HAL
open science

Contrôlabilité et stabilisation de problèmes d'interaction fluide-structure

Imene A Djebour

To cite this version:

Imene A Djebour. Contrôlabilité et stabilisation de problèmes d'interaction fluide-structure. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lorraine, 2020. Français. NNT : 2020LORR0174 . tel-03153155

HAL Id: tel-03153155

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03153155v1

Submitted on 26 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Contrôlabilité et stabilisation de problèmes d'interaction fluide-structure

Thèse

Présentée et soutenue publiquement le 17 décembre 2020

Pour l'obtention du

Doctorat

Mention Mathématiques appliquées

par

Imene Aicha DJEBOUR

Composition du jury :

Rapporteurs :

Šárka Nečasová, Czech Academy of Sciences of the Czech Rep
Emmanuel Trélat, Inria Paris, Sorbonne Université

Examinateurs :

Muriel Boulakia, Inria Paris, Sorbonne Université
Sylvain Ervedoza, Université de Bordeaux
Karim Ramdani, Inria Nancy - Grand Est

Directeur de thèse :

Takéo Takahashi, Inria Nancy - Grand Est

Institut Elie Cartan de Lorraine

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Takéo Takahashi qui m'a accueillie dans son équipe et qui a toujours su m'orienter efficacement. Je le remercie vivement pour sa gentillesse, sa patience, sa disponibilité et pour avoir assuré mes pas dans l'élaboration de cette présente thèse.

Je tiens à remercier Šárka Nečasová et Emmanuel Trélat d'avoir accepté de lire cette thèse et d'en être rapporteurs. Leur lecture attentive et leurs remarques précieuses ont été bénéfiques pour ce manuscrit.

J'adresse mes remerciements à Muriel Boulakia, Sylvain Ervedoza et Karim Ramdani d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je suis profondément reconnaissante envers Julie Valein pour le temps précieux qu'elle a consacré durant les moments de travail et de discussions qui ont été très enrichissants, je la remercie vivement de sa disponibilité et de son aide. Je tiens aussi à la remercier elle et Laurent Thomann d'avoir accepté d'être les membres du comité de suivi de ma thèse.

J'exprime ma gratitude envers Olivier Garet de m'avoir confié des missions d'enseignement à la faculté des sciences et technologies et Elodie Cunat pour sa gentillesse, ses précieux conseils et pour sa disponibilité concernant toute requête administrative.

Je remercie également les membres de l'IECL de Nancy, pour leur soutien, leur amabilité et pour les agréables moments que j'ai passés dans ce laboratoire.

Je tiens aussi à remercier Xavier Antoine, Laurence Quirot et Christian Poirson de m'avoir aidé dans les démarches administratives qui m'ont permis de venir en France pour réaliser cette thèse.

Je ne saurai jamais remercier assez ma mère pour ses encouragements, ses conseils et d'avoir consacré sa vie à me soutenir, je lui dédie cette thèse en gage de ma gratitude.

Je remercie finalement ma grand-mère, mon père, mon frère et mes soeurs pour leur soutien, leurs encouragements et leur affection.

Table des matières

Notations **iv**

Introduction **vi**

1 Existence de solutions fortes pour un système d'interaction fluide structure avec les conditions au bord de Navier **1**

1.1 Introduction 1
1.2 Notation 5
1.3 Changement de variables 7
1.4 Propriétés de régularité du système de Stokes 10
1.5 Système Linéaire 18
1.6 Point fixe 27
1.6.1 Estimations sur le changement de variables 28
1.6.2 Estimations de F, G, H 32
1.6.3 Preuve du Théorème 1.6.1 35

2 Stabilisation avec retard de problèmes paraboliques et applications **36**

2.1 Introduction 36
2.2 Preuve du Théorème 2.1.1 38
2.3 Stabilisation avec retard de l'équation de convection-diffusion avec un contrôle frontière 43
2.4 Stabilisation avec retard du système d'Oseen avec un contrôle distribué 45
2.5 Stabilisation locale avec retard du système de Navier-Stokes avec un contrôle distribué 47

3 Stabilisation locale avec retard d'un problème fluide-structure avec un contrôle au bord **49**

3.1 Introduction 49
3.2 Changement de variables 56
3.3 Système linéaire 66
3.4 Point fixe 79
3.4.1 Preuve du Théorème 3.1.1 85

4 Contrôlabilité d'un problème d'interaction fluide-solide avec les conditions de Navier **87**
4.1 Introduction 87
4.2 Préliminaires 90
4.3 Changement de variables 94
4.4 Inégalité de Carleman pour le Laplacien avec les conditions de Navier 96
4.5 Inégalité de Carleman pour le système linéaire 107
4.6 Contrôlabilité à zéro du système linéarisé 118
4.7 Point fixe 123

Conclusion **126**

A Résultats techniques **127**
A.1 Espaces de Sobolev 127
A.2 Opérateurs différentiels 129
A.3 Formule de Green 130
A.4 Théorèmes fondamentaux 130
A.5 Quelques inégalités élémentaires 131
A.6 Inégalités utiles 132
A.6.1 Estimations elliptiques du système de Stokes avec conditions de Navier . 133
A.7 Théorie des semi-groupes 134
A.8 Théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles 136

B Estimation de Carleman pour l'opérateur de la chaleur **138**

Notations

p.p. : Presque partout.

$\rightharpoonup$: Convergence faible.

Supp f : Support d'une fonction f.

$\mathbb{P}$: Projection de Leray.

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$: Le gradient du champ de vecteur u.

$\nabla \cdot u = \displaystyle\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$: La divergence d'un champ de vecteur u.

n : La normal extérieure au bord.

τ : Un vecteur générateur du plan tangent au bord.

$a_n = (a \cdot n)n$: La composante normale du vecteur a.

$a_\tau = a - a_n$: La composante tangentielle du vecteur a.

$(\nabla u)n$: Dérivée normale du champ de vecteur u.

E' : Le dual topologique de l'espace E.

$\langle\ ,\ \rangle_{E',E}$: Produit de dualité E', E.

$\mathcal{L}(E, F)$: Espace des opérateurs linéaires continus de E dans F.

$L^p(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega, \displaystyle\int_\Omega |u|^p\, dx < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$.

$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable sur } \Omega, \exists c > 0 : \ |u(x)| < c \ p.p.\}$.

$L^p(I,X) = \{u \quad \text{mesurable au sens de Bochner}, \quad \int_I \|u\|_X^p \; dx < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$, $I \subseteq \mathbb{R}$, où X est un espace de Banach.

$C_0(\Omega)$: L'espace des fonctions continues à support compact.

$C^k(\Omega)$: L'espace des fonctions k (entier) fois continûment différentiables sur Ω.

$C^k(\bar{\Omega})$: L'espace des fonctions u dans $C^k(\Omega)$ telles que chaque dérivée admet un prolongement continu sur $\bar{\Omega}$.

$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = C_0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

$\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$: L'ensemble des champs de vecteurs de $[\mathcal{D}(\Omega)]^d$ de divergence nulle.

$W^s(0,T;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)$: L'espace défini par (1.2.5) à la page 6.

$W_\gamma^s(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)$: L'espace défini dans (1.2.7) à la page 6.

Id : L'opérateur identité.

$\mathcal{D}(A)$: Le domaine de définition de l'opérateur A.

$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\,\mathrm{Id} - A \text{ est inversible}\}$: L'ensemble résolvant de l'opérateur A.

$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$: Le spectre de l'opérateur A.

ω : Le tore rectangulaire défini par (1.1.1) à la page 1.

$L_0^2(\omega)$: Les fonctions dans $L^2(\omega)$ de moyenne nulle.

M : La projection orthogonale de $L^2(\omega)$ sur $L_0^2(\omega)$.

$\mathbb{M}$: La projection orthogonale qui localise l'action du contrôle définie par (3.1.6) à la page 50.

Introduction

L'interaction fluide-structure concerne l'étude du comportement d'un fluide qui exerce un champs de force sur la surface d'une structure rigide ou déformable qui se déplace ou se déforme sous son action. La motivation principale de l'étude de ce type d'interaction est dû aux phénomènes qui en résultent pour certaines structures mécaniques. Les problèmes d'interaction fluide-structure sont fréquents et sont quelques fois à l'origine du fonctionnement de certains systèmes dans la mécanique, l'aérodynamique... Les problèmes d'interaction fluide-structure ont aussi un rôle essentiel et approprié dans la modélisation du flux sanguin : les parois artérielles des vaisseaux sanguins ont une structure élastique qui se rétracte et qui se dilate dynamiquement en fonction des variations de la pression du sang et de la vitesse du flux sanguin.

Dans la littérature mathématique, une grande partie des travaux à ce sujet a été consacrée à l'étude de l'existence de solutions dans le cas où la structure est la réunion de plusieurs corps solides immergés dans un fluide newtonien visqueux dont le mouvement est décrit par les équations de Navier-Stokes. La plupart de ces résultats d'existence sont valables pourvu qu'il n'ait aucun contact entre les corps rigides ou bien entre chaque corps rigide et le bord du fluide. Dans le cas des conditions aux bord de Dirichlet, l'existence de solutions faibles a été abordée dans [26, 30, 29, 45, 83, 37], pour les solutions fortes, des recherches approfondies ont été menées dans [88, 87]. Concernant, les conditions aux limites de Navier, plusieurs auteurs ont déjà examiné l'existence de solutions faibles [75] et [41], l'existence de solutions fortes [93] et l'unicité des solutions faibles [19]. Dans [23] et [22], l'auteur a examiné les conditions aux limites impliquant la pression. On cite également le travail de [21] où ils considèrent une condition aux limites non linéaire de type Tresca. Une problématique qui se présente concerne une possibilité éventuelle de collision. Les conditions aux limites sans glissement standard (de Dirichlet) peuvent conduire à des résultats paradoxaux. En effet, dans le cas de corps rigides immergés dans un fluide incompressible et visqueux, il est montré que, pour certaines géométries, il n'y a pas de contact en temps fini entre deux structures, ce point a été étudié dans [53, 54]. Le cas tridimensionnel a été étudié dans [54, 55]. En général, s'il y a contact, alors il se produit avec une vitesse relative nulle et une accélération relative nulle ([83]). L'influence des conditions au bords au sujet de la collision a été explorée dans [42] et l'étude du contact en temps fini de la solution forte a été investie dans [93]. L'existence de contacts en considérant les conditions aux bord de Tresca a été abordée dans [56].

Dans cette thèse, on étudie des systèmes d'interaction fluide-structure de différentes natures. Plus précisément, il s'agit d'analyser des problèmes non linéaires couplés dans un domaine à frontière libre modélisant l'interaction entre un fluide visqueux et une structure qui peut être

déformable ou bien rigide. Le fluide et la structure sont couplés à travers la continuité des forces du contact à l'interface, et au niveau du bord à travers **les conditions aux limites de Navier**. Parmi les motivations qui incitent à considérer les conditions de Navier est l'étude du contact entre la structure et le bord du fluide.

Plus précisément, notre étude s'articule autour de quatre chapitres :

Le chapitre 1 est consacré à l'analyse de l'existence de solutions fortes pour un système couplant un fluide incompressible occupant un domaine tridimensionnel périodique noté par $\Omega(\eta(t,\cdot))$ délimité par une plaque élastique dont le déplacement transversal est noté par $\eta(t,\cdot)$ à l'instant t. Dans ce cas, le domaine est décrit par

$$\Omega(\eta(t,\cdot)) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \omega \times \mathbb{R} \mid 0 < x_3 < 1 + \eta(t,x_1,x_2)\},$$

où ω désigne le tore

$$\omega = (\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z}), \quad L_1 > 0,\ L_2 > 0.$$

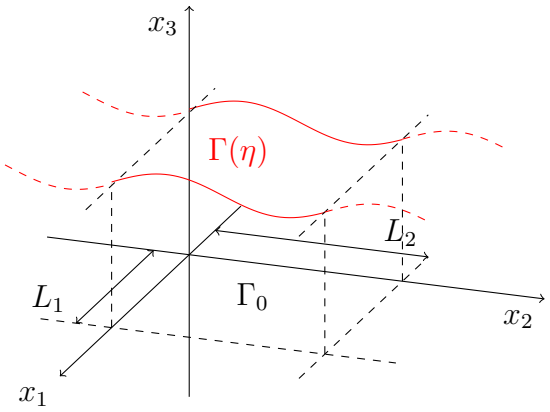

FIGURE 1 – Configuration du domaine à l'instant t.

Le bord supérieur est occupé par la plaque élastique et il est noté $\Gamma(\eta)$. Pour simplifier l'étude, on supposera que le bord inférieur Γ_0 est fixe. Le fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes dont la vitesse est dénotée par U et la pression par P. La plaque élastique est régie par l'équation de la plaque amortie. Le système s'écrit dans ce cas

$$\begin{cases} \partial_t U + (U\cdot\nabla)U - \nabla\cdot\mathbb{T}(U,P) = 0 & t>0,\ x\in\Omega(\eta(t,\cdot)), \\ \nabla\cdot U = 0 & t>0,\ x\in\Omega(\eta(t,\cdot)), \\ \partial_{tt}\eta + \Delta^2\eta - \Delta\partial_t\eta = \widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U,P) & t>0,\ s\in\omega. \end{cases}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\mathbb{T}(U,P)$ est défini par

$$\mathbb{T}(U,P) = -PI_3 + 2\nu D(U), \quad D(U)_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right),$$

où ν est la viscosité du fluide. L'équation de la plaque est perturbée par un terme d'amortissement $-\Delta\partial_t\eta$. Cette perturbation permet d'avoir des propriétés fonctionnelles utiles pour

l'étude d'existence de solutions fortes. La fonction $\widetilde{\mathbb{H}}_\eta$ désigne la force de contact exercée par le fluide sur la structure à l'interface $\Gamma(\eta)$ qui a pour expression :

$$\widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U,P) = -\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\,(\mathbb{T}(U,P)n\cdot e_3)\,.$$

On munit le système des conditions de Navier au bord

$$\begin{cases} U_n = 0 & t>0,\ x\in\Gamma_0,\\ [2\nu D(U)n+\beta_1 U]_\tau = 0 & t>0,\ x\in\Gamma_0,\\ (U-\partial_t\eta e_3)_n = 0 & t>0,\ x\in\Gamma(\eta),\\ [2\nu D(U)n+\beta_2\,(U-\partial_t\eta e_3)]_\tau = 0 & t>0,\ x\in\Gamma(\eta). \end{cases}$$

Les notations $(\cdot)_n$ et $(\cdot)_\tau$ désignent respectivement la composante normale et tangentielle d'un champ de vecteur. On suppose que les coefficients de frottement β_1 et β_2 sont des constantes positives ou nulles.

Le but est d'étendre un résultat d'existence de solutions fortes en considérant les conditions aux limites de Navier qui est déjà établi dans le cas des conditions aux limites standards *de Dirichlet* généralement prises en compte avec le système de Navier-Stokes et qui s'écrivent

$$\begin{cases} U = 0 & t>0,\ x\in\Gamma_0,\\ U=\partial_t\eta e_3 & t>0,\ x\in\Gamma(\eta). \end{cases}$$

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de ce type de système avec les conditions aux limites de Dirichlet. Dans le cas où la structure est une poutre élastique, on a des résultats d'existence de solutions fortes ([12], [65]), de stabilisation par feedback ([79], [11]), et d'existence globale de solutions fortes ([44]). On signale que dans ce dernier travail, les auteurs parviennent à obtenir notamment qu'il n'y a pas de contact entre la plaque et le fond du domaine en temps fini. Ici, notre but est d'analyser le même type de système avec les conditions aux limites de Navier et d'étendre les résultats d'existence de solutions fortes associées. Un tel système était déjà considéré dans [50] et [72] où l'existence de solutions faibles est prouvée en dimension 2 (existence globale tant que la structure déformable ne touche pas le fond fixe). L'unicité de la solution faible pour ce système a été obtenue dans [49].

On se donne les fonctions

$$\eta^0\in H^3(\omega),\ \eta^1\in H^1(\omega),\quad U^0\in[H^1(\Omega(\eta^0))]^3,$$

satisfaisant les conditions

$$1+\eta^0>0,\quad \nabla\cdot U^0=0\quad \text{dans } \Omega(\eta^0),\quad (U^0-\eta^1 e_3)_n=0\quad \text{sur } \Gamma(\eta^0),\quad U^0_n=0\quad \text{sur } \Gamma_0.$$

On complète notre système par les conditions initiales

$$\begin{cases} \eta(0,\cdot)=\eta^0 & \text{dans } \omega,\\ \partial_t\eta(0,\cdot)=\eta^1 & \text{dans } \omega,\\ U(0,\cdot)=U^0 & \text{dans } \Omega(\eta^0). \end{cases}$$

Notre objectif se résume à prouver l'existence et l'unicité de la solution forte : locale en temps et globale pour des données initiales assez petites. On a alors le théorème suivant :

Théorème. *Soient $\beta_i \geqslant 0$ pour $i = 1, 2$. Alors, il existe un temps T_0 tel que le système admet une solution forte unique (U, P, η) sur $(0, T_0)$:*

$$\eta \in L^2(0, T_0; H^4(\omega)) \cap C^0([0, T_0]; H^3(\omega)) \cap H^1(0, T_0; H^2(\omega)) \\ \cap C^1([0, T_0]; H^1(\omega)) \cap H^2(0, T_0; L^2(\omega)),$$

$$U \in L^2(0, T_0; [H^2(\Omega(\eta(t)))]^3) \cap C^0([0, T_0]; [H^1(\Omega(\eta(t)))]^3) \cap H^1(0, T_0; [L^2(\Omega(\eta(t)))]^3),$$
$$\nabla P \in L^2(0, T_0; [L^2(\Omega(\eta(t)))]^3).$$

De plus, si $\beta_1 + \beta_2 > 0$, alors il existe $R_0 > 0$ tel que si

$$\left\|U^0\right\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \left\|\eta^0\right\|_{H^3(\omega)} + \left\|\eta^1\right\|_{H^1(\omega)} \leqslant R_0,$$

le système admet une solution forte unique (U, P, η) sur $(0, \infty)$ exponentiellement stable.

Ceci est le premier résultat sur l'existence de solutions fortes pour un tel système dans le cas des conditions aux limites de Navier et à notre connaissance, c'est également le premier travail sur des solutions fortes pour ce type de systèmes dans le cas 3D.

Les étapes de la preuve de ce résultat sont énoncées comme suit :

- **Changement de variables**
  Puisque le domaine dépend du temps, il convient de réduire le système dans un domaine cylindrique fixe. On choisit de se ramener au domine $\Omega(\eta^0)$ en effectuant un changement de variables approprié qui préserve la divergence de la vitesse du fluide. Parmi les difficultés qui s'imposent dans cette étape est que le système sera perturbé par des termes non linéaires et éventuellement dans les conditions au bord contrairement au cas des conditions de Dirichlet, où ces dernières demeurent invariantes par rapport à ce changement de variables. De plus, sachant que $\eta^0 \in H^3(\omega)$ et que $H^3(\omega) \hookrightarrow C^{1,\gamma}(\omega)$ pour tout $\gamma \in [0, 1)$, le domaine $\Omega(\eta^0)$ n'est pas suffisamment régulier pour appliquer les résultats classiques de régularité elliptique.
- **Régularité elliptique pour un problème de Stokes non-homogène**
  Dans cette étape, on étudie la régularité du système de Stokes avec les conditions aux limites de Navier dans un domaine de régularité H^3. Pour cela, on s'inspire de [44] : grâce au fait que le domaine est un sous graphe d'une fonction H^3, on obtient les inégalités elliptiques associées au problème de Stokes avec conditions de Navier non-homogènes.
- **Linéarisation**
  Le but de cette étape est de montrer un résultat d'existence de solution forte associée au système linéarisé qui se présente comme un problème couplant les équations de Stokes et l'équation de la plaque amortie avec les conditions de glissement de Navier non-homogènes. L'étude est basée sur la théorie des semi-groupes : on prouve que l'opérateur en question est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique. L'une des étapes cruciales dans cette étude est de gérer la pression afin d'obtenir un problème d'évolution, pour cela on projette tout le système à l'aide d'un opérateur de projection décrit dans [11].

– **Point fixe**
Une fois que l'existence d'une unique solution forte associée au système linéarisé est prouvée, on revient au problème non linéaire initial et on applique le théorème du point fixe de Banach pour déduire le résultat principal. Ce qui est contraignant dans le cas tridimensionnel, est qu'on est restreint à l'injection de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^6$. La difficulté qui surgit dans cette partie est de s'assurer que la constante qui apparait dans les estimations n'explose pas quand T_0 devient très petit.

Cette partie a fait l'objet d'un article paru [32].

Le chapitre 2 concerne l'étude de la stabilisation des systèmes paraboliques avec retard. En général, dans la théorie de la contrôlabilité classique, le contrôle agit sur un système instantanément, par ailleurs, le temps d'analyse ou le temps de calcul doit être pris en compte. Donc, pour un bon fonctionnement du système, des termes de retard en temps sont souvent présents et ne peuvent être négligés. Le retard en temps peut parfois améliorer la performance d'un système dynamique, on cite par exemple [1]. Une recherche très approfondie a été menée ces derniers temps sur la stabilisation des équations aux dérivées partielles avec retard qui est impliquée dans divers applications, par exemple en biologie, en mécanique, en automatique...etc. Le résultat de cette partie est la généralisation de plusieurs travaux récents sur la stabilisation des systèmes paraboliques avec retard en temps, en particulier [20] où les auteurs ont construit un contrôle pour les systèmes linéaires en dimension finie, et [76] où les auteurs ont obtenu un feedback stabilisant un système de réaction-diffusion avec un contrôle au bord assujetti à un retard en temps. On mentionne les idées principales ainsi que les méthodes qu'on adaptera par la suite afin de prouver notre résultat. En utilisant le fait que leur opérateur est auto-adjoint de résolvante compacte, les auteurs décomposent le système en deux parties : une partie instable en dimension finie et une partie stable en dimension infinie. Donc, ils sont conduits à stabiliser le système instable en dimension finie et en tenant compte du retard en temps, la transformée d'Artstein est alors utilisée afin d'obtenir un système autonome standard sans retard qui satisfait la condition de Kalman. Finalement, avec une fonction de Lyapunov appropriée, les auteurs prouvent que le feedback construit dans la partie instable en dimension finie stabilise en fait tout le système.

On peut citer plusieurs articles dans cette direction : dans [67], les auteurs se sont investis dans la stabilisation d'une poutre satisfaisant l'équation d'Euler-Bernoulli avec amortissement. Le système correspondant est parabolique mais leur opérateur n'est plus auto-adjoint. Alors, [66] généralise le résultat de [76] dans le cas où l'opérateur est un opérateur de Riesz avec des valeurs propres simples. Dans [68], les auteurs étendent les résultats de [76] au cas où le contrôle contient des perturbations et où le retard varie en fonction du temps.

Notre but dans cette partie est d'étendre le résultat de [76] pour une large classe de systèmes paraboliques qu'on peut écrire sous la forme abstraite

$$z' = Az + Bv + f, \quad z(0) = z^0, \tag{S}$$

où le but est d'obtenir un contrôle $v(t)$ qui dépend des valeurs de $z(s)$ pour $s \leqslant t - \tau$, avec $\tau > 0$ une constante strictement positive qui correspond à un retard en temps. On précise aussi

le nombre de contrôles N_+ pour stabiliser le système en utilisant l'approche développée dans [7] ou dans [10]. Plus précisément, on suppose qu'on a les hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{c}\text{Le spectre de } A \text{ est décrit par un ensemble de valeurs propres isolées } (\lambda_j)\\ \text{avec une multiplicité algébrique finie } N_j,\\ \text{et l'ensemble } \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant -\sigma\} \text{ n'admet aucun point d'accumulation,}\end{array} \tag{Hyp1}$$

$$\text{Il existe } \gamma \in [0,1) \text{ tel que } B \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{H}_{-\gamma}). \tag{Hyp2}$$

Les espaces $\mathbb{H}_\alpha$ sont définis comme suit : on fixe $\mu_0 \in \rho(A)$, alors

$$\mathbb{H}_\alpha := \begin{cases} \mathcal{D}((\mu_0 - A)^\alpha) & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ \mathcal{D}((\mu_0 - A^*)^{-\alpha})' & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^*_\alpha := \begin{cases} \mathcal{D}((\mu_0 - A^*)^\alpha) & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ \mathcal{D}((\mu_0 - A)^{-\alpha})' & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

On suppose aussi

$$\mathbb{H}_\alpha = [\mathbb{H}, \mathcal{D}(A)]_\alpha \quad (\alpha \in [0,1]), \tag{Hyp3}$$

où le crochet $[\cdot,\cdot]_\alpha$ dénote la méthode de l'interpolation complexe. Soit $\sigma > 0$, on pose

$$\Sigma_+ := \{\lambda_j\ ;\ \operatorname{Re}\lambda_j \geqslant -\sigma\}, \quad \Sigma_- := \{\lambda_j\ ;\ \operatorname{Re}\lambda_j < -\sigma\}.$$

Comme dans [76], le résultat est basé sur une décomposition du système en deux parties, une partie instable en dimension finie et une partie stable en dimension infinie. La partie instable correspond à Σ_+ et la partie stable est associée à Σ_-. En tenant compte de l'hypothèse (Hyp1), on constate que Σ_+ est un ensemble fini. Donc, on introduit l'opérateur de projection (voir [63, Théorème 6.17, p.178]) de rang fini, défini par

$$P_+ := \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\Gamma_+} (\lambda - A)^{-1}\, d\lambda,$$

où Γ_+ est un contour encerclant les points de l'ensemble Σ_+ et ne contient pas d'autres points du spectre A.

Due à la présence d'un retard constant en temps, un système autonome équivalent est alors considéré pour la partie instable en utilisant la transformée d'Artstein. Le système instable est exponentiellement stabilisable en supposant que l'opérateur principal et l'opérateur du contrôle satisfassent le critère de Fattorini-Hautus : (voir [36], [52] et [10]) :

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{D}(A^*),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant -\sigma \quad A^*\varepsilon = \lambda\varepsilon \quad \text{et} \quad B^*\varepsilon = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = 0. \tag{UC$_\sigma$}$$

En utilisant l'inverse de la transformée d'Artstein, un feedback est construit en dimension finie tel que ce dernier stabilise exponentiellement le système instable avec retard en temps. Finalement, on prouve que le contrôle construit en dimension finie stabilise en réalité le système global. Pour toute valeur propre λ_j de A, on définit la multiplicité géométrique

$$\ell_j := \dim\ker(A - \lambda_j \operatorname{Id}) \in \mathbb{N}^*.$$

Notre résultat principal dans cette partie est le suivant :

Théorème. *Soit* $\sigma > 0$ *et soit*

$$N_+ := \max\{\ell_i,\ \operatorname{Re}\lambda_i \geqslant -\sigma\}.$$

On suppose que (Hyp1), (Hyp2), (Hyp3) *et* (UC_σ) *sont vérifiées. Alors, il existe* N_+ *contrôles avec un délai en temps qui stabilisent exponentiellement le système* (S).

On énonce par la suite des applications à ce résultat pour démontrer la stabilisation avec retard des systèmes suivants : équation de convection-diffusion avec un contrôle au bord en dimension $N \geqslant 1$, système d'Oseen avec un contrôle interne et le système non linéaire de Navier-Stokes avec un contrôle distribué. Cette partie a fait l'objet d'un article soumis [33].

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à établir un résultat de stabilisation avec retard du problème étudié dans le chapitre 2 autour d'un état stationnaire non nécessairement nul avec un contrôle frontière en dimension 3. Concernant la stabilisation sans retard de système d'interaction fluide-structure, il existe très peu de travaux qui se sont penchés sur ce type de problème. On cite [79], où l'auteur considère un problème modélisant l'interaction entre un fluide gouverné par les équations de Navier-Stokes et une structure déformable régie par l'équation d'Euler-Bernoulli amortie dans un domaine rectangulaire en supposant les conditions de Dirichlet sur le bord, dans ce cas le contrôle est distribué tout au long de la structure. L'auteur a démontré la stabilisation exponentielle de la solution forte du système considéré. Le même type de problème a été étudié dans [11], où les auteurs ont considéré un contrôle frontière sur le bord du fluide et ont démontré un résultat de stabilisation de la solution faible autour d'un état stationnaire qui n'est pas nécessairement nul. D'autre part, on retrouve des travaux qui ont traité le cas où la structure est un solide rigide, on cite [9], [8]. Dans cette partie, on s'intéresse à la construction d'un contrôle frontière v avec un retard $t_0 > 0$ en temps (au sens de [33]) tel que la solution forte de notre système tend exponentiellement vers un état stationnaire fixé. On note que due à la régularité, des conditions de compatibilité en temps $t = 0$ entre le contrôle v et les conditions initiales devraient être imposées, on évoque par exemple les travaux [4, 5, 6]. Pour surmonter cette difficulté, on retrouve des stratégies développées dans [77, 7]. Dans le cas du retard en temps, le contrôle n'agira sur le système qu'à partir d'un temps $t_0 > 0$ fixé. Par conséquent, le contrôle vaut zéro en $t = 0$. Ainsi, le problème de compatibilité ne se pose plus et c'est l'un des avantage du retard en temps.

Cette partie est organisée comme suit : on écrit le système dans un domaine fixe qui correspondra au domaine associé à l'état stationnaire en utilisant un changement de variables. On étudie ensuite le système linéarisé associé. Le problème linéarisé s'écrira sous forme d'un système couplant les équations d'Oseen et l'équation de la plaque amortie, perturbé par des termes linéaires apparaissant dans tout le système y compris dans les conditions au bord. On montre que le générateur infinitésimal associé au système linéaire est analytique et on montre un premier résultat de stabilisation avec retard du problème linéarisé. Finalement, on prouve le résultat principal de ce chapitre en appliquant un argument de point fixe.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse à l'étude de la contrôlabilité à zéro locale d'un problème d'interaction fluide-structure rigide avec les conditions au bord de Navier.

On considère Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ assez régulier. On suppose que Ω contient un corps rigide et un fluide visqueux incompressible. Pour un temps $t > 0$ fixé, le domaine du solide est dénoté par $\mathcal{S}(t) \subset \Omega$ qui est supposé être un compact assez régulier d'intérieur non vide. Le domaine du fluide est dénoté par $\mathcal{F}(t) = \Omega \backslash \mathcal{S}(t)$, et il est supposé être un ensemble connexe.

On considère le système suivant qui décrit l'évolution du fluide gouvernée par le système incompressible de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t U + (U \cdot \nabla)U - \nabla \cdot \mathbb{T}(U, P) = v^* 1_{\mathcal{O}} & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}(t), \\ \nabla \cdot U = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}(t). \end{cases}$$

Dans le système ci-dessus, on a dénoté par v^* le contrôle qui agit sur le système à travers $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{F}(t)$.

On dénote pour chaque instant t, la position de la structure par $h(t) \in \mathbb{R}^2$ et par $R_{\theta(t)}$ la matrice de rotation d'angle θ du solide définie par

$$R_{\theta(t)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Alors, le flux de la structure est donné par $X_{\mathcal{S}}(t, \cdot) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}(t)$ où

$$X_{\mathcal{S}}(t, y) = h(t) + R_{\theta(t)} y, \quad t \in (0,T), \quad y \in \mathcal{S},$$

avec $\mathcal{S}$ un compact non vide régulier de $\mathbb{R}^2$.

On note que $X_{\mathcal{S}}(t, \cdot)$ est inversible, on dénote son inverse par $Y_{\mathcal{S}}(t, \cdot) : \mathcal{S}(t) \longrightarrow \mathcal{S}$ où

$$Y_{\mathcal{S}}(t, x) = R^{-1}_{\theta(t)}(x - h(t)), \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathcal{S}(t).$$

Donc, la vitesse eulérienne de la structure est donnée par

$$U_{\mathcal{S}}(t, x) = h'(t) + R'_{\theta(t)} R^{-1}_{\theta(t)}(x - h(t)), \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathcal{S}(t).$$

On dénote par $a^\perp$, le vecteur $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, pour tout $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

On note que $R'_{\theta(t)} R^{-1}_{\theta(t)}$ est une matrice antisymétrique, alors la vitesse eulérienne de la structure s'écrit

$$U_{\mathcal{S}}(t, x) = h'(t) + \omega(t)(x - h(t))^\perp,$$

où $\omega(t) = \theta'(t)$ représente la vitesse angulaire du solide.

On dénote par $\mathcal{S}_{h,\theta}$ l'ensemble

$$\mathcal{S}_{h,\theta} = h + R_\theta \mathcal{S},$$

et on définit le domaine du fluide correspondant

$$\mathcal{F}_{h,\theta} = \Omega \backslash \mathcal{S}_{h,\theta},$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{R}$. Avec ces notations, on a

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_{h(t),\theta(t)}, \quad \mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_{h(t),\theta(t)}.$$

On précise que le domaine du fluide dépend du déplacement de la structure rigide et par conséquent, il dépend du temps.

On dénote par $\widehat{n}$ la normale extérieure unitaire à $\partial\mathcal{F}(t)$, où $\partial\mathcal{F}(t) = \partial\Omega \cup \partial\mathcal{S}(t)$.

Le mouvement de la structure est régi par les équations suivantes

$$\begin{cases} mh''(t) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}(t)} \mathbb{T}(U,P)\widehat{n}\, d\Gamma & t \in (0,T), \\ J\omega'(t) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}(t)} (x-h(t))^{\perp} \cdot \mathbb{T}(U,P)\widehat{n}\, d\Gamma & t \in (0,T). \end{cases}$$

On complète le système par les conditions au bord de Navier :

$$\begin{cases} U_{\widehat{n}} = 0 & \text{dans } (0,T), \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ [2\nu D(U)\widehat{n} + \beta_\Omega U]_{\widehat{\tau}} = 0 & \text{dans } (0,T), \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ (U - U_{\mathcal{S}})_{\widehat{n}} = 0 & \text{dans } (0,T), \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(t), \\ [2\nu D(U)\widehat{n} + \beta_{\mathcal{S}}\,(U - U_{\mathcal{S}})]_{\widehat{\tau}} = 0 & \text{dans } (0,T), \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}(t), \end{cases}$$

où $\beta_\Omega \geqslant 0$ et $\beta_{\mathcal{S}} \geqslant 0$ sont les coefficients de friction.

Soient h^0, $\ell^0 \in \mathbb{R}^2$, θ^0, $\omega^0 \in \mathbb{R}$ et $u^0 \in [H^1(\mathcal{F}_{h^0,\theta^0})]^2$. On fournit les conditions initiales suivantes

$$U(0,x) = u^0(x),\ x \in \mathcal{F}_{h^0,\theta^0}, \quad h'(0) = \widetilde{\ell^0}, \quad \omega(0) = \omega^0, \quad h(0) = h^0, \quad \theta(0) = \theta^0,$$

telles que les conditions de compatibilité suivantes soient vérifiées

$$\begin{cases} \nabla \cdot u^0 = 0 & \text{dans } \mathcal{F}_{h^0,\theta^0}, \\ u^0_{\widehat{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \left(u^0 - u^0_{\mathcal{S}}\right)_{\widehat{n}} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{S}_{h^0,\theta^0}, \end{cases} \tag{H$_1$}$$

où $u^0_{\mathcal{S}}(x) = \widetilde{\ell^0} + \omega^0(x-h^0)^{\perp}$. Sans restreindre la généralité, on suppose que le centre de gravité de $\mathcal{S}$ est positionné à l'origine. Donc, $h(t)$ sera la position du centre de masse de $\mathcal{S}(t)$.

Notre objectif est de trouver un contrôle v^* agissant sur l'ouvert $\mathcal{O}$ tel que pour tout $(h_T, \theta_T) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ avec

$$\mathcal{S}_{h_T,\theta_T} \subset \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}, \tag{H$_2$}$$

on obtient $h(T) = h_T$, $\theta(T) = \theta_T$ et que les vitesses du fluide et du solide sont égales à 0 en temps final T.

Le résultat principal de cette partie est le suivant :

Théorème. *On suppose que $\mathcal{S}$ n'est pas un disque.*

Soit (h_T, θ_T) *vérifiant* (H_2). *Alors, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout* $(u^0, h^0, \widetilde{\ell}^0, \omega^0, \theta^0)$ *qui satisfait* (H_1) *et*

$$\left\|u^0\right\|_{[H^1(\mathcal{F}_{h^0,\theta^0})]^2} + \left|h^0 - h_T\right| + \left|\widetilde{\ell}^0\right| + \left|\omega^0\right| + \left|\theta^0 - \theta_T\right| \leqslant \varepsilon, \tag{H$_3$}$$

il existe un contrôle $v^* \in L^2(0,T;[L^2(\mathcal{O})]^2)$ *tel que*

$$U(T,\cdot) = 0 \text{ dans } \mathcal{F}_{h_T,\theta_T}, \quad h(T) = h_T, \quad h'(T) = 0, \quad \omega(T) = 0, \quad \theta(T) = \theta_T.$$

Sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer

$$h_T = 0, \quad \theta_T = 0, \quad \text{et donc} \quad \mathcal{S}_{h_T,\theta_T} = \mathcal{S}, \quad \mathcal{F}_{h_T,\theta_T} = \mathcal{F}.$$

Le théorème ci-dessus reste vrai en dimension trois, mais dans ce cas on devrait supposer que $\mathcal{S}$ n'admet pas d'axe de rotation. Cette hypothèse géométrique est suffisante pour prouver l'inégalité de Carleman qui est un ingrédient essentiel pour obtenir le résultat souhaité. Plus précisément, en supposant que $\mathcal{S}$ n'a pas d'axe de rotation, alors pour tout $z \in [L^2(\Omega)]^3$, $\ell \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\nabla \cdot z = 0 \text{ dans } \mathcal{F}, \quad z \cdot n = (\ell + k \times y) \cdot n 1_{\partial\mathcal{S}} \text{ sur } \partial\mathcal{F},$$

on a

$$\|z\|_{[L^2(\mathcal{F})]^3} \geqslant C\left(|\ell| + |k|\right),$$

avec C une constante positive indépendante de z, ℓ et k. Cet argument est prouvé dans [82, Lemme 2.2].

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des systèmes d'interaction fluide-rigide, en particulier, quand le fluide est gouverné par le système de Navier-Stokes. Des résultats d'existence concernant ce type de système avec les conditions aux limites de Dirichlet sont considérés dans [27], [29], [30],[87], [88], [45], [51], [83]. Dans le cas des conditions au bord de Navier, l'existence de solutions faibles a été élaborée dans [41] et l'existence de solutions fortes a été obtenue dans [93]. Dans [93] et [42], les auteurs ont prouvé que des collisions peuvent survenir dans un temps fini entre le corps rigide et la cavité du domaine en imposant des hypothèses sur la géométrie du solide.

Concernant la contrôlabilité, on mentionne [38] et [60], où les auteurs ont obtenu la contrôlabilité locale exacte du système de Navier-Stokes en 2D ou 3D avec les conditions de Dirichlet en considérant des contrôles distribués. La contrôlabilité du système de Navier Stokes avec des conditions de Navier non linaires au bord a été étudiée dans [47]. Dans [48], les auteurs ont établi la contrôlabilité locale avec $N-1$ contrôles scalaires. Concernant les résultats de contrôlabilité des systèmes d'interaction fluide-structure avec les conditions de Dirichlet, en dimension 2, on mentionne l'article [18], où les auteurs ont prouvé la contrôlabilité à zéro des vitesses et la contrôlabilité exacte de la position du solide rigide en imposant quelques hypothèses sur la géométrie du solide et pourvu que les conditions initiales soient assez petites, plus précisément, les auteurs imposent que la norme H^3 de la vitesse initiale du fluide soit assez petite. Les auteurs ont utilisé le théorème du point fixe de Kakutani pour déduire la contrôlabilité à zéro

du système non linéaire. On a aussi le travail [59] où les auteurs ont considéré la structure d'une boule rigide, leur résultat est basé sur la théorie des semi-groupes. Dans ce dernier, une condition sur la norme H^1 seulement pour la vitesse initiale du fluide a été imposée. En dimension 3, on mentionne [16], où le même résultat a été prouvé sans aucune supposition sur la géométrie du corps rigide tandis que les auteurs ont supposé que la norme H^2 de la vitesse du fluide initiale soit assez petite. On cite aussi [82], où les auteurs ont considéré l'interaction entre un fluide visqueux et incompressible modélisé par le système de Boussinesq et un corps rigide quelconque, ils ont prouvé la contrôlabilité à zéro locale pour le système associé.

Dans cette partie, on prouve la contrôlabilité à zéro locale d'un système modélisant l'interaction entre un fluide et un solide rigide pourvu que ce dernier ne soit pas un disque, muni des conditions de glissement de Navier au bord. Pour cela, on s'inspire de [59] :

- **Changement de variables :** sachant qu'on travaille sur un domaine à frontière libre, on utilise un changement de variables pour écrire notre système dans un domaine fixe, dans notre cas, on se ramène à $\mathcal{F}_{h_T,\theta_T}$.
- **Contrôlabilité à zéro du système linéarisé :** On démontre la contrôlabilité à zéro du problème linéarisé couplant le système de Stokes pour le fluide et des équations différentielles ordinaires pour la structure. On est amené alors à établir une estimation d'observabilité pour le système linéaire correspondant (voir la Proposition A.8.4). Une telle estimation est obtenue en démontrant une inégalité de Carleman qui doit être satisfaite par la solution du système linéarisé.

  Parmi les difficultés principales pour obtenir cette inégalité :
  - Manipuler la pression : pour cela, on applique le rotationnel sur l'équation de Stokes, on obtient ainsi une équation de la chaleur dont l'inégalité de Carleman est bien connue en vertu de la Proposition B.0.5 qui est établie dans l'annexe B.
  - Manipuler les conditions au bord afin d'obtenir des estimations sur la vitesse de la structure avec les bons poids. Une étape cruciale est de trouver une estimation de Carleman pour le Laplacian avec une condition de divergence nulle et avec les conditions de Navier au bord.
  - Manipuler les termes de surface qui apparaissent dans l'inégalité. Pour ce faire, on établit un résultat d'existence de solution plus régulière associée au système linéarisé.
- **Point fixe :** On applique le théorème du point fixe dans des espaces à poids appropriés.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis [31].

Finalement, on donne, en Annexe, quelques résultats utiles.

Chapitre 1

Existence de solutions fortes pour un système d'interaction fluide structure avec les conditions au bord de Navier

1.1 Introduction

Le but de ce travail est d'analyser l'interaction entre un fluide visqueux incompressible et une plaque élastique visqueuse. On commence par présenter le modèle correspondant. On note par ω le tore rectangulaire

$$\omega = (\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z}) \quad L_1 > 0,\ L_2 > 0. \tag{1.1.1}$$

Pour toute fonction $\eta : \omega \to (-1, \infty)$, on définit (voir Figure 1)

$$\begin{aligned} \Omega(\eta) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \omega \times \mathbb{R} \mid 0 < x_3 < 1 + \eta(x_1, x_2)\}, \\ \Gamma(\eta) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \omega \times \mathbb{R} \mid x_3 = 1 + \eta(x_1, x_2)\}, \\ \Gamma_0 &= \omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

En particulier

$$\partial\Omega(\eta) = \Gamma(\eta) \cup \Gamma_0. \tag{1.1.2}$$

On considère le système suivant décrivant l'évolution du fluide régi par les équations incompressibles de Navier-Stokes et le mouvement de la plaque élastique

$$\begin{cases} \partial_t U + (U \cdot \nabla)U - \nabla \cdot \mathbb{T}(U, P) = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega(\eta(t, \cdot)), \\ \nabla \cdot U = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega(\eta(t, \cdot)), \\ \partial_{tt}\eta + \alpha\Delta^2\eta - \kappa\Delta\eta + \sigma\eta - \delta\Delta\partial_t\eta = \widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U, P) & \text{dans } (0, \infty) \times \omega. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Dans le système ci-dessus, on a noté U la vitesse du fluide, P la pression du fluide et η le déplacement transversal de la plaque.

Le tenseur de contrainte de Cauchy $\mathbb{T}(U,P)$ est défini par

$$\mathbb{T}(U,P) = -PI_3 + 2\nu D(U), \quad D(U)_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).$$

La fonction $\widetilde{\mathbb{H}}_\eta$ est la contrainte de fluide sur la structure et est définie par

$$\widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U,P) = -\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\,(\mathbb{T}(U,P)n\cdot e_3)\,.$$

On suppose

$$\nu > 0, \quad \alpha > 0, \quad \sigma \geqslant 0, \quad \kappa \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \delta \geqslant 0. \tag{1.1.4}$$

Ces constantes correspondent respectivement à la rigidité (α), l'étirement (κ), l'amortissement sur la structure (δ) et la viscosité (ν).

On a noté par n la normale extérieure unitaire de $\partial\Omega(\eta)$:

$$n = -e_3 \text{ sur } \Gamma_0,$$

et sur $\Gamma(\eta)$:

$$n(s,1+\eta(s)) = \frac{N(s,1+\eta(s))}{|N(s,1+\eta(s))|}, \quad \text{où} \quad N(s,1+\eta(s)) = \begin{pmatrix} -\partial_{s_1}\eta(s) \\ -\partial_{s_2}\eta(s) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s\in\omega. \tag{1.1.5}$$

Ici et dans ce qui suit, $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 1$.

On complète (1.1.3) par les *conditions aux limites de Navier*. Afin d'écrire ces conditions aux limites, on doit introduire quelques notations. On note par a_n et a_τ les parties normales et tangentielles de $a \in \mathbb{R}^3$:

$$a_n = (a\cdot n)n, \quad a_\tau = a - a_n = -n\times(n\times a)\,. \tag{1.1.6}$$

Ainsi, nos conditions aux limites s'écrivent comme suit

$$\left\{\begin{array}{rl} U_n = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ [2D(U)n]_\tau + \beta_1 U_\tau = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ (U(t,s,1+\eta(t,s)) - \partial_t\eta(t,s)e_3)_n = 0 & t>0,\ s\in\omega, \\ [2D(U)n]_\tau\,(t,s,1+\eta(t,s)) + \beta_2(U(t,s,1+\eta(t,s) - \partial_t\eta(t,s)e_3)_\tau = 0 & t>0,\ s\in\omega. \end{array}\right. \tag{1.1.7}$$

Dans ce qui suit, on écrit les équations ci-dessus de la manière plus compacte suivante

$$\left\{\begin{array}{rl} U_n = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ [2\nu D(U)n + \beta_1 U]_\tau = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ (U - \partial_t\eta e_3)_n = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma(\eta), \\ [2\nu D(U)n + \beta_2\,(U - \partial_t\eta e_3)]_\tau = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma(\eta). \end{array}\right. \tag{1.1.8}$$

On suppose que les coefficients de frottement β_1 et β_2 sont des constantes satisfaisant

$$\beta_1 \geqslant 0, \quad \beta_2 \geqslant 0.$$

Ces conditions aux limites peuvent être comparées aux conditions aux limites standards *de Dirichlet* généralement prises en compte avec le système Navier-Stokes. Dans notre cas, ces conditions seraient écrites comme

$$\begin{cases} U = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \Gamma_0, \\ U = \partial_t \eta e_3 & \text{sur } (0,\infty) \times \Gamma(\eta). \end{cases} \tag{1.1.9}$$

La condition limite de glissement de Navier a été proposée par Navier en 1823 [73] et est pertinente dans plusieurs contextes physiques, voir par exemple [69, 92, 64].

Pour compléter le système (1.1.3),(1.1.8), on ajoute les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} \eta(0,\cdot) = \eta^0 & \text{dans } \omega, \\ \partial_t \eta(0,\cdot) = \eta^1 & \text{dans } \omega, \\ U(0,\cdot) = U^0 & \text{dans } \Omega(\eta^0). \end{cases} \tag{1.1.10}$$

On remarque qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte les conditions aux limites "latérales" puisqu'on travaille avec le tore ω (voir (1.1.1) et (1.1.2)). Cela signifie qu'on envisage des conditions aux limites périodiques pour U, P et η :

$$U(t, x_1 + L_1, x_2, x_3) = U(t, x_1, x_2, x_3), \quad U(t, x_1, x_2 + L_2, x_3) = U(t, x_1, x_2, x_3),$$
$$\eta(t, s_1 + L_1, s_2) = \eta(t, s_1, s_2), \quad \eta(t, s_1, s_2 + L_2) = \eta(t, s_1, s_2),$$

et des relations similaires pour P.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.1.1.

1. *Soit $\beta_i \geqslant 0$ pour $i = 1, 2$ et (1.1.4). On suppose $\eta^0 \in H^3(\omega)$, $\eta^1 \in H^1(\omega)$ et $U^0 \in [H^1(\Omega(\eta^0))]^3$ tels que*

   $$1 + \eta^0 > 0, \quad \nabla \cdot U^0 = 0 \quad \textit{dans } \Omega(\eta^0), \quad (U^0 - \eta^1 e_3)_n = 0 \quad \textit{sur } \Gamma(\eta^0), \quad U^0_n = 0 \quad \textit{sur } \Gamma_0.$$

   Il existe un temps T_0 tel que le système (1.1.3),(1.1.8), (1.1.10) admet une solution forte unique (U, P, η) sur $(0, T_0)$:

   $$\eta \in L^2(0, T_0; H^4(\omega)) \cap C^0([0, T_0]; H^3(\omega)) \cap H^1(0, T_0; H^2(\omega)) \cap C^1([0, T_0]; H^1(\omega)) \cap H^2(0, T_0; L^2(\omega)),$$

   $$U \in L^2(0, T_0; [H^2(\Omega(\eta(t)))]^3) \cap C^0([0, T_0]; [H^1(\Omega(\eta(t)))]^3) \cap H^1(0, T_0; [L^2(\Omega(\eta(t)))]^3),$$
   $$\nabla P \in L^2(0, T_0; [L^2(\Omega(\eta(t)))]^3).$$

2. *Soit* $\beta_i \geqslant 0$ *pour* $i = 1, 2$ *avec* $\beta_1 + \beta_2 > 0$ *et* (1.1.4). *Il existe* $\gamma_0 > 0$ *et* $R_0 > 0$ *tels que si* $\eta^0 \in H^3(\omega)$, $\eta^1 \in H^1(\omega)$ *et* $U^0 \in [H^1(\Omega(\eta^0))]^3$ *vérifient*

$$1 + \eta^0 > 0, \quad \nabla \cdot U^0 = 0 \quad \textit{dans } \Omega(\eta^0), \quad (U^0 - \eta^1 e_3)_n = 0 \quad \textit{sur } \Gamma(\eta^0), \quad U^0_n = 0 \quad \textit{sur } \Gamma_0.$$

et

$$\left\|U^0\right\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \left\|\eta^0\right\|_{H^3(\omega)} + \left\|\eta^1\right\|_{H^1(\omega)} \leqslant R_0,$$

alors le système (1.1.3),(1.1.8), (1.1.10) *admet une solution forte unique* (U, P, η) *sur* $(0, \infty)$ *:*

$$\eta \in L^2_\gamma(0, \infty; H^4(\omega)) \cap BC^0_\gamma([0, \infty]; H^3(\omega)) \cap H^1_\gamma(0, \infty; H^2(\omega)) \\ \cap BC^1_\gamma([0, \infty]; H^1(\omega)) \cap H^2_\gamma(0, \infty; L^2(\omega)),$$

$$U \in L^2_\gamma(0, \infty; [H^2(\Omega(\eta(t)))]^3) \cap BC^0_\gamma([0, \infty]; [H^1(\Omega(\eta(t)))]^3) \cap H^1_\gamma(0, \infty; [L^2(\Omega(\eta(t)))]^3),$$

$$\nabla P \in L^2_\gamma(0, \infty; [L^2(\Omega(\eta(t)))]^3),$$

pour $\gamma \in [0, \gamma_0]$.

Les espaces L^p, H^s sont les espaces classiques de Lebesgue, Sobolev. On utilise la notation $BC^0 = C^0 \cap L^\infty$ et $BC^1 = C^1 \cap W^{1,\infty}$. La notation $\cdot_\gamma$ est expliquée ci-dessous dans (1.2.6), (1.2.7) et correspond à une décroissance exponentielle de l'ordre γ. Enfin, la notation $L^2(0, T; H^1(\Omega(\eta(t))))$ correspond au fait que la vitesse et la pression du fluide sont écrites dans un domaine en mouvement dépendant de η. Pour obtenir le résultat souhaité, on doit donc utiliser un changement de variables pour U et P. La vitesse et la pression du fluide après le changement de variables sont obtenues dans des espaces de la forme $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ avec un Ω fixé. La définition précise des solutions fortes est donnée dans la section 3 (Définition 1.3.1) et on reformule le résultat ci-dessus de manière plus précise dans le théorème 1.6.1.

Remarque 1.1.2. *On peut écrire une version bidimensionnelle du système* (1.1.3),(1.1.8), (1.1.10) *et pour un tel système, on peut prouver un résultat similaire au Théorème 1.1.1. En fait, dans ce cas, on pourrait obtenir l'existence globale de solutions fortes allant jusqu'à un contact possible entre la plaque et le bas du domaine en suivant les arguments de [44].*

Remarque 1.1.3. *Pour simplifier, dans la preuve du théorème 1.1.1 et dans la suite de ce chapitre, on suppose que* $\kappa = \sigma = 0$ *puisque ces constantes ne jouent aucun rôle dans l'analyse.*

Dans la section 1.2 de ce chapitre, on donne quelques notations. Dans la section 1.3, on transforme le problème dans un domaine fixe en utilisant un changement de variables comme il a été introduit dans [61], et on reformule le théorème 1.1.1. On obtient des propriétés de régularité du système de Stokes dans les domaines de classe H^3 dans la section 1.4. Dans la section 1.5, on étudie le problème linéarisé en l'écrivant comme une équation d'évolution. On prouve en particulier que le semi-groupe associé est analytique et dans la section 1.6, on prouve le résultat principal en utilisant la méthode du point fixe.

1.2 Notation

Au cours de notre analyse, on utilise certains espaces fonctionnels qu'on présente dans cette section.

En raison de l'incompressibilité du fluide et des conditions aux limites $(1.1.8)_1$ et $(1.1.8)_3$, on a

$$\frac{d}{dt}\int_\omega \eta\, ds = 0.$$

Pour simplifier, on suppose tout au long du chapitre que

$$\int_\omega \eta^0 ds = 0$$

afin que

$$\int_\omega \eta(t,\cdot)ds = 0 \quad (t \geqslant 0).$$

Ceci conduit à considérer l'espace suivant

$$L^2_0(\omega) = \left\{ \xi \in L^2(\omega) \mid \int_\omega \xi\, ds = 0 \right\}, \tag{1.2.1}$$

et la projection orthogonale $M : L^2(\omega) \to L^2_0(\omega)$. En appliquant M sur l'équation de la plaque $(1.1.3)_3$, on trouve

$$\partial_{tt}\eta + A_1\eta + A_2\partial_t\eta = \mathbb{H}_\eta(U,P),$$

où

$$A_1\eta = \alpha\Delta^2\eta, \quad \mathcal{D}(A_1) = H^4(\omega)\cap L^2_0(\omega), \tag{1.2.2}$$

$$A_2\eta = -\delta\Delta\eta, \quad \mathcal{D}(A_2) = H^2(\omega)\cap L^2_0(\omega), \tag{1.2.3}$$

et

$$\mathbb{H}_\eta(U,P) = M(\widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U,P)).$$

La projection de $(1.1.3)_3$ sur $L^2_0(\omega)^\perp$ conduit à imposer le choix de la constante normalisant la pression, voir par exemple [44].

On note par $H^s(0,T;\mathfrak{X})$ les espaces de Sobolev habituels avec des valeurs dans un espace de Banach $\mathfrak{X}$. Pour $s > 0$, $s \notin \mathbb{N}$, la norme de ces espaces peut être définie à l'aide de

$$\lfloor \xi \rfloor_{s,2,(0,T),\mathfrak{X}} = \left(\int_{(0,T)\times(0,T)} \frac{\|\xi(t)-\xi(t')\|^2_{\mathfrak{X}}}{|t-t'|^{2s+1}} dtdt' \right)^{1/2}.$$

Plus précisément, la norme $\|.\|_{H^s(0,T;\mathfrak{X})}$ pour $s \in (0,1)$ est donnée par

$$\|\xi\|_{H^s(0,T;\mathfrak{X})} = \left(\|\xi\|^2_{L^2(0,T;\mathfrak{X})} + \lfloor \xi \rfloor^2_{s,2,(0,T),\mathfrak{X}} \right)^{1/2}. \tag{1.2.4}$$

On rappelle (voir [17]) que si $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, alors la norme $\lfloor \cdot \rfloor_{s,2,(0,T),\mathfrak{X}}$ est équivalente à la norme définie dans (1.2.4) dans l'espace $\{\xi \in H^s(0,T;\mathfrak{X}) \mid \xi(0) = 0\}$.

Soient $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ deux espaces de Banach munis de la norme $\|.\|_{\mathfrak{X}_1}$ respectivement $\|.\|_{\mathfrak{X}_2}$. Pour $s \geqslant 0$, on définit l'espace suivant

$$W^s(0,T;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2) = \left\{v \in L^2(0,T;\mathfrak{X}_1) \mid v \in H^s(0,T;\mathfrak{X}_2)\right\}, \tag{1.2.5}$$

muni de la norme

$$\|.\|_{W^s(0,T;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)} = \|.\|_{L^2(0,T;\mathfrak{X}_1)} + \|.\|_{H^s(0,T;\mathfrak{X}_2)}.$$

Pour $s = 1$, on notera $W^1(0,T;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)$ par $W(0,T;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)$.

Pour $\gamma > 0$, on considère aussi les espaces

$$L^p_\gamma(0,\infty;\mathfrak{X}_1) = \{v \in L^p(0,\infty;\mathfrak{X}_1)\ ;\ t \mapsto v_\gamma(t) = e^{\gamma t}v(t) \in L^p(0,\infty;\mathfrak{X}_1)\}, \quad p \in [1,+\infty], \tag{1.2.6}$$

et

$$W^s_\gamma(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2) = \{v \in W^s(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\ ;\ t \mapsto v_\gamma(t) = e^{\gamma t}v(t) \in W^s(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)\}. \tag{1.2.7}$$

Pour ces espaces, on utilise les normes définies par

$$\|v\|_{L^p_\gamma(0,\infty;\mathfrak{X}_1)} = \|v_\gamma\|_{L^p(0,\infty;\mathfrak{X}_1)},$$

$$\|v\|_{W^s_\gamma(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)} = \|v_\gamma\|_{W^s(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)}.$$

Dans ce qui suit, on pose

$$\Omega = \Omega(\eta^0), \tag{1.2.8}$$

pour l'existence locale et

$$\Omega = \Omega(0), \tag{1.2.9}$$

pour l'existence globale.

Afin de désigner la normale ou la composante normale et tangentielle d'un vecteur v dans Ω et dans $\Omega(t)$, on utilise la notation n_0, v_{n_0} et v_{τ_0} pour le domaine Ω.

On note par

$$\mathcal{D}_\sigma(\Omega) = \{\phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^3, \operatorname{div}\phi = 0\},$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables avec une divergence nulle dans Ω avec un support compact.

on définit également l'espace suivant

$$\mathcal{X}_T = W(0,T;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3) \times L^2(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \times W^2(0,T;\mathcal{D}(A_1),L^2_0(\omega)), \tag{1.2.10}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned}\|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_T} = \|u\|_{W(0,T;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)} + \|u\|_{L^\infty(0,T;[H^1(\Omega)]^3)} + \|\nabla p\|_{L^2(0,T,[L^2(\Omega)]^3)} \\ + \|\eta\|_{W^2(0,T;\mathcal{D}(A_1),L^2_0(\omega))} + \|\eta\|_{L^\infty(0,T;H^3(\omega))} + \|\partial_t\eta\|_{L^\infty(0,T;H^1(\omega))}.\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Si $T = +\infty$ et $\gamma \geqslant 0$, on écrira

$$\mathcal{X}_{\infty,\gamma} = W_\gamma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3) \times L^2_\gamma(0,\infty;H^1(\Omega)/\mathbb{R}) \times W^2_\gamma(0,\infty;\mathcal{D}(A_1),L^2_0(\omega)), \quad (1.2.12)$$

muni de la norme

$$\begin{aligned}\|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_{\infty,\gamma}} = \|u\|_{W_\gamma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)} + \|u\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;[H^1(\Omega)]^3)} + \|\nabla p\|_{L^2_\gamma(0,\infty,[L^2(\Omega)]^3)} \\ + \|\eta\|_{W^2_\gamma(0,\infty;\mathcal{D}(A_1),L^2_0(\omega))} + \|\eta\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^3(\omega))} + \|\partial_t\eta\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^1(\omega))}. \quad (1.2.13)\end{aligned}$$

Pour écrire les conditions aux limites, on introduit également l'opérateur $\mathcal{T}$ défini comme suit (voir [11]) :

$$\mathcal{T}_\eta\xi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \in \Gamma_0, \\ \xi(s)e_3 & \text{si} \quad y = (s, 1+\eta(s)) \in \Gamma(\eta), \end{cases} \quad (1.2.14)$$

pour toute fonction $\eta : \omega \longrightarrow (-1,\infty)$. On peut vérifier que $\mathcal{T}_\eta \in \mathcal{L}(L^2(\omega);[L^2(\partial\Omega(\eta))]^3)$ et que

$$(\mathcal{T}^*_\eta\zeta)(s) = \sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\zeta(s,1+\eta(s)) \cdot e_3, \quad \forall \zeta \in [L^2(\partial\Omega(\eta))]^3.$$

On pose

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\eta^0}M.$$

On définit également

$$\beta(y) = \begin{cases} \beta_1 & \text{si} \quad y \in \Gamma_0, \\ \beta_2 & \text{si} \quad y \in \Gamma(\eta^0). \end{cases}$$

1.3 Changement de variables

Pour $\eta^1, \eta^2 \in H^3(\omega)$ avec

$$\eta^1, \eta^2 > -1 \quad \text{dans } \omega,$$

on peut considérer le changement de variables X_{η^1,η^2} défini ci-dessous

$$X_{\eta^1,\eta^2} : \Omega(\eta^1) \longrightarrow \Omega(\eta^2), \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dfrac{1+\eta^2(y_1,y_2)}{1+\eta^1(y_1,y_2)}y_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

L'application X_{η^1,η^2} est inversible d'inverse X_{η^2,η^1}. De plus, en utilisant l'injection de Sobolev $H^3(\omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\omega})$ et le fait que

$$\det(\nabla X_{\eta^1,\eta^2}) = \frac{1+\eta^2}{1+\eta^1},$$

on déduit que X_{η^1,η^2} est un C^1-difféomorphisme de $\Omega(\eta^1)$ dans $\Omega(\eta^2)$.

Dans le cas $\Omega = \Omega(\eta^0)$ (voir (1.2.8)), on pose

$$X(t,\cdot) = X_{\eta^0,\eta(t,\cdot)}, \quad Y(t,\cdot) = X_{\eta(t,\cdot),\eta^0}, \quad (1.3.2)$$

et dans le cas $\Omega = \Omega(0)$ (voir (1.2.9)), on pose

$$X(t,\cdot) = X_{0,\eta(t,\cdot)}, \quad Y(t,\cdot) = X_{\eta(t,\cdot),0}. \tag{1.3.3}$$

On a dans les deux cas $Y(t,\cdot) = [X(t,\cdot)]^{-1}$.

On considère la transformation suivante de u et p :

$$u(t,y) = (\mathrm{Cof}\,\nabla X(t,y))^* U(t,X(t,y)), \quad p(t,y) = P(t,X(t,y)) \quad (t \geqslant 0,\ y \in \Omega). \tag{1.3.4}$$

Ici, $(\mathrm{Cof}\,\nabla X(t,y))^*$ désigne la transposée de $(\mathrm{Cof}\,\nabla X(t,y))$. Après quelques calculs standards (voir, par exemple, [61]), le système (1.1.3), (1.1.8), (1.1.10) peut être écrit comme

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla\cdot\mathbb{T}(u,p) = F(u,p,\eta) & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \partial_{tt}\eta + A_1\eta + A_2\partial_t\eta = \mathbb{H}_{\eta^0}(u,p) + H(u,\eta) & \text{dans } (0,\infty)\times\omega, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} [u - \mathcal{T}\partial_t\eta]_{n_0} = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(u)n_0 + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\eta)]_{\tau_0} = G(u,\eta) & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

et avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0,\cdot) = u^0 = U^0 & \text{dans } \Omega, \\ \eta(0,\cdot) = \eta^0 & \text{dans } \omega, \\ \partial_t\eta(0,\cdot) = \eta^1 & \text{dans } \omega. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Pour écrire les fonctions F, H, G, on pose d'abord

$$(\mathrm{Cof}\,\nabla Y)^* = (a_{ik})_{ik}\,. \tag{1.3.8}$$

Donc

$$\begin{aligned} F_i(u,p,\eta) = {} & \sum_k (\delta_{ik} - a_{ik}(X))\partial_t u_k - \sum_{l,k} a_{ik}(X)\frac{\partial u_k}{\partial y_l}\partial_t Y_l(X) - \sum_k \partial_t a_{ik}(X) u_k \\ & + \nu \sum_{j,k,l,m} \left(a_{ik}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) - \delta_{ik}\delta_{mj}\delta_{jl} \right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_l \partial y_m} \\ & + \nu \sum_{j,k,l} \left(2\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) + a_{ik}(X)\frac{\partial^2 Y_l}{\partial x_j^2}(X) \right) \frac{\partial u_k}{\partial y_l} + \nu \sum_k \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j^2}(X) u_k \\ & + \sum_k (\delta_{ki} - \frac{\partial Y_k}{\partial x_i}(X))\frac{\partial p}{\partial y_k} - \sum_{k,l,j} a_{kl}(X)\frac{\partial a_{ij}(X)}{\partial x_k} u_l u_j \\ & - \sum_{k,l,j,m} a_{kl}(X) a_{ij}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_k}(X) u_l \frac{\partial u_j}{\partial y_m}, \quad i = 1,2,3, \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

et

$$H(u,\eta) = \nu M\Bigg[-\sum_{j,k}\left(\frac{\partial a_{3k}}{\partial x_j}(X) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_3}(X)\right) u_k N_j$$
$$+ \sum_{j,k,l}\left(\delta_{3k}\delta_{jl}(N_0)_j - a_{3k}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X)N_j\right)\frac{\partial u_k}{\partial y_l}$$
$$+ \left(\delta_{3l}\delta_{jk}(N_0)_j - a_{jk}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_3}(X)N_j\right)\frac{\partial u_k}{\partial y_l}\Bigg]. \quad (1.3.10)$$

Pour définir G, on introduit les notations suivantes. On se donne deux vecteurs tangents à $\partial\Omega(\eta)$ définis par

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{s_1}\eta \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{s_2}\eta \end{pmatrix}, \text{ sur } \Gamma(\eta), \quad (1.3.11)$$

et

$$\tau^i = e_i, \ i = 1,2 \ \text{ sur } \Gamma_0.$$

$$\mathcal{W}_k = \nu\sum_{j,m} n_j(X)\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X)u_m + \frac{\partial a_{jm}}{\partial x_k}(X)u_m\right) + \beta\left(\sum_j a_{kj}(X)u_j - \mathcal{T}\partial_t\eta\cdot e_k\right)$$
$$+ \nu\sum_{j,m,q} n_j(X)\left(a_{km}(X)\frac{\partial u_m}{\partial y_q}\frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X) + a_{jm}(X)\frac{\partial u_m}{\partial y_q}\frac{\partial Y_q}{\partial x_k}(X)\right), \quad k = 1,2,3, \quad (1.3.12)$$

et

$$\mathcal{V}^i = (2\nu D(u)n_0 + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\eta))\cdot\tau_0^i - \mathcal{W}\cdot\tau^i(X), \quad i = 1,2, \quad (1.3.13)$$

où τ_0^i sont deux vecteurs tangents à $\partial\Omega$ définis par

$$\tau_0^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{s_1}\eta^0 \end{pmatrix}, \quad \tau_0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{s_2}\eta^0 \end{pmatrix} \text{ sur } \Gamma(\eta^0),$$

et

$$\tau_0^i = e_i, \ i = 1,2 \ \text{ sur } \Gamma_0.$$

Ainsi $G(u,\eta)$ est donnée sur $\Gamma(\eta^0)$ par

$$\begin{aligned} G_1(u,\eta) &= \frac{\mathcal{V}^1((\partial_{s_2}\eta^0)^2+1) - \mathcal{V}^2(\partial_{s_1}\eta^0\partial_{s_2}\eta^0)}{|N_0|^2}, \\ G_2(u,\eta) &= \frac{\mathcal{V}^2((\partial_{s_1}\eta^0)^2+1) - \mathcal{V}^1(\partial_{s_1}\eta^0\partial_{s_2}\eta^0)}{|N_0|^2}, \\ G_3(u,\eta) &= \frac{\partial_{s_1}\eta^0\mathcal{V}^1 + \partial_{s_2}\eta^0\mathcal{V}^2}{|N_0|^2}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

et par

$$G(u,\eta) = \sum_{i}^{2} \mathcal{V}^i \tau_0^i \quad \text{sur } \Gamma_0. \tag{1.3.15}$$

Plus précisément, on note que

$$[2\nu D(U)n + \beta(U - \mathcal{T}\partial_t\eta)]_\tau = 0, \quad \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega(\eta), \tag{1.3.16}$$

est équivalente à

$$(2\nu D(u)n_0 + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\eta))\cdot\tau_0^i = \mathcal{V}^i, \quad i=1,2, \quad \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega. \tag{1.3.17}$$

Les formules (1.3.14) et (1.3.15) pour G impliquent que

$$G\cdot\tau_0^i = \mathcal{V}^i, \quad i=1,2, \quad G\cdot n_0 = 0,$$

de sorte que (1.3.17) est équivalente à la seconde condition de (1.3.6), avec G tangentielle.

En utilisant la transformation ci-dessus, on peut maintenant introduire notre définition de solutions fortes pour le système (1.1.3),(1.1.8), (1.1.10)

Définition 1.3.1. *Le triplet* (U,P,η) *est une solution forte de* (1.1.3),(1.1.8), (1.1.10) *si les conditions suivantes sont satisfaites*

$$\eta \in W^2(0,T;\mathcal{D}(A_1),L_0^2(\omega)), \tag{D1}$$

$$1+\eta > 0 \quad \textit{dans } [0,T], \tag{D2}$$

$$X \textit{ et } Y \textit{ sont donnés par } (1.3.2) \textit{ et } (u,p) \textit{ est donné par } (1.3.4), \tag{D3}$$

$$(u,p) \in W(0,T;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)\times L^2(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R}), \tag{D4}$$

$$(u,p,\eta) \textit{ satisfait le système } (1.3.5),(1.3.6), (1.3.7). \tag{D5}$$

Suivant cette définition, pour prouver le théorème 1.1.1, on doit prouver l'existence et l'unicité de

$$(u,p,\eta) \in W(0,T;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)\times L^2(0,T;H^1(\Omega)/\mathbb{R})\times W^2(0,T;\mathcal{D}(A_1),L_0^2(\omega)),$$

solution du système (1.3.5),(1.3.6), (1.3.7) et satisfaisant (D2).

1.4 Propriétés de régularité du système de Stokes

Dans cette section, on obtient quelques résultats sur le système stationnaire dans $\Omega(\eta)$ pour $\eta = \eta^0$ (voir (1.2.8)) ou pour $\eta = 0$ (voir (1.2.9)) :

$$\begin{cases} \alpha\overline{u} - \nu\Delta\overline{u} + \nabla\overline{p} = \overline{f} & \text{dans } \Omega(\eta), \\ \nabla\cdot\overline{u} = \overline{g} & \text{dans } \Omega(\eta), \\ \overline{u}_n = \overline{a} & \text{sur } \partial\Omega(\eta), \\ [2\nu D(\overline{u})n + \beta\overline{u}]_\tau = \overline{b} & \text{sur } \partial\Omega(\eta). \end{cases} \tag{1.4.1}$$

On définit l'espace suivant

$$H^1_\tau = \{\phi \in [H^1(\Omega(\eta))]^3 \mid \phi_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega(\eta)\}.$$

On donne la définition d'une solution faible du système (1.4.1).

Définition 1.4.1. *On dit que $(\overline{u}, \overline{p})$ est une solution faible de (1.4.1) si $(\overline{u}, \overline{p}) \in [H^1(\Omega(\eta))]^3 \times L^2(\Omega(\eta))/\mathbb{R}$, si $\nabla \cdot \overline{u} = \overline{g}$ dans $\Omega(\eta)$, $\overline{u}_n = \overline{a}$ sur $\partial\Omega(\eta)$ et si l'équation variationnelle suivante est vérifiée :*

$$\alpha \int_{\Omega(\eta)} \overline{u} \cdot \phi \; dy + 2\nu \int_{\Omega(\eta)} D(\overline{u}) : D(\phi) \; dy - \int_{\Omega(\eta)} \overline{p} \nabla \cdot \phi \; dy + \int_{\partial\Omega(\eta)} \beta \overline{u} \cdot \phi \; d\Gamma$$
$$= \int_{\Omega(\eta)} \overline{f} \cdot \phi dy + \nu \int_{\Omega(\eta)} \overline{g} (\nabla \cdot \phi) \; dy + \left\langle \overline{b}, \phi \right\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}},$$

pour tout $\phi \in H^1_\tau$.

On a le résultat suivant

Théorème 1.4.2. *Soient $\beta \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ avec $\beta_1 + \beta_2 > 0$ ou $\alpha > 0$. Soient $\eta \in H^3(\Omega(\eta))$ et $\delta_0 > 0$ tels que $1 + \eta > \delta_0$ sur ω. Pour tout*

$$\overline{f} \in (H^1_\tau)', \quad \overline{g} \in L^2(\Omega(\eta)), \quad \overline{a} \in [H^{1/2}(\partial\Omega(\eta))]^3, \quad \overline{b} \in [H^{-1/2}(\partial\Omega(\eta))]^3,$$

tels que

$$\int_{\Omega(\eta)} \overline{g} dy = \int_{\partial\Omega(\eta)} \overline{a} \cdot n d\Gamma, \quad \overline{b} \cdot n = 0, \tag{1.4.2}$$

il existe une solution faible unique $(\overline{u}, \overline{p}) \in [H^1(\Omega(\eta))]^3 \times L^2_0(\Omega(\eta))$ du système de Stokes (1.4.1). De plus, on a les estimations suivantes :

$$\|\overline{u}\|_{[H^1(\Omega(\eta))]^3} + \|\nabla \overline{p}\|_{[H^{-1}(\Omega(\eta))]^3} \leqslant C \Bigg(\left\|\overline{f}\right\|_{(H^1_\tau)'} + \|\overline{g}\|_{L^2(\Omega(\eta))} + \|\overline{a}\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega(\eta))]^3}$$
$$+ \left\|\overline{b}\right\|_{[H^{-1/2}(\partial\Omega(\eta))]^3} \Bigg), \tag{1.4.3}$$

où C est une constante qui dépend de $\|\eta\|_{H^3(\omega)}$ et δ_0.

De plus, si

$$\overline{f} \in [L^2(\Omega(\eta))]^3, \quad \overline{g} \in H^1(\Omega(\eta)), \quad \overline{a} \in [H^{3/2}(\partial\Omega(\eta))]^3, \quad \overline{b} \in [H^{1/2}(\partial\Omega(\eta))]^3,$$

tels que (1.4.2) a lieu, alors $(\overline{u}, \overline{p}) \in [H^2(\Omega(\eta))]^3 \times (H^1(\Omega(\eta)) \cap L^2_0(\Omega(\eta)))$ et on a les estimations suivantes :

$$\|\overline{u}\|_{[H^2(\Omega(\eta))]^3} + \|\nabla \overline{p}\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^3} \leqslant C \Bigg(\left\|\overline{f}\right\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^3} + \|\overline{g}\|_{H^1(\Omega(\eta))} + \|\overline{a}\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega(\eta))]^3}$$
$$+ \left\|\overline{b}\right\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega(\eta))]^3} \Bigg), \tag{1.4.4}$$

où C est une constante qui dépend de $\|\eta\|_{H^3(\omega)}$ et δ_0.

Dans le cas où $\eta \in C^{1,1}(\omega)$ un tel résultat est déjà connu, voir [2] (voir aussi [13]). Ici, on parvient à obtenir le résultat pour $\eta \in H^3(\omega)$ en suivant une idée de [43] et [44].

Preuve du Théorème 1.4.2. La preuve suit de près la preuve du Lemme 6 dans [44]. On suppose ici que $\beta_1 + \beta_2 > 0$ et $\alpha = 0$, la preuve est similaire avec $\alpha > 0$.

D'abord, on écrit le système (1.4.1) dans le domaine

$$\Omega = \Omega(0)$$

en utilisant le changement de variables $X_{0,\eta}$ défini par (1.3.1). Puis on pose

$$B_\eta = \mathrm{Cof}(\nabla X_{0,\eta}), \quad A_\eta = \frac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})} B_\eta^* B_\eta,$$

et on définit

$$u = \overline{u} \circ X_{0,\eta}, \quad p = \overline{p} \circ X_{0,\eta}, \tag{1.4.5}$$

$$f = \det(\nabla X_{0,\eta})\overline{f} \circ X_{0,\eta}, \quad g = \det(\nabla X_{0,\eta})\overline{g} \circ X_{0,\eta},$$
$$a = \overline{a} \circ X_{0,\eta}, \quad b_i = B_\eta^{-1}(\overline{b}_i \circ X_{0,\eta}) \cdot e_i, \quad i = 1, 2.$$

Ainsi le système (1.4.1) est transformé au système suivant

$$\begin{cases} -\nu\nabla \cdot (\nabla u A_\eta) + B_\eta \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot (B_\eta^* u) = g & \text{dans } \Omega, \\ (B_\eta^* u) \cdot n_0 = (B_\eta^* a) \cdot n_0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \left[\dfrac{\nu}{|N|}\left((B_\eta^{-1}\nabla u A_\eta)n_0 + \dfrac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})}((\nabla u)^* B_\eta)n_0\right) + \beta B_\eta^{-1} u\right] \cdot e_i = b_i, \quad i = 1, 2 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4.6}$$

où N est défini par (1.1.5) et n_0 est la normale extérieure unitaire à Ω (i.e $\pm e_3$).

Puisque $\eta \in H^3(\omega)$, on déduit que

$$B_\eta, A_\eta \in H^2(\omega; H^s(0,1)),$$

pour tout $s \geqslant 0$ et les normes correspondantes dépendent de $\|\eta\|_{H^3(\omega)}$ et δ_0. De plus, en utilisant les injections $H^1(\omega) \hookrightarrow L^p(\omega)$ pour tout $p \geqslant 1$ et $H^2(\omega) \hookrightarrow L^\infty(\omega)$, on déduit qu'il suffit de prouver que la solution de (1.4.6) vérifie

$$\|u\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|\nabla p\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leqslant C\left(\|f\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|a\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3} + \|b\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3}\right). \tag{1.4.7}$$

Etape 1 : Solutions faibles. On note que la solution de (1.4.6) vérifie

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})} B_\eta (\nabla u)^* B_\eta \right) = B_\eta \nabla \left(\frac{\nabla \cdot (B_\eta^* u)}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \right) = B_\eta \nabla \left(\frac{g}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \right).$$

Soit $\lambda > 0$, on considère le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\nu \nabla \cdot (\nabla u A_\eta + \frac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})} B_\eta (\nabla u)^* B_\eta) + B_\eta \nabla p = \widetilde{f} & \text{dans } \Omega, \\ \lambda p + \nabla \cdot (B_\eta^* u) = g & \text{dans } \Omega, \\ (B_\eta^* u) \cdot n_0 = (B_\eta^* a) \cdot n_0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \left[\frac{\nu}{|N|} \left((B_\eta^{-1} \nabla u A_\eta) n_0 + \frac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})} ((\nabla u)^* B_\eta) n_0 \right) + \beta B_\eta^{-1} u \right] \cdot e_i = b_i, \quad i = 1,2 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1.4.8}$$

avec

$$\widetilde{f} = f - \nu B_\eta \nabla \left(\frac{g}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \right).$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$D_\eta(u) = \nabla u A_\eta + \frac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})} B_\eta (\nabla u)^* B_\eta.$$

On définit

$$V = \{ v \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \quad (B_\eta^* v) \cdot n_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

On recherche des solutions faibles du système (1.4.8). Soit $f \in V'$, $g \in L^2(\Omega)$, $a \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3$ et $b \in [H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3$. On a $B_\eta \nabla \left(\frac{g}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \right) \in V'$:

$$\left\langle B_\eta \nabla \left(\frac{g}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \right), v \right\rangle_{V',V} = - \int_\Omega \frac{g}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \nabla \cdot (B_\eta^* v) \, dy.$$

Donc $\widetilde{f} \in V'$ et on multiplie la première équation de (1.4.8) par $v \in V$ et la deuxième équation de (1.4.8) par $\psi \in L^2(\Omega)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \nu \int_\Omega D_\eta(u) : \nabla v \, dy - \int_\Omega p \nabla \cdot (B_\eta^* v) \, dy + \lambda \int_\Omega p \cdot \psi \, dy + (\nabla \cdot (B_\eta^* u)) \cdot \psi \, dy + \int_{\partial\Omega} |N| \beta u \cdot v \, d\Gamma \\ = \langle \widetilde{f}, v \rangle_{V',V} + \int_\Omega g \cdot \psi \, dy + \langle b, |N| B_\eta^* v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

On considère un relèvement w vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{rl} \nabla \cdot (B_\eta^* w) = g & \text{dans } \Omega, \\ (B_\eta^* w) \cdot n_0 = (B_\eta^* a) \cdot n_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.4.10}$$

Pour cela, on utilise [13, Corollaire 8.2] et (1.4.2) pour déduire l'existence de $\overline{w} \in [H^1(\Omega)]^3$ tel que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \overline{w} = g & \text{dans } \Omega, \\ \overline{w} \cdot n_0 = (B_\eta^* a) \cdot n_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $w = (B_\eta^*)^{-1}\overline{w}$ vérifie (1.4.10) et l'estimation

$$\|w\|_{[H^1(\Omega)]^3} \leqslant C(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3}). \tag{1.4.11}$$

On pose $u = \widehat{u} + w$. Alors, un couple (u, p) est une solution faible du système (1.4.8) si et seulement si $(\widehat{u}, p)$ vérifie la formulation variationnelle suivante

$$\begin{aligned} \nu \int_\Omega D_\eta(\widehat{u}) : \nabla v \; dy - \int_\Omega p \nabla \cdot (B_\eta^* v) \; dy + \lambda \int_\Omega p \cdot \psi + (\nabla \cdot (B_\eta^* \widehat{u})) \cdot \psi \; dy + \int_{\partial\Omega} |N| \beta \widehat{u} \cdot v \; d\Gamma \\ = -\nu \int_\Omega D_\eta(w) : \nabla v \; dy + \langle \widetilde{f}, v \rangle_{V',V} + \left\langle b, |N| B_\eta^* v \right\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} \\ - \int_{\partial\Omega} |N| \beta w \cdot v \; d\Gamma \quad (v \in V, \; \psi \in L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

On a

$$\int_\Omega D_\eta(v) : \nabla v \; dy = \int_\Omega \frac{\left|\nabla v B_\eta^* + B_\eta (\nabla v)^*\right|^2}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \; dy, \tag{1.4.13}$$

et en écrivant

$$\overline{v} = v \circ X_{\eta,0},$$

on déduit

$$\int_\Omega \frac{\left|\nabla v B_\eta^* + B_\eta (\nabla v)^*\right|^2}{\det(\nabla X_{0,\eta})} \; dy = \int_{\Omega(\eta)} |D(\overline{v})|^2 \; dx, \quad \forall v \in V,$$

avec $\overline{v} \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega(\eta)$. En appliquant une inégalité de Korn (voir Proposition 1.4.5 en dessous) :

$$\nu \int_\Omega D_\eta(v) : \nabla v \; dy + \int_{\partial\Omega} |N| \beta \, |v|^2 \; d\Gamma \geqslant C \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (v \in V). \tag{1.4.14}$$

Par conséquent, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram et en utilisant (1.4.11), on déduit l'existence d'une solution unique $(u, p) = (u_\lambda, p_\lambda) \in [H^1(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega)$ de (1.4.8) qui vérifie l'estimation

$$\|u\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \lambda \|p\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left(\|f\|_{V'} + \|b\|_{[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3} + \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3} \right). \tag{1.4.15}$$

En prenant $\psi = 0$ et $v \in [H_0^1(\Omega)]^3$ dans (1.4.9), on obtient

$$\nu \int_\Omega D_\eta(u) : \nabla v \; dy + \int_\Omega \nabla p \cdot (B_\eta^* v) \; dy = \langle \widetilde{f}, v \rangle_{V',V}.$$

Ceci montre que $\nabla p \in [H^{-1}(\Omega)]^3$ et en utilisant un résultat standard (voir, par exemple [13, Proposition 1.1]), on déduit

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant C \left(\|f\|_{V'} + \|v\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \|w\|_{[H^1(\Omega)]^3} \right). \tag{1.4.16}$$

Ainsi, en combinant (1.4.15), (1.4.16) et (1.4.11), on obtient l'estimation indépendante de λ :

$$\|u\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant C \left(\|f\|_{V'} + \|b\|_{[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3} + \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|a\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3} \right). \tag{1.4.17}$$

En passant à la limite quand $\lambda \to 0$ dans (1.4.8), on obtient une solution faible (u, p) de (1.4.6). Pour montrer l'unicité, on considère $(\overline{u}^*, \overline{p}^*)$ une autre solution faible correspondante à la même donnée. Il s'ensuit que $\overline{u} - \overline{u}^* \in H^1_\tau$, $\nabla \cdot (\overline{u} - \overline{u}^*)$. Donc, d'après la Définition 1.4.1, on obtient

$$2\nu \int_{\Omega(\eta)} |D(\overline{u} - \overline{u}^*)|^2 \; dy + \int_{\partial\Omega(\eta)} \beta \, |\overline{u} - \overline{u}^*|^2 \; d\Gamma = 0.$$

D'où, en utilisant la Proposition 1.4.5, on a $\overline{u} = \overline{u}^*$ dans $\Omega(\eta)$.

Etape 2 : Solutions fortes. On utilise un argument développé dans [43] et [44] : si on approxime η par $\eta_\varepsilon \in C^{1,1}(\omega)$, et les u_ε, p_ε correspondants sont dans H^2 et H^1 respectivement. On montre ci-dessous que leurs normes ne dépendent que de la norme dans H^3 de η_ε afin qu'on puisse passer à la limite. Pour simplifier, on n'écrit pas ε ci-dessous.

On différentie d'abord le système (1.4.6) par rapport à y_1 et y_2 pour obtenir un problème similaire à (1.4.6) avec les termes source et limite correspondants aux différentielles de f, g, a, b, A_η et B_η. Il suffit d'estimer les termes venant de A_η et B_η, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}
\|\nabla \cdot (\nabla u \partial_{y_i} A_\eta) - \partial_{y_i} B_\eta \nabla p\|_{V'}, \quad \|\nabla \cdot (\partial_{y_i} B_\eta^* u)\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|B_\eta^{-1} \partial_{y_i} B_\eta^* u\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3}, \\
\|\partial_{y_i} B_\eta^{-1} \nabla u A_\eta\|_{[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^9}, \quad \|B_\eta^{-1} \nabla u \partial_{y_i} A_\eta\|_{[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^9}, \\
\left\| \partial_{y_i} \frac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})} (\nabla u)^* B_\eta \right\|_{[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^9}, \quad \left\| \frac{1}{\det(\nabla X_{0,\eta})} (\nabla u)^* \partial_{y_i} B_\eta \right\|_{H[^{-1/2}(\partial\Omega)]^9}.
\end{gathered}$$

On utilise ici une bonne idée proposée dans [43] et [44] : on estime les termes ci-dessus en utilisant la régularité de u dans H^2 et la régularité de p dans H^1. Plus précisément, en utilisant les injections $H^{1/2}(\omega) \subset L^4(\omega)$ et $H^{1/4}(\omega) \subset L^{8/3}(\omega)$, on en déduit que les termes ci-dessus sont estimés par

$$\|\eta\|_{H^3(\omega)} \left(\|u\|^{1/4}_{[H^1(\Omega)]^3} \|u\|^{3/4}_{[H^2(\Omega)]^3} + \|p\|^{1/4}_{L^2(\Omega)} \|p\|^{3/4}_{H^1(\Omega)} \right). \tag{1.4.18}$$

En utilisant la première partie de cette preuve et en particulier (1.4.17), on obtient pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\|\partial_{y_i} u\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \|\partial_{y_i} p\|_{L^2_0(\Omega)} \leqslant{}& C \left(\|f\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|b\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|a\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3} \right) \\
&+ C \|\eta\|_{H^3(\omega)} \left(\|u\|^{1/4}_{[H^1(\Omega)]^3} \|u\|^{3/4}_{[H^2(\Omega)]^3} + \|p\|^{1/4}_{L^2(\Omega)} \|p\|^{3/4}_{H^1(\Omega)} \right).
\end{aligned} \tag{1.4.19}$$

On différentie $(1.4.6)_2$ par rapport à y_3, on obtient

$$\begin{aligned}\big\|-y_3\partial_{y_1}\eta\partial^2_{y_3}u_1 - y_3\partial_{y_2}\eta\partial^2_{y_3}u_2 + \partial^2_{y_3}u_3\big\|_{L^2(\Omega)} \\ \leqslant C\left(\|f\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|b\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|a\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3}\right) \\ + C\|\eta\|_{H^3(\omega)}\left(\|u\|^{1/4}_{[H^1(\Omega)]^3}\|u\|^{3/4}_{[H^2(\Omega)]^3} + \|p\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|p\|^{3/4}_{H^1(\Omega)}\right). \quad (1.4.20)\end{aligned}$$

Puis on revient à $(1.4.6)_1$, on obtient aussi

$$\begin{aligned}\big\|A_{33}\partial^2_{y_3}u_1 - y_3\partial_{y_1}\eta\partial_{y_3}p\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|A_{33}\partial^2_{y_3}u_2 - y_3\partial_{y_2}\eta\partial_{y_3}p\big\|_{L^2(\Omega)} + \big\|A_{33}\partial^2_{y_3}u_3 + \partial_{y_3}p\big\|_{L^2(\Omega)} \\ \leqslant C\left(\|f\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|b\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|a\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3}\right) \\ + C\|\eta\|_{H^3(\omega)}\left(\|u\|^{1/4}_{[H^1(\Omega)]^3}\|u\|^{3/4}_{[H^2(\Omega)]^3} + \|p\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|p\|^{3/4}_{H^1(\Omega)}\right). \quad (1.4.21)\end{aligned}$$

Puisque $A_{33} = \dfrac{1}{1+\eta}(1 + (y_3\partial_{y_1}\eta)^2 + (y_3\partial_{y_2}\eta)^2) > 0$, on déduit

$$\begin{aligned}\big\|\partial^2_{y_3}u\big\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\partial_{y_3}p\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|b\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3} + \|g\|_{H^1(\Omega)} + \|a\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3}\right) \\ + C\|\eta\|_{H^3(\omega)}\left(\|u\|^{1/4}_{[H^1(\Omega)]^3}\|u\|^{3/4}_{[H^2(\Omega)]^3} + \|p\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|p\|^{3/4}_{H^1(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

En combinant cela avec (1.4.19), on déduit le résultat. □

On a également besoin du théorème suivant qui est prouvé dans [85].

Théorème 1.4.3. *On suppose que $\beta \geqslant 0$ avec $\beta_1 + \beta_2 > 0$. Soit $\eta \in H^3(\omega)$ et $\delta_0 > 0$ tels que $1 + \eta > \delta_0$ sur ω. On considère le système de Stokes non stationnaire suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t v - \nabla\cdot\mathbb{T}(v,\pi) = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot v = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ v_{n_0} = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(v)n_0 + \beta v]_{\tau_0} = \widetilde{g} & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ v(0,\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.4.22)$$

Il existe $\gamma_0 > 0$ tel que si

$$\widetilde{g} \in W^{1/4}_\gamma(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3), \quad \widetilde{g}_{n_0} = 0. \quad (1.4.23)$$

pour $\gamma \in [0,\gamma_0]$, alors le problème (1.4.22) admet une solution unique qui satisfait l'estimation

$$\|v\|^2_{W_\gamma(0,\infty,[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)} + \|\nabla\pi\|^2_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C\,\|\widetilde{g}\|^2_{W^{1/4}_\gamma(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3)} \quad (1.4.24)$$

où C est une constante positive.

On rappelle que les espaces $W^s_\gamma(0,\infty;X_1,X_2)$ et $L^2_\gamma(0,\infty;L^2(\Omega))$ sont définis par (1.2.7) et (1.2.6).

Remarque 1.4.4. *Dans [85], l'auteur suppose que η est plus régulière mais une telle hypothèse n'est utilisée que pour obtenir un relèvement de la condition aux limites en prenant un système de Stokes stationnaire de la forme* (1.4.1)*, voir relation (75) dans [85].*

On note également que dans [85], la condition (1.4.23) *est remplacée par la condition équivalente*

$$\widetilde{g} \in W^{1/2}_\gamma(0,\infty;[H^1(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3), \quad \widetilde{g}_{n_0} = 0.$$

Une telle équivalence peut être obtenue en utilisant la surjectivité de l'opérateur de trace (voir [70, p.21, Théorème 2.3]).

On termine cette section en prouvant l'inégalité de type de Korn (qu'on a utilisée dans la preuve ci-dessus).

Proposition 1.4.5. *On suppose $\eta \in W^{1,\infty}(\omega)$. On suppose que $\beta_1+\beta_2 \neq 0$. Il existe une constante positive $C>0$, telle que*

$$\|u\|_{[H^1(\Omega(\eta))]^3} \leqslant C\left(\|D(u)\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^9} + \left\|\sqrt{\beta}u\right\|_{[L^2(\partial\Omega(\eta))]^3}\right), \tag{1.4.25}$$

pour tout $u \in [H^1(\Omega(\eta))]^3$.

Démonstration. On montre d'abord par l'absurde que

$$\|u\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^3} \leqslant C\left(\|D(u)\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^9} + \left\|\sqrt{\beta}u\right\|_{[L^2(\partial\Omega(\eta))]^3}\right). \tag{1.4.26}$$

On suppose $u_k \in [H^1(\Omega(\eta))]^3$ avec

$$\|u_k\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^3} = 1, \tag{1.4.27}$$

et

$$\|D(u_k)\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^9} + \left\|\sqrt{\beta}u_k\right\|_{[L^2(\partial\Omega(\eta))]^3} \to 0.$$

En utilisant l'inégalité classique de Korn (voir, par exemple, [57]), les relations ci-dessus impliquent que $(u_k)_k$ converge faiblement vers un certain $u \in [H^1(\Omega(\eta))]^3$ avec $D(u)=0$ et $\sqrt{\beta}u = 0$ sur $\partial\Omega(\eta)$. En particulier, voir [90, Lemme 1.1 p.18], il existe $a,b \in \mathbb{R}^3$, tels que pour tout $y \in \Omega(\eta)$, $u(y) = a + b \wedge y$. En utilisant cela

$$u(y+L_1e_1) = u(y), \quad u(y+L_2e_2) = u(y), \quad (y \in \Omega(\eta)),$$

on déduit que $b=0$, donc $u=a$ dans $\Omega(\eta)$. Puisque $\sqrt{\beta}u = 0$ sur $\partial\Omega(\eta)$, on obtient $u=0$ dans $\Omega(\eta)$. A une sous-suite près $u_k \to u$ fortement dans $[L^2(\Omega(\eta))]^3$ et donc de (1.4.27), on a $\|u\|_{[L^2(\Omega(\eta))]^3} = 1$ ce qui conduit à une contradiction. Pour prouver (1.4.25), on combine (1.4.26) et l'inégalité classique de Korn (en utilisant le fait que $\Omega(\eta)$ est Lipschitzien). □

1.5 Système Linéaire

On considère un système linéarisé de (1.3.5), (1.3.6), (1.3.7) :

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t u - \nabla\cdot\mathbb{T}(u,p) = f & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \partial_{tt}\eta + A_1\eta + A_2\partial_t\eta = -\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(u,p)n_0) + h & \text{dans } (0,\infty)\times\omega \end{array}\right. \tag{1.5.1}$$

avec les conditions au bord

$$\left\{\begin{array}{rl} [u - \mathcal{T}\partial_t\eta]_{n_0} = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(u)n_0 + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\eta)]_{\tau_0} = \widetilde{g} & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.5.2}$$

et avec les conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{rl} u(0,\cdot) = u^0 & \text{dans } \Omega, \\ \eta(0,\cdot) = \eta^0 & \text{dans } \omega, \\ \partial_t\eta(0,\cdot) = \eta^1 & \text{dans } \omega. \end{array}\right. \tag{1.5.3}$$

On considère (v,π) la solution de (1.4.22) associé à $\widetilde{g}$. Donc $w = u - v$ et $q = p - \pi$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t w - \nabla\cdot\mathbb{T}(w,q) = f & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot w = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \partial_{tt}\eta + A_1\eta + A_2\partial_t\eta = -\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(w,q)n_0) - \mathcal{T}^*(\mathbb{T}(v,\pi)n_0) + h & \text{dans } (0,\infty)\times\omega \end{array}\right. \tag{1.5.4}$$

avec les conditions au bord

$$\left\{\begin{array}{rl} [w - \mathcal{T}\partial_t\eta]_{n_0} = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(w)n_0 + \beta(w - \mathcal{T}\partial_t\eta)]_{\tau_0} = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.5.5}$$

et avec les conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{rl} w(0,\cdot) = u^0 & \text{dans } \Omega, \\ \eta(0,\cdot) = \eta^0 & \text{dans } \omega, \\ \partial_t\eta(0,\cdot) = \eta^1 & \text{dans } \omega. \end{array}\right. \tag{1.5.6}$$

Pour résoudre (1.5.4)-(1.5.6), on utilise une approche des semi- groupes. On munit l'espace $[L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega)$ avec le produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle w, v\rangle_{[L^2(\Omega)]^3} + \left\langle A_1^{1/2}\eta_1, A_1^{1/2}\xi_1 \right\rangle_{L^2(\omega)} + \langle \eta_2, \xi_2\rangle_{L^2(\omega)}.$$

On considère les espaces fonctionnels suivants

$$\mathbb{H} = \Big\{ (w,\eta_1,\eta_2) \in [L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega) \mid \nabla\cdot w = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ [w - \mathcal{T}\eta_2]_{n_0} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \Big\},$$

$$\mathbb{V} = \Big([H^1(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{3/4}) \times \mathcal{D}(A_1^{1/4})\Big) \cap \mathbb{H}. \tag{1.5.7}$$

On note aussi par $\mathbb{P}$ la projection orthogonale

$$\mathbb{P} : [L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega) \longrightarrow \mathbb{H}.$$

Enfin, on définit

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(w, \eta_1, \eta_2) \in \Big([H^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1) \times \mathcal{D}(A_1^{1/2})\Big) \cap \mathbb{V}, \\ [2\nu D(w)n_0 + \beta(w - \mathcal{T}\eta_2)]_{\tau_0} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\}, \tag{1.5.8}$$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu\Delta w \\ -\eta_2 \\ A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \mathcal{T}^*(2\nu D(w)n_0) \end{pmatrix}, \tag{1.5.9}$$

et

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad A = \mathbb{P}\mathcal{A}. \tag{1.5.10}$$

En utilisant la définition ci-dessus, on peut écrire (1.5.4)–(1.5.6) sous la forme

$$W' + AW = \mathbb{P}F, \quad W(0) = W^0, \tag{1.5.11}$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} w \\ \eta \\ \partial_t\eta \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ h \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.5.1. *On suppose que $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$. L'opérateur A défini par* (1.5.8)–(1.5.10) *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions fortement continu sur $\mathbb{H}$.*

Démonstration. Tout d'abord, on montre que l'opérateur A est dissipatif : on suppose que $W = \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$. Ensuite, par intégration par parties, on obtient :

$$\langle AW, W\rangle = \langle \mathcal{A}W, W\rangle = 2\nu \int_\Omega |D(w)|^2 \, dy - \int_{\partial\Omega} 2\nu D(w)n_0 \cdot [w - \mathcal{T}(\eta_2)] \, d\Gamma + \int_\omega \left|A_2^{1/2}\eta_2\right|^2 \, ds.$$

On écrit

$$-\int_{\partial\Omega} 2\nu D(w)n_0 \cdot [w - \mathcal{T}(\eta_2)] \, d\Gamma = -\int_{\partial\Omega} 2\nu [D(w)n_0]_{\tau_0} \cdot [w - \mathcal{T}(\eta_2)]_{\tau_0} \, d\Gamma \\ = \int_{\partial\Omega} \beta \, |[w - \mathcal{T}(\eta_2)]_{\tau_0}|^2 \, d\Gamma,$$

et on déduit

$$\langle AW, W\rangle = 2\nu \int_\Omega |D(w)|^2 \ dy + \int_\omega \left|A_2^{1/2}\eta_2\right|^2 \ ds + \int_{\partial\Omega} \beta|[w - \mathcal{T}(\eta_2)]_{\tau_0}|^2 \ d\Gamma \geqslant 0.$$

Ensuite, on montre que l'opérateur A est m-dissipatif : on montre que pour certains $\lambda > 0$ l'opérateur $\lambda I + A$ est surjectif. Soit $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$. Le problème est de trouver $\begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$ solution de l'équation

$$(\lambda I + A) \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = F, \tag{1.5.12}$$

qui est équivalente au système

$$\lambda w - \nabla \cdot \mathbb{T}(w, q) = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.5.13a}$$
$$\nabla \cdot w = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.5.13b}$$
$$\lambda\eta_1 - \eta_2 = g \quad \text{sur } \omega, \tag{1.5.13c}$$
$$\lambda\eta_2 + A_1\eta_1 + A_2\eta_2 = -\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(w, q)n_0) + h \quad \text{sur } \omega, \tag{1.5.13d}$$
$$[w - \mathcal{T}\eta_2]_{n_0} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{1.5.13e}$$
$$[2\nu D(w)n_0 + \beta(w - \mathcal{T}\eta_2)]_{\tau_0} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1.5.13f}$$

Pour résoudre le système ci-dessus, on utilise $\eta_1 = \dfrac{1}{\lambda}(g + \eta_2)$ pour obtenir un système en (u, η_2) et on introduit l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{(\phi, \xi) \in [H^1(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \mid \nabla \cdot \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad [\phi - \mathcal{T}\xi]_{n_0} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\right\}.$$

On peut donc écrire l'équation (1.5.12) sous une forme variationnelle : trouver $(w, \eta_2) \in \mathcal{V}$ tel que

$$a\left(\begin{pmatrix} w \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathcal{V}\right), \tag{1.5.14}$$

avec $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\begin{aligned} a\left(\begin{pmatrix} w \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}\right) = \lambda \int_\Omega w \cdot \phi \ dy + 2\nu \int_\Omega D(w) : D(\phi) \ dy + \lambda \int_\omega \eta_2 \cdot \xi \ ds + \int_\omega (A_2\eta_2) \cdot \xi \ ds \\ + \frac{1}{\lambda} \int_\omega (A_1^{1/2}\eta_2) \cdot (A_1^{1/2}\xi) \ ds + \int_{\partial\Omega} \beta[w - \mathcal{T}(\eta_2)]_{\tau_0} \cdot [\phi - \mathcal{T}(\xi)]_{\tau_0} \ d\Gamma, \end{aligned}$$

et $L : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$L\begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} = \int_\Omega f \cdot \phi \ dy + \int_\omega h \cdot \xi \ ds - \frac{1}{\lambda} \int_\omega (A_1^{1/2}g) \cdot (A_1^{1/2}\xi) \ ds.$$

La forme bilinéaire a est continue et coercive sur $\mathcal{V}$ grâce à l'inégalité classique de Korn. On peut aussi vérifier que L est linéaire et continue sur $\mathcal{V}$. Selon le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique $(u, \eta_2) \in \mathcal{V}$ solution de (1.5.14).

Maintenant, en prenant $\xi = 0$ et $\phi \in \mathcal{D}_\sigma(\Omega)$, l'équation (1.5.14) devient

$$\lambda \int_\Omega w \cdot \phi \, dy + 2\nu \int_\Omega D(w) : D(\phi) \, dy = \int_\Omega f \cdot \phi \, dy,$$

ce qui est équivalent à

$$\langle \lambda w - \nu \Delta w - f, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_\sigma(\Omega).$$

En utilisant le théorème de De Rham [89, Proposition 1.2, p.14], on déduit l'existence d'un unique $q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que (1.5.13a) est satisfaite. En particulier, on a $\nabla \cdot \mathbb{T}(w, q) \in [L^2(\Omega)]^3$ et $\mathbb{T}(w, q) \in [L^2(\Omega)]^9$. Par conséquent, on en déduit que $\mathbb{T}(w, q) n_0 \in [H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3$ et

$$\int_\Omega \mathbb{T}(w, q) : D(\phi) \, dy - \langle \mathbb{T}(w, q) n_0, \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_\Omega (f - \lambda w) \cdot \phi \, dy, \tag{1.5.15}$$

pour tout $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$, $\nabla \cdot \phi = 0$, $\phi_{n_0} = 0$. D'autre part, en prenant $\xi = 0$ dans (1.5.14) on obtient

$$\lambda \int_\Omega w \cdot \phi \, dy + 2\nu \int_\Omega D(w) : D(\phi) \, dy + \langle \beta [w - \mathcal{T}(\eta_2)]_{\tau_0}, \phi \, \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_\Omega f \cdot \phi \, dy, \tag{1.5.16}$$

pour tout $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$, $\nabla \cdot \phi = 0$, $\phi_{n_0} = 0$. En comparant (1.5.15) et (1.5.16) et en tenant compte du fait que

$$\int_\Omega \mathbb{T}(w, q) : D(\phi) \, dy = 2\nu \int_\Omega D(w) : D(\phi) \, dy, \quad \forall \phi \in [H^1(\Omega)]^3, \ \nabla \cdot \phi = 0, \ \phi_{n_0} = 0,$$

on obtient

$$- \langle \mathbb{T}(w, q) n_0, \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \langle [\beta (w - \mathcal{T} \eta_2)]_{\tau_0}, \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}, \quad \forall \phi \in [H^1(\Omega)]^3, \ \nabla \cdot \phi = 0, \ \phi_{n_0} = 0. \tag{1.5.17}$$

Soit $\phi \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3$ telle que $\phi_{n_0} = 0$, et soit le système

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \mathbb{T}(\widehat{g}, \widehat{q}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \widehat{g} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \widehat{g} = \phi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le système ci-dessus admet une solution unique $(\widehat{g}, \widehat{q}) \in [H^1(\Omega)]^3 \times L^2_0(\Omega)$ telle que $\nabla \cdot \widehat{g} = 0$ et $\widehat{g}|_{\partial\Omega} = \phi$. Cela implique que (1.5.17) est satisfaite pour tout $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$, $\phi_{n_0} = 0$. En insérant (1.5.17) dans (1.5.15) on obtient

$$\int_\Omega 2\nu D(w) : D(\phi) \, dy - \int_\Omega q \nabla \cdot \phi \, dy + \langle \beta (w - \mathcal{T} \eta_2)_{\tau_0}, \phi_{\tau_0} \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \int_\Omega (f - \lambda w) \cdot \phi \, dy, \tag{1.5.18}$$

pour tout $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$, $\phi_{n_0} = 0$.

Ainsi, on déduit que (w, q) est une solution faible de (1.5.13a), (1.5.13b), (1.5.13e) et (1.5.13f) au sens de la définition 1.4.1. Puisque $\eta_2 \in H^2(\omega)$, $\mathcal{T}\eta_2 \in [H^2(\partial\Omega)]^3$ on peut appliquer le Théorème 1.4.2 et obtenir $(w, q) \in [H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

En revenant à la formulation variationnelle (1.5.14), on déduit

$$\int_\omega (A_1^{1/2}\eta_1) \cdot (A_1^{1/2}\xi)\, ds = -\lambda \int_\omega \eta_2 \cdot \xi\, ds - \int_\omega (A_2\eta_2) \cdot \xi\, ds \\ - \int_\omega \mathcal{T}^*(\mathbb{T}(u, q)n_0) \cdot \xi\, ds + \int_\omega h \cdot \xi\, ds,$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}(A_1^{1/2})$ et où $\eta_1 = \dfrac{1}{\lambda}(g+\eta_2)$. On a $\mathbb{T}(w, q)n_0 \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3$ et ainsi $\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(w, q)n_0) \in L_0^2(\omega)$. En outre, puisque $\eta_2 \in H^2(\omega)$, on déduit que $\eta_2 \in \mathcal{D}(A_2)$. Ainsi $A_1\eta_1 \in L_0^2(\omega)$.

En appliquant le théorème de Lumer-Phillips, on conclut que $(e^{-tA})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de contractions sur $\mathbb{H}$. □

Afin de prouver que $(e^{-tA})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe analytique, on utilise le Lemme 3.10 dans [11]. On doit d'abord montrer que $(e^{-tA})_{t\geqslant 0}$ est exponentiellement stable.

Proposition 1.5.2. *On suppose que $\beta_1+\beta_2 \neq 0$. Le semi-groupe $(e^{-tA})_{t\geqslant 0}$ est exponentiellement stable.*

Démonstration. Puisque $(e^{-tA})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe de contractions, on applique le résultat classique de Huang-Gearhart (voir par exemple [71, Théorème 1.3.2, p.4]). On doit montrer que

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \quad \text{et} \quad \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\|(i\lambda\,\mathrm{Id} + A)^{-1}\right\| < \infty.$$

En utilisant la preuve de [11, Proposition 3.5], il suffit de montrer l'existence de $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \in (0, 1), \quad \left\|(\lambda\,\mathrm{Id} + A)^{-1}\right\|_{\mathbb{H}} \leqslant C.$$

On considère $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}\,\lambda \in (0, 1)$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ et $\begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$ tels que

$$(\lambda\,\mathrm{Id} + A) \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = F. \tag{1.5.19}$$

On peut écrire la relation ci-dessus comme le système (1.5.13). On multiplie (1.5.13a) par $\overline{w}$, (1.5.13d) par $\overline{\eta}_2$ et on effectue des intégrations par parties pour en déduire

$$\mathrm{Re}\,\lambda \left(\|w\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\eta_2\|^2_{L^2(\omega)} + \left\|A_1^{1/2}\eta_1\right\|^2_{L^2(\omega)} \right) + 2\nu \|Dw\|^2_{[L^2(\Omega)]^9} + \int_{\partial\Omega} \beta|(w - \mathcal{T}\eta_2)_{\tau_0}|^2 d\Gamma \\ + \left\|A_2^{1/2}\eta_2\right\|^2_{L^2(\omega)} \leqslant C \|F\|_{\mathbb{H}} \|(w, \eta_1, \eta_2)\|_{\mathbb{H}}. \tag{1.5.20}$$

On a

$$\|\eta_2\|^2_{L^2_0(\omega)} \leqslant C \left\|A_2^{1/2}\eta_2\right\|^2_{L^2_0(\omega)} \leqslant C \|F\|_{\mathbb{H}} \|(w,\eta_1,\eta_2)\|_{\mathbb{H}}. \tag{1.5.21}$$

D'autre part, on a

$$\|w\|^2_{[L^2(\partial\Omega)]^3} \leqslant C(\|\beta(w-\mathcal{T}\eta_2)\|^2_{[L^2(\partial\Omega)]^3} + \|\mathcal{T}\eta_2\|^2_{[L^2(\partial\Omega)]^3}).$$

En utilisant (1.4.25), (1.5.21) et le fait que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(L^2(\omega), [L^2(\partial\Omega)]^3)$, on obtient

$$\|w\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} \leqslant C \|F\|_{\mathbb{H}} \|W\|_{\mathbb{H}}. \tag{1.5.22}$$

En suivant la démonstration de la Proposition 3.5 dans [11], on a

$$\left\|A_1^{1/2}\eta_1\right\|^2_{L^2_0(\omega)} \leqslant C \left(\|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \|F\|^2_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}} \|(w,\eta_1,\eta_2)\|_{\mathbb{H}}\right).$$

En rassemblant l'inégalité ci-dessus avec (1.5.22) et (1.5.21), on obtient

$$\|(w,\eta_1,\eta_2)\|_{\mathbb{H}} \leqslant C \|F\|_{\mathbb{H}},$$

pour une certaine constante positive C. Ceci conclut la preuve. □

Proposition 1.5.3. *On suppose que $\beta_1+\beta_2 \neq 0$. L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur $\mathbb{H}$.*

Démonstration. On applique le Lemme 3.10 dans [11] : puisque $(e^{-tA})_{t\geqslant 0}$ est exponentiellement stable, il suffit de montrer

$$\left\|(\lambda \operatorname{Id} + A)^{-1}F\right\|_{\mathbb{H}} \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \|F\|_{\mathbb{H}} \quad (F \in \mathbb{H},\ \lambda \in i\mathbb{R}^*). \tag{1.5.23}$$

On suppose $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ et on considère $W = (\lambda \operatorname{Id} + A)^{-1}F$. On écrit $W = \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ de sorte que (1.5.13) est vérifiée. On procède maintenant comme dans [11, Proposition 3.11] : on multiplie (1.5.13a) par $\overline{u}$ et (1.5.13d) par $\overline{\eta}_2$ et on intègre par parties

$$\lambda \left(\int_\Omega |w|^2\, dy + \|\eta_2\|^2_{L^2(\omega)} - \left\|A_1^{1/2}\eta_1\right\|^2_{L^2(\omega)}\right) + 2\nu \int_\Omega |Dw|^2\, dy + \left\|A_2^{1/2}\eta_2\right\|^2_{L^2(\omega)} + \int_{\partial\Omega} \beta|(w-\mathcal{T}\eta_2)_{\tau_0}|^2\, d\Gamma = \langle F, W\rangle. \tag{1.5.24}$$

En multipliant par $\overline{\lambda}$ et en prenant la partie réelle, on trouve

$$|\lambda|^2 \|W\|^2_{\mathbb{H}} = 2|\lambda|^2 \left\|A_1^{1/2}\eta_1\right\|^2_{L^2(\omega)} + \operatorname{Re}\langle F; \lambda W\rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\lambda|^2 \|W\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant 4|\lambda|^2 \left\|A_1^{1/2}\eta_1\right\|_{L^2}^2 + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 . \tag{1.5.25}$$

Puisque A_1 et A_2 sont des opérateurs positifs auto-adjoints et $\mathcal{D}(A_1^{1/4}) = \mathcal{D}(A_2^{1/2})$, on applique [25, Théorème 1.1] pour déduire que

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur $\mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega)$. On a en particulier

$$|\lambda| \left\|(\lambda\,\mathrm{Id} + \mathbb{A})^{-1} Z\right\|_{\mathcal{D}(A_1^{1/2})\times L_0^2(\omega)} \leqslant C \|Z\|_{\mathcal{D}(A_1^{1/2})\times L_0^2(\omega)} \quad (\lambda \in i\mathbb{R}^*,\ Z \in \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega)).$$

En appliquant cette estimation sur (1.5.13c)-(1.5.13d), on déduit

$$|\lambda| \left(\left\|A_1^{1/2}\eta_1\right\|_{L^2(\omega)} + \|\eta_2\|_{L^2(\omega)} \right) \leqslant C \left(\|\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(w,q)n_0)\|_{L^2(\omega)} + \left\|A_1^{1/2} g\right\|_{L^2(\omega)} + \|h\|_{L^2(\omega)} \right). \tag{1.5.26}$$

On utilise le fait que $\mathcal{T}^* \in \mathcal{L}([L^2(\partial\Omega)]^3, L_0^2(\omega))$ et on combine (1.5.26) et (1.5.25) pour trouver

$$|\lambda| \|W\|_{\mathbb{H}} \leqslant C \left(\|\mathbb{T}(w,q)n_0)\|_{[L^2(\partial\Omega)]^3} + \|F\|_{\mathbb{H}} \right). \tag{1.5.27}$$

En combinant le Théorème 1.4.2 et un argument d'interpolation, on obtient pour $\varepsilon < 1/4$

$$\|\mathbb{T}(w,q)n_0\|_{[L^2(\partial\Omega)]^3} \leqslant C \left(\|(\nabla \cdot (\mathbb{T}(w,q)))\|_{[H^{-2\varepsilon}(\Omega)]^3} + \|\mathcal{T}\eta_2\|_{[H^{2-2\varepsilon}(\partial\Omega)]^3} \right). \tag{1.5.28}$$

Le reste de la preuve est similaire à la preuve de [11, Proposition 3.11]. □

On rappelle que $\mathcal{X}_{\infty,\gamma}$ est l'espace donné dans (1.2.12). On est maintenant en mesure de donner le théorème suivant.

Théorème 1.5.4. *On suppose que $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$. Il existe $\gamma_0 > 0$ tel que si*

$$(u^0, \eta^0, \eta^1) \in \mathbb{V}, \quad f \in L_\gamma^2(0, +\infty; [L^2(\Omega)]^3), \quad h \in L_\gamma^2(0, +\infty; L_0^2(\omega)),$$

et

$$\widetilde{g} \in W_\gamma^{1/4}(0, +\infty; [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3, [L^2(\partial\Omega)]^3) \quad \textit{avec} \quad \widetilde{g}_{n_0} = 0,$$

pour $\gamma \in [0, \gamma_0]$, alors il existe une unique solution $(u, p, \eta) \in \mathcal{X}_{\infty,\gamma}$ sur $(0, +\infty)$ du système (1.5.1)-(1.5.3). De plus il existe une constante positive C telle que

$$\|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_{\infty,\gamma}} \leqslant C \Big(\left\|(u^0, \eta^0, \eta^1)\right\|_{\mathbb{V}} + \|f\|_{L_\gamma^2(0,+\infty;[L^2(\Omega)]^3)} + \|\widetilde{g}\|_{W_\gamma^{1/4}(0,+\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3)} + \|h\|_{L_\gamma^2(0,+\infty;L^2(\omega))} \Big). \tag{1.5.29}$$

Démonstration. Puisque A génère un semi-groupe analytique et exponentiellement stable, d'après [15, Théorème 3.1, p.143], l'équation d'évolution (1.5.11) admet une solution forte unique et vérifie les estimations

$$\|(w,\eta_1,\eta_2)\|_{L^2_\gamma(0,+\infty;\mathcal{D}(A))} + \|(w,\eta_1,\eta_2)\|_{L^\infty_\gamma(0,+\infty;\mathbb{V})} + \|(w,\eta_1,\eta_2)\|_{H^1_\gamma(0,+\infty;\mathbb{H})} \\ \leqslant C\left(\left\|(u^0,\eta^0,\eta^1)\right\|_{\mathbb{V}} + \|f\|_{L^2_\gamma(0,+\infty;[L^2(\Omega)]^3)} + \|h\|_{L^2_\gamma(0,+\infty;L^2(\omega))}\right). \quad (1.5.30)$$

En appliquant le théorème de De Rham [89, Proposition 1.2, p.14], on déduit l'existence de $q \in L^2_\gamma(0,\infty;H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ tel que (w,η,q) est la solution de (1.5.4)-(1.5.6). En posant $u = w + v$, $p = q + \pi$ où (v,π) est la solution de (1.4.22) associée à $\widetilde{g}$, on obtient le résultat. □

Corollaire 1.5.5. *On suppose que $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$. Soit $T > 0$ et*

$$(u^0,\eta^0,\eta^1) \in \mathbb{V}, \quad f \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3), \quad h \in L^2(0,T;L^2_0(\omega)),$$

$$\widetilde{g} \in W^{1/4}(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3) \quad \textit{avec} \quad \widetilde{g}_{n_0} = 0.$$

Alors il existe une unique solution $(u,p,\eta) \in \mathcal{X}_T$ sur $(0,T)$ du système (1.5.1)-(1.5.3). *De plus, il existe une constante positive indépendante de T telle que*

$$\|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_T} \leqslant C\Big(\left\|(u^0,\eta^0,\eta^1)\right\|_{\mathbb{V}} + \|f\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} + \|\widetilde{g}\|_{W^{1/4}(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3)} \\ + \|h\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}\Big). \quad (1.5.31)$$

Démonstration. On étend f, $\widetilde{g}$, h par 0 dans (T,∞) et on applique le Théorème 1.5.4. □

On peut maintenant traiter le cas $\beta_i = 0$ pour $i = 1,2$

Théorème 1.5.6. *On suppose que $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Soit $T > 0$ et*

$$(u^0,\eta^0,\eta^1) \in \mathbb{V}, \quad f \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3), \quad h \in L^2(0,T;L^2_0(\omega)),$$

$$\widetilde{g} \in W^{1/4}(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3) \quad \textit{avec} \quad \widetilde{g}_{n_0} = 0.$$

Alors il existe une unique solution $(u,p,\eta) \in \mathcal{X}_T$ sur $(0,T)$ du système (1.5.1)-(1.5.3). *De plus, il existe une constante positive (non décroissante par rapport à T) telle que*

$$\|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_T} \leqslant C\Big(\left\|(u^0,\eta^0,\eta^1)\right\|_{\mathbb{V}} + \|f\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} + \|\widetilde{g}\|_{W^{1/4}(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3)} \\ + \|h\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}\Big). \quad (1.5.32)$$

Démonstration. On introduit l'espace

$$\mathbb{X} = W^{1/4}(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3) \times W^{1/4}(0,T;H^{1/2}(\omega),L^2(\omega)).$$

Soit $(\widetilde{u}, \widetilde{\eta}_2) \in \mathbb{X}$. D'après le Corollaire 1.5.5 (avec $\beta_1 = \beta_2 = 1$), il existe une solution forte unique $(u, p, \eta) \in \mathcal{X}_T$ du système (1.5.1), (1.5.3) avec les conditions au bord

$$\begin{cases} [u - \mathcal{T}\partial_t \eta]_{n_0} = 0 & t \in (0,T),\ y \in \partial\Omega, \\ [2\nu D(u) n_0]_{\tau_0} + [u - \mathcal{T}\partial_t \eta]_{\tau_0} = \widetilde{g} + [\widetilde{u} - \mathcal{T}\widetilde{\eta}_2]_{\tau_0} & t \in (0,T),\ y \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.5.33}$$

En utilisant des théorèmes de trace et la définition (1.2.10) de $\mathcal{X}_T$ on peut donc définir l'application

$$\mathbb{F} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{\eta}_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ \partial_t \eta \end{pmatrix}.$$

On montre que l'application $\mathbb{F}$ est une contraction pour T assez petit : on suppose $(\widetilde{u}^i, \widetilde{\eta}_2^i) \in \mathbb{X}$, $i = 1, 2$ et soient $(u^i, p^i, \eta^i) \in \mathcal{X}_T$ $i = 1, 2$ les solutions correspondantes du système (1.5.1), (1.5.3), (1.5.33). On pose

$$u = u^1 - u^2, \quad p = p^1 - p^2, \quad \eta = \eta^1 - \eta^2, \quad \widetilde{u} = \widetilde{u}^1 - \widetilde{u}^2, \quad \widetilde{\eta}_2 = \widetilde{\eta}_2^1 - \widetilde{\eta}_2^2$$

et on obtient

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot \mathbb{T}(u,p) = 0 & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \partial_{tt}\eta + A_1 \eta + A_2 \partial_t \eta = -\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(u,p) n_0) & \text{dans } (0,\infty) \times \omega, \end{cases} \tag{1.5.34}$$

$$\begin{cases} [u - \mathcal{T}\partial_t \eta]_{n_0} = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ [2\nu D(u) n_0 + (u - \mathcal{T}\partial_t \eta)]_{\tau_0} = [(\widetilde{u} - \mathcal{T}\widetilde{\eta}_2)]_{\tau_0} & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.5.35}$$

$$\begin{cases} u(0,\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \eta(0,\cdot) = 0 & \text{dans } \omega, \\ \partial_t \eta(0,\cdot) = 0 & \text{dans } \omega. \end{cases} \tag{1.5.36}$$

D'après (1.5.31) et le fait que $\mathcal{T}$ soit borné, on obtient

$$\|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_T} \leqslant C \|(\widetilde{u}, \widetilde{\eta}_2)\|_{\mathbb{X}}. \tag{1.5.37}$$

D'après (1.2.10), (1.2.11), le théorème de trace et le Lemme A.5 dans [17], il existe une constante C indépendante de T telle que

$$\|\partial_t \eta\|_{H^{3/4}(0,T;H^{1/2}(\omega))} + \|v\|_{H^{5/8}(0,T;[L^2(\partial\Omega)]^3)} + \|v\|_{L^\infty(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3)} \leqslant C \|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_T}. \tag{1.5.38}$$

D'après le Corollaire A.3 dans [17] et (1.5.36), on déduit

$$\|\partial_t \eta\|_{H^{1/4}(0,T;L^2(\omega))} + \|v\|_{H^{1/4}(0,T;[L^2(\partial\Omega)]^3)} \leqslant C(T^{3/4} + T^{3/8}) \|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_T} \tag{1.5.39}$$

et

$$\|\partial_t \eta\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\omega))} + \|v\|_{L^2(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3)} \leqslant C T^{1/2} \|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_T}. \tag{1.5.40}$$

En combinant les estimations (1.5.38), (1.5.39), (1.5.40), on obtient

$$\left\|\mathbb{F}(\widetilde{u}^1, \widetilde{\eta}^1) - \mathbb{F}(\widetilde{u}^2, \widetilde{\eta}^2)\right\|_{\mathbb{X}} \leqslant C(T^{3/4} + T^{3/8}) \left\|(\widetilde{u}^1, \widetilde{\eta}^1) - (\widetilde{u}^2, \widetilde{\eta}^2)\right\|_{\mathbb{X}}$$

Cela montre que $\mathbb{F}$ est une contraction pour T assez petit et en utilisant le théorème du point fixe de Banach, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution forte pour le système (1.5.1)-(1.5.3) (avec $\beta_1 = \beta_2 = 0$) et l'estimation (1.5.32). Pour en déduire le résultat pour tout T, on répète simplement la procédure ci-dessus sur des petits intervalles $[kT_0, (k+1)T_0]$, où T_0 est telle que $\mathbb{F}$ soit une contraction. $\square$

1.6 Point fixe

Dans cette section, on montre le résultat principal dans le Théorème 1.1.1. En utilisant la Définition 1.3.1, on reformule d'abord ce résultat après un changement de variables.

Théorème 1.6.1.

1. *Soit $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$. On suppose que $(u^0, \eta^0, \eta^1) \in \mathbb{V}$ avec*

$$1 + \eta^0 > 0.$$

Il existe un temps $T_0 > 0$ (ne dépendant que de $\|(u^0, \eta^0, \eta^1)\|_{\mathbb{V}}$) tel que le système (1.3.5), (1.3.6) *et* (1.3.7) *admet une solution forte unique $(u, p, \eta) \in \mathcal{X}_T$ pour $T < T_0$.*

2. *Soit $\beta_i \geqslant 0$ avec $\beta_1 + \beta_2 > 0$, $i = 1, 2$. Il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout $(u^0, \eta^0, \eta^1) \in \mathbb{V}$ avec*

$$1 + \eta^0 > 0 \quad \text{et avec} \quad \|(u^0, \eta^0, \eta^1)\|_{\mathbb{V}} \leqslant R_0,$$

alors le système (1.3.5), (1.3.6) *et* (1.3.7) *admet une solution forte unique $(u, p, \eta) \in \mathcal{X}_{\infty,\gamma}$ sur $(0, \infty)$ pour $\gamma \in [0, \gamma_0]$.*

On rappelle que $\mathbb{V}$ est défini par (1.5.7). Le résultat ci-dessus est obtenu en utilisant un argument du point fixe.

Tout d'abord, on montre l'existence locale dans le temps. On définit pour tout $T > 0$ l'espace

$$\mathcal{Y}_T = L^2(0, T; [L^2(\Omega)]^3) \times W^{1/4}(0, T; [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3, [L^2(\partial\Omega)]^3) \times L^2(0, T; L^2(\omega)), \tag{1.6.1}$$

et pour $R > 0$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{B}_{T,R} = \{(f, \widetilde{g}, h) \in \mathcal{Y}_T \mid \|(f, \widetilde{g}, h)\|_{\mathcal{Y}_T} \leqslant R\}. \tag{1.6.2}$$

Dans la suite, on note par C une quantité qui ne dépend pas de R et T. On commence d'abord par supposer

$$\left\|(u^0, \eta^0, \eta^1)\right\|_{\mathbb{V}} \leqslant R. \tag{1.6.3}$$

Ainsi, en appliquant le théorème 1.5.6, on sait que pour tout $(f, \widetilde{g}, h) \in \mathcal{B}_{T,R}$, il existe une unique solution $(u, p, \eta) \in \mathcal{X}_T$ de (1.5.1)-(1.5.3). De plus, l'estimation (1.5.29) donne

$$\|(u, p, \eta)\|_{\mathcal{X}_T} \leqslant CR, \tag{1.6.4}$$

pour une constante positive C. Pour l'existence locale, la constante R est fixée. Dans la section suivante, on montre que pour T assez petit, on peut définir F, G, H par (1.3.9), (1.3.10) et (1.3.14) et donc on considère l'application Φ définie comme suit :

$$\Phi : \mathcal{B}_{T,R} \longrightarrow \mathcal{Y}_T, \quad (f, \widetilde{g}, h) \longmapsto (F(u, p, \eta), G(u, \eta), H(u, \eta)). \tag{1.6.5}$$

Dans ce qui suit, on montre que pour T suffisamment petit, on a $\Phi(\mathcal{B}_{T,R}) \subset \mathcal{B}_{T,R}$ et $\Phi_{|\mathcal{B}_{T,R}}$ est une contraction stricte.

Tout d'abord, on remarque que (1.6.4) donne plusieurs autres estimations utiles. D'après (1.2.10), (1.2.11) et le Lemme A.5 dans [17], il existe une constante C indépendante de T telle que

$$\begin{aligned}\|\eta\|_{H^1(0,T;H^2(\omega))} + \|\eta\|_{H^{3/4}(0,T;H^{5/2}(\omega))} + \|\partial_t\eta\|_{L^4(0,T;H^{3/2}(\omega))} + \left\|\partial_{s_j}\eta\right\|_{H^{7/8}(0,T;H^{5/4}(\omega))} \\ + \left\|\partial^2_{s_js_k}\eta\right\|_{H^{7/8}(0,T;L^{8/3}(\omega))} + \|u\|_{L^3(0,T;[H^{5/3}(\Omega)]^3)} \\ + \|u\|_{H^{1/4}(0,T;[H^1(\partial\Omega)]^3)} + \|u\|_{H^{3/4}(0,T;[L^2(\partial\Omega)]^3)} \leqslant CR. \quad (1.6.6)\end{aligned}$$

Ici et dans ce qui suit, on utilise la notation suivante pour les dérivées de la fonction $\eta = \eta(t, s_1, s_2)$:

$$\partial_{s_j}\eta, \quad \partial^2_{s_js_k}\eta \quad \text{et} \quad \partial^3_{s_is_js_k}\eta \quad (i, j, k \in \{1, 2\}).$$

Pour simplifier, dans tout ce qui suit, on suppose

$$T \leqslant 1. \tag{1.6.7}$$

L'hypothèse ci-dessus simplifie les estimations dans le sens qu'on ne conserve que la plus petite puissance de T. On note également par C_R une constante qui peut dépendre de R de manière non décroissante (typiquement la somme de CR^m, $m \in \mathbb{N}$, $C > 0$). La valeur de ces constantes peut changer d'une apparence à l'autre.

1.6.1 Estimations sur le changement de variables

On montre d'abord quelques estimations utiles sur η

Lemme 1.6.2. *On a*

$$\left\|\eta - \eta^0\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} \leqslant C\left\|\eta - \eta^0\right\|_{L^\infty(0,T;H^2(\omega))} \leqslant C_R T^{1/2}. \tag{1.6.8}$$

En particulier, il existe

$$T_0 = \frac{C}{R^2} > 0$$

tel que si $T \leqslant T_0$, alors

$$\left\|\frac{1}{1+\eta}\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} \leqslant C. \tag{1.6.9}$$

On a aussi les estimations suivantes

$$\left\|\partial_{s_j}\eta - \partial_{s_j}\eta^0\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} \leqslant C_R T^{1/4}, \tag{1.6.10}$$

$$\left\|\eta - \eta^0\right\|_{L^\infty(0,T;H^{5/2}(\omega))} + \left\|\partial^2_{s_js_k}\eta - \partial^2_{s_js_k}\eta^0\right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\omega))} \leqslant C_R T^{1/4}, \tag{1.6.11}$$

$$\|\partial_t\eta\|_{L^6(0,T;H^1(\omega))} \leqslant C_R T^{1/6}. \tag{1.6.12}$$

Démonstration. Pour montrer (1.6.8), on écrit

$$\eta(t,\cdot) = \eta^0 + \int_0^t \partial_t \eta(t',\cdot)dt' \tag{1.6.13}$$

et on le combine avec (1.6.6) et avec $H^2(\omega) \hookrightarrow L^\infty(\omega)$.

Puisque

$$\eta^0 \in \mathcal{D}(A_1^{3/4}) = H^3(\omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\omega}),$$

il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1 + \eta^0 > 2\varepsilon$. En utilisant (1.6.8), on obtient (1.6.9) si T est suffisamment petit.

On pose $\xi = \partial_{s_j}\eta - \partial_{s_j}\eta^0$ et $\xi^*(z,\cdot) = \xi(zT,\cdot)$, $z \in [0,1]$. Ensuite on combine (A.6.1), l'injection $H^{3/4}(0,1) \hookrightarrow L^\infty(0,1)$, le Lemme A.1 dans [17] et (1.6.6) pour obtenir

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{L^\infty(0,T;H^{3/2}(\omega))} &= \|\xi^*\|_{L^\infty(0,1;H^{3/2}(\omega))} \leqslant C\,\|\xi^*\|_{H^{3/4}(0,1;H^{3/2}(\omega))} \leqslant C\lfloor \xi^* \rfloor_{3/4,2,(0,1),H^{3/2}(\omega))} \\ &= CT^{1/4}\lfloor \xi \rfloor_{3/4,2,(0,T),H^{3/2}(\omega))} \leqslant CT^{1/4}\left\|\partial_{s_j}\eta\right\|_{H^{3/4}(0,T;H^{3/2}(\omega))} \leqslant CT^{1/4}R.\end{aligned}$$

Ensuite, on en déduit (1.6.10) et (1.6.11) en utilisant $H^{3/2}(\omega) \hookrightarrow L^\infty(\omega)$ et $H^{1/2}(\omega) \hookrightarrow L^4(\omega)$.

Finalement, (1.6.12) est une conséquence de (1.6.6) et (1.2.11). □

Maintenant, on montre quelques estimations sur les changements de variables X et Y définis par (1.3.2). On rappelle que a_{ik} est donné par (1.3.8).

Lemme 1.6.3. *On suppose* (1.6.7). *Alors on a*

$$\|a_{ik}(X) - \delta_{ik}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\nabla Y(X) - I_3\|_{L^\infty(0,T;[L^\infty(\Omega)]^9)} \leqslant C_R T^{1/4}. \tag{1.6.14}$$

$$\|a_{ik}(X)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\nabla Y(X)\|_{L^\infty(0,T;[L^\infty(\Omega)]^9)} \leqslant C_R. \tag{1.6.15}$$

$$\left\|\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_j}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))} + \left\|\frac{\partial^2 Y_i}{\partial x_j \partial x_k}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/4}. \tag{1.6.16}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j^2}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R. \tag{1.6.17}$$

$$\|\partial_t Y(X)\|_{L^4(0,T;[L^\infty(\Omega)]^3)} \leqslant C_R. \tag{1.6.18}$$

$$\|\partial_t a_{ik}(X)\|_{L^6(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/6}. \tag{1.6.19}$$

Démonstration. Par définition (voir (1.3.1) et (1.3.2)), on rappelle que

$$Y_3(t,x) = \frac{1+\eta^0(x_1,x_2)}{1+\eta(t,x_1,x_2)}x_3, \quad Y_i(t,x) = x_i,\ i = 1,2.$$

En conséquence, l'estimation de $\nabla Y(X) - I_3$ est réduite à l'estimation des termes suivants

$$\left\| \frac{\partial Y_3}{\partial x_j}(X) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}, \quad j = 1,2 \quad \text{and} \quad \left\| \frac{\partial Y_3}{\partial x_3}(X) - 1 \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}. \tag{1.6.20}$$

On a

$$\frac{\partial Y_3}{\partial x_3}(X) - 1 = \frac{\eta^0 - \eta}{1+\eta}. \tag{1.6.21}$$

En utilisant (1.6.8) et (1.6.9), on déduit

$$\left\| \frac{\partial Y_3}{\partial x_3}(X) - 1 \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/2}. \tag{1.6.22}$$

D'autre part, pour $j = 1,2$, on a

$$\frac{\partial Y_3}{\partial x_j}(X) = y_3 \frac{(\partial_{s_j}\eta^0 - \partial_{s_j}\eta)}{1+\eta^0} + y_3 \partial_{s_j}\eta \frac{(\eta - \eta^0)}{(1+\eta)(1+\eta^0)} \tag{1.6.23}$$

et donc, en utilisant (1.6.4), (1.6.3), (1.6.8) et (1.6.10),

$$\left\| \frac{\partial Y_3}{\partial x_j}(X) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant CT^{1/4}R + CT^{1/2}R^2 \leqslant C_R T^{1/4}.$$

Par conséquent, on obtient (1.6.14) et ainsi (1.6.15).

On a pour $k, j \in \{1,2\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x_k \partial x_j}(X) = y_3 \frac{(\partial^2_{s_j s_k}\eta^0 - \partial^2_{s_j s_k}\eta)}{(1+\eta^0)} + y_3 \partial_{s_k}\eta \frac{(\partial_{s_j}\eta - \partial_{s_j}\eta^0)}{(1+\eta)(1+\eta^0)} + y_3 \partial_{s_j}\eta \frac{(\partial_{s_k}\eta - \partial_{s_k}\eta^0)}{(1+\eta)(1+\eta^0)} \\ + y_3(\eta - \eta^0)\left(\frac{\partial^2_{s_k s_j}\eta}{(1+\eta^0)(1+\eta)} - 2\frac{\partial_{s_k}\eta \partial_{s_j}\eta}{(1+\eta^0)(1+\eta)^2} \right). \end{aligned} \tag{1.6.24}$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x_k \partial x_j}(X) \right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\omega))} \leqslant C\Bigg(\left\| \partial^2_{s_j s_k}\eta - \partial^2_{s_j s_k}\eta^0 \right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\omega))} + R \left\| \partial_{s_j}\eta^0 - \partial_{s_j}\eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} \\ + \left\| \eta^0 - \eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} \left(\left\| \partial^2_{s_j s_k}\eta \right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\omega))} + R^2 \right) \Bigg). \end{aligned}$$

En utilisant (1.6.11), (1.6.10) et (1.6.8), on obtient (1.6.16). Les autres cas pour k, j sont plus faciles à faire.

La troisième dérivée $\dfrac{\partial^3 Y}{\partial x_j \partial_k \partial x_l}$ implique les termes suivants

$$y_3 \frac{\partial^3_{s_j s_k s_l}\eta^0}{1+\eta^0}, \quad y_3 \frac{\partial_{s_l}\eta \partial^2_{s_j s_k}\eta^0}{(1+\eta)(1+\eta^0)}, \quad y_3 \frac{\partial_{s_l}\eta^0 \partial^2_{s_j s_k}\eta}{(1+\eta)(1+\eta^0)}, \quad y_3 \frac{\partial^3_{s_j s_k s_l}\eta}{1+\eta}, \quad y_3 \frac{\partial_{s_l}\eta \partial^2_{s_j s_k}\eta}{(1+\eta)^2},$$
$$y_3 \frac{\partial_{s_j}\eta \partial_{s_k}\eta \partial_{s_l}\eta}{(1+\eta)^3}, \quad y_3 \frac{\partial_{s_j}\eta \partial_{s_k}\eta \partial_{s_l}\eta^0}{(1+\eta)^2(1+\eta^0)}.$$

Donc, en utilisant (1.6.4), (1.6.10), (1.6.11), (1.6.8) et (1.2.11), on obtient (1.6.17).

On a

$$\partial_t Y(X) = -y_3 \frac{\partial_t \eta}{1+\eta} e_3$$

et ainsi

$$\|\partial_t Y(X)\|_{L^4(0,T;[L^\infty(\Omega)]^3)} \leqslant C_R \|\partial_t \eta\|_{L^4(0,T;L^\infty(\omega))}.$$

D'où, en utilisant (1.6.3) et (1.6.6), on obtient (1.6.18).

Les termes figurant dans $\partial_t a_{ik}(X)$ sont de la forme

$$y_3 \frac{\partial_t \eta \partial_{s_j} \eta}{(1+\eta)^2}, \quad y_3 \frac{\partial_t \eta \partial_{s_j} \eta^0}{(1+\eta)(1+\eta^0)}, \quad y_3 \frac{\partial^2_{ts_j} \eta}{(1+\eta)}, \quad -\frac{(1+\eta^0)\partial_t \eta}{(1+\eta)^2}.$$

Par conséquent, en utilisant (1.6.8) et (1.6.10), on obtient

$$\|\partial_t a_{ik}(X)\|_{L^6(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R \|\partial_t \eta\|_{L^6(0,T;H^1(\omega))}.$$

L'estimation ci-dessus et (1.6.12) donnent (1.6.19). □

Maintenant, on a besoin du lemme suivant pour estimer les termes sur le bord.

Lemme 1.6.4. *On suppose* (1.6.7). *Alors on a les estimations suivantes*

$$\begin{aligned}\|\nabla Y(X) - I_3\|_{L^\infty(0,T;[H^{3/2}(\partial\Omega)]^9)} + \|a_{ik}(X) - \delta_{ik}\|_{L^\infty(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))} \\ + \|n_0 - n\|_{L^\infty(0,T;[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3)} + \left\|\tau_0^i - \tau^i\right\|_{L^\infty(0,T;[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3)} \leqslant C_R T^{1/4}.\end{aligned} \tag{1.6.25}$$

$$\left\|\frac{\partial a_{mk}}{\partial x_j}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} \leqslant C_R T^{1/4}. \tag{1.6.26}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla Y(X) - I_3\|_{H^{7/8}(0,T;[L^\infty(\partial\Omega)]^9)} + \|a_{ik}(X) - \delta_{ik}\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\partial\Omega))} \\ + \|n_0 - n\|_{H^{7/8}(0,T;[L^\infty(\partial\Omega)]^3)} + \left\|\tau_0^i - \tau^i\right\|_{H^{7/8}(0,T;[L^\infty(\partial\Omega)]^3)} \leqslant C_R.\end{aligned} \tag{1.6.27}$$

$$\left\|\frac{\partial a_{mk}}{\partial x_j}(X)\right\|_{H^{7/8}(0,T;L^{8/3}(\partial\Omega))} \leqslant C_R. \tag{1.6.28}$$

Démonstration. La relation (1.6.25) est une conséquence de (1.6.21), (1.6.23), (1.1.5) et (1.3.11) combinée avec (1.6.11). On obtient (1.6.26) en utilisant le Lemme 1.6.2 avec (1.3.8).

En utilisant (1.6.6) et $H^{5/4}(\omega) \hookrightarrow L^\infty(\omega)$, on obtient

$$\left\|\partial_{s_j}\eta^0 - \partial_{s_j}\eta\right\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))} \leqslant C_R. \tag{1.6.29}$$

Pour $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, on en déduit aussi

$$\frac{\eta^{\alpha_1}(\partial_{s_j}\eta)^{\alpha_2}}{(1+\eta)^{\alpha_3}}(\partial_{s_j}\eta^0 - \partial_{s_j}\eta) \in H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega)).$$

Néanmoins, il faut veiller à la dépendance en T de la norme correspondante. Pour ce faire, on remarque que si

$$f, g \in H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\omega)),$$

alors

$$fg \in H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega)) \cap L^\infty(0,T;L^\infty(\omega)),$$

et

$$\|fg\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))\cap L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} \leqslant C\|f\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))\cap L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))}\|g\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))\cap L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))}.$$

où $\|\cdot\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))\cap L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} = \|\cdot\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))} + \|\cdot\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))}$.

La dernière estimation est obtenue en écrivant la définition (1.2.4) de la norme dans $H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))$.

Ensuite, en combinant (1.6.29) avec (1.6.4), on obtient

$$\left\|\frac{\eta^{\alpha_1}(\partial_{s_j}\eta)^{\alpha_2}}{(1+\eta)^{\alpha_3}}(\partial_{s_j}\eta^0 - \partial_{s_j}\eta)\right\|_{H^{7/8}(0,T;L^\infty(\omega))} \leqslant C_R.$$

De cette estimation et (1.6.21), (1.6.23), (1.1.5) et (1.3.11), on obtient (1.6.27).

Pour montrer (1.6.28), on utilise le fait que les termes apparaissant dans $\dfrac{\partial a_{mk}}{\partial x_j}(X)$ sont de la forme (1.6.24). En combinant les arguments ci-dessus avec (1.6.6) et (1.6.4), on déduit le résultat. □

1.6.2 Estimations de F, G, H

Proposition 1.6.5. *On suppose que F, G, H sont donnés par* (1.3.9), (1.3.14), (1.3.10). *Alors on a*

$$\|F(u,p,\eta)\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C_R T^{1/6}, \tag{1.6.30}$$

$$\|H(u,\eta)\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \leqslant C_R T^{1/4}, \tag{1.6.31}$$

$$\|G(u,\eta)\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|G(u,\eta)\|_{H^{1/4}(0,T;L^2(\partial\Omega))} \leqslant C_R T^{1/8}. \tag{1.6.32}$$

Démonstration. En utilisant (1.6.14), (1.6.15), on obtient

$$\left\|(a_{ik}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) - \delta_{ik}\delta_{mj}\delta_{jl})\frac{\partial^2 u_k}{\partial y_l \partial y_m}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/4}, \tag{1.6.33}$$

$$\|(\delta_{ik} - a_{ik}(X))\partial_t u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)} \leqslant C_R T^{1/4}, \tag{1.6.34}$$

et

$$\left\|(\delta_{ki} - \frac{\partial Y_k}{\partial x_i}(X))\frac{\partial p}{\partial y_k}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/4}. \tag{1.6.35}$$

En utilisant (1.6.15) et (1.6.18), on obtient

$$\left\|a_{ik}(X)\partial_t Y_l(X)\frac{\partial u_k}{\partial y_l}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/4}\,\|\partial_t Y(X)\|_{L^4(0,T;[L^\infty(\Omega)]^3)}\,\|u\|_{L^\infty(0,T;[H^1(\Omega)]^3)} \leqslant C_R T^{1/4}.$$

En utilisant (1.6.15) et (1.6.16), on trouve

$$\left\| a_{ik}(X)\frac{\partial^2 Y_l}{\partial x_j^2}(X)\frac{\partial u_k}{\partial y_l}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X)\frac{\partial u_k}{\partial y_l}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$
$$\leqslant C_R\left(\left\|\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_j}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))} + \left\|\frac{\partial^2 Y_l}{\partial x_j^2}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}\right)\|u\|_{L^2(0,T;[H^2(\Omega)]^3)} \leqslant C_R T^{1/4}. \tag{1.6.36}$$

D'après (1.6.19) et (1.6.6), il s'ensuit que

$$\|\partial_t a_{ik}(X)u_k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \|\partial_t a_{ik}(X)\|_{L^6(0,T;L^2(\Omega))}\|u_k\|_{L^3(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/6}. \tag{1.6.37}$$

D'après (1.6.17) et (1.6.6), on a

$$\left\|\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j^2}(X)u_k\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant T^{1/6}\left\|\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j^2}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|u_k\|_{L^3(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/6}.$$

En utilisant des estimations standards sur les termes non linéaires (voir par exemple, [12, p.48]), on a

$$\left\|u_l\frac{\partial u_j}{\partial y_m}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant CT^{1/4}R^2. \tag{1.6.38}$$

En combinant cela avec (1.6.14), on obtient

$$\left\|\left(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{km} - a_{kl}(X)a_{ij}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_k}(X)\right)u_l\frac{\partial u_j}{\partial y_m}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R T^{1/2}. \tag{1.6.39}$$

En utilisant (1.6.16), on a également

$$\left\|a_{kl}(X)\frac{\partial a_{ij}(X)}{\partial x_k}u_l u_j\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_R\left\|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(X)\right\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}\|u_l\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))}\|u_j\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$$
$$\leqslant C_R T^{1/4}. \tag{1.6.40}$$

Par conséquent, $F(u,p,\eta)$ est dans $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)$ et en utilisant (1.6.33), (1.6.34), (1.6.35), (1.6.39), (1.6.37) et (1.6.40), on a

$$\|F(u,p,\eta)\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C_R T^{1/6}.$$

On estime maintenant $G(u,\eta)$ dans $W^{1/4}(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3)$. On rappelle que la formule (1.3.14) pour G implique τ^i, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}^i$ (voir (1.3.11), (1.3.12), (1.3.13)). D'abord on écrit pour $i=1,2$

$$\mathcal{V}^i = (2\nu D(u)n_0 + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\eta))\cdot(\tau_0^i - \tau^i) + [2\nu D(u)n_0 + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\eta) - \mathcal{W}]\cdot\tau^i, \tag{1.6.41}$$

avec

$$
\begin{aligned}
[2\nu D(u)n_0 + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\eta) - \mathcal{W}]_k &= \nu \sum_{j,m,q} (n_0)_j \left(\delta_{km} \frac{\partial u_m}{\partial y_q} \delta_{qj} + \delta_{jm} \frac{\partial u_m}{\partial y_q} \delta_{qk} \right) \\
&\quad - \nu \sum_{j,m,q} n_j \left(a_{km}(X) \frac{\partial u_m}{\partial y_q} \frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X) + a_{jm}(X) \frac{\partial u_m}{\partial y_q} \frac{\partial Y_q}{\partial x_k}(X) \right) \\
- \nu \sum_{j,m} n_j \left(\frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X) u_m + \frac{\partial a_{jm}}{\partial x_k}(X) u_m \right) &+ \beta \sum_j (\delta_{kj} - a_{kj}(X)) u_j, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.6.42)
\end{aligned}
$$

D'après (1.6.4) et les résultats de trace, on a

$$
\|u\|_{L^2(0,T;[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3)} + \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y_q} \right\|_{L^2(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3)} \leqslant CR.
$$

En combinant cela avec (1.6.25) et (1.6.26), on déduit

$$
\left\| \mathcal{V}^i \right\|_{L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} \leqslant C_R T^{1/4},
$$

et donc de (1.3.14), on obtient finalement

$$
\|G(u,\eta)\|_{L^2(0,T;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3)} \leqslant C_R T^{1/4}.
$$

Pour l'estimation dans $H^{1/4}(0,T;L^2(\partial\Omega))$, on utilise (A.6.5) : par exemple,

$$
\begin{aligned}
&\left\| n_j (a_{km}(X) - \delta_{km}) \frac{\partial u_m}{\partial y_q} \frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X) \right\|_{H^{1/4}(0,T;L^2(\partial\Omega))} \\
&\leqslant CT^{1/8} \left\| n_j (a_{km}(X) - \delta_{km}) \frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X) \right\|_{H^{7/8}(0,T;L^2(\partial\Omega))} \left\| \frac{\partial u_m}{\partial y_q} \right\|_{H^{1/4}(0,T;L^2(\partial\Omega))} \leqslant C_R T^{1/8}, \quad (1.6.43)
\end{aligned}
$$

La dernière inégalité est obtenue en utilisant à la fois (1.6.25), (1.6.27) et (1.6.6).

Les autres types de termes à estimer sont de la forme

$$
\left\| \frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X) u_m \right\|_{H^{1/4}(0,T;L^2(\partial\Omega))} \leqslant CT^{1/8} \left\| \frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X) \right\|_{H^{7/8}(0,T;L^{8/3}(\partial\Omega))} \|u_m\|_{H^{1/4}(0,T;L^8(\partial\Omega))} \leqslant C_R T^{1/8},
$$

où on a utilisé (A.6.5) et

$$
\frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X) = 0 \quad \text{à } t = 0.
$$

Tous les autres termes sont estimés de manière similaire afin qu'on puisse finalement déduire (1.6.32). L'estimation (1.6.31) sur H peut être faite de la même manière que l'estimation (1.6.32) pour G. □

1.6.3 Preuve du Théorème 1.6.1

On est maintenant en mesure de montrer le théorème 1.6.1.

Démonstration du Théorème 1.6.1. Tout d'abord, on montre l'existence locale en temps. On rappelle que Φ est donné par (1.6.5), avec $\mathcal{Y}_T$ donné par (1.6.1). De (1.6.30), (1.6.32) et (1.6.31), on obtient

$$\|\Phi(f,\widetilde{g},h)\|_{\mathcal{Y}_T} \leqslant C_R T^{1/8}.$$

Ainsi, pour T assez petit, on obtient que $\Phi(\mathcal{B}_{T,R}) \subset \mathcal{B}_{T,R}$, où $\mathcal{B}_{T,R}$ est défini par (1.6.2). Avec des calculs similaires à ceux des deux sous-sections précédentes, on obtient également que pour T assez petit, $\Phi|_{\mathcal{B}_{T,R}}$ est une contraction. En utilisant le théorème du point fixe de Banach, on déduit l'existence et l'unicité de (u,p,η) solution du système (1.3.5), (1.3.6) et (1.3.7) à condition que T soit suffisamment petit.

Pour la deuxième partie du théorème 1.6.1, l'application Φ est définie de la même manière que (1.6.5) mais avec $T=\infty$ et

$$\mathcal{Y}_\infty = L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3) \times W^{1/4}_\gamma(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3) \times L^2_\gamma(0,\infty;L^2(\omega)). \quad (1.6.44)$$

Ici $\gamma \in [0,\gamma_0]$, où γ_0 est donné par le Théorème 1.5.4. Dans ce cas, on montre que pour R assez petit $\Phi(\mathcal{B}_{\infty,R}) \subset \mathcal{B}_{\infty,R}$ et que $\Phi_{|\mathcal{B}_{\infty,R}}$ est une contraction stricte. Les estimations sont similaires au cas précédent, mais sont plus simples : par exemple, le Lemme 1.6.2 est remplacé par les estimations suivantes :

$$\|\eta\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^\infty(\omega))} + \left\|\partial_{s_j}\eta\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^\infty(\omega))} + \left\|\partial^2_{s_j s_k}\eta\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^4(\omega))} \leqslant C\,\|\eta\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^3(\omega))} \leqslant CR \quad (1.6.45)$$

En particulier, il existe $R_0>0$ de sorte que, si $R \leqslant R_0$, alors

$$\left\|\frac{1}{1+\eta}\right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\omega))} \leqslant C. \quad (1.6.46)$$

On peut alors définir les changements de variables X et Y par (1.3.3),et obtenir des estimations similaires à celles du Lemme 1.6.3, du Lemme 1.6.4 et la Proposition 1.6.5.

Cela donne

$$\|\Phi(f,\widetilde{g},h)\|_{\mathcal{Y}_\infty} \leqslant CR^2, \quad (1.6.47)$$

et

$$\left\|\Phi(f^{(1)},\widetilde{g}^{(1)},h^{(1)}) - \Phi(f^{(2)},\widetilde{g}^{(2)},h^{(2)})\right\|_{\mathcal{Y}_\infty} \leqslant CR\left\|(f^{(1)},\widetilde{g}^{(1)},h^{(1)}) - (f^{(2)},\widetilde{g}^{(2)},h^{(2)})\right\|_{\mathcal{Y}_\infty}. \quad (1.6.48)$$

pour $(f,\widetilde{g},h),(f^{(i)},\widetilde{g}^{(i)},h^{(i)}) \in \mathcal{B}_{\infty,R}$, Ensuite, on utilise le théorème du point fixe de Banach en prenant R assez petit et on en déduit l'existence globale et l'unicité d'une solution forte $(u,p,\eta) \in \mathcal{X}_{\infty,\gamma}$ pou le système (1.3.5), (1.3.6) et (1.3.7) à condition que R soit suffisamment petit. □

Chapitre 2

Stabilisation avec retard de problèmes paraboliques et applications

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se consacre à l'étude de la stabilisation des systèmes écrits sous la forme abstraite :

$$z' = Az + Bv + f, \quad z(0) = z^0, \tag{2.1.1}$$

où A est le générateur d'un semi-groupe analytique noté $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ sur un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, $B : \mathbb{U} \to \mathcal{D}(A^*)'$ est un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert $\mathbb{U}$ et f est une donnée représentant le terme source qui est exponentiellement décroissant à l'infini en temps.

Le but de cette partie est d'obtenir un contrôle $v(t)$ qui dépend des valeurs de $z(s)$ pour $s \leqslant t - t_0$, avec $t_0 > 0$ une constante strictement positive qui correspond à un retard en temps. Par suite, l'objectif serait de montrer que le système (2.1.1) associé au contrôle $v(t)$ est exponentiellement stable. Dans le cas sans retard, une caractérisation de la stabilisation du système (2.1.1) est donnée par le critère de Fattorini-Hautus (voir [36], [52] et [10]) :

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{D}(A^*),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant -\sigma \quad A^*\varepsilon = \lambda\varepsilon \quad \text{et} \quad B^*\varepsilon = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = 0. \tag{UC$_\sigma$}$$

On dénote par $A^* : \mathcal{D}(A^*) \to \mathbb{H}$ et par $B^* : \mathcal{D}(A^*) \to \mathbb{U}$ les opérateurs adjoints de A et B. Le critère (UC$_\sigma$) est une condition nécessaire et suffisante pour avoir la stabilité exponentielle de (2.1.1) avec un ordre supérieur à σ pourvu que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

$$\begin{gathered}\text{Le spectre de } A \text{ est décrit par un ensemble de valeurs propres isolées } (\lambda_j)\\ \text{avec une multiplicité algébrique finie } N_j,\\ \text{et l'ensemble } \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant -\sigma\} \text{ n'admet aucun point d'accumulation,}\end{gathered} \tag{Hyp1}$$

$$B \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{H}_{-\gamma}) \quad \text{pour } \gamma \in [0,1) \text{ fixé.} \tag{Hyp2}$$

Les espaces $\mathbb{H}_\alpha$ sont définis comme suit : on fixe $\mu_0 \in \rho(A)$, alors

$$\mathbb{H}_\alpha := \begin{cases} \mathcal{D}((\mu_0 - A)^\alpha) & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ \mathcal{D}((\mu_0 - A^*)^{-\alpha})' & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^*_\alpha := \begin{cases} \mathcal{D}((\mu_0 - A^*)^\alpha) & \text{si } \alpha \geqslant 0 \\ \mathcal{D}((\mu_0 - A)^{-\alpha})' & \text{si } \alpha < 0. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

On suppose aussi

$$\mathbb{H}_\alpha = [\mathbb{H}, \mathcal{D}(A)]_\alpha \quad (\alpha \in [0,1]), \tag{Hyp3}$$

où le crochet $[\cdot,\cdot]_\alpha$ dénote la méthode de l'interpolation complexe. Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach, on définit l'espace

$$L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{X}) = \{f \mid f_\sigma : t \mapsto e^{\sigma t} f(t) \in L^2(0,\infty;\mathbb{X})\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{X})} = \|f_\sigma\|_{L^2(0,\infty;\mathbb{X})}.$$

On définit de la même manière les espaces $L^p_\sigma(0,\infty;\mathbb{X})$, $C^0_\sigma([0,\infty);\mathbb{X})$, $H^m_\sigma(0,\infty;\mathbb{X})$.

On suppose que

$$f \in L^2(0,\infty;\mathbb{H}_{-\gamma'}) \quad \gamma' < 1/2. \tag{2.1.3}$$

On note que pour avoir (Hyp1), il suffit que A admette une résolvante compacte.

Pour toute valeur propre λ_j de A, on définit la multiplicité géométrique

$$\ell_j := \dim\ker(A - \lambda_j \operatorname{Id}) \in \mathbb{N}^*,$$

et on pose

$$N_+ := \max\{\ell_i,\ \operatorname{Re}\lambda_i \geqslant -\sigma\}. \tag{2.1.4}$$

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.1.1. *Soit $\sigma > 0$ et on suppose que* (Hyp1), (Hyp2), (Hyp3) *et* (UC_σ) *sont vérifiées. Alors, il existe $K \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathcal{L}(\mathbb{H}))$, $\zeta_k \in \mathcal{D}(A^*)$ et $v_k \in B^*(\mathcal{D}(A^*))$, $k = 1,\dots,N_+$, tels que*

$$v(t) = 1_{[t_0,+\infty)}(t) \sum_{k=1}^{N_+} \left(z(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} K(t-t_0,s) z(s)\, ds, \zeta_k \right)_{\mathbb{H}} v_k, \tag{2.1.5}$$

et pour tout $z^0 \in \mathbb{H}$, f vérifiant (2.1.3)*, la solution z de* (2.1.1) *satisfait l'estimation*

$$\|z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant C e^{-\sigma t} \left(\|z^0\|_{\mathbb{H}} + \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_{-\gamma'})} \right) \quad (t > 0). \tag{2.1.6}$$

De plus, si $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$ et $z^0 \in \mathbb{H}_{1/2}$, alors

$$z \in L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_1) \cap C^0_\sigma([0,\infty);\mathbb{H}_{1/2}) \cap H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}),$$

et on a

$$\|z\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_1)\cap C^0_\sigma([0,\infty);\mathbb{H}_{1/2})\cap H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} \leqslant C \left(\|z^0\|_{\mathbb{H}_{1/2}} + \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} \right). \tag{2.1.7}$$

Ici, $1_{\mathcal{O}}$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{O}$. Le résultat ci-dessus montre qu'on peut stabiliser le système parabolique linéaire abstrait (2.1.1) avec un nombre fini de contrôles et retard en temps constant.

2.2 Preuve du Théorème 2.1.1

Soit $\sigma > 0$, on pose

$$\Sigma_+ := \{\lambda_j \ ; \ \operatorname{Re}\lambda_j \geqslant -\sigma\}, \quad \Sigma_- := \{\lambda_j \ ; \ \operatorname{Re}\lambda_j < -\sigma\}. \tag{2.2.1}$$

La première étape consiste à décomposer le spectre de A en deux partie : une partie instable qui correspond à Σ_+ et une partie stable associée à Σ_-. Puisque $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe analytique (voir [15, Théorème 2.11, p.112]), en tenant compte de l'hypothèse (Hyp1), on constate que Σ_+ est un ensemble fini. Donc, on introduit l'opérateur de projection (voir [63, Théorème 6.17, p.178]) défini par

$$P_+ := \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\Gamma_+}(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda, \tag{2.2.2}$$

où Γ_+ est un contour encerclant les points de l'ensemble Σ_+ et ne contient pas d'autres points du spectre A. On définit

$$\mathbb{H}_+ := P_+\mathbb{H}, \quad \mathbb{H}_- := (\mathrm{Id} - P_+)\mathbb{H}.$$

De plus, en utilisant [63, Théorème 6.17, p.178], on a $\mathbb{H}_+ \oplus \mathbb{H}_- = \mathbb{H}$ et si on note

$$A_+ := A_{|\mathbb{H}_+} : \mathbb{H}_+ \to \mathbb{H}_+, \quad A_- := A_{|\mathbb{H}_-} : \mathcal{D}(A) \cap \mathbb{H}_- \to \mathbb{H}_-,$$

alors le spectre de A_+ (resp. A_-) est exactement Σ_+ (resp. Σ_-). L'analyticité de $\left(e^{At}\right)_{t\geqslant 0}$, (Hyp1) et (2.2.1) implique l'existence de $\sigma_- > \sigma$ tel que

$$\left\|e^{A_-t}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_-)} \leqslant Ce^{-\sigma_- t}, \quad \left\|(\lambda_0 - A)^\gamma e^{A_-t}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_-)} \leqslant C\frac{1}{t^\gamma}e^{-\sigma_- t}. \tag{2.2.3}$$

On procède d'une manière similaire pour A^*, on a

$$P_+^* := \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\overline{\Gamma_+}}(\lambda - A^*)^{-1}\, d\lambda, \tag{2.2.4}$$

$$\mathbb{H}_+^* := P_+^*\mathbb{H}, \quad \mathbb{H}_-^* := (\mathrm{Id} - P_+^*)\mathbb{H},$$

$$A_+^* := A_{|\mathbb{H}_+^*} : \mathbb{H}_+^* \to \mathbb{H}_+^*, \quad A_-^* := A_{|\mathbb{H}_-^*} : \mathcal{D}(A^*) \cap \mathbb{H}_-^* \to \mathbb{H}_-^*.$$

On note que P_+^* est l'opérateur adjoint de P_+. En particulier, si $z \in \mathbb{H}_-$ et $\zeta \in \mathbb{H}_+^*$, alors

$$(z, \zeta)_{\mathbb{H}} = ((\mathrm{Id} - P_+)z, \zeta)_{\mathbb{H}} = \left(z, (\mathrm{Id} - P_+^*)\zeta\right)_{\mathbb{H}} = 0. \tag{2.2.5}$$

En d'autres termes $(\mathbb{H}_-)^\perp = \mathbb{H}_+^*$, ce qui implique que la projection P n'est pas orthogonale.

On définit

$$\mathbb{U}_+ := B^*\mathbb{H}_+^*, \quad \mathbb{U}_- := B^*(\mathbb{H}_-^* \cap \mathcal{D}(A^*)),$$

et

$$p_+ : \mathbb{U} \to \mathbb{U}_+, \quad p_- : \mathbb{U} \to \mathbb{U}_-, \quad i_+ : \mathbb{U}_+ \to \mathbb{U}, \quad i_- : \mathbb{U}_- \to \mathbb{U},$$

les opérateurs de projection et les injections canoniques. Alors, on pose

$$B_+ := P_+ B i_+ \in \mathcal{L}(\mathbb{U}_+, \mathbb{H}_+), \quad B_- := (\mathrm{Id} - P_+) B i_- \in \mathcal{L}(\mathbb{U}_-, \mathbb{H}_- \cap \mathbb{H}_{-\gamma}).$$

On a

$$P_+ B = B_+ p_+ \quad (\mathrm{Id} - P_+) B = B_- p_-.$$

En effet, pour tout $w \in \mathcal{D}(A)$ et $v \in \mathbb{U}$, on a

$$\langle P_+ B v, w \rangle_{\mathbb{H}_{-1}, \mathbb{H}_1} = \left\langle v, B^* P_+^* w \right\rangle_{\mathbb{U}} = \left\langle p_+ v, p_+ B^* P_+^* w \right\rangle_{\mathbb{U}} = \langle P_+ B i_+ p_+ v, w \rangle_{\mathbb{H}_{-1}, \mathbb{H}_1} = \langle B_+ p_+ v, w \rangle_{\mathbb{H}_{-1}, \mathbb{H}_1},$$

et on déduit de même la seconde relation.

En s'inspirant de [10, 81], la fonction $z = z_+ + z_-$ est solution du système (2.1.1) si et seulement si

$$z_+' = A_+ z_+ + B_+ p_+ v + P_+ f, \quad z_+(0) = P_+ z^0, \tag{2.2.6}$$

$$z_-' = A_- z_- + B_- p_- v + (\mathrm{Id} - P_+) f, \quad z_-(0) = (\mathrm{Id} - P_+) z^0. \tag{2.2.7}$$

Afin d'étudier la stabilisation du système (2.2.6) en dimension finie, on utilise la transformation d'Artstein pour passer du problème (2.2.6) avec délai à un système autonome sans délai.

Plus précisément, on considère

$$w(t) := z_+(t) + \int_t^{t+t_0} e^{(t-s)A_+} B_+ p_+ v(s)\, ds.$$

Dans ce qui suit, on étudie la stabilisation du système vérifié par w (Lemme 2.2.1). On obtient alors un contrôle qui est exprimé en fonction de w. Pour construire un contrôle qui dépend de z_+, on considère l'inverse de la transformée d'Artstein et pour ce faire, on prouve l'existence d'un noyau K pour écrire w en terme de z_+ (Lemme 2.2.2).

Lemme 2.2.1. *On suppose que l'hypothèse* (UC_σ) *soit vérifiée pour* $\sigma > 0$. *Alors, il existe* $C > 0$ *et* $G \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_+, \mathbb{U}_+)$, *avec Rang* $G \leqslant N_+$ *où* N_+ *est défini par* (2.1.4), *tels que pour tout* $f \in L^2_\sigma(0, \infty; \mathbb{H}_{-\gamma'})$ *et* $w^0 \in \mathbb{H}_+$, *la solution de*

$$\begin{cases} w' = A_+ w + e^{-t_0 A_+} B_+ p_+ G w + P_+ f, \\ w(0) = w^0, \end{cases} \tag{2.2.8}$$

vérifie l'estimation

$$\|w\|_{H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_+)} \leqslant C \left(\|w^0\|_{\mathbb{H}_+} + \|P_+ f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_+)} \right). \tag{2.2.9}$$

Démonstration. Soit $\sigma_\star > \sigma$. On note que $(A_+, e^{-t_0 A_+} B_+ p_+)$ satisfait le critère de Fattorini-Hautus : on suppose

$$A_+^* \varepsilon = \overline{\lambda_j} \varepsilon, \quad B_+^* e^{-t_0 A_+^*} \varepsilon = 0.$$

Alors, on déduit

$$A^* \varepsilon = \overline{\lambda_j} \varepsilon, \quad B_+^* e^{-t_0 A_+^*} \varepsilon = e^{-t_0 \overline{\lambda_j}} B^* P_+^* \varepsilon = e^{-t_0 \overline{\lambda_j}} B^* \varepsilon = 0.$$

Donc, de (UC_σ), on obtient $\varepsilon = 0$. On peut alors utiliser le resultat standard de Fattorini ou Hautus (voir [10, Theorem 1.6]) pour déduire l'existence d'une matrice $G \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_+, \mathbb{U}_+)$, avec $\operatorname{Rang} G \leqslant N_+$ telle que

$$\begin{cases} w' = A_+ w + e^{-t_0 A_+} B_+ p_+ G w, \\ w(0) = w^0 \in \mathbb{H}_+, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

satisfait

$$\|w(t)\|_{\mathbb{H}_+} \leqslant C e^{-\sigma_\star t} \left\|w^0\right\|_{\mathbb{H}_+}, \quad t \geqslant 0. \tag{2.2.11}$$

D'autre part, on écrit la formule de Duhamel pour une solution de (2.2.8)

$$w(t) = e^{A_\star t} w^0 + \int_0^t e^{A_\star (t-s)} P_+ f(s)\, ds,$$

avec

$$A_\star = A_+ + e^{-t_0 A_+} B_+ p_+ G,$$

on obtient (2.2.9). □

Lemme 2.2.2. *Il existe un noyau $K \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathcal{L}(\mathbb{H}_+))$ tel que*

$$\begin{aligned} K(t,s) = {} & e^{(t-s-t_0)A_+} B_+ p_+ G 1_{(\max\{t-t_0,0\},t)}(s) \\ & + \int_{\max\{t-t_0,s\}}^t e^{(t-\xi-t_0)A_+} B_+ p_+ G K(\xi,s)\, d\xi \quad (t>0, s \in (0,t)). \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Démonstration. La preuve se base sur le théorème du point-fixe. On pose

$$K_0(t) := e^{(t-t_0)A_+} B_+ p_+ G, \quad K_0 \in L^\infty(0,t_0; \mathcal{L}(\mathbb{H}_+)),$$

de sorte que (2.2.12) s'écrit

$$K(t,s) = K_0(t-s) 1_{(\max\{t-t_0,0\},t)}(s) + \int_{\max\{t-t_0,s\}}^t K_0(t-\xi) K(\xi,s)\, d\xi.$$

Soit $T > 0$, on définit

$$D_T = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in (0,T), \quad s \in (0,t)\},$$

et

$$\Phi : L^\infty(D_T; \mathcal{L}(\mathbb{H}_+)) \to L^\infty(D_T; \mathcal{L}(\mathbb{H}_+)),$$

$$(\Phi K)(t,s) = \int_{\max\{t-t_0,s\}}^t K_0(t-\xi) K(\xi,s)\, d\xi \quad ((t,s) \in D_T).$$

L'application Φ définie bien un opérateur linéaire borné de $L^\infty(D_T; \mathcal{L}(\mathbb{H}_+))$. De plus,

$$\|(\Phi K)(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_+)} \leqslant t \|K_0\|_{L^\infty(0,t_0;\mathcal{L}(\mathbb{H}_+))} \|K\|_{L^\infty(D_T;\mathcal{L}(\mathbb{H}_+))}.$$

On obtient

$$\left\|(\Phi^2 K)(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_+)} \leqslant \frac{t^2}{2}\left\|K_0\right\|^2_{L^\infty(0,t_0;\mathcal{L}(\mathbb{H}_+))}\left\|K\right\|_{L^\infty(D_T;\mathcal{L}(\mathbb{H}_+))},$$

et par récurrence

$$\left\|(\Phi^n K)(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_+)} \leqslant \frac{t^n}{n!}\left\|K_0\right\|^n_{L^\infty(0,t_0;\mathcal{L}(\mathbb{H}_+))}\left\|K\right\|_{L^\infty(D_T;\mathcal{L}(\mathbb{H}_+))} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

En particulier, pour n assez grand, Φ^n est une contraction, de même pour

$$(\widetilde{\Phi}K)(t,s) := (\Phi K)(t,s) + K_0(t-s)1_{(\max\{t-t_0,0\},t)}(s).$$

Donc, $\widetilde{\Phi}$ admet un unique point fixe, solution de (2.2.12). □

On est maintenant en mesure de prouver le résultat principal

Preuve du Théorème 2.1.1. On considère les opérateurs G et $K(t,s)$ obtenus dans Lemme 2.2.1 et Lemme 2.2.2 et on pose

$$v(t) = 1_{[t_0,+\infty)}(t)G\left[z_+(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} K(t-t_0,s)z_+(s)\,ds\right]. \tag{2.2.13}$$

On note qu'on peut écrire G de la manière suivante

$$G(\phi) = \sum_{k=1}^{N_+}(\phi,\zeta_k)_{\mathbb{H}}\,v_k, \quad (\phi \in \mathbb{H}_+),$$

avec $\zeta_k \in \mathbb{H}_+^*$ et $v_k \in \mathbb{U}_+$, $k = 1,\ldots,N_+$. On peut prendre $\zeta_k \in \mathbb{H}_+^*$. En effet, on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{H}_+,\mathbb{C})$ à $\mathbb{H}_+^*$ en utilisant un résultat standard d'algèbre linéaire : on combine le fait que $\dim \mathbb{H}_+^* = \dim \mathcal{L}(\mathbb{H}_+,\mathbb{C})$ et (2.2.5). On a pris $\zeta_k \in \mathbb{H}_+^*$ afin d'étendre la définition de G sur $\mathbb{H}$ tel que $G = 0$ dans $\mathbb{H}_-$ (voir (2.2.5)). On étend aussi l'opérateur K par $K(t,s) = 0$ sur $\mathbb{H}_-$, on constate que (2.2.13) peut s'écrire comme l'indique la formule (2.1.5). Maintenant, on définit

$$w(t) := z_+(t) + \int_0^t K(t,s)z_+(s)\,ds, \tag{2.2.14}$$

tel que (2.2.6) peut être reformulé par

$$\begin{cases} z_+'(t) = A_+z_+(t) + B_+p_+1_{[t_0,+\infty)}(t)Gw(t-t_0) + P_+f(t) \quad t > 0, \\ z_+(0) = P_+z^0. \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Alors, en utilisant (2.2.12), (2.2.14) et le théorème de Fubini, on obtient pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}\int_t^{t+t_0} e^{(t-s)A_+} B_+ p_+ G w(s-t_0) 1_{[t_0,+\infty)}(s)\ ds &= \int_{\max\{t-t_0,0\}}^t e^{(t-s-t_0)A_+} B_+ p_+ G w(s)\ ds \\ &= \int_{\max\{t-t_0,0\}}^t e^{(t-s-t_0)A_+} B_+ p_+ G \left[z_+(s) + \int_0^s K(s,\xi) z_+(\xi)\ d\xi \right]\ ds \\ = \int_0^t \left[1_{(\max\{t-t_0,0\},t)}(s) e^{(t-s-t_0)A_+} B_+ p_+ G + \int_{\max\{t-t_0,s\}}^t e^{(t-\xi-t_0)A_+} B_+ p_+ G K(\xi,s)\ d\xi \right] z_+(s)\ ds \\ &= \int_0^t K(t,s) z_+(s)\ ds = w(t) - z_+(t). \quad (2.2.16)\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$w(t) = z_+(t) + \int_t^{t+t_0} e^{(t-s)A_+} B_+ p_+ G w(s-t_0) 1_{[t_0,+\infty)}(s)\ ds. \quad (2.2.17)$$

De (2.2.15), on déduit que w est solution de (2.2.8) avec $w^0 = z_+(0)$. Donc, w satisfait (2.2.9) et de (2.2.17), on obtient

$$\|z_+\|_{H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_+)} \leqslant C \left(\|P_+ z^0\|_{\mathbb{H}_+} + \|P_+ f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_+)} \right). \quad (2.2.18)$$

Cela entraîne en particulier que si $z^0 \in \mathbb{H}_{1/2}$ et si $f \in L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})$, alors

$$\|z_+\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_1)\cap C^0_\sigma([0,\infty);\mathbb{H}_{1/2})\cap H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} \leqslant C \left(\|z^0\|_{\mathbb{H}_{1/2}} + \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} \right). \quad (2.2.19)$$

D'un autre côté, on considère la solution de (2.2.7) : pour $t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned} z_-(t) = e^{A_- t}(\mathrm{Id} - P_+) z^0 + \int_{t_0}^t (\lambda_0 - A)^\gamma e^{A_-(t-s)} (\lambda_0 - A)^{-\gamma} B_- p_- G w(s-t_0)\ ds \\ + \int_0^t e^{A_-(t-s)} (\mathrm{Id} - P_+) f(s)\ ds. \quad (2.2.20)\end{aligned}$$

On utilise (2.2.3) et (2.2.9), on déduit

$$\begin{aligned}\|z_-(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant C e^{-\sigma_- t} \left\| z^0 \right\|_{\mathbb{H}} + C e^{-\sigma t} \int_{t_0}^t \frac{1}{(t-s)^\gamma} e^{-(\sigma_- - \sigma)(t-s)}\ ds \left(\|P_+ z^0\|_{\mathbb{H}_+} + \|P_+ f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_+)} \right) \\ + C e^{-\sigma t} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\gamma'}} e^{-(\sigma_- - \sigma)(t-s)} \left\| e^{\sigma s} f(s) \right\|_{\mathbb{H}_{-\gamma'}}\ ds.\end{aligned}$$

Sachant que $\sigma_- > \sigma$, $\gamma < 1$ et $\gamma' < 1/2$, on déduit des estimations ci-dessus l'inégalité suivante

$$\|z_-(t)\|_{\mathbb{H}_-} \leqslant C e^{-\sigma t} \left(\|z^0\|_{\mathbb{H}} + \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_{-\gamma'})} \right) \quad (t > 0).$$

En combinant avec (2.2.18), on déduit (2.1.6). Il reste à prouver (2.1.7). Si $f \in L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{U},\mathbb{H})$ et si $z^0 \in \mathbb{H}_{1/2}$, alors suivant la première étape, on trouve (2.2.19) et

$$\|v\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{U})} \leqslant C\left(\|z^0\|_{\mathbb{H}_+} + \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_+)}\right). \tag{2.2.21}$$

Donc,

$$B_- p_- v + (\mathrm{Id} - P_+) f \in L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_-), \tag{2.2.22}$$

et

$$z_-(0) = z^0 - P_+ z^0 \in \mathbb{H}_{1/2} \cap \mathbb{H}_-.$$

Comme A_- est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique de type inférieur strictement à $-\sigma$ (voir par exemple [15, Proposition 2.9, p.120]), alors

$$z_- \in L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_1) \cap C^0_\sigma([0,\infty);\mathbb{H}_{1/2}) \cap H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}),$$

et de (2.2.21), on trouve

$$\begin{aligned}
&\|z_-\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H}_1)\cap C^0_\sigma([0,\infty);\mathbb{H}_{1/2})\cap H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} \\
&\qquad \leqslant C\left(\|z^0 - P_+ z^0\|_{\mathbb{H}_{1/2}} + \|B_- p_- v\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} + \|(\mathrm{Id} - P_+) f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})}\right) \\
&\qquad\qquad \leqslant C\left(\|z^0\|_{\mathbb{H}_{1/2}} + \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})}\right).
\end{aligned}$$

On combine l'inégalité ci-dessus avec (2.2.19), on déduit (2.1.7). □

2.3 Stabilisation avec retard de l'équation de convection-diffusion avec un contrôle frontière

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ un domaine borné de classe $C^{1,1}$. Dans cette section, on applique le Théorème 2.1.1 pour la stabilisation de l'équation de convection-diffusion. On considère Γ un ouvert non vide inclus dans $\partial\Omega$ et le problème de contrôle :

$$\begin{cases}
\partial_t z - \Delta z - b \cdot \nabla z - cz = 0 & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\
z = v & \text{sur } (0,\infty) \times \Gamma, \\
z = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times (\partial\Omega \setminus \Gamma), \\
z(0,\cdot) = z^0 & \text{dans } \Omega,
\end{cases} \tag{2.3.1}$$

où $c, b, \operatorname{div} b \in L^\infty(\Omega)$. Dans le but d'écrire (2.3.1) sous la forme abstraite (2.1.1), on introduit :

$$\mathbb{H} = L^2(\Omega), \quad \mathbb{U} = L^2(\Gamma),$$

$$Az = \Delta z + b \cdot \nabla z + cz, \quad \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

D'après quelques résultats classiques concernant l'opérateur A (voir par exemple [34, Théorème 5, p.305]), on constate que la condition (Hyp1) est vérifiée. Pour définir l'opérateur de contrôle

B, on utilise une méthode standard (voir, par exemple [91, pp.341-343] ou bien [80]) : on considère dans un premier temps l'opérateur de relèvement $D_0 \in \mathcal{L}(L^2(\partial\Omega); L^2(\Omega))$ tel que pour tout $v \in L^2(\partial\Omega)$, $w = D_0 v$ est l'unique solution du système suivant

$$\begin{cases} \lambda_0 w - \Delta w - b \cdot \nabla w - cw = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w = v & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\lambda_0 \in \rho(A)$. Donc, on pose

$$B = (\lambda_0 - A)D_0 : \mathbb{U} \longrightarrow (\mathcal{D}(A^*))',$$

où on a étendu l'opérateur A sur $L^2(\Omega)$ à valeurs dans $(\mathcal{D}(A^*))'$ et on note que $\mathbb{U}$ est un sous espace fermé de $L^2(\partial\Omega)$ (pour tout $v \in \mathbb{U}$, on étend v par zéro dans $\partial\Omega \setminus \Gamma$). En utilisant des résultats classiques pour les problèmes elliptiques, l'opérateur B satisfait (Hyp2) pour tout $\gamma > 3/4$.

On rappelle comment on arrive à écrire le système (2.3.1) sous la forme (2.1.1) avec les opérateurs A et B définis ci-dessus. On pose $\widetilde{z} = z - w$, avec $w = D_0 v$. Alors $\widetilde{z}$ satisfait le système

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{z} - \Delta \widetilde{z} - b \cdot \nabla \widetilde{z} - c\widetilde{z} = -\partial_t w + \lambda_0 w & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \widetilde{z} = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ \widetilde{z}(0,\cdot) = \widetilde{z}^0 := z^0 - w(0,\cdot) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En utilisant la formule de Duhamel, on obtient

$$\widetilde{z}(t) = e^{tA}\widetilde{z}^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(-\partial_t w(s) + \lambda_0 w(s))\, ds.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$z(t) = e^{tA} z^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}(\lambda_0 - A)w(s)\, ds,$$

d'où

$$\begin{cases} z' = Az + (\lambda_0 - A)D_0 v, \\ z(0) = z^0. \end{cases}$$

En appliquant le Théorème 2.1.1, il suffit de vérifier la condition de Fattorini-Hautus (UC_σ). Sachant que

$$\mathcal{D}(A^*) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad A^*\varepsilon = \Delta\varepsilon - \overline{b} \cdot \nabla\varepsilon + (\overline{c - \operatorname{div} b})\varepsilon,$$

(voir, notamment, [91, p.345]). De plus, des résultats classiques (voir [91, Proposition 10.6.7]) impliquent que

$$D_0^* := -\frac{\partial}{\partial\nu}(\lambda_0 - A^*)^{-1},$$

et donc

$$B^*\varepsilon := -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\nu}_{|\Gamma}.$$

Alors, si ε satisfait $A^*\varepsilon = \lambda\varepsilon$ et $B^*\varepsilon = 0$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda\varepsilon - \Delta\varepsilon + \overline{b}\cdot\nabla\varepsilon - (\overline{c - \operatorname{div} b})\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

En utilisant la propriété de la continuation unique du laplacien (voir par exemple [58, Théorème 5.3.1, p.125]), on déduit que $\varepsilon = 0$. Donc, (UC_σ) est vérifiée pour tout σ et on déduit le résultat suivant en appliquant le Théorème 2.1.1 :

Théorème 2.3.1. *Soient $\sigma > 0$ et N_+ défini par* (2.1.4)*. Alors, il existe $K \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathcal{L}(L^2(\Omega)))$, $\zeta_k \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ et $v_k \in H^{1/2}(\Gamma)$, $k = 1, \ldots, N_+$, tels que la solution z de* (2.3.1) *avec*

$$v(t) = 1_{[t_0,+\infty)}(t) \sum_{k=1}^{N_+} \left(\int_\Omega \left[z(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} K(t-t_0, s) z(s)\, ds \right] \zeta_k\, dx \right) v_k, \tag{2.3.2}$$

et pour tout $z^0 \in L^2(\Omega)$, satisfait

$$\|z(t)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C e^{-\sigma t} \|z^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.3.3}$$

2.4 Stabilisation avec retard du système d'Oseen avec un contrôle distribué

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné de classe $C^{1,1}$. Dans cette partie, on applique le Théorème 2.1.1 pour le système d'Oseen :

$$\begin{cases} \partial_t z + (w^S \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) w^S - \nu\Delta z + \nabla q = 1_{\mathcal{O}} v & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ z = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ z(0,\cdot) = z^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

où $w^S \in [H^2(\Omega)]^3$ est une vitesse réelle fixée et v le contrôle qui agit sur un ouvert non vide $\mathcal{O} \subset \Omega$. On peut aussi considérer un contrôle au bord pour stabiliser le système d'Oseen en utilisant la même méthode que celle de la section 2.3 mais en tenant compte de la pression et de la condition de divergence nulle (voir [7] pour plus de détails).

Soient les espaces fonctionnels

$$\mathbb{H} = \{z \in [L^2(\Omega)]^3, \quad \nabla \cdot z = 0 \text{ dans } \Omega, \quad z \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \quad \mathbb{U} = [L^2(\mathcal{O})]^3.$$

On dénote par $\mathbb{P}$ la projection orthogonale $\mathbb{P} : [L^2(\Omega)]^3 \to \mathbb{H}$ et on définit l'opérateur d'Oseen :

$$\mathcal{D}(A) = [H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)]^3 \cap \mathbb{H}, \quad Az = \mathbb{P}\left(\nu\Delta z - (w^S \cdot \nabla) z - (z \cdot \nabla) w^S\right).$$

On rappelle (voir [7, Theorem 20]) que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur $\mathbb{H}$ admettant une résolvante compacte. De plus,

$$\mathcal{D}(A^*) = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3 \cap \mathbb{H}, \quad A^*\varepsilon = \mathbb{P}\left(\nu\Delta\varepsilon + (w^S \cdot \nabla)\varepsilon - (\nabla w^S)^*\varepsilon\right).$$

On définit également l'opérateur de contrôle $B \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{H})$ par

$$Bv = \mathbb{P}\left(1_{\mathcal{O}} v\right),$$

et on peut vérifier que

$$B^*\varepsilon = \varepsilon_{|\mathcal{O}}.$$

En particulier, on voit que (Hyp1) et (Hyp2) sont vérfiées et que si ε satisfait $A^*\varepsilon = \lambda\varepsilon$ et $B^*\varepsilon = 0$, alors

$$\begin{cases} \lambda\varepsilon - \nu\Delta\varepsilon - (w^S \cdot \nabla)\varepsilon + (\nabla w^S)^*\varepsilon + \nabla\pi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \varepsilon \equiv 0 & \text{dans } \mathcal{O}. \end{cases}$$

Donc, en utilisant [35], on déduit que $\varepsilon = 0$. Donc (UC_σ) est vérifée pour tout σ et on obtient le résultat suivant en appliquant le Théorème 2.1.1 :

Théorème 2.4.1. *Soient $\sigma > 0$ et N_+ défini par* (2.1.4). *Il existe $K \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathcal{L}(\mathbb{H}))$, $\zeta_k \in \mathcal{D}(A^*)$ et $v_k \in [L^2(\mathcal{O})]^3$, $k = 1, \ldots, N_+$, tels que la solution z de* (2.4.1) *avec*

$$v(t) = 1_{[t_0,+\infty)}(t) \sum_{k=1}^{N_+} \left(\int_\Omega \left[z(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} K(t-t_0, s) z(s)\, ds \right] \zeta_k\, dx \right) v_k, \tag{2.4.2}$$

et pour $z^0 \in \mathbb{H}$ satisfait

$$\|z(t)\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leqslant Ce^{-\sigma t} \|z^0\|_{[L^2(\Omega)]^3}. \tag{2.4.3}$$

Soit

$$\mathbb{V} = [H_0^1(\Omega)]^3 \cap \mathbb{H}, \tag{2.4.4}$$

alors, $\mathbb{V} = \mathbb{H}_{1/2}$ (voir [7, Théorème 20]). Donc, on applique Théorème 2.1.1 et on déduit également le résultat suivant

$$\begin{cases} \partial_t z + (w^S \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) w^S - \nu\Delta z + \nabla q = 1_{\mathcal{O}} v + f & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ z = 0 & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ z(0,\cdot) = z^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.4.5}$$

Théorème 2.4.2. *Soient $\sigma > 0$ et v donné par* (2.4.2). *Alors, pour tout $z^0 \in \mathbb{V}$ et pour tout $f \in L^2_\sigma(0,\infty; \mathbb{H})$, la solution de* (2.4.5) *satisfait*

$$z \in L^2_\sigma(0,\infty; [H^2(\Omega)]^3) \cap C^0_\sigma([0,\infty); [H^1(\Omega)]^3) \cap H^1_\sigma(0,\infty; [L^2(\Omega)]^3),$$

et

$$\|z\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3) \cap C^0_\sigma([0,\infty);[H^1(\Omega)]^3) \cap H^1_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C\left(\|z^0\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)}\right). \tag{2.4.6}$$

2.5 Stabilisation locale avec retard du système de Navier-Stokes avec un contrôle distribué

On utilisera les mêmes notations que celles de la section précédente. On considère la stabilisation du système de Navier-Stokes avec un contrôle interne

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{z} + (\widetilde{z}\cdot\nabla)\widetilde{z} - \nu\Delta\widetilde{z} + \nabla\widetilde{q} = 1_{\mathcal{O}} v + f^S & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot\widetilde{z} = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \widetilde{z} = b^S & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ \widetilde{z}(0,\cdot) = \widetilde{z}^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

autour de l'état stationnaire

$$\begin{cases} (w^S\cdot\nabla)w^S - \nu\Delta w^S + \nabla r^S = f^S & \text{dans } \Omega, \\ \nabla\cdot w^S = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w^S = b^S & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

On suppose que (w^S, r^S) est une solution de (2.5.2) telle que $w^S \in [H^2(\Omega)]^3$ comme dans la section précédente. Les fonctions $f^S \in [L^2(\Omega)]^3$ et $b^S \in [W^{3/2}(\partial\Omega)]^3$ sont indépendantes du temps.

On définit

$$z = \widetilde{z} - w^S, \quad q = \widetilde{q} - r^S, \quad z^0 = \widetilde{z}^0 - w^S,$$

tels que

$$\begin{cases} \partial_t z + (w^S\cdot\nabla)z + (z\cdot\nabla)w^S - \nu\Delta z + \nabla q = 1_{\mathcal{O}} v - (z\cdot\nabla)z & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot z = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ z = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ z(0,\cdot) = z^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

On considère l'application

$$\mathcal{Z} : L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3) \to L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3), \quad f \mapsto -(z\cdot\nabla)z,$$

où z est la solution donnée dans le Théorème 2.4.2, associée à $z^0 \in \mathbb{V}$ et $f \in L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})$. Donc, d'après les injections de Sobolev, on obtient

$$\|z^1\cdot\nabla z^2\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C\|z^1\|_{C^0_\sigma([0,\infty);[H^1(\Omega)]^3)}\|z^2\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3)}. \tag{2.5.4}$$

Alors, $\mathcal{Z}$ est bien définie. On pose

$$R = \|z^0\|_{[H^1(\Omega)]^3},$$

et

$$B_R = \left\{ f \in L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3) \ ; \ \|f\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant R \right\}.$$

De (2.5.4) et (2.4.6),

$$\|\mathcal{Z}(f)\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant 4CR^2,$$

et B_R est invariant par rapport $\mathcal{Z}$ pour R assez petit. En utilisant (2.5.4) et (2.4.6), pour tout $f^1, f^2 \in B_R$, alors

$$\|\mathcal{Z}(f^1) - \mathcal{Z}(f^2)\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant 2CR\|f^1 - f^2\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)},$$

et donc $\mathcal{Z}$ est une contraction stricte sur B_R pour R assez petit. On déduit que $\mathcal{Z}$ admet un point fixe f pour $\|z^0\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ assez petite et on note que la solution z donnée dans le Théorème 2.4.2, associée à $z^0 \in \mathbb{V}$ et $f \in L^2_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)$ est une solution de (2.5.3).

On déduit alors le résultat suivant qui montre la stabilisation locale du système de Navier-Stokes avec un contrôle interne et avec un retard en temps :

Théorème 2.5.1. *Soient $\sigma > 0$ et N_+ défini par* (2.1.4). *Alors, il existe $K \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathcal{L}(\mathbb{H}))$, $\zeta_k \in \mathcal{D}(A^*)$, $v_k \in [L^2(\mathcal{O})]^3$, $k = 1,\dots,N_+$ et $R > 0$, tels que pour tout*

$$\widetilde{z}^0 \in [H^1(\Omega)]^3, \quad \nabla\cdot\widetilde{z}^0 = 0 \quad \textit{dans } \Omega, \quad \widetilde{z}^0 = b^S \textit{ sur } \partial\Omega,$$

et

$$\|\widetilde{z}^0 - w^S\|_{[H^1(\Omega)]^3} \leqslant R,$$

il existe une unique solution z de (2.5.1) *avec*

$$v(t) = 1_{[t_0,+\infty)}(t)\sum_{k=1}^{N_+}\left(\int_\Omega\left[(\widetilde{z} - w^S)(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} K(t-t_0,s)(\widetilde{z} - w^S)(s)\ ds\right]\zeta_k\ dx\right)v_k, \tag{2.5.5}$$

satisfaisant

$$\widetilde{z} - w^S \in L^2_\sigma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3) \cap C^0_\sigma([0,\infty);[H^1(\Omega)]^3) \cap H^1_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3).$$

De plus, on a l'estimation

$$\|\widetilde{z} - w^S\|_{L^2_\sigma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3)\cap C^0_\sigma([0,\infty);[H^1(\Omega)]^3)\cap H^1_\sigma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C\|\widetilde{z}^0 - w^S\|_{[H^1(\Omega)]^3}. \tag{2.5.6}$$

Chapitre 3

Stabilisation locale avec retard d'un problème fluide-structure avec un contrôle au bord

3.1 Introduction

Soit ω le tore rectangulaire

$$\omega = (\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z}) \quad L_1 > 0,\ L_2 > 0.$$

Pour toute fonction $\eta : \omega \to (-1, \infty)$, on définit

$$\begin{aligned} \Omega(\eta) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \omega \times \mathbb{R} \mid 0 < x_3 < 1 + \eta(x_1, x_2)\}, \\ \Gamma(\eta) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \omega \times \mathbb{R} \mid x_3 = 1 + \eta(x_1, x_2)\}, \\ \Gamma_0 &= \omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

En particulier

$$\partial\Omega(\eta) = \Gamma(\eta) \cup \Gamma_0.$$

On considère le système suivant décrivant l'évolution du fluide qui est gouvernée par les équations de Navier-Stokes et le mouvement de la structure élastique régi par l'équation de la plaque amortie

$$\begin{cases} \partial_t U + (U \cdot \nabla)U - \nabla \cdot \mathbb{T}(U, P) = f^S & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega(\eta(t, \cdot)), \\ \nabla \cdot U = 0 & \text{dans } (0, \infty) \times \Omega(\eta(t, \cdot)), \\ \partial_{tt}\eta + \alpha\Delta^2\eta - \delta\Delta\partial_t\eta = \widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U, P) + h^S & \text{dans } (0, \infty) \times \omega. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Dans le système ci-dessus, on a noté U la vitesse du fluide, P la pression du fluide, η le déplacement transversal de la plaque et les fonctions f^S, h^S sont des données indépendantes du temps.

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\mathbb{T}(U,P)$ est défini par

$$\mathbb{T}(U,P) = -PI_3 + 2\nu D(U), \quad D(U)_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right).$$

Les constantes α, δ et ν correspondent respectivement à la rigidité, à l'amortissement sur la structure et à la viscosité du fluide.

On note par $\widetilde{n}$ la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega(\eta)$:

$$\widetilde{n} = -e_3 \text{ sur } \Gamma_0,$$

et sur $\Gamma(\eta)$:

$$\widetilde{n}(s,1+\eta(s)) = \frac{\widetilde{N}(s,1+\eta(s))}{|\widetilde{N}(s,1+\eta(s))|}, \quad \text{où} \quad \widetilde{N}(s,1+\eta(s)) = \begin{pmatrix} -\partial_{s_1}\eta(s) \\ -\partial_{s_2}\eta(s) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \omega.$$

Ici et dans ce qui suit, $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 1$. On désignera également deux vecteurs tangents indépendants à $\partial\Omega(\eta)$ par :

$$\widetilde{\tau}^i = e_i, \quad i = 1,2, \text{ sur } \Gamma_0, \tag{3.1.2}$$

et par

$$\widetilde{\tau}^1(s,1+\eta(s)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{s_1}\eta(s) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\tau}^2(s,1+\eta(s)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{s_2}\eta(s) \end{pmatrix}, \quad \text{sur } \Gamma(\eta). \tag{3.1.3}$$

La fonction $\widetilde{\mathbb{H}}_\eta$ est la force exercée par le fluide sur la structure et est définie par

$$\widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U,P) = -\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\,(\mathbb{T}(U,P)\widetilde{n}\cdot e_3).$$

On complète (3.1.1) par les conditions aux limites de Navier. Soit $a \in \mathbb{R}^3$, on note par $a_{\widetilde{n}}$ et $a_{\widetilde{\tau}}$ la partie normale et tangentielle de a :

$$a_{\widetilde{n}} = (a\cdot\widetilde{n})\widetilde{n}, \quad a_{\widetilde{\tau}} = a - a_{\widetilde{n}} = -\widetilde{n}\times(\widetilde{n}\times a). \tag{3.1.4}$$

Alors, nos conditions aux limites s'écrivent comme suit

$$\begin{cases} U_{\widetilde{n}} = (\mathbb{M}v)_{\widetilde{n}} & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ [2\nu D(U)\widetilde{n} + \beta_1 U]_{\widetilde{\tau}} = \beta_1(\mathbb{M}v)_{\widetilde{\tau}} & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma_0, \\ (U - \partial_t\eta e_3)_{\widetilde{n}} = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma(\eta), \\ [2\nu D(U)\widetilde{n} + \beta_2\,(U - \partial_t\eta e_3)]_{\widetilde{\tau}} = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\Gamma(\eta). \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Ici, v est le contrôle de notre système. On suppose qu'il n'agit que sur une partie du bord fixe Γ_0 du fluide. Pour le localiser et garder les conditions de compatibilité liées à la divergence nulle de U, on utilise l'opérateur $\mathbb{M}$ défini par

$$\mathbb{M}v = mv - \left(\int_{\Gamma_0} mv\cdot\widetilde{n}\,d\Gamma\right)m\widetilde{n}, \tag{3.1.6}$$

où m est une fonction de classe C^2 sur Γ_0 et à support sur la partie de Γ_0 sur laquelle le contrôle agit telle que $\displaystyle\int_{\Gamma_0} m\ ds = 1$ (voir [7], [78] pour plus de détails). On note que $\mathbb{M} \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma_0))$ et

$$\int_{\Gamma_0} \mathbb{M}v \cdot \widetilde{n}\ d\Gamma = 0. \tag{3.1.7}$$

On suppose que les coefficients de frottement β_1 et β_2 sont des constantes satisfaisant

$$\beta_1 \geqslant 0, \quad \beta_2 \geqslant 0.$$

On peut noter ici que puisque ω est un tore, il n'y a pas de conditions aux bord "latérales". Toutes les quantités sont périodiques dans les directions e_1 et e_2, par exemple :

$$\begin{aligned} U(t, x_1 + L_1, x_2, x_3) = U(t, x_1, x_2, x_3), \quad & U(t, x_1, x_2 + L_2, x_3) = U(t, x_1, x_2, x_3), \\ \eta(t, s_1 + L_1, s_2) = \eta(t, s_1, s_2), \quad & \eta(t, s_1, s_2 + L_2) = \eta(t, s_1, s_2). \end{aligned}$$

On remarque que puisque U est de divergence nulle et tenant compte de l'équation (3.1.7), on conclut que la vitesse $\partial_t \eta$ doit vérifier la condition

$$\int_\omega \partial_t \eta\ ds = 0. \tag{3.1.8}$$

En intégrant l'équation de la plaque sur ω et en utilisant (3.1.8) et le fait que η est périodique, on trouve

$$\int_\omega \widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U, P) + h^S\ ds = 0. \tag{3.1.9}$$

Ceci revient à dire que la pression P sera déterminée d'une manière unique en écrivant

$$P = P_0 + C, \tag{3.1.10}$$

où P_0 est de moyenne nulle et C est choisie telle que la condition (3.1.9) soit vérifiée. Afin d'imposer la condition (3.1.9) sans passer par la décomposition (3.1.10), on introduit l'opérateur de projection M sur $L^2_0(\omega)$ où

$$L^2_0(\omega) = \left\{ \eta \in L^2(\omega) \mid \int_\omega \eta\ ds = 0 \right\}. \tag{3.1.11}$$

Par conséquent, il convient de restreindre le semigroupe associé à l'équation de la plaque sur $L^2_0(\omega)$. Alors, on supposera par la suite que

$$\int_\omega \eta\ ds = 0.$$

Il conviendra aussi de remplacer l'équation de la plaque par sa projection sur $L^2_0(\omega)$

$$\partial_{tt}\eta + \alpha\Delta^2\eta - \delta\Delta\partial_t\eta = \mathbb{H}_\eta(U, P) + Mh^S,$$

où

$$\mathbb{H}_\eta(U,P) = M\widetilde{\mathbb{H}}_\eta(U,P).$$

On munit le système (3.1.1), (3.1.5) avec les conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{rl} U(0,\cdot) = U^0 & \text{dans } \Omega(\eta^0), \\ \eta(0,\cdot) = \eta^0 & \text{dans } \omega, \\ \partial_t\eta(0,\cdot) = \eta^1 & \text{dans } \omega, \end{array}\right. \tag{3.1.12}$$

On se donne l'état stationnaire du système (3.1.1), (3.1.5) noté (w^S, η^S, p^S) qui est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rl} (w^S\cdot\nabla)w^S - \nabla\cdot\mathbb{T}(w^S,p^S) = f^S & \text{dans } \Omega(\eta^S), \\ \nabla\cdot w^S = 0 & \text{dans } \Omega(\eta^S), \\ \alpha\Delta^2\eta^S = \mathbb{H}_{\eta^S}(w^S,p^S) + Mh^S & \text{dans } \omega, \\ w^S_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega(\eta^S), \\ \left[2\nu D(w^S)n + \beta w^S\right]_\tau = 0 & \text{sur } \partial\Omega(\eta^S), \end{array}\right. \tag{3.1.13}$$

où

$$\beta = \left\{\begin{array}{lll} \beta_1 & \text{si} & y\in\Gamma_0, \\ \beta_2 & \text{si} & y\in\Gamma(\eta^S). \end{array}\right.$$

Notre objectif se résume à trouver un contrôle $v(t)$ qui dépend des valeurs de $(U(t'),\eta(t'))$ pour $t' \leqslant t - t_0$, avec $t_0 > 0$ une constante strictement positive qui correspond à un retard en temps, tel que la solution forte (U,η,P) associée au système (3.1.1), (3.1.5), (3.1.12) tend exponentiellement vers (w^S,η^S,p^S) quand t tend vers l'infini. Afin d'énoncer notre résultat principal, on présente quelques notations utiles.

Pour étudier la stabilisation du système (3.1.1), (3.1.5), on se ramène tout d'abord sur le domaine fixe $\Omega(\eta^S)$ et pour cela on utilise le changement de variables

$$X_{\eta^1,\eta^2} : \Omega(\eta^1) \longrightarrow \Omega(\eta^2), \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dfrac{1+\eta^2(y_1,y_2)}{1+\eta^1(y_1,y_2)}y_3 \end{pmatrix}. \tag{3.1.14}$$

On pose

$$X(t,\cdot) = X_{\eta^S,\eta(t,\cdot)}, \quad Y(t,\cdot) = X_{\eta(t,\cdot),\eta^S}, \tag{3.1.15}$$

et on définit

$$\widetilde{u}(t,y) = (\mathrm{Cof}\,\nabla X(t,y))^* U(t,X(t,y)), \quad \widetilde{p}(t,y) = P(t,X(t,y)) \quad (t\geqslant 0,\ y\in\Omega). \tag{3.1.16}$$

On note qu'avec ce changement de variables, on a

$$\widetilde{u}^0 = (\mathrm{Cof}\,\nabla X(0,\cdot))^* U^0(X(0,\cdot)).$$

On utilisera désormais la notation

$$\Omega = \Omega(\eta^S).$$

On désignera par n la normale unitaire extérieure et par τ^i deux vecteurs tangents indépendants à $\partial\Omega$:

$$n = -e_3, \quad \tau^i = e_i, \quad i = 1, 2, \text{ sur } \Gamma_0, \tag{3.1.17}$$

et sur $\Gamma(\eta^S)$:

$$n(s, 1+\eta^S(s)) = \frac{N(s, 1+\eta^S(s))}{|N(s, 1+\eta^S(s))|}, \quad \text{où} \quad N(s, 1+\eta^S(s)) = \begin{pmatrix} -\partial_{s_1}\eta^S(s) \\ -\partial_{s_2}\eta^S(s) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \omega,$$

et

$$\tau^1(s, 1+\eta^S(s)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_{s_1}\eta^S(s) \end{pmatrix}, \quad \tau^2(s, 1+\eta^S(s)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_{s_2}\eta^S(s) \end{pmatrix}. \tag{3.1.18}$$

Les opérateurs $(A_1, \mathcal{D}(A_1))$ et $(A_2, \mathcal{D}(A_2))$ sont définis par

$$A_1\eta = \alpha\Delta^2\eta, \quad \mathcal{D}(A_1) = H^4(\omega) \cap L^2_0(\omega), \tag{3.1.19}$$

$$A_2\eta = -\delta\Delta\eta, \quad \mathcal{D}(A_2) = H^2(\omega) \cap L^2_0(\omega), \tag{3.1.20}$$

Soient $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ deux espaces de Banach munis de la norme $\|.\|_{\mathfrak{X}_1}$ respectivement $\|.\|_{\mathfrak{X}_2}$. Pour $s \geqslant 0$, on définit l'espace suivant

$$W^s(0, \infty; \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) = \left\{ v \in L^2(0, \infty; \mathfrak{X}_1) \mid v \in H^s(0, \infty; \mathfrak{X}_2) \right\},$$

muni de la norme

$$\|.\|_{W^s(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)} = \|.\|_{L^2(0,\infty;\mathfrak{X}_1)} + \|.\|_{H^s(0,\infty;\mathfrak{X}_2)}.$$

Pour $s = 1$, on notera $W^1(0, \infty; \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$ par $W(0, \infty; \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$.

On se donne une fonction vectorielle $v(t)$. Pour $\gamma > 0$, on définit v_γ par

$$v_\gamma : t \mapsto e^{\gamma t} v(t).$$

Alors, pour $\gamma > 0$, on considère les espaces suivants

$$L^p_\gamma(0, \infty; \mathfrak{X}_1) = \{v \in L^p(0, \infty; \mathfrak{X}_1) \ ; \ v_\gamma \in L^p(0, \infty; \mathfrak{X}_1)\}, \quad p \in [1, +\infty], \tag{3.1.21}$$

et

$$W^s_\gamma(0, \infty; \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) = \{v \in W^s(0, \infty; \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \ ; \ v_\gamma \in W^s(0, \infty; \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)\}. \tag{3.1.22}$$

Pour ces espaces, on utilise les normes définies par

$$\|v\|_{L^p_\gamma(0,\infty;\mathfrak{X}_1)} = \|v_\gamma\|_{L^p(0,\infty;\mathfrak{X}_1)},$$

$$\|v\|_{W^s_\gamma(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)} = \|v_\gamma\|_{W^s(0,\infty;\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_2)}.$$

On écrira

$$\mathcal{X}_{\infty,\gamma} = W_\gamma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)\times L^2_\gamma(0,\infty;H^1(\Omega)/\mathbb{R})\times W^2_\gamma(0,\infty;\mathcal{D}(A_1),L^2_0(\omega)), \quad (3.1.23)$$

muni de la norme

$$\begin{aligned}\|(u,p,\eta)\|_{\mathcal{X}_{\infty,\gamma}} &= \|u\|_{W_\gamma(0,\infty;[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)} + \|u\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;[H^1(\Omega)]^3)} + \|\nabla p\|_{L^2_\gamma(0,\infty,[L^2(\Omega)]^3)}\\ &\quad + \|\eta\|_{W^2_\gamma(0,\infty;\mathcal{D}(A_1),L^2_0(\omega))} + \|\eta\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^3(\omega))} + \|\partial_t\eta\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^1(\omega))}. \quad (3.1.24)\end{aligned}$$

On définit l'espace

$$\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L^2_0(\omega),$$

muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix}\phi\\ \zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi\\ \xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \phi\cdot\psi\ dy + \int_\omega A_1^{1/2}\zeta_1\cdot A_1^{1/2}\xi_1\ ds + \int_\omega \zeta_2\cdot\xi_2\ ds.$$

On pose

$$\widetilde{W} = \begin{pmatrix}\widetilde{u} - w^S\\ \eta - \eta^S\\ \partial_t\eta\end{pmatrix}, \quad (3.1.25)$$

où la fonctions $\widetilde{u}$ est définie par (3.1.16).

Finalement, on suppose que les conditions initiales vérifient

$$(\widetilde{u}^0,\eta^0,\eta^1) \in [H^1(\Omega)]^3 \times H^3(\omega)\times H^1(\omega) \quad (3.1.26)$$

$$\nabla\cdot\widetilde{u}^0 = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (\widetilde{u}^0 - \eta^1 e_3)_n = 0 \text{ sur } \Gamma(\eta^S), \quad \widetilde{u}^0_n = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \quad (3.1.27)$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant

Théorème 3.1.1. *Soient $t_0 > 0$, $\gamma > 0$,*

$$f^S \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^3, \quad h^S \in L^2(\omega), \quad (3.1.28)$$

$$(w^S,\eta^S,p^S) \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^3 \times C^3(\omega)\times W^{1,\infty}(\Omega)/\mathbb{R}, \quad (3.1.29)$$

avec

$$1+\eta^S > 0, \quad (3.1.30)$$

tels que le système (3.1.13) *est vérifié et* $(\widetilde{u}^0,\eta^0,\eta^1)$ *satisfaisant* (3.1.26), (3.1.27).

Alors, il existe

$$N_\gamma \in \mathbb{N}^*, \quad K \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2;\mathcal{L}(\mathcal{H})),$$

$$(\phi_k,\zeta_1^k,\zeta_2^k) \in [H^2(\Omega)]^3\times\mathcal{D}(A_1)\times\mathcal{D}(A_1^{1/2}),\ v_k \in [H^{3/2}(\Gamma_0)]^3,\ k=1,\dots,N_\gamma,$$

et $R > 0$, tels que si

$$\left\|\widetilde{u}^0 - w^S\right\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \left\|\eta^0-\eta^S\right\|_{H^3(\omega)} + \left\|\eta^1\right\|_{H^1(\omega)} \leqslant R,$$

il existe une unique solution (U, P, η) *de* (3.1.1), (3.1.5) *et* (3.1.12) *associée à*

$$v(t) = 1_{[t_0,+\infty)}(t) \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\widetilde{W}(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} K(t-t_0, s)\widetilde{W}(s)\, ds, \begin{pmatrix} \phi_k \\ \zeta_1^k \\ \zeta_2^k \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} v_k. \tag{3.1.31}$$

De plus, $(\widetilde{u} - w^S, \widetilde{p} - p^S, \eta - \eta^S) \in \mathcal{X}_{\infty,\gamma}$ *et on a l'estimation*

$$\left\|(\widetilde{u} - w^S, \widetilde{p} - p^S, \eta - \eta^S)\right\|_{\mathcal{X}_{\infty,\gamma}} \leqslant C \left(\left\|\widetilde{u}^0 - w^S\right\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \left\|\eta^0 - \eta^S\right\|_{H^3(\omega)} + \left\|\eta^1\right\|_{H^1(\omega)} \right), \tag{3.1.32}$$

où les fonctions $\widetilde{u}$, $\widetilde{p}$ *sont définies par* (3.1.16).

Remarque 3.1.2. *On peut obtenir un analogue du Théorème 3.1.1 dans le cas des conditions classiques de Dirichlet, à savoir*

$$\begin{cases} U = \mathbb{M}v & sur\ (0,\infty) \times \Gamma_0, \\ (U - \partial_t \eta e_3) = 0 & sur\ (0,\infty) \times \Gamma(\eta). \end{cases} \tag{3.1.33}$$

On note que si $\beta_1 = 0$, *le Théorème 3.1.1 implique que le système* (3.1.1), (3.1.5) *et* (3.1.12) *est exponentiellement stabilisable en considérant seulement un contrôle scalaire au niveau de la condition d'imperméabilité.*

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la construction d'un contrôle frontière v avec un retard $t_0 > 0$ en temps (au sens de [33]) tel que la solution forte du système (3.1.1), (3.1.5) et (3.1.12) tend exponentiellement vers l'état stationnaire (w^S, η^S, p^S). On note que dans ce cas, des conditions de compatibilité en temps $t = 0$ entre le contrôle v et les conditions initiales devraient être imposées, puisque le contrôle qu'on cherche vaut zéro en $t = 0$, cette difficulté est relevée ici et c'est l'un des avantage du retard en temps.

Le chapitre est organisé comme suit : dans la Section 3.2, on écrit le système (3.1.1), (3.1.5), (3.1.12) dans un domaine fixe en utilisant le changement de variable (3.1.15) et (3.1.16). On étudie ensuite le système linéarisé associé dans la Section 3.3 qui s'écrira sous la forme d'un problème d'évolution

$$z' = Az + Bv + f, \quad z(0) = z^0, \tag{3.1.34}$$

En tenant compte de la Remarque 3.2.1, le problème linéarisé s'écrira sous forme d'un système couplant les équations d'Oseen et l'équation de la plaque amortie, perturbé par des termes linéaires apparaissant dans tout le système y compris dans les conditions au bord. On montre que le générateur infinitésimal associé au système linéaire est analytique et on montre un premier résultat de stabilisation avec retard du problème linéarisé, plus précisément on montre que le critère de Fattorini-Hautus est vérifié

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{D}(A^*),\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda \geqslant -\sigma \quad A^*\varepsilon = \lambda\varepsilon \quad \text{et} \quad B^*\varepsilon = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = 0. \tag{UC$_\sigma$}$$

Finalement, on prouve le Théorème 3.1.1 en appliquant un argument de point fixe.

3.2 Changement de variables

Pour écrire les conditions aux limites d'une manière plus compacte, on introduit l'opérateur $\mathcal{T}_\eta$ défini comme suit

$$(\mathcal{T}_\eta \xi)(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \in \Gamma_0, \\ \xi(s)e_3 & \text{si} \quad y = (s, 1+\eta(s)) \in \Gamma(\eta), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

pour toute fonction $\eta : \omega \longrightarrow (-1, \infty)$. On peut vérifier que $\mathcal{T}_\eta \in \mathcal{L}(L^2(\omega); [L^2(\partial\Omega(\eta))]^3)$ et que

$$(\mathcal{T}_\eta^* \zeta)(s) = \sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\zeta(s, 1+\eta(s)) \cdot e_3, \quad \forall \zeta \in [L^2(\partial\Omega(\eta))]^3.$$

On définit l'opérateur $\mathcal{T}$ par

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\eta^S} M,$$

où on rappelle que M est la projection orthogonale sur l'espace $L^2_0(\omega)$ défini par (3.1.11).

En utilisant (3.1.15) et (3.1.16), le système (3.1.1), (3.1.5), (3.1.12) est équivalent à

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{u} - \nabla \cdot \mathbb{T}(\widetilde{u}, \widetilde{p}) = \det(\nabla X) f^S(X) + (\mathrm{Id} - \mathbf{K}_\eta)\partial_t \widetilde{u} - \nu(\Delta - \mathbf{L}_\eta)\widetilde{u} \\ \qquad\qquad + (\nabla - \mathbf{G}_\eta)\widetilde{p} + \mathbf{M}_\eta \widetilde{u} + \mathbf{N}_\eta \widetilde{u} \quad \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \nabla \cdot \widetilde{u} = 0 \quad \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \partial_{tt}\eta + A_1 \eta + A_2 \partial_t \eta = \mathbb{H}_{\eta^S}(\widetilde{u}, \widetilde{p}) + H(\widetilde{u}, \eta) + h^S \quad \text{dans } (0,\infty) \times \omega, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} [\widetilde{u} - \mathcal{T}\partial_t \eta]_n = 1_{\Gamma_0}(\mathbb{M}v)_n \quad \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ [2\nu D(\widetilde{u})n + \beta(\widetilde{u} - \mathcal{T}\partial_t\eta)]_\tau = 1_{\Gamma_0}\beta(\mathbb{M}v)_\tau + G(\widetilde{u}, \eta) \quad \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

et avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \widetilde{u}(0,\cdot) = (\mathrm{Cof}\, \nabla X(0,.))^* U^0(X(0,\cdot)) = \widetilde{u}^0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \eta(0,\cdot) = \eta^0 \quad \text{dans } \omega, \\ \partial_t \eta(0,\cdot) = \eta^1 \quad \text{dans } \omega. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Pour simplifier, on définit

$$a = (\mathrm{Cof}(\nabla Y))^*, \quad b = (\mathrm{Cof}(\nabla X)),$$

$$\mathbf{K}_\eta \widetilde{u} = (\nabla X)\widetilde{u},$$

$$\mathbf{G}_\eta \widetilde{p} = b \nabla \widetilde{p}.$$

On a alors les formules suivantes

$$
\begin{aligned}
[-\nu(\Delta-\mathbf{L}_\eta)\widetilde{u}]_i = \nu \sum_{j,k,l,m} &\left(\det(\nabla X)a_{ik}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) - \delta_{ik}\delta_{mj}\delta_{jl}\right)\frac{\partial^2 \widetilde{u}_k}{\partial y_l \partial y_m} \\
&+ \nu \sum_{j,k,l,m}\left(\det(\nabla X)a_{jk}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_i}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) - \delta_{jk}\delta_{mi}\delta_{jl}\right)\frac{\partial^2 \widetilde{u}_k}{\partial y_l \partial y_m} \\
&+ \det(\nabla X)\Bigg[\nu \sum_{j,k,l}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X)\right)\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial y_l} \\
&+ \nu \sum_{j,k,l}\Bigg(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) + a_{ik}(X)\frac{\partial^2 Y_l}{\partial x_j^2}(X) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_i}(X) \\
&\quad + a_{jk}(X)\frac{\partial^2 Y_l}{\partial x_j \partial x_i}(X)\Bigg)\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial y_l} + \nu \sum_k \left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j^2}(X) + \frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial x_j \partial x_i}(X)\right)\widetilde{u}_k\Bigg], \qquad (3.2.5)
\end{aligned}
$$

$$
[(\nabla - \mathbf{G}_\eta)\widetilde{p}]_i = \sum_k (\delta_{ik} - b_{ik})\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial y_k} = \sum_k (\delta_{ik} - \det(\nabla X)\frac{\partial Y_k}{\partial x_i}(X))\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial y_k}, \qquad (3.2.6)
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{N}_\eta \widetilde{u}]_i = &-\sum_{k,l,j}\det(\nabla X)a_{kl}(X)\frac{\partial a_{ij}(X)}{\partial x_k}\widetilde{u}_l\widetilde{u}_j \\
&- \sum_{k,l,j,m}\det(\nabla X)a_{kl}(X)a_{ij}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_k}(X)\widetilde{u}_l\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial y_m}, \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

$$
[\mathbf{M}_\eta \widetilde{u}]_i = -\sum_{l,k}\det(\nabla X)a_{ik}(X)\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial y_l}\partial_t Y_l(X) - \sum_k \det(\nabla X)\partial_t a_{ik}(X)\widetilde{u}_k, \quad i = 1,2,3. \qquad (3.2.8)
$$

Le terme non linéaire H qui figure dans l'équation de la plaque s'écrit

$$
\begin{aligned}
H(\widetilde{u},\eta) = \nu M\Bigg[&-\sum_{j,k}\left(\frac{\partial a_{3k}}{\partial x_j}(X) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_3}(X)\right)\widetilde{N}_j\widetilde{u}_k \\
&+ \sum_{j,k,l}\left(\delta_{3k}\delta_{jl}(N)_j - a_{3k}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X)\widetilde{N}_j\right)\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial y_l} \\
&+ \left(\delta_{3l}\delta_{jk}(N)_j - a_{jk}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_3}(X)\widetilde{N}_j\right)\frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial y_l}\Bigg]. \qquad (3.2.9)
\end{aligned}
$$

Soit $\mathcal{W}$ l'opérateur défini par

$$[\mathcal{W}(\widetilde{u},\eta)]_k = \nu \sum_{j,m} \widetilde{n}_j(X) \left(\frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X)\widetilde{u}_m + \frac{\partial a_{jm}}{\partial x_k}(X)\widetilde{u}_m \right) + \beta \left(\sum_j a_{kj}(X)\widetilde{u}_j - \mathcal{T}\partial_t\eta \cdot e_k \right)$$
$$+ \nu \sum_{j,m,q} \widetilde{n}_j(X) \left(a_{km}(X) \frac{\partial \widetilde{u}_m}{\partial y_q} \frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X) + a_{jm}(X) \frac{\partial \widetilde{u}_m}{\partial y_q} \frac{\partial Y_q}{\partial x_k}(X) \right), \quad k = 1,2,3. \quad (3.2.10)$$

Les conditions au bord (3.1.5) deviennent après changement de variables

$$\begin{cases} (\widetilde{u} - \mathcal{T}\partial_t\eta)_n = 1_{\Gamma_0}(\mathbb{M}v)_n & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ \mathcal{W}(\widetilde{u},\eta)\cdot(\widetilde{\tau}^i(X)) = 1_{\Gamma_0}\beta(\mathbb{M}v)\cdot(\widetilde{\tau}^i(X)), \quad i=1,2 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2.11)$$

où $\widetilde{\tau}^i$ sont définis par (3.1.2) et (3.1.3). La deuxième condition au bord qui figure dans (3.2.11) peut s'écrire comme suit

$$(2\nu D(\widetilde{u})n + \beta(\widetilde{u} - \mathcal{T}\partial_t\eta))\cdot\tau^i = \mathcal{V}^i(\widetilde{u},\eta) + 1_{\Gamma_0}\beta(\mathbb{M}v)\cdot\tau^i, \quad i=1,2, \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où τ^i sont les vecteurs tangents à $\partial\Omega$ définis dans (3.1.17), (3.1.18) et $\mathcal{V}^i$ est l'opérateur donné par la formule

$$\mathcal{V}^i(\widetilde{u},\eta) = (2\nu D(\widetilde{u})n + \beta(\widetilde{u} - \mathcal{T}\partial_t\eta))\cdot(\tau^i - \widetilde{\tau}^i(X))$$
$$+ (2\nu D(\widetilde{u})n + \beta(\widetilde{u} - \mathcal{T}\partial_t\eta) - \mathcal{W}(\widetilde{u},\eta))\cdot\widetilde{\tau}^i(X), \quad i=1,2, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.2.12)$$

Alors, on construit l'opérateur G de sorte que $G\cdot n = 0$ et $G\cdot\tau^i = \mathcal{V}^i$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent, G est défini sur $\Gamma(\eta^S)$ comme suit

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\mathcal{V}^1((\partial_{s_2}\eta^S)^2+1) - \mathcal{V}^2(\partial_{s_1}\eta^S\partial_{s_2}\eta^S)}{|N|^2}, \\ G_2 &= \frac{\mathcal{V}^2((\partial_{s_1}\eta^S)^2+1) - \mathcal{V}^1(\partial_{s_1}\eta^S\partial_{s_2}\eta^S)}{|N|^2}, \\ G_3 &= \frac{\partial_{s_1}\eta^S\mathcal{V}^1 + \partial_{s_2}\eta^S\mathcal{V}^2}{|N|^2}, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

et G est défini sur Γ_0 par $G = \sum_{i=1}^{2} \mathcal{V}^i\tau^i$.

On pose

$$u = \widetilde{u} - w^S, \quad p = \widetilde{p} - p^S, \quad \xi = \eta - \eta^S.$$

Le triplet (u,p,ξ) satisfait le système

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla\cdot\mathbb{T}(u,p) + (w^S\cdot\nabla)u + (u\cdot\nabla)w^S = F(u,p,\xi) & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot u = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \partial_{tt}\xi + A_1\xi + A_2\partial_t\xi = \mathbb{H}_{\eta^S}(u,p) + H(u+w^S,\xi+\eta^S) & \text{dans } (0,\infty)\times\omega, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

où

$$
\begin{aligned}
F(u,p,\xi) = (\mathrm{Id} - \mathbf{K}_{\xi+\eta^S})\partial_t u - \nu(\Delta - \mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u+w^S) + (\nabla - \mathbf{G}_{\xi+\eta^S})(p+p^S) \\
+ \mathbf{M}_{\xi+\eta^S}(u+w^S) + \mathbf{N}_{\xi+\eta^S}(u+w^S) + (u\cdot\nabla)w^S + (w^S\cdot\nabla)u + (w^S\cdot\nabla)w^S \\
+ \det(\nabla X) f^S(X) - f^S,
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

avec les conditions aux limites

$$
\left\{
\begin{array}{rl}
[u - \mathcal{T}\partial_t\xi]_n = 1_{\Gamma_0}(\mathbb{M}v)_n & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\
[2\nu D(u)n + \beta(u - \mathcal{T}\partial_t\xi)]_\tau = 1_{\Gamma_0}\beta(\mathbb{M}v)_\tau + G(u+w^S, \xi+\eta^S) & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega,
\end{array}
\right.
\tag{3.2.16}
$$

et les conditions initiales

$$
\left\{
\begin{array}{rl}
u(0,\cdot) = \widetilde{u}^0 - w^S & \text{dans } \Omega, \\
\xi(0,\cdot) = \eta^0 - \eta^S & \text{dans } \omega, \\
\partial_t\xi(0,\cdot) = \eta^1 & \text{dans } \omega.
\end{array}
\right.
\tag{3.2.17}
$$

Remarque 3.2.1. *Dans la linéarisation du système* (3.2.14), (3.2.16), (3.2.17), *on doit faire attention à retrouver tous les termes linéaires provenant du changement de variables. Par exemple pour le terme*

$$
\det(\nabla X) f^S(X) - f^S = \det(\nabla X)(f^S(X) - f^S) + (\det(\nabla X) - 1) f^S.
$$

On rappelle que $\det(\nabla X) = \dfrac{1+\eta}{1+\eta^S}$. *Par ailleurs, on note*

$$
X(y) = y + \frac{y_3\xi(y_1,y_2)}{1+\eta^S(y_1,y_2)}e_3 = y + \theta\xi(y_1,y_2)e_3.
$$

On applique la formule de Taylor et on obtient

$$
\begin{aligned}
f^S(X(y)) - f^S(y) = \theta\xi(y_1,y_2)\nabla f^S(y)e_3 \\
+ \int_0^1 (1-s)\nabla^2 f^S(y + s\theta\xi(y_1,y_2)e_3)\theta\xi(y_1,y_2)e_3\cdot\theta\xi(y_1,y_2)e_3\, ds.
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\det(\nabla X(y)) f^S(X(y)) - f^S(y) \\
&\quad = \frac{\xi(y_1,y_2)}{1+\eta^S(y_1,y_2)} f^S(y) + \theta\xi(y_1,y_2)\nabla f^S(y)e_3 + \frac{(\xi(y_1,y_2))^2}{1+\eta^S}\theta\nabla f^S(y)e_3 \\
&\quad + \left(1 + \frac{\xi(y_1,y_2)}{1+\eta^S(y_1,y_2)}\right)\int_0^1 (1-s)\nabla^2 f^S(y + s\theta\xi(y_1,y_2)e_3)\theta\xi(y_1,y_2)e_3\cdot\theta\xi(y_1,y_2)e_3\, ds.
\end{aligned}
\tag{3.2.19}
$$

On constate que si $\|\xi\|_{L^2_\gamma(0,\infty;L^2(\omega))} \leqslant CR$, *on a*

$$\left\|\frac{\xi}{1+\eta^S}f^S\right\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant CR.$$

Ce qui constituera un problème au niveau de la partie "point fixe".

Pour surmonter ce problème, on s'inspire de [11]. Plus précisément, on pose par exemple

$$\det(\nabla X(y))f^S(X(y)) - f^S(y) = \ell^{(12)}(\xi) + \epsilon^{(12)}(\xi),$$

avec

$$\left\|\epsilon^{(12)}(\xi)\right\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C\,\|\xi\|^2_{L^2_\gamma(0,\infty;L^2(\omega))}\,(1+\|\xi\|^m_{L^2_\gamma(0,\infty;L^2(\omega))}), \quad m \geqslant 1. \tag{3.2.20}$$

où $\ell^{(12)}$ *est l'opérateur linéaire*

$$\ell^{(12)}(\xi) = \frac{\xi}{1+\eta^S}f^S,$$

et $\epsilon^{(12)}$ *est le reste non linéaire figurant dans* (3.2.19). *La stratégie consiste alors à faire intégrer l'opérateur* $\ell^{(12)}$ *dans la partie linéaire du système* (3.2.14), (3.2.16) *et* (3.2.17).

L'étape cruciale qui suit est de décomposer F, H et $\mathcal{V}^i$, en deux parties. On distinguera la partie linéaire en ξ et on injectera les termes non linéaires au second membre.

La notation $\partial_s\xi$ (resp. $\partial^2_{ss}\xi$, $\partial^3_{sss}\xi$), désignera désormais une abréviation de la dérivée première $\partial_{s_j}\xi$ (resp. la dérivée deuxième $\partial^2_{s_is_j}\xi$, la dérivée troisième $\partial^3_{s_is_js_k}\xi$).

Décomposition de $F(u,p,\xi)$ **:**

On commence par décomposer l'opérateur $-\nu(\Delta - \mathbf{L}_\eta)$. On note que

$$-\nu(\Delta-\mathbf{L}_\eta)(\widetilde{u}) = -\nu(\Delta-\mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u+w^S) = -\nu(\Delta-\mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u) - \nu(\Delta-\mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(w^S). \tag{3.2.21}$$

Le terme $-\nu(\Delta-\mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u)$ est non linéaire tandis que $-\nu(\Delta-\mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(w^S)$ contient des termes linéaires en ξ, alors en vertu de la remarque 3.2.1, il convient d'écrire

$$-\nu(\Delta-\mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(w^S) = \ell^{(13)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi,\partial^3_{sss}\xi) + \epsilon^{(13)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi,\partial^3_{sss}\xi), \tag{3.2.22}$$

où $\ell^{(13)}$ est un opérateur linéaire de la forme (3.4.9) et $\epsilon^{(13)}$ est le reste non linéaire à déterminer. Pour écrire le système linéarisé sous une forme appropriée, on définit pour tout $\widetilde{u}$

$$\begin{aligned}(E_\eta(\widetilde{u}))_{im} = \nu\sum_{j,k,l}&\left(\det(\nabla X)a_{ik}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) - \delta_{ik}\delta_{mj}\delta_{jl}\right)\frac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial y_l}\\ &+\nu\sum_{j,k,l}\left(\det(\nabla X)a_{jk}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_i}(X)\frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) - \delta_{jk}\delta_{mi}\delta_{jl}\right)\frac{\partial\widetilde{u}_k}{\partial y_l}\\ &+\det(\nabla X)\left(\nu\sum_{j,k}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}(X)\frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X)\right)\widetilde{u}_k\right).\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

On constate que

$$(\nabla \cdot E_\eta)_i = -\nu[(\Delta - \mathbf{L}_\eta)]_i + (F^1_\eta)_i, \tag{3.2.24}$$

avec

$$\begin{aligned}[(F^1_\eta)(\widetilde{u})]_i = \nu \frac{\partial \det(\nabla X)}{\partial y_m} \sum_{j,k,l,m} \Bigg[\Bigg(a_{ik}(X) \frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X) \frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) + a_{jk}(X) \frac{\partial Y_m}{\partial x_i}(X) \frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) \Bigg) \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial y_l} \\ + \sum_{j,k} \Bigg(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}(X) \frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}(X) \frac{\partial Y_m}{\partial x_j}(X) \Bigg) \widetilde{u}_k \Bigg] \\ + \nu \det(\nabla X) \Bigg[\sum_{j,k,l,m,q} \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x_j \partial x_q}(X) \frac{\partial X_q}{\partial y_m} \Bigg(\Bigg(a_{ik}(X) \frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) + a_{jk}(X) \frac{\partial Y_l}{\partial x_j}(X) \Bigg) \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial y_l} \\ + \Bigg(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}(X) + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}(X) \Bigg) \widetilde{u}_k \Bigg) \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

D'après le Lemme 3.4.2, on écrit

$$(E_{\xi+\eta^S}(w^S)) = \mathcal{L}^1(\xi) + \mathcal{N}_E(\xi), \tag{3.2.26}$$

où $\mathcal{L}^1$ est un opérateur linéaire en ξ s'écrivant sous la forme

$$\mathcal{L}^1(\xi) = Q^1\xi + Q^2\partial_s\xi + Q^3\partial^2_{ss}\xi,$$

où Q^i, $i = 1, .., 3$ sont des opérateurs qui dépendent seulement de l'état stationnaire et sont de régularité $W^{1,\infty}(\Omega)$. La quantité $\mathcal{N}_E(\xi)$ est le reste non linéaire dont l'expression fait intervenir les termes

$$c^1(\eta^S, w^S) \frac{\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}}, \ c^2(\eta^S, w^S) \frac{\xi^{n_1}(\partial_s\xi)^{n_2}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}}, \quad m_1 + m_2 \geqslant 2, \ n_1 + n_2 \geqslant 1, \ \alpha_i \geqslant 1, \tag{3.2.27}$$

où c^1 et c^2 sont deux fonctions de régularité $W^{1,\infty}(\Omega)$. D'autre part, du Lemme 3.4.2, on obtient aussi

$$(F^1_{\xi+\eta^S})(w^S) = -\ell^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) - \epsilon^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi), \tag{3.2.28}$$

où le terme non linéaire $\epsilon^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi)$ contient des termes de la même forme que (3.2.27).

Alors, de (3.2.22), (3.2.24), (3.2.26) et (3.2.28), on déduit

$$\ell^{(13)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi, \partial^3_{sss}\xi) = \nabla \cdot (\mathcal{L}^1(\xi)) + \ell^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi), \tag{3.2.29}$$

$$\epsilon^{(13)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi, \partial^3_{sss}\xi) = \epsilon^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + \nabla \cdot (\mathcal{N}_E(\xi)). \tag{3.2.30}$$

En utilisant (3.2.21), (3.2.22), (3.2.29) et (3.2.30), le membre $-\nu(\Delta - \mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u + w^S)$ peut donc s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} -\nu(\Delta - \mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u + w^S) = \nabla \cdot (\mathcal{L}^1(\xi)) + \ell^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + \epsilon^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + \nabla \cdot (\mathcal{N}_E(\xi)) \\ - \nu(\Delta - \mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u). \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Par ailleurs, en utilisant toujours le Lemme 3.4.2, on obtient

$$[(\nabla - \mathbf{G}_{\xi+\eta^S})(p^S)]_i = \sum_k (\delta_{ki} - \det(\nabla X)\frac{\partial Y_k}{\partial x_i}(X))\frac{\partial p^S}{\partial y_k} = \ell_i^{(5)}(\xi, \partial_s\xi) + \epsilon_i^{(5)}(\xi, \partial_s\xi), \quad (3.2.32)$$

où $\epsilon^{(5)}(\xi, \partial_s\xi)$ fait intervenir les termes

$$c^3(\eta^S, p^S)\frac{\xi^{m_2}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}}, \quad m_1 + m_2 \geqslant 2,\ \alpha_1 \geqslant 1, \quad (3.2.33)$$

où c^3 est une fonction qui dépend seulement de l'état stationnaire et bornée dans Ω. Alors,

$$[(\nabla - \mathbf{G}_{\xi+\eta^S})(p + p^S)]_i = \ell_i^{(5)}(\xi, \partial_s\xi) + \epsilon_i^{(5)}(\xi, \partial_s\xi) + [(\nabla - \mathbf{G}_{\xi+\eta^S})(p)]_i. \quad (3.2.34)$$

D'un autre côté, on a

$$\sum_{l,k} \det(\nabla X) a_{ik}(X)\frac{\partial w_k^S}{\partial y_l}\partial_t Y_l(X) = (\nabla X \nabla w^S \partial_t Y(X))_i,$$

où

$$(\nabla X \nabla w^S \partial_t Y(X))_i = \partial_t Y_3 \frac{\partial w_i^S}{\partial y_3},\ i = 1, 2,$$

$$(\nabla X \nabla w^S \partial_t Y(X))_3 = \partial_t Y_3 \left(\frac{\partial X_3}{\partial y_1}\frac{\partial w_1^S}{\partial y_3} + \frac{\partial X_3}{\partial y_2}\frac{\partial w_2^S}{\partial y_3} + \frac{1+\eta}{1+\eta^S}\frac{\partial w_3^S}{\partial y_3}\right).$$

On note que

$$\partial_t Y_3 = -y_3\frac{\partial_t\xi}{1+\eta}, \quad \frac{\partial X_3}{\partial y_i} = y_3\frac{\partial_{s_i}\xi(1+\eta^S) - \partial_{s_i}\eta^S\xi}{(1+\eta^S)^2},\ i = 1, 2.$$

En utilisant (3.4.15), on trouve que

$$-(\nabla X \nabla w^S \partial_t Y(X))_i = \ell_i^{(4)}(\partial_t\xi) + \epsilon_i^{(4)}(\xi, \partial_s\xi, \partial_t\xi),$$

où $\epsilon^{(4)}(\xi, \partial_s\xi, \partial_t\xi)$ a pour termes

$$c^4(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_1}\partial_t\xi\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ c^5(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_2}\partial_t\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}}, \quad m_1 \geqslant 0, \quad m_2 \geqslant 1,\ \alpha_i \geqslant 1, \quad (3.2.35)$$

avec c^4 et c^5 sont des fonctions de régularité $W^{1,\infty}(\Omega)$. De plus, en utilisant le Lemme 3.4.2, on obtient

$$-\sum_k \det(\nabla X)\partial_t a_{ik}(X) w_k^S = \ell_i^{(6)}(\partial_t\xi, \partial_{ts}^2\xi) + \epsilon_i^{(6)}(\xi, \partial_t\xi, \partial_{ts}^2\xi), \quad (3.2.36)$$

où $\epsilon^{(6)}(\xi, \partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi)$ contient les termes suivants

$$c^6(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_1}\partial^2_{ts}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ c^7(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_2}\partial_t\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},\ c^8(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_3}\partial_t\xi\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_3}},$$
$$m_1 \geqslant 1,\ m_2 \geqslant 1,\ m_3 \geqslant 0,\ \alpha_i \geqslant 1, \quad (3.2.37)$$

avec c^i, $i = 6, ..., 8$ des fonctions de régularité $W^{2,\infty}(\Omega)$. Donc

$$\mathbf{M}_{\xi+\eta^S}(u + w^S) = \ell^{(4)}(\partial_t\xi) + \ell^{(6)}(\partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi) + \epsilon^{(6)}(\xi, \partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi)$$
$$+ \epsilon^{(4)}(\xi, \partial_s\xi, \partial_t\xi) + \mathbf{M}_{\xi+\eta^S}(u). \quad (3.2.38)$$

Par ailleurs,

$$[\mathbf{N}_{\xi+\eta^S}(u + w^S) + u \cdot \nabla w^S + w^S \cdot \nabla u + w^S \cdot \nabla w^S]_i = -\sum_{k,l,j} \det(\nabla X) a_{kl}(X) \frac{\partial a_{ij}(X)}{\partial x_k} w^S_l w^S_j$$
$$+ \sum_{k,l,j,m} \left(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{km} - \det(\nabla X) a_{kl}(X) a_{ij}(X) \frac{\partial Y_m}{\partial x_k}(X) \right) w^S_l \frac{\partial w^S_j}{\partial y_m} + F^2_i(u, \xi + \eta^S)$$
$$= F^2_i(u, \xi + \eta^S) + F^3_i(w^S, \xi + \eta^S), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.39)$$

En utilisant le Lemme 3.4.2, on obtient

$$F^3_i(w^S, \xi + \eta^S) = \ell^{(8)}_i(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + \epsilon^{(8)}_i(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi), \quad (3.2.40)$$

où $\epsilon^{(8)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi)$ admet des termes sous la forme (3.2.27). Alors, on a

$$[\mathbf{N}_{\xi+\eta^S}(u + w^S) + u \cdot \nabla w^S + w^S \cdot \nabla u + w^S \cdot \nabla w^S]_i = \ell^{(8)}_i(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi)$$
$$+ \epsilon^{(8)}_i(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + F^2_i(u, \xi + \eta^S), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.41)$$

De (3.2.15), (3.2.31), (3.2.34), (3.2.38) et (3.2.41), on obtient

$$F(u, p, \xi) = \nabla \cdot \mathcal{L}^1(\xi) + \mathcal{L}^2(\xi, \partial_t\xi) + \nabla \cdot \mathcal{N}_E(\xi) + \mathcal{N}_F(\xi) + \mathcal{F}(u, p, \xi). \quad (3.2.42)$$

où

$$\mathcal{L}^2(\xi, \partial_t\xi) = \ell^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + \ell^{(5)}(\xi, \partial_s\xi) + \ell^{(4)}(\partial_t\xi) + \ell^{(6)}(\partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi) + \ell^{(8)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi), \quad (3.2.43)$$

ou encore

$$\mathcal{L}^2(\xi, \partial_t\xi) = Q^4\xi + Q^5\partial_s\xi + Q^6\partial^2_{ss}\xi + Q^7\partial_t\xi + Q^8\partial^2_{st}\xi,$$

où Q_i, $i = 4, .., 8$ sont de régularité $W^{1,\infty}(\Omega)$,

$$\mathcal{N}_F(\xi) = \epsilon^{(9)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + \epsilon^{(5)}(\xi, \partial_s\xi) + \epsilon^{(4)}(\xi, \partial_s\xi, \partial_t\xi) + \epsilon^{(6)}(\xi, \partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi)$$
$$+ \epsilon^{(8)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi), \quad (3.2.44)$$

$$\mathcal{F}(u,p,\xi) = (\mathrm{Id} - \mathbf{K}_{\xi+\eta^S})\partial_t u - \nu(\Delta - \mathbf{L}_{\xi+\eta^S})(u) + (\nabla - \mathbf{G}_{\xi+\eta^S})(p) + \mathbf{M}_{\xi+\eta^S}(u) + F^2(u,\xi+\eta^S). \quad (3.2.45)$$

Décomposition de $H(u,\xi+\eta^S)$:
On a

$$H(u+w^S,\xi+\eta^S) = H(u,\xi+\eta^S) + H(w^S,\xi+\eta^S).$$

On remarque que

$$H(w^S,\xi+\eta^S) = -\mathcal{T}^*((E_{\xi+\eta^S}(w^S))n), \quad (3.2.46)$$

où $\mathcal{T}^*$ est défini par

$$\mathcal{T}^*(\zeta)(s) = M\left(\sqrt{1+|\nabla\eta^S|^2}\zeta(s,1+\eta^S(s))\cdot e_3\right), \quad \forall\zeta\in[L^2(\partial\Omega)]^3. \quad (3.2.47)$$

En utilisant (3.2.26), on obtient

$$H(u+w^S,\xi+\eta^S) = -\mathcal{T}^*(\mathcal{L}^1(\xi)n) + H(u,\xi+\eta^S) - \mathcal{T}^*(\mathcal{N}_E(\xi)n). \quad (3.2.48)$$

Décomposition de $G(u,\xi+\eta^S)$:
D'autre part, en utilisant les formules de $\mathcal{W}$ dans (3.2.10) et de $\mathcal{V}^i$ dans (3.2.12), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^i(w^S,\xi+\eta^S) &= \left(2\nu D(w^S)n + \beta w^S\right)\cdot(\tau^i - \widetilde{\tau}^i(X)) \\ &+ \Bigg[\nu\sum_{j,m,q}\left((n)_j\delta_{km}\delta_{qj} - (\widetilde{n}(X))_j a_{km}(X)\frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X)\right)\frac{\partial w_m^S}{\partial y_q} \\ &- \nu\sum_{j,m,q}\left((\widetilde{n}(X))_j a_{jm}(X)\frac{\partial Y_q}{\partial x_k}(X) - (n)_j\delta_{jm}\delta_{qk}\right)\frac{\partial w_m^S}{\partial y_q} \\ &- \nu\sum_{j,m}(\widetilde{n}(X))_j\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X)w_m^S + \frac{\partial a_{jm}}{\partial x_k}(X)w_m^S\right) + \beta\sum_j(\delta_{kj} - a_{kj}(X))w_j^S\Bigg]\widetilde{\tau}_k^i(X), \quad k=1,2,3.\end{aligned}$$

On constate que

$$\begin{aligned}&\nu\sum_{j,m,q}\left(n_j\delta_{km}\delta_{qj} - \widetilde{n}_j(X)a_{km}(X)\frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X)\right)\frac{\partial w_m^S}{\partial y_q} \\ &+ \nu\sum_{j,m,q}\left(n_j\delta_{jm}\delta_{qk} - \widetilde{n}_j(X)a_{jm}(X)\frac{\partial Y_q}{\partial x_k}(X)\right)\frac{\partial w_m^S}{\partial y_q} \\ &- \nu\sum_{j,m}\widetilde{n}_j(X)\left(\frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X)w_m^S + \frac{\partial a_{jm}}{\partial x_k}(X)w_m^S\right) = -\frac{|N|}{|\widetilde{N}|}\left[(E_{\xi+\eta^S}(w^S))n\right]_k \\ &+ \nu\sum_j\left((n)_j - \frac{N}{|\widetilde{N}|}\right)\frac{\partial w_k^S}{\partial y_j} + \nu\sum_j\left((n)_j - \frac{N}{|\widetilde{N}|}\right)\frac{\partial w_j^S}{\partial y_k}. \quad (3.2.49)\end{aligned}$$

D'un autre côté, on obtient en utilisant la formule de Taylor

$$\frac{1}{|\widetilde{N}|} = \frac{1}{|N|} - \frac{\nabla\eta^S \cdot \nabla\xi}{|N|^3} - \frac{|\nabla\xi|^2}{2|N|^3} + \frac{3\theta^2}{4|N|}\int_0^1 \frac{(1-s)}{(1+s\theta)^{5/2}}\, ds,$$

où $\theta = \dfrac{2\nabla\eta^S \cdot \nabla\xi + |\nabla\xi|^2}{|N|^2}$. Alors, on déduit

$$\frac{1}{|\widetilde{N}|} = \frac{1}{|N|} - \frac{\nabla\eta^S \cdot \nabla\xi}{|N|^3} + \epsilon^{(10)}(\partial_s\xi),$$

avec

$$\epsilon^{(10)}(\partial_s\xi) = -\frac{|\nabla\xi|^2}{2|N|^3} + \frac{3\theta^2}{4|N|}\int_0^1 \frac{(1-s)}{(1+s\theta)^{5/2}}\, ds.$$

Donc, on obtient en utilisant (3.2.26)

$$\begin{aligned}
&\nu \sum_{j,m,q} \left(n_j \delta_{km}\delta_{qj} - \widetilde{n}_j(X) a_{km}(X) \frac{\partial Y_q}{\partial x_j}(X) \right) \frac{\partial w_m^S}{\partial y_q} \\
&\qquad + \nu \sum_{j,m,q} \left(n_j \delta_{jm}\delta_{qk} - \widetilde{n}_j(X) a_{jm}(X) \frac{\partial Y_q}{\partial x_k}(X) \right) \frac{\partial w_m^S}{\partial y_q} \\
&\quad - \nu \sum_{j,m} \widetilde{n}_j(X) \left(\frac{\partial a_{km}}{\partial x_j}(X) w_m^S + \frac{\partial a_{jm}}{\partial x_k}(X) w_m^S \right) = [-\mathcal{L}^1(\xi)n + \ell^{(14)}(\partial_s\xi) - \mathcal{N}_E(\xi)n \\
&\qquad\qquad + \epsilon^{(14)}(\xi, \partial_s\xi, \partial_{ss}^2\xi)]_k, \quad (3.2.50)
\end{aligned}$$

où

$$\ell_k^{(14)}(\partial_s\xi) = \nu \frac{\nabla\eta^S \cdot \nabla\xi}{|N|^2} \sum_j \left(\frac{\partial w_k^S}{\partial y_j} + \frac{\partial w_j^S}{\partial y_k} \right),$$

et $\epsilon^{(14)}$ a pour termes (3.2.27). D'autre part, du lemme 3.4.2, on a

$$\beta \sum_j (\delta_{kj} - a_{kj}(X)) w_j^S = \ell_k^{(15)}(\xi, \partial_s\xi) + \epsilon_k^{(15)}(\xi, \partial_s\xi),$$

où $\epsilon_k^{(15)}$ a pour termes

$$c^9(\eta^S, w^S) \frac{\xi^{m_1}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}}, \quad c^{(10)}(\eta^S, w^S) \frac{\xi^{m_2}\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},$$
$$m_1 \geqslant 2,\ m_2 \geqslant 1,\ \alpha_i \geqslant 1,\ i = 1, 2,$$

où c^i, $i = 9, 10$ sont de régularité $W^{3/2,\infty}(\partial\Omega)$.

$$\mathcal{V}^i(w^S, \eta) = -[\mathcal{L}^1(\xi)n + \mathcal{L}^3(\xi)] \cdot \tau^i - [\mathcal{N}_E(\xi)n] \cdot \tau^i + \epsilon_i^{(11)}(\xi, \partial_s\xi, \partial_{ss}^2\xi), \quad (3.2.51)$$

où $\mathcal{L}^3$ est un opérateur défini par

$$\mathcal{L}^3(\xi)\cdot\tau^i = -\left(2\nu D(w^S)n + \beta w^S\right)\cdot(\tau^i - \widetilde{\tau}^i(X)) - \ell^{(14)}(\partial_s\xi)\cdot\tau^i, \quad \mathcal{L}^3(\xi)\cdot n = 0,$$

ou encore

$$\mathcal{L}^3(\xi) = Q^9\xi + Q^{10}\partial_s\xi, \tag{3.2.52}$$

tel que Q^9 et Q^{10} sont de régularité $W^{1/2,\infty}(\partial\Omega)$ et

$$\begin{aligned}\epsilon^{(11)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi) = -\ell^{(14)}(\partial_s\xi)\cdot(\widetilde{\tau}^i(X)-\tau^i) + \epsilon^{(14)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi)\cdot\widetilde{\tau}^i(X)\\ - [\mathcal{N}_E(\xi)n]\cdot(\widetilde{\tau}^i(X)-\tau^i).\end{aligned}$$

On note que $\epsilon^{(11)}$ contient des termes du type (3.2.27). Finalement, on définit le reste $\mathcal{N}_G$ tel que

$$\mathcal{N}_G(\xi)\cdot\tau^i = \epsilon_i^{(11)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi), \quad \mathcal{N}_G(\xi)\cdot n = 0.$$

Le système (3.2.14), (3.2.16) et (3.2.17) devient alors

$$\left\{\begin{aligned}&\partial_t u - \nabla\cdot\mathbb{T}(u,p) + (w^S\cdot\nabla)u + (u\cdot\nabla)w^S - \nabla\cdot\mathcal{L}^1(\xi) + \mathcal{L}^2(\xi,\partial_t\xi)\\ &\qquad = \nabla\cdot\mathcal{N}_E(\xi) + \mathcal{N}_F(\xi) + \mathcal{F}(u,p,\xi) && \text{dans } (0,\infty)\times\Omega,\\ &\nabla\cdot u = 0 && \text{dans } (0,\infty)\times\Omega,\\ &\partial_{tt}\xi + A_1\xi + A_2\partial_t\xi + \mathcal{T}^*(\mathcal{L}^1(\xi)n) = \mathbb{H}_{\eta^S}(u,p) + H(u,\xi+\eta^S)\\ &\qquad -\mathcal{T}^*(\mathcal{N}_E(\xi)n) && \text{dans } (0,\infty)\times\omega,\end{aligned}\right. \tag{3.2.53}$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{\begin{aligned}&[u - \mathcal{T}\partial_t\xi]_n = 1_{\Gamma_0}(\mathbb{M}v)_n && \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega,\\ &\left[2\nu D(u)n + \mathcal{L}^1(\xi)n + \mathcal{L}^3(\xi) + \beta(u-\mathcal{T}\partial_t\xi)\right]_\tau = 1_{\Gamma_0}\beta(\mathbb{M}v)_\tau\\ &\qquad -[\mathcal{N}_E(\xi)n]_\tau + [\mathcal{N}_G(\xi)]_\tau + G(u,\xi+\eta^S) && \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega,\end{aligned}\right. \tag{3.2.54}$$

et les conditions initiales

$$\left\{\begin{aligned}u(0,\cdot) &= \widetilde{u}^0 - w^S && \text{dans } \Omega,\\ \xi(0,\cdot) &= \eta^0 - \eta^S && \text{dans } \omega,\\ \partial_t\xi(0,\cdot) &= \eta^1 && \text{dans } \omega.\end{aligned}\right. \tag{3.2.55}$$

3.3 Système linéaire

On considère le système linéaire associé à (3.2.14) et (3.2.16)

$$\left\{\begin{aligned}&\partial_t\widetilde{w} + (w^S\cdot\nabla)\widetilde{w} + (\widetilde{w}\cdot\nabla)w^S - \nabla\cdot\mathbb{T}(\widetilde{w},\widetilde{q}) - \nabla\cdot\mathcal{L}^1(\xi) + \mathcal{L}^2(\xi,\partial_t\xi) = \widetilde{f} && \text{dans } (0,\infty)\times\Omega,\\ &\nabla\cdot\widetilde{w} = 0 && \text{dans } (0,\infty)\times\Omega,\\ &\partial_{tt}\xi + A_1\xi + A_2\partial_t\xi + \mathcal{T}^*(\mathcal{L}^1(\xi)n) = -\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(\widetilde{w},\widetilde{q})n) + \widetilde{h} && \text{dans } (0,\infty)\times\omega,\end{aligned}\right. \tag{3.3.1}$$

avec les conditions au bord

$$\left\{\begin{array}{rl} [\widetilde{w}-\mathcal{T}\partial_t\xi]_n = 1_{\Gamma_0}(\mathbb{M}v)_n & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ \left[2\nu D(\widetilde{w})n+\beta\left(\widetilde{w}-\mathcal{T}\partial_t\xi\right)+\mathcal{L}^1(\xi)n+\mathcal{L}^3(\xi)\right]_\tau = 1_{\Gamma_0}\beta(\mathbb{M}v)_\tau+\widetilde{g} & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.3.2}$$

avec les conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{rl} \widetilde{w}(0,\cdot)=w^0=\widetilde{u}^0-w^S & \text{dans } \Omega, \\ \xi(0,\cdot)=\xi^0=\eta^0-\eta^S & \text{dans } \omega, \\ \partial_t\xi(0,\cdot)=\xi^1=\eta^1 & \text{dans } \omega. \end{array}\right. \tag{3.3.3}$$

où d'après le lemme 3.4.4, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(\xi)=Q^1\xi+Q^2\partial_s\xi+Q^3\partial^2_{ss}\xi, \\ \mathcal{L}^2(\xi,\partial_t\xi)=Q^4\xi+Q^5\partial_s\xi+Q^6\partial^2_{ss}\xi+Q^7\partial_t\xi+Q^8\partial^2_{st}\xi, \\ \mathcal{L}^3(\xi)=Q^9\xi+Q^{10}\partial_s\xi, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

On note

$$\mathcal{L}^{2,1}(\xi)=Q^4\xi+Q^5\partial_s\xi+Q^6\partial^2_{ss}\xi, \quad \mathcal{L}^{2,2}(\partial_t\xi)=Q^7\partial_t\xi+Q^8\partial^2_{ts}\xi. \tag{3.3.5}$$

L'étape suivante consiste à réécrire le système (3.3.1), (3.3.2) sous la forme d'un système dynamique abstrait. La première étape consiste à relever les conditions au bord.

Lemme 3.3.1. *Soient $\beta \geqslant 0$ et $\gamma_0 > 0$. Soit $(\widetilde{v},\widetilde{\pi})$ vérifiant le système*

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t\widetilde{v}+\gamma_0\widetilde{v}-\nabla\cdot\mathbb{T}(\widetilde{v},\widetilde{\pi})=0 & \textit{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla\cdot\widetilde{v}=0 & \textit{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \widetilde{v}_n=0 & \textit{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(\widetilde{v})n+\beta\widetilde{v}]_\tau=\widetilde{g} & \textit{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ \widetilde{v}(0,\cdot)=0 & \textit{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.3.6}$$

Si

$$\widetilde{g}\in W^{1/4}_\gamma(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3), \quad \widetilde{g}_{n_0}=0, \tag{3.3.7}$$

pour $\gamma\in[0,\gamma_0]$, alors le problème (3.3.6) admet une solution unique qui satisfait l'estimation

$$\|\widetilde{v}\|^2_{W_\gamma(0,\infty,[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)}+\|\nabla\widetilde{\pi}\|^2_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C\,\|\widetilde{g}\|^2_{W^{1/4}_\gamma(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3)}, \tag{3.3.8}$$

où C est une constante positive.

Démonstration. Dans la preuve, il convient de remplacer la condition (3.3.7) par la condition équivalente

$$\widetilde{g}\in W^{1/2}_\gamma(0,\infty;[H^1(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3), \quad \widetilde{g}_{n_0}=0.$$

Une telle équivalence peut être obtenue en utilisant la surjectivité de l'opérateur de trace (voir [70, p.21, Théorème 2.3]). Ce type de démonstration a déjà été fait notamment dans [85], on rappelle dans ce qui suit les étapes importantes de la preuve.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \gamma_0 z - \nabla \cdot \mathbb{T}(z,\chi) = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ z_n = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(z)n + \beta z]_\tau = \widetilde{g} & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

On suppose par densité que $\widetilde{g} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, [H^1(\Omega)]^3)$ et $\widetilde{g}(t) = 0$ si $t < 0$. Alors, le système (3.3.9), admet une unique solution $(z,\chi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, [H^2(\Omega)]^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ (voir [13]). On pose alors, $\widetilde{z} = \widetilde{v} - z$, $\widetilde{\chi} = \widetilde{\pi} - \chi$. Donc, $(\widetilde{z},\widetilde{\chi})$ satisfait le système

$$\begin{cases} \widetilde{z}_t + \gamma_0 \widetilde{z} - \nabla \cdot \mathbb{T}(\widetilde{z},\widetilde{\chi}) = -\partial_t z & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \nabla \cdot \widetilde{z} = 0 & \text{dans } (0,\infty)\times\Omega, \\ \widetilde{z}_n = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(\widetilde{z})n + \beta \widetilde{z}]_\tau = 0 & \text{sur } (0,\infty)\times\partial\Omega, \\ \widetilde{z}(0,\cdot) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.3.10}$$

Le système ci-dessus peut être résolu en utilisant le fait que l'opérateur

$$\mathbb{A} = \mathcal{P}\Delta - \gamma_0 \,\mathrm{Id}, \quad \mathcal{D}(\mathbb{A}) = \{z \in [H^2(\Omega)]^3 \,|\, z \cdot n = 0, \quad [2\nu D(z)n + \beta z]_\tau = 0\},$$

est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique exponentiellement stable où $\mathcal{P}$ désigne la projection de Leray. Ce fait est une conséquence directe du [15, Théorème 2.12, p.115]. On déduit alors l'existence et l'unicité de $(\widetilde{v},\widetilde{\pi}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, [H^2(\Omega)]^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ solution du système (3.3.6).

On montre maintenant l'estimation (3.3.8). Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, [L^2(\Omega)]^3)$ telle que $\nabla \cdot \phi = 0$, $\phi \cdot n = 0$, et on supposera que $\phi = 0$ sur $(T,\infty)\times\Omega$ où $T > 0$. On considère le système

$$\begin{cases} \psi_t - (\gamma_0 - \gamma)\psi + \nabla \cdot \mathbb{T}(\psi,\theta) = \phi & \text{dans } \mathbb{R}\times\Omega, \\ \nabla \cdot \psi = 0 & \text{dans } \mathbb{R}\times\Omega, \\ \psi_n = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(\psi)n + \beta\psi]_\tau = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times\partial\Omega, \\ \psi(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.3.11}$$

On note que $\psi = 0$, $\theta = 0$ sur $(T,\infty)\times\Omega$. Le système (3.3.11) admet une unique solution $(\psi,\theta) \in W(\mathbb{R}; [H^2(\Omega)]^3, [L^2(\Omega)]^3) \times L^2(\mathbb{R}; H^1(\Omega)/\mathbb{R})$ exponentiellement stable satisfaisant l'estimation

$$\|\psi\|_{W(\mathbb{R};[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)} + \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R};H^1(\Omega)/\mathbb{R})} \leqslant C \,\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)}\,. \tag{3.3.12}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega e^{\gamma t}\widetilde{v}\cdot\phi \; dydt &= \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega e^{\gamma t}\widetilde{v}\cdot(\partial_t\psi - (\gamma_0-\gamma)\psi + \nabla\cdot\mathbb{T}(\psi,\theta)) \; dydt \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega e^{\gamma t}(\partial_t\widetilde{v} + \gamma_0\widetilde{v} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\widetilde{v},\widetilde{\pi}))\cdot\psi \; dydt - \int_{\mathbb{R}}\int_{\partial\Omega} e^{\gamma t} g_\tau\cdot\psi_\tau \; d\Gamma dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}}\int_{\partial\Omega} e^{\gamma t} g\cdot\psi_\tau \; d\Gamma dt. \end{aligned}$$

En utilisant (3.3.12), on obtient

$$\left\|e^{\gamma t}\widetilde{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C \left\|e^{\gamma t}\widetilde{g}\right\|_{L^2(\mathbb{R};[H^1(\Omega)]^3)}. \tag{3.3.13}$$

D'un autre côté, on étend n sur Ω et on a l'égalité

$$\int_{\partial\Omega} e^{\gamma t}\partial_t g \cdot \psi \; d\Gamma = \sum_i \int_\Omega e^{\gamma t}\partial_i((n)_i\partial_t g)\cdot\psi \; dy + \sum_i \int_\Omega e^{\gamma t}((n)_i\partial_t g)\cdot\partial_i\psi \; dy.$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega e^{\gamma t}\partial_t\widetilde{v}\cdot\phi \; dydt = -\sum_i \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \left(e^{\gamma t}\partial_i((n)_i\partial_t g)\cdot\psi + e^{\gamma t}((n)_i\partial_t g)\cdot\partial_i\psi\right) \; dydt \tag{3.3.14}$$

Pour estimer $e^{\gamma t}\partial_t\widetilde{v}$ dans $L^2(\mathbb{R},[L^2(\Omega)]^3)$, on remarque que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega e^{\gamma t}\partial_i((n)_i\partial_t g)\cdot\psi \; dydt = -\gamma\int_{\mathbb{R}}\int_\Omega e^{\gamma t}\partial_i((n)_i g)\cdot\psi \; dydt \\ - \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega e^{\gamma t}\partial_i((n)_i g)\cdot\partial_t\psi \; dydt.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\left\langle e^{\gamma t}\partial_i((n)_i\partial_t g),\psi\right\rangle_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)}\right| \leqslant C\left\|e^{\gamma t}g\right\|_{L^2(\mathbb{R};[H^1(\Omega)]^3)}\Big(\|\psi_t\|_{L^2(\mathbb{R},[L^2(\Omega)]^3)} \\ + \gamma\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R},[L^2(\Omega)]^3)}\Big)\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\left\langle e^{\gamma t}((n)_i\partial_t g),\partial_i\psi\right\rangle_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)} = \left\langle\partial_t(e^{\gamma t}g),(n)_i\partial_i\psi\right\rangle_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)} \\ - \gamma\left\langle e^{\gamma t}g,(n)_i\partial_i\psi\right\rangle_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)},\end{aligned}$$

Alors, en utilisant [84, Proposition 2.3, Proposition 2.8], on obtient

$$\begin{aligned}\left|\left\langle e^{\gamma t}((n)_i\partial_t g),\partial_i\psi\right\rangle_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)}\right| \leqslant C\|g\|_{W^{1/2}(\mathbb{R};[H^1(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)}\|\nabla\psi\|_{W^{1/2}(\mathbb{R};[H^1(\Omega)]^9,[L^2(\Omega)]^9)} \\ .\leqslant C\|g\|_{W^{1/2}(\mathbb{R};[H^1(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)}\|\psi\|_{W(\mathbb{R};[H^2(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)}.\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

En combinant (3.3.17), (3.3.16), (3.3.14) et (3.3.12) on obtient

$$\left\|e^{\gamma t}\partial_t\widetilde{v}\right\|_{L^2(\mathbb{R};[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant C\left\|e^{\gamma t}\widetilde{g}\right\|_{W^{1/2}(\mathbb{R};[H^1(\Omega)]^3,[L^2(\Omega)]^3)}. \tag{3.3.18}$$

Finalement, d'après les estimations elliptiques classiques du problème de Stokes, on a

$$\|\widetilde{v}(t)\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|\nabla\widetilde{\pi}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leqslant C\left(\|\partial_t\widetilde{v}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\widetilde{g}(t)\|_{[H^1(\Omega)]^3}\right) \tag{3.3.19}$$

En utilisant (3.3.19) et (3.3.18), on obtient (3.3.8). □

On pose

$$w = \widetilde{w} - \widetilde{v}, \quad q = \widetilde{q} - \widetilde{\pi}.$$

Donc, en vertu du lemme 3.3.1, il suffit de considérer le système linéaire

$$\begin{cases} \partial_t w + (w^S \cdot \nabla) w + (w \cdot \nabla) w^S - \nabla \cdot \mathbb{T}(w,q) - \nabla \cdot \mathcal{L}^1(\xi) + \mathcal{L}^2(\xi, \partial_t \xi) = f & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \nabla \cdot w = 0 & \text{dans } (0,\infty) \times \Omega, \\ \partial_{tt}\xi + A_1 \xi + A_2 \partial_t \xi + \mathcal{T}^*(\mathcal{L}^1(\xi) n) = -\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(w,q) n) + h & \text{dans } (0,\infty) \times \omega, \end{cases} \tag{3.3.20}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} [w - \mathcal{T}\partial_t \xi]_n = 1_{\Gamma_0} (\mathbb{M} v)_n & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \\ \left[2\nu D(w) n + \beta\,(w - \mathcal{T}\partial_t \xi) + \mathcal{L}^1(\xi) n + \mathcal{L}^3(\xi)\right]_\tau = 1_{\Gamma_0} \beta (\mathbb{M} v)_\tau & \text{sur } (0,\infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3.21}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} w(0,\cdot) = w^0 & \text{dans } \Omega, \\ \xi(0,\cdot) = \xi^0 & \text{dans } \omega, \\ \partial_t \xi(0,\cdot) = \xi^1 & \text{dans } \omega, \end{cases} \tag{3.3.22}$$

où

$$f = \widetilde{f} - (w^S \cdot \nabla)\widetilde{v} - (\widetilde{v} \cdot \nabla) w^S + \gamma_0 \widetilde{v}, \quad h = \widetilde{h} - \mathcal{T}^*(\mathbb{T}(\widetilde{v}, \widetilde{\pi}) n). \tag{3.3.23}$$

Dans cette section, on montre que le système (3.3.20), (3.3.21) et (3.3.22) est exponentiellement stabilisable.

On définit

$$\mathbb{H} = \{(w, \eta_1, \eta_2) \in [L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L^2_0(\omega) \mid \nabla \cdot w = 0 \text{ dans } \Omega, \\ [w - \mathcal{T}\eta_2]_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{H}} = \langle w, v \rangle_{[L^2(\Omega)]^3} + \left\langle A_1^{1/2} \eta_1, A_1^{1/2} \xi_1 \right\rangle_{L^2(\omega)} + \langle \eta_2, \xi_2 \rangle_{L^2(\omega)}.$$

et

$$\mathbb{V} = \left([H^1(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{3/4}) \times \mathcal{D}(A_1^{1/4}) \right) \cap \mathbb{H}. \tag{3.3.24}$$

On note aussi par $\mathbb{P}$ la projection orthogonale

$$\mathbb{P} : [L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L^2_0(\omega) \longrightarrow \mathbb{H}.$$

Enfin, on définit

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_S) = \{(w, \eta_1, \eta_2) \in \left([H^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1) \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \right) \cap \mathbb{V}, \\ \left[2\nu D(w) n + \beta(w - \mathcal{T}\eta_2) + \mathcal{L}^1(\eta_1) n + \mathcal{L}^3(\eta_1)\right]_\tau = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\}, \tag{3.3.25}$$

$$\mathcal{A}_S \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu\Delta w - (w^S \cdot \nabla)w - (w \cdot \nabla)w^S + \nabla \cdot \mathcal{L}^1(\eta_1) - \mathcal{L}^2(\eta_1, \eta_2) \\ \eta_2 \\ -A_1\eta_1 - A_2\eta_2 - \mathcal{T}^*(2\nu D(w)n + \mathcal{L}^1(\eta_1)n) \end{pmatrix}, \tag{3.3.26}$$

et

$$A_S = \mathbb{P}\mathcal{A}_S, \quad \mathcal{D}(A_S) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_S). \tag{3.3.27}$$

Proposition 3.3.2. *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que l'opérateur $\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe de contractions fortement continu sur $\mathbb{H}$.*

Démonstration. Soit $W = (w, \xi_1, \xi_2) \in \mathcal{D}(A_S)$. On montre que $\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S$ est dissipatif.

$$\begin{aligned} \langle(\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S)W, W\rangle = \lambda_0 \int_\Omega |w|^2 \ dy + \int_\Omega (\nabla w^S)^* w \cdot w \ dy + 2\nu \int_\Omega |Dw|^2 \ dy \\ + \int_\Omega \mathcal{L}^1(\xi_1) : \nabla w \ dy + \int_\Omega \mathcal{L}^2(\xi_1, \xi_2) \cdot w \ dy + \int_{\partial\Omega} \beta \, |(w - \mathcal{T}\xi_2)_\tau|^2 \ d\Gamma \\ + \int_{\partial\Omega} [\mathcal{L}^3(\xi_1)]_\tau \cdot (w - \mathcal{T}\xi_2)_\tau \ d\Gamma + \int_\omega \left|A_2^{1/2}\xi_2\right|^2 \ ds + \lambda_0 \int_\omega \left|A_1^{1/2}\xi_1\right|^2 \ ds \\ + \lambda_0 \int_\omega |\xi_2|^2 \ ds. \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

De (3.3.4) et le fait que Q^i, $i = 1, ..., 8$ sont de régularité $W^{1,\infty}(\Omega)$, on a

$$\left\|\mathcal{L}^1(\xi_1)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^9} \leqslant C \left\|A_1^{1/2}\xi_1\right\|^2_{L^2_0(\omega)}, \tag{3.3.29}$$

$$\left\|\mathcal{L}^2(\xi_1, \xi_2)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \leqslant C \left(\left\|A_1^{1/2}\xi_1\right\|^2_{L^2_0(\omega)} + \left\|A_2^{1/2}\xi_2\right\|^2_{L^2_0(\omega)}\right). \tag{3.3.30}$$

Puisque Q^9 et Q^{10} sont de régularité $W^{1/2,\infty}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^3(\partial\Omega)$ et

$$\|\xi_1\|_{L^6(\omega)} + \|\partial_s \xi_1\|_{L^6(\omega)} \leqslant C \left\|\partial^2_{ss}\xi_1\right\|_{L^2_0(\omega)},$$

alors, on obtient

$$\left\|\mathcal{L}^3(\xi_1)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} \leqslant C \left\|A_1^{1/2}\xi_1\right\|^2_{L^2_0(\omega)}. \tag{3.3.31}$$

En utilisant (3.3.29), (3.3.30) et (3.3.31), on trouve

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla w^S)^* w \cdot w \ dy + \int_\Omega \mathcal{L}^1(\xi_1) : \nabla w \ dy + \int_\Omega \mathcal{L}^2(\xi_1, \xi_2) \cdot w \ dy \\ + \int_{\partial\Omega} [\mathcal{L}^3(\xi_1)]_\tau \cdot (w - \mathcal{T}\xi_2)_\tau \ d\Gamma \geqslant -\varepsilon\left(\|w\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \left\|A_2^{1/2}\xi_2\right\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\ - C\left(\|w\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\xi_2\|^2_{L^2(\omega)} + \left\|A_1^{1/2}\xi_1\right\|^2_{L^2(\omega)} \right). \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Grâce à l'inégalité classique de Korn, on obtient pour λ_0 assez grand

$$\langle(\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S)W, W\rangle \geqslant 0.$$

Il reste à montrer que l'opérateur $\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S$ est m-dissipatif : on montre que l'opérateur $\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S$ est surjectif. Soit $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ et on considère l'équation

$$(\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S) \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = F, \tag{3.3.33}$$

qui peut s'écrire de manière équivalente

$$\lambda_0 w - \nabla \cdot \mathbb{T}(w,q) + (w^S \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)w^S - \nabla \cdot \mathcal{L}^1(\eta_1) + \mathcal{L}^2(\eta_1, \eta_2) = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.3.34a}$$

$$\nabla \cdot w = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.3.34b}$$

$$\lambda_0 \eta_1 - \eta_2 = g \quad \text{sur } \omega, \tag{3.3.34c}$$

$$\lambda_0 \eta_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 = -\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(w,q)n + \mathcal{L}^1(\eta_1)n) + h \quad \text{sur } \omega, \tag{3.3.34d}$$

$$[w - \mathcal{T}\eta_2]_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{3.3.34e}$$

$$\left[2\nu D(w)n + \beta(w - \mathcal{T}\eta_2) + \mathcal{L}^1(\eta_1)n + \mathcal{L}^3(\eta_1)\right]_\tau = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3.3.34f}$$

Pour résoudre le système ci-dessus, on introduit l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{(\phi, \xi) \in [H^1(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \mid \nabla \cdot \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad [\phi - \mathcal{T}\xi]_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\right\}.$$

On peut donc écrire l'équation (3.3.33) sous une forme variationnelle : trouver $(w, \eta_2) \in \mathcal{V}$ tel que

$$a\left(\begin{pmatrix} w \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathcal{V}\right), \tag{3.3.35}$$

avec $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\begin{aligned} a\left(\begin{pmatrix} w \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}\right) &= \lambda_0 \int_\Omega w \cdot \phi \, dy + \int_\Omega ((w^S \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)w^S) \cdot \phi \, dy + 2\nu \int_\Omega D(w) : D(\phi) \, dy \\ &+ \frac{1}{\lambda_0} \int_\Omega \mathcal{L}^1(\eta_2) : \nabla\phi \, dy + \frac{1}{\lambda_0} \int_\Omega \mathcal{L}^{2,1}(\eta_2) \cdot \phi \, dy + \int_\Omega \mathcal{L}^{2,2}(\eta_2) \cdot \phi \, dy + \lambda_0 \int_\omega \eta_2 \cdot \xi \, ds \\ &+ \int_\omega (A_2\eta_2) \cdot \xi \, ds + \frac{1}{\lambda_0} \int_\omega (A_1^{1/2}\eta_2) \cdot (A_1^{1/2}\xi) \, ds + \int_{\partial\Omega} \beta[w - \mathcal{T}(\eta_2)]_\tau \cdot [\phi - \mathcal{T}(\xi)]_\tau \, d\Gamma \\ &+ \frac{1}{\lambda_0} \int_{\partial\Omega} [\mathcal{L}^3(\eta_2)]_\tau \cdot [\phi - \mathcal{T}(\xi)]_\tau \, d\Gamma, \end{aligned}$$

et $L : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$L\begin{pmatrix}\phi\\ \xi\end{pmatrix} = \int_\Omega f\cdot\phi\ dy + \int_\omega h\cdot\xi\ ds - \frac{1}{\lambda_0}\int_\omega (A_1^{1/2}g)\cdot(A_1^{1/2}\xi)\ ds$$
$$- \frac{1}{\lambda_0}\int_\Omega \mathcal{L}^1(g) : \nabla\phi\ dy - \frac{1}{\lambda_0}\int_\Omega \mathcal{L}^{2,1}(g)\cdot\phi\ dy - \frac{1}{\lambda_0}\int_{\partial\Omega}[\mathcal{L}^3(g)]_\tau\cdot[\phi - \mathcal{T}(\xi)]_\tau\ d\Gamma$$

La forme bilinéaire a est continue et coercive sur $\mathcal{V}$ grâce à l'inégalité classique de Korn. On peut aussi vérifier que L est linéaire et continue sur $\mathcal{V}$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe $(w,\eta_2)\in\mathcal{V}$, l'unique solution de (3.3.35). Maintenant, en prenant $\xi = 0$ et $\phi\in\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$, l'équation (3.3.35) devient

$$\lambda_0\int_\Omega w\cdot\phi\ dy + \int_\Omega((w^S\cdot\nabla)w + (w\cdot\nabla)w^S)\cdot\phi\ dy + 2\nu\int_\Omega D(w) : D(\phi)\ dy$$
$$+\int_\Omega \mathcal{L}^1(\eta_1) : \nabla\phi\ dy + \int_\Omega \mathcal{L}^2(\eta_1,\eta_2)\cdot\phi\ dy = \int_\Omega f\cdot\phi\ dy,$$

ce qui est équivalent à

$$\big\langle \lambda_0 w + (w^S\cdot\nabla)w + (w\cdot\nabla)w^S - \nu\Delta w - \nabla\cdot\mathcal{L}^1(\eta_1) + \mathcal{L}^2(\eta_1,\eta_2) - f, \phi\big\rangle = 0, \quad \forall\phi\in\mathcal{D}_\sigma(\Omega).$$

En utilisant le théorème de De Rham [89, Proposition 1.2, p.14], on déduit l'existence d'un unique $q\in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que (3.3.34a) est satisfaite. En particulier, on a $\nabla\cdot\mathbb{T}(w,q)\in[L^2(\Omega)]^3$ et $\mathbb{T}(w,q)\in[L^2(\Omega)]^9$. Par conséquent, on en déduit que $\mathbb{T}(w,q)n\in[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3$ et

$$\int_\Omega \mathbb{T}(w,q) : D(\phi)\ dy - \langle\mathbb{T}(w,q)n,\phi\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}$$
$$= \int_\Omega (f - \lambda_0 w - (w^S\cdot\nabla)w - (w\cdot\nabla)w^S - \mathcal{L}^2(\eta_1,\eta_2))\cdot\phi\ dy - \int_\Omega \mathcal{L}^1(\eta_1) : \nabla\phi\ dy$$
$$+\int_{\partial\Omega}[\mathcal{L}^1(\eta_1)n]_\tau\cdot\phi_\tau\ d\Gamma, \quad (3.3.36)$$

pour tout $\phi\in[H^1(\Omega)]^3,\ \phi_n = 0$. D'autre part, en prenant $\xi = 0$ dans (3.3.35) on obtient

$$\lambda_0\int_\Omega w\cdot\phi\ dy + 2\nu\int_\Omega D(w) : D(\phi)\ dy + \int_\Omega \mathcal{L}^1(\eta_1) : \nabla\phi\ dy + \int_\Omega \mathcal{L}^2(\eta_1,\eta_2)\cdot\phi\ dy$$
$$+\int_\Omega((w^S\cdot\nabla)w + (w\cdot\nabla)w^S)\cdot\phi\ dy + \big\langle[\beta(w - \mathcal{T}(\eta_2)) + \mathcal{L}^3(\eta_1)]_\tau, \phi\ \big\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}$$
$$= \int_\Omega f\cdot\phi\ dy, \quad (3.3.37)$$

pour tout $\phi\in[H^1(\Omega)]^3,\ \nabla\cdot\phi = 0,\ \phi_n = 0$. En comparant (3.3.36) et (3.3.37) et en tenant compte du fait que

$$\int_\Omega \mathbb{T}(w,q) : D(\phi)\ dy = 2\nu\int_\Omega D(w) : D(\phi)\ dy, \quad \forall\phi\in[H^1(\Omega)]^3,\ \nabla\cdot\phi = 0,\ \phi_n = 0,$$

on obtient pour toute fonction $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$ vérifiant $\nabla \cdot \phi = 0$ et $\phi_n = 0$

$$- \langle \mathbb{T}(w,q)n, \phi \rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} = \left\langle [\beta(w - \mathcal{T}\eta_2) + \mathcal{L}^1(\eta_1)n + \mathcal{L}^3(\eta_1)]_\tau, \phi \right\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}}. \tag{3.3.38}$$

Cela implique que (3.3.38) est aussi satisfaite pour toute $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$, $\phi_n = 0$. En insérant (3.3.38) dans (3.3.36) on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega ((w^S \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)w^S) \cdot \phi \, dy + 2\nu \int_\Omega D(w) : D(\phi) \, dy - \int_\Omega q \nabla \cdot \phi \, dy \\ + \left\langle [\beta(w - \mathcal{T}\eta_2) + \mathcal{L}^3(\eta_1)]_\tau, \phi_\tau \right\rangle_{H^{-1/2},H^{1/2}} = \int_\Omega (f - \lambda_0 w - \mathcal{L}^2(\eta_1,\eta_2)) \cdot \phi \, dy \\ - \int_\Omega \mathcal{L}^1(\eta_1) : \nabla\phi \, dy,\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

pour tout $\phi \in [H^1(\Omega)]^3$, $\phi_n = 0$.

Ainsi, on déduit que (w,q) est une solution faible de (3.3.34a), (3.3.34b), (3.3.34e) et (3.3.34f) au sens de la [14, Définition, p.10]. Puisque $\eta_2 \in H^2(\omega)$ alors $\mathcal{T}\eta_2 \in [H^2(\partial\Omega)]^3$, on peut appliquer le [14, Théorème 1.2] et obtenir $(w,q) \in [H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

En revenant à la formulation variationnelle (3.3.35), on déduit

$$\begin{aligned}\int_\omega (A_1^{1/2}\eta_1) \cdot (A_1^{1/2}\xi) \, ds = -\lambda \int_\omega \eta_2 \cdot \xi \, ds - \int_\omega (A_2\eta_2) \cdot \xi \, ds \\ - \int_\omega \mathcal{T}^*(\mathbb{T}(u,q)n + \mathcal{L}^1(\eta_1)n) \cdot \xi \, ds + \int_\omega h \cdot \xi \, ds,\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}(A_1^{1/2})$ où $\eta_1 = \dfrac{1}{\lambda}(g + \eta_2)$. A priori $\eta_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, donc $\mathcal{T}^*(\mathcal{L}^1(\eta_1)n) \in L^2_0(\omega)$. D'autre part, on a $\mathbb{T}(w,q)n \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3$ et ainsi $\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(w,q)n) \in L^2_0(\omega)$. En outre, puisque $\eta_2 \in H^2(\omega)$, on déduit que $\eta_2 \in \mathcal{D}(A_2)$. Ainsi, en utilisant la densité de $\mathcal{D}(A_1^{1/2})$ dans $L^2_0(\omega)$, on obtient $A_1\eta_1 \in L^2_0(\omega)$.

En appliquant le théorème de Lumer-Phillips, on conclut que $\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S$ est le générateur d'un semigroupe de contractions fortement continu sur $\mathbb{H}$. □

Proposition 3.3.3. *L'adjoint de l'opérateur A_S est donné par*

$$A_S^* \begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \mathbb{P} \begin{pmatrix} \nu\Delta w + (w^S \cdot \nabla)w - (\nabla w^S)^* w \\ -\eta_2 - A_1^{-1}\left((\mathcal{L}^1)^*)(\nabla w) + (\mathcal{L}^{2,1})^* w + (\mathcal{L}^3)^* w - ((\mathcal{L}^3)^*(\mathcal{T}\eta_2)\right) \\ A_1\eta_1 - A_2\eta_2 - \mathcal{T}^*(2\nu D(w)n) - (\mathcal{L}^{2,2})^* w \end{pmatrix}, \tag{3.3.41}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A_S^*) = \{(w,\eta_1,\eta_2) \in \left([H^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1) \times \mathcal{D}(A_1^{1/2})\right) \cap \mathbb{V}, \\ [2\nu D(w)n + \beta(w - \mathcal{T}\eta_2)]_\tau = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega\}.\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Démonstration. Soient $(w, \eta_1, \eta_2) \in \mathcal{D}(A_S)$ et $(\varphi, \zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{D}(A_S^*)$. On a

$$\begin{aligned}\langle A_S(w, \eta_1, \eta_2), (\varphi, \zeta_1, \zeta_2)\rangle = -2\nu \int_\Omega D(w) : D(\varphi)\ dy + \int_\Omega (w^S \cdot \nabla)\varphi \cdot w \\ - \int_\Omega (\nabla w^S)^* \varphi \cdot w\ dy - \int_\Omega \mathcal{L}^1(\eta_1) : \nabla w\ dy - \int_\Omega \mathcal{L}^2(\eta_1, \eta_2) \cdot w\ dy \\ - \int_{\partial\Omega} \beta(w - \mathcal{T}\eta_2)_\tau \cdot (\varphi - \mathcal{T}\zeta_2)_\tau\ d\Gamma - \int_{\partial\Omega} [\mathcal{L}^3(\eta_1)]_\tau \cdot (\varphi - \mathcal{T}\zeta_2)_\tau\ d\Gamma \\ - \int_\omega (A_2\zeta_2) \cdot \eta_2\ ds. \quad (3.3.43)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle A_S(w, \eta_1, \eta_2), (\varphi, \zeta_1, \zeta_2)\rangle = \nu \int_\Omega \Delta\varphi \cdot w\ dy + \int_\Omega (w^S \cdot \nabla)\varphi \cdot w \\ - \int_\Omega (\nabla w^S)^* \varphi \cdot w\ dy - \int_\Omega \mathcal{L}^1(\eta_1) : \nabla\varphi\ dy - \int_\Omega \mathcal{L}^2(\eta_1, \eta_2) \cdot \varphi\ dy \\ - \int_{\partial\Omega} [\mathcal{L}^3(\eta_1)]_\tau \cdot (\varphi - \mathcal{T}\zeta_2)_\tau\ d\Gamma - \int_\omega (A_2\zeta_2) \cdot \eta_2\ ds - \int_\omega \mathcal{T}^*(2\nu D(\varphi)n)\eta_2\ ds. \quad (3.3.44)\end{aligned}$$

En utilisant (3.3.4) et (3.3.5), on obtient (3.3.41). □

Proposition 3.3.4. *Pour $\theta \in [0, 1]$, on a*

$$\mathcal{D}((\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S)^\theta) = [\mathcal{D}(A), \mathbb{H}]_{1-\theta}, \quad \mathcal{D}((\lambda_0 \operatorname{Id} - A_S^*)^\theta) = [\mathcal{D}(A^*), \mathbb{H}]_{1-\theta} \quad (3.3.45)$$

pour $\lambda_0 > 0$ assez grand.

Démonstration. La preuve est une conséquence directe de la Proposition 3.3.2 et de [15, Proposition 6.1, p.171]. □

Proposition 3.3.5. *L'opérateur A_S défini par* (3.3.26) *et* (3.3.27) *est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique sur $\mathbb{H}$.*

Démonstration. On remarque que $A_S^* = -A^* + O_S$ où A est l'opérateur défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(w, \eta_1, \eta_2) \in \Big([H^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1) \times \mathcal{D}(A_1^{1/2})\Big) \cap \mathbb{V}, \\ [2\nu D(w)n + \beta(w - \mathcal{T}\eta_2)]_\tau = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\}, \quad (3.3.46)\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} w \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu\Delta w \\ -\eta_2 \\ A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + \mathcal{T}^*(2\nu D(w)n) \end{pmatrix}, \quad (3.3.47)$$

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad A = \mathbb{P}\mathcal{A}. \quad (3.3.48)$$

et

$$O_S\begin{pmatrix} w \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathbb{P}\begin{pmatrix} (w^S\cdot\nabla)w - (\nabla w^S)^* w \\ -A_1^{-1}\left((\mathcal{L}^1)^*)(\nabla w) + (\mathcal{L}^{2,1})^* w + (\mathcal{L}^3)^* w - ((\mathcal{L}^3)^*(\mathcal{T}\xi_2))\right) \\ -(\mathcal{L}^{2,2})^* w \end{pmatrix}.$$

On précise ici que

$$\mathcal{D}((A^*)^{1/2}) = \mathbb{V}.$$

On note que $\mathbb{V}\subset\mathcal{D}(O_S)$. En effet, soient $(w,\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{V}$ et $(\phi,\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{H}$. Tout d'abord, on utilise (3.3.5) et on observe pour $\eta_2\in H^1(\omega)\cap L^2_0(\omega)$

$$\begin{aligned} -\int_\omega (\mathcal{L}^{2,2})^* w\cdot\eta_2\, ds = -\int_\Omega w\cdot\mathcal{L}^{2,2}(\eta_2)\, dy &= -\int_\Omega w\cdot(Q^7\eta_2 + Q^8\nabla\eta_2)\, dy \\ &= -\int_\Omega w\cdot Q^7\eta_2\, dy - \int_\Omega w\cdot Q^8\nabla\eta_2\, dy. \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

En utilisant une intégration par parties, on trouve

$$\left|\int_\Omega w\cdot Q^7\eta_2\, dy + \int_\Omega w\cdot Q^8\nabla\eta_2\, dy\right| \leqslant C\,\|w\|_{[H^1(\Omega)]^3}\,\|\eta_2\|_{L^2(\omega)}.$$

Donc, on obtient par densité

$$\begin{aligned} \left\langle O_S\begin{pmatrix} w \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right\rangle_{\mathbb{H}} &\leqslant C\Big(\|w\|_{[H^1(\Omega)]^3}\left(\|\varphi\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \left\|A^{1/2}\eta_1\right\|_{L^2(\omega)}\right) \\ &\quad + \left\|A^{1/2}\eta_1\right\|_{L^2(\omega)}\|\xi_2\|_{L^2(\omega)} + \|w\|_{[H^1(\Omega)]^3}\|\eta_2\|_{L^2(\omega)}\Big) \\ &\leqslant C\,\|(w,\xi_1,\xi_2)\|_{\mathbb{V}}\,\|(\varphi,\eta_1,\eta_2)\|_{\mathbb{H}}. \end{aligned} \tag{3.3.50}$$

Donc d'après [32] et [74, Corollaire 2.4, p.81], on déduit que A_S est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique sur $\mathbb{H}$ et de plus A_S admet une résolvante compacte. □

Soit

$$\mathcal{V}^s_n(\Gamma_0) = \{v\in H^s(\Gamma_0),\ \int_{\Gamma_0} v\cdot n\, d\Gamma = 0\},\quad s\geqslant 0.$$

De [80], le système (3.3.20), (3.3.21), (3.3.22) est équivalent à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}W' &= A_S\mathbb{P}W + \mathbb{P}F + Bv,\quad \mathbb{P}W(0) = \mathbb{P}W^0, \\ (\mathrm{Id}-\mathbb{P})W' &= (\mathrm{Id}-\mathbb{P})Dv, \end{aligned} \tag{3.3.51}$$

avec

$$\xi_1 = \xi,\quad \xi_2 = \partial_t\xi,\quad W = \begin{pmatrix} w \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ h \end{pmatrix},\quad W^0 = \begin{pmatrix} w^0 \\ \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix},$$

où $D \in \mathcal{L}(\mathcal{V}_n^0(\Gamma_0), [L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega))$ tel que $Dv = (\overline{w}, \eta_1, \eta_2)$ vérifie le système

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda_0 \overline{w} - \nabla \cdot (\mathbb{T}(\overline{w}, \pi)) + (w^S \cdot \nabla)\overline{w} + (\overline{w} \cdot \nabla) w^S - \nabla \cdot \mathcal{L}^1(\eta_1) + \mathcal{L}^2(\eta_1, \eta_2) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \overline{w} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_0 \eta_1 - \eta_2 = 0 & \text{dans } \omega, \\ \lambda_0 \eta_2 + A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + \mathcal{T}^*(\mathbb{T}(\overline{w}, \pi) n + \mathcal{L}^1(\eta_1) n) = 0 & \text{dans } \omega, \\ [\overline{w} - \mathcal{T}\eta_2]_n = 1_{\Gamma_0} v_n & \text{sur } \partial\Omega, \\ \left[2\nu D(\overline{w}) n + \beta(\overline{w} - \mathcal{T}\eta_2) + \mathcal{L}^1(\eta_1) n + \mathcal{L}^3(\eta_1)\right]_\tau = 1_{\Gamma_0}(\beta v_\tau) & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

avec $\lambda_0 \in \rho(A)$, et l'opérateur B est défini par

$$B : v \in \mathbb{U} = [H^{3/2}(\Gamma_0)]^3 \longrightarrow (\lambda_0 - A_S)\mathbb{P}D(\mathbb{M}v) \in (\mathcal{D}(A_S^*))'.$$

On note que

$$(\lambda_0 - A_S)^{-1+\varepsilon} B \in \mathcal{L}([H^{3/2}(\Gamma_0)]^3, \mathbb{H}), \quad \forall \varepsilon \in (0, 1/4).$$

L'adjoint $D^* \in \mathcal{L}([L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega), [L^2(\Gamma_0)]^3)$ est défini pour tout $(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}) \in [L^2(\Omega)]^3 \times \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \times L_0^2(\omega)$ par

$$\left\{\begin{array}{ll} D^*(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}) = ((\mathbb{T}(\phi, r)n)_n + (\mathbb{T}(\phi, r)n)_\tau)|_{\Gamma_0}, & \text{si } \beta_1 > 0, \\ D^*(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}) = (\mathbb{T}(\phi, r)n)_n|_{\Gamma_0}, & \text{si } \beta_1 = 0, \end{array}\right.$$

tels que $(\phi, r, \zeta_1, \zeta_2) \in [H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)/\mathbb{R} \times \mathcal{D}(A_1) \times \mathcal{D}(A_1^{1/2})$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda_0 \phi - \nabla \cdot (\mathbb{T}(\phi, r)) - (w^S \cdot \nabla)\phi + (\nabla w^S)^* \phi = \overline{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda_0 \zeta_1 + \zeta_2 + A_1^{-1}\left(((\mathcal{L}^1)^*)(\nabla\phi) + (\mathcal{L}^{2,1})^*\phi + (\mathcal{L}^3)^*\phi - (\mathcal{L}^3)^*(\mathcal{T}\zeta_2)\right) = \overline{g} & \text{dans } \omega, \\ \lambda_0 \zeta_2 - A_1 \zeta_1 + A_2 \zeta_2 + \mathcal{T}^*(\mathbb{T}(\phi, r)n) + (\mathcal{L}^{2,2})^*\phi = \overline{h} & \text{dans } \omega, \\ (\phi - \mathcal{T}\zeta_2)_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [2\nu D(\phi)n + \beta(\phi - \mathcal{T}\zeta_2)]_\tau = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

On précise que (ϕ, ζ_1, ζ_2) est solution du système

$$(\lambda_0 - A_S^*)(\phi, \zeta_1, \zeta_2) = \mathbb{P}(\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}). \tag{3.3.52}$$

Si $\beta_1 > 0$, l'opérateur B^* est donc donné par

$$B^*(\phi, \zeta_1, \zeta_2) = m\left((\mathbb{T}(\phi, r)n) \cdot n - \int_{\Gamma_0} m\mathbb{T}(\phi, r)n \cdot n \, d\Gamma\right) n + m(\mathbb{T}(\phi, r)n)_\tau\Big|_{\Gamma_0},$$

et si $\beta_1 = 0$, on a

$$B^*(\phi, \zeta_1, \zeta_2) = m\left((\mathbb{T}(\phi, r)n) \cdot n - \int_{\Gamma_0} m\mathbb{T}(\phi, r)n \cdot n \, d\Gamma\right) n\Big|_{\Gamma_0},$$

où $r \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, solution du problème

$$\begin{pmatrix} \nabla r \\ 0 \\ -\mathcal{T}^*(rn) \end{pmatrix} = (I - \mathbb{P})\mathcal{A}_S^* \begin{pmatrix} \phi \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.3.53}$$

Maintenant on est en mesure d'établir la stabilisation du système linéaire (3.3.20), (3.3.21) et (3.3.22). Pour cela, il suffit de vérifier que (A_S, B) satisfasse le critère de Fattorini-hautus (UC_σ) et on applique le [33, Théorème 1.1].

Soit $\lambda \in \Sigma$ et soit $(\phi, r, \zeta_1, \zeta_2)$ solution du système

$$\begin{cases} \lambda\phi - \nabla \cdot (\mathbb{T}(\phi, r)) - (w^S \cdot \nabla)\phi + (\nabla w^S)^*\phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \lambda\zeta_1 + \zeta_2 + A_1^{-1}\left(((\mathcal{L}^1)^*)(\nabla\phi) + (\mathcal{L}^{2,1})^*\phi - (\mathcal{L}^3)^*\phi + (\mathcal{L}^3)^*(\mathcal{T}\zeta_2)\right) = 0 & \text{dans } \omega, \\ \lambda\zeta_2 - A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + \mathcal{T}^*(\mathbb{T}(\phi, r)n) + (\mathcal{L}^{2,2})^*\phi = 0 & \text{dans } \omega, \\ (\phi - \mathcal{T}\zeta_2)_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ [2\nu D(\phi)n + \beta(\phi - \mathcal{T}\zeta_2)]_\tau = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et on suppose que $B^*(\phi, \zeta_1, \zeta_2) = 0$, ce qui implique que pour tout $\beta_1 \geqslant 0$, on a

$$m\left((\mathbb{T}(\phi, r)n) \cdot n - \int_{\Gamma_0} m\mathbb{T}(\phi, r)n \cdot n \, d\Gamma\right) n + m(\mathbb{T}(\phi, r)n)_\tau = 0. \tag{3.3.54}$$

On note

$$c(\phi, r) = \int_{\Gamma_0} m\mathbb{T}(\phi, r)n \cdot n \, d\Gamma.$$

L'équation (3.3.54) devient

$$m(\mathbb{T}(\phi, r - c(\phi, r))n)_n + m(\mathbb{T}(\phi, r - c(\phi, r))n)_\tau = 0. \tag{3.3.55}$$

On déduit que

$$\mathbb{T}(\phi, r - c(\phi, r))n = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

Alors, d'après [35], on obtient

$$\phi = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad r = c(\phi, r), \quad \text{sur } \Omega.$$

En particulier

$$\mathbb{T}(\phi, r - c(\phi, r))n = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.3.56}$$

On obtient alors,

$$\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(\phi, r)n) = -c(\phi, r)\mathcal{T}^*(n), \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.3.57}$$

En revenant à la définition de $\mathcal{T}^*$ donnée par (3.2.47), on a $\mathcal{T}^*(n) = 0$. Donc, de (3.3.57), on obtient

$$\mathcal{T}^*(\mathbb{T}(\phi, r)n) = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.3.58}$$

De plus, on a $\mathcal{T}\zeta_2 = 0$ sur $\partial\Omega$, donc $\zeta_2 = 0$. L'équation (3.3.58) implique que $A_1\zeta_1 = 0$ et tenant compte de la périodicité de ζ_1, on trouve $\zeta_1 = 0$. Donc, la condition (UC_σ) est vérifiée. On déduit alors le théorème suivant.

Théorème 3.3.6. *Soient $t_0 > 0$, $\sigma > 0$ et $W^0 \in \mathbb{V}$. Alors, il existe $N_+ \in \mathbb{N}^*$, $K \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2; \mathcal{L}(\mathbb{H}))$, $(\phi_k, \zeta_1^k, \zeta_2^k) \in \mathcal{D}(A_S^*)$ et $v_k \in B^*(\mathcal{D}(A_S^*))$, $k = 1, \dots, N_+$, tels que*

$$v(t) = 1_{[t_0,+\infty)}(t) \sum_{k=1}^{N_+} \left(W(t-t_0) + \int_0^{t-t_0} K(t-t_0, s) W(s)\, ds, \begin{pmatrix} \phi_k \\ \zeta_1^k \\ \zeta_2^k \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{H}} v_k, \tag{3.3.59}$$

stabilise exponentiellement le système (3.3.51) *et on a*

$$\|W\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathcal{D}(A_S)) \cap C^0_\sigma([0,\infty);\mathbb{V}) \cap H^1_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} \leqslant C \left(\|W^0\|_{\mathbb{V}} + \|F\|_{L^2_\sigma(0,\infty;\mathbb{H})} \right). \tag{3.3.60}$$

Finalement, en utilisant (3.3.60), (3.3.8) et (3.3.23), on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.7. *Soit $\gamma_0 > 0$. Pour tout $\gamma \in [0, \gamma_0]$, la solution $(\widetilde{w}, \widetilde{q}, \xi)$ du système* (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) *vérifie l'estimation*

$$\|(\widetilde{w}, \widetilde{q}, \xi)\|_{\mathcal{X}_{\infty,\gamma}} \leqslant C \Bigg(\|(w^0, \xi^0, \xi^1)\|_{\mathbb{V}} + \left\|\widetilde{f}\right\|_{L^2_\gamma(0,+\infty;[L^2(\Omega)]^3)} + \left\|\widetilde{h}\right\|_{L^2_\gamma(0,+\infty;L^2(\omega))} + \|\widetilde{g}\|_{W^{1/4}_\gamma(0,+\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,[L^2(\partial\Omega)]^3)} \Bigg). \tag{3.3.61}$$

3.4 Point fixe

Soient $\mathcal{Y}_\infty$ et $\mathcal{B}_{\infty,R}$ définis respectivement par

$$\mathcal{Y}_\infty = L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3) \times W^{1/4}_\gamma(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3, [L^2(\partial\Omega)]^3) \times L^2_\gamma(0,\infty;L^2(\omega)). \tag{3.4.1}$$

$$\mathcal{B}_{\infty,R} = \{(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \mathcal{Y}_\infty \mid \left\|(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h})\right\|_{\mathcal{Y}_\infty} \leqslant R\}. \tag{3.4.2}$$

Soit $(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \mathcal{B}_{\infty,R}$ et soit (u, p, ξ) la solution du système (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3) associée à $(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h})$. D'après (3.3.61), on obtient l'estimation

$$\|(u, p, \xi)\|_{\mathcal{X}_{\infty,\gamma}} \leqslant CR, \tag{3.4.3}$$

où on a supposé que

$$\left\|(w^0, \xi^0, \xi^1)\right\|_{\mathbb{V}} \leqslant R.$$

De (3.4.3), on a les estimations suivantes

$$\|\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^\infty(\omega))} + \left\|\partial_{s_j}\xi\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^\infty(\omega))} + \left\|\partial^2_{s_j s_k}\xi\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^2(\omega))} + \left\|\partial^3_{s_j s_k s_i}\xi\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^2(\omega))} \leqslant C \|\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^3(\omega))} \leqslant CR, \tag{3.4.4}$$

$$\|\partial_t \xi\|_{L^4_\gamma(0,\infty;L^\infty(\omega))} + \left\|\partial^2_{t s_j}\xi\right\|_{L^6_\gamma(0,\infty;L^2(\omega))} \leqslant CR, \tag{3.4.5}$$

$$\|\xi\|_{H^{7/8}_\gamma(0,\infty;L^\infty(\omega))} + \left\|\partial_{s_j}\xi\right\|_{H^{7/8}_\gamma(0,\infty;L^\infty(\omega))} + \left\|\partial^2_{s_js_k}\xi\right\|_{H^{7/8}_\gamma(0,\infty;L^{8/3}(\omega))} \leqslant CR, \tag{3.4.6}$$

$$\|\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^2(\omega))} + \left\|\partial_{s_j}\xi\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{3/2}(\omega))} + \left\|\partial^2_{s_js_k}\xi\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{1/2}(\omega))} \leqslant CR. \tag{3.4.7}$$

En particulier, en tenant compte de la condition (3.1.30), il existe $R_0 > 0$ de sorte que, si $R \leqslant R_0$, alors

$$\left\|\frac{1}{1+\eta}\right\|_{L^\infty(0,\infty;L^\infty(\omega))} \leqslant C(R_0). \tag{3.4.8}$$

En fait, si $1+\eta^S > \overline{\delta}$, alors R_0 est choisi tel que $0 < R_0 < \overline{\delta}$.

On rappelle ici un résultat connu sur le produit dans les espaces de Sobolev.

Proposition 3.4.1. *Soient $s \geqslant 0$, $s_1 \geqslant s$ et $s_2 \geqslant s$ tels que $s_1 + s_2 > s + 1/2$. Soient $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ et $\mathfrak{X}_3$ des espaces de Banach tels que pour tous $f \in \mathfrak{X}_2$ et $g \in \mathfrak{X}_3$, on a*

$$\|fg\|_{\mathfrak{X}_1} \leqslant C\,\|f\|_{\mathfrak{X}_2}\,\|g\|_{\mathfrak{X}_3}\,.$$

Alors

$$\forall u \in H^{s_1}(0,\infty;\mathfrak{X}_2),\ \forall v \in H^{s_2}(0,\infty;\mathfrak{X}_3), \quad \|uv\|_{H^s(0,\infty;\mathfrak{X}_1)} \leqslant C\,\|u\|_{H^{s_1}(0,\infty;\mathfrak{X}_2)}\,\|v\|_{H^{s_2}(0,\infty;\mathfrak{X}_3)}\,.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle donnée dans [62] en prolongeant les données par réflexion sur $\mathbb{R}$. □

Dans le lemme suivant, $\ell^{(i)}$ désigne un opérateur linéaire qui s'écrit formellement

$$\ell^{(i)}(Z_1, ..., Z_m) = P^{(i)}_1 Z_1 + ... + P^{(i)}_m Z_m, \tag{3.4.9}$$

où $P^{(i)}_j$ sont des coefficients qui ne dépendent que de l'état stationnaire (w^S, η^S, p^S) et qui sont assez régulières.

Lemme 3.4.2. *Soient X et Y définis dans* (3.1.15). *Alors, on a*

$$\nabla Y(X) - I_3 = \ell^{(1)}(\xi, \partial_s\xi) + \epsilon^{(1)}(\xi, \partial_s\xi), \tag{3.4.10}$$

$$\frac{\partial^2 Y_3}{\partial x_k \partial x_j}(X) = \ell^{(2)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi) + \epsilon^{(2)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi), \tag{3.4.11}$$

$$\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_m \partial x_l}(X) = \ell^{(3)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi, \partial^3_{sss}\xi) + \epsilon^{(3)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi, \partial^3_{sss}\xi), \tag{3.4.12}$$

$$\partial_t Y = \ell^{(13)}(\partial_t\xi) + \epsilon^{(13)}(\xi, \partial_t\xi), \tag{3.4.13}$$

$$\partial_t a_{ik}(X) = \ell^{(14)}(\partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi) + \epsilon^{(14)}(\xi, \partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi), \tag{3.4.14}$$

où les $\epsilon^{(i)}$ sont donnés d'une manière formelle par

$$\epsilon^{(1)}(\xi, \partial_s\xi) = O(\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}), \quad m_1 + m_2 \geqslant 2,$$

$$\epsilon^{(2)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi)=O(\xi_1^m(\partial_s\xi)^{m_2}(\partial^2_{ss}\xi)^{m_3}),\quad m_1+m_2+m_3\geqslant 2,$$
$$\epsilon^{(3)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi,\partial^3_{sss}\xi)=O(\xi_1^m(\partial_s\xi)^{m_2}(\partial^2_{ss}\xi)^{m_3}(\partial^3_{sss}\xi)^{m_4}),\quad m_1+m_2+m_3+m_4\geqslant 2,$$
$$\epsilon^{(13)}(\xi,\partial_t\xi)=O(\xi^{m_1}(\partial_t\xi)^{m_2}),\quad m_1+m_2\geqslant 2,$$
$$\epsilon^{(14)}(\xi,\partial_t\xi,\partial^2_{ts}\xi)=O(\xi^{m_1}(\partial_t\xi)^{m_2}(\partial^2_{ts}\xi)^{m_3}),\quad m_1+m_2+m_3\geqslant 2.$$

Démonstration. On rappelle que $\xi=\eta-\eta^S$, alors on note

$$\frac{1}{1+\eta}=\left(\frac{1}{1+\eta^S}-\frac{\xi}{(1+\eta^S)^2}\right)+\frac{\xi^2}{(1+\eta^S)^2(1+\eta)}. \tag{3.4.15}$$

On rappelle que $\nabla Y(X)-I_3$ admet pour termes

$$\frac{\partial Y_3}{\partial x_3}(X)-1=\frac{\eta^S-\eta}{1+\eta}=-\frac{\xi}{1+\eta^S}+\frac{\xi^2}{(1+\eta^S)^2}-\frac{\xi^3}{(1+\eta^S)^2(1+\eta)}, \tag{3.4.16}$$

$$\frac{\partial Y_3}{\partial x_j}(X)=-y_3\frac{\partial_{s_j}\xi}{1+\eta^S}+y_3\partial_{s_j}\eta^S\frac{\xi}{(1+\eta)(1+\eta^S)}+y_3\partial_{s_j}\xi\frac{\xi}{(1+\eta)(1+\eta^S)},\quad \text{pour } j=1,2. \tag{3.4.17}$$

En utilisant (3.4.15), on obtient (3.4.10) où $\epsilon^{(1)}(\xi,\partial_s\xi)$ fait intervenir les termes de la forme

$$\gamma^1(\eta^S)\frac{\xi^{m_1}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\quad \gamma^2(\eta^S)\frac{\xi^{m_2}\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},\quad m_1\geqslant 2,\ m_2\geqslant 1,\ \alpha_i\geqslant 1,\ i=1,2, \tag{3.4.18}$$

où γ^i, $i=1,2$ sont des fonctions de classe $C^2(\omega)$. On a pour $k,j\in\{1,2\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Y_3}{\partial x_k\partial x_j}(X)=&-y_3\frac{\partial^2_{s_js_k}\xi}{(1+\eta^S)}+y_3\partial_{s_k}\eta\frac{\partial_{s_j}\xi}{(1+\eta)(1+\eta^S)}+y_3\partial_{s_j}\eta\frac{\partial_{s_k}\xi}{(1+\eta)(1+\eta^S)}\\&+y_3\xi\left(\frac{\partial^2_{s_ks_j}\eta}{(1+\eta^S)(1+\eta)}-2\frac{\partial_{s_k}\eta\partial_{s_j}\eta}{(1+\eta^S)(1+\eta)^2}\right).\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Donc, on déduit (3.4.11) où $\epsilon^{(2)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi)$ fait intervenir les termes de la forme

$$\gamma^3(\eta^S)\frac{\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ m_1+m_2\geqslant 2,\quad \gamma^4(\eta^S)\frac{\xi^{m_3}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},\ m_3\geqslant 1,\ \alpha_i\geqslant 1,\ i=1,2, \tag{3.4.20}$$

où γ^i, $i=3,4$ sont des fonctions de classe $C^1(\omega)$. On constate que la dérivée troisième $\dfrac{\partial^3 Y_3}{\partial x_i\partial x_k\partial x_j}(X)$ fait intervenir les termes suivants :

$$\begin{aligned}&y_3\frac{\partial^3_{s_js_ks_i}\xi}{(1+\eta^S)},\ y_3\frac{\partial_{s_i}\eta\partial^2_{s_js_k}\xi}{(1+\eta)(1+\eta^S)},\ y_3\frac{\partial^2_{s_is_k}\eta\partial_{s_j}\xi}{(1+\eta)(1+\eta^S)},\ y_3\frac{\partial_{s_k}\eta\partial_{s_i}\eta\partial_{s_j}\xi}{(1+\eta)^2(1+\eta^S)},\\&y_3\frac{\partial^2_{s_js_k}\eta\partial_{s_i}\xi}{(1+\eta)^2(1+\eta^S)},\ y_3\frac{\xi\partial^3_{s_js_ks_i}\eta}{(1+\eta^S)(1+\eta)},\ y_3\frac{\xi\partial^2_{s_ks_j}\eta\partial_{s_i}\eta}{(1+\eta)^2(1+\eta^S)},\ y_3\frac{\xi\partial_{s_k}\eta\partial_{s_j}\eta\partial_{s_i}\eta}{(1+\eta)^4(1+\eta^S)}.\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

On obtient alors (3.4.12) où $\epsilon^{(3)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi, \partial^3_{sss}\xi)$ fait intervenir les termes de la forme

$$\gamma^5(\eta^S)\frac{\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ \gamma^6(\eta^S)\frac{\xi^{n_1}(\partial_s\xi)^{n_2}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},\ \gamma^7(\eta^S)\frac{\xi^{m_3}\partial^3_{sss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_3}},$$
$$m_1+m_2 \geqslant 2,\ n_1+n_2 \geqslant 2,\ m_3 \geqslant 1,\ \alpha_i \geqslant 1,\ i=1...3, \quad (3.4.22)$$

avec γ^i, $i = 5, ..., 7$ sont des fonctions bornées dans ω.

Par ailleurs, on a

$$\partial_t Y_3 = -y_3\frac{\partial_t\xi}{1+\eta}.$$

On déduit (3.4.13) où $\epsilon^{(13)}(\xi, \partial_t\xi)$ fait intervenir le terme de la forme

$$\frac{\xi^{m_1}\partial_t\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}}, \quad m_1 \geqslant 1,\ \alpha_1 \geqslant 1. \quad (3.4.23)$$

Les termes figurant dans $\partial_t a_{ik}(X)$ sont de la forme

$$y_3\frac{\partial_t\xi\partial_{s_j}\eta}{(1+\eta)^2}, \quad y_3\frac{\partial_t\xi\partial_{s_j}\eta^S}{(1+\eta)(1+\eta^S)}, \quad y_3\frac{\partial^2_{ts_j}\xi}{(1+\eta)}, \quad -\frac{(1+\eta^S)\partial_t\xi}{(1+\eta)^2}.$$

D'où (3.4.14) avec $\epsilon^{(14)}(\xi, \partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi)$ fait intervenir les termes de la forme

$$\gamma^8(\eta^S)\frac{\xi^{m_1}\partial^2_{ts}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ \gamma^9(\eta^S)\frac{\xi^{m_2}\partial_t\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},\ \gamma^{10}(\eta^S)\frac{\xi^{m_3}\partial_t\xi\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_3}},$$
$$m_1 \geqslant 1,\ m_2 \geqslant 1,\ m_3 \geqslant 0,\ \alpha_i \geqslant 1,\ i=1,...,3, \quad (3.4.24)$$

où γ^i, $i = 8, ..., 10$ sont des fonctions de classe $C^2(\omega)$. □

On suppose que $R < 1$. On a le lemme suivant.

Lemme 3.4.3. *Soient les $\epsilon^{(i)}$ définis dans le Lemme 3.4.2 et soit*

$$(w^S, \eta^S, p^S) \in [W^{2,\infty}(\Omega)]^3 \times C^3(\omega) \times W^{1,\infty}(\Omega). \quad (3.4.25)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}&\left\|\epsilon^{(1)}(\xi, \partial_s\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;[L^\infty(\Omega)]^9)} + \left\|\epsilon^{(2)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^2(\Omega))}\\ &\quad + \left\|\epsilon^{(3)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi, \partial^3_{sss}\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^2(\Omega))} + \left\|\epsilon^{(13)}(\xi, \partial_t\xi)\right\|_{L^4_\gamma(0,\infty;[L^\infty(\Omega)]^3)}\\ &\quad + \left\|\epsilon^{(14)}(\xi, \partial_t\xi, \partial^2_{ts}\xi)\right\|_{L^6_\gamma(0,\infty;L^2(\Omega))} \leqslant CR^2, \quad (3.4.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\epsilon^{(1)}(\xi, \partial_s\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;[H^{3/2}(\partial\Omega)]^9)} + \left\|\epsilon^{(2)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{1/2}(\partial\Omega))}\\ &\quad + \left\|\epsilon^{(1)}(\xi, \partial_s\xi)\right\|_{H^{7/8}_\gamma(0,\infty;[L^\infty(\partial\Omega)]^9)} + \left\|\epsilon^{(2)}(\xi, \partial_s\xi, \partial^2_{ss}\xi)\right\|_{H^{7/8}_\gamma(0,\infty;L^{8/3}(\partial\Omega))} \leqslant CR^2. \quad (3.4.27)\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant (3.4.25), (3.4.4),(3.4.8) et (3.4.18), on obtient

$$\left\|\epsilon^{(1)}(\xi,\partial_s\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;[L^\infty(\Omega)]^9)} \leqslant CR^2. \tag{3.4.28}$$

D'autre part de (3.4.8), (3.4.25), (3.4.4) et de (3.4.20), on trouve

$$\left\|\epsilon^{(2)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^2(\Omega))} \leqslant CR^2. \tag{3.4.29}$$

De (3.4.8), (3.4.25), (3.4.4) et de (3.4.22), on a

$$\left\|\epsilon^{(3)}(\xi,\partial_s\xi,\partial^2_{ss}\xi,\partial^3_{sss}\xi)\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;L^2(\Omega))} \leqslant CR^2. \tag{3.4.30}$$

De (3.4.8), (3.4.25), (3.4.5), (3.4.4) et (3.4.23), on obtient

$$\left\|\epsilon^{(13)}(\xi,\partial_t\xi)\right\|_{L^4_\gamma(0,\infty;[L^\infty(\Omega)]^3)} \leqslant CR^2. \tag{3.4.31}$$

En utilisant (3.4.8), (3.4.25), (3.4.4), (3.4.5) et (3.4.24), on obtient

$$\left\|\epsilon^{(14)}(\xi,\partial_t\xi,\partial^2_{ts}\xi)\right\|_{L^6_\gamma(0,\infty;L^2(\Omega))} \leqslant CR^2. \tag{3.4.32}$$

En utilisant (3.4.28), (3.4.29), (3.4.30), (3.4.31) et (3.4.32), on déduit (3.4.26).

D'un autre côté, on a

$$\|\xi\partial_s\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{3/2}(\omega))} \leqslant C\,\|\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^2(\omega))}\,\|\partial_s\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{3/2}(\omega))} \leqslant CR^2. \tag{3.4.33}$$

Donc, en utilisant (3.4.8) et (3.4.4), on a

$$\left\|\frac{1}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^2(\omega))} \leqslant C, \quad \alpha_i \geqslant 1. \tag{3.4.34}$$

Alors,

$$\left\|\frac{\xi^{m_1}\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{3/2}(\omega))} \leqslant CR^2. \tag{3.4.35}$$

Donc, en utilisant le fait que $\partial_s\xi \in L^\infty_\gamma(0,\infty;H^2(\omega))$ et $\|\partial_s\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^2(\omega))} \leqslant CR$, on obtient

$$\|\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{3/2}(\omega))} \leqslant CR^2. \tag{3.4.36}$$

On a aussi

$$\left\|\xi\partial^2_{ss}\xi\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{1/2}(\omega))} \leqslant C\,\|\xi\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{3/2}(\omega))}\left\|\partial^2_{ss}\xi\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{1/2}(\omega))} \leqslant CR^2, \tag{3.4.37}$$

Donc, en utilisant (3.4.34), on obtient

$$\left\|\frac{\xi^{m_1}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{L^\infty_\gamma(0,\infty;H^{1/2}(\omega))} \leqslant CR^2, \tag{3.4.38}$$

D'un autre côté, en utilisant (3.4.8), on a

$$\left\|\frac{\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{H_\gamma^{5/4}(0,\infty;L^\infty(\omega))} \leqslant C\left\|\frac{\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|^{5/8}_{H_\gamma^{2}(0,\infty;L^2(\omega))}\left\|\frac{\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|^{3/8}_{L_\gamma^{2}(0,\infty;H^4(\omega))}$$
$$\leqslant CR, \quad \alpha_i \geqslant 1. \quad (3.4.39)$$

Donc, on obtient

$$\left\|\frac{\xi\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{H_\gamma^{7/8}(0,\infty;L^\infty(\omega))} \leqslant C\left\|\frac{\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{H_\gamma^{5/4}(0,\infty;L^\infty(\omega))}\|\partial_s\xi\|_{H_\gamma^{7/8}(0,\infty;L^\infty(\omega))}$$
$$\leqslant CR^2. \quad (3.4.40)$$

Puisque $7/8 > 1/2$, on utilise la Proposition 3.4.1, on obtient

$$\|(\partial_s\xi)^{m_2}\|_{H^{7/8}(0,\infty;L^\infty(\omega))} \leqslant C\,\|(\partial_s\xi)\|^{m_2}_{H^{7/8}(0,\infty;L^\infty(\omega))}\,.$$

Par suite, on déduit

$$\left\|\frac{\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{H_\gamma^{7/8}(0,\infty;L^\infty(\omega))} \leqslant CR^2. \quad (3.4.41)$$

D'autre part,

$$\left\|\frac{\xi\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{H_\gamma^{7/8}(0,\infty;L^{8/3}(\omega))} \leqslant C\left\|\partial^2_{ss}\xi\right\|_{H_\gamma^{7/8}(0,\infty;L^{8/3}(\omega))}\|\xi\|_{H_\gamma^{5/4}(0,\infty;L^\infty(\omega))} \leqslant CR^2. \quad (3.4.42)$$

De (3.4.39), on a

$$\left\|\frac{\xi^{m_1}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_i}}\right\|_{H_\gamma^{7/8}(0,\infty;L^{8/3}(\omega))} \leqslant CR^2, \quad (3.4.43)$$

En utilisant (3.4.36), (3.4.38), (3.4.41) et (3.4.43), on obtient (3.4.27). □

Lemme 3.4.4. *On a*

$$\|\nabla\cdot\mathcal{N}_E(\xi)\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} + \|\mathcal{N}_F(\xi)\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant CR^2, \quad (3.4.44)$$

$$\|\mathcal{N}_E(\xi)\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^9)} \leqslant CR^2, \quad (3.4.45)$$

$$\|\mathcal{N}_E(\xi)n\|_{W_\gamma^{1/4}(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3;[L^2(\partial\Omega)]^3)} + \|\mathcal{N}_G(\xi)\|_{W_\gamma^{1/4}(0,\infty;[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3;[L^2(\partial\Omega)]^3)} \leqslant CR^2, \quad (3.4.46)$$

$$\left\|(\mathcal{F}(u,p,\xi), G(u,\xi+\eta^S), H(u,\xi+\eta^S))\right\|_{\mathcal{Y}_\infty} \leqslant CR^2. \quad (3.4.47)$$

Démonstration. De (3.2.26) et du Lemme 3.4.2, $\mathcal{N}_E(\xi)$ a pour termes

$$c^1(\eta^S,w^S)\frac{\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ c^2(\eta^S,w^S)\frac{\xi^{n_1}(\partial_s\xi)^{n_2}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},$$
$$m_1+m_2 \geqslant 2,\ n_1+n_2 \geqslant 2, \alpha_i \geqslant 1,\ i=1...2, \quad (3.4.48)$$

où c^i, $i = 1, 2$ sont des fonctions de régularité $W^{1,\infty}(\Omega)$.

De (3.4.8), (3.4.25) et (3.4.4), on obtient

$$\|\mathcal{N}_E(\xi)\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant CR^2. \tag{3.4.49}$$

De (3.2.24), (3.2.26), (3.2.28), (3.4.25) et le Lemme 3.4.2, les termes qui apparaitront dans $\nabla \cdot \mathcal{N}_E(\xi)$ sont les suivants

$$d^1(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ d^2(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{n_1}(\partial_s\xi)^{n_2}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},\ d^3(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_3}\partial^3_{sss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_3}},$$
$$m_1 + m_2 \geqslant 2,\ n_1 + n_2 \geqslant 2,\ m_3 \geqslant 1,\ \alpha_i \geqslant 1,\ i = 1...3,$$

où d^i, $i = 1, ..., 3$ sont des fonctions bornées sur Ω.

De (3.4.8), (3.4.25) et (3.4.4), on obtient

$$\|\nabla \cdot \mathcal{N}_E(\xi)\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^3)} \leqslant CR^2. \tag{3.4.50}$$

D'autre part, de (3.2.44), $\mathcal{N}_F(\xi)$ admet pour termes

$$a^1(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_1}(\partial_s\xi)^{m_2}}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_1}},\ a^2(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{n_1}(\partial_s\xi)^{n_2}\partial^2_{ss}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_2}},\ a^3(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_3}\partial^2_{ts}\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_3}},$$
$$a^4(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_4}\partial_t\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_4}}, a^5(\eta^S, w^S)\frac{\xi^{m_5}\partial_t\xi\partial_s\xi}{(1+\xi+\eta^S)^{\alpha_5}},$$
$$m_1 + m_2 \geqslant 2,\ n_1 + n_2 \geqslant 2,\ m_3 \geqslant 1,\ m_3 \geqslant 1,\ m_4 \geqslant 1,\ m_5 \geqslant 0,\ \alpha_i \geqslant 1,\ i = 1...5,$$

avec a^i, $i = 1, ..., 5$ sont des fonctions bornées dans Ω.

Donc, en utilisant (3.4.8), (3.4.25), (3.4.4) et (3.4.5), on obtient

$$\|\mathcal{N}_F(\xi)\|_{L^2_\gamma(0,\infty;[L^2(\Omega)]^9)} \leqslant CR^2.$$

D'autre part, les fonctions $\mathcal{N}_E(\xi)$ et $\mathcal{N}_G(\xi)$ admettent les termes figurant dans (3.4.48). Donc, d'après le Lemme 3.4.3 et (3.4.25), on a l'estimation (3.4.46).

Finalement, en utilisant le Lemme 3.4.3, (3.4.3) et la même procédure développée dans [32], on trouve (3.4.47). □

3.4.1 Preuve du Théorème 3.1.1

On définit l'application $\Phi : \mathcal{B}_{\infty,R} \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$ comme suit

$$\Phi(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}) = (\nabla \cdot \mathcal{N}_E(\xi) + \mathcal{N}_F(\xi) + \mathcal{F}(u, p, \xi),$$
$$- [\mathcal{N}_E(\xi)n]_\tau + [\mathcal{N}_G(\xi)]_\tau + G(u, \xi + \eta^S), H(u, \xi + \eta^S) - \mathcal{T}^*(\mathcal{N}_E(\xi)n)). \tag{3.4.51}$$

Dans ce cas, on montre que pour R assez petit $\Phi(\mathcal{B}_{\infty,R}) \subset \mathcal{B}_{\infty,R}$ et que $\Phi_{|\mathcal{B}_{\infty,R}}$ est une contraction stricte. Soit $(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}) \in \mathcal{B}_{\infty,R}$, d'après le Lemme 3.4.4, on obtient

$$\left\| \Phi(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}) \right\|_{\mathcal{Y}_\infty} \leqslant CR^2.$$

On obtient de même

$$\left\| \Phi(\widetilde{f}^{(1)}, \widetilde{g}^{(1)}, \widetilde{h}^{(1)}) - \Phi(\widetilde{f}^{(2)}, \widetilde{g}^{(2)}, \widetilde{h}^{(2)}) \right\|_{\mathcal{Y}_\infty} \leqslant CR \left\| (\widetilde{f}^{(1)}, \widetilde{g}^{(1)}, \widetilde{h}^{(1)}) - (f^{(2)}, \widetilde{g}^{(2)}, \widetilde{h}^{(2)}) \right\|_{\mathcal{Y}_\infty}.$$

pour $(\widetilde{f}, \widetilde{g}, \widetilde{h}), (\widetilde{f}^{(i)}, \widetilde{g}^{(i)}, \widetilde{h}^{(i)}) \in \mathcal{B}_{\infty,R}$.

On déduit alors le résultat principal de ce chapitre.

Chapitre 4

Contrôlabilité d'un problème d'interaction fluide-solide avec les conditions de Navier

Le but de ce chapitre est de montrer la contrôlabilité à zéro d'un système modélisant l'interaction entre un fluide incompressible et une structure solide en utilisant un contrôle distribué localement situé dans le domaine du fluide. Le fluide est modélisé par le système de Navier-Stokes avec les conditions de Navier sur le bord, tandis que le corps rigide est gouverné par les lois de Newton. Le résultat principal montre qu'on peut amener les vitesses du fluide et de la structure à zéro et qu'on peut contrôler exactement la position du solide tant que ce dernier n'est pas un disque.

Le point clé de ce chapitre consiste à l'élaboration d'une nouvelle inégalité de Carleman pour le système linéarisé associé à notre problème couplant les équations de Stokes et des équations différentielles ordinaires avec les conditions de Navier sur le bord.

4.1 Introduction

Soit Ω un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^2$ assez régulier. On suppose que Ω contient un corps rigide et un fluide visqueux incompressible. Pour un temps $t > 0$ fixé, le domaine du solide est dénoté par $\mathcal{S}(t) \subset \Omega$ qui est supposé être un compact assez régulier d'intérieur non vide. Le domaine du fluide est dénoté par $\mathcal{F}(t) = \Omega \backslash \mathcal{S}(t)$, et il est supposé être un ensemble connexe.

On considère le système suivant qui décrit l'évolution du fluide gouvernée par le système incompressible de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t U + (U \cdot \nabla)U - \nabla \cdot \mathbb{T}(U, P) = v^* 1_{\mathcal{O}} & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}(t), \\ \nabla \cdot U = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}(t). \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Dans le système ci-dessus, on a dénoté par U la vitesse du fluide, P la pression du fluide et par v^* le contrôle qui agit sur le système à travers $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{F}(t)$.

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\mathbb{T}(U,P)$ est défini par

$$\mathbb{T}(U,P) = -PI_2 + 2\nu D(U), \quad D(U)_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right),$$

où ν est la viscosité du fluide. On dénote pour chaque instant t, la position de la structure par $h(t) \in \mathbb{R}^2$ et par $R_{\theta(t)}$ la matrice de rotation d'angle θ du solide définie par

$$R_{\theta(t)} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{pmatrix}.$$

Alors, le flux de la structure est donné par $X_{\mathcal{S}}(t,\cdot) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}(t)$ où

$$X_{\mathcal{S}}(t,y) = h(t) + R_{\theta(t)}y, \quad t \in (0,T), \quad y \in \mathcal{S}, \tag{4.1.2}$$

avec $\mathcal{S}$ un compact non vide régulier de $\mathbb{R}^2$.

On note que $X_{\mathcal{S}}(t,\cdot)$ est inversible, on dénote son inverse par $Y_{\mathcal{S}}(t,\cdot) : \mathcal{S}(t) \longrightarrow \mathcal{S}$ où

$$Y_{\mathcal{S}}(t,x) = R^{-1}_{\theta(t)}(x - h(t)), \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathcal{S}(t).$$

Donc, la vitesse eulérienne de la structure est donnée par

$$U_{\mathcal{S}}(t,x) = h'(t) + R'_{\theta(t)}R^{-1}_{\theta(t)}(x - h(t)), \quad t \in (0,T), \quad x \in \mathcal{S}(t).$$

On dénote par $a^{\perp}$, le vecteur $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, pour tout $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

On note que $R'_{\theta(t)}R^{-1}_{\theta(t)}$ est une matrice antisymétrique, alors la vitesse eulérienne de la structure s'écrit

$$U_{\mathcal{S}}(t,x) = h'(t) + \omega(t)(x - h(t))^{\perp},$$

où $\omega(t) = \theta'(t)$ représente la vitesse angulaire du solide.

On dénote par $\mathcal{S}_{h,\theta}$ l'ensemble

$$\mathcal{S}_{h,\theta} = h + R_{\theta}\mathcal{S},$$

et on définit le domaine du fluide correspondant

$$\mathcal{F}_{h,\theta} = \Omega \backslash \mathcal{S}_{h,\theta},$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in \mathbb{R}$. Avec ces notations, on a

$$\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}_{h(t),\theta(t)}, \quad \mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_{h(t),\theta(t)}.$$

On précise que le domaine du fluide dépend du déplacement de la structure rigide et par conséquent, il dépend du temps.

On dénote par $\widehat{n}$ la normale extérieure unitaire à $\partial\mathcal{F}(t)$, où $\partial\mathcal{F}(t) = \partial\Omega \cup \partial\mathcal{S}(t)$.

Le mouvement de la structure est régi par les équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{rl} mh''(t) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}(t)} \mathbb{T}(U,P)\widehat{n}\, d\Gamma & t \in (0,T), \\ J\omega'(t) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}(t)} (x-h(t))^{\perp}\cdot \mathbb{T}(U,P)\widehat{n}\, d\Gamma & t \in (0,T). \end{array}\right. \tag{4.1.3}$$

On complète (4.1.1) et (4.1.3) par les conditions au bord de Navier. Dans le but d'écrire ces conditions, on rappelle quelques notations. On dénote par $a_{\widehat{n}}$ et $a_{\widehat{\tau}}$ la partie normale et tangentielle de $a \in \mathbb{R}^2$:

$$a_{\widehat{n}} = (a\cdot\widehat{n})\widehat{n}, \quad a_{\widehat{\tau}} = a - a_{\widehat{n}}.$$

Donc, les conditions au bord s'écrivent comme suit

$$\left\{\begin{array}{rll} U_{\widehat{n}} = 0 & \text{dans } (0,T), & \text{sur } \partial\Omega, \\ [2\nu D(U)\widehat{n} + \beta_\Omega U]_{\widehat{\tau}} = 0 & \text{dans } (0,T), & \text{sur } \partial\Omega, \\ (U-U_{\mathcal{S}})_{\widehat{n}} = 0 & \text{dans } (0,T), & \text{sur } \partial\mathcal{S}(t), \\ [2\nu D(U)\widehat{n} + \beta_{\mathcal{S}}\,(U-U_{\mathcal{S}})]_{\widehat{\tau}} = 0 & \text{dans } (0,T), & \text{sur } \partial\mathcal{S}(t), \end{array}\right. \tag{4.1.4}$$

où $\beta_\Omega \geqslant 0$ et $\beta_{\mathcal{S}} \geqslant 0$ sont les coefficients de friction.

Soient h^0, $\widetilde{\ell^0} \in \mathbb{R}^2$, θ^0, $\omega^0 \in \mathbb{R}$ et $u^0 \in [H^1(\mathcal{F}_{h^0,\theta^0})]^2$. On fournit les conditions initiales suivantes

$$U(0,x) = u^0(x),\ x \in \mathcal{F}_{h^0,\theta^0}, \quad h'(0) = \widetilde{\ell^0}, \quad \omega(0) = \omega^0, \quad h(0) = h^0, \quad \theta(0) = \theta^0, \tag{4.1.5}$$

telles que les conditions de compatibilité suivante soient vérifiées

$$\left\{\begin{array}{rl} \nabla\cdot u^0 = 0 & \text{dans } \mathcal{F}_{h^0,\theta^0}, \\ u^0_{\widehat{n}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \left(u^0 - u^0_{\mathcal{S}}\right)_{\widehat{n}} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{S}_{h^0,\theta^0}, \end{array}\right. \tag{4.1.6}$$

où $u^0_{\mathcal{S}}(x) = \widetilde{\ell^0} + \omega^0(x-h^0)^{\perp}$. Sans restreindre la généralité, on suppose que le centre de gravité de $\mathcal{S}$ est positionné à l'origine. Donc, $h(t)$ sera la position du centre de masse de $\mathcal{S}(t)$.

Notre objectif est de trouver un contrôle v^* agissant sur l'ouvert $\mathcal{O}$ tel que pour tout $(h_T,\theta_T) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ avec

$$\mathcal{S}_{h_T,\theta_T} \subset \Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}, \tag{4.1.7}$$

on obtient $h(T) = h_T$, $\theta(T) = \theta_T$ et que les vitesses du fluide et du solide sont égales à 0 en temps final T.

Le résultat principal de cette partie est le suivant :

Théorème 4.1.1. *On suppose que $\mathcal{S}$ n'est pas un disque.*

Soit (h_T,θ_T) vérifiant (4.1.7). Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(u^0, h^0, \widetilde{\ell^0}, \omega^0, \theta^0)$ qui satisfait (4.1.6) et

$$\left\|u^0\right\|_{[H^1(\mathcal{F}_{h^0,\theta^0})]^2} + \left|h^0 - h_T\right| + \left|\widetilde{\ell^0}\right| + \left|\omega^0\right| + \left|\theta^0 - \theta_T\right| \leqslant \varepsilon,$$

il existe un contrôle $v^* \in L^2(0,T;[L^2(\mathcal{O})]^2)$ tel que

$$U(T,\cdot) = 0 \text{ dans } \mathcal{F}_{h_T,\theta_T}, \quad h(T) = h_T, \quad h'(T) = 0, \quad \omega(T) = 0, \quad \theta(T) = \theta_T.$$

Sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer

$$h_T = 0, \quad \theta_T = 0, \quad \text{et donc} \quad \mathcal{S}_{h_T,\theta_T} = \mathcal{S}, \quad \mathcal{F}_{h_T,\theta_T} = \mathcal{F}.$$

Remarque 4.1.2.

1. *Si $\mathcal{S}$ est un disque, les conditions au bord* (4.1.4) *sur $\partial\mathcal{S}(t)$ s'écrivent*

$$\begin{cases} (U(t,\cdot) - h'(t))_{\widehat{n}} = 0 & t \in (0,T), \quad \textit{sur } \partial\mathcal{S}(t), \\ [2\nu D(U)\widehat{n} + \beta_{\mathcal{S}}\,(U - U_{\mathcal{S}})]_{\widehat{\tau}} = 0 & \textit{dans } (0,T), \quad \textit{sur } \partial\mathcal{S}(t), \end{cases}$$

   et on constate que la vitesse angulaire apparaît uniquement dans la 2 ème condition au bord (et si $\beta_{\mathcal{S}} > 0$) et malheureusement, il est difficile d'obtenir des estimations de Carleman qui permettent de contrôler la vitesse ω dans ce cas. C'est la raison pour laquelle on a exclu le cas du disque dans le Théorème 4.1.1.

2. *Le Théorème 4.1.1 reste vrai en dimension trois, mais dans ce cas on devrait supposer que $\mathcal{S}$ n'admet pas d'axe de rotation. Cette hypothèse géométrique est suffisante pour prouver l'inégalité de Carleman obtenue dans la section 4.5. Plus précisément, en supposant que $\mathcal{S}$ n'a pas d'axe de rotation, alors pour tout $z \in [L^2(\Omega)]^3$, $\ell \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}^3$ tels que*

$$\nabla \cdot z = 0 \textit{ dans } \mathcal{F}, \quad z \cdot n = (\ell + k \times y) \cdot n 1_{\partial\mathcal{S}} \textit{ sur } \partial\mathcal{F},$$

   on a

$$\|z\|_{[L^2(\mathcal{F})]^3} \geqslant C\left(|\ell| + |k|\right),$$

   avec C une constante positive indépendante de z, ℓ et k. Cet argument est prouvé dans [82, Lemme 2.2].

4.2 Préliminaires

Dans cette partie, on prouve quelques résultats de régularité du problème linéaire associé. On considère le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \overline{w} - \nabla \cdot \mathbb{T}(\overline{w}, \overline{\pi}) = F_1 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ \nabla \cdot \overline{w} = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ m\ell'_{\overline{w}}(t) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(\overline{w}, \overline{\pi}) n \, d\Gamma + F_2 & t \in (0,T), \\ J(k'_{\overline{w}}(t)) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} y^{\perp} \cdot \mathbb{T}(\overline{w}, \overline{\pi}) n \, d\Gamma + F_3 & t \in (0,T), \end{cases} \tag{4.2.1}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} \overline{w}_n = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ [2\nu D(\overline{w})n + \beta_{\Omega}\overline{w}]_{\tau} = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ (\overline{w} - \overline{w}_{\mathcal{S}})_n = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\mathcal{S}, \\ [2\nu D(\overline{w})n + \beta_{\mathcal{S}}(\overline{w} - \overline{w}_{\mathcal{S}})]_{\tau} = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

où $\overline{w}_{\mathcal{S}}(y) = \ell_{\overline{w}} + k_{\overline{w}} y^{\perp}$, complété avec les conditions initiales

$$\overline{w}(0,\cdot) = w^0, \quad \text{in } \mathcal{F}, \quad \ell_{\overline{w}}(0) = \ell_w^0, \quad k_{\overline{w}}(0) = k_w^0. \tag{4.2.3}$$

On énonce un résultat de régularité pour le système (4.2.1), (4.2.2) et (4.2.3) qui est prouvé dans [93].

Théorème 4.2.1. *Soit $T > 0$. On suppose que $F_1 \in L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)$, $F_2 \in [L^2(0,T)]^2$ et $F_3 \in L^2(0,T)$ sont des fonctions données et $w^0 \in [H^1(\mathcal{F})]^2$ telles que*

$$\nabla \cdot w^0 = 0, \quad \textit{dans } \mathcal{F}, \quad w_n^0 = 0, \quad \textit{sur } \partial\Omega, \quad w_n^0(y) = (\ell_w^0 + k_w^0 y^{\perp})_n, \ y \in \partial\mathcal{S}.$$

Alors, il existe une unique solution $(\overline{w}, \overline{\pi}, \ell_{\overline{w}}, k_{\overline{w}})$ du problème (4.2.1), (4.2.2) et (4.2.3) telle que

$$\overline{w} \in L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2) \cap C([0,T];[H^1(\mathcal{F})]^2) \cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2), \quad \overline{\pi} \in L^2(0,T;H^1(\mathcal{F})/\mathbb{R}),$$

$$(\ell_{\overline{w}}, k_{\overline{w}}) \in [H^1(0,T)]^2 \times H^1(0,T).$$

De plus, la solution satisfait l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &\|\overline{w}\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap C([0,T];[H^1(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\overline{\pi}\|_{L^2(0,T;H^1(\mathcal{F})/\mathbb{R})} + \|\ell_{\overline{w}}\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|k_{\overline{w}}\|_{H^1(0,T)} \\ &\leqslant C\left(\|F_1\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|F_2\|_{[L^2(0,T)]^2} + \|F_3\|_{L^2(0,T)} + \left\|w^0\right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2} + \left|\ell_w^0\right| + \left|k_w^0\right|\right). \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

La preuve du théorème ci-dessus est basée sur la théorie des semi-groupes. Dans ce qui suit, on rappelle les points importants de la preuve .

On note que w^0 et $\overline{w}$ sont étendus par $\ell_w^0 + k_w^0 y^{\perp}$ et $\ell_{\overline{w}} + k_{\overline{w}} y^{\perp}$ sur $\mathcal{S}$ respectivement.

On définit les espaces de Hilbert

$$\mathbb{H} = \left\{w \in [L^2(\Omega)]^2 \mid \nabla \cdot w = 0, \quad w_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad D(w) = 0 \text{ dans } \mathcal{S}\right\},$$

$$\mathbb{V} = \left\{w \in \mathbb{H} \mid w|_{\mathcal{F}} \in [H^1(\mathcal{F})]^2\right\}.$$

La condition $D(w) = 0$ dans $\mathcal{S}$ est équivalente à $w = w_{\mathcal{S}} \in \mathcal{R}$ dans $\mathcal{S}$ où

$$\mathcal{R} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \text{il existe } \ell_v \in \mathbb{R}^2, \ k_v \in \mathbb{R} \text{ tels que } v(y) = \ell_v + k_v y^{\perp}\right\}.$$

Pour tous $w, v \in \mathbb{H}$, on définit le produit scalaire sur $\mathbb{H}$ par

$$\langle w, v\rangle = \int_{\mathcal{F}} w \cdot v \, dy + m\ell_v \cdot \ell_w + J k_v k_w.$$

On définit également l'opérateur de projection $\mathbb{P} : [L^2(\Omega)]^2 \longrightarrow \mathbb{H}$.

Le système (4.2.1), (4.2.2) et (4.2.3) peut être réduit à la forme suivante

$$\overline{w}' = A\overline{w} + F, \quad \overline{w}(0) = w^0, \tag{4.2.5}$$

où l'opérateur A est défini par

$$\mathcal{A}w = \begin{cases} \nu\Delta w & \text{dans} \quad \mathcal{F}, \\ -\dfrac{2\nu}{m}\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} D(w)n \, d\Gamma - \left(\dfrac{2\nu}{J}\left[\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} y^{\perp}\cdot D(w)n \, d\Gamma\right]\right) y^{\perp} & \text{sur} \quad \partial\mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.2.6}$$

$$A = \mathbb{P}\mathcal{A}, \quad \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{w \in \mathbb{V},\ w|_{\mathcal{F}} \in [H^2(\mathcal{F})]^2,\ [2\nu D(w)n + \beta_\Omega w]_\tau = 0, \ \text{ sur } \partial\Omega, \\ [2\nu D(w)n + \beta_{\mathcal{S}}(w - w_{\mathcal{S}})]_\tau = 0, \ \text{ sur } \partial\mathcal{S}\},$$

et

$$F = \mathbb{P}\left(F_1 1_{\mathcal{F}} + \left(\frac{F_2}{m} + \frac{F_3 y^{\perp}}{J}\right) 1_{\mathcal{S}}\right).$$

Dans [93, Lemme 3.1], il est prouvé que l'opérateur A est auto-adjoint et qu'il est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractionss sur $\mathbb{H}$. Donc, on déduit le Théorème 4.2.1 (voir [93, Proposition 3.3]).

Puisque A est un opérateur auto-adjoint, alors pour tout $w \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$\|w\|^2_{\mathcal{D}((-A)^{1/2})} = \langle w, w\rangle + \langle w, Aw\rangle .$$

Pour notre étude, on a besoin d'établir un résultat de régularité plus forte pour le système linéaire (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3).

Soit $w^0 \in [H^3(\mathcal{F})]^2$, $\pi^0 \in H^2(\mathcal{F})$, $(\ell^0_w, k^0_w) \in \mathbb{R}^3$ et on pose $w^1 \in [H^1(\mathcal{F})]^2$, $(\ell^1_w, k^1_w) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$w^1 = \nabla\cdot\mathbb{T}(w^0, \pi^0) + F_1(0, \cdot)$$
$$\ell^1_w = -\frac{1}{m}\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(w^0, \pi^0)n \, d\Gamma + \frac{1}{m}F_2(0),$$

et

$$k^1_w = -\frac{1}{J}\int_{\partial\mathcal{S}} y^{\perp}\cdot\mathbb{T}(w^0, \pi^0)n \, d\Gamma + \frac{1}{J}F_3(0).$$

De plus, on suppose que π^0 satisfait le système suivant

$$\begin{cases} \Delta\pi^0 = \nabla\cdot F_1(0, \cdot) & \text{dans } \mathcal{F}, \\ \dfrac{\partial\pi^0}{\partial n} = (\nu\Delta w^0 + F_1(0, \cdot))\cdot n - (\ell^1_w + k^1_w y^{\perp})\cdot n 1_{\partial\mathcal{S}} & \text{sur } \partial\mathcal{F}. \end{cases}$$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, le système ci-dessus admet une solution unique $\pi^0 \in H^1(\mathcal{F})/\mathbb{R}$, telle que

$$\left\|\nabla\pi^0\right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2} + \left|\ell^1_w\right| + \left|k^1_w\right| \leqslant C\Bigg(\left\|w^0\right\|_{[H^3(\mathcal{F})]^2} + \|F_1\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \\ + \|F_2\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|F_3\|_{H^1(0,T)}\Bigg).$$

Puisque $\partial\mathcal{F}$ est suffisamment régulier, on obtient

$$(\nu\Delta w^0 + F_1(0,\cdot))\cdot n - (\ell_w^1 + k_w^1 y^\perp)\cdot n 1_{\partial\mathcal{S}} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{F}).$$

Donc, en utilisant les estimations elliptiques classiques du système de Neumann, on trouve

$$\left\|\pi^0\right\|_{H^2(\mathcal{F})} + \left|\ell_w^1\right| + \left|k_w^1\right| \leqslant C\Bigg(\left\|w^0\right\|_{[H^3(\mathcal{F})]^2} + \|F_1\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|F_2\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|F_3\|_{H^1(0,T)}\Bigg).$$

Soient les conditions de compatibilité

$$\nabla\cdot w^1 = 0, \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad w_n^1 = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad w_n^1(y) = (\ell_w^1 + k_w^1 y^\perp)_n, \ y\in\partial\mathcal{S}. \tag{4.2.7}$$

Proposition 4.2.2. *Soit $T>0$. On suppose que $F_1 \in L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)$, $F_2\in[H^1(0,T)]^2$, $F_3\in H^1(0,T)$ et soit $(w^0,\ \ell_w^0,\ k_w^0)$ tels que les conditions de compatibilité* (4.2.7) *soient vérifiées.*

Alors, il existe une unique solution $(\overline{w},\overline{\pi},\ell_{\overline{w}},k_{\overline{w}})$ du problème (4.2.1), (4.2.2) *et* (4.2.3) *telle que*

$$\overline{w}\in L^2(0,T;[H^4(\mathcal{F})]^2)\cap H^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2), \quad \overline{\pi}\in L^2(0,T;H^3(\mathcal{F}))\cap H^1(0,T;H^1(\mathcal{F})),$$
$$(\ell_{\overline{w}},k_{\overline{w}})\in[H^2(0,T)]^2\times H^2(0,T).$$

De plus, l'estimation suivante est satisfaite

$$\begin{aligned}\|\overline{w}\|_{L^2(0,T;[H^4(\mathcal{F})]^2)\cap H^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\overline{\pi}\|_{L^2(0,T;H^3(\mathcal{F}))\cap H^1(0,T;H^1(\mathcal{F}))} + \|\ell_{\overline{w}}\|_{[H^2(0,T)]^2} + \|k_{\overline{w}}\|_{H^2(0,T)}\\ \leqslant C\Bigg(\|F_1\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|F_2\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|F_3\|_{H^1(0,T)}\\ + \left\|w^0\right\|_{[H^3(\mathcal{F})]^2} + \left|\ell_w^0\right| + \left|k_w^0\right|\Bigg).\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Démonstration. On dérive le système (4.2.1), (4.2.2) par rapport à t. On obtient

$$\left\{\begin{aligned} \partial_{tt}\overline{w} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\partial_t\overline{w},\partial_t\overline{\pi}) &= \partial_t F_1 \quad \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F},\\ \nabla\cdot(\partial_t\overline{w}) &= 0 \quad \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F},\\ m\ell_{\overline{w}}''(t) &= -\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(\partial_t\overline{w},\partial_t\overline{\pi})n\ d\Gamma + \partial_t F_2 \quad t\in(0,T),\\ J(k_{\overline{w}}''(t)) &= -\int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp\cdot\mathbb{T}(\partial_t\overline{w},\partial_t\overline{\pi})n\ d\Gamma + \partial_t F_3 \quad t\in(0,T),\end{aligned}\right. \tag{4.2.9}$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t\overline{w}_n &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega,\\ [2\nu D(\partial_t\overline{w})n + \beta_\Omega\partial_t\overline{w}]_\tau &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega,\\ (\partial_t\overline{w} - \overline{w}_{\mathcal{S}}')_n &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S},\\ [2\nu D(\partial_t\overline{w})n + \beta_{\mathcal{S}}(\partial_t\overline{w} - \overline{w}_{\mathcal{S}}')]_\tau &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S},\end{aligned}\right. \tag{4.2.10}$$

où $\overline{w}'_{\mathcal{S}} = \ell'_{\overline{w}} + k'_{\overline{w}} y^{\perp}$ avec les conditions initiales

$$\partial_t \overline{w}(0,\cdot) = w^1, \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad \ell'_{\overline{w}}(0) = \ell^1_w, \quad k'_{\overline{w}}(0) = k^1_w, \quad \ell_{\overline{w}}(0) = \ell^0_w, \quad k_{\overline{w}}(0) = k^0_w. \tag{4.2.11}$$

Puisque (4.2.7) est satisfaite, on peut appliquer le Théorème 4.2.1 et obtenir

$$\begin{aligned}\|\partial_t \overline{w}\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\partial_t \overline{\pi}\|_{L^2(0,T;H^1(\mathcal{F}))} + \|\ell'_{\overline{w}}\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|k'_{\overline{w}}\|_{H^1(0,T)} \\ \leqslant C\Big(\|F_1\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|F_2\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|F_3\|_{H^1(0,T)} + \left\|w^0\right\|_{[H^3(\mathcal{F})]^2} \Big).\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

De (4.2.12), on obtient $\ell_{\overline{w}} \in [H^2(0,T)]^2$ et $k_{\overline{w}} \in H^2(0,T)$. Donc, en utilisant le résultat de régularité pour le système de Stokes un-stationnaire avec les conditions de Navier prouvé dans [46], combiné avec (4.2.12) et (4.2.4), on a

$$\begin{aligned}\|\overline{w}\|_{L^2(0,T;[H^4(\mathcal{F})]^2)\cap H^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\overline{\pi}\|_{L^2(0,T;H^3(\mathcal{F}))\cap H^1(0,T;H^1(\mathcal{F}))} + \|\ell_{\overline{w}}\|_{[H^2(0,T)]^2} + \|k_{\overline{w}}\|_{H^2(0,T)} \\ \leqslant C\Big(\|F_1\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|F_2\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|F_3\|_{H^1(0,T)} \\ + \left\|w^0\right\|_{[H^3(\mathcal{F})]^2} + \left|\ell^0_w\right| + \left|k^0_w\right| \Big).\end{aligned}$$

Donc, on déduit (4.2.8). □

4.3 Changement de variables

Pour traiter le problème (4.1.1), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5), on considère un système équivalent écrit dans un domaine fixe en utilisant le changement de variables qui est déjà introduit dans [87]. En effet, on construit une extension du flux (4.1.2) qui soit incompressible et régulière sur Ω. Tout d'abord, on a besoin de contrôler la distance entre la structure et le bord $\partial(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}})$.

La condition (4.1.7) implique qu'il existe $d > 0$ tel que

$$d(\partial(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}), \mathcal{S}) = d.$$

Soit $t \in [0,T]$. On a pour tout $y \in \mathcal{S}$ fixé

$$d(y, \mathcal{S}(t)) \leqslant \left|h(t) + R_{\theta(t)} y - y\right|.$$

Donc

$$d(\mathcal{S}(t), \mathcal{S}) \leqslant C\left(|h(t)| + \left|R_{\theta(t)} - I_2\right|\right). \tag{4.3.1}$$

Si

$$|h(t)| + \left|R_{\theta(t)} - I_2\right| \leqslant \frac{d}{2C}, \tag{4.3.2}$$

on a

$$d(\mathcal{S}(t),\mathcal{S}) \leqslant \frac{d}{2}.$$

Donc, on obtient

$$d(\partial(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}}),\mathcal{S}(t)) \geqslant \frac{d}{2}, \quad t\in[0,T].$$

En d'autres termes, on suppose seulement qu'aucune collision n'a lieu entre la structure et le bord $\partial(\Omega\backslash\overline{\mathcal{O}})$ en temps T. En effet, si les données initiales sont assez petites, alors le déplacement de la structure reste petit, donc (4.3.2) est satisfaite. Ainsi, aucun contact ne peut survenir entre le solide et le bord sur $[0,T]$.

De [87], on peut construire un changement de variables X et Y avec les propriétés suivantes

- Pour tout $t\in[0,T]$, X et Y sont des difféomorphismes de Ω de classe C^∞ ,
- La fonction X est inversible d'inverse Y,
- Dans un voisinage de $\mathcal{S}=\mathcal{S}(T)$, $X(t,y)=X_{\mathcal{S}}(t,y)=h(t)+R_{\theta(t)}y$,
- Dans un voisinage de $\partial\Omega$ et de $\mathcal{O}$, $X(t,y)=y$,
- $\det\nabla X(t,y)=1$, pour tout $y\in\Omega$,
- Dans un voisinage de $\mathcal{S}$, $\nabla X(t,y)=R_{\theta(t)}$ et $\nabla Y(t,X(t,y))=R^{-1}_{\theta(t)}$.

  De plus, on a

$$\|X\|_{H^2(0,T;[C^2(\overline{\Omega})]^2)}+\|Y\|_{H^2(0,T;[C^2(\overline{\Omega})]^2)}\leqslant C(\|h\|_{[H^2(0,T)]^2}+\|\theta\|_{H^2(0,T)}), \tag{4.3.3}$$

  où C dépend de T.

On pose

$$u(t,y)=\mathrm{Cof}(\nabla X(t,y))^*U(t,X(t,y)), \quad P(t,y)=p(t,X(t,y)).$$

Donc, on a

$$u_{\mathcal{S}}(t,y)=R^{-1}_{\theta(t)}(h'(t)+\omega(t)(x-h(t))^\perp)=\ell(t)+\omega(t)y^\perp,$$

où $\ell(t)=R^{-1}_{\theta(t)}h'(t)$. On transforme le système (4.1.1), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5) en utilisant ce changement de variables. Des calculs de ce type sont déjà faits dans [93, Lemma 2.1]. Donc, le système (4.1.1), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5) est équivalent à

$$\begin{cases} \partial_t u-\nu\mathcal{L}u+\mathcal{M}u+\mathcal{N}u+\mathcal{G}p=v^*1_{\mathcal{O}} & \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F},\\ \nabla\cdot u=0 & \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F},\end{cases} \tag{4.3.4}$$

$$\begin{cases} m\ell'(t)=-\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}}\mathbb{T}(u,p)n\,d\Gamma-m\omega\ell(t)^\perp & t\in(0,T),\\ J\omega'(t)=-\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}}y^\perp\cdot\mathbb{T}(u,p)n\,d\Gamma & t\in(0,T),\end{cases} \tag{4.3.5}$$

$$\begin{cases} u_n=0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega,\\ [2\nu D(u)n+\beta_\Omega u]_\tau=0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega,\\ (u-u_{\mathcal{S}})_n=0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S},\\ [2\nu D(u)n+\beta_{\mathcal{S}}(u-u_{\mathcal{S}})]_\tau=0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S},\end{cases} \tag{4.3.6}$$

où n et τ dénotent respectivement le vecteur normal et le vecteur tangentiel sur $\partial\mathcal{F}$, avec

$$[\mathcal{L}u]_i = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(g^{jk}\frac{\partial u_i}{\partial y_k}\right) + 2\sum_{j,k,l} g^{kl}\Gamma^i_{jk}\frac{\partial u_j}{\partial y_l} + \sum_{j,k,l}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}(g^{kl}\Gamma^i_{jl}) + \sum_m g^{kl}\Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km}\right)u_j,$$

$$[\mathcal{M}u]_i = \sum_j \frac{\partial Y_j}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \sum_{j,k}\left(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial Y_k}{\partial t} + \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2 X_k}{\partial t\partial y_j}\right)u_j,$$

$$[\mathcal{N}u]_i = \sum_j u_j\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}u_j u_k,$$

$$[\mathcal{G}p]_i = \sum_j g^{ij}\frac{\partial p}{\partial y_j},$$

où

$$g^{ij} = \sum_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k}\frac{\partial Y_j}{\partial x_k}, \quad g_{ij} = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial y_k}\frac{\partial X_j}{\partial y_k},$$

et

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial y_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial y_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_l}\right).$$

Finalement, les conditions initiales deviennent pour $y \in \mathcal{F}$

$$u(0,y) = \mathrm{Cof}(\nabla X(0,y))^* u^0(X(0,y)) = u_0(y), \quad \ell(0) = R^{-1}_{\theta^0}\widetilde{\ell^0} = \ell^0, \quad \omega(0) = \omega^0. \tag{4.3.7}$$

4.4 Inégalité de Carleman pour le Laplacien avec les conditions de Navier

En premier lieu, on prouve une inégalité de Carleman pour le problème du Laplacien avec les conditions de Navier non-homogènes. De [24, Lemma 1.1], on peut construire une fonction $\eta \in C^2(\overline{\mathcal{F}})$ telle que

$$\eta > 0 \text{ dans } \mathcal{F}, \quad \eta = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{F}, \quad |\nabla\eta| > 0 \text{ dans } \overline{\mathcal{F}\setminus\mathcal{O}_\eta} \text{ où } \mathcal{O}_\eta \subset\subset \mathcal{O}, \quad \nabla\eta\cdot n < 0 \text{ sur } \partial\mathcal{F}. \tag{4.4.1}$$

Soit $\lambda > 0$, on pose $\alpha = e^{\lambda\eta}$. On a alors la proposition suivante

Proposition 4.4.1. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}$ deux ouverts non vides tels que $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$. On suppose que le coefficient de friction β est positif ou nul.*

Alors, il existe $C = C(\mathcal{F},\mathcal{O}) > 0$, s_1 et λ_1 où $s_1 = s_1(\mathcal{F},\mathcal{O})$, $\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{F},\mathcal{O})$, tels que la solution $\psi \in [H^2(\mathcal{F})]^2$ du système

$$\begin{cases} -\Delta\psi = f & \text{dans} \quad \mathcal{F}, \\ \nabla\cdot\psi = 0 & \text{dans} \quad \mathcal{F}, \\ \psi_n = a_n & \text{sur} \quad \partial\mathcal{F}, \\ [2D(\psi)n + \beta\psi]_\tau = b & \text{sur} \quad \partial\mathcal{F}, \end{cases} \tag{4.4.2}$$

satisfait l'estimation

$$s^2\lambda^2\int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2\left|\nabla\psi\right|^2\ dy + s^4\lambda^4\int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4\left|\psi\right|^2\ dy + \beta s^3\lambda^2 e^{2s}\int_{\partial\mathcal{F}}\left|\psi_\tau\right|^2 d\Gamma$$
$$\leqslant C\Bigg(s^4\lambda^4\int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\alpha^4\left|\psi\right|^2\ dy + s\int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha\left|f\right|^2\ dy + s^3\lambda^2 e^{2s}\int_{\partial\mathcal{F}}\left|\nabla_\tau(a\cdot n)\right|^2 d\Gamma$$
$$+ s^4\lambda^2 e^{2s}\left\|a_n\right\|^2_{[H^{1/2}(\partial\mathcal{F})]^2} + s^3\lambda^2 e^{2s}\int_{\partial\mathcal{F}}\left|b\right|^2\ d\Gamma\Bigg). \quad (4.4.3)$$

pour tout $s \geqslant s_1$ *et* $\lambda \geqslant \lambda_1$, *où* $f \in [L^2(\mathcal{F})]^2$, $b \in [H^{1/2}(\partial\mathcal{F})]^2$, $a \in [H^{3/2}(\partial\mathcal{F})]^2$.

Démonstration. La preuve est inspirée de [47] où dans notre cas, on a besoin de prendre en compte les conditions non-homogènes au bord.

Etape 1 : Soit $w = e^{s\alpha}\psi$. La première équation du système (4.4.2) devient

$$-\Delta w - s^2\lambda^2\alpha^2\left|\nabla\eta\right|^2 w + 2s\lambda\alpha\nabla w\nabla\eta + s\lambda^2\alpha\left|\nabla\eta\right|^2 w + s\lambda\alpha\Delta\eta w = e^{s\alpha}f, \quad (4.4.4)$$

On écrit $\Delta w = \nabla\cdot(\nabla w + (\nabla w)^*) - \nabla(\nabla\cdot w)$. En utilisant $\nabla\cdot w = s\lambda\alpha\nabla\eta\cdot w$, on a

$$-\Delta w = -\nabla\cdot(\nabla w + (\nabla w)^*) + s\lambda\alpha(\nabla w)^*\nabla\eta + s\lambda\alpha\nabla^2\eta w + s\lambda^2\alpha(\nabla\eta\cdot w)\nabla\eta.$$

Donc, (4.4.4) peut s'écrire

$$-\nabla\cdot(\nabla w+(\nabla w)^*)+s\lambda\alpha(\nabla w)^*\nabla\eta-s^2\lambda^2\alpha^2\left|\nabla\eta\right|^2 w+2s\lambda\alpha\nabla w\nabla\eta+s\lambda^2\alpha\left|\nabla\eta\right|^2 w+s\lambda\alpha\Delta\eta w$$
$$+ s\lambda\alpha\nabla^2\eta w + s\lambda^2\alpha(\nabla\eta\cdot w)\nabla\eta = e^{s\alpha}f. \quad (4.4.5)$$

On multiplie (4.4.5) par $\alpha^{1/2}$, alors (4.4.5) est équivalente à

$$Mw + Nw = \widetilde{g}, \quad (4.4.6)$$

où

$$Mw = -\alpha^{1/2}\nabla\cdot(\nabla w + (\nabla w)^*) - s^2\lambda^2\alpha^{5/2}\left|\nabla\eta\right|^2 w + s\lambda\alpha^{3/2}(\nabla w)^*\nabla\eta, \quad (4.4.7)$$
$$Nw = 2s\lambda\alpha^{3/2}\nabla w\nabla\eta + 4s\lambda^2\alpha^{3/2}\left|\nabla\eta\right|^2 w, \quad (4.4.8)$$

et

$$\widetilde{g} = \alpha^{1/2}e^{s\alpha}f + 3s\lambda^2\alpha^{3/2}\left|\nabla\eta\right|^2 w - s\lambda\alpha^{3/2}\Delta\eta w - s\lambda\alpha^{3/2}\nabla^2\eta w - s\lambda^2\alpha^{3/2}(\nabla\eta\cdot w)\nabla\eta. \quad (4.4.9)$$

En multipliant (4.4.6) par elle même, on constate qu'il suffit seulement de considérer les termes $\sum_{i,j}\langle(Mw)_i,(Nw)_j\rangle$.

Premièrement, on a

$$\langle(Mw)_1,(Nw)_1\rangle = -2s\lambda\int_{\mathcal{F}}\alpha^2\nabla\cdot(\nabla w + (\nabla w)^*)\cdot\nabla w\nabla\eta\ dy$$
$$= -2s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)(\nabla w + (\nabla w)^*)n\cdot(\nabla wn)\ d\Gamma + 2s\lambda\int_{\mathcal{F}}\alpha^2(\nabla w\nabla^2\eta) : (\nabla w + (\nabla w)^*)\ dy$$
$$+ 4s\lambda^2\int_{\mathcal{F}}\alpha^2(\nabla w + (\nabla w)^*)\nabla\eta\cdot\nabla w\nabla\eta\ dy + 2s\lambda\sum_{i,j,k}\int_{\mathcal{F}}\alpha^2(\partial_j w_i + \partial_i w_j)\partial^2_{kj}w_i\partial_k\eta\ dy. \quad (4.4.10)$$

On pose

$$A = 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2(\nabla w + (\nabla w)^*)\nabla\eta \cdot \nabla w \nabla\eta \; dy = 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \left|\nabla w \nabla\eta\right|^2 \; dy$$
$$+ 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2((\nabla w)^*\nabla\eta) \cdot (\nabla w \nabla\eta) \; dy = A_1 + A_2. \quad (4.4.11)$$

On obtient

$$A_2 = 4s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla w n) \cdot n(w \cdot n) \; d\Gamma - 4s\lambda^2 \sum_{i,j,k} \int_{\mathcal{F}} \partial_i(\alpha^2 \partial_k \eta \partial_j \eta)\partial_j w_i w_k \; dy$$
$$- 4s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \nabla\eta \cdot \nabla(\alpha\nabla\eta \cdot w)(\nabla\eta \cdot w) \; dy, \quad (4.4.12)$$

où on a utilisé le fait que $\nabla \cdot w = s\lambda\alpha\nabla\eta \cdot w$. Une intégration par parties pour le dernier terme donne

$$A_2 = 4s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \alpha^2 \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla w n) \cdot n(w \cdot n) \; d\Gamma - 4s\lambda^2 \sum_{i,j,k} \int_{\mathcal{F}} \partial_i(\alpha^2 \partial_k \eta \partial_j \eta)\partial_j w_i w_k \; dy$$
$$+2s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \alpha^3 \Delta\eta \left|\nabla\eta \cdot w\right|^2 \; dy + 2s^2\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^3 \left|\nabla\eta \cdot w\right|^2 \; dy - 2s^2\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n) \left|\nabla\eta \cdot w\right|^2 \; d\Gamma. \quad (4.4.13)$$

D'un autre côté, on a

$$B = 2s\lambda \sum_{i,j,k} \int_{\mathcal{F}} \alpha^2(\partial_j w_i + \partial_i w_j)\partial^2_{kj} w_i \partial_k \eta \; dy$$
$$= s\lambda \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \nabla\eta \cdot \nabla \left|\nabla w\right|^2 \; dy + 2s\lambda \sum_{i,j,k} \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \partial_i w_j \partial^2_{kj} w_i \partial_k \eta \; dy = B_1 + B_2. \quad (4.4.14)$$

Une intégration par parties des termes B_1 et B_2, donne

$$B_1 = s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n) \left|\nabla w\right|^2 \; d\Gamma - s\lambda \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \Delta\eta \left|\nabla w\right|^2 \; dy - 2s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^2 \left|\nabla w\right|^2 \; dy, \quad (4.4.15)$$

$$B_2 = 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)\nabla w : (\nabla w)^* \; d\Gamma - 2s\lambda \int_{\mathcal{F}} \Delta\eta \alpha^2 \nabla w : (\nabla w)^* \; dy$$
$$- 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \left|\nabla\eta\right|^2 \nabla w : (\nabla w)^* \; dy - 2s\lambda \sum_{i,j,k} \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \partial^2_{ki} w_j \partial_j w_i \partial_k \eta \; dy = B_{21} + B_{22} + B_{23} + B_{24}. \quad (4.4.16)$$

On fait encore une intégration par parties pour B_{24}, on a

$$\begin{aligned}B_{24} = &-2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)(\nabla w n)\cdot((\nabla w)^* n)\ d\Gamma + 2s\lambda \int_{\mathcal{F}} \alpha^2(\nabla^2\eta\nabla w) : \nabla w\ dy \\ &+ 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2((\nabla w)^*\nabla\eta)\cdot((\nabla w)\nabla\eta)\ dy + 2s^2\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^3(\nabla^2\eta w)\cdot(\nabla w\nabla\eta)\ dy \\ &+ \sum_{i,j,k} s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \alpha^3\partial_k\eta\partial_j\eta\partial_i\eta(\partial_k(w_i w_j))\ dy + 2s^2\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^3(\nabla w\nabla\eta)\cdot((\nabla w)^*\nabla\eta)\ dy. \quad (4.4.17)\end{aligned}$$

On note que le troisième terme dans (4.4.17) correspond à A_2, tandis que le cinquième terme dans (4.4.17) dénoté par B_{245} donne

$$\begin{aligned}B_{245} = s^2\lambda^3 \sum_{i,j,k} \int_{\mathcal{F}} \alpha^3\partial_k\eta\partial_j\eta\partial_i\eta\partial_k(w_i w_j)\ dy = -\sum_{i,j,k} s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \partial_k(\alpha^3\partial_k\eta\partial_j\eta\partial_i\eta)(w_i w_j)\ dy \\ + s^2\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)^3 \left|w\cdot n\right|^2\ d\Gamma,\end{aligned}$$

On a

$$-\sum_{i,j,k} s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \partial_k(\alpha^3\partial_k\eta\partial_j\eta\partial_i\eta)(w_i w_j)\ dy \geqslant -Cs^2\lambda^3(1+\lambda)\int_{\mathcal{F}} \alpha^4 \left|w\right|^2\ dy.$$

On traite le sixième terme dans (4.4.17), on obtient

$$\begin{aligned}B_{246} = 2s^2\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^3(\nabla w\nabla\eta)\cdot((\nabla w)^*\nabla\eta)\ dy = -2s^2\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^3\partial_i(\partial_j\eta\partial_k\eta)\partial_j w_i w_k\ dy \\ - 3s^2\lambda^3 \sum_{i,j,k} \int_{\mathcal{F}} \alpha^3\partial_k\eta\partial_j\eta\partial_i\eta\partial_k(w_i w_j)\ dy - s^3\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2\nabla\eta\cdot\nabla\left|\alpha\nabla\eta\cdot w\right|^2\ dy \\ + 2s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2((\nabla w)^* n)\cdot n(w\cdot n)\ d\Gamma = C_1 - 3B_{245} + C_3 + C_4. \quad (4.4.18)\end{aligned}$$

Un intégration par partie donne

$$C_3 = s^3\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \alpha^4\Delta\eta\left|w\cdot\nabla\eta\right|^2\ dy + 2s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \alpha^4\left|\nabla\eta\right|^2\left|w\cdot\nabla\eta\right|^2\ dy - s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\cdot n\right|^2\ d\Gamma. \quad (4.4.19)$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\langle (Mw)_1, (Nw)_1\rangle \geqslant -2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)(\nabla w + (\nabla w)^*)n\cdot(\nabla wn)\ d\Gamma + s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)\left|\nabla w\right|^2\ d\Gamma \\ + 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)\nabla w : (\nabla w)^*\ d\Gamma - 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)(\nabla wn)\cdot((\nabla w)^* n)\ d\Gamma \\ + 8s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla wn)\cdot n(w\cdot n)\ d\Gamma + 2s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 ((\nabla w)^* n)\cdot n(w\cdot n)\ d\Gamma \\ - 6s^2\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)\left|\nabla\eta\cdot w\right|^2\ d\Gamma - s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\cdot n\right|^2\ d\Gamma \\ + 2s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^4 \left|w\cdot\nabla\eta\right|^2\ dy - 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \left|\nabla\eta\right|^2 \nabla w : (\nabla w)^*\ dy - 2s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^2 \left|\nabla w\right|^2\ dy \\ - \varepsilon\left(s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \left|\nabla w\right|^2\ dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \alpha^4 \left|w\right|^2\ dy\right), \quad (4.4.20)\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $s > 1$, $\lambda > 1$. On obtient aussi

$$\begin{aligned}\langle (Mw)_1, (Nw)_2\rangle &= -4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^2 \left[\nabla\cdot(\nabla w + (\nabla w)^*)\right]\cdot w\ dy \\ &= -4s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 ((\nabla w) + (\nabla w)^*)n\cdot w\ d\Gamma + 8s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2(\nabla^2\eta\nabla\eta)(\nabla w + (\nabla w)^*)\cdot w\ dy \\ &\quad + 8s\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^2(\nabla\eta(\nabla w + (\nabla w)^*))\cdot w\ dy + 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^2 \left|\nabla w\right|^2\ dy \\ &\quad + 4s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^2 \nabla w : (\nabla w)^*\ dy. \quad (4.4.21)\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\langle (Mw)_2, (Nw)_1\rangle &= -s^3\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^4 \nabla\eta\cdot\nabla\left|w\right|^2\ dy = -s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\right|^2 d\Gamma \\ &\quad + s^3\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \nabla\cdot(\left|\nabla\eta\right|^2 \nabla\eta)\alpha^4 \left|w\right|^2\ dy + 4s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^4 \alpha^4 \left|w\right|^2\ dy. \quad (4.4.22)\end{aligned}$$

On a

$$\langle (Mw)_2, (Mw)_2\rangle = -4s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^4 \alpha^4 \left|w\right|^2\ dy. \quad (4.4.23)$$

On obtient

$$\begin{aligned}\langle (Mw)_3, (Nw)_1\rangle = B_{246} \geqslant -3s^2\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\cdot n\right|^2\ d\Gamma + 2s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 ((\nabla w)^* n)\cdot n(w\cdot n)\, d\Gamma \\ + 2s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 \alpha^4 \left|w\cdot\nabla\eta\right|^2\ dy - s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\cdot n\right|^2\ d\Gamma \\ - \varepsilon\left(s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 \left|\nabla w\right|^2\ dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \alpha^4 \left|w\right|^2\ dy\right). \quad (4.4.24)\end{aligned}$$

On a aussi

$$\langle (Mw)_3, (Nw)_2 \rangle = 4s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \alpha^3 (\nabla w)^* \nabla\eta \cdot w \; dy = 4s^2\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)^3 |w \cdot n|^2 \; d\Gamma$$
$$- 4s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} (\nabla(|\nabla\eta|^2 \alpha^3 \nabla\eta) \cdot w) \cdot w \; dy - 4s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \alpha^4 |w \cdot \nabla\eta|^2 \; dy. \quad (4.4.25)$$

Donc, on a

$$\langle (Mw), (Nw) \rangle \geqslant -2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)(\nabla w + (\nabla w)^*) n \cdot (\nabla w n) \; d\Gamma + s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n) |\nabla w|^2 \; d\Gamma$$
$$+ 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n) \nabla w : (\nabla w)^* \; d\Gamma - 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)(\nabla w n) \cdot ((\nabla w)^* n) \; d\Gamma$$
$$- 4s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (\nabla w n + (\nabla w)^* n)_\tau \cdot w_\tau \; d\Gamma + 4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 ((\nabla w)^* n) \cdot n (w \cdot n) \; d\Gamma$$
$$- 2s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)^3 |w \cdot n|^2 \; d\Gamma - s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)^3 |w|^2 \, d\Gamma$$
$$+ 2s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \alpha^2 |\nabla w|^2 \; dy - 5s^2\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)^3 |w \cdot n|^2 \; d\Gamma$$
$$- \varepsilon \left(s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \alpha^2 |\nabla w|^2 \; dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \alpha^4 |w|^2 \; dy \right), \quad (4.4.26)$$

où on a utilisé

$$- 4s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 ((\nabla w) + (\nabla w)^*) n \cdot w \; d\Gamma + 8s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (\nabla w)^* n \cdot n (w \cdot n) \; d\Gamma$$
$$= -4s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (((\nabla w) + (\nabla w)^*) n)_\tau \cdot w_\tau \; d\Gamma.$$

Etape 2 : On trouve une inégalité de Carleman pour $\widetilde{w} = e^{s\widetilde{\alpha}}\psi$ avec $\widetilde{\alpha} = e^{-\lambda\eta}$, les calculs sont analogues à ceux qui précèdent et on obtient les mêmes termes à un changement de signe près. On obtient alors

$$\langle (\widetilde{M}\widetilde{w}), (\widetilde{N}\widetilde{w}) \rangle \geqslant 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)(\nabla\widetilde{w} + (\nabla\widetilde{w})^*) n \cdot (\nabla\widetilde{w} n) \; d\Gamma - s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n) |\nabla\widetilde{w}|^2 \; d\Gamma$$
$$- 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n) \nabla\widetilde{w} : (\nabla\widetilde{w})^* \; d\Gamma + 2s\lambda \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)(\nabla\widetilde{w} n) \cdot ((\nabla\widetilde{w})^* n) \; d\Gamma$$
$$- 4s\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (\nabla\widetilde{w} n + (\nabla\widetilde{w})^* n)_\tau \cdot \widetilde{w}_\tau \; d\Gamma + 4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 ((\nabla\widetilde{w})^* n) \cdot n (\widetilde{w} \cdot n) \; d\Gamma$$
$$+ 2s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)^3 |\widetilde{w} \cdot n|^2 \; d\Gamma + s^3\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)^3 |\widetilde{w}|^2 \, d\Gamma$$
$$+ 2s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \widetilde{\alpha}^2 |\nabla\widetilde{w}|^2 \; dy + 5s^2\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta \cdot n)^3 |\widetilde{w} \cdot n|^2 \; d\Gamma$$
$$- \varepsilon \left(s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \widetilde{\alpha}^2 |\nabla\widetilde{w}|^2 \; dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \widetilde{\alpha}^4 |\widetilde{w}|^2 \; dy \right). \quad (4.4.27)$$

Etape 3 : Dans cette partie, on traite les intégrales sur le bord. On note que sur $\partial\mathcal{F}$, on a

$$\nabla w_i = e^s(\nabla\psi + s\lambda\nabla\eta\psi_i), \quad \nabla\widetilde{w}_i = e^s(\nabla\psi - s\lambda\nabla\eta\psi_i), \quad \text{sur } \partial\mathcal{F}. \tag{4.4.28}$$

Alors,

$$\nabla wn = e^s(\nabla\psi n + s\lambda(\nabla\eta\cdot n)\psi), \quad \nabla\widetilde{w}n = e^s(\nabla\psi n - s\lambda(\nabla\eta\cdot n)\psi), \quad \text{sur } \partial\mathcal{F}, \tag{4.4.29}$$

et

$$(\nabla w)^* n = e^s((\nabla\psi)^* n + s\lambda(\psi\cdot n)\nabla\eta), \quad (\nabla\widetilde{w})^* n = e^s((\nabla\psi)^* n - s\lambda(\psi\cdot n)\nabla\eta), \quad \text{sur } \partial\mathcal{F}. \tag{4.4.30}$$

Les termes au bord dans (4.4.26) sont réduits à

$$\begin{aligned}
S = &-2s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)(\nabla w + (\nabla w)^*)n\cdot(\nabla wn)\ d\Gamma + s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)\left|\nabla w\right|^2\ d\Gamma \\
&+ 2s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)\nabla w : (\nabla w)^*\ d\Gamma - 2s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)(\nabla wn)\cdot((\nabla w)^* n)\ d\Gamma \\
&- 4s\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}}\left|\nabla\eta\right|^2(\nabla wn + (\nabla w)^* n)_\tau\cdot w_\tau\ d\Gamma + 4s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}}\left|\nabla\eta\right|^2((\nabla w)^* n)\cdot n(w\cdot n)\ d\Gamma \\
&- 2s^3\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\cdot n\right|^2\ d\Gamma - s^3\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\right|^2 d\Gamma - 5s^2\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)^3\left|w\cdot n\right|^2\ d\Gamma.
\end{aligned}$$

Les termes au bord dans (4.4.27) s'écrivent

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} = &\ 2s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)(\nabla\widetilde{w} + (\nabla\widetilde{w})^*)n\cdot(\nabla\widetilde{w}n)\ d\Gamma - s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)\left|\nabla\widetilde{w}\right|^2\ d\Gamma \\
&- 2s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)\nabla\widetilde{w} : (\nabla\widetilde{w})^*\ d\Gamma + 2s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)(\nabla\widetilde{w}n)\cdot((\nabla\widetilde{w})^* n)\ d\Gamma \\
&- 4s\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}}\left|\nabla\eta\right|^2(\nabla\widetilde{w}n + (\nabla\widetilde{w})^* n)_\tau\cdot\widetilde{w}_\tau\ d\Gamma + 4s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}}\left|\nabla\eta\right|^2((\nabla\widetilde{w})^* n)\cdot n(\widetilde{w}\cdot n)\ d\Gamma \\
&+ 2s^3\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)^3\left|\widetilde{w}\cdot n\right|^2\ d\Gamma + s^3\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)^3\left|\widetilde{w}\right|^2 d\Gamma d\Gamma + 5s^2\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}}(\nabla\eta\cdot n)^3\left|\widetilde{w}\cdot n\right|^2\ d\Gamma.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\alpha = \widetilde{\alpha} = 1$ et $w = \widetilde{w}$ sur $\partial\mathcal{F}$, les termes au bord sont réduits à

$$
\begin{aligned}
S + \widetilde{S} = -2s\lambda\Bigg(& \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)(\nabla w + (\nabla w)^*)n\cdot(\nabla w n)\ d\Gamma \\
& - \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)(\nabla\widetilde{w} + (\nabla\widetilde{w})^*)n\cdot(\nabla\widetilde{w} n)\ d\Gamma\Bigg) \\
& + s\lambda\left(\int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)\left|\nabla w\right|^2\ d\Gamma - \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)\left|\nabla\widetilde{w}\right|^2\ d\Gamma\right) \\
& + 2s\lambda\left(\int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)\nabla w : (\nabla w)^*\ d\Gamma - \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)\nabla\widetilde{w} : (\nabla\widetilde{w})^*\ d\Gamma\right) \\
& - 2s\lambda\left(\int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)(\nabla w n)\cdot((\nabla w)^* n)\ d\Gamma - \int_{\partial\mathcal{F}} (\nabla\eta\cdot n)(\nabla\widetilde{w} n)\cdot((\nabla\widetilde{w})^* n)\ d\Gamma\right) \\
& - 4s\lambda^2\left(\int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla w n + (\nabla w)^* n)_\tau\cdot w_\tau\ d\Gamma + \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\widetilde{w} n + (\nabla\widetilde{w})^* n)_\tau\cdot \widetilde{w}_\tau\ d\Gamma\right) \\
& + 4s^2\lambda^2\left(\int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 ((\nabla w)^* n)\cdot n(w\cdot n)\ d\Gamma + \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 ((\nabla\widetilde{w})^* n)\cdot n(\widetilde{w}\cdot n)\ d\Gamma\right) = \sum_{i=1}^{6} I_i.
\end{aligned}
$$

De (4.4.28), (4.4.29), (4.4.30) et $(4.4.2)_4$, on trouve

$$
I_1 + I_4 = -8s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n + (\nabla\psi)^* n)\cdot\psi\ d\Gamma - 8s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n)\ d\Gamma.
$$

$$
I_2 = 4s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 \nabla\psi n\cdot\psi\ d\Gamma,
$$

$$
I_3 = 8s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi)^* n\cdot\psi\ d\Gamma,
$$

$$
I_5 = 8\beta s\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 \left|\psi_\tau\right|^2\ d\Gamma - 8s\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 b\cdot\psi\ d\Gamma,
$$

$$
I_6 = 8s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n)\ d\Gamma.
$$

Donc, on a

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_4 &= -8s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n + (\nabla\psi)^* n)_\tau\cdot\psi_\tau\ d\Gamma - 24s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n)\ d\Gamma \\
&= 8\beta s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 \left|\psi_\tau\right|^2\ d\Gamma - 8s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 b\cdot\psi\ d\Gamma - 24s^2\lambda^2\int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s}\left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n)\ d\Gamma,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n)_\tau \cdot \psi_\tau \; d\Gamma + 4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n) \cdot n(\psi\cdot n) \; d\Gamma \\
&= -4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi)^* n_\tau \cdot \psi_\tau \; d\Gamma - 4s^2\lambda^2\beta \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\psi_\tau\right|^2 \; d\Gamma \\
&\qquad + 4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 b_\tau \cdot \psi_\tau \; d\Gamma + 4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n) \cdot n(\psi\cdot n) \; d\Gamma.
\end{aligned}
$$

On note

$$
-4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 \left[(\nabla\psi)^* n\right]_\tau \cdot \psi_\tau \, d\Gamma = -4s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 \left[\nabla_\tau(a\cdot n)\cdot\psi_\tau - (\nabla n\tau\cdot\psi)(\psi\cdot\tau)\right] \; d\Gamma.
$$

En utilisant l'inégalité dans [40, Théorème II.4.1] avec $r = 2$, $q = 2$, on obtient

$$
s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\psi\right|^2 \; d\Gamma \leqslant C\left(s\lambda \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\psi\right|^2 \; dy + s^3\lambda^3 \int_{\mathcal{F}} \left|\psi\right|^2 \; dy\right).
$$

En appliquant le même argument, on obtient pour I_3

$$
\begin{aligned}
I_3 &= 8s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 ((\nabla\psi)^* n)_\tau \cdot \psi_\tau \; d\Gamma + 8s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n) \cdot n(\psi\cdot n) \; d\Gamma \\
&= 8s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 \left[\nabla_\tau(a\cdot n)\cdot\psi_\tau - (\nabla n\tau\cdot\psi)(\psi\cdot\tau)\right] \; d\Gamma + 8s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n)\cdot n(\psi\cdot n) \, d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Donc, en combinant toutes ces inégalités, on obtient

$$
\begin{aligned}
&s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla\psi\right|^2 \; dy + s^2\lambda^2\beta e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\psi_\tau\right|^2 d\Gamma \\
&\qquad \leqslant \varepsilon s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4 \left|\psi\right|^2 \; dy + \varepsilon s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 \left|\nabla\psi\right|^2 \; dy \\
&\qquad + C\left(\int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha \left|f\right|^2 \; dy + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla(a\cdot n)\tau\right|^2 d\Gamma + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|b\right|^2 \; d\Gamma\right) \\
&\qquad + 4s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n) \; d\Gamma.
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que $|\nabla\eta| > 0$ sur $\mathcal{F}\backslash\mathcal{O}_\eta$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^2 \left|\nabla\psi\right|^2 \; dy + s^2\lambda^2\beta e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\psi_\tau\right|^2 d\Gamma \\
&\qquad \leqslant \varepsilon s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4 \left|\psi\right|^2 \; dy + \varepsilon s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 \left|\nabla\psi\right|^2 \; dy \\
&\qquad + C\left(\int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha \left|f\right|^2 \; dy + s^2\lambda^2 \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} \left|\nabla(a\cdot n)\tau\right|^2 d\Gamma + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|b\right|^2 \; d\Gamma\right) \\
&\qquad + 4s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n) \; d\Gamma.
\end{aligned}
$$

On ajoute le terme $s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy$ dans les deux côtés de la dernière équation pour obtenir

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy + s^2\lambda^2\beta \int_{\partial\mathcal{F}} e^{2s} |\psi_\tau|^2 \, d\Gamma \\
\leqslant \varepsilon s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy + \varepsilon s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy \\
+ C\Big(\int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha |f|^2 \, dy + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla(a\cdot n)\tau|^2 \, d\Gamma + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |b|^2 \, d\Gamma \Big) \\
+ 4s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n) \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité suivante prouvée dans [28, Lemme 3]

$$s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy \leqslant C \left(s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy \right). \tag{4.4.31}$$

Donc, pour s et λ suffisamment grands, on obtient

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy + s^2\lambda^2\beta e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\psi_\tau|^2 \, d\Gamma \\
\leqslant C\Big(s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy + s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy + \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha |f|^2 \, dy \\
+ s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla(a\cdot n)\tau|^2 \, d\Gamma + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |b|^2 \, d\Gamma \Big) \\
+ 4s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (\nabla\psi n\cdot n)(\psi\cdot n) \, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.4.32}$$

On rappelle que

$$\nabla\times\psi = \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y_2}.$$

Puisque ψ est de divergence nulle, on a

$$\Delta\psi = -\nabla\times(\nabla\times\psi),$$

où on a utilisé le fait que pour toute fonction scalaire $a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\nabla\times a = \begin{pmatrix} \partial_2 a \\ -\partial_1 a \end{pmatrix}.$$

On rappelle la formule de Green

$$\int_{\mathcal{F}} \Delta\psi\cdot\widehat{v} \, dy = -\int_{\mathcal{F}} (\nabla\times\psi)\cdot(\nabla\times\widehat{v}) \, dy - \int_{\partial\mathcal{F}} (\widehat{v}\cdot\tau)(\nabla\times\psi) \, d\Gamma, \quad \forall\widehat{v}\in[H^1(\mathcal{F})]^2,$$

avec $\tau = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$. Alors, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (\nabla\psi n \cdot n)(\psi \cdot n)\, d\Gamma &= \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \nabla\psi n \cdot \psi_n \, d\Gamma \\ &= \int_{\mathcal{F}} \nabla\psi : \nabla\widehat{v}\, dy - \int_{\mathcal{F}} (\nabla\times\psi)\cdot(\nabla\times\widehat{v})\, dy - \int_{\partial\mathcal{F}} (\widehat{v}\cdot\tau)(\nabla\times\psi)\, d\Gamma,\end{aligned}$$

où $\widehat{v}$ est une fonction dans $[H^1(\mathcal{F})]^2$ telle que $\widehat{v} = |\nabla\eta|^2 \psi_n$ sur $\partial\mathcal{F}$ et

$$\|\widehat{v}\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2} \leqslant C \|\psi_n\|_{[H^{1/2}(\partial\mathcal{F})]^2}.$$

Donc, le dernier terme du côté droit de l'inégalité (4.4.32) donne

$$s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 (\nabla\psi n \cdot n)(\psi \cdot n)\, d\Gamma \leqslant \varepsilon s\lambda^2 e^{2s} \int_{\mathcal{F}} |\nabla\psi|^2 \, dy + Cs^3\lambda^2 e^{2s} \|\psi_n\|^2_{[H^{1/2}(\partial\mathcal{F})]^2}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}&s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy + s^2\lambda^2\beta e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\psi_\tau|^2 \, d\Gamma \\ &\quad\leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy + s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy + \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha |f|^2 \, dy \\ &\qquad + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla(a\cdot n)\tau|^2 \, d\Gamma + s^3\lambda^2 e^{2s} \|\psi_n\|^2_{[H^{1/2}(\partial\mathcal{F})]^2} + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} |b|^2 \, d\Gamma\Bigg).\end{aligned}$$

Pour absorber le deuxième terme au second membre de l'inégalité ci-dessus, on procède comme [39, Inégalité (1.62)] qui montre que l'intégrale de $e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2$ sur $\mathcal{O}_\eta$ peut être estimée par $e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2$ sur l'ouvert $\mathcal{O}$.

En effet, on définit la fonction $\theta \in C_0^2(\overline{\mathcal{O}})$ telle que $\theta \equiv 1$ dans $\mathcal{O}_\eta$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. On obtient

$$s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{2s\alpha}\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy \leqslant s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\theta\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy,$$

D'où

$$\begin{aligned}s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\theta\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy &= -s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\theta\alpha^2 \Delta\psi\cdot\psi \, dy - s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\alpha^2 (\nabla\theta\cdot\nabla)\psi\cdot\psi \, dy \\ &\quad - 2s\lambda^3 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\theta\alpha^2 (\nabla\eta\cdot\nabla)\psi\cdot\psi \, dy - 2s^2\lambda^3 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\theta\alpha^3 \nabla\eta\nabla\psi\cdot\psi \, dy \\ &\leqslant C\Bigg(\int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha} |\Delta\psi|^2 \, dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\alpha^4 |\psi|^2 \, dy + \varepsilon s\lambda^2 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\theta\alpha^2 |\nabla\psi|^2 \, dy\Bigg).\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^2 \left|\nabla\psi\right|^2 \, dy + s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha^4 \left|\psi\right|^2 \, d\Gamma + s^2\lambda^2\beta e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\psi_\tau\right|^2 d\Gamma \\
\leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4 \int_{\mathcal{O}} e^{2s\alpha}\alpha^4 \left|\psi\right|^2 \, dy + \int_{\mathcal{F}} e^{2s\alpha}\alpha \left|f\right|^2 \, dy + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla(a\cdot n)\tau\right|^2 d\Gamma \\
+ s^3\lambda^2 e^{2s} \left\|\psi_n\right\|^2_{[H^{1/2}(\partial\mathcal{F})]^2} + s^2\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{F}} \left|b\right|^2 \, d\Gamma \Bigg),
\end{aligned}
$$

pour λ et s suffisamment grands. Finalement, on obtient (4.4.3). □

4.5 Inégalité de Carleman pour le système linéaire

On considère le système adjoint

$$
\left\{
\begin{aligned}
-\partial_t v - \nabla\cdot\mathbb{T}(v,q) &= F_1 \quad \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F}, \\
\nabla\cdot v &= 0 \quad \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F}, \\
m\ell_v'(t) &= \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(v,q)n \, d\Gamma + F_2 \quad t\in(0,T), \\
J(k_v'(t)) &= \int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp\cdot\mathbb{T}(v,q)n \, d\Gamma + F_3 \quad t\in(0,T),
\end{aligned}
\right.
\tag{4.5.1}
$$

avec les conditions au bord

$$
\left\{
\begin{aligned}
v_n &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\
\left[2\nu D(v)n + \beta_\Omega v\right]_\tau &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\
(v - v_{\mathcal{S}})_n &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S}, \\
\left[2\nu D(v)n + \beta_{\mathcal{S}}(v - v_{\mathcal{S}})\right]_\tau &= 0 \quad \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S},
\end{aligned}
\right.
\tag{4.5.2}
$$

où $v_{\mathcal{S}}(y) = \ell_v + k_v y^\perp$, complété avec les conditions initiales

$$
v(T,\cdot) = v_T, \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad \ell_v(T) = \ell_T, \quad k_v(T) = k_T. \tag{4.5.3}
$$

Soit $\eta \in C^2(\overline{\mathcal{F}})$ qui vérifie (4.4.1) avec $\mathcal{O}_\eta \subset\subset \mathcal{O}$ un ouvert non vide.

Soit $\lambda > 0$ et

$$
\beta(t,y) = \frac{e^{\lambda(2N+2)\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda(2N\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}+\eta(y))}}{t^N(T-t)^N}, \tag{4.5.4}
$$

$$
\widehat{\beta}(t) = \max_{y\in\overline{\mathcal{F}}} \beta(t,y) = \frac{e^{\lambda(2N+2)\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}} - e^{\lambda 2N\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{t^N(T-t)^N}, \quad \beta^*(t) = \min_{y\in\overline{\mathcal{F}}} \beta(t,y),
$$

$$
\xi(t,y) = \frac{e^{\lambda(2N\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}+\eta(y))}}{t^N(T-t)^N}, \quad \xi^*(t) = \min_{y\in\overline{\mathcal{F}}} \xi(t,y) = \frac{e^{\lambda 2N\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{t^N(T-t)^N}, \quad \widehat{\xi}(t) = \max_{y\in\overline{\mathcal{F}}} \xi(t,y). \tag{4.5.5}
$$

avec $N > 0$ un entier suffisamment grand.

Proposition 4.5.1. *On suppose que $\mathcal{S}$ n'est pas un disque.*

Il existe $C = C(\Omega, \mathcal{O})$ et $\overline{C} = \overline{C}(\Omega, \mathcal{O})$ telles que pour tous $F_1 \in L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)$, $F_2 \in [L^2(0,T)]^2$ et $F_3 \in L^2(0,T)$ et pour tous $v_T \in [L^2(\mathcal{F})]^2$, $\ell_T \in \mathbb{R}^2$ et $k_T \in \mathbb{R}$, la solution (v, ℓ_v, k_v) du système (4.5.1), (4.5.2) et (4.5.3) vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned} s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-5s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3 \left|\nabla v\right|^2 \ dydt + s^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-5s\widehat{\beta}} (\xi^*)^4 \left|v\right|^2 \ dydt \\ + s^4\lambda^4 \int_0^T e^{-5s\widehat{\beta}} (\xi^*)^4 \left(|\ell_v(t)|^2 + |k_v(t)|^2\right) dt \leqslant \overline{C} \Bigg(s^5\lambda^6 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta^* - 3s\widehat{\beta}} (\widehat{\xi})^5 \left|v\right|^2 \ dydt \\ + \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-3s\widehat{\beta}} \left|F_1\right|^2 \ dydt + \int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}} \left|F_2\right|^2 \ dt + \int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}} \left|F_3\right|^2 \ dt \Bigg). \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

pour tous $\lambda \geqslant C$ et $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$.

Démonstration. **Etape 1 : Décomposition de la solution**

Soit $\rho(t) = e^{-\frac{3}{2}s\widehat{\beta}(t)}$ et on écrit

$$\rho v = \varphi + z, \quad \rho \ell_v = \ell_\varphi + \ell_z, \quad \rho k_v = k_\varphi + k_z, \quad \rho q = q_\varphi + q_z, \tag{4.5.7}$$

où

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \nabla \cdot \mathbb{T}(\varphi, q_\varphi) = -\rho' v & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ m\ell_\varphi'(t) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(\varphi, q_\varphi) n \ d\Gamma + m\rho' \ell_v & t \in (0,T), \\ J(k_\varphi'(t)) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp \cdot \mathbb{T}(\varphi, q_\varphi) n \ d\Gamma + J\rho' k_v & t \in (0,T), \end{cases} \tag{4.5.8}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} \varphi_n = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ \left[2\nu D(\varphi) n + \beta_\Omega \varphi\right]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ (\varphi - \varphi_{\mathcal{S}})_n = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\mathcal{S}, \\ \left[2\nu D(\varphi) n + \beta_{\mathcal{S}} (\varphi - \varphi_{\mathcal{S}})\right]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.5.9}$$

où $\varphi_{\mathcal{S}}(y) = \ell_\varphi + k_\varphi y^\perp$, avec

$$\varphi(T, \cdot) = 0 \ \text{ dans } \mathcal{F}, \quad \ell_\varphi(T) = 0, \quad k_\varphi(T) = 0.$$

et

$$\begin{cases} -\partial_t z - \nabla \cdot \mathbb{T}(z, q_z) = \rho F_1 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ \nabla \cdot z = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ m\ell_z'(t) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(z, q_z) n \ d\Gamma + \rho F_2 & t \in (0,T), \\ J(k_z'(t)) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp \cdot \mathbb{T}(z, q_z) n \ d\Gamma + \rho F_3 & t \in (0,T), \end{cases} \tag{4.5.10}$$

avec les conditions au bord

$$\begin{cases} z_n = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(z)n + \beta_\Omega z]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ (z - z_{\mathcal{S}})_n = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S}, \\ [2\nu D(z)n + \beta_{\mathcal{S}}(z - z_{\mathcal{S}})]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S}, \end{cases}$$

où $z_{\mathcal{S}}(y) = \ell_z + k_z y^\perp$, muni des conditions initiales

$$z(T,\cdot) = 0 \text{ dans } \mathcal{F}, \quad \ell_z(T) = 0, \quad k_z(T) = 0.$$

En utilisant le Théorème 4.2.1, on a

$$\begin{aligned} &\|z\|_{H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|z\|_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\ell_z\|_{[H^1(0,T)]^2} + \|k_z\|_{H^1(0,T)} \\ &\qquad \leqslant C\left(\|\rho F_1\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\rho F_2\|_{[L^2(0,T)]^2} + \|\rho F_3\|_{L^2(0,T)}\right). \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

Etape 2 : On applique le rotationnel à la première équation de (4.5.8), on obtient

$$-\partial_t(\nabla\times\varphi) - \nu\Delta(\nabla\times\varphi) = -\rho'\nabla\times v \quad \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F},$$

qui a la forme de l'équation de la chaleur. On rappelle que

$$\nabla\times\varphi = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2}.$$

On applique l'inégalité (19) de [16] en remplaçant ψ par $\nabla\times\varphi$. On note que dans notre cas, le domaine $\mathcal{F}$ ne dépend pas du temps, donc l'inégalité (19) de [16] est valide sans tenir compte des termes impliquant le flux $\widehat{u}$ (voir aussi la Proposition B.0.5). On trouve

$$\begin{aligned} &s\lambda^2\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi\,|\nabla(\nabla\times\varphi)|^2\ dy + s^3\lambda^4\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^3\,|\nabla\times\varphi|^2\ dy + s^3\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\,|\nabla\times\varphi|^2\,d\Gamma \\ &\qquad \leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4\int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta}\xi^3\,|\nabla\times\varphi|^2\ dy + s\lambda\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^*\,|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau|^2\,d\Gamma \\ &\quad + s^{-1}\lambda^{-1}\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1}\,|\nabla\times\partial_t\varphi|^2\ d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\rho')^2\,|\nabla\times v|^2\ dydt\Bigg). \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

En utilisant la démonstration dans [16, pp.6-7], on traite le terme local qui apparaît au second membre de l'inégalité (4.5.12), on obtient

$$\begin{aligned} &s\lambda^2\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi\,|\nabla(\nabla\times\varphi)|^2\ dydt + s^3\lambda^4\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^3\,|\nabla\times\varphi|^2\ dydt \\ &\qquad + s^3\lambda^3\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\,|\nabla\times\varphi|^2\ d\Gamma dt \leqslant C\Bigg(s^5\lambda^6\int_0^T\int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta}\xi^5\,|\varphi|^2\ dydt \\ &\quad + s\lambda\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^*\,|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau|^2\ d\Gamma dt + s^{-1}\lambda^{-1}\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1}\,|\nabla\times\partial_t\varphi|^2\ d\Gamma dt \\ &\qquad + \int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\rho')^2\,|\nabla\times v|^2\ dydt\Bigg), \end{aligned} \tag{4.5.13}$$

pour $\lambda \geqslant C$ et $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$. On constate que φ satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\nabla \times (\nabla \times \varphi) & \text{in} \quad \mathcal{F}, \\ \nabla \cdot \varphi = 0 & \text{in} \quad \mathcal{F}, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites (4.5.9). On applique l'inégalité de Carleman prouvé dans la Proposition 4.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} s^2\lambda^2 \int_\Omega e^{2se^{\lambda\eta}} e^{2\lambda\eta} |\nabla\varphi|^2 \ dy + s^4\lambda^4 \int_\Omega e^{2se^{\lambda\eta}} e^{4\lambda\eta} |\varphi|^2 \ dy \\ \leqslant C\Bigg(s^4\lambda^4 \int_{\mathcal{O}} e^{2se^{\lambda\eta}} e^{4\lambda\eta} |\varphi|^2 \ dy + s \int_{\mathcal{F}} e^{2se^{\lambda\eta}} e^{\lambda\eta} |\nabla \times (\nabla \times \varphi)|^2 \ dy \\ + \beta_{\mathcal{S}} s^3\lambda^2 e^{2s} \int_{\partial\mathcal{S}} |(\varphi_{\mathcal{S}})_\tau|^2 \ d\Gamma + s^4\lambda^2 e^{2s} \|\varphi_{\mathcal{S}} \cdot n\|^2_{H^{3/2}(\partial\mathcal{S})} \Bigg), \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

où $a = \varphi_{\mathcal{S}} 1_{\partial\mathcal{S}}$ et $b = \beta_{\mathcal{S}} (\varphi_{\mathcal{S}})_\tau 1_{\partial\mathcal{S}}$. On remplace s dans (4.5.14) par $\dfrac{se^{2N\lambda\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{t^N(T-t)^N}$. On multiplie l'équation (4.5.14) par

$$e^{-2s\dfrac{e^{(2N+2)\lambda\|\eta\|_{L^\infty(\Omega)}}}{t^N(T-t)^N}},$$

et on intègre sur $(0,T)$, on trouve

$$\begin{aligned} s^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \xi^2 |\nabla\varphi|^2 \ dydt + s^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \xi^4 |\varphi|^2 \ dydt \\ \leqslant C\Bigg(s^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta} \xi^3 |\varphi|^2 \ dydt + s \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \xi |\nabla \times (\nabla \times \varphi)|^2 \ dydt \\ + \beta_{\mathcal{S}} s^3\lambda^2 \int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3 \int_{\partial\mathcal{S}} |(\varphi_{\mathcal{S}})_\tau|^2 \ d\Gamma \ dt \\ + s^4\lambda^2 \int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^4 \|\varphi_{\mathcal{S}} \cdot n\|^2_{H^{3/2}(\partial\mathcal{S})} \ dt \Bigg). \end{aligned} \tag{4.5.15}$$

On applique l'estimation obtenue dans [3, Théorème 2.2], on a

$$\|\varphi\|^2_{[H^1(\mathcal{F})]^2} \leqslant C \left(\|\varphi\|^2_{[L^2(\mathcal{F})]^2} + \|\nabla \cdot \varphi\|^2_{L^2(\mathcal{F})} + \|\nabla \times \varphi\|^2_{[L^2(\mathcal{F})]^2} + \|\varphi_{\mathcal{S}} \cdot n\|^2_{H^{1/2}(\partial\mathcal{S})} \right). \tag{4.5.16}$$

Donc, en multipliant (4.5.16) par $s^3\lambda^4 e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3$, on obtient

$$\begin{aligned} s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3 |\nabla\varphi|^2 \ dydt \leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3 |\varphi|^2 \ dydt \\ + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3 |\nabla \times \varphi|^2 \ dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3 \|\varphi_{\mathcal{S}} \cdot n\|^2_{H^{1/2}(\partial\mathcal{S})} \ dt \Bigg). \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

On combine (4.5.17), (4.5.15) et (4.5.13), on déduit

$$
\begin{aligned}
s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3 \left|\nabla\varphi\right|^2 \, dydt + s^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^4 \left|\varphi\right|^2 \, dydt \\
+ s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3 \left|\nabla\times\varphi\right|^2 \, d\Gamma dt \leqslant C\Bigg(s^5\lambda^6 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta}\xi^5 \left|\varphi\right|^2 \, dydt \\
+ s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^* \left|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau\right|^2 \, d\Gamma dt + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1} \left|\nabla\times\varphi_t\right|^2 \, d\Gamma dt \\
+ \beta_{\mathcal{S}} s^3\lambda^2 \int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3 \int_{\partial\mathcal{S}} \left|(\varphi_{\mathcal{S}})_\tau\right|^2 \, d\Gamma \, dt + s^4\lambda^2 \int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4 \left\|\varphi_{\mathcal{S}}\cdot n\right\|^2_{H^{3/2}(\partial\mathcal{S})} \, dt \\
+ \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\rho')^2 \left|\nabla\times v\right|^2 \, dydt \Bigg). \qquad (4.5.18)
\end{aligned}
$$

On prend s et λ assez grands, le cinquième terme au second membre de l'inégalité (4.5.18) peut être absorbé. En effet, puisque $\varphi_{\mathcal{S}}$ est un déplacement rigide, de [82, Lemme 2.2], on a

$$
\int_{\mathcal{F}} \left|\varphi(t,\cdot)\right|^2 \, dy \geqslant C \left\|\varphi_{\mathcal{S}}(t)\cdot n\right\|^2_{H^{3/2}(\partial\mathcal{S})}, \qquad (4.5.19)
$$

pour toute forme géométrique du solide $\mathcal{S}$. De plus, on a la relation suivante

$$
(\nabla\times\varphi)\,\tau = \nabla\varphi n - (\nabla\varphi)^* n, \quad \text{sur } \partial\mathcal{F}, \qquad (4.5.20)
$$

où $\tau = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$. En multipliant (4.5.20) par τ, on obtient

$$
\nabla\times\varphi = (\nabla\varphi n)\cdot\tau - ((\nabla\varphi)^* n)\cdot\tau, \quad \text{sur } \partial\mathcal{F}. \qquad (4.5.21)
$$

D'un autre côté, on a

$$
\begin{aligned}
((\nabla\varphi)^* n)\cdot\tau = \sum_{i,j} \partial_i\varphi_j n_j \tau_i = \sum_{i,j} \partial_i(\varphi_j n_j)\tau_i - \sum_{i,j} \partial_i n_j \varphi_j \tau_i \\
= \nabla(\varphi\cdot n)\cdot\tau - \nabla n\tau\cdot\varphi, \quad \text{sur } \partial\mathcal{F}. \qquad (4.5.22)
\end{aligned}
$$

En utilisant les conditions au bord (4.5.9), on peut écrire

$$
\beta_{\mathcal{S}}(\varphi_{\mathcal{S}})_\tau = \nu\left(\nabla\varphi n + (\nabla\varphi)^* n\right)_\tau + \beta_{\mathcal{S}}\varphi_\tau, \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}. \qquad (4.5.23)
$$

En utilisant (4.5.23), (4.5.22) et (4.5.21) , on a

$$
\beta_{\mathcal{S}} \int_{\partial\mathcal{S}} \left|(\varphi_{\mathcal{S}})_\tau\right|^2 \, d\Gamma \leqslant C\left(\int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla\times\varphi\right|^2 \, d\Gamma + \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\varphi\right|^2 \, d\Gamma + \left\|\varphi_{\mathcal{S}}\cdot n\right\|^2_{H^{3/2}(\partial\mathcal{S})} \right). \qquad (4.5.24)
$$

On multiplie (4.5.24) par $s^3\lambda^3 e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3$ et on intègre sur $(0,T)$, on obtient

$$s^3\lambda^3\int_0^T\int_{\partial\mathcal{S}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|(\varphi_{\mathcal{S}})_\tau\right|^2\ d\Gamma dt \leqslant C\Bigg(s^3\lambda^3\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|\nabla\times\varphi\right|^2\ d\Gamma dt$$
$$+ s^3\lambda^3\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|\varphi\right|^2\ d\Gamma dt + s^3\lambda^3\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left\|\varphi_{\mathcal{S}}\cdot n\right\|^2_{H^{3/2}(\partial\mathcal{S})}\ dt\Bigg). \quad (4.5.25)$$

On utilise l'inégalité dans [40, Théorème II.4.1] avec $r=2$, $q=2$, on obtient

$$s^3\lambda^3\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|\varphi\right|^2\ d\Gamma \leqslant C\left(s^3\lambda^3\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|\nabla\varphi\right|^2\ dy + s^3\lambda^3\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|\varphi\right|^2\ dy\right). \quad (4.5.26)$$

Donc, en combinant (4.5.26), (4.5.25), (4.5.18) et en utilisant (4.5.19), on a

$$s^3\lambda^4\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|\nabla\varphi\right|^2\ dydt + s^4\lambda^4\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^4\left|\varphi\right|^2\ dydt$$
$$+ s^4\lambda^4\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\left|\ell_\varphi(t)\right|^2\ dt + s^3\lambda^3\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|k_\varphi(t)\right|^2\ dt$$
$$\leqslant C\Bigg(s^5\lambda^6\int_0^T\int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta}\xi^5\left|\varphi\right|^2\ dydt + s\lambda\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^*\left|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau\right|^2\ d\Gamma dt$$
$$+ s^{-1}\lambda^{-1}\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1}\left|\nabla\times\varphi_t\right|^2\ d\Gamma dt + \int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\rho')^2\left|\nabla\times v\right|^2\ dydt\Bigg). \quad (4.5.27)$$

On précise ici que pour absorber les termes au bord apparaissant au second membre de (4.5.27), on a besoin d'imposer que $\mathcal{S}$ ne soit pas un disque afin d'obtenir des poids suffisants pour manipuler la vitesse angulaire k_φ. En effet, si $\mathcal{S}$ n'est pas un disque, de [82, Lemma 2.2], on a

$$\int_{\mathcal{F}}\left|\varphi(t,\cdot)\right|^2\ dy \geqslant C\left|k_\varphi(t)\right|^2. \quad (4.5.28)$$

On traite le dernier terme qui est au second membre de (4.5.27). On note que $|\rho'|\leqslant Cs\rho(\xi^*)^{1+1/N}$, alors, on obtient

$$\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\rho')^2\left|\nabla\times v\right|^2\ dydt = \int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\rho')^2(\rho)^{-2}\left|\nabla\times\rho v\right|^2\ dydt$$
$$\leqslant Cs^2\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\xi^*)^3\left(\left|\nabla\times\varphi\right|^2+\left|\nabla\times z\right|^2\right)\ dydt, \quad (4.5.29)$$

pour $N\geqslant 2$. Du fait que $s^2e^{-2s\beta}(\xi^*)^3$ est borné, en appliquant (4.5.11) et en utilisant (4.5.28),

l'inégalité (4.5.27) est réduite à

$$
\begin{aligned}
s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\xi^*)^3 \left|\nabla\varphi\right|^2 \, dydt + s^4\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^4 \left|\varphi\right|^2 \, dydt \\
+ s^4\lambda^4 \int_0^T e^{-2s\beta}(\xi^*)^4 \left(\left|\ell_\varphi(t)\right|^2 + \left|k_\varphi(t)\right|^2\right) dt \leqslant C\Bigg(s^5\lambda^6 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta}\xi^5 \left|\varphi\right|^2 \, dydt \\
+ s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^* \left|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau\right|^2 \, d\Gamma dt + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\xi^*)^{-1} \left|\nabla\times\varphi_t\right|^2 \, d\Gamma dt \\
+ \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-3s\widehat{\beta}} \left|F_1\right|^2 \, dydt + \int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}}(\left|F_2\right|^2 + \left|F_3\right|^2) \, dt\Bigg), \quad (4.5.30)
\end{aligned}
$$

pour $\lambda \geqslant C$ et $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$.

Etape 3 : Il reste à estimer les deux termes

$$
s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^* \left|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau\right|^2 \, d\Gamma dt, \quad s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1} \left|\nabla\times\varphi_t\right|^2 \, d\Gamma dt. \quad (4.5.31)
$$

Pour ce faire, on pose $\zeta_1(t) = s^{1/2}\lambda^{1/2}e^{-s\widehat{\beta}(t)}(\xi^*)^{1/2}(t)$. Puisque $(\varphi, q_\varphi, \ell_\varphi, k_\varphi)$ vérifie le système (4.5.8) et (4.5.9), on déduit que $(\zeta_1\varphi, \zeta_1 q_\varphi, \zeta_1\ell_\varphi, \zeta_1 k_\varphi)$ satisfait le système suivant

$$
\begin{cases}
-\partial_t(\zeta_1\varphi) - \nabla\cdot\mathbb{T}(\zeta_1\varphi, \zeta_1 q_\varphi) = -\zeta_1'\varphi - \zeta_1\rho' v & \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F}, \\
\nabla\cdot(\zeta_1\varphi) = 0 & \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F}, \\
m(\zeta_1\ell_\varphi)' = \displaystyle\int_{\partial S} \mathbb{T}(\zeta_1\varphi, \zeta_1 q_\varphi)n \, d\Gamma + m\zeta_1'\ell_\varphi + m\zeta_1\rho'\ell_v & t\in(0,T), \\
J(\zeta_1 k_\varphi)'(t) = \displaystyle\int_{\partial S} y^\perp\cdot\mathbb{T}((\zeta_1\varphi), \zeta_1 q_\varphi)n \, d\Gamma + J\zeta_1' k_\varphi + J\zeta_1\rho' k_v & t\in(0,T),
\end{cases}
$$

avec les conditions au bord

$$
\begin{cases}
(\zeta_1\varphi)_n = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\
\left[2\nu D(\zeta_1\varphi)n + \beta_\Omega(\zeta_1\varphi)\right]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\
(\zeta_1\varphi - \zeta_1\varphi_{\mathcal{S}})_n = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial S, \\
\left[2\nu D(\zeta_1\varphi)n + \beta_{\mathcal{S}}(\zeta_1\varphi - \zeta_1\varphi_{\mathcal{S}})\right]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial S,
\end{cases}
$$

complété avec les conditions initiales

$$
(\zeta_1\varphi)(T,\cdot) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad (\zeta_1\ell_\varphi)(T) = 0, \quad (\zeta_1 k_\varphi)(T) = 0.
$$

On note que dans le système ci-dessus, toutes les conditions finales sont nulles, alors toutes les conditions de compatibilité mentionnées dans la Proposition 4.2.2 sont satisfaites. On procède

exactement comme [16]. En utilisant (4.2.4) et (4.2.8), on obtient par interpolation

$$\begin{aligned}
&\|\zeta_1\varphi\|^2_{L^2(0,T;[H^{23/9}(\mathcal{F})]^2)} + \|\zeta_1\varphi\|^2_{H^1(0,T;[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2)} + \|\zeta_1\ell_\varphi\|^2_{[H^{23/18}(0,T)]^2} + \|\zeta_1 k_\varphi\|^2_{H^{23/18}(0,T)} \\
&\quad \leqslant C\Big(\|\zeta_1'\varphi\|^2_{L^2(0,T;[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2)} + \|\zeta_1'\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\zeta_1'\ell_\varphi\|^2_{[H^{5/18}(0,T)]^2} + \|\zeta_1' k_\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T)} \\
&+ \|\zeta_1\rho' v\|^2_{L^2(0,T;[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2)} + \|\zeta_1\rho' v\|^2_{H^{5/18}(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\zeta_1\rho'\ell_v\|^2_{[H^{5/18}(0,T)]^2} + \|\zeta_1\rho' k_v\|^2_{H^{5/18}(0,T)}\Big).
\end{aligned} \tag{4.5.32}$$

Suivant les arguments de [16, Proposition 2, pp.11-12], on obtient par interpolation

$$\|\varphi(t)\|_{[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2} \leqslant C\,\|\varphi(t)\|^{4/9}_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\,\|\varphi(t)\|^{5/9}_{[H^1(\mathcal{F})]^2}\,.$$

On multiplie l'inégalité par ζ_1', on a

$$\begin{aligned}
&\|\zeta_1'(t)\varphi(t)\|_{[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2} \\
&\leqslant Cs^{2/9}(\xi^*(t))^{2/9-4/(9N)}(\zeta_1'(t))^{4/9}\,\|\varphi(t)\|^{4/9}_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\,s^{-2/9}(\xi^*(t))^{-2/9+4/(9N)}(\zeta_1'(t))^{5/9}\,\|\varphi(t)\|^{5/9}_{[H^1(\mathcal{F})]^2}\,.
\end{aligned} \tag{4.5.33}$$

On applique l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
&\|\zeta_1'(t)\varphi(t)\|_{[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2} \\
&\quad \leqslant \varepsilon s^{1/2}(\xi^*(t))^{1/2-1/N}(\zeta_1'(t))\,\|\varphi(t)\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2} + Cs^{-2/5}(\xi^*(t))^{-2/5+4/(5N)}(\zeta_1'(t))\,\|\varphi(t)\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2}\,.
\end{aligned} \tag{4.5.34}$$

On note

$$|\zeta_1'(t)| \leqslant s^{3/2}\lambda^{1/2}e^{-s\widehat{\beta}(t)}(\xi^*(t))^{3/2+1/N}, \tag{4.5.35}$$

avec $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$. On intègre l'inégalité (4.5.34) sur $(0,T)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\zeta_1'\varphi\|^2_{L^2(0,T;[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2)} &\leqslant \varepsilon s^4\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\,|\varphi|^2\;dydt \\
&\qquad + Cs^{11/5}\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{11/5+18/5N}\,|\nabla\varphi|^2\;dydt,
\end{aligned} \tag{4.5.36}$$

Les termes apparaissant à droite de (4.5.36) peuvent être absorbés par le côté gauche de l'inégalité de Carleman (4.5.30) en prenant $N \geqslant 9/2$. De plus, de (4.5.35), on a

$$\|\zeta_1'\varphi\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant Cs^3\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{3+2/N}\,|\varphi|^2\;dydt,$$

et

$$\|\zeta_1'\varphi\|^2_{H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant C\bigg(s^3\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{3+2/N}\,|\partial_t\varphi|^2\ dydt$$
$$+\, s^5\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{5+4/N}\,|\varphi|^2\ dydt\bigg).$$

Par interpolation, on obtient

$$\|\zeta_1'\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant C\lambda\bigg(\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(s^3(\xi^*)^{3+2/N}\,|\partial_t\varphi|^2)^{5/18}(s^3(\xi^*)^{3+2/N}\,|\varphi|^2)^{13/18}\ dydt$$
$$+\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(s^3(\xi^*)^{3+2/N}\,|\varphi|^2)^{13/18}(s^5(\xi^*)^{5+4/N}\,|\varphi|^2)^{5/18}\ dydt\bigg). \quad (4.5.37)$$

On réécrit les termes à droite de l'inégalité (4.5.37),

$$\|\zeta_1'\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant C\lambda\bigg(\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(s^{2/5}(\xi^*)^{2/5+36/(5N)}\,|\partial_t\varphi|^2)^{5/18}(s^4(\xi^*)^4\,|\varphi|^2)^{13/18}\ dydt$$
$$+\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(s^4(\xi^*)^4\,|\varphi|^2)^{13/18}(s^{12/5}(\xi^*)^{12/5+46/(5N)}\,|\varphi|^2)^{5/18}\ dydt\bigg). \quad (4.5.38)$$

En appliquant encore une fois l'inégalité de Young, on trouve

$$\|\zeta_1'\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant C\bigg(s^4\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\,|\varphi|^2\ dydt$$
$$+\, s^{2/5}\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{2/5+36/5N}\,|\partial_t\varphi|^2\ dydt + s^{12/5}\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{12/5+46/5N}\,|\varphi|^2\ dydt\bigg). \quad (4.5.39)$$

Le premier et le troisième terme à droite de (4.5.39) sont absorbés par les termes de gauche de l'inégalité (4.5.30) en prenant $N \geqslant 23/4$. Le second termes est absorbé par les termes de gauche (4.5.32) en posant $N \geqslant 12$.

En utilisant l'interpolation, on obtient aussi

$$\|\zeta_1'\ell_\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T)} \leqslant C\lambda\bigg(\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(s^3(\xi^*)^{3+2/N}\,|\ell_\varphi'|^2)^{5/18}(s^3(\xi^*)^{3+2/N}\,|\ell_\varphi|^2)^{13/18}\ dydt$$
$$+\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(s^3(\xi^*)^{3+2/N}\,|\ell_\varphi|^2)^{13/18}(s^5(\xi^*)^{5+4/N}\,|\ell_\varphi|^2)^{5/18}\ dydt\bigg). \quad (4.5.40)$$

Les termes à gauche de (4.5.40) peuvent être écrits

$$\|\zeta_1'\ell_\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T)} \leqslant C\lambda\bigg(\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(s^{2/5}(\xi^*)^{2/5+36/(5N)}\,|\ell_\varphi'|^2)^{5/18}(s^4(\xi^*)^4\,|\ell_\varphi|^2)^{13/18}\ dydt$$
$$+\, s^{32/9}\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{32/9+23/(9N)}\,|\ell_\varphi|^2\ dydt\bigg). \quad (4.5.41)$$

Donc, on a

$$\|\zeta_1'\ell_\varphi\|^2_{[H^{5/18}(0,T)]^2} \leqslant C\Bigg(s^4\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\,|\ell_\varphi|^2\ dt$$
$$+\,s^{2/5}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{2/5+36/5N}\left|\ell_\varphi'\right|^2\ dt+s^{32/9}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{32/9+23/9N}\,|\ell_\varphi|^2\ dt\Bigg). \quad (4.5.42)$$

Le premier et le troisième terme à droite de (4.5.42) peuvent être absorbés par les termes de gauche de l'inégalité de Carleman (4.5.30) en posant $N \geqslant 23/4$. Quant au deuxième terme à droite de(4.5.42), il peut être absorbé par les termes qui sont à gauche de (4.5.32) en prenant $N \geqslant 12$. Comme dans le cas $\|\zeta_1'\ell_\varphi\|_{[H^{5/18}(0,T)]^2}$, on obtient

$$\|\zeta_1'k_\varphi\|^2_{H^{5/18}(0,T)} \leqslant C\Bigg(s^4\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\,|k_\varphi|^2\ dt$$
$$+\,s^{2/5}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{2/5+36/5N}\left|k_\varphi'\right|^2\ dt+s^{32/9}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{32/9+23/9N}\,|k_\varphi|^2\ dt\Bigg). \quad (4.5.43)$$

D'un autre côté, on observe $|\zeta_1\rho'| \leqslant Cs^{3/2}\lambda^{1/2}e^{-s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{3/2+1/N}\rho$ et on obtient comme dans le cas (4.5.36)

$$\int_0^T |\zeta_1\rho'|^2\,\|v\|^2_{[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2)}\ dt \leqslant C\int_0^T s^3\lambda e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{3+2/N}\,\|\rho v\|^2_{[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2}\ dt$$
$$\leqslant \varepsilon s^4\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\,|\rho v|^2\ dydt+Cs^{11/5}\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\,|\nabla(\rho v)|^2\ dydt.$$

En utilisant la décomposition (4.5.7) et l'estimation (4.5.11), on déduit de l'inégalité ci-dessus

$$\|\zeta_1\rho' v\|^2_{L^2(0,T;[H^{5/9}(\mathcal{F})]^2)} \leqslant \varepsilon s^4\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\,|\varphi|^2\ dydt$$
$$+\,C\Bigg(s^{11/5}\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}(\xi^*)^3\,|\nabla\varphi|^2\ dydt+\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-3s\widehat{\beta}}\,|F_1|^2\ dydt$$
$$+\int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}}\,|F_2|^2\ dt+\int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}}\,|F_3|^2\ dt\Bigg). \quad (4.5.44)$$

Comme $\rho' = -\dfrac{3}{2}s(\widehat{\beta})'\rho$, on a

$$\|\zeta_1\rho' v\|^2_{H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant Cs^2\Bigg(\left\|\zeta_1(\widehat{\beta})'\rho v\right\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)}+\left\|(\zeta_1(\widehat{\beta})')'\rho v\right\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)}$$
$$+\left\|\zeta_1(\widehat{\beta})'\partial_t(\rho v)\right\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)}\Bigg)$$
$$\leqslant C\left(s^3\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{3+2/N}\,|\partial_t(\rho v)|^2\ dydt+s^5\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{5+4/N}\,|\rho v|^2\ dydt\right),$$

où on a utilisé le fait

$$\left|\zeta_1(\widehat{\beta})'\right|^2 \leqslant Cs\lambda e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{3+2/N},$$

and

$$\left|(\zeta_1(\widehat{\beta})')'\right|^2 \leqslant Cs^3\lambda e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{5+4/N}.$$

En utilisant un argument d'interpolation et l'inégalité de Young, on retrouve de même que pour (4.5.39)

$$\begin{aligned}\|\zeta_1\rho' v\|^2_{H^{5/18}(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} &\leqslant C\Bigg(s^{2/5}\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{2/5+36/(5N)}\left|\partial_t(\rho v)\right|^2\ dydt\\ &+ s^4\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\left|\rho v\right|^2\ dydt + s^{12/5}\lambda\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{12/5+46/(5N)}\left|\rho v\right|^2\ dydt\Bigg). \quad (4.5.45)\end{aligned}$$

On obtient aussi

$$\begin{aligned}\|\zeta_1\rho'\ell_v\|^2_{[H^{5/18}(0,T)]^2} &\leqslant C\Bigg(s^4\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\left|\rho\ell_v\right|^2\ dt\\ &+ s^{2/5}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{2/5+36/5N}\left|(\rho\ell_v)'\right|^2\ dt + s^{32/9}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{32/9+23/9N}\left|\rho\ell_v\right|^2\ dt\Bigg), \quad (4.5.46)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\zeta_1\rho' k_v\|^2_{[H^{5/18}(0,T)]^2} &\leqslant C\Bigg(s^4\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\left|\rho k_v\right|^2\ dt\\ &+ s^{2/5}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{2/5+36/5N}\left|(\rho k_v)'\right|^2\ dt + s^{32/9}\lambda\int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{32/9+23/9N}\left|\rho k_v\right|^2\ dt\Bigg). \quad (4.5.47)\end{aligned}$$

Alors, du fait que $23/9 > 5/2$, on obtient grâce au théorème de trace

$$s\lambda\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^*\left|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau\right|^2\ d\Gamma dt \leqslant C\left\|\zeta_1\varphi\right\|^2_{L^2(0,T;[H^{23/9}(\mathcal{F})]^2}.$$

De (4.5.7), (4.5.32), (4.5.36), (4.5.39), (4.5.42), (4.5.43), (4.5.44), (4.5.45), (4.5.46) et (4.5.47), on déduit

$$\begin{aligned}s\lambda\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^*\left|\nabla(\nabla\times\varphi)\tau\right|^2\ d\Gamma dt &\leqslant Cs^4\lambda\Bigg(\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^4\left|\varphi\right|^2\ dydt\\ &+\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3\left|\nabla\varphi\right|^2\ dydt + \int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\left(\left|\ell_\varphi(t)\right|^2+\left|k_\varphi(t)\right|^2\right)dt\\ &+\int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-3s\widehat{\beta}}\left|F_1\right|^2\ dydt + \int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}}\left|F_2\right|^2\ dt + \int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}}\left|F_3\right|^2\ dt\Bigg). \quad (4.5.48)\end{aligned}$$

Afin d'estimer le second terme dans (4.5.31), on pose $\zeta_2(t) = s^{-1/2}\lambda^{-1/2}e^{-s\beta(t)}(\xi^*)^{-1/2}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\zeta_2\varphi_t\|_{L^2(0,T,[H^{14/9}(\mathcal{F})]^2)} \leqslant C\Big(&\|\zeta_2''\varphi\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\zeta_2''\ell_\varphi\|_{[L^2(0,T)]^2} + \|\zeta_2''k_\varphi\|_{L^2(0,T)} \\ &+ \|(\zeta_2\rho')'v\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|(\zeta_2\rho')'\ell_v\|_{[L^2(0,T)]^2} + \|(\zeta_2\rho')'k_v\|_{L^2(0,T)} \\ &+ \|\rho F_1\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\rho F_2\|_{[L^2(0,T)]^2} + \|\rho F_3\|_{L^2(0,T)}\Big).\end{aligned}$$

On constate que

$$|\zeta_2''| \leqslant Cs^{3/2}\lambda^{-1/2}(\xi^*)^{3/2+2/N}e^{-s\widehat{\beta}},$$

et

$$|(\zeta_2\rho')'| \leqslant Cs^{3/2}\lambda^{-1/2}(\xi^*)^{3/2+2/N}e^{-s\widehat{\beta}}\rho.$$

En utilisant le théorème de trace, on a

$$s^{-1}\lambda^{-1}\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1}\left|\nabla\times\varphi_t\right|^2\ d\Gamma dt \leqslant C\left\|\zeta_2\varphi_t\right\|^2_{L^2(0,T,[H^{14/9}(\mathcal{F})]^2)}.$$

Donc, pour $N \geqslant 4$, $\lambda \geqslant C$ et $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$, on obtient

$$\begin{aligned}s^{-1}\lambda^{-1}\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1}\left|\nabla\times\varphi_t\right|^2\ d\Gamma dt \leqslant Cs^4\lambda\Big(&\int_0^T\int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\left|\varphi\right|^2\ dydt \\ &+ \int_0^T e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^4\left(|\ell_\varphi(t)|^2 + |k_\varphi(t)|^2\right)dt + \int_0^T\int_{\mathcal{F}} e^{-3s\widehat{\beta}}\left|F_1\right|^2\ dydt \\ &+ \int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}}\left|F_2\right|^2\ dt + \int_0^T e^{-3s\widehat{\beta}}\left|F_3\right|^2\ dt\Big).\end{aligned} \tag{4.5.49}$$

En combinant (4.5.30), (4.5.48), (4.5.49) et (4.5.7), on retrouve finalement (4.5.6) avec $N \geqslant 12$, $\lambda \geqslant C$ et $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$. □

4.6 Contrôlabilité à zéro du système linéarisé

Dans cette section, on montre la contrôlabilité à zéro du système linéaire

$$\begin{cases} \partial_t\overline{u} - \nabla\cdot\mathbb{T}(\overline{u},\pi) = v^*1_{\mathcal{O}} + F_1 & \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F}, \\ \nabla\cdot\overline{u} = 0 & \text{dans } (0,T)\times\mathcal{F}, \end{cases} \tag{4.6.1}$$

$$\begin{cases} m\overline{h}''(t) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}}\mathbb{T}(\overline{u},\pi)n\ d\Gamma + F_2 & t\in(0,T), \\ J\overline{\theta}''(t) = -\displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp\cdot\mathbb{T}(\overline{u},\pi)n\ d\Gamma + F_3 & t\in(0,T), \end{cases} \tag{4.6.2}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \overline{u}_n = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ [2\nu D(\overline{u})n + \beta_\Omega \overline{u}]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\Omega, \\ (\overline{u}-\overline{u}_{\mathcal{S}})_n = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S}, \\ [2\nu D(\overline{u})n + \beta_{\mathcal{S}}\,(\overline{u}-\overline{u}_{\mathcal{S}})]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T)\times\partial\mathcal{S}, \end{array}\right. \tag{4.6.3}$$

avec les conditions initiales

$$\overline{u}(0) = u_0, \quad \overline{h}'(0) = \ell^0, \quad \overline{\theta}'(0) = \omega^0, \quad \overline{h}(0) = h^0, \quad \overline{\theta}(0) = \theta^0. \tag{4.6.4}$$

Le système (4.6.1),(4.6.2), (4.6.3), (4.6.4) peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{c} Z'(t) = AZ'(t) + Bv^* + F, \\ a'(t) = \mathcal{C}Z(t), \\ Z(0) = Z^0, \\ a(0) = a^0, \end{array}\right. \tag{4.6.5}$$

où A est défini par (4.2.6) dans la Section 4.2 et

$$B = \mathbb{P}(v^* 1_{\mathcal{O}}), \quad F = \mathbb{P}\left(F_1 1_{\mathcal{F}} + \left(\frac{F_2}{m} + \frac{F_3 y^\perp}{J}\right) 1_{\mathcal{S}}\right).$$

Le vecteur a est défini par $a = (\overline{h}, \overline{\theta})$ et on définit l'opérateur $\mathcal{C}$ pour $Z \in \mathbb{H}$ comme suit

$$\mathcal{C}Z = (\ell_{\overline{u}}, k_{\overline{u}}), \qquad \text{si } Z = \ell_{\overline{u}} + k_{\overline{u}} y^\perp, \text{ dans } \mathcal{S},$$

où $\overline{h}' = \ell_{\overline{u}}$, $\overline{\theta}' = k_{\overline{u}}$. L'équation $Z(0) = Z^0$ correspond aux conditions initiales $\overline{u}(0) = u_0$, $\overline{h}'(0) = \ell^0$, $\overline{\theta}'(0) = \omega^0$ et le vecteur a^0 correspond à $a^0 = (h^0, \theta^0)$.

Fixons $\lambda \geqslant C$, $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$ et considérons

$$\rho_1(t) = \left\{\begin{array}{cl} s^2\lambda^2 e^{-\frac{5}{2}s\widehat{\beta}(T/2)}(\xi^*(T/2))^2 & t \in (0,T/2), \\ s^2\lambda^2 e^{-\frac{5}{2}s\widehat{\beta}(t)}(\xi^*(t))^2 & t \in (T/2,T), \end{array}\right. \tag{4.6.6}$$

$$\rho_2(t) = \left\{\begin{array}{cl} e^{-\frac{3}{2}s\widehat{\beta}(T/2)} & t \in (0,T/2), \\ e^{-\frac{3}{2}s\widehat{\beta}(t)} & t \in (T/2,T), \end{array}\right. \tag{4.6.7}$$

$$\rho_3(t) = \left\{\begin{array}{cl} s^{5/2}\lambda^3 e^{-s\beta^*(T/2)-\frac{3}{2}s\widehat{\beta}(T/2)}(\widehat{\xi}(T/2))^{5/2} & t \in (0,T/2), \\ s^{5/2}\lambda^3 e^{-s\beta^*(t)-\frac{3}{2}s\widehat{\beta}(t)}(\widehat{\xi}(t))^{5/2} & t \in (T/2,T), \end{array}\right. \tag{4.6.8}$$

et

$$\rho_4(t) = \left\{\begin{array}{cl} e^{-\frac{11}{8}s\widehat{\beta}(T/2)} & t \in (0,T/2), \\ e^{-\frac{11}{8}s\widehat{\beta}(t)} & t \in (T/2,T). \end{array}\right. \tag{4.6.9}$$

On note que ρ_i sont des fonctions positives telles que $\rho_i(T) = 0$.

On définit les espaces

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in L^2(0,T;\mathbb{H}) \mid \frac{f}{\rho_1} \in L^2(0,T;\mathbb{H}) \right\},$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ z \in L^2(0,T;\mathbb{H}) \mid \frac{z}{\rho_2} \in L^2(0,T;\mathbb{H}) \right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{ v^* \in L^2(0,T;[L^2(\mathcal{O})]^2) \mid \frac{v^*}{\rho_3} \in L^2(0,T;[L^2(\mathcal{O})]^2) \right\}.$$

Maintenant, on est en mesure d'établir la contrôlabilité à zéro du système (4.6.5)

Proposition 4.6.1. *Il existe un opérateur linéaire borné* $E_T : \mathbb{H} \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{U}$ *tel que pour tout* $(Z^0, a^0, F) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{F}$, *le contrôle* $v^* = E_T(Z^0, a^0, F)$ *est tel que la solution* (Z, a) *de* (4.6.5) *satisfait* $Z \in \mathcal{Z}$ *et* $a(T) = 0$. *De plus, si* $Z^0 \in \mathcal{D}((-A)^{1/2})$, *alors*

$$\frac{Z}{\rho_4} \in L^2(0,T;\mathcal{D}(A)) \cap C([0,T];\mathcal{D}((-A)^{1/2})) \cap H^1(0,T;\mathbb{H}),$$

et on a l'estimation

$$\left\| \frac{Z}{\rho_4} \right\|_{L^2(0,T;\mathcal{D}(A)) \cap C([0,T];\mathcal{D}((-A)^{1/2})) \cap H^1(0,T;\mathbb{H})} \leqslant C \left(\|F\|_{\mathcal{H}} + \left|a^0\right| + \left\|Z^0\right\|_{\mathcal{D}((-A)^{1/2})} \right). \tag{4.6.10}$$

Démonstration. La seconde partie de la Proposition 4.6.1 vient du fait

$$\frac{\rho_i}{\rho_4} \in L^\infty(0,T) \text{ for } i = 1,3, \quad \left| \frac{\rho_4' \rho_2}{(\rho_4)^2} \right| \leqslant \widehat{C} e^{-\frac{1}{8} s \widehat{\beta}(t)} \leqslant C, \quad t \in [0,T].$$

Alors, on utilise [59, Corollaire 4.3], on obtient

$$\frac{Z}{\rho_4} \in L^2(0,T;\mathcal{D}(A)) \cap C([0,T];\mathcal{D}((-A)^{1/2})) \cap H^1(0,T;\mathbb{H}),$$

il s'en suit que (4.6.10) est satisfaite.

On montre maintenant la première partie. La preuve est similaire au [59, Théorème 4.4]. Le système adjoint associé au système linéaire (4.6.1), (4.6.2) et (4.6.3) peut s'écrire

$$\begin{cases} -\partial_t v - \nabla \cdot \mathbb{T}(v,q) = \gamma^1 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ \nabla \cdot v = 0 & \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}, \\ m\ell_v'(t) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(v,q)n \, d\Gamma + \ell_{\gamma^1} + \ell & t \in (0,T), \\ J(k_v'(t)) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp \cdot \mathbb{T}(v,q)n \, d\Gamma + k_{\gamma^1} + k & t \in (0,T), \end{cases} \tag{4.6.11}$$

$$\begin{cases} v_n = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ [2\nu D(v)n + \beta_\Omega v]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ (v - v_{\mathcal{S}})_n = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\mathcal{S}, \\ [2\nu D(v)n + \beta_{\mathcal{S}}(v - v_{\mathcal{S}})]_\tau = 0 & \text{sur } (0,T) \times \partial\mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.6.12}$$

où $v_{\mathcal{S}}(y) = \ell_v + k_v y^\perp$, avec

$$v(T,\cdot) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{F}, \quad \ell_v(T) = 0, \quad k_v(T) = 0.$$

Ici, on a $\gamma^2 = (\ell, k) \in \mathbb{R}^3$ et $\gamma^1 \in L^2(0,T;\mathbb{H})$. De [59, Théorème 4.1], on note que la contrôlabilité à zéro du système (4.6.1), (4.6.2), (4.6.4) est équivalente à montrer l'inégalité d'observabilité

$$\left|\gamma^2\right|^2 + \|v(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^T \|\rho_1 v\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt \leqslant C\left(\int_0^T \left\|\rho_2\gamma^1\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3 v|^2 \ dydt\right). \tag{4.6.13}$$

Soit

$$\rho_i^*(t) = \begin{cases} \rho_i(T-t) & t \in (0,T/2), \\ \rho_i(t) & t \in (T/2,T). \end{cases} \tag{4.6.14}$$

Donc, (4.5.6) fournit l'estimation

$$\int_0^T \|\rho_1^* v\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt \leqslant C\left(\int_0^T \left\|\rho_2^*(\gamma^1 + \mathcal{C}^*\gamma^2)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3^* v|^2 \ dydt\right). \tag{4.6.15}$$

On procède maintenant de même que [18, Proposition 4]. Plus précisément, on considère une fonction positive $\overline{\eta} \in C^1([0,T])$ telle que

$$0 \leqslant \overline{\eta} \leqslant 1 \text{ dans } [0,T], \quad \overline{\eta} = 1 \text{ dans } [0,T/2], \quad \overline{\eta} = 0 \text{ dans } [3T/4,T].$$

Donc $(\overline{\eta}v, \overline{\eta}\ell_v, \overline{\eta}k_v)$ satisfait l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned} &\|\overline{\eta}v\|^2_{L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap C([0,T];[H^1(\mathcal{F})]^1)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\overline{\eta}\ell_v\|^2_{[H^1(0,T)]^2} + \|\overline{\eta}k_v\|^2_{H^1(0,T)} \\ &\quad \leqslant C\left(\|\overline{\eta}'v\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\overline{\eta}'l_v\|^2_{[L^2(0,T)]^2} + \|\overline{\eta}'k_v\|^2_{L^2(0,T)} + \left\|\overline{\eta}(\gamma^1 + \mathcal{C}^*\gamma^2)\right\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{H})}\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\|v\|^2_{L^2(0,T/2;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap C([0,T/2];[H^1(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T/2;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\ell_v\|^2_{[H^1(0,T/2)]^2} + \|k_v\|^2_{H^1(0,T/2)} \\ &\leqslant C\left(\|v\|^2_{L^2(T/2,3T/4;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|l_v\|^2_{[L^2(T/2,3T/4)]^2} + \|k_v\|^2_{L^2(T/2,3T/4)} + \left\|(\gamma^1 + \mathcal{C}^*\gamma^2)\right\|^2_{L^2(0,3T/4;\mathbb{H})}\right). \end{aligned} \tag{4.6.16}$$

En utilisant (4.6.15), on obtient

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{L^2(T/2,3T/4;[L^2(\mathcal{F})]^2)} + \|\ell_v\|^2_{[L^2(T/2,3T/4)]^2} + \|k_v\|^2_{L^2(T/2,3T/4)} &\leqslant C\int_0^T \|\rho_1^* v\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt \\ &\leqslant C\left(\int_0^T \left\|\rho_2^*(\gamma^1 + \mathcal{C}^*\gamma^2)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3^* v|^2 \ dydt\right), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la fonction $\dfrac{1}{\rho_1^*}$ est bornée dans $[T/2, 3T/4]$.

Puisque ρ_1 est constante dans $(0,T/2)$ et $\dfrac{1}{\rho_2}$ est bornée dans $(0,3T/4)$, l'équation (4.6.16) donne

$$\begin{aligned} \|v(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^{T/2} \|\rho_1 v\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt \leqslant C\Bigg(&\int_0^{3T/4} \left\|\rho_2(\gamma^1 + \mathcal{C}^*\gamma^2)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt \\ &+ \int_0^T \left\|\rho_2^*(\gamma^1 + \mathcal{C}^*\gamma^2)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3^* v|^2 \ dydt\Bigg). \end{aligned}$$

Donc, en utilisant $\rho_1^* = \rho_1$ dans $(T/2, T)$, l'estimation (4.6.15) et en utilisant le fait que $\rho_i^* \leqslant \rho_i$ pour $i = 1, 2, 3$ dans $[0, T]$, on obtient

$$\|v(0)\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^T \|\rho_1 v\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt \leqslant C \left(\int_0^T \left\|\rho_2(\gamma^1 + \mathcal{C}^*\gamma^2)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3 v|^2 \ dydt \right).$$

Il reste à prouver

$$\left|\gamma^2\right|^2 \leqslant C \left(\int_0^T \left\|\rho_2 \gamma^1\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3 v|^2 \ dydt \right). \tag{4.6.17}$$

Le résultat s'en suit en utilisant un raisonnement par l'absurde. En effet, on suppose que (4.6.17) n'est pas vraie. Alors, il existe une suite $(\gamma_\kappa^1, \gamma_\kappa^2)_\kappa \in L^2(0, T; \mathbb{H}) \times \mathbb{R}^3$ telle que

$$\left|\gamma_\kappa^2\right| = 1, \tag{4.6.18}$$

et

$$\int_0^T \left\|\rho_2 \gamma_\kappa^1\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dydt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3 v_\kappa|^2 \ dydt \longrightarrow 0. \tag{4.6.19}$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$

$$\gamma_\kappa^1 \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(0, T - \varepsilon; \mathbb{H}),$$

et

$$\gamma_\kappa^2 \longrightarrow \gamma^2 \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

D'autre part, la solution $(v_\kappa)_\kappa$ du système (4.6.11), (4.6.12) associée avec $(\gamma_\kappa^1, \gamma_\kappa^2)$ vérifie l'estimation (en procédant toujours comme [18, Proposition 4] avec $\overline{\eta} = 1$ dans $[0, T - \varepsilon]$ et $\overline{\eta} = 0$ dans $[T - \frac{\varepsilon}{2}, T]$)

$$\begin{aligned} \|v_\kappa\|_{L^2(0,T-\varepsilon;[H^2(\mathcal{F})]^2) \cap H^1(0,T-\varepsilon;[L^2(\mathcal{F})]^2)}^2 + \|q_\kappa\|_{L^2(0,T-\varepsilon;H^1(\mathcal{F}))}^2 + \|(\ell_v)_\kappa\|_{[H^1(0,T-\varepsilon)]^2}^2 + \|(k_v)_\kappa\|_{H^1(0,T-\varepsilon)}^2 \\ \leqslant C \left(\int_0^T \left\|\rho_2(\gamma_\kappa^1 + \mathcal{C}^*\gamma_\kappa^2)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \ dt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |\rho_3 v_\kappa|^2 \ dydt \right). \end{aligned}$$

De l'estimation ci-dessus, on a

$$v_\kappa \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(0, T - \varepsilon; \mathcal{D}(A)) \cap H^1(0, T - \varepsilon; \mathbb{H}),$$

et

$$q_\kappa \rightharpoonup q \text{ dans } L^2(0, T - \varepsilon; H^1(\mathcal{F})).$$

Par conséquent, le couple (v, q) satisfait le système

$$\begin{cases} -\partial_t v - \nabla \cdot \mathbb{T}(v, q) = 0 & \text{dans } (0, T - \varepsilon) \times \mathcal{F}, \\ \nabla \cdot v = 0 & \text{dans } (0, T - \varepsilon) \times \mathcal{F}, \\ m\ell_v'(t) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{T}(v, q) n \ d\Gamma + \ell & t \in (0, T - \varepsilon), \\ J(k_v'(t)) = \displaystyle\int_{\partial\mathcal{S}} y^\perp \cdot \mathbb{T}(v, q) n \ d\Gamma + k & t \in (0, T - \varepsilon), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n = 0 & \text{sur } (0, T-\varepsilon) \times \partial\Omega, \\ [2\nu D(v)n + \beta_\Omega v]_\tau = 0 & \text{sur } (0, T-\varepsilon) \times \partial\Omega, \\ (v - v_{\mathcal{S}})_n = 0 & \text{sur } (0, T-\varepsilon) \times \partial\mathcal{S}, \\ [2\nu D(v)n + \beta_{\mathcal{S}}(v - v_{\mathcal{S}})]_\tau = 0 & \text{sur } (0, T-\varepsilon) \times \partial\mathcal{S}. \end{cases}$$

De plus, de (4.6.19), on a $v = 0$ dans $(0, T-\varepsilon) \times \mathcal{O}$. Alors, la propriété de la continuation unique du système de Stokes (voir par exemple [35]) implique

$$v = \nabla q = 0 \text{ dans } (0, T-\varepsilon) \times \mathcal{F}.$$

Donc, les conditions au bord donnent

$$(\ell_v + k_v y^\perp)_n = 0, \quad \beta_{\mathcal{S}}(\ell_v + k_v y^\perp)_\tau = 0, \quad y \in \partial\mathcal{S}.$$

Puisque $\mathcal{S}$ n'est pas un disque, on obtient $\ell_v = 0$ et $k_v = 0$ dans $(0, T-\varepsilon)$. Alors, on obtient en particulier des équations qui décrivent le mouvement de la structure que $\gamma^2 = (\ell, k) = 0$. Ce qui contredit (4.6.18). □

4.7 Point fixe

Dans cette section, on montre le Théorème 4.1.1 en appliquant un argument de point-fixe. On suit les mêmes étapes que celles exposées dans [59]. Premièrement, on donne quelques estimations utiles sur les termes apparaissant dans (4.3.4), (4.3.5) et (4.3.6). On a le lemme suivant qui est prouvé dans [87].

Lemme 4.7.1. *Soient X et Y satisfaisant les propriétés données dans la Section 4.3. On obtient pour tout $(\overline{u}, \pi) \in [H^2(\mathcal{F})]^2 \times H^1(\mathcal{F})$, les estimations suivantes pour tout $t \in [0, T]$*

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2} \|(\mathcal{L} - \Delta)\overline{u}\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \leqslant C \left(\left\| \frac{\overline{h}'}{\rho_4} \right\|_{[L^\infty(0,T)]^2} + \left\| \frac{\overline{\theta}'}{\rho_4} \right\|_{[L^2(0,T)]^2} \right) \left\| \frac{\overline{u}}{\rho_4(t)} \right\|_{[H^2(\mathcal{F})]^2},$$

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2} \|\mathcal{N}\overline{u}\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \leqslant C \left(1 + \left\| \frac{\overline{h}'}{\rho_4} \right\|_{[L^2(0,T)]^2} + \left\| \frac{\overline{\theta}'}{\rho_4} \right\|_{[L^2(0,T)]^2} \right) \left\| \frac{\overline{u}}{\rho_4(t)} \right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2} \left\| \frac{\overline{u}}{\rho_4(t)} \right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2},$$

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2} \|\mathcal{M}\overline{u}\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \leqslant C \left(\left\| \frac{\overline{h}'}{\rho_4} \right\|_{[L^2(0,T)]^2} + \left\| \frac{\overline{\theta}'}{\rho_4} \right\|_{[L^2(0,T)]^2} \right) \left\| \frac{\overline{u}}{\rho_4(t)} \right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2},$$

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2} \|(\mathcal{G} - \nabla)\pi\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \leqslant C \left(\left\| \frac{\overline{h}'}{\rho_4} \right\|_{[L^\infty(0,T)]^2} + \left\| \frac{\overline{\theta}'}{\rho_4} \right\|_{[L^2(0,T)]^2} \right) \left\| \frac{\pi}{\rho_4(t)} \right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2}.$$

On a aussi

Lemme 4.7.2. *Soient X et Y vérifiant les propriétés énoncées dans la Section 4.3. On obtient pour $(\overline{u},\pi)\in[H^2(\mathcal{F})]^2\times H^1(\mathcal{F})$ les estimations suivantes pour tout $t\in[0,T]$*

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2}\left\|(\mathcal{L}^{(1)}-\mathcal{L}^{(2)})\overline{u}\right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2}$$
$$\leqslant C\left(\left\|\frac{\overline{h}'^{(1)}-\overline{h}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^\infty(0,T)]^2}+\left\|\frac{\overline{\theta}'^{(1)}-\overline{\theta}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^2(0,T)]^2}\right)\left\|\frac{\overline{u}}{\rho_4}\right\|_{[H^2(\mathcal{F})]^2},$$

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2}\left\|(\mathcal{N}^{(1)}-\mathcal{N}^{(2)})\overline{u}\right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2}$$
$$\leqslant C\left(\left\|\frac{\overline{h}'^{(1)}-\overline{h}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^2(0,T)]^2}+\left\|\frac{\overline{\theta}'^{(1)}-\overline{\theta}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^2(0,T)]^2}\right)\left\|\frac{\overline{u}}{\rho_4(t)}\right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2}\left\|\frac{\overline{u}}{\rho_4(t)}\right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2},$$

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2}\left\|(\mathcal{M}^{(1)}-\mathcal{M}^{(2)})\overline{u}\right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2}$$
$$\leqslant C\left(\left\|\frac{\overline{h}'^{(1)}-\overline{h}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^2(0,T)]^2}+\left\|\frac{\overline{\theta}'^{(1)}-\overline{\theta}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^2(0,T)]^2}\right)\left\|\frac{\overline{u}}{\rho_4(t)}\right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2},$$

$$\frac{1}{\rho_4(t)^2}\left\|(\mathcal{G}^{(1)}-\mathcal{G}^{(2)})\pi\right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2}$$
$$\leqslant C\left(\left\|\frac{\overline{h}'^{(1)}-\overline{h}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^\infty(0,T)]^2}+\left\|\frac{\overline{\theta}'^{(1)}-\overline{\theta}'^{(2)}}{\rho_4}\right\|_{[L^2(0,T)]^2}\right)\left\|\frac{\pi}{\rho_4(t)}\right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2}.$$

Maintenant, on est en mesure de prouver le Théorème 4.1.1.

Preuve du Théorème 4.1.1. Pour tout $r>0$, on pose

$$\mathcal{K}_r=\left\{F\in\mathcal{H}\mid\ \left\|\frac{F}{\rho_1}\right\|_{L^2(0,T;\mathbb{H})}\leqslant r\right\}.$$

Soit $F\in\mathcal{K}_r$, on suppose que

$$\left\|u^0\right\|_{[H^1(\mathcal{F})]^2}+\left|\widetilde{\ell^0}\right|+\left|h^0\right|+\left|\omega^0\right|+\left|\theta^0\right|\leqslant r. \tag{4.7.1}$$

De la Proposition 4.6.1, la solution $(\overline{u},\pi,\overline{h},\overline{\theta})$ du système linéaire (4.6.1), (4.6.2), (4.6.4) avec $v^*=E_T(Z^0,a^0,F)$ satisfait $\overline{h}(T)=0$, $\overline{\theta}(T)=0$ et

$$\frac{\overline{u}}{\rho_4}\in L^2(0,T;[H^2(\mathcal{F})]^2)\cap H^1(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2),\quad \frac{\nabla\pi}{\rho_4}\in L^2(0,T;L^2(\mathcal{F})),$$

$$\frac{\overline{h}'}{\rho_4} \in [H^1(0,T)]^2, \quad \frac{\overline{\theta}'}{\rho_4} \in H^1(0,T).$$

En utilisant (4.7.1) et (4.6.10), on obtient

$$\left\| \frac{\overline{u}}{\rho_4} \right\|_{L^2(0,T;\mathcal{D}(A))\cap H^1(0,T;\mathbb{H})\cap C(0,T;(\mathcal{D}(-A))^{1/2})} + \left\| \frac{\nabla \pi}{\rho_4} \right\|_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \leqslant Cr. \tag{4.7.2}$$

En utilisant la condition (4.7.2), on peut construire un changement de variables défini dans la Section 4.3.

On peut donc, définir l'application $\Phi : \mathcal{K}_r \longrightarrow \mathcal{K}_r$, qui pour chaque $F \in \mathcal{K}_r$, fait associer

$$\Phi(F) = \begin{cases} \nu(\mathcal{L} - \Delta)\overline{u} - \mathcal{M}\overline{u} - \mathcal{N}\overline{u} + (\nabla - \mathcal{G})\pi & \text{dans } \mathcal{F}, \\ -mk_{\overline{u}}\ell_{\overline{u}}^{\perp} & \text{dans } \mathcal{S}, \end{cases}$$

où $(\overline{u}, \pi, \overline{h}, \overline{\theta})$ est la solution du système linéaire (4.6.1), (4.6.2) et (4.6.3). On combine le Lemme 4.7.1, l'estimation (4.7.2) et

$$\frac{(\rho_4)^2}{\rho_1} \in L^\infty(0,T),$$

On obtient

$$\left\| \frac{\Phi(F)}{\rho_1} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant C(1+r)^{d+1} r^2.$$

Donc, pour r assez petit, on a $\Phi(\mathcal{K}_r) \subset \mathcal{K}_r$. De même, en utilisant le Lemme 4.7.2, on obtient

$$\left\| \frac{\Phi(F^1) - \Phi(F^2)}{\rho_1} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)} \leqslant C(1+r)^{d+1} r \left\| \frac{F^1 - F^2}{\rho_1} \right\|_{L^2(0,T;[L^2(\mathcal{F})]^2)}.$$

Donc pour r assez petit, on obtient que $\Phi|_{\mathcal{K}_r}$ est une contraction. Alors, Φ admet un point fixe associé à (u, p, h, θ), l'unique solution du système (4.3.4), (4.3.5), (4.3.6), (4.3.7), ce qui achève la démonstration du Théorème 4.1.1. $\square$

Conclusion

En conclusion, on a établi les points suivants :

- Existence d'une unique solution forte pour un problème d'interaction entre un fluide et une structure déformable muni des conditions de glissement de Navier au bord, locale en temps et globale en supposant que les conditions initiales sont assez petites dans un domaine périodique en dimension 3.
- Stabilisation avec retard en temps de problèmes paraboliques et applications à :
  - l'équation de la chaleur avec un contrôle frontière en dimension quelconque.
  - Système d'Oseen avec un contrôle interne en dimension 3.
  - Système de Navier Stokes avec un contrôle interne en dimension 3.
  - Stabilisation locale d'un problème d'interaction non linéaire entre un fluide et une structure déformable dans un tore tri-dimensionnel muni des conditions de Navier au bord avec un contrôle frontière en dimension 3.
- Contrôlabilité à zéro locale d'un problème d'interaction fluide-solide rigide muni des conditions aux limites de Navier en dimension 2 pourvu que le solide ne soit pas un disque.

Annexe A

Résultats techniques

A.1 Espaces de Sobolev

Définition A.1.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$.*

On définit les espaces de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \leqslant m\},$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice dont le module est noté par $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$ et $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_d}^{\alpha_d} f$

La dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $f \in L^p(\Omega)$ est dans $W^{m,p}$ s'il existe une fonction v dans $L^p(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega f \partial^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega v\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leqslant m.$$

La fonction v est alors notée $\partial^\alpha f$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, +\infty),$$

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sup_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad p = +\infty.$$

Pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ dénoté par $H^m(\Omega)$, est un espace de Hilbert.

Pour tout $p \in [1, +\infty)$, on dénote par $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Soit $s \geqslant 0$, on définit l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ à l'aide de la transformée de Fourier par

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\Omega) : \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\zeta|^2)^s |\widehat{f}(\zeta)|^2 \, d\zeta < \infty\},$$

muni de la norme hilbertienne

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\zeta|^2)^s |\widehat{f}(\zeta)|^2 \, d\zeta.$$

Théorème A.1.2 (Opérateur de trace). *On suppose que Ω est un ouvert lipschitzien dans $\mathbb{R}^d$ à bord compact et $p \in (1,+\infty)$, $k \geqslant 1$. Il existe un unique opérateur linéaire continu*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & W^{k,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\partial\Omega) \\ & f & \longrightarrow & \gamma_0 f = f|_{\partial\Omega}. \end{array}$$

Définition A.1.3. *On suppose que Ω est un ouvert lipschitzien dans $\mathbb{R}^d$ à bord compact et $p \in (1,+\infty)$, $k \geqslant 1$. L'image de l'opérateur de trace γ_0 est notée*

$$W^{k-1/p,p}(\partial\Omega) = \gamma_0(W^{k,p}(\Omega)).$$

L'espace $W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{W^{k-1/p,p}(\partial\Omega)} = \inf_{g \in W^{k,p}(\Omega),\, g|_{\partial\Omega}=f} \|g\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Théorème A.1.4. *On suppose que Ω est un ouvert lipschitzien à bord compact dans $\mathbb{R}^d$ et $p \in (1,+\infty)$, $k \geqslant 1$.*

On a les propriétés suivantes :

- *L'opérateur γ_0 est continu de $W^{k,p}(\Omega)$ à $W^{k-1/p}(\partial\Omega)$.*
- *L'espace $W^{k-1/p}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Définition A.1.5. *Pour tous $p \in [1,+\infty]$ et $m \geqslant 1$, on définit l'espace*

$$W^{-m,p'}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \,|\, u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} = \inf_{(f_\alpha)_\alpha} \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f_\alpha\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} \right)^{1/p'}, \quad p \in (1,+\infty],$$

$$\|u\|_{W^{-m,\infty}(\Omega)} = \inf_{(f_\alpha)_\alpha} \left(\sup_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \right),$$

où la famille $(f_\alpha)_\alpha \subset L^{p'}(\Omega)$ est choisie telle que $u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha f_\alpha$.

Théorème A.1.6. *Pour tous $p \in [1,+\infty]$ et $m \geqslant 1$, on a les propriétés suivantes*

- *Les espaces $W^{-m,p'}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.*
- *Pour tous $p \in (1,+\infty]$ et $m \geqslant 1$, le dual de l'espace $W^{-m,p'}(\Omega)$ est isomorphe à $W_0^{m,p}(\Omega)$.*
- *Pour tous $p \in [1,+\infty)$ et $m \geqslant 1$, le dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ est isomorphe à $W^{-m,p'}(\Omega)$.*

Définition A.1.7. *On suppose que Ω est un ouvert lipschitzien à bord compact dans $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1,+\infty)$, on définit $W^{-1/p',p'}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.*

A.2 Opérateurs différentiels

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on note $x = (x_1, ..., x_d)$ un vecteur de $\mathbb{R}^d$. En pratique $d = 2$ ou $d = 3$.

On appelle champ de vecteurs une application $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, qui à $x = (x_1, ..., x_d)$ associe $u(x) = (u_1(x), ..., u_d(x))$.

Le gradient d'un champ de vecteur $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est la matrice définie par

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial u_d}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial u_d}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \right)_{ij}.$$

Le gradient symétrique d'un champ de vecteur u est dénoté par

$$D(u) = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^* \right).$$

où le signe * désigne la transposée.

Pour un champ de vecteurs u, on appelle divergence de u la fonction

$$(\nabla \cdot u)(x) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) + ... + \frac{\partial u_d}{\partial x_d}(x).$$

On appelle divergence d'un tenseur $(\sigma(x))_{ij}$, le champ de vecteur

$$((\nabla \cdot \sigma)(x))_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(x), \quad i = 1, \cdots, d.$$

On appelle Laplacien d'un champ de vecteur u, le champ de vecteur $\Delta u(x)$ où

$$\Delta u(x) = \nabla \cdot (\nabla u(x)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}(x)$$

. On peut aussi écrire le Laplacien en fonction du gradient symétrique par la relation

$$\Delta u = 2\nabla \cdot (D(u)) - \nabla(\nabla \cdot u).$$

On appelle normale extérieure au bord d'un ouvert Ω, un champ de vecteur défini sur le bord $\partial\Omega$ tel qu'en tout point $x \in \partial\Omega$, ce champs de vecteur est orthogonal au plan tangent en ce point et pointe vers l'extérieur du domaine, notée $n(x)$.

On appelle dérivée normale d'un champ de vecteur u sur le bord d'un domaine Ω le champ de vecteur définie par $\nabla u(x) n(x)$.

A.3 Formule de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème A.3.1 (Formule de Stokes). *Soit Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ à bord compact. Alors, pour tout champ de vecteur $u \in [C_0^1(\mathbb{R}^d)]^d$, on a*

$$\int_\Omega \nabla \cdot u \; dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \; d\Gamma, \tag{A.3.1}$$

où n est la normale extérieure unitaire de Ω.

Ce théorème a de nombreux corollaires qui sont tous des conséquences immédiates de la formule de Stokes.

Corollaire A.3.2 (Formule d'intégration par parties). *Soit Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ à bord compact. Pour tout $u \in [C_0^1(\mathbb{R}^d)]^d$ et $v \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_\Omega (\nabla \cdot u) v \; dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot u \; dx + \int_{\partial\Omega} v(u \cdot n) \; d\Gamma.$$

Soit

$$\mathbb{E} = \{u \in [L^2(\Omega)]^d \mid \nabla \cdot u \in L^2(\Omega)\},$$

muni de la norme du graphe

$$\|u\|_{\mathbb{E}} = \left(\|u\|^2_{[L^2(\Omega)]^d} + \|\nabla \cdot u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

On a les propriétés suivantes
- L'espace $[C_0^\infty(\overline{\Omega})]^d$ est dense dans $\mathbb{E}$.
- Il existe un opérateur de trace γ_n de $\mathbb{E}$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tel que $\gamma_n(u) = u \cdot n$ pour tout $u \in [C_0^\infty(\overline{\Omega})]^d$.

Corollaire A.3.3. *Soit Ω un ouvert borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Pour toute matrice $\sigma \in \mathbb{E}^d$ et tout champ de vecteur $v \in [H^1(\Omega)]^d$, on a*

$$\int_\Omega (\nabla \cdot \sigma) \cdot v \; dx = -\int_\Omega \sigma : \nabla v \; dx + \langle \sigma n, v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}.$$

A.4 Théorèmes fondamentaux

Théorème A.4.1 (Théorème de Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert réel, $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur H, $L : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur H.*

On suppose que a et L sont continues et a est coercive :

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2_H.$$

Alors, il existe un unique v dans H qui vérifie :

$$\forall u \in H,\ a(v,u) = L(u),$$

et celui-ci vérifie :

$$\|v\|_H \leqslant \frac{\|L\|_{H'}}{\alpha}.$$

Si de plus a est symétrique, alors v est aussi l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u).$$

Théorème A.4.2 (De Rham)**.** *Soit Ω un ouvert connexe borné Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Soit $f \in [H^{-1}(\Omega)]^d$, telle que pour tout champ de vecteur $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^d$ avec $\nabla \cdot \varphi = 0$, on a*

$$\langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H_0^1} = 0.$$

Alors, il existe un unique $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tel que $f = \nabla p$.

A.5 Quelques inégalités élémentaires

Proposition A.5.1 (Inégalité de Young)**.** *Soit $n \geqslant 2$ et soient f_i, $i = 1, ..., n$ des réels positifs. On se donne p_i, $i = 1, ..., n$ des réels positifs tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Alors, on a l'inégalité

$$f_1 \cdots f_n \leqslant \frac{f_1^{p_1}}{p_1} + \cdots + \frac{f_n^{p_n}}{p_n}.$$

De l'inégalité de Young, on peut déduire l'inégalité de Hölder.

Proposition A.5.2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soient $n \geqslant 1$ et $r \in [1, +\infty]$, on se donne p_i, $i = 1, ..., n$ des réels positifs qui peuvent valoir l'infini, tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}.$$

Alors, pour toute famille $(f_i)_{i \in \{1 \cdots n\}}$ telle que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, ..., n$, on a

$$\|f_1 \cdots f_n\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}.$$

Proposition A.5.3 (Interpolation entre les espaces $L^p(\Omega)$)**.** *Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ et soit $r \in [1, +\infty]$ tels que*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \quad \theta \in [0,1].$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, on a $f \in L^r(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^q(\Omega)}^{\theta} \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}.$$

Théorème A.5.4 (Injections de Sobolev).
– *Si* $0 \leqslant s < d/2$, *alors*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d), \qquad \textit{pour tout } p \in \left[2, \frac{2d}{d-2s}\right],$$

– *Si* $s = d/2$, *alors*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d), \qquad \textit{pour tout } p \in [2, \infty[.$$

Proposition A.5.5 (Produit dans les espaces de Sobolev). *Soit* $s \geqslant 0$ *et soient* $s_1 \geqslant s$, $s_2 \geqslant s$ *et* $s_1 + s_2 > s + d/2$. *Alors*

$$\forall u \in H^{s_1}(\mathbb{R}^d),\ \forall v \in H^{s_2}(\mathbb{R}^d), \quad \|uv\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \|u\|_{H^{s_1}(\mathbb{R}^d)} \|v\|_{H^{s_2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Théorème A.5.6 (Inégalité de Korn). *Soit* Ω *un ouvert borné lipschitzien dans* $\mathbb{R}^3$. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{[H^1(\Omega)]^3} \leqslant C \left(\|u\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|Du\|_{[L^2(\Omega)]^9} \right), \quad \forall u \in [H^1(\Omega)]^3.$$

A.6 Inégalités utiles

Dans cette section, on donne quelques estimations techniques qui ont été élaborées dans [17]. Étant donné une fonction ξ, on définit pour $z \in [0,1]$, $\xi^*(z) = \xi(zT)$. On suppose que $\mathfrak{X}$ est un espace de Banach. Si $\xi \in H^s(0,T;\mathfrak{X})$, alors $\xi^* \in H^s(0,1;\mathfrak{X})$ et

$$\lfloor \xi^* \rfloor_{s,2,(0,1),\mathfrak{X}} = T^{(2s-1)/2} \lfloor \xi \rfloor_{s,2,(0,T),\mathfrak{X}}. \tag{A.6.1}$$

Soient $\sigma_2 \in (1/2, 1]$ et $\sigma_1 \in [0, \sigma_2]$. En utilisant le résultat ci-dessus, il existe une constante indépendante de T telle que pour tout $\xi \in H^{\sigma_2}(0,T;\mathfrak{X})$ et $\xi(0) = 0$, on a

$$\|\xi\|_{H^{\sigma_1}(0,T,\mathfrak{X})} \leqslant C T^{\sigma_2 - \sigma_1} \|\xi\|_{H^{\sigma_2}(0,T,\mathfrak{X})}. \tag{A.6.2}$$

On rappelle également le résultat suivant sur les estimations d'interpolation (avec des constantes indépendantes de T), voir [17, Lemme A.5] : soient $\sigma \in [0,1]$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$ et $\mu = \sigma\mu_1 + (1-\sigma)\mu_2$. Alors il existe une constante C indépendante de T telle que pour toute fonction $u \in H^1(0,T;H^{\mu_1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^{\mu_2}(\Omega))$, on a

$$\|u\|_{H^\sigma(0,T;H^\mu(\Omega))} \leqslant C \|u\|^{\sigma}_{H^1(0,T;H^{\mu_1}(\Omega))} \|u\|^{1-\sigma}_{L^2(0,T;H^{\mu_2}(\Omega))}. \tag{A.6.3}$$

D'autre part, pour $p,\ q \in [1, +\infty]$ et $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\sigma}{p} + \dfrac{(1-\sigma)}{q}$, on a

$$\|u\|_{L^r(0,T;H^\mu(\Omega))} \leqslant C \|u\|^{\sigma}_{L^p(0,T;H^{\mu_1}(\Omega))} \|u\|^{1-\sigma}_{L^q(0,T;H^{\mu_2}(\Omega))}, \tag{A.6.4}$$

pour $u \in L^p(0,T;H^{\mu_1}(\Omega)) \cap L^q(0,T;H^{\mu_2}(\Omega))$. On donne aussi une formule utile (voir [17, Lemme A.7]) pour le produit de fonctions : on suppose que $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ et $\mathfrak{X}_3$ sont des espaces de Banach tels que

$$\|fg\|_{\mathfrak{X}_3} \leqslant C \|f\|_{\mathfrak{X}_1} \|g\|_{\mathfrak{X}_2}, \quad \forall f \in \mathfrak{X}_1, \quad \forall g \in \mathfrak{X}_2.$$

On suppose que $\sigma \in (1/2, 1]$, $s \in [0, 1/2]$, $T_0 > 0$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $T \leqslant T_0$ on a

$$\|u_1 u_2\|_{H^s(0,T;\mathfrak{X}_3)} \leqslant CT^{\sigma-s-1/2} \|u_1\|_{H^s(0,T;\mathfrak{X}_1)} \|u_2\|_{H^\sigma(0,T;\mathfrak{X}_2)} + \|u_2(0)\|_{\mathfrak{X}_2} \|u_1\|_{H^s(0,T;\mathfrak{X}_1)}, \quad \text{(A.6.5)}$$

pour tout $u_1 \in H^s(0,T;\mathfrak{X}_1)$ et $u_2 \in H^\sigma(0,T;\mathfrak{X}_2)$.

A.6.1 Estimations elliptiques du système de Stokes avec conditions de Navier

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. Dans cette section, on donne quelques résultats sur le système stationnaire

$$\begin{cases} \alpha\overline{u} - \nu\Delta\overline{u} + \nabla\overline{p} = \overline{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \overline{u} = \overline{g} & \text{dans } \Omega, \\ \overline{u}_n = \overline{a} & \text{sur } \partial\Omega, \\ [2\nu D(\overline{u})n + \beta\overline{u}]_\tau = \overline{b} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{(A.6.6)}$$

où $(\cdot)_n$ et $(\cdot)_\tau$ représente respectivement la composante normale et tangentielle d'un champ de vecteur. On définit l'espace suivant

$$H^1_\tau = \{\phi \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \phi_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On donne la définition d'une solution faible du système (A.6.6).

Définition A.6.1. *On dit que $(\overline{u}, \overline{p})$ est une solution faible de* (A.6.6) *si $(\overline{u}, \overline{p}) \in [H^1(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$, si $\nabla \cdot \overline{u} = \overline{g}$ dans Ω, $\overline{u}_n = \overline{a}$ sur $\partial\Omega$ et si l'équation variationnelle suivante est vérifiée :*

$$\alpha \int_\Omega \overline{u} \cdot \phi \, dy + 2\nu \int_\Omega D(\overline{u}) : D(\phi) \, dy - \int_\Omega \overline{p} \nabla \cdot \phi \, dy + \int_{\partial\Omega} \beta \overline{u} \cdot \phi \, d\Gamma$$
$$= \int_\Omega \overline{f} \cdot \phi \, dy + \nu \int_\Omega \overline{g}(\nabla \cdot \phi) \, dy + \langle \overline{b}, \phi \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}},$$

pour tout $\phi \in H^1_\tau$.

Le système (A.6.6) a déja été abordé dans la littérature, on retrouve [86], [13] et [2].
De [13], on a le résultat suivant

Théorème A.6.2. *Soient $\beta \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ avec $\beta > 0$ ou $\alpha > 0$. On suppose que Ω est un ouvert de classe $C^{1,1}$. Pour tout*

$$\overline{f} \in (H^1_\tau)', \quad \overline{g} \in L^2(\Omega), \quad \overline{a} \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3, \quad \overline{b} \in [H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3,$$

tels que

$$\int_\Omega \overline{g}\ dy = \int_{\partial\Omega} \overline{a}\cdot n\ d\Gamma, \quad \overline{b}\cdot n = 0, \tag{A.6.7}$$

il existe une solution faible unique $(\overline{u},\overline{p}) \in [H^1(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ *du système de Stokes* (A.6.6). *De plus, on a les estimations suivantes :*

$$\|\overline{u}\|_{[H^1(\Omega)]^3} + \|\nabla\overline{p}\|_{[H^{-1}(\Omega)]^3} \leqslant C\Big(\|\overline{f}\|_{(H^1_\tau)'} + \|\overline{g}\|_{L^2(\Omega)} + \|\overline{a}\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3} + \|\overline{b}\|_{[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3}\Big), \tag{A.6.8}$$

où C *est une constante positive.*

De plus, si Ω *est de classe* $C^{2,1}$ *et si*

$$\overline{f} \in [L^2(\Omega)]^3, \quad \overline{g} \in H^1(\Omega), \quad \overline{a} \in [H^{3/2}(\partial\Omega)]^3, \quad \overline{b} \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3,$$

tels que (A.6.7) *a lieu, alors* $(\overline{u},\overline{p}) \in [H^2(\Omega)]^3 \times (H^1(\Omega)\cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$ *et on a les estimations suivantes :*

$$\|\overline{u}\|_{[H^2(\Omega)]^3} + \|\nabla\overline{p}\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leqslant C\Big(\|\overline{f}\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\overline{g}\|_{H^1(\Omega)} + \|\overline{a}\|_{[H^{3/2}(\partial\Omega)]^3} + \|\overline{b}\|_{[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3}\Big), \tag{A.6.9}$$

où C *est une constante positive.*

On note que le résultat de régularité reste valide si Ω est de classe $C^{1,1}$, cet argument provient de [2].

A.7 Théorie des semi-groupes

Soit X un espace de Banach et soit $\mathcal{L}(X)$ l'espace des applications linéaires bornées de X dans X.

Définition A.7.1. *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est une fonction* $S : [0,+\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(X)$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*
- $S(0) = \mathrm{Id}$,
- $S(t+\tau) = S(t) + S(\tau), \quad \forall t,\tau \in [0,+\infty[$.

Définition A.7.2. *Un semi-groupe* S *est dit fortement continu si la fonction* $S(.)x : [0,+\infty[\longrightarrow X$ *est continue pour tout* $x \in X$.

Définition A.7.3. *Un semi-groupe* S *est dit uniformément continu si la fonction* S *est continue.*

Définition A.7.4. *Soit $S : [0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{L}(X)$ un semi-groupe fortement continu. On appelle générateur infinitésimal de S l'opérateur linéaire A défini par*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X, \quad \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque A.7.5. *Un semi-groupe de contractions est tel que $\|S(t)\|_X \leqslant 1$, $\forall t \geqslant 0$.*

Définition A.7.6. *Soit X un espace de Hilbert un opérateur $A : D(A) \longrightarrow X$ est dit dissipatif si*

$$\forall x \in D(A), \quad \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leqslant 0.$$

Il est maximal dissipatif (m-dissipatif) si en plus il existe $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = X$

Remarque A.7.7. *Soit S un semi-groupe de contractions sur X, alors son générateur infinitésimal A est dissipatif.*

Théorème A.7.8 (Lumer-Phillips)**.** *Soit A un opérateur linéaire à domaine $\mathcal{D}(A)$ dense dans X. Si A est dissipatif et m-dissipatif, alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions fortement continu sur X.*

Définition A.7.9 (Semigroupe analytique)**.** *Soit S un semi-groupe sur X, S est dit analytique s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi/2]$ tels que*

$$\rho(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - \alpha)| \leqslant \pi/2 + \theta\}.$$

Proposition A.7.10. *Soit S un semi-groupe sur X et A son générateur infinitésimal, Soit V un espace de Hilbert tel que V est dense dans X et*

$$V \subset X \subset V'.$$

Si

$$\exists \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \forall v \in V,\ \langle Av, v \rangle_X + \beta \|v\|_X \geqslant \alpha \|v\|_V,$$

Alors, S est un semi-groupe analytique et de plus

$$\|S(t)\|_X \leqslant e^{\beta t}.$$

A.8 Théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles

On suppose qu'on peut modéliser une équation aux dérivées partielles sous la forme abstraite :

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \tag{A.8.1}$$

où A est un opérateur sur $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert, $y \in L^2(0,T;\mathbb{H})$ désigne l'état du système, $u \in L^2(0,T;\mathbb{U})$ est le contrôle, l'opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathbb{U},\mathbb{H})$ est un opérateur linéaire borné et $y^0 \in \mathbb{Y}$ est l'état initial avec $\mathbb{Y}$ un espace de Hilbert. Alors, la question qui survient souvent est de savoir si à l'aide du contrôle u, on peut amener le système d'un état initial y^0 à un autre noté y_T au temps $t = T$. Selon le contexte du problème, il existe plusieurs notions de contrôlabilité. On supposera que A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe noté $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$. La solution de (A.8.1) est donnée par la formule de Duhamel :

$$y(t) = e^{tA}y^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\ ds.$$

Soit Φ l'application définie comme suit

$$\Phi : u \in L^2(0,T;\mathbb{U}) \longrightarrow \int_0^T e^{(t-s)A}Bu(s)\ ds.$$

Soit $T > 0$.

Définition A.8.1 (Contrôlabilité exacte)**.** *On dit que* (A.8.1) *est exactement contrôlable au temps T, si*

$$\forall y^0, y_T \in \mathbb{Y}, \quad \exists u \in L^2(0,T;\mathbb{U}) \quad y(T) = y_T,$$

ou encore $\operatorname{Im}\Phi = \mathbb{Y}$.

Définition A.8.2 (Contrôlabilité approchée)**.** *On dit que* (A.8.1) *est approximativement contrôlable au temps T, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall y^0, y_T \in \mathbb{Y}, \quad \exists u \in L^2(0,T;\mathbb{U}) \quad \|y(T) - y_T\|_{\mathbb{Y}} < \varepsilon.$$

En d'autres termes, $\overline{\operatorname{Im}\Phi} = \mathbb{Y}$.

Définition A.8.3 (Contrôlabilité à zéro)**.** *On dit que* (A.8.1) *est contrôlable à zéro au temps T, si*

$$\forall y^0 \in \mathbb{Y}, \quad \exists u \in L^2(0,T;\mathbb{U}) \quad y(T) = 0.$$

Soit

$$\Psi : y^0 \in \mathbb{Y} \longrightarrow e^{TA}y^0.$$

Alors, le système est contrôlable à zéro si $\operatorname{Im}\Psi \subset \operatorname{Im}\Phi$. Afin d'étudier la contrôlabilité du système (A.8.1), il est utile de se ramener à sa forme duale

Proposition A.8.4. *Le système* (A.8.1) *est exactement contrôlable au temps T si*

$$\exists C_T > 0, \quad \forall z^0 \in \mathbb{Y}, \quad \int_0^T \|B^* z(t)\|_{\mathbb{Y}}^2 \; dt \geqslant C_T \left\| z^0 \right\|_{\mathbb{Y}}^2 .$$

Le système (A.8.1) *est contrôlable à zéro au temps T si*

$$\exists C_T > 0, \quad \forall z^0 \in \mathbb{Y}, \quad \int_0^T \|B^* z(t)\|_{\mathbb{Y}}^2 \; dt \geqslant C_T \left\| z(T) \right\|_{\mathbb{Y}}^2 .$$

Annexe B

Estimation de Carleman pour l'opérateur de la chaleur

On définit la fontion η comme (4.4.1). On considère les fonctions β et ξ définies respectivement par (4.5.4), (4.5.5). Soit ψ une fonction définie sur $\mathcal{F}$ qui peut être une fonction scalaire ou bien un champ de vecteur.

Proposition B.0.5. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}$ deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^N$ tels que $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$. On suppose que la fonction ψ vérifie l'équation de la chaleur*

$$-\partial_t \psi - \nu \Delta \psi = f \quad \text{dans } (0,T) \times \mathcal{F}. \tag{B.0.1}$$

Alors, il existe $C(\mathcal{F}, \mathcal{O}) > 0$, s_1 et λ_1 où $\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{F}, \mathcal{O}) \geqslant 1$ et $s_1 = \lambda_1(T^N + T^{2N})$, tels que l'estimation suivante soit satisfaite

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \xi \left|\nabla \psi\right|^2 \, dy + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \xi^3 \left|\psi\right|^2 \, dy + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^3 \left|\psi\right|^2 d\Gamma \\ \leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta} \xi^3 \left|\psi\right|^2 \, dy + \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \left|f\right|^2 \, dy + s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} \xi^* \left|\nabla \psi \tau\right|^2 d\Gamma \\ + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} (\xi^*)^{-1} \left|\partial_t \psi\right|^2 \, d\Gamma dt \Bigg), \end{aligned} \tag{B.0.2}$$

pour tout $s \geqslant s_1$ et $\lambda \geqslant \lambda_1$, où $f \in [L^2(\mathcal{F})]^2$.

Démonstration. Dans la preuve, on posera $\nu = 1$ sans restreindre la généralité. On pose $w = e^{-s\beta}\psi$. L'équation (B.0.1) devient

$$-s\partial_t \beta w - \partial_t w - \Delta w - s^2\lambda^2\xi^2 \left|\nabla \eta\right|^2 w + 2s\lambda\xi(\nabla\eta \cdot \nabla) w + s\lambda^2\xi \left|\nabla\eta\right|^2 w + s\lambda\xi\Delta\eta w = e^{-s\beta} f,$$

qui est équivalente à

$$Pw + Qw = e^{-s\beta} f + s\lambda^2\xi \left|\nabla\eta\right|^2 w - s\lambda\xi\Delta\eta w + s\partial_t\beta w, \tag{B.0.3}$$

où

$$Pw = -\Delta w - s^2\lambda^2\xi^2 \left|\nabla\eta\right|^2 w, \tag{B.0.4}$$

et

$$Qw = 2s\lambda\xi\nabla w\nabla\eta + 2s\lambda^2\xi \left|\nabla\eta\right|^2 w - \partial_t w. \tag{B.0.5}$$

On multiplie l'équation (B.0.3) par elle même, on a

$$\int_0^T \|Pw\|^2_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\ dt + \int_0^T \|Qw\|^2_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\ dt + 2\int_0^T \sum_i^4 \sum_j^2 \langle (Pw)_i, (Qw)_j\rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\ dt$$
$$\leqslant C\left(\int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\left|f\right|^2\ dydt + s^2\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \left|w\right|^2\ dydt\right).$$

Donc, il suffit de traiter $\displaystyle\int_0^T \langle (Pw)_i, (Qw_j)\rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\ dt$ puisque

$$2\int_0^T \sum_i^2 \sum_j^2 \langle (Pw)_i, (Qw)_j\rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\ dt \leqslant C\left(\int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\left|f\right|^2\ dydt + s^2\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \left|w\right|^2\ dydt\right).$$

Ici, on dénote par $(Pw)_i$ et (Qw_j), le i ème et le j ème terme dans l'expression (B.0.4) et(B.0.5) respectivement. En premier lieu, on obtient une inégalité avec deux termes globaux $\left|w\right|^2$ et $\left|\nabla w\right|^2$

$$s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2\ dydt, \quad s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 \left|w\right|^2\ dydt,$$

et des termes locaux associés au second membre de l'inégalité.

On a

$$\int_0^T \langle (Pw)_1, (Qw)_1\rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2}\ dt = -2s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi\Delta w\cdot\nabla w\nabla\eta\ dydt$$
$$= -2s\lambda \sum_{i,j,k} \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi\partial_j\eta\partial_j w_i \partial^2_{kk} w_i\ dydt = 2s\lambda^2 \sum_i \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\cdot\nabla w_i\right|^2 dydt$$
$$+ 2s\lambda \sum_{i,j,k} \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi\partial^2_{jk}\eta\partial_j w_i \partial_k w_i dydt + 2s\lambda \sum_{i,j,k} \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi\partial_j\eta\partial^2_{kj} w_i \partial_k w_i\ dydt$$
$$- 2s\lambda \sum_{i,j,k} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^*\partial_j\eta\partial_j w_i \partial_k w_i n_k\ d\Gamma dt.$$

Dans un autre côté, on a

$$2s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \partial_j \eta \ \partial^2_{kj} w_i \ \partial_k w_i \ dydt = 2s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \partial_j \eta \partial_k w_i \partial_k w_i n_j d\Gamma dt$$
$$- 2s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w_i\right|^2 \ dydt - 2s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \Delta\eta \left|\nabla w_i\right|^2 \ dydt$$
$$- 2s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \partial_j \eta \ \partial^2_{kj} w_i \partial_k w_i \ dydt.$$

Il s'en suit que

$$2s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \partial_j \eta \ \partial^2_{kj} w_i \ \partial_k w_i \ dydt = s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \partial_j \eta \ \partial_k w_i \ \partial_k w_i \ n_j d\Gamma dt$$
$$- s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w_i\right|^2 \ dydt - s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \Delta\eta \ \left|\nabla w_i\right|^2 \ dydt$$
$$= s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* (\nabla\eta \cdot n) \left|\nabla w_i\right|^2 d\Gamma dt - s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w_i\right|^2 \ dydt$$
$$- s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \Delta\eta \ \left|\nabla w_i\right|^2 \ dydt.$$

Alors

$$\int_0^T \langle (Pw)_1, (Qw)_1 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \ dt \geqslant -s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 \ d\Gamma dt - Cs\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2 dydt$$
$$+ s\lambda \sum_i \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* (\nabla\eta \cdot n) \left|\nabla w_i\right|^2 d\Gamma dt - 2s\lambda \sum_i \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla w_i \cdot n\right|^2 (\nabla\eta \cdot n) \ d\Gamma dt.$$

En utilisant $\left|\nabla w_i\right|^2 = \left|\nabla w_i \cdot n\right|^2 + \left|\nabla w_i \cdot \tau\right|^2$, on obtient

$$\int_0^T \langle (Pw)_1, (Qw)_1 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \ dt \geqslant -s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 \ d\Gamma dt - Cs\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2 dydt$$
$$- Cs\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla w\tau\right|^2 d\Gamma dt - s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla wn\right|^2 (\nabla\eta \cdot n) \ d\Gamma dt. \quad \text{(B.0.6)}$$

On a également

$$\int_0^T \langle (Pw)_1, (Qw)_2 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} dt = -2s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \Delta w \cdot w \ dydt$$
$$= 2s\lambda^2 \sum_i^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w_i\right|^2 \ dydt + 4s\lambda^2 \sum_{i,j}^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \ \partial_i \eta \ \partial^2_{ij} \eta \ w \cdot \ \partial_j w \ dydt$$
$$+ 2s\lambda^3 \sum_i^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\eta \cdot \nabla w_i) w_i \ dydt - 2s\lambda^2 \sum_{i,j}^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla\eta\right|^2 w_i \partial_j w_i n_j \ d\Gamma dt.$$
$$\text{(B.0.7)}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, on a

$$2s\lambda^3 \sum_i^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\eta \cdot \nabla w_i) w_i \; dydt \geqslant -Cs\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|w\right|^2 \; dydt$$
$$- \varepsilon s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 \; dydt,$$

pour $\varepsilon > 0$, et

$$4s\lambda^2 \sum_{i,j}^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \; \partial_i\eta \partial_{ij}^2 \eta w_i \partial_j w_i \; dydt \geqslant -Cs\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|w\right|^2 \; dydt$$
$$- \varepsilon s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 \; dydt.$$

On obtient

$$\int_0^T \langle (Pw)_1, (Qw)_2 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \; dt \geqslant s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla\eta\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 \; dydt$$
$$- C\Bigg(s^2\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|w\right|^2 \; dydt + s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2 \; dydt + \varepsilon s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla w n\right|^2 \; d\Gamma dt$$
$$+ s\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|w\right|^2 \; d\Gamma dt \Bigg), \quad \text{(B.0.8)}$$

où $s > 1$ et $\lambda > 1$. En utilisant l'inégalité dans [40, Théorème II.4.1], On a

$$s\lambda^3 \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|w\right|^2 \; dydt \leqslant \varepsilon s\lambda^2 \int_{\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla w\right|^2 \; dydt + Cs\lambda^4 \int_{\mathcal{F}} \xi^* \left|w\right|^2 \; dydt.$$

On a

$$\int_0^T \langle (Pw)_1, (Qw)_3 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \; dt = \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \Delta w \cdot \partial_t w \; dydt = - \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \nabla w : \partial_t \nabla w \; dydt$$
$$+ \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \nabla w n \cdot \partial_t w \; d\Gamma dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla w\right|^2 \; dydt + \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \nabla w n \cdot \partial_t w \; d\Gamma dt$$
$$= \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \nabla w n \cdot \partial_t w \; d\Gamma dt, \quad \text{(B.0.9)}$$

où on a utilisé $\nabla w(0,\cdot) = \nabla w(T,\cdot) = 0$. En appliquant la formule de Green, on obtient :

$$\int_0^T \langle (Pw)_2, (Qw)_1 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \; dt = -2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 \left|\nabla\eta\right|^2 \nabla w \nabla\eta \cdot w \; dydt$$
$$= 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \left|\nabla\eta\right|^4 \xi^3 \left|w\right|^2 \; dydt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \Delta\eta \left|\nabla\eta\right|^2 \xi^3 \left|w\right|^2 \; dydt$$
$$+ 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \partial_i\eta \; \partial_{i,j}^2\eta \; \partial_j\eta \; \xi^3 \left|w\right|^2 \; dydt - s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 \left|\nabla\eta\right|^2 (\nabla\eta \cdot n) \left|w\right|^2 \; d\Gamma dt.$$

Il en découle

$$\int_0^T \langle (Pw)_2, (Qw)_1 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \ dt \geqslant 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^4 \xi^3 |w|^2 \ dydt - Cs^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 |w|^2 \ dydt$$
$$- s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 |\nabla\eta|^2 (\nabla\eta \cdot n) |w|^2 \ d\Gamma dt.$$

D'où

$$\int_0^T \langle (Pw)_2, (Qw)_1 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \ dt \geqslant 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^4 \xi^3 |w|^2 \ dydt$$
$$- Cs^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 |w|^2 \ dydt - s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 |\nabla\eta|^2 (\nabla\eta \cdot n) |w|^2 \ d\Gamma dt.$$

On a

$$\int_0^T \langle (Pw)_2, (Qw)_2 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \ dt = -2s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^4 \xi^3 |w|^2 \ dydt.$$

On obtient également

$$\int_0^T \langle (Pw)_2, (Qw)_3 \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \ dt = s^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \xi^2 w \cdot \partial_t w \ dydt$$
$$= \frac{1}{2} s^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \xi^2 \partial_t |w|^2 \ dydt = -\frac{1}{2} s^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \partial_t (|\nabla\eta|^2 \xi^2) |w|^2 \ dydt$$
$$= -s^2\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^2 \xi \partial_t \xi |w|^2 \ dydt,$$

Grâce au fait que $w(0,\cdot) = w(T,\cdot) = 0$. Donc, on obtient

$$\int_0^T \langle (Pw)_2, Qw \rangle_{[L^2(\mathcal{F})]^2} \ dt \geqslant s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^4 \xi^3 |w|^2 \ dydt - Cs^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 |w|^2 \ dydt$$
$$- s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 |\nabla\eta|^2 (\nabla\eta \cdot n) |w|^2 \ d\Gamma dt. \quad \text{(B.0.10)}$$

En combinant (B.0.6), (B.0.8) et (B.0.10), on obtient

$$s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi |\nabla\eta|^2 |\nabla w|^2 \ dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} |\nabla\eta|^4 \xi^3 |w|^2 \ dydt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 |w|^2 \ d\Gamma dt$$
$$+ s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} |\nabla w n|^2 \ d\Gamma dt \leqslant C\Bigg((s^3\lambda^3 + s^2\lambda^4) \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 |w|^2 \ dydt$$
$$+ s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi |\nabla w|^2 \ dydt + \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} |f|^2 \ dydt + s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} \xi^* |\nabla w \tau|^2 \, d\Gamma dt$$
$$+ \varepsilon s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* |\nabla w n|^2 \ d\Gamma dt + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^{-1} |\partial_t w|^2 \ d\Gamma dt \Bigg),$$

pour tout $\varepsilon > 0$. En utilisant le fait que $|\nabla\eta| > 0$ sur $\mathcal{F}\backslash\mathcal{O}_\eta$, on obtient de la dernière inégalité

$$
\begin{aligned}
&s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{O}_\eta} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{O}_\eta} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 \left|w\right|^2 \ d\Gamma dt \\
&+ s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla wn\right|^2 \ d\Gamma dt \leqslant C\Bigg((s^3\lambda^3 + s^2\lambda^4) \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt + s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \left|f\right|^2 \ dydt + s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} \xi^* \left|\nabla w\tau\right|^2 \ d\Gamma dt + \varepsilon s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla wn\right|^2 \ d\Gamma dt \\
&\qquad + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^{-1} \left|\partial_t w\right|^2 \ d\Gamma dt \Bigg).
\end{aligned}
$$

On rajoute le terme

$$
s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt,
$$

dans les deux membres de dernière inégalité, on trouve

$$
\begin{aligned}
&s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 \left|w\right|^2 \ d\Gamma dt \\
&+ s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \left|\nabla wn\right|^2 \ d\Gamma dt \leqslant C\Bigg((s^3\lambda^3 + s^2\lambda^4) \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt + s\lambda \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt \\
&\qquad s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt + \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \left|f\right|^2 \ dydt \\
&\qquad + s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}} \xi^* \left|\nabla w\tau\right|^2 \ d\Gamma dt + \varepsilon s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla wn\right|^2 \ d\Gamma dt \\
&\qquad + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^{-1} \left|\partial_t w\right|^2 \ d\Gamma dt \Bigg). \qquad \text{(B.0.11)}
\end{aligned}
$$

On choisi s et λ suffisamment grands tels qu'on ait

$$
s\lambda^2 - Cs\lambda \geqslant \frac{s\lambda^2}{2}, \quad s^3\lambda^4 - C(s^3\lambda^3 + s^2\lambda^4) \geqslant \frac{s^3\lambda^4}{2},
$$

afin d'absorber le premier et le second terme qui apparaissent au second membre de l'inégalité (B.0.11), on a

$$
\begin{aligned}
&s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^3 \left|w\right|^2 \ d\Gamma dt \\
&\leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} \xi^3 \left|w\right|^2 \ dydt + s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} \xi \left|\nabla w\right|^2 \ dydt + \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \left|f\right|^2 \ dydt \\
&\qquad + s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \xi^* \left|\nabla w\tau\right|^2 d\Gamma dt + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^{-1} \left|\partial_t w\right|^2 \ d\Gamma dt \Bigg).
\end{aligned}
$$

En revenant à ψ, la dernière inégalité s'écrit

$$
\begin{aligned}
&s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi \left|\nabla\psi\right|^2 \, dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^3 \left|\psi\right|^2 \, dydt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3 \left|\psi\right|^2 d\Gamma dt \\
&\leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{-2s\beta}\xi^3 \left|\psi\right|^2 \, dydt + s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{O}_\eta} e^{-2s\beta}\xi \left|\nabla\psi\right|^2 \, dydt + \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \left|f\right|^2 \, dydt \\
&\qquad + s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^* \left|\nabla\psi\tau\right|^2 d\Gamma + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1} \left|\partial_t\psi\right|^2 \, d\Gamma dt \Bigg), \quad \text{(B.0.12)}
\end{aligned}
$$

où on a utilisé

$$
\begin{aligned}
s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} (\xi^*)^{-1} \left|\partial_t w\right|^2 \, d\Gamma dt \leqslant C\Bigg(& s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1} \left|\partial_t\psi\right|^2 \, d\Gamma dt \\
& + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} \partial_t(e^{-2s\widehat{\beta}})(\xi^*)^{-1} \left|\psi\right|^2 \, d\Gamma dt \Bigg),
\end{aligned}
$$

et le fait que $|\partial_t\widehat{\beta}| \leqslant C(T+T^2)(\xi^*)^{1+1/N}$.

Pour absorber le second terme au second membre de l'inégalité (B.0.12), on procède comme [39, inequality (1.62)] qui montre que l'intégrale de $e^{-2s\beta}\xi \left|\nabla\psi\right|^2$ sur $\mathcal{O}_\eta$ peut être estimée par l'intégrale de $e^{-2s\beta}\xi \left|\psi\right|^2$ sur $\mathcal{O}$. On obtient finalement

$$
\begin{aligned}
&s\lambda^2 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi \left|\nabla\psi\right|^2 \, dydt + s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta}\xi^3 \left|\psi\right|^2 \, dydt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^3 \left|\psi\right|^2 d\Gamma dt \\
&\leqslant C\Bigg(s^3\lambda^4 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} e^{-2s\beta}\xi^3 \left|\psi\right|^2 \, dydt + \int_0^T \int_{\mathcal{F}} e^{-2s\beta} \left|f\right|^2 \, dydt + s\lambda \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}\xi^* \left|\nabla\psi\tau\right|^2 d\Gamma dt \\
&\qquad + s^{-1}\lambda^{-1} \int_0^T \int_{\partial\mathcal{F}} e^{-2s\widehat{\beta}}(\xi^*)^{-1} \left|\partial_t\psi\right|^2 \, d\Gamma dt \Bigg),
\end{aligned}
$$

pour $\lambda \geqslant C$ et $s \geqslant C(T^N + T^{2N})$. Donc, on obtient (B.0.2). $\square$

Bibliographie

[1] Chaouki Abdallah, Peter Dorato, J. Benites-Read, and R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In *1993 American Control Conference*, pages 3106–3107. IEEE, 1993.

[2] Paul Acevedo, Chérif Amrouche, Carlos Conca, and Amrita Ghosh. Stokes and Navier-Stokes equations with Navier boundary condition. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 357(2) :115–119, 2019.

[3] Chérif Amrouche and Nour El Houda Seloula. L^p-theory for vector potentials and Sobolev's inequalities for vector fields. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(9-10) :529–534, 2011.

[4] Mehdi Badra. Feedback stabilization of the 2-D and 3-D Navier-Stokes equations based on an extended system. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 15(4) :934–968, 2009.

[5] Mehdi Badra. Lyapunov function and local feedback boundary stabilization of the Navier-Stokes equations. *SIAM J. Control Optim.*, 48(3) :1797–1830, 2009.

[6] Mehdi Badra. Abstract settings for stabilization of nonlinear parabolic system with a Riccati-based strategy. Application to Navier-Stokes and Boussinesq equations with Neumann or Dirichlet control. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(4) :1169–1208, 2012.

[7] Mehdi Badra and Takéo Takahashi. Stabilization of parabolic nonlinear systems with finite dimensional feedback or dynamical controllers : application to the Navier-Stokes system. *SIAM J. Control Optim.*, 49(2) :420–463, 2011.

[8] Mehdi Badra and Takéo Takahashi. Feedback stabilization of a fluid-rigid body interaction system. *Adv. Differential Equations*, 19(11-12) :1137–1184, 2014.

[9] Mehdi Badra and Takéo Takahashi. Feedback stabilization of a simplified 1d fluid-particle system. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 31(2) :369–389, 2014.

[10] Mehdi Badra and Takéo Takahashi. On the Fattorini criterion for approximate controllability and stabilizability of parabolic systems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 20(3) :924–956, 2014.

[11] Mehdi Badra and Takéo Takahashi. Feedback boundary stabilization of 2D fluid-structure interaction systems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 37(5) :2315–2373, 2017.

[12] H. Beirão da Veiga. On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem. *J. Math. Fluid Mech.*, 6(1) :21–52, 2004.

[13] H. Beirão Da Veiga. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions. *Adv. Differential Equations*, 9(9-10) :1079–1114, 2004.

[14] H. Beirão Da Veiga. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions. *Adv. Differential Equations*, 9(9-10) :1079–1114, 2004.

[15] Alain Bensoussan, Giuseppe Da Prato, Michel C. Delfour, and Sanjoy K. Mitter. *Representation and control of infinite dimensional systems*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2007.

[16] M. Boulakia and S. Guerrero. Local null controllability of a fluid-solid interaction problem in dimension 3. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 15(3) :825–856, 2013.

[17] Muriel Boulakia, Sergio Guerrero, and Takéo Takahashi. Well-posedness for the coupling between a viscous incompressible fluid and an elastic structure. *Nonlinearity*, 32(10) :3548–3592, 2019.

[18] Muriel Boulakia and Axel Osses. Local null controllability of a two-dimensional fluid-structure interaction problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 14(1) :1–42, 2008.

[19] Marco Bravin. Energy equality and uniqueness of weak solutions of a "viscous incompressible fluid + rigid body" system with Navier slip-with-friction conditions in a 2D bounded domain. *J. Math. Fluid Mech.*, 21(2) :Paper No. 23, 31, 2019.

[20] Delphine Bresch-Pietri, Christophe Prieur, and Emmanuel Trélat. New formulation of predictors for finite-dimensional linear control systems with input delay. *Systems Control Lett.*, 113 :9–16, 2018.

[21] Loredana Bălilescu, Jorge San Martín, and Takéo Takahashi. Fluid-rigid structure interaction system with Coulomb's law. *SIAM J. Math. Anal.*, 49(6) :4625–4657, 2017.

[22] Jean-Jérôme Casanova. Fluid structure system with boundary conditions involving the pressure. `https://arxiv.org/abs/1707.06382`, 2017.

[23] Jean-Jérôme Casanova. Existence of Time-Periodic Strong Solutions to a Fluid–Structure System. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01838262`, July 2018. Preprint.

[24] Dongho Chae, O. Yu. Imanuvilov, and Sang Moon Kim. Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions. *J. Dynam. Control Systems*, 2(4) :449–483, 1996.

[25] Shu Ping Chen and Roberto Triggiani. Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems. *Pacific J. Math.*, 136(1) :15–55, 1989.

[26] Carlos Conca, Jorge San Martín H., and Marius Tucsnak. Motion of a rigid body in a viscous fluid. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(6) :473–478, 1999.

[27] Carlos Conca, Jorge San Martín H., and Marius Tucsnak. Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(5-6) :1019–1042, 2000.

[28] Jean-Michel Coron and Sergio Guerrero. Null controllability of the N-dimensional Stokes system with $N-1$ scalar controls. *J. Differential Equations*, 246(7) :2908–2921, 2009.

[29] B. Desjardins and M. J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 146(1) :59–71, 1999.

[30] B. Desjardins and M. J. Esteban. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : compressible and incompressible models. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(7-8) :1399–1413, 2000.

[31] Imene A Djebour. Local null controllability of a fluid-rigid body interaction problem with Navier slip boundary conditions. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02454567`.

[32] Imene Aicha Djebour and Takéo Takahashi. On the existence of strong solutions to a fluid structure interaction problem with Navier boundary conditions. *J. Math. Fluid Mech.*, 21(3) :Paper No. 36, 30, 2019.

[33] Imene Aicha Djebour, Takéo Takahashi, and Julie Valein. Feedback stabilization of parabolic systems with input delay. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02545562`, April 2020. working paper or preprint.

[34] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[35] Caroline Fabre and Gilles Lebeau. Prolongement unique des solutions de l'equation de Stokes. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(3-4) :573–596, 1996.

[36] Hector O. Fattorini. Some remarks on complete controllability. *SIAM J. Control*, 4 :686–694, 1966.

[37] Eduard Feireisl. On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid. volume 3, pages 419–441. 2003. Dedicated to Philippe Bénilan.

[38] E. Fernández-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov, and J.-P. Puel. Local exact controllability of the Navier-Stokes system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(12) :1501–1542, 2004.

[39] Enrique Fernández-Cara and Sergio Guerrero. Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability. *SIAM J. Control Optim.*, 45(4) :1399–1446, 2006.

[40] G. P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2011. Steady-state problems.

[41] David Gérard-Varet and Matthieu Hillairet. Existence of weak solutions up to collision for viscous fluid-solid systems with slip. *Comm. Pure Appl. Math.*, 67(12) :2022–2075, 2014.

[42] David Gérard-Varet, Matthieu Hillairet, and Chao Wang. The influence of boundary conditions on the contact problem in a 3D Navier-Stokes flow. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 103(1) :1–38, 2015.

[43] Céline Grandmont. On an unsteady fluid-beam interaction problem. `https://basepub.dauphine.fr/bitstream/handle/123456789/6848/2004-48.pdf`, 2004. Preprint.

[44] Céline Grandmont and Matthieu Hillairet. Existence of global strong solutions to a beam-fluid interaction system. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 220(3) :1283–1333, 2016.

[45] Céline Grandmont and Yvon Maday. Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(3) :609–636, 2000.

[46] Gerd Grubb and V. A. Solonnikov. Reduction of basic initial-boundary value problems for the Stokes equation to initial-boundary value problems for parabolic systems of pseudo-differential equations. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 163(Kraev. Zadachi Mat. Fiz. i Smezhn. Vopr. Teor. Funktsiĭ 19) :37–48, 187, 1987.

[47] Sergio Guerrero. Local exact controllability to the trajectories of the Navier-Stokes system with nonlinear Navier-slip boundary conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 12(3) :484–544, 2006.

[48] Sergio Guerrero and Cristhian Montoya. Local null controllability of the N-dimensional Navier-Stokes system with nonlinear Navier-slip boundary conditions and $N-1$ scalar controls. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 113 :37–69, 2018.

[49] Giovanna Guidoboni, Marcello Guidorzi, and Mariarosaria Padula. Continuous dependence on initial data in fluid-structure motions. *J. Math. Fluid Mech.*, 14(1) :1–32, 2012.

[50] M. Guidorzi, M. Padula, and P. I. Plotnikov. Hopf solutions to a fluid-elastic interaction model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(2) :215–269, 2008.

[51] Max D. Gunzburger, Hyung-Chun Lee, and Gregory A. Seregin. Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. *J. Math. Fluid Mech.*, 2(3) :219–266, 2000.

[52] Matheus L. J. Hautus. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. Indag. Math.*, 72(5) :443–448, 1969.

[53] M. Hillairet. Lack of collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous flow. *Comm. Partial Differential Equations*, 32(7-9) :1345–1371, 2007.

[54] Matthieu Hillairet and Takéo Takahashi. Collisions in three-dimensional fluid structure interaction problems. *SIAM J. Math. Anal.*, 40(6) :2451–2477, 2009.

[55] Matthieu Hillairet and Takéo Takahashi. Blow up and grazing collision in viscous fluid solid interaction systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 27(1) :291–313, 2010.

[56] Matthieu Hillairet and Takéo Takahashi. Existence of contacts for the motion of a rigid body into a viscous incompressible fluid with the Tresca boundary conditions. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02393058`, December 2019. working paper or preprint.

[57] C. O. Horgan. Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics. *SIAM Rev.*, 37(4) :491–511, 1995.

[58] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators.* Springer Verlag, Berlin-New York, 1976.

[59] Oleg Imanuvilov and Takéo Takahashi. Exact controllability of a fluid-rigid body system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(4) :408–437, 2007.

[60] Oleg Yu. Imanuvilov. Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 6 :39–72, 2001.

[61] Atsushi Inoue and Minoru Wakimoto. On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 24(2) :303–319, 1977.

[62] Ethan Y. Jaffe. Products in Sobolev Spaces. `http://math.mit.edu/~eyjaffe/Short%20Notes/`. Notes.

[63] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[64] S. F. Kistler and L. E. Scriven. Coating flow theory by finite element and asymptotic analysis of the Navier-Stokes system. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4(3) :207–229, 1984.

[65] Julien Lequeurre. Existence of strong solutions to a fluid-structure system. *SIAM J. Math. Anal.*, 43(1) :389–410, 2011.

[66] Hugo Lhachemi and Christophe Prieur. Feedback stabilization of a class of diagonal infinite-dimensional systems with delay boundary control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, PP :1–1, 02 2020.

[67] Hugo Lhachemi and Robert Shorten. Boundary input-to-state stabilization of a damped Euler-Bernoulli beam in the presence of a state-delay. `https://arxiv.org/pdf/1912.01117.pdf`, 2019.

[68] Hugo Lhachemi, Robert Shorten, and Christophe Prieur. Exponential input-to-state stabilization of a class of diagonal boundary control systems with delay boundary control. *Systems & Control Letters*, 138 :104651, Apr 2020.

[69] A. Liakos. Finite-element approximation of viscoelastic fluid flow with slip boundary condition. *Comput. Math. Appl.*, 49(2-3) :281–294, 2005.

[70] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2.* Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18. Dunod, Paris, 1968.

[71] Zhuangyi Liu and Songmu Zheng. *Semigroups associated with dissipative systems*, volume 398 of *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[72] Boris Muha and Sunčica Čanić. Existence of a weak solution to a fluid-elastic structure interaction problem with the Navier slip boundary condition. *J. Differential Equations*, 260(12) :8550–8589, 2016.

[73] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6(1823) :389–440, 1823.

[74] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[75] Gabriela Planas and Franck Sueur. On the "viscous incompressible fluid + rigid body" system with Navier conditions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 31(1) :55–80, 2014.

[76] Christophe Prieur and Emmanuel Trélat. Feedback stabilization of a 1-D linear reaction-diffusion equation with delay boundary control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 64(4) :1415–1425, 2019.

[77] J.-P. Raymond. Feedback boundary stabilization of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 87(6) :627–669, 2007.

[78] Jean-Pierre Raymond. Feedback boundary stabilization of the two-dimensional Navier-Stokes equations. *SIAM J. Control Optim.*, 45(3) :790–828, 2006.

[79] Jean-Pierre Raymond. Feedback stabilization of a fluid-structure model. *SIAM J. Control Optim.*, 48(8) :5398–5443, 2010.

[80] Jean-Pierre Raymond. Stokes and Navier-Stokes equations with a nonhomogeneous divergence condition. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14(4) :1537–1564, 2010.

[81] Jean-Pierre Raymond and Laetitia Thevenet. Boundary feedback stabilization of the two dimensional Navier-Stokes equations with finite dimensional controllers. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 27(3) :1159–1187, 2010.

[82] Arnab Roy and Takéo Takahashi. Local null controllability of a rigid body moving into a Boussinesq flow. *Math. Control Relat. Fields*, 9(4) :793–836, 2019.

[83] Jorge Alonso San Martín, Victor Starovoitov, and Marius Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 161(2) :113–147, 2002.

[84] Yoshihiro Shibata and Senjo Shimizu. On the L_p-L_q maximal regularity of the Neumann problem for the Stokes equations in a bounded domain. *J. Reine Angew. Math.*, 615 :157–209, 2008.

[85] Rieko Shimada. On the L_p-L_q maximal regularity for Stokes equations with Robin boundary condition in a bounded domain. *Math. Methods Appl. Sci.*, 30(3) :257–289, 2007.

[86] V. A. Solonnikov and V. E. Ščadilov. A certain boundary value problem for the stationary system of Navier-Stokes equations. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 125 :196–210, 235, 1973. Boundary value problems of mathematical physics, 8.

[87] Takéo Takahashi. Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain. *Adv. Differential Equations*, 8(12) :1499–1532, 2003.

[88] Takéo Takahashi and Marius Tucsnak. Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid. *J. Math. Fluid Mech.*, 6(1) :53–77, 2004.

[89] Roger Temam. *Navier-Stokes equations*, volume 2 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, revised edition, 1979. Theory and numerical analysis, With an appendix by F. Thomasset.

[90] Roger Temam. *Problèmes mathématiques en plasticité*, volume 12 of *Méthodes Mathématiques de l'Informatique [Mathematical Methods of Information Science]*. Gauthier-Villars, Montrouge, 1983.

[91] Marius Tucsnak and George Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

[92] Rüdiger Verfürth. Finite element approximation of incompressible Navier-Stokes equations with slip boundary condition. *Numer. Math.*, 50(6) :697–721, 1987.

[93] Chao Wang. Strong solutions for the fluid-solid systems in a 2-D domain. *Asymptot. Anal.*, 89(3-4) :263–306, 2014.