression va saturer passé une certaine masse. Dans le cas d'un silo cylindrique (voir Fig. 3.3a), il est possible d'établir un modèle simple, mais efficace, pour rendre compte de ce phénomène, en partant des hypothèses suivantes :

- La contrainte normale verticale σ_{zz} est uniforme dans la section du cylindre.
- Le milieu frotte pleinement sur les parois, donnant une contrainte tangentielle $\tau = \mu_w \sigma_{rr}$, avec μ_w le coefficient de friction paroi-grain et σ_{rr} la contrainte normale horizontale.
- La contrainte normale horizontale est proportionnelle à la contrainte normale verticale : $\sigma_{rr} = K\sigma_{zz}$, avec K une constante ($K = 1$ pour l'eau).

En partant de ces hypothèses et en étudiant l'équilibre des forces sur une couche de matériau d'épaisseur dz (voir Fig. 3.3a), on obtient l'expression de la contrainte normale verticale dans le silo en fonction de la profondeur z :

$$\sigma_{zz} = \rho g \lambda \left(1 - e^{-z/\lambda}\right) \qquad \text{avec :} \quad \lambda = \frac{D}{4\mu_w K} \tag{3.1}$$

où ρ est la masse volumique du milieu et g l'accélération de la pesanteur. Le paramètre λ est caractéristique du milieu et du silo. Pour $z \ll \lambda$, la pression augmente linéairement ($\sigma_{zz} \sim \rho g z$), comme pour un fluide newtonien en hydrostatique. En revanche pour $z \gg \lambda$, la pression sature vers un maximum $\sigma_{zz} = \rho g \lambda$ (Fig. 3.3b). Cette saturation est due au fait que le poids des grains n'est pas uniquement supporté par ceux se trouvant en dessous, et donc par le fond du silo. La majeure partie du poids est en effet supportée par les parois latérales, grâce à la friction et aux chaînes de forces entre les grains. De ce fait, lorsque l'on construit un silo à grains, il est nécessaire de renforcer les côtés et non uniquement le fond pour éviter qu'il ne se brise au milieu.

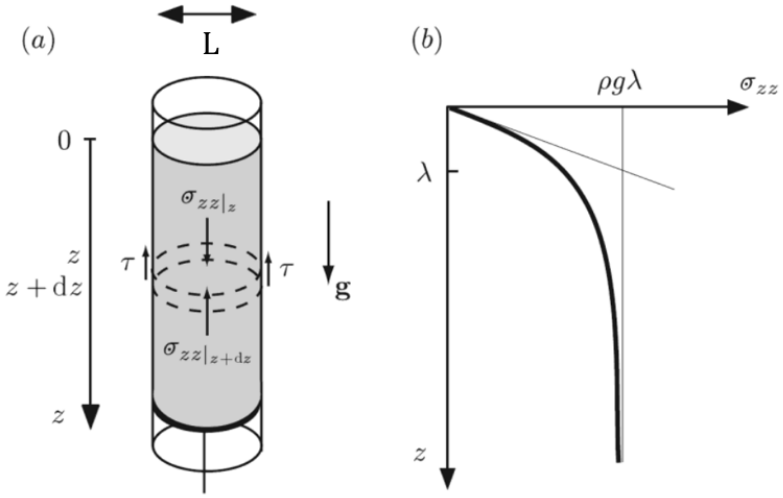


Figure 3.3 (a) Schéma des contraintes dans un silo granulaire sur une couche d'épaisseur dz et (b) évolution de la contrainte normale verticale σ_{zz} en fonction de la profondeur de grain z (figures extraites de [5]).

3.2.2 La loi de Beverloo

La saturation de la pression créée par l'effet Janssen donne une propriété très intéressante au silo granulaire : le débit lors de la vidange est constant qu'importe la hauteur de grains dans le silo. Cette propriété est justement utilisée dans les sabliers pour mesurer le temps, comme mentionné précédemment. Une étude fondatrice sur cette propriété a été menée par Beverloo et al. [44] en 1961. Ils ont étudié expérimentalement le débit de grains sphériques de diamètre d à travers un orifice au fond d'un silo cylindrique pour :

- Différents *diamètres d'ouverture* D dans le cas d'orifices circulaires (des mesures pour des orifices rectangulaires ont aussi été réalisées).
- Différents diamètres de silo L et hauteurs de remplissage.
- Différents matériaux granulaires de densité globale variée, donnée par : $\rho_b = \phi\rho$ où ρ_b est la densité du tas de grains, ou *densité bulk*, et ρ la densité des grains.

Ils ont démontré que le débit ne dépend pas de la hauteur de grains ni du diamètre du silo. À partir des observations et en utilisant l'analyse dimensionnelle, il est possible de déterminer que la vitesse de vidange est de l'ordre de $v \sim \sqrt{gD}$, et donc que le débit massique est de l'ordre de $Q \sim \rho\sqrt{gD}D^2$. Ils ont alors proposé une loi semi-empirique pour décrire le débit massique Q en fonction des différents paramètres, appelée *loi de Beverloo* :

$$Q = C\rho_b\sqrt{g}(D - kd)^{5/2} \tag{3.2}$$

où C et k sont des constantes. La constante C dépend des propriétés des grains et est dans la majeure partie des cas comprise dans l'intervalle $0.55 < C < 0.65$. La constante k permet de prendre en compte

un *diamètre d'ouverture réduit* dû à la taille finie des grains et est de l'ordre de 1 à 2.

Cette loi peut être généralisée [45, 46] pour prendre en compte des écoulements 2D sous la forme suivante :

$$Q = C\rho_b\sqrt{g}(D - kd)^{1+n/2} \tag{3.3}$$

où n correspond à la dimension de l'écoulement. Bien que relativement simple, cette expression fonctionne très bien et permet de rendre compte des résultats expérimentaux dans la majorité des cas. Elle possède néanmoins ses limites et ne permet pas de toujours suivre parfaitement les débits obtenus, en particulier dans les cas suivants :

- Diamètre d'ouverture proche de celui des grains, en particulier lorsqu'il y a création d'arches en sortie.
- Géométrie du silo différente du simple cylindre, en particulier lorsque l'on a un *angle d'ouverture* non nul comme sur les trémies et sabliers. L'angle d'ouverture, noté θ, correspond ici à l'inclinaison par rapport à l'horizontale de la paroi autour de l'ouverture (paroi basse du silo, $\theta = 0°$ sur la Fig. 3.3 et $\theta = 60°$ sur la Fig. 3.1a).
- Propriétés particulières des grains : anisotropie (grains non-sphériques), dispersion en taille ou encore présence de forces cohésives.
- Présence de sollicitations extérieures, comme par exemple l'ajout de vibrations.

De nombreuses études ont été réalisées ces dernières années pour comprendre l'influence de ces différents paramètres. Un autre point important est de relier ces résultats semi-empiriques à la rhéologie de l'écoulement pour véritablement comprendre ces phénomènes. Dans la section qui suit, nous allons détailler certains résultats importants obtenus sur le sujet.

3.3 Au delà de la Loi de Beverloo

Comme nous venons de le voir, le débit d'un silo en fonction des propriétés des grains et de la géométrie peut généralement être décrit par la loi de Beverloo. Cette loi possède néanmoins ses limites, en particulier pour le cas de faibles ouvertures et pour des particules plus complexes que de simples sphères. Nous allons ici présenter différentes corrections apportées à cette loi par des études récentes pour prendre certaines de ces limites en compte.

3.3.1 Lois basées sur la dilatation à l'ouverture

Un des principaux problèmes de la loi de Beverloo est qu'elle ne permet pas de prédire parfaitement le débit lorsque la taille de l'ouverture D tend vers la taille des grains d. Ceci vient principalement de l'hypothèse d'une ouverture réduite $D - kd$ (voir Fig. 3.4a), qui n'est plus forcément valable pour les faibles ouvertures, en particulier pour $D \lesssim 5d$. Pour corriger ce problème, différentes études [45, 46, 47] proposent de relier le débit à la *fraction volumique à l'ouverture* du silo, notée ϕ_0. En effet, lors de la vidange on observe un comportement similaire à une chute libre juste au-dessus de l'ouverture, ce qui engendre une baisse de fraction volumique par rapport à la *fraction bulk* ϕ_b (voir Fig. 3.4b). Cette baisse de fraction volumique est reliée à la géométrie du silo, en particulier le diamètre d'ouverture, et à la taille des grains.

À partir de résultats de simulations numériques, Mankoc et al. [45] ont alors proposé la correction suivante à la loi de Beverloo :

$$Q = C\rho_b\Delta\sqrt{g}(D/d - 1)^{1+n/2} \tag{3.4}$$

où Δ un terme correctif qui décrit baisse la fraction volumique dans la zone au-dessus de l'ouverture du silo (carré de taille D) :

$$\Delta = \frac{\phi_0}{\phi^*} = 1 - \frac{1}{2}e^{-b(D/d-1)} \tag{3.5}$$

où b est une constante. La fraction volumique en sortie ϕ_0 suit une décroissance exponentielle lorsque $D \to d$, d'une limite ϕ^* vers $\phi^*/2$ (voir Fig. 3.5b). La limite ϕ^* dépend de la taille de la zone au-dessus de l'ouverture où l'on mesure la fraction en sortie, et est donc potentiellement inférieure à ϕ_b. Pour les grandes ouvertures ($D \gg d$), le terme de correction $\Delta \to 1$ et on retrouve la loi de Beverloo. Cette

nouvelle loi permet donc de suivre le débit dans toute la gamme d'ouverture (Fig. 3.5a), tout en rendant compte de la dilatation de l'écoulement en sortie (Fig. 3.5b).

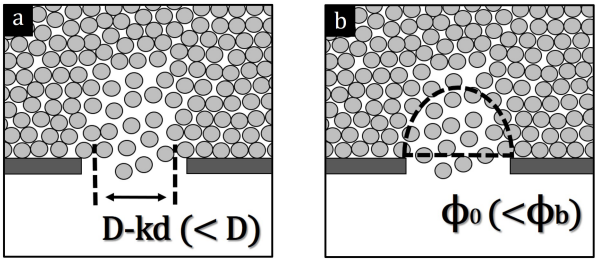


Figure 3.4 Schémas de principe (a) du diamètre d'ouverture réduit $D - kd$ dû à la taille des grains dans la loi de Beverloo (Eq. 3.2) et (b) de la dilatation de l'écoulement en sortie du silo donnant une fraction volumique ϕ_0 plus faible que la fraction bulk ϕ_b.

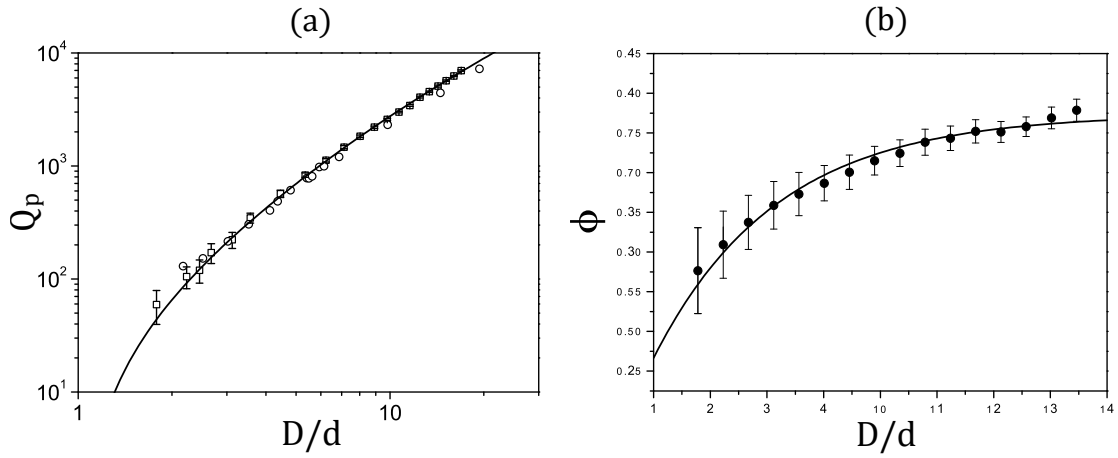


Figure 3.5 Simulations numériques de la vidange d'un silo 2D : (a) débit de particules Q_p et (b) fraction volumique mesurée dans un carré de taille D juste au-dessus de la sortie en fonction du diamètre d'ouverture adimensionnel D/d. Les résultats sont modélisés avec l'Eq. 3.4 et l'Eq. 3.5 respectivement, avec $C' = C\rho_b\sqrt{g} = 108$ et $b = 0.23$ (figures extraites de [45]).

La dilatation de l'écoulement en sortie et son lien avec le débit ont aussi été confirmés expérimentalement [46, 47], bien que la forme des lois empiriques proposées diffère légèrement selon les cas. Benyamine et al. [47] en particulier ont proposé une correction permettant de prendre en compte le cas d'un silo avec un angle d'ouverture $\theta \neq 0$ pour un silo rectangulaire *quasi-2D*. Le terme *quasi-2D* désigne un silo possédant une épaisseur W faible devant sa largeur L et sa hauteur H, et ne dépassant pas quelques tailles de grains (voir Fig. 3.6). Dans ce cas, ils ont utilisé la loi empirique suivante pour décrire l'évolution du débit :

$$Q = C\rho\phi_0\sqrt{g}WD^{3/2} \qquad \text{avec :} \quad \phi_0 = \phi_b G(D/d, \theta) \tag{3.6}$$

où $G(D/d, \theta)$ est la *fonction de dilatation* décrivant la diminution de fraction volumique dans le demi-cercle de rayon $D/2$ au-dessus de l'ouverture (voir Fig. 3.4b), donnée par :

$$G(D/d, \theta) = \frac{\phi_0}{\phi_b} = 1 - \alpha \exp\left(-\beta \frac{D}{d\cos\theta}\right) \tag{3.7}$$

où α et β sont des constantes. On retrouve une exponentielle de forme similaire à celle de la loi de Mankoc et al. [45], mais permettant de prendre l'angle d'ouverture en compte. Cette loi et la fonction de dilatation permettent de rendre compte des résultats expérimentaux, comme le montre la Fig. 3.7. D'après Benyamine et al. [47], cette loi peut même être généralisée dans le cas de milieux granulaires bi-dispersés. Dans ce cas, la fraction volumique à l'ouverture devient :

$$\phi_0 = \phi_{0,1} + \phi_{0,2} = \phi_b X_1 G(D/d_1, \theta) + \phi_b(1 - X_1)G(D/d_2, \theta) \tag{3.8}$$

où d_1 et d_2 sont les diamètres des grains de chaque taille, $\phi_{0,1}$ et $\phi_{0,2}$ les fractions volumiques à l'ouverture correspondantes et X_1 la fraction de grains de taille d_1.

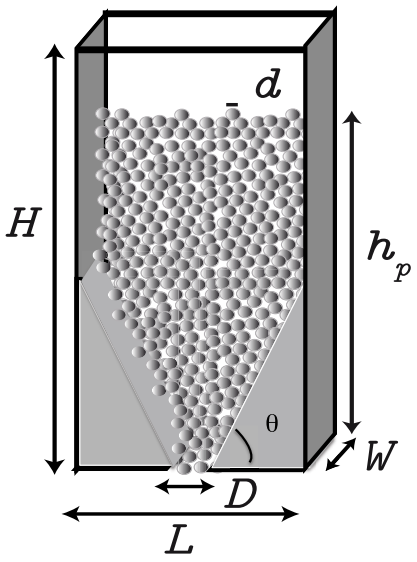


Figure 3.6 Schéma du dispositif expérimental utilisé par Benyamine et al. [47] : silo rectangulaire quasi-2D (épaisseur W de l'ordre de quelques tailles de grains d) dont on peut changer la taille de l'ouverture D et l'angle d'ouverture θ (figure extraite de [47]).

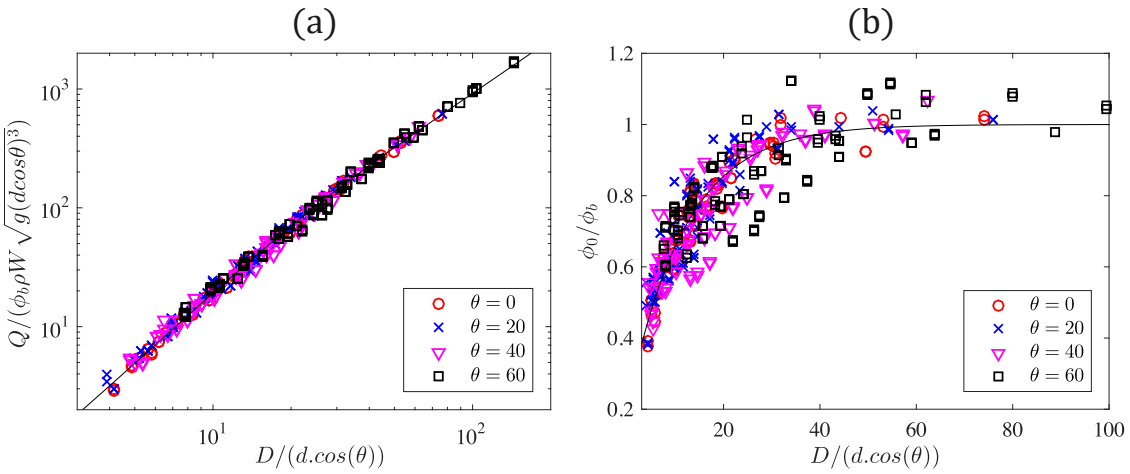


Figure 3.7 Mesures expérimentales lors d'une vidange de silo quasi-2D : (a) Débit adimensionnel et (b) fraction volumique relative ϕ_0/ϕ_b mesurée dans un demi-cercle juste au-dessus de la sortie en fonction du diamètre d'ouverture adimensionnel D/d pour différents angles d'ouverture θ. Les résultats sont modélisés avec l'Eq. 3.6 et l'Eq. 3.7 respectivement, avec $C = 0.92$, $\alpha = 0.80$ et $\beta = 0.085$ (figures extraites de [47]).

3.3.2 Impact de la cohésion et de la forme des particules

Les équations que nous venons de décrire fonctionnent très bien dans le cas d'un écoulement de grains modèles, c'est-à-dire des particules sphériques, lisses et ne présentant pas de forces cohésives entre elles. Dans la pratique, de nombreux milieux granulaires sont composés de grains anisotropes, de forme et taille variées au sein d'un même milieu, et soumis à des forces de cohésion. Différentes études [48, 49, 50, 51] se sont penchées sur l'impact de la forme des grains et de la cohésion sur l'écoulement.

Impact de la cohésion entre particules

Concernant la cohésion, les deux paramètres importants pour caractériser ses effets sont la teneur en liquide $X_l = volume\ liquide/volume\ grains$ (en %) et le nombre de Bond, noté Bo, donné par :

$$Bo = \frac{F_{cap}}{mg} = \frac{2\pi r \gamma_l}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g} = \frac{3\gamma_l}{2r^2 \rho g} \tag{3.9}$$

où m est la masse des grains, r le rayon des grains, γ_l la tension superficielle du liquide, g la gravité et ρ la masse volumique des grains. Ce nombre sans dimension compare les effets de la force capillaire F_{cap}, due à la formation de ponts capillaires entre les grains (voir chapitre 1, section 1.3.2), aux effets du poids des grains.

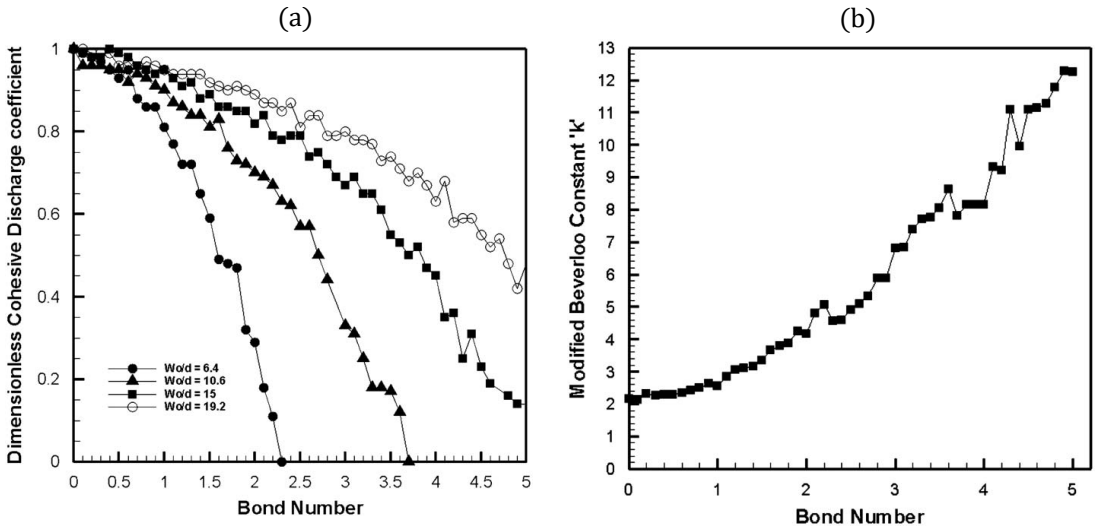


Figure 3.8 (a) Débit cohésif adimensionnel ($Q/Q_{sans\ cohesion}$) en fonction du nombre de Bond pour différentes largeurs d'ouverture W_0/d. (b) Correction de la constante k de la loi de Beverloo (Eq. 3.2) en fonction du nombre de Bond pour prendre en compte la cohésion entre les grains (figures extraites de [51]).

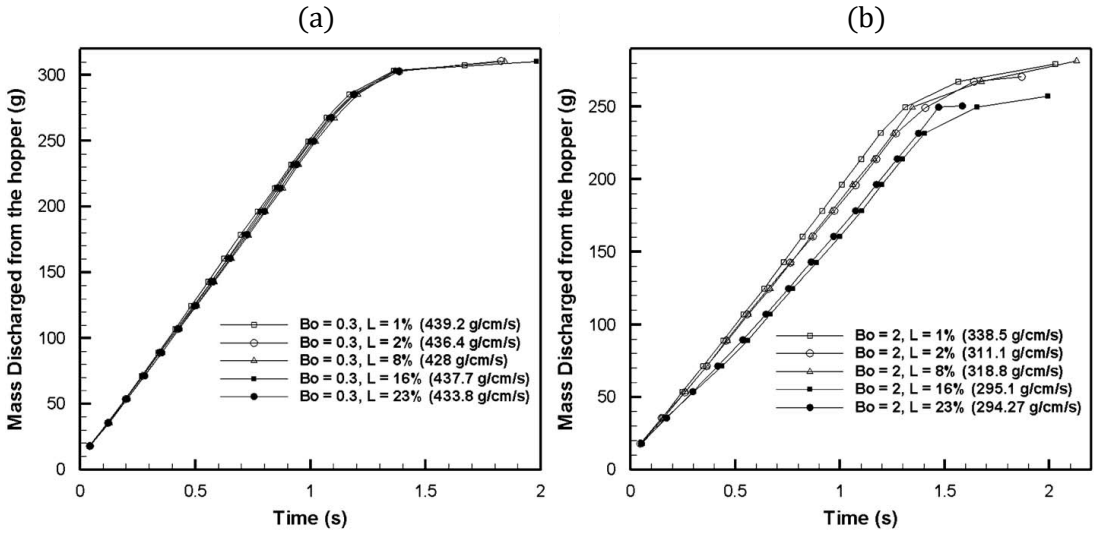


Figure 3.9 Masse vidangée au cours du temps pour différentes teneurs en liquide $L = 1 - 23\%$ et deux nombres de Bond (a) $Bo = 0.3$ et (b) $Bo = 2$. Les valeurs entre parenthèses correspondent au débit surfacique de chaque cas (figures extraites de [51]).

Anand et al. [51] ont étudié l'influence de ces deux paramètres sur le débit d'un silo rectangulaire en utilisant des simulations par éléments discrets (DEM). Les particules simulées sont des billes d'acier de diamètre $d = 2.35$ mm et le liquide est de l'eau (la teneur en liquide est notée L dans l'étude). Ils ont alors constaté les points suivants :

- À teneur en liquide constante : plus le nombre de Bond est grand, plus le débit diminue par rapport au cas sans cohésion (voir Fig. 3.8a). Cet effet vient d'une force capillaire plus élevée devant le poids des grains.
- Cette diminution du débit peut être prise en compte dans la loi de Beverloo (Eq. 3.2) en ajoutant une correction au diamètre réduit pour tenir compte de la cohésion en sortie. Cette correction est appliquée sur la constante k et vaut $k = 1.9e^{0.39Bo}$ dans l'étude d'Anand et al (voir Fig. 3.8b).

- À nombre de Bond constant : plus la teneur en liquide est grande, plus le débit diminue par rapport au cas sans cohésion (voir Fig. 3.9b). La teneur en liquide contrôle en effet la distance de rupture des ponts capillaires : une teneur élevée implique donc une force capillaire à plus longue portée.
- L'effet sur le débit de la teneur en liquide est plus faible que celui du nombre de Bond. Pour un faible nombre de Bond, la teneur en liquide n'a quasiment aucun effet sur le débit car la force capillaire est négligeable devant le poids des grains (voir Fig. 3.9a).

Si l'on excepte ces constatations, la vidange dans le cas cohésif reste similaire au cas sans cohésion du point de vue macroscopique (débit du silo). Il serait cependant intéressant de se pencher sur l'aspect local de l'écoulement (à l'échelle des grains) pour mieux comprendre comment la cohésion modifie la vidange.

Impact de la forme des particules

Concernant la forme des grains, les deux paramètres importants sont leur rapport de forme et leur facteur de sphéricité. Le premier est généralement défini comme le rapport entre le côté le plus long et le côté le plus court d'un objet. Pour un cylindre par exemple, ce facteur est le ratio entre sa hauteur et son diamètre. Le second indique si la forme de l'objet se rapproche d'une sphère ou non. Hohner et al. [49] en particulier ont étudié séparément l'effet de ces paramètres sur le débit et les motifs d'écoulement en utilisant des simulations numériques par DEM et des expériences. Bien qu'il n'existe pas de loi générale pour l'écoulement de grains non sphériques, plusieurs résultats qualitatifs ont néanmoins été établis. Dans le cadre de cette thèse, on se concentrera sur le cas de sphères modèles, nous allons donc simplement résumer rapidement ces résultats :

- Diminuer le facteur de sphéricité engendre une baisse du débit ($\sim 30\%$) et augmente les dépôts à la fin de la vidange. Cela provient du fait que la contrainte seuil nécessaire pour mettre en mouvement des grains cubiques est bien plus élevée que dans le cas de sphère. Le frottement entre particules est en effet bien plus grand et le réseau de chaînes de forces plus difficile à briser. Ceci est d'autant plus vrai du fait de la capacité à rouler des sphères qui facilite l'écoulement. En revanche, la sphéricité n'affecte pas la forme générale de l'écoulement.
- Augmenter le rapport de forme diminue fortement le débit ($\sim 65\%$) et change les motifs d'écoulement. L'écoulement montre une canalisation bien plus importante pour des grains cylindriques que pour le cas de sphères. Ceci vient de l'augmentation de la contrainte seuil ainsi que de l'anisotropie des grains, qui possèdent des directions d'écoulements privilégiées. Les dépôts en revanche ne sont pas affectés par le rapport d'aspect.
- Les blocages de l'écoulement dus à la formation d'une arche au niveau de la sortie augmentent pour des grains avec un facteur de sphéricité faible et un grand rapport de forme. L'irrégularité des grains est en effet une cause majeure de la formation d'arches, du fait d'une contrainte seuil plus élevée et d'un réseau de contacts plus difficile à briser.

Ce dernier point est une lacune majeure des lois empiriques présentées précédemment, qui ne prédisent en aucun cas la formation d'arches. Or, comme nous le verrons dans la section suivante, la formation d'une arche est théoriquement toujours possible même pour des sphères parfaites et des grandes ouvertures. Enfin, il est important de remarquer que ces résultats sont de nature empirique ou semi-empirique. Comme mentionné dans le chapitre précédent, il n'existe pas encore d'équations constitutives permettant de décrire ces écoulements et d'expliquer ces lois empiriques de manière fondamentale.

3.3.3 Formation d'arches et blocage de l'écoulement

La formation d'arches dans l'écoulement est un phénomène typique des milieux granulaires, créant des chaines de forces entre les grains parfois à très longue portée (voir Fig. 3.10). Elles sont composées par un ensemble de grains stabilisés et se forment naturellement lors de l'écoulement. Leur stabilité dépend des contacts entre les grains qui la composent, certaines pouvant supporter des contraintes extrêmement importantes, de façon similaire aux arches et voutes des églises. Les forces de contact et friction simples suffisent pour créer et maintenir ces arches, aucune force de cohésion n'est donc nécessaire bien qu'elles favorisent et consolident ce phénomène. Une fois l'arche formée, il est nécessaire de briser un des contacts pour la détruire en permettant à un des grains la composant de bouger. Dans le cas d'un silo, cela engendre un régime de vidange intermittent, voir bloque complètement l'écoulement si l'arche est

suffisamment stable. Il est alors nécessaire d'appliquer une excitation extérieure (comme des vibrations par exemple) pour détruire l'arche, un problème récurrent en industrie et obligeant une intervention manuelle.

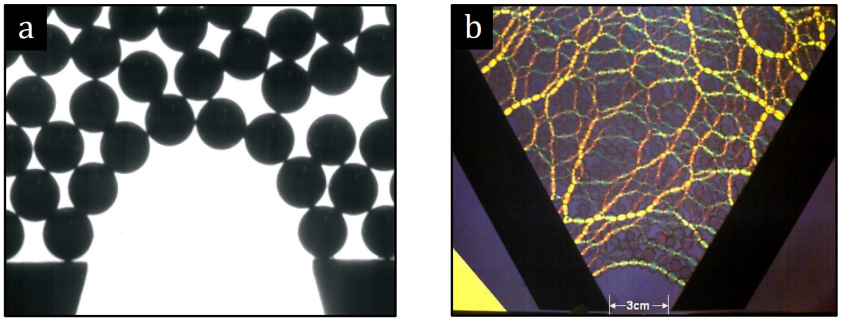


Figure 3.10 Exemples d'arches en sortie dans deux silos quasi-2D formées par (a) des billes sphériques (image extraite de [53]) et (b) des disques photoélastique permettant de visualiser les chaines de forces entre les grains.

La dynamique de ces arches et le blocage de l'écoulement résultant font l'objet de nombreuses recherches [53, 54, 55]. Ce phénomène n'est pas équivalent à la transition solide-liquide dont nous avons discutée dans le chapitre 2, bien que les deux soient liés. Outre l'application directe dans les silos, on rencontre aussi ces blocages dans des situations plus communes, comme les bouchons sur les autoroutes lors d'une diminution du nombre de voies. Des études menées par Garcimartin, Pastor et al. [56, 57] en particulier ont montré que l'on observe exactement les mêmes comportements lors d'évacuations ou en faisant passer du bétail à travers un portail de taille réduite.

Ces différentes études ont montré qu'il existe toujours une probabilité qu'une arche se forme et bloque l'écoulement. Cette probabilité dépend principalement des facteurs suivants :

- La diamètre de l'ouverture : plus celui-ci est faible, plus les chances qu'une arche se forme sont grandes. Ceci est particulièrement le cas pour une ouverture $D \lesssim 5d$, les arches se formant quasiment instantanément (voir Fig. 3.11).
- La géométrie de la sortie : un angle d'ouverture important aura tendance à faciliter la formation d'arche. Inversement, placer un obstacle avant la sortie pour diviser l'écoulement permet de réduire les chances de blocage, un phénomène surprenant mais très utilisé dans le design des silos industriels.
- Les propriétés des grains : plus la friction est importante, plus les arches seront stables (voir Fig. 3.11a). De même, la présence de forces cohésives entre les grains favorisera la formation et la stabilité des arches.
- La pression sur les grains en sortie : plus cette pression est grande, plus les blocages sont réguliers. Pour des milieux granulaires, la pression vient principalement de la hauteur de grains bien que celle-ci sature rapidement (voir Fig. 3.11b). Dans le cas d'un bouchon sur une autoroute ou lors d'une évacuation, on parlera plutôt de *compétitivité*. Ralentir l'afflux de personnes permet dans ce cas d'éviter les blocages ("faster-is-slower" [57]), un principe mis en pratique sur les autoroutes en limitant la vitesse au point de constriction du trafic.
- Le temps, ou plus exactement le nombre de particules écoulées. En effet, un écoulement infini finira théoriquement toujours par se bloquer (voir Fig. 3.11b).

En jouant sur ces différents paramètres, il est possible de diminuer la probabilité de formations d'une arche mais celle-ci existe toujours. La solution la plus utilisée est donc d'appliquer une excitation, sous la forme de vibrations, pour constamment détruire ces arches. Dans la section suivante, nous allons nous intéresser à l'effet de ces vibrations sur les arches mais aussi sur l'écoulement.

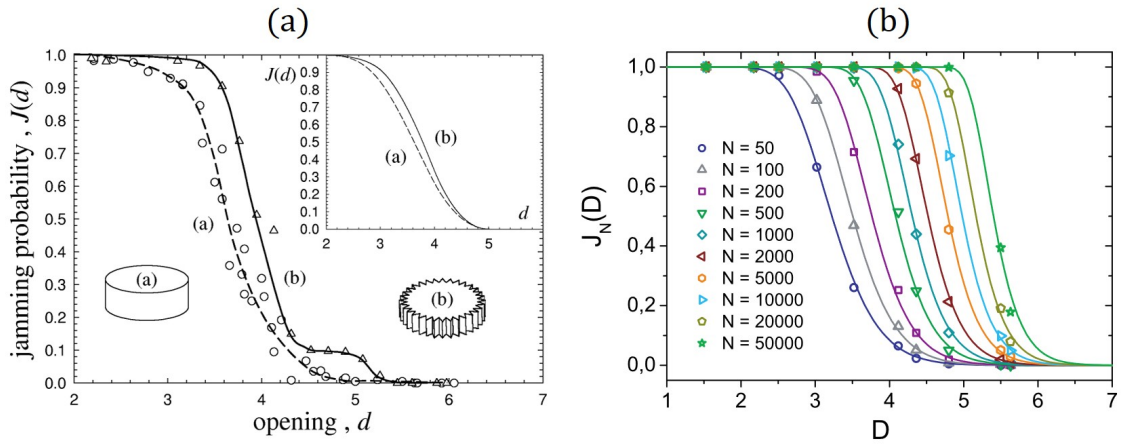


Figure 3.11 Probabilité de formation d'arche J en fonction du diamètre d'ouverture pour (a) des grains cylindriques lisses et rugueux (figure extraite de [54]) et pour (b) différents nombres de grains vidés N lors de l'écoulement (figure extraite de [53]).

3.4 Effet des vibrations sur la vidange

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 (section section 2.3), les vibrations permettent de mettre en écoulement les milieux granulaires en réduisant, voire éliminant, la contrainte seuil grâce aux réorganisations des contacts entre les grains. Elles sont très utiles pour homogénéiser et contrôler les écoulements, d'où leur application lors des problèmes de vidange de silo. Dans ce cas, elles permettent non seulement d'éviter les blocages de l'écoulement mais aussi de mieux contrôler le débit.

3.4.1 Déblocage de l'écoulement par vibrations

De nombreuses études ont été réalisées pour mieux comprendre le déblocage d'un silo par vibrations [58, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. De manière similaire au cas d'un écoulement sur plan incliné, on retrouve alors deux régimes. Le premier concerne le cas où l'écoulement se fait très bien sans vibration, principalement pour des ouvertures $D > 5d$ pour des grains sphériques et non cohésifs. Les vibrations peuvent influer sur l'écoulement mais ne sont pas le mécanisme essentiel le créant. À l'inverse, le second régime correspond au cas où les blocages sont fréquents, dû à la formation d'arches. Les vibrations permettent de déstabiliser ces arches en brisant les contacts entre les grains. Ce régime est alors intermittent, la vidange ayant lieu entre les arches qui se forment naturellement avant d'être détruites par les vibrations. Contrairement au cas du plan incliné, cette intermittence rend difficile l'obtention d'une limite claire entre les deux régimes. On peut néanmoins l'approcher en utilisant la *fraction temporelle d'écoulement* ϕ_t [59, 60], donnée par :

$$\phi_t = \frac{\langle t_e \rangle}{\langle t_e \rangle + \langle t_b \rangle} \tag{3.10}$$

où $\langle t_e \rangle$ est le temps moyen d'écoulement et $\langle t_b \rangle$ le temps moyen de blocage (durée de vie moyenne d'une arche). Un écoulement toujours bloqué correspondra au cas $\phi_t = 0$, alors qu'un écoulement sans aucun blocage correspondra à $\phi_t = 1$ (voir Fig. 3.12a). L'étude menée par Zuriguel et al. [60] a permis de mettre en évidence la limite entre ces deux régimes, comme montré sur la Fig. 3.12b. Cette limite dépend du diamètre d'ouverture ainsi que de l'accélération adimensionnelle des vibrations, comme de nombreux phénomènes pour les milieux granulaires vibrés. Comme on peut s'y attendre, augmenter l'intensité des vibrations permet de débloquer l'écoulement, et on retrouve un diagramme similaire à la limite d'écoulement pour le plan incliné (section 2.3, Fig. 2.10a).

Il est important de noter que la plupart de ces études sont faites dans le cas de silo vibré entièrement, généralement dans la direction verticale et avec des vibrations sinusoïdales. Cela permet de simplifier la description du problème bien que ceci soit difficile à appliquer dans la pratique. Dans l'industrie, on utilisera plutôt des vibreurs localisés près de l'ouverture pour débloquer l'écoulement (voir Fig. 3.13a). L'étude de Fraige et al. [64] montre en effet qu'il est possible de caser ces arches, et ce même pour des

particules complexes, avec des vibrations localisées (voir Fig. 3.13b). La position de ces vibreurs doit néanmoins être choisie avec soin pour maximiser leur effet (2 à 3 tailles de grain de l'ouverture dans l'étude).

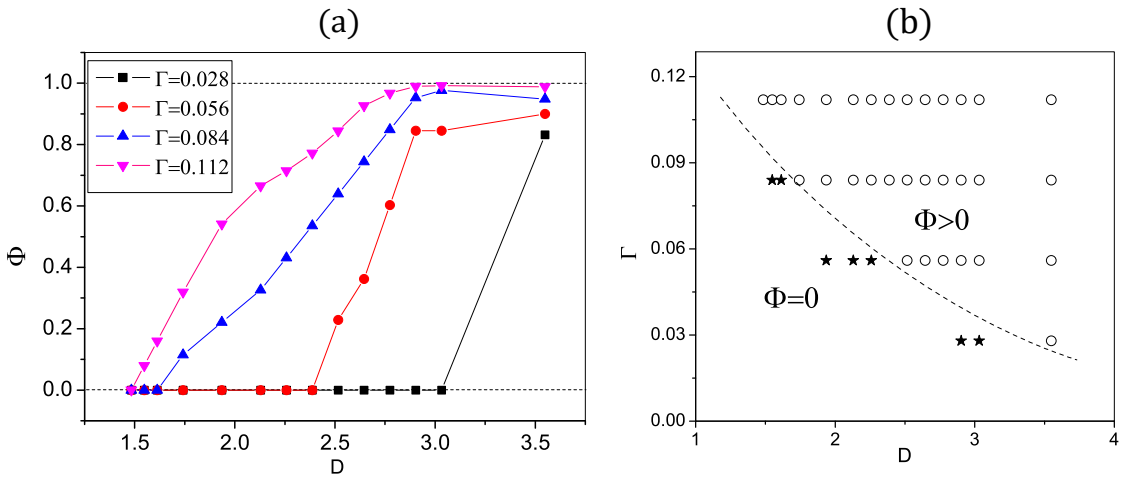


Figure 3.12 (a) Fraction temporelle d'écoulement ϕ_t en fonction de l'ouverture D pour plusieurs accélérations adimensionnelles des vibrations Γ et (b) Limite d'écoulement (ligne pointillée) en fonction de l'ouverture et de l'accélération adimensionnelle (figures extraites de [60]).

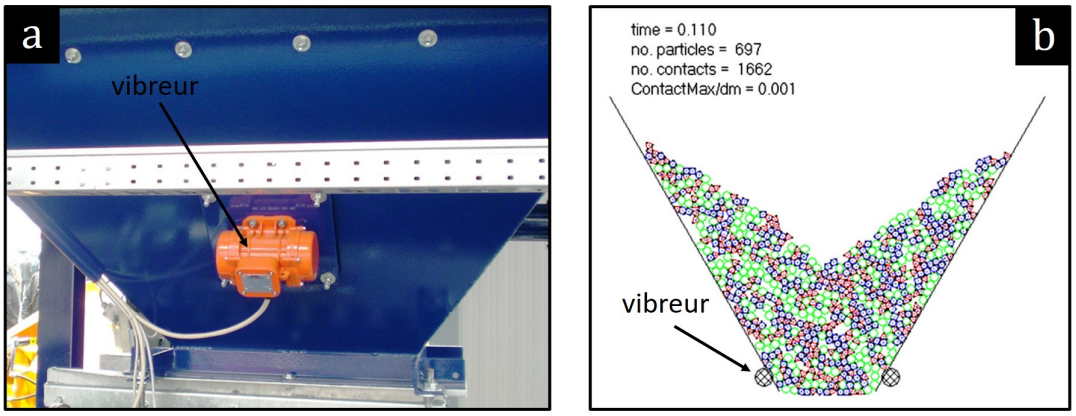


Figure 3.13 (a) Vibreur permettant d'appliquer des vibrations localisées près de l'ouverture d'un silo industriel et (b) simulation numérique de l'écoulement de particules (colorées par forme) dans un silo soumis à des vibrations localisées (figures extraites de [64]).

3.4.2 Impact des vibrations sur l'écoulement et le débit

Le déblocage de l'écoulement n'est pas le seul impact des vibrations sur la vidange. Elles permettent aussi de contrôler le débit, un effet étudié pour des vibrations verticales [65] (parallèlement à la gravité) et horizontales [65] (perpendiculairement à la gravité) dans le cas d'un silo avec un angle d'ouverture $\theta = 45°$. L'utilisation de vibrations horizontales permet d'augmenter le débit, tandis que les vibrations verticales tendent à le réduire par rapport à sa valeur sans vibration. En normalisant le débit Q par cette valeur sans vibration Q_0, on peut montrer que ces effets s'accroissent lorsque l'on augmente l'amplitude des vibrations et que l'on diminue la fréquence (voir Fig. 3.14).

D'après les études de Hunt et al. [65] et Wassgren et al. [66], ces effets des vibrations sont entièrement contrôlés par le *nombre de Froude des vibrations*, donné par :

$$Fr = \frac{A\omega}{\sqrt{gD_h}} \qquad \text{avec :} \quad D_h = \sqrt{DW} \tag{3.11}$$

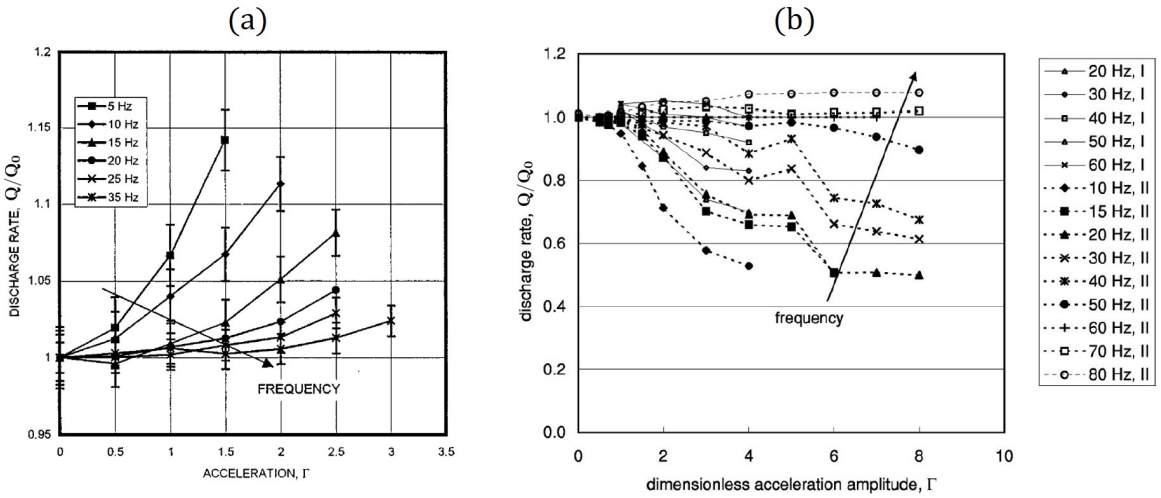


Figure 3.14 Débit relatif du silo Q/Q_0 en fonction de l'accélération adimensionnelle des vibrations Γ pour différentes fréquences, dans le cas de vibrations (a) horizontales et (b) verticales (figures extraites respectivement de [65] et [66]).

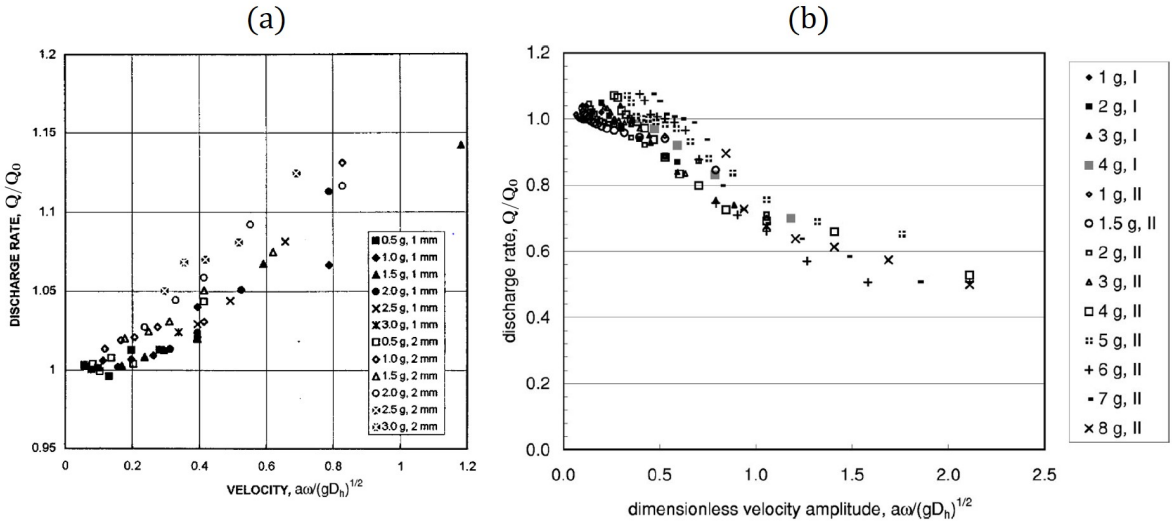


Figure 3.15 Débit normalisé du silo Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude des vibrations pour différentes accélérations, dans le cas de vibrations (a) horizontales et (b) verticales (figures extraites respectivement de [65] et [66]).

où $A\omega$ est la vitesse des vibrations et D_h le diamètre d'ouverture hydraulique du silo, représentant la longueur caractéristique de l'écoulement. En utilisant cette grandeur comme paramètre, il est possible de rassembler tous les résultats sur une courbe maitresse dans chacun des cas (voir Fig. 3.15).

Physiquement, l'augmentation de débit pour les vibrations horizontales est créée par une dilatation de l'écoulement au niveau des parois. Lorsque les parois se déplacent sous l'effet des vibrations, les grains contre ces parois se retrouvent en chute libre. Plus la fréquence est faible, plus les grains ont le temps de "tomber" avant que la paroi ne revienne. Ce mouvement permet aux grains de chaque côté du silo de s'écouler alternativement pendant les cycles de vibrations. L'écoulement ne se fait donc plus dans un canal au centre mais le long des parois du silo. On peut voir l'effet de ce comportement au niveau de la surface libre de l'écoulement, dont la forme s'inverse par rapport au cas sans vibration (voir Fig. 3.16). Cela explique la dépendance avec la vitesse des vibrations, puisque celle-ci définie le temps pendant lequel les grains peuvent chuter.

Dans le cas des vibrations verticales, la forme de l'écoulement reste proche du cas sans vibrations. On voit néanmoins des cellules de convection apparaître de chaque côté du silo et un élargissement général du canal d'écoulement. Les auteurs [66] avancent que la diminution du débit est due à l'opposition entre

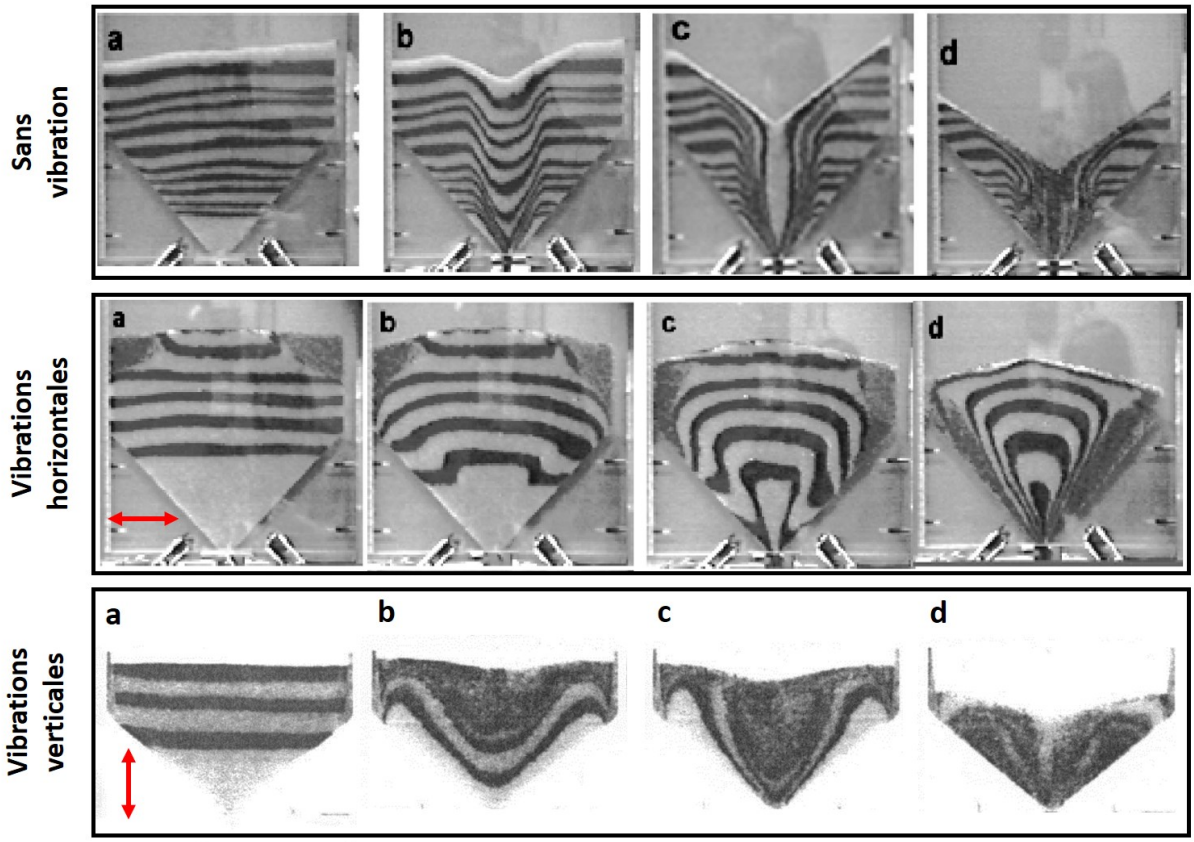


Figure 3.16 Motifs d'écoulement lors de la vidange au cours du temps dans les cas sans vibration, avec vibrations horizontales et avec vibrations verticales (figures extraites de [65, 66]).

le mouvement vers le bas des particules et le mouvement vers le haut du silo lors de chaque cycle de vibrations. Cette opposition crée de la friction entre les grains et la paroi, et donc une diminution de la vitesse en sortie, d'où la baisse de débit. Le nombre de Froude permet donc de caractériser le rapport entre le mouvement des parois dû aux vibrations et le mouvement des grains dû à la gravité.

Les résultats de ces études sont extrêmement intéressants puisqu'ils montrent que les vibrations permettent de changer complètement l'écoulement et de contrôler le débit. Ils sont néanmoins limités à un cas particulier : un écoulement de grains sphériques non cohésifs dans une seule configuration géométrique. Il apparaît donc important d'étendre ceux-ci à d'autres géométries et pour des milieux granulaires plus complexes. De plus, il manque aussi un réel lien entre ces résultats macroscopiques et une analyse précise de la rhéologie de l'écoulement.

3.5 Conclusion et motivations

Malgré les nombreux résultats présentés dans cette partie, comprendre le comportement des milieux granulaires reste un problème majeur en physique. C'est en particulier le cas pour de nombreux écoulements granulaires dans lesquels on rencontre les trois états de la matière dans un seul milieu. Bien qu'il existe de nombreuses lois empiriques, nous n'avons toujours pas de loi de comportement globale permettant de décrire et comprendre tous ces écoulements. Cette compréhension est néanmoins essentielle pour mieux appréhender de nombreux phénomènes naturels et optimiser des procédés industriels.

Dans cette thèse, nous nous pencherons plus particulièrement sur le cas des écoulements granulaires en trémie et silo en présence de vibrations. Rencontrée dans de nombreux domaines de l'industrie, la vidange de silo est loin d'être entièrement comprise comme nous venons de le voir dans ce chapitre. Différents problèmes persistent, comme le blocage du silo, et demandent des efforts d'optimisation. C'est d'autant plus le cas lorsque l'on applique des vibrations, généralement pour éviter ces blocages. Les études sur ce sujet sont nombreuses mais ne répondent pas à toutes les questions. Comment s'écoule le matériau à l'intérieur ? Comment les blocages se forment-ils ? Quel est l'impact des propriétés du matériau et des conditions extérieures comme l'humidité sur la rhéologie ? Comment les vibrations influent sur l'écoulement et peut on les utiliser pour mieux le contrôler ? Quel est le lien entre les phénomènes macroscopiques, comme le débit, et l'écoulement à l'échelle des grains ? Les études que nous avons présentées nous ont déjà donné des bases pour répondre à ces questions. Ces résultats étaient néanmoins majoritairement de nature empirique et cantonnés à l'effet d'un ou deux paramètres. Si l'on veut véritablement répondre à ces questions, il est nécessaire de comprendre les raisons fondamentales derrière ces effets et comment ils sont liés entre eux dans une situation réelle. C'est cette compréhension qui servira ensuite de base pour mieux appréhender ces écoulements et optimiser les procédés qui en découlent.

Mon travail de thèse a donc consisté à étudier le comportement de milieux granulaires dans un silo vibré et déterminer l'influence de la géométrie du silo, des propriétés des grains et des paramètres des vibrations. À partir des résultats d'expériences et de simulations numériques, un modèle rhéologique a été proposé pour rendre compte de l'écoulement et lier les échelles macroscopique et microscopique.
Dans la suite, nous présenterons tout d'abord les résultats obtenus à partir d'un dispositif expérimental de vidange, du point de vue macroscopique (débit) et microscopique (rhéologie locale). Nous verrons en particulier l'effet des vibrations et de la cohésion. Ensuite, nous confronterons ces résultats à ceux de simulations numériques par éléments discrets (DEM) et étendrons les limites de l'étude pour proposer un modèle rhéologique de cet écoulement.

Deuxième partie

Étude expérimentale de la vidange d'un silo vibré

Chapitre 4

Dispositif expérimental

4.1 Montage expérimental . . . 55
4.1.1 Éléments du dispositif . . . 55
4.1.2 Dispositif complémentaire . . . 58
4.2 Méthodes de mesure et de suivi . . . 59
4.2.1 Mesure du débit . . . 59
4.2.2 Suivi des particules . . . 60
4.2.3 Suivi du mouvement du silo . . . 62
4.3 Réalisation des expériences . . . 66
4.3.1 Préparation des particules et du silo . . . 66
4.3.2 Étapes des expériences . . . 66

Comme mentionné dans la première partie, le but de la thèse est d'étudier les écoulements de matériaux granulaires dans un silo en présence de vibrations. Nous allons décrire dans ce chapitre le dispositif expérimental conçu pour cette étude ainsi que les méthodes utilisées pour suivre et analyser l'écoulement des points de vue macroscopique et microscopique.

4.1 Montage expérimental

Le dispositif expérimental utilisé est un silo quasi-2D transparent soumis à des vibrations mécaniques et dont on peut régler l'ouverture (angle et diamètre). Divers matériaux granulaires peuvent être insérés dans le silo pour étudier leur vidange. Notre configuration rassemble divers aspects de dispositifs utilisés dans d'autres études sur la vidange de silo : une fine épaisseur pour avoir un écoulement 2D et des parois transparentes permettant de voir les grains comme pour celui de Janda et al. [46, 53], une ouverture à angle et taille variable comme pour Benyamine et al. [47] et l'application de vibrations mécaniques verticales comme pour celui de Wassgren et al. [66]. Cette configuration permet ainsi d'étudier l'impact de l'ouverture et des vibrations sur la vidange tout en suivant le mouvement des particules dans le silo en filmant l'écoulement. Le schéma de principe du montage est présenté sur la Fig. 4.1, tandis que des photos du dispositif sont présentées sur la Fig. 4.2 et la Fig. 4.3.

4.1.1 Éléments du dispositif

► **Le silo :** le silo est rectangulaire, de hauteur $H = 500$ mm et largeur $L = 100$ mm. Il est qualifié de *quasi-2D* car son épaisseur est très faible devant les autres dimensions et de l'ordre de la taille des grains : $W = 1.5$ mm. Dans la majeure partie des expériences, cette épaisseur correspond à $1.3d$, avec d le diamètre des particules en écoulement. On a alors dans ce cas une seule couche de particules en écoulement dans le silo (voir le gros plan sur la Fig. 4.1). Les parois avant et arrière du silo sont faites en PMMA (ou plexiglas) antistatique : une fine couche conductrice recouvre le plexiglas pour éviter l'accumulation d'électricité statique lors de la vidange. Les parois basses du silo sont mobiles, permettant ainsi de changer l'angle θ et le diamètre D de l'ouverture librement. Chacune des parois est montée sur un pied à coulisse numérique et un rapporteur pour mesurer et contrôler leur inclinaison et leur déplacement (voir Fig. 4.3). Le diamètre d'ouverture D peut être ainsi varié entre 0 et 100 mm, tandis que l'angle θ varie entre 0 et 60°.

► **Le système de vibration :** le silo est porté par deux tiges reposant sur un pot vibrant (LDS V406), permettant de vibrer verticalement le silo. Des lamelles souples relient le silo au support Norcan pour guider le mouvement et éviter des déviations dans les autres directions. Le signal générant les vibrations est créé par un contrôleur LDS, paramétrable sur ordinateur par un logiciel dédié et relié à un amplificateur pour alimenter le pot vibrant (non visible sur les photos). Un accéléromètre (voir Fig. 4.3)

permet de mesurer l'accélération subite par le silo. Cette information est transmise au logiciel contrôlant le pot vibrant, créant ainsi une boucle de rétroaction (voir Fig. 4.4) qui permet de connaitre et contrôler l'accélération imposée au silo à tout moment. Du fait du poids du silo ($\sim$ 5 kg), l'accélération imposée ne peut pas dépasser 33 m/s (soit $\Gamma = 3.36$). Les vibrations imposées sont continues et sinusoïdales, de fréquence f et d'amplitude A.

▶ **Les particules et la balance :** un entonnoir permet de remplir plus facilement le silo de grains, jusque environ 90% de sa hauteur. Ces particules sont dans la plupart des expériences des billes de verre sphériques et transparentes, de diamètre $d = 1 - 1.25$ mm. La faible dispersion en diamètre permet d'éviter des phénomènes de cristallisation dans le silo (création d'empilements ordonnés). Lors de la vidange, ces particules sont récupérées dans un récipient posé sur une balance (Sartorius Entris 3200G). Cette balance permet de mesurer la masse écoulée au cours du temps pour en déduire le débit, permettant un suivi macroscopique de l'écoulement.

▶ **La visualisation :** une caméra rapide permet de filmer l'écoulement lors de la vidange. Les grains sont alors éclairés par une plaque LED inclinée derrière le silo. L'inclinaison de la plaque permet de filmer uniquement la lumière transmise par les particules, sans filmer la source lumineuse. Les images obtenues peuvent être ensuite analysées pour étudier l'écoulement du point de vue microscopique. En outre, la caméra est aussi utilisée pour vérifier le diamètre d'ouverture imposé D.

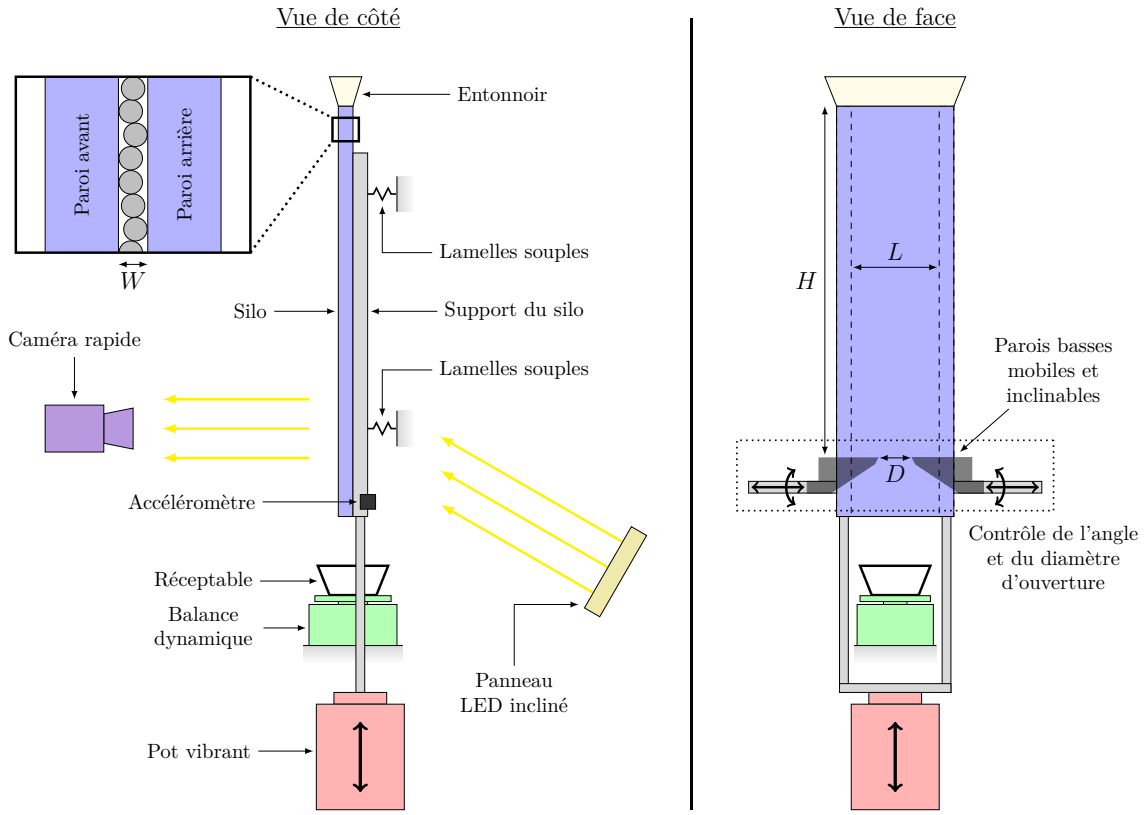
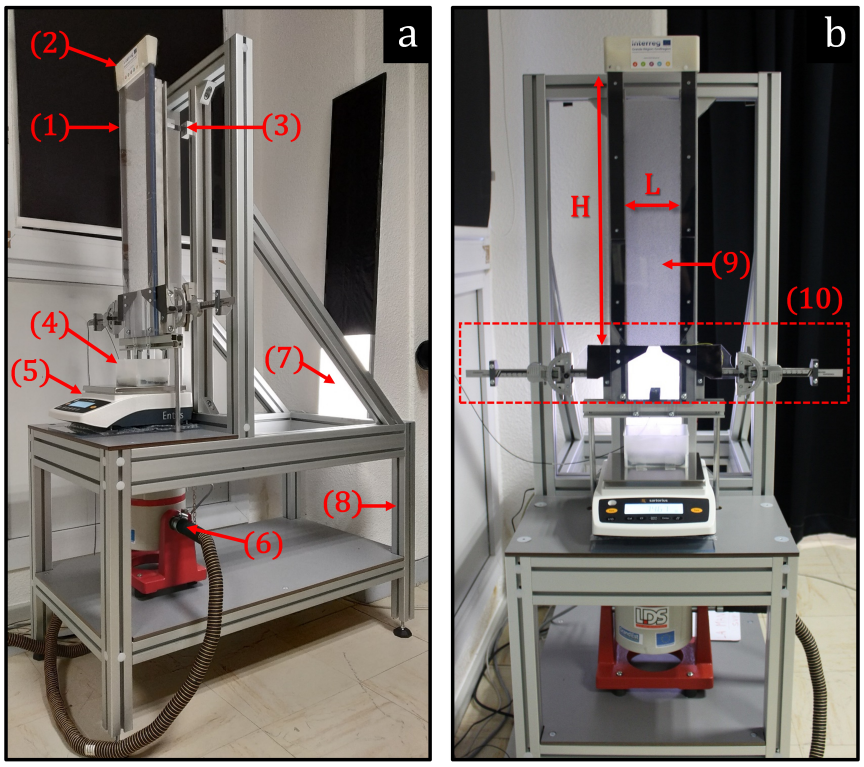


Figure 4.1 Schéma de principe du dispositif expérimental : (à gauche) vue de côté du dispositif avec ses différents éléments et (à droite) vue de face du silo monté sur le pot vibrant. La balance permet de récupérer les grains et mesurer le débit, tandis que la caméra filme le mouvement des grains éclairés par la plaque LED. À noter que le support Norcan permettant de maintenir les différents éléments n'est pas représenté sur ce schéma.



Éléments du dispositif:

(1) Silo transparent en PMMA antistatique
(2) Entonnoir de remplissage
(3) Lamelles souples de guidage
(4) Réceptacle pour les particules
(5) Balance dynamique (mesure du débit)
(6) Pot vibrant (vibrations verticales)
(7) Panneau LED incliné
(8) Support Norcan
(9) Particules (billes verre 1-1,25 mm)
(10) Contrôle du diamètre (D) et de l'angle (θ) d'ouverture

Figure 4.2 Dispositif expérimental (a) vue de profil et (b) vue de face. Les différents éléments du dispositif sont décrits à droite. Différentes géométries peuvent être adoptées en changeant l'ouverture (10) et l'on peut modifier les vibrations appliquées par le pot vibrant (6). Lors de la vidange, la balance (5) permet de récupérer les grains et mesurer le débit du silo tandis qu'une caméra (non-visible sur les photos) permet de filmer l'écoulement illuminé par la plaque LED (7).

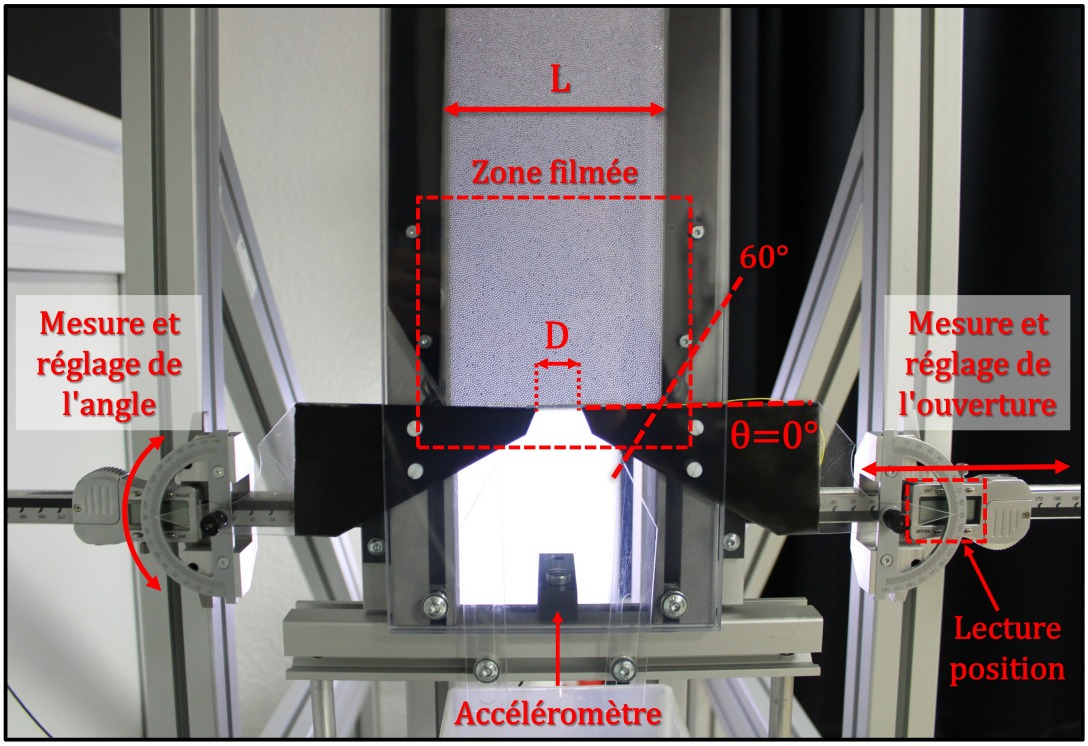


Figure 4.3 Dispositif expérimental : gros plan du système de contrôle de l'angle θ et du diamètre D de l'ouverture. L'angle d'ouverture vaut dans ce cas $\theta = 0°$, mais celui-ci peut être modifié continument jusqu'à un maximum de 60° (indiqué sur l'image). La zone filmée par la caméra lors de l'écoulement est centrée au niveau de l'ouverture.

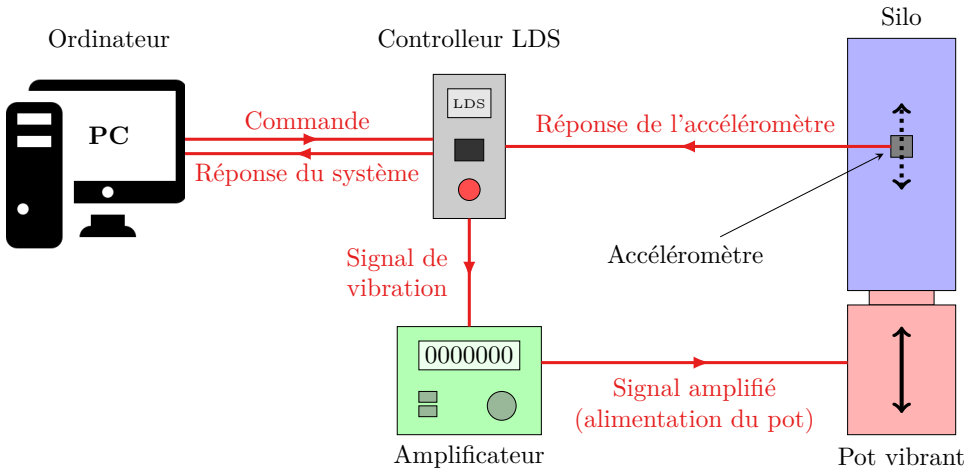


Figure 4.4 Schéma de principe de la boucle de rétroaction contrôlant les vibrations : on impose un type de vibrations sur l'ordinateur (forme, fréquence, amplitude...) et le contrôleur LDS crée un signal de vibration qui est amplifié pour alimenter le pot. L'accélération des vibrations engendrée par le pot est mesurée par l'accéléromètre et transmise au contrôleur LDS qui modifie le signal en conséquence pour respecter la consigne imposée.

4.1.2 Dispositif complémentaire

Durant le déroulé de la thèse, nous avons mis en évidence par simulation un régime d'écoulement particulier atteint en présence de fortes vibrations. Malheureusement, les gammes d'accélération où ce régime apparaît ne sont pas accessibles avec le dispositif expérimental que nous venons de présenter (limité à $\Gamma = 3.36$). Pour pallier à ce problème, une version complémentaire du dispositif a donc été créée. La configuration générale et les éléments constituant cette version sont similaires à l'originale, à quelques différences près :

- Le silo a été allégé (~ 3 kg au lieu de 5 kg) : sa hauteur est plus faible ($H = 300$ mm) et le réglage de l'ouverture a été simplifié : l'angle ne peut pas être modifié ($\theta = 0$) et seuls certains diamètres d'ouverture sont accessibles ($D = 5, 10, 15, 20$ mm).
- Le silo repose entièrement sur le pot vibrant et n'est plus guidé par des lamelles fixées à un support, celles-ci n'étant pas nécessaires du fait de la hauteur plus faible du dispositif.
- Le pot vibrant utilisé (LDS V455) dans cette version est plus puissant que le précédent (LDS V406). Combiné à la masse plus faible du silo, il est possible d'atteindre des accélérations jusqu'à $\Gamma = 11$ (au lieu de $\Gamma = 3.3$).
- La balance ne peut plus être placée directement sous le silo du fait de la plus petite taille du support. On utilise alors une trémie inclinée pour acheminer les grains jusqu'à la balance.

Les images de cette version du dispositif avec ses différents éléments sont présentées dans la Fig. 4.5. Excepté les points que nous venons de mentionner, les éléments restent les mêmes que ceux décrits pour la version originale. De même, les méthodes de mesure et de suivie que nous allons décrire sont valables pour les deux versions.

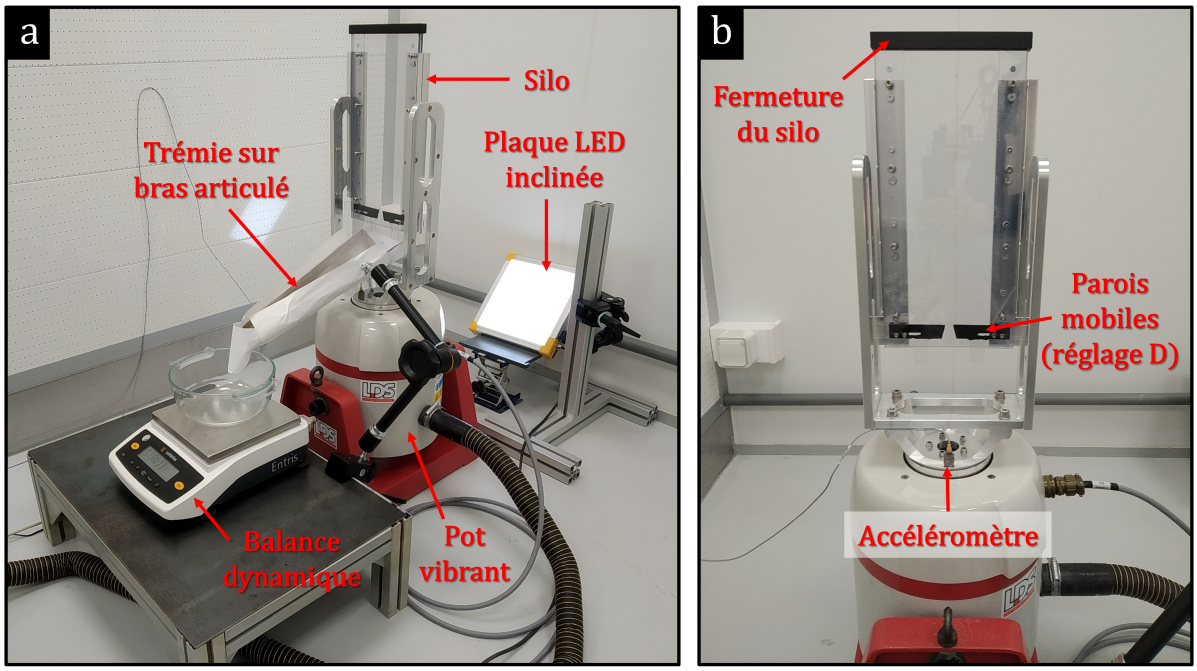


Figure 4.5 Dispositif expérimental complémentaire (a) vue de profil et (b) vue de face (silo et pot uniquement). Le principe de cette version et ses éléments restent similaires au cas précédent (voir Fig. 4.2). Le pot vibrant est plus puissant et le silo plus léger (hauteur plus faible et pas de réglage de l'angle d'ouverture). Une trémie permet d'amener les grains sortant du silo dans la balance.

4.2 Méthodes de mesure et de suivi

Lors de la vidange, on souhaite suivre l'écoulement aux niveaux macroscopique et microscopique. Du point de vue macroscopique, c'est le débit qui nous intéressera puisqu'il est caractéristique de la vidange et il faudra donc le mesurer. Du point de vue microscopique, c'est la rhéologie locale qui nous intéresse et que l'on étudiera en filmant l'écoulement des particules. Nous allons décrire dans cette section les méthodes de mesure et d'analyse utilisées pour traiter ces deux points.

4.2.1 Mesure du débit

La mesure du débit se fait avec la balance dynamique sous le silo, qui pèse toutes les 0.1 secondes la masse écoulée dans le récipient de récupération, avec une précision de 0.01 g. Lors de la vidange, l'écoulement atteint très rapidement un régime stationnaire, comme on peut le voir sur la Fig. 4.6a. En effet, une fois le silo ouvert, la masse se met quasiment instantanément à évoluer linéairement avec le temps, et ce jusqu'à la fin de la vidange. On obtient donc un débit constant pendant la vidange, comme prévu par la théorie présentée dans le chapitre 3 (section 3.2). Le débit est alors calculé par régression linéaire sur l'intervalle où l'écoulement est stationnaire.

Un problème se pose néanmoins lorsque le diamètre d'ouverture se rapproche de la taille des grains. On voit alors la formation d'arches en sortie qui peuvent avoir une durée de vie plus ou moins longue selon les vibrations imposées. On obtient de ce fait une vidange intermittente, comme on peut le voir sur la Fig. 4.6b. Entre deux arches, on retrouve néanmoins un écoulement stationnaire. Pour mesurer le débit, on ne considère dans ce cas que ces périodes stationnaires de l'écoulement. On élimine alors les périodes d'arrêt dues aux arches pour reconstituer une nouvelle courbe de vidange (partie stationnaire sur la Fig. 4.6b). On mesure le débit sur celle-ci, puisqu'elle correspond au cas d'un écoulement stationnaire sans arches comme ceux pour les diamètres d'ouverture plus grands. À noter que l'on peut aussi voir des oscillations lors de la vidange, en particulier pour les faibles diamètres d'ouverture. Ces oscillations proviennent généralement de l'aspect discret de l'écoulement dû à la taille, et donc la masse, finie des grains. Outre cet effet discret, des oscillations peuvent aussi être observées lorsque l'on applique de très fortes vibrations du fait de variations périodiques du débit.

Enfin, il est important de noter que le débit du silo peut légèrement varier d'un essai à un autre (écart inférieur à 5% entre deux essais). Ces variations dépendent principalement de l'insertion des grains, ainsi que des conditions environnementales (température et humidité) dans une moindre mesure. Ces variations aléatoires sont d'ailleurs aussi observées en simulations lorsque l'on change la façon d'insérer les grains dans le silo. On répétera donc chaque mesure de débit pour obtenir une valeur moyenne.

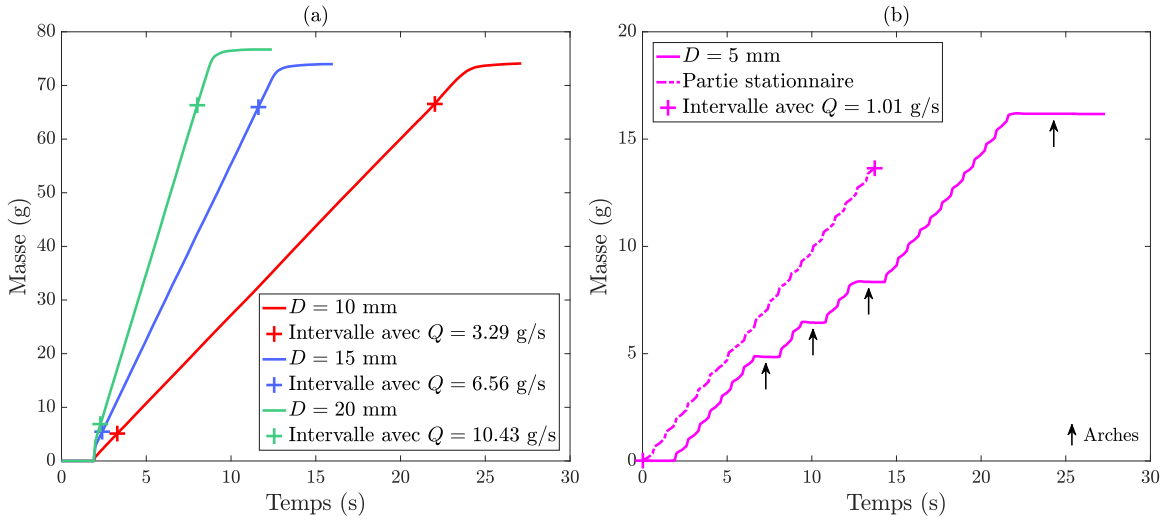


Figure 4.6 Mesure de la masse vidangée au cours du temps (sans vibration) pour les diamètres d'ouverture (a) $D = 10, 15, 20$ mm et (b) $D = 5$ mm. Dans chaque cas, le débit Q est déterminé par régression linéaire dans un intervalle où la vidange est stationnaire. Pour les faibles ouvertures (b), l'écoulement est intermittent dû à la formation d'arches (flèches noires), détruites manuellement dans le cas présent. Le débit est alors calculé sur une courbe reconstruite en éliminant les parties non stationnaires.

4.2.2 Suivi des particules

Pour pouvoir étudier la rhéologie locale de l'écoulement, il est nécessaire de pouvoir suivre celui-ci à l'échelle microscopique. On utilise pour ce faire une caméra rapide pour filmer l'écoulement des grains au niveau de l'ouverture. À partir des images obtenues, il est possible de détecter et suivre chaque particule de l'écoulement. Ce suivi, ou *tracking*, des particules permet d'obtenir les champs de vitesses, température granulaire et fraction volumique partout dans l'écoulement.

Calibration de la caméra

Pour pouvoir obtenir des images exploitables, il est tout d'abord nécessaire de bien régler la caméra. Trois étapes sont importantes pour ce faire :

► **Régler l'alignement de la caméra avec l'écoulement :** un bon alignement de la caméra par rapport à la zone filmée est primordial pour obtenir des images correctes. La caméra doit être en effet bien centrée et droite selon l'axe perpendiculaire à la paroi du silo. La caméra repose sur une rotule 3D équipée d'un niveau à bulle, permettant de régler l'inclinaison verticale. Une fois ce point réglé, il faut changer son inclinaison horizontale et sa position pour être bien en face du silo. Pour ce faire, on aligne devant et derrière la zone filmée deux plaques transparentes marquées chacune d'un carré (voir Fig. 4.7a). La caméra est alors alignée lorsque l'on obtient une symétrie horizontale par rapport au centre de l'image de ces deux marques.

► **Déterminer le rapport pixel/mètre des images :** lors du traitement des images, il est primordial d'avoir accès aux véritables dimensions des objets filmés. Il faut donc avoir le rapport entre les pixels de l'image et la taille réelle en mètres des objets filmés, et donc le rapport pixel/mètre (noté px/m). Pour le déterminer, on filme avant chaque série d'expériences un étalon de dimensions connues. Cet étalon est composé de trois carrés imbriqués de 2×2, 3×3 et 4×4 cm (voir Fig. 4.7b). On obtient le rapport

px/m en comparant les aires en pixel des images des carrés à leurs aires réelles.

► **Régler l'acquisition et l'échantillonnage de la caméra :** le nombre d'images/seconde (noté im/s) doit être suffisamment élevé pour pouvoir suivre correctement les grains. Pour un écoulement dense comme celui-ci, le tracking est possible si le déplacement des particules entre deux images est inférieur à leur diamètre (sinon il y a confusion entre les différentes particules). En sortie on obtient des vitesses maximales de l'ordre de 0.5 m/s pour des particules d'environ 1 mm de diamètre sans vibration. Pour le dispositif complémentaire, ces vitesses peuvent aller jusqu'à 1 m/s pour les plus fortes vibrations. Il faut donc un échantillonnage d'au moins 500 im/s sans vibration et 1000 im/s avec les fortes vibrations. Par mesure de précaution, on prendra respectivement 1000 im/s et 2000 im/s pour être sûr de pouvoir suivre aisément toutes les particules. On utilise deux taux d'échantillonnage différents car il est nécessaire de réduire de manière importante la zone filmée (le "ROI" de la caméra) pour atteindre 2000 im/s. On ne pourra donc pas filmer le silo dans toute sa largeur avec une résolution suffisante pour détecter les particules, contrairement au cas de 1000 im/s. Dans les deux cas, ces échantillonnages ont aussi l'avantage d'être largement supérieures aux fréquences des vibrations (entre 15 et 75 Hz), ce qui permet d'avoir suffisamment d'images pour étudier l'écoulement lors d'une période de vibration. Un autre paramètre important est le temps d'exposition, qui détermine pendant combien de temps on capte de la lumière pour chaque image. Ce paramètre doit être suffisamment grand pour voir les particules, mais suffisamment faible pour éviter d'avoir des particules étirées dues à leur mouvement. Par défaut on prendra donc un temps d'exposition de 100 µs.

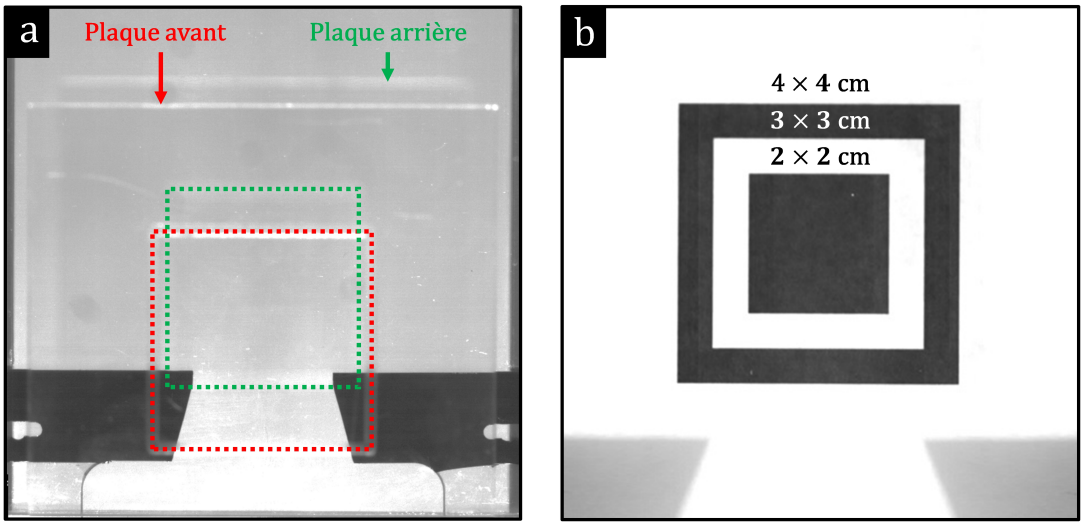


Figure 4.7 Calibration de la caméra : (a) réglage de l'alignement horizontal et de la position de la caméra en alignant (horizontalement uniquement) les marques sur deux plaques alignées devant et derrière la zone à filmée et (b) étalonnage du rapport pixel/mètre grâce à un objet (3 carrés imbriqués) de dimensions connues placé au niveau de l'ouverture. À noter que sur (a), la mise au point de la caméra est faite sur l'ouverture du silo pour voir les deux plaques en même temps, d'où le léger flou sur chacune.

Détection et tracking des particules

Une fois la caméra calibrée, on peut filmer l'écoulement pour suivre le mouvement des particules. La Fig. 4.8 ci-dessous montre une image typique obtenue lors de la vidange au niveau de la sortie. Chaque point lumineux sur l'image correspond au centre d'une particule, tandis qu'un repère lumineux à gauche permet de suivre le déplacement des parois du silo lors des vibrations. Le suivi des particules est fait sous Matlab, grâce aux fonctions de tracking développées par Daniel Blair et Eric Dufresne [1], adaptées du logiciel libre "Particle tracking using IDL" de John C. Crocker et Eric R. Weeks [2] [67]. Ce programme a l'avantage de permettre de suivre un très grand nombre de particules et de mesurer des déplacements avec une résolution sub-pixel (précision au 1/10 de pixel, soit environ 10 µm dans notre cas). Les étapes du tracking des particules, montrées sur la Fig. 4.8, sont les suivantes :

1. Fonctions Matlab disponibles sur : http ://site.physics.georgetown.edu/matlab/
2. Logiciel disponible sur : http ://www.physics.emory.edu/faculty/weeks//idl/

- Ajustement des images : le contraste, la luminosité et le gamma des images sont ajustés pour éliminer le bruit et différencier les centres des particules du fond.
- Les centres des particules sont détectés sur chaque image. On fournit pour cela la taille moyenne des "blobs" lumineux correspondant aux centres des grains (~ 5 pixels). Le programme analyse les images pour détecter ces blobs et stocke leurs positions à chaque instant dans un fichier.
- Pour chaque centre détecté à l'instant t, le programme recherche les centres proches à l'instant $t + dt$. Cette recherche se fait autour du centre initial dans un cercle dont on peut définir le rayon (8 pixels dans notre cas). On obtient ainsi la liste des déplacements possibles pour chaque particule à l'instant t. Le programme détermine le déplacement le plus probable pour chaque particule, donnant la trajectoire entre t et $t + dt$ de chaque grain (voir Fig. 4.8). Cette étape se répète jusqu'à la fin du film et les trajectoires sont sauvegardées dans un fichier.

La Fig. 4.9a présente des exemples de trajectoires obtenues lors de la vidange dans le cas sans vibration. On peut extraire directement de nombreuses informations de ces trajectoires, comme par exemple les champs de vitesses dans le silo, comme montré sur la Fig. 4.9b. En revanche, lorsque l'on ajoute des vibrations, une étape supplémentaire est nécessaire pour extraire des résultats aisément exploitables. Il faut en effet pouvoir prendre en compte le mouvement du silo pendant les vibrations, qui est le référentiel de l'écoulement.

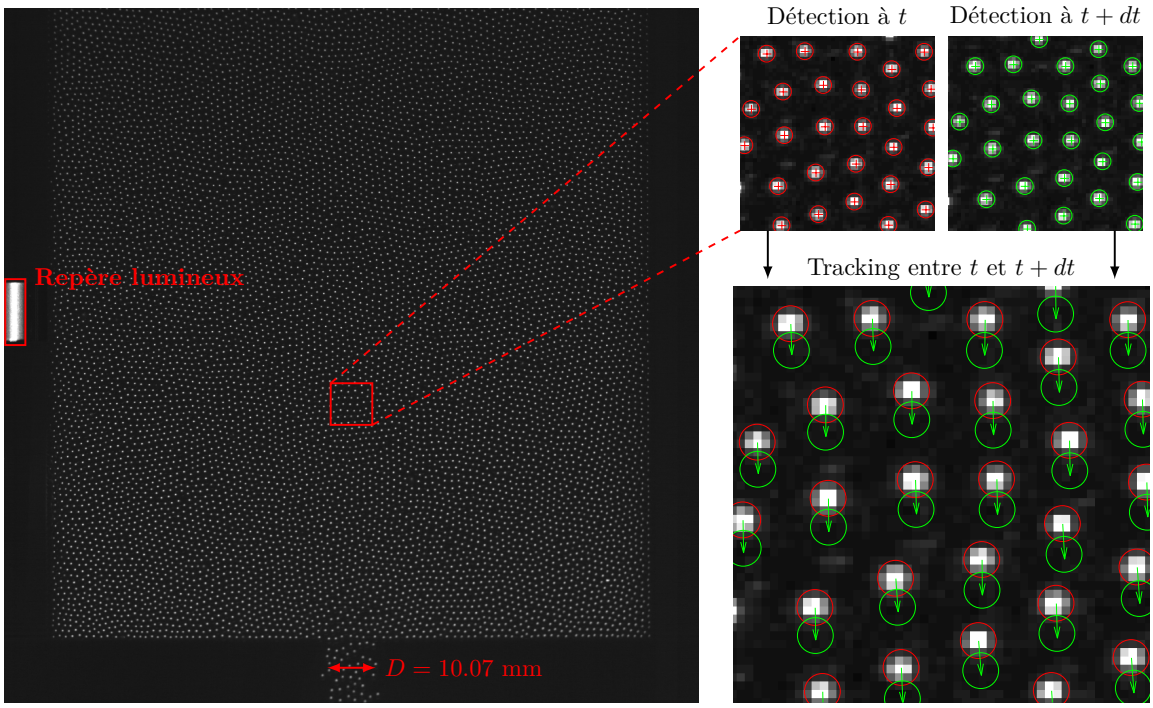


Figure 4.8 Principe du suivi ("tracking") des particules lors de la vidange. Les centres des particules apparaissent comme des petits ronds blancs sur l'image à gauche. Le repère lumineux sur l'image permet de suivre le mouvement du silo. Le programme de tracking utilisé détecte à chaque instant les centres des particules et reconstitue leurs trajectoires (à droite).

4.2.3 Suivi du mouvement du silo

Pour bien comprendre l'effet des vibrations sur l'écoulement, il est nécessaire de pouvoir décorréler le mouvement des particules de celui du silo. Il faut pour cela connaitre à chaque instant la position du silo. Néanmoins, lors de nos expériences, le pot vibrant et la caméra fonctionnent à des fréquences différentes puisque l'on souhaite tracker les particules et voir le comportement lors d'une période. De plus, il y a un décalage entre le moment où l'on lance les vibrations et le moment où l'on commence à filmer (ouverture du silo) pour des questions de limitations de stockage des données (limite de mémoire

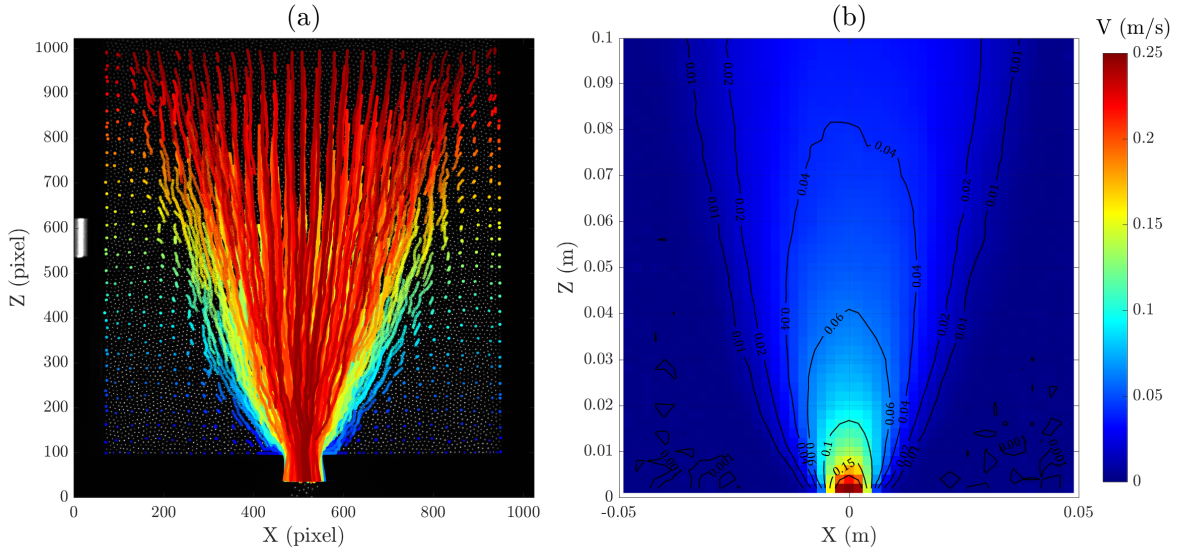


Figure 4.9 Écoulement sans vibration pour $D = 10.07$ mm : (a) trajectoires des particules au cours du temps colorées selon la position initiale (bleu en bas du silo, rouge en haut) et (b) champ de vitesses dans le silo calculé à partir de ces trajectoires.

de la caméra : environ 2.5 s de film à 1000 im/s avec une résolution 1024×1024). Ces deux difficultés techniques rendent une synchronisation entre le pot et la caméra difficile. Les temps de la caméra, t_{cam}, et des vibrations, t_{pot}, n'ont donc pas la même origine, et on a un déphasage φ entre les deux :

$$\text{Position silo} = A\sin(2\pi f t_{pot}) = A\sin(2\pi f t_{cam} + \varphi) \tag{4.1}$$

Ce déphasage doit être impérativement connu pour isoler le mouvement du silo de celui des grains. Il faut donc pouvoir mesurer et suivre le mouvement du silo pendant la vidange, ce qui permet aussi de vérifier que l'on retrouve bien l'amplitude et la fréquence souhaitées. Pour ce faire, on peut utiliser deux méthodes différentes :

- Méthode 1 : Suivre un repère fixe sur une des parois du silo. En analysant le mouvement de ce repère on obtient le mouvement du silo.
- Méthode 2 : Suivre un groupe de particules dans une *zone morte*, où les particules ne bougent pas ou quasiment pas lors de la vidange par rapport au silo.

Méthode 1 : Suivi d'un repère

A priori cette méthode semble la plus simple mais elle pose un problème pratique important : comment visualiser le repère ? En effet, les images prises par la caméra sont très peu lumineuses du fait d'un temps d'exposition faible (100 µs). De ce fait, une simple marque ne sera pas visible sur les images. De plus, il est important de maximiser la place de l'écoulement sur l'image pour avoir une bonne résolution des centres des particules. Un repère trop grand ou trop intrusif n'est donc pas envisageable.

La solution que nous avons choisie consiste à éclairer un petit bloc collé sur la paroi avant du silo avec une nappe laser. Le principe est présenté sur la Fig. 4.10 : en inclinant la nappe laser, on crée une ligne lumineuse verticale le long de la paroi du silo. La position de cette ligne dépend de la hauteur de la zone éclairée. Le bloc rajoute une épaisseur supplémentaire, créant ainsi une ligne décalée à sa surface. Lorsque le silo vibre verticalement, le bloc bouge et la ligne lumineuse à sa surface aussi. Cette ligne lumineuse est visible sur les images et peut donc servir de repère pour suivre le silo.

Pour suivre ce repère lumineux, on isole tout d'abord la zone où il se déplace du reste de l'image. On moyenne ensuite le signal selon la direction horizontale (axe des x), ce qui nous donne un signal en fonction de la hauteur comme présenté sur la Fig. 4.11. Ce signal est semblable à une fonction porte (non nulle uniquement dans le repère) et bouge au cours du temps avec les vibrations. Pour suivre ce déplacement, on peut utiliser deux techniques sous Matlab :

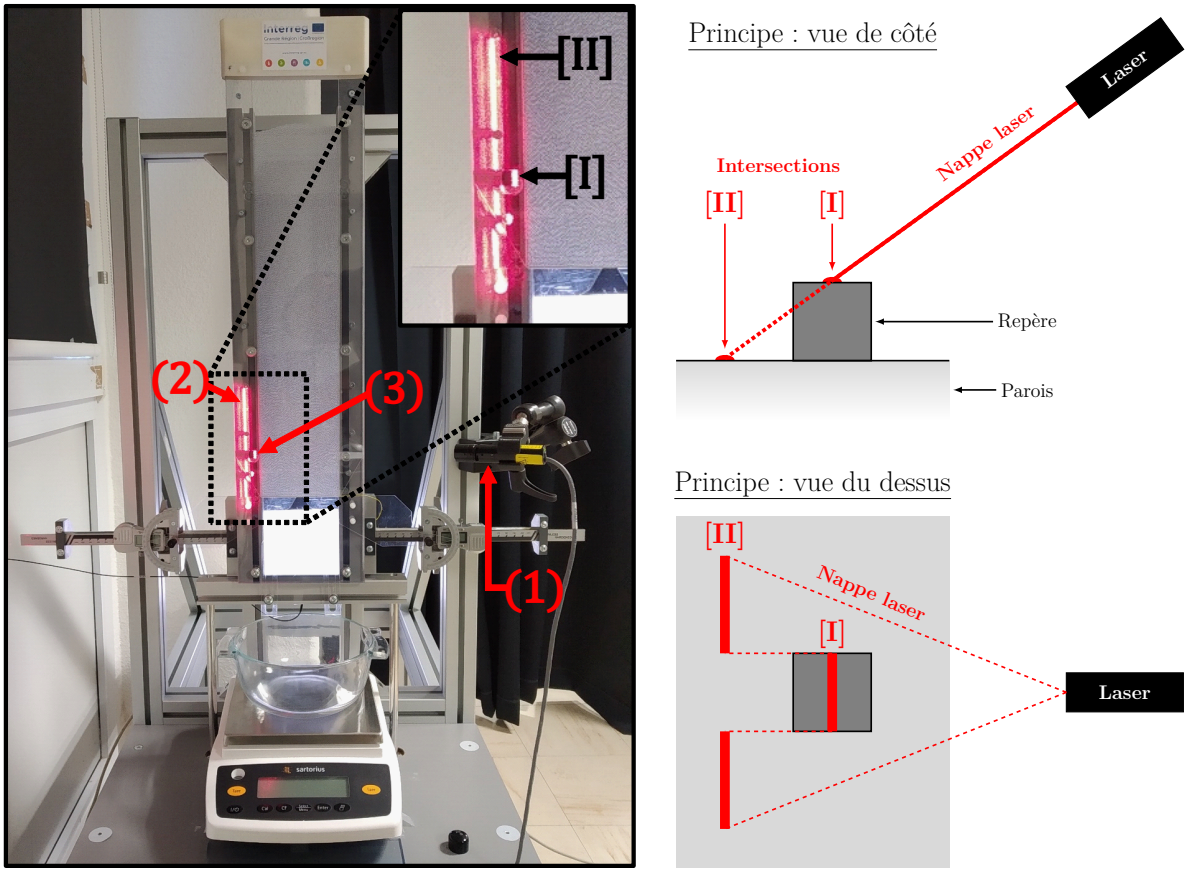


Figure 4.10 Photo et principe du repère lumineux utilisé pour connaître le mouvement du silo à chaque instant. Sur la photo à gauche : (1) Laser 540 nm, (2) nappe laser projetée sur la paroi avant du silo et (3) bloc repère collé sur la paroi. Les projections de la nappe laser sur la paroi et le bloc repère sont notées respectivement [I] et [II].

- Méthode 1a : on calcule la dérivée du signal, ce qui nous donne deux pics correspondant aux bords du repère. Ces pics nous donnent directement la position du repère au cours du temps, et donc du silo. Néanmoins la précision de cette méthode est limitée à la taille d'un pixel, ce qui rend difficile le suivi pour des petites amplitudes de vibration.
- Méthode 1b : on utilise une fonction de cross-corrélation du signal, qui compare le signal entre deux instants et détermine le déplacement nécessaire pour les superposer. On obtient alors le déplacement à chaque instant du signal, et donc du silo. Un avantage important de cette méthode est que l'on peut l'adapter pour avoir une précision inférieure à un pixel (1/10 de pixel dans notre cas) et donc suivre des petits déplacements.

Méthode 2 : Suivi des particules dans une zone morte

Cette méthode consiste à simplement suivre un groupe de particules dont le mouvement est identique à celui du silo. On trouve ce type de particules contre les parois du silo, particulièrement dans les coins inférieurs (voir Fig. 4.11). On appellera ces endroits des *zones mortes*, puisque les particules y sont à l'arrêt dans le référentiel du silo. De ce fait, suivre ces particules revient théoriquement à suivre le silo.

Le principal avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas de matériel ou programme supplémentaire. Ces particules sont filmées avec le reste de l'écoulement et le tracking est fait avec le même programme, et donc la même précision. Cela permet aussi de maximiser la place de l'écoulement sur l'image, vu que l'on n'a plus besoin de filmer le repère. L'inconvénient vient du fait que lorsque l'on met des vibrations, il n'y a plus de zones véritablement mortes. On constate en effet des faibles mouvements selon l'horizontale même dans les coins. Néanmoins, si l'on ne regarde que le mouvement vertical, alors le mouvement dans ces zones par rapport au silo est négligeable par rapport au mouvement global. Cette méthode permet donc d'obtenir la bonne fréquence f et la bonne phase φ du mouvement,

même s'il existe une petite imprécision sur l'amplitude A.

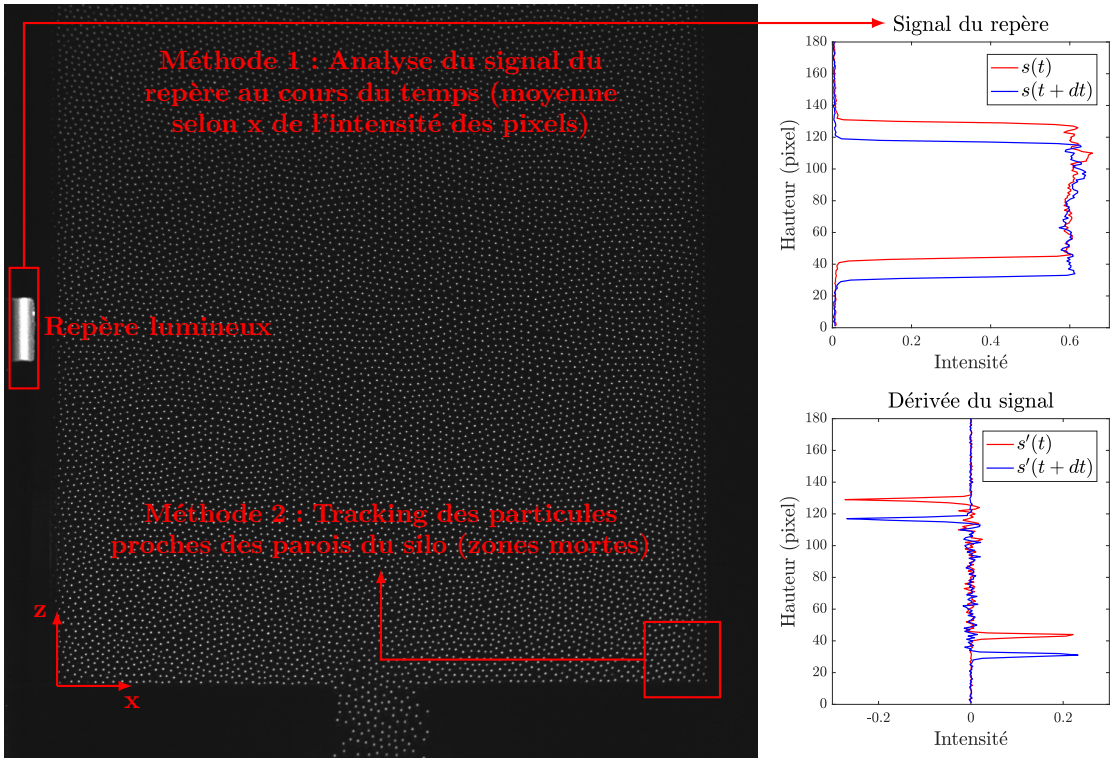


Figure 4.11 Détermination de la position du silo au cours du temps par deux méthodes : (1) Tracking du repère en analysant son signal lumineux et (2) Tracking des particules dans un coin du silo (zone morte).

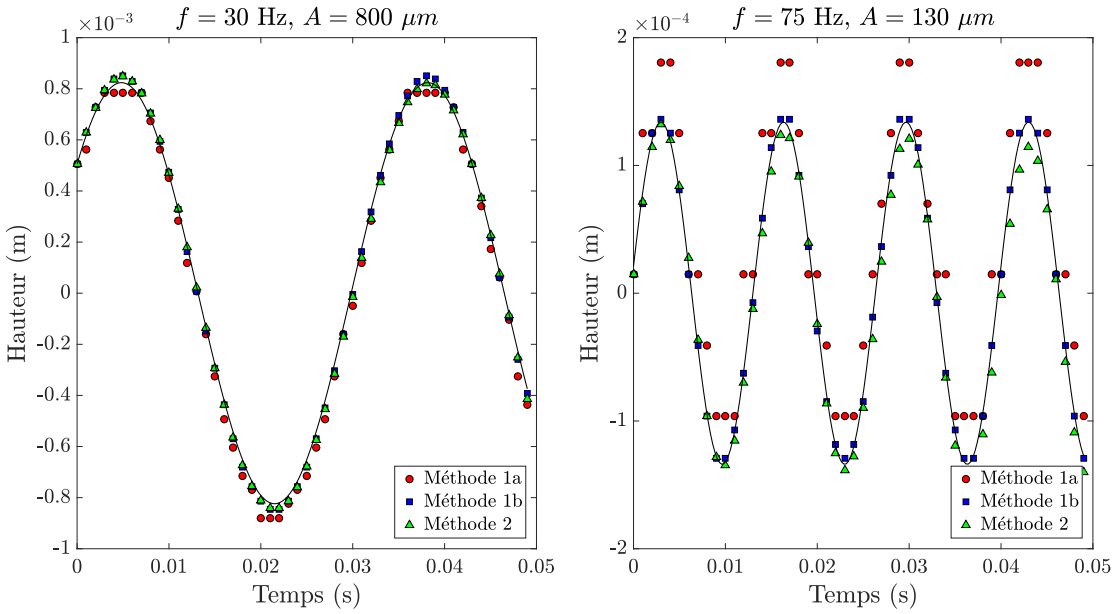


Figure 4.12 Suivi de la position du silo au cours du temps pour deux vibrations différentes. Le suivi est fait dans chaque cas avec les méthodes 1a (analyse de la dérivée du signal du repère), 1b (corrélation du signal du repère) et 2 (tracking des particules dans le coin du silo). La courbe en noire montre le signal attendu dû aux vibrations (sinus d'amplitude A et fréquence f).

Les résultats des différentes méthodes de suivi 1a, 1b et 2 sont présentés sur la Fig. 4.12. Pour les vibrations de fortes amplitudes ($A = 800$ µm), les trois méthodes donnent des résultats identiques et on retrouve bien la fréquence et l'amplitude attendues. On voit aussi nettement le déphasage entre le temps

de la caméra et les vibrations, d'où l'importance de ce suivi.

En revanche, pour des vibrations d'amplitudes faibles ($A = 130$ µm), on observe un décalage de la méthode 1a. Celui-ci vient de la trop faible précision du suivi, qui est limitée à la taille du pixel et donc trop grossière pour suivre le mouvement. Les méthodes 1b et 2 permettent de suivre ce mouvement et donnent bien les résultats attendus, prouvant leur validité. Dans la suite, on utilisera à chaque fois ces deux méthodes pour suivre le déplacement du silo lorsque cela est possible. Dans les cas où on ne peut pas suivre le repère (zone filmée réduite), on utilisera uniquement la méthode 2.

4.3 Réalisation des expériences

Dans cette section nous allons décrire les étapes de préparation des expériences ainsi que le protocole typique d'une vidange du silo. Ces étapes sont en effet très importantes pour obtenir des résultats reproductibles.

4.3.1 Préparation des particules et du silo

Préparation des particules

Pour réaliser des expériences de vidange exploitables, il est nécessaire de bien contrôler les propriétés physiques des particules en écoulement. La taille, la forme et les propriétés de cohésion en particulier ont un effet majeur sur l'écoulement. Concernant la taille, toutes les particules ont été tamisées pour obtenir une dispersion précise. Cette dispersion est faible par rapport à la taille moyenne ($\sim 10\%$) mais permet d'éviter des effets de cristallisation dans le silo. Les particules utilisées seront des sphères, généralement des billes de verre de diamètre $d = 1 - 1.25$ mm. Concernant la cohésion, on veillera dans un premier temps à l'éviter au maximum. Les particules seront donc maintenues sèches et stockées dans un récipient hermétique et traité contre l'électricité statique. Au besoin, les particules seront placées dans une enceinte climatique à température et humidité contrôlées pour être séchées.

Préparation du silo

Tout comme pour les particules, il est important de bien maîtriser les propriétés de surface du silo. En effet, malgré le revêtement antistatique intégré au matériau constituant les parois, des poussières finissent par s'accumuler à la surface et les parois peuvent s'endommager lors du passage des particules. Pour maintenir un fonctionnement optimal, le silo est démonté et nettoyé avant d'effectuer une nouvelle série d'expériences. Dans le cas de particules sèches, une fine couche de produit antistatique (AS90E10) est aussi appliquée pour maintenir les propriétés dissipatives des parois et lisser la surface pour réduire le frottement avec les grains. Une fois le revêtement appliqué, on peut remonter le silo et régler les paramètres de l'expérience (diamètre d'ouverture, angle d'ouverture, calibration de la caméra...).

Ce nettoyage du silo est répété impérativement toutes les 100 expériences de vidange ou après une période d'inactivité de plus de deux semaines. Entre deux expériences, un pistolet à air comprimé ionisé est utilisé pour souffler les poussières dans le silo. On parle d'*air ionisé* car un puissant courant électrique est appliqué en sortie de la buse du pistolet pour charger l'air, ce qui permet d'éliminer toute l'électricité statique sur les particules et parois. Le déroulé de ce type de série est résumé dans la Fig. 4.13.

4.3.2 Étapes des expériences

Lors d'une expérience de vidange, différentes étapes sont réalisées dans l'ordre suivant :

1. Nettoyage du silo comme décrit précédemment.
2. Réglage du diamètre et de l'angle d'ouverture.
3. Réglage et calibration de la caméra.
4. Blocage du silo et insertion des particules. Le blocage est réalisé grâce à un câble fin glissé devant l'ouverture.
5. Réglage et activation des vibrations. On laisse le silo vibrer un petit temps pour que les vibrations soient bien établies.
6. Activation de la balance pour enregistrer la masse écoulée au cours du temps.

7. Ouverture du silo et activation de la caméra. Le câble est retiré pour ouvrir le silo et la caméra est activée de manière simultanée pour maximiser le nombre d'images enregistrées (plus ou moins limité selon la mémoire de la caméra).
8. Arrêt de la balance et de la caméra après la fin de l'écoulement. À noter que la caméra ne permet pas toujours de filmer entièrement la vidange selon la limite sur le nombre d'images.
9. Arrêt des vibrations.
10. Utilisation du pistolet à air ionisé pour enlever les poussières et particules potentiellement bloquées dans le silo.

Pour un gain de temps, on effectue une série d'expériences pour un seule configuration d'ouverture (un angle et un diamètre). On ne change dans ce cas que les vibrations imposées, ce qui permet d'éviter les trois premières étapes. Pour vérifier la répétabilité, la série d'expériences est répétée au moins deux fois comme indiqué sur la Fig. 4.13.

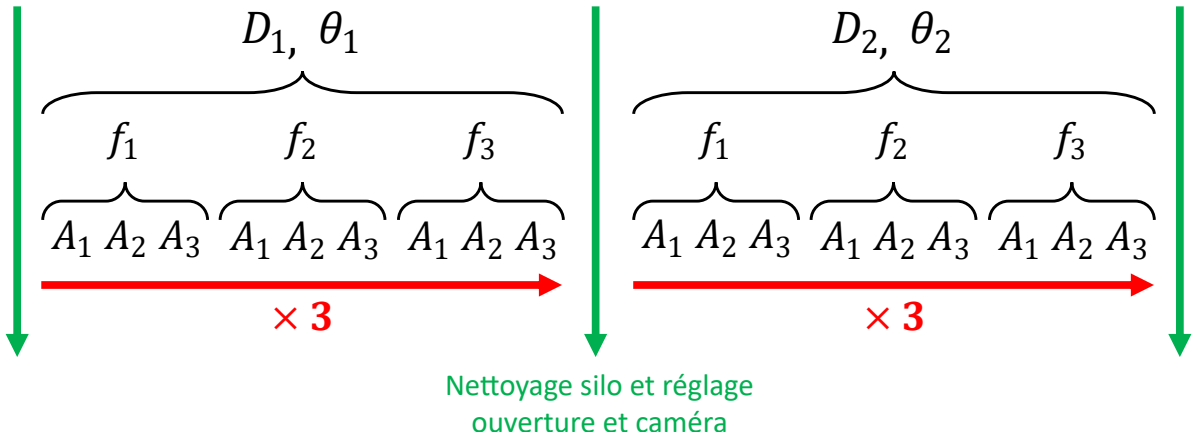


Figure 4.13 Déroulé de deux séries expérimentales pour deux configurations d'ouverture : D_1, θ_1 et D_2, θ_2. Pour chacune, des expériences pour différents couples de fréquences f et d'amplitudes A sont réalisées (note : les amplitudes changent selon les fréquences du fait des limites du pot). Pour chacun de ces couples, les étapes 4 à 10 sont effectuées. Les étapes 1 à 3 sont réalisées entre chaque série.

Chapitre 5

Loi d'échelle pour le débit

5.1 Mesures de débit sans vibration 69
5.2 Effet des vibrations sur le débit 71
5.2.1 Impact du diamètre d'ouverture et des vibrations 71
5.2.2 Loi d'échelle pour le débit 72
5.2.3 Second régime des vibrations 75
5.3 Impact des autres paramètres 80
5.3.1 Effet de l'angle d'ouverture 80
5.3.2 Effet des propriétés des grains 81
5.4 Conclusion 83

Le débit d'un silo est, du point de vue macroscopique, le paramètre représentatif de l'écoulement. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, l'influence sur le débit des différents paramètres du silo a fait l'objet d'un nombre conséquent d'études. Notre but ici est d'étendre ces résultats aux cas des silos vibrés et d'obtenir une loi d'échelle donnant le débit en fonction des paramètres, similaire à la loi de Beverloo [44].

5.1 Mesures de débit sans vibration

Avant d'effectuer des mesures de débit en présence de vibrations, il est important de vérifier que l'on retrouve bien les résultats de la littérature avec la configuration utilisée. Nous avons donc dans un premier temps réalisé des vidanges sans vibration pour différents diamètres d'ouverture $D = 5 - 40$ mm, dans le cas d'un silo rectangulaire avec un angle d'ouverture $\theta = 0°$ (parois basses à l'horizontale). Les particules utilisées sont des billes de verre de diamètre $d = 1 - 1.25$ mm, dont les propriétés sont données dans la Table 5.1. Ces particules serviront d'étalon auquel les résultats obtenus avec d'autres types de particules seront comparés.

Table 5.1 Propriétés physiques des particules étalon utilisées lors des expériences de vidange

Nom	Matériaux	ρ (kg/m^3)	Forme	d (mm)	Teneur en eau
Étalon	Verre	2500	sphère	$1 - 1.25$	0%

Dans ce cas, on n'a donc qu'une seule couche de particule dans l'épaisseur du silo ($W = 1.5$ mm), d'où la nature quasi-2D de l'écoulement. Comme discuté dans le chapitre 3 (section 3.2 et 3.3), il existe plusieurs lois empiriques décrivant le débit sans vibration Q_0 de ce silo. Dans notre configuration quasi-2D, nous avons testé les lois suivantes :

- Une généralisation quasi-2D de la loi de Beverloo [44, 47] :

$$Q_0 = C\rho\phi_b\sqrt{g}\, W\,(D - kd)^{3/2} \tag{5.1}$$

où C et k sont des constantes. Cette loi fonctionne normalement bien pour les grandes ouvertures mais tend à diverger lorsque $D \to d$.

- Une généralisation quasi-2D de la loi de Mankoc [45] :

$$Q = C\rho\phi_b\Delta\sqrt{g}\, W(D/d - 1)^{3/2} \qquad \text{avec :} \quad \Delta = \frac{\phi_0}{\phi^*} = 1 - \frac{1}{2}e^{-b(D/d-1)} \tag{5.2}$$

où b est une constante et ϕ_0 est la fraction volumique dans la zone au-dessus de l'ouverture. Cette fraction est plus faible que la fraction bulk ϕ_b (obtenue pour un empilement aléatoire dans le silo)

du fait d'une dilatation de l'écoulement à l'ouverture du silo. La prise en compte de cette dilatation permet théoriquement de suivre l'évolution du débit qu'importe le diamètre d'ouverture.

- La loi de Benyamine [47] pour un angle d'ouverture $\theta = 0°$:

$$Q_0 = C\rho\phi_0\sqrt{g}WD^{3/2} \qquad \text{avec :} \quad \phi_0 = \phi_b\left(1 - \alpha\exp(-\beta D/d)\right) \tag{5.3}$$

où α et β sont des constantes. Comme la précédente, elle prend en compte la dilatation de l'écoulement pour les faibles ouvertures. Elle est aussi extensible au cas d'angle d'ouverture $\theta \neq 0$.

Pour vérifier ces lois, il est nécessaire de mesurer la fraction ϕ_0 au niveau de l'ouverture du silo ainsi que la fraction bulk ϕ_b. Ces fractions peuvent être calculées à partir des images obtenues avec la camera, en comptant le nombre de particules détectées à chaque instant dans les zones qui nous intéressent. Une question importante est alors de savoir si l'on calcule une fraction surfacique (2D) ou volumique (3D), puisque nous sommes dans un cas intermédiaire. Pour éviter des erreurs dues à une superposition des particules selon l'épaisseur [1], nous avons choisis de mesurer uniquement les fractions volumiques. Les fractions sont donc calculées par la simple formule : $\phi = nV_p/V$, avec V le volume de la zone étudiée, V_p le volume moyen des particules et n le nombre de particules détectées dans la zone.

La fraction ϕ_0 est mesurée pendant la vidange dans un demi-cercle de rayon $D/2$ centré juste au-dessus de l'ouverture et moyennée temporellement (sur 2 s d'écoulement stationnaire). L'évolution de cette fraction ϕ_0 en fonction du diamètre d'ouverture normalisé D/d est présentée sur la Fig. 5.1a. On retrouve bien une dilatation de l'écoulement pour les faibles diamètres d'ouverture, qui peut-être modélisée avec $\phi^* = 0.41$ et $b = 0.276$ pour l'Eq. 5.2 (Mankoc) et $\phi_b = 0.41$, $\alpha = 0.349$ et $\beta = 0.190$ pour l'Eq. 5.3 (Benyamine). La modélisation obtenue avec la loi de Mankoc est de moins bonne qualité mais reste dans la marge d'erreur des mesures. Dans les deux cas, les constantes b, α et β sont du même ordre de grandeur que celles obtenues par Mankoc et al. [45] et Benyamine et al. [47].

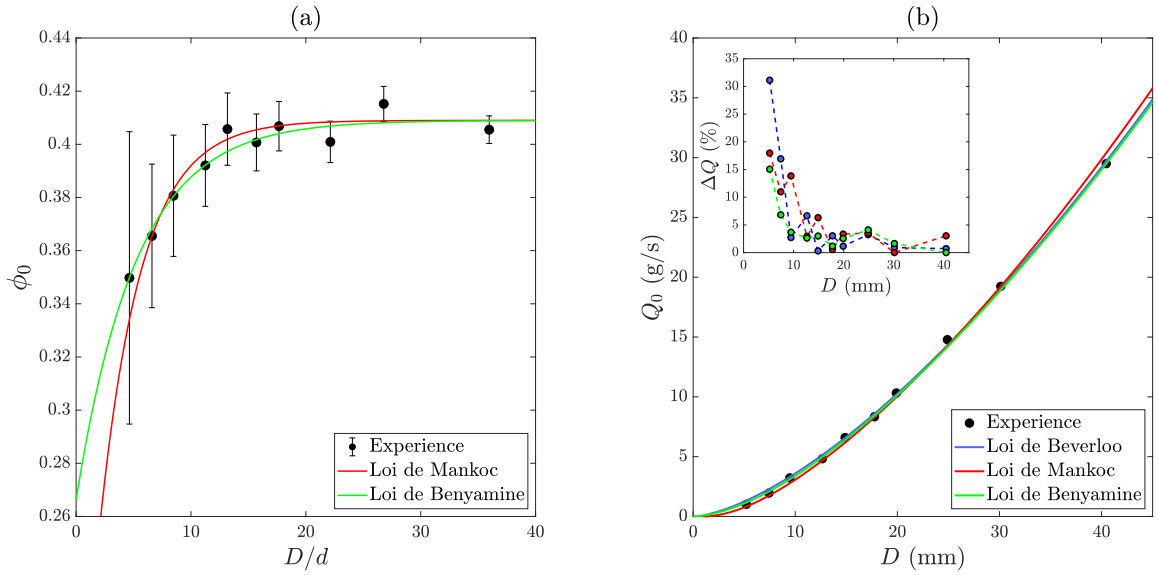


Figure 5.1 (a) Fraction volumique à l'ouverture du silo ϕ_0 en fonction du diamètre d'ouverture normalisé D/d. Les données peuvent être modélisées par les lois de dilatation de l'Eq. 5.2 (ligne rouge) avec $\phi^* = 0.41$ et $b = 0.276$ ($R^2 = 0.893$) et de l'Eq. 5.3 (ligne verte) avec $\phi_b^* = 0.41$, $\alpha = 0.349$ et $\beta = 0.190$ ($R^2 = 0.953$).
(b) Débit du silo sans vibration Q_0 en fonction du diamètre d'ouverture D. Les données sont modélisées par l'Eq. 5.1 (ligne bleue) avec $C = 0.665$ et $k = 0.113$ ($R^2 = 0.999$), l'Eq. 5.2 (ligne rouge) avec $C = 2.663 \times 10^{-5}$ et $b = 0.276$ ($R^2 = 0.998$) et l'Eq. 5.3 (ligne verte) avec $C = 0.659$, $\alpha = 0.349$ et $\beta = 0.190$ ($R^2 = 0.999$). L'insert présente les erreurs relatives ΔQ entre les données et les trois modélisations en fonction du diamètre d'ouverture (calculées en suivant l'Eq. 5.4).

1. L'épaisseur du silo étant de $W = 1.5$ mm et le diamètre des particules de $d = 1 - 1.25$ mm, on ne peut pas avoir deux particules dans l'épaisseur. Néanmoins, il existe tout de même une certaine superposition qui peut engendrer une fraction surfacique apparente supérieure à 1, ce qui n'est pas possible dans un véritable écoulement 2D.

Concernant la fraction bulk, nous avons mesuré celle-ci lorsque l'on remplit le silo fermé et on obtient $\phi_b = 0.47 > \phi^*$. Cette valeur est supérieure à celle obtenue en modélisant ϕ_0 par la loi de Benyamine, une différence déjà observée par Mankoc et al [45] et Janda et al. [46]. La fraction tend alors vers une valeur maximale ϕ^* dépendant de la forme et taille de la zone de mesure. Néanmoins, Mankoc et al. [45] ont montré que changer la zone de mesure modifie uniquement la valeur de ϕ^*, sans changement des autres paramètres ni de la forme de la loi. On conservera donc les constantes α et β obtenues par modélisation, mais on utilisera bien la valeur $\phi_b = 0.47$ obtenue par analyse d'image pour la loi de Benyamine.

Remarque : Dans la suite, la qualité des modélisations est estimée grâce au coefficient de détermination R^2 (entre 0 et 1) ainsi que l'erreur relative Δy (en %), données par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - y_i^*)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \quad \text{et} \quad \Delta y_i = \left| \frac{y_i - y_i^*}{y_i^*} \right| \tag{5.4}$$

où y_i sont les valeurs mesurées, y_i^* les valeurs estimées par le modèle, $\bar{y}$ la moyenne des mesures et Δy_i l'erreur relative au point i (y représentant la grandeur étudiée).

À partir de ces résultats, il est possible de modéliser le débit du silo par les Eqs. 5.1 à 5.3, comme présenté sur la Fig. 5.1b. Les trois lois suivent bien l'augmentation du débit avec l'ouverture, mais si l'on regarde les erreurs relatives (insert de la Fig. 5.1b) on voit que l'Eq. 5.1 et moins bien adaptée pour les faibles diamètres d'ouverture (un problème déjà mentionné dans le chapitre 3). La loi de Benyamine donne des écarts légèrement plus faibles qu'avec la loi de Mankoc et est extensible au cas $\theta \neq 0$, on préférera donc cette loi pour modéliser les résultats sans vibration.

Au final, on retrouve bien des résultats parfaitement cohérents avec la littérature dans le cas sans vibration. Dans la suite, on s'intéressera donc directement au débit normalisé Q/Q_0 pour isoler l'effet des vibrations par rapport au cas sans vibration. Le débit sans vibration Q_0 sera toujours mesuré avant chaque série de mesures (voir section 4.3.2) pour s'assurer qu'aucun autre paramètre ne joue sur le débit, mis à part les vibrations.

5.2 Effet des vibrations sur le débit

5.2.1 Impact du diamètre d'ouverture et des vibrations

Pour mesurer l'impact des vibrations sur le débit, nous avons effectué des vidanges en faisant varier le diamètre d'ouverture D, la fréquence f et l'amplitude A des vibrations. Nous restons pour l'instant dans la configuration d'un silo rectangulaire, donc avec un angle d'ouverture $\theta = 0°$. Les gammes explorées pour chaque paramètre sont présentées dans la Table 5.2. La gamme d'accélération adimensionnelle des vibrations, Γ, est aussi donnée puisqu'il s'agit du paramètre limitant (limite du pot vibrant : $\Gamma = 3.3$). Pour rappel, l'accélération adimensionnelle des vibrations est donnée par :

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} \tag{5.5}$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation des vibrations et g l'accélération de la pesanteur.

Table 5.2 Gammes explorées pour les principaux paramètres de l'expérience.

Paramètre	D (mm)	A (µm)	f (Hz)	Γ
Gamme	$5 - 20$	$0 - 2000$	$15 - 75$	$0 - 2.94$

La Fig. 5.2 présente l'évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction du diamètre d'ouverture, de l'amplitude et de la fréquence des vibrations. Pour chaque point, la vidange a été répétée trois fois pour déterminer les barres d'erreur indiquées sur la figure (toujours inférieures à 5%). On observe les comportements suivants par rapport au cas sans vibration :

- Le débit diminue lorsque l'amplitude des vibrations augmente, à fréquence et diamètre donnés (Fig. 5.2a). Cette diminution apparaît plus rapidement pour les grandes fréquences.

- Le débit diminue lorsque la fréquence des vibrations augmente, à amplitude et diamètre donnés (Fig. 5.2b). Cette diminution apparaît plus rapidement pour les grandes amplitudes.
- Le débit diminue lorsque le diamètre d'ouverture diminue, à accélération des vibrations donnée (Fig. 5.2c). Cette diminution est d'autant plus importante dans le cas de faibles fréquences et fortes amplitudes. Pour des grands diamètres, le débit tend vers sa valeur sans vibration.

L'effet des vibrations sur le débit dépend donc à la fois de l'amplitude et de la fréquence des vibrations, mais aussi du diamètre d'ouverture. De plus, contrairement à de nombreux cas d'écoulements vibrés, l'accélération adimensionnelle des vibrations Γ n'est pas le paramètre qui rend entièrement compte du comportement sous vibrations. Ces résultats sont en accord avec les observations de Wassgren et al. [66] dans le cas d'un silo 3D avec un angle $\theta = 45°$.

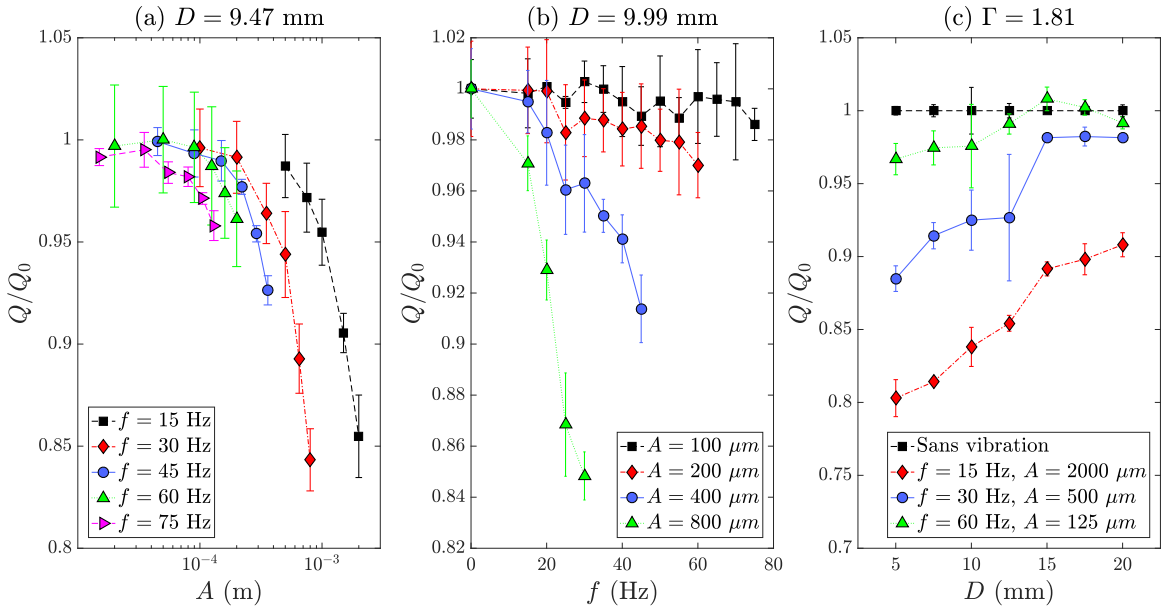


Figure 5.2 Évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction de (a) l'amplitude A pour plusieurs fréquences et un diamètre $D = 9.47$ mm, (b) la fréquence f pour plusieurs amplitudes et un diamètre $D = 9.99$ mm et (c) le diamètre d'ouverture D pour différentes amplitudes et fréquences donnant $\Gamma = 1.81$.

5.2.2 Loi d'échelle pour le débit

Pour aller plus loin et tenter de déterminer une loi d'échelle décrivant l'effet des vibrations, des mesures complémentaires ont été réalisées. Nous avons en effet mesuré le débit pour quatre diamètres d'ouverture et cinq fréquences en fonction de l'amplitude des vibrations (voir Table 5.3), comme présenté dans la Fig. 5.3a. On retrouve bien une diminution du débit avec l'amplitude, qui commence plus rapidement pour les fortes fréquences et faibles diamètres d'ouverture.

Table 5.3 Fréquences et amplitudes des vibrations utilisées lors des expériences, avec l'accélération adimensionnelle correspondante.

f (Hz)	A (µm)	Γ
15	$0 - 2000$	$0 - 1.81$
30	$0 - 800$	$0 - 2.90$
45	$0 - 360$	$0 - 2.93$
60	$0 - 200$	$0 - 2.90$
75	$0 - 130$	$0 - 2.94$

D'après Wassgren et al. [66], le paramètre contrôlant le débit est le nombre de Froude des vibrations,

donné dans notre configuration par :

$$Fr = \frac{A\omega}{\sqrt{gD}} \tag{5.6}$$

À noter que dans leur étude, Wassgren et al. utilisent comme grandeur caractéristique dans le nombre de Froude le diamètre hydraulique $D_h = \sqrt{WD}$. Ils utilisent néanmoins une configuration 3D, contrairement à notre cas quasi-2D, d'où l'utilisation du diamètre d'ouverture D comme taille caractéristique. Si l'on trace le débit normalisé en fonction du nombre de Froude, on trouve bien une courbe maîtresse sur laquelle toutes les données s'alignent, comme présenté sur la Fig. 5.3b. Nous pouvons alors modéliser ces résultats (ligne noire) en utilisant une exponentielle simple :

$$\frac{Q}{Q_0} = \mathcal{F}(Fr) = 1 - a\exp(-Fr^*/Fr) \tag{5.7}$$

où a et Fr^* sont deux constantes.

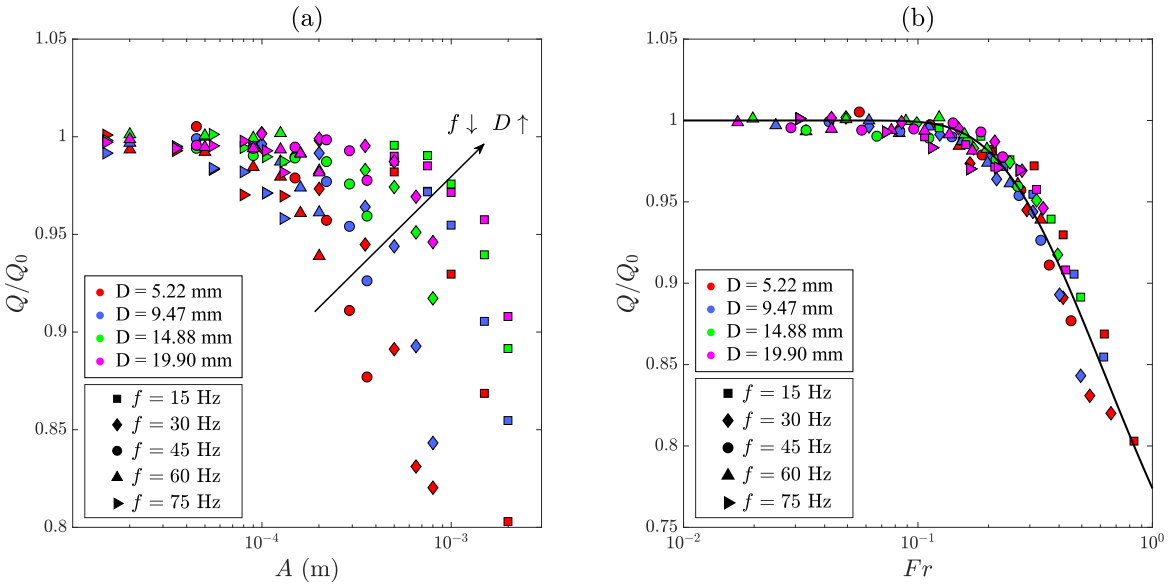


Figure 5.3 Évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction (a) de l'amplitude des vibrations A et (b) du nombre de Froude Fr pour différents diamètres d'ouverture D et fréquences f. Les résultats sont modélisés par l'Eq. 5.7 (ligne noire), avec $a = 0.421$ et $Fr^* = 0.622$ ($R^2 = 0.941$).

Ce comportement exponentiel est fréquemment observé en dynamique des milieux granulaires et d'autres systèmes organisés complexes [42, 68], et est comparable en particulier à une transition d'état de Kramers [68]. Cette analogie est reliée à la théorie de micro-plasticité, où les réorganisations locales sont souvent décrites par un modèle de Weibull, de la forme : $1 - \exp(t/\tau)^\beta$, avec un coefficient β généralement égal à 1 dans la plupart des cas [69]. Dans notre cas, sans vibration l'écoulement se fait surtout dans un *canal* au-dessus de l'ouverture. L'ajout de vibrations va engendrer des réorganisations dans les zones à l'arrêt, ces fameuses *zones mortes* mentionnées dans le chapitre 4 (section 4.2.3) et que nous étudierons plus en détail dans le chapitre 6. Ces réorganisations vont permettre aux zones mortes de s'écouler mais ont aussi tendance à augmenter les collisions dans le canal. On a alors une compétition au niveau de l'ouverture entre les particules du canal et celles provenant des zones mortes, un phénomène décrit dans l'étude de Pastor et al. [57] lors de l'évacuation de personnes ou d'animaux à travers un rétrécissement. Cela engendre une réduction du débit, de la même manière qu'un bouchon se crée sur une autoroute lorsque le nombre de voies se réduit. Un phénomène similaire a été observé dans les tas super stables ("super stable heap"), où la température granulaire engendrée par les écoulements de surface crée un profil exponentiel dans les zones de faible écoulement [70].

Une autre manière d'interpréter cette loi est de la voir comme un processus d'activation par les vibrations contrôlé par le nombre de Froude, qui rend compte de la propagation des vibrations dans le système. Dans notre cas, la fonction suggère l'existence d'un nombre de Froude de transition Fr^*

proche de 1. Pour $Fr \ll Fr^*$, le débit tend vers sa valeur sans vibration Q_0. Pour $Fr \gg Fr^*$, les vibrations diminuent grandement le débit, qui sature vers une valeur limite $Q_0 \times (1-a)$. Comme on peut le voir sur la Fig. 5.3b, cette transition n'est pas brutale et se fait de manière continue autour du nombre de Froude Fr^*. Le nombre de Froude traduit en effet ici le rapport entre la vitesse induite par les vibrations et la vitesse induite par la gravité. Dans le canal, les vibrations sont périodiquement opposées à la vitesse induite par la gravité et ne contribuent donc pas augmenter l'énergie cinétique des grains, voire même la font diminuer du fait des frottements (augmentation des collisions et du trajet des grains). En revanche dans les zones mortes, l'énergie cinétique transmise aux grains par les vibrations leur permet de se réorganiser et de se mettre en écoulement. Pour $Fr \ll Fr^*$, ces effets sont négligeables et on reste proche du cas sans vibration. En revanche pour $Fr \gg Fr^*$, l'effet de la gravité diminue tandis que les réorganisations induites par les vibrations dans tout le silo influent sur l'écoulement.

Il est justement important de noter que le nombre de Froude peut aussi être vu comme un nombre inertiel I pour les vibrations [71]. On peut en effet le réinterpréter sous la forme d'un rapport des temps typiques de la gravité et de la fréquence (période des vibrations) :

$$Fr = \frac{A\omega}{\sqrt{gD}} \propto \frac{Af}{\sqrt{gD}} = \frac{A}{t_v\sqrt{gD}} = \frac{t_g}{t_v} \quad \text{avec :} \quad t_g = \frac{A}{\sqrt{gD}} \tag{5.8}$$

On alors comme pour le nombre inertiel (voir chapitre 2, section 2.2.1) une comparaison entre un processus de réorganisation microscopique (la pression/les vibrations) et un mouvement macroscopique (le cisaillement/la gravité). Si $t_v > t_g$ ($\sim Fr < 1$), alors les grains ont le temps de s'écouler par gravité entre les périodes de vibrations et on retrouve le débit sans vibration. Cela correspond à un faible nombre inertiel, et donc un comportement du type solide ou liquide granulaire. À l'inverse pour $t_v < t_g$ ($\sim Fr > 1$) on a des réorganisations très rapides devant la gravité, et donc beaucoup de contacts entre particules dissipant de l'énergie et réduisant le débit. On se rapproche alors plutôt d'un gaz granulaire avec un grand nombre inertiel. Une interprétation similaire peut aussi être faite en interprétant le nombre de Froude comme un rapport de longueur :

$$Fr = \frac{A\omega}{\sqrt{gD}} = \frac{A}{L_g} \quad \text{avec :} \quad L_g = \frac{\sqrt{gD}}{\omega} \tag{5.9}$$

Dans ce cas, les effets des vibrations deviennent importants lorsque $A \gtrsim L_g$. Les grains vont alors remonter périodiquement à contre courant, engendrant des chocs et des trajets plus longs (un point que l'on étudiera dans la suite) et donc plus de dissipation.

Similitudes avec d'autres écoulements vibrés

Le comportement que nous venons de voir présente d'importantes similarités avec les écoulements granulaires dans la cellule de couette vibrée et le plan incliné vibré présentés dans le chapitre 2 (section 2.3). Nous avons vu pour la cellule de couette vibrée qu'il existe deux régimes, visqueux et frictionnel, dépendant des contraintes et séparés par une contrainte limite σ_f [35]. Le régime visqueux ($\sigma < \sigma_f$) est contrôlé par la contrainte de vibration $\sigma_v \propto A^2\omega^2$: il n'y a pas d'écoulement sans celle-ci et la viscosité diminue avec lorsqu'elle augmente. À l'inverse, dans le régime frictionnel ($\sigma > \sigma_f$) la contrainte de cisaillement est suffisante pour avoir un écoulement et les vibrations viennent surtout homogénéiser l'écoulement sans apporter de changement fondamental. Ces deux types de comportements sont observés simultanément dans le silo. Un écoulement lent de type "creeping flow" [72] contrôlé par les vibrations est observé au niveau des zones mortes alors qu'un écoulement frictionnel est observé dans la zone canalisée au centre. La baisse de débit est justement engendrée par une homogénéisation globale due aux vibrations et dépend de leur vitesse $A\omega$, directement reliée à la contrainte σ_v. Le cas $Fr \ll Fr^*$ correspondra donc à un régime majoritairement frictionnel tandis qu'on tendra vers un régime majoritairement visqueux pour $Fr \gg Fr^*$.

Pour le plan incliné, on observe aussi ces deux types de régimes, qui sont séparés par un angle d'inclinaison du plan critique θ_l [42]. En dessous de cet angle, l'écoulement ne se fait que si l'on applique des vibrations. Au-dessus de cet angle, les vibrations servent principalement à réduire la hauteur des dépôts h_{stop} au fond du plan. Dans le cas $\theta < \theta_l$, on a une relation exponentielle entre le nombre de Froude de l'écoulement et l'accélération adimensionnelle des vibrations : $\bar{u}/\sqrt{gh} \propto \exp(-\Gamma/\Gamma_a)$, avec Γ_a une

accélération critique. Dans le silo, les zones mortes correspondent au cas des faibles angles et le canal au cas des grands angles. Les vibrations mettent en mouvement les zones mortes sans changer drastiquement l'écoulement dans le canal. Elles permettent aussi de briser les arches et d'avoir des écoulements aux faibles diamètres d'ouverture D, ce qui correspond au cas d'un écoulement à faible hauteur h sur le plan. Enfin, on retrouve cette notion de valeur critique avec Fr^* et une loi en exponentielle de forme similaire pour les vibrations. Dans une moindre mesure, l'importance des nombres de Froude (de l'écoulement et des vibrations) dans chaque cas est un point à souligner. Ce constat n'est pas étonnant compte tenu des similitudes entre ces deux écoulements : ils sont engendrés par la gravité, contrôlés par une grandeur géométrique (hauteur h / diamètre D) tandis que les autres dimensions ne les affectent pas (largeur et longueur du plan / largeur et hauteur du silo) et présentent des limites d'écoulement (angle critique θ_l et hauteur de dépôt h_{stop} / limite du canal et ouverture critique $D \lesssim 5d$ avec les arches).

L'existence de ces similitudes montre que les effets rhéologiques influant sur ces écoulements sont similaires. Ceci suggère qu'il serait possible de trouver une loi rhéologique permettant de décrire le comportement des écoulements granulaires vibrés, qu'importent les vibrations et la géométrie. Déterminer la loi rhéologique de notre écoulement (un point qui fera l'objet du chapitre 10) permettrait donc non seulement d'expliquer les effets macroscopiques que nous venons de voir (évolution du débit), mais pourrait aussi être utilisée pour décrire les effets des vibrations dans d'autres écoulements. Malgré ces similitudes, il convient néanmoins de tempérer cette possibilité puisque l'écoulement en silo est particulier à cause des fortes inhomogénéités qui peuvent s'y développées.

5.2.3 Second régime des vibrations

Mesure de débit

D'après la loi empirique que nous venons d'obtenir (voir Eq. 5.7), le débit est censé saturer pour les grandes vibrations ($Fr \gg Fr^*$). Les résultats de Wassgren et al. [66] présentés dans le chapitre 3 (section 3.4.2) semblent confirmer cette tendance dans le cas d'un silo 3D. Cette saturation n'est néanmoins pas observable avec le premier dispositif expérimental utilisé, c'est pourquoi une version complémentaire de ce dispositif a été développée pour étudier le comportement à hautes vibrations (voir chapitre 4, section 4.1.2). Nous avons répété les expériences de vidanges précédentes mais cette fois avec des vibrations allant jusqu'à quasiment $\Gamma = 11$. Les gammes de fréquences et amplitudes utilisées sont présentées dans la Table 5.4. À noter que nous n'avons pas fait de mesure pour $f = 15$ Hz car l'amplitude maximale du pot vibrant ne peut dépasser 4 mm avec le silo (pour $\Gamma = 10$ et $f = 15$ Hz on a $A = 11$ mm).

Table 5.4 Fréquences et amplitudes des vibrations utilisées lors des expériences sur le dispositif complémentaire, avec l'accélération adimensionnelle correspondante.

f (Hz)	A (µm)	Γ
30	$0-2800$	$0-10.14$
45	$0-1250$	$0-10.19$
60	$0-700$	$0-10.14$
75	$0-450$	$0-10.19$

L'évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude Fr a été mesurée pour les différents diamètres d'ouverture à une fréquence $f = 30$ Hz (voir Fig. 5.4a) et pour les différentes fréquences à un diamètre $D = 9.40$ mm (voir Fig. 5.4b). Pour les faibles vibrations, on retrouve bien les résultats précédents avec une décroissance exponentielle. En revanche, on note l'apparition d'un *second régime* jamais observé précédemment lorsque les vibrations deviennent très importantes. Dans ce second régime, on observe les comportements suivants :

- Le débit augmente dans le second régime, qu'importent le diamètre et la fréquence des vibrations. Cette augmentation peut même engendrer un débit supérieur à celui sans vibration.
- Le débit dans le second régime ne dépend pas uniquement du nombre de Froude. On note en effet sur la Fig. 5.4b une divergence en fréquence : plus la fréquence est élevée, plus l'augmentation du débit commence tôt. Cette augmentation semble néanmoins plus lente pour les hautes fréquences.

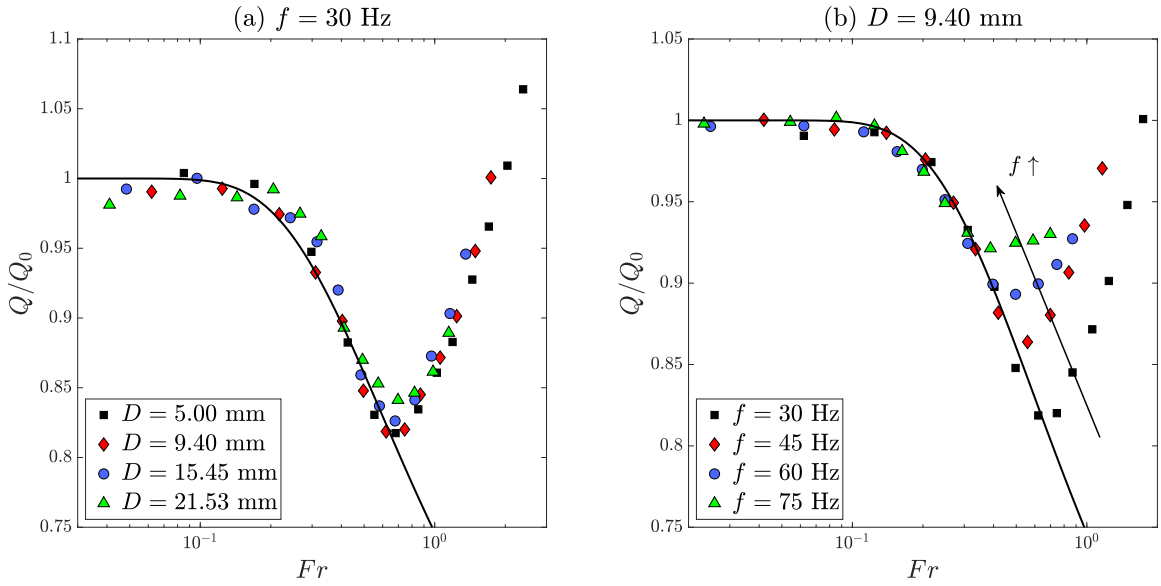


Figure 5.4 Évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude pour (a) les différents diamètres d'ouverture D à une fréquence $f = 30$ Hz et (b) pour les différentes fréquences à un diamètre $D = 9.40$ mm. Les résultats sont modélisés pour le premier régime par l'Eq. 5.7 (ligne noire), avec $a = 0.461$ et $Fr^* = 0.597$ ($R^2 = 0.971$).

- La contribution du diamètre d'ouverture dans le second régime est entièrement comprise dans le nombre de Froude : les courbes pour les différents diamètres restent bien toujours confondues dans la Fig. 5.4a.

Ce régime n'a pas été observé par Wassgren et al. [66] dans le cas d'un silo 3D avec un angle $\theta = 45°$. Cette absence peut s'expliquer par une dissipation d'énergie plus élevée, du fait de frottements entre particules plus importants et des mouvements selon la troisième dimension. Le second régime existe donc probablement mais uniquement pour des vibrations bien plus puissantes dans le cas 3D. Nous vérifierons ce point dans la section suivante (5.3.2) en vidangeant des grains de plus faible diamètre.

Observations visuelles et débit instantanée

Pour comprendre l'origine de ce second régime, nous nous sommes penché sur les images de l'écoulement au cours du temps, présentées sur la Fig. 5.5. On voit sur ces images que la vidange se fait par intermittence, sous la forme de *jets rapides* (ou *bursts*) périodiques qui apparaissent lorsque le silo se met à remonter du fait des vibrations. Ces jets sont donc créés par l'opposition entre le mouvement du silo qui remonte et celui des grains qui descendent, ceux-ci conservant leur inertie due à la gravité mais aussi à la descente du silo juste avant. Les grains proches de la sortie sont alors propulsés hors du silo par ceux au-dessus d'eux (à la manière d'un piston venant périodiquement presser les grains). Entre deux jets, on observe une baisse significative du nombre de grains sortant du silo. Ceci vient du fait que les grains suivent alors le mouvement du silo et ne s'échappent donc plus. Ces différentes étapes sont schématisées sur la Fig. 5.6.

Pour vérifier ces observations, nous avons mesuré le débit instantané Q_{inst} en calculant le nombre de grains passant l'ouverture pendant un temps court devant la fréquence des vibrations ($\Delta t = 5$ ms, soit une fréquence de mesure de 200 Hz pour une fréquence de vibrations $f = 30$ Hz). L'évolution de Q_{inst}/Q_0 avec le temps pour différentes amplitudes de vibrations est présenté sur la Fig. 5.7a. Sans vibrations, on obtient un débit instantané variant aléatoirement autour de sa valeur moyenne. Cette variation devient en revanche périodique lorsque l'on ajoute des vibrations, avec la même fréquence que les vibrations. Dans le premier régime ($A = 800$ µm), on retrouve une évolution relativement sinusoïdale autour d'une valeur moyenne plus faible que dans le cas sans vibration (la baisse de débit moyen provient de l'augmentation de compétition à l'ouverture discutée précédemment). Dans le second régime ($A = 2800$

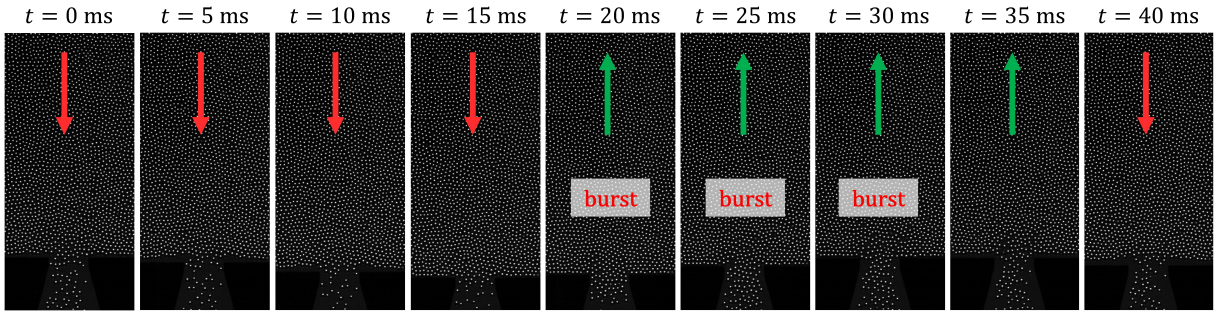


Figure 5.5 Images de l'écoulement à différents instants t pour un diamètre d'ouverture $D = 9.40$ mm, une fréquence $f = 30$ Hz et une amplitude $A = 2800$ µm. Les flèches rouges et vertes indiquent la direction du mouvement du silo créé par les vibrations. On voit à chaque fois que le silo commence à remonter ($t = 20$ ms ici) une forte augmentation du nombre de grains passant la sortie, ce qui correspond à un jet ou burst de matière.

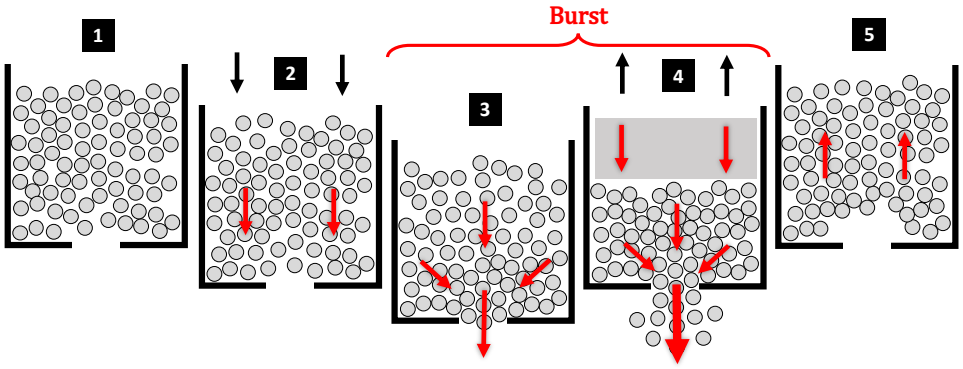


Figure 5.6 Schéma des différentes étapes de la dynamique de jets. Le mouvement du silo (en noir) est indiqué par les flèches noires et celui des grains (en gris) par les flèches rouges. (1) On part d'un cas à l'arrêt, avec le silo au plus haut de l'amplitude des vibrations. (2) Les grains descendent avec le silo et ne s'échappent donc pas. (3-4) Le burst intervient lorsque le silo s'arrête puis remonte tandis que les grains continuent de descendre par inertie. Ce jet est accentué par les grains au-dessus de l'ouverture venant s'écraser sur ceux en dessous comme un piston (bloc gris sur 4). (5) Le silo remonte et revient à sa position de départ, entrainant les grains qui continuent de remonter un peu par inertie.

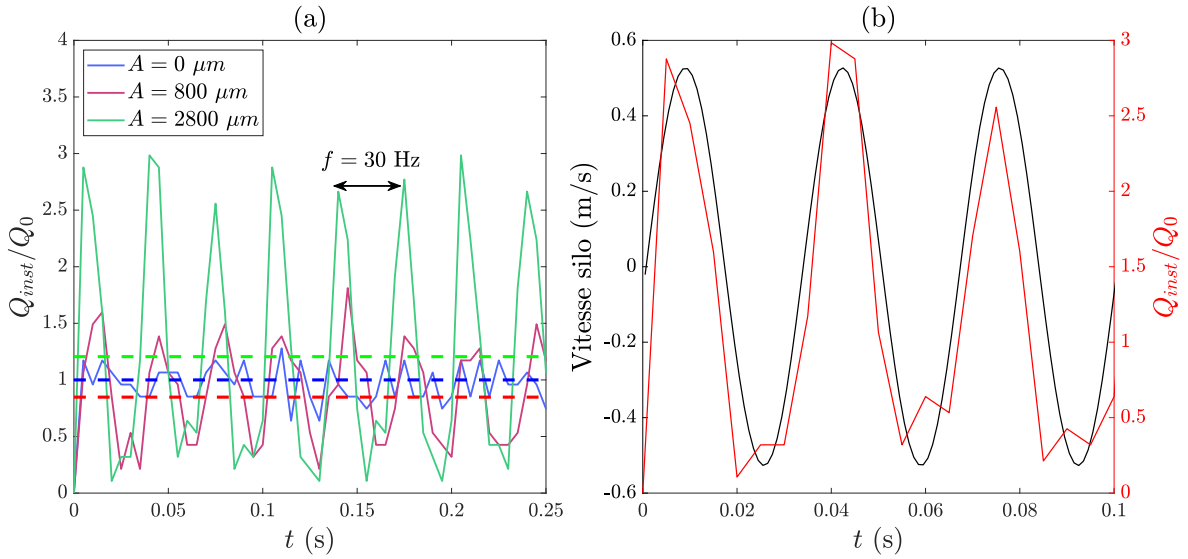


Figure 5.7 (a) Débit instantané normalisé Q_{inst}/Q_0 durant la vidange pour $D = 10.26$ mm, $f = 30$ Hz et trois amplitudes $A = 0$ µm (sans vibration), $A = 800$ µm (1^{er} régime) et $A = 2800$ µm (2^{nd} régime). Les lignes en pointillés indiquent le débit moyen du silo pour chaque amplitude. (b) Débit instantané normalisé Q_{inst}/Q_0 et vitesse du silo durant la vidange pour $D = 10.26$ mm, $f = 30$ Hz et $A = 2800$ µm. On obtient des pics de débit périodiques à chaque fois que le silo remonte.

µm), le débit instantané oscille entre d'importants pics de débit (les fameux jets) et des périodes avec très peu d'écoulement (quasiment aucun débit au plus bas). Pour ce dernier cas, nous avons mis en parallèle le débit instantané et la vitesse du silo sur la Fig. 5.7b. Les deux concordent complètement : le débit instantané augmente lorsque le silo remonte et atteint son maximum pour la vitesse de remontée maximale. Ce maximum correspond en effet au moment où on a la plus grande vitesse relative entre le silo (remontant) et les grains (descendant par inertie et gravité). Les baisses de débit correspondent au contraire aux périodes où le silo descend et suit donc le mouvement des grains. La vitesse relative entre les grains et le silo est alors proche de zéro, d'où un débit très faible.

Correction de la loi d'échelle à haute vibrations

Le second régime est donc créé par cette *dynamique de jets périodique* résultant directement du mouvement du silo par rapport à celui des grains. Ce mécanisme est très différent du premier régime, il n'est donc pas étonnant que nombre de Froude ne suffise plus pour décrire entièrement l'effet des vibrations sur les deux régimes. On peut alors émettre l'hypothèse que ces mécanismes sont indépendants et que l'évolution du débit observée est la résultante des effets de chacun. Dans ce cas, il est possible de décrire le débit normalisé de la manière suivante :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \mathcal{F}_1(X_i) + \mathcal{F}_2(X_j) \tag{5.10}$$

où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont les lois décrivant les effets liés respectivement au premier et second régime, et les X_i et X_j les paramètres (A, f, D...) dont dépendent ces lois. Comme on peut le voir sur la Fig. 5.4, les effets du second régime sont apparents uniquement pour les fortes vibrations ($Fr \gtrsim 0.5$). On a donc dans le cas de faibles vibrations :

$$\frac{Q}{Q_0} \sim 1 + \mathcal{F}_1(X_i) = \mathcal{F}(Fr) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F}_1(Fr) = -a_1 \exp(-b_1/Fr) \tag{5.11}$$

où $a_1 = a$ et $b_1 = Fr^*$ sont des constantes. On retrouve la loi que nous avons décrite précédemment, qui permet donc de décrire uniquement le premier régime. Puisque nous avons déterminé cette loi, nous pouvons alors isoler le second régime par une simple soustraction :

$$\mathcal{F}_2(X_j) = \frac{Q}{Q_0} - (1 + \mathcal{F}_1(Fr)) \tag{5.12}$$

L'évolution de cette fonction est représentée dans la Fig. 5.8a en fonction du nombre de Froude pour $D = 9.40$ mm et les différentes fréquences. On obtient bien un débit quasiment nul pour les faibles vibrations, puis une augmentation rapide passé un seuil qui décroît lorsque la fréquence des vibrations augmente.

Les paramètres X_j de cette loi sont reliés à la dynamique de jets engendrant le second régime. La taille de ces jets devrait être influencée par le diamètre d'ouverture D, la gravité g et la vitesse des vibrations $A\omega$. La fréquence f contrôle quant à elle les intervalles entre chaque jet. Le débit dans le second régime devrait donc être contrôlé par ces différents paramètres. Le nombre de Froude semble permettre de prendre en compte la contribution de ces différents paramètres mais les Figs. 5.4 et 5.8a indiquent une dépendance supplémentaire en fréquence. Pour prendre en compte cette contribution supplémentaire, on introduit la fréquence relative Ω donnée par :

$$\Omega = \frac{\omega}{\sqrt{g/d}} \tag{5.13}$$

Cette grandeur est utilisée dans l'étude des milieux granulaires vibrés [5] pour comparer la fréquence des vibrations à celle issue du mouvement des grains sous l'effet de la gravité. En effet, si la période des vibrations ($1/f$) est très grande devant le temps de mise en mouvement par la gravité ($\sqrt{d/g}$), alors les grains auront le temps de s'écouler entre deux cycles de vibrations et l'effet des jets sera amoindri (mais pas forcément nul si le Froude, et donc la vitesse, est grand). Dans ce cas, une forme simple permettant de rationaliser le comportement observé est du type $Fr\Omega^\beta$, avec β une constante.

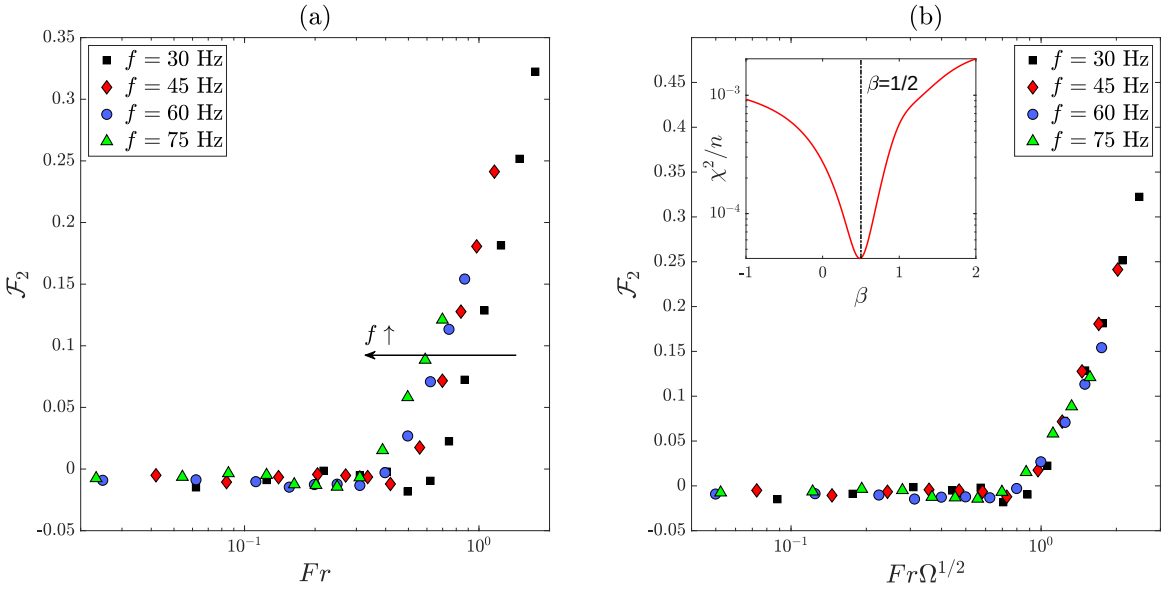


Figure 5.8 Évolution de $\mathcal{F}_2$ en fonction (a) du nombre de Froude et (b) de $Fr\Omega^{1/2}$ pour les différentes fréquences à un diamètre $D = 9.40$ mm. La puissance $\beta = 1/2$ attribuée à Ω est obtenue par une étude de sensibilité présentée en insert dans (b). Les résultats sont modélisés par une fonction polynomiale ($3^{ème}$ ordre) en fonction de $Fr\Omega^{\beta}$ et on obtient un minimum des résidus χ^2/n pour $\beta = 1/2$ (voir encadré).

Étude de sensibilité : Pour déterminer la qualité d'une modélisation lorsque l'on change un de ses paramètres, on peut réaliser une étude de sensibilité. On calcule alors pour tous les modèles (un pour chaque valeur du paramètre étudié) la somme des résidus χ^2/n, donnée par :

$$\chi^2/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{5.14}$$

avec n le nombre de valeurs, O_i les valeurs observées (ex : les valeurs de Q/Q_0 mesurées) et E_i les valeurs attendues (ex : les valeurs de Q/Q_0 calculées par le modèle). Ces résidus atteignent un minimum pour le modèle permettant de modéliser au mieux les résultats. Dans les cas que nous traiterons, cela signifie que les données sont alors rassemblées sur une courbe maîtresse. À noter qu'il est possible de faire cette étude pour plusieurs paramètres en même temps, auquel cas il faut chercher le minimum absolu des résidus pour avoir le meilleur modèle.

Pour déterminer la puissance β, on réalise une étude de sensibilité (voir encadré ci-dessus) sur les débits dans le second régime. Nous ne connaissons pas la forme exacte de la fonction $\mathcal{F}_2$, on utilise donc un polynôme du $3^{ème}$ ordre pour modéliser les résultats (de la forme $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec $x = Fr\Omega^{\beta}$). On obtient un minimum des résidus pour $\beta = 1/2$ (voir insert Fig. 5.8b). Les résultats sont en effet parfaitement rassemblés sur une seule courbe lorsque l'on représente la fonction $\mathcal{F}_2$ en fonction de $Fr\Omega^{1/2}$ (voir Fig. 5.8b). La fonction $\mathcal{F}_2$, et donc le second régime, dépend alors entièrement de $Fr\Omega^{1/2}$. L'origine de cette dépendance provient de la propagation des vibrations sous la forme d'ondes de choc dans le silo, un phénomène déjà observé pour des tas granulaires vibrés [73, 74, 75]. Ces études ont montré qu'une partie du tas au-dessus des parois vibrantes est alors fluidisée et montre un comportement de type gaz granulaire. Cette zone fluidisée subit des cycles de compression et décompression du fait du mouvement des parois et de la gravité, à la manière d'un gaz dans un moteur à piston. Ce comportement, et en particulier l'énergie transmise au tas, dépend d'un nombre de Froude $Fr = A\omega/\sqrt{gh}$, avec h la hauteur caractéristique du tas. Dans notre cas, l'ouverture permet aux grains de s'échapper lorsqu'ils sont compressés par les parois remontant et les grains au dessus descendant, donnant lieu aux jets.

Une dernière étape pour obtenir la loi complète du débit sous vibrations est de déterminer la forme de cette fonction $\mathcal{F}_2$. Les résultats semblent indiquer une augmentation constante du débit mais il est probable qu'une limite existe. Plusieurs formes sont donc possibles pour la fonction et il est difficile de

conclure sans connaitre le comportement lorsque $Fr\Omega^{1/2} \to \infty$. Ce point fera donc l'objet d'une étude approfondie en simulation (voir chapitre 9), qui permet d'atteindre des vibrations impossibles à obtenir expérimentalement. On vérifiera aussi la dépendance supplémentaire à la taille des grains par rapport au premier régime.

5.3 Impact des autres paramètres

Jusqu'à présent, nous sommes restés sur le cas d'une vidange d'un silo rectangulaire pour des billes de verre d'environ 1 mm de diamètre. En effet, seul le diamètre d'ouverture D ainsi que les paramètres des vibrations, l'amplitude A et la fréquence f, ont été modifiés. D'autres paramètres peuvent néanmoins jouer sur le débit et changer les lois d'échelle que nous avons obtenues.

5.3.1 Effet de l'angle d'ouverture

Dans la section précédente, nous avons étudié l'effet des vibrations dans le cas d'un silo rectangulaire, donc avec un angle d'ouverture $\theta = 0°$. Néanmoins, pour les silos habituellement rencontrés dans la pratique ont aura plutôt $\theta > 30°$. Il est donc nécessaire de connaitre l'impact de cet angle sur le débit. Pour cela nous avons réitéré les mesures décrites dans la section 5.2.2 pour d'autres angles d'ouverture $\theta = 15 - 60°$. Ces mesures ayant été effectuées sur la version originale du dispositif, nous aurons uniquement accès au premier régime des vibrations (l'angle ne pouvant être modifié sur la version complémentaire).

Dans le cas sans vibration, on obtient une augmentation du débit lorsque l'angle augmente, comme présenté sur la Fig. 5.9a. Cette augmentation est significative pour les grands angles d'ouverture ($\theta > 30°$) et les petits diamètres d'ouverture ($D < 10$ mm), ce qui est cohérent avec les résultats de Benyamine et al. [47]. À noter que nous avons des erreurs relatives assez importantes pour ces mesures (jusqu'à 20%). Cette incertitude vient du fait qu'il est difficile de régler exactement le même diamètre d'ouverture pour chaque angle, ce qui entraine une erreur sur le débit [2].

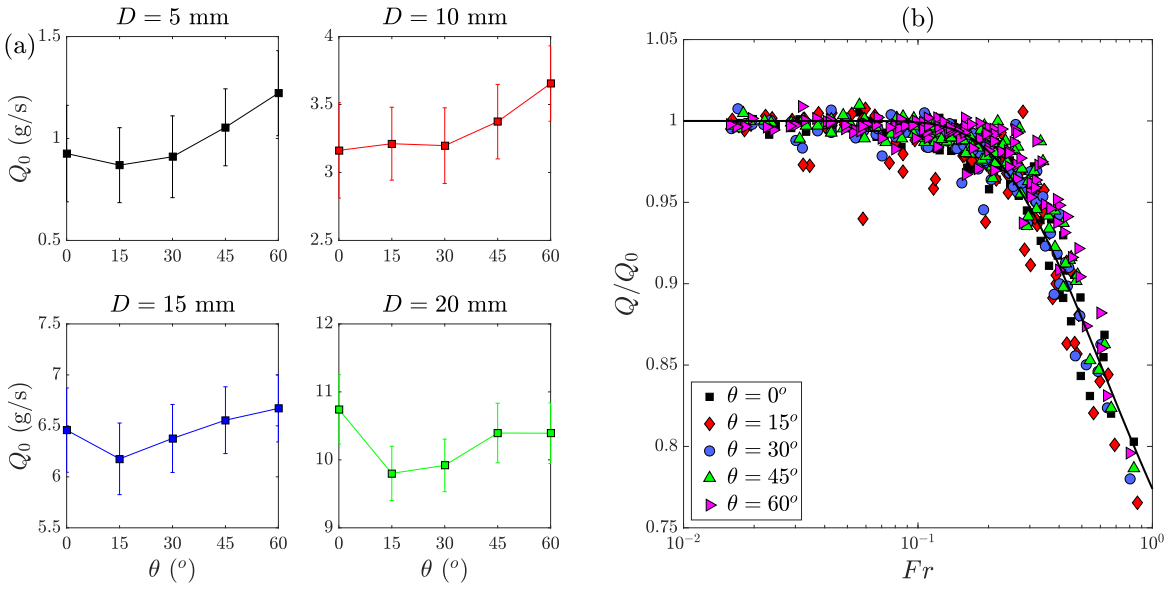


Figure 5.9 (a) Évolution du débit sans vibration Q_0 en fonction de l'angle d'ouverture θ pour plusieurs diamètres d'ouverture D. (b) Débit normalisé Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude Fr pour différents angles d'ouverture. Pour chaque angle, la vidange a été effectuée pour quatre diamètres ($D = 5-20$ mm) et cinq fréquences ($f = 15-75$ Hz). Les résultats sont modélisés par l'Eq. 5.7 (ligne noire) obtenue pour $\theta = 0°$, avec $a = 0.421$ et $Fr^* = 0.622$ ($R^2 = 0.941$).

2. L'incertitude réelle, déterminée en répétant les vidanges dans un cas précis est bien plus faible, ne dépassant pas 5% comme dans la section précédente.

Dans le cas avec vibrations, présenté sur la Fig. 5.9b, on obtient des résultats similaires pour les différents angles d'ouverture. Une très faible tendance semble observable, avec une augmentation générale des débits pour les angles les plus élevés. Ceci est néanmoins discutable compte tenu des incertitudes de mesure ainsi que de l'existence du second régime, qui est potentiellement dépendante de l'angle d'ouverture. On peut donc considérer que le premier régime est indépendant de l'angle d'ouverture, qui affecte uniquement le débit sans vibration Q_0. L'étude de l'effet de l'angle dans le second régime sera effectuée dans la partie 3 par simulations numériques.

5.3.2 Effet des propriétés des grains

On ne considère dans ce chapitre que le cas de particules sphériques non cohésives. Les propriétés des particules que l'on peut changer sont donc la masse volumique ρ et le diamètre d. Nous avons donc réalisé plusieurs expériences de vidange avec des billes dans d'autres matériaux (acier et polystyrène) ainsi que pour des diamètres d plus faibles (l'épaisseur du silo ne pouvant être modifiée). Les propriétés de ces particules sont présentées dans la Table 5.5.

Table 5.5 Propriétés physiques des particules utilisées lors des expériences de vidange comparées à l'étalon précédent

Nom	Matériaux	ρ (kg/m^3)	Forme	d (mm)	Teneur en eau
Étalon	Verre	2500	sphère	$1-1.25$	0%
Poly-d1	Polystyrène	1040	sphère	$1-1.25$	0%
Acier-d1	Acier	7830	sphère	$1-1.20$	0%
Verre-d2	Verre	2500	sphère	$0.50-0.60$	0%
Verre-d3	Verre	2500	sphère	$0.25-0.3$	0%

Pour chaque type de particules, le débit du silo a été mesuré pour un diamètre d'ouverture $D \sim 10$ mm sans vibration et pour plusieurs amplitudes A à une fréquence $f = 30$ Hz. Le débit sans vibration Q_0 dans chaque cas est présenté dans la Table 5.6, tandis que l'évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction de l'amplitude est présenté dans la Fig. 5.10. Les inserts dans la Fig. 5.10 présente aussi l'évolution du débit non normalisé Q dans chaque cas [3].

Table 5.6 Débits sans vibration Q_0 pour une ouverture $D \sim 10$ mm et les différents types de particules

Diamètres (mm)	9.24			10.26		
Échantillon	Étalon	Poly-d1	Acier-d1	Étalon	Verre-d2	Verre-d3
Q_0 (g/s)	3.09	1.21	9.86	3.85	4.38	6.76

Effet de la masse volumique

Concernant la masse volumique (Fig. 5.10a), on n'observe pas de changement significatif du débit normalisé Q/Q_0 dans les deux régimes entre les billes de verre ($\rho = 2500$ kg/m^3) et les billes d'acier ($\rho = 7830$ kg/m^3). Pour les billes de polystyrène, les résultats sont identiques dans le premier régime mais on constate un retard important du second régime par rapport aux autres densités. Cet écart provient de deux difficultés techniques observées lors de la vidange du fait de la faible masse des grains :

- L'électricité statique : malgré le revêtement antistatique sur les parois, on constate la présence d'électricité statique dans le silo avec les grains de polystyrène (les grains forment parfois des arches dans toute la longueur du silo). Le second régime est donc affecté par ce problème du fait des importants frottements engendrés par les vibrations.
- Une masse trop faible : la faible hauteur du dispositif complémentaire ($H = 30$ cm) ne permet pas d'avoir une masse suffisante pour maintenir les grains de polystyrène au fond du silo. Dans le second

3. À noter que les mesures pour les particules étalon ont été répétées du fait d'un changement de la taille d'ouverture (nettoyage du silo) entre les mesures pour les différentes densités ρ et les différents diamètres de grain d.

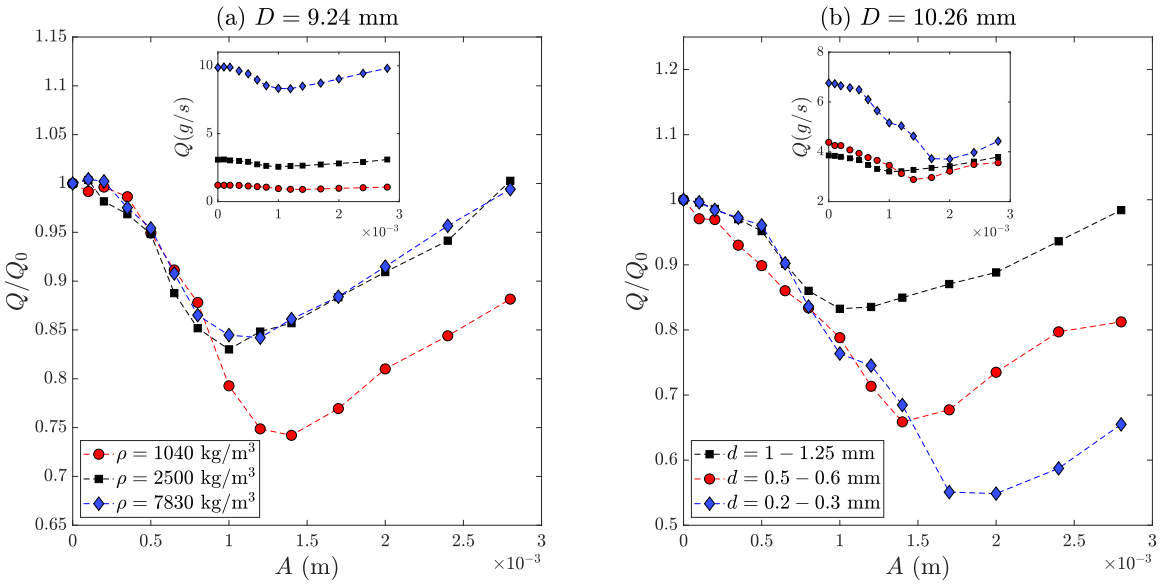


Figure 5.10 Évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction de l'amplitude pour des grains de différentes (a) masses volumiques ρ et (b) diamètres d. Dans chaque cas, la fréquence vaut $f = 30$ Hz et le diamètre d'ouverture est $D \sim 10$ mm (valeur exacte indiquée au-dessus de chaque cas). Les carrés noirs correspondent aux résultats obtenus avec les particules étalon. L'évolution du débit non normalisé Q en fonction de A est aussi présentée en insert pour tous les cas.

régime, on a un décollement des grains ce qui impact le débit (ce qui n'est pas le cas pour les grains plus dense).

Si l'on fait abstraction de cet écart, on obtient un débit normalisé indépendant de la masse volumique, dont la contribution est prise en compte dans Q_0 (qui varie grandement comme on peut le voir dans l'insert de la Fig. 5.10a). Les lois $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont donc bien indépendantes de la densité des particules. Ce comportement provient du fait que la masse des grains n'intervient pas dans la relation entre les vibrations et la gravité. La masse des grains affecte en effet de manière égale les termes découlant des vibrations et de la gravité (ex : $F_g = mg$ et $F_{vib} = mA\omega^2$, $E_{c,g} \sim \frac{1}{2}mgD$ et $E_{c,vib} \sim \frac{1}{2}mA^2\omega^2$). Le nombre de Froude Fr et la fréquence relative Ω comparent les effets de la gravité et des vibrations : la masse se simplifie et n'affecte donc pas les deux régimes.

Effet de la taille des grains

Concernant la taille des grains (Fig. 5.10b), on note une diminution plus importante du débit dans le premier régime et un retard du second régime pour les petits diamètres d. Ce résultat va dans le sens d'une dépendance du second régime avec $\Omega = \omega/\sqrt{g/d}$, mais le retard est bien plus grand que prévu. Ceci s'explique l'augmentation de la friction en 3D par rapport au cas quasi-2D, que nous avions déjà évoquée. La friction entre les grains est en effet plus importante qu'avec les parois, d'où une perte d'énergie plus importante et donc un débit plus faible. Cette perte d'énergie est accentuée par la nature 3D de l'écoulement : les grains peuvent se déplacer selon la profondeur (donc perte de vitesse vers la sortie) et on a une augmentation des contacts et des réarrangements du fait de cette troisième dimension. Ce comportement est cohérent avec les résultats de Wassgren et al. [66], qui ont uniquement observé une baisse importante du débit avec les vibrations dans le cas d'un silo 3D. Cette configuration 3D engendre une friction plus importante et il aurait été nécessaire d'appliquer des vibrations extrêmement puissantes pour atteindre le second régime.

Estimer la contribution exacte du diamètre des grains dans les lois précédentes est néanmoins difficile. On passe en effet d'un cas quasi-2D à un cas 3D, ce qui implique des lois de vidange différentes. La forme des courbes reste néanmoins similaire, et donc les lois pour chaque régime en 3D doivent être aussi similaires (comme pour les lois de vidange sans vibration dans les cas 2D et 3D présentées dans le chapitre 3). Déterminer ces lois 3D nécessite néanmoins une étude à part entière qui sort du cadre de la thèse.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié expérimentalement l'évolution du débit d'un silo quasi-2D soumis à des vibrations afin de comprendre comment celui-ci évolue selon les paramètres du problème. Pour ce faire, l'influence des vibrations (fréquence f et amplitude A), de la géométrie de l'ouverture (diamètre D et angle θ) et des propriétés des particules (masse volumique ρ et diamètre d) a été mesurée. On voit alors apparaître deux régimes distincts :

- Dans le premier régime : augmenter les vibrations diminue le débit, du fait d'une augmentation de la compétition en sortie. Les zones mortes de l'écoulement sont mises en mouvement par les vibrations tandis que les frottements augmentent dans le canal d'écoulement du fait de l'opposition entre la gravité et les vibrations. Ce régime a déjà été mis en évidence dans la littérature [66] et dépend entièrement du nombre de Froude $Fr = A\omega/\sqrt{gD}$. Nous avons proposé de modéliser son effet par une fonction exponentielle $\mathcal{F}_1$:

$$\mathcal{F}_1 = -a_1 \exp(-b_1/Fr) \tag{5.15}$$

- Dans le second régime : augmenter les vibrations augmente le débit, du fait d'une dynamique de jets périodiques. Lorsque le silo se met à remonter du fait des vibrations, les grains conservent leur inertie : les grains à l'ouverture sont alors compressés, les propulsant hors du silo sous la forme d'un jet de matière dense. Entre ces jets, le débit est quasiment nul car les grains suivent le mouvement du silo. Ce régime n'a jamais été mis en évidence auparavant mais son comportement concorde avec les résultats de la littérature sur les tas granulaires vibrés [74, 75, 79]. Il est contrôlé par le nombre de Froude Fr et la fréquence relative $\Omega = \omega/\sqrt{g/d}$ et suit une fonction $\mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2})$ restant à déterminer.

Le débit total résulte de la combinaison de ces deux régimes et est donné par la loi empirique suivante :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \mathcal{F}_1(Fr) + \mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2}) \tag{5.16}$$

Les contributions de la masse volumique ρ et l'angle d'ouverture θ (dans le premier régime) sont prises en compte dans Q_0 et n'affectent pas les effets des vibrations. Diminuer le diamètre des grains d crée (en plus de l'effet dans Ω) un retard du second régime engendré par des frottements plus élevés du fait du passage à un écoulement 3D.

Ces résultats nous permettent de décrire la vidange du point de vue macroscopique (débit du silo). Les deux régimes observés proviennent néanmoins de comportements à l'échelle microscopique (taille des grains) qu'il est nécessaire d'étudier si l'on veut véritablement comprendre cet écoulement granulaire. C'est sur ce point que nous allons nous pencher dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Étude de la dynamique à l'échelle locale

6.1 Méthodes d'analyse de l'écoulement . . . 85
6.1.1 Reconstruction des motifs d'écoulement . . . 85
6.1.2 Calcul des champs de grandeurs sur le maillage . . . 86
6.1.3 Calcul des grandeurs le long de profil . . . 89
6.1.4 Analyse statistique . . . 89
6.2 Étude de l'écoulement dans le silo . . . 90
6.2.1 Premier régime des vibrations . . . 90
6.2.2 Second régime des vibrations . . . 96
6.3 Étude de l'écoulement au niveau de l'ouverture . . . 98
6.3.1 Premier régime des vibrations . . . 98
6.3.2 Second régime des vibrations . . . 103
6.4 Conclusion . . . 106

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'écoulement de manière locale pour comprendre l'effet des vibrations et l'origine de l'évolution du débit macroscopique. Ces informations sont déduites des images obtenues par la caméra grâce au programme de détection et suivi des particules. Nous verrons dans un premier temps les méthodes utilisées pour analyser les résultats du tracking des particules. Nous présenterons ensuite les motifs d'écoulement et champs de grandeur (vitesse, gradient, température granulaire...) calculés dans le silo. Enfin, nous étudierons en détail le comportement à l'ouverture et analyserons ces résultats d'un point de vue statistique.

6.1 Méthodes d'analyse de l'écoulement

En utilisant le programme de suivi décrit dans le chapitre 4 (section 4.2.2) sur les images de l'écoulement, nous pouvons déterminer les trajectoires de toutes les particules et donc leurs positions et vitesses au cours du temps dans le référentiel du silo. On a alors une description lagrangienne de l'écoulement, mais il est généralement préférable pour l'analyse d'avoir une description eulérienne. Pour ce faire, nous avons calculé à partir des trajectoires des particules :

- Les motifs d'écoulement dans le silo, qui permettent de visualiser comment les différentes couches de grains s'écoulent dans le silo au cours du temps.
- Les champs de grandeurs moyens dans le silo, qui nous renseignent sur le comportement rhéologique local (à l'échelle des grains) de d'écoulement dans la zone filmée.
- Les profils de grandeurs moyens en sortie du silo, qui lient l'écoulement dans le silo au débit en sortie étudié dans le précédent chapitre.
- Les variations temporelles et statistiques de l'écoulement en sortie, qui nous renseignent sur les effets cachés derrière le comportement moyen.

Dans cette section, nous allons décrire comment chacun de ces points sont calculés. L'analyse de ces résultats nous permettra ensuite de faire le lien entre l'écoulement et les effets sur le débit des vibrations.

6.1.1 Reconstruction des motifs d'écoulement

Une manière simple pour visualiser l'écoulement dans le silo est de reconstruire les motifs d'écoulement, qui montrent comment les différentes couches de grains se vidangent [1]. Ces motifs sont obtenus à partir

1. Dans de nombreuses études [49, 65, 66], ces motifs sont visualisés directement en remplissant le silo avec des couches de grains de différentes couleurs. Nous ne pouvons néanmoins pas utiliser cette technique si l'on veut suivre les particules,

des trajectoires des grains. La méthode est relativement simple :

- On récupère la hauteur initiale des particules dans le silo à l'instant $t = 0$. Ces particules sont séparées en plusieurs couches et on leur attribue une couleur en fonction de la hauteur de leur couche (bleu pour la couche la plus basse, rouge pour la plus haute).
- Aux instants suivants, on cherche les particules présentes à l'instant $t = 0$. Ces particules seront colorées en fonction de leur couche initiale. Les particules qui n'étaient pas présentes à $t = 0$ sont colorées en rouge foncé, puisqu'elles viennent normalement d'une hauteur supérieure au maximum initial.

À noter que l'on veillera bien à se placer dans le référentiel du silo en retirant le mouvement du silo à celui des particules. Un exemple d'évolution de ces motifs au cours du temps est présenté dans la Fig. 6.1.

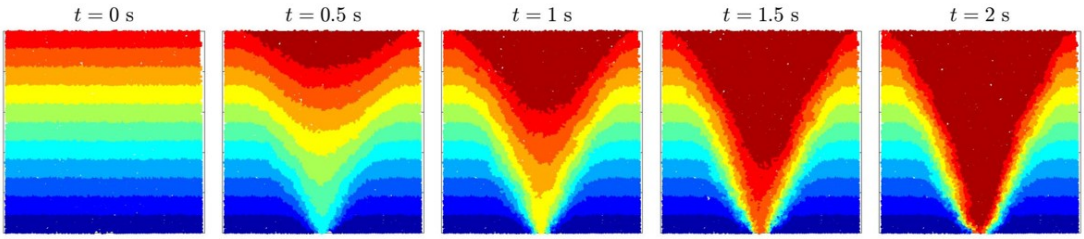


Figure 6.1 Exemple de motifs d'écoulement dans le silo au cours du temps pour $D = 10.07$ mm sans vibration. Les particules sont colorées en fonction de leur hauteur initiale selon plusieurs couches.

6.1.2 Calcul des champs de grandeurs sur le maillage

Maillage du silo

Pour pouvoir analyser précisément l'écoulement, la zone au-dessus de l'ouverture du silo a été maillée selon les directions x (largeur) et z (hauteur). L'écoulement selon la direction y (profondeur) n'est pas considéré puisque l'on n'a qu'une seule couche de particules en écoulement, du fait de la nature quasi-2D du silo. Le maillage est donc quasi-2D, avec un découpage en 2D mais possédant une profondeur W. Ce maillage est de plus cartésien, avec des mailles carrées de taille L_M (voir Fig. 6.3). La taille des mailles L_M doit être plus grande que la taille d'un grain d pour ne pas avoir de variations trop aléatoires, tout en était suffisamment petite pour permettre de capter les variations spatiales des champs dans l'écoulement.

Nous avons donc mesuré l'évolution des grandeurs pour différentes tailles de maille $L_M = 0.1 - 10$ mm, comme présenté sur la Fig. 6.2 pour la vitesse. Pour les tailles $L_M \lesssim d$, on observe bien des variations importantes de vitesse selon la taille utilisée. Il en est de même pour $L_M > 5$ mm, du fait des variations spatiales de vitesse. La gamme $L_M = 2 - 5$ mm semble donc un bon compromis, puisque l'on a une vitesse relativement constante pour ces valeurs (pas de variations aléatoires ou spatiales trop importantes). Pour maximiser la résolution spatiale du maillage, nous avons finalement choisi $L_M = 2$ mm.

La taille du maillage quant à elle dépendra de la taille de la zone filmée lors de la vidange. Cette taille dépend de la fréquence d'acquisition de la caméra, qui doit être modifiée selon la vitesse des particules et des vibrations (voir chapitre 4, section 4.2.2). Pour une fréquence d'acquisition de 1000 im/s (cas sans vibration et premier régime), la zone filmée englobe toute la largeur du silo et est un carré de 100×100 mm. Pour une fréquence de 2000 im/s (cas du second régime), il est nécessaire de restreindre la zone à un rectangle de 70×55 mm. À noter que dans chaque cas, pour éviter l'influence des parois du silo, le maillage débutera à 1 mm ce celles-ci ($\sim d$), comme on peut le voir sur la Fig. 6.3a ($z = [1, 101]$ mm au lieu de $[0, 100]$ et $x = [-49, 49]$ mm au lieu de $[-50, 50]$).

Calcul sur le maillage

Le maillage nous permet de déterminer les champs de grandeurs à partir des positions et des vitesses des particules dans chaque maille à chaque instant (voir Fig. 6.3b). Pour ce faire, on effectuera des

celles-ci devant être transparentes

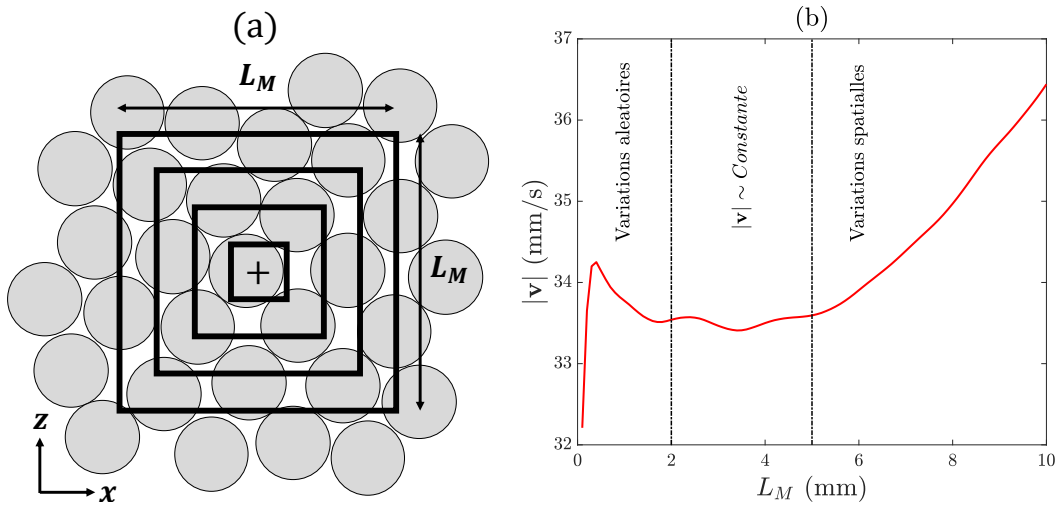


Figure 6.2 Mesure des grandeurs pour plusieurs tailles de maille L_M : (a) Schéma de principe avec plusieurs mailles carrées de taille L_M et des particules et (b) Évolution de la norme de vitesse $|\mathbf{v}|$ en fonction de la taille de maille $L_M = 0.1 - 10$ mm (centre de la maille en $x = 10$ mm et $y = 10$ mm, pour $D = 10.07$ mm sans vibration). La gamme de taille adaptée est obtenue pour $L_M = 2 - 5$ mm.

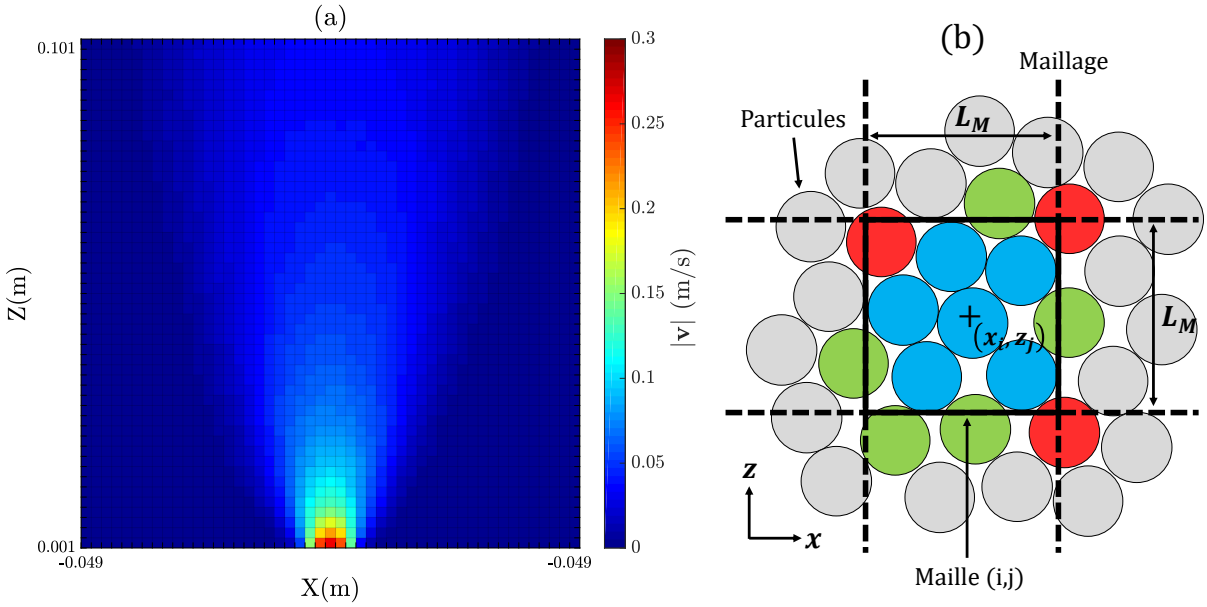


Figure 6.3 (a) Maillage de la zone en sortie du silo avec le champ de la norme de vitesse $|\mathbf{v}|$ pour $D = 10.07$ mm et sans vibration. (b) Schéma d'une maille (i, j) du maillage et des particules dans celle-ci à un instant t. Les particules en bleu sont entièrement dans la maille, celles en vert sont sur les côtés et celles en rouge dans les coins. Les grandeurs dans la maille sont obtenues à partir de celles des grains en moyennant selon leur volume inclus.

moyennes volumiques sur les données des particules, c'est-à-dire que l'on pondérera la contribution de chaque particule par son volume inclus dans la maille. Pour calculer ce volume inclus, V_k, on devra différencier trois cas :

- La particule est entièrement dans la maille (en bleu sur la Fig. 6.3b). Dans ce cas : $V_k = V_p = 4\pi r^3/3$, avec V_p le volume de la particule qui est une sphère de rayon r.
- La particule est sur un côté de la maille (en vert sur la Fig. 6.3b). Dans ce cas : $V_k = V_c = \pi h_c^2(3r - h_c)/3$ avec V_c le volume de la calotte sphérique de hauteur h_c créée par l'intersection du maillage et de la particule sphérique (détail en Annexe A).
- La particule est dans un coin de la maille (en rouge sur Fig. 6.3b). Contrairement au cas précédent, il n'existe pas de formule simple dans ce cas, mais il est possible de paramétriser ce volume et

de le calculer par intégrale. La résolution théorique de cette intégrale prend néanmoins du temps (uniquement possible numériquement), donc on préférera discrétiser ce volume pour accélérer le calcul (la discrétisation et le calcul sont détaillés en Annexe A).

La moyenne volumique pour une grandeur G donnée sur une maille est alors donnée par la formule suivante :

$$G = \frac{\sum_{k=1}^{n} V_k.G_k}{\sum_{k=1}^{n} V_k} \tag{6.1}$$

où n est le nombre de particules dans la maille, V_k est le volume inclus dans la maille de la particule k et G_k la valeur de la grandeur pour la particule k. Dans la suite, on notera cette moyenne volumique simplement : $G = \langle G_k \rangle_V$

Grandeurs calculées sur le maillage

Pour chaque maille composant le maillage, nous calculons les grandeurs suivantes :

► **La vitesse :** elle sera notée $\mathbf{v}$ et possède deux composantes v_x et v_z. La vitesse dans chaque maille est calculée en faisant une moyenne volumique des vitesses des particules dans la maille : $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}_k \rangle_V$, avec $\mathbf{v}_k$ la vitesse des particules k dans la maille.

► **Le tenseur des taux de déformation :** il est noté $\dot{\gamma}$ et possède quatre composantes ($\dot{\gamma}_{xx}$,$\dot{\gamma}_{xz}$,$\dot{\gamma}_{zx}$,$\dot{\gamma}_{zz}$). Chaque composante est calculée à partir des vitesses v_x et v_z obtenues sur le maillage. Pour ce faire, on discrétise la formule du gradient par un schéma centré :

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{avec :} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} \tag{6.2}$$

Ce tenseur est apparenté aux gradients de vitesse et est primordial dans la rhéologie du milieu comme nous l'avons vu dans le chapitre 2. L'écoulement ne possédant pas de direction privilégiée, on s'intéressera surtout à sa norme $|\dot{\gamma}|$ que l'on appellera simplement taux de déformation dans la suite.

► **La température granulaire :** elle est notée T_g et est un scalaire rendant compte de l'agitation dans le milieu granulaire, par similitude à l'agitation thermique dans les gaz. Dans chaque maille, elle est calculée par une moyenne volumique des fluctuations de vitesse au carré : $T_g = \langle (\mathbf{v}_k - \mathbf{v})^2 \rangle_V$.

► **La fraction volumique :** elle est notée ϕ et calculée dans chaque maille par le rapport entre le volume total de grains dans la maille et le volume de la maille :

$$\phi = \frac{\sum_{k=1}^{n} V_k}{V_M} \tag{6.3}$$

où $V_M = W.L_M^2$ est le volume d'une maille. Bien que théoriquement calculable sur n'importe quelle maille, la fraction volumique n'a de sens que pour un volume suffisamment grand pour être représentatif du milieu. Les valeurs obtenues sur un maillage fin sont donc discutables.

► **Le volume libre :** il est noté V_{lib} et correspond au volume de vide autour d'une particule. Contrairement à la fraction volumique, il peut être calculé pour des maillages très fins. On peut le calculer à partir du *volume de Voronoi* (noté V_{vor}) autour de chaque grain de volume V_p, puis on le moyenne sur une maille :

$$V_{lib,k} = V_{vor,k} - V_p \quad \text{et} \quad V_{lib} = \langle V_{lib,k} \rangle_V \tag{6.4}$$

Le calcul du volume de Voronoi pour chaque grain est décrit en Annexe A. Il est important de noter que l'on peut revenir à la fraction volumique à partir du volume libre :

$$\phi_c = \frac{V_p}{V_{lib} - V_p} \tag{6.5}$$

Cette fraction volumique "calculée" ϕ_c à l'avantage d'être moins aléatoire que la fraction volumique obtenue classiquement lorsque le maillage est fin.

6.1.3 Calcul des grandeurs le long de profil

Pour analyser plus en détail l'écoulement, on étudie aussi celui-ci le long de profils dans le silo. Ces profils sont radiaux, formant des demi-cercles centrés sur l'ouverture du silo de différents rayons R_c (voir Fig. 6.4a). La position le long de ce type de profils est repérée par l'angle φ. On mesurera les vitesses ainsi que le volume libre le long de ces profils. Pour cela, on détermine les particules proches (distance inférieure à un diamètre de particule d) de chaque point du profil l'instant t (voir Fig. 6.4b). On réalise ensuite une moyenne des grandeurs de ces particules, pondérée par leur distance au point du profil :

$$G = \frac{\sum_{k=1}^{n}(d - l_k).G_k}{\sum_{k=1}^{n}(d - l_k)} \tag{6.6}$$

où G est la grandeur étudiée et l_k la distance entre le centre de la particule k et le point du profil considéré (on a toujours $l_k < d$).

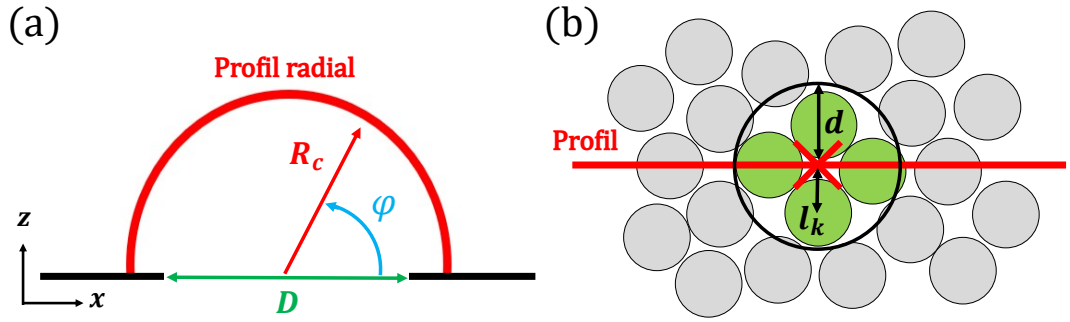


Figure 6.4 (a) Schéma d'un profil radial typique étudié dans le silo : demi-cercle centré sur l'ouverture avec un rayon R_c. L'angle φ est utilisé pour repéré la position le long du profil. (b) Schéma de la mesure de grandeurs sur un point ($\times$ rouge) d'un profil : on repère les particules dont les centres sont à moins d'un diamètre d du point (en vert) et on effectue une moyenne en fonction de leur distance au point l_k (voir Eq. 6.6).

6.1.4 Analyse statistique

Dans la majeure partie de ce chapitre, on s'intéressera surtout à des valeurs moyennes, calculées sur un intervalle de temps suffisamment long pour éviter les fluctuations temporelles. Dans certains cas, il est néanmoins intéressant de se pencher sur les fluctuations des différentes grandeurs lors de la vidange. On retiendra en particulier deux types d'informations sur ces grandeurs [2] :

- **Le spectre de Fourier :** réponse fréquentielle d'un signal (dans notre cas la variation temporelle d'une grandeur) permettant de déterminer si celui-ci possède des fréquences propres, auquel cas on obtient aussi l'importance de chaque fréquence. On l'obtient en faisant une transformée de Fourier (ou FFT pour "Fast Fourier Transform") sur la mesure de la grandeur que l'on souhaite analyser. Ce type d'analyse est particulièrement utile dans notre cas pour voir les effets périodiques dus aux vibrations. La réponse obtenue pour une fréquence $f_r = 0$ Hz correspond à la valeur moyenne.
- **La densité de probabilité :** distribution statistique d'un signal correspondant à la probabilité normalisée de chaque valeur le composant. Cette information nous renseigne sur les variations statistiques de la grandeur étudiée. Comme pour les histogrammes (et toute analyse statistique), un grand nombre de points est nécessaire pour obtenir des résultats corrects. On veillera donc à calculer cette distribution sur un temps suffisamment long et avec une fréquence d'acquisition importante pour voir les fluctuations ($\Delta t = 2$ s et $f_a = 1000 - 2000$ im/s dans notre cas).

Un exemple de ce type d'analyse est présenté sur la Fig. 6.5. Le signal est une vitesse oscillant sinusoïdalement avec le temps autour de 1 : $v = 1 + sin(2\pi f t)$, avec $f = 10$ Hz (Fig. 6.5a). La densité de probabilité (Fig. 6.5b) montre un profil en "M" avec deux pics proches des valeurs extrêmes du signal . Le spectre de Fourier (Fig. 6.5c) montre deux pics : un à $f = 0$ Hz correspond à la vitesse moyenne ($\langle v \rangle = 1$) et l'autre à $f = 10$ Hz du fait des vibrations ($v_{10Hz} = 1$).

2. Toutes ces informations sont calculées sur le logiciel Matlab® avec les fonctions correspondantes déjà implémentées : "fft" pour la transformée de Fourier et "ksdensity" pour la densité de probabilité.

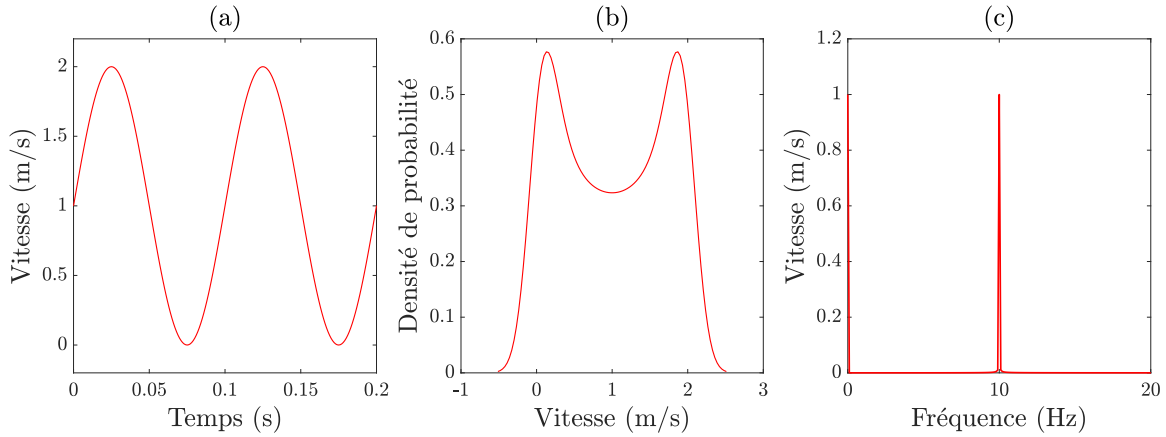


Figure 6.5 Exemple d'analyse statistique et temporelle d'un signal de vitesse $v = 1 + sin(2\pi ft)$, avec $f = 10$ Hz la fréquence et t le temps : (a) Signal de vitesse au cours du temps, (b) densité de probabilité en fonction de la vitesse et (c) spectre de fourrier du signal.

6.2 Étude de l'écoulement dans le silo

Dans cette section, nous allons présenter les résultats obtenus dans le silo pour différents diamètres d'ouverture et différentes vibrations. On séparera l'analyse du premier régime des vibrations de celle du second régime (atteignable uniquement avec le dispositif complémentaire). Les mesures dans le second régime ont en effet été effectuées sur une zone plus petite (70×55 mm au lieu de 100×100 mm), dû au fait que la vitesse d'acquisition devait être plus grande pour suivre les grains (2000 im/s au lieu de 1000 im/s). De plus, on considérera dans tous les cas uniquement la fréquence de vibration $f = 30$ Hz, les effets étant similaires pour les autres fréquences à nombre de Froude égal (comme pour le débit). Enfin, l'analyse détaillée et l'interprétation des résultats seront faites à la fin pour chaque régime.

6.2.1 Premier régime des vibrations

Motifs d'écoulement lors de la vidange

Les motifs d'écoulement durant la vidange sont présentés sur la Fig. 6.6, pour un diamètre d'ouverture $D = 10.07$ mm dans les cas sans et avec vibrations. On reste bien dans la limite du premier régime ($A < 1000$ µm pour $f = 30$ Hz). Pour mieux comprendre l'impact des vibrations, nous avons aussi tracé les motifs d'écoulement au bout de $t = 2$ s pour différentes amplitudes A à diamètre constant $D = 10.07$ mm (voir Fig. 6.7a) et pour différents diamètres D pour une amplitude constante $A = 800$ µm (voir Fig. 6.7b).

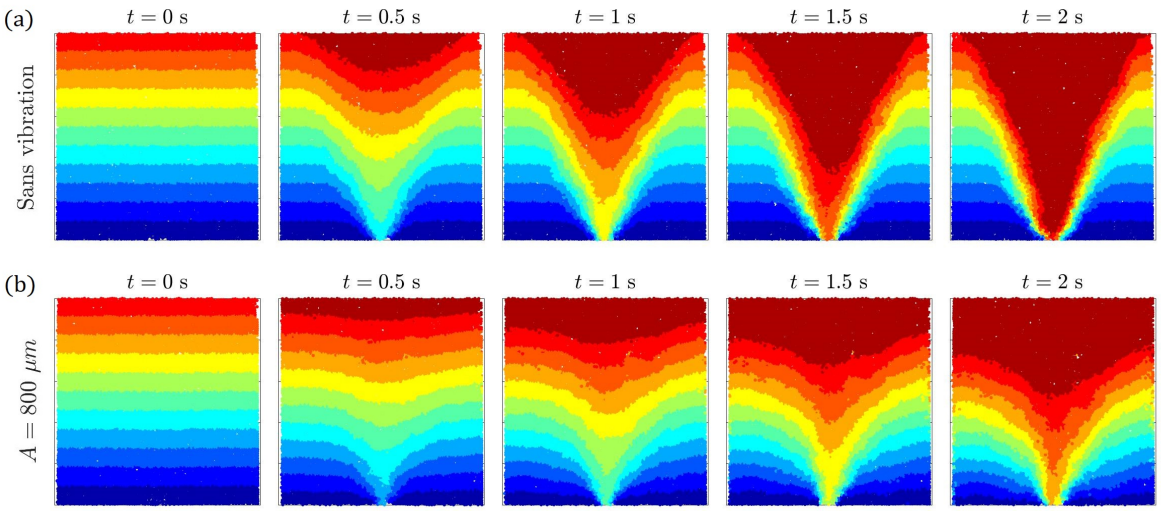


Figure 6.6 Motifs d'écoulement durant la vidange à différents instants ($t = 0$ s à $t = 2$ s) pour un diamètre d'ouverture $D = 10.07$ mm dans les cas (a) sans vibration et pour (b) $f = 30$ Hz, $A = 800$ µm (premier régime). Dans chaque cas, les particules sont colorées en fonction de leur hauteur initiale.

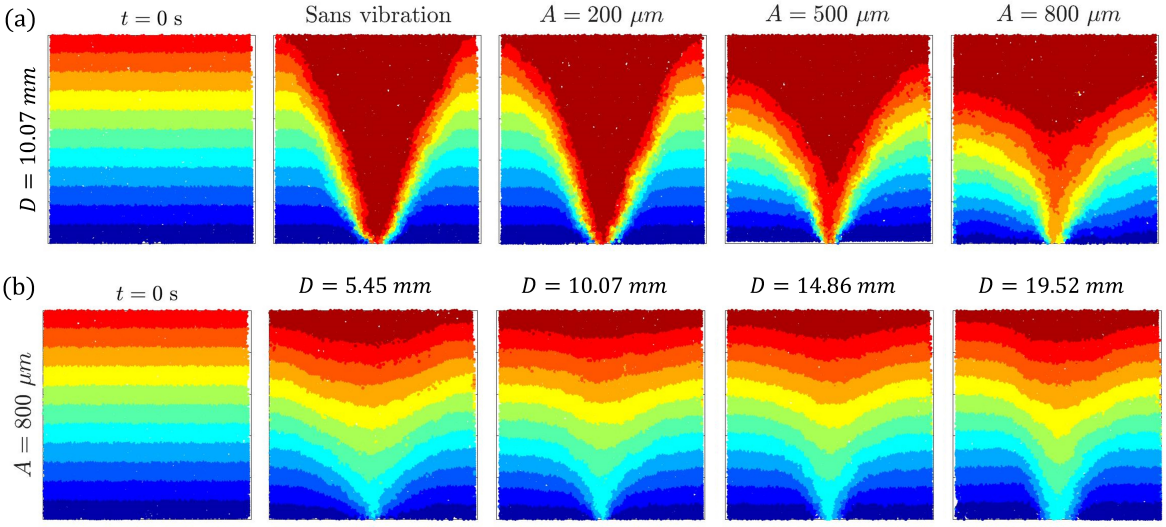


Figure 6.7 (a) Motifs d'écoulement pour une ouverture $D = 10.07$ mm à $t = 0$ s puis à $t = 2$ s pour différentes amplitudes de vibrations $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz). (b) Profils d'écoulement pour une amplitude $A = 800$ µm ($f = 30$ Hz) à $t = 0$ s puis après l'écoulement de la même masse de grains (1.7 g) pour différents diamètres d'ouverture $D = 5.45 - 19.52$ mm. Dans chaque cas, les particules sont colorées en fonction de leur hauteur initiale.

Évolution des champs de grandeurs dans le silo

Ces profils d'écoulement permettent de visualiser graphiquement le comportement de l'écoulement. Il est néanmoins nécessaire de regarder comment les différentes grandeurs caractéristiques de l'écoulement évoluent dans le silo pour véritablement comprendre l'écoulement. Pour comparer et comprendre l'effet des vibrations et du diamètre d'ouverture, nous avons mesuré plusieurs grandeurs sur le maillage du silo pour différents diamètres D dans les cas sans et avec vibrations dans le premier régime ($A = 800$ µm, $f = 30$ Hz). Ces grandeurs sont la norme de la vitesse $|\mathbf{v}|$ (Fig. 6.8), le taux de déformation $|\dot{\gamma}|$ (Fig. 6.9), la température granulaire T_g (Fig. 6.10) et la fraction volumique calculée à partir du volume libre ϕ_c (Fig. 6.11). Tous les champs présentés sont issus de moyennes temporelles pendant le régime stationnaire de la vidange. Bien sur, il existe des variations périodiques lors de ce régime dues aux vibrations, mais celles-ci seront étudiées dans la suite.

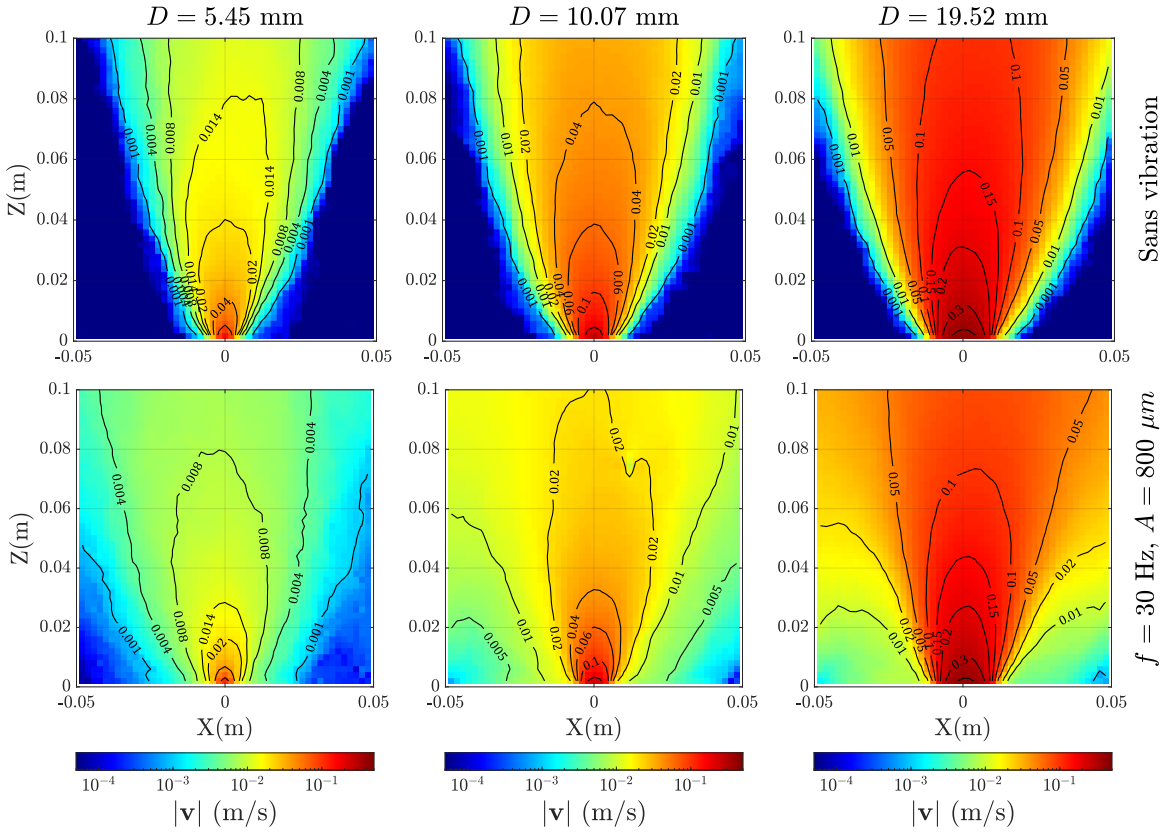


Figure 6.8 Champs de norme de vitesse $|\mathbf{v}|$ dans le silo pour trois diamètres d'ouverture $D = 5.45 - 19.52$ mm dans le cas sans vibration ($1^{ère}$ ligne) et pour $f = 30$ Hz et $A = 800$ µm (2^{nd} ligne).

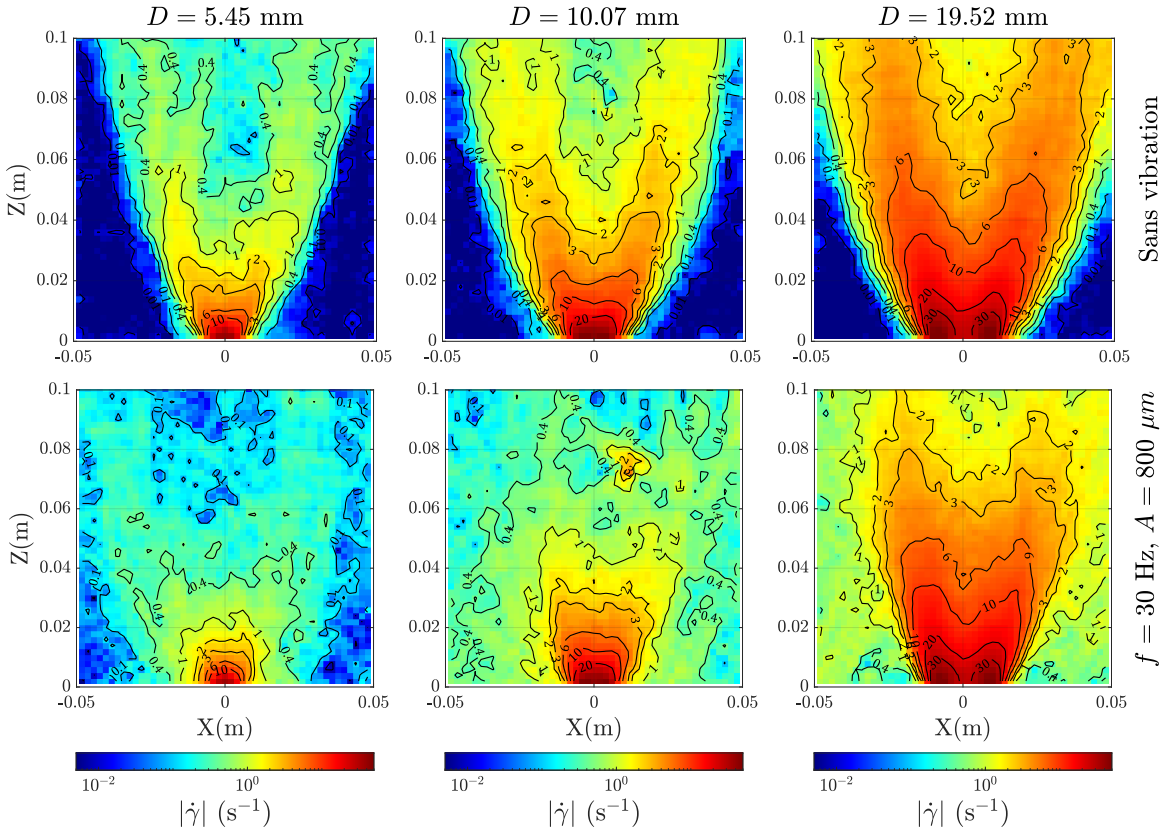


Figure 6.9 Champs de la norme du taux de déformation $|\dot{\gamma}|$ dans le silo pour trois diamètres $D = 5.45 - 19.52$ mm dans le cas sans vibration ($1^{ère}$ ligne) et pour $f = 30$ Hz et $A = 800$ µm (2^{nd} ligne).

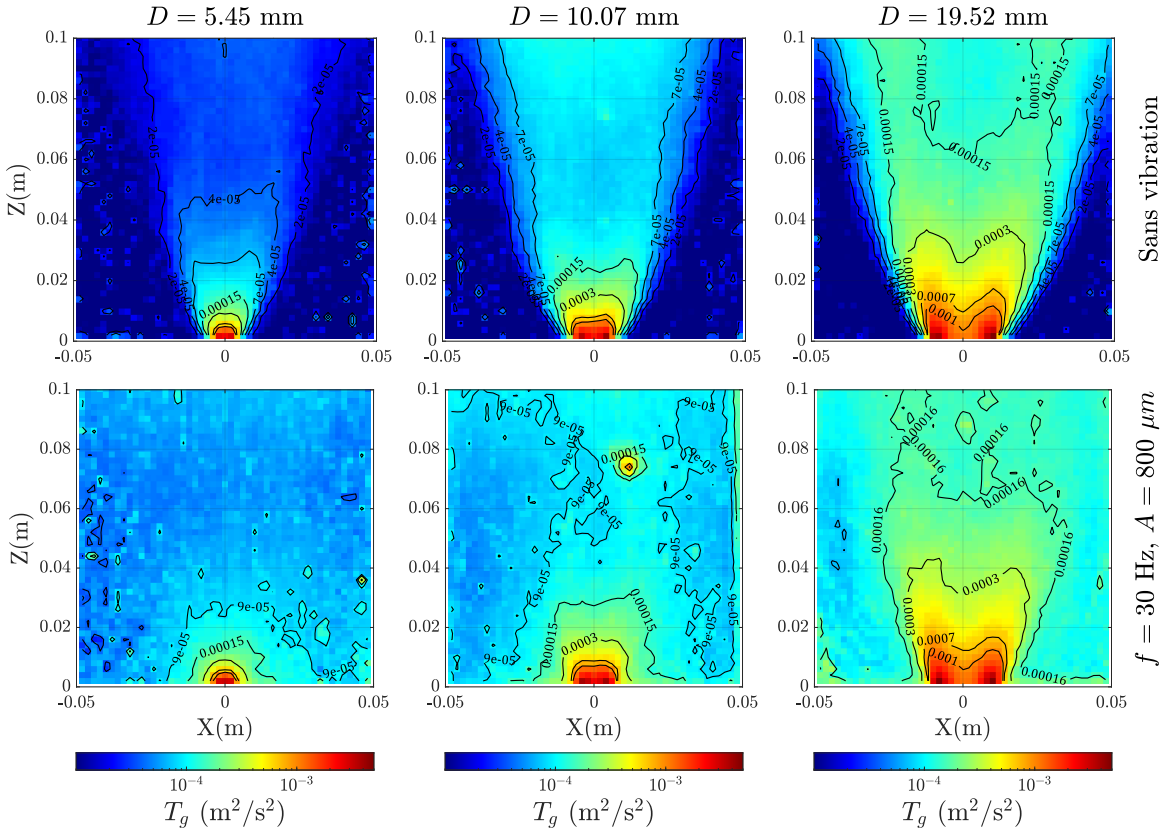


Figure 6.10 Champs de température granulaire T_g dans le silo pour trois diamètres $D = 5.45 - 19.52$ mm dans le cas sans vibration ($1^{ère}$ ligne) et pour $f = 30$ Hz et $A = 800$ µm (2^{nd} ligne).

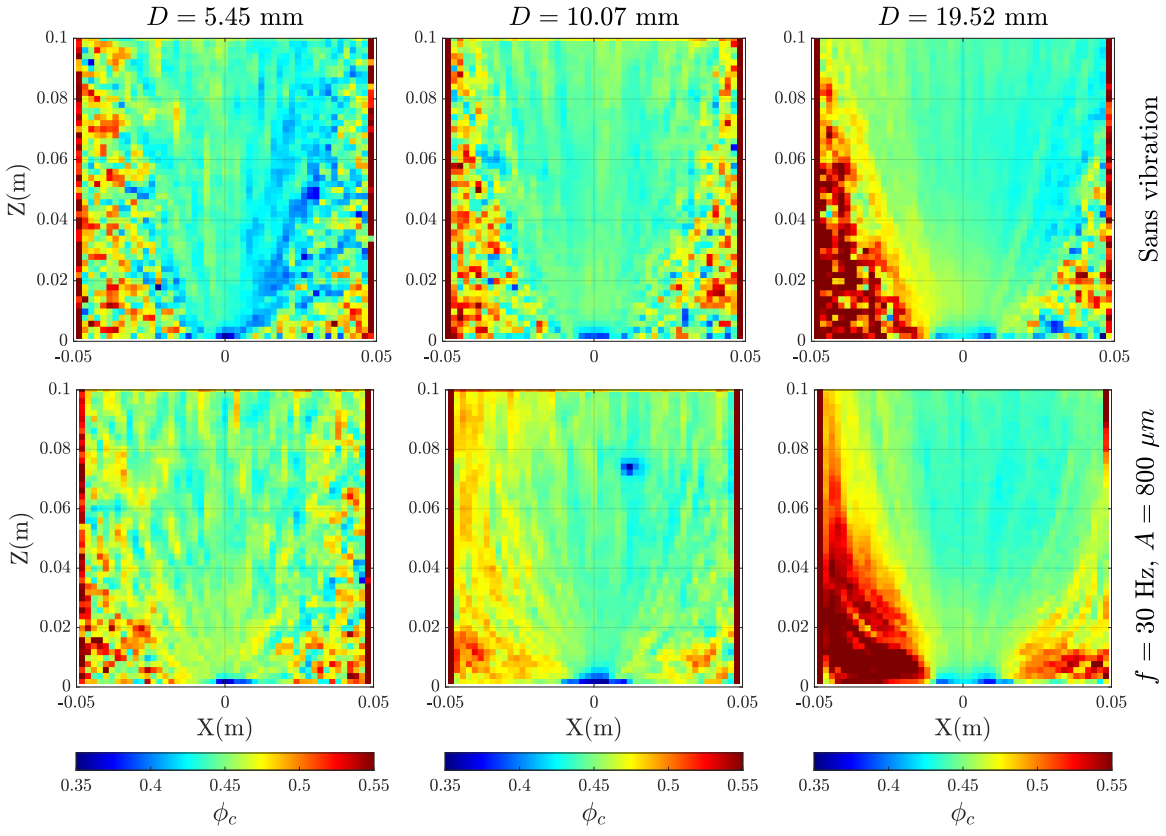


Figure 6.11 Champs de fraction volumique ϕ_c déduite du volume libre V_{lib} dans le silo pour trois diamètres d'ouverture $D = 5.45 - 19.52$ mm dans le cas sans vibration ($1^{ère}$ ligne) et pour $f = 30$ Hz et $A = 800$ µm (2^{nd} ligne).

Analyse et interprétation physique

► **Dans le cas sans vibration :** on trouve un profil d'écoulement très canalisé, avec d'importantes zones mortes sur les côtés de ce canal, comme on peut le voir sur les motifs d'écoulement (Fig. 6.6a) et les champs de vitesses (Fig. 6.8). La vitesse $|\mathbf{v}|$ augmente dans ce canal jusqu'à la sortie où elle atteint son maximum et où l'on passe alors vers une chute libre. Hors de ce canal, on retrouve bien une vitesse nulle (ou quasi nulle) dans les zones mortes. On retrouve des profils similaires dans la littérature pour la vidange sans vibrations [49, 53, 66, 76, 77]. Augmenter le diamètre D permet d'augmenter la vitesse dans le canal ainsi que de manière moindre sa largeur, d'où un débit plus élevé, comme montré par Beverloo et al [44] (voir chapitre 3, section 3.2).

Le taux de déformation $|\dot{\gamma}|$ (Fig. 6.9) et la température granulaire T_g (Fig. 6.10) montrent des comportements similaires à la vitesse, avec en plus l'apparition de deux lobes de forte intensité issus des côtés de l'ouverture et se propageant de chaque côté du canal (forme en "V"). La présence de ces lobes s'explique par le contraste de vitesse entre l'écoulement dans le canal et les zones mortes, qui est maximum aux bords de l'ouverture du fait de l'accélération en sortie. L'augmentation vers la sortie provient d'une vitesse moyenne plus élevée, et donc des fluctuations et gradients plus forts du fait des mouvements entre particules lors du rétrécissent du canal (similaire aux nombreux changements de file lors d'un bouchon). Le diamètre D favorise ces comportements à cause des vitesses plus élevées dans le canal. À noter que du fait de l'aspect discret de l'écoulement, les lobes fusionnent au niveau de l'ouverture pour les plus petits diamètres D.

Concernant la fraction volumique ϕ_c (Fig. 6.11), on retrouve aussi ce canal d'écoulement et les zones mortes. Dans ces zones mortes, la fraction évolue aléatoirement autour de $\phi_b = 0.47$ du fait de l'insertion des particules dans le silo. La fraction est plus faible dans le canal et atteint un minimum en sortie, qui correspond à une chute libre. Ce résultat est en adéquation avec les études et lois de Mankoc et al. [45] et Benyamine et al. [47].

► **Dans le cas du premier régime :** l'ajout de vibrations permet de mettre en mouvement les zones mortes et réduit la canalisation de l'écoulement dans ce régime, comme on peut le voir sur les motifs d'écoulement (Fig. 6.6b). Cet effet est d'autant plus important pour les faibles ouvertures (Fig. 6.7a) et les grandes amplitudes (Fig. 6.7b). L'écoulement est donc plus homogène mais aussi plus lent, une évolution cohérente avec la diminution du débit lorsque le nombre de Froude $Fr = A\omega/\sqrt{gD}$ augmente dans le premier régime (voir Eq. 5.7, section 5.2.2).

Ce comportement se retrouve bien sur les champs de vitesses $|\mathbf{v}|$ (Fig. 6.8), avec une vitesse moyenne plus faible dans le canal et qui à l'inverse augmente dans les zones mortes. Cette homogénéisation engendre néanmoins une augmentation de la compétitivité en sortie, et donc la baisse de débit comme décrit par Pastor et al. [57]. On retrouve aussi sur ces champs la dépendance avec D, et donc avec le nombre de Froude Fr, avec des effets moins marqués pour les grandes ouvertures.

Le taux de déformation $|\dot{\gamma}|$ (Fig. 6.9) et la température granulaire T_g (Fig. 6.10) suivent une évolution similaire : les profils sont beaucoup plus homogènes, avec des lobes moins marqués et plus centrés sur l'ouverture pour les faibles diamètres d'ouverture. La mise en mouvement des zones mortes engendre une augmentation des gradients dans ces zones mais une diminution dans le canal du fait des vitesses plus homogènes. La température granulaire augmente globalement avec la mise en mouvement des zones mortes et les réorganisations dues aux vibrations dans des directions différentes de l'écoulement moyen. Pour les grandes ouvertures D, les vitesses des particules dans les zones mortes restent faibles devant la vitesse dans le canal, d'où des profils encore assez canalisés et d'importants lobes. On retrouve donc encore la dépendance au nombre de Froude qui compare la vitesse des vibrations à celle engendrée par la gravité (ce qui correspond aussi au rapport d'énergie cinétique).

La fraction volumique ϕ_c en revanche ne semble pas montrer d'évolution significative. On note cependant un champ moyen plus homogène dans les zones mortes du fait de leur mise en mouvement.

► **Pour aller plus loin :** nous avons mesuré l'évolution de ces grandeurs dans la zone étudiée (moyenne spatiale) pour les différents diamètres d'ouverture D en fonction du nombre de Froude Fr (voir Fig. 6.12). Les valeurs moyennes de la vitesse et du taux de déformation (Fig. 6.12a et b) décroient avec le nombre de Froude Fr. Cette décroissance est la même pour tous les diamètres D, et la forme est similaire à celle décrite par la loi du premier régime pour le débit (Eq. 5.7). La température granulaire à l'inverse augmente avec le nombre de Froude (Fig. 6.12c). Cette augmentation semble linéaire et similaire pour

chaque diamètre [3]. La fraction quant à elle ne montre pas d'évolution particulière et reste relativement constante (Fig. 6.12d). Ces résultats confirment bien le fait que les effets des vibrations sont entièrement dépendants du nombre de Froude dans le premier régime.

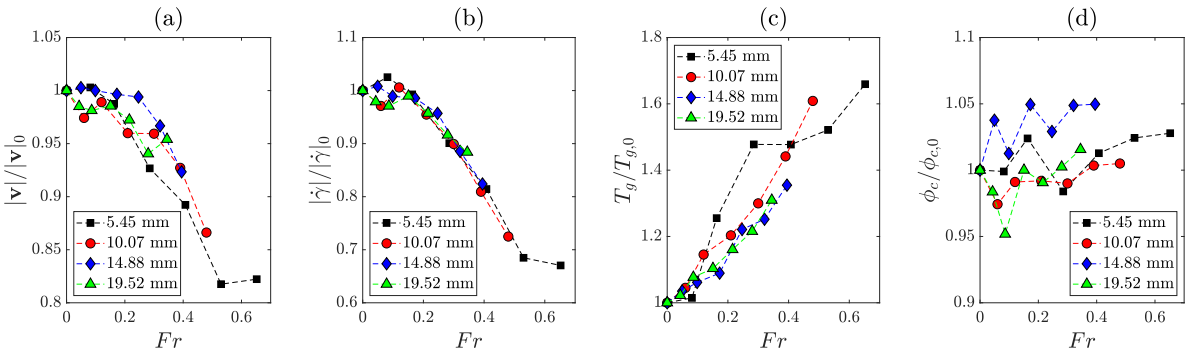


Figure 6.12 Évolution en fonction du nombre de Froude Fr des grandeurs normalisées dans l'intégralité de la zone étudié (carré de 100×100 mm) pour différents diamètres $D = 5.45-19.52$ mm. On normalise chaque grandeur G par sa valeur sans vibration G_0. De gauche à droite : (a) vitesse normalisée $|\mathbf{v}|/|\mathbf{v}|_0$, (b) taux de déformation normalisé $|\dot{\gamma}|/|\dot{\gamma}|_0$, (c) température granulaire normalisée $T_g/T_{g,0}$ et (d) Fraction volumique normalisée $\phi_c/\phi_{c,0}$.

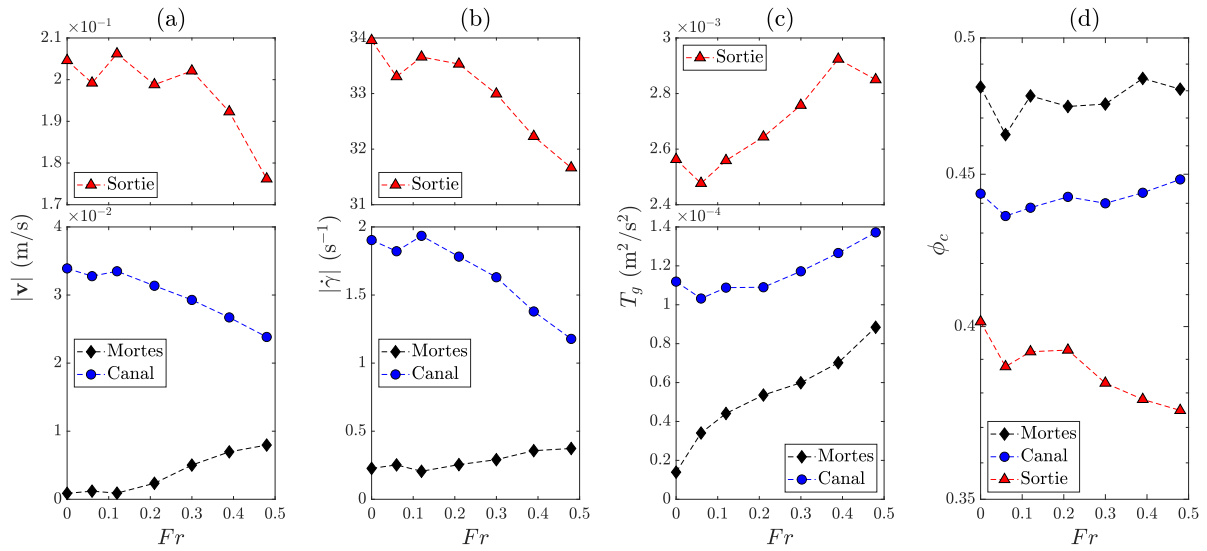


Figure 6.13 Évolution en fonction du Froude Fr (1^{er} régime) des grandeurs dans les zones mortes (déterminées dans le cas sans vibration), le canal d'écoulement et la zone au-dessus de la sortie du silo (demi-cercle de rayon $D/2$). De gauche à droite : (a) norme de vitesse $|\mathbf{v}|$, (b) taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, (c) Température granulaire T_g et (d) Fraction volumique calculée ϕ_c. Note : pour (a,b,c) les graphes ont été coupés en deux car les valeurs en sortie sont très grandes devant celles des autres zones.

Nous avons aussi mesuré plus en détail l'évolution de ces grandeurs dans les différentes zones du silo en fonction du nombre de Froude Fr pour $D = 10.07$ mm (voir Fig. 6.13). Ces différentes zones sont définies dans le cas sans vibration et correspondent à la sortie (demi-cercle de rayon $D/2$ au-dessus de l'ouverture), au canal d'écoulement et aux zones mortes. On considère que la limite canal-zone morte est délimitée par $|\mathbf{v}| = 0.001$ m/s (voir Fig. 6.8). On retrouve bien sans vibration un écart important entre le canal d'écoulement et les zones mortes, dans lesquelles la vitesse, le taux de déformation et la température sont très faibles. Lorsqu'on ajoute des vibrations, cet écart se réduit du fait de la mise en mouvement des zones mortes : on converge bien vers un écoulement homogène. On voit aussi clairement que la vitesse et le taux de déformation diminuent dans le canal et en sortie avec le nombre de Froude, ce qui est cohérent avec la baisse de débit dans le premier régime. La température granulaire en revanche augmente partout du fait des mouvements et réorganisations par les vibrations, les zones mortes étant simplement les plus

3. Les fluctuations pour $D = 5.45$ mm proviennent du fait que l'on est proche de la limite d'écoulement. Les vitesses sont donc très faibles et leurs variations plus aléatoires d'où ces fluctuations de température.

affectées. Concernant la fraction volumique, on n'observe pas de changement significatif dans les zones mortes et le canal, bien qu'une faible compaction soit possible du fait des vibrations. Une baisse est néanmoins mesurée en sortie, engendrée par une diminution du nombre de particules dans cette zone du fait du débit plus faible.

6.2.2 Second régime des vibrations

Profils d'écoulement dans le silo

Si l'on augmente encore les vibrations ($A > 1200$ µm pour $f = 30$ Hz), nous passons dans le second régime. Les motifs d'écoulement ont été mesurés à nouveau à partir des images de vidange obtenues avec le dispositif complémentaire pour des amplitudes allant jusqu'à $A = 2800$ µm. Ces motifs sont présentés sur la Fig. 6.14 pour un diamètre $D = 10.26$ mm et différentes amplitudes $A = 0 - 2800$ µm ($f = 30$ Hz).

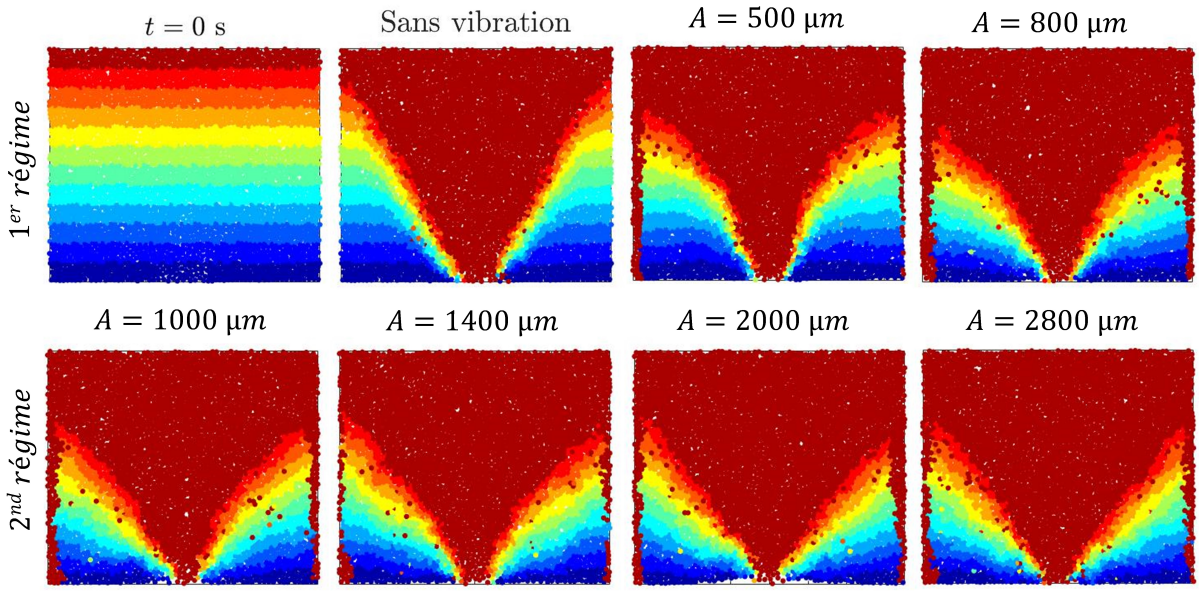


Figure 6.14 Motifs d'écoulement pour une ouverture $D = 10.27$ mm à $t = 0$ s puis à $t = 1.5$ s pour différentes amplitudes de vibrations $A = 0 - 2800$ µm ($f = 30$ Hz). Les particules sont colorées en fonction de leur hauteur initiale. À noter que la zone étudiée ne couvre pas le silo dans toute sa largeur, d'où l'apparition de particules sur les côtés (en rouge).

Évolution des champs de grandeur dans le silo

De même que pour les motifs, les champs de grandeurs ont aussi été mesurés dans le second régime ($A > 1200$ µm pour $f = 30$ Hz). Ils sont présentés dans la Fig. 6.15 pour $D = 10.26$ mm et trois amplitudes $A = 800 - 2800$ µm ($f = 30$ Hz). Les valeurs moyennes de ces grandeurs dans le canal, la sortie et les zones mortes sont présentées dans la Fig. 6.16.

Analyse et interprétation physique

► **Dans ce second régime :** l'écoulement semble se recanaliser partiellement comme observé sur les motifs d'écoulement (Fig. 6.14) et les champs de vitesses (Fig. 6.15). Les zones mortes semblent en effet plus importantes que dans le premier régime ($A = 800$ µm et $A = 2800$ µm). On note aussi une augmentation des vitesses dans le canal et un profil en V plus prononcé pour le taux de déformation par rapport au premier régime ($A = 800$ µm). Si l'on se penche sur les valeurs moyennes (Fig. 6.16), on note bien une augmentation des vitesses et du taux de déformation dans le canal et en sortie dans le second régime ($A > 1200$ µm). Néanmoins, ces grandeurs augmentent aussi dans les zones mortes, bien que de manière moindre comparé au premier régime. L'écart entre les zones mortes et le canal reste donc constant, voir augmente légèrement, d'où l'apparente re-canalisation de l'écoulement. Cette augmentation provient de la dynamique de jets à l'origine du second régime, qui favorise la vidange des grains au-dessus de l'ouverture. Comme pour le premier régime, la température granulaire continue

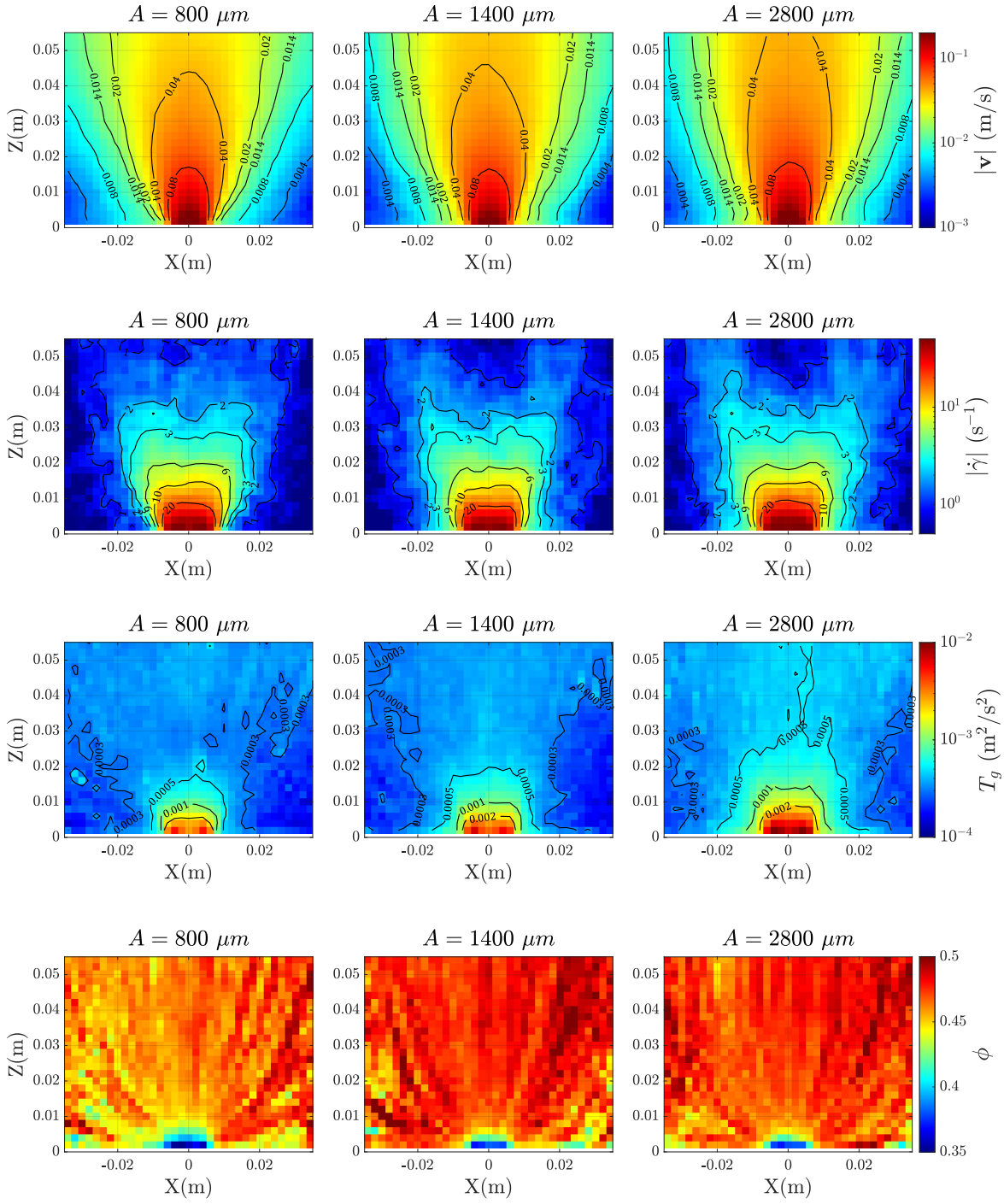


Figure 6.15 Champs dans le silo pour $D = 10.26$ mm, $f = 30$ Hz et trois amplitudes $A = 800$, 1400, 2800 µm (2^{nd} régimes). De haut en bas : norme de vitesse $|\mathbf{v}|$, taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, température granulaire T_g et fraction volumique ϕ_c.

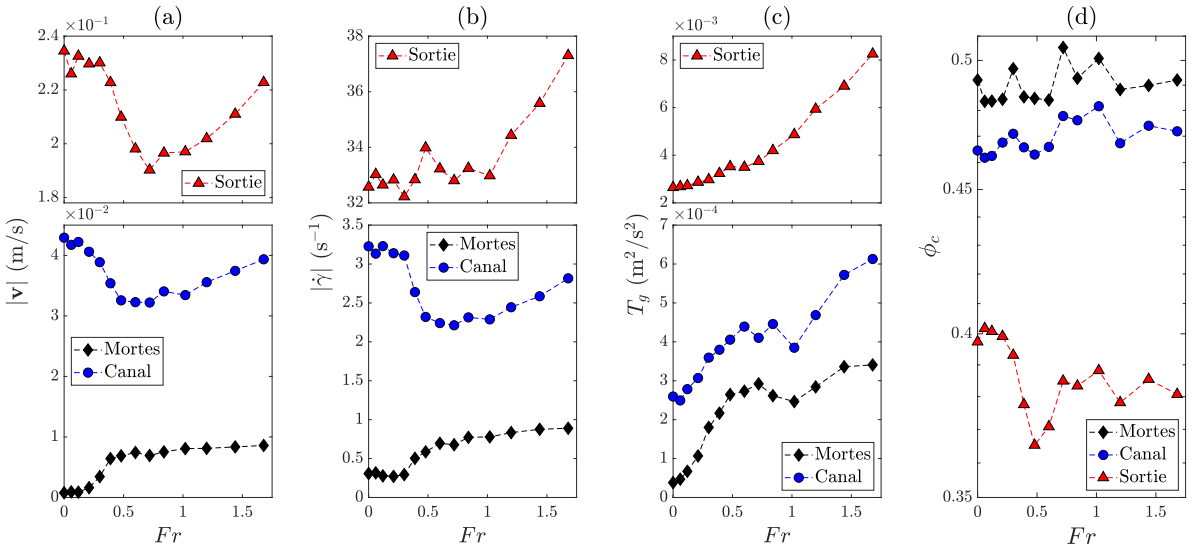


Figure 6.16 Évolution en fonction du Froude Fr (1^{er} et 2^{nd} régime) des grandeurs dans les zones mortes (déterminées dans le cas sans vibration), le canal d'écoulement et la zone au-dessus de la sortie du silo (demi-cercle de rayon $D/2$). De gauche à droite : (a) norme de vitesse $|\mathbf{v}|$, (b) taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, (c) température granulaire T_g et (d) fraction volumique calculée ϕ_c. À noter que les mesures ont été effectuées dans une zone plus restreinte (70×55 mm) ne couvrant pas la largeur totale du silo. Note : pour (a,b,c) les graphes ont été coupés en deux car les valeurs en sortie sont très grandes devant celles des autres zones.

d'augmenter partout dans l'écoulement du fait des plus fortes vibrations. Enfin, la fraction volumique semble augmenter légèrement dans le canal et les zones mortes, les réorganisations engendrées par les vibrations créant une faible compaction. À la sortie, la fraction augmente rapidement puis se stabilise dans le second régime. Cette augmentation est aussi consistante avec une dynamique de jets, oscillant entre des jets denses et des intervalles plus dilués.

6.3 Étude de l'écoulement au niveau de l'ouverture

Dans cette section, nous allons nous pencher sur le comportement rhéologique de l'écoulement à l'ouverture du silo. Elle possède en effet une influence extrêmement importante sur le débit comme présenté dans les chapitres 3 et 5. Comme dans la section précédente, on séparera cette étude entre le premier et le second régime des vibrations. Dans chaque cas nous présenterons les profils d'écoulement autour de la sortie (profils radiaux, voir Fig. 6.4) et l'analyse statistique des grandeurs en sortie (voir Fig. 6.5). Tous les résultats seront présentés en premier, l'analyse et l'interprétation seront faites ensuite.

6.3.1 Premier régime des vibrations

Profils d'écoulement en sortie

Nous avons mesuré dans un premier temps la vitesse et la fraction volumique (à partir du volume libre) le long d'un profil radial au niveau de la sortie de rayon $R_c = D/2 + d$, comme décrit dans la section 6.1.3. À noter que l'on ne prend pas $R_c = D/2$ pour éviter de prendre en compte les particules hors du silo lors du calcul. Comme pour les mesures des champs, on moyennera les résultats sur 2 s d'écoulement stationnaires. Nous avons représenté sur les Figs. 6.17 et 6.18 l'évolution de la vitesse radiale v_r et de la fraction volumique calculée ϕ_c en fonction de l'angle du profil φ pour différentes amplitudes de vibrations A ($f = 30$ Hz) et trois diamètres d'ouverture D. La vitesse radiale nous renseigne sur l'écoulement allant vers la sortie, et donc contribuant au débit. Elle est dans notre cas donnée par :

$$v_r = v_x \cos(\varphi) + v_z \sin(\varphi) \tag{6.7}$$

où v_x et v_z sont les vitesses selon les axes x et z. On rappelle que la fraction ϕ_c est obtenue à partir du volume libre et du volume des grains (voir Eq. 6.5).

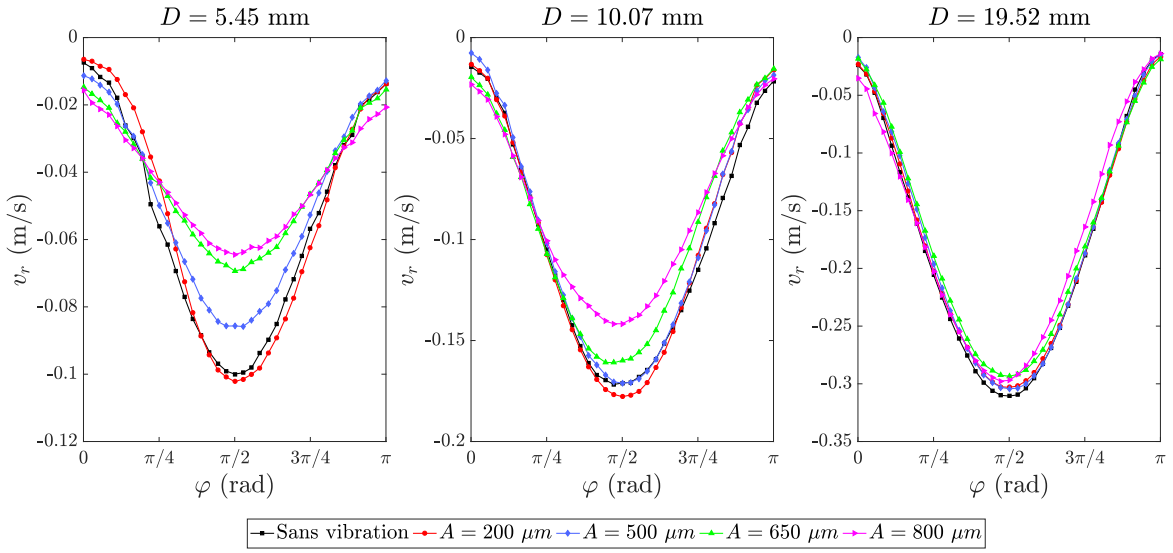


Figure 6.17 Vitesse radiale v_r en fonction de l'angle φ le long du demi-cercle de rayon $R_c = D/2 + d$ centré sur la sortie du silo. Les résultats sont présentés pour plusieurs amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz) et trois diamètres d'ouverture $D = 5.45 - 19.52$ mm.

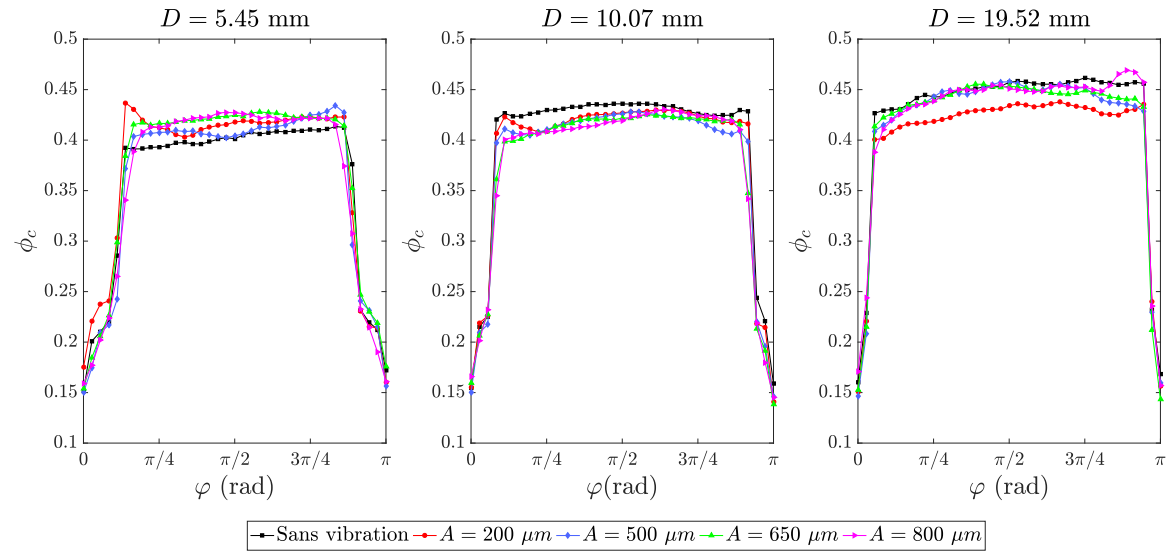


Figure 6.18 Fraction volumique calculée ϕ_c en fonction de l'angle φ le long du demi-cercle de rayon $R_c = D/2+d$ centré sur la sortie du silo. Les résultats sont présentés pour plusieurs amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz) et trois diamètres d'ouverture $D = 5.45 - 19.52$ mm.

Analyse temporelle et statistique

Les profils d'écoulement sont issus de moyennes temporelles pendant le régime stationnaire de la vidange, qui peuvent cacher des comportements périodiques du fait des vibrations. Pour observer ces effets, nous avons étudié les variations temporelles de la vitesse v_z et la fraction volumique ϕ_c en sortie de l'écoulement (à l'intérieur du demi-cercle de rayon $R_c = D/2$). Les densités de probabilité pour la vitesse v_z et la fraction ϕ_c en sortie sont présentées sur les Figs. 6.19 et 6.20 pour trois diamètres $D = 5.45 - 19.52$ mm et plusieurs amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz).

Le sprectre de Fourier pour la vitesse v_z est présenté dans la Fig. 6.21 pour les différentes amplitudes A et diamètres D. L'évolution détaillée de la réponse moyenne (à 0 Hz) $v_{z,0Hz}$ et la réponse à la fréquence des vibrations $v_{z,30Hz}$ en fonction du Froude Fr sont présentées dans la Fig. 6.22. Dans chaque cas, on normalise par la vitesse moyenne sans vibration $\langle v_0 \rangle$.

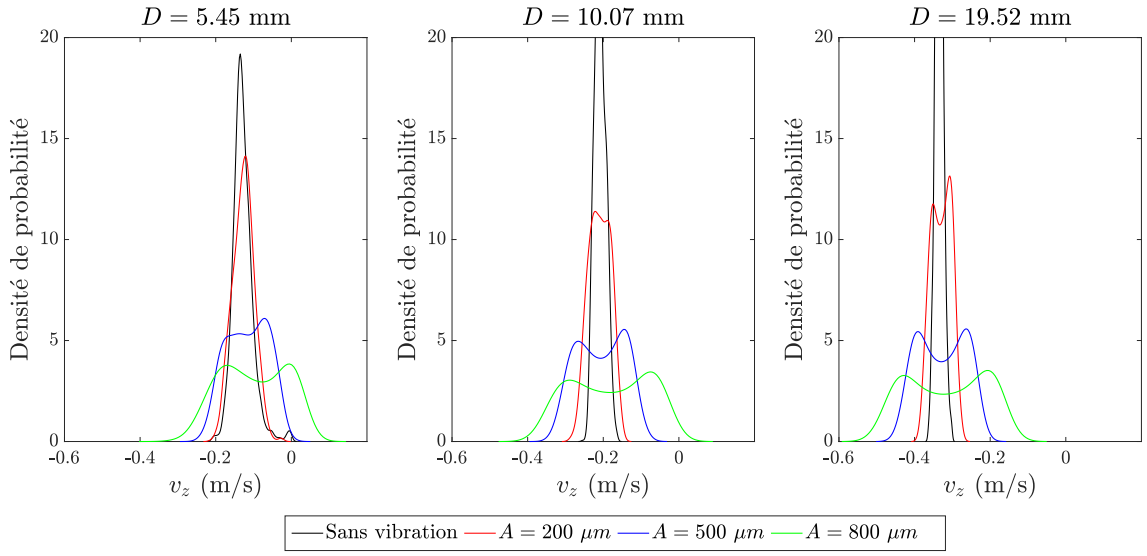


Figure 6.19 Densité de probabilité pour la vitesse v_z en sortie de l'écoulement au cours du temps pour plusieurs amplitudes $A = 0 - 800$ µm et diamètres $D = 5.45 - 19.52$ mm.

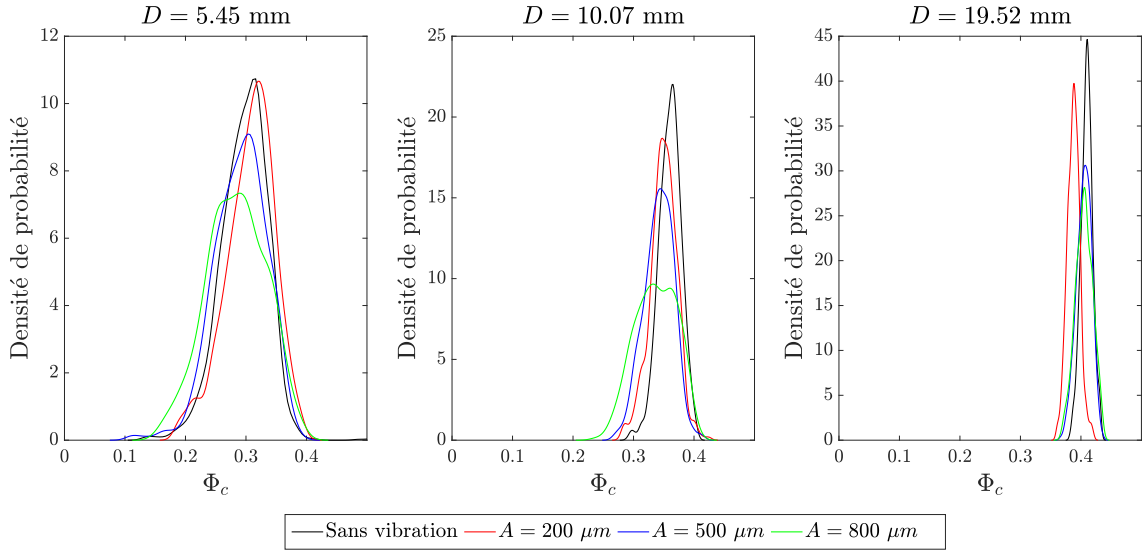


Figure 6.20 Densité de probabilité pour la fraction volumique ϕ_c en sortie de l'écoulement au cours du temps pour plusieurs amplitudes $A = 0 - 800$ µm et diamètres $D = 5.45 - 19.52$ mm.

Analyse et interprétation physique

► **Dans le cas sans vibration :** on obtient des profils de vitesse de forme gaussienne (Fig. 6.17) atteignant un maximum au centre du canal ($\varphi = \pi/2$), un résultat déjà observé dans la littérature [78, 76, 77]. La densité de probabilité (Fig. 6.19) présente dans ces cas un pic autour de la vitesse moyenne. Ces profils et densités sont similaires qu'importe l'ouverture D, bien que l'on note des faibles différences aux extrêmes ($\varphi = 0$ et π) et un pic un peu plus large pour les faibles diamètres dû à la taille finie des grains (il y a des fluctuations dues à l'aspect discret de l'écoulement). La fraction volumique quant à elle reste globalement constante le long des profils (Fig. 6.18), sauf lorsqu'on s'approche des parois où elle baisse fortement. La présence des parois empêche en effet d'avoir un empilement très compact et gêne le mouvement des grains. Comme pour la vitesse, on a un pic de densité autour de la valeur moyenne dans la zone en sortie (Fig. 6.20). Cette valeur moyenne ainsi que le plateau sur les profils augmentent avec le diamètre d'ouverture, comme prévu par les études de Mankoc et al. [45], Janda et al. [46] et Benyamine et al. [47]. On peut aussi noter que comme pour la vitesse, le pic de densité est plus large pour les faibles ouvertures du fait de l'aspect discret de l'écoulement.

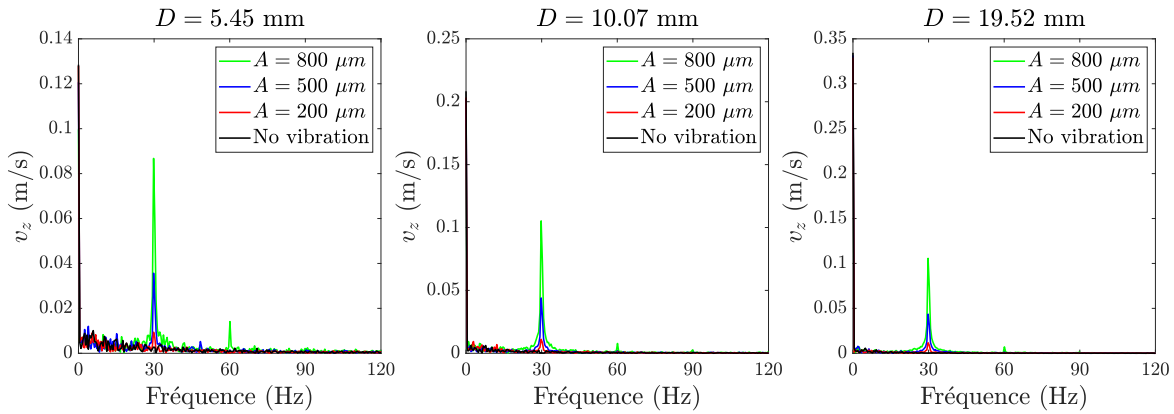


Figure 6.21 Analyse de Fourier des vitesses v_z en sortie de l'écoulement au cours du temps pour plusieurs amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz) et diamètres $D = 5.45 - 19.52$ mm.

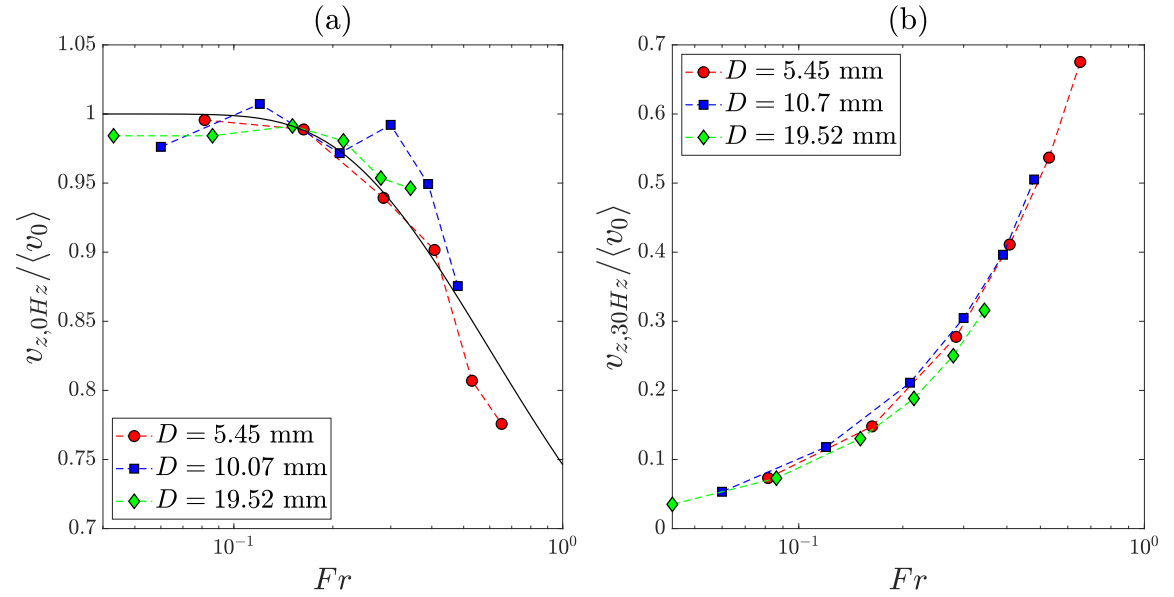


Figure 6.22 (a) Vitesse moyenne normalisée $v_{z,0Hz}/\langle v_0 \rangle$ et (b) variation de vitesse à $f = 30$ Hz normalisée $v_{z,30Hz}/\langle v_0 \rangle$ en fonction du nombre de Froude Fr pour plusieurs diamètres $D = 5.45 - 19.52$ mm. Dans (a), les résultats suivent la fonction du premier régime des vibrations (ligne noire), avec $a = 0.461$ et $Fr^* = 0.597$ (voir Eq. 5.7).

► **Dans le premier régime :** l'ajout de vibrations réduit la vitesse des particules venant du canal (pour $\varphi \sim \pi/2$) tandis que la vitesse sur les côtés augmente ($\varphi \sim 0$ et $\varphi \sim \pi$) comme on peut le voir sur la Fig. 6.17. On retrouve donc bien l'effet de la mise en mouvement des zones mortes et la baisse de vitesse du fait de l'augmentation des collisions dans le canal et la plus grande compétitivité en sortie. Ce comportement dépend du nombre de Froude : il augmente pour les fortes amplitudes A et les faibles diamètres d'ouverture D (maximum pour $D = 5.45$ mm - $A = 800$ µm et quasiment nul pour $D = 19.52$ mm). Ces profils sont parfaitement cohérents avec les observations précédentes ainsi que similaires à ceux obtenus par Wassgren et al. [66].

Si l'on se penche sur les variations de vitesses en sortie (Fig. 6.19), on voit alors une transition d'un pic de densité vers un profil en "M" similaire à celui d'un signal sinusoïdal. En effet, le spectre de Fourier (Fig. 6.21) montre bien une réponse à la fréquence des vibrations $f = 30$ Hz [4]. Cette variation de vitesse $v_{z,30Hz}$ augmente exponentiellement avec le nombre de Froude comme on peut le voir sur la Fig. 6.22b. Il est important de rappeler que l'on se trouve dans le référentiel du silo, cette variation de vitesse est donc bien issue d'un mouvement relatif des grains par rapport au silo du fait de leur inertie. On

4. On note aussi une faible réponse à 60 Hz (première harmonique de la fréquence des vibrations) qui témoigne d'un couplage non linéaire, provenant de la propagation d'ondes dans le silo lorsque l'on s'approche du second régime.

retrouve justement cette variation sinusoïdale sur le débit instantané comme observé dans le chapitre 5 (section 5.2.3). La vitesse moyenne $v_{z,0Hz}$ (Fig. 6.22a) en revanche diminue avec le nombre de Froude en suivant la loi du premier régime pour le débit (Eq. 5.7). À noter que cette diminution est aussi visible sur les mesures de densité de probabilité, avec un décalage progressif du centre de ces profils vers 0 lorsque l'amplitude augmente. De ce fait, la vitesse moyenne et les fluctuations de vitesse dépendent uniquement du nombre de Froude. La baisse de débit apparaît pour les grands nombres de Froude (forte vibration, faible ouverture) car les fluctuations temporelles de vitesse créées à l'ouverture deviennent prépondérante devant la vitesse créée par la gravité. Il y a en effet plus de frottement et les particules ont même tendance à remonter dans le silo (vitesse positive sur la Fig. 6.19 pour $D = 5.45$ mm). L'énergie injectée par les vibrations ($\propto A^2\omega^2$) permet de mettre en mouvement les zones mortes mais vient donc aussi dissiper l'énergie cinétique engendrée par la gravité ($\propto gD$) dans le canal, entrainant une baisse de débit dépendant du Froude ($Fr = A\omega/\sqrt{gD}$).

Concernant la fraction volumique, on ne note pas d'effet significatif des vibrations. Les profils en sortie sont similaires au cas sans vibration (Fig. 6.18), de même que les profils de densité de probabilité (Fig. 6.20). On note néanmoins un étirement du profil de densité vers les faibles fractions et donc une faible baisse de la valeur moyenne. Ces résultats sont cohérents avec les mesures de débit instantané, qui montre une oscillation du débit autour d'une valeur moyenne : la fraction oscille donc entre un maximum (imposé par l'espace limité en sortie) et une valeur plus faible lorsque le débit décroît.

► **Pour aller plus loin :** nous avons aussi mesuré la vitesse radiale v_r sur des profils radiaux plus éloignés de l'ouverture ($R_c = 5 - 40$ mm) pour une ouverture $D = 5.45$ mm, comme présenté sur la Fig. 6.23. Sans vibration, on retrouve des vitesses importantes dans le canal (au centre) et des vitesses quasiment nulles sur les côtés. Avec les vibrations, ces profils se "tassent" : la vitesse au centre diminue de manière importante mais les zones sur le côté se mettent à couler. Le comportement à l'ouverture se retrouve donc aussi dans le reste du silo, ce qui cohérent avec les champs observés précédemment.

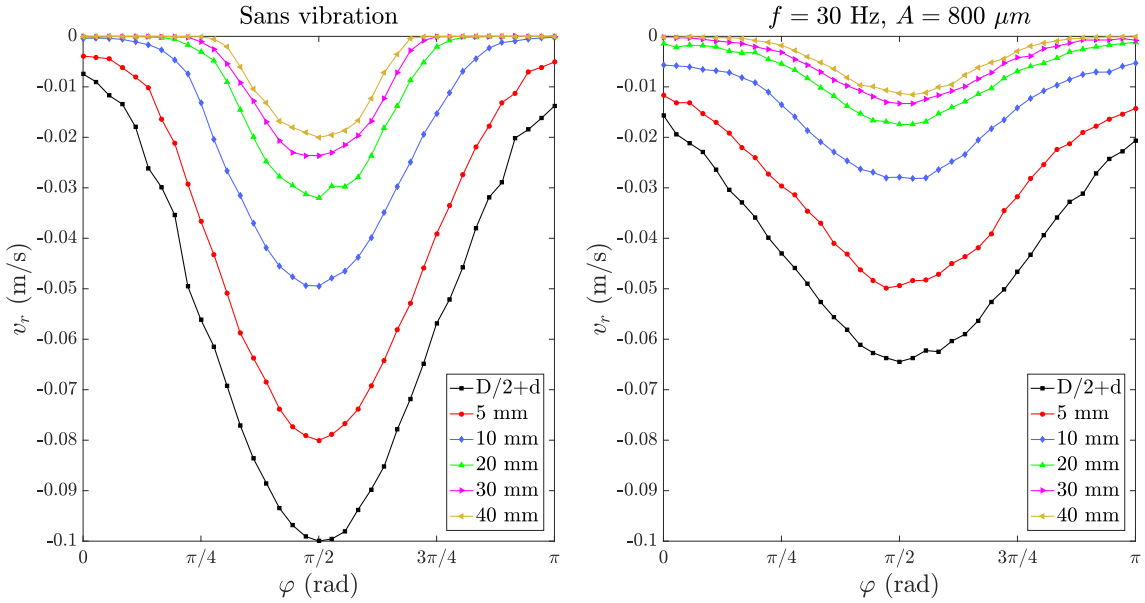


Figure 6.23 Vitesse radiale v_r en fonction de l'angle φ le long de plusieurs demi-cercles de rayons R_c centrés sur la sortie du silo. Les résultats sont présentés pour un diamètre $D = 5.45$ mm, dans le cas sans vibration et pour $A = 800$ µm et $f = 30$ Hz.

À partir de ces différents résultats, nous pouvons aussi calculer le débit radial Q_r le long du profil en sortie du silo, donné par :

$$Q_r = v_r \phi_c \rho W \tag{6.8}$$

Celui-ci est présenté sur la Fig. 6.24a pour $D = 5.45$ mm et différentes amplitudes de vibrations. On trouve des profils similaires à ceux pour la vitesse radiale. On peut néanmoins noter l'effet réduit de

la mise en mouvement des particules sur les côtés à cause de la proximité des parois (faible fraction volumique, donc faible débit). En intégrant ce débit radial sur la longueur du profil (par méthode des trapèzes), on peut obtenir le débit en sortie du silo calculé dans chaque cas et noté Q_c. L'évolution du débit normalisé Q_c/Q_{c0} en fonction du nombre de Froude Fr est présenté sur la Fig. 6.24b. On voit que les résultats obtenus suivent bien la loi du premier régime (Eq. 5.7) déterminée dans le chapitre précédent. C'est donc bien l'homogénéisation de l'écoulement par les vibrations qui vient faire diminuer le débit.

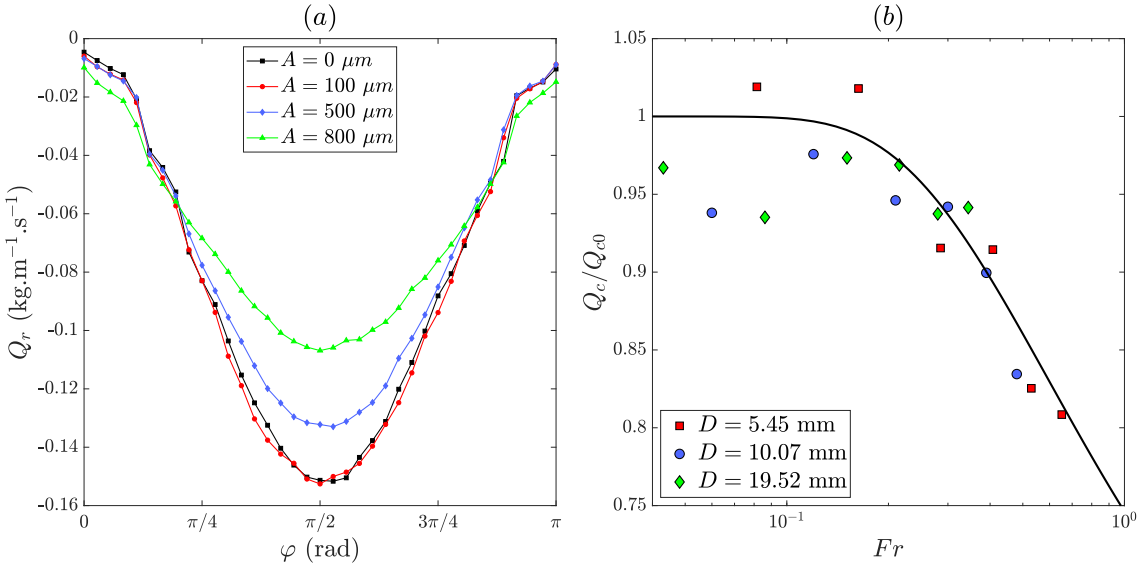


Figure 6.24 (a) Débit radial Q_r en fonction de l'angle φ le long du demi-cercle de rayon $R_c = D/2 + d$ centré sur la sortie du silo pour $D = 5.45$ mm et plusieurs amplitudes A. (b) Débit normalisé calculé Q_c/Q_{c0} (à partir du débit radial) en fonction du nombre de Froude Fr pour plusieurs diamètres D. La courbe noire représente la loi du premier régime des vibrations (Eq. 5.7), avec $a = 0.461$ et $Fr^* = 0.597$.

6.3.2 Second régime des vibrations

Profils d'écoulement en sortie

Comme pour les mesures dans le silo, les profils radiaux ont aussi été mesurés dans le second régime des vibrations ($A > 1200$ µm pour $f = 30$ Hz) grâce au dispositif complémentaire. La vitesse radial v_r et le fraction volumique ϕ_c pour $D = 10.26$ mm et différentes amplitudes $A = 0 - 2800$ µm ($f = 30$ Hz) sont présentées dans les Fig. 6.25a et b. Le débit normalisé Q_c/Q_{c0} calculé à partir de ces profils est aussi présenté dans la Fig. 6.25c.

Analyse temporelle et statistique

La densité de probabilité pour la vitesse v_z et la fraction volumique ϕ_c en sortie ont aussi été mesurées pour $D = 10.26$ mm et les différentes amplitudes $A = 0 - 2800$ µm (Fig. 10.8a et b). Comme pour le premier régime, le spectre de Fourier pour la vitesse a été calculé (Fig. 10.8c) et l'évolution de la réponse moyenne $v_{z,0Hz}$ et à la fréquence des vibrations $v_{z,30Hz}$ est présentée en fonction du nombre de Froude Fr sur la Fig. 6.27.

Analyse et interprétation physique

► **Dans le second régime :** on constate une augmentation générale des profils de vitesse (Fig. 6.25a) avec l'amplitude des vibrations dans le second régime (pour $A > 1200$ µm). Cette augmentation est particulièrement claire au niveau du canal d'écoulement ($\varphi \sim \pi/2$), même si la vitesse dans les zones mortes augmente aussi ($\varphi \sim 0$ et π). On a donc une re-canalisation apparente de l'écoulement, comme observé avec les champs dans le silo. Cette augmentation de vitesse se retrouve sur les densités de probabilité (Fig. 10.8a), avec un décalage des profils vers les plus grandes vitesses (vers la gauche, la vitesse de sortie étant négative). On note aussi une dissymétrie du profil, avec un pic plus élevé pour

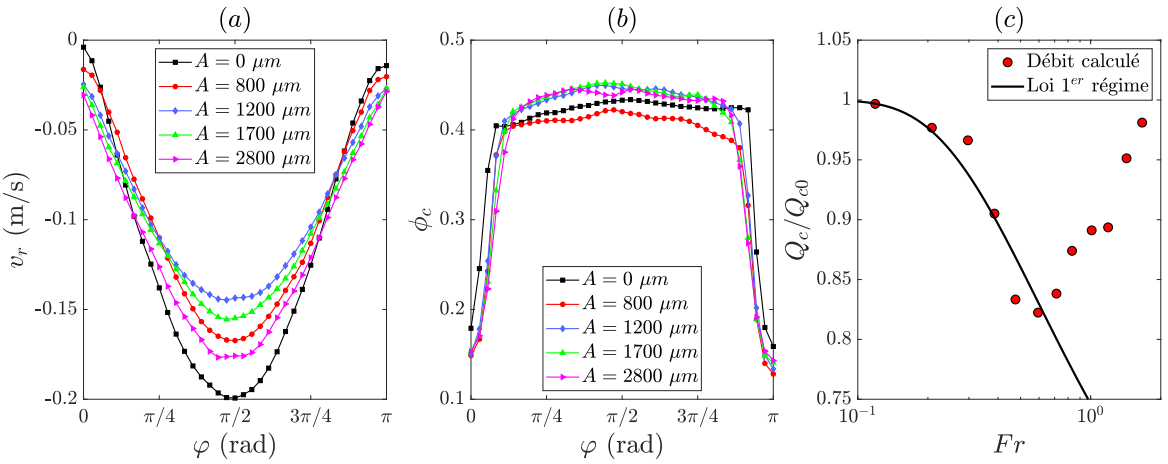


Figure 6.25 Profils radiaux de (a) vitesse radiale v_r et (b) fraction volumique ϕ_c en fonction de l'angle φ le long du demi-cercle de rayon $R_c = D/2 + d$ centré sur la sortie du silo pour $D = 10.26$ mm et plusieurs amplitudes $A = 0 - 2800$ µm. (c) Débit normalisé calculé Q_c/Q_{c0} en fonction du Froude Fr. La courbe noire représente la loi du premier régime des vibrations (Eq. 5.7), avec $a = 0.461$ et $Fr^* = 0.597$.

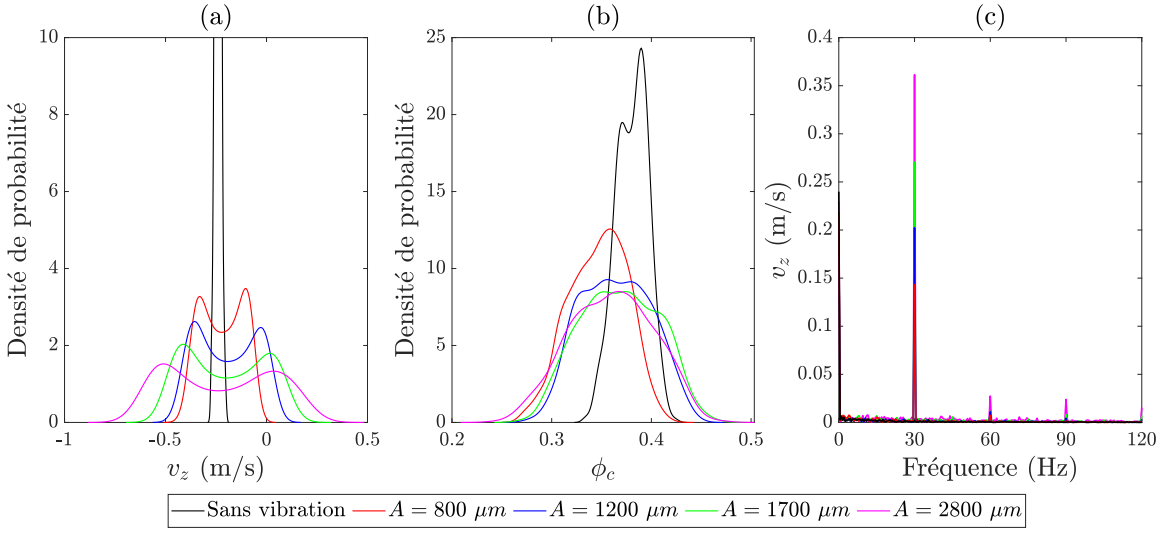


Figure 6.26 Densité de probabilité pour (a) la vitesse v_z et (b) la fraction volumique ϕ_c en sortie de l'écoulement au cours du temps pour plusieurs amplitudes $A = 0 - 2800$ µm et $D = 10.26$ mm. (c) Spectre de Fourier de la vitesse v_z pour chaque amplitude.

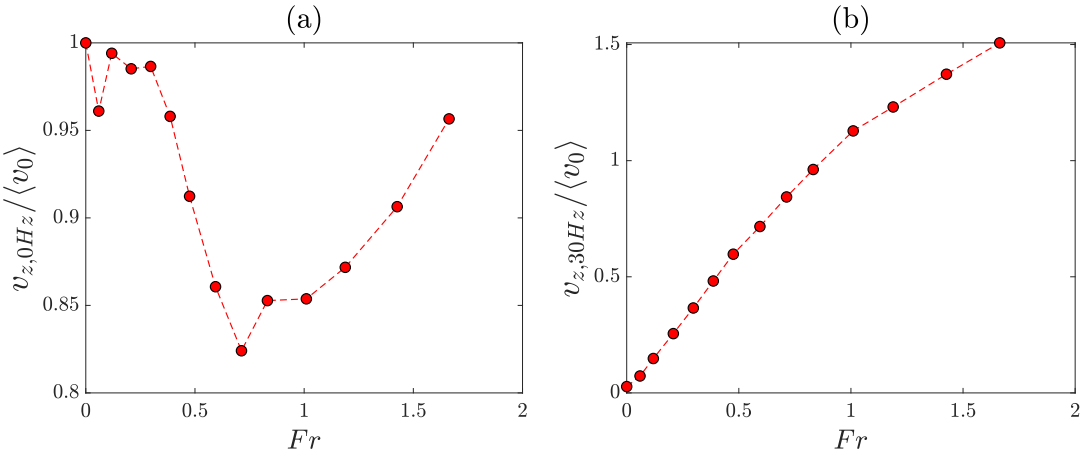


Figure 6.27 (a) Vitesse moyenne normalisée $v_{z,0Hz}/\langle v_0 \rangle$ et (b) variation de vitesse à $f = 30$ Hz normalisée $v_{z,30Hz}/\langle v_0 \rangle$ en fonction du nombre de Froude Fr pour $D = 10.26$ mm.

ces grandes vitesses. La réponse moyenne de vitesse dans le spectre de Fourier $v_{z,0Hz}$ montre bien cette croissance lorsque l'on passe dans le second régime (Fig. 6.27a). Cette vitesse se comporte de manière similaire au débit, comme dans le cas du premier régime. Les variations de vitesses $v_{z,30Hz}$ quant à elles continuent d'augmenter (Fig. 6.27b) et dépasse la vitesse sans vibration $\langle v_0 \rangle$ dans le second régime ($v_{z,30Hz}/\langle v_0 \rangle > 1$ pour $A > 1000$ µm). Ces résultats sont cohérents avec la dynamique de jets : la vidange est contrôlée principalement par les vibrations et oscille entre des jets denses ($v_{z,0Hz} + v_{z,30Hz}$) et des débits quasi nuls ($v_{z,0Hz} - v_{z,30Hz}$). La gravité contribue toujours à la vidange mais elle n'est plus le moteur principal de celle-ci. On retrouverait en effet une dynamique similaire en mettant le silo à l'horizontale puisque les grains sont expulsés à l'ouverture car ils conservent leur inertie lorsque le silo change de direction (les grains au-dessus de ceux à l'ouverture renforcent aussi cette expulsion, en agissant comme un piston). À noter que l'on voit aussi dans le spectre de Fourier des faibles effets à plus hautes fréquences (harmoniques de f : 60, 90, 120 Hz), provenant du retour de certaines ondes dans le silo.

La dynamique de jets se voit aussi sur la fraction volumique, dont la moyenne augmente faiblement (plateau sur la Fig. 6.25b) et qui montrent d'importantes fluctuations (Fig. 10.8b) dans le second régime. Les valeurs plus élevées que dans le cas sans vibration correspondent aux jets denses, tandis que les valeurs faibles sont obtenues pendant les intervalles à faible débit. Ce comportement est aussi concordant avec la fluidisation cyclique du tas granulaire discutée dans le chapitre 5 [74, 75, 79].

Concernant le débit calculé Q_c/Q_{c0}, on retrouve bien l'évolution attendue (Fig. 6.25c) : une baisse suivant la loi du premier régime pour les faibles nombres de Froude puis une augmentation dans le second régime.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement à l'échelle des grains de l'écoulement lors de la vidange du silo quasi-2D pour mieux comprendre l'origine des comportements macroscopiques étudiés dans le chapitre précédent. Pour cela, les champs de grandeurs et profils en sortie pour différentes ouvertures $D = 5.45 - 19.52$ mm et amplitudes des vibrations $A = 0 - 2800$ µm (à $f = 30$ Hz) ont été mesurés. On retrouve alors bien la présence des deux régimes mis en évidence avec les mesures de débit. On observe alors :

- Sans vibration : l'écoulement se fait uniquement dans un canal au-dessus de l'ouverture et l'on a d'importantes zones mortes sur les côtés. La température granulaire et le taux de déformation suivent aussi cette tendance. Les profils de vitesse en sortie sont gaussiens, et on n'a quasiment pas de fluctuations au cours du temps. Tous ces résultats sont cohérents avec la littérature.
- Dans le premier régime : l'écoulement est plus homogène, les zones mortes sont mises en mouvement et l'écoulement dans le canal ralentit. Ce comportement est entièrement dépendant du nombre de Froude comme pour le débit. Les profils de vitesse en sortie rendent aussi compte de ce comportement, se tassant lorsque le Froude augmente. Ceci vient en fait des variations temporelles en sortie, qui sont périodiques et suivent aussi le nombre de Froude. Pour les zones mortes, ces variations permettent d'avoir des réorganisations et un écoulement. En revanche dans le canal, elles viennent s'opposer à la gravité et dissiper l'énergie des grains par frottement. La baisse de débit vient du fait que c'est le canal qui contribue normalement le plus au débit. C'est donc cette compétition entre vibrations et gravité qui est à l'origine du premier régime.
- Dans le second régime : l'écoulement semble se recanaliser, malgré le fait que les zones mortes restent mises en mouvement. Ceci est dû au fait que la vitesse des grains au-dessus de l'ouverture augmente aussi dans ce régime. Les vibrations entrainent en effet d'importantes fluctuations en sortie qui compressent et expulsent les grains lorsque le silo remonte, d'où la dynamique de jets. Le second régime est donc principalement contrôlé par les vibrations, l'effet de la gravité devenant négligeable.

Dans tous les cas, la fraction volumique est en revanche assez peu affectée par les vibrations (en moyenne) et les effets sur le débit viennent donc quasiment uniquement des variations de vitesse.

Ces différents résultats sont bien cohérents avec les mesures macroscopiques et permettent de mieux comprendre l'origine de l'évolution de débit. Néanmoins, ceux-ci ne sont pas suffisants pour en déduire la loi de comportement décrivant ces effets. Il nous manque pour cela des informations sur les contraintes dans l'écoulement, qui sont primordiales au comportement rhéologique comme vu dans le chapitre 2. Mesurer ces contraintes dans tout l'écoulement demande des techniques particulières (photoélasticité), difficiles à mettre en œuvre avec notre dispositif. Pour pallier à ce problème, nous avons donc choisi de nous tourner vers les simulations numériques par DEM, qui nous permettent d'avoir accès aux contraintes en particulier et dont nous discuterons dans la partie suivante.

Chapitre 7

Ouverture : Étude de l'effet de la cohésion

7.1 Dispositif et protocole expérimental . . . 107
7.1.1 Modification du dispositif expérimental . . . 107
7.1.2 Protocole expérimental . . . 109
7.2 Impact sur le débit et transition de Jamming . . . 110
7.2.1 Mesure de débit . . . 110
7.2.2 Transition de Jamming pour la cohésion . . . 112
7.3 Influence de la cohésion sur la dynamique locale de l'écoulement . . . 114
7.3.1 Étude de l'écoulement dans le silo . . . 114
7.3.2 Étude de l'écoulement en sortie . . . 116
7.4 Conclusion . . . 120

Jusqu'à présent nous avons étudié la vidange de particules modèles : des sphères monodispersées non cohésives. Ceci est rarement le cas pour les milieux granulaires que l'on rencontre dans l'industrie et la nature, en particulier l'aspect non cohésif. De nombreux milieux granulaires sont en effet cohésifs, du fait de leurs propriétés de surface ou de la présence d'un liquide interstitiel. La simple présence d'humidité dans l'air suffit même parfois à rendre des grains cohésifs. Dans ce chapitre, nous allons à partir de résultats préliminaires tenter de comprendre comment la cohésion influe sur la vidange de notre silo. Cette cohésion sera créée en mélangeant les particules avec de l'eau, pour avoir des ponts capillaires entre les grains. Nous étudierons l'effet de cette cohésion sur le débit et le comportement de l'écoulement en présence de vibrations.

7.1 Dispositif et protocole expérimental

La réalisation des expériences de vidange de particules cohésives pose deux importantes difficultés techniques qu'il est nécessaire de résoudre pour obtenir des résultats exploitables :

- La cohésion entre les particules doit être bien contrôlée : elle doit être mesurable et le plus homogène possible. Une préparation correcte des particules est donc absolument nécessaire pour obtenir des résultats répétables et comparables.
- La cohésion aux parois doit être minimisée au maximum du fait de la nature quasi-2D de l'écoulement. Ceci est nécessaire pour étudier l'effet de la cohésion entre particules, qui sera complètement supplanté si l'on a aussi de la cohésion paroi-particule. Dans notre cas, la cohésion est créée par l'eau entre les grains, il faut donc que les parois soient hydrophobes.
- Les particules doivent pouvoir être insérées dans le silo sans changer leurs propriétés. En effet, la cohésion entre les particules rend difficile leur insertion dans le silo du fait de la très faible épaisseur ($W \sim d$).

Nous allons présenter dans cette section les modifications du dispositif et protocole expérimental appliquées pour résoudre ces problèmes.

7.1.1 Modification du dispositif expérimental

Pour les expériences de cohésion, nous continuons d'utiliser le dispositif complémentaire présenté dans le chapitre 4 (section 4.1.2). Les éléments et méthodes de mesure associées restent les mêmes (en particulier la balance et la caméra). Des modifications ont néanmoins été apportées pour résoudre les problèmes soulevés par la cohésion.

Pour éviter la cohésion aux parois, nous avons appliqué un produit imperméabilisant pour les rendre hydrophobes. Ce produit doit permettre d'avoir un angle de contact entre les parois et l'eau d'au moins 90° (limite hydrophobe, voir section 1.3.2) et doit résister à l'usure pour éviter d'avoir à le réappliquer trop souvent (ce qui demande de démonter entièrement le silo). Différents produits ont été testés, et nous avons finalement sélectionné l'imperméabilisant "KIWI® Super Protector". Ce produit permet d'obtenir un angle de contact $\theta_c > 100°$ et permet d'effectuer au moins 40 expériences sans le réappliquer. L'application de ce produit sur les parois sera détaillée dans la suite. Il est important de remarquer qu'il y aura toujours une force cohésive entre les grains et les parois, mais celle-ci sera faible devant l'interaction grain-grain du fait du faible angle de contact eau-grain ($\theta_c = 25°$).

Pour avoir une cohésion homogène et insérer facilement les particules dans le silo, un tambour tournant quasi-2D a été créé (voir Fig. 7.1a). Ce tambour est de même épaisseur que le silo (dimensions : $300 \times 300 \times 1.5$ mm) et permet de mélanger les grains et l'eau pour obtenir une cohésion la plus homogène possible (un point détaillé dans la suite). Pour ce faire, le tambour est fermé une fois rempli de grain, puis mis en rotation manuellement en insérant son axe de rotation (tige fixée à l'arrière du tambour, voire Fig. 7.1a) dans un support associé. Le tambour est étanche et ses parois sont traitées avec le même produit que celles du silo pour les rendre hydrophobes, l'eau reste donc sur les particules.
Une fois les grains bien mélangés, le tambour peut être placé au-dessus du silo grâce à un adaptateur (voir Fig. 7.1b). Une barre métallique permet de maintenir les grains dans le tambour, que l'on enlève lorsque l'on veut remplir le silo. Il n'y a alors pas de blocage lors de l'insertion des grains puisque le tambour et le silo possèdent la même épaisseur et sont connectés. Une fois le silo rempli, le tambour est retiré et l'on ferme le silo. À noter que la barre métallique permet de refermer le tambour s'il reste des grains pour une autre expérience.

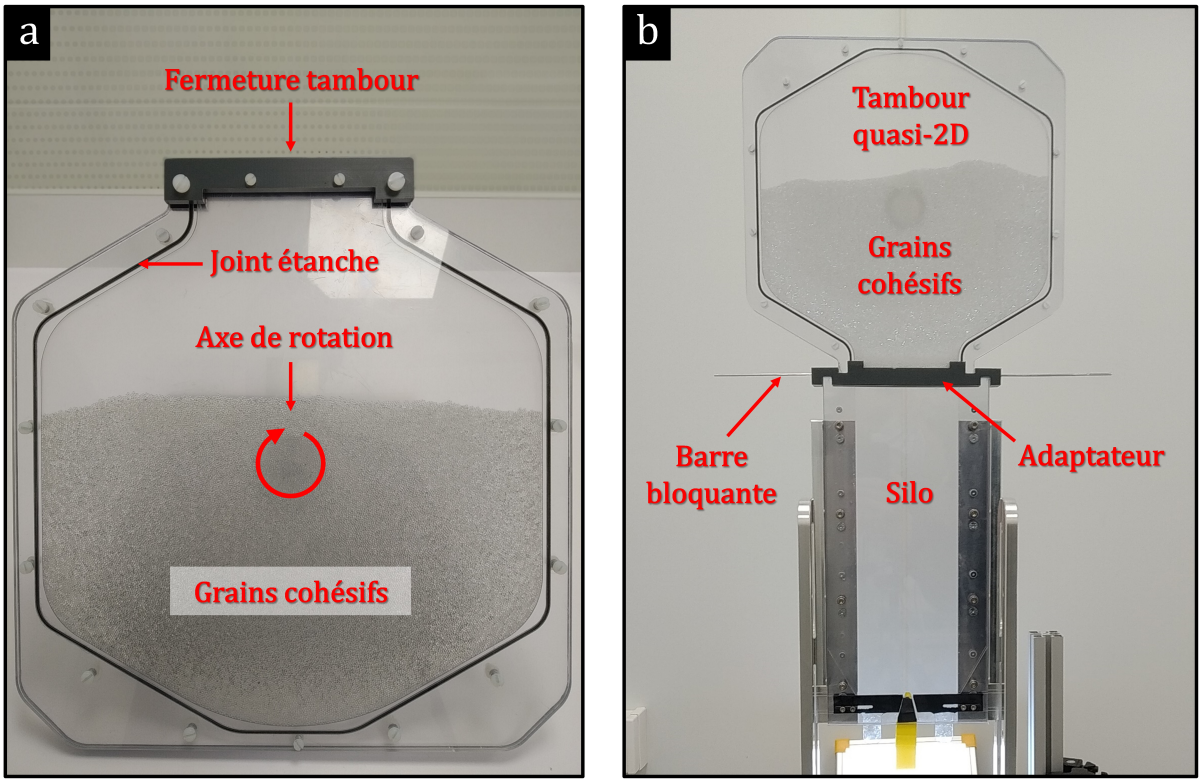


Figure 7.1 (a) Tambour tournant quasi-2D permettant de mélanger les grains et l'eau. Le tambour est étanche et ses parois sont traitées pour être hydrophobes. Une tige est fixée à l'arrière pour pouvoir faire tourner manuellement le tambour sur un support associé (non présenté sur l'image). (b) Tambour monté sur le silo pour pouvoir insérer les grains. La barre métallique est retirée pour remplir le silo.

7.1.2 Protocole expérimental

Préparation du silo et du tambour

La première étape du protocole expérimental consiste à préparer les parois du silo et du tambour pour accueillir les grains. Les deux sont démontés puis l'on applique une première couche de produit hydrophobe, sous la forme d'un spray à étaler avec un chiffon microfibre pour avoir une surface lisse et homogène. On laisse ensuite le produit sécher 20 minutes, puis on applique une seconde couche que l'on laisse aussi sécher 20 minutes. Une fois les parois sèches, on teste l'hydrophobie en appliquant des gouttes d'eau sur les parois (à l'aide d'une seringue médicale). Si les gouttes montrent bien un angle de contact $\theta_c > 90°$ et glissent facilement le long des parois, on peut remonter le silo et le tambour. Dans le cas contraire, on réapplique le produit jusqu'à l'obtention d'une bonne hydrophobie. Une fois le silo remonté, on peut régler l'ouverture souhaitée pour effectuer les expériences de vidange.

Cette étape est extrêmement importante pour avoir des résultats exploitables. Si les parois ne sont pas suffisamment hydrophobes, l'eau va rester collée aux parois, masquant les effets cohésifs entre particules. Il est donc important de bien surveiller le comportement avec le temps pour vérifier que l'eau n'accroche pas. C'est en particulier le cas pour le tambour dont les parois ont tendance à perdre leurs propriétés hydrophobes rapidement du fait des mélanges grains-eau effectués. La préparation des parois est donc répétée toutes les 45 vidanges pour le silo et toutes les 15 vidanges pour le tambour.

À noter que le produit est aussi appliqué sur les éléments liés au tambour pour éviter que l'eau n'accroche à ceux-ci : la fermeture du tambour, la barre bloquante et l'adaptateur sur le silo.

Préparation des particules

Pour créer de la cohésion, on ajoute directement une quantité contrôlée d'eau distillée dans le milieu pour avoir création de ponts capillaires entre les grains (voir chapitre 1, section 1.3.2). Cette quantité d'eau est dans ce cas mesurée par la teneur en eau pondérale M_e et volumétrique X_e :

$$M_e = \frac{Masse\ d'eau}{Masse\ de\ grains} \quad , \quad X_e = \frac{Volume\ d'eau}{Volume\ de\ grains} \tag{7.1}$$

Dans tous les cas, la quantité d'eau restera suffisamment faible pour ne pas dépasser le régime pendulaire décrit dans le chapitre 1. Les propriétés des grains cohésifs et du liquide (eau distillée) utilisé lors des expériences sont présentés dans les Tables 7.1 et 7.2 ci-dessous.

Table 7.1 Propriétés physiques des particules cohésives utilisées lors des expériences de vidange.

Nom	Matériaux	ρ (kg/m^3)	Forme	d (mm)	Teneur en eau X_e
Étalon	Verre	2500	sphère	$1 - 1.25$	0-0.5%

Table 7.2 Propriétés physiques du liquide (eau distillée) utilisé lors des expériences de vidange cohésive.

Propriétés	Valeurs
Masse volumique ρ_e (kg/m^3)	1000
Viscosité η_e (Pa.s)	1×10^{-3}
Tension superficielle γ_e (N/m)	7.2×10^{-2}
Angle de contact θ_c (grains)	25°
Angle de contact θ_c (parois)	$> 90°$

Avant d'effectuer le mélange, on doit s'assurer que les grains sont bien secs. Pour cela, on les place dans une enceinte à température et humidité contrôlées. La température est réglée sur 60°C tandis que l'humidité est maintenue à 10% (chaud et sec). Les particules sont stockées dans un bac large pour réduire l'épaisseur du milieu et maximiser la surface en contact avec l'atmosphère sèche. On laisse les particules dans l'enceinte pendant au moins 12h avant de les utiliser pour la vidange. Cette étape est répétée à la fin des expériences pour sécher les grains humides.

L'ajout d'eau et le mélange se font dans le tambour. Pour cela, on pèse une masse $m = 150$ g de grains et l'on insère la moitié dans le tambour. On ajoute ensuite avec une seringue (graduée à 0.01 mL, limitée à 1 mL) la quantité d'eau distillée nécessaire pour avoir la teneur en eau volumique souhaitée dans le tambour. Voici un exemple si l'on veut une teneur volumique en eau $X_e = 1\%$ pour 150 g de grains :

$$M_e = X_e/\rho = 0.4\% \quad \Rightarrow \quad m_e = m \times M_e = 0.6 \text{ g} \quad \Rightarrow \quad V_e = 0.6 \text{ mL}$$

avec V_e le volume d'eau à ajouter. Une fois l'eau ajoutée, on insère le reste des particules puis on ferme le tambour. On fait ensuite tourner verticalement le tambour en insérant la tige à l'arrière dans le support prévu à cet effet. Pour bien mélanger les grains et l'eau, il est important de faire varier la vitesse et le sens dans lequel tourne le tambour. Il est aussi préférable de secouer rapidement le tambour dans différentes directions par la suite pour s'assurer d'un mélange optimal. Cette étape est primordiale pour avoir un milieu relativement homogène [1], et donc des résultats les plus répétables possibles.

Une fois le mélange réalisé, on referme le tambour avec l'adaptateur et la barre métallique bloquante. On peut alors monter le tambour sur le silo pour le remplir et faire les expériences de vidange. À noter que les grains ont parfois tendance à se bloquer dans le tambour lors du mélange et du remplissage du silo. On utilise dans ce cas un petit marteau en plastique pour les débloquer en tapotant les parois.

Étapes des expériences

Lors d'une expérience de vidange cohésive, les étapes restent globalement les mêmes que dans les cas précédents à quelques nuances près :

1. Nettoyage et application du produit hydrophobe sur le silo et le tambour comme décrit précédemment.
2. Réglage du diamètre d'ouverture et calibration de la caméra.
3. Mélange des particules et de l'eau dans le tambour comme décrit précédemment.
4. Blocage du silo et insertion des particules en plaçant le tambour sur le silo. Le blocage est réalisé grâce à un obstacle glissé devant l'ouverture (voir Fig. 7.1).
5. Réglage et activation des vibrations. On laisse le silo vibré un petit temps pour que les vibrations soient bien établies.
6. Activation de la balance pour enregistrer la masse écoulée au cours du temps.
7. Ouverture du silo et activation de la caméra. L'obstacle est retiré pour ouvrir le silo et la caméra est activée de manière simultanée pour maximiser le nombre d'images enregistrées (plus ou moins limité selon la mémoire et le ROI de la caméra).
8. Arrêt de la balance et de la caméra après la fin de l'écoulement. À noter que la caméra ne permet pas toujours de filmer entièrement la vidange selon le ROI.
9. Arrêt des vibrations.
10. Utilisation du pistolet à air ionisé pour enlever l'eau et les particules potentiellement bloquées.

Pour un gain de temps, on effectue une série d'expériences pour une seule configuration d'ouverture (un seul diamètre). On ne change dans ce cas que les vibrations imposées, ce qui permet d'éviter les deux premières étapes. La série d'expériences est répétés deux fois pour vérifier la répétabilité.

7.2 Impact sur le débit et transition de Jamming

7.2.1 Mesure de débit

Pour comprendre l'effet de la cohésion, nous avons mesuré l'évolution le débit du silo pour différentes teneurs en eau $X_e = 0{-}0.5\%$ lorsque l'on applique des vibrations. Pour simplifier le problème, on imposera un seul diamètre d'ouverture $D = 10$ mm et une seule fréquence $f = 30$ Hz et on variera uniquement l'amplitude $A = 0 - 2800$ µm. L'évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude Fr pour différentes teneurs en eau est présentée sur la Fig. 7.2a. Pour isoler l'effet de la cohésion, nous avons aussi représenté l'évolution du débit cohésif normalisé Q/Q_{sv} dans chaque cas sur Fig. 7.2b, avec Q_{sv} le débit sans cohésion (pour $X_e = 0\%$).

1. Une homogénéité parfaite n'est pas pratiquement possible pour de faibles quantités d'eau, car on ne peut pas répartir l'eau sur toutes les particules.

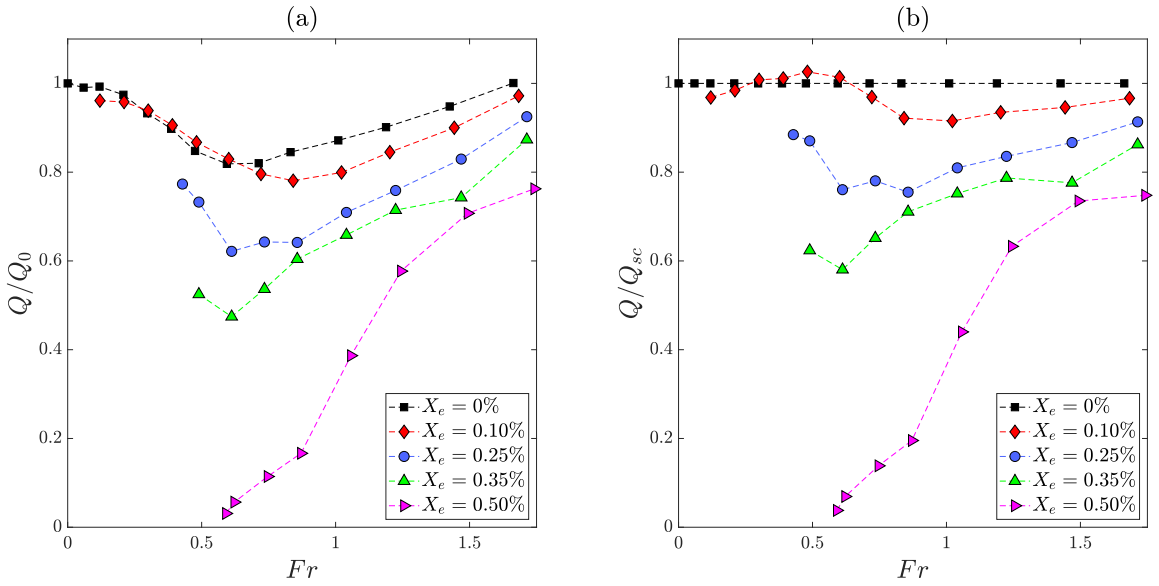


Figure 7.2 Évolution en fonction du nombre de Froude Fr du (a) débit normalisé Q/Q_0 et du (b) débit normalisé cohésif Q/Q_{sc} (avec Q_{sv} le débit sans cohésion) pour différentes teneurs en eau $X_e = 0 - 0.5\%$ ($D \sim 10$ mm, $f = 30$ Hz). La présence d'eau entraine la formation d'arches qui bloquent l'écoulement aux faibles vibrations, d'où une coupure des courbes.

Le premier effet de la cohésion qu'on remarque est l'apparition aléatoire d'arches dans le silo qui bloquent la vidange (d'où la coupure sur les courbes) malgré un grand diamètre D devant la taille des grains. Comme dans le cas sans vibration pour des faibles ouvertures, l'application de vibrations permet de briser ces arches. Comme on peut s'y attendre, l'amplitude des vibrations nécessaire pour avoir un écoulement augmente avec la teneur en eau X_e. Dans la suite, nous tenterons de déterminer cette limite plus précisément.

Lorsque les vibrations sont suffisantes pour avoir un écoulement, on constate les points suivants :

- Plus la teneur en eau X_e est élevée, plus le débit est faible par rapport au cas sans cohésion Q_{sv} (voir Fig. 7.2b).
- L'allure générale des courbes en fonction du nombre de Froude reste similaire qu'importe la teneur en eau (voir Fig. 7.2a).
- Dans le second régime des vibrations ($Fr > 0.6$ ici), les débits convergent pour les différentes teneurs en eau lorsque le nombre de Froude augmente.
- Pour $X_e = 0.5\%$, on a l'apparition d'un régime très cohésif et très lent ($Q/Q_0 \to 0$), où l'écoulement se fait par paquet de grains.

Ce dernier point est présenté plus en détail dans la Fig. 7.3a. On peut aussi noter que les fortes teneurs en eau donnent lieu à d'importants dépôts sur les côtés du silo (voir Fig. 7.3b). Ces dépôts peuvent néanmoins être éliminés facilement en augmentant l'amplitude des vibrations (passage dans le second régime).

Interprétation physique

La baisse de débit lorsque l'on augmente la teneur en liquide est un phénomène déja observé par Anand et al. [51] dans le cas sans vibration (voir chapitre 3, section 3.3.2). D'après leurs résultats, l'effet de la cohésion est particulièrement dépendant du nombre de Bond : plus il élevé, plus la cohésion est forte (on rappelle : $Bo = F_{cap}/mg$, avec F_{cap} la force capillaire et mg le poids d'un grain). Pour un faible nombre de Bond ($Bo < 1$), la cohésion a peu d'effet sur le débit qu'importe la teneur en liquide. En revanche pour les grands nombres de Bond ($Bo > 1$), on a une baisse de débit augmentant avec la teneur en liquide. Dans notre cas, le nombre de Bond vaut $Bo = 13.9$, d'où une baisse massive du débit lorsque la teneur en liquide augmente.

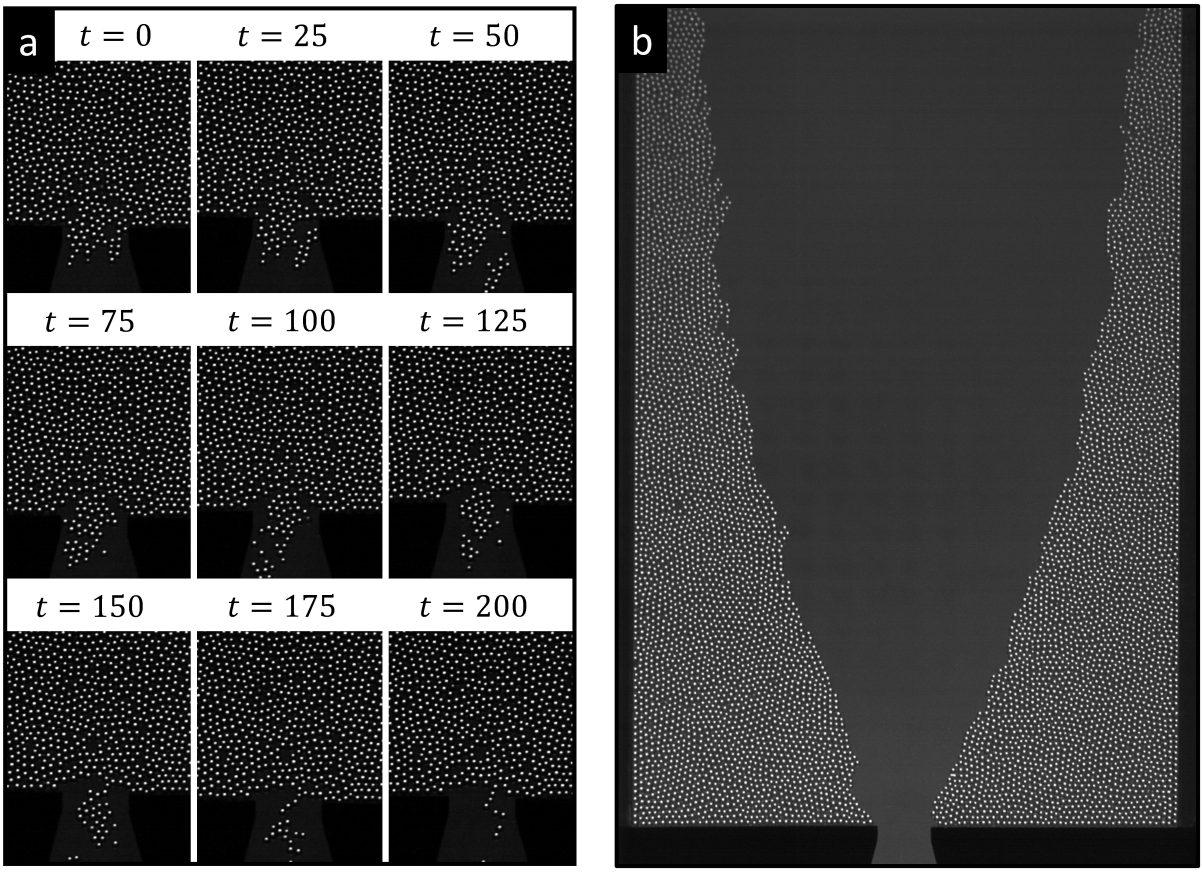


Figure 7.3 Images de la vidange cohésive : (a) Écoulement par paquets de grains à la sortie du silo au cours du temps t (en ms) et (b) Dépôts sur les côtés du silo du fait de la cohésion. Dans les deux cas, on a $D = 9.36$ mm, $f = 30$ Hz et $A = 1000$ µm. Ces paquets sont maintenus par les ponts capillaires entre les grains, un phénomène que l'on voit particulièrement bien pour $t = 175 - 200$ ms.

La convergence dans le second régime est dans ce cas aussi parfaitement logique : ce n'est pas la gravité mais les vibrations qui contrôlent la vidange comme nous l'avons vu dans les chapitres 5 et 6. Dans ce cas, il faut plutôt considérer un nombre de Bond des vibrations Bo_v donné par :

$$Bo_v = \frac{F_{cap}}{F_{vib}} = \frac{2\pi r\gamma_e}{mA\omega^2} = \frac{3\gamma_e}{2r^2\rho A\omega^2} \tag{7.2}$$

Ce nombre décroît rapidement avec l'accélération des vibrations, et on a dans notre cas $Bo_v = 1$ pour $A = 3840$ µm et $f = 30$ Hz (soit $Fr = 2.31$ sur la Fig. 7.2). Au-delà de cette accélération, l'effet de la cohésion devrait devenir négligeable qu'importe la teneur en liquide, ce qui est cohérent avec l'allure des courbes. Les vibrations permettent alors de briser complètement les ponts capillaires du fait de la force engendrée sur les grains par l'accélération des vibrations $A\omega^2$.

Malheureusement nous ne pouvons pas atteindre une telle amplitude expérimentalement. De plus, nous avons rencontré des difficultés lorsque la teneur en eau dépasse $X_e = 0.5\%$: de l'eau restait sur les parois et les résultats montraient d'importantes variations d'une série à l'autre. Nous poursuivrons donc cette étude grâce aux simulations par éléments discrets qui permettent d'éviter ces difficultés techniques.

7.2.2 Transition de Jamming pour la cohésion

Une des caractéristiques les plus intéressantes et complexes des milieux granulaires et leur capacité à passer de l'état solide à l'état liquide. Nous avions discuté ce phénomène dans le chapitre 1 (section 1.2.2), qui est aussi appelé *transition de Jamming*. Pour une vidange de particules sèches et sphériques dans un silo, on le rencontre sous la forme des arches en sortie qui bloquent l'écoulement. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 (section 3.3.3), la formation de ces arches se fait pour des diamètres d'ouverture $D \gtrsim 5d$. Zuriguel et al. [60] ont néanmoins montré qu'il est possible d'avoir un écoulement en dessous de cette limite en ajoutant des vibrations suffisamment fortes, donnant lieu à un comportement typique d'une transition de Jamming (voir Fig. 3.12, section 3.4.1).

Or comme nous venons de le voir, on retrouve ce type de transition lorsque l'on ajoute de la cohésion. Cette transition dépend dans notre cas des vibrations et de la teneur en eau. À partir des mesures de débit précédentes, nous avons déterminé cette transition et le diagramme de phase correspondant. Ce diagramme est présenté en fonction du Froude Fr et de la teneur en eau X_e sur la Fig. 7.4a, et en fonction du Bond des vibrations Bo_v et de la teneur en eau X_e sur la Fig. 7.4b.

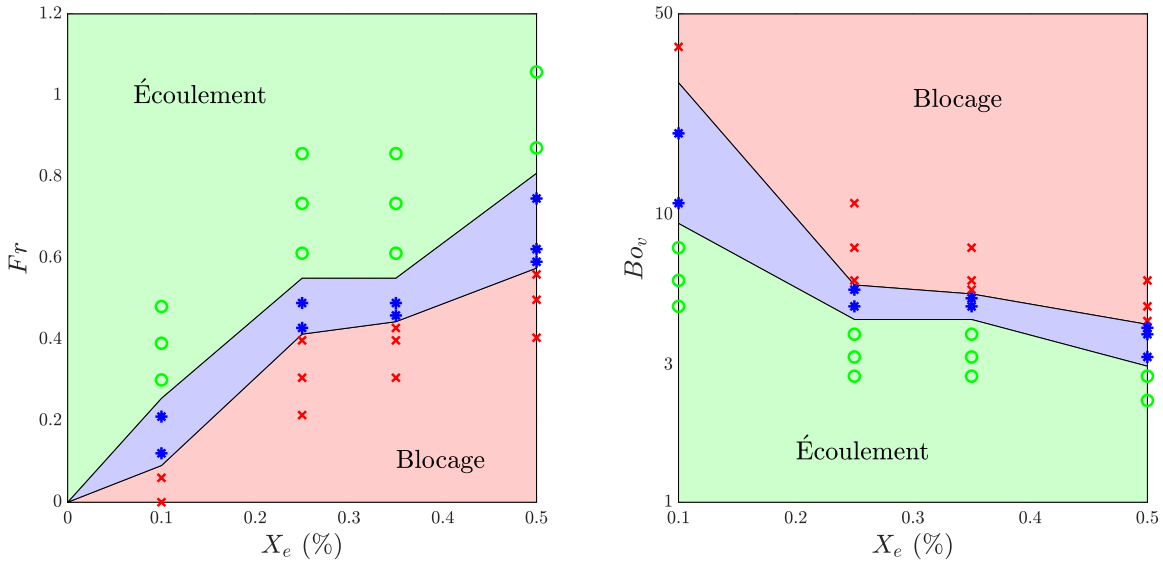


Figure 7.4 Diagramme de phase de l'écoulement pour (a) le nombre de Froude Fr et (b) le nombre de Bond des vibrations Bo_v en fonction de la teneur en eau X_e. Les zones en vert correspondent au cas où l'on a un écoulement tandis que les zones en rouge correspondent au cas où le silo est bloqué. Les zones en bleu correspondent à un comportement intermédiaire avec un écoulement difficile à caractériser : il est lent et intermittent du fait d'arches qui apparaissent et se brise aléatoirement. Les points (cercles, étoiles et croix) indiquent les mesures effectuées pour déterminer la limite entre blocage et écoulement.

Dans chaque diagramme, on note le passage d'un état bloqué (en rouge), pour les faibles vibrations et fortes teneurs en eau, vers un état d'écoulement (en vert), pour les fortes vibrations et faibles teneurs en eau. On note aussi la présence d'un état intermédiaire (en bleu) où l'écoulement est assez lent et intermittent (du fait de la formation d'arches). Ce type de diagramme est typique d'une transition de Jamming, avec une transition solide/fluide (blocage/écoulement) dépendant de deux paramètres, comme dans le cas des arches sous vibrations (Γ et D, voir Fig. 3.12 section 3.4.1) et de l'écoulement sur le plan incliné (h et θ, voir Fig. 2.10 section 2.3.3).

Si l'on se penche sur le cas du diagramme Bo_v/X_e (Fig. 7.4b), on retrouve une évolution cohérente avec les courbes de débit (Fig. 7.3b) et les résultats de Anand et al. [51] : l'effet de la teneur en eau est faible pour les petits nombres de Bond ($Bo_v \sim 1$), avec dans ce cas une transition qui semble saturer lorsque X_e augmente. Il devrait alors exister un nombre de Bond des vibrations limite pour lequel on a toujours un écoulement, qu'importe la teneur en eau. En dessous de cette limite, l'accélération des vibrations permet de complètement briser les ponts capillaires d'où un effet de la cohésion tendant vers 0 comme pour le débit. Nous étudierons cette tendance en simulation dans la partie suivante pour de plus fortes teneurs en eau.

Un dernier point qu'il est important de mentionner est le fait que le diamètre d'ouverture est maintenu constant lors de nos expériences ($D = 10$ mm). Il est en effet fortement probable que celui-ci ait un effet sur cette transition, comme dans le cas sec avec la formation d'arche. On aurait alors un diagramme de phase en 3 dimensions : la teneur en eau X_e, le nombre de Bond des vibrations Bo_v et le diamètre D. Du fait des contraintes techniques et temporelles, ce point n'a néanmoins pas été traité lors de la thèse. Une étude plus approfondie de l'effet de ce paramètre, ainsi que des autres maintenus constants (tension superficielle, taille de grains...), constitue donc une piste prometteuse pour mieux comprendre les effets de la cohésion dans les milieux granulaires.

7.3 Influence de la cohésion sur la dynamique locale de l'écoulement

Dans cette section, nous allons pencher sur l'effet de la cohésion sur l'écoulement dans le silo et en sortie. Nous utiliserons les mêmes méthodes d'analyse que celles présentées dans le chapitre 6 (section 6.1). Tout comme pour le débit, on se concentre sur un seul diamètre d'ouverture $D \sim 10$ mm et une fréquence $f = 30$ Hz. De manière similaire au chapitre 6, on présentera tout d'abord l'intégralité des résultats sur chaque point avant d'en faire l'analyse.

7.3.1 Étude de l'écoulement dans le silo

Évolution des champs de grandeurs dans l'écoulement

Les différents champs de grandeurs (vitesse, taux de déformation, température et fraction) ont été mesurés dans le silo pour différentes amplitudes $A = 0{-}2800$ µm et plusieurs teneurs en eau $X_e = 0{-}0.5\%$. Les évolutions de ces champs avec la teneur en eau X_e dans le premier régime ($A = 1200$ µm) et le second régime ($A = 2400$ µm) sont présentées respectivement dans les Fig. 7.5 et Fig. 7.6. Comme précédemment, ces champs sont issus de moyennes temporelles sur 2 s d'écoulement stationnaire.

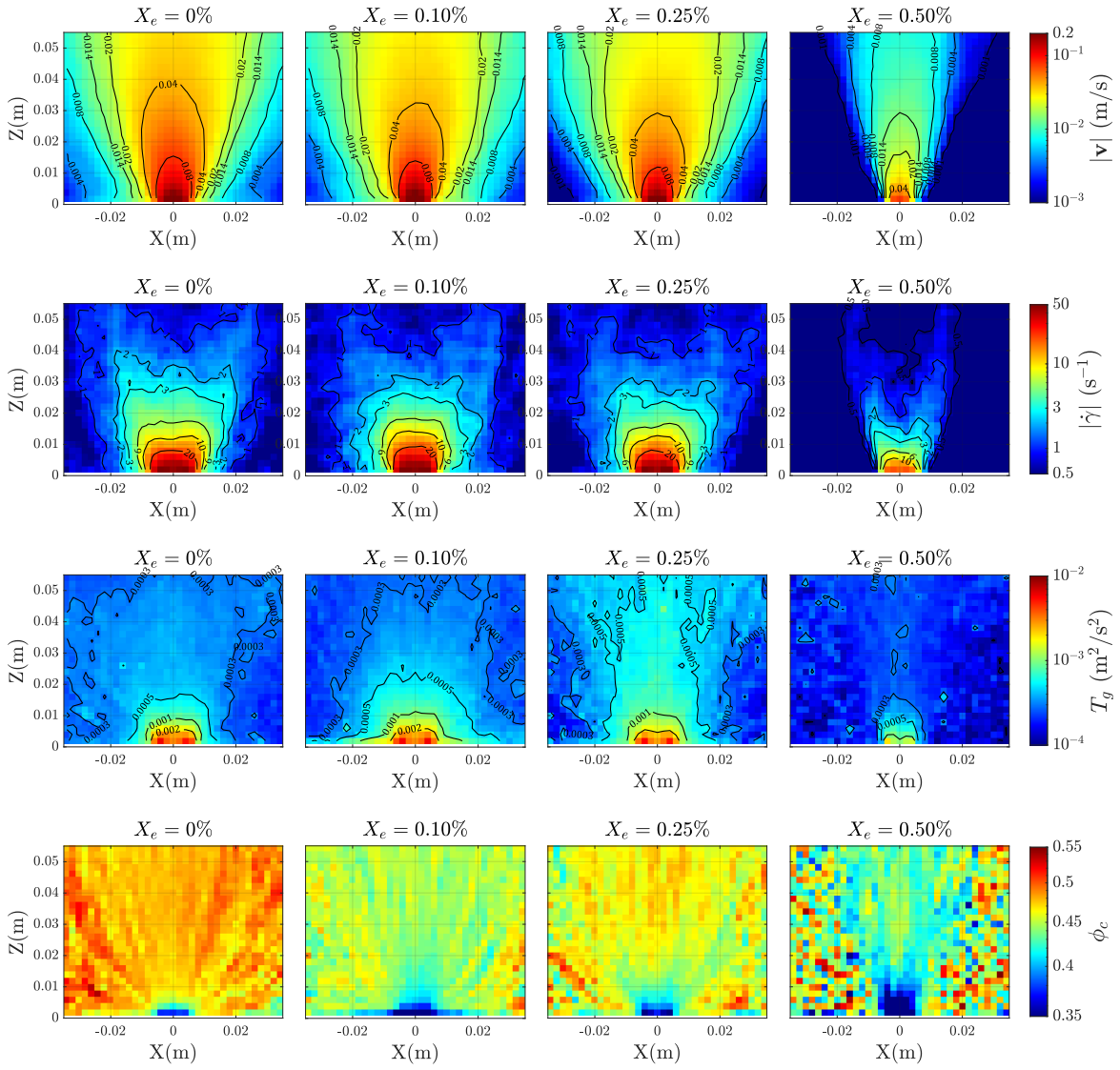


Figure 7.5 Champs dans le silo pour $D \sim 10$ mm et différentes teneurs en eau $X_e = 0 - 0.5\%$ dans le premier régime ($A = 1200$ µm et $f = 30$). De haut en bas : norme de vitesse $|\mathbf{v}|$, taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, température granulaire T_g et fraction volumique ϕ_c.

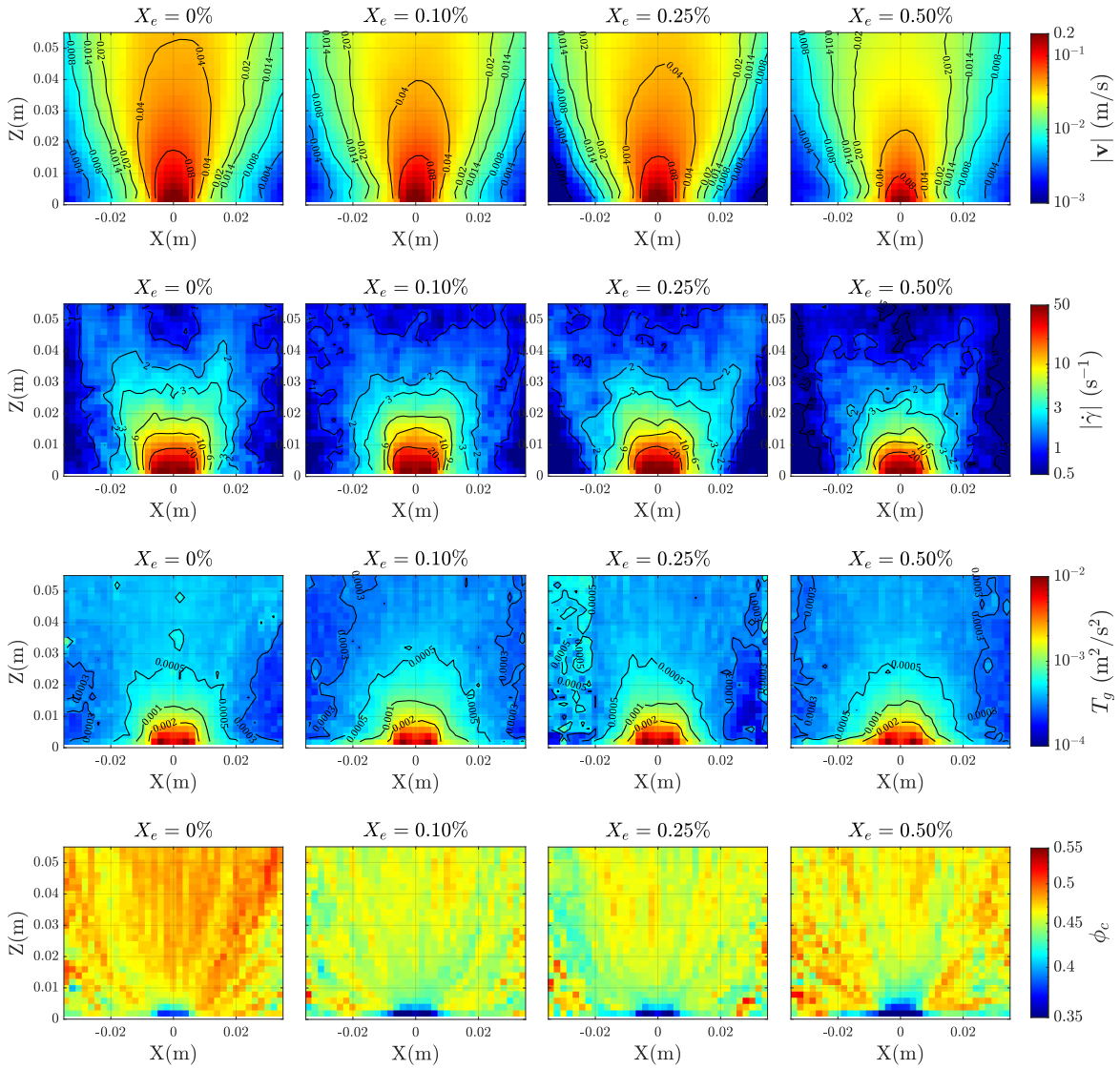


Figure 7.6 Champs dans le silo pour $D \sim 10$ mm et différentes teneurs en eau $X_e = 0 - 0.5\%$ dans le second régime ($A = 2400$ µm et $f = 30$). De haut en bas : norme de vitesse $|\mathbf{v}|$, taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, température granulaire T_g et fraction volumique ϕ_c.

Analyse et interprétation physique

► **Dans le premier régime :** on retrouve bien une diminution de vitesse et une canalisation de l'écoulement lorsque l'on augmente la teneur en eau ($1^{ère}$ ligne Fig. 7.5). Malgré les puissantes vibrations ($A = 1200$ µm), les zones mortes augmentent du fait de la cohésion plus importante. On note aussi une augmentation brutale de ce comportement pour $X_e = 0.5\%$, avec une vitesse très faible et un canal d'écoulement fin. Des observations similaires peuvent être faites pour le taux de déformation ($2^{ème}$ ligne). Ces résultats sont cohérents avec la baisse de débit lorsque la teneur en eau augmente. La cohésion entre les particules donne lieu à une force capillaire venant s'opposer à la gravité et aux vibrations, réduisant l'écoulement dans le canal et les réorganisations dans les zones mortes. Pour les faibles teneurs en eau, l'écoulement reste néanmoins similaire au cas sans cohésion car la gravité et les vibrations sont suffisantes pour casser la majorité des ponts. En revanche, pour $X_e = 0.5\%$ on passe à un écoulement par paquet de grains, ou clusters, comme nous l'avons vu sur la Fig. 7.3. Les vibrations et la gravité ne sont plus suffisantes pour briser tous les ponts, seuls certains se cassent et donnent lieu à des clusters. Ces clusters étant plus gros que les particules, ils s'écoulent plus difficilement et uniquement dans le canal.

On retrouve ces deux types d'écoulement pour la température granulaire et la fraction volumique. Pour les faibles teneurs, la température granulaire ($3^{ème}$ ligne) augmente du fait des fluctuations de vitesse plus nombreuses lorsque les ponts capillaires se brisent. En revanche pour $X_e = 0.5\%$, les grains

se déplacent lentement et en clusters, d'où des fluctuations de vitesse quasiment nulles. Concernant la fraction ($4^{ème}$ ligne), elle baisse lorsque la teneur en eau augmente car la cohésion empêche le milieu de se compacter en limitant les réorganisations. Ce point est particulièrement visible pour $X_e = 0.5\%$, où l'on retrouve une fraction aléatoire comme lorsque l'on remplis le silo. La forte baisse à l'ouverture vient du fait que les particules s'écoulent en cluster, laissant parfois d'importants vides derrière eux lorsqu'ils s'échappent du silo.

► **Dans le second régime :** on retrouve dans ce régime des champs très similaires qu'importe la teneur en eau (Fig. 7.6). Les effets décrits dans le premier régime sont encore légèrement visibles, surtout pour $X_e = 0.5\%$. Néanmoins, dans ce régime le nombre de Bond des vibrations Bo_v est faible : la force capillaire est donc négligeable devant les effets des vibrations. Les ponts capillaires sont alors entièrement détruits par les vibrations, qui contrôlent alors complètement l'écoulement. On retrouve donc bien des résultats qui convergent comme pour le débit.

7.3.2 Étude de l'écoulement en sortie

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le débit et l'écoulement dans le silo sont très dépendants du comportement à l'ouverture. Nous avons donc mesuré les profils et variations temporelles en sortie pour mieux comprendre l'impact de la cohésion.

Profils d'écoulement en sortie

Les profils radiaux pour la vitesse radiale normalisée v_r/v_0 et la fraction volumique calculée ϕ_c sont présentés dans les Figs. 7.7 et 7.8 pour les différentes teneurs en eau $X_e = 0 - 0.5\%$. Dans chaque cas les profils ont été mesurés à un rayon $R_c = D/2+d$ de l'ouverture pour trois amplitudes $A = 1200$, 1700, 2400 µm ($f = 30$ Hz). Le cas sans cohésion et sans vibration est aussi présenté à titre de comparaison sur chaque figure (en noir).

À noter que l'on normalise la vitesse radiale par la vitesse moyenne v_0 pour prendre en compte les variations de débit d'une série à l'autre (le diamètre étant légèrement différent après nettoyage du silo). Cette vitesse moyenne est calculée à partir du débit sans vibration et sans cohésion Q_0 de chaque cas :

$$v_0 = \frac{Q_0}{\rho \phi_b W D} \tag{7.3}$$

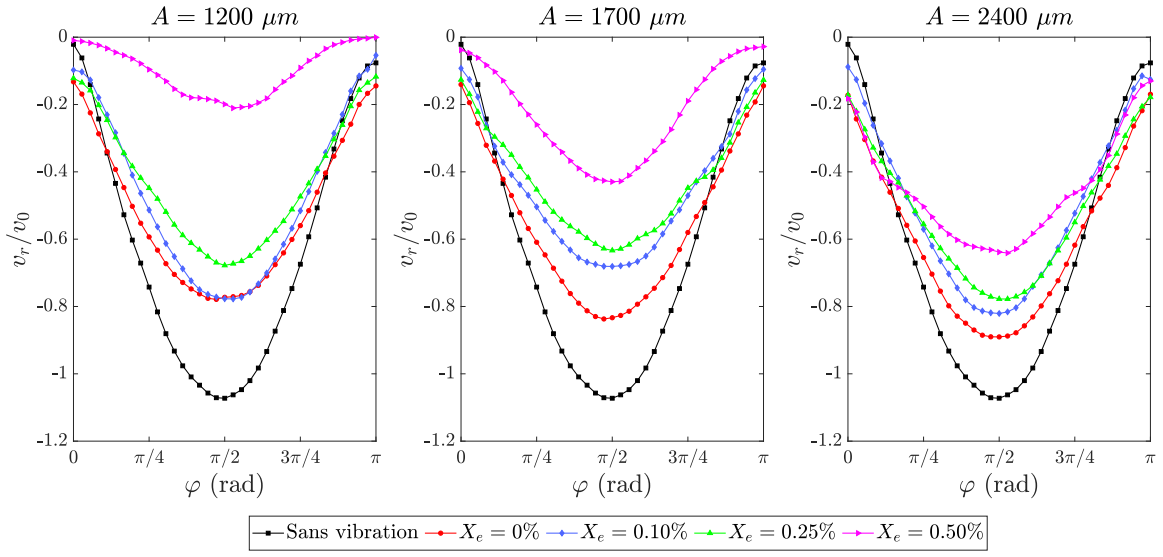


Figure 7.7 Vitesse radiale normalisée v_r/v_0 en fonction de l'angle φ le long du demi-cercle de rayon $R_c = D/2+d$ centré sur la sortie du silo ($D \sim 10$ mm). Les résultats sont présentés pour plusieurs amplitudes $A = 1200 - 2400$ µm ($f = 30$ Hz) et teneurs en eau $X_e = 0 - 0.5\%$. Le cas sans vibration et sans cohésion est aussi présenté à titre de comparaison (en noir).

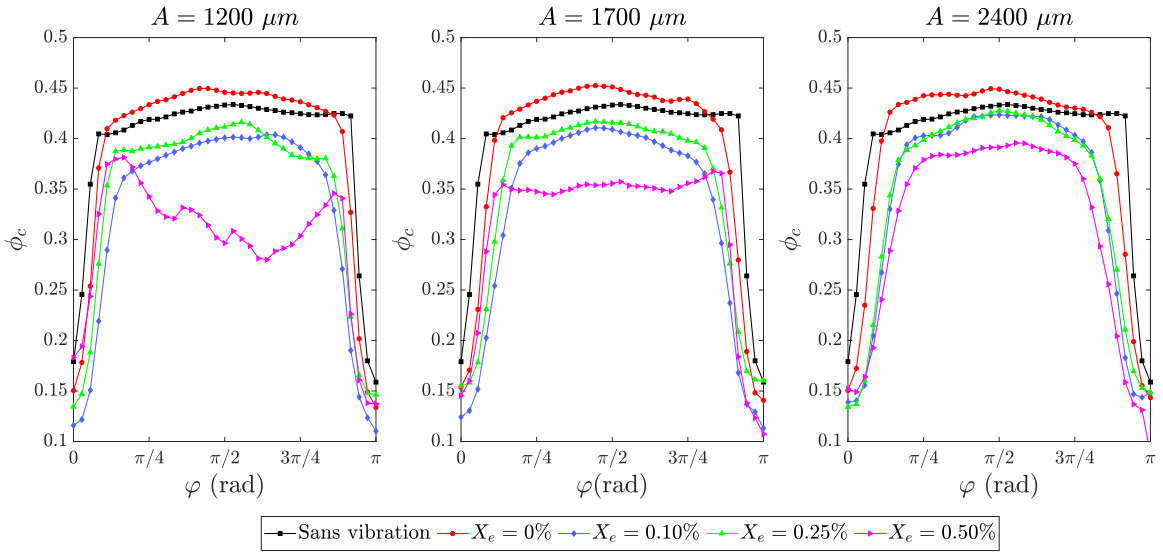


Figure 7.8 Fraction volumique calculée ϕ_c en fonction de l'angle φ le long du demi-cercle de rayon $R_c = D/2 + d$ centré sur la sortie du silo ($D \sim 10$ mm). Les résultats sont présentés pour plusieurs amplitudes $A = 1200 - 2400$ µm ($f = 30$ Hz) et teneurs en eau $X_e = 0 - 0.5\%$. Le cas sans vibration et sans cohésion est aussi présenté à titre de comparaison (en noir).

Analyse temporelle et statistique

Comme dans le chapitre 6, les densités de probabilité de vitesse v_z et fraction ϕ_c ont été calculées en sortie (demi-cercle de rayon $D/2$ au-dessus de l'ouverture) pour les différentes teneurs en eau X_e. Les résultats dans le premier régime sont présentés dans la Fig. 7.9, tandis que le second régime est présenté dans la Fig. 7.10. Le cas sans vibration et sans cohésion est présenté pour comparer (en noir). De même, le spectre de Fourier de la vitesse v_z est aussi présenté dans chaque figure.

Enfin, l'évolution détaillée de la réponse moyenne (à 0 Hz) $v_{z,0Hz}$ et la réponse à la fréquence des vibrations $v_{z,30Hz}$ en fonction du Froude Fr sont présentées dans la Fig. 7.11. Dans chaque cas, on normalise par la vitesse moyenne sans vibration v_0 introduite juste au-dessus.

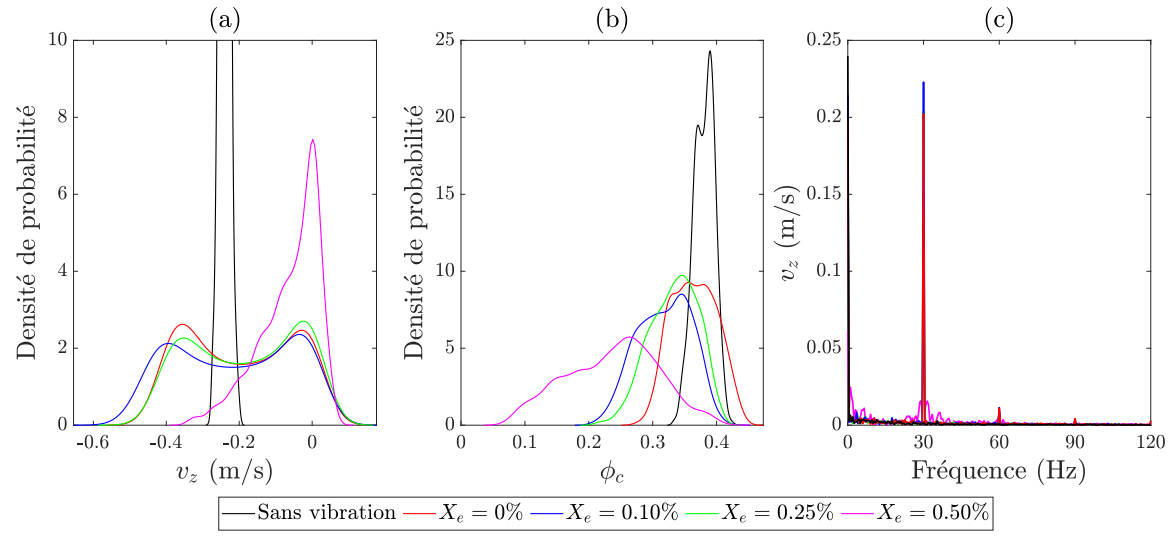


Figure 7.9 Densité de probabilité pour (a) la vitesse v_z et (b) la fraction volumique ϕ_c en sortie de l'écoulement au cours du temps pour différentes teneurs en liquide X_e dans le premier régime ($A = 1200$ µm, $f = 30$ Hz, $D \sim 10$ mm). Le cas sans vibration et sans cohésion est présenté en noir pour comparer. (c) Spectre de Fourier de la vitesse v_z pour chaque cas.

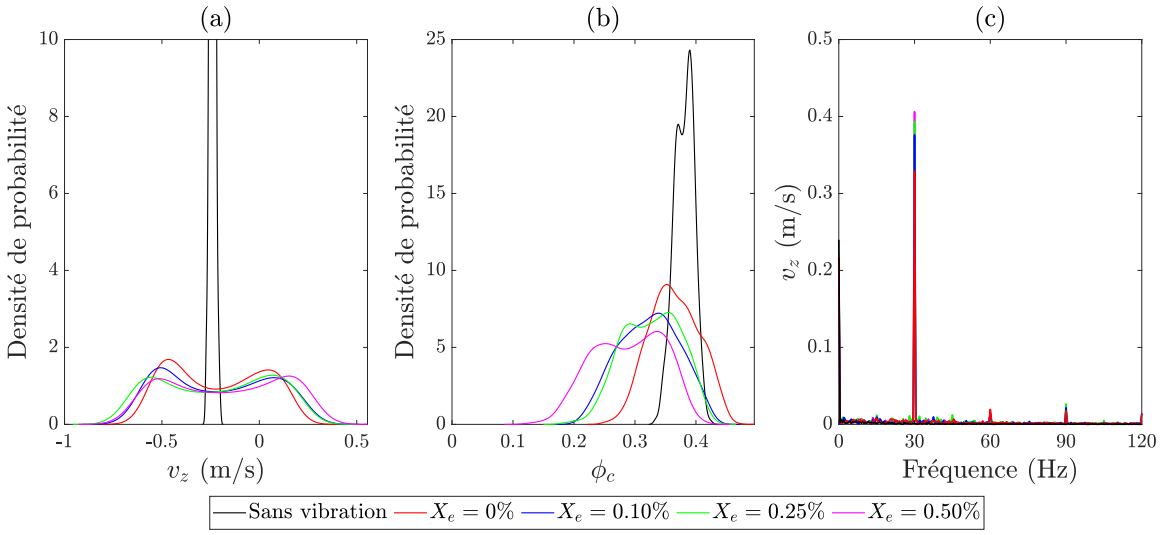


Figure 7.10 Densité de probabilité pour (a) la vitesse v_z et (b) la fraction volumique ϕ_c en sortie de l'écoulement au cours du temps pour différentes teneurs en liquide X_e dans le second régime ($A = 2400$ µm, $f = 30$ Hz, $D \sim 10$ mm). Le cas sans vibration et sans cohésion est présenté en noir pour comparer. (c) Spectre de Fourier de la vitesse v_z pour chaque cas.

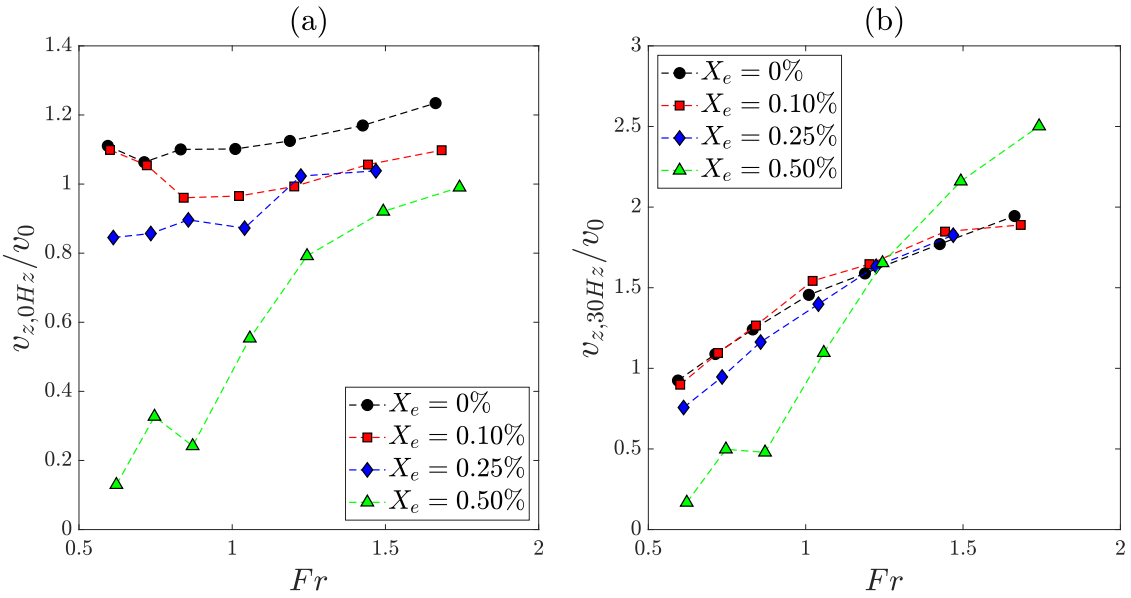


Figure 7.11 (a) Vitesse moyenne normalisée $v_{z,0Hz}/v_0$ et (b) variation de vitesse à $f = 30$ Hz normalisée $v_{z,30Hz}/v_0$ en fonction du nombre de Froude Fr pour $D \sim 10$ mm et plusieurs teneurs en eau X_e.

Analyse et interprétation physique

► **Dans le premier régime :** comme on peut s'y attendre, les profils de vitesse montrent une baisse importante lorsque la teneur en eau augmente ($A = 1200$ µm, Fig. 7.7). La fraction volumique diminue aussi avec la teneur en eau de manière significative ($A = 1200$ µm, Fig. 7.8). C'est particulièrement le cas pour $X_e = 0.5\%$ du fait de l'écoulement par cluster. On note en particulier une diminution de la fraction au centre du canal ($\varphi = \pi/2$) du fait du vide créé entre deux clusters sortant du silo (on a aussi régulièrement des arches).

Du point de vue statistique, on retrouve des profils de densité pour les faibles teneurs en eau similaires au cas sans cohésion (Fig. 7.9). La vitesse moyenne (Fig. 7.11a) est néanmoins plus faible lorsque X_e augmente. De même, le profil de densité se décale vers les faibles fractions, en adéquation avec les résultats observés précédemment. Le cas $X_e = 0.5\%$ montre encore une fois un comportement extrême, avec une vitesse moyenne quasiment nulle et un profil de densité très différent des autres. De plus, la réponse

aux vibrations (Fig. 7.11b) est aussi très faible : les grains sont fortement liés entre eux par les ponts capillaires et suivent globalement le mouvement du silo. Le profil de densité pour $X_e = 0.5\%$ est aussi très étalé, et la moyenne plus faible que dans les autres cas (Fig. 7.9b).

La baisse de débit dans le premier régime avec la teneur en liquide provient donc à la fois d'une vitesse plus faible mais aussi d'un écoulement moins dense en sortie. Ces deux effets sont exacerbés lorsque l'écoulement se fait en clusters pour les fortes teneurs en eau.

▶ **Dans le second régime :** Lorsque l'on augmente les vibrations, on retrouve bien une convergence des profils vers le cas sans cohésion (Fig. 7.9). Bien sur, la vitesse et la fraction restent plus faibles pour les fortes teneurs en eau, mais ce comportement décroît avec l'intensité des vibrations. Il en va de même pour les profils de densité en sortie comme on peut le voir sur la Fig. 7.10. La vitesse moyenne $v_{z,0Hz}$ et la variation à la fréquence des vibrations $v_{z,30Hz}$ montrent aussi ce comportement (Fig. 7.11).

La cohésion, créée par les forces capillaires, devient donc bien négligeable devant la force générée par les vibrations (et la gravité dans une moindre mesure). On est bien cohérent avec les résultats sur le débit et la transition de jamming dépendant du nombre de Bond des vibrations.

7.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cherché à comprendre l'effet de la cohésion sur la vidange du silo quasi-2D en présence de vibrations. Pour ce faire, nous avons mesuré le débit et suivi l'écoulement dans le silo lors de la vidange de grains cohésifs pour $D \sim 10$ mm, $f = 30$ Hz et $A = 0 - 2800$ µm. Cette cohésion est créée en ajoutant de l'eau dans le milieu (ponts capillaires entre les grains) et dépend de la teneur en eau $X_e = 0 - 0.5\%$. Lors de ces expériences, nous avons mis en évidence les résultats suivants :

- La cohésion donne lieu à une transition de Jamming dépendant de la teneur en eau X_e et du nombre de Bond des vibrations donnée par :

$$Bo_v = \frac{F_{cap}}{F_{vib}} = \frac{2\pi r\gamma_e}{mA\omega^2} = \frac{3\gamma_e}{2r^2\rho A\omega^2} \tag{7.4}$$

  Pour les grands nombres de Bond des vibrations et fortes teneurs en eau, l'écoulement est bloqué. En revanche, pour les faibles nombres de Bond ($Bo_v \sim 1$), les vibrations brisent les ponts capillaires et permettent l'écoulement. Un nombre de Bond des vibrations limite semble exister, pour lequel l'écoulement à toujours lieu qu'importe la teneur en eau.

- Dans le premier régime des vibrations, la force capillaire vient s'opposer aux vibrations et à la gravité. Même dans les cas où l'écoulement se fait, la vitesse et la fraction volumique dans le silo et en sortie diminuent avec la teneur en eau X_e. Les ponts capillaires limitent en effet les réorganisations et l'écoulement dans le canal. De ce fait, le débit diminue par rapport au cas sans vibration.

- Pour les fortes teneurs en eau et faibles vibrations, on peut avoir l'apparition d'un écoulement en clusters. Les vibrations ne cassent que certains ponts, créant des gros amalgames de particules s'écoulant lentement dans le silo. Le débit est alors très faible est très variable.

- Dans le second régime, le nombre de Bond des vibrations est faible : la force de cohésion est négligeable par rapport aux vibrations. Les ponts capillaires sont détruits et on retrouve des écoulements très similaires qu'importe la teneur en eau. L'effet de la cohésion tend vers 0 et le débit converge vers le cas sans cohésion.

Ces premiers résultats nous donnent une bonne vision d'ensemble de l'effet de la cohésion sur la vidange. Il reste néanmoins des questions en suspens, en particulier concernant la transition de jamming. Nous n'avons en effet pas eu l'occasion de varier tous les paramètres (diamètre D, tension superficielle γ_e où encore la taille des grains d), dont l'impact serait intéressant à étudier. De même, les difficultés techniques limitent les gammes explorables pour les vibrations et la teneur en eau et rendent la détermination précise de la transition difficile. Nous tenterons de répondre à certains de ces points en simulation mais une étude à part entière sur le sujet serait nécessaire comprendre entièrement ce problème.

Troisième partie

Étude numérique de la vidange d'un silo vibré

Chapitre 8

Modèles numériques

8.1 Simulations par méthode des éléments discrets (DEM) . . . 123
8.1.1 Modélisation du silo sous Liggghts . . . 123
8.2 Simulation des contacts . . . 125
8.2.1 Modèle pour les contacts sans cohésion . . . 125
8.2.2 Modèle pour les contacts avec cohésion . . . 128
8.3 Mesure et traitement des données . . . 129

Les résultats des expériences présentées dans la partie précédente nous ont permis de mieux comprendre les effets des vibrations et de la cohésion sur l'écoulement dans le silo. Cette approche expérimentale possède néanmoins ses limites comme nous avons pu le voir. Tout d'abord, nous n'avons pas accès avec le dispositif expérimental à certaines grandeurs dynamiques de l'écoulement, en particulier les contraintes entre grains qui sont essentielles pour comprendre la rhéologie. De plus, certaines gammes et valeurs des paramètres du problème ne sont pas accessibles du fait de difficultés techniques. On peut citer par exemple la limite des vibrations pour le pot vibrant ($\Gamma = 11$) ou la difficulté d'avoir de fortes teneurs en eau $X_e > 0.5\%$. Il y en a aussi d'autres bien plus compliqués à changer comme la gravité g ou la friction aux parois. Pour pallier à ces limites, une solution simple consiste à réaliser des simulations numériques. On peut de cette façon simuler la vidange dans quasiment n'importe quelles conditions et accéder à toutes les informations de l'écoulement. L'outil numérique est aussi très intéressant pour d'éventuels intérêts industriels car moins couteux pour eux que de faire des essais en laboratoire. Dans ce cas, la plus grande difficulté est de s'assurer que les simulations sont capables de simuler les écoulements réels. Pour ce faire, nous avons réalisé lors de la thèse des simulations de la vidange de silo par méthode des éléments discrets, ou DEM (voir chapitre 1 section 1.4). Nous allons dans ce chapitre présenter les différents modèles numériques utilisés pour réaliser ces simulations.

8.1 Simulations par méthode des éléments discrets (DEM)

Les simulations par DEM sont idéales pour modéliser l'écoulement de manière précise sans connaitre les lois rhéologiques le décrivant. Comme décrit dans le chapitre 1, on simule dans ce cas le mouvement de tous les grains de l'écoulement. Cela permet de capter les comportements microscopiques entre les grains mais cela prend un temps très important. Ces simulations passeront par deux étapes majeures :

- Calibrer et vérifier le modèle de simulation par rapport à l'expérience sur le comportement macroscopique (à partir des lois de débit).
- Extraire des informations dynamiques (contraintes) tout en faisant varier un grand nombre de paramètres qu'il est difficile de faire varier dans l'expérience (friction aux parois, gravité...).

Ces simulations ont été réalisées grâce au logiciel libre LIGGGHTS® (LAMMPS Improved for General Granular and Granular Heat Transfer Simulations), une version dérivée du logiciel de simulation moléculaire LAMMPS pour les matériaux granulaires. Ce logiciel est basé sur les travaux de Cundall et Strack [21] et a été développé à partir de 2010, en particulier par Christoph Kloss [80, 81]. Nous allons ici décrire la géométrie du silo créée ainsi que les modèles pour résoudre les contacts entre particules et avec les parois [1].

8.1.1 Modélisation du silo sous Liggghts

Pour comparer les résultats numériques à ceux de l'expérience, on utilisera une géométrie identique. Le logiciel LIGGGHTS® permet en effet de simuler l'écoulement de grains dans théoriquement n'importe

1. Le code utilisé dans LIGGGHTS® pour réaliser les simulations est aussi disponible en Annexe B.

quelle géométrie. Des géométries simples peuvent être directement implémentées dans le code de la simulation (un plan infini par exemple), mais il est nécessaire de fournir la géométrie dans les cas plus complexes. Nous avons donc utilisé le logiciel libre FreeCAD® pour créer et mailler les différentes parois du silo numérique (voir Fig. 8.1). Les parois sont importées dans LIGGGHTS® et peuvent être déplacées ou vibrées pour correspondre au silo expérimental. On peut ainsi régler le diamètre D et l'angle d'ouverture θ et appliquer des vibrations sinusoïdales à la fréquence f et l'amplitude A souhaitées. Contrairement au cas expérimental, il n'y a pas de véritable limite sur l'amplitude et la fréquence des vibrations que l'on peut imposer. On restera néanmoins dans une gamme d'accélération $\Gamma = 0 - 30$ pour conserver un comportement de liquide granulaire et couvrir la gamme d'accélération utilisée dans les expériences. On observe en effet le début d'une transition vers un gaz granulaire au-delà de $\Gamma = 30$, dont l'étude sort du cadre de cette thèse.

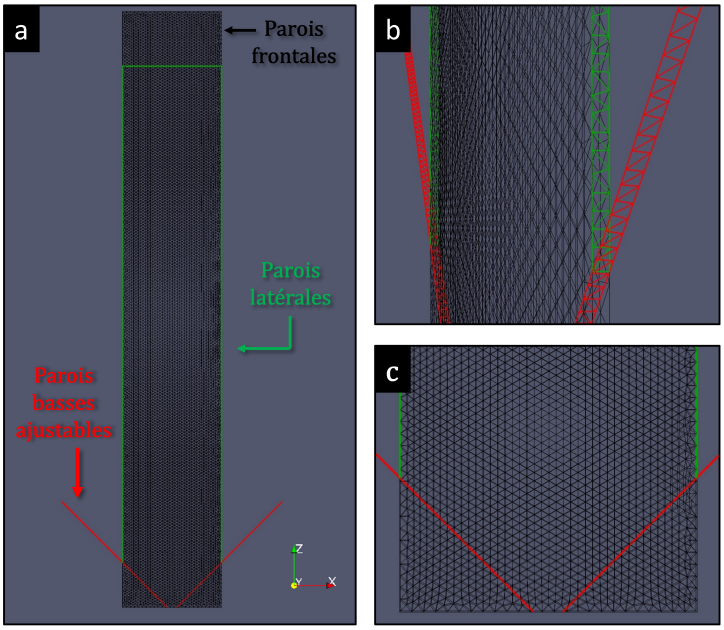


Figure 8.1 (a) Maillages des différentes parois du silo : avant et arrière (en noir), latérales et supérieure (en vert) et parois basses pouvant être ajustées pour changer l'angle et le diamètre d'ouverture (en rouge). (b,c) Gros plan sur les différents maillages des parois. Tous les maillages sont triangulaires avec des éléments d'environ 2 mm de côtés. Note : la hauteur supplémentaire des parois frontales permet de s'adapter au cas des grands angles d'ouverture.

Le modèle numérique du silo avec les grains est présenté sur la Fig. 8.2 dans différents cas. La hauteur $H = 500$ mm, la largeur $L = 100$ mm et la profondeur $W = 1.5$ mm sont les mêmes que pour le dispositif expérimental. À noter que ces visualisations sont réalisées avec le logiciel libre Paraview® à partir des positions des parois et des particules (et rayons) données par la simulation. L'ouverture du silo peut être bloquée en positionnant un "mur" infini en bas du silo (non visible sur la figure), que l'on supprime pour déclencher la vidange. Le silo est rempli en insérant graduellement les particules en haut du silo ($t_r = 2$ s) puis les parois sont mises en vibration pendant un court instant pour mélanger avant d'ouvrir ($t_m = 0.5$ s). On ne simule généralement pas toute la vidange ($t_v = 2.5$ s) pour éviter un temps de simulation trop long tout en captant le régime stationnaire suffisamment longtemps pour obtenir les informations sur l'écoulement. La durée de chaque étape ainsi que les autres paramètres généraux de la simulation sont résumés dans la Table 8.1.

Tout comme en expérience, les particules étalon sont des billes de verre sphériques, de masse volumique $\rho = 2500$ kg/m^3 et diamètre $d = 1.1 \pm 0.1$ mm. Dans ce cas, on insère 40000 particules pour remplir le silo et la simulation prend environ 40 minutes par seconde d'écoulement [2]. Comme expliqué dans le chapitre 1 (section 1.4), la position des grains à chaque instant est calculée à partir du principe fondamental de la dynamique en prenant en compte les forces de contact entre grains et l'accélération de la gravité. Les

2. Ce temps de calcul est obtenu lors d'une simulation parallélisée sur 8 cœurs d'un processeur Intel Xeon Processor E5 du cluster de calcul EXPLOR.

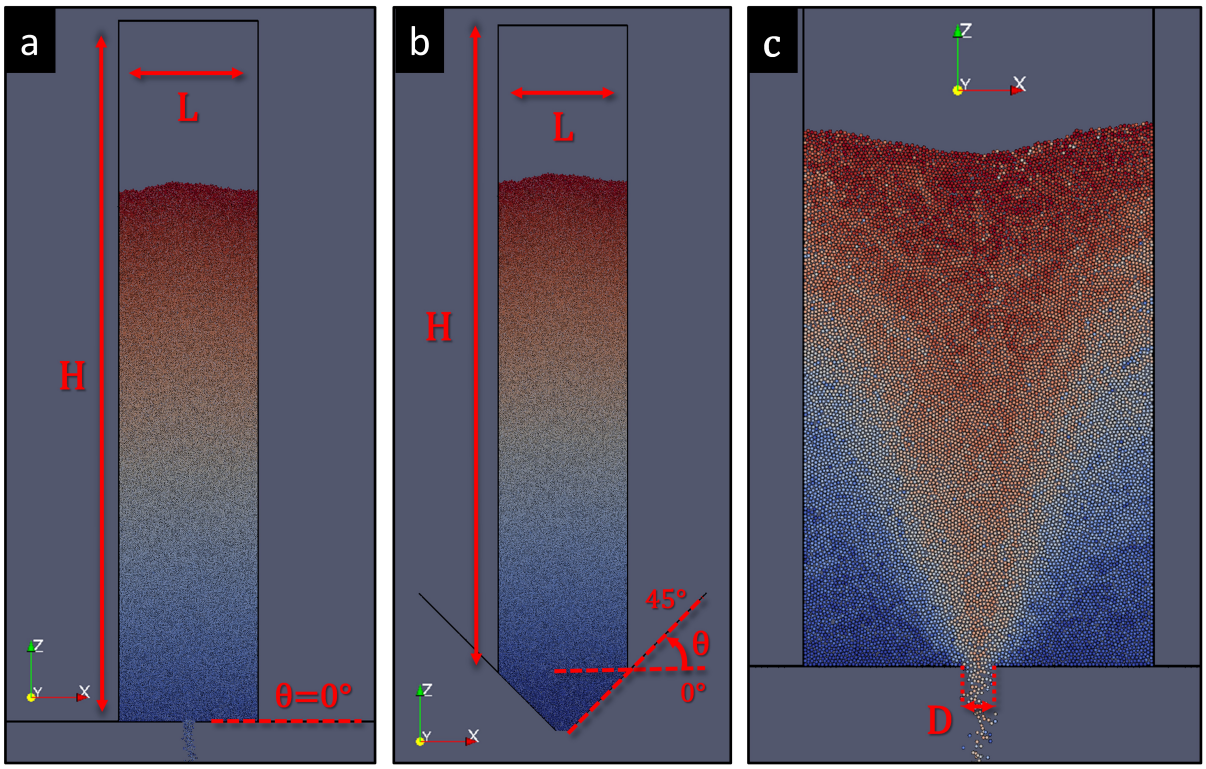


Figure 8.2 Présentation de la géométrie du silo dans différents cas : (a) Silo et grains en début de vidange pour un angle $\theta = 0°$, (b) Silo et grains en début de vidange pour un angle $\theta = 45°$ et (c) Silo et grains en cours d'écoulement pour $\theta = 0°$ (zoom sur l'ouverture). Dans chaque cas les grains sont colorés en fonction de l'ordre d'insertion (bleu en premier, rouge en dernier).

Table 8.1 Propriétés générales utilisées lors des simulations

Paramètre	Notation	Valeur
Dimensions de la simulation	$H_s \times L_s \times W_s$	$900 \times 400 \times 20$ mm
Dimensions du silo	$H \times L \times W$	$500 \times 100 \times 1.5$ mm
Accélération de la pesanteur	g	9.81 m/s^2
Pas de temps de la simulation	Δt	1×10^{-5} s
Temps de remplissage du silo	t_r	2.0 s
Temps de mélange du silo	t_m	0.5 s
Temps de vidange du silo	t_v	2.5 s
Nombre de grains insérés	n_g	40000

contacts entre les grains et avec les parois sont résolus grâce à un modèle de contact. Le choix de ce modèle est très important puisque ce sont ces contacts qui contrôlent l'écoulement, en particulier dans notre cas du fait des vibrations. Dans la suite, nous allons décrire les modèles utilisés pour décrire ces contacts lors des simulations.

8.2 Simulation des contacts

8.2.1 Modèle pour les contacts sans cohésion

Dans le cas d'un écoulement de particules sphériques sèches, les contacts sont contrôlés par les forces décrites dans le chapitre 1 (section 1.3.1) : la répulsion élastique et le frottement solide. Pour simuler ces forces dans LIGGGHTS®, on utilise le modèle décrit par Di Renzo et al. [82], qui est une modification du modèle de contact classique de Hertz-Mindlin pour la DEM. Le principe du modèle consiste à simuler

le contact entre deux particules par un jeu de ressorts.

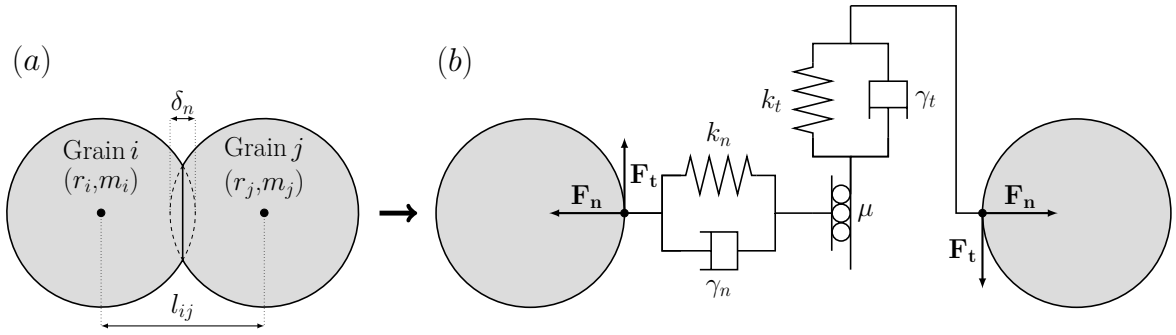


Figure 8.3 Modélisation numérique du contact entre deux grains : (a) contact et déformation des grains i et j lors d'une collision et (b) modélisation de ce contact par deux ressorts amortis. Les ressorts (raideurs k_n et k_t) rendent compte de la répulsion élastique ($\mathbf{F_n}$) et du frottement ($\mathbf{F_t}$). L'amortissement (coefficients γ_n et γ_t) rend compte de la dissipation d'énergie lors du choc.

Pour décrire ce modèle, considérons le cas de deux particules (notées i et j) dans l'écoulement, comme présenté sur la Fig. 8.3. Lorsque la distance entre ces particules est inférieure à la somme de leurs rayons ($l_{ij} < r_i + r_j$), on a création d'une force de contact donnée par :

$$\mathbf{F_c} = \mathbf{F_n} + \mathbf{F_t} \tag{8.1}$$

où $\mathbf{F_n}$ est la force normale (selon le vecteur normal $\mathbf{n}$ entre les centres des particules) et $\mathbf{F_t}$ la force tangentielle (selon le vecteur tangentiel $\mathbf{t}$, perpendiculaire à $\mathbf{n}$). Comme mentionné dans le chapitre 1, cette force dépend des propriétés des particules et des phénomènes microscopiques à l'échelle du contact. Dans le modèle utilisé, on décrit chacune de ces forces comme la réaction d'un ressort amorti :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F_n} &= (k_n\delta_n - \gamma_n v_n)\mathbf{n} \\ \mathbf{F_t} &= (k_t\delta_t - \gamma_t v_t)\mathbf{t} \end{aligned}\right\} \text{ avec : } F_t \leq \mu F_n \tag{8.2}$$

où k_n et k_t sont les coefficients de raideur normal et tangentiel, γ_n et γ_t les coefficients d'amortissement normal et tangentiel, $\delta_n = l_{ij} - r_i - r_j$ la superposition des particules, δ_t le déplacement tangentiel entre les deux particules, v_n et v_t les composantes de la vitesse relative et μ le coefficient de friction entre les particules. Les termes $k\delta$ correspondent à la réaction du ressort lorsque celui-ci se comprime, rendant compte de l'écrasement et du frottement des particules l'une contre l'autre. Les termes γ correspondent à l'amortissent (compris entre 0 et 1), et donc à la perte d'énergie lors du choc élastique entre les particules. Enfin la force tangentielle est bornée ($F_t \leq \mu F_n$) pour respecter la théorie du frottement solide (voir section 1.3.1). On imposera cette valeur limite lorsque le calcul donne une force tangentielle plus élevée (le déplacement δ_t est modifié en conséquence).

Les coefficients de raideur $k_{n/t}$ et d'amortissement $\gamma_{n/t}$ dépendent des propriétés physiques des grains et sont définis par :

$$k_n = \frac{4}{3}E^*\sqrt{r^*\delta_n} \quad , \quad k_t = 8G^*\sqrt{r^*\delta_n} \tag{8.3}$$

$$\gamma_n = -2\sqrt{\frac{5}{6}}\beta\sqrt{S_n m^*} \quad , \quad \gamma_t = -2\sqrt{\frac{5}{6}}\beta\sqrt{S_t m^*} \tag{8.4}$$

où E^* est le module d'Young effectif, G^* le module de cisaillement effectif, r^* le rayon effectif, m^* la masse effective, S_n et S_t les paramètres d'amortissement et β le taux d'amortissement. Les valeurs dites *effectives* sont calculées à partir des propriétés des deux particules en contact à partir des relations suivantes :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_i^2}{E_i} + \frac{1-\nu_j^2}{E_j} \tag{8.5}$$

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2(2-\nu_i^2)(1+\nu_i)}{E_i} + \frac{2(2-\nu_j^2)(1+\nu_j)}{E_j} \tag{8.6}$$

$$\frac{1}{r^*} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \quad , \quad \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \tag{8.7}$$

où E_i et E_j sont les modules d'Young des particules, ν_i et ν_j leurs coefficients de Poisson, r_i et r_j leurs rayons et m_i et m_j leurs masses. Enfin, les paramètres et le taux d'amortissement sont définis par :

$$S_n = 2E^* \sqrt{r^* \delta_n} \quad , \quad S_t = 8G^* \sqrt{r^* \delta_n} \tag{8.8}$$

$$\beta = \frac{\ln(e)}{\sqrt{\ln^2(e) + \pi^2}} \tag{8.9}$$

avec e le coefficient de restitution lors du choc entre les deux particules.

Table 8.2 Propriétés de contact des particules et des parois utilisées lors des simulations. Les indices *gg* et *gp* indiquent respectivement les contacts grain-grain et grain-paroi.

Paramètre	Notation	Valeur
Module d'Young	E	5×10^6 Pa
Coefficient de Poisson	ν	0.22
Coefficients de friction	μ_{gg}	0.4
	μ_{gp}	0.15
Coefficients de restitution	e_{gg}	0.97
	e_{gp}	0.83

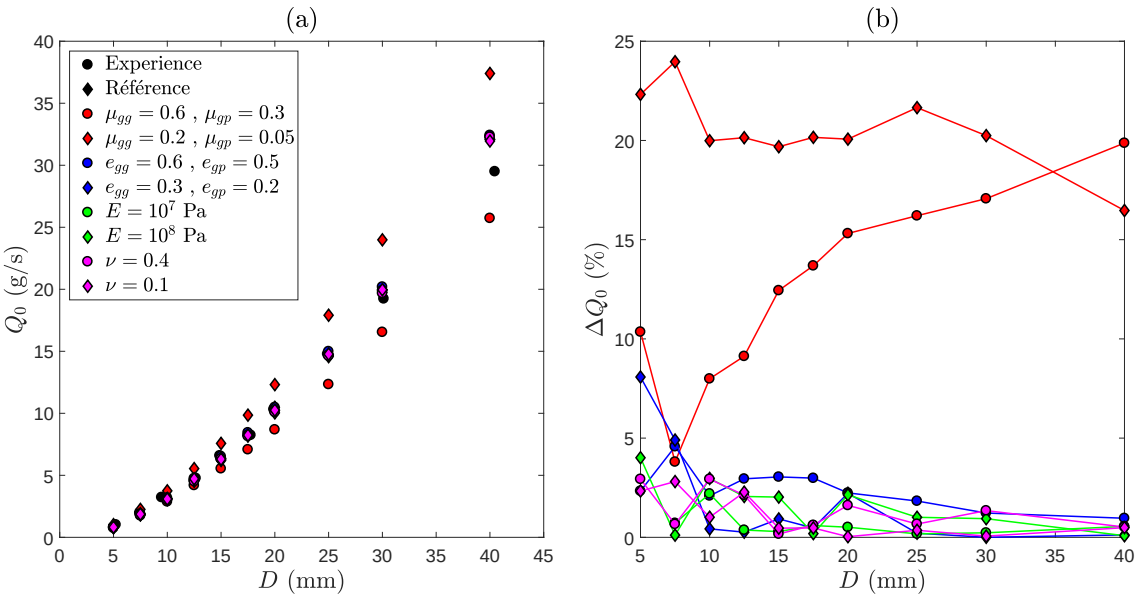


Figure 8.4 Effet des propriétés de contact sur les simulations : (a) Débits expérimental et simulés pour différents coefficients de contact en fonction du diamètre d'ouverture D. La référence (losanges noirs) correspond au cas présenté dans la Table 8.2 et utilisé dans la suite. Les autres cas correspondent à des variations de la référence pour lesquels on a changé uniquement : la friction (en rouge), la restitution (en bleu), le module d'Young (en vert) ou le coefficient de Poisson (en magenta). (b) Écarts entre la référence et les autres cas simulés en fonction du diamètre d'ouverture, calculés comme suit : $\Delta Q_0 = |Q - Q_{ref}|/Q_{ref}$

Les propriétés physiques des particules que nous avons utilisées dans les simulations sont données dans la Table 8.2. Dans le modèle, on différenciera les chocs grain-grain (*gg*) et grain-paroi (*gp*), d'où la présence de plusieurs coefficients de restitution et friction (le module d'Young et le coefficient de Poisson sont considérés égaux). Les valeurs des différents coefficients sont tirées de la littérature [83, 84, 85]. Dans le cas des coefficients de friction, en particulier grain-grain, il est difficile de déterminer une valeur exacte pour n'importe quel écoulement. De ce fait, nous avons effectué des simulations pour différents couples (μ_{gg},μ_{gp}) dans les gammes présentées dans la littérature et choisi celui donnant les débits les plus proches de l'expérience. Concernant le module d'Young, on impose une valeur bien plus faible que dans la réalité ($E_{verre} = 7 \times 10^{10}$ Pa) pour rester dans un modèle dit de *sphères molles*. Bien que différent de

la réalité, ceci permet de réduire de manière drastique le temps de calcul tout en donnant des estimations réalistes de l'écoulement, comme montré dans l'étude de Xu et al. [86]. Ceci vient principalement du fait que ces simulations sont assez peu sensibles aux paramètres physiques utilisés, mis à part les coefficients de friction. Ce point a été vérifié en mesurant le débit du silo pour différents coefficients et diamètre d'ouverture D, comme montré dans la Fig. 8.4a. Dans chaque cas, on ne change qu'un type de paramètre (ex : le module d'Young) par rapport au cas de référence (Table 8.2), les autres sont gardés constants. Si l'on excepte les cas où l'on change la friction (en rouge), la variation relative par rapport au cas de référence ne dépasse pas 7% (voir Fig. 8.4b). L'impact du module d'Young, du coefficient de Poisson et de la restitution est donc très limité sur l'écoulement (contrairement à la friction).

8.2.2 Modèle pour les contacts avec cohésion

Dans le cas de grains mouillés, la présence d'eau (ou d'un autre liquide interstitiel) va engendrer une force cohésive due à la formation de ponts capillaires entre les grains, comme décrit dans le chapitre 1 (section 1.3.2). Certains modèles de contact implémentés dans LIGGGHTS® permettent de simuler la présence de ces ponts et la cohésion qui en découle, sans simuler le liquide lui-même. Nous avons choisi d'utiliser le *modèle de Washino*, basé sur les travaux de Rabinovich et al. [87]. Ces derniers ont proposé une formule pour calculer la force capillaire entre deux sphères à partir des propriétés physiques des grains et du liquide ainsi que de la géométrie du pont.

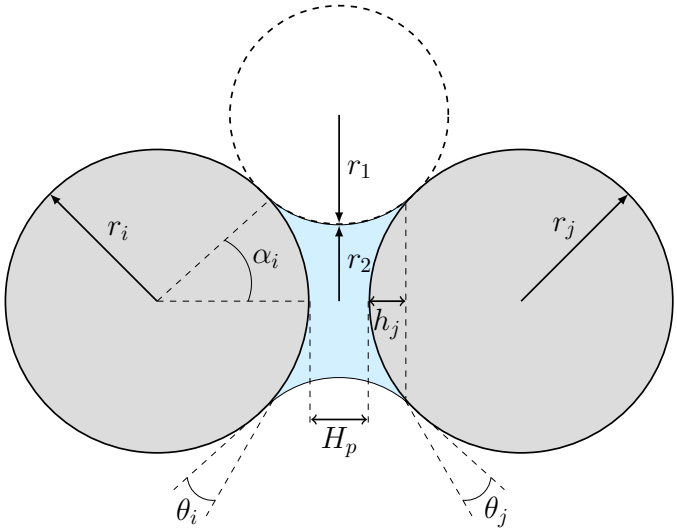


Figure 8.5 Modélisation numérique du pont capillaire entre deux grains i et j. Le liquide interstitiel forme un pont capillaire de longueur H_p, avec des angles de contacts θ_i et θ_j sur les deux grains. Les rayons r_1 et r_2 correspondent aux rayons de courbure du pont.

Dans le cas d'un pont entre deux sphères (i et j), la force capillaire est alors donnée par la relation suivante (voir Fig. 8.5) :

$$F_{cap} = 2\pi\gamma_{lv} r_{\text{eff}} \left(\frac{\cos(\theta_{\text{eff}})}{1 + H_p/(2h_{\text{eff}})} + \sin(\alpha_{\text{eff}}) \sin(\alpha_{\text{eff}} + \theta_{\text{eff}}) \right) \tag{8.10}$$

où γ_{lv} est la tension superficielle liquide-air, r_{eff} le rayon effectif des grains, θ_{eff} l'angle de contact effectif entre le liquide et la surface des grains, H_p la distance entre la surface des grains, h_{eff} la hauteur effective de recouvrement et α_{eff} l'angle effectif de recouvrement. Ces différentes valeurs effectives sont calculées pour le couple de particules i, j à partir des formules suivantes :

$$r_{\text{eff}} = \frac{r_i r_j}{r_i + r_j} \quad , \quad \theta_{\text{eff}} = \frac{\theta_i + \theta_j}{2} \quad , \quad h_{\text{eff}} = C_w \frac{H_p}{2} \quad , \quad \alpha_{\text{eff}} = \sqrt{H_p/(C_w r_{\text{eff}})} \tag{8.11}$$

où r_i et r_j sont les rayons des deux grains, θ_i et θ_j les angles de contact liquide-grain et C_w un facteur donné par la relation :

$$C_w = -1 + \sqrt{1 + \frac{2V_{pont}}{\pi r_{\text{eff}} H_p^2}} \tag{8.12}$$

avec V_{pont} le volume de liquide formant le pont capillaire. Le liquide des ponts capillaires n'étant pas réellement simulé, il est nécessaire de donner au modèle la distance au-delà de laquelle le pont se brise. Celle-ci est donnée par la relation obtenue par Lian et al. [88] :

$$H_{max} = (1 + \theta_{\text{eff}}/2)V_{pont}^{1/3} \tag{8.13}$$

Lorsque le pont se brise, le modèle suppose que le volume surfacique de liquide est réparti équitablement entre les deux particules.

En plus de la force capillaire, le modèle calcul aussi la force visqueuse exercée par le fluide sur les grains. Théoriquement, la force visqueuse $\mathbf{F_v}$ sur une sphère se déplaçant à une vitesse $\mathbf{v}$ dans un fluide est donnée par la loi de Stokes :

$$\mathbf{F_v} = 6\pi\eta_f r\mathbf{v} \tag{8.14}$$

où r est le rayon de la sphère et η_f la viscosité dynamique du fluide. Lors du contact entre les grains, le modèle utilise une dérivation de cette expression basée sur les travaux de Nase et al. [89]. L'expression est décomposée sur les directions normale et tangentielle du contact :

$$F_{v,n} = 6\pi\eta_f r_{\text{eff}} v_n \frac{r_{\text{eff}}}{H_p} \tag{8.15}$$

$$F_{v,t} = 6\pi\eta_f r_{\text{eff}} v_t \left(\frac{8}{15}\log(r_{\text{eff}}/H_p) + 0.9588\right) \tag{8.16}$$

où $F_{v,n/t}$ et $v_{n/t}$ sont les projections de la force visqueuse et de la vitesse de la particule le long des directions normale (n) et tangentielle (t) au contact.

Comme présenté dans le chapitre 7, nous avons utilisé uniquement l'eau comme fluide interstitiel lors des expériences. La force de cohésion a été variée en changeant la teneur en eau ($X_e = V_{eau}/V_{grains}$) dans le milieu. Le modèle de Washino est initialisé en lui fournissant cette fraction, qu'il considère homogène pour toutes les particules (un cas parfait difficile à atteindre en pratique). La gamme de cette fraction et les différentes propriétés physiques nécessaires au modèle sont présentées dans la Table 8.3. Il est important de noter que ce modèle permet de simuler uniquement la cohésion entre les grains. Le calcul de la cohésion grain-paroi n'est en effet pas implémenté, ce qui revient à considérer les parois comme parfaitement hydrophobes.

Table 8.3 Propriétés de cohésion des particules et du liquide interstitiel utilisées lors des simulations.

Paramètre	Notation	Valeur
Teneur en liquide	X_e	$0 - 1\%$
Masse volumique	ρ_e	1000 kg/m^3
Tension superficielle	γ_e	72×10^{-3} N/m
Viscosité dynamique	η_e	1×10^{-3} Pa.s
Angle de contact	θ_c	$25°$

8.3 Mesure et traitement des données

La simulation numérique par DEM nous donne accès à toutes les informations sur le silo et les grains. On récupérera en général les informations suivantes :

- Le flux de matière en sortie du silo. On mesure la masse ainsi que le nombre de grains écoulés à travers la sortie au cours du temps. Le débit pendant le régime stationnaire est alors déterminé de la même façon qu'en expérience (régression linéaire, voir section 4.2). On obtient aussi le débit instantané (en masse ou nombre de grains par seconde) du silo, qui présente des variations autour du débit stationnaire moyen.
- Les informations sur les grains lors de l'écoulement : position, rayon, vitesses, forces et contraintes. Du fait de la nature quasi-2D de l'écoulement, on ne considèrera que les composantes selon les directions x

(largeur) et z (hauteur). Ces informations peuvent être traitées de manière similaire à celles obtenues lors du tracking des grains en expérience (sections 4.2 et 6.1). On dispose néanmoins dans ce cas des forces et contraintes (non mesurables expérimentalement), qui peuvent nous renseigner sur la rhéologie de l'écoulement.

- Les chaînes de forces entre les grains, déduites des forces lors des contacts entre chaque couple ij de particules à chaque instant. Ceci permet de voir l'évolution au cours du temps du réseau de force dans l'écoulement (avec par exemple la formation d'arches).
- Les informations sur les parois, principalement leurs positions au cours du temps. On peut ainsi aisément décolérer les mouvements des parois et des particules dus aux vibrations.

Ces différentes informations sont mesurées à une fréquence d'acquisition de 500 Hz, pour être sûr de bien capter l'influence des vibrations [3].

3. Il est important de noter que cette fréquence d'acquisition élevée ainsi que l'important nombre de grains simulés (40000) engendre des quantités de données très importantes (> 10 Go par simulation). De ce fait, seul le flux de matière sera récupéré pour l'ensemble des simulations, en particulier lors des répétitions pour calculer l'erreur sur le débit. Les autres informations sont conservées uniquement dans les cas caractéristiques nécessaires à l'étude.

Chapitre 9

Étude numérique par DEM du débit du silo

9.1 Simulations sans vibration . . . 131
9.2 Simulation de l'effet des vibrations . . . 132
9.2.1 Régimes d'écoulement . . . 132
9.2.2 Lois d'écoulement . . . 134
9.3 Impact des autres paramètres . . . 138
9.3.1 Effet de la densité et de la taille des grains . . . 138
9.3.2 Effet de la friction entre grains et aux parois . . . 139
9.3.3 Effet de l'accélération de la gravité . . . 140
9.3.4 Effet de l'angle d'ouverture . . . 141
9.4 Ouverture : simulation de la cohésion . . . 143
9.5 Conclusion . . . 145

Dans ce chapitre, nous allons étudier le débit du silo obtenu par simulation. Dans un premier temps, on comparera les résultats numériques à ceux de l'expérience, sans et avec vibrations. Dans un second temps, nous étendrons l'étude à des vibrations de plus fortes accélérations (non accessibles en expérience) pour voir comment se comporte le débit dans ces extrêmes. On testera aussi l'impact de certains paramètres restés constants en expérience, comme la gravité et la friction. Enfin, on s'intéressera en ouverture au cas de la vidange de particules cohésives du point de vue numérique.

9.1 Simulations sans vibration

Avant de simuler l'écoulement sous vibrations, il est important de vérifier que l'on retrouve bien des débits similaires sans vibration pour l'expérience et la simulation. Pour ce faire, nous avons simulé la vidange sans vibration de billes de verre (particules étalon) pour différents diamètres d'ouverture $D = 5 - 40$ mm et un angle d'ouverture $\theta = 0°$.

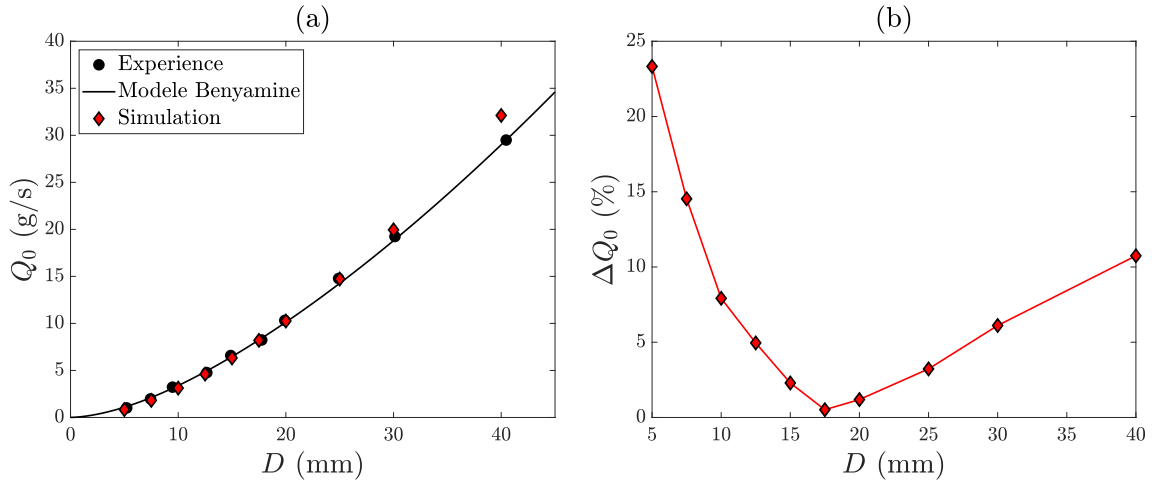


Figure 9.1 (a) Débit expérimental et simulé sans vibration en fonction du diamètre d'ouverture D. Les données expérimentales sont modélisées par l'Eq. 5.3, avec $C = 0.735$, $\alpha = 0.349$ et $\beta = 0.190$. (b) Écarts entre la modélisation de l'expérience et la simulation en fonction du diamètre d'ouverture, calculés comme suit : $\Delta Q_0 = |Q_{sim} - Q_{exp}|/Q_{exp}$

Comme on peut le voir sur la Fig. 9.1, on a un bon accord entre les résultats expérimentaux et

numériques (écarts inférieurs à 10% généralement). On note néanmoins des écarts non négligeables quand $D \to d$, venant de la difficulté à simuler parfaitement l'écoulement dans ces cas très sensibles aux variations d'ouverture et aux blocages. L'écoulement devient en effet intermittent et discret à cause de la formation d'arches et des très faibles débits. Malgré ces quelques écarts quantitatifs, on retrouve bien le bon comportement qualitatif avec un débit suivant l'évolution typique attendue. Dans la suite, on restreindra l'étude aux diamètres d'ouverture $D = 10 - 20$ mm pour lesquels l'erreur avec l'expérience est faible ($\Delta Q_0 < 8\%$).

9.2 Simulation de l'effet des vibrations

Après avoir calé les simulations sur les expériences en absence de vibration, nous avons étudié l'influence de ces dernières sur le débit. Les simulations n'étant pas limitées par les difficultés pratiques, nous pouvons explorer des gammes plus élevées de vibrations. Il existe néanmoins une limite, qui correspond au cas où l'on perd le régime stationnaire de l'écoulement (le débit n'est alors plus constant). Cette limite est généralement atteinte pour des vibrations avec $\Gamma \sim 30$, du fait d'une transition vers un gaz granulaire (le tas granulaire décolle du silo). Les gammes explorées pour les principaux paramètres sont présentées dans la Table 9.1. On reste à chaque fois dans le cas d'un écoulement de particules non cohésives, le cas inverse étant étudié dans la section suivante.

Table 9.1 Gammes explorées pour les paramètres principaux lors des simulations.

Paramètre	D (mm)	A (µm)	f (Hz)	Γ
Gamme	$5 - 20$	$0 - 12000$	$15 - 75$	$0 - 30$

9.2.1 Régimes d'écoulement

Dans un premier temps, nous avons simulé la vidange des particules étalon pour différentes amplitudes à une fréquence et un diamètre d'ouverture donnés (angle d'ouverture toujours nul). Nous avons en effet vu dans la partie précédente que l'effet des vibrations était relativement similaire qu'importe la fréquence ou l'ouverture. La Fig. 9.2a présente l'évolution typique du débit normalisé Q/Q_0 avec l'amplitude A pour $f = 15$ Hz et $D = 10$ mm. On retrouve bien la présence de deux régimes, comme discuté dans la partie expérimentale (voir chapitre 5, section 5.2). Le premier régime montre bien la décroissance exponentielle du débit avec l'amplitude observée en expérience. Le second présente une augmentation du débit avec l'amplitude passé un certain seuil, un comportement observé grâce au dispositif complémentaire expérimental.

Tout comme en expérience, nous avons mesuré l'évolution du débit normalisé instantané Q_{inst}/Q_0 au cours de la vidange pour les différents régimes (voir Fig. 9.2b). Pour rappel, ce débit est dit "instantané" car il est mesuré sur un intervalle de temps très court (0.05 s) et varie donc lors de la vidange. Pour le premier régime, on voit que le débit instantané oscille de manière périodique autour de sa valeur moyenne, et ce à la même fréquence que les vibrations. Ce comportement provient de la variation de la vitesse en sortie du silo, que nous avions mis en évidence de manière expérimentale dans le chapitre 6 (section 6.3). Ces variations temporelles combinées à l'augmentation de compétitivité au niveau de l'ouverture engendrent une augmentation des chocs dans le canal d'écoulement. On a alors une dissipation d'énergie entrainant une baisse de la vitesse moyenne en sortie, et donc une baisse de débit. Comme vu précédemment, cette baisse est contrôlée par le nombre de Froude Fr des vibrations. Les résultats des expériences et des simulations concordent dans ce régime comme on peut le voir sur la Fig. 9.2a.

Dans le second régime, on observe comme en expérience d'importants pics pour le débit instantané de manière périodique et à la même fréquence que les vibrations. La vidange se fait donc bien par intermittence sous la forme d'importants jets de matière rapides hors du silo. Une étude plus en détail de cette dynamique de jets est présentée dans la Fig. 9.3. On retrouve bien des jets avec la même fréquence que les vibrations, apparaissant à chaque fois que le silo remonte. Ces phénomènes s'expliquent

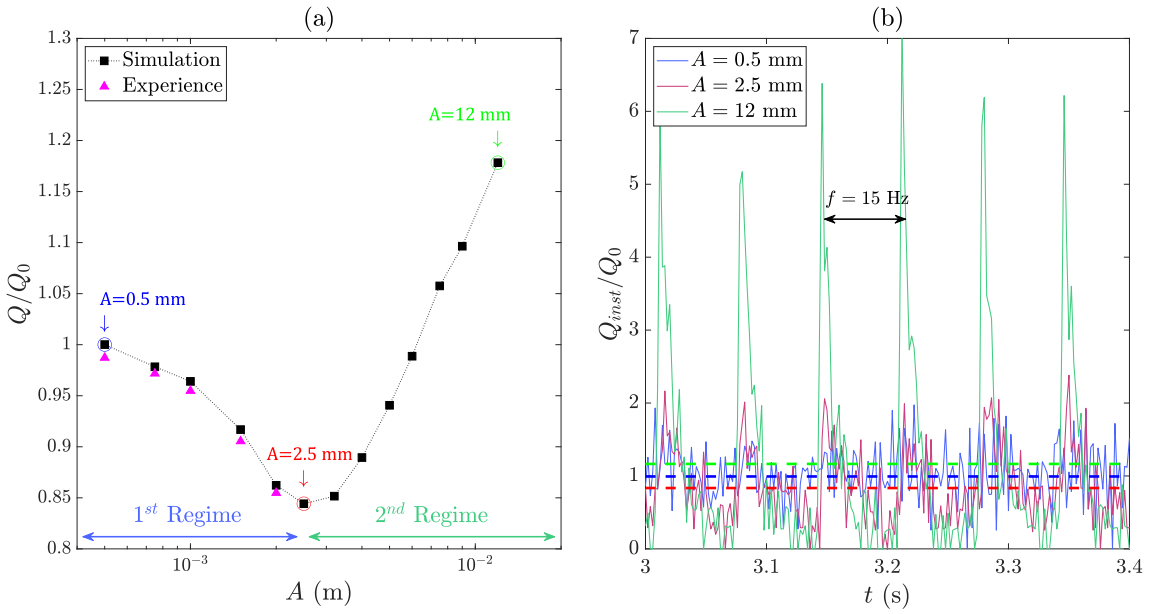


Figure 9.2 (a) Évolution typique du débit normalisé Q/Q_0 en fonction de l'amplitude A, pour $D = 10$ mm et $f = 15$ Hz. (b) Évolution temporelle du débit normalisé instantané Q_{inst}/Q_0, pour $f = 15$ Hz et les amplitudes $A = 0.5$ mm (bleu), $A = 2.5$ mm (rouge) et $A = 12$ mm (vert). Les lignes en pointillés correspondent au débit moyen pour chaque amplitude.

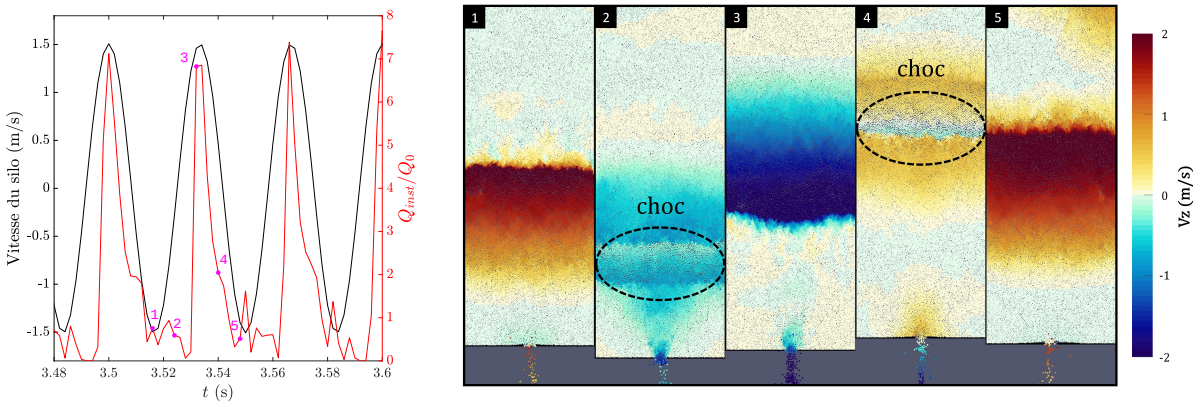


Figure 9.3 Évolution temporelle de la position verticale du silo et du débit normalisé instantané pendant la vidange pour $D = 10$ mm, $f = 30$ Hz et $A = 8000$ µm. Pour chaque point 1 à 5, une image de l'écoulement est présentée à droite, où les particules sont colorées en fonction de leur vitesse verticale relative $v_z = v_{z,part} - v_{z,silo}$. Des pics périodiques de débit sont observés à la même fréquence que les vibrations, apparaissant lorsque le silo atteint sa vitesse de remontée maximale. La propagation d'ondes dans le silo engendre aussi des chocs à certains instants (2,4).

en observant les mouvements des grains et du silo (Fig. 9.3, à droite), qui suivent les étapes suivantes au cours du temps :

- (1) Le silo et les grains près de l'ouverture descendent à la même vitesse. Il n'y a donc pas de mouvement relatif au niveau de l'ouverture ($v_z = 0$). Les grains restent dans le silo et le débit est donc nul. On peut néanmoins noter la présence d'une onde ascensionnelle ($v_z > 0$) qui provient d'un précédent cycle.
- (2-3) Le silo s'arrête puis remonte alors que les grains au-dessus de l'ouverture conservent leur inertie et continuent de descendre ($v_z < 0$). L'opposition de ces deux mouvements crée un choc au-dessus de l'ouverture et engendre de la compression. Les grains en sortie sont alors projetés hors du silo, créant ainsi un jet. Un pic de débit est alors obtenu lorsque le mouvement relatif est maximum, atteint pour la vitesse maximale de remontée du silo (3).
- (3-4) Le silo continue de remonter mais ralenti. Le mouvement relatif diminue, les grains commençant

à être entrainés, et le débit tend vers zéro. À noter que l'on observe un choc secondaire plus haut dans le silo, du fait d'une onde précédente.

- (4-5) Le silo atteint la hauteur maximale et commence à redescendre en emportant les grains, répétant ainsi le cycle.

La propagation de ces ondes et la présence de chocs sont en parfait accord avec les études sur les tas vibrés [73, 74, 75, 79] (on observe même les phénomènes de compaction et décompaction sur les images). D'après ces études et les résultats expérimentaux (section 5.2.3), cette dynamique de jets est contrôlée par le nombre de Froude Fr et la fréquence relative $\Omega = \omega/\sqrt{g/d}$ [5]. Dans une configuration 3D, ce régime apparaît bien plus tard comme nous avons pu le voir en changeant la taille des grains en expérience (voir section 5.3). Ceci provient d'une dissipation d'énergie plus forte du fait de frottements entre particules plus importants, ce qui explique pourquoi ce régime n'apparaît pas dans l'étude de Wassgren et al. [66]. Nous nous pencherons en détail sur ce point dans la suite.

9.2.2 Lois d'écoulement

Pour vérifier la loi d'échelle du premier régime présentée dans le chapitre 5 et déterminer la loi contrôlant le second régime, nous avons effectué des simulations pour les différents cas testés en expérience mais avec une gamme d'amplitude plus large (voir Table 9.2).

Table 9.2 Fréquences et amplitudes des vibrations utilisées lors des simulations, avec l'accélération adimensionnelle correspondante.

f (Hz)	A (µm)	Γ
15	$0-12000$	$0-10.9$
30	$0-8000$	$0-29.0$
45	$0-3500$	$0-28.5$
60	$0-2000$	$0-29.0$
75	$0-1300$	$0-29.4$

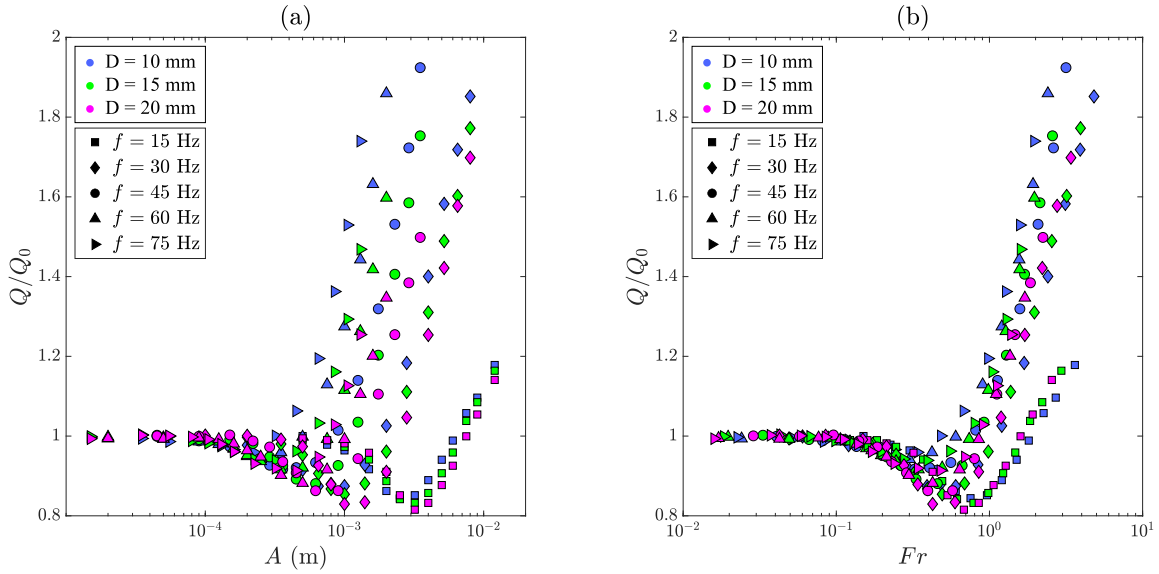


Figure 9.4 Débit normalisé Q/Q_0 simulé en fonction de (a) l'amplitude A et (b) le nombre de Froude Fr pour plusieurs fréquences f et diamètres d'ouverture D. La dispersion entre les courbes indique que l'amplitude et le nombre de Froude ne sont pas les paramètres contrôlant entièrement le débit normalisé dans le second régime.

Le débit normalisé Q/Q_0 a été mesuré pour ces différentes gammes et un diamètre d'ouverture $D = 10-20$ mm. Les résultats sont présentés dans la Fig. 9.4 en fonction de l'amplitude et du nombre de Froude Fr des vibrations. Toutes les courbes présentent l'évolution typique décrite précédemment, mais

on observe une dispersion selon la fréquence et le diamètre d'ouverture sur la Fig. 9.4a. Si l'on représente en fonction du nombre de Froude (Fig. 9.4b), on voit que les courbes sont confondues dans le premier régime mais se dispersent ensuite du fait du second régime pour les différentes fréquences. Ceci concorde avec les résultats expérimentaux, avec le premier régime dépendant uniquement du Froude et le second dépendant du Froude et de la fréquence relative. On peut donc décrire le débit normalisé de la même manière qu'en expérience :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \mathcal{F}_1(Fr) + \mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2}) \tag{9.1}$$

où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont les lois décrivant les effets liés respectivement au premier et second régime. Il est important de noter que l'on considère les deux régimes comme complètement décorrélés, puisqu'ils sont engendrés par des mécanismes différents. Dans la suite, nous allons donc analyser séparément les deux régimes pour vérifier ou déterminer ces lois.

Loi pour le premier régime

Pour analyser le premier régime, on se restreint au cas des faibles vibrations ($\Gamma < 3$), comme étudié dans le chapitre 5 (voir Table 5.3) avec le dispositif expérimental originel. Dans ce cas, il n'y a pas de jet en sortie du silo et la vidange se fait de manière continue. Les effets observés dans le second régime sont donc négligeables pour les faibles vibrations et on a :

$$\frac{Q}{Q_0} \sim 1 + \mathcal{F}_1(Fr) \tag{9.2}$$

L'évolution de Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude Fr dans le premier régime est présentée sur la Fig. 9.5a. Les résultats s'alignent plutôt bien sur une seule courbe maîtresse, même si l'on observe une certaine dispersion en fréquence. Cette dispersion provient du second régime, dont l'effet est un peu plus important dans les simulations comparé à l'expérience. Les données peuvent être modélisées comme en expérience par la loi du premier régime :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \mathcal{F}_1(Fr) = 1 - a_1 \exp(-b_1/Fr) \tag{9.3}$$

avec $a_1 = 0.297$ et $b_1 = 0.402$, comme on peut le voir sur la Fig. 9.5a (ligne noire). Pour aller plus loin, l'évolution de Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude Fr en expérience et simulation est présentée sur la Fig. 9.5b. Tous les résultats s'alignent sur une courbe maîtresse, modélisée par l'Eq. 9.3 avec $a_1 = 0.420$ et $b_1 = 0.542$.

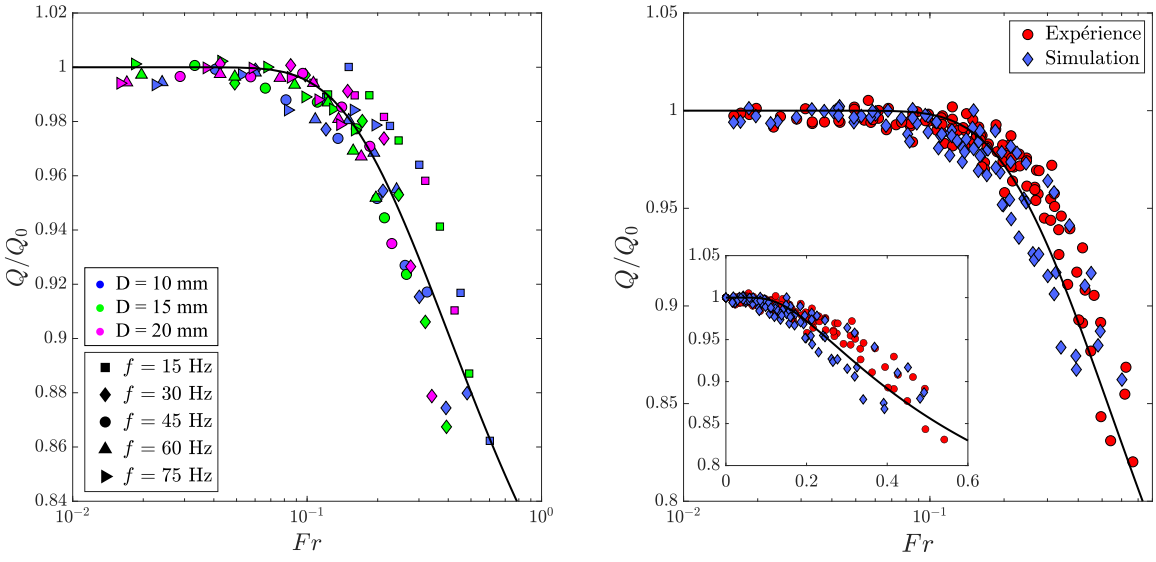


Figure 9.5 Débit normalisé Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude pour (a) les différents cas simulés et (b) pour l'expérience et la simulation. Les données de simulation sont modélisées par l'Eq. 9.3 (ligne noire), avec en (a) $a_1 = 0.297$ et $b_1 = 0.402$ ($R^2 = 0.920$) et en (b) $a_1 = 0.420$ et $b_1 = 0.542$ ($R^2 = 0.908$).

Loi pour le second régime

Pour analyser le débit dans le second régime, on soustrait au débit Q/Q_0 la contribution du premier régime $\mathcal{F}_1$ que nous venons d'obtenir :

$$\mathcal{F}_2 = \frac{Q}{Q_0} - 1 - \mathcal{F}_1(Fr) \tag{9.4}$$

L'évolution de $\mathcal{F}_2$ en fonction de l'amplitude A dans les différents cas est présentée dans la Fig. 9.6a. Dans ce régime, le débit commence à augmenter une fois que l'on dépasse un certain seuil qui dépend de l'amplitude A, la fréquence f et du diamètre d'ouverture D. Ce comportement est similaire à celui du premier régime ainsi qu'à d'autres écoulements granulaires vibrés comme ceux dont nous avons discuté dans les chapitre 2 et 5 (en particulier la fluidisation partielle du tas granulaire). Ce seuil semble décroitre lorsque f augmente et D diminue. On voit en effet que l'accroissement du débit commence le plus tôt pour $f = 75$ Hz et $D = 10$ mm, et le plus tard pour $f = 15$ Hz et $D = 20$ mm (flèche noire sur la Fig. 9.6a). Nous avons aussi tracé les résultats en fonction du nombre de Froude, comme présenté dans la Fig. 9.6b. La contribution du diamètre d'ouverture semble ainsi être prise en compte puisque les courbes pour les différents D sont confondues. L'influence de la fréquence en revanche n'est pas complètement contenue dans le nombre de Froude. Tous ces résultats concordent avec l'expérience, comme nous l'avons vu dans le chapitre 5 (section 5.2.3).

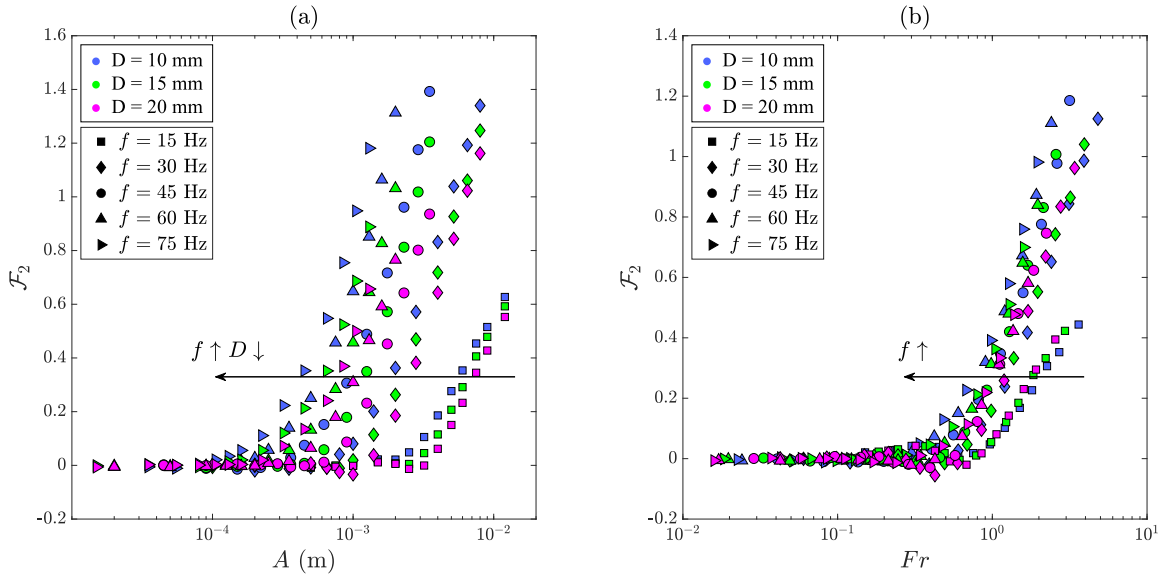


Figure 9.6 $\mathcal{F}_2$ en fonction de (a) l'amplitude A et (b) du nombre de Froude Fr pour plusieurs fréquences f et diamètres d'ouverture D. Les flèches noires dénotent l'influence dans (a) de la fréquence et du diamètre d'ouverture et dans (b) d'uniquement la fréquence (l'influence de D est comprise dans le nombre de Froude).

D'après l'étude de sensibilité menée pour l'expérience, la meilleure loi d'échelle est alors obtenue pour (voir Fig. 9.7) :

$$\frac{Q}{Q_0} - 1 - \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2\left(Fr\Omega^{1/2}\right) \tag{9.5}$$

Par analogie à l'Eq. 9.3 du premier régime, on modélise le second régime par une exponentielle simple. La fonction $\mathcal{F}_2$ doit être nulle à faible vibration et devrait saturer et atteindre une valeur maximale pour les très fortes vibrations. De ce fait, nous proposons :

$$\mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2}) = a_2 \exp\left(\frac{-b_2}{Fr\Omega^{1/2}}\right) \tag{9.6}$$

où a_2 et b_2 sont des constantes. La Fig. 9.7a présente l'évolution de $\mathcal{F}_2$ en fonction de $Fr\Omega^{1/2}$ pour les différents cas. Les données s'alignent bien sur une courbe maîtresse modélisée par l'Eq. 9.6, avec $a_2 = 2.18$ et $b_2 = 3.86$. Cette loi est aussi cohérente avec les résultats de Brennen et al. [90, 91] qui ont observé une transition similaire en fonction de $A\omega$ pour l'expansion d'un tas granulaire (différence de hauteur entre le tas au repos et le tas vibré) soumis à de fortes vibrations.

Pour aller plus loin, nous avons représenté sur la Fig. 9.7b l'évolution de $\mathcal{F}_2$ en fonction de $Fr\Omega^{1/2}$ pour l'expérience et la simulation. Les résultats concordent, bien que l'on note une dispersion entre la simulation et l'expérience. L'effet du second régime semble en effet plus important en simulation. Cette différence provient sans doute du fait que la friction entre les grains et aux parois n'est pas constante en réalité, contrairement à ce que l'on suppose dans le modèle. Les grandes vitesses et changement de direction pour les fortes vibrations rendent en effet les chocs entre particules plus variables et complexes à modéliser.

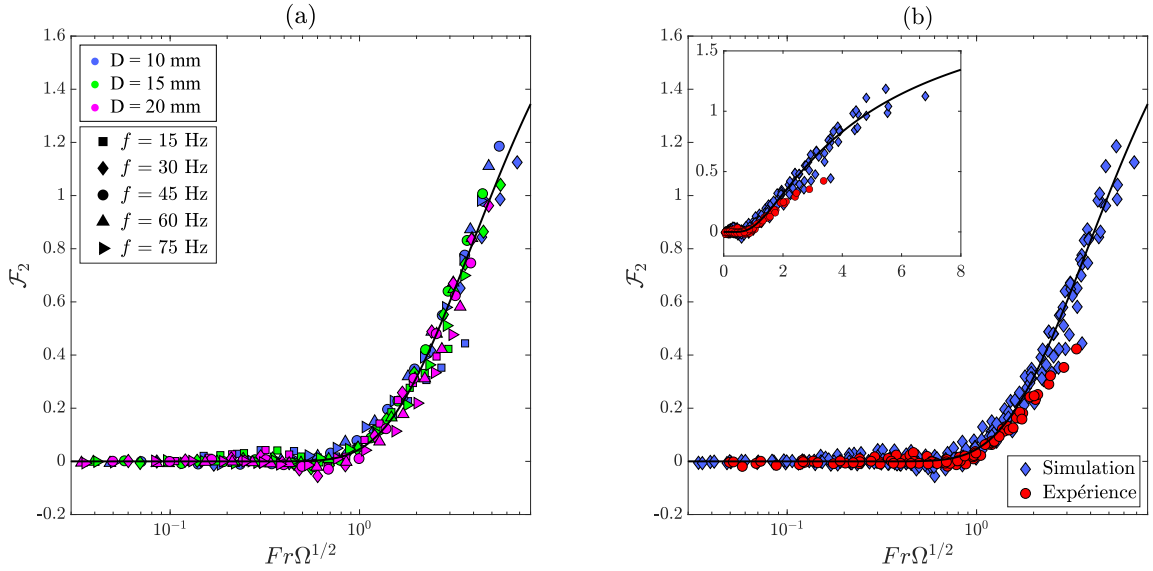


Figure 9.7 $\mathcal{F}_2$ en fonction de $Fr\Omega^{1/2}$ pour (a) les différents cas simulés et (b) pour la simulation et l'expérience (dispositif complémentaire). Les données de simulation sont modélisées par l'Eq. 9.6 (ligne noire), avec $a_2 = 2.18$ et $b_2 = 3.86$ ($R^2 = 0.985$).

Effet complet des vibrations

Comme nous l'avons décrit, la variation de débit dépend de deux mécanismes distincts donnant chacun lieu à un régime différent. Dans le premier régime, la baisse de débit résulte d'une plus forte dissipation d'énergie du fait de l'augmentation des collisions entre grains. Cette dissipation dépend de la vitesse des vibrations, qui viennent s'opposer à la gravité d'où la dépendance au nombre de Froude Fr. Dans le second régime, l'augmentation de débit provient de la dynamique de jets créée par la différence de mouvement entre les grains et le silo. L'ampleur de ces jets dépend de la vitesse des grains d'où la dépendance au nombre de Froude. La fréquence relative Ω permet de tenir compte de la propagation des ondes dans le silo [92, 93, 94], et donc de la fréquence des jets. Cette propagation est particulièrement affectée par la friction, un point étudié plus en détail dans la suite.

Une illustration de l'effet de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ en fonction du nombre de Froude est présentée dans la Fig. 9.8. Chaque fonction correspond à une transition exponentielle autour d'un point de transition $Fr^*_{1/2}$. Lorsque $Fr \ll Fr^*_{1/2}$, l'effet du régime associé est quasiment nul. Inversement, l'effet du régime associé est maximal pour $Fr \gg Fr^*_{1/2}$. L'effet complet sur le débit est obtenu en additionnant la contribution de chaque fonction (en vert sur la Fig. 9.8).

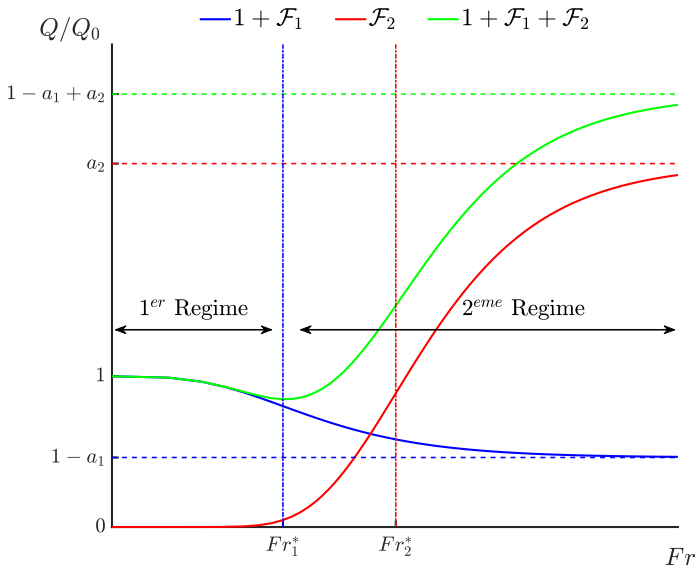


Figure 9.8 Illustration de l'évolution du débit normalisé en fonction du nombre de Froude pour une fréquence relative Ω donnée. La première fonction $1+\mathcal{F}_1$ (ligne bleue) est une transition exponentielle de 1 à $1-a_1$ autour de $Fr_1^* = b_1$. La seconde fonction $\mathcal{F}_2$ (ligne rouge) est une transition exponentielle de 0 à a_2 autour de $Fr_2^* = b_2/\Omega^{1/2}$. L'effet complet des vibrations sur le débit normalisé est donné par la somme des deux fonctions (ligne verte).

9.3 Impact des autres paramètres

Outre les paramètres principaux (D, A, et f) dont nous avons décrit les effets, nous avons aussi réalisé des simulations en changeant d'autres grandeurs du problème. Ces paramètres secondaires sont les propriétés des grains (masse volumique ρ, taille d, coefficient de friction entre grains μ_{gg} et aux parois μ_{gp}), la gravité g et l'angle d'ouverture du silo θ. En particulier, la gravité et la friction entre grains et aux parois étaient des constantes que nous ne pouvions pas changer lors de nos expériences. Les gammes explorées pour chacune de ces grandeurs sont présentées dans la Table 9.3. Dans chaque cas, nous avons mesuré le débit normalisé Q/Q_0 en fonction de l'amplitude des vibrations pour une ouverture $D = 10$ mm et une fréquence $f = 30$ Hz.

Table 9.3 Gammes explorées pour les paramètres secondaires de la simulation.

Paramètre	ρ (kg/m^3)	d (mm)	μ_{gp}	μ_{gg}	g (m/s^2)	θ (°)
Gamme	$1040-7830$	$0.35-1.1$	$0.02-0.5$	$0.1-0.9$	$4.91-19.62$	$0-45$

9.3.1 Effet de la densité et de la taille des grains

L'impact de la masse volumique ρ et de la taille des grains d sur le débit normalisé est présenté sur la Fig. 9.9. Concernant la masse volumique (Fig. 9.9a), on n'observe pas de changement significatif du débit normalisé Q/Q_0 dans les deux régimes. Ceci est cohérent avec les résultats expérimentaux et confirme que les lois décrivant chaque régime (Eq. 9.3 et 9.6) sont indépendantes de la densité des particules. L'effet de la masse volumique est donc entièrement pris en compte dans le débit sans vibration Q_0, qui varie grandement comme on peut le voir dans l'insert de la Fig. 9.9. Ce comportement est dû au fait que les effets des vibrations résultent principalement du rapport entre les vitesses engendrées par les vibrations et la gravité, sous la forme du nombre de Froude. Ce nombre est directement relié au rapport des énergies cinétiques fournies par les vibrations et la gravité : $E_{c,vib}/E_{c,grav} \propto Fr^2$. La masse des grains, et donc leur masse volumique, contribue à ces énergies cinétiques mais se simplifie puisque c'est leur rapport qui contrôle l'effet des vibrations. On peut néanmoins noter une faible divergence dans le second régime, en particulier à très haute amplitude ($A > 4000$ µm), provenant de la transition vers un gaz granulaire (fluidisation complète du tas granulaire) auquel cas la masse des particules joue un rôle

plus important.

Concernant la taille des grains (Fig. 9.9b), on note comme en expérience une diminution plus importante du débit dans le premier régime et un retard du second régime pour les petits diamètres d. Ceci s'explique par l'augmentation de la friction par rapport au cas quasi-2D. La friction entre les grains est en effet plus importante qu'avec les parois, d'où une perte d'énergie plus importante et donc un débit plus faible. Cette dissipation d'énergie est accentuée par la nature 3D de l'écoulement : les grains peuvent se déplacer selon l'axe y (donc perte de vitesse vers la sortie) et on a une augmentation des contacts et des réarrangements du fait de la troisième dimension. Ce comportement est cohérent avec les résultats de Wassgren et al. [66], qui ont uniquement observé une baisse importante du débit avec les vibrations dans le cas d'un silo 3D. Cette configuration 3D engendre une friction plus importante et il aurait été nécessaire d'appliquer des vibrations extrêmement puissantes pour atteindre le second régime.

À noter que l'on passe d'un écoulement quasi-2D vers un écoulement 3D pour les faibles diamètres, ce qui implique des lois de vidange différentes. La forme des courbes reste néanmoins similaire, et donc les lois pour chaque régime en 3D doivent être aussi similaires (comme pour la loi de vidange sans vibration dans les cas 2D et 3D). La détermination exacte de ces lois 3D nécessite néanmoins une étude à part entière qui ne rentre pas dans le cadre de cette thèse.

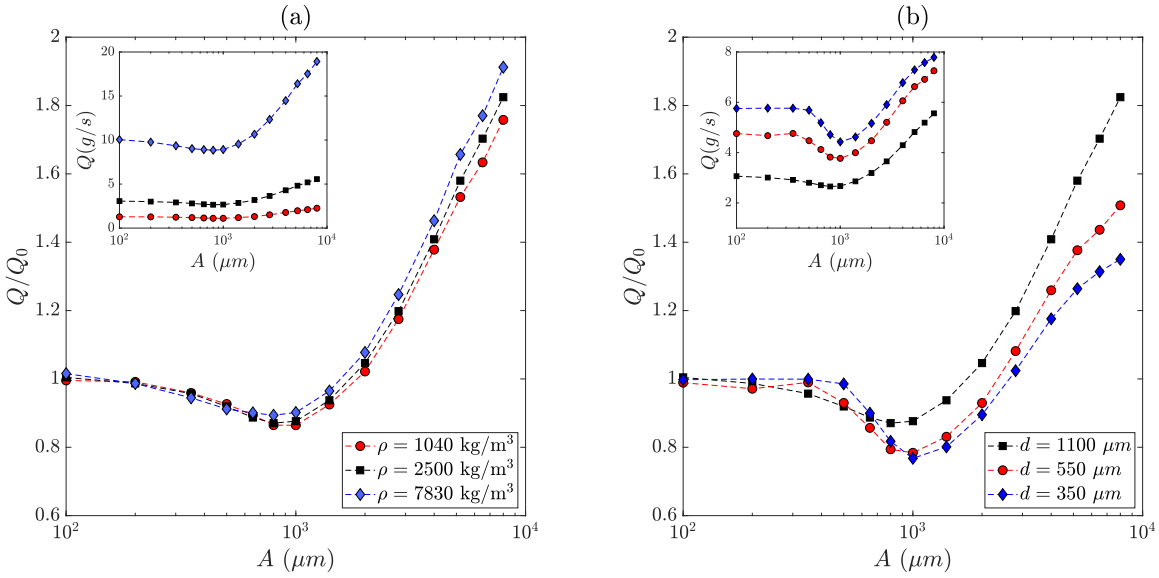


Figure 9.9 Débit normalisé Q/Q_0 en fonction de l'amplitude A pour $f = 30$ Hz, $D = 10$ mm et différentes (a) masses volumiques des grains ρ et (b) tailles des grains d. En insert : débit Q en fonction de l'amplitude dans les différents cas.

9.3.2 Effet de la friction entre grains et aux parois

Comme nous venons de le voir en changeant la taille des grains d, la friction à un impact important sur le débit du silo. Pour mieux comprendre cet effet, nous avons mesuré le débit normalisé Q/Q_0 en changeant les coefficients de friction entre grains μ_{gg} (Fig. 9.10a) et entre les grains et les parois μ_{gp} (Fig. 9.10b). Lorsque l'on augmente la friction entre grains (voir Fig. 9.10a), on observe une diminution générale du débit Q et du débit normalisé Q/Q_0. L'allure des courbes reste la même et les seuils pour chaque régime semblent égaux (ils commencent au même moment). La friction entre grains contrôle la dissipation d'énergie dans le milieu lors des contacts entre particules, d'où cette baisse de débit lorsqu'elle augmente. Cette dissipation affecte en particulier le premier régime, dont l'effet est directement lié au choc entre particules comme vu précédemment. Outre cette baisse, le second régime ne semble pas affecté outre mesure. Ce résultat est logique puisque le débit dans le second régime résulte d'un mouvement d'ensemble de tous les grains par rapport au silo.

En augmentant la friction aux parois (voir Fig. 9.10b), on observe diminution générale du débit (insert Fig. 9.10b) et un retard du second régime. On voit en effet que le second régime commence plus tôt pour

un faible coefficient μ_{gp}, ce qui est parfaitement cohérent avec les observations précédentes. On retrouve alors un second régime retardé dans le cas d'un coefficient de friction μ_{gp} élevé. En revanche, le premier régime des vibrations ne semble pas affecté par le coefficient de frottement au parois. Ce comportement provient de la dynamique régissant le second régime, qui résulte des mouvements des grains par rapport aux parois. En effet, les ondes se propageant verticalement dans silo verront leur énergie dissipée lorsque la friction aux parois augmente. Il faudra alors injecter plus d'énergie pour avoir d'importants jets hors du silo et ainsi augmenter le débit. À l'inverse dans le premier régime c'est surtout les collisions, et donc la friction entre grains qui régit le débit. Le cas 3D discuté précédemment combine les deux effets, d'où un débit normalisé plus faible et un second régime très retardé.

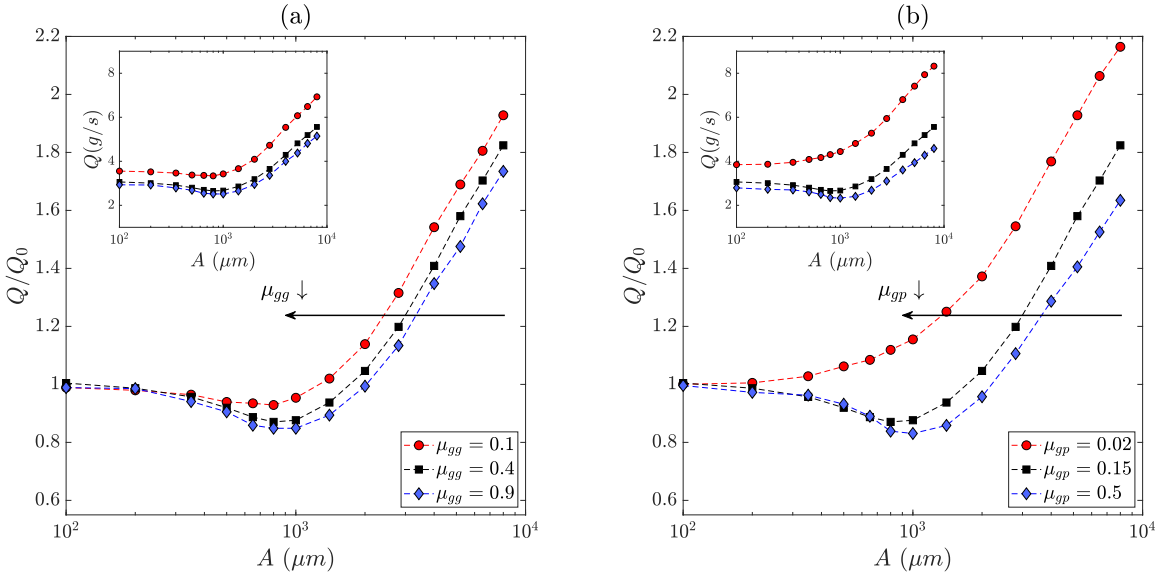


Figure 9.10 Débit normalisé Q/Q_0 en fonction de l'amplitude A pour $f = 30$ Hz, $D = 10$ mm et différents coefficients de friction (a) grain-grain μ_{gg} et (b) grain-paroi μ_{gp}. En insert : débit Q en fonction de l'amplitude dans les différents cas.

9.3.3 Effet de l'accélération de la gravité

Un paramètre primordial lors de la vidange d'un silo mais aussi difficilement modifiable en expérience (bien que possible [95]) est l'accélération de la gravité g. Bien que constante lors de toutes nos expériences, elle apparaît dans les lois que nous avons déterminées et il est donc important de vérifier son effet. Pour ce faire, l'évolution du débit normalisé Q/Q_0 pour différentes pesanteurs $g = 4.91 - 19.62$ m/s^2 est présentée dans la Fig. 9.11a. Comme on peut s'y attendre, on observe une diminution de l'effet des vibrations dans le cas d'une forte pesanteur. À l'inverse, le débit Q augmente lorsque la gravité est plus forte (insert Fig. 9.11a), comme décrit dans la loi de Beverloo (Eq. 5.1). Il est intéressant de noter que les débits Q pour les différentes pesanteurs semblent converger dans le second régime, un comportement logique puisque ce sont les vibrations qui contrôlent alors principalement l'écoulement.

Pour aller plus loin, nous avons représenté dans la Fig. 9.11b les résultats en suivant les lois d'échelles du premier et second régime (Eq. 9.3 et 9.6). Les résultats convergent comme attendu par les lois sur une seule courbe dans chaque régime, ce qui valide les fonctions $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ déterminées précédemment. Comme pour la masse volumique, on observe néanmoins une faible divergence à très haute amplitude du fait de la transition vers le gaz granulaire.

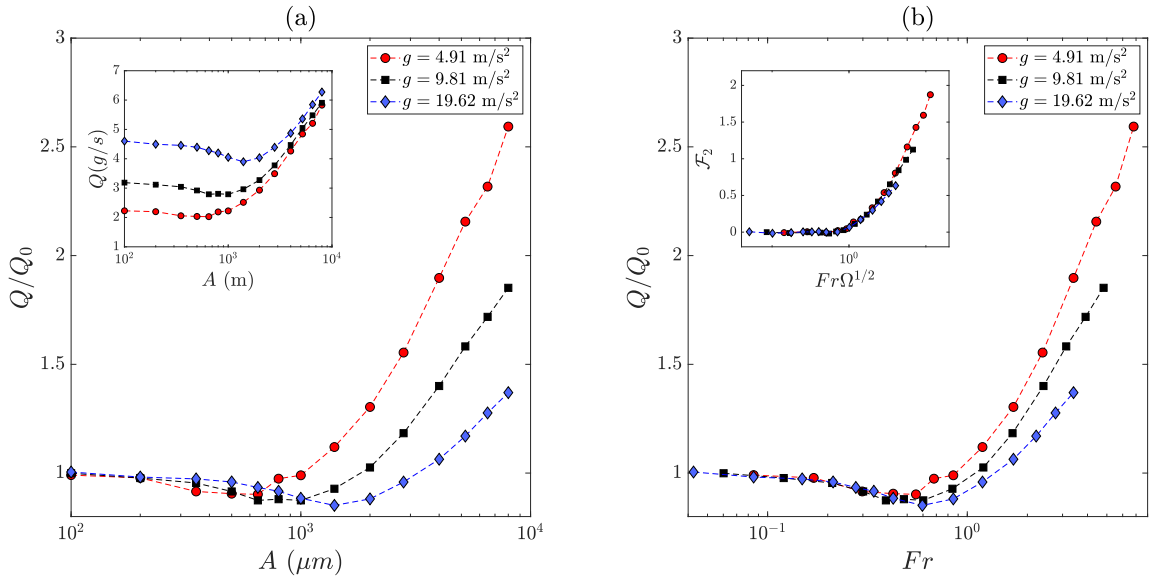


Figure 9.11 Débit normalisé Q/Q_0 en fonction de (a) l'amplitude A et (b) du nombre de Froude Fr pour $f = 30$ Hz, $D = 10$ mm et différentes pesanteurs $g = 4.91 - 19.62$ m/s^2. En insert dans (a) : débit Q en fonction de l'amplitude dans les différents cas. En insert dans (b) : effet de la gravité dans le second régime avec $\mathcal{F}_2$ en fonction de $Fr\Omega^{1/2}$.

9.3.4 Effet de l'angle d'ouverture

Un dernier paramètre qui peut affecter le débit est l'angle d'ouverture θ. Nous avons donc mené des simulations pour plusieurs angles d'ouverture $\theta = 0 - 45°$, comme présenté sur la Fig. 9.12a. Sans vibration, on constate une augmentation du débit Q lorsque l'angle d'ouverture augmente comme observé par Benyamine et al. [47]. En revanche on ne note pas de changement de débit normalisé Q/Q_0 dans le premier régime, comme observé en expérience (voir chapitre 5, section 5.3.1). L'effet de l'angle sur le débit dans le premier régime est donc entièrement contenu dans Q_0. Dans le second régime, on obtient cette fois une dispersion selon l'angle d'ouverture : le second régime commence en effet plus tard pour les grands angles d'ouverture. Pour mieux voir ce phénomène, nous avons isolé la contribution du second régime $\mathcal{F}_2$. Son évolution en fonction de $Fr\Omega^{1/2}$ pour les différents angles est présentée dans la Fig. 9.12b. On obtient alors bien des courbes similaires mais décalées en fonction de l'angle d'ouverture θ.

Cette dispersion en fonction de l'angle est similaire à celle obtenue pour Ω dans la section précédente (voir Fig. 9.6b). On peut donc émettre l'hypothèse que la contribution de l'angle intervient de manière similaire à celle de la fréquence relative. Cette contribution doit rendre compte de la façon dont sont transmises les vibrations des parois basses du silo aux particules. Elle doit être maximale pour $\theta = 0°$ et nulle pour $\theta = 90°$, qui correspond au cas d'une chute libre dans un canal droit. Dans l'étude de Hund et al. [65], l'angle d'ouverture apparait sous la forme d'un sinus dans le cas de vibrations horizontales. Les vibrations ici étant verticales, la contribution de l'angle devrait donc être logiquement sous la forme d'un cosinus (comme c'est le cas dans la loi de Benyamine [47]). Une forme simple pour prendre en compte la contribution de l'angle serait donc du type $Fr\Omega^{1/2}(\cos\theta)^\beta$, avec β une constante. La forme la plus simple pour la fonction $\mathcal{F}_2$ décrivant le second régime sera alors :

$$\mathcal{F}_2 = a_2 \exp\left(\frac{-b_2}{Fr\Omega^{1/2}(\cos\theta)^\beta}\right) \tag{9.7}$$

Pour déterminer la puissance β, on réalise une étude de sensibilité en fonction de β pour différentes constantes b_2 (on garde $a_2 = 1.81$ fixé). L'étude de sensibilité (voir Fig. 9.13a) montre que les résidus atteignent un minimum pour une puissance $\beta = 1$ et $b_2 = 3.61$. Le paramètre contrôlant l'effet des vibrations dans le second régime est donc $Fr\Omega^{1/2}\cos\theta$. En utilisant ce paramètre, on peut rassembler tout les résultats sur une seule courbe maîtresse, comme présenté sur la Fig. 9.13b. Au final, on peut

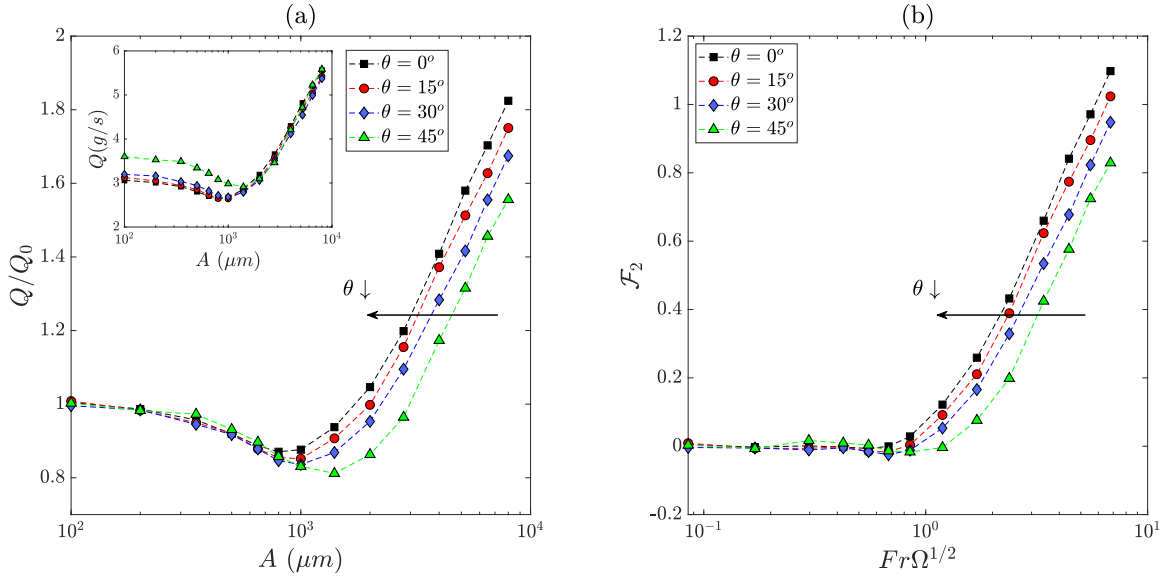


Figure 9.12 (a) Débit normalisé Q/Q_0 en fonction de l'amplitude A pour $f = 30$ Hz, $D = 10$ mm et différents angles d'ouverture $\theta = 0 - 45°$. En insert : débit Q en fonction de l'amplitude dans les différents cas. (b) Fonction $\mathcal{F}_2$ en fonction de $Fr\Omega^{1/2}$ pour les cas précédents. Dans chaque cas, on observe une dispersion selon l'angle d'ouverture θ (flèche noire).

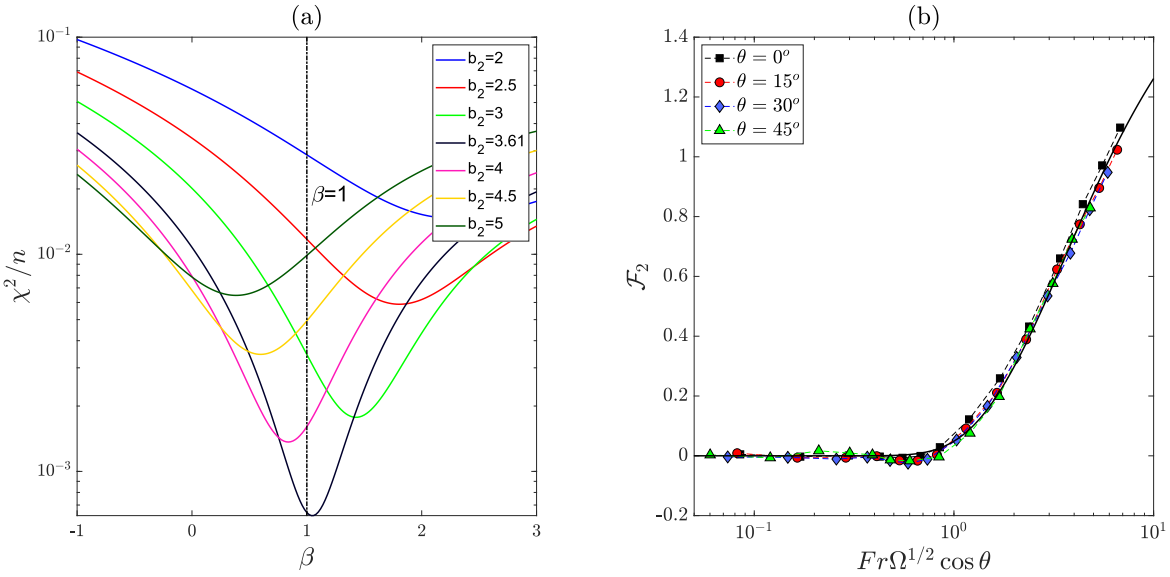


Figure 9.13 (a) Étude de sensibilité de l'Eq. 9.7 en fonction de la puissance β pour différentes constantes b_2. Les résidus χ^2/n atteignent un minimum pour le meilleur modèle, avec $\beta \sim 1$ et $b_2 = 3.61$. (b) Évolution du débit normalisé $\mathcal{F}_2$ en fonction du paramètre $Fr\Omega^{1/2}\cos\theta$ obtenu par l'étude de sensibilité. Les résultats sont modélisés par l'Eq. 9.8, avec $a_2 = 1.81$ et $b_2 = 3.61$ ($R^2 = 0.992$).

alors modéliser ces données par la loi suivante :

$$\mathcal{F}_2 = a_2 \exp\left(\frac{-b_2}{Fr\Omega^{1/2}\cos\theta}\right) \tag{9.8}$$

Ce résultat est logique, puisque ce sont majoritairement les parois basses qui transmettent l'effet des vibrations. Dans le second régime, ce sont les oscillations verticales des grains et du silo qui engendrent l'augmentation de débit. Incliner les parois réduit alors la composante verticale de vitesse transmise aux grains par les vibrations, d'où une diminution de l'effet des vibrations.

9.4 Ouverture : simulation de la cohésion

Comme nous venons de le voir, les simulations de la vidange dans le cas sec sont en parfait accord avec les expériences. Dans cette section nous allons voir si l'on peut aussi simuler correctement la vidange de particules cohésives. On considère alors les mêmes particules que celles utilisées en expérience (voir chapitre 7, section 7.1.2) : les billes de verre étalon ($d = 1.1 \pm 0.1$ mm) avec une teneur en eau volumique X_e. Comme en expérience, nous avons simulé la vidange pour différentes teneurs en eau $X_e = 0.01 - 1\%$ et mesuré le débit en fonction du nombre de Froude. On rappelle que le modèle pour la cohésion entre grains est décrit dans le chapitre 8 (voir section 8.2.2).

Les résultats pour une ouverture $D = 10$ mm et une fréquence $f = 30$ Hz sont présentés dans la Fig. 9.14a. On retrouve le comportement observé en vibration, avec une baisse du débit lorsque l'on augmente la teneur en eau. Tout comme en expérience, ce comportement tend à devenir négligeable pour les fortes vibrations. La force des vibrations est dans ce cas suffisamment grande devant la force capillaire (nombre de Bond des vibrations $Bo_v < 1$ pour rompre les ponts entre grains). Les simulations permettent donc de retrouver le comportement qualitatif, néanmoins on observe d'importantes différences du point de vue quantitatif. La baisse de débit est en effet bien plus forte en simulation qu'en expérience, en particulier pour les faibles teneurs en eau X_e. On peut citer le cas $X_e = 0.1\%$: en expérience l'effet de la cohésion est très faible et on retrouve quasiment le cas sans cohésion (section 7.2, Fig. 7.2), alors que l'on a une forte baisse de débit en simulation.

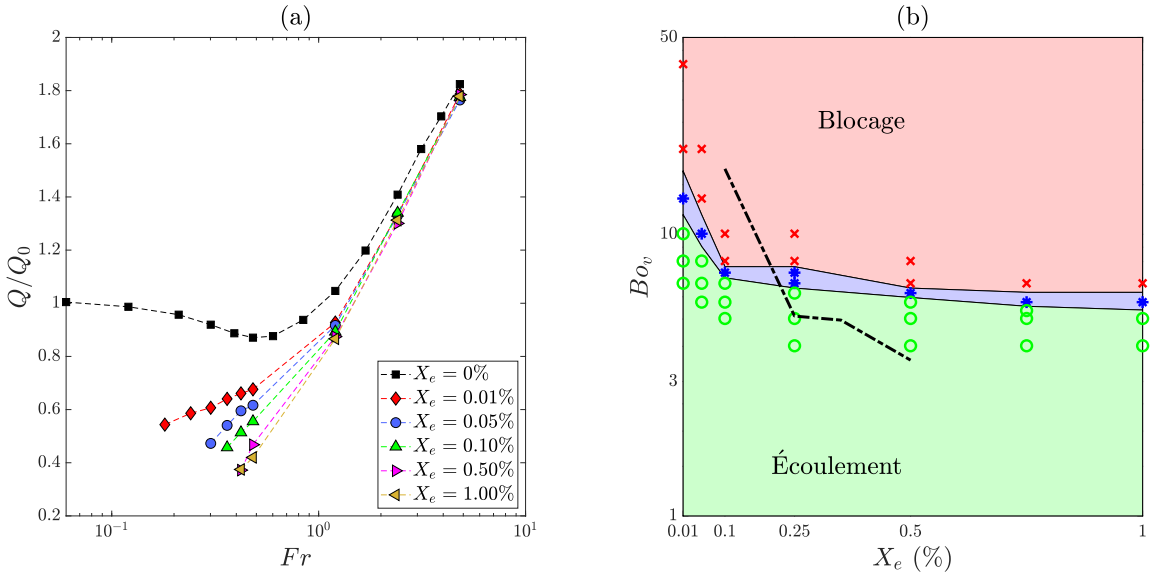


Figure 9.14 (a) Évolution du débit normalisé Q/Q_0 en fonction du nombre de Froude Fr pour différentes teneurs en eau $X_e = 0 - 1\%$ ($D = 10$ mm, $f = 30$ Hz). (b) Diagramme de phase de l'écoulement en fonction du nombre de Bond des vibrations Bo_v et de la teneur en eau X_e. Les zones en vert correspondent au cas où l'on a un écoulement tandis que les zones en rouge correspondent au cas où le silo est bloqué. Les zones en bleu correspondent à un comportement intermédiaire avec un écoulement difficile à caractériser : il est lent et intermittent du fait d'arches qui apparaissent et se brisent aléatoirement. Les points (cercles, étoiles et croix) indiquent les mesures effectuées pour déterminer la limite entre blocage et écoulement. La ligne pointillée noire indique la limite expérimentale.

Cet accord qualitatif et écart quantitatif se retrouvent aussi sur la limite d'écoulement. Nous avons déterminé la limite entre l'écoulement et le blocage en fonction de la teneur en eau X_e et du nombre de Bond des vibrations $Bo_v = F_{cap}/F_{vib}$, comme présenté sur la Fig. 9.14b. On retrouve bien une tendance similaire à celle observée expérimentalement : l'écoulement se fait pour les faibles teneurs X_e et les faibles Bonds Bo_v. La limite semble aussi bien saturée, indiquant un nombre de Bond des vibrations limite en dessous duquel les vibrations sont toujours suffisamment fortes pour avoir un écoulement. On constate par contre une différence quantitative avec la limite expérimentale (ligne pointillée noire sur la figure). On retrouve comme pour le débit un effet plus important de la cohésion à faible teneur : le nombre de Bond doit être plus faible en simulation pour avoir un écoulement pour $X \lesssim 0.1\%$. Ce résultat s'inverse pour les plus grandes teneurs en eau, avec un écoulement en simulation pour des nombres de Bond plus

grands qu'en expérience.

Le modèle de cohésion utilisé en simulation permet donc de capter le comportement général de la vidange avec cohésion mais doit être amélioré pour mieux correspondre au cas expérimental. Deux points à corriger semblent se dégager des résultats :

- La surestimation de l'effet de la cohésion pour les faibles teneurs en eau $X_e \lesssim 0.1\%$. Ce problème provient sans doute de la trop grande "perfection" de la simulation. On suppose en effet que l'eau est répartie de manière parfaitement homogène sur toutes les particules, ce qui n'est pas réaliste pour les faibles quantités d'eau considérées. Ces inhomogénéités vont jouer un rôle important en permettant à certains ponts de se rompre plus aisément. De plus, la formation de ponts capillaires pour les très faibles teneurs comme $X_e = 0.01\%$ est discutable compte tenu de la quantité minime d'eau.
- La cohésion entre grain et parois doit être prise en compte. Elle n'est en effet pas implémentée dans le modèle, ce qui suppose des parois complètement hydrophobes. Or nous avons vu dans le chapitre 7 (section 7.1.2) qu'il est difficile de rendre les parois très hydrophobes ($\theta_c \sim 100°$). Il reste donc une force de cohésion grain-paroi, même si celle-ci est bien plus faible que la cohésion grain-grain. Cette différence est probablement à l'origine de l'écart sur la limite d'écoulement pour les grandes teneurs en eau $X_e \gtrsim 0.25$: l'effet de la cohésion est alors plus faible en simulation qu'en expérience.

Une amélioration du modèle et une étude plus poussée semblent donc nécessaires pour mieux comprendre la cohésion dans le silo. Une telle étude sort néanmoins du cadre temporel de cette thèse.

9.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons simulé la vidange de billes sphériques sèches dans le silo quasi-2D pour étudier l'évolution du débit avec les différents paramètres. Nous avons pu vérifier dans un premier temps que l'on retrouve bien les mêmes débits qu'en expérience, sans et avec vibrations. Les simulations par méthode des éléments discrets (DEM) sont donc un excellent outil pour simuler ce type d'écoulements granulaires, aussi bien du point de vue qualitatif que quantitatif. Nous avons ensuite poussé plus loin l'étude du second régime et de l'effet des autres paramètres :

- Pour le second régime, on retrouve bien la dynamique de jets et la dépendance en $Fr\Omega^{1/2}$ observées en expérience. La fréquence relative permet de tenir compte de la propagation des ondes de vibrations dans le silo, et donc de la fréquence des jets. Nous avons aussi proposé une fonction décrivant la contribution de ce régime :

$$\mathcal{F}_2 = a_2 \exp(-b_2/Fr\Omega^{1/2}) \tag{9.9}$$

- La masse volumique ρ des grains n'a pas d'effet sur les deux régimes. Ceux-ci sont en effet dépendants du rapport des énergies cinétiques de vibration et gravité (Fr^2). La masse volumique intervient dans chacune des énergies, elle se simplifie donc dans leur rapport et n'intervient pas dans l'effet des vibrations.
- La friction joue un rôle très important dans l'écoulement. Augmenter la friction entre grains μ_{gg} diminue le débit dans le premier régime, puisque celui-ci dépend de la dissipation d'énergie lors des contacts entre grains. Augmenter la friction aux parois μ_{gp} retarde le second régime, puisqu'il est issu du mouvement d'ensemble des grains par rapport aux parois. Diminuer la taille des grains d entraîne aussi un retard du second régime, car on passe vers un écoulement 3D avec plus de dissipation d'énergie lors de la propagation des ondes dans le silo.
- La gravité g joue aussi un rôle majeur dans chaque régime. Augmenter la gravité diminue l'effet des vibrations, puisque les vitesses induites par celles-ci deviennent négligeables devant la vitesse créée par la gravité. Cet effet est parfaitement pris en compte dans les deux fonctions décrivant chacun des régimes ($\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$).
- L'angle d'ouverture θ affecte uniquement le second régime, avec une diminution du débit pour les grands angles. Incliner les parois diminue en effet l'énergie transmise et réduit le mouvement d'ensemble des grains par rapport à celui du silo. Cet effet peut être pris en compte en prenant la fonction $\mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2}\cos\theta)$ pour décrire le second régime.

Au final, le débit de grains sphériques secs dans un silo quasi-2D sous vibrations verticales est donné par la loi suivante :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \mathcal{F}_1(Fr) + \mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2}\cos\theta) \tag{9.10}$$

Avec :

$$\mathcal{F}_1 = -a_1 \exp\left(\frac{-b_1}{Fr}\right) \quad \text{et :} \quad \mathcal{F}_2 = a_2 \exp\left(\frac{-b_2}{Fr\Omega^{1/2}\cos\theta}\right) \tag{9.11}$$

où a_1, b_1, a_2 et b_2 sont des constantes. Le cas de particules cohésives a aussi été simulé, et l'on retrouve les comportements observés en expériences. Des écarts quantitatifs importants sont néanmoins présents du fait des limites du modèle, le problème reste donc ouvert.

Chapitre 10

Étude numérique de la rhéologie locale

10.1 Étude de l'écoulement dans le silo . . . 147
10.1.1 Motifs d'écoulement lors de la vidange . . . 147
10.1.2 Évolution des champs de grandeurs dans le silo . . . 149
10.2 Étude de l'écoulement au niveau de l'ouverture . . . 154
10.2.1 Profils d'écoulement en sortie . . . 154
10.2.2 Analyse temporelle et statistique . . . 154
10.2.3 Analyse et interprétation physique . . . 156
10.3 Modèles rhéologiques pour l'écoulement . . . 156
10.3.1 Loi rhéologique dans le silo . . . 157
10.3.2 Dissipation de l'énergie dans le premier régime. . . . 160
10.3.3 Modélisation de la vitesse . . . 161
10.4 Conclusion . . . 171

MAINTENANT que nous avons étudié les résultats numériques sur le débit, nous allons nous pencher sur les effets des vibrations sur la rhéologie de l'écoulement. On comparera dans un premier temps ces résultats à ceux de l'expérience avant d'aller plus loin. La simulation nous permet en effet d'atteindre des vibrations plus fortes mais aussi d'obtenir des informations supplémentaires par rapport à l'expérience, en particulier les contraintes sur les particules. À partir de ces informations, nous tenterons de déterminer une loi d'écoulement dans le silo sous vibrations. Dans ce chapitre, nous limiterons les simulations à une seule fréquence $f = 30$ Hz. Cette fréquence permet d'explorer une large gamme d'amplitudes tout en permettant d'observer clairement les comportements typiques des premier et second régimes.

10.1 Étude de l'écoulement dans le silo

Dans cette section, nous allons présenter les résultats obtenus dans le silo pour différentes amplitudes de vibration $A = 0 - 8000$ µm ($f = 30$ Hz). On se concentrera ici sur le cas $D = 10$ mm car celui-ci permet de bien visualiser les différents comportements observés dans les différents régimes. Les autres diamètres donnent des résultats similaires, l'effet des vibrations dépendant principalement du nombre de Froude. On comparera tout d'abord les motifs d'écoulement simulés à l'expérience. On étudiera ensuite l'évolution des champs de grandeurs dans le silo (zone de 100×100 mm au-dessus de l'ouverture).

10.1.1 Motifs d'écoulement lors de la vidange

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 6 (section 6.2.1), visualiser les motifs d'écoulement au cours du temps permet de mieux comprendre l'effet des vibrations. Les motifs obtenus par simulation sont comparés à ceux de l'expérience dans la Fig. 10.1, pour le cas sans vibration et dans les premier ($A = 800$ µm) et second régimes ($A = 2800$ µm).

On retrouve des motifs similaires, avec une forte canalisation dans le cas sans vibration, un écoulement plus homogène mais plus lent pour le premier régime et une re-canalisation dans le second régime avec une vidange plus rapide. On peut cependant noter que les expériences donnent un écoulement un peu plus canalisé que les simulations. Ceci vient probablement d'un amortissement des vibrations (du fait des inhomogénéités et d'effets de résonance) ainsi que du frottement aux parois potentiellement un peu plus élevé dans les zones à faible vitesse [1]. À noter que la comparaison dans le second régime est faite

1. Le coefficient de frottement évolue généralement en fonction de la vitesse relative entre les objets en contact, un point discuté dans les chapitre 1 (section 1.3.1). Le fait d'imposer une valeur constante est donc une approximation imparfaite, mais elle permet quand même d'obtenir des résultats cohérents dans un temps raisonnable.

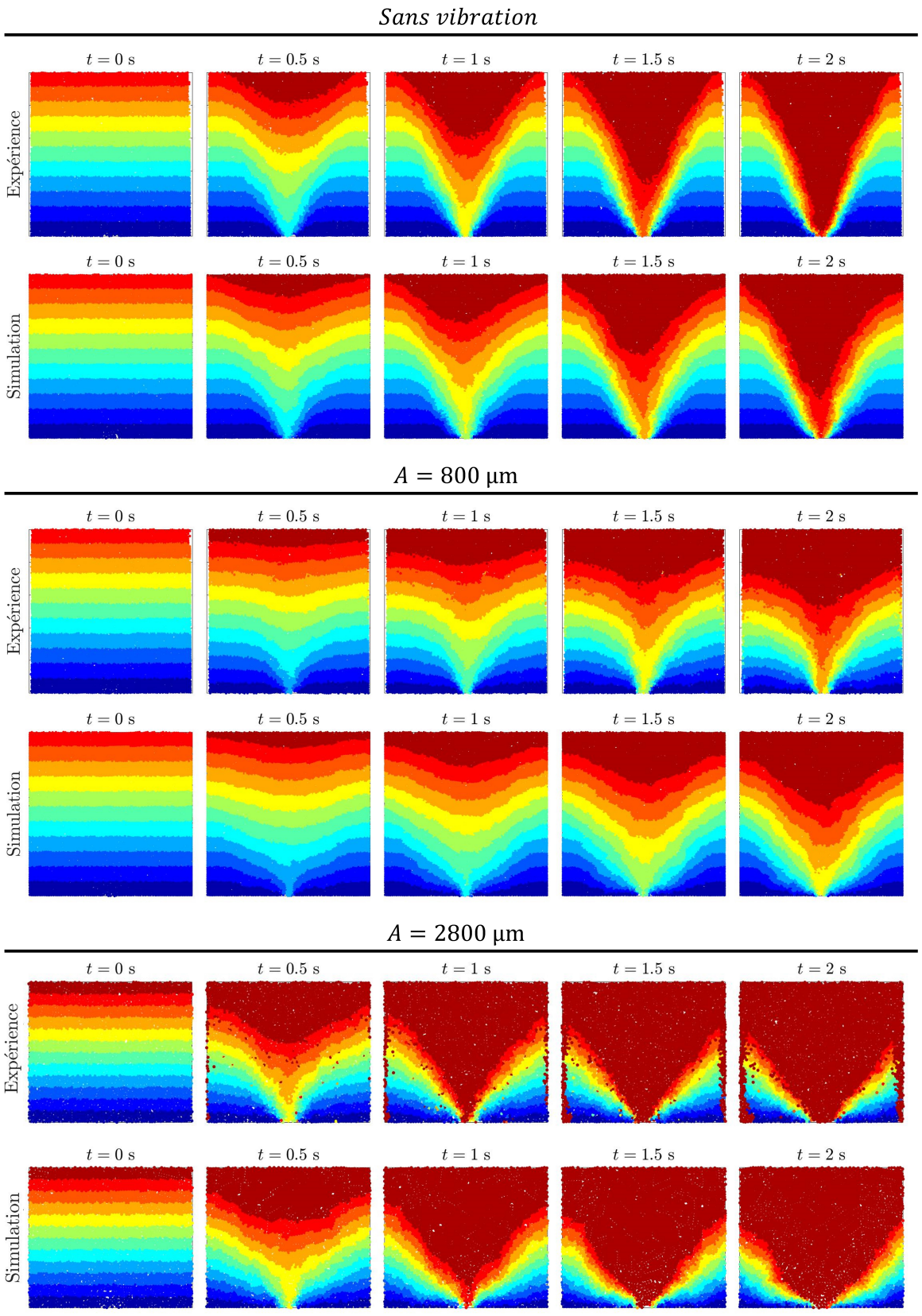


Figure 10.1 Motifs d'écoulement expérimentaux et simulés durant la vidange à différents instants ($t = 0$ s à $t = 2$ s) dans les cas sans vibration, $A = 800$ µm (premier régime) et $A = 2800$ µm (second régime). Le diamètre d'ouverture vaut $D = 10.07$ mm en expérience et $D = 10$ mm en simulation, tandis que la fréquence est toujours $f = 30$ Hz. Dans chaque cas, les particules sont colorées en fonction de leur hauteur initiale. Pour $A = 2800$ Hz, la zone d'étude est petite du fait des limites expérimentales : 70×55 mm au lieu de 100×100 mm.

sur une zone plus petite du fait des limites de la caméra en expérience (70×55 mm au lieu de 100×100 mm).

Pour mieux visualiser l'évolution de l'écoulement avec les vibrations, nous avons aussi calculé sur la Fig. 10.2 les motifs d'écoulement au bout de $t = 2$ s pour différentes amplitudes de vibrations. Pour les amplitudes $A = 0 - 800$ µm, on retrouve le comportement observé en expérience avec une mise en écoulement des zones mortes et une diminution du débit du fait de la compétition à l'ouverture et de la perte de vitesse dans le canal. En revanche, pour les plus fortes amplitudes $A = 2000 - 8000$ µm, l'écoulement dans les zones mortes semble ne plus évoluer avec l'amplitude, tandis que l'écoulement dans le canal augmente (d'où une augmentation du débit). Ce comportement est cohérent avec l'expérience et la dynamique de jets que nous avons mis en évidence précédemment : ce sont principalement les grains au-dessus de l'ouverture qui vont s'écouler en priorité (propulsés par les ondes se propageant dans le silo), bien que des grains dans les zones mortes continuent de s'écouler grâce aux vibrations.

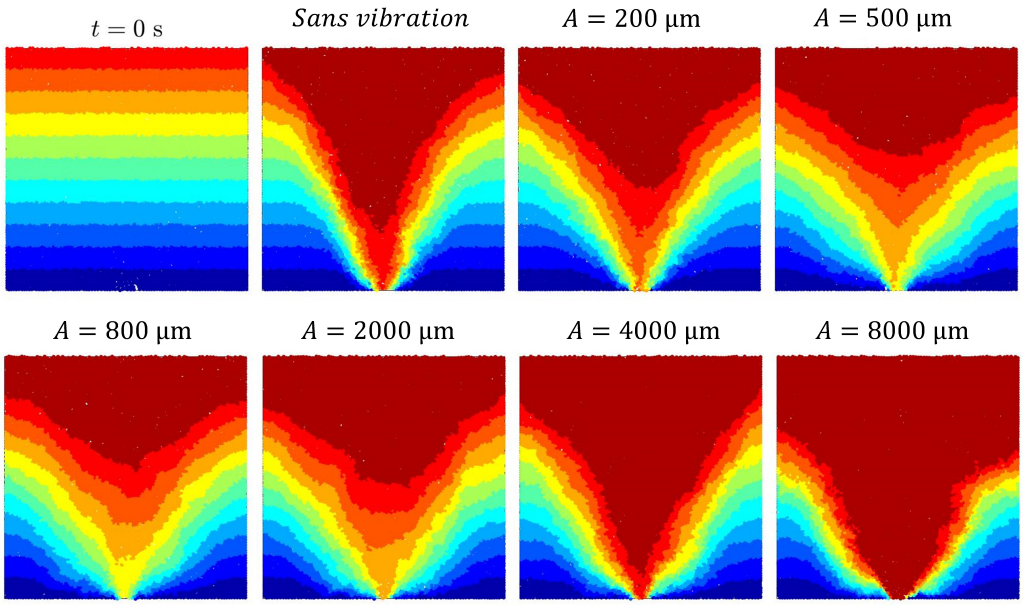


Figure 10.2 Motifs d'écoulement simulés pour une ouverture $D = 10$ mm à $t = 0$ s puis à $t = 2$ s pour différentes amplitudes de vibrations $A = 0 - 8000$ µm ($f = 30$ Hz). Dans chaque cas, les particules sont colorées en fonction de leur hauteur initiale.

10.1.2 Évolution des champs de grandeurs dans le silo

Grandeurs accessibles expérimentalement

Comme pour l'expérience, nous pouvons calculer les champs de grandeurs dans le silo, en utilisant les mêmes méthodes et programmes que ceux décrits dans la section 6.1 du chapitre 6. En expérience, nous avions principalement accès à la vitesse $\mathbf{v}$, au taux de déformation $\dot{\gamma}$, à la température granulaire T_g et à la fraction volumique ϕ_c (ainsi qu'au volume libre). La Fig. 10.3 présente ces champs pour les simulations dans le cas d'un diamètre d'ouverture $D = 10$ mm et trois amplitudes $A = 0/800/8000$ µm (sans vibration / premier régime / second régime). Tous les résultats présentés dans cette section sont issus de moyennes temporelles (sur 2 s) pendant la période stationnaire de l'écoulement comme dans le chapitre 6 (section 6.2.1). Pour mieux suivre l'évolution de ces grandeurs avec le nombre de Froude des vibrations, nous avons aussi calculé leurs valeurs moyennes dans plusieurs zones : la sortie du silo (demi-cercle de rayon $D/2$ au-dessus de l'ouverture), le canal d'écoulement et les zones mortes (voir Fig. 10.4). Comme pour l'expérience, on considère que la limite canal-zone morte est délimitée par $|\mathbf{v}| = 0.001$ m/s (voir Fig. 10.3).

Comme pour les motifs d'écoulement, on retrouve dans tous les cas les mêmes comportements que ceux observés en expérience pour les champs dans le silo (chapitre 6, sections 6.2.1 et 6.2.2) :

► **Dans le cas sans vibration :** l'écoulement est fortement canalisé ($1^{ère}$ colonne dans la Fig. 10.3) avec une vitesse $|\mathbf{v}|$ quasiment nulle dans les zones mortes et augmentant dans le canal lorsque l'on

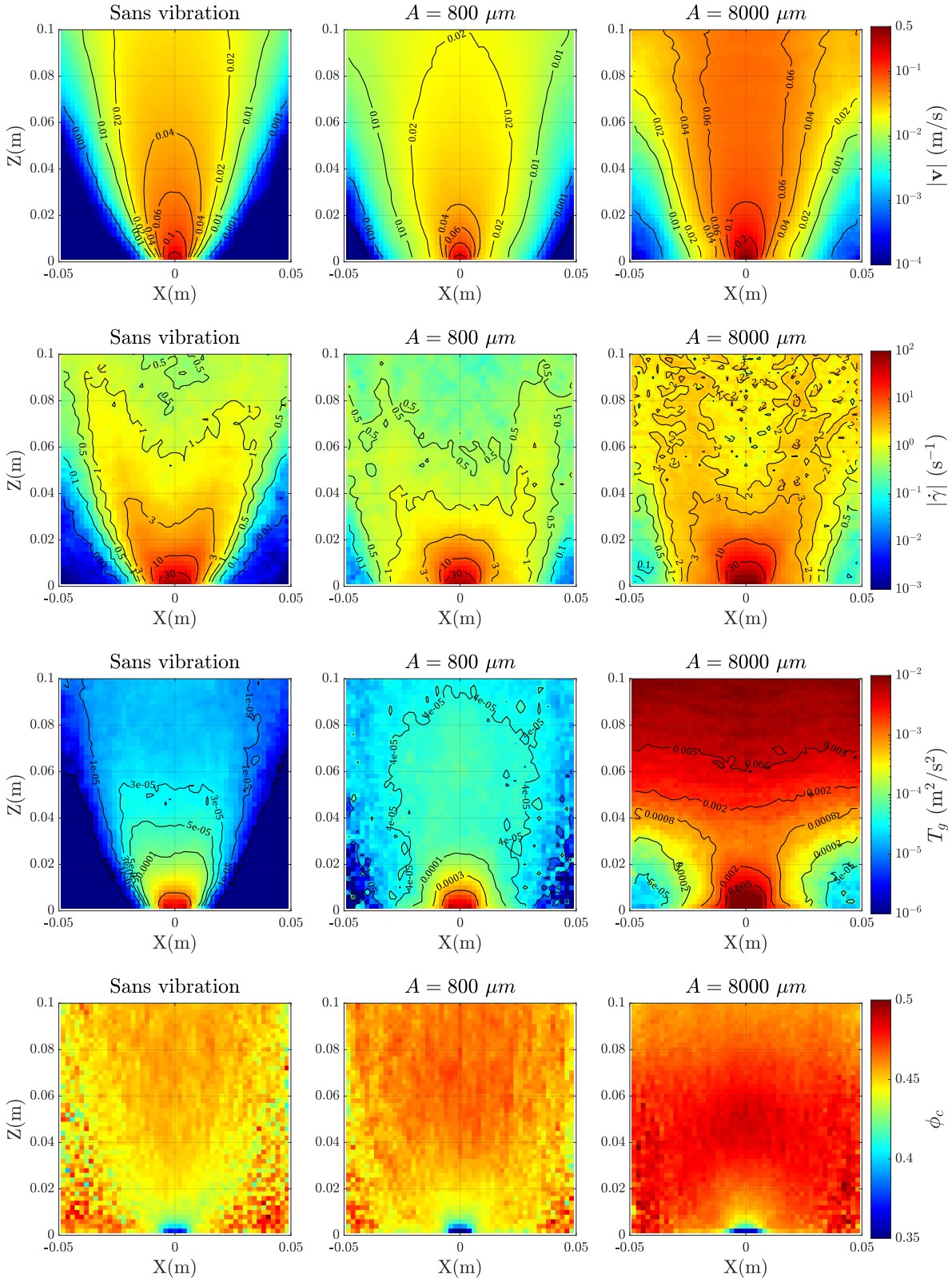


Figure 10.3 Champs des différentes grandeurs dans le silo pour trois amplitudes $A = 0 - 8000$ µm et un diamètre $D = 10$ mm. De haut en bas : norme de vitesse $|\mathbf{v}|$, norme du taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, température granulaire T_g et fraction volumique calculée ϕ_c.

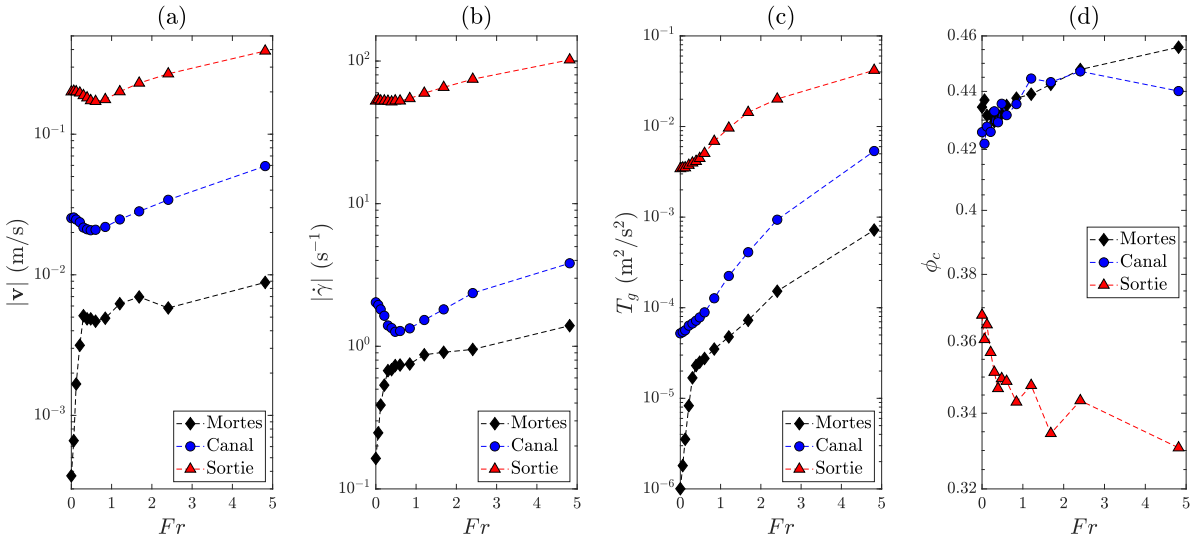


Figure 10.4 Évolution en fonction du Froude Fr des grandeurs dans les zones mortes (déterminées dans le cas sans vibration), le canal d'écoulement et la zone au-dessus de la sortie du silo (demi-cercle de rayon $D/2$). De gauche à droite : (a) norme de vitesse $|\mathbf{v}|$, (b) taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, (c) Température granulaire T_g et (d) Fraction volumique calculée ϕ_c.

se rapproche de la sortie. Cette canalisation se retrouve sur les champs de température granulaire T_g et taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, qui sont maximums aux bords de la sortie du fait des forts gradients et fluctuations de vitesse dans cette zone. Comme pour l'expérience, ils se propagent ensuite dans le canal avec une forme en "V" (très marquée pour le taux de déformation) du fait des gradients et fluctuations selon la direction x (particules proches de la limite canal-zones mortes). Enfin, la fraction volumique ϕ_c reste relativement homogène dans le silo, sauf à la sortie où elle diminue fortement comme observé par Benyamine et al. [47] et Mankoc et al. [45]. Comme en expérience on note des variations aléatoires dans les zones mortes, celles-ci n'ayant pas changées après le remplissage (tas granulaire "bulk").

► **Dans le premier régime :** les vibrations mettent les zones mortes en mouvement mais diminuent la vitesse $|\mathbf{v}|$ dans le canal. L'écoulement est donc plus homogène mais aussi plus lent ($2^{ème}$ colonne dans la Fig. 10.3), d'où la baisse de débit. Cet effet se retrouve sur la température T_g et le taux de déformation $|\dot{\gamma}|$, dont les champs sont plus homogènes et se propagent circulairement autour de l'ouverture. Comme en expérience, les valeurs moyennes pour ces trois grandeurs dans le canal et les zones mortes convergent effectivement lorsque le nombre de Froude augmente dans le premier régime (pour $Fr < 1$ sur la Fig. 10.4a à c). Enfin, la fraction volumique ϕ_c ne montre globalement pas d'évolution significative, bien que l'effet d'homogénéisation soit visible dans les zones mortes. On note néanmoins une diminution de la fraction en sortie (Fig. 10.4d), du fait du débit plus faible (moins de particule en sortie).

► **Dans le second régime :** on passe en dynamique de jets du fait du mouvement global des grains par rapport au silo ($3^{ème}$ colonne dans la Fig. 10.3). La vitesse $|\mathbf{v}|$ est bien plus élevée mais on a une re-canalisation apparente : les grains au-dessus de l'ouverture sont éjectés en priorité bien que les zones mortes continuent de couler. Le taux de déformation suit aussi cette tendance, augmentant de manière importante et se propageant à nouveau en "V". La température est aussi plus faible dans les zones mortes que dans le reste de l'écoulement du fait de cette re-canalisation. On note aussi une forte température en haut de la zone étudiée, dû à la propagation des ondes dans le silo. Le passage de ces ondes entraine des compactions et décompactions périodiques du milieu (similaire à l'effet d'un piston dans un moteur pour un gaz), donnant lieu à d'importantes fluctuations de vitesse. Si l'on observe les valeurs moyennes dans les différentes zones (pour $Fr > 1$ sur la Fig. 10.4a à c), on voit bien cette re-canalisation : les trois grandeurs augmentent dans les zones mortes mais augmentent d'autant voir plus dans le canal, d'où un écart et cette re-canalisation apparente. La fraction volumique ϕ_c quant à elle montre une augmentation à l'ouverture du fait de la compression entrainée par les grains au-dessus. Comme en expérience, cette augmentation reste néanmoins assez faible comparée aux autres grandeurs.

Grandeurs liées aux contraintes

Comme nous venons de le voir, on retrouve les mêmes champs en simulation que ceux observés en expérience. La simulation nous permet néanmoins d'accéder à d'autres informations sur l'écoulement difficilement mesurables en expérience. On peut en effet obtenir les contraintes s'exerçant sur chacun des grains σ_p. On peut en déduire la contrainte moyenne dans chaque maille σ :

$$\sigma = -\langle \sigma_p / V_p \rangle_V \tag{10.1}$$

Avec V_p le volume du grain et $\langle - \rangle_V$ la moyenne volumique introduite dans la chapitre 6 (section 6.1). À partir de cette contrainte et des autres champs, on peut calculer plusieurs grandeurs permettant de mieux comprendre l'écoulement :

- La pression dans l'écoulement P, calculée à partir des contraintes :

$$P = \frac{tr(\sigma)}{2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \tag{10.2}$$

  où σ_{xx} et σ_{zz} sont les éléments diagonaux du tenseur des contraintes.

- Le nombre inertiel I, dont nous avons discuté dans le chapitre 2 (section 2.2), qui compare les temps caractéristiques du cisaillement et du réarrangement des grains dû à la pression. On rappelle la formule :

$$I = \frac{|\dot{\gamma}| d}{\sqrt{P/\rho}} \tag{10.3}$$

- La viscosité effective de l'écoulement η_{eff}, qui lie les contraintes de cisaillement τ aux taux de déformation $\dot{\gamma}$ (voir chapitre 2, section 2.2) et donnée par :

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{|\tau|}{|\dot{\gamma}|} \quad \text{avec :} \quad \tau = \sigma - P\delta \tag{10.4}$$

Les champs pour ses trois grandeurs dans le cas $D = 10$ mm et les différents régimes sont présentés dans la Fig. 10.5. Comme précédemment, nous avons aussi mesuré les valeurs moyennes de ces grandeurs dans les zones mortes, le canal d'écoulement et à la sortie en fonction du nombre de Froude Fr (voir Fig. 10.6). On trouve pour ces grandeurs des comportements cohérents avec les observations précédentes :

- **Dans le cas sans vibration :** on retrouve encore la canalisation de l'écoulement et la présence des zones mortes. Dans ce canal, la pression diminue à mesure qu'on se rapproche de l'ouverture. En moyenne $P_{canal} = 368$ Pa et $P_{sortie} = 170$ Pa, ce qui est bien plus faible que la pression prévue par l'étude dans Jansen [43] (voir section 3.2) pour un silo fermé $P_{Jansen} = \rho g \lambda \sim 2500$ Pa. La pression dans les zones mortes augmente lorsque qu'on se rapproche des coins du silo, avec une pression moyenne $P_{morte} = 975$ Pa. L'écoulement est alors supporté par ces zones mortes, qui agissent alors comme des parois. Les champs de nombre inertiel I sont similaires aux champs de taux de déformation tandis que la viscosité efficace η_{eff} montrent une structure proche mais inversée. Ainsi dans les zones mortes, on a un faible nombre inertiel et une grande viscosité, ce qui correspond bien au cas d'un milieu granulaire solide. À l'inverse on a un effet rhéofluidifiant dans le canal à mesure que l'on se rapproche de l'ouverture, avec une diminution de la viscosité et une augmentation du nombre inertiel. La sortie du silo correspond justement à une situation de chute libre, d'où un nombre inertiel très grand puisqu'on tend vers un gaz granulaire.

- **Dans le premier régime :** on retrouve l'homogénéisation de l'écoulement avec une érosion du canal dû à la mise en mouvement des zones mortes. Ce comportement est bien traduit par le nombre inertiel et la viscosité effective, dont les valeurs dans le canal et les zones mortes convergent vers une valeur intermédiaire ($Fr < 1$ dans la Fig. 10.6). Ces résultats concordent bien avec ceux observés pour le taux de déformation $\dot{\gamma}$ (voir Fig. 10.3 et Fig. 10.4b), dont le nombre inertiel et la viscosité dépendent. Un phénomène similaire est observé pour la pression, bien que celle-ci tend plutôt à augmenter du fait de l'augmentation des chocs entre grains. La sortie du silo n'est en revanche pas affectée, avec des valeurs restant constantes lorsque l'amplitude augmente (uniquement dans le premier régime pour $Fr < 1$). On retrouve aussi une propagation circulaire centrée autour de cette ouverture pour les différentes grandeurs comme précédemment.

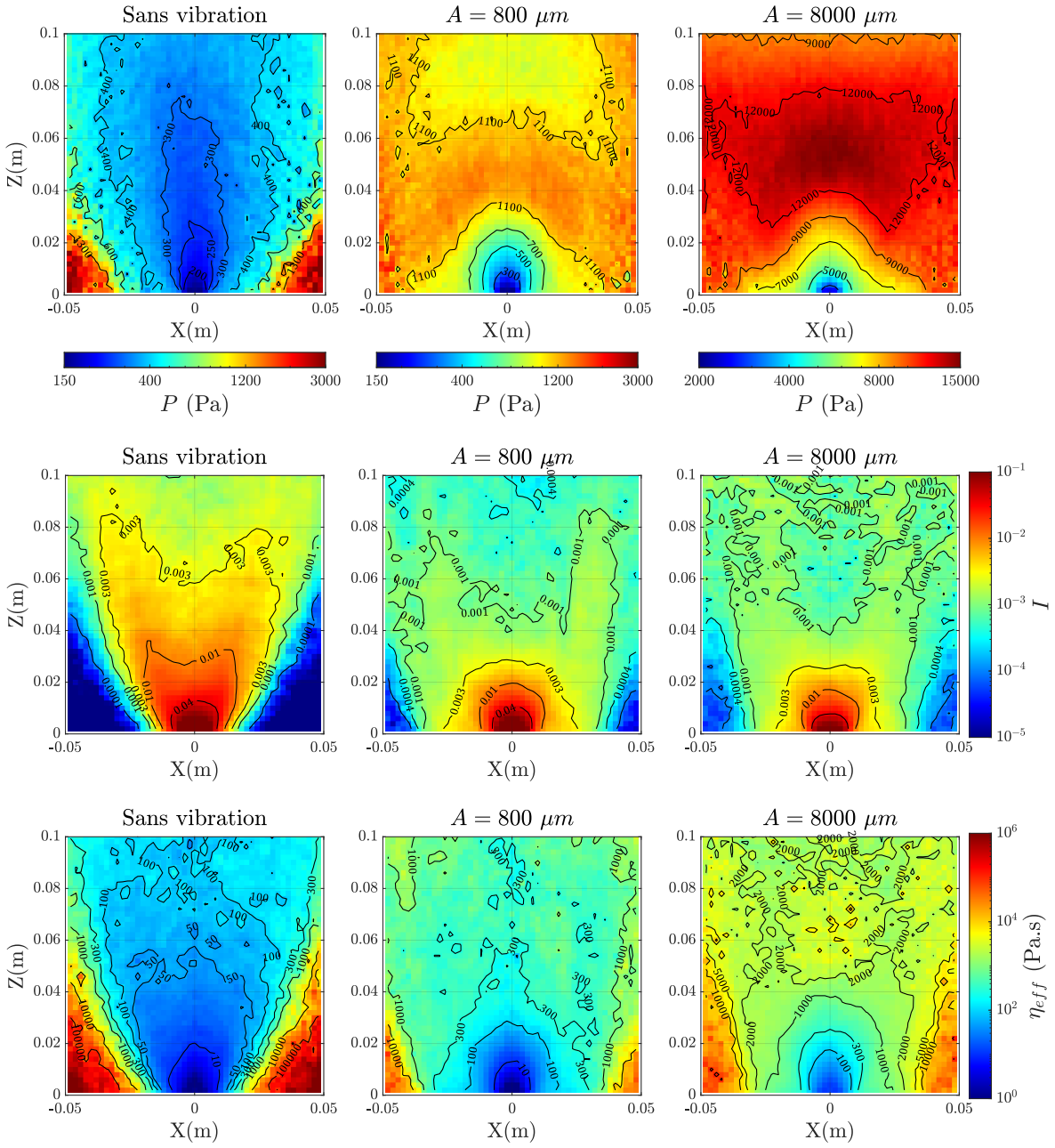


Figure 10.5 Champs des différentes grandeurs calculées à partir des contraintes sur les grains dans le silo pour trois amplitudes $A = 0 - 8000$ µm ($f = 30$ Hz) et un diamètre $D = 10$ mm. De haut en bas : pression P, nombre inertiel I et viscosité effective η_{eff}. À noter que, pour la pression, l'échelle de couleur est différente pour le second régime ($A = 8000$ µm) comparé aux autres cas.

► **Dans le second régime :** on retrouve un comportement différent pour ces grandeurs. La pression en particulier augmente fortement dans tout l'écoulement, du fait de la dynamique de jets qui compresse le fond du silo (les ondes se propageant dans le silo venant périodiquement écraser les grains au fond). Cette forte pression engendre alors une augmentation générale de la viscosité et une baisse du nombre inertiel. Ce phénomène est particulièrement notable en sortie (voir Fig. 10.6b et c), car on passe d'un milieu granulaire en chute libre (proche d'un gaz) à un jet de matière bien plus compact.

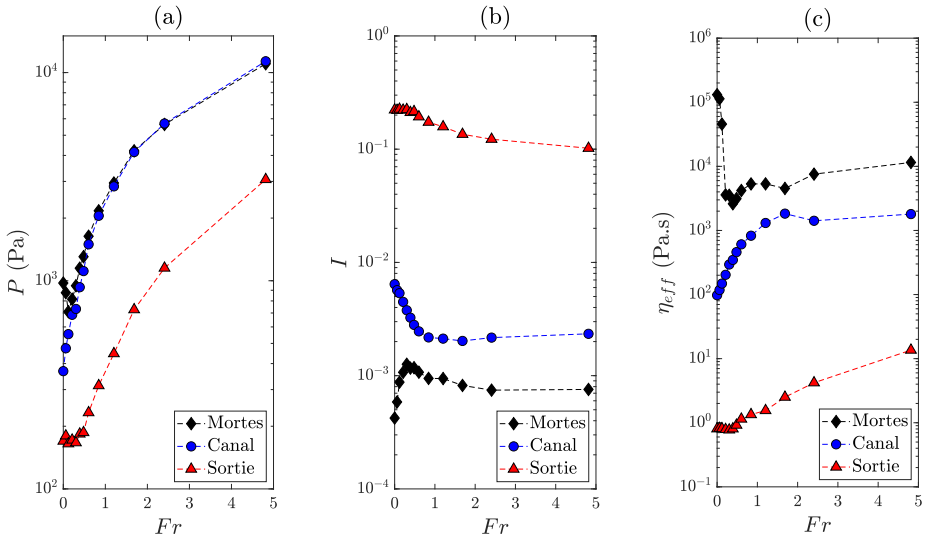


Figure 10.6 Évolution en fonction du Froude Fr des grandeurs issues des contraintes dans les zones mortes (déterminées dans le cas sans vibration), le canal d'écoulement et la zone au-dessus de la sortie du silo (demi-cercle de rayon $D/2$). De gauche à droite : (a) Pression P, (b) nombre inertiel I et (c) viscosité effective η_{eff}.

10.2 Étude de l'écoulement au niveau de l'ouverture

Dans cette section, nous allons nous pencher sur le comportement rhéologique de l'écoulement à l'ouverture du silo comme en expérience (chapitre 6, section 6.3). Nous présenterons les profils d'écoulement autour de la sortie et l'analyse statistique des grandeurs en sortie (méthodes détaillées dans le chapitre 6, section 6.1). Tous les résultats seront présentés en premier, l'analyse et l'interprétation seront faites ensuite.

10.2.1 Profils d'écoulement en sortie

De manière similaire au cas expérimental, nous avons tracé les profils de vitesse radiale v_r (Fig. 10.7a) et fraction volumique ϕ_c (Fig. 10.7b) le long du demi-cercle de rayon $R = D/2 + d$ pour un diamètre d'ouverture $D = 10$ mm et plusieurs amplitudes $A = 0 - 8000$ µm ($f = 30$ Hz). Tout comme pour les champs, les résultats présentés sont issus de moyennes temporelles sur 2 s d'écoulement dans le régime stationnaire. Nous avons aussi calculé le débit calculé Q_c en intégrant ces profils pour différents diamètres d'ouverture $D = 5 - 20$ mm (Fig. 10.7c). Pour rappel, on a :

$$v_r = v_x \cos(\varphi) + v_z \sin(\varphi) \quad \text{et} \quad Q_c = \int_0^{\pi} v_r \phi_c \rho W \tag{10.5}$$

où v_x et v_z sont les vitesses selon les axes x et z et W la profondeur du silo (selon y).

10.2.2 Analyse temporelle et statistique

Les différents résultats que nous venons de voir étaient issus de moyennes temporelles lors du régime stationnaire. Néanmoins, il est important de comprendre les effets au cours du temps des vibrations sur l'écoulement, en particulier sur les vitesses (dépendance au nombre de Froude). Ceci est particulièrement vrai au niveau de l'ouverture, comme on a pu le voir avec la dynamique de jets et les résultats expérimentaux du chapitre 6 (section 6.3.1). Nous avons donc mesuré la densité de probabilité pour la vitesse v_z et la fraction volumique ϕ_c en sortie du silo (dans le demi-cercle de rayon $R_c = D/2$) pour différentes amplitudes A ($D = 10$ mm et $f = 30$ Hz), comme présenté dans les Fig. 10.8a et b. Le spectre de Fourier de la vitesse v_z a aussi été analysé, comme présenté dans la Fig. 10.8c. L'évolution des réponses moyennes $v_{z,0Hz}$ (à 0 Hz) et à la fréquence des vibrations $v_{z,30Hz}$ ($f = 30$ Hz) en fonction du nombre de Froude pour plusieurs diamètres $D = 5 - 20$ mm est aussi présentée dans la Fig. 10.9.

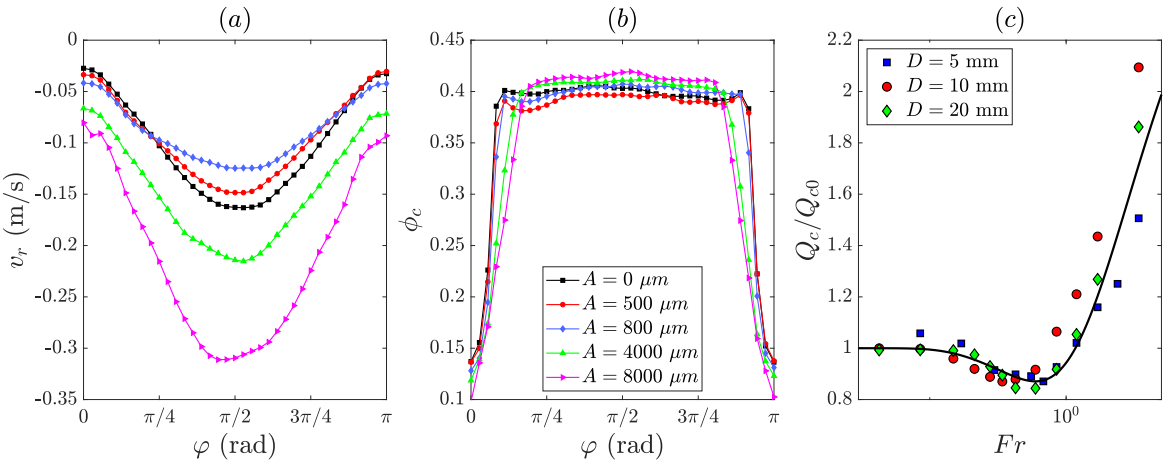


Figure 10.7 Profils radiaux de (a) vitesse radiale v_r et (b) fraction volumique calculée ϕ_c en fonction de l'angle φ le long du demi-cercle de rayon $R_c = D/2 + d$ centré sur la sortie du silo pour $D = 10$ mm et plusieurs amplitudes $A = 0 - 8000$ µm($f = 30$ hz). (c) Débit normalisé calculé Q_c/Q_{c0} en fonction du Froude Fr pour différents diamètres $D = 5 - 20$ mm. La courbe noire représente la loi complète du débit sous vibrations (Eq. 9.10), avec $a_1 = 0.297$, $b_1 = 0.402$, $a_2 = 2.18$ et $b_2 = 3.86$.

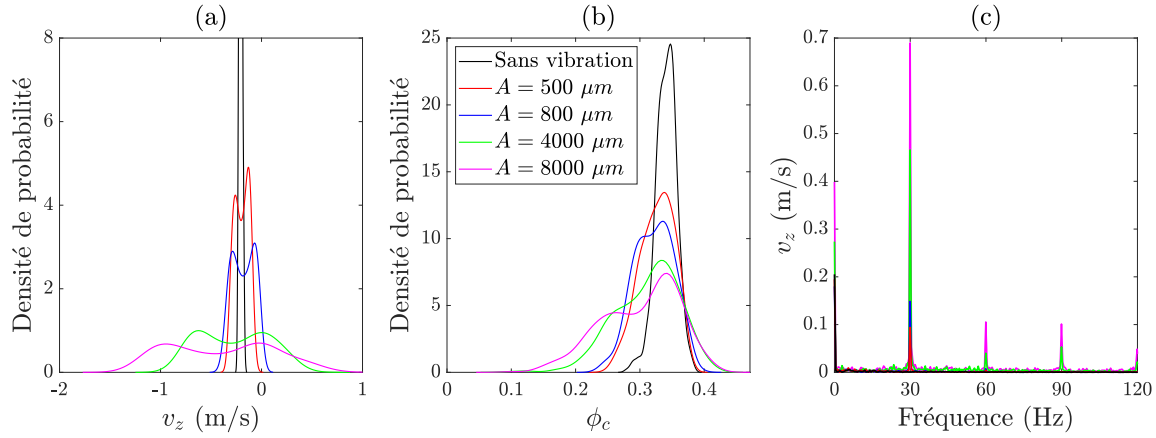


Figure 10.8 Densité de probabilité pour (a) la vitesse v_z et (b) la fraction volumique ϕ_c en sortie de l'écoulement au cours du temps pour plusieurs amplitudes $A = 0 - 8000$ µm et $D = 10$ mm. (c) Spectre de Fourier de la vitesse v_z pour chaque amplitude.

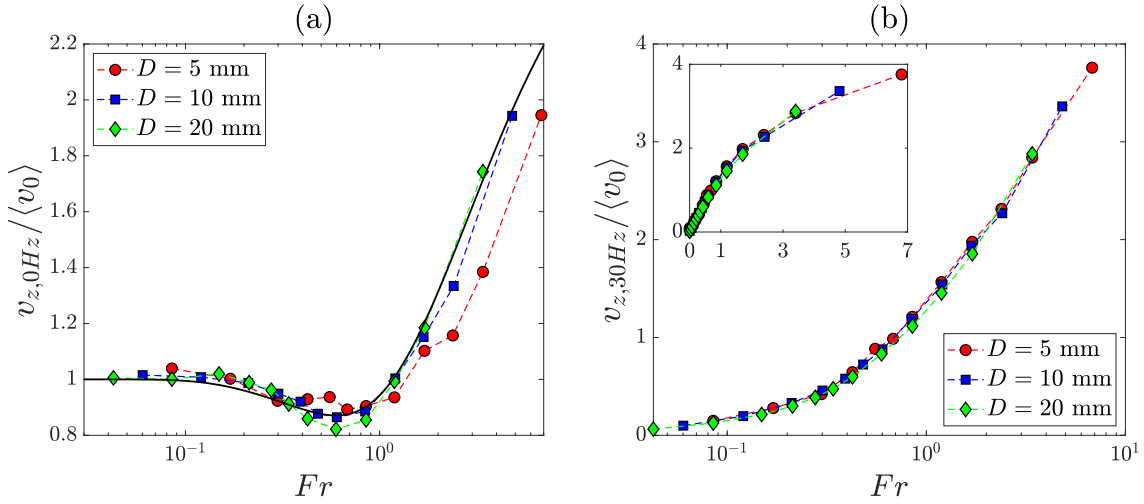


Figure 10.9 (a) Vitesse moyenne normalisée $v_{z,0Hz}/\langle v_0 \rangle$ et (b) variation de vitesse à $f = 30$ Hz normalisée $v_{z,30Hz}/\langle v_0 \rangle$ en fonction du nombre de Froude Fr pour différents diamètres $D = 5 - 20$ mm. La courbe noire représente la loi complète du débit sous vibrations (Eq. 9.10), avec $a_1 = 0.297$, $b_1 = 0.402$, $a_2 = 2.18$ et $b_2 = 3.86$.

10.2.3 Analyse et interprétation physique

Tout comme pour l'écoulement dans le silo, on retrouve en sortie les mêmes comportements et résultats qu'en expérience (section 6.2.1). Les discussions et interprétations étant les mêmes, nous allons simplement rappeler les points majeurs des comportements dans chaque régime :

► **Sans vibration :** la canalisation de l'écoulement engendre un profil gaussien pour la vitesse (Fig. 10.7a), maximum au centre du canal et minimum sur les côtes (zones mortes). La fraction volumique reste constante sauf aux extrémités du fait des parois (Fig. 10.7b). Ces deux grandeurs varient peu au cours du temps, en particulier la vitesse (Fig. 10.8a et b). Le débit reste globalement constant et dépend principalement de la vitesse. Ces résultats sont en accord avec l'expérience et la littérature [49, 53, 66, 76, 77].

► **Dans le premier régime :** les vibrations permettent de mettre en mouvement les zones mortes mais augmentent les collisions dans le canal, dissipant l'énergie et diminuant donc la vitesse dans celui-ci. Les profils de vitesse sont alors aplatis, avec une augmentation sur les côtés mais une baisse au centre ($A = 500 - 800$ µm, Fig. 10.7a). La fraction volumique moyenne en revanche n'est pas affectée par les vibrations. La baisse de débit est alors due entièrement aux effets sur la vitesse et suit bien la loi du premier régime ($Fr < 1$, Fig. 10.7c). Cette loi se retrouve d'ailleurs aussi sur la vitesse moyenne en sortie $v_{z,0Hz}$, comme on peut le voir sur la Fig. 10.9a. La dissipation d'énergie créant cette baisse de débit provient des variations de vitesse en sortie $v_{z,30Hz}$ ($Fr < 1$, Fig. 10.9b), qui augmente avec le nombre de Froude. Ce nombre rend en effet compte de l'opposition entre la vitesse des vibrations $A\omega$ et celle de la gravité $\sqrt{gD}$: les grains vont aller périodiquement à contre courant et entrer en collision plus souvent d'où la perte d'énergie cinétique. La mise en mouvement des zones mortes favorise ce phénomène en apportant des grains à l'ouverture (plus de compétitivité donc plus de collisions).

► **Dans le second régime :** les vibrations sont le mécanisme majoritaire créant le débit et engendrent un mouvement d'ensemble des grains par rapport au silo. Les jets denses et périodiques donnent lieu à une augmentation générale de la vitesse et une faible augmentation de la fraction volumique ($A = 4000 - 8000$ µm, Fig. 10.7). Le débit augmente alors de manière importante en suivant la loi du second régime ($Fr > 1$, Fig. 10.7b). Cet effet reste principalement dû à la vitesse, comme on peut le voir avec la vitesse moyenne $v_{z,0Hz}$ qui suit aussi la loi du second régime ((Fig. 10.9b). Cette augmentation provient des variations de vitesse $v_{z,30Hz}$ ($Fr < 1$, Fig. 10.9b) qui continuent d'augmenter avec le nombre de Froude et correspondent aux ondes qui se propagent dans le silo. Les jets sont créés par le déphasage entre ces ondes et le mouvement du silo, du fait de la conservation de l'inertie des grains (les grains continuent de descendre lorsque le silo remonte et sont expulsés). L'intermittence de ces jets se retrouve sur les profils de densité de probabilité (Fig. 10.8a et b), avec des périodes de fortes vitesse et fraction (les jets) alternées par des périodes de vitesse et fraction quasi nulles. Ce régime tend néanmoins à saturer, comme prévu par la loi et visible sur les variations en échelle linéaire (insert Fig. 10.9b). À noter que la propagation des ondes dans le silo donne lieu parfois à des collisions d'ondes (chocs) d'où des faibles réponses secondaires aux harmoniques de la fréquence de vibration comme remarqué en expérience (60/90/120 Hz sur la (Fig. 10.8c).

10.3 Modèles rhéologiques pour l'écoulement

Dans le chapitre 2, nous avons discuté du but de la rhéologie : établir les lois décrivant l'écoulement en tout point, généralement nommées *lois rhéologiques* ou *lois constitutives*. Dans cette section, nous allons tester certaines lois et modèles utilisés en rhéologie des milieux granulaires pour décrire l'écoulement dans le silo en prenant en compte l'effet des vibrations. Dans un premier temps, on testera la loi $\mu(I)$ (voir chapitre 2, section 2.2.2) sur l'écoulement dans le silo sous vibrations. Nous étudierons ensuite plus en détail le premier régime des vibrations : nous décrirons l'origine de la dissipation d'énergie et proposerons de modéliser la vitesse dans le silo en nous basant sur le *modèle cinématique* [96, 76]. Le second régime ne fera pas en revanche pas l'objet d'une étude rhéologique détaillée, puisqu'il dépend d'une dynamique complètement intermittente et présente une transition partielle vers un gaz granulaire rendant une description locale difficile.

10.3.1 Loi rhéologique dans le silo

Nous avons décrit la rhéologie $\mu(I)$ dans le chapitre 2 (section 2.2.2), qui permet de décrire les écoulements granulaires subissant un cisaillement unidirectionnel. On a alors d'après Dacruz et al. [24] :

$$\tau = \mu(I)P \quad \text{avec :} \quad \mu(I) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + I_0/I} \quad \text{et} \quad I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{P/\rho}} \tag{10.6}$$

où μ_1 est le coefficient de friction statique et μ_2 le coefficient de frottement dynamique et I_0 une constante. Comme nous avons pu le voir, l'écoulement dans le silo est 2D et la fraction volumique varie peu, excepté lors de la chute libre en sortie. Cet écoulement devrait donc suivre la généralisation de la loi $\mu(I)$ proposée par Jop et al. [97] et respecter :

$$\sigma = -P\delta + \tau \quad \text{et} \quad \tau = \eta_{\text{eff}}\dot{\gamma} \tag{10.7}$$

$$\text{avec :} \quad \eta_{\text{eff}} = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} \quad \text{et} \quad I = \frac{|\dot{\gamma}| d}{\sqrt{P/\rho}} \tag{10.8}$$

où η_{eff} est la viscosité effective dont nous avons discuté précédemment dans la section 10.1.2. On peut réécrire cette équation, ce qui donne :

$$\frac{P}{|\dot{\gamma}|} = \frac{d\sqrt{P\rho}}{I} \quad \Rightarrow \quad \eta_{\text{eff}} = \mu(I)\frac{d\sqrt{P\rho}}{I} \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta_{\text{eff}}}{d\sqrt{P\rho}} = \frac{\mu(I)}{I} \tag{10.9}$$

Au final, on peut écrire :

$$\eta^*_{\text{eff}} = \frac{\mu_1}{I} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I + I_0} \quad \text{avec :} \quad \eta^*_{\text{eff}} = \frac{\eta_{\text{eff}}}{d\sqrt{P\rho}} \tag{10.10}$$

où η^*_{eff} est la viscosité effective normalisée.

Pour vérifier cette relation, nous avons tracé dans l'évolution de η^*_{eff} en fonction du nombre inertiel I pour tout le silo (càd : chaque maille de la zone étudiée). Les résultats pour plusieurs diamètres d'ouverture $D = 5 - 20$ mm sont présentés dans la Fig. 10.10a tandis que ceux pour $D = 10$ mm et différentes amplitudes $A = 0 - 8000$ µm ($f = 30$ Hz) sont présentés dans la Fig. 10.10b. Sans vibration, tous les résultats s'alignent sur une même courbe d'équation :

$$\eta^*_{\text{eff}} = \frac{\mu_{\text{eff}}}{I} \tag{10.11}$$

avec $\mu_{\text{eff}} = 0.216$ le coefficient de friction effectif. On ne retrouve ici que le premier terme de l'équation Eq. 10.10, qui correspond à la contribution du frottement statique. Cela peut s'expliquer par le fait que le nombre inertiel reste faible dans l'écoulement : $I < 0.04$ excepté à la sortie (voir Fig. 10.5). Or on a généralement $I_0 \sim 0.3$ pour des billes de verre, ce qui implique :

$$\eta^*_{\text{eff}} \sim \frac{\mu_1}{I} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{I_0} \sim \frac{\mu_1}{I} + 1 \sim \frac{\mu_1}{I} \tag{10.12}$$

L'effet du frottement dynamique est donc négligeable lors de la vidange sans vibration, d'où cette forme simplifiée de la loi $\mu(I)$. On peut aussi remarquer que le modèle de contact utilisé (voir chapitre 4, section 8.2) suppose des coefficients de frottement constants entre grains $\mu_{gg} = 0.4$ et avec les parois $\mu_{gp} = 0.15$. Néanmoins, des effets dynamiques peuvent quand même apparaitre à l'échelle macroscopique comme nous le verrons dans la suite.

Lorsque l'on ajoute des vibrations, ces résultats ne semblent pas changer mais une étude plus précise indique une évolution de μ_{eff} avec les vibrations. Nous avons représenté sur la Fig. 10.11a la variation de μ_{eff} par rapport au cas sans vibration $\mu_{\text{eff},0}$ en fonction du nombre de Froude pour plusieurs diamètres D. On note dans le premier régime une diminution de la friction pour les faibles ouvertures puis une importante augmentation dans le second régime pour tous les diamètres.

Cette variation peut s'expliquer en se basant sur les travaux de DeGiulia et al. [98]. Dans leur étude, ils ont simulé l'écoulement de matériaux granulaires par éléments discrets en fixant comme dans notre cas un coefficient de frottement constant. Ils obtiennent pourtant une friction macroscopique non constante, qui varie en fonction du nombre inertiel (voir Fig. 10.11b). Pour des fortes valeurs de $\Delta = P/k$ (forte pression P, faible raideur de contact k), ils trouvent une évolution suivant la loi $\mu(I)$, avec une augmentation de

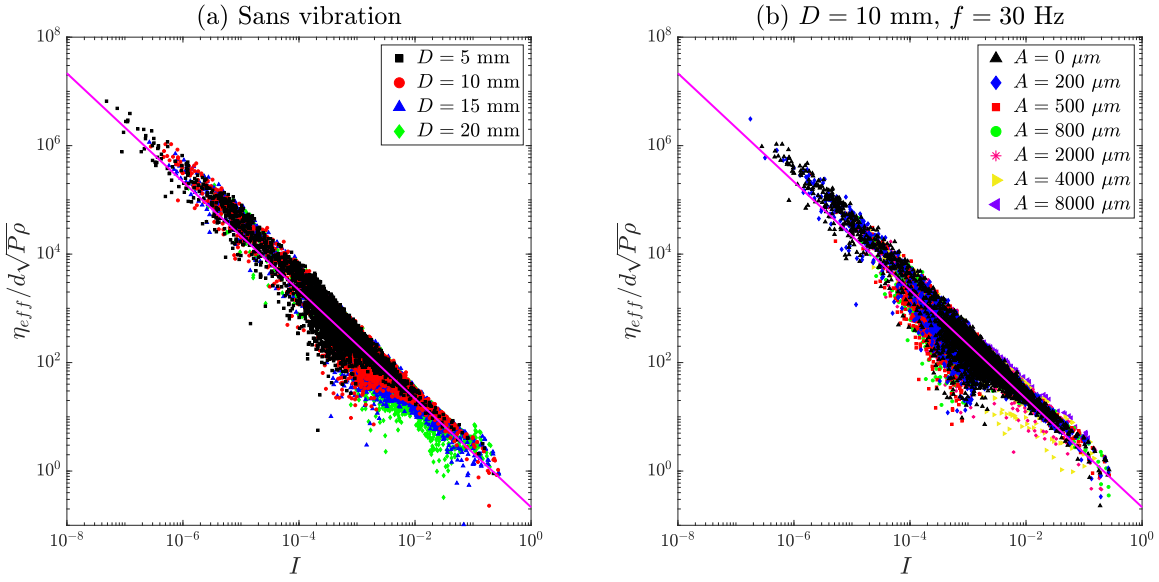


Figure 10.10 Évolution de la viscosité effective normalisée η^*_{eff} en fonction du nombre inertiel pour (a) plusieurs diamètres $D = 5-20$ mm sans vibration et pour (b) $D = 10$ mm et plusieurs amplitudes $A = 0-8000$ µm ($f = 30$ Hz). Les données s'alignent sur une même courbe (ligne magenta) suivant l'Eq. 10.11, avec $\mu_{\text{eff}} = 0.216$ sans vibration.

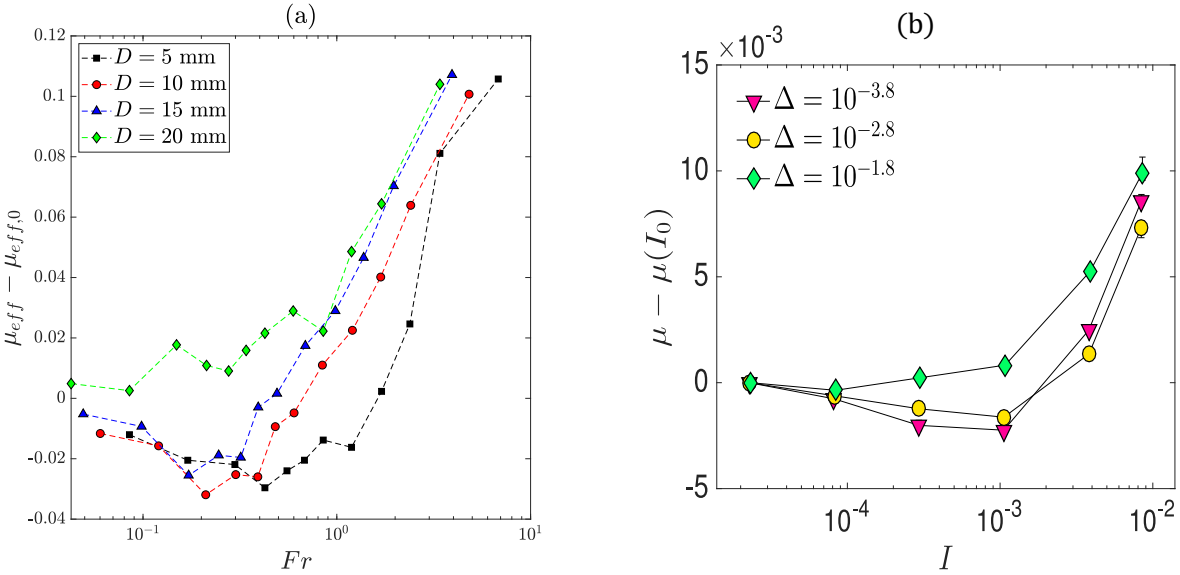


Figure 10.11 (a) Variation de coefficient de friction effectif $\mu_{\text{eff}} - \mu_{\text{eff},0}$ ($\mu_{\text{eff},0}$ correspondant au cas sans vibration) avec le nombre de Froude Fr pour $D = 10$ mm ($f = 30$ Hz). (b) Variation du coefficient de friction $\mu - \mu(I_0)$ en fonction du nombre inertiel obtenue par simulation DEM dans l'étude de DeGiulia et al. [98] pour plusieurs $\Delta = P/k$ (k étant la raideur des contacts).

la friction pour les grands nombres inertiels ($I \sim 10^2$). En revanche, pour les faibles Δ, ils observent la présence d'une diminution de friction pour $I \sim 10^{-3}$. Cette diminution de friction provient d'un *bruit mécanique* : des faibles vibrations créées lors de l'écoulement qui permettent aux particules de glisser les unes par rapport aux autres. On a alors une "lubrification" de l'écoulement et une baisse de la friction effective. On peut appliquer une correction à la loi $\mu(I)$ pour prendre en compte cet effet :

$$\mu(I) = \mu_1 . g(\chi) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + I_0/I} \tag{10.13}$$

où χ est la fraction de contacts glissants lors de l'écoulement.

Dans notre cas ce bruit mécanique est remplacé par les vibrations mécaniques, d'où la baisse de friction effective dans le premier régime. D'après DeGiulia et al. [98], cet effet est néanmoins supprimé si l'on

applique des fortes vibrations. On observe en effet une augmentation de la friction lorsque l'on passe dans le second régime ($Fr > 1$ sur Fig. 10.11a). On retrouve dans ce cas un effet dynamique similaire au cas de grands nombres inertiel. Le nombre de Froude contrôle donc la friction effective et agit comme un nombre inertiel pour les vibrations, un résultat déjà observé pour l'étalement de gouttes granulaires sous vibrations [71]. Les vibrations agissent en effet comme un cisaillement périodique de l'écoulement, créant des gradients de vitesse dans une direction différente de l'écoulement créé par la gravité. On retrouve aussi cette diminution de viscosité pour les écoulements de couette vibrés [35, 36, 37], comme présenté dans le chapitre 2 (section 2.3.2). À noter que le terme "lubrification" est plutôt employé lorsque cet effet provient d'un fluide interstitiel permettant aux grains de bouger, bien que les deux phénomènes soient liés comme montré par Hanotin et al. [35].

Un dernier point à noter est que la baisse de fraction ne dépend pas uniquement du nombre de Froude, celle-ci n'étant présente que pour les faibles diamètres D. La pression P dans le silo est en effet plus faible et la vitesse plus grande pour les grandes ouvertures, d'où un effet de lubrification par les vibrations atténué. En prenant tous ces points en considération et en se basant sur l'Eq. 10.13, on propose d'écrire la loi rhéologique pour notre écoulement sous la forme suivante :

$$\eta^*_{\text{eff}} = \frac{\mu_{\text{eff}}}{I} \quad \text{avec :} \quad \mu_{\text{eff}} = \mu_1 . g_v(D, Fr) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + c/Fr} \tag{10.14}$$

où $g_v(D, Fr)$ est la fonction décrivant la baisse de friction due à la "lubrification" et c une constante. Si on exclut la lubrification ($g_v = 1$), on peut modéliser les résultats avec $\mu_1 = 0.21$, $\mu_2 = 0.56$ et $c = 10.31$ comme présenté dans la Fig. 10.12a. Lorsque le nombre de Froude augmente on passe alors d'une dissipation d'énergie se faisant principalement par des collisions binaires à une dissipation frictionnelle. Ces résultats sont cohérents avec les deux régimes pour le débit : le premier est très affecté par les collisions entre grains alors que le deuxième dépend de la friction de l'ensemble des grains aux parois (similaire à deux solides frottants l'un contre l'autre).

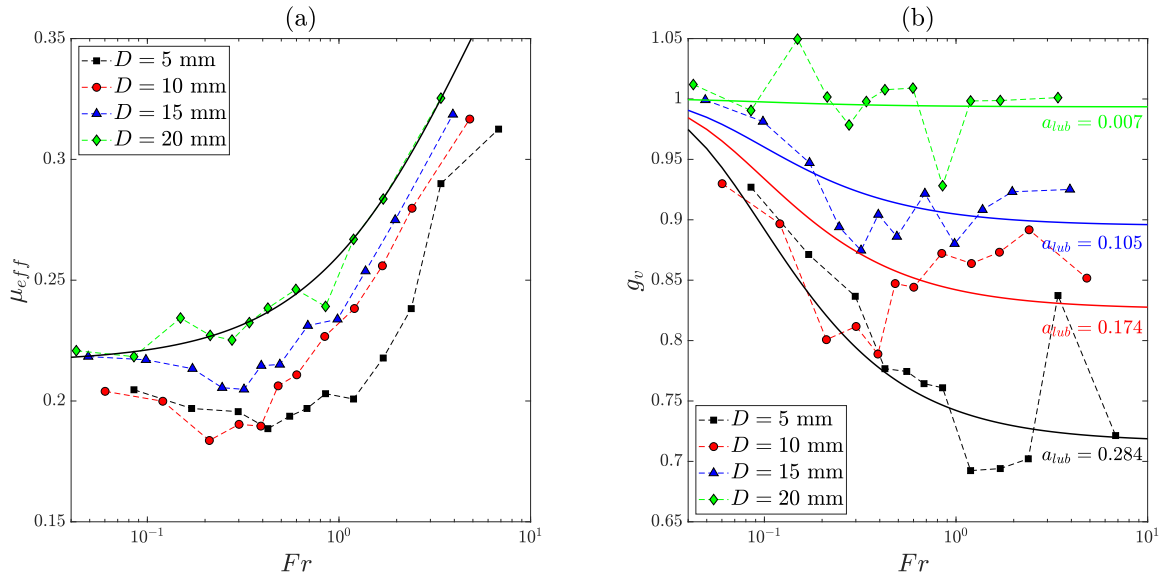


Figure 10.12 Évolution du (a) coefficient de friction effectif μ_{eff} et de (b) l'effet de "lubrification" g_v avec le nombre de Froude Fr pour plusieurs diamètres d'ouvertures D ($f = 30$ Hz). Dans (a), les résultats sont modélisés par l'Eq. 10.14 (ligne noire) dans le cas "sans lubrification" ($g_v = 1$), avec $\mu_1 = 0.21$, $\mu_2 = 0.56$ et $c = 10.31$ ($R^2 = 0.933$). Dans (b), g_v est modélisée par l'Eq. 10.15 (lignes continues), avec $b_{lub} = 9.67 \times 10^{-2}$ et plusieurs a_{lub} selon le diamètre D.

Concernant l'effet de lubrification, nous avons isolé g_v pour les différents diamètres D comme présenté dans la Fig. 10.12b. On observe alors une baisse exponentielle lorsque le nombre de Froude augmente, jusqu'à une valeur limite dépendant du diamètre d'ouverture. Par analogie à l'effet sur le débit dans le premier régime, nous proposons de modéliser cet effet par une exponentielle simple :

$$g_v = 1 - a_{lub}(D) \exp(-b_{lub}/Fr) \tag{10.15}$$

où b_{lub} est une constante et $a_{lub}(D)$ la baisse maximale de friction dépendant du diamètre d'ouverture D. Cette équation permet de suivre l'allure générale des courbes (Fig. 10.12b), même si l'on note des écarts du fait des imprécisions sur l'estimation de μ_{eff} (voir Fig. 10.10). Le coefficient a_{lub} diminue rapidement avec le diamètre, devenant quasiment nul pour $D \sim 20$ mm. Cette évolution est cohérente avec les observations dans le premier régime : pour les grands diamètres, l'écoulement est principalement contrôlé par la gravité et l'effet des vibrations est fortement réduit. Le "bruit" mécanique, et donc la lubrification, engendré par les vibrations est alors négligeable devant la vitesse d'écoulement sous gravité. À l'inverse, pour les faibles diamètres l'écoulement est très lent et quasiment bloqué, d'où une forte influence des contacts glissant créés par les vibrations.

10.3.2 Dissipation de l'énergie dans le premier régime

Comme on vient de le voir, on a une diminution de la friction effective pour les faibles nombres de Froude par un effet de lubrification. Ce résultat peut paraître contre-intuitif puisque l'on a vu précédemment que le débit diminue dans le premier régime à cause d'une dissipation d'énergie plus importante dans l'écoulement. Ceci vient du fait que cette dissipation d'énergie résulte d'une augmentation des collisions binaires entre grains.

Pour mettre en évidence ce phénomène, nous avons mesuré les trajets des particules au centre du canal ($x = 0$). Dans cette zone, la vitesse est purement verticale et la trajectoire d'un grain devrait donc être aussi théoriquement une droite verticale. En réalité, ces trajets ne sont pas des lignes droites du fait des collisions avec les autres grains et des vibrations (voir Fig. 10.13a). On a alors un trajet réel $\Delta L_{\text{réel}}$ plus grand que le trajet effectif $\Delta L_{\text{effectif}}$ (distance entre les points de départ et d'arrivée). La différence entre ces deux trajets ΔL au cours du temps peut être mesurée en suivant les particules et peut se décomposer selon les deux directions :

$$\Delta x = \Delta x_{\text{réel}} - \Delta x_{\text{effectif}} \quad \text{et} \quad \Delta z = \Delta z_{\text{réel}} - \Delta z_{\text{effectif}} \tag{10.16}$$

L'évolution de ces deux grandeurs en fonction du temps est présenté dans la Fig. 10.13b et c. Sans vibration, on trouve des faibles différences de trajet augmentant avec le temps : $\Delta x \propto \Delta z \propto t^{0.85}$. Ces différences proviennent purement des contacts entre particules et donnent lieu à un écoulement super-diffusif ($\Delta x^2 \propto t^{\beta>1}$), comme déjà observé par Choi et al. [76]. Lorsque l'on ajoute les vibrations, on observe une augmentation du trajet, en particulier selon la direction z. Ceci vient de l'augmentation du nombre de contacts mais aussi des variations de vitesses périodiques des particules du fait des vibrations (voir section 10.2.2). Tout le long du canal, les grains vont alors osciller verticalement [2], augmentant fortement leur trajet et donc dissipant de l'énergie par frottement avec les autres grains et les parois. C'est cette augmentation des trajets (et donc des contacts) qui est à l'origine de la baisse de débit malgré un frottement effectif un peu plus faible. À noter que l'on conserve $\Delta x \propto \Delta z \propto t^{0.85}$, donc l'écoulement est toujours super-diffusif mais possède un coefficient de diffusion plus important lorsque l'on augmente les vibrations.

Pour illustrer cette dissipation d'énergie, nous avons mesuré la charge dans l'écoulement (voir Fig. 10.14), dont on rappelle la formule dans notre cas :

$$\text{Charge} = P + \frac{1}{2}\rho\phi v^2 + \rho\phi g z \tag{10.17}$$

Au centre de canal ($x = 0$), on a une ligne de courant ce qui implique d'après la loi de Bernoulli que la charge se conserve qu'importe la hauteur z pour un fluide newtonien. Ce n'est pas le cas pour notre écoulement granulaire et on observe sans vibration une diminution linéaire de la charge lorsque la hauteur z diminue. La majeure partie de l'énergie issue de la pression et du potentiel de pesanteur est alors dissipée par les frottements, et seule une fraction est convertie en énergie cinétique. Dans le premier régime, la charge semble relativement constante pour $z \sim 0.08$ puis diminue fortement lorsque l'on se rapproche de l'ouverture ($z = 0$). La charge initiale (en $z = 0.1$) et cette baisse augmente pour les grandes amplitudes A. La partie relativement constante vient du fait que l'écoulement est globalement homogène

2. On rappelle que l'on retire le mouvement du silo lors de l'analyse du trajet. Ces oscillations correspondent donc bien à un mouvement dans le référentiel du silo.

à ces hauteurs (voir champs de pression et vitesse, section 10.1.2) et la charge initiale est plus grande car on apporte de l'énergie avec les vibrations. En revanche, lorsque l'on s'approche de l'ouverture, on a une forte dissipation d'énergie par contact entre grains qui est amplifiée par les vibrations comme nous venons de le voir. Cette augmentation de la dissipation est plus importante que l'augmentation de charge initiale, d'où la convergence des courbes vers le cas sans vibration. Cette perte énergie ne se fait pas uniquement sur la pression et l'on a aussi une baisse de la vitesse, d'où un débit plus faible en sortie.

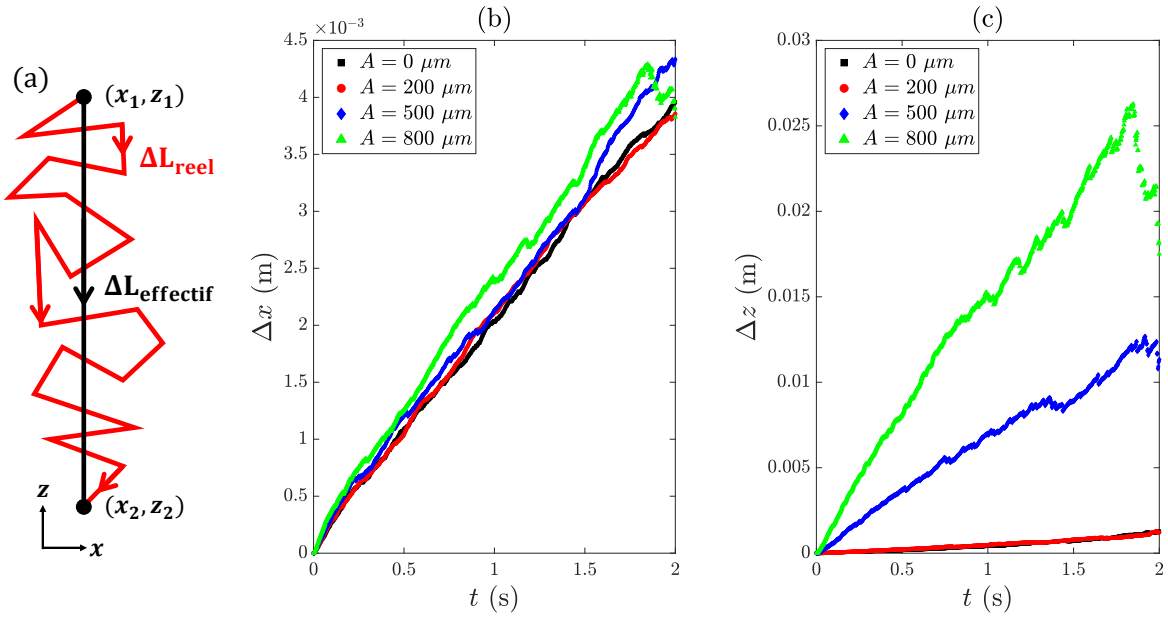


Figure 10.13 (a) Schéma du trajet réel d'un grain $\Delta L_{\text{réel}}$ dû aux contacts comparé à son trajet effectif $\Delta L_{\text{effectif}}$. (b-c) Différence de trajet décomposée selon chaque direction Δx et Δz en fonction du temps pour les grains au centre du canal (proche de $x = 0$). Pour toutes les courbes, on a : $\Delta x \propto \Delta z \propto t^{0.85}$.

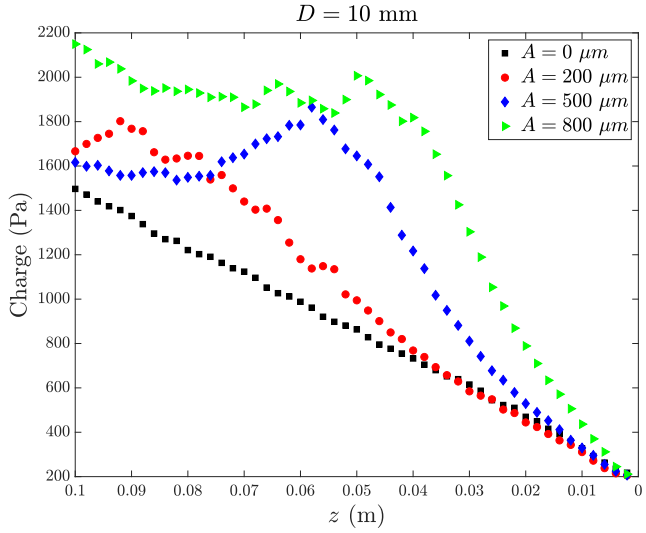


Figure 10.14 Évolution de la charge au centre du canal ($x = 0$) en fonction de la hauteur z pour $D = 10$ mm et différentes amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz).

10.3.3 Modélisation de la vitesse

Les points que nous venons d'étudier nous permettent de mieux comprendre la rhéologie de l'écoulement sous vibrations. Néanmoins, les informations que nous en avons tirées ne nous permettent pas de déterminer directement la vitesse dans le silo. Or comme nous l'avons vu, la vitesse est la grandeur d'intérêt majeur dans cet écoulement et ses variations déterminent les effets macroscopiques (le débit).

Nous allons donc ici tenter d'obtenir un modèle décrivant la vitesse dans le silo sous vibrations (limité au cas du premier régime). On se basera tout d'abord sur le *modèle cinématique*, qui a déjà été utilisé pour décrire la vidange de silo sans vibration [76, 96, 78, 99]. Ce modèle a été proposé par Nedderman et Tuzun [96] et repose sur la loi constitutive suivante :

$$v_x = -b\frac{\partial v_z}{\partial x} \tag{10.18}$$

où v_x et v_z sont les vitesses horizontale et verticale et b est une longueur de diffusion de l'ordre de la taille des grains d. Ce coefficient n'est pas constant et évolue avec la hauteur dans le silo [76, 78]. Cette relation est basée sur l'hypothèse que les particules sur les côtés vont glisser horizontalement vers le centre du canal, où l'on a une vitesse plus forte et de l'espace libre permettant au grain de s'écouler. De plus, la fraction volumique évolue peu dans l'écoulement, on peut alors utiliser la condition d'incompressibilité pour obtenir une équation pour la vitesse verticale v_z :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = b\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \tag{10.19}$$

À partir des conditions initiales et aux limites, ils en déduisent que la vitesse v_z prend la forme suivante dans le silo :

$$v_z(x,z) = -\frac{Q_s}{\sqrt{4\pi bz}}\exp(-x^2/4bz) \quad \text{avec :} \quad Q_s = \frac{Q}{W\rho\phi} \tag{10.20}$$

où Q_s est le débit volumique par unité de profondeur (en m^2/s). On peut alors aussi en déduire la vitesse horizontale v_x à partir de l'Eq. 10.18 :

$$v_x(x,z) = -\frac{x}{2z}v_z(x,z) = -\frac{Q_s.x}{4\sqrt{\pi bz^3}}\exp(-x^2/4bz) \tag{10.21}$$

Modèle sans vibration

Pour vérifier ce modèle, nous avons calculé les vitesses v_x et v_z le long de profils horizontaux à différentes hauteurs z du silo dans le cas sans vibration pour un diamètre $D = 10$ mm. Les méthodes de calcul sont les mêmes que celles décrites pour les profils radiaux dans le chapitre 6 (section 6.1) et un schéma de ces profils est présenté dans la Fig. 10.15.

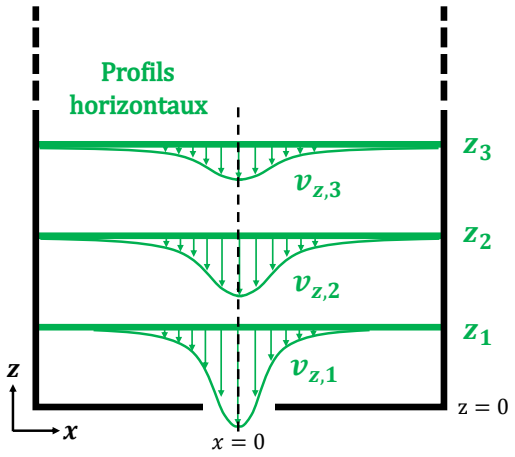


Figure 10.15 Schéma des mesures de vitesse (ici v_z) le long de profils horizontaux dans le silo pour différentes hauteurs $z = z_1 - z_3$

À partir de ces mesures, nous avons tout d'abord vérifié la condition d'incompréhensibilité dans le silo (voir Fig. 10.16). Dans le cas sans vibration et dans le premier régime, cette condition est respectée, même si l'on observe une dérive lorsque l'on est très proche de l'ouverture du fait du passage à une chute libre ($\partial v_z/\partial z > 10$ s$^-$1). En revanche, cette condition n'est plus respectée du fait des importantes compactions et décompactions périodiques ayant lieu dans le silo [74, 75, 79]. On se concentrera donc uniquement sur la modélisation du premier régime, le second étant dépendant de phénomènes temporels n'étant pas modélisables par une approche moyenne.

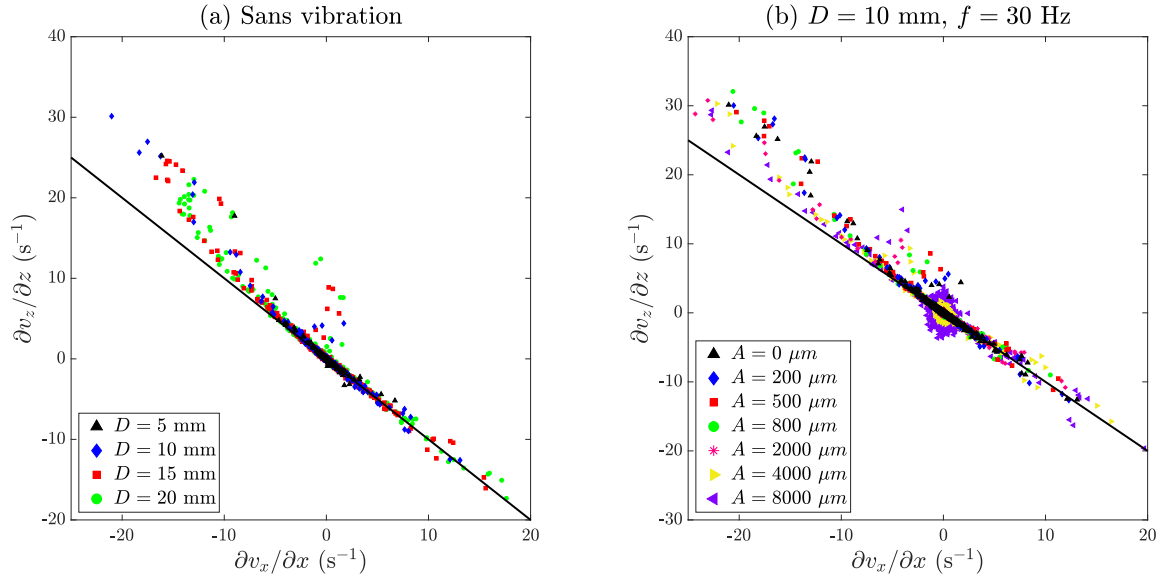


Figure 10.16 (a) Corrélation entre entre le gradient $\partial v_x/\partial x$ et le gradient $\partial v_z/\partial z$ dans le silo pour (a) différents diamètres D sans vibration et (b) différentes amplitudes A pour $D = 10$ mm et $f = 30$ Hz. La droite noire représente la condition d'incompressibilité : $\partial v_z/\partial z = -\partial v_x/\partial x$.

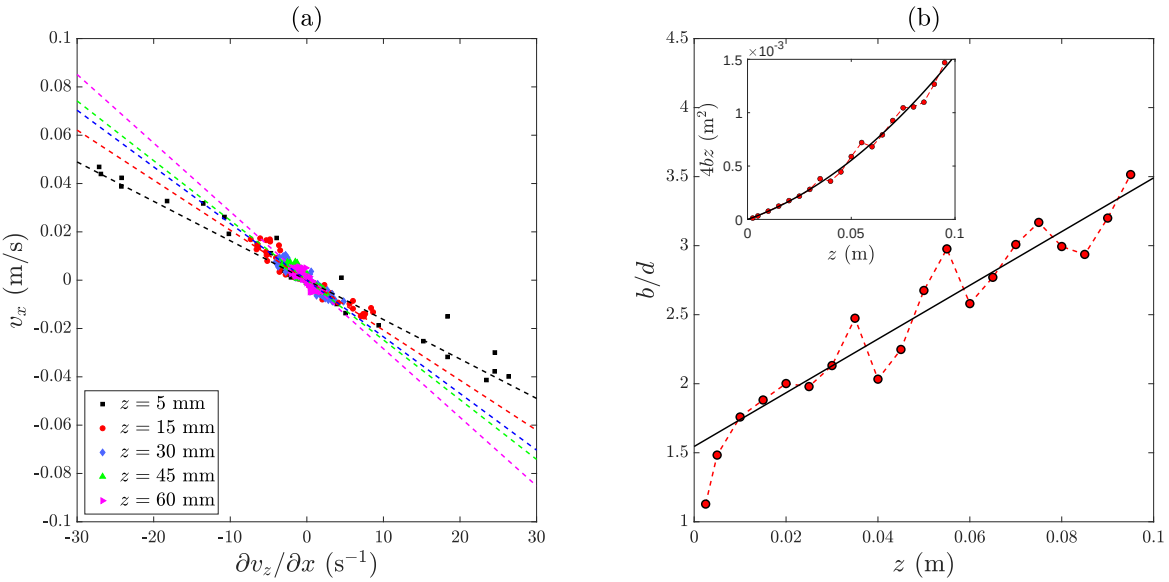


Figure 10.17 (a) Corrélation du modèle cinétique entre la vitesse v_x et le gradient $\partial v_z/\partial x$ à différentes hauteurs z dans le silo (avec $D = 10$ mm). Les courbes sont des droites de coefficient directeur b dépendant de la hauteur z comme proposé par le modèle cinématique (Eq. 10.18). (b) Évolution du coefficient normalisé b/d en fonction de la hauteur z. L'évolution est globalement linéaire et suit l'équation (ligne noire) : $b/d = 19.4z + 1.55$ ($R^2 = 0.907$). En insert : évolution de $4bz$ en fonction de z, avec en noire la modélisation précédente.

La corrélation entre la vitesse v_x et le gradient $\partial v_z/\partial x$ est présentée dans la Fig. 10.17a pour les différentes hauteurs z. On retrouve alors bien des droites dépendantes de la hauteur dans le silo z. L'évolution du coefficient b de ces droites a été mesurée en fonction de la hauteur z, comme présenté dans la Fig. 10.17b. Comme dans la littérature [76, 78], on obtient un coefficient b de l'ordre de la taille des grains d ($b/d \sim 1 - 4$) et augmentant linéairement avec la hauteur [3]. À partir de ce coefficient b et des mesures de débit Q du chapitre précédent, on peut alors calculer les vitesses v_x et v_z avec les équations Eq. 10.20 et 10.21. La comparaison entre les mesures de ces deux vitesses et les valeurs prévues par le modèle est présentée dans la Fig. 10.18 pour différentes hauteurs z dans le cas sans vibration (avec

3. On note une légère divergence de b/d lorsque l'on est très proche de la sortie. L'écoulement tend alors vers une chute libre où la condition d'incompressibilité n'est plus respectée.

$D = 10$ mm). On observe alors un excellent accord entre les valeurs mesurées et calculées avec le modèle pour les deux vitesses. Cela confirme la validité du modèle cinématique dans le cas sans vibration, qui permet donc de déterminer la vitesse en tout point tant que l'on connaît le débit Q et le coefficient b. À noter qu'il existe différents modèles permettant de rendre compte de l'évolution de ce coefficient de diffusion b ("void model" ou "spot model" par exemple [76]), un point que nous ne développerons pas ici pour nous concentrer plutôt sur l'effet des vibrations.

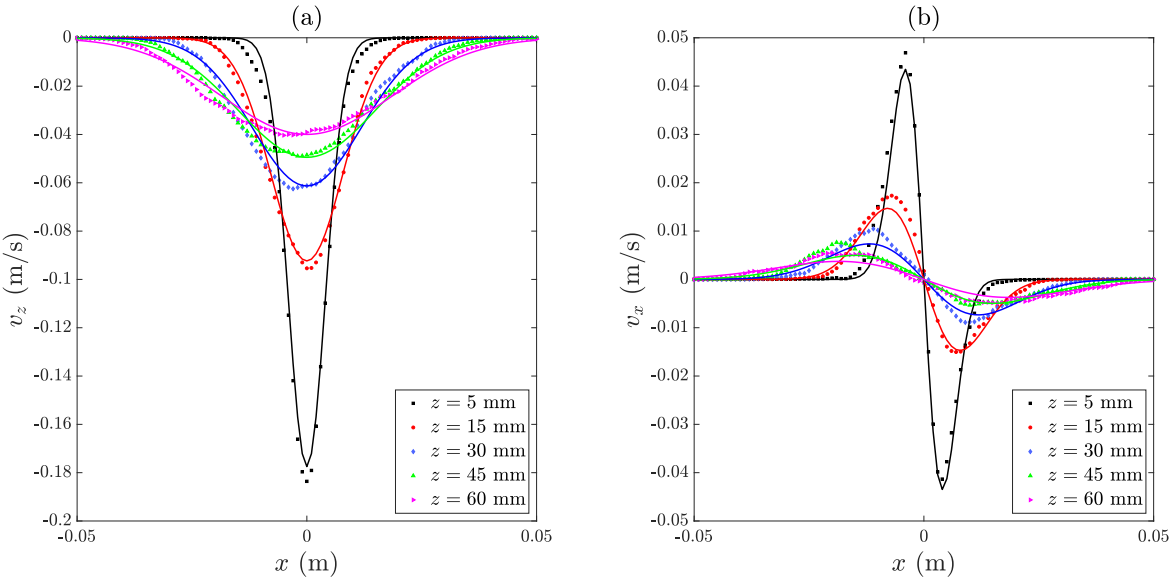


Figure 10.18 Profils horizontaux des vitesses (a) v_z et (b) v_x en fonction de x pour différentes hauteurs z ($D = 10$ mm, sans vibration). Les points correspondent aux mesures par simulation et les lignes aux prédictions du modèle cinématique (Eq. 10.20 et 10.21).

Modèle dans le premier régime

Forts de ces résultats, nous avons tenté de les étendre au cas de la vidange sous vibrations (premier régime uniquement). Nous avons donc mesuré les vitesses v_x et v_z le long d'un profil horizontal en $z = 10$ mm pour différentes amplitudes de vibration $A = 0 - 800$ µm ($D = 10$ mm et $f = 30$ Hz). La corrélation entre v_x et le gradient $\partial v_z/\partial x$ est présentée dans la Fig. 10.19. On observe alors un changement de comportement lorsqu'on ajoute des vibrations : on n'a plus une droite mais évolution similaire à une fonction seuil. Cette forme provient de la mise en mouvement des zones mortes par les vibrations. Dans ces zones, la vitesse horizontale évolue alors que le gradient $\partial v_z/\partial x$ reste quasiment nul. Ce phénomène est particulièrement visible sur les profils de vitesses, présentés sur les Fig. 10.20a et b. Ces profils gardent une forme similaire au cas sans vibration mais on note en plus :

- Une augmentation générale de la vitesse horizontale v_x, en particulier dans les zones mortes.
- Une augmentation de la vitesse verticale v_z dans les zones mortes.
- Une diminution du pic de vitesse verticale v_z dans le canal.

Ces deux résultats sont parfaitement cohérents avec l'homogénéisation de l'écoulement observé tout au long de ce chapitre, qui provient de la mise en mouvement des zones et de l'augmentation de la dissipation d'énergie dans le canal. Dans ce cas, le modèle cinématique ne permet plus de décrire les vitesses dans le silo. Ce résultat est d'autant plus apparent lorsque qu'on étudie les profils en échelle semi-log, comme présenté sur les Fig. 10.20c et d. On observe alors la présence de queues exponentielles dans les zones mortes lorsque l'on ajoute des vibrations. Dans le canal, on retrouve en revanche bien une exponentielle similaire au cas sans vibration (bien que de norme plus faible pour v_z).

Compte tenu de ces observations et des résultats obtenus pour le débit et l'écoulement dans le silo, nous proposons de décrire la vitesse verticale sous la forme suivante :

$$v_z(x, z, Fr) = v_{z,0}(x, z) + \Delta v_z(x, z, Fr) \quad \Rightarrow \quad \Delta v_z = v_z - v_{z,0} \tag{10.22}$$

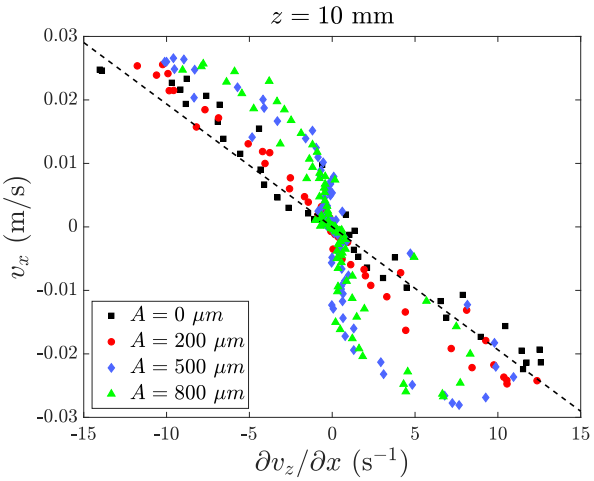


Figure 10.19 Corrélation du modèle cinématique entre la vitesse v_x et le gradient $\partial v_z/\partial x$ à $z = 10$ mm pour différentes amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz et $D = 10$ mm). La loi constitutive du modèle cinématique (Eq. 10.18) n'est plus respectée avec l'ajout de vibrations.

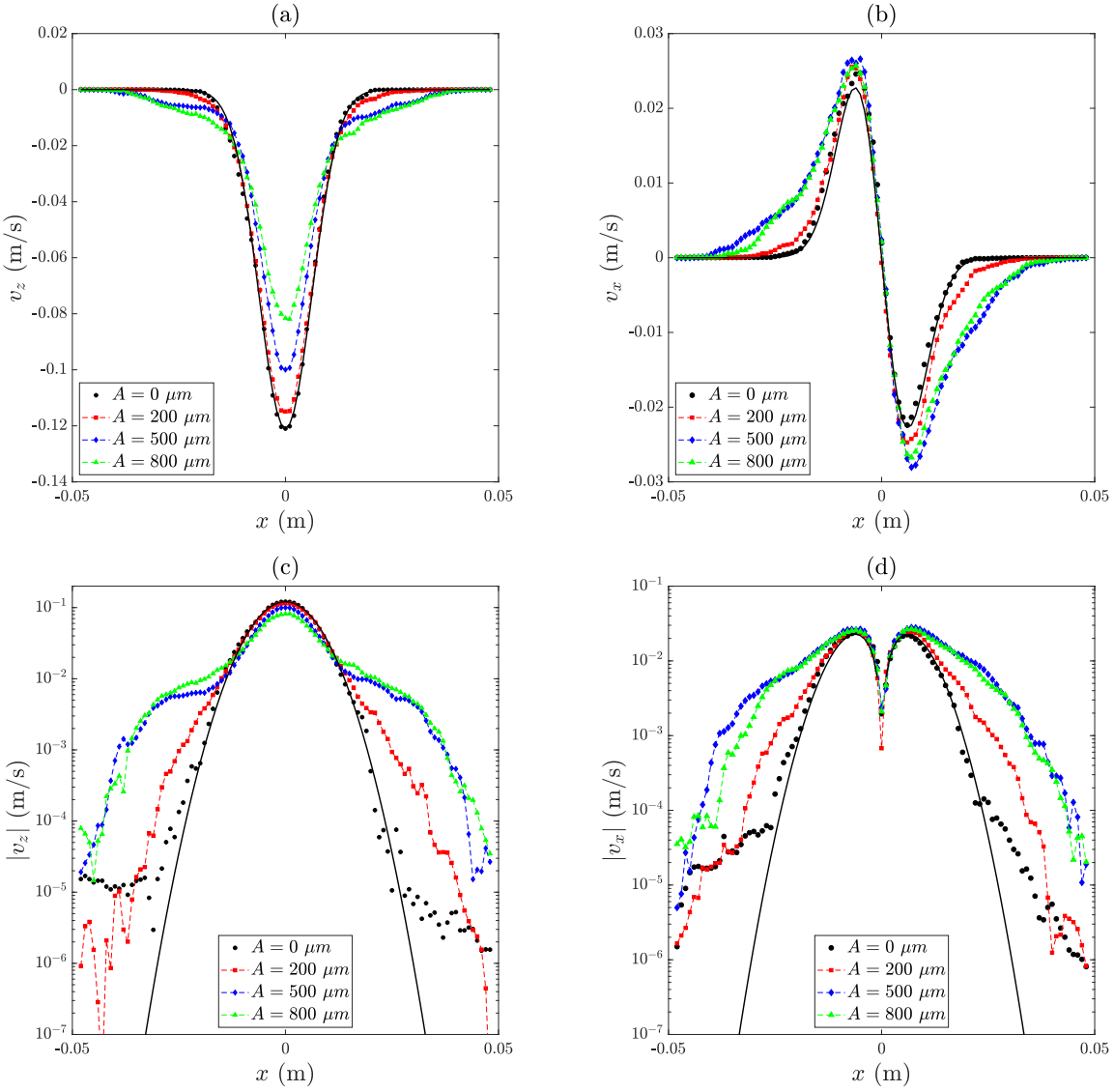


Figure 10.20 Profils horizontaux des vitesses (a) v_z et (b) v_x en fonction de x pour une hauteur $z = 10$ mm et plusieurs amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz, $D = 10$ mm). (c,d) Valeurs absolues $|v_z|$ et $|v_x|$ en échelle semi-log dans les mêmes cas. Seul le cas sans vibration est modélisable par le modèle cinétique (ligne noire).

où $v_{z,0}$ est la vitesse sans vibration et Δv la fonction décrivant la perturbation de vitesse due aux vibrations. D'après les profils en semi-log (Fig. 10.20c et d), cette variation devrait être exponentielle et engendre une augmentation de la vitesse dans les zones mortes mais aussi une diminution de vitesse dans le canal. Nous avons mesuré cette variation pour différentes amplitudes de vibration A et hauteurs dans le silo z, comme présenté sur la Fig. 10.21. On observe alors que la forme de la variation Δv_z est similaire à celle du gradient de vitesse $\partial v_z/\partial z$ dans le cas sans vibration. À partir du modèle cinématique pour v_z, on peut donc en déduire que Δv_z peut être modélisée par une fonction de la forme suivante :

$$\Delta v_z = a_v(c_1 - c_2 x^2)\exp(-x^2/b_v) \tag{10.23}$$

où a_v, c_1 et c_2 sont des paramètres ajustables et b_v le coefficient de diffusion des vibrations dans le silo. Cette équation permet en effet de modéliser les variations de vitesse, comme on peut le voir sur la Fig. 10.21. Concernant les paramètres du modèle, on observe les comportements suivants :

- Le paramètre a_v augmente linéairement avec l'amplitude des vibrations. Il ne semble en revanche pas dépendre de la hauteur z.
- Le coefficient de diffusion b_v semble indépendant de l'amplitude des vibrations A. Par contre, il augmente avec la hauteur dans le silo z.
- Les paramètres c_1 et c_2 ne dépendent pas de l'amplitude A et diminuent avec la hauteur du silo z.

Pour mieux observer ces comportements, nous avons tracé l'évolution de ces différents paramètres, en fonction de A pour a_v et en fonction de z pour les autres (voir Fig. 10.22). On retrouve alors bien une évolution linéaire de a_v avec l'amplitude A des vibrations dans le premier régime (on note un décrochage lorsque l'on passe dans le second régime, pour $A \gtrsim 1000$ µm). On peut aussi remarquer que b_v évolue de manière semblable à la diffusion dans le cas sans vibration (voir insert Fig. 10.17b). Ces deux paramètres peuvent donc être décrits par des polynômes sous les formes suivantes :

$$a_v = \alpha A \quad \text{et} \quad b_v = \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3 \tag{10.24}$$

où α, β_1, β_2 et β_3 sont des constantes. Comme on peut le voir sur les Fig. 10.22a et b, ces polynômes permettent de rationaliser nos résultats.

Compte tenu de ces observations, la variation Δv_z semble donc proportionnelle à un gradient selon z issu des vibrations. Ce résultat est cohérent avec les observations sur le débit et dans le silo : les vibrations vont venir déformer l'écoulement, permettant aux zones mortes de s'écouler par réorganisation tandis que les grains dans le canal vont parcourir un chemin plus et subir plus de collisions. Au vu des similarités entre ce gradient et le gradient $\partial v_{z,0}/\partial z$, on peut supposer que la forme de Δv_z est exactement la même, mais avec des valeurs différentes pour les constantes. Cela signifie qu'il devrait exister une "vitesse" des vibrations $v_{z,vib}$ se propageant dans le silo et donnant lieu à ce gradient. Par analogie à la solution du modèle cinématique sans vibration, on propose d'écrire cette vitesse sous la forme :

$$v_{z,vib} = -\frac{A\omega L}{\sqrt{b_v}}\exp(-x^2/b_v) \tag{10.25}$$

où L est la largeur du silo. De cette équation, on peut en déduire le gradient $\partial v_{z,vib}/\partial z$, qui est proportionnel à la variation Δv_z :

$$\Delta v_z = \lambda\frac{\partial v_{vib}}{\partial z} = \lambda A\omega L\left(\frac{b_v'}{2b_v^{3/2}} - \frac{b_v'}{b_v^{5/2}}x^2\right)\exp(-x^2/b_v) \tag{10.26}$$

où λ est une constante, vraisemblablement une longueur caractéristique de la déformation engendrée par les vibrations. On obtient donc :

$$a_v = \lambda A\omega L \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a_v}{A\omega L} = \frac{\alpha}{\omega L} \tag{10.27}$$

$$c_1 = \frac{b_v'}{2b_v^{3/2}} = \frac{2\beta_1 z + \beta_2}{2(\beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3)^{3/2}} \tag{10.28}$$

$$c_2 = \frac{b_v'}{b_v^{5/2}} = \frac{2\beta_1 z + \beta_2}{(\beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3)^{5/2}} \tag{10.29}$$

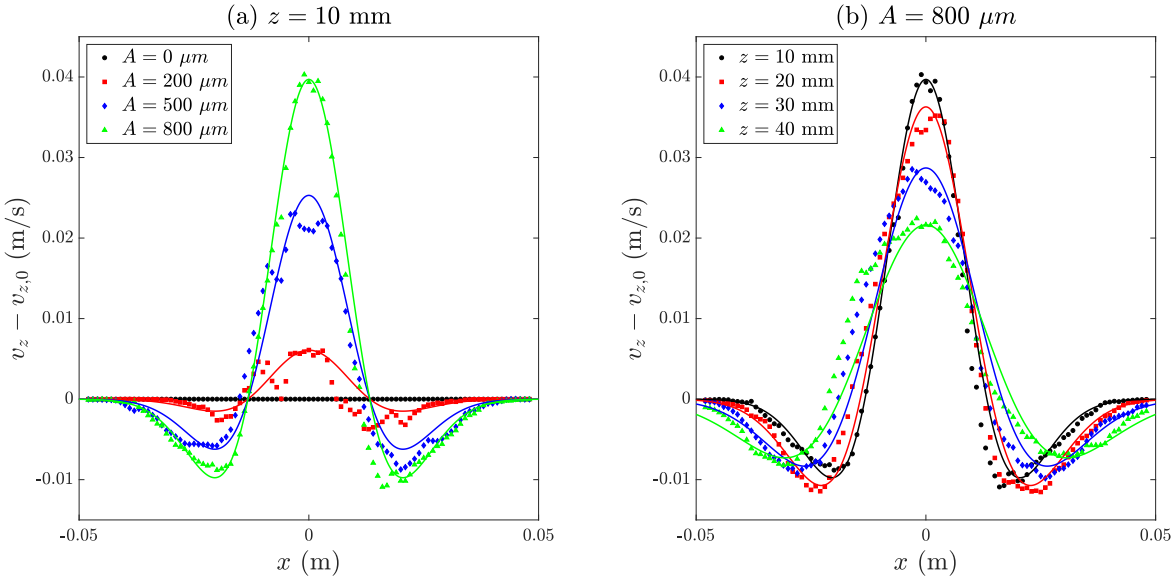


Figure 10.21 Profils de variation de vitesse $v_z - v_{z,0}$ pour (a) différentes amplitudes $A = 0 - 800$ µm à $z = 10$ mm et pour (b) différentes hauteurs $z = 10 - 40$ mm à $A = 800$ µm ($D = 10$ mm et $f = 30$ Hz dans tous les cas). Les données sont modélisées par l'Eq. 10.23 dans tous les cas (lignes continues).

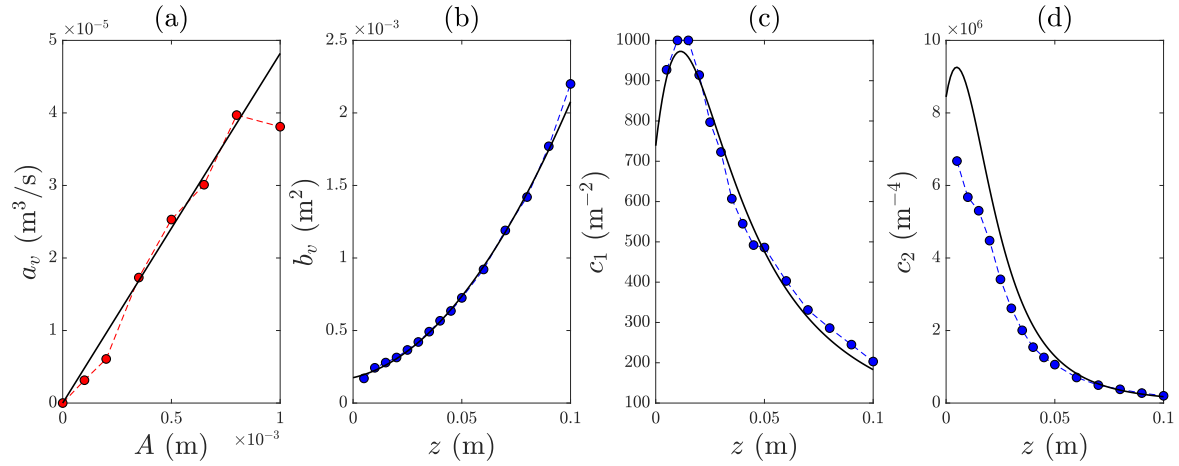


Figure 10.22 Évolution des paramètres de la modélisation de Δv_z (Eq. 10.23) en fonction de l'amplitude A pour (a) a_v et de la hauteur z pour (b) b_v, (c) c_1 et (d) c_2 ($D = 10$ mm, $f = 30$ Hz). (a,b) Les paramètres a_v et b_v sont modélisés par les polynômes de l'Eq. 10.24 (lignes noires), avec $\alpha = 4.82 \times 10^{-2}$ ($R^2 = 0.984$) et $\beta_1 = 4.82 \times 10^{-2}$, $\beta_1 = 4.82 \times 10^{-2}$ et $\beta_1 = 4.82 \times 10^{-2}$ ($R^2 = 0.998$). (c,d) Les paramètres c_1 et c_2 sont aussi calculés à partir des Eq. 10.28 et 10.29 (lignes noires).

Pour vérifier cette modélisation, nous avons tracé sur les Fig. 10.22c et d les valeurs calculées à partir de ces équations pour c_1 et c_2 (lignes noires). On obtient un bon accord entre les valeurs estimées et calculées, en particulier pour c_1. On note en revanche des écarts pour c_2 lorsque l'on se rapproche de l'ouverture, bien que l'allure des courbes corresponde. Ces écarts proviennent de la difficulté à estimer précisément ce paramètre, du fait des imperfections sur les profils (dissymétrie, incertitudes sur les mesures) et du grand nombre de paramètres dans le modèle.

Au final, on peut donc écrire la vitesse selon z dans tout le silo sous la forme :

$$v_z(x, z, A\omega) = v_{z,0}(x, z) + \lambda \frac{\partial v_{z,vib}}{\partial z}(x, z, A\omega) \tag{10.30}$$

Avec :

$$v_{z,0}(x, z) = -\frac{Q_s}{\sqrt{\pi b_0}} \exp(-x^2/b_0) \quad , \quad b_0 = 4bz = \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z \tag{10.31}$$

et :

$$v_{z,vib}(x,z,A\omega) = -\frac{A\omega S}{\sqrt{b_v}}\exp(-x^2/b_v) \quad , \quad b_v = \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3 \tag{10.32}$$

où λ, α_1, α_2, β_1, β_2 et β_3 sont des constantes. La comparaison entre ce modèle et les données de simulations et d'expériences est présentée sur la Fig. 10.23 pour différents cas. On peut noter quelques écarts en expérience près des bords du silo, issus de la difficulté à mesurer avec précision la vitesse dans ces zones [4]. Si l'on excepte ces écarts, le modèle permet bien de rendre compte des profils de vitesse verticale v_z dans le silo vibré. Son interprétation physique est aussi cohérente : lorsque les vibrations se propagent dans le silo, elles donnent lieu à un gradient de vitesse qui déforme l'écoulement. Cette déformation permet aux grains de se réorganiser et s'écouler dans les zones mortes, tandis qu'elle vient augmenter le trajet et les collisions dans le canal. La vitesse totale (et donc le débit) résulte alors de la somme entre la vitesse sans vibration et ce gradient multiplié par une longueur caractéristique.

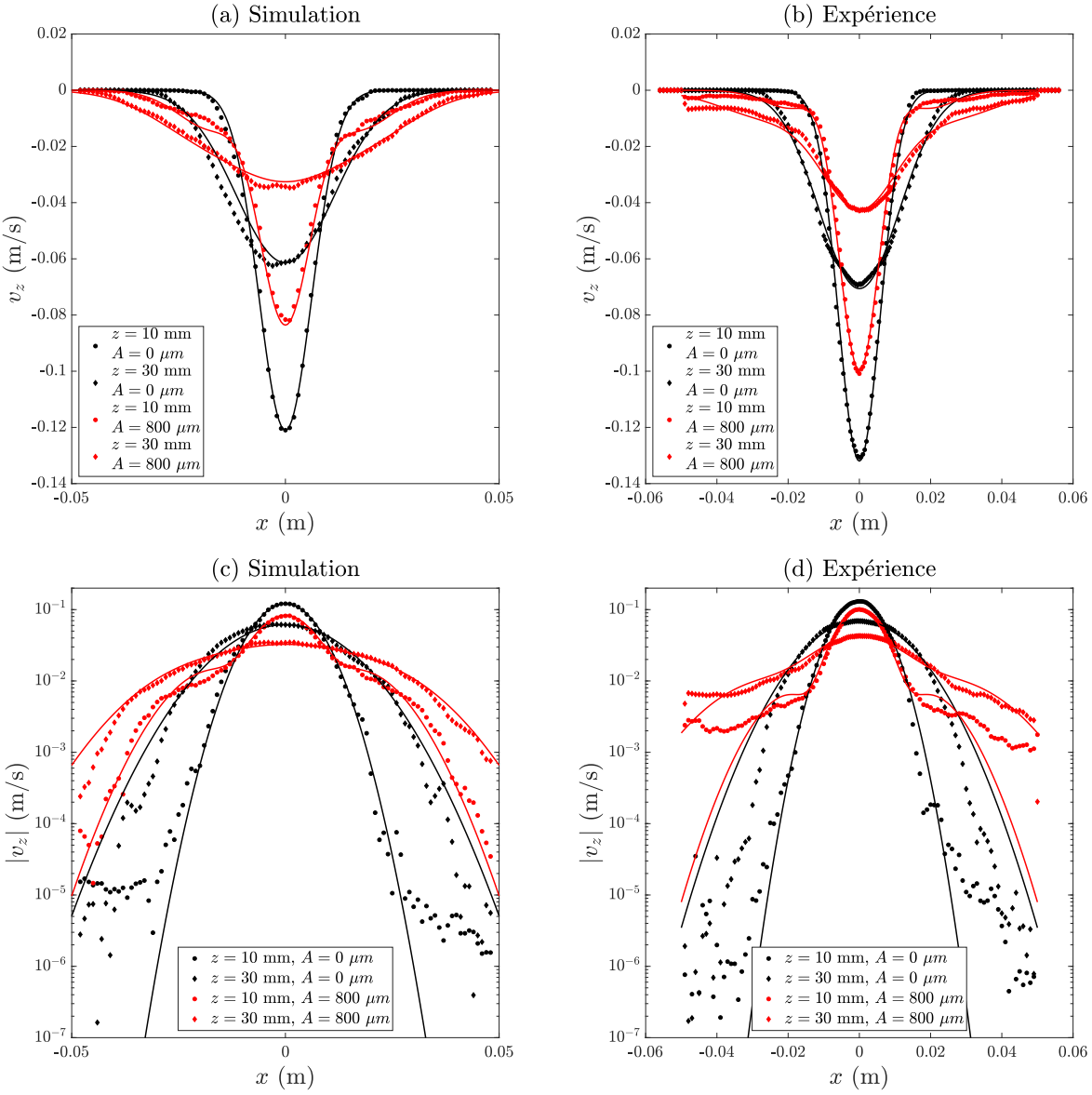


Figure 10.23 Profils horizontaux de (a,b) v_z et (c,d) $|v_z|$ (échelle semi-log) en fonction de x pour deux hauteurs $z = 10 - 30$ mm et deux amplitudes $A = 0 - 800$ µm ($f = 30$ Hz, $D = 10$ mm) en expérience et simulation. Les données sont dans chaque cas modélisées par l'Eq. 10.30 (lignes continues).

4. On mesure la vitesse absolue avec la caméra, puis l'on retire la vitesse du silo pour obtenir cette vitesse relative. Dans les zones mortes, la vitesse relative est très faible devant celle du silo : le bruit associé au mouvement du silo (on n'a jamais un sinus parfait contrairement à la simulation) n'est donc pas complètement négligeable devant ces vitesses.

Problèmes ouverts

Le modèle que nous venons de présenter permet de décrire la vitesse verticale v_z dans tout le silo pour les vibrations dans le premier régime. Il reste néanmoins deux points à résoudre pour avoir une description complète de la vitesse dans le silo :

- Déterminer la forme de la vitesse horizontale v_x. Celle-ci n'évolue plus simplement avec le gradient $\partial v_z/\partial x$ comme nous l'avons vu (voir Fig. 10.19). De plus, l'effet des vibrations sur v_x est plus complexe que dans le cas de v_z, avec une dépendance plus forte avec la hauteur dans le silo (on note en particulier un changement de signe sur la Fig. 10.24 de l'effet lorsque l'on monte dans le silo).
- Déterminer la loi constitutive régissant ces vitesses dans le premier régime. Le modèle que nous avons développé est en effet issu d'une approche semi-empirique. Obtenir la loi constitutive permettrait de retrouver ce résultat de manière théorique en résolvant les équations du système tout en décrivant l'écoulement du point de vue fondamental.

La résolution de ces problèmes demande néanmoins une étude plus approfondie, qui sort malheureusement du cadre temporel de cette thèse.

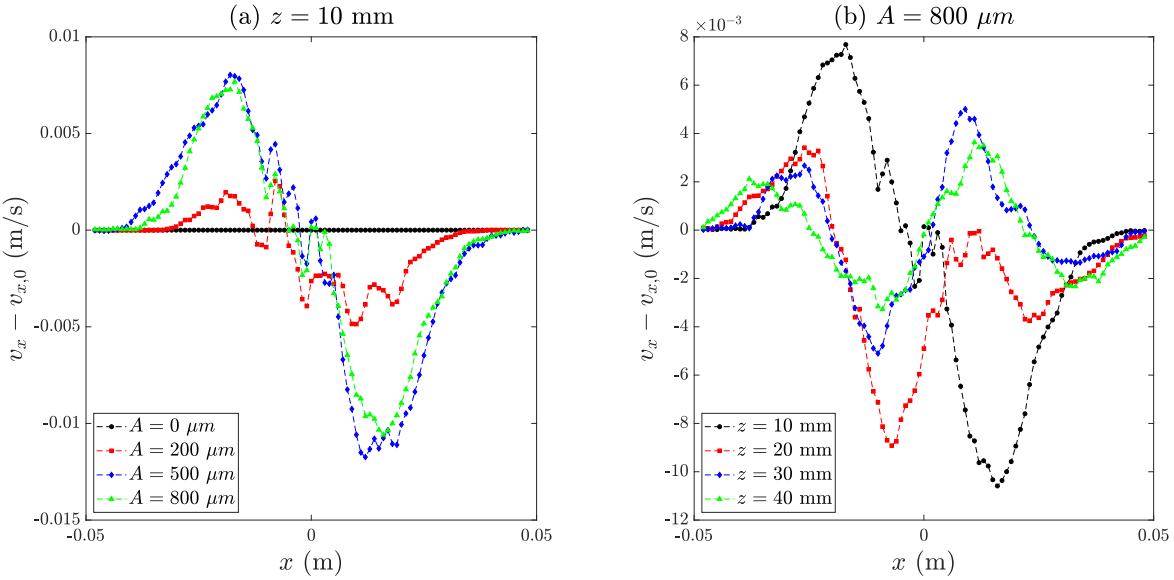


Figure 10.24 Profils de variation de vitesse $v_x - v_{x,0}$ pour (a) différentes amplitudes $A = 0 - 800$ µm à $z = 10$ mm et pour (b) différentes hauteurs $z = 10 - 40$ mm à $A = 800$ µm ($D = 10$ mm et $f = 30$ Hz dans tous les cas).

Une piste intéressante pour les résoudre se trouve potentiellement dans les effets temporels des vibrations. Les résultats que nous venons de présenter sont en effet issus de moyennes temporelles, qui peuvent cacher des comportements plus complexes. Pour illustrer ce point, nous avons tracé sur la Fig. 10.25 l'évolution de la vitesse v_z et de Δv_z à différents instants d'un cycle de vibrations. On constate alors bien des comportements distincts au cours du temps. On note en particulier deux comportements, entre lesquelles l'écoulement semble osciller :

- Un ralentissement des grains dans le silo ($t = T/4$), causé par la remontée du silo ($t = T/4$). Ceci semble affecter particulièrement les grains dans le canal, qui sont pratiquement à l'arrêt, voire remonte le long des bords du canal (les grains dans les zones mortes sont coincés entre les parois et les grains au-dessus et suivent donc le mouvement du silo, d'où un mouvement relatif nul).
- Une accélération de la sortie des grains dans le silo ($t = 3T/4$), causé par la création d'espace libre du fait de la descente du silo et du mouvement précédent des grains vers le haut. Ce comportement concerne aussi bien le canal que les zones mortes.

Le gradient que nous avons modélisé est donc la résultante de ces effets temporels ("positifs" en moyenne pour les zones mortes mais "négatifs" pour le canal par rapport au sens de l'écoulement). Comprendre ces effets pourrait donc expliquer l'effet moyen d'un point de vue plus fondamental et permettre de résoudre les problèmes restants.

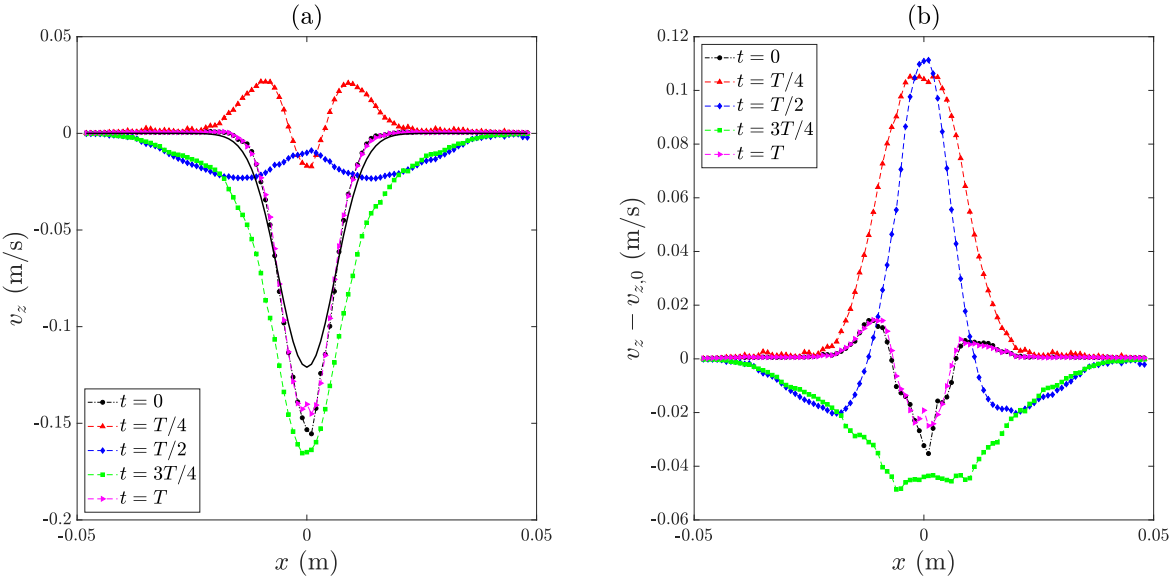


Figure 10.25 Profils de vitesse (a) v_z et (b) variation de vitesse $v_z - v_{z,0}$ à différents instants d'un cycle de vibration de période T pour $z = 10$ mm et $A = 800$ µm ($D = 10$ mm et $f = 30$ Hz). Noter que chaque profil est obtenu par une moyenne sur tous les cycles de vibration. La ligne noire sur (a) représente la vitesse sans vibration $v_{z,0}$.

10.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement la dynamique et la rhéologie locales de l'écoulement lors de la vidange du silo quasi-2D pour différentes amplitudes des vibrations $A = 0 - 8000$ µm (à $f = 30$ Hz). L'écoulement dans le silo et en sortie montre alors les mêmes comportements que ceux observés en expérience : un écoulement très canalisé sans vibration, un écoulement plus homogène mais aussi plus lent dans le premier régime et une re-canalisation dans le second régime du fait de la dynamique de jets. Nous avons vu que ces comportements se reportent aussi sur la pression, le nombre inertiel et la viscosité efficace de l'écoulement. À partir de ces champs, nous avons proposé une nouvelle loi rhéologique pour la viscosité efficace, dépendant du nombre de Froude Fr et basée sur la loi $\mu(I)$:

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{d\sqrt{P\rho}} = \frac{\mu_{\text{eff}}}{I} \qquad \text{avec :} \quad \mu_{\text{eff}} = \mu_1 . g_v(D, Fr) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + c/Fr} \tag{10.33}$$

où c une constante et $g_v(D, Fr)$ est une fonction décrivant la baisse de friction due à une lubrification de l'écoulement par les vibrations, donnée par :

$$g_v = 1 - a_{lub}(D) \exp(-b_{lub}/Fr) \tag{10.34}$$

avec b_{lub} une constante et $a_{lub}(D)$ un coefficient diminuant lorsque le diamètre augmente, dont l'évolution précise reste à déterminer. Cette loi ne rend néanmoins pas compte de l'importante dissipation d'énergie dans le canal pendant le premier régime des vibrations. Cette dissipation provient en effet d'une augmentation des collisions et du trajet des particules, qui oscillent verticalement et périodiquement en s'approchant de l'ouverture. Pour pouvoir décrire l'écoulement, nous nous sommes donc penché sur le modèle cinématique [96]. Celui-ci permet de modéliser l'écoulement dans le cas sans vibration mais ne fonctionne plus dans le premier régime. Nous avons alors proposé une correction pour modéliser la vitesse verticale v_z avec vibration :

$$v_z(x, z, A\omega) = v_{z,0}(x, z) + \lambda \frac{\partial v_{z,vib}}{\partial z}(x, z, A\omega) \tag{10.35}$$

avec $v_{z,0}$ la vitesse sans vibration issue du modèle cinématique :

$$v_{z,0}(x, z) = -\frac{Q_s}{\sqrt{\pi b_0}} \exp(-x^2/b_0) \quad , \quad b_0 = 4bz = \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z \tag{10.36}$$

et $v_{z,vib}$ la vitesse induite par les vibrations, donnée par :

$$v_{z,vib}(x, z, A\omega) = -\frac{A\omega S}{\sqrt{b_v}} \exp(-x^2/b_v) \quad , \quad b_v = \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3 \tag{10.37}$$

où λ, α_1, α_2, β_1, β_2 et β_3 sont des constantes. Cette vitesse des vibrations donne lieu à un gradient qui déforme l'écoulement, engendrant des réorganisations dans les zones mortes et une plus forte dissipation dans le canal. Des questions restent néanmoins en suspens, en particulier la forme de la vitesse horizontale v_x et la loi constitutive régissant ces vitesses qui demandent une étude plus poussée. La connaissance de cette loi, couplé à celle de la viscosité effective, pourrait permettre de résoudre ce type d'écoulement en utilisant des simulations par mécanique des fluides numérique (CFD), bien plus rapides que la DEM, voire de résoudre théoriquement l'écoulement.

Conclusion générale et perspectives

Durant cette thèse, nous avons cherché à comprendre et décrire la vidange de milieux granulaires modèles dans un silo en présence de vibrations mécaniques. Ce travail s'inscrit dans la continuité de nombreuses études sur la rhéologie des écoulements granulaires vibrés et la vidange de silo granulaire. L'objectif principal de cette thèse était d'unifier les nombreux résultats empiriques sur le sujet et de décrire la rhéologie sous-jacente à l'origine des phénomènes rencontrés.

Pour ce faire, nous avons développé un dispositif expérimental permettant de suivre l'écoulement dans un silo quasi-2D vibré verticalement du point de vue macroscopique (débit du silo avec une balance dynamique) et microscopique (mouvement des grains par tracking avec une caméra rapide). Ce dispositif nous a permis d'étudier l'impact de différents paramètres : les vibrations appliquées (amplitude A et fréquence f), la géométrie de l'ouverture (diamètre D et angle θ) et les propriétés des grains (taille d, masse volumique ρ, cohésion). Des simulations numériques par éléments discrets (DEM) ont aussi été réalisées pour étudier des cas inaccessibles en expérience (gravité différente, vibrations extrêmes, friction différente) et obtenir des informations sur l'écoulement difficilement mesurables (contraintes sur les particules).

Résultats macroscopiques et loi de vidange

Du point de vue macroscopique, nous avons mesuré le débit du silo en fonction des différents paramètres du problème. Dans le cas sans vibrations, on retrouve les résultats de la littérature aussi bien en expérience qu'en simulation : le débit est constant lors de la vidange et suit une correction de la loi de Beverloo [44] développée par Benyamine et al. [47] :

$$Q_0 = C\rho\phi_0\sqrt{g}WD^{3/2} \qquad \text{avec :} \quad \phi_0 = \phi_b\left(1-\alpha\exp(-\beta D/d\cos\theta)\right) \tag{11.1}$$

Lorsque l'on ajoute des vibrations, on voit l'apparition de deux régimes :

- Un premier régime pour lequel le débit diminue avec le nombre de nombre de Froude des vibrations $Fr = A\omega/\sqrt{gD}$. Cette baisse de débit est due à l'augmentation des collisions dans l'écoulement. Ce phénomène provient à la fois d'une augmentation de compétitivité à l'ouverture par la mise en mouvement des zones mortes de l'écoulement (côté du silo) et d'une augmentation du trajet et des collisions dans le canal (centre du silo). Le nombre de Froude permet alors de rendre compte de l'énergie cinétique apportée par les vibrations par rapport à celle créée par la gravité, les deux s'opposant périodiquement. Outre le nombre de Froude, cet effet est dépendant de la friction entre les grains. Les autres paramètres testés n'ont en revanche pas d'impact notable (angle θ, friction aux parois, masse volumique ρ et taille de grains d).
- Un second régime pour lequel le débit augmente avec le paramètre $Fr\Omega^{1/2}$, avec $\Omega = \omega/\sqrt{g/d}$ la fréquence relative des vibrations. L'augmentation provient d'une dynamique de jets denses et périodiques créés par la propagation d'onde dans le silo à la fréquence des vibrations. Plus exactement, le décalage entre ces ondes et le mouvement du silo du fait de l'inertie des grains engendre une expulsion en sortie lorsque le silo remonte (les grains continuant de descendre, ceux à la sortie sont compressés par ceux au-dessus et expulsés). Le nombre de Froude permet ici de tenir compte de l'énergie cinétique des grains fournie par les vibrations, la gravité n'étant plus le moteur principal de l'écoulement. La fréquence relative permet quant à elle de tenir compte de la fréquence des jets et de la propagation des ondes. La propagation de ces ondes est fortement affectée par les frottements aux parois et le passage vers un écoulement 3D. Le second régime apparaîtra en effet bien plus tard pour un écoulement 3D et/ou une friction aux parois élevée du fait de la forte dissipation d'énergie. Parmi les autres paramètres testés, seul l'angle d'ouverture possède un impact sur le second régime. Augmenter l'angle réduit en effet l'énergie des vibrations transmise aux grains par les parois basses et retarde le second régime.

Les effets de ces deux régimes peuvent être décrits par deux fonctions exponentielles simples et indépendantes $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Finalement, l'effet complet des vibrations sur le débit est alors obtenu en

additionnant ces deux effets et suit la loi suivante :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 + \mathcal{F}_1(Fr) + \mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2}\cos\theta) \tag{11.2}$$

Avec :

$$\mathcal{F}_1 = -a_1 \exp\left(\frac{-b_1}{Fr}\right) \quad \text{et :} \quad \mathcal{F}_2 = a_2 \exp\left(\frac{-b_2}{Fr\Omega^{1/2}\cos\theta}\right) \tag{11.3}$$

où a_1, b_1, a_2 et b_2 sont des constantes dépendantes des coefficients de friction entre les grains et aux parois.

Résultats microscopiques et loi rhéologique

Du point de vue microscopique, nous avons suivi l'écoulement des particules pour différents diamètres d'ouverture et amplitudes des vibrations. Tout comme pour les mesures de débit, on obtient les mêmes résultats en simulation et en expérience. L'analyse des trajectoires des particules nous a permis de remonter aux champs et profils des différentes grandeurs dans l'écoulement. Comme pour le débit, l'écoulement peut être distingué selon trois cas :

- Sans vibration : l'écoulement est très canalisé et l'on a d'importantes zones mortes sur les côtés du silo. Cet écoulement est aussi stationnaire (quasiment pas de variations temporelles) et quasiment incompressible (la fraction volumique varie très peu). Les résultats concordent avec la littérature et on peut le décrire avec la loi $\mu(I)$ [24, 97] et le modèle cinématique [96].
- Dans le premier régime : l'écoulement est plus homogène du fait de la mise en mouvement des zones mortes et du ralentissement dans le canal. L'écoulement reste en moyenne incompressible mais on constate d'importantes variations de vitesse, en particulier en sortie. Ces variations sont périodiques (même fréquence que les vibrations) et dépendent du nombre de Froude. Ces oscillations permettent aux zones mortes de couler mais augmentent aussi les trajets et les collisions pour les grains dans le canal. C'est cette dissipation d'énergie du fait des collisions qui engendre la baisse de débit. Les modèles précédents doivent être alors adapté pour décrire l'écoulement. La viscosité effective peut ainsi être décrite par une loi similaire à $\mu(I)$, mais basée sur le nombre de Froude :

$$\frac{\eta_{\text{eff}}}{d\sqrt{P\rho}} = \frac{\mu_{\text{eff}}}{I} \qquad \text{avec :} \quad \mu_{\text{eff}} = \mu_1.g_v(D, Fr) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + c/Fr} \tag{11.4}$$

  où c une constante $g_v(D, Fr)$ est une fonction décrivant la baisse de friction due à une lubrification de l'écoulement par les vibrations, un phénomène à relier à la lubrification induite par vibration dans les suspensions granulaires [35]. Il est possible de modéliser cet effet sous la forme suivante :

$$g_v = 1 - a_{lub}(D)\exp(-b_{lub}/Fr) \tag{11.5}$$

  avec b_{lub} une constante et $a_{lub}(D)$ un coefficient diminuant lorsque le diamètre augmente, dont l'évolution précise reste à déterminer. Concernant la vitesse, nous avons déterminé un modèle permettant de décrire la vitesse verticale v_z dans le silo :

$$v_z(x, z, A\omega) = v_{z,0}(x, z) + \lambda\frac{\partial v_{z,vib}}{\partial z}(x, z, A\omega) \tag{11.6}$$

  avec $v_{z,0}$ la vitesse sans vibration issue du modèle cinématique :

$$v_{z,0}(x, z) = -\frac{Q_s}{\sqrt{\pi b_0}}\exp(-x^2/b_0) \quad , \quad b_0 = 4bz = \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z \tag{11.7}$$

  et $v_{z,vib}$ la vitesse induite par les vibrations, qui engendre un gradient et donc une déformation dans l'écoulement à l'origine des réorganisations dans le premier régime. La forme de cette vitesse est similaire à celle sans vibration et traduit la propagation de la vibration dans le silo :

$$v_{z,vib}(x, z, A\omega) = -\frac{A\omega S}{\sqrt{b_v}}\exp(-x^2/b_v) \quad , \quad b_v = \beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3 \tag{11.8}$$

  où λ, α_1, α_2, β_1, β_2 et β_3 sont des constantes. La forme de la vitesse horizontale v_x et la loi constitutive les liants restent néanmoins des problèmes ouverts au moment où nous écrivons ces lignes.

- Dans le second régime : l'écoulement se recanalise car la vitesse dans le canal augmente grandement, malgré le fait que les zones mortes sont toujours mises en écoulement. On a d'importantes variations de vitesse dans tout le silo, les grains adoptant un mouvement global par rapport au silo. Ce sont ces variations qui contrôlent l'écoulement et donnent lieu à la dynamique de jets. On a aussi d'importantes variations de fraction volumique du fait du passage des ondes, engendrant des compressions et décompressions (de manière similaire à un gaz dans un moteur à piston). En moyenne, la fraction varie néanmoins assez peu, et il est possible d'utiliser la loi de viscosité précédente. Néanmoins, ce régime provient surtout d'un phénomène mécanique : le mouvement du tas de grains par rapport au silo [74, 75, 79]. L'écoulement dans ce régime est alors à mi-chemin entre un gaz et un fluide granulaire et est fortement dépendant du temps. Une description rhéologique moyenne de ce régime est alors fortement discutable et n'a donc pas été traitée lors de la thèse.

Ces résultats permettent de comprendre l'origine des effets macroscopiques lors de la vidange et ouvrent des perspectives concernant les écoulements granulaires vibrés de manière générale, en particulier pour la simulation par mécanique des fluides numérique (CFD).

Perspectives

Un premier point qu'il serait intéressant d'explorer est l'extension de l'étude à des cas plus complexes. Nous avons fait des premières mesures et simulations sur l'effet de la cohésion qui semblent prometteuses et méritent d'être étudiées plus en détail. À cela se rajoute les cas des écoulements 3D et pour des particules non modèles. Dans l'industrie, les écoulements granulaires sont en effet très souvent composés de particules de forme irrégulière, polydispersées et sujettes à des forces de cohésion (ex : grains de blé mouillés).

Un second point de développement est l'intégration des modèles rhéologiques proposés à la simulation par mécanique des fluides numérique (*Computational fluid dynamics* ou "CFD"). Ce type de simulation est en effet bien plus rapide que les simulations par DEM mais nécessite de connaitre les lois constitutives contrôlant le milieu (comme Naviez-Stokes pour les fluides newtoniens). Ce type d'implémentation a déjà été effectué pour la loi $\mu(I)$, comme par exemple par Staron et al. [100] pour un silo 2D. Les résultants sont encourageants et pourraient donc être étendus au cas de la vidange granulaire vibrée en partant de notre loi rhéologique.

Enfin, nous avons vu qu'il existe des parallèles importants entre la vidange de silo vibré et d'autres écoulements granulaires vibrés, tel que le plan incliné. Il serait donc intéressant de confronter nos résultats à d'autres applications pour déterminer une rhéologie générale pour ces types d'écoulement.

Annexe A : Détail du calcul des champs sur le maillage du silo

Dans cette annexe, nous présentons plus en détail certains points concernant le calcul des différents champs de l'écoulement sur le maillage 2D du silo (chapitre 6 et 10). Nous discuterons ici du calcul du volume inclus des grains dans une maille du silo et du calcul du volume libre.

Calcul du volume inclus

Dans le chapitre 6 (section 6.1), nous avons discrétisé l'écoulement dans le silo sur un maillage 2D cartésien uniforme (taille de maille L_M). Les champs de grandeurs sur ce maillage sont ainsi calculés en effectuant une moyenne volumique sur les grandeurs de chaque grain inclus dans les mailles. Il est donc nécessaire de déterminer le volume inclus V_k pour chaque grain contenu dans une maille. Quatre cas sont alors possibles (voir Fig. A.1a) : hors de la maille (en gris), complètement dans la maille (en bleu), sur un côté (en vert) et dans un coin (en rouge). Si les deux premiers cas sont triviaux ($V_k = 0$ et $V_k = 4\pi r^3/3$), les deux autres nécessitent un peu plus de travail.

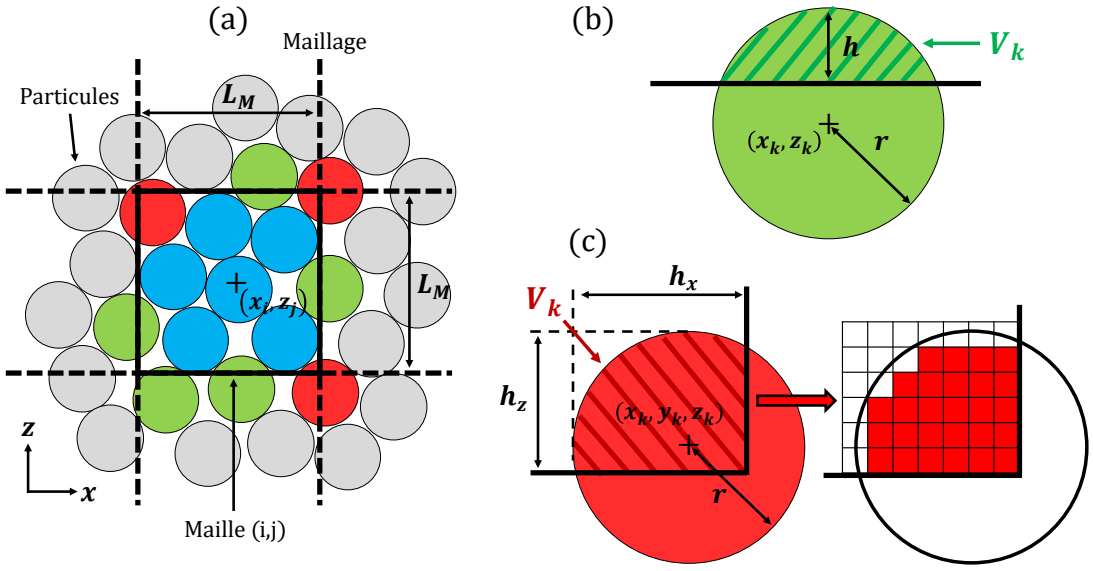


Figure A.1 (a) Schéma d'une maille (i, j) du maillage et des particules dans celle-ci à un instant t. Les particules en bleu sont entièrement dans la maille, celles en vert sont sur les côtés et celles en rouge dans les coins. Le principe du calcul du volume de grain inclus dans la maille est présenté sur (b) pour un grain sur un côté et (c) pour un grain sur un coin.

► **Grain sur un côté :** Le volume inclus correspond dans ce cas à celui de la calotte sphérique de hauteur h créée par l'intersection du maillage et de la particule sphérique (voir Fig. A.1b) :

$$V_k = V_{calotte} = \pi h^2(3r - h)/3 \tag{A.1}$$

La hauteur de la calotte h est déterminée à partir du rayon r, de la taille de maille L_M et de la distance entre le centre du grain et le centre de la maille d_{mg} :

$$h = \frac{L_M}{2} + r - d_{mg} \quad \text{avec :} \quad d_{mg} = min(|z_k - z_j|, |x_k - x_i|) \tag{A.2}$$

où (x_i, z_j) sont les coordonnées du centre de la maille et (x_k, z_k) les coordonnées du centre du grain.

► **Grain dans un coin :** dans ce cas il n'existe pas de formule simple permettant de calculer le volume inclus. On peut néanmoins paramétriser ce volume et le calculer par intégrale. Si on se place dans le référentiel du grain $(x_k, y_k, z_k) = (0, 0, 0)$, le volume inclus est en effet borné par les limites de la maille et l'équation de la sphère pour le grain :

$$r \geq x \geq r - h_x \quad , \quad r \geq z \geq r - h_z \quad , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \tag{A.3}$$

où h_x et h_z sont les hauteurs des calottes créées par les limites de la maille selon x et z, données par :

$$h_x = \frac{L_M}{2} + r - d_x \quad \text{et} \quad h_z = \frac{L_M}{2} + r - d_z \tag{A.4}$$

$$\text{Avec :} \quad d_x = |x_k - x_i| \quad \text{et} \quad d_z = |z_k - z_i| \tag{A.5}$$

À partir de l'équation de la sphère, on peut aussi écrire :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 \leq r^2 - x^2 - z^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{r^2 - x^2 - z^2} \geq y \geq -\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} \tag{A.6}$$

De plus, si on considère le problème du point de vue du plan $y = 0$, on doit aussi respecter la limite :

$$x^2 + z^2 \leq r^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 \leq r^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{r^2 - x^2} \geq z \geq -\sqrt{r^2 - x^2} \tag{A.7}$$

Le volume inclus V_k est donc donné par l'intégrale suivante :

$$V_k = \iiint_V dV = \int_{x=r-h_x}^{r} \int_{z=r-h_z}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-z^2}} dxdzdy \tag{A.8}$$

$$= \int_{x=r-h_x}^{r} \int_{z=r-h_z}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} dxdz = \iint_A 2\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} dA = \iint_A h_s(x, z) dA \tag{A.9}$$

où A est l'aire incluse dans la maille du cercle créé par la bille sphérique selon le plan $y = 0$ et h_s la hauteur de la sphère en chaque point (x, z) du cercle. Le calcul de cette intégrale est possible uniquement numériquement dans la plupart des cas, ce qui prend un temps important. On préférera alors discrétiser ce volume pour accélérer le calcul comme présenté sur la Fig. A.1c. On divise ainsi l'aire à intégrer A sur un maillage de taille $\delta x \times \delta z$. Le volume inclus est alors obtenu en sommant le volume dans chaque maille comprise dans les bornes en x et z :

$$V_k = \sum_{x=r-h_x}^{r} \sum_{z=r-h_z}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - x^2 - z^2} \delta x \delta z \tag{A.10}$$

Diminuer la taille des mailles permet d'obtenir un résultat plus précis mais allonge la durée de calcul. Un bon compromis est $\delta x = h_x/100$ et $\delta z = h_z/100$, ce qui permet d'obtenir un résultats très proche du calcul exact (1% d'écart maximum) dans un temps raisonnable.

À noter que le calcul de h_x et h_z permet aussi de différencier les différents cas pour les grains dans la maille :

- $h_x \leq 0$ et $h_z \leq 0$: le grain est hors de la maille.
- $h_x \geq 2r$ et $h_z \geq 2r$: le grain est entièrement dans la maille.
- $2r > h_x > 0$ et $h_z \geq 2r$ (et inversement) : le grain est sur un côté de la maille.
- $2r > h_x > 0$ et $2r > h_z > 0$: le grain est dans un coin de la maille.

Calcul du volume libre

Dans le chapitre 6, la fraction volumique est calculée à partir du volume libre V_{lib} qui correspond au volume de vide autour d'une particule. Ce volume libre peut être calculé à partir du *volume de Voronoi* (noté V_{vor}) autour de chaque grain de volume V_p :

$$V_{lib} = V_{vor} - V_p \tag{A.11}$$

Le volume de Voronoi quand à lui est obtenu à partir d'une tessalation 2D de l'espace autour des grains, appelée *diagramme de Voronoi* (voir Fig. A.2a). On détermine ainsi pour chaque grain la cellule de Voronoi correspondante (polygone entourant chaque grain sur la Fig. A.2a), qui englobe tous les points de l'espace "appartenant" au grain : il 'agit des points qui sont plus proches du centre de ce grain que des centres de n'importe quels autres grains. Dans notre cas, on obtient des polygones d'aire A_{vor}. Le volume de Voronoi est alors donné par :

$$V_{vor} = A_{vor} W \tag{A.12}$$

où $W = 1.5$ mm est l'épaisseur du silo (selon y). Ce volume correspond à l'espace appartenant au grain, ce qui comprend bien son volume V_p ainsi que le volume libre V_{lib} dans lequel il peut se déplacer librement.

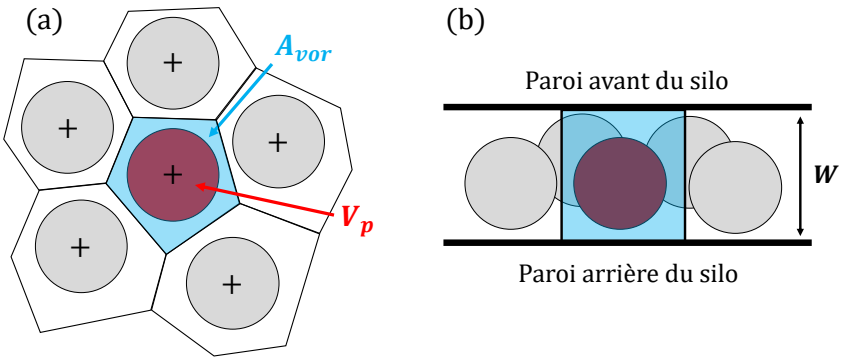


Figure A.2 Schéma du calcul du volume de Voronoi : (a) *tessalation* 2D de l'espace autour d'un grain pour déterminer l'aire de Voronoi A_{vor}. Cette aire est ensuite multipliée par la hauteur du silo W pour obtenir le volume de Voronoi V_{vor} autour du grain.

Annexe B : Code pour les simulations sous Liggghts

Dans cette annexe, nous présentons le code utilisé sous LIGGGHTS® pour simuler la vidange de milieux granulaires (billes sphériques monodispersées) dans le silo quasi-2D. Ce code possède de nombreuses variables qui peuvent être modifiées pour changer les paramètres de la vidange, en particulier :

- La géométrie de l'ouverture : l'angle θ et le diamètre d'ouverture D peuvent être changés librement. Les parois basses du silo sont alors adaptées en fonction des ces variables. À noter que la géométrie et le maillage des parois du silo ont été créés sous FreeCAD® et sont importés directement dans le code.
- Les propriétés des grains : on peut changer librement le diamètre d, la masse volumique ρ, le coefficient de Poisson ν et les coefficients de friction μ et restitution e des grains. Le module d'Young E peut être aussi modifié dans la limite des sphères molles : $E = 5 \times 10^6 - 1 \times 10^9$.
- Les vibrations : des vibrations sinusoïdales dont on contrôle l'amplitude A et la fréquence f sont appliquées aux parois du silo. On peut aussi spécifier la direction de ces vibrations (selon la verticale z par défaut).
- De la cohésion entre les grains peut être ajoutée en option. On contrôle dans ce cas les propriétés du fluide (viscosité η_e, tensions superficielle γ_e et angle de contact θ_c) ainsi que la teneur en liquide initiale X_e (en % de volume de grain).

Plusieurs itérations pour un des paramètres (ex : plusieurs diamètres $D = 5, 10, 15, 20$ mm) peuvent être lancées à la suite pour gagner du temps.

Le code permet de déterminer le débit du silo en suivant la masse de grains s'échappant de l'ouverture au cours du temps. Les informations sur les grains (positions, vitesses, contraintes...) et les chaines de forces entre grains au cours du temps peuvent être récupérées. De même, la position des parois et les forces s'exerçant sur elles au cours du temps peuvent aussi être récupérées (en option). À noter qu'une simulation prend environ 40 minutes (ordinateur avec 8 cœurs Intel Xeon Processor E5) et nécessite au moins 20 Go de stockage pour sauvegarder les informations sur le débit et les grains.

```
#-----------------------------------------------------------------------------------------------#
#    Vidange de billes dans un silo 2D vibre avec angle et diametre d'ouverture variables      #
#                                                                                               #
#                         V1.0  (Liggghts v3.7), Arthur PASCOT                                  #
#-----------------------------------------------------------------------------------------------#

# Ce code permet de lancer sous Liggghts 3.7 la vidange de materiaux granulaire (billes spheriques) d'un silo quasi-2D.
# Les variables de la simulation (geometrie du silo, proprietes des grains, vibratons...) peuvent etre changées dans la premiere partie ci-dessous.
# Plusieurs simulations peuvent etre lancées automatiquement les une à la suite des autres, avec en option un pre-remplissage pour gagner du temps.
# De la cohesion entre les grains peut aussi etre simular en utilisant le modele de Washino (option).
# Le programme permet d'obtenir:
# - le debit au cours du temps ("outflow_xxx")
# - (option à decommanter) Les informations sur les grains ("hopper_xxx") et chaine de force ("forcechain_xxx")
# - (option à decommanter) Les informations sur les parois du silo ("meshface_xxx","meshside_xxx" et "forcewall")

### Variables de la simulations
#-----------------------------------------------------------------------------------------------#

# Donnees de la simulation
variable lw equal 0.15          # Longueur des plaques ajustables (ouverture)
variable ls equal 0.1           # Largeur du silo
variable xl1 equal -0.2         # Limite de la zone de simulation (x,y,z)
variable xl2 equal 0.2
variable yl1 equal -0.01
variable yl2 equal 0.01
variable zl1 equal -0.2
variable zl2 equal 0.7
variable grv equal 9.81         # Pesanteur (m/s^2, selon z)

# Variables temporelles
variable tmp equal 0.00001      # Pas de temps (s) (1e-5 par defaut)
variable dmp equal 5000         # Nombre de pas de temps entre deux sauvegardes d'images (5000 par defaut)
variable remplir equal 200000   # Nombre de pas de temps pour remplir le silo (200000 par defaut)
variable tmporis equal 10000    # Nombre de pas de temps entre le remplissage et le melange (10000 par defaut)
variable melanger equal 40000   # Nombre de pas de temps pour melanger le silo par vibration (40000 par defaut)
variable vider equal 250000     # Nombre de pas de temps pour vider le silo (250000 par defaut)

# Variables pour simulations multiples (pre-remplissage en option pour gagner du temps)
variable actfill equal 0        # Activer la sauvegarde du pre-remplissage (1=oui) pour les boucles suivantes (Attention!: toujours faire la plus haute vibration en premier)
variable iterfill equal 1       # Creation ou utilisation d'un fichier de pre-remplissage (0=un fichier doit etre deja fourni dans le dossier, 1=creation a la premiere iteration)
variable iter loop 3            # Nombre d'iteration pour etude statistique/parametrique
variable param1 index 2000 1000 0 # Valeurs de la variable parametrique (ici amplitude des vibrations en um)

# Proprietes des materiaux
variable r1 equal 0.00055       # Rayon des grains (m)
variable r2 equal 0.00055       # Rayon des "grains" composant les parois (m)
variable rho1 equal 2500        # Densite des grains (kg/m^3)
variable rho2 equal 2500        # Densite des parois (kg/m^3)
variable y1 equal 5e6           # Module d'Young des grains (Pa)
variable y2 equal 5e6           # Module d'Young des parois (Pa)
variable v1 equal 0.22          # Coefficient Poisson des grains
variable v2 equal 0.22          # Coefficient Poisson des parois
variable e1 equal 0.97          # Restitution grain/grain
variable e2 equal 0.83          # Restitution grain/parois
variable u1 equal 0.4           # Frottement grain/grain
variable u2 equal 0.15          # Frottement grain/parois

# Proprietes de la cohesion (en option, voir Modele pour les contacts)
variable actcoh equal 0         # Activer la cohesion (1=oui)
variable tensurf equal 0.07     # Tension surfacique du liquide
variable visco equal 0.001      # Viscosite du liquide
variable angct equal 25         # Angle de contact solide/liquide
variable xhil equal 0.5         # Teneur en eau en % de volume de solide

# Variables de la simulation
variable nbg equal  1   # Nombre de grains à insérer (40000 par defaut)
variable seed equal 103123      # Seed de l'insertion (nombre premier permettant une generation aleatoire)

# Variables pour les vibrations
variable ampX equal 0.          # Amplitude des vibrations selon X (m)
variable ampY equal 0.          # Amplitude des vibrations selon Y (m)
variable ampZ equal ${param1}/1e6               # Amplitude des vibrations selon Z (m)
variable frq equal 30           # Frequence des vibrations (Hz)

# Variables geometrique
variable alpha equal 0.         # Angle d'ouverure du silo (°)
variable ds equal 0.01          # Diametre d'ouverture du silo (m)
```

```
78
79  # Nom du dossier et sous-dossiers de sauvegarde
80  variable name string Th00_D10_f30       # Nom du dossier
81  variable nvar string A                  # Suffixe pour le debit et les sous-dossiers
82  shell mkdir ${name}                     # Creation du dossier de sauvegarde
83  #shell mkdir ${name}/${nvar}${param1}   # Creation des sous-dossier (sauvegarde des informations sur
    les grains/parois, optionnel, à decommanter)
84
85  # Variables calculées
86  variable r11 equal ${r1}*0.90   # Dispersion en diametre (r=r+-10%)
87  variable r12 equal ${r1}*0.95
88  variable r13 equal ${r1}*0.98
89  variable r14 equal ${r1}*1.0
90  variable r15 equal ${r1}*1.02
91  variable r16 equal ${r1}*1.05
92  variable r17 equal ${r1}*1.1
93  variable per equal 1/${frq}      # Periode de vibrations
94  variable rempreel equal ${remplir}-1    # Remplissage reel (evite 1 step supplementaire)
95  variable tmporisreel equal ${tmporis}-1 # Temporisation reelle
96
97  # Variables calculées: Position des parois basses
98  variable xalpha equal ${lw}*sin((90-${alpha})*PI/180)           # Position x des plaques apres
    rotation
99  variable zalpha equal ${lw}*cos((90-${alpha})*PI/180)           # Position z des plaques apres
    rotation
100 variable xdec equal ${xalpha}+${ds}/2                           # Decalage des plaques selon x
101 variable zdec equal ${zalpha}*(1-(${ls}-${ds})/(2*${xalpha}))   # Decalage des plaques selon z
102 variable zstop equal -(${zalpha}-${zdec}-${ampZ})               # Decalage du stopper
103 variable zface equal 0.1-(${zalpha}-${zdec})                    # Decalage des faces
104 variable zout equal -(${zalpha}+${ampZ}+${r1}-${zdec})          # Position de l'outlet  (mesure
    debit)
105
106
107 ### Initialisation de la simultation
108 #-----------------------------------------------------------------------------------------------#
109
110 # Parametres globaux
111 units         si                # Unite de la simulation
112 atom_style    granular          # Type de materiaux
113 atom_modify   map array
114 boundary      f f f             # Type de limites (frontieres simulation)
115 newton        off
116 communicate   single vel yes
117 neighbor      ${r1} bin         # Calcul voisins (taille et delai)
118 neigh_modify  delay 0
119
120 # Initialisation (utilisation du pre-remplissage si active)
121 if "(${iter} > ${iterfill} && ${actfill} == 1)" then &
122    "read_data ${name}/hopfill.data" &
123    "reset_timestep ${remplir}" &
124 else &
125    "region        domain block ${xl1} ${xl2} ${yl1} ${yl2} ${zl1} ${zl2} units box" &
126    "create_box    2 domain"
127
128 # Parametres physique
129 timestep    ${tmp}                              # Pas de temps
130 fix grav all gravity ${grv} vector 0.0 0.0 -1.0 # Gravite
131
132 # Proprietes des materiaux
133 fix  m1 all property/global youngsModulus peratomtype ${y1} ${y2}
134 fix  m2 all property/global poissonsRatio peratomtype ${v1} ${v2}
135 fix  m3 all property/global coefficientRestitution peratomtypepair 2 ${e1} ${e2} ${e2} ${e2}
136 fix  m4 all property/global coefficientFriction peratomtypepair 2 ${u1} ${u2} ${u2} ${u2}
137 fix  m5 all property/global minSeparationDistanceRatio scalar 1.001 # Distance min (en diametre de
    grain) rupture des ponts (1.001 par defaut)
138 fix  m6 all property/global maxSeparationDistanceRatio scalar 1.1 # Distance max (en diametre de
    grain) rupture des ponts (1.1 par defaut)
139 fix  m7 all property/global surfaceLiquidContentInitial scalar ${xhil}
140 fix  m8 all property/global surfaceTension scalar ${tensurf}
141 fix  m9 all property/global fluidViscosity scalar ${visco}
142 fix  m10 all property/global contactAngle peratomtype ${angct} ${angct}
143
144 # Modele pour les contacts: Hertzian avec/sans cohesion (particule molles: 5e6<E<1e9)"
145 if "(${actcoh} == 1)" then &
146    "pair_style  gran model hertz tangential history cohesion washino/capillary/viscous" &
147 else &
148    "pair_style gran model hertz tangential history"
149 pair_coeff  * *
150
151 # Type de particules (distribution en rayon pour les grains)
152 fix     pts11 all particletemplate/sphere 102161 atom_type 1 density constant ${rho1} radius
    constant ${r11} # Grains
153 fix     pts12 all particletemplate/sphere 102181 atom_type 1 density constant ${rho1} radius
    constant ${r12}
154 fix     pts13 all particletemplate/sphere 102191 atom_type 1 density constant ${rho1} radius
    constant ${r13}
155 fix     pts14 all particletemplate/sphere 102197 atom_type 1 density constant ${rho1} radius
    constant ${r14}
156 fix     pts15 all particletemplate/sphere 102199 atom_type 1 density constant ${rho1} radius
```

```
      constant ${r15}
157   fix     pts16 all particletemplate/sphere 102203 atom_type 1 density constant ${rho1} radius
      constant ${r16}
158   fix     pts17 all particletemplate/sphere 102217 atom_type 1 density constant ${rho1} radius
      constant ${r17}
159   fix     pdd1 all particledistribution/discrete 86028121 7 pts11 0.05 pts12 0.1 pts13 0.2 pts14 0.3
      pts15 0.2  pts16 0.1 pts17 0.05 # Distribution
160   fix     pts2 all particletemplate/sphere 102229 atom_type 1 density constant ${rho2} radius constant
      ${r2}   # Parois
161   group   Gr2 type 2 # Groupe pour le stockage des infos sur les parois
162
163   # Blocage du silo (mur infini)
164   fix     Stopper all wall/gran model hertz tangential history primitive type 2 zplane ${zstop}
165
166   # Insertion des grains (1ere simu ou pre-remplissage non actif)
167   region  factory block -0.04 0.04 -0.0007 0.0007 0.45 0.49 units box  # Zone d'insertion
      (x1,x2,y1,y2,z1,z2)
168   if "(${iter} == ${iterfill} || ${actfill} != 1)" then &
169      "fix ins all insert/rate/region seed ${seed} distributiontemplate pdd1 &
170       nparticles ${nbg} particlerate 80000 insert_every 1000 &
171       overlapcheck yes vel constant 0. 0. -1.0 region factory ntry_mc 1000"
172
173   # Insertion des parois et revettement en grains du silo
174   fix     Facewall all mesh/surface/stress file meshes/facewall_4mm_exp.stl type 2 move 0. 0. ${zface}
      stress on
175   fix     Sidewall all mesh/surface/stress file meshes/sidewall_exp.stl type 2 stress on
176   fix     Bottomleft all mesh/surface/stress file meshes/bottomleft_exp.stl type 2 rotate axis  0. 1.
      0. angle ${alpha} move -${xdec} 0. ${zdec} stress on
177   fix     Bottomright all mesh/surface/stress file meshes/bottomright_exp.stl type 2 rotate axis  0.
      1. 0. angle -${alpha} move ${xdec} 0. ${zdec} stress on
178   fix     Granwall all wall/gran model hertz tangential history mesh n_meshes 4 meshes Sidewall
      Bottomleft Bottomright Facewall # Revetement granulaire
179
180   # Zone de mesure du debit
181   fix     Outlet all mesh/surface file meshes/outlet_exp.stl type 2 move 0. 0. ${zout}
182   fix     flow all massflow/mesh mesh Outlet vec_side 0. 0. -1. count once
183
184   # Mesure du debit
185   variable t equal step*dt        # Temps (s)
186   variable Mf equal f_flow[1]     # Masse ecoulee (Kg)
187   variable Np equal f_flow[2]     # Nombre de particule ecoulees
188   variable Qm equal f_flow[3]     # Debit massique (Kg/s)
189   variable Qp equal f_flow[4]     # Debit de particule (np/s)
190
191   # Mesure des forces sur les parois: Cotes (optionnel)
192   variable Fsx equal f_Sidewall[1]
193   variable Fsy equal f_Sidewall[2]
194   variable Fsz equal f_Sidewall[3]
195
196   # Mesure des forces sur les parois: Face avant et arriere (optionnel)
197   variable Ffx equal f_Facewall[1]
198   variable Ffy equal f_Facewall[2]
199   variable Ffz equal f_Facewall[3]
200
201   # Mesure des forces sur les parois: Fond gauche et droite (optionnel)
202   variable Fbx equal f_Bottomleft[1]+f_Bottomright[1]
203   variable Fby equal f_Bottomleft[2]+f_Bottomright[2]
204   variable Fbz equal f_Bottomleft[3]+f_Bottomright[3]
205
206
207   ### Execution de la simulation
208   #-----------------------------------------------------------------------------------------#
209
210   # Integration
211   fix     integrate all nve/sphere
212
213   # Verification du temps de Rayleigh et Hertz (tout les 5000 pas de temps)
214   fix     tscheck all check/timestep/gran 5000 0.2 0.2
215
216   # Thermodynamique (tout les 5000 pas de temps)
217   thermo_style    custom step atoms ke
218   thermo          5000
219   thermo_modify   lost ignore norm no
220
221   # Calculs de grandeurs (optionnel, à decommanter)
222   #compute fc all pair/gran/local id pos force # Chaine de force
223   #compute st all stress/atom # Tenseur contrainte xx yy zz xy xz yz
224
225   # Lancement de la simulation
226   run     1
227
228   # Remplissage du silo (avec pre-remplissage si active)
229   if "${actfill} != 1" then &
230      "run ${rempreel}" &
231   elif "(${iter} == ${iterfill} && ${actfill} == 1)" &
232      "run ${rempreel}" &
233      "write_data ${name}/hopfill.data" &
234      "run ${tmporis}" &
235   else &
```

```
   "run ${tmporisreel}"

# Mesure du debit
fix     Output all print ${dmp} "${t},${Mf},${Np},${Qm},${Qp}" screen no file ${name}/outflow_${nvar}${param1}.csv title "t(s),Mf(Kg),Np,Qm(Kg/s),Qp(np/s)"

# Mise en vibration du silo
fix     Vibface all move/mesh mesh Facewall wiggle amplitude ${ampX} ${ampY} ${ampZ} period ${per}
fix     Vibside all move/mesh mesh Sidewall wiggle amplitude ${ampX} ${ampY} ${ampZ} period ${per}
fix     Vibleft all move/mesh mesh Bottomleft wiggle amplitude ${ampX} ${ampY} ${ampZ} period ${per}
fix     Vibright all move/mesh mesh Bottomright wiggle amplitude ${ampX} ${ampY} ${ampZ} period ${per}

# Melange du silo
run     ${melanger}

# Informations sur les grains (l.1: id,position,vitesse,force,rayon et contrainte) et les chaines de forces (l.2: x1,y1,z1,x2,y2,z2,id1,id2,periodic,fx,fy,fz)
#dump   dmpgrain all custom ${dmp} ${name}/${nvar}${param1}/hopper_*.liggghts id type x y z vx vy vz fx fy fz radius c_st[1] c_st[2] c_st[3] c_st[4] c_st[5] c_st[6]
#dump   forcechain all local ${dmp} ${name}/${nvar}${param1}/forcechain_*.dump  c_fc[1] c_fc[2] c_fc[3] c_fc[4] c_fc[5] c_fc[6] c_fc[7] c_fc[8] c_fc[9] c_fc[10] c_fc[11] c_fc[12]

# Informations sur les parois du silo: version .stl (l.1-2), version .vtk avec cntraintes (l.3-4) et forces aux parois (l.5)
#dump   dmpmeshsidestl Gr2 mesh/stl ${dmp} ${name}/${nvar}${param1}/meshside_*.stl Sidewall Bottomleft Bottomright
#dump   dmpmeshfacestl Gr2 mesh/stl ${dmp} ${name}/${nvar}${param1}/meshface_*.stl Facewall
#dump   dmpmeshsidevtk Gr2 mesh/vtk ${dmp} ${name}/${nvar}${param1}/meshside_*.vtk output interpolate stress Sidewall Bottomleft Bottomright
#dump   dmpmeshfacevtk Gr2 mesh/vtk ${dmp} ${name}/${nvar}${param1}/meshface_*.vtk output interpolate stress Facewall
#fix    forcewall all print ${dmp} "${t},${Fbx},${Fby},${Fbz}" screen no file ${name}/${nvar}${param1}/forcewall.csv title "t(s),Fbx(N),Fby(N),Fbz(N)"

# Ouverture du silo et vidange des grains
unfix   Stopper
run     ${vider}

# Boucle (simulations multiples)
clear           # Efface la simulation
next iter       # Iteration suivante
next param1     # Valeur suivante de la variable parametrique
jump in.silodischarge # Relance le script (ou un autre)
```

Annexe C : Influence de vibrations mécaniques sur la vidange de particules sphériques dans un silo quasi-2D

Dans cette annexe, nous présentons un article publié dans le journal Chemical Engeneering Science. Les résultats des expériences et des simulations numériques par éléments discrets (DEM) sur le débit du silo sous vibrations présentés dans le corps de la thèse y sont repris. L'existence et l'origine des deux régimes des vibrations y sont discutées en particulier.

À noter que la loi d'échelle proposée pour le premier régime dans l'article est :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - a_1 \exp(-b_1/Fr\Omega^{1/3}) \tag{C.1}$$

où Q/Q_0 est le débit normalisé par le cas sans vibration, a_1 et b_1 des constantes, $Fr = A\omega/\sqrt{gD}$ le nombre de Froude et $\Omega = \omega/\sqrt{g/d}$ la fréquence relative des vibrations. Cette loi permet de décrire les résultats mais la contribution de $\Omega^{1/3}$ provient d'une prise en compte partielle de l'effet du second régime (en $Fr\Omega^{1/2}$). Des simulations et expériences supplémentaires effectuées par la suite ont invalidé cette contribution, qui n'intervient que dans le second régime. On retrouve alors bien la loi présentée dans le chapitre 5 de la thèse pour le premier régime :

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - a_1 \exp(-b_1/Fr) \tag{C.2}$$

Chemical Engineering Science 224 (2020) 115749

Contents lists available at ScienceDirect

Chemical Engineering Science

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ces

Influence of mechanical vibrations on quasi-2D silo discharge of spherical particles

Arthur Pascot [a,*], Naïma Gaudel [a], Sergiy Antonyuk [b], Jérémy Bianchin [a], Sébastien Kiesgen De Richter [a,*]

[a] Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, Université de Lorraine (UMR 7563 CNRS), 2 Avenue de la Forêt de Haye, 54505 Vandoeuvre-lés-Nancy Cedex, France

[b] Institute of Particle Process Engineering, University of Kaiserslautern, Gottlieb-Daimler-Str. 44/464, D-67663 Kaiserslautern, Germany

HIGHLIGHTS

- Silo discharge of granular matter can be tuned with vibrations.
- Two regimes for the flow rate governed by the Froude number and relative frequency.
- Vibrations induced setting in motion of areas initially at rest in the first regime.
- Intermittent dynamics in the second regime.

ARTICLE INFO

Article history:
Received 19 December 2019
Received in revised form 10 April 2020
Accepted 24 April 2020
Available online 7 May 2020

Keywords:
Silo discharge
Granular matter
Vibration
Rheology

ABSTRACT

In this paper, we present a study of the influence of mechanical vibrations on silo discharges of granular matter. We propose a pragmatic understanding of the effects of vibrations on silo discharge using the framework of correlations and empirical laws usually proposed in the literature. Experimental measurements and discrete element simulations (DEM) are performed in a quasi-two dimensional silo. The influence of both the vibration applied on the entire silo and the opening size on the flow rate is studied. We put in evidence that vibrations allow possible flows at low opening size value, non-existent in the vibration-free case. We also show that vibrations make appear two distinct regimes, governed by both the Froude number Fr and the relative frequency Ω. In the first regime, a decreased flow rate is observed when increasing the vibration intensity. This behavior is explained by the setting in motion, due to the vibration, of areas previously at rest. In the second regime, DEM simulations evidenced an increased flow rate when increasing the vibration intensity. We find this behavior comes from the intermittent nature of the flow, where the flow rate is directly controlled by the propagation of shock waves all along the silo.
© 2020 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Understanding the rheology and flow properties of granular materials has been a major point of interest in industry. These materials are indeed present in many fields, such as soil studies, medicine and cosmetic manufacturing for example (Fayed and Otten, 2013). Industrial processes, which involve granular media, are often based on empirical rules. Among these different industrial applications, a common one is silo discharge.

One of the first study concerning silo discharges was realized by Beverloo et al. (1961). In their work, authors have shown that the flow rate of particles through an orifice mostly depends on the ratio between the opening size and the particle size. Thus, they have proposed an empirical law linking these parameters. Recently, studies have put in evidence limits of this law in particular when the opening size tends to the particle size, and for a silo with a non-zero opening angle (Nedderman et al., 1982; Mankoc et al., 2007; Janda et al., 2012; Benyamine et al., 2017). In this context, authors (Mankoc et al., 2007; Janda et al., 2012; Benyamine et al., 2017) have proposed corrections to the Beverloo law taking into account the decrease of the volume fraction induced by collisions close to the opening. These laws have been used to successfully predict the silo discharge of complex systems (Benyamine et al., 2017; Ketterhagen et al., 2008; Anand et al., 2009; Hund et al., 2017). However, these empirical laws fail to predict the clogging of the silo due to the formation of arches at the opening. The probability for these arches to form increases significantly when the opening size becomes close to the particle size (~ 5 particle

* Corresponding author.
E-mail addresses: arthur.pascot@univ-lorraine.fr (A. Pascot), sebastien.kiesgen@-univ-lorraine.fr (S. Kiesgen De Richter).

https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115749
0009-2509/© 2020 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Nomenclature

Greek Letters

α	fitting parameter of the dilatency function [–]
β	fitting parameter of the dilatency function [–]
β	power of the exponential in Weibull model [–]
Γ	dimensionless acceleration number [–]
μ_{wall}	wall friction[–]
Ω	relative frequency [–]
ω	pulsation frequency $[T^{-1}]$
ϕ_0	volume fraction at the silo opening [–]
ϕ_∞	volume fraction at the center of the silo opening [–]
ϕ_b	bulk volume fraction [–]
ρ	particle density $[M \cdot L^{-3}]$
τ	characteristic time in Weibull model $[T]$
θ	opening angle of the silo [–]

Latin Letters

ΔQ	relative difference of flow rate [–]
δQ_{max}	maximum variation of the flow rate [–]
$\mathcal{F}$	function describing the effect of the vibration on the flow rate based on Wassgren scaling [–]
$\mathcal{F}_1$	function describing the first regime [–]
$\mathcal{F}_2$	function describing the second regime [–]
A	vibration amplitude $[L]$
a	fitting parameter for the function based on Wassgren scaling [–]
a_1	fitting parameter for the first regime [–]
a_2	fitting parameter for the second regime [–]
b_1	fitting parameter for the first regime [–]
b_2	fitting parameter for the second regime [–]
C	constant of the flow rate law [–]
D	opening size of the silo $[L]$
d	particle diameter $[L]$
D_h	hydraulic diameter of the silo $[L]$
f	vibration frequency $[T^{-1}]$
Fr^*	critical Froude number [–]
G	dilatency function at the silo opening [–]
g	gravitational constant $[L \cdot T^{-2}]$
H	silo height $[L]$
k	constant of the Beverloo law [–]
L	silo width $[L]$
Q	flow rate of the silo $[M \cdot T^{-1}]$
Q_0	flow rate without vibration $[M \cdot T^{-1}]$
t	time $[T]$
Vz	relative vertical velocity between the particles and the silo $[L/T]$
W	silo depth $[L]$

sizes) (To et al., 2001; Zuriguel et al., 2005; Janda et al., 2008; Uñac et al., 2012). This is also the case for more complex particles, where the shape (Cleary and Sawley, 2002; Höhner et al., 2015; Govender et al., 2018) and surface properties (To et al., 2001) radically change the micro-structure and the contact network between particles. In particular, Govender et al. (2018) have shown that arches and clogging are often caused by particle shape, which cannot be captured by rolling friction with spheres, and hence cannot be accurately captured by the Beverloo law. The clogging of silos due to arches formation is often avoided in practical situations, such as industrial silos, by imparting vibrations to the container (Mankoc et al., 2009; Zuriguel et al., 2017; Guerrero et al., 2017; Zhang et al., 2018). Previous studies have shown that vibrations allow the flow in normally jammed cases, either due to small opening sizes (Zuriguel et al., 2017), the silo configuration (Kollmann and Tomas, 2002) or the shape of the particles (Fraige et al., 2008).

Recent studies have shown that external vibrations tend to change the apparent rheology of granular materials by suppressing the yield stress (Kollmann and Tomas, 2002; de Richter et al., 2009; Hanotin et al., 2013; Gaudel et al., 2017; Gaudel et al., 2016). The granular temperature induces reorganizations of the contact network and an apparent decrease of the viscosity. Some studies have investigated the influence of vibrations on the flow rate in a case of a silo (Hunt et al., 1999; Wassgren et al., 2002). They have shown that vertical vibrations tend to decrease the flow rate while horizontal vibrations tend to increase it, depending on the vibration velocity. In a vibrated silo, the flow can be influenced by different parameters: the geometry of the silo (particularly the opening size and angle), the particle properties (density, shape, cohesion) and the vibration parameters (amplitude and frequency). Discrete element simulation (DEM) is a widely used tool in the case of granular media to obtain predictive models, which take into account the influence of these parameters (Ketterhagen et al., 2008; Anand et al., 2009; Cleary and Sawley, 2002; Fraige et al., 2008; Langston et al., 1995; Datta et al., 2008). Moreover, many studies have been conducted to determine the influence of these parameters on the flow rate of a silo (Hunt et al., 1999; Wassgren et al., 2002). However, it still exists a lack of a general modeling in a wide range of parameters.

In this paper, we present experimental and numerical results of the influence of mechanical vibrations and geometry parameters on the flow rate during silo discharges. We propose a pragmatic understanding of the effects of vibration on the discharge of a model silo using the framework of Beverloo's law and its corrections proposed in the literature. In this study, the entire silo is vibrated and non cohesive model granular materials are used. The present article is organized as follows. In Section 2 the material and the experimental setup used in the study are presented; the influence of various parameters on the flow rate is presented and discussed. An empirical law taking into account the flow rate, the vibration and geometry parameters is proposed. In Section 3 simulation methods are detailed, and experimental results are confronted to numerical ones. Numerical results show a second regime, for which an empirical law is proposed and discussed to describe the evolution of the flow rate.

2. Experimental measurements

2.1. Experimental methods

The experimental setup (Fig. 1) consists in a rectangular silo made of transparent PMMA sheets with an anti-static coating similar to the one used in Zuriguel et al. (2017). This anti-static coating is regularly applied in order to minimize the electrostatic forces and the friction compared to gravity forces. In that case, it has been shown that the wall friction is 1 or 2 orders of magnitude smaller than that due to inelastic collision between particles for dense granular flows (Drake, 1991). The silo is then filled with spherical and non cohesive glass beads, with a slight dispersion to avoid crystallization and segregation (Silibeads type S, diameter

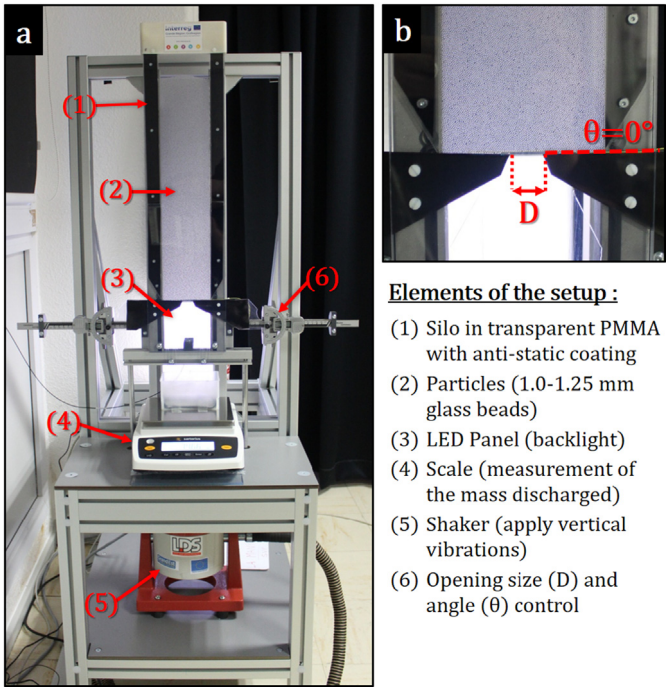


Fig. 1. (a) Front view of the experimental setup. (b) Close-up of the silo outlet, with the opening size D and the opening angle θ ($D = 20$ mm and $\theta = 0^\circ$ on the picture).

$d = 1.1 \pm 0.1$ mm). The dimensions of the silo and the particle properties are summarized in Table 1. On the one hand, the dimensions of the silo ensure a flow primarily 2D (as done in the work of Medina et al. (1998)) and allow us to analyze the flow structure in the bulk. On the other hand, the dimensions allow to avoid wall effects before the opening, and an insertion of a number of particles big enough to ensure a steady flow (the silo is filled at $\sim$ 90% before each experiment).

The opening size can be freely adjusted and the silo is linked to a vibration shaker in order to apply vertical and sinusoidal vibrations, with controlled amplitude and frequency values. The tested and available ranges of these four parameters are given in Table 2. Note that vibrations are limited to acceleration below 33 m.s^{-2} due to both the mass of the silo ($\sim$ 6 kg) and the shaker limitations ($F_{max} = 196$ N). The outlet can be manually opened and the particles are collected in a vessel set below the opening. An electronic scale is used to measure the mass discharge with time. The time evolution of the mass discharge is presented in Fig. 2. The discharge reaches nearly instantaneously a stationary flow regime with a constant flow rate, regardless of the parameters used. All subsequent measurements are made in that stationary flow regime.

2.2. Experimental results

2.2.1. Flow rate without vibration

Measurements of the flow rate in the vibration-free case are performed and compared to the literature. The flow rate of granular materials through a circular aperture is expected to follow the Beverloo law (Beverloo et al., 1961):

$$Q = C\rho\phi_b\sqrt{g}(D - kd)^{5/2} \quad (1)$$

where ϕ_b is the bulk volume fraction, g is the gravitational constant, and C and k are the fitting parameters related to a "reduced outlet" due to the presence of particles at the edge of the opening (Fig. 3a). This equation can be generalized in the 2D case (Mankoc et al., 2007; Janda et al., 2012):

$$Q = C\rho\phi_b\sqrt{g}(D - kd)^{3/2} \quad (2)$$

For a rectangular quasi-2D silo (with $\theta = 0^\circ$), an equation is derived from this law (Benyamine et al., 2017):

$$Q = C\rho\phi_b\sqrt{g}W(D - kd)^{3/2} \quad (3)$$

where W is the depth of the silo.

In our experiments, the bulk volume fraction is experimentally measured when the silo is filled with particles and closed, using image analysis (particle detection). To avoid calculation errors due to particles overlapping (e.g. $\phi_b > 1$), and to take into account the quasi-2D geometry, the bulk volume fraction is evaluated instead of the purely 2D surface fraction. We obtain $\phi_b = 0.47$, which is as expected lower than the random close packing ($\phi_{rcp} = 0.64$) due to confinement.

The evolution of the flow rate as a function of the opening size is plotted in Fig. 4. The data are well fitted to Eq. (3), which validates the quasi-2D approximation. Note that the R-squared R^2 statistics are used to evaluate model fit all along the paper[1]. Small discrepancies are observed when $D \to d$ (Fig. 4, insert), as already reported in

Table 1
Dimensions of the silo and particle properties (glass beads) used in the experiments.

Parameter	Value
H (silo height)	500 mm
L (silo width)	100 mm
W (silo depth)	1.5 mm
d (particle diameter)	1.1 ± 0.1 mm
ρ (particle density)	2500 kg.m^{-3}

Table 2
Vibration and geometrical parameters used in the experiments.

Parameter	Value/Range
D (opening size)	0 – 20 mm
θ (opening angle)	0°
f (frequency)	15 – 75 Hz
A (amplitude)	0 – 2000 µm

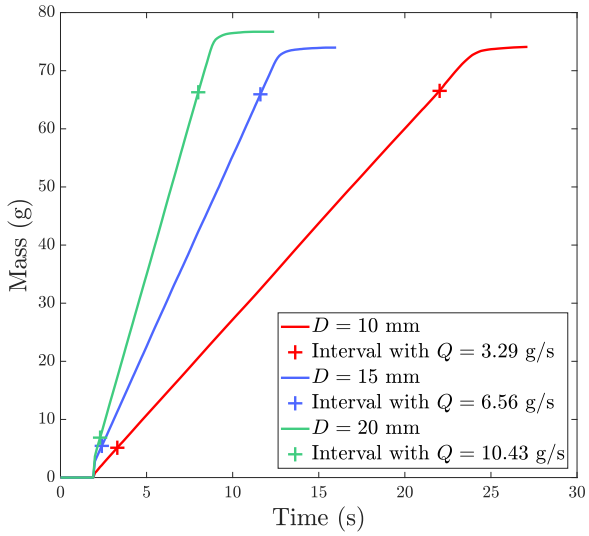


Fig. 2. Time evolution of the mass discharge of particles for three different opening sizes, with an acquisition rate of 10 Hz by using a scale set below the silo. For each case, the corresponding flow rate Q is calculated in the steady state.

[1] All fits have been performed using the nonlinear "Levenberg–Marquardt" algorithm.

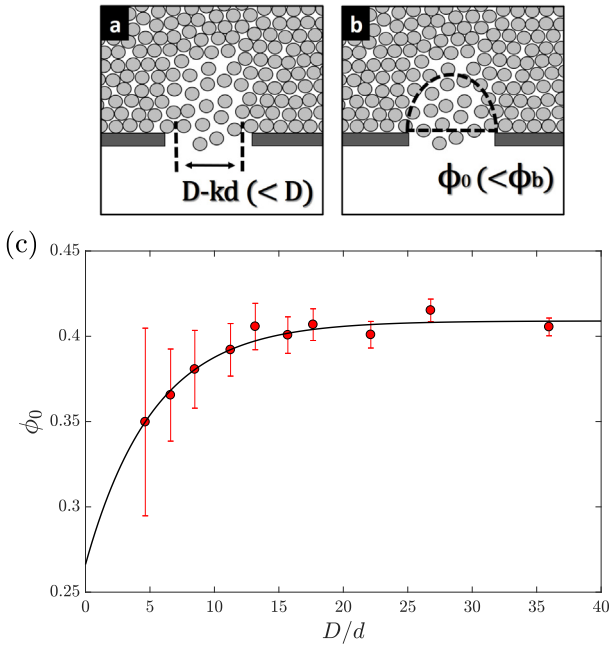


Fig. 3. Illustrations of Beverloo's and Benyamine's discharge laws: (a) Existence of a reduced outlet as proposed by Beverloo et al. (1961) (Eq. (3)) due to the presence of particles at the edges of the opening. (b) Appearance of a dilatency of the volume fraction at the opening as proposed by Benyamine et al. (2017) (Eq. (4)). (c) Evolution of the volume fraction ϕ_0 obtained experimentally as a function of the dimensionless opening D/d. Data are fitted to Eq. (5) (solid line), with $\phi_b^* = 0.41, \alpha = 0.349$ and $\beta = 0.190$.($R^2 = 0.953$).

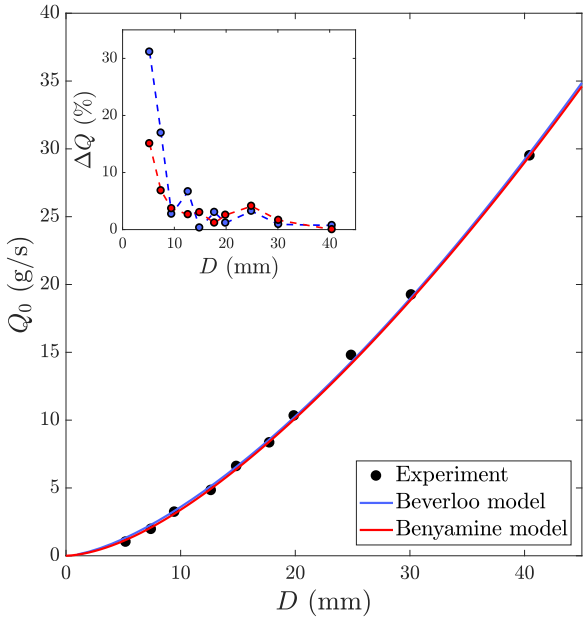


Fig. 4. Evolution of the flow rate Q_0 as a function of the opening size D of the silo. Data are fitted to Eq. (3) from Beverloo et al. (1961), with $C = 0.665$ and $k = 0.113$ ($R^2 = 0.999$); and to Eq. (4) from Benyamine et al. (2017), with $C = 0.735, \alpha = 0.349$ and $\beta = 0.190$ ($R^2 = 0.999$). Insert: evolution of the relative difference of flow rate between the fits and the experimental data, given by: $\Delta Q = |(Q_{experiment} - Q_{theory})/Q_{theory}|$.

recent studies (Mankoc et al., 2007; Janda et al., 2012; Benyamine et al., 2017). These studies propose an exponential correction, related to a decrease of the volume fraction at the opening. In our work, the correction of Benyamine et al. (2017) is used:

$$Q = C\rho\phi_0\sqrt{g}WD^{3/2} \tag{4}$$

with C a fitting constant and ϕ_0 the volume fraction at the opening, which results from a dilatency of the flow at the opening (Fig. 3b). ϕ_0 is described by a function G, which depends on the particle diameter d, the opening angle θ and size D (Benyamine et al., 2017). In our case, for $\theta = 0°$, it gives:

$$\phi_0 = \phi_b \times G(D/d, \theta) \underset{\theta=0°}{=} \phi_b \times \left(1 - \alpha e^{-\beta D/d}\right) \tag{5}$$

where α and β are two fitting parameters. This law is known to well predict flow rate for a large range of opening sizes and angles, for monodisperse and polydisperse materials (Benyamine et al., 2017). The evolution of the volume fraction ϕ_0 as a function of the dimensionless opening D/d is plotted in Fig. 3c. The data are well fitted to Eq. (5), with $\phi_b^* = 0.41, \alpha = 0.349$ and $\beta = 0.190$. Note that the value ϕ_b^* is lower than the value obtained without flow $\phi_b = 0.47$. A similar result was obtained by Janda et al. (2012) where the volume fraction at the center of the opening was lower than the bulk volume fraction $\phi_\infty < \phi_b$. This discrepancy could also come from the opening size value used ($D = 40$ mm), which is nearly half the width of the silo.

As presented in Fig. 4, the flow rate data are well fitted to Eq. (4) with only one parameter $C = 0.735$. This value is in agreement with results obtained by Benyamine et al. (2017). The Benyamine model (4) better captures the behavior for small opening sizes (see Fig. 4, insert). In the following, the flow rate with vibrations Q is normalized by the flow rate without vibration Q_0 in order to extract the influence of the vibration on the flow.

2.2.2. Flow rate with vibrations

The flow rate is measured for four opening sizes when vibrations are applied. For each opening size, experiments are performed for various values of the vibration amplitude while the frequency is kept constant. The frequency f and their corresponding range of vibration amplitude values A used in the experiments are presented in Table 3. The vibration parameter is defined as Γ, the dimensionless acceleration number classically expressed as (Zuriguel et al., 2017; Janda et al., 2009):

$$\Gamma = \frac{A\omega^2}{g} = \frac{A(2\pi f)^2}{g} \tag{6}$$

To quantify the effect of vibrations on the flow rate, Q is normalized for each opening size by Q_0, defined as the flow rate measured without vibration. The evolution of Q/Q_0 as a function of the opening size D, the vibration amplitude A and frequency f, is plotted in Fig. 5. The results show that Q/Q_0 decreases with increasing A and f, for a given D value (Fig. 5a and Fig. 5b). However, it increases with increasing D value (Fig. 5c). One can remark that, although the variation of the flow rate observed in our experiments is small ($\sim 20\%$), this is significant regarding the very good repetition accuracy (error lower than 5%).

These results suggest that vertical vibrations lead to the decrease of the flow rate, which depends on f, A and D. This behavior is in agreement with the results of Wassgren et al. (2002) obtained in a 3D silo configuration with an opening angle $\theta = 45°$

Table 3
Vibration frequencies, amplitudes and corresponding dimensionless accelerations used in the experiments.

f (Hz)	A (μm)	Γ
15	0 – 2000	0 – 1.81
30	0 – 800	0 – 2.90
45	0 – 360	0 – 2.93
60	0 – 200	0 – 2.90
75	0 – 130	0 – 2.94

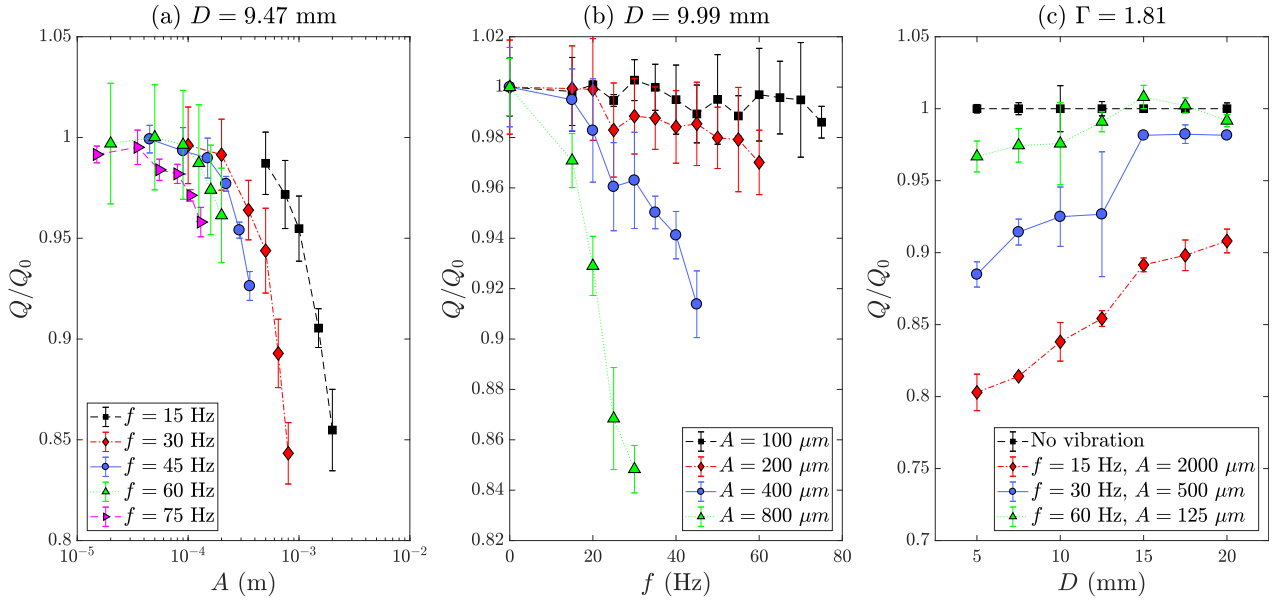


Fig. 5. Typical evolution of the normalized flow rate Q/Q_0 as a function of (a) the vibration amplitude A for different frequency values and an opening size $D = 9.47$ mm, (b) the vibration frequency for different amplitude values and an opening size $D = 9.99$ mm, and (c) the opening size D of the silo for different amplitude and frequency values. The Γ number is fixed to 1.81.

and a rectangular opening. In Fig. 6, Q/Q_0 is plotted as a function of the vibration amplitude for all f and D values used in our experiments. The following observations can be made:

- For all opening sizes, the flow rate decreases with the vibration amplitude. The higher the frequency and the opening size, the larger the decrease of the flow rate (black arrow in Fig. 6).
- Regardless the opening size, increasing the vibration frequency seems to start the decrease at a lower amplitude.
- Increasing the opening size seems to reduce the influence of vibration on the flow rate. Indeed, the maximum variation of flow rate shown in Table 4 seems to tend to 0 when the opening size increases.

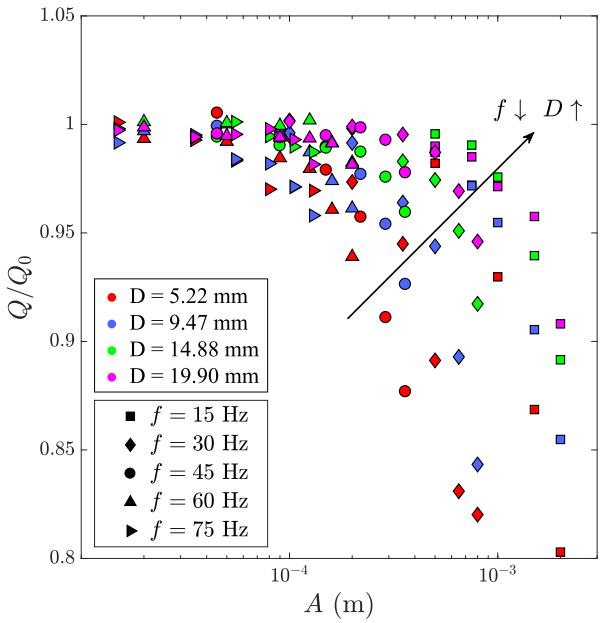


Fig. 6. Evolution of the dimensionless flow rate Q/Q_0 as a function of the amplitude A for all frequency f and opening size D values used in the experiments.

By using PIV measurements, typical flow patterns are extracted when vibrations are applied, as shown in Fig. 7. Increasing the vibration amplitude at a given frequency leads to a transition from a funnel to a mass flow. This behavior can be explained by the setting in motion, due to vibrations, of particles initially at rest in stagnant areas. An increase in vibration amplitude leads to a decrease of the stagnant areas. The consequence of the vibration is essentially the increase of the number of collisions close to the outlet, which decreases the flow rate.

2.2.3. Scaling law

The evolution of the normalized flow rate Q/Q_0 is plotted as a function of the Froude number $Fr = A\omega/\sqrt{gD}$, as initially introduced by Wassgren et al. (2002). As the configuration studied is quasi-2D, the opening size D is used rather than the hydraulic diameter ($D_h = \sqrt{DW}$). The data collapse fairly well on a master curve (Fig. 8). Note that a small scattering of the data is observed for the highest vibration amplitude values. As presented in Fig. 8 (solid line), data are well fitted to a simple exponential law, such as:

$$\frac{Q}{Q_0} = \mathcal{F}(Fr) = 1 - a\exp\left(-Fr^*/Fr\right) \tag{7}$$

where $a = 0.421$ and $Fr^* = 0.622$ are two fitting parameters.

This exponential behavior is frequently observed in the dynamics of self-organized complex systems (Gaudel et al., 2016; Van De Laar et al., 2016) and has to be compared with the transition state approach of Van De Laar et al. (2016). This analogy is also related to the theory of micro-plasticity where local reorganizations are often described by a Weibull model $(1 - \exp(t/\tau)^{\beta})$, where the exponent β equals 1 in most of the observations (Rinne, 2008). In our case,

Table 4
Maximum variation of the flow rate due to vibrations for each opening size. The variation is given by $\delta Q = (Q - Q_0)/Q_0$, where Q_0 is the flow rate without vibration.

D (mm)	5.22	9.47	14.88	19.9
δQ_{max} (%)	−19.8	−15.7	−10.9	−9.2

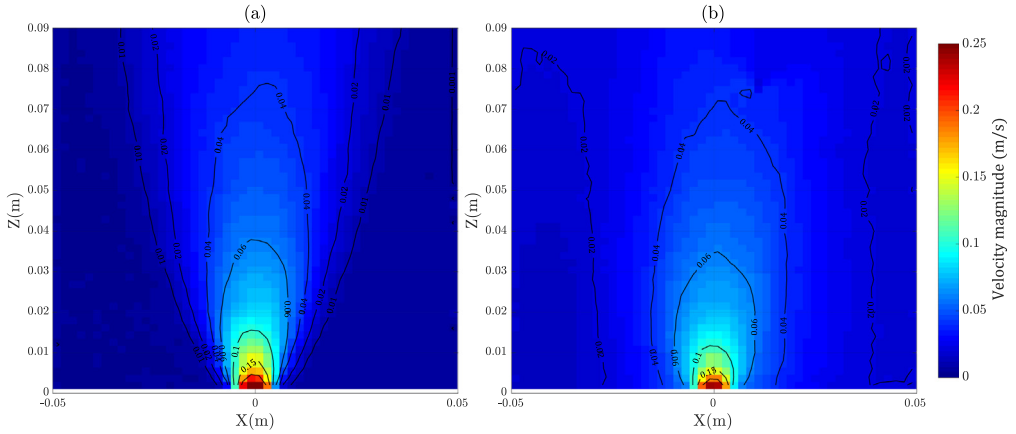


Fig. 7. Experimental velocity field at the outlet of the silo for $f = 30$ Hz and (a) $A = 100$ µm, (b) $A = 800$ µm. Black solid lines represent the iso-velocity contours. Two behaviors are observed: (a) a funnel flow and (b) a mass flow at the transition.

local plastic events in the dead zones are induced by mechanical vibrations that in turn modify the competitiveness level (Pastor et al., 2015) close to the aperture, leading to the decrease of the apparent flow rate. A similar mechanism has been observed in super stable heap (SSH) configurations where granular temperature induced by surface flows creates an exponential profile in the creeping zones (Crassous et al., 2008).

In our work, this law can be interpreted as an activated process induced by vibrations and controlled by the parameter $A\omega/\sqrt{gD}$, which can be interpreted as a Froude number related to the propagation of vibration waves into the system. Moreover, it suggests the existence of a critical Froude number Fr^* close to 1. For $Fr \ll Fr^*$, the flow rate tends to the flow rate without vibration Q_0. For $Fr \gg Fr^*$, vibrations significantly modify the flow rate, which should saturate to a limit $Q_0 \times (1 - a)$. This saturation is not observed in our experiments due to experimental limitations to reach high vibration regime, in agreement with a previous study (Wassgren et al., 2002). In order to investigate this behavior for higher Fr values, we perform in the next section DEM simulations.

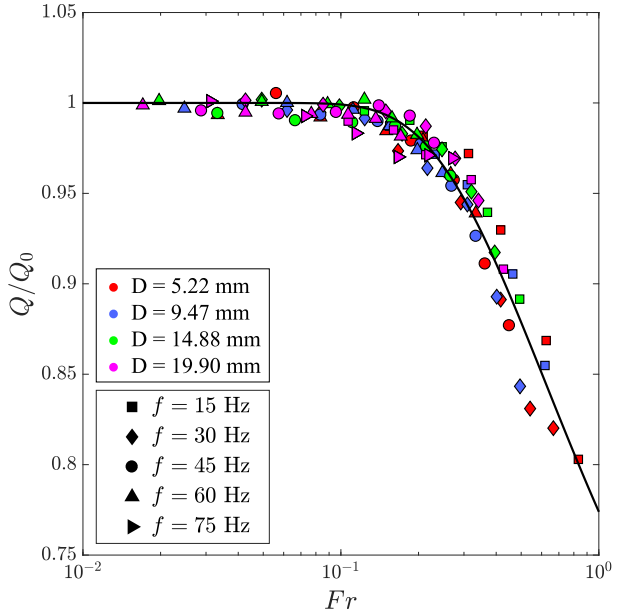


Fig. 8. Dimensionless flow rate of the silo Q/Q_0 as a function of the Froude number Fr for various f and D used in the experiments. The data well collapse on a master curve that is fitted to Eq. (7) (solid line), with $a = 0.421$ and $Fr^* = 0.622$. ($R^2 = 0.941$).

3. Numerical simulations

3.1. Simulation methods

In this part, discrete element simulations (DEM) are performed using the open-source software LIGGGHTS (Goniva et al., 2010; Kloss et al., 2012). The model used is based on the work of Cundall and Strack (1979), and details are presented in Appendix.

The geometry parameters and the physical properties of particles used in simulations are presented in Table 5. They are similar to the experiments. Typical snapshots of the simulated system is presented in Fig. 9. Simulations allow us to investigate flow behavior for high Γ values. Thus, simulations are performed for various vibration amplitude and frequency values, i.e. various Γ values, also presented in Table 5.

3.2. Numerical results

3.2.1. Flow regimes

Firstly, the evolution of the flow rate without vibration Q_0 as a function of the opening size D is plotted in Fig. 10, for both experiments and simulations. Numerical results are in good agreement with experimental ones. Discrepancies are observed for the larger opening sizes and when $D \to d$ (Fig. 10, insert), where the flow becomes unsteady and difficult to capture numerically. Thus, we have chosen to restrict the numerical study to opening sizes between 10 and 20 mm.

Table 5
Dimensions of the silo, particle and vibration properties used in the simulations.

Parameter	Value/Range
H (silo height)	500 mm
L (silo width)	100 mm
W (silo depth)	1.5 mm
d (bead diameter)	1.1 ± 0.1 mm
ρ (bead density)	2500 kg.m^{-3}
Number of beads	40000
D (opening size)	0 – 20 mm
θ (opening angle)	0°
A (amplitude)	0 – 12000 µm
f (frequency)	15 – 75 Hz
Γ (relative acceleration)	0 – 29.43

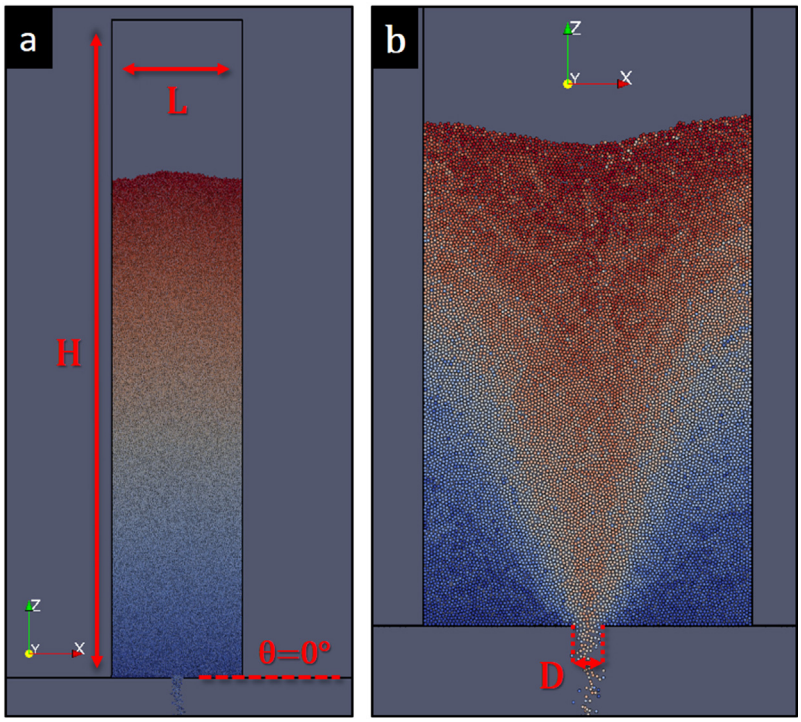


Fig. 9. Typical snapshots of the simulated system. Particles are colored in order of insertion, from blue to red. (a) The silo with an opening angle $\theta = 0°$, a height H, a width L and a depth W (values are given in Table 5). (b) Particles discharge for $\theta = 0°$ and an opening s.ize $D = 10$ mm. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

A typical evolution of the normalized flow rate Q/Q_0 as a function of the vibration amplitude A, for $D = 10$ mm and $f = 15$ Hz, is plotted in Fig. 11a. Results suggest the apparition of two flow regimes. For low A values the flow rate decreases with increasing A, in agreement with experiments (*cf* Section 2.2.2): this is the first regime. Then, the flow rate reaches a minimum before growing up to more than the flow rate without vibration Q_0: this is the second regime.

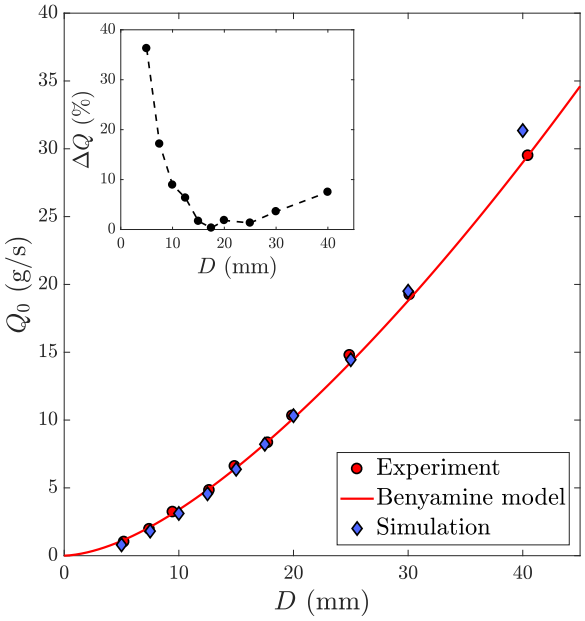


Fig. 10. Evolution of the flow rate without vibration Q_0 as a function of the opening size D. Experimental data and Benyamine fit are copied from Fig. 4. Insert: evolution of the relative difference of flow rate between the experimental fit and the simulation as a function of D, given by: $\Delta Q = |(Q_{sim} - Q_{fitexp})./Q_{fitexp}|$.

In order to explain this behavior change, the instantaneous flow rate Q_{inst} is analyzed in each regime. The time evolution of Q_{inst}/Q_0, for $f = 15$ Hz and for various amplitude values, is plotted in Fig. 11b. To go further, velocity fields obtained numerically in the first regime, close to the transition point and in the second regime are presented in Figs. 12c; respectively. Note that the numerical velocity fields are in agreement with the ones obtained experimentally (Fig. 7).

These results put in evidence the existence of a transition from a continuous funnel flow in the first regime to an intermittent flow induced by vibrations in the second regime. As already suggested (*cf* Section 2.2.2), the continuous funnel flow is explained by the setting in motion, due to vibrations, of particles initially at rest in stagnant areas (Fig. 12a and b). In Fig. 13, flow patterns of numerical results over time are presented and compared to flow patterns obtained experimentally. There is a very good match between the experimental and numerical patterns even if the experimental ones seem slightly more funneled[2]. In the second regime, the increase in flow rate suggests an intermittent burst dynamics due to sudden large rearrangements coming from compression waves propagation all along the packing. This propagation seems to be related to the vibration velocity $A\omega$ (Figs. 11b and 12c). This dynamic is presented in details in Fig. 14. The bursts of instantaneous flow rate are periodic, with the same frequency as the vibration. Moreover, the bursts present a phase shift $\psi = \pi$ compared to the vibration. The steps of this dynamic during one period, presented in Fig. 14, are as follows:

[2] This probably comes from a slight damping of the vibrations in the experiment (inhomogeneity, resonance, etc).

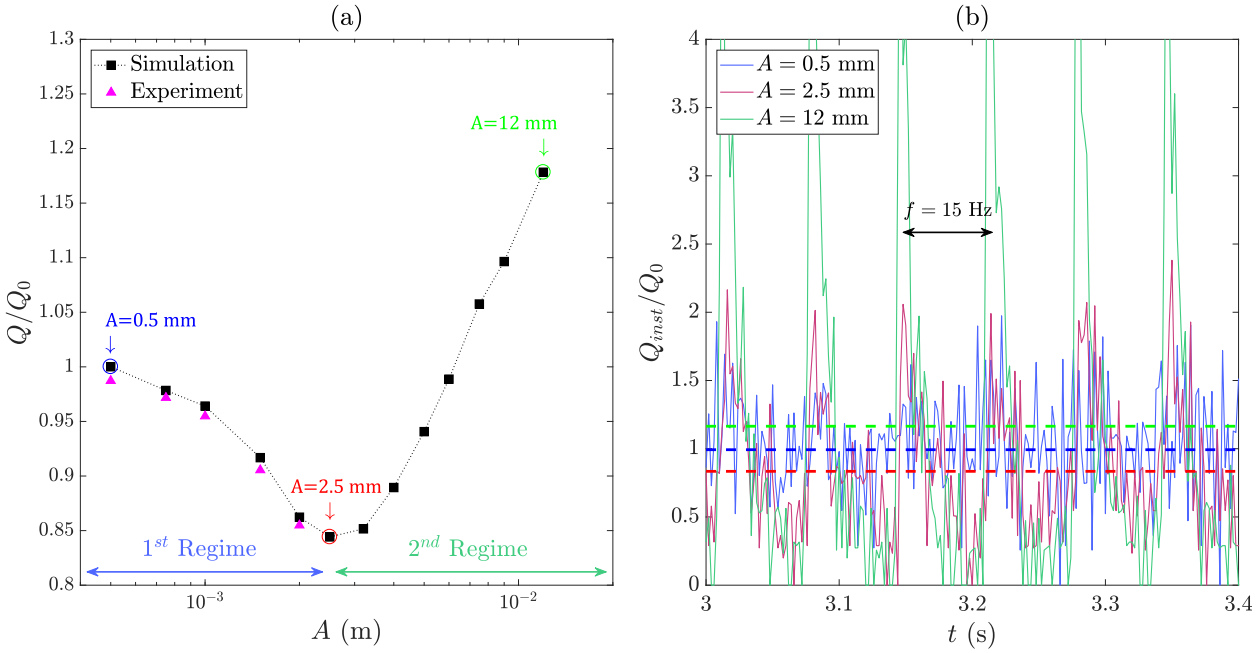


Fig. 11. (a) Typical evolution of the normalized flow rate Q/Q_0 as a function of the vibration amplitude A, for $D = 10$ mm and $f = 15$ Hz. (b) Time evolution of the instantaneous normalized flow rate Q_{inst}/Q_0, for $f = 15$ Hz and for the amplitude values $A = 0.5$ mm (blue), $A = 2.5$ mm (red) and $A = 12$ mm (green). The dashed lines represent the mean flow rate for each amplitude. The instantaneous flow rate is periodic and has the same period as vibrations. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

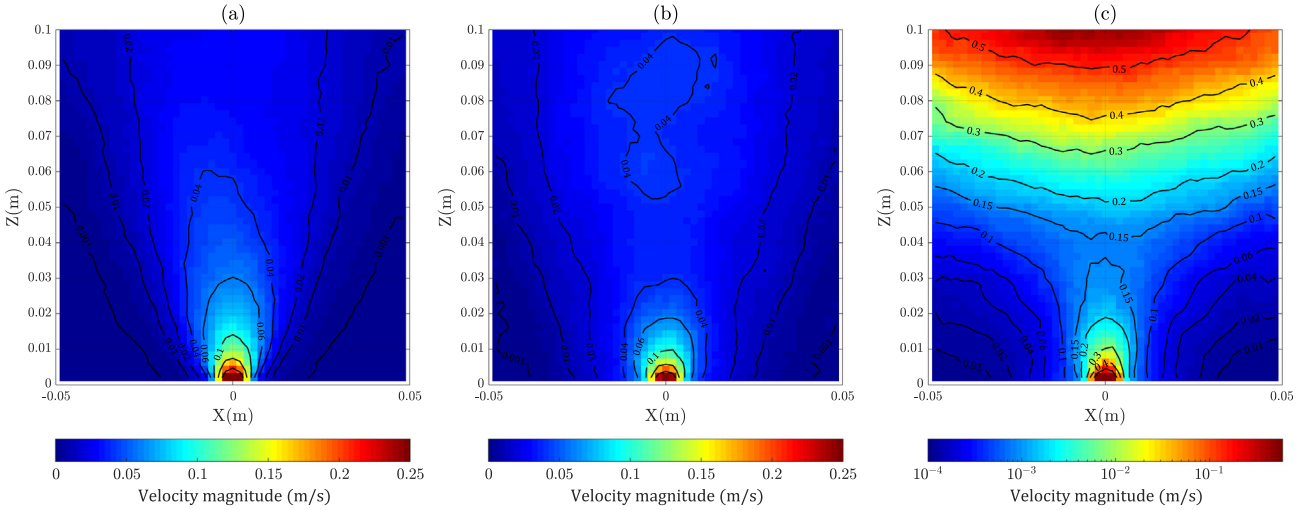


Fig. 12. Numerical velocity field at the outlet of the silo for $f = 30$ Hz and (a) $A = 100$ µm (first regime), (b) $A = 800$ µm (close to the transition) and (c) $A = 8000$ µm (second regime). Black solid lines represent the iso-velocity contours. Three behaviors are observed: (a) a funnel flow in the first regime, (b) a mass flow at the transition and (c) an intermittent flow in the second regime.

- (1) The silo and the particles near the opening are going down. The particles do not escape the silo and the flow rate is zero. Note the presence of an ascending wave ($Vz > 0$) from a previous period.
- (2) The silo stops while the particles above the opening are pushed out of the silo by the ones above them, creating a burst of the flow rate.
- (3–4) The silo begins to move upwards and drags the particles along with it. The flow rate decreases.

The size of the bursts should be influenced by the opening size D, the gravity g and the vibration velocity $A\omega$. Therefore, the flow rate in the second regime should depends on these parameters, as well as the vibration frequency f since it controls the period of the bursts.

One can remark that this second regime was not observed by Wassgren et al. (2002) in a 3D configuration. In order to determine if the effect of vibrations comes from the confinement, simulations with different wall frictions μ_{wall} are performed. The influence of the wall friction on the flow rate for $D = 10$ mm and $f = 30$ Hz is presented in Fig. 15a. Results suggest that decreasing the wall friction leads to an increase of the flow rate without vibration Q_0. The dynamics in the first regime is not modified and the wall friction controls the amplitude value at which the second regime appears. The second regime appears at lower A value by lowering the

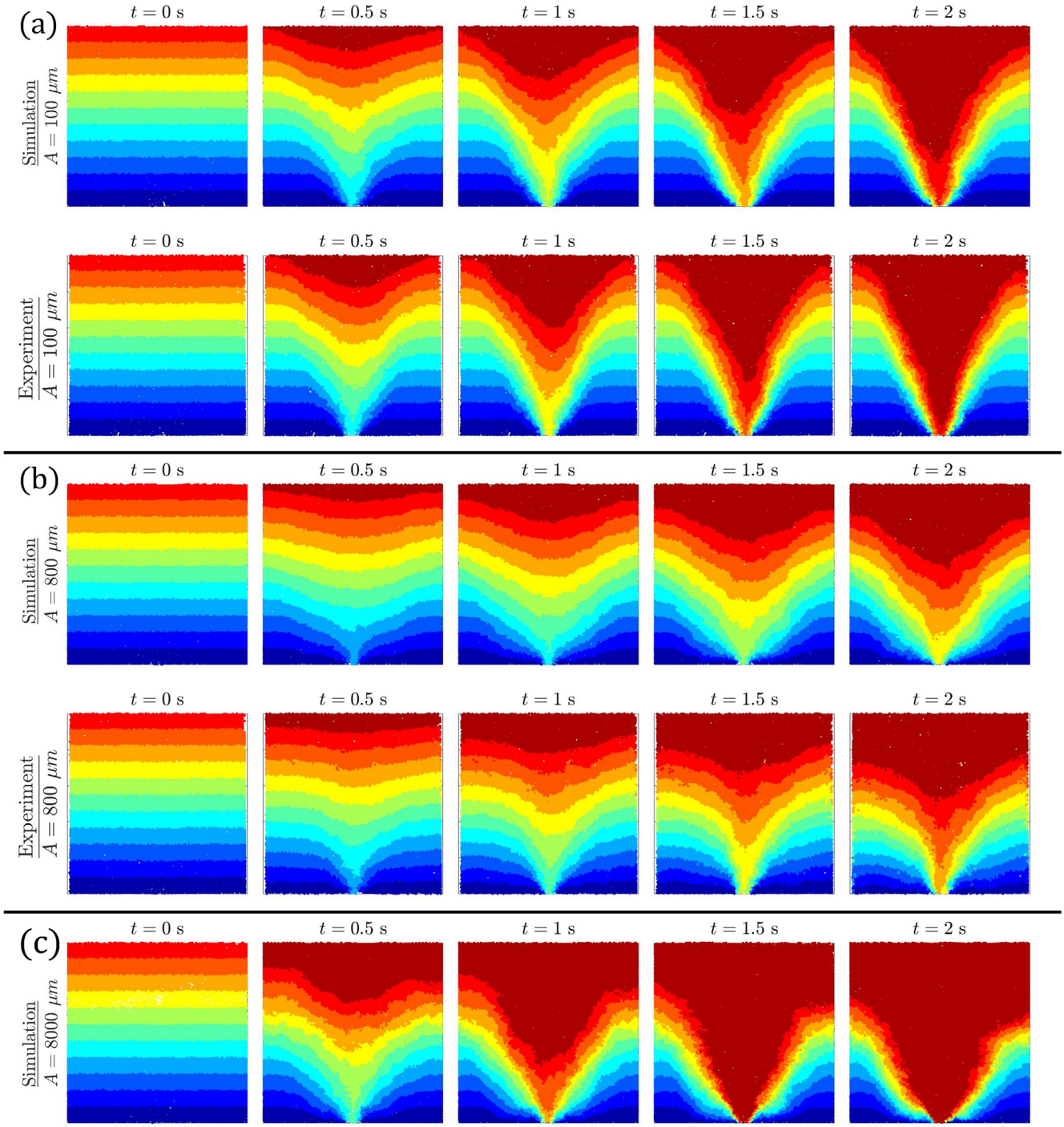


Fig. 13. Numerical and experimental flow patterns in the silo during the discharge for $f = 30$ Hz and three amplitudes: (a) $A = 100$ µm (first regime), (b) $A = 800$ µm (close to the transition) and (c) $A = 8000$ µm (second regime, unattainable in experiment). The particles are colored per layer depending on their initial position, from the bottom (blue) to the top (red) of the silo. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

friction. Thus, the results suggest that the second regime can only be observed at very high vibration intensity in 3D as suggested by the work of Wassgren et al. (2002), where the flow seems to start to saturate for high vibration intensity.

Lastly, the influence of the particle density ρ is studied. The effect of the density on the flow rate for $D = 10$ mm and $f = 30$ Hz is presented in Fig. 15b. The flow rate without vibration is modified as predicted by the Beverloo law (Beverloo et al., 1961) and its derived equations (Eqs. 3,4). For the first regime, the effect of the density is negligible. For the second regime, a slight dispersion for the highest amplitude value A is observed. In this case, the dispersion is due to the fluidization of the packing close to the free surface. Our results suggest that the dynamics in both regimes can be considered as independent of particle density.

3.2.2. Scaling law in the first regime

The evolution of the flow rate as a function of D is plotted in Fig. 16 in the first regime, for different vibration amplitude, frequency and opening sizes values (Table 3). In order to rationalize our data, the evolution of Q/Q_0 is plotted as a function of Fr, for

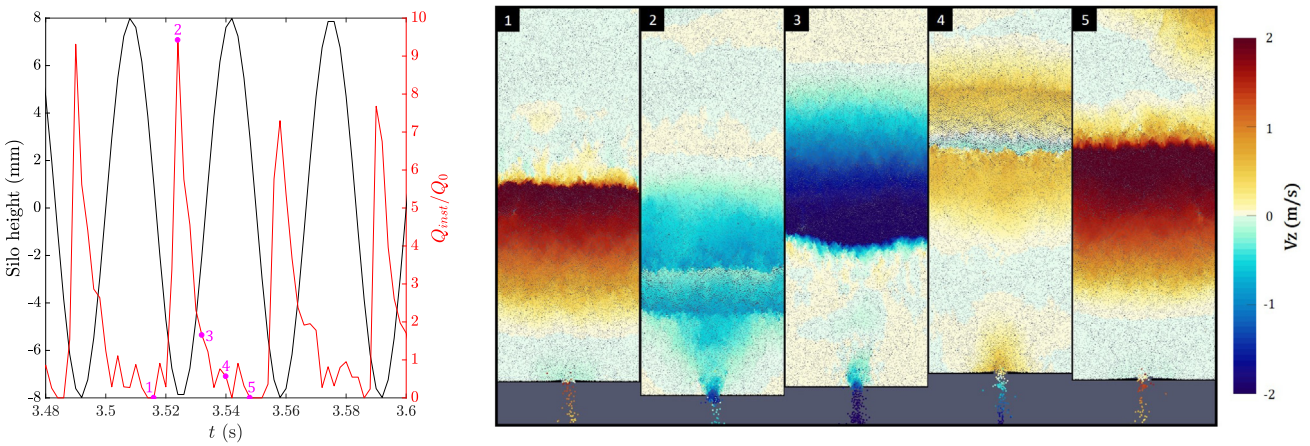


Fig. 14. Time evolution of the vertical position of the silo and the normalized instantaneous flow rate during the discharge for $D = 10$ mm, $f = 30$ Hz and $A = 8000$ µm. For each point 1 to 5, a snapshot of the flow is presented where particles are colored depending on their relative vertical velocity $Vz = Vz_{part} - Vz_{silo}$. The instantaneous flow rate presents periodic bursts (see point 2), with the same period as the vibration and a phase shift $\psi = \pi$.

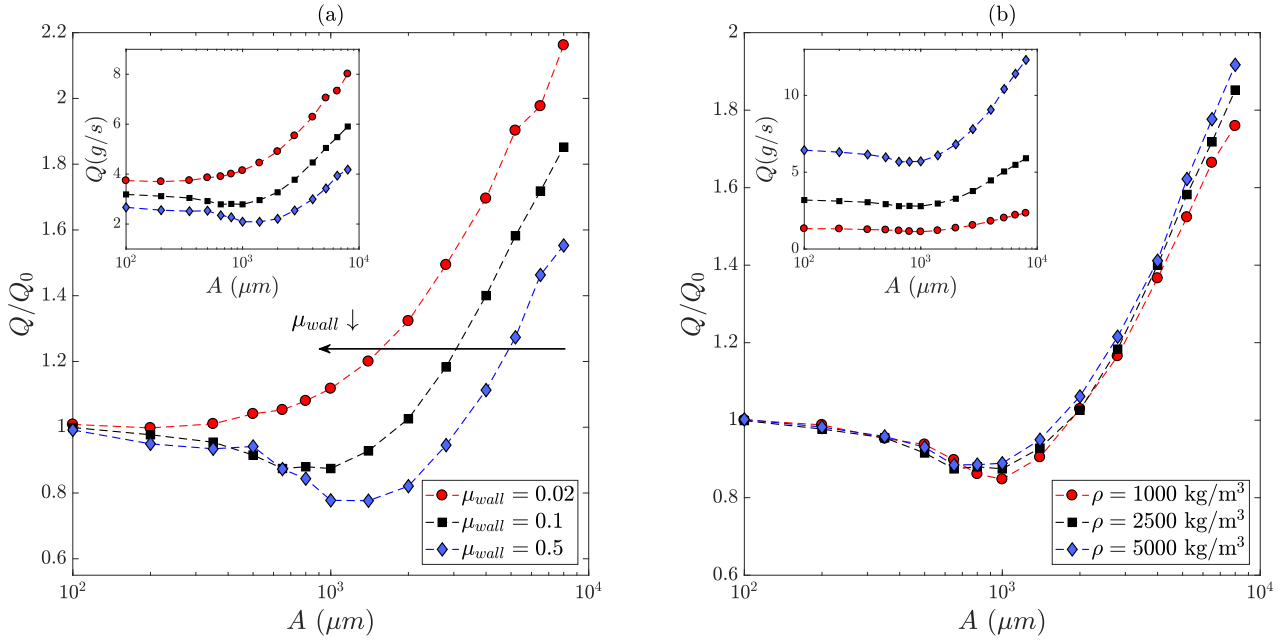


Fig. 15. Evolution of the dimensionless flow rate Q/Q_0 as a function of the amplitude A for $D = 10$ mm, $f = 30$ Hz and different (a) wall friction values μ_{wall} and (b) particle densities ρ. Inserts: evolution of the flow rate Q as a function of A. In (a) and (b) the reference values used in this paper are colored in black ($\rho = 2500$ kg.m^{-3} and $\mu_{wall} = 0.1$).

both experimental and numerical results (Fig. 17a). The data are fitted to Eq. (7). However, some discrepancies are observed at high Fr values. Indeed, particles have little time to rearrange between each vibration period at high Fr value, i.e. at high frequency. We thus propose to introduce the relative frequency Ω (Andreotti et al., 2013), which takes into account both the typical reorganization time induced by gravity and the period of vibration, such as:

$$\Omega = \frac{f}{\sqrt{g/d}} \tag{8}$$

We assume that the relative frequency modifies the exponential term of Eq. (7), in the form $Fr\Omega^{\beta}$. A β parameter sensitivity analysis has been carried out, and the results suggest that $\beta = 1/3$. The data are well fitted to a simple exponential law (Fig. 17b) similar to Eq. (7) (Benyamine et al., 2017), such as:

$$\frac{Q}{Q_0} = \mathcal{F}_1\left(Fr\Omega^{1/3}\right) = 1 - a_1 \exp\left(\frac{-b_1}{Fr\Omega^{1/3}}\right) \tag{9}$$

where a_1 and b_1 are two fitting parameters. Numerical data are well fitted to this equation with $a_1 = 0.522$ and $b_1 = 0.420$. To go further, the evolution of Q/Q_0 is plotted as a function of $Fr\Omega^{1/3}$ for both experimental and numerical results (Fig. 18). All the data well collapse on a master curve, which is fitted to Eq. (9) with $a_1 = 0.539$ and $b_1 = 0.438$.

3.2.3. Scaling law in the second regime

From a value of $Fr\Omega^{1/3}$ equals 0.4, a second regime is observed for which Q/Q_0 increases with increasing the vibration. The maximum $Fr\Omega^{1/3}$ value reached in experiments is 0.3 (Fig. 17b).

To analyze the flow rate in the second regime, we have chosen to subtract the contribution of the first regime to the normalized flow rate. We define the function $\mathcal{F}_2$ as:

$$\mathcal{F}_2 = \frac{Q}{Q_0} - \mathcal{F}_1\left(Fr\Omega^{1/3}\right) \tag{10}$$

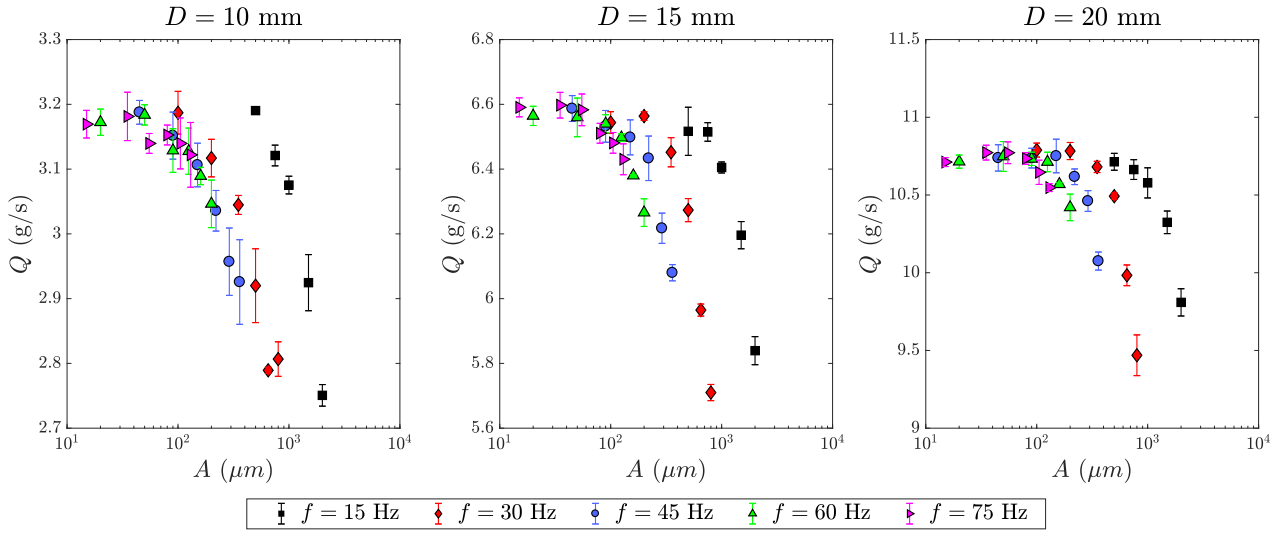


Fig. 16. Evolution of the flow rate Q as a function of the vibration amplitude A, for various frequency values f. Simulations are performed for three opening sizes $D = 10, 15$ and 20 mm.

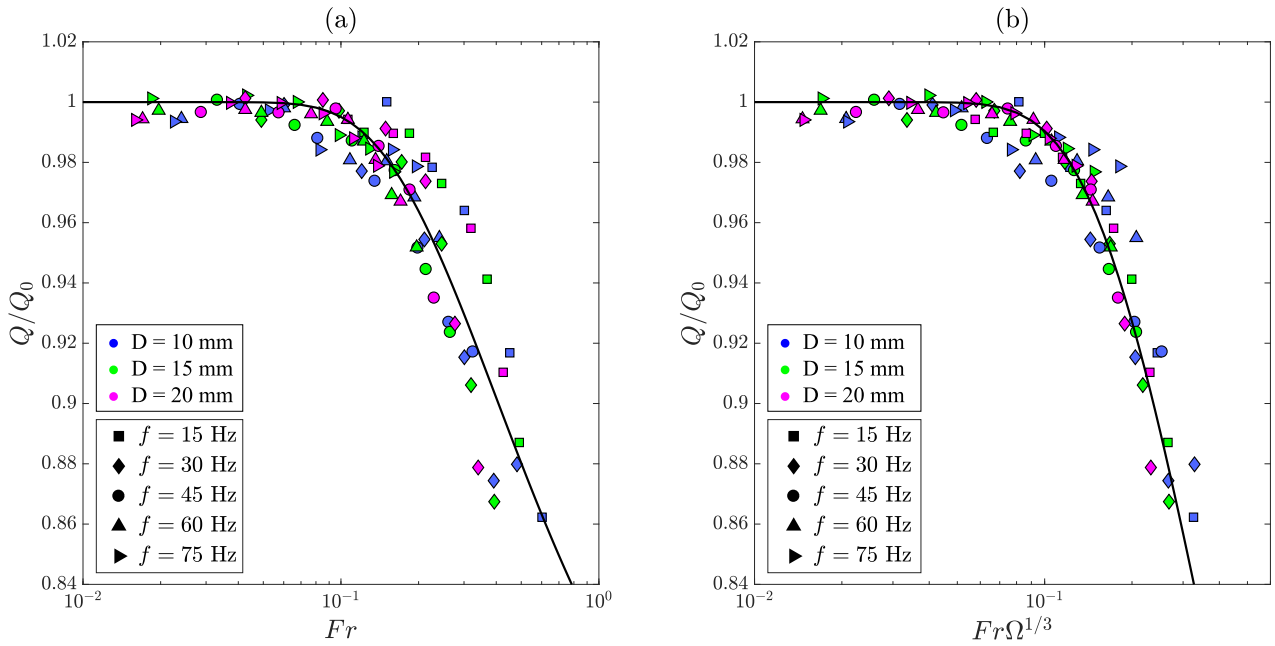


Fig. 17. For all f and D values used in simulations. (a) Evolution of the dimensionless flow rate Q/Q_0 as a function of Fr. Data are fitted to Eq. (7) (solid line), with $a = 0.266$ and $Fr^* = 0.399$ ($R^2 = 0.869$). Discrepancies appear for high Fr values. (b) Evolution of Q/Q_0 as a function of $Fr\Omega^{1/3}$. In this case, data are better rationalized and well fitted to Eq. (9) (solid line), with $a_1 = 0.552$ and $b_1 = 0.420$.($R^2 = 0.957$).

The evolution of $\mathcal{F}_2$ as a function of A is plotted in Fig. 19a. In this second regime, the flow rate starts to increase beyond a critical amplitude value that depends on D and f, similarly to an "activated process". The critical amplitude value seems to decrease with increasing f and decreasing D. This behavior is the fastest for $f = 75$ Hz and $D = 10$ mm, and the slowest for $f = 15$ Hz and $D = 20$ mm (black arrow in Fig. 19).

Regarding Eq. (7) used in the first regime, we propose to fit the data in the second regime to an exponential law, by analogy to an activated process. For high vibration intensity, $\mathcal{F}_2$ is expected to tend to a maximum value due to a saturation effect. Therefore, the following equation is proposed:

$$\mathcal{F}_2(Fr\Omega^{1/2}) = a_2 \exp\left(\frac{-b_2}{Fr\Omega^{1/2}}\right) \tag{11}$$

where a_2 and b_2 are two fitting parameters.

The evolution of $\mathcal{F}_2$ as a function of the Froude number Fr is plotted in Fig. 19b. This scaling seems to take into account the influence of the opening size on the flow rate, but fails to capture the influence of the frequency. As already proposed in the first regime, the relative frequency Ω is introduced in order to rationalize the data. The best scaling law is obtained for (Fig. 20):

$$\frac{Q}{Q_0} - \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2\left(Fr\Omega^{1/2}\right) \tag{12}$$

Fig. 20 shows the evolution of $\mathcal{F}_2$ as a function of $Fr\Omega^{1/2}$. The data are well fitted to Eq. (11), with $a_2 = 2.41$ and $b_2 = 1.28$. The influence of the relative frequency accounts for the non-linear cou-

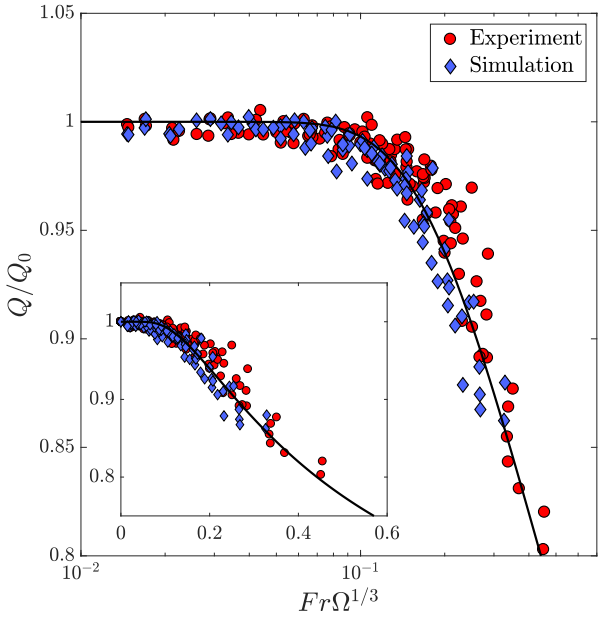


Fig. 18. Evolution of Q/Q_0 as a function of $Fr\Omega^{1/3}$, for both experimental and numerical results. Data are fitted to Eq. (9) (solid line), with $a_1 = 0.539$ and $b_1 = 0.438$ ($R^2 = 0.944$). Insert: linear plot representation.

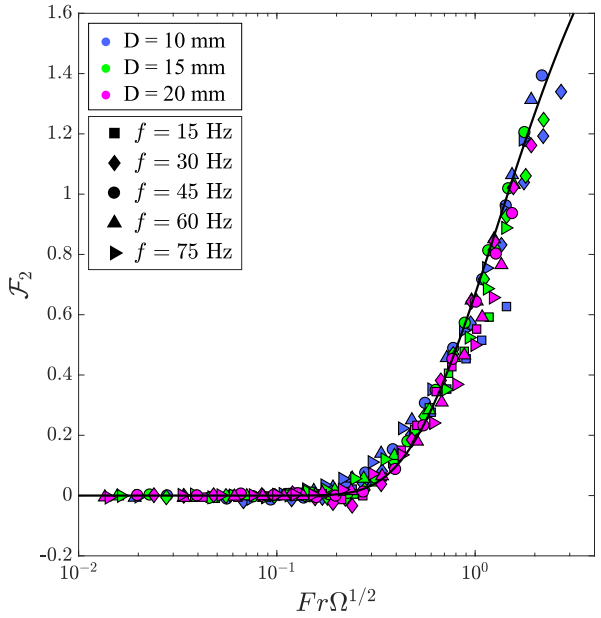


Fig. 20. In the second regime, $\mathcal{F}_2$ (Eq. (10)) as a function of $Fr\Omega^{1/2}$ for various f and D values used in the simulations. The data well collapse on a master curve that is fitted (solid line) to Eq. (11), with $a_2 = 2.41$ and $b_2 = 1.28$.($R^2 = 0.981$).

pling between vibration-induced energy in flux and losses due to contacts inelasticity (Aranson and Tsimring, 2006; Aharonov and Sparks, 1999; Melo et al., 1994). In the first regime, the dissipation takes place mainly in the bulk through intergrain collisions ($\Omega^{1/3}$), whereas friction at the wall induces a strong dissipation in the second regime ($\Omega^{1/2}$) as previously suggested in Fig. 15. An illustration of the effect of $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ on the flow rate as a function of the Froude number is presented in Fig. 21. The entire effect of the vibration is obtained by adding the contribution of each function (Fig. 21, green line).

4. Conclusion

In this paper, we were interested in the discharge of model granular system in a quasi-two dimensional silo. The influence of both mechanical vibrations and geometry parameters on the flow rate has been studied experimentally and numerically. We have put in evidence that adding vibrations makes appear two distinct regimes.

In the first regime, increasing the vibration intensity leads to the decrease of the flow rate. We have shown that this result is

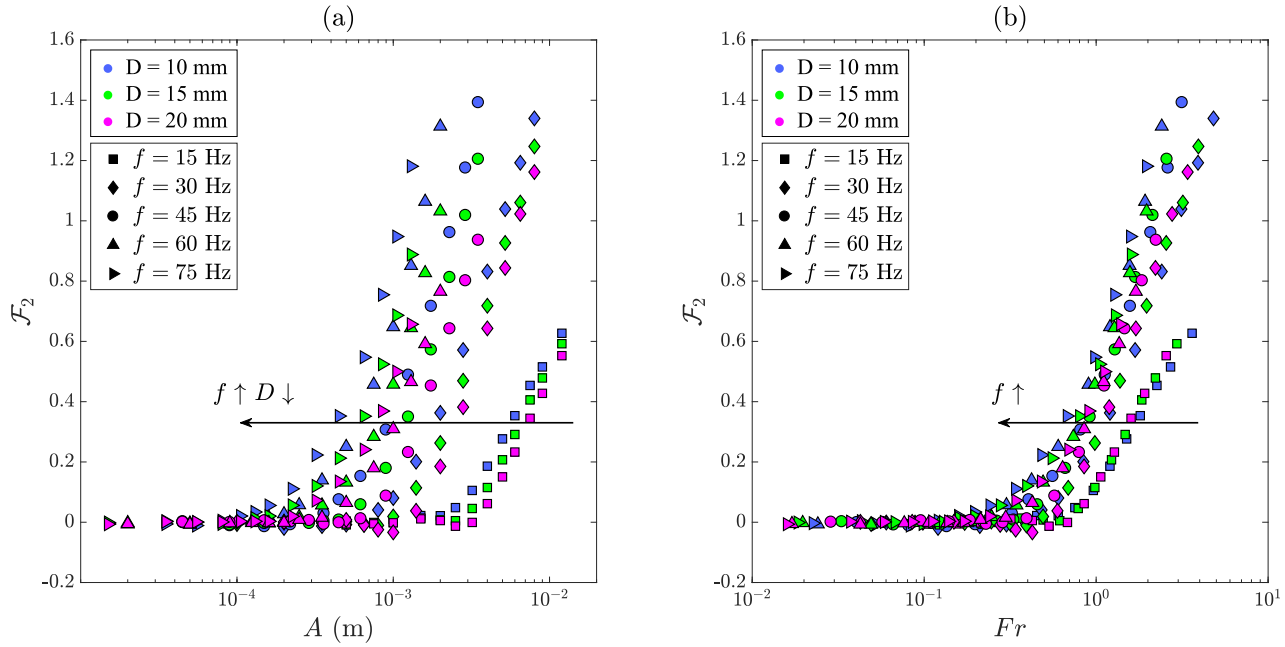


Fig. 19. In the second regime and for all f and D values used in simulations: (a) $\mathcal{F}_2$ (Eq. (10)) as a function of the amplitude A. The influence of f and D is denoted by the black arrow. (b) $\mathcal{F}_2$ (Eq. (10)) as a function of the Froude number Fr. Only the influence of f is denoted by the black arrow, since the influence of D is taken into account into Fr.

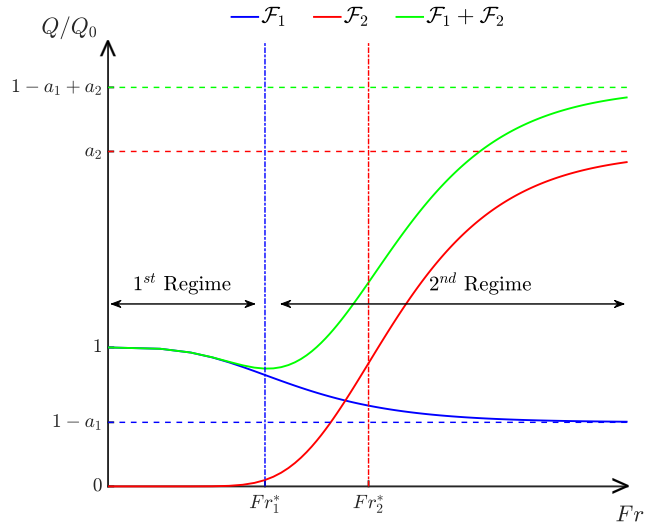


Fig. 21. Illustration of the evolution of the dimensionless flow rate as a function of the Froude number for a given relative frequency Ω. The first function $\mathcal{F}_1$ (blue line) is an exponential transition from 1 to $1-a_1$ around $Fr_1^* = b_1/\Omega^{1/3}$. The second function $\mathcal{F}_2$ (red line) is an exponential transition from 0 to a_2 around $Fr_2^* = b_2/\Omega^{1/2}$. The entire effect of the vibration is given by a combination of these two laws (green line). (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

explained by the setting in motion, due to vibrations, of particles initially at rest in stagnant areas. Increasing the vibration leads to the decrease of the stagnant areas. In this regime, both experimental and numerical results are in agreement. We have shown the behavior is well captured by an empirical law taking into account the vibration, the opening size and the particle diameter through the Froude number Fr and the relative frequency Ω, such as:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - a_1 \exp\left(\frac{-b_1}{Fr\Omega^{1/3}}\right) \tag{13}$$

In the second regime, increasing the vibration intensity leads to the increase of the flow rate. This regime have been only studied by using simulations, for high vibration frequency value. We have shown that this result is explained by an intermittent burst dynamics due to sudden large rearrangements coming from compression waves propagation all along the packing. We have put in evidence that the behavior is well captured by an empirical law similar to that used in the first regime, such as:

$$\frac{Q}{Q_0} = a_2 \exp\left(\frac{-b_2}{Fr\Omega^{1/2}}\right) \tag{14}$$

In a future work, this study could be extended to more complex cases. For instance, by studying the effect of vibrations on non-model particles as cohesive, anisotropic and polydisperse particles. The influence of the silo geometry is also an important parameter to take into account (e.g. different opening angles and 3D cases). Understanding the influence of these parameters on the two proposed laws, and linking them to the local behavior, could be a step towards a general law for granular flows submitted to mechanical vibrations.

CRediT authorship contribution statement

Arthur Pascot: Conceptualization, Investigation, Software, Writing - original draft, Writing - review & editing, Visualization. **Naïma Gaudel:** Writing - original draft, Writing - review & editing. **Sergiy Antonyuk:** Writing - review & editing. **Jérémy Bianchin:** Conceptualization. **Sébastien Kiesgen De Richter:** Conceptualization, Supervision, Writing - original draft, Writing - review & editing, Project administration.

Declaration of Competing Interest

None.

Acknowledgments

This study is conducted in the framework of the "PowderReg" project, funded by the European programme Interreg VA GR within the priority axis 4 "Strengthen the competitiveness and the attractiveness of the Grande Région/ Großregion".

Appendix A. Numerical model

The particle properties used in the numerical model are given in Table A.1. The values of the friction coefficients are taken from the literature (Géminard and Losert, 2002; Lorenz et al., 1997). Contacts between particles are calculated using a soft sphere model, which imposes a Young's modulus in the range $5 \times 10^6 \leqslant E \leqslant 1 \times 10^9$. This approach allows a minimization of the simulation time while giving realistic estimations of the flow rate and flow pattern in a silo, even for particles with a high Young's modulus (Xu et al., 2002) (for glass beads used in experiments, $E = 6.5 \times 10^{10}$ Pa). Various Young's modulus, Poisson's ratio and restitution coefficients are tested to check their influence on the flow behavior, with and without vibration.

For various coefficients tested, Fig. 22a and Fig. 22b show the evolution of the flow rate as a function of the opening size without vibration, and as a function of the amplitude at given opening size and frequency values ($D = 10$ mm and $f = 30$ Hz), respectively. In each case, the influence of the coefficient values is limited to less than 7% of variation (Fig. 22, inserts). Therefore, we choose to use the default values proposed in LIGGGHTS.

The equations used in the contact model are described in the following. When the distance between two particles is under the sum of their radius ($d_{12} < r_1 + r_2$), the Hertz contact model implemented in the software uses the following equations to calculate the contact force between the particles:

$$\mathbf{F_c} = \mathbf{F_n} + \mathbf{F_t} \tag{15}$$

with $\mathbf{F_n}$ the normal force (along the normal vector $\mathbf{n}$ between particle centers) and $\mathbf{F_t}$ the tangential force (along the tangential vector $\mathbf{t}$, perpendicular to $\mathbf{n}$), which are given by:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F_n} &= (k_n\delta_n - \gamma_n v_n)\mathbf{n} \\ \mathbf{F_t} &= (k_t\delta_t - \gamma_t v_t)\mathbf{t} \end{aligned}\right\} \text{with } F_t \leqslant \mu F_n \tag{16}$$

where k_n and k_t are the normal and tangential contact stiffness, γ_n and γ_t are the normal and tangential damping coefficients, δ_n and δ_t are the normal and tangential overlaps, v_n and v_t are the components of the relative velocity and μ is the friction between two particles. The contact stiffness and damping coefficients are defined as follows:

Table A.1
Particle properties used in the simulation. The subscripts *pp* and *pw* indicate particle–particle and particle–wall contacts, respectively.

E (Young's Modulus)		5×10^6 Pa
ν (Poisson's ratio)		0.45
μ (Friction coefficient)	μ_{pp}	0.5
	μ_{pw}	0.1
e (Restitution coefficient)	e_{pp}	0.3
	e_{pw}	0.5

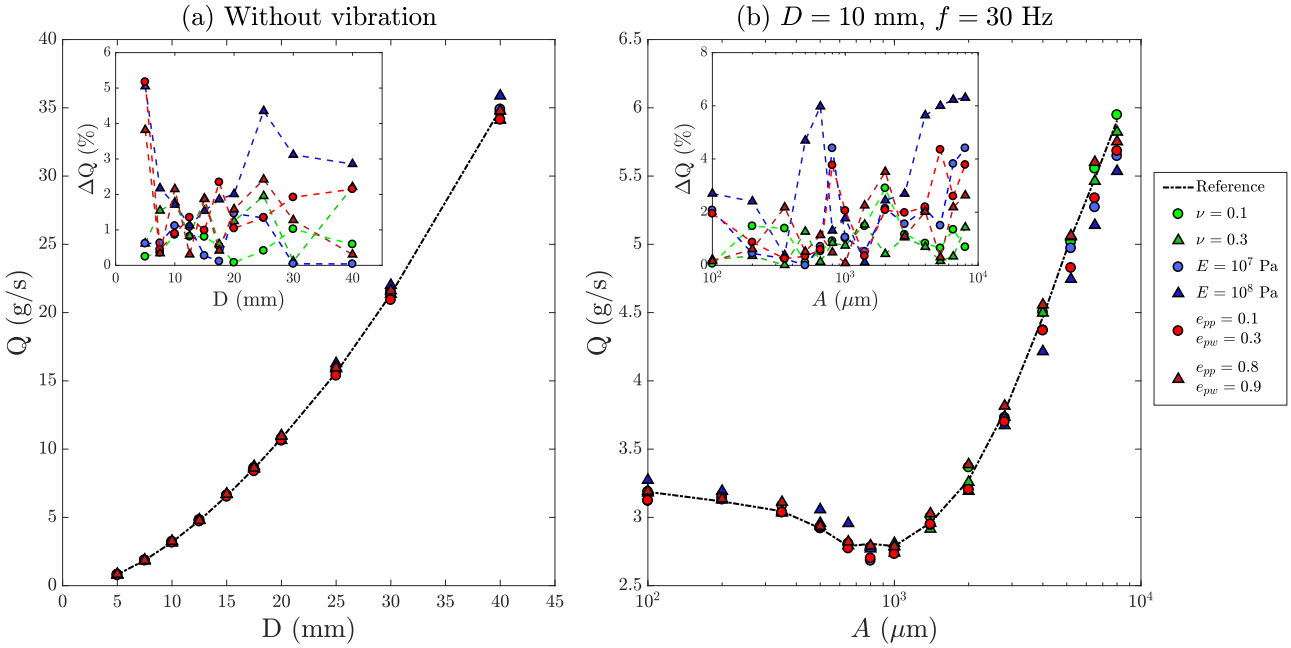


Fig. 22. Flow rate Q obtained by DEM simulation as a function of (a) the opening size D, in the case without vibration and (b) the vibration amplitude A, at given opening size ($D = 10$ mm) and frequency ($f = 30$ Hz). In each case, the reference case (black dotted line) is compared to results obtained with various values of the Young's modulus E, the Poisson's ratio ν and the restitution coefficients (colored markers). Inserts: evolution of the relative difference of flow rate between the reference and a simulated system for each case, given by: $\Delta Q = |(Q - Q_{reference})/Q_{reference}|$. (For interpretation of the references to colour in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

$$k_n = \frac{4}{3}E^*\sqrt{r^*\delta_n}, k_t = 8G^*\sqrt{r^*\delta_n} \tag{17}$$

$$\gamma_n = -2\sqrt{\frac{5}{6}}\beta\sqrt{S_n m^*} \geqslant 0 \tag{18}$$

$$\gamma_t = -2\sqrt{\frac{5}{6}}\beta\sqrt{S_t m^*} \geqslant 0 \tag{19}$$

with E^* the effective Young's modulus, G^* the effective shear modulus, r^* the effective radius, m^* the effective mass, S_n and S_t the damping parameters and β the damping ratio. The effective values are calculated from the properties of the two particles in contact, using the following equations:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{20}$$

$$\frac{1}{G^*} = \frac{2(2-\nu_1^2)(1+\nu_1)}{E_1} + \frac{2(2-\nu_2^2)(1+\nu_2)}{E_2} \tag{21}$$

$$\frac{1}{r^*} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{22}$$

Lastly, the damping parameters and damping ratio are defined as follows:

$$S_n = 2E^*\sqrt{r*\delta_n}, \quad S_t = 8G^*\sqrt{r^*\delta_n} \tag{23}$$

$$\beta = \frac{\ln(e)}{\sqrt{\ln^2(e) + \pi^2}} \tag{24}$$

References

Aharonov, E., Sparks, D., 1999. Rigidity phase transition in granular packings. Phys. Rev. E 60 (6), 6890.

Anand, A., Curtis, J.S., Wassgren, C.R., Hancock, B.C., Ketterhagen, W.R., 2009. Predicting discharge dynamics of wet cohesive particles from a rectangular hopper using the discrete element method (dem). Chem. Eng. Sci. 64 (24), 5268–5275.

Andreotti, B., Forterre, Y., Pouliquen, O., 2013. Granular media: between fluid and solid. Cambridge University Press.

Aranson, I.S., Tsimring, L.S., 2006. Patterns and collective behavior in granular media: theoretical concepts. Rev. Modern Phys. 78 (2), 641.

Benyamine, M., Aussillous, P., Dalloz-Dubrujeaud, B., 2017. Discharge flow of a granular media from a silo: effect of the packing fraction and of the hopper angle. In: EPJ Web of Conferences, Vol. 140, EDP Sciences, 2017, p. 03043.

Beverloo, W.A., Leniger, H.A., Van de Velde, J., 1961. The flow of granular solids through orifices. Chem. Eng. Sci. 15 (3–4), 260–269.

Cleary, P.W., Sawley, M.L., 2002. Dem modelling of industrial granular flows: 3d case studies and the effect of particle shape on hopper discharge. Appl. Math. Model. 26 (2), 89–111.

Crassous, J., Metayer, J.-F., Richard, P., Laroche, C., 2008. Experimental study of a creeping granular flow at very low velocity. J. Stat. Mech.: Theory Exp. 2008 (03), P03009.

Cundall, P.A., Strack, O.D., 1979. A discrete numerical model for granular assemblies. Geotechnique 29 (1), 47–65.

Datta, A., Mishra, B., Das, S., Sahu, A., 2008. A dem analysis of flow characteristics of noncohesive particles in hopper. Mater. Manuf. Process. 23 (2), 195–202.

de Richter, S.K., Le Caër, G., Delannay, R., 2009. Heterogeneous dynamics of a granular pack under vertical tapping. EPL (Europhys. Lett.) 85 (5), 58004.

Drake, T.G., 1991. Granular flow: physical experiments and their implications for microstructural theories. J. Fluid Mech. 225, 121–152.

Fayed, M., Otten, L., 2013. Handbook of Powder Science & Technology. Springer Science & Business Media.

Fraige, F.Y., Langston, P.A., Matchett, A.J., Dodds, J., 2008. Vibration induced flow in hoppers: Dem 2d polygon model. Particuology 6 (6), 455–466.

Gaudel, N., de Richter, S.K., Louvet, N., Jenny, M., Skali-Lami, S., 2016. Granular avalanches down inclined and vibrated planes. Phys. Rev. E 94 (3), 032904.

Gaudel, N., de Richter, S.K., Louvet, N., Jenny, M., Skali-Lami, S., 2017. Bulk and local rheology in a dense and vibrated granular suspension. Phys. Rev. E 96 (6), 062905.

Géminard, J.-C., Losert, W., 2002. Frictional properties of bidisperse granular matter: Effect of mixing ratio. Phys. Rev. E 65 (4), 041301.

Goniva, C., Kloss, C., Hager, A., Pirker, S., 2010. An open source cfd-dem perspective. In: Proceedings of OpenFOAM Workshop, Göteborg, pp. 1–10.

Govender, N., Wilke, D.N., Pizette, P., Abriak, N.-E., 2018. A study of shape non-uniformity and poly-dispersity in hopper discharge of spherical and polyhedral particle systems using the blaze-dem gpu code. Appl. Math. Comput. 319, 318–336.

Guerrero, B., Lozano, C., Zuriguel, I., Garcimartín, A., 2017. Dynamics of breaking arches under a constant vibration. In: EPJ Web of Conferences, Vol. 140, EDP Sciences, 2017, p. 03016.

Hanotin, C., Marchal, P., Michot, L.J., Baravian, C., de Richter, S.K., 2013. Dynamics of vibrated granular suspensions probed by mechanical spectroscopy and diffusing wave spectroscopy measurements. Soft Matter 9 (39), 9352–9360.

Höhner, D., Wirtz, S., Scherer, V., 2015. A study on the influence of particle shape on the mechanical interactions of granular media in a hopper using the discrete element method. Powder Technol. 278, 286–305.

Hund, D., Weis, D., Hesse, R., Antonyuk, S., 2017. Simulation study of the discharge characteristics of silos with cohesive particles. In: EPJ Web of Conferences, Vol. 140, EDP Sciences, 2017, p. 08015.

Hunt, M., Weathers, R., Lee, A., Brennen, C., Wassgren, C., 1999. Effects of horizontal vibration on hopper flows of granular materials. Phys. Fluids 11 (1), 68–75.
Janda, A., Zuriguel, I., Garcimartín, A., Pugnaloni, L.A., Maza, D., 2008. Jamming and critical outlet size in the discharge of a two-dimensional silo. EPL (Europhys. Lett.) 84 (4), 44002.
Janda, A., Maza, D., Garcimartín, A., Kolb, E., Lanuza, J., Clément, E., 2009. Unjamming a granular hopper by vibration. EPL (Europhys. Lett.) 87 (2), 24002.
Janda, A., Zuriguel, I., Maza, D., 2012. Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles. Phys. Rev. Lett. 108 (24), 248001.
Ketterhagen, W.R., Curtis, J.S., Wassgren, C.R., Hancock, B.C., 2008. Modeling granular segregation in flow from quasi-three-dimensional, wedge-shaped hoppers. Powder Technol. 179 (3), 126–143.
Kloss, C., Goniva, C., Hager, A., Amberger, S., Pirker, S., 2012. Models, algorithms and validation for opensource dem and cfd–dem. Prog. Comput. Fluid Dynam., Int. J. 12 (2–3), 140–152.
Kollmann, T., Tomas, J., 2002. Effect of applied vibration on silo hopper design. Particul. Sci. Technol. 20 (1), 15–31.
Langston, P.A., Tüzün, U., Heyes, D.M., 1995. Discrete element simulation of granular flow in 2d and 3d hoppers: dependence of discharge rate and wall stress on particle interactions. Chem. Eng. Sci. 50 (6), 967–987.
Lorenz, A., Tuozzolo, C., Louge, M., 1997. Measurements of impact properties of small, nearly spherical particles. Exp. Mech. 37 (3), 292–298.
Mankoc, C., Janda, A., Arevalo, R., Pastor, J., Zuriguel, I., Garcimartín, A., Maza, D., 2007. The flow rate of granular materials through an orifice. Granul. Matter 9 (6), 407–414.
Mankoc, C., Garcimartín, A., Zuriguel, I., Maza, D., Pugnaloni, L.A., 2009. Role of vibrations in the jamming and unjamming of grains discharging from a silo. Phys. Rev. E 80 (1), 011309.
Medina, A., Cordova, J., Luna, E., Trevino, C., 1998. Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2d silo. Phys. Lett. A 250 (1–3), 111–116.
Melo, F., Umbanhowar, P., Swinney, H.L., 1994. Transition to parametric wave patterns in a vertically oscillated granular layer. Phys. Rev. Lett. 72 (1), 172.
Nedderman, R., Tüzün, U., Savage, S., Houlsby, G., 1982. The flow of granular materials—i: discharge rates from hoppers. Chem. Eng. Sci 37 (11), 1597–1609.
Pastor, J.M., Garcimartín, A., Gago, P.A., Peralta, J.P., Martín-Gómez, C., Ferrer, L.M., Maza, D., Parisi, D.R., Pugnaloni, L.A., Zuriguel, I., 2015. Experimental proof of faster-is-slower in systems of frictional particles flowing through constrictions. Phys. Rev. E 92 (6), 062817.
Rinne, H., 2008. The Weibull distribution: a handbook. Chapman and Hall/CRC.
To, K., Lai, P.-Y., Pak, H., 2001. Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. Phys. Rev. Lett. 86 (1), 71.
Uñac, R.O., Vidales, A.M., Benegas, O., Ippolito, I., 2012. Experimental study of discharge rate fluctuations in a silo with different hopper geometries. Powder Technol. 225, 214–220.
Van De Laar, T., Ten Klooster, S., Schroën, K., Sprakel, J., 2016. Transition-state theory predicts clogging at the microscale. Scient. Rep. 6 (1), 1–8.
Wassgren, C.R., Hunt, M.L., Freese, P., Palamara, J., Brennen, C., 2002. Effects of vertical vibration on hopper flows of granular material. Phys. Fluids 14 (10), 3439–3448.
Xu, Y., Kafui, K., Thornton, C., Lian, G., 2002. Effects of material properties on granular flow in a silo using dem simulation. Particul. Sci. Technol. 20 (2), 109–124.
Zhang, C., Qiu, C., Pu, C., Fan, X., Cao, P., 2018. The mechanism of vibrations-aided gravitational flow with overhanging style in hopper. Powder Technol. 327, 291–302.
Zuriguel, I., Garcimartín, A., Maza, D., Pugnaloni, L.A., Pastor, J., 2005. Jamming during the discharge of granular matter from a silo. Phys. Rev. E 71 (5), 051303.
Zuriguel, I., Janda, Á., Arévalo, R., Maza, D., Garcimartín, Á., 2017. Clogging and unclogging of many-particle systems passing through a bottleneck. In: EPJ Web of Conferences, Vol. 140, EDP Sciences, 2017, p. 01002.

Bibliographie

[1] Thomas C Hales. A proof of the kepler conjecture. *Annals of mathematics*, pages 1065–1185, 2005.

[2] G David Scott. Packing of spheres : packing of equal spheres. *Nature*, 188(4754) :908, 1960.

[3] GD Scott and DM Kilgour. The density of random close packing of spheres. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 2(6) :863, 1969.

[4] George Y Onoda and Eric G Liniger. Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Physical review letters*, 64(22) :2727, 1990.

[5] Bruno Andreotti, Yoël Forterre, and Olivier Pouliquen. *Les milieux granulaires-entre fluide et solide : Entre fluide et solide*. EDP sciences, 2012.

[6] Jacques Duran. *Sables, poudres et grains*. Number BOOK. Eyrolles, 1997.

[7] Geoffroy Lumay and Nicolas Vandewalle. Compaction of anisotropic granular materials : experiments and simulations. *Physical Review E*, 70(5) :051314, 2004.

[8] Salvatore Pillitteri, Geoffroy Lumay, Eric Opsomer, and Nicolas Vandewalle. From jamming to fast compaction dynamics in granular binary mixtures. *Scientific Reports*, 9(1) :1–7, 2019.

[9] Guillaume Ovarlez, Quentin Barral, and Philippe Coussot. Three-dimensional jamming and flows of soft glassy materials. *Nature materials*, 9(2) :115–119, 2010.

[10] Andrea J Liu and Sidney R Nagel. Nonlinear dynamics : Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396(6706) :21, 1998.

[11] Frank Philip Bowden, Frank Philip Bowden, and David Tabor. *The friction and lubrication of solids*, volume 1. Oxford university press, 2001.

[12] Kenneth Langstreth Johnson, Kevin Kendall, and aAD Roberts. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proceedings of the royal society of London. A. mathematical and physical sciences*, 324(1558) :301–313, 1971.

[13] Boris V Derjaguin, Vladimir M Muller, and Yu P Toporov. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *Journal of Colloid and interface science*, 53(2) :314–326, 1975.

[14] Claire Gaiani, Joel Scher, Jean Jacques Ehrhardt, Michel Linder, Pierre Schuck, Stephane Desobry, and Sylvie Banon. Relationships between dairy powder surface composition and wetting properties during storage : importance of residual lipids. *Journal of agricultural and food chemistry*, 55(16) :6561–6567, 2007.

[15] Ingrid Murrieta-Pazos, C Gaiani, Laurence Galet, Bernard Cuq, S Desobry, and J Scher. Comparative study of particle structure evolution during water sorption : skim and whole milk powders. *Colloids and Surfaces B : Biointerfaces*, 87(1) :1–10, 2011.

[16] Lydéric Bocquet, Elisabeth Charlaix, and Frédéric Restagno. Physics of humid granular media. *Comptes Rendus Physique*, 3(2) :207–215, 2002.

[17] N Huang, G Ovarlez, F Bertrand, S Rodts, P Coussot, and Daniel Bonn. Flow of wet granular materials. *Physical review letters*, 94(2) :028301, 2005.

[18] Namiko Mitarai and Franco Nori. Wet granular materials. *Advances in Physics*, 55(1-2) :1–45, 2006.

[19] Stephan Herminghaus*. Dynamics of wet granular matter. *Advances in physics*, 54(3) :221–261, 2005.

[20] Christopher D Willett, Michael J Adams, Simon A Johnson, and Jonathan PK Seville. Capillary bridges between two spherical bodies. *Langmuir*, 16(24) :9396–9405, 2000.

[21] Peter A Cundall and Otto DL Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *geotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.

[22] Naïma Gaudel and Sébastien Kiesgen De Richter. Effect of vibrations on granular material flows down an inclined plane using dem simulations. *Powder technology*, 346 :256–264, 2019.

[23] Riccardo Maione, Sebastien Kiesgen De Richter, Guillain Mauviel, and Gabriel Wild. Dem investigation of granular flow and binary mixture segregation in a rotating tumbler : Influence of particle shape and internal baffles. *Powder Technology*, 286 :732–739, 2015.

[24] Frédéric Da Cruz, Sacha Emam, Michaël Prochnow, Jean-Noël Roux, and François Chevoir. Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72(2) :021309, 2005.

[25] Ivan Iordanoff and MM Khonsari. Granular lubrication : toward an understanding of the transition between kinetic and quasi-fluid regime. *J. Trib.*, 126(1) :137–145, 2004.

[26] Pierre Jop, Yoël Forterre, and Olivier Pouliquen. Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, 541 :167–192, 2005.

[27] Olivier Pouliquen, Cyril Cassar, Pierre Jop, Yoel Forterre, and Maxime Nicolas. Flow of dense granular material : towards simple constitutive laws. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2006(07) :P07020, 2006.

[28] Axelle Amon, Ary Bruand, Jérôme Crassous, Eric Clément, et al. Hot spots in an athermal system. *Physical review letters*, 108(13) :135502, 2012.

[29] Adeline Pons, Axelle Amon, Thierry Darnige, Jérôme Crassous, and Eric Clément. Mechanical fluctuations suppress the threshold of soft-glassy solids : the secular drift scenario. *Physical Review E*, 92(2) :020201, 2015.

[30] Farhang Radjai, H Troadec, and Stéphane Roux. Micro-statistical features of cohesionless granular media. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 37 :34–45, 2003.

[31] G Lois, A Lemaitre, and JM Carlson. Emergence of multi-contact interactions in contact dynamics simulations of granular shear flows. *EPL (Europhysics Letters)*, 76(2) :318, 2006.

[32] Olivier Pouliquen. Velocity correlations in dense granular flows. *Physical review letters*, 93(24) :248001, 2004.

[33] Oleh Baran, Deniz Ertaş, Thomas C Halsey, Gary S Grest, and Jeremy B Lechman. Velocity correlations in dense gravity-driven granular chute flow. *Physical Review E*, 74(5) :051302, 2006.

[34] Joshua A Dijksman, Geert H Wortel, Louwrens TH van Dellen, Olivier Dauchot, and Martin van Hecke. Jamming, yielding, and rheology of weakly vibrated granular media. *Physical review letters*, 107(10) :108303, 2011.

[35] Caroline Hanotin, S Kiesgen De Richter, Philippe Marchal, Laurent J Michot, and Christophe Baravian. Vibration-induced liquefaction of granular suspensions. *Physical Review Letters*, 108(19) :198301, 2012.

[36] Ph Marchal, Caroline Hanotin, LJ Michot, and S Kiesgen de Richter. Two-state model to describe the rheological behavior of vibrated granular matter. *Physical Review E*, 88(1) :012207, 2013.

[37] Naïma Gaudel, Sébastien Kiesgen de Richter, Nicolas Louvet, Mathieu Jenny, and Salaheddine Skali-Lami. Bulk and local rheology in a dense and vibrated granular suspension. *Physical Review E*, 96(6) :062905, 2017.

[38] Olivier Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Physics of fluids*, 11(3) :542–548, 1999.

[39] Olivier Pouliquen and Yoel Forterre. Friction law for dense granular flows : application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *Journal of fluid mechanics*, 453 :133–151, 2002.

[40] PG Rognon, J-N Roux, D Wolf, M Naaïm, and F Chevoir. Rheophysics of cohesive granular materials. *EPL (Europhysics Letters)*, 74(4) :644, 2006.

[41] Yoël Forterre and Olivier Pouliquen. Flows of dense granular media. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40 :1–24, 2008.

[42] Naïma Gaudel, Sébastien Kiesgen de Richter, Nicolas Louvet, Mathieu Jenny, and Salaheddine Skali-Lami. Granular avalanches down inclined and vibrated planes. *Physical Review E*, 94(3) :032904, 2016.

[43] Matthias Sperl. Experiments on corn pressure in silo cells–translation and comment of janssen's paper from 1895. *Granular Matter*, 8(2) :59–65, 2006.

[44] W Ar Beverloo, Hendrik Antonie Leniger, and J Van de Velde. The flow of granular solids through orifices. *Chemical engineering science*, 15(3-4) :260–269, 1961.

[45] C Mankoc, A Janda, Roberto Arevalo, JM Pastor, Iker Zuriguel, A Garcimartín, and Diego Maza. The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular Matter*, 9(6) :407–414, 2007.

[46] Alvaro Janda, Iker Zuriguel, and Diego Maza. Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles. *Physical review letters*, 108(24) :248001, 2012.

[47] Mebirika Benyamine, Pascale Aussillous, and Blanche Dalloz-Dubrujeaud. Discharge flow of a granular media from a silo : effect of the packing fraction and of the hopper angle. In *EPJ Web of Conferences*, volume 140, page 03043. EDP Sciences, 2017.

[48] Paul W Cleary and Mark L Sawley. Dem modelling of industrial granular flows : 3d case studies and the effect of particle shape on hopper discharge. *Applied Mathematical Modelling*, 26(2) :89–111,

2002.

[49] D Höhner, S Wirtz, and V Scherer. A study on the influence of particle shape on the mechanical interactions of granular media in a hopper using the discrete element method. *Powder technology*, 278 :286–305, 2015.

[50] Nicolin Govender, Daniel N Wilke, Patrick Pizette, and Nor-Edine Abriak. A study of shape non-uniformity and poly-dispersity in hopper discharge of spherical and polyhedral particle systems using the blaze-dem gpu code. *Applied Mathematics and Computation*, 319 :318–336, 2018.

[51] Anshu Anand, Jennifer S Curtis, Carl R Wassgren, Bruno C Hancock, and William R Ketterhagen. Predicting discharge dynamics of wet cohesive particles from a rectangular hopper using the discrete element method (dem). *Chemical Engineering Science*, 64(24) :5268–5275, 2009.

[52] TC Souza Pinto, Odair Alves de Lima, and Laurindo de Salles Leal Filho. Sphericity of apatite particles determined by gas permeability through packed beds. *Mining, Metallurgy & Exploration*, 26(2) :105–108, 2009.

[53] A Janda, Iker Zuriguel, A Garcimartín, Luis A Pugnaloni, and Diego Maza. Jamming and critical outlet size in the discharge of a two-dimensional silo. *EPL (Europhysics Letters)*, 84(4) :44002, 2008.

[54] Kiwing To, Pik-Yin Lai, and HK Pak. Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. *Physical review letters*, 86(1) :71, 2001.

[55] Iker Zuriguel, Angel Garcimartín, Diego Maza, Luis A Pugnaloni, and JM Pastor. Jamming during the discharge of granular matter from a silo. *Physical Review E*, 71(5) :051303, 2005.

[56] A Garcimartín, JM Pastor, LM Ferrer, JJ Ramos, C Martín-Gómez, and I Zuriguel. Flow and clogging of a sheep herd passing through a bottleneck. *Physical Review E*, 91(2) :022808, 2015.

[57] José M Pastor, Angel Garcimartín, Paula A Gago, Juan P Peralta, César Martín-Gómez, Luis M Ferrer, Diego Maza, Daniel R Parisi, Luis A Pugnaloni, and Iker Zuriguel. Experimental proof of faster-is-slower in systems of frictional particles flowing through constrictions. *Physical Review E*, 92(6) :062817, 2015.

[58] Cristian Mankoc, Angel Garcimartín, Iker Zuriguel, Diego Maza, and Luis A Pugnaloni. Role of vibrations in the jamming and unjamming of grains discharging from a silo. *Physical Review E*, 80(1) :011309, 2009.

[59] A Janda, Diego Maza, A Garcimartín, E Kolb, J Lanuza, and E Clément. Unjamming a granular hopper by vibration. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(2) :24002, 2009.

[60] Iker Zuriguel, Álvaro Janda, Roberto Arévalo, Diego Maza, and Ángel Garcimartín. Clogging and unclogging of many-particle systems passing through a bottleneck. In *EPJ Web of Conferences*, volume 140, page 01002. EDP Sciences, 2017.

[61] Bruno Guerrero, Celia Lozano, Iker Zuriguel, and Angel Garcimartín. Dynamics of breaking arches under a constant vibration. In *EPJ Web of Conferences*, volume 140, page 03016. EDP Sciences, 2017.

[62] Chunyang Zhang, Caimou Qiu, Chengzhi Pu, Xiang Fan, and Ping Cao. The mechanism of vibrations-aided gravitational flow with overhanging style in hopper. *Powder technology*, 327 :291–302, 2018.

[63] Th Kollmann and J Tomas. Effect of applied vibration on silo hopper design. *Particulate science and technology*, 20(1) :15–31, 2002.

[64] Feras Y Fraige, Paul A Langston, Andrew J Matchett, and John Dodds. Vibration induced flow in hoppers : Dem 2d polygon model. *Particuology*, 6(6) :455–466, 2008.

[65] ML Hunt, RC Weathers, AT Lee, CE Brennen, and CR Wassgren. Effects of horizontal vibration on hopper flows of granular materials. *Physics of fluids*, 11(1) :68–75, 1999.

[66] Carl R Wassgren, Melany L Hunt, PJ Freese, J Palamara, and CE Brennen. Effects of vertical vibration on hopper flows of granular material. *Physics of Fluids*, 14(10) :3439–3448, 2002.

[67] John C Crocker and David G Grier. Methods of digital video microscopy for colloidal studies. *Journal of colloid and interface science*, 179(1) :298–310, 1996.

[68] T Van De Laar, S Ten Klooster, K Schroën, and J Sprakel. Transition-state theory predicts clogging at the microscale. *Scientific reports*, 6(1) :1–8, 2016.

[69] Horst Rinne. *The Weibull distribution : a handbook*. Chapman and Hall/CRC, 2008.

[70] Jérôme Crassous, Jean-François Metayer, Patrick Richard, and Claude Laroche. Experimental study of a creeping granular flow at very low velocity. *Journal of Statistical Mechanics : Theory*

and Experiment, 2008(03) :P03009, 2008.

[71] Iván Sánchez, Franck Raynaud, José Lanuza, Bruno Andreotti, Eric Clément, and Igor S Aranson. Spreading of a granular droplet. *Physical Review E*, 76(6) :060301, 2007.

[72] A Pons, T Darnige, Jérôme Crassous, E Clément, and Axelle Amon. Spatial repartition of local plastic processes in different creep regimes in a granular material. *EPL (Europhysics Letters)*, 113(2) :28001, 2016.

[73] S Luding, HJ Herrmann, and A Blumen. Simulations of two-dimensional arrays of beads under external vibrations : Scaling behavior. *Physical Review E*, 50(4) :3100, 1994.

[74] Alexander Goldshtein, Michael Shapiro, Leonid Moldavsky, and Mati Fichman. Mechanics of collisional motion of granular materials. part 2. wave propagation through vibrofluidized granular layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 287 :349–382, 1995.

[75] A Goldshtein, M Shapiro, and C Gutfinger. Mechanics of collisional motion of granular materials. part 3. self-similar shock wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 316 :29–51, 1996.

[76] Jaehyuk Choi, Arshad Kudrolli, and Martin Z Bazant. Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 17(24) :S2533, 2005.

[77] Luke Fullard, Daniel J Holland, Petrik Galvosas, Clive Davies, Pierre-Yves Lagrée, and Stéphane Popinet. Quantifying silo flow using mri velocimetry for testing granular flow models. *Physical Review Fluids*, 4(7) :074302, 2019.

[78] A Medina, JA Cordova, E Luna, and C Trevino. Velocity filed measurements in granular gravity flow. *Phys. Lett. A*, 250 :111–116, 1998.

[79] J Bougie, Sung Joon Moon, JB Swift, and Harry L Swinney. Shocks in vertically oscillated granular layers. *Physical Review E*, 66(5) :051301, 2002.

[80] Christoph Goniva, Christoph Kloss, Alice Hager, and Stefan Pirker. An open source cfd-dem perspective. In *Proceedings of OpenFOAM Workshop, Göteborg*, pages 1–10, 2010.

[81] Christoph Kloss, Christoph Goniva, Alice Hager, Stefan Amberger, and Stefan Pirker. Models, algorithms and validation for opensource dem and cfd–dem. *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal*, 12(2-3) :140–152, 2012.

[82] Alberto Di Renzo and Francesco Paolo Di Maio. An improved integral non-linear model for the contact of particles in distinct element simulations. *Chemical engineering science*, 60(5) :1303–1312, 2005.

[83] Samuel F Foerster, Michel Y Louge, Hongder Chang, and Khedidja Allia. Measurements of the collision properties of small spheres. *Physics of Fluids*, 6(3) :1108–1115, 1994.

[84] A Lorenz, C Tuozzolo, and MY Louge. Measurements of impact properties of small, nearly spherical particles. *Experimental Mechanics*, 37(3) :292–298, 1997.

[85] J-C Géminard and W Losert. Frictional properties of bidisperse granular matter : Effect of mixing ratio. *Physical Review E*, 65(4) :041301, 2002.

[86] Yong Xu, KD Kafui, C Thornton, and Guoping Lian. Effects of material properties on granular flow in a silo using dem simulation. *Particulate Science and Technology*, 20(2) :109–124, 2002.

[87] Yakov I Rabinovich, Madhavan S Esayanur, and Brij M Moudgil. Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge : theory and experiment. *Langmuir*, 21(24) :10992–10997, 2005.

[88] Guoping Lian, Colin Thornton, and Michael J Adams. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies. *Journal of colloid and interface science*, 161(1) :138–147, 1993.

[89] Steven T Nase, Watson L Vargas, Adetola A Abatan, and JJ McCarthy. Discrete characterization tools for cohesive granular material. *Powder Technology*, 116(2-3) :214–223, 2001.

[90] CE Brennen, S Ghosh, and CR Wassgren. Vertical oscillation of a bed of granular material. *Journal of applied mechanics*, 63(1) :156–161, 1996.

[91] CR Wassgren, CE Brennen, and ML Hunt. Vertical vibration of a deep bed of granular material in a container. 1996.

[92] Igor S Aranson and Lev S Tsimring. Patterns and collective behavior in granular media : Theoretical concepts. *Reviews of modern physics*, 78(2) :641, 2006.

[93] Einat Aharonov and David Sparks. Rigidity phase transition in granular packings. *Physical Review E*, 60(6) :6890, 1999.

[94] Francisco Melo, Paul Umbanhowar, and Harry L Swinney. Transition to parametric wave patterns

in a vertically oscillated granular layer. *Physical review letters*, 72(1) :172, 1994.

[95] Stéphane Dorbolo, Laurent Maquet, Martin Brandenbourger, François Ludewig, Geoffroy Lumay, Hervé Caps, Nicolas Vandewalle, Samuel Rondia, Médéric Mélard, JJWA van Loon, et al. Influence of the gravity on the discharge of a silo. *Granular Matter*, 15(3) :263–273, 2013.

[96] RM Nedderman and U Tüzün. A kinematic model for the flow of granular materials. *Powder Technology*, 22(2) :243–253, 1979.

[97] Pierre Jop, Yoël Forterre, and Olivier Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441(7094) :727–730, 2006.

[98] E DeGiuli and M Wyart. Friction law and hysteresis in granular materials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(35) :9284–9289, 2017.

[99] Azadeh Samadani, A Pradhan, and A Kudrolli. Size segregation of granular matter in silo discharges. *Physical Review E*, 60(6) :7203, 1999.

[100] L Staron, P-Y Lagrée, and S Popinet. Continuum simulation of the discharge of the granular silo. *The European Physical Journal E*, 37(1) :5, 2014.

Sources des images

- Fig. 1.1 : www.nationalgeographic.fr, www.pinterest.fr, www.linternaute.com, fr.euronews.com, www.quarrymagazine.com, www.pleinchamp.com, www.editions-mennonites.fr, www.beautylicieuse.com
- Fig. 1.2 : www.infoweekend.ca, www.indiamart.com, www.futura-sciences.com
- Fig. 2.1 : www.futura-sciences.com, www.la-croix.com, www.terre-net.fr, ggopch.wordpress.com
- Fig. 2.7 : www.britannica.com, docplayer.fr, lavallab.com
- Fig. 3.1 : iramis.cea.fr, tpe-voyagedansletemps.e-monsite.com, www.pinterest.fr
- Fig. 3.2 : www.esseng.com.au, www.foodprocessing.com.au, www.heightdynamics.com.au

Résumé

La vidange de grains dans un silo est une application très présente en industrie mais aussi un cas typique d'écoulement de milieux granulaires encore mal compris. Faute d'une réelle compréhension fondamentale, l'optimisation de cette application se fait de manière empirique comme par exemple en appliquant des vibrations pour aider l'écoulement. Comprendre cet écoulement, et en particulier le lien entre le débit apparent et la dynamique de réorganisation des particules, permettrait une avancée théorique et ouvrirait des pistes d'optimisation pratiques de ces écoulements en configuration industrielle.

Dans cette thèse, nous présentons les résultats de l'analyse de la vidange de milieux granulaires modèles (billes sphériques monodispersées) dans un silo quasi-2D soumis à des vibrations mécaniques. Des expériences et des simulations numériques par éléments discrets (DEM) ont été menées pour comprendre l'influence de la géométrie du silo, des propriétés des grains et des caractéristiques des vibrations. Deux régimes d'écoulement ont ainsi été mis en évidence, gouvernés par le nombre de Froude Fr et la fréquence relative Ω des vibrations. Dans le premier régime, une diminution du débit est observée lorsque l'on augmente l'intensité des vibrations. Ce comportement est expliqué par la mise en mouvement par les vibrations de zones précédemment à l'arrêt et une plus forte dissipation d'énergie. Dans le second régime, une augmentation du débit est observée lorsque l'on augmente l'intensité des vibrations. Ce comportement provient de la nature intermittente de écoulement, qui se fait sous la forme de jets de matière engendrés par la propagation d'onde de choc dans tout le silo.

Dans un premier temps, nous proposons pour chaque régime une loi empirique permettant de rendre compte de l'évolution du débit à partir des différents paramètres. Dans un second temps, nous analyserons l'écoulement à l'échelle locale pour relier le débit apparent à la dynamique locale des particules à travers la rhéologie de l'écoulement.

Mots clés : Milieux granulaires, rhéologie, vidange de silo, vibration

Abstract

The discharge of grain in a silo is a common application in industry, but this typical granular flow is still not fully understood. Without a real fundamental understanding, the optimization of this application is done by empirical means, for example by applying vibrations to improve the discharge. Understanding the behaviour of this flow, and in particular the link between the apparent flow rate and the particle reorganization dynamics, would therefore allow a theoretical breakthrough and would open up practical ways of optimizing these flows in an industrial configuration.

In this thesis, we study the discharge of model granular matter (monodisperse spherical beads) in a quasi-2D silo under the influence of mechanical vibrations. Experimental measurements and discrete element simulations (DEM) are performed to determine the effect of the geometry, particle properties and vibration characteristics. We evidence that vibrations make appear two distinct regimes, governed by the Froude number Fr and the relative frequency Ω of the vibrations. In the first regime, a decreased flow rate is observed when increasing the vibration intensity. This behavior is explained by the setting in motion, due to the vibration, of areas previously at rest and a higher energy dissipation. In the second regime, an increased flow rate is observed when increasing the vibration intensity. We find this behavior comes from the intermittent nature of the flow, with bursts of flow rate created by the propagation of shock waves all along the silo.

As a first step, we propose for each regime an empirical law for the flow rate depending on the different parameters. Then, we studied the flow at the local scale in order to relate the apparent flow rate to local particle dynamics through flow rheology.

Key words : Granular materials, rheology, silo discharge, vibration