

Calcul de Schubert affine et formules de Pieri

Dimitry Kfoury

▶ **To cite this version:**

Dimitry Kfoury. Calcul de Schubert affine et formules de Pieri. Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2020. Français. NNT : 2020LORR0215 . tel-03203728

HAL Id: tel-03203728
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03203728

Submitted on 21 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

École doctorale IAEM Lorraine

Calcul de Schubert affine et formules de Pieri

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4 Décembre 2020

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention mathématiques)

par

Dimitry Kfoury

Composition du jury

Président :	Nicolas Perrin	
Rapporteurs :	Pierre Baumann	Chargé de recherche à l'Université de Strasbourg
	Stéphane Gaussent	Professeur à l'Université Jean Monnet
Examinateurs :	Nicole Bardy-Panse	Maitre de conférence à l'Université de Lorraine
	Pierre-Emmanuel Chaput	Professeur à l'Université de Lorraine (Directeur de Thèse)
	Lucas Fresse	Maitre de conférence à l'Université de Lorraine
	Nicolas Perrin	Professeur à l'Université de Versailles

Institut Elie Cartan de Lorraine — UMR 7502

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent tout naturellement à Pierre-Emmanuel Chaput pour avoir accepté d'encadrer cette thèse. Merci Pierre-Emmanuel pour ta disponibilité permanente, pour ton encouragement et surtout ta patience. C'était un plaisir de travailler avec toi pendant ces 4 ans. Je souhaite à toute personne de t'avoir en directeur de thèse.

Je suis très reconnaissant et honoré que Pierre Baumann et Stéphane Gaussent aient accepté de lire et d'évaluer mon travail de recherche. Merci pour vos remarques et vos commentaires. Je remercie aussi les membres de mon jury, Nicole Bardy-Panse, Lucas Fresse et Nicolas Perrin, avec qui j'ai eu la chance de partager de nombreux échanges au cours de ces 4 ans.

Mes années à l'IECL resteront un souvenir inoubliable, grâce à la vie que ce laboratoire porte en lui. Merci aux membres du laboratoire pour leur accueil et leur aide tout au long de ma thèse. Je tiens à remercier particulièrement Élodie Cunat et Laurence Quirot pour avoir toujours trouvé des solutions à mes (nombreux) problèmes.

Je remercie tous les doctorants que j'ai eu le plaisir de croiser au cours de ma thèse. Vous avez beaucoup contribué à égayer mes journées de travail. Je commence évidemment par les (ex)-occupants du bureau 513 : Mathieu (avec un t), qui malgré notre différence d'âge, on a réussi à passer de très bons moments, à discuter, à jouer de la musique, et à...(j'arrête là en espérant que Florian a vidé les armoires) ; Florian, qui malgré d'avoir 2 bureaux tu étais fidèle au 513 ; Yang pour tous les bons repas chinois et ton courage pour répondre à toutes mes questions. Je remercie également, Hassan et Hussein : Ye3ne mni7 li fallayt mn Nancy bi wa2et l to7dir law ma hayk kenna 2addayneha 3am neshrab ahwe 3al daraj. Merci à Coralie et PA de m'avoir appris à jouer au tarot (plusieurs fois), à Clémence et à Robin pour les nombreuses pauses-café dans votre bureau. Merci à Mihai et Ruotao pour les moments précieux qu'on a passé ensemble et les longues soirées au bureau. Merci à Gabriel, Valentin et Paul pour les moments passés ensemble aux manifs (même si Macron ne veux pas !). Je remercie aussi :Johann, Tom, Nassim, Vincent, Rodolophe, Philip, Youssef, Ibtissem, Yiming et Marco.

Je tiens à remercier ma famille au Liban : mes parents Zahia et Georges qui malgré la distance n'ont pas arrêté de me supporter, aider et soutenir, ma famille à Lille : Rita et Michel qui m'accueillent toujours avec chaleur, merci pour les moments de famille passés ensemble ; merci à Pauline, Julien et Charbel de m'avoir supporter, ça n'aurait pas été pareil sans vous, et sans ...
Je remercie également Perla, qui a été toujours là pour moi.

Je partage aussi mes remerciements avec mes amis à Nancy, à Lille, et mes nouveaux amis à Rennes (particulièrement à Soobin) et tous mes amis au Liban.

Je dédie cette thèse
à ...

Table des matières

État de l'art **ix**

Introduction générale **xv**

Chapitre 1
Groupes algébriques et Groupes de George

1.1 Premières Définitions et théorème de conjugaison 1
1.2 Groupe de Weyl et système de racine 2
1.3 Groupes de Kac-Moody 4
1.3.1 Matrice de Cartan généralisée et le groupe N 4
1.3.2 Le sous-groupe parabolique $\mathcal{P}_Y$ 6
1.3.3 Produit amalgamé de système de groupes 7
1.3.4 Le groupe de Kac-Moody $\mathcal{G}$ 8
1.4 Groupe de Kac-Moody affine 9
1.4.1 Algèbre de Kac-Moody affine 9
1.4.2 Groupe de Kac-Moody affine 10
1.5 Bases de Schubert et formule de Chevalley 15

Chapitre 2
Majoration des coefficients de Littlewood-Richardson dans un système simplement lacé

2.1 p-ordre de Bruhat 17
2.2 ϖ-ordre de Bruhat 27

Chapitre 3
Groupe de George et symétries : types A et C

3.1 Groupe de George de type A 33
3.1.1 Groupe de George, description de $\bar{N}$ et action de $\bar{N}$ sur $\chi(\bar{T})$ 34
3.1.2 Action de $\bar{N}$ sur les espaces propres de $\bar{T}$ agissant sur $\mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$. 39
3.1.3 Identification explicite de $\bar{N}/\bar{T}$ avec le groupe de George 42

3.2 Groupe de George de type C 46
3.2.1 Groupe de George, description de $\bar{N}$ et action de $\bar{N}$ sur $\chi(\bar{T})$ 46
3.2.2 Action de $\bar{N}$ sur les espaces propres de $\bar{T}$ agissant sur $\mathbb{C}^{2l} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ . . 61
3.2.3 Identification explicite de $\bar{N}/\bar{T}$ avec le groupe de George 65

Chapitre 4
Conjecture d'une formule de Pieri pour la cohomologie en type C

4.1 Formule de Chevalley en type A 72
4.2 Énoncé de la conjecture en type C 75
4.3 Compatibilité avec la formule de Chevalley 76
4.4 Conjecture en degré 2 82
4.5 Produit par $\xi^{s_2 s_1 s_0}$ dans $\tilde{C}_2$ 94
4.5.1 Comment obtenir explicitement les marquages 94
4.5.2 Programmation du calcul de Schubert et vérification de cas particuliers à l'aide de l'ordinateur 96
4.5.3 Retrouver les produits en utilisant la conjecture 4.4 96

Chapitre 5
Anneau Nil-Hecke et algèbres de Hopf

5.1 Algèbres de Hopf 99
5.2 L'anneau Nil-Hecke de Kostant et Kumar 102
5.2.1 L'anneau Nil-Hecke $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ 102
5.2.2 Structure de Co-produit sur $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ 104
5.3 Modèle de l'homologie de la Grassmannienne affine 105
5.3.1 Sous-algèbre de Peterson $Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$ 106
5.3.2 Sous-algèbre affine de Fomin-Stanley $\mathbb{B}'$ 109

Chapitre 6
Multiplication par un crochet pour la cohomologie en type A

Chapitre 7
Formule de Pieri pour l'homologie en type C

7.1 Relations dans le groupe de Weyl 131
7.2 Élément principal de la preuve de la conjecture 139
7.3 Énoncé et preuve de la formule 159

Annexe A
Programme Billey

Annexe B
Vérification de la conjecture 4.4 en petits degrés

Bibliographie **177**

État de l'art

Le calcul de Schubert est une branche de la géométrie algébrique introduite dans le dix-neuvième siècle, dans le but de résoudre plusieurs problèmes de dénombrement dans la géométrie énumérative.
Par exemple, il a répondu au questions anciennes suivante :
• Quelle est la dimension de l'intersection de deux droites générales dans $\mathbb{R}^2$?
• Combien de droites intersectent deux droites et un point donnés dans $\mathbb{R}^3$?
• Combien de droites intersectent quatre droites données dans $\mathbb{R}^3$?
Ou encore une question plus moderne :
• Combien de points peut on trouver dans l'intersection de 2, 3, 4, ... variétés de Schubert en position générale ?

Schubert a introduit des objets appelés "Cellules de Schubert" qui sont des ensembles localement fermés dans la Grassmannienne.
En générale le calcul de Schubert peut être considéré pour un espace homogène G/B. En effet, Soit G un groupe algébrique, connexe et réductif défini sur un corps algébriquement clos. Soit B un sous-groupe de Borel de G et soit W le groupe de Weyl de G qui correspond au tore maximal dans B. Alors on a la décomposition de Bruhat de G de la manière suivante :

$$G = BWB = \sqcup_{w \in W} BwB$$

En d'autres termes, c'est la décomposition de G en une union disjointe de classes (à gauche et à droite) de B, paramétrée par les éléments du groupe de Weyl W. Cette décomposition est essentielle pour la décomposition de G/B en cellules de Schubert.
De cette décomposition de G en doubles classes pour B, on déduit, pour un parabolique P, une décomposition de G/P en B-orbites. En particulier pour les Grassmanniennes :
Soit $F = (\{0\} \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = \mathbb{C}^n)$ un drapeau, les variétés de Schubert sont définies par des conditions d'incidence d'un sous-espace linéaire de $\mathbb{C}$ avec les F_i. L'intersection de deux cellules de ce type peut être traduite par le cap produit dans l'anneau de cohomologie de la grassmannienne. Plus précisément, la grassmannienne $G(k,n)$ admet une décomposition cellulaire. Les cellules sont paramétrées par le sous ensemble des représentants de longueur minimale dans W/W_P, noté W^P, où W_P est le sous-groupe de W engendré par $N_G(T) \cap P$. En particulier la cellule correspondante à un élément $w \in W^P$ est de dimension $l(w)$.
En plus on a $H^{2i}(G(k,n)) = \bigoplus_{l(w)=i} \mathbb{Z}\xi^w$ et $H^{2i+1}(G(k,n)) = 0$, où les $\{\xi^t\}_{t \in W^P}$ forment une base duale de $\{\xi_w = [\overline{BwB/B}] \in H_*(G(k,n))\}$.
La multiplication des éléments de la base dans cette algèbre se traduit par l'intersection de variétés de Schubert correspondantes. Alors la question maintenant est de bien comprendre la structure de l'algèbre de cohomologie de la Grassmannienne. Pour cela, on cherche une formule combinatoire pour trouver les coefficients $c^w_{u,v}$ tel que $\xi^u\xi^v = \sum_{u,v \leqslant w} c^w_{u,v}\xi^w$ où $u, v, w \in W^P$. Les

coefficients $c_{u,v}^w$ sont appelés les coefficients de Littlewood-Richardson. Ce problème a été résolu complètement par Littlewood-Richardson [21] avec un trou comblé par Schutzenberger [22], et cette description combinatoire de ces coefficients est nommée : Règle de Littlewood-Richardson. En particulier si u à une forme particulière, cette règle sera nommée : Formule de Pieri. L'utilité des formules de Pieri c'est qu'ils nous permettrons de comprendre la structure d'algèbre sans devoir calculer tout les coefficients $c_{u,v}^w$. En effet, il suffit de trouver une famille $\{\xi^u\}$ qui engendrent l'algèbre cohomologique.

Récemment, on s'est intéressé à une déformation naturelle et définie en termes géométriques, de l'algèbre de cohomologie, appelée algèbre de cohomologie quantique [9].
Dans [5], l'auteur énoncent le principe quantique-classique qui identifie les coefficients de cohomologie quantique sur les Grassmanniennes à des coefficients sur des variétés de drapeaux à deux crans. En plus, des formules combinatoires existent pour la cohomologie des variétés de drapeaux à deux crans, en termes de puzzles (cf. [6]). Combinant tous ces résultats, on obtient une formule combinatoire pour les coefficients de Littlewood-Richardson dans la cohomologie quantique pour les Grassmanniennes de type A.

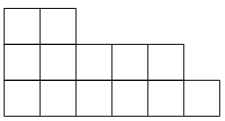
Cependant, une autre approche que l'utilisation du principe quantique-classique est possible, c'est la comparaison avec l'homologie de la Grassmannienne affine : Par des travaux de Peterson et Lam-Shimozono [18], les constantes de structure de cette algèbre sont égales à des constantes de structure de l'homologie de la Grassmannienne affine correspondante, notée $H_*(\mathcal{G}r_G)$. Cette approche a deux avantages :

1. L'homologie est une algèbre de polynômes [10, Corollaire 5.3.2] donc le problème du choix pour la manière de représenter une classe de cohomologie comme un polynôme en les générateurs (problème de Giambelli) a une unique solution.

2. On peut utiliser la structure d'algèbre de Hopf. En effet, la Grassmannienne affine a le type d'homotopie d'un groupe, donc son homologie a une structure d'algèbre de Hopf (cf. Chapitre 5). En plus, la structure d'algèbre de Hopf et en particulier l'existence de l'isomorphisme j (cf. Définition 5.26) rendent évidents des résultats comme le Théorème B(2) dans Bergeron et Sottile [1] : le coefficient $c_{u,v}^w$ ne dépend que v et wu^{-1}.

Examinons d'un peu plus près les formules de Pieri en cohomologie en type $A, C, \tilde{A}$ et $\tilde{C}$ et en homologie en type $\tilde{A}$ et $\tilde{C}$. Commençons tout d'abord par la cohomologie :

1. En type A, on commence par définir une partition d'un entier n par une suite décroissante d'entiers strictement positifs $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_k)$ tel que $n = \sum \lambda_i = |\lambda|$. Chaque partition λ est représentée par un tableau de la manière suivante

   $(6,5,2) \rightsquigarrow$ 

   En fait, il existe une bijection entre les éléments de W/W_P et les partitions du rectangle $k \times (n-k)$ tel que $\ell_P(w) = |\lambda|$.
   Alors on a la formule de Pieri en type A suivante :

   $$\xi^\lambda \cdot \xi^{(k)} = \sum_{\lambda'} \xi^{\lambda'}$$

   Où la somme parcourt toute les λ' obtenues en ajoutant k cases à λ sous la condition qu'on ne peut pas ajouter deux cases sur une même colonne.

2. En type C, dans [1], Bergeron et Sottile donnent une formule de Pieri pour la multiplication par une classe ξ^{v_m}. En effet, cette classe de Schubert est indexée par l'élément v_m, du groupe de Weyl de type C. Ce dernier est représenté comme le sous-groupe de permutations w de $\{-n,\dots,-2,-1,0,1,2,\dots,n\}$ qui satisfassent $w(-a) = -w(a)$ pour tout $a \in \{1,\dots,n\}$. Pour définir v_m, on va tout d'abord considérer (en utilisant les même notations que dans [3]) le diagramme de Dynkin en type C en numérotant ses sommets, de droite à gauche, par $0,1,\dots,n-1$:

Les réflexions simples $\{s_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ sont représentés respectivement par les transpositions adjacentes $\{(i\ i+1)(-i\ -i-1)\}_{i=1,\dots,n-1}$ et s_0 par $(-1\ 1)$. On définit dans ce cas l'élément v_m par :

$$\forall m \in \{1,\dots,n\},\quad v_m := s_{m-1}s_{m-2}\cdots s_1 s_0$$

En fait les v_m définis là-haut sont les indices d'un ensemble de classes de Schubert formant un ensemble de générateurs de l'anneau de cohomologie de la Grassmannienne symplectique $G_w(n,2n)$. Pour pouvoir énoncer la formule de Pieri en cohomologie en type C donnée par [1], on doit tout d'abord définir une notion de marquage. En effet, soit $u, v \in C_n$ (groupe de Weyl de type C) tels que $\ell(v) = \ell(u)+1$, on teste tout d'abord si $u^{-1}v = (-i\ i)$ ou $(-i\ j)(-j\ i)$ pour $0 < i < j \leqslant n$. Si c'est bien le cas on calcul vu^{-1}, et on traite les deux cas suivants :

- S'il existe $\alpha, \beta \in \{1,\dots,n\}$ tels que $\alpha < \beta$ et $vu^{-1} = (-\beta\ -\alpha)(\alpha\ \beta)$, alors ces deux éléments seront connectés par deux arêtes marquées respectivement par $-\alpha$ et β.
- S'il existe $\beta \in \{1,\dots,n\}$ tel que $vu^{-1} = (-\beta\ \beta)$, alors ces deux éléments seront connectés par une arêtes marquée par β.

Les auteurs considères dans la suite une chaîne γ dans le réseaux de Bruhat, et notent $outside(\gamma)$ le point d'arrivée de γ. Ils définissent, dans une chaîne, une descente (respectivement montée) comme un entier $i < m$ tel que $a_i > a_{i+1}$ (respectivement $a_i < a_{i+1}$). Finalement, on peut énoncer la formule de Pieri en type C :

Théorème 0.1. *[1, Théorème A] Soit $u \in C_n$ et $m > 0$. Alors, on a les deux formulations équivalentes :*

$$\xi^u \cdot \xi^{v_m} = \sum_S \mathcal{C}_{outside(\gamma)}$$

où la somme parcourt :

- *Soit toutes les chaînes S dans le réseau de Bruhat qui débutent par u, de longueur m et n'admettent pas de descentes.*
- *Soit toutes les chaînes S dans le réseau de Bruhat qui débutent par u, de longueur m et n'admettent pas de montées.*

En fait on aurait pu définir une notion de marquages dans le type A précédent, et reformuler la règle de Pieri obtenu en terme de chaîne dans le réseau de Bruhat. En effet, soit $u, v \in \mathfrak{S}_n$ (le groupe symétrique modélise le groupe de Weyl en type A) tels que $\ell(v) = \ell(u)+1$, on définit pour tout $p \in \{1,\dots,n\}$, une marquage de la manière suivante : s'il existe $i, j \in \{1,\dots,n\}$ tels que $i \leqslant p < j$ et $u^{-1}v = (i\ j)$ alors $u \leqslant_p v$. Dans ce cas soient $\alpha, \beta \in \{1,\dots,n\}$ tels que $\alpha < \beta$ et $vu^{-1} = (\alpha\ \beta)$, alors ces deux éléments seront connectés par une arêtes marquée par β. On obtient ainsi ce qu'on appelle dans la suite un p-réseau de Bruhat. Ce p- réseau servira à formuler une règle de Pieri pour la

multiplication par l'élément $u_{p,d} = s_{d+p-1} \cdots s_p$. En fait, on peut monter qu'en identifiant les partitions λ (dans la formule de Pieri en type A ci-dessus) avec les éléments de W^P pour P le sous-groupe parabolique correspondant à la racine simple α_p, on obtient la formule suivante pour la multiplication par $u_{p,d} := s_{d+p-1} \cdots s_p$:

$$\xi^v \cdot \xi^{u_{p,d}} = \sum_S \xi^{outside(S)}$$

Où la somme parcourt toutes les chaînes S dans le $p-$réseau qui débutent de v, qui arrivent à u et qui sont croissantes (i.e la suite de marquage associé à la chaîne est croissante).

3. En type $\tilde{A}$, grâce à Lam et al [16], une formule de Pieri en cohomologie dans $H^*(\mathcal{G}r_G)$ est donné pour la multiplication par l'élément $\xi^{a_{0,m}}$ où $a_{0,m} = s_{m-1}s_{m-2} \cdots s_1 s_0$ (cf. Définition 4.1). Les auteurs commencent par définir la notion de bandes fortes. Pour définir ces bandes, on aura besoin d'une notion de marquages (cf. Définition 4.8). En effet, soit w et z des éléments du groupe de Weyl tels que $w < z$, $\ell(w) + 1 = \ell(z)$ et $z = wt_{ij}$ telle que $i \leqslant 0 < j$ (t_{ij} est la transposition de i et j qui représente une certaine réflexion dans le groupe de Weyl). Les auteurs définissent dans ce cas le marquage associé $z(i)$ (on rappelle qu'un élément du groupe de Weyl peut être vu comme une permutation de $\mathbb{Z}$).
Par suite, les bandes fortes de type A seront des chemins entre deux éléments w et z tels que $w \leqslant z$, qui sont construites en débutant par w puis en multipliant à droite, à chaque fois, par une réflexion t_{ij} tel que $i \leqslant 0 < j$ qui augmente la longueur de 1, pour arriver finalement à z. Ce chemin est donc appelé bande forte si la suite de marquage ainsi obtenu est croissante. La formule donné par Lam et al dans [16], est la multiplication par l'élément $\xi^{a_{0,m}}$. Plus précisément :

Théorème 0.2. *Soit $w \in S^0(\tilde{A}_l)$ et $m \geqslant 1$. Alors,*

$$\xi^{a_{0,m}} \xi^w = \sum_S \xi^{outside(S)}.$$

Où la somme parcourt toutes les bandes fortes S de taille m et tel que $inside(S) = w$.

4. En type $\tilde{C}$, il n'existe pas à nos connaissances des formules de Pieri en cohomologie. Dans cette thèse, en s'inspirant de la combinatoire introduite en type C, dans [1], par Bergeron et Sottile, et de la notion de bandes fortes en type $\tilde{A}$ donnée par Lam et al en type $\tilde{A}$ dans [16], on a réussit à conjecturer une formule de Pieri en cohomologie pour la multiplication par $\xi^{c_0,m}$ (cf. Introduction générale).

Comme prévu, on va passer maintenant aux formules de Pieri en homologie :

1. En type $\tilde{A}$, une formule de Pieri est donne par Lam et al [16]. La première notion importante est celle des éléments cycliquement décroissants (cf. Définition 6.12) : En gros ce sont des éléments du groupe de George $S(\tilde{A}_l)$ (les groupes de George sont des réalisations combinatoires des groupes de Weyl affines comme sous-groupes du groupe des permutations de $\mathbb{Z}$) écrits comme un produit de facteurs, qui commutent entre eux, de la forme $s_b s_{b-1} \cdots s_{a+1} s_a$. Ces éléments sont cruciaux pour pouvoir définir la deuxième notion principale qui est celle des bandes faibles de type $\tilde{A}$ (cf. Définition 6.12) : Une bande faible de type $\tilde{A}$, notée $(w \rightsquigarrow z)$ tel que $w \leqslant z$ est une paire (w, z) de telle sorte que zw^{-1} est cycliquement décroissant. En d'autres termes, c'est le fait qu'il existe un

élément cycliquement décroissant, tel que si on le multiplie à droite par w, on obtient z et ce produit est réduit. La formule donné par Lam et al dans [16], est la multiplication par l'élément $\xi_{a_{0,m}}$. Plus précisément :

Théorème 0.3. *Soit $w \in S^0(\tilde{A}_l)$ et $m \in \{1, \ldots, l-1\}$. Alors :*

$$\xi_{a_0,m}\xi_w = \sum_{w \rightsquigarrow z} \xi_z$$

où la somme parcourt toutes les bandes faibles $(w \rightsquigarrow z)$ de type $\tilde{A}$ tel que $size(w \rightsquigarrow z) = m$.

2. En type C, grâce à [17], une formule de Pieri (en homologie) dans $H_*(\mathcal{G}r_G)$ est donné pour la multiplication par l'élément $\xi_{c_{0,m}}$ (cf. Définition 7.20) en utilisant la structure d'algèbres de Hopf et une étude combinatoire poussé. Dans cette thèse on propose également une preuve de cette formule en utilisant aussi la structure d'algèbre de Hopf mais une simplification au niveau de la combinatoire. On invite le lecteur à voir l'introduction générale (partie 1) pour plus de détails concernant la stratégie envisagé dans cette thèse et les différences principales avec la méthode de [17].

Introduction générale

Le but principal de ce document est de développer le calcul de Schubert dans les Grassmanniennes affines en utilisant la structure d'algèbres de Hopf.

Formule en homologie

D'une part, on a réussie à redémontrer la formule de Pieri en type C pour le produit de Pontryagin en l'homologie dans la Grassmannienne affine notée $H_*(\mathcal{G}r_G)$. Pour démontrer cette formule, nous avons été inspiré par le travail de [16] et [15] en type A, mais nous n'avions pas connaissance du travail de [17]. La partie 7.1 de ce document contient des résultats semblables à ceux des parties 6.1 et 6.2 de [17], mais on continue dans la suite avec des stratégies différentes : Dans [15], Lam montre qu'il existe un isomorphisme j_0, d'algèbres de Hopf, entre la sous algèbre affine de Fomin-Stanley notée $\mathbb{B}'$ (cf. Définition 5.33) et l'algèbre $H_*(\mathcal{G}r_G)$. On note dans la suite pour un élément v du groupe de Weyl, $comp(v)$ le nombre de composantes connexes du support de v, $b_v = 2^{comp(v)-1}$ et c_v le coefficient de A_v dans l'expression de $j_0(\xi_w)$. Pour montrer la formule de Pieri pour la multiplication par $\xi_{c_{0,m}}$ (cf. Définition 7.20), il suffit de montrer que

$$\sum_{\substack{\ell(v)=m \\ v\in\mathcal{A}}} b_v\xi_v \in \mathbb{B}'$$

C'est ce que font les auteurs dans [17]. Nous utilisons plutôt le fait que $j_0(\xi_w)$ est dans $\mathbb{B}'$ pour en déduire que

$$c_w = b_w$$

Une simplification est apportée par l'utilisation d'une double récurrence qui s'initialise à l'aide de la formule de Chevalley d'une part, et de la multiplication par des éléments de translation d'autre part (cf. Lemme 7.26.2 ; la preuve du Théorème 7.6 montre qu'il suffit d'établir l'inégalité de la Proposition 7.5 pour en déduire une égalité).
Pour établir cette inégalité, par rapport au travail de [17] il nous suffit ici de produire suffisamment d'éléments w apparaissant dans le terme de gauche, alors que [17] développe une combinatoire plus approfondie permettant d'identifier exactement tout ces éléments w.

Pour mieux comprendre cette stratégie, examinons les notions et résultats principaux utilisés par Lam [15], qui étudie l'isomorphisme de Peterson en type $\tilde{A}$ en utilisant la structure d'algèbres de Hopf sur $H_*(\mathcal{G}r_G)$ et l'action de l'anneau Nil-Hecke affine sur cette algèbre (cf. État de l'art). Pour rester sur le chemin de Lam, et pour pouvoir formuler une règle de multiplication dans le même esprit, il va falloir trouver des candidats, en type $\tilde{C}$, pour remplacer les notions d'éléments cycliquement décroissants, de bandes faibles et de $a_{0,m}$. Après avoir étudier la structure d'algèbre de Hopf de l'algèbre $H_*(\mathcal{G}r_G)$ et l'action de l'anneau Nil-Hecke Affine $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ (cf. Définition 5.16) sur cette algèbre on a trouvé qu'on pourrait redéfinir les éléments cycliquement décroissants comme des éléments de $S(\tilde{C}_l)$ qui sont plus petits qu'un élément dans $\mathcal{A}_{2l}$ (cf. Définition 7.13) :

grossièrement ce dernier est formé par les éléments qui ont une écriture réduite comprenant successivement toutes les réflexions simples selon un ordre croissant, décroissant puis croissant, ou décroissant, croissant puis décroissant. L'ensemble des éléments plus petits qu'un élément de $\mathcal{A}_{2l}$ sera noté $\mathcal{A}$. En type $\tilde{A}$, l'ensemble des éléments cycliquement décroissants de longueur l forme une classe de conjugaison dans $S(\tilde{A}_l)$. De façon similaire, l'ensemble $\mathcal{A}_{2l}$ est une classe de conjugaison dans $S(\tilde{C}_l)$:

Lemme 0.1. *Pour tout $w \in S(\tilde{C}_l)$, on a*

$$w\mathcal{A}_{2l}w^{-1} = \mathcal{A}_{2l}$$

D'une manière similaire qu'en type $\tilde{A}$, on définit les bandes faibles de type $\tilde{C}$ (cf. Définition 7.28), noté, $(w \rightsquigarrow z)$ tel que $w \leqslant z$ est un chemin allant de w à z de telle sorte que $zw^{-1} \in \mathcal{A}$. Finalement, on définit les éléments $c_{0,m}$ (cf. Définition 7.20) qui joueront le même rôle que les éléments $a_{0,m}$ en type A. Ce qui est spéciale à propos de ces éléments c'est le fait que l'intersection de l'intervalle de Bruhat $[e, c_{0,m}]$ avec W_{aff}^- (cf. Définition 5.23) est linéaire, c'est à dire, il existe une unique classe par degré. Ce qui nous permettra (dans la preuve de cette nouvelle formule en type $\tilde{C}$) de raisonner par récurrence en utilisant la structure d'algèbre de Hopf. En plus, pour $m = 2l$, l'élément $c_{0,2l}$ est la translation correspondante à la plus grande racine, ce qui nous permettra d'initier cette récurrence en utilisant la Proposition 5.8, qui donne la multiplication par la classe d'une translation. On obtient alors la formule de Pieri en homologie (type $\tilde{C}$) suivante :

Théorème 0.4. *Soit $w \in S^0(\tilde{C}_l)$ et $m \in \{1, \ldots, 2l\}$. Alors,*

$$\xi_{c_{0,m}}\xi_w = \sum_{w \rightsquigarrow z} 2^{comp(zw^{-1})-1}\xi_z$$

où la somme parcourt toutes les bandes faibles $(w \rightsquigarrow z)$ de type C telles que $\ell(zw^{-1}) = \ell(z) - \ell(w) = m$. Ici, $comp(zw^{-1})$ désigne le nombre de composantes connexes du support de zw^{-1}.

Conjecture en cohomologie

Dans une deuxième partie de ce texte on cherche à trouver une formule de Pieri en cohomologie, toujours pour la Grassmannienne affine en type $\tilde{C}$. En s'inspirant des travaux précédents, et en faisant de nombreux exemples, on en a réussit à formuler une conjecture en type $\tilde{C}$ (cf. Conjecture 4.4), et on démontre la validité de cette conjecture en degré 1 (formule de Chevalley), dans certains cas en degré 2 et enfin dans de nombreux exemples à l'aide de l'ordinateur.
Mais avant de parler du type $\tilde{C}$, regardons ce qui se passe en type $\tilde{A}$. En effet, Lam el al [16] donnent une formule de Pieri (type $\tilde{A}$) en cohomologie (cf. État de l'art). Cette dernière ressemble à l'autre formule en homologie (cf. Théorème 0.3) dans le sens où dans les deux cas on prend w et on ajoutes toutes les bandes possibles, sauf qu'en homologie on considère des bandes faibles, et en cohomologie des bandes fortes.

En cohomologie, comme en homologie, on va essayer de suivre la même stratégie qu'en type $\tilde{A}$ et redéfinir la notion de bandes pour le type $\tilde{C}$. En revanche, les bandes fortes de type A sont construites d'une manière indépendante du type (une fois les marquages définis), pour cela on va pouvoir utiliser la même Définition de bandes fortes en type $\tilde{C}$ et ainsi conjecturer la formule de Pieri, pour la multiplication par $\xi^{c_{0,m}}$:

Conjecture 0.5. *Soit $w \in S^0(\tilde{C}_l)$ et $m \geqslant 0$. Alors,*

$$\xi^{c_{o,m}}\xi^w = \sum_S \xi^{outside(S)}.$$

Où la somme parcourt toutes les bandes fortes de taille m et tel que $inside(S) = w$.

On a réussit (cf. Chapitre 3) à montrer cette conjecture en degré 1 (m=1) : Ceci traduit la formule de Chevalley (i.e. la multiplication par une classe de degré 1). En plus, grâce à la programmation des produits des classes de Schubert (en se basant sur les travaux de Sara Billey [2]), on a pu confirmer cette conjecture pour quelques exemples en degré supérieure à 1.
Pour montrer la conjecture en degré 2, la stratégie envisagée est la suivante : On considère tout d'abord une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat $u \to us_\alpha$. On note par $M(u, us_\alpha)$ l'ensemble des marquages associées à cette couverture. On montre tout d'abord que $M(u, us_\alpha)$ admet un centre de symétrie qu'on notera C_α. En plus, si $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_C$, on sait que

$$C_\alpha = \frac{u(j) - u(i)}{2}$$

On montre dans un deuxième temps que ce centre ne peut pas être "très" grand. Plus précisément, on prouve que

$$0 < C_\alpha < \frac{L_C}{2}$$

Ce dernier nous permet de déduire que si en plus, $us_\alpha \to us_\alpha s_\beta$ est une couverture forte, on a

$$|C_\alpha - C_\beta| < \frac{L_C}{2} \tag{1}$$

Dans le but de montrer cette majoration, on a réussie à montrer un résultat valable dans n'importe quel groupe de Weyl affine non-tordue :

Lemme 0.2. *Soit $\alpha \in \Delta_+^{re}(X)$ et $u \in W(X)$ telles que $u \to us_\alpha$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat, et u est Grassmannien. Alors,*

$$u(\alpha) < \delta$$

Dans la suite on distingue principalement les cas suivants :

1. Si $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$ on a réussie à montrer la conjecture (cf. Proposition 4.7).

2. Si $s_\alpha s_\beta \neq s_\beta s_\alpha$, on a deux cas à traiter :
   (a) Si $C_\alpha = C_\beta$ on arrive aussi à montrer la conjecture (cf. Remarque 4.25).
   (b) Si $C_\alpha \neq C_\beta$ on n'a pas la réussie à montrer la conjecture, par contre on a montré que

$$|C_\alpha - C_\beta| < \frac{L_C}{2}$$

   ce qui veux dire que les centres ne diffèrent pas "trop" et donc en raisonnant d'une manière similaire que dans que dans le cas a, et en utilisant la Proposition 4.8, on espère pouvoir montrer le résultat.

Multiplication par un crochet en type $\tilde{A}$

Dans la troisième partie de la thèse, le but est d'établir une formule dans une variété de drapeau pour la multiplication par un crochet, c'est à dire, un élément de la forme $s_j s_{j+1} \cdots s_{l-1} s_l s_i s_{i-1} \cdots s_1 s_0$ pour $i \leqslant j-3$. Plus précisément, on trouve :

Théorème 0.6. *Soit $i, j \in \{0, \ldots, l\}$ tels que $i \leqslant j-2$. Alors,*

$$\forall u \in W_{\text{aff}},\ \xi^{s_j s_{j+1} \cdots s_{l-1} s_l s_i s_{i-1} \cdots s_1 s_0} \xi^u = \sum_S \xi^{outside(S)}$$

Où la somme parcoure toutes les suites de chemins dans le 0-ordre de Bruhat $S = (C_1, \ldots, C_{l-j+i+1})$ tels que

$$m(C_1) < \cdots < m(C_i) > m(C_{i+1}) > \cdots > m(C_{l-j+i+1})$$

Pour montrer cette formule, on utilise principalement le résultat de Lam et al (cf. Théorème 0.2), et l'identification de l'algèbre $H^*(\mathcal{G}r_G)$ avec un quotient de l'algèbre des fonctions symétriques (cf. Théorème 6.2).

Inégalités pour la cohomologie dans G/B

La dernière partie de la thèse (cf. Chapitre 1) est consacré à l'étude des constantes de structure de l'algèbre cohomologique de la variété de drapeaux G/B, lorsque G correspond a un système de racine simplement lacé. Plus précisément, la classification des intervalles de Bruhat de longueur 2, présente dans le livre de Björner et Brenti [3], permet de montrer que pour certains v, les coefficients $c_{u,v}^w$ sont petits.
En type A, On arrive à montrer le résultat suivant :

Théorème 0.7. *Soit $u, w \in W$ tel que $(wu^{-1})^2 \neq e$ et s_{p-1}, s_p et s_{p+1} les réflexions simples qui correspondent respectivement aux racines α_{p-1}, α_p et α_{p+1}. Alors on a :*

$$c_{u,s_{p-1}s_p}^w + c_{u,s_{p+1}s_p}^w \leqslant 1$$

On généralise dans la suite, pour les autres types simplement lacés, pour des coefficients de la forme $c_{u,\pi}^w$ où π est une petite classe de Schubert (cf. Définition 2.19). On obtient le résultat suivant :

Théorème 0.8. *Soit $u, v \in W$ et π une petite classe de Schubert. Alors,*

$$c_{u,\pi}^w \leqslant 1$$

Chapitre 1

Groupes algébriques et Groupes de George

Dans ce chapitre, on commence par introduire la notion d'un groupe algébrique G sur un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$, la notion d'un sous-groupe de Borel et on termine la première section en citant le théorème de conjugaison des sous-groupes de Borel. Dans la deuxième section, on définit la notion de groupe de Weyl W et d'un système de racines associées à G. On conclut la section par définir les poids minuscules et co-minuscules en les classifiant selon les types A, B, C, D et E. Dans la section 3, on présente le matériel nécessaire pour définir un groupe de Kac-Moody $\mathcal{G}$ et ses sous-groupes paraboliques standards $\mathcal{P}_Y$ où $Y \subset \{1, \ldots, l\} \subset \mathbb{N}$. Dans la section suivante, on rappelle la Définition d'une algèbre de Kac-Moody affine $\mathfrak{g}$, puis on définit et on caractérise le groupe de Kac-Moody affine associé à $\mathfrak{g}$.

1.1 Premières Définitions et théorème de conjugaison

Définition 1.1. *1. On dit qu'un groupe G est un groupe algébrique sur $\mathbf{k}$ si G est une variété algébrique sur le corps $\mathbf{k}$ tel que la multiplication et l'inverse du groupe : $\mu : G \times G \to G$ et $i : G \to G$ sont des morphismes de variétés algébriques.*

2. On dit que G est un groupe algébrique affine si G est une variété algébrique affine.

Exemple 1.2. *Le groupe des matrices à coefficients dans $\mathbf{k}$ de déterminant égale à 1, noté $Sl_n(\mathbf{k})$, est un groupe algébrique.*

Définition 1.3. *Soit G un groupe quelconque, on définit le commutateur $(\ ,\ )$ de G par :*

$$\forall g_1, g_2 \in G;\ (g_1, g_2) := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$$

Définition 1.4. *On dit qu'un groupe algébrique G est nilpotent s'il existe i tel que,*

$$C^i G = \{1_G\}$$

Exemple 1.5. *On note $U_n := \{M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in Gl_n(\mathbf{k}); \forall j < i \leqslant n, \quad m_{ii} = 1 \text{ et } m_{ij} = 0\}$. Alors U_n est un groupe algébrique nilpotent.*

Définition 1.6. *On définit la suite D^i de la manière suivante :*

$$\forall i \geqslant 0, \quad D^0 = G \text{ et } \ D^{i+1} G = (D^i G, D^i G)$$

Les D^iG pour $i \geqslant 0$ sont des sous-groupes fermés et distinguées. Ils sont aussi connexes si G est connexe.

Définition 1.7. *On dit qu'un groupe algébrique G est résoluble s'il existe i tel que,*

$$D^iG = \{1_G\}$$

Exemple 1.8. *Soit T_n l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de tailles $n \times n$. Alors T_n est résoluble et connexe. En effet $(T_n, T_n) \subset U_n$.*

Définition 1.9. *Soit G un groupe connexe et résoluble. On rappelle tout d'abord qu'un élément x de G est dit unipotent si r_x (la multiplication à droite par x) est localement unipotent en tend qu'élément de $\mathbf{k}[G]$. On définit alors le suivant :*

1. *On définit $R(G) \subset G$ comme étant le plus grand sous-groupe distingué, connexe et résoluble.*
2. *On définit aussi $R_u(G) \subset G$ comme étant le plus grand sous-groupe distingué et unipotent.*

Définition 1.10.

1. *On dit que G est semi-simple si $R(G) = \{1_G\}$.*
2. *On dit que G est réductif si $R_u(G) = \{1_G\}$.*

Définition 1.11. *Soit G un groupe algébrique. On dit qu'un sous-groupe B de G est un sous-groupe Borel si B est résoluble, connexe et maximale.*

Exemple 1.12. *Le sous-groupe $B_n(\mathbf{k}) \subset Sl_n(\mathbf{k})$ des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe de Borel.*

Théorème 1.1. *(21.3)Conjugaison des sous-groupes de Borel.*
Soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel. Alors G/B est une variété projective et tous les sous-groupes de Borel sont conjuguées à B.

1.2 Groupe de Weyl et système de racine

Définition 1.13. *Soit S un tore de G. On définit le groupe de Weyl de G par rapport à S, par*

$$W(G, S) := N_G(S)/C_G(S)$$

On remarque que $W(G, S)$ est un groupe fini.

Exemple 1.14. *Soit $T = D_n$ l'ensemble de matrices diagonales dans GL_n. Alors T est un tore de GL_n. $N_G(T)$ est l'ensemble de matrices qui admettent exactement un coefficient non-nul par ligne et par colonne. Si on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n, on aura*

$$W(GL_n, T) = \mathfrak{S}_n$$

On considère dans G un sous-groupe de Borel B, ainsi qu'un tore (i.e. un groupe isomorphe à un produit de copies de $\mathbf{k}^*$) maximal $T \subset B$. Soit $W = N_G(T)/T$, on note $\chi(T)$ le groupe des caractères de T (i.e. le groupe dont les éléments sont les morphismes de groupes algébriques de T dans $\mathbf{k}^*$).

Définition 1.15. *Soit $w \in W$ et $n_w \in N_G(T)$un représentant de w. On définit l'action de groupes de W sur $\chi(T)$ de la façon suivante :*

$$\forall \lambda \in \chi(T);\ w \cdot \lambda : t \to \lambda(n_w^{-1} t n_w)$$

Lemme 1.16. *[4] Soient V un espace vectoriel sur $\mathbf{k}$, R une partie finie qui engendre V. Pour tout $\alpha \in R$ tel que $\alpha \neq 0$, il existe au plus une réflexion s de V telle que $s(\alpha) = -\alpha$ et $s(R) = R$.*

Définition 1.17. *[4] Soient V un espace vectoriel sur $\mathbf{k}$, et R une partie de V. On dit que R est un système de racines dans V si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- *R est fini, ne contient pas 0, et engendre V.*
- *Pour tout $\alpha \in R$, il existe un élément $\alpha^\vee$ du dual V^* de V tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et que la réflexion $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ ($\forall x \in V$, $s_{\alpha,\alpha^\vee}(x) := x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$) laisse stable R.*
- *Pour tout $\alpha \in R$, on a $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$.*

Remarque 1.18. *D'après le Lemme 1.16, la réflexion $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ (donc aussi la forme linéaire $\alpha^\vee$) est déterminée de manière unique par α, ce qui donne un sens au troisième point de la Définition 1.17. On posera $s_\alpha := s_{\alpha,\alpha^\vee}$. Les éléments de R sont appelés des racines.*

Remarque 1.19. *On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $X = \chi(T) \otimes \mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $(\ , \ )$ qui est W-invariant. Soit V une représentation de dimension finie de G. On note $V_\alpha = \{v \in V;\ t \cdot v = \alpha(t)v \ \ \forall t \in V\}$. Sous l'action du tore T, on obtient une décomposition :*

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \chi(T)} V_\alpha$$

Lorsque $V_\alpha \neq 0$, le caractère α est appelé poids de la représentation V, et les éléments de V_α sont appelés vecteurs de poids α. Les poids non nuls de la représentation adjointe de G sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sont appelés racines. En plus, si G est réductif, ces derniers forment un système de racines noté R.

Définition 1.20. *On dit qu'un vecteur $\varpi \in X$ est un poids abstrait si :*

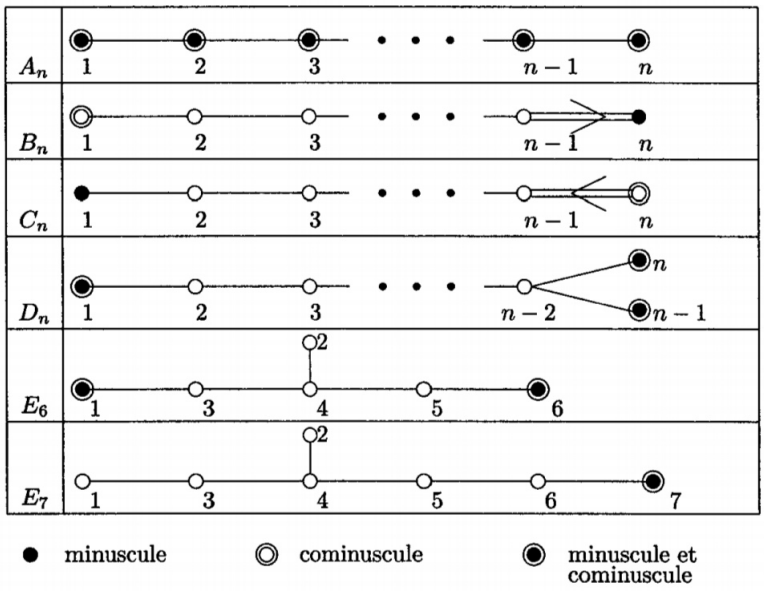
$$\forall \alpha \in R,\ \langle \varpi, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$$

Définition 1.21. *Un poids fondamental ϖ est dit minuscule si :*

$$\forall \beta \in R,\ |\langle \varpi, \beta^\vee \rangle| \leqslant 1$$

Il est dit cominuscule si le poids dual $\varpi^\vee$ est minuscule relativement au système de racines dual $R^\vee$.

Remarque 1.22. *La liste des poids minuscules et cominuscules est donnée dans le tableau ci-dessous (la numérotation des poids fondamentaux est celle de Bourbaki) :*



1.3 Groupes de Kac-Moody

On rappelle ici brièvement la construction des groupes de Kac-Moody :
Pour définir un groupe de Kac-Moody on commence par fixer une matrice de Cartan généralisée A de taille n et on définit l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ associée. On choisit ensuite un $\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{h}$ (algèbre de Cartan associée à $\mathfrak{g}(A)$ vérifiant certains propriétés, et on note $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$ son dual. On définit le groupe $T := Hom_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^*)$, et le groupe N engendré par T et certains éléments $\tilde{s}_i$. On définit après, pour $Y \subset \{1, \cdots, n\}$, le sous-groupe parabolique standard $\mathcal{P}_Y$ comme produit semi-direct du pro-groupe, pro-unipotent $\mathcal{U}_Y$ et (si Y est de type fini) $\mathcal{G}_Y$ le groupe algébrique linéaire réductif et connexe associé à une certaine donnée radicielle ψ_Y. Enfin on définit le groupe de Kac-Moody $\mathcal{G}$ comme produit amalgamé du système de groupe $(N, \mathcal{P}_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n)$.

1.3.1 Matrice de Cartan généralisée et le groupe N

Définition 1.23. *[12, 1.1] Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de rang l est appelée une matrice de Cartan généralisée (MCG), si elle vérifie les conditions suivantes :*

- *Pour tout $i = 1, \ldots, n$, $a_{ii} = 2$.*
- *Pour tout $i \neq j$, $a_{ij} \leqslant 0$.*
- $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$

Définition 1.24. *[12, 1.1] Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, de rang l, une matrice de Cartan généralisée. Soit $\mathfrak{h}$ un espace vectoriel complexe, $\pi := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ et $\pi^\vee := \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$. On dit que le triplé $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ est une réalisation de A si :*

- *π et $\pi^\vee$ sont linéairement indépendents.*
- $\forall i, j = 1, \ldots, n\ \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$
- $n - l = dim(\mathfrak{h}) - n$

Définition 1.25. *[12, §1.2] Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times n$ sur $\mathbb{C}$, et soit $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ une réalisation de A, où $\pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ et $\pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\}$. On définit l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ engendrée par des éléments e_i, f_i $(i = 1, \ldots, n)$ et $\mathfrak{h}$ avec les relations suivantes :*

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee & i, j = 1, \ldots, n \\ [h, h'] = 0 & h, h' \in \mathfrak{h} \\ [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i & \\ [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i & i = 1, \ldots, n;\ h \in \mathfrak{h} \end{cases}$$

Proposition 1.2. *[12, Théorème 1.2] Parmi les idéaux de $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ qui intersectent $\mathfrak{h}$ trivialement, il existe un unique idéal maximal $\mathfrak{m}$.*

Définition 1.26. *[12, §1.3] On définit l'algèbre de Kac-Moody associée à une matrice de Cartan généralisée A par :*

$$\mathfrak{g}(A) := \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{m}$$

Définition 1.27. *On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant l}$ est symmétrisable, s'il existe une matrice D diagonale et inversible, et une matrice B symétrique telles que :*

$$A = DB$$

Définition 1.28. *[14, §6.1.6] Soit $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Kac Moody associée à une matrice de Cartan généralisée A. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ l'algèbre de Cartan associée à $\mathfrak{g}$. On choisit un $\mathbb{Z}$-module $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} \subset \mathfrak{h}$ de dimension finie qui satisfait les conditions suivantes :*

- *$\mathfrak{h}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} \to \mathfrak{h}$ est un isomorphisme.*
- *Pour tout $i = 1, \ldots, l$, $\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}$.*
- *L'ensemble $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* := Hom_\mathbb{Z}(\mathfrak{h}_\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \subset \mathfrak{h}^*$ contient tout les α_i.*
- *$\mathfrak{h}_\mathbb{Z}/(\sum_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i^\vee)$ est sans torsion.*

Définition 1.29. *[14, §6.1.6] On définit le groupe $T := Hom_\mathbb{Z}(\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*, \mathbb{C}^*)$. On définit $(-1)^{\alpha_i^\vee} \in T$ de la manière suivante :*

$$\forall \varpi \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*,\ (-1)^{\alpha_i^\vee}(\varpi) = (-1)^{\langle \varpi, \alpha_i^\vee \rangle}.$$

Soit N le groupe engendré par le groupe T et un système de symboles $\{\tilde{s}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant l}$ tels que :

- *$\forall i = 1, \ldots, l\ \forall t \in T,\ \tilde{s}_i t \tilde{s}_i^{-1} = s_i(t)$.*
- *$\forall i = 1, \ldots, l\ \tilde{s}_i{}^2 = (-1)^{\alpha_i^\vee}$.*
- *Soit $m_{i,j}$ l'ordre de $s_i s_j$ dans W (cf. [14, Proposition 1.3.21]). Alors pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$ tel que $m_{i,j} < \infty$ on a*

$$\underbrace{\tilde{s}_i \tilde{s}_j \tilde{s}_i \cdots}_{m_{i,j}\ facteurs} = \underbrace{\tilde{s}_j \tilde{s}_i \tilde{s}_j \cdots}_{m_{i,j}\ facteurs}$$

1.3.2 Le sous-groupe parabolique $\mathcal{P}_Y$

Définition 1.30. *[14, 6.1.12] Soit X et $X^\vee$ deux groupes abéliens engendrés par un nombre fini d'éléments. Soit $R \subset X$ et $R^\vee \subset X^\vee$ deux ensembles finis, une bijection entre R et $R^\vee$ qui envoie tout élément α de R sur un élément noté $\alpha^\vee$ dans $R^\vee$ et un couplage $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^\vee \to \mathbb{Z}$ telles que :*

- $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *identifie X avec $Hom_{\mathbb{Z}}(X^\vee, \mathbb{Z})$.*
- *Si on note s_α (resp. $\bar{s}_\alpha$) l'endomorphisme de X (resp. $X^\vee$) définie par :*

$$\forall x \in X,\ s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$
$$\forall \bar{x} \in X^\vee,\ \bar{s}_\alpha(\bar{x}) = \bar{x} - \langle \alpha, \bar{x} \rangle \alpha^\vee$$

Alors,

$$s_\alpha(R) \subset R \text{ et } \bar{s}_\alpha(R^\vee) \subset R^\vee$$

On dit dans cas que le quadruple $(X, R, X^\vee, R^\vee)$ est une donnée radicielle.

Notations 1.31. *Pour tout $Y \subset \{1, \dots, l\}$ on note :*

- $\Delta_Y = \Delta \cap (\bigoplus_{i \in Y} \mathbb{Z}\alpha_i)$
- $\Delta_Y^+ = \Delta^+ \cap \Delta_Y$
- $\mathfrak{g}_Y = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_\alpha)$
- $\mathfrak{u}_Y = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_Y^+} \mathfrak{g}_\alpha$
- $\mathfrak{p}_Y = \mathfrak{g}_Y \oplus \mathfrak{u}_Y$
- $\forall \beta = \sum_i n_i \alpha_i \in \Delta_Y,\ ht_Y(\beta) := |\sum_{i \notin Y} n_i|$

En plus, on dit que Y est de type fini si $\mathfrak{g}_Y$ est de dimension finie.

Remarque 1.32. *Soit $Y \subset \{1, \dots, l\}$ de type fini. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (c.f.Définition 1.28). On note $\Delta_Y^\vee$ l'ensemble des coracines $\alpha^\vee$ qui correspondent aux racines α dans Δ_Y. Puisque Y est de type fini, on observe que les racines de Δ_Y sont réelles. On considère le couplage standard $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$. D'après ([14, Lemme 1.3.7]), l'application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ de Δ_Y dans $\Delta_Y^\vee$ est une bijection. On peut dans ce cas définir la donnée radicielle suivant :*

$$\Psi_Y := (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \Delta_Y, \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, \Delta_Y^\vee)$$

Définition 1.33. *[14, 6.1.13] Soit $\mathcal{G}_Y$ l'unique (à isomorphismes près) groupe algébrique linéaire réductif et connexe (de dimension finie) associé à Ψ_Y (cf.[Springer-98, Théorèmes 10.1.1]).*

Remarque 1.34. *On remarque que $Lie(\mathcal{G}_Y) = \mathfrak{g}_Y$ et $T := Hom_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*)$ est un tore maximal de $\mathcal{G}_Y$ tel que $Lie(T) = \mathfrak{h}$. On rappelle qu'un $\mathfrak{g}_Y$-module V de dimension finie est appelé un $(\mathfrak{g}_Y, T)$ -module, si la $\mathfrak{h}$-structure sur V, obtenue par restriction, s'intègre pour donner une structure algébrique de T-modules. Sous cette Définition on remarque que tout $(\mathfrak{g}_Y, T)$-module V est un $\mathcal{G}_Y$-module.*

Définition 1.35. *[14, 6.1.13] On définit les espaces M_k de dimension finie de la manière suivante :*

$$\forall k \geqslant 1,\ M_k := \bigoplus_{\substack{\beta \in \Delta^+ \\ ht_Y(\beta)=k}} \mathfrak{g}_\beta$$

Remarque 1.36. *Pour tout $k \geqslant 1$, M_k est un $(\mathfrak{g}_Y, T)$-module sous l'action adjointe (cf. [14, 6.1.6.2]). En particulier M_k est un $\mathcal{G}_Y$-module, et par conséquence $\hat{\mathfrak{u}} := \Pi_{\beta \in \Delta^+ \setminus \Delta_Y^+}(= \Pi_{k \geqslant 1} M_k)$ l'est aussi. En plus les éléments de $\mathcal{G}_Y$ agissent sur $\hat{\mathfrak{u}}$ comme automorphismes d'algèbres de Lie. En particulier, d'après [14, Théorème 4.4.19], si on note $\mathcal{U}_Y$ le pro-groupe, pro-unipotent d'algèbre de Lie $\hat{\mathfrak{u}}$, on obtient un morphisme de groupes $\mathcal{G}_Y \to Aut(\mathcal{U}_Y)$.*

Définition 1.37. *Pour tout $Y \in \{1, \ldots, l\}$. Le morphisme de groupes défini dans la remarque 1.36 induit le produit semi-direct :*

$$\mathcal{P}_Y := \mathcal{U}_Y \ltimes \mathcal{G}_Y$$

Le groupe $\mathcal{P}_Y$ est appelé groupe parabolique standard.

1.3.3 Produit amalgamé de système de groupes

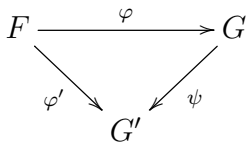
Les groupes de Kac-Moody sont définis comme des produits amalgamés. On donne ici la Définition générale des produits amalgamés : Dans son livre, [14], Kumar définit le produit amalgamé de familles de groupes mais ensuite utilise un produit amalgamé de systèmes de groupes. Pour cette raison on vérifiera dans la suite qu'on pourra bien définir le produit amalgamé de systèmes de groupes.

Définition 1.38. *[14, 5.1.6] Soit I un ensemble d'indices. Soit $\{M_i\}_{i \in I}$ une famille de groupes. Pour tout $i, j \in I$, soit $M_{\{i,j\}} = M_{\{j,i\}}$ un groupe et soit un morphisme $\varphi_{i,j} : M_{\{i,j\}} \to M_i$.*

1. *Le produit amalgamé des $\varphi_{i,j}$ est le couple $(M, (\varphi_i)_{i \in I})$ unique à isomorphisme près, satisfaisantes les deux conditions suivantes :*
   - *M est un groupe et pour tout i, j dans I, les $\varphi_i : M_i \to M$ sont des morphismes telles que $\varphi_i \circ \varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_{j,i}$.*
   - *Si L est un groupe et $\psi_i : M_i \to L$ sont des morphismes satisfaisantes $\psi_i \circ \varphi_{i,j} = \psi_j \circ \varphi_{j,i}$, alors il existe un unique morphisme $\psi : M \to L$ telle que $\psi_i = \psi \circ \varphi_i$ pour tout i dans I.*
2. *Soit F un ensemble et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensemble de F telle que les M_i ont une structure de groupes. Alors on dit que $(M_i)_{i \in I}$ est un système de groupes, si $M_i \cap M_j$ est un sous-groupe de M_i et de M_j pour tout i, j dans I. En plus, la structure de groupes obtenue sur $M_i \cap M_j$ de M_i et de M_j coïncident.*

Définition 1.39. *Soit $(M_i)_{i \in I}$ et F comme dans la partie (2) de la Définition 1.38. On suppose en plus que $F = \bigcup_i M_i$. Soit G un groupe quelconque et $\varphi : F \to G$ une application telle que $\varphi_{|_{M_i}}$ (la restriction de φ à M_i) est un morphisme de groupes pour tout $i \in I$.*
On dit que (G, φ) est une solution du problème universel, noté (P), si :
Pour tout couple (G', φ') vérifiant les mêmes conditions que (G, φ), il existe un unique morphisme

de groupes $\psi : G \to G'$ tel que le digramme suivant commute :



Remarque 1.40. *[14, 5.1.6]Soit $(M_i)_{i\in I}$ et F comme dans la Définition 1.39. Si on considère $M_{\{i,j\}} := M_i \cap M_j$ et $\varphi_{i,j} : M_{\{i,j\}} \hookrightarrow M_i$ l'inclusion, alors le produit amalgamé de $\varphi_{i,j}$ est appelé, dans se cas, produit amalgamé du système de groupes $(M_i)_{i\in I}$. On définit aussi l'application $\varphi : F = \bigcup_i M_i \to M$ telle que pour tout $i \in I$, $\varphi_{|_{M_i}} = \varphi_i$. L'application φ est bien définit (sur les $M_i \cap M_j$). En effet d'après la Définition de M on sait que pour tout i, j dans I on a $\varphi_i \circ \varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_{j,i}$.*

Proposition 1.3. *Sous les mêmes hypothèses de la remarque 1.40, le couple (M, φ) est la solution du problème (P) (cf. Définition 1.39).*

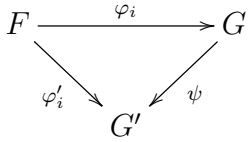
Démonstration. Soit G' un groupe quelconque et $\varphi' : F \to G'$ une application telle que $\varphi'_{|_{M_i}}$ est un morphisme de groupes. On pose $\varphi'_i := \varphi'_{|_{M_i}} : M_i \to G'$. On remarque que,

$$\forall i, j \in I,\ \varphi'_i = \varphi'_j \ \ (\text{sur} \ \ M_{i,j} = M_i \cap M_j).$$

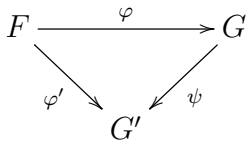
Donc

$$\varphi'_i \circ \varphi_{i,j} = \varphi'_j \circ \varphi_{i,j}.$$

Or la Définition d'un produit amalgamé assure l'existence d'un unique morphisme de groupes $\psi : G \to G'$ tel que le diagramme suivant est commutatif pour tout $i \in I$:



Alors par Définition de φ', on a la commutativité du digramme suivant :



□

1.3.4 Le groupe de Kac-Moody $\mathcal{G}$

Lemme 1.41. *Soit $Y_1 \subset Y_2 \subset \{1, \ldots, l\}$ tel que Y_2 (par suite Y_1) est de type fini. Alors il existe un unique morphisme de pro-groupes injectif $\gamma = \gamma_{Y_2,Y_1} : \mathcal{P}_{Y_1} \hookrightarrow \mathcal{P}_{Y_2}$ tel que $\dot{\gamma}$ est l'inclusion $\hat{\mathfrak{p}}_{Y_1} \subset \hat{\mathfrak{p}}_{Y_2}$.*

Notation 1.42. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$, on note par $\mathcal{P}_i$ le sous-groupe parabolique standard $\mathcal{P}_{\{i\}}$ et soit $\mathcal{B} := \mathcal{P}_\varnothing$.*

Remarque 1.43. *D'après le Lemme 1.41, on a*

$$\forall i \in \{1, \dots, l\};\ \mathcal{B} \subset \mathcal{P}_i$$

On note aussi $N_i \subset N$ le sous groupe engendré par $T \cup \{\tilde{s}_i\}$. Alors d'après (6.1.8.1),

$$N_i = T \cup T\tilde{s}_i$$

Définition 1.44. *On note par $\gamma_i : \mathcal{B} \to \mathcal{P}_i$ l'inclusion définie dans Lemme 1.41. On définit l'ensemble $Z = ((\cup_{i\in\{1,\dots,l\}}\mathcal{P}_i \cup N)/\sim$ en identifiant les éléments suivants :*

- $\forall b \in \mathcal{B}\ \forall i, j \in \{1, \dots, l\},\ \gamma_i(b) \sim \gamma_j(b)$.
- $\forall n \in N_i \subset N,\ n \sim \theta_i(n)$.

Remarque 1.45. *Dans [14], on montre que les $\mathcal{P}_i$ et N s'injectent dans Z et $\mathcal{B} \cap N = T$.*

On arrive à la Définition principale de cette section :

Définition 1.46. *On définit le groupe de Kac-Moody $\mathcal{G}$ en tant que produit amalgamé de système de groupes $(N, \mathcal{P}_i; 1 \leqslant i \leqslant l)$ (cf. Définition 1.39).*

1.4 Groupe de Kac-Moody affine

1.4.1 Algèbre de Kac-Moody affine

Définition 1.47. *[14](Algèbre de Lacets) Soit $\mathring{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant l}$ une matrice de Cartan indécomposable. On note $\mathring{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}(\mathring{A})$ l'algèbre de Lie (simple et de dimension finie) associée à la matrice $\mathring{A}$. On note $L = \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ l'algèbre de polynômes de Laurent. On définit l'algèbre de lacets de la manière suivante :*

$$L(\mathring{\mathfrak{g}}) := L \otimes_{\mathbb{C}} \mathring{\mathfrak{g}}$$

Remarque 1.48. *$L(\mathring{\mathfrak{g}})$ est une algèbre de Lie complexe de dimension infinie et son crochet de Lie associé est défini par :*

$$\forall P, Q \in L,\ \forall x, y \in \mathring{\mathfrak{g}};\quad [P \otimes x, Q \otimes y]_o = PQ \otimes [x, y]$$

Définition 1.49. *[14](Extension de $L(\mathring{\mathfrak{g}})$) On note par θ la plus grande racine de $\mathring{\mathfrak{g}}$.*

1. *On définit $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ comme un espace vectoriel de codimension 2, contenant $L(\mathring{\mathfrak{g}})$. Soient K et d dans $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ tels que*
$$\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) = L(\mathring{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d.$$
2. *Soit $\mathring{\mathfrak{h}}$ la sous algèbre de Cartan associée à $\mathring{\mathfrak{g}}$. On note dans ce cas*
$$\mathfrak{h} := \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d.$$
3. *Soit $(.,.)$ la forme bilinéaire, G-invariante, symétrique et non-dégénérer sur $\mathring{\mathfrak{g}}$ ((cf. [14, Théorème 1.5.4])), telle que la forme bilinéaire induite par celle-là (toujours notée $(.,.)$) vérifie :*
$$(\theta, \theta) = 2$$

4. On définit aussi le produit $[\ ,\ ]$ *sur* $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ *par :*

$$\forall \lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{C},\ \forall m,m' \in \mathbb{Z},\ \forall x, x' \in \mathring{\mathfrak{g}}$$

$$[t^m \otimes x + \lambda K + \mu d, t^{m'} \otimes x' + \lambda' K + \mu' d]$$
$$=$$
$$t^{m+m'} \otimes [x, x'] + \mu m' t^{m'} \otimes x' - \mu' m t^m \otimes x + m\delta_{m,-m'} \langle x, x' \rangle K$$

Remarque 1.50. *Dans [14], ils montrent que l'algèbre* $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ *est une algèbre de Lie appelé "Algèbre de Kac-Moody affine". En plus* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$.
On définit l'élément $\delta \in \mathfrak{h}^*$ *tel que*

$$\langle \delta, d \rangle = 1,\ \langle \delta, \mathring{\mathfrak{h}} \rangle = 0 \text{ et } \langle \delta, K \rangle = 0.$$

On pose $\pi = \{\alpha_0 := \delta - \theta, \alpha_1, ..., \alpha_l\}$, *et on montre aussi que* π *est l'ensemble de racines simples associé.*

Définition 1.51. *[12, 5.1] Le suivant est défini pour un système de racine* Δ *quelconque et son groupe de Weyl* W *associé. Soit* $\alpha \in \Delta$ *une racine, on dit que* α *est une racine réelle s'il existe* $w \in W$ *tel que* $w(\alpha)$ *est une racine simple. Toute racine qui n'est pas réelle est dite imaginaire. On note* Δ^{re} *l'ensemble des racines réelles et* Δ^{im} *celui des racines imaginaires. Alors* $\Delta = \Delta^{re} \cup \Delta^{im}$.

Lemme 1.52. *[14, Corollaire 13.1.4] On décrit le système de racines de* $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ *par rapport à* $\mathfrak{h}$ *de la manière suivante :*

$$\Delta = \{k\delta + \gamma; k \in \mathbb{Z}, \gamma \in \mathring{\Delta}\} \cup \{k\delta; k \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

En plus,

$$\Delta^{re} = \{k\delta + \gamma; k \in \mathbb{Z}, \gamma \in \mathring{\Delta}\} \text{ et } \Delta^{im} = \{k\delta; k \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

Proposition 1.4. *[14, Lemme 13.1.2] Pour tout* k *dans* $\mathbb{Z}$ *et* γ *dans* $\mathring{\Delta} \cup \{0\}$. *Alors on a le suivant :*

$$L(\mathring{\mathfrak{g}})_{k\delta+\gamma} = t^k \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_\gamma \text{ et } \hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} L(\mathring{\mathfrak{g}})_\alpha).$$

Remarque 1.53. *Pour les racines de la forme* $k\delta$ *(racines imaginaires) on a :*

$$L(\mathring{\mathfrak{g}})_{k\delta} = t^k \otimes \mathring{\mathfrak{h}}$$

1.4.2 Groupe de Kac-Moody affine

Dans la suite on considère un groupe algébrique $\mathring{G}$ sur $\mathbb{C}$ connexe et simplement connexe. On note par $\mathbb{C}[\mathring{G}]$ son algèbre des fonctions régulières.

Définition 1.54. *[14, 13.2.1] Soit* R *une* $\mathbb{C}$*-algèbre associative et commutative avec identité. On note* $\mathring{G}(R)$ *l'ensemble de morphismes de* $\mathbb{C}$*-algèbres de* $\mathbb{C}[\mathring{G}]$ *dans* R.
Alors, $\mathring{G}(R)$ *a une structure de groupes (cf.[Springer-98,2.1.6]).*
En particulier, on définit le groupe $L(\mathring{G}) := \mathring{G}(\mathbb{C}([u, u^{-1}])$.

Exemple 1.55. *1. Si* $\mathring{G} = Sp_{2l}(\mathbb{C})$. *On note* $\Omega \in \mathring{G}$ *tel que* $\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_l \\ -I_l & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. *Alors* $\mathring{G}(R)$ *peut être identifier avec le groupe*

$$Sp_{2l}(R) = \{M = (a_{i,j}) \in M_{2l\times 2l}; {}^tM\Omega M = \Omega,\ a_{i,j} \in R\}$$

2. Si $\mathring{G} = Sl_l(\mathbb{C})$, *alors* $\mathring{G}(R)$ *peut être identifier avec le groupe*

$$SL_l(R) = \{M = (a_{i,j}) \in M_{l\times l};\ det(M) = 1,\ a_{i,j} \in R\}$$

Remarque 1.56. *On considère le morphisme* γ *définit de la manière suivante :*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{C}^* &\to Aut(\mathbb{C}[u, u^{-1}]) \\ z &\to \gamma(z) \end{aligned}$$

tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ *on a*

$$\gamma(z)(P(u)) = P(zu)$$

Ceci induit, canoniquement, un morphisme de groupes, qu'on notera encore γ *:*

$$\gamma : \mathbb{C}^* \to Aut\ L(\mathring{G})$$

Plus précisément, soit $m : \mathbb{C}[\mathring{G}] \to \mathbb{C}[u, u^{-1}])$ *un élément de* $L(\mathring{G})$ *et* z *dans* $\mathbb{C}^*$. *Puisque* $\gamma(z)$ *appartient à* $Aut(\mathbb{C}[u, u^{-1}]$, *on en déduit que* $\gamma(z) \circ m$ *est un élément de* $L(\mathring{G})$. *Finalement, un élément* z *de* $\mathbb{C}^*$ *agit sur un élément* m *de* $L(\mathring{G})$ *en le composant à gauche par* $\gamma(z)$.

Remarque 1.57. *Soit* $p, q \in \mathbb{N}^*$. *En générale on peut définir une action de* $\mathbb{C}$ *sur l'ensemble des matrices,* $M_{p,q}(\mathbb{C}[u, u^{-1}])$, *à coefficients des polynômes de Laurent, de la manière suivante :*

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall (a_{i,j}(u)) \in M_{p,q}(\mathbb{C}[u, u^{-1}]),\quad z \cdot (a_{i,j}(u)) := (a_{i,j}(zu))$$

En particulier, si on considère les matrices dans $SL_l(\mathbb{C}[u, u^{-1}])$, *cette définition coïncide avec l'action de* $\mathbb{C}^*$ *sur* $SL_l(\mathbb{C}[u, u^{-1}])$ *définie dans [14, Définition 13.2.1].*

Démonstration. Ce qu'on doit montrer c'est que l'action définie dans cette remarque sur $SL_l(\mathbb{C}[u, u^{-1}])$ (l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$ et détérminant 1) est identifié avec l'action donnée par γ (cf. Remarque 1.56) sur $L(SL_l)$ (l'ensemble des $\mathbb{C}$-algèbres morphismes de $\mathbb{C}[SL_l]$ dans $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$). Explicitons tout d'abord l'identification entre $SL_l(\mathbb{C}[u, u^{-1}])$ et $L[SL_l]$. Soit $M = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant l} \in SL_l(\mathbb{C}[u, u^{-1}])$, on l'associe $\varphi_M \in L(SL_l)$, le $\mathbb{C}$-morphisme tel que

$$\forall P \in \mathbb{C}[SL_l];\ \varphi_M(P) = P((g_{i,j})_{i,j})$$

(on rappelle que $\mathbb{C}[SL_l] = \mathbb{C}[x_{i,j}]/(det((x_{i,j})_{i,j}) - 1)$.) Dans l'autre sens, pour un $\varphi \in L(SL_l)$ on l'associe $M_\varphi \in SL_l(\mathbb{C}[u, u^{-1}])$ tel que

$$M_\varphi = (\varphi(x_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant l}$$

On remarque, avec ces notations, que

$$M_{\varphi_M} = M \text{ et } \varphi_{M_\varphi} = \varphi$$

On en déduit alors une identification entre $SL_l(\mathbb{C}[u,u^{-1}])$ et $L[SL_l]$. On peut maintenant examiner les actions en question : Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $M = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant l} \in SL_l(\mathbb{C}[u,u^{-1}])$ et $\varphi \in L(SL_l)$.

$$\text{Montrons que } \varphi_{z\cdot M} = \gamma(z)(\varphi_M)$$

En effet, soit $P \in \mathbb{C}[SL_l]$. D'une part,

$$\varphi_{z\cdot M}(P) = P((g_{i,j}(zu))_{i,j}) \text{ (par définition)}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\gamma(z)(\varphi_M))(P) &= \gamma(z)\circ\varphi_M(P) \text{ (cf. Remarque 1.56)}\\ &= \gamma(z)(P((g_{i,j})))\\ &= P((g_{i,j}(zu))_{i,j}) \text{ (par définition de } \gamma(z))\end{aligned}$$

□

Montrons que l'action définie dans la remarque 1.57 est multiplicative :

Lemme 1.58. *Soient $A(u) = (a_{ij}(u)), B(u) = (b_{ij}(u)) \in M_{p,q}(\mathbb{C}[u,u^{-1}])$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Alors,*

$$z\cdot(AB)(u) = A(zu)B(zu)$$

Démonstration. D'une part, on a

$$AB(u) = (\sum_{m=1}^{q} a_{i,m}(u)b_{m,j}(u))$$

Donc

$$z\cdot(AB)(u) = (\sum_{m=1}^{q} a_{i,m}(zu)b_{m,j}(zu))$$

D'autre part,

$$A(zu)B(zu) = (\sum_{m=1}^{q} a_{i,m}(zu)b_{m,j}(zu))$$

Alors,

$$z\cdot(AB) = A(zu)B(zu)$$

□

Définition 1.59. *[14, 13.2.2] On définit tout d'abord le produit semi-direct de groupes $\bar{L}(\mathring{G})$ par $\mathbb{C}^* \ltimes L(\mathring{G})$ (Un élément $z \in \mathbb{C}$ agit sur $L(\mathring{G})$ comme dans la remarque 1.56). Pour tout z dans $\mathbb{C}^*$ on note par d_z l'élément qui correspond à $(z,1)$ dans $\bar{L}(\mathring{G})$.*

Remarque 1.60. *Soit $M, M' \in \bar{L}(\mathring{G})$ et $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Alors,*

$$d_z M d_{z'} M' \in \mathbb{C}^* \ltimes L(\mathring{G})$$

Et

$$\begin{aligned}d_z M d_{z'} M' &= d_z d_{z'} d_{z'}^{-1} M d_{z'} M'\\ &= d_z d_{z'} (d_{z'}^{-1} M d_{z'}) M'\\ &= d_z d_{z'} (\gamma(z')^{-1}\cdot M) M'\\ &= (d_z d_{z'})(M(z'^{-1}u)M')\end{aligned}$$

Définition 1.61. *[14, 13.2.2] Soit* $\mathring{Q}^\vee := \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \mathring{\mathfrak{h}}$ *l'espace de co-racines de* $\mathring{\mathfrak{g}}$*. Soit* $\mathring{T} := Hom_{\mathbb{Z}}(\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*) \subset \mathring{G}$ *le tore maximal standard, où* $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^* := Hom_{\mathbb{Z}}(\mathring{Q}^\vee, \mathbb{Z})$*. Alors* $\bar{T} := \mathbb{C}^* \times \mathring{T} \subset \mathbb{C}^* \times \mathring{G} \subset \bar{L}(\mathring{G})$ *est appelé le tore maximal standard de* $\bar{L}(\mathring{G})$*.*

Remarque 1.62. *Soit* $\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}d \oplus \mathring{Q}^\vee$*. Alors*

$$\bar{T} \backsimeq Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*).$$

Démonstration. Dans la suite, on notera par z un élément de $\mathbb{C}^*$, t un élément de $\mathring{T}$ (et donc $d_z t$ élément de $\bar{T}$), n un élément de $\mathbb{Z}$ et h un élément de $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*$.
On remarque tout d'abord que, puisque $\langle \delta, d \rangle = 1$ et $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^* = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathring{Q}^\vee, \mathbb{Z})$ alors,

$$\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^* = \mathbb{Z}\delta \oplus \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*$$

D'autre part, on construit un morphisme de groupes de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\delta, \mathbb{C}^*) \\ z & \mapsto & (f_z : n\delta \mapsto z^n). \end{array}$$

On vérifie sans soucis que c'est un isomorphisme. Finalement, on construit un isomorphisme entre $\bar{T}$ et $Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*)$:

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} & \to & Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*) \\ d_z t & \mapsto & (f_z \otimes t : (n\delta, h) \mapsto z^n t(h)). \end{array}$$

□

Remarque 1.63. *Sous les mêmes notations que la remarque 1.62, on en déduit l'isomorphisme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^* & \to & \chi(\bar{T}) \\ (n\delta, h) & \mapsto & (ev_{(n\delta,h)} : d_z t \mapsto z^n t(h)). \end{array}$$

En particulier, pour $h = 0$ *et* $n = 1$ *on a*

$$ev_\delta(d_z) = z \text{ et } ev_\delta(t) = 1$$

Dans la suite, $\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*$ *et* $\chi(\bar{T})$ *seront identifiés via cet isomorphisme et* δ *sera donc le caractère envoyant* d_z *sur* z *et trivial sur* T*.*

Démonstration. De l'isomorphisme entre $\bar{T}$ et $Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*)$ on en déduit le suivant :

$$\begin{array}{ccc} \chi(Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*)) & \to & \chi(\bar{T}) \\ \chi & \mapsto & (d_z t \mapsto \chi(f_z \otimes t)). \end{array}$$

D'autre part, un résultat général sur les $\mathbb{Z}$-modules libres de dimension finie nous permet de construire l'isomorphisme d'évaluation entre $\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*$ et $\chi(Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*))$. Finalement, en composant ces deux isomorphismes on obtient le résultat souhaité. □

Définition 1.64. *[14, 13.2.2] Pour tout* $\lambda \in \mathring{Q}^\vee$*, on définit le morphisme de groupes algébriques* $t^\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathring{T} \subset \mathring{G}$*, c.à.d, un co-caractère de* $\mathring{T}$*, par*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathring{T} = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*) \\ z & \mapsto & (\rho \mapsto z^{\rho(\lambda)}). \end{array}$$

Propriété 1.5. *[14, 13.2.2] Soit $N_{\mathring{G}}(\mathring{T})$ le normalisateur de $\mathring{T}$ dans $\mathring{G}$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in N_{\mathring{G}}(\mathring{T})$ et $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathring{Q}^\vee$ Alors on a les propriétés suivantes :*

1. $t^\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$.
2. $t^{\lambda_1} t^{\lambda_2} = t^{\lambda_1 + \lambda_2}$.
3. $n t^\lambda n^{-1} = t^{Ad(n)\lambda}$.
4. $d_z t^\lambda d_z^{-1} = z^\lambda t^\lambda$ *où* $z^\lambda := t^\lambda(z) \in \mathring{T}$.

Définition 1.65. *Soit $\bar{N} \subset \bar{L}(\mathring{G})$ le sous-groupe engendré par $d_{\mathbb{C}^*} := \{d_z; z \in \mathbb{C}^*\}$, $N_{\mathring{G}}(\mathring{T})$ et $t^{\mathring{Q}^\vee} := \{t^\lambda; \lambda \in \mathring{Q}^\vee\}$.*

Proposition 1.6. *[14, 13.2.2] $\bar{N} = d_{\mathbb{C}^*} \ltimes (N_{\mathring{G}}(\mathring{T}) \ltimes t^{\mathring{Q}^\vee})$.*

Démonstration. Puisque $N_{\mathring{G}}(\mathring{T}) \ltimes t^{\mathring{Q}^\vee} \subset L(\mathring{G})$, on a

$$d_{\mathbb{C}^*} \cap (N_{\mathring{G}}(\mathring{T}) \ltimes t^{\mathring{Q}^\vee}) = \{e\}$$

Et puisque $\bar{L}(\mathring{G}) = \mathbb{C}^* \ltimes L(\mathring{G})$ on a ,

$$\mathbb{C}^* \cap L(\mathring{G}) = \{e\}.$$

De plus, soit $z \in \mathbb{C}^*, n \in N_{\mathring{G}}(\mathring{T})$, et $t^\lambda \in t^{\mathring{Q}^\vee}$, alors

$$\begin{aligned} d_z \cdot (n \cdot t^\lambda) \cdot d_z^{-1} &= n d_z t^\lambda d_z^{-1} \\ &= n z^\lambda t^\lambda \end{aligned}$$

Par suite $\bar{N}$ est le double produit semi-direct suivant :

$$\bar{N} = d_{\mathbb{C}^*} \ltimes (N_{\mathring{G}}(\mathring{T}) \ltimes t^{\mathring{Q}^\vee}).$$

□

Définition 1.66. *[14, 13.1.6] Soit $\mathring{W}$ le groupe de Weyl (fini) de $\mathring{\mathfrak{g}}$. Alors $\mathring{W}$ agit par une action canonique sur $\mathring{Q}^\vee$ (obtenu par restriction de l'action sur $\mathring{\mathfrak{h}}$). On définit le groupe de Weyl affine*

$$Aff(\mathring{W}) := \mathring{W} \ltimes \mathring{Q}^\vee$$

Pour tout $\lambda \in \mathring{Q}^\vee$, on note par t_λ l'élément correspondant dans $Aff(\mathring{W})$.

Proposition 1.7. *[14, 13.2.2] Il existe un isomorphisme de groupes $\phi : \bar{N}/\bar{T} \to N_{\mathring{G}}(\mathring{T})/\mathring{T} \ltimes \mathring{Q}^\vee$ telle que $\phi(d_z \cdot n \cdot t^\lambda) = [n] \cdot t_\lambda$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que ϕ est un morphisme de groupes.

$$\begin{aligned} \phi(d_{z_1} n_1 t^{\lambda_1} d_{z_2} n_2 t^{\lambda_2}) &= \phi(d_{z_1} n_1 d_{z_2} z_2^{\lambda_1} t^{\lambda_1} n_2 t^{\lambda_2}) \\ &= \phi(d_{z_1} d_{z_2} n_1 z_2^{-\lambda_1} n_2 t^{Ad(n_2^{-1})\lambda_1 + \lambda_2}) \\ &= [n_1 z_2^{-\lambda_1} n_2].(Ad(n_2^{-1}).t_{\lambda_1} + t_{\lambda_2}) \\ &= [n_1 n_2 z_2^{-\lambda_1}].(Ad(n_2^{-1}).t_{\lambda_1} + t_{\lambda_2}) \\ &= [n_1 n_2].(Ad(n_2^{-1}).t_{\lambda_1} + t_{\lambda_2}) \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned}\phi(d_{z_1}n_1t^{\lambda_1})\phi(d_{z_2}n_2t^{\lambda_2}) &= ([n_1].t_{\lambda_1})([n_2]t_{\lambda_2}) \\ &= [n_1n_2].Ad(n_2^{-1}t_{\lambda_1} + t_{\lambda_2})\end{aligned}$$

Montrons maintenant que ϕ est un isomorphisme :
Si $\phi(d_znt^{\lambda}) = 1$ alors,

$$[n].t_{\lambda} = 1$$

et puisque c'est un produit semi-directe on a

$$[n] = 1 \ \ (\text{c.à.d } n \in \mathring{T}) \text{ et} \lambda = 0.$$

Donc,

$$d_znt^{\lambda} = d_zn \in \bar{T}$$

alors,

$$d_znt^{\lambda} = 1 \text{ dans } \bar{N}/\bar{T}$$

et donc,

$$\phi \text{ est injective.}$$

Finalement,

$$\phi \text{ est clairement surjective.}$$

□

1.5 Bases de Schubert et formule de Chevalley

Soit W un groupe de Weyl quelconque. Dans tout ce document on note par $\{\xi^w\}_{w\in W}$ la base de Schubert de l'algèbre cohomologique et par $\{\xi_w\}_{w\in W}$ la base de Schubert de l'algèbre homologique. On définit une notation qui sera utile à énoncé la formule de Chevalley :

Notation 1.67. *En générale pour des éléments w et v dans un groupe de Weyl W et β une racine positive réelle dans le système de racine associé à W. On note $w \to^{\beta} v$ si*

$$\ell(v) = \ell(w) + 1 \text{ et } v = ws_{\beta}$$

On énonce dans la suite la formule de Chevalley générale :

Théorème 1.8. *Soit $w \in W$ et s_i une réflexion simple. Alors,*

$$\xi^{s_i} \cdot \xi^w = \sum_{w \to^{\beta} v} \langle \varpi_i, \beta^{\vee} \rangle \xi^v$$

Chapitre 2

Majoration des coefficients de Littlewood-Richardson dans un système simplement lacé

2.1 p-ordre de Bruhat

Soit G un groupe algébrique réductif et connexe, $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et W le groupe de Weyl associé à G. On suppose que G est de type A, donc on considère le groupe $G = SL_n = \{M \in Gl_n;\ det(M) = 1\}$ et $B = \{M \in SL_n; M \text{ est triangulaire supérieure}\}$. Le but principale de ce chapitre c'est de trouver des inégalités en cohomologie entre les coefficients $c_{u,v}^w$ pour des v particuliers, en utilisant des résultats combinatoires. On note par $\{\xi^w\}_{w\in W}$ la base de Schubert de $H^*(G/B)$.

Définition 2.1. *Soit $W(A_n)$ le groupe de Weyl de type A_n. Soit s_p une réflexion simple dans $W(A_n)$ et soit $u, v \in W(A_n)$. On note $m = \ell(v) - \ell(u)$*
On dit qu'il y a une relation de couverture entre u et v dans le p-ordre de Bruhat et on note $u \to_p v$ si :

$$u < v,\ \ell(v) = \ell(u) + 1$$
$$et$$
$$\exists a \leqslant p < b\,;\ u^{-1}v = (a\ b)$$

On note $u <_p v$ s'il existe une suite d'éléments $\{u_k\}_{k\leqslant \ell(u^{-1}v)}$ telle que :

$$u = u_0 \to_p u_1 \to_p u_2 \to_p \cdots \to_p u_m = v$$

On définit l'application $\Sigma_p : H^*(G/B) \to H^*(G/B)$ qui envoie ξ^w sur $\sum_{w\to_p v} \xi^v$.

Remarque 2.2. *Par la formule de Chevalley (cf. Théorème 1.8), on remarque dans ce cas que,*

$$\forall w \in W;\quad \xi^{s_p} \cdot \xi^w = \Sigma_p(\xi^w)$$

et donc,

$$\forall w \in W;\quad (\xi^{s_p})^2 \cdot \xi^w = \Sigma_p \circ \Sigma_p(\xi^w)$$

En utilisant la combinatoire du groupe des permutations, on va étudier les intervalles de longueur 2 dans le p-ordre de Bruhat (cf. Lemme 2.10) afin d'en déduire des majorations des coefficients de Littlewood-Richardson (cf. Corollaire 2.3). On commence par étudier les intervalles dans l'ordre de Bruhat (cf.Lemme 2.7). Dans le deuxième paragraphe, le Lemme 2.10 sera généralisé à un groupe de Weyl quelconque dans la Proposition 2.4 et une preuve plus générale sera donnée.

Notations 2.3. *Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$.*

1. *On écrit $a \in (b, c)$ si $b < a < c$ ou $c < a < b$.*
2. *On écrit $a \| b$ si $ab > 0$.*

Lemme 2.4. *[3, Lemme 2.7.3] Soit $u, w \in W$ tel que $l(w) - l(u) = 2$ et $u <_p w$. Alors,*

$$card(\{v; u < v < w\}) = 2.$$

Définition 2.5. *Soit $u, v \in W$ tels que $u < w$.*
On définit l'intervalle $]u, w[$ de la manière suivante,

$$]u, w[:= \{v \in W;\ u < v < w\}$$

On dit qu'on est dans le cas commutatif si $u^{-1}w$ est une bi-transposition, en d'autres termes, il existe t_1 et t_2 deux transpositions telles que,

$$u^{-1}w = t_1 t_2 \text{ et } (u^{-1}w)^2 = 1 \quad (t_1 t_2 = t_2 t_1).$$

On dit qu'on est dans le cas non-commutatif s'il existe t_1 et t_2 deux transpositions telles que

$$u^{-1}w = t_1 t_2 \text{ et } (u^{-1}w)^2 \neq 1 \quad (t_1 t_2 \neq t_2 t_1).$$

Lemme 2.6. *[16] Soit $w \in \tilde{S}_n$ et soit $i < j$ tel que $\bar{i} \neq \bar{j}$. Alors, $w < wt_{ij}$ si et seulement si $w(i) < w(j)$ et pour tout $k \in]i, j[$, $w(k) \notin [w(i), w(j)]$.*

Lemme 2.7. *Soient a, b et c dans $\mathbb{Z}^*$ et $u \in W$ tels que $u < ut_{ab} < ut_{ab}t_{bc} = w$ et $\ell(u) + 2 = \ell(ut_{ab}) + 1 = \ell(w)$. Alors, le tableau suivant présente tout les cas possibles des éléments de l'intervalle $[u, w]$ autres que ut_{ab}. Une croix signifie que ce cas de figure ne peut pas se produire.*

	$a \in (b, c)$	$b \in (a, c)$	$c \in (a, b)$
$u(a) \in (u(b), u(c))$	*(1)* $u < ut_{ac} < w$	*(4)* $\times$	*(7)* $u < ut_{bc} < w$
$u(b) \in (u(a), u(c))$	*(2)* $\times$	*(5)* $u < ut_{bc} < w$	*(8)* $\times$
$u(c) \in (u(a), u(b))$	*(3)* $\times$	*(6)* $u < ut_{ac} < w$	*(9)* $\times$

Avant de passer à la preuve de ce Lemme, faisons la remarque suivante :

Remarque 2.8. *Soient a, b et c dans $\mathbb{Z}^*$ et $u \in W$ comme dans le Lemme ci-dessus. Soit $t_1 = (\alpha\ \beta)$ et $t_2 = (\gamma\ \delta)$ deux transpositions telles que $u < ut_1t_2$ et $ut_1t_2 = ut_{ab}t_{bc}$. Alors*

$$\{a, b, c\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

Démonstration. On sait que $t_1t_2 = t_{ab}t_{ac}$ alors,

$$t_1t_2 = (a\ b\ c)$$

donc,

$$t_1t_2 \neq t_2t_1$$

alors il y a quatre cas possibles :

$$\alpha = \gamma,\ \beta = \gamma,\ \alpha = \delta \text{ ou } \beta = \delta$$

Si $\alpha = \gamma$ alors,

$$t_1t_2 = (\beta\ \alpha\ \gamma)$$

donc

$$\{a, b, c\} = \{\beta, \alpha, \delta\}.$$

Pour les trois autres cas c'est similaire.
Par suite dans la preuve qui suit, plus précisément dans les cas (2),(3),(4),(8) et (9), il suffit de montrer que $u \not< ut_{bc}$ et $u \not< ut_{ac}$ pour en déduire que ces cas ne se produisent pas. □

Démonstration. On note respectivement par (i) et (ii) les deux relations suivante,

$$u < ut_{ab} \text{ et } ut_{ab} < ut_{ab}t_{bc}$$

1. Puisque $u(a) \in (u(b), u(c))$, on a

   $$(u(a) - u(c))||(u(b) - u(a))$$

   Or la relations (i) nous donne,

   $$(u(b) - u(a))||(b - a)$$

   et puisque $a \in (b, c)$ on a

   $$(b - a)||(a - c)$$

   alors

   $$(u(a) - u(c))||(a - c).$$

   Soit $i \in (a, c)$ donc $i \in (b, c)$ et d'après la relation (ii) on a,

   $$ut_{ab}(i) \notin (ut_{ab}(b), ut_{ab}(c))$$

   par suite,

   $$u(i) \notin (u(a), u(c))$$

   donc,

   $$u < ut_{ac}.$$

   Si $u < ut_{bc}$ on a

   $$a \in (b, c)$$

   alors

   $$u(a) \notin (u(b), u(c)) \quad \text{(Absurde)}.$$

2. (a) Si $u < ut_{ac}$ on a
$$(u(a) - u(c))||(a - c)||(b - c)$$
D'après la relation (i), on a
$$(b - a)||(u(b) - u(a))$$
donc
$$(u(a) - u(c))||(u(c) - u(b)) \quad \text{(Absurde).}$$
(b) Si $u < ut_{bc}$ on a
$$u(b) - u(c)||b - c$$
et d'après la relation (ii), on a
$$(b - c)||(ut_{ab}(b) - ut_{ab}(c)) = u(a) - u(c)$$
et aussi puisque $u < ut_{bc}$ on a
$$(u(a) - u(c))||(u(a) - u(b))$$
et enfin d'après la relation (i) on a
$$||(u(a) - u(b))||(a - b)$$
donc
$$(b - c)||(a - b) \quad \text{(Absurde).}$$

3. (a) Si $u < ut_{ac}$ on a
$$(a - c)||(u(a) - u(c))$$
et d'après la relation (i),
$$(u(a) - u(c))||(u(a) - u(b))||(a - b)$$
donc
$$(a - c)||(a - b) \quad \text{(Absurde).}$$
(b) Si $u < ut_{bc}$ on a
$$(b - c)||(u(b) - u(c))$$
et d'après la relation (ii) on a,
$$(u(b) - u(c))||(ut_{ab}(b) - ut_{ab}(c)) = u(a) - u(c)$$
donc
$$(u(b) - u(c))||(u(a) - u(c)) \quad \text{(Absurde).}$$

4. (a) Si $u < ut_{ac}$ on a
$$(a - c)||(u(a) - u(c))$$
et d'après la relation (ii) on a
$$(u(a) - u(c))||(u(b) - u(a))$$
et d'après le Lemme et la relation (i) on a
$$(u(b) - u(a))||(b - a)$$
donc
$$(a - c)||(b - a) \quad \text{(Absurde).}$$

(b) Si $u < ut_{bc}$ on a $b-c||u(b)-u(c)$ et d'après la relation (ii) on a,

$$(u(b)-u(c))||(ut_{ab}(b)-ut_{ab}(c)) = u(a)-u(c)$$

alors d'après la relation (i),

$$(u(b)-u(a))||(b-a)$$

donc

$$(b-c)||(b-a) \quad \text{(Absurde)}.$$

5. On a

$$(u(b)-u(c))||(u(a)-u(b))$$

et d'après la relation (i) on a

$$(u(a)-u(b))||(a-b)||(b-c).$$

Soit $i \in (b,c)$ alors d'après le Lemme précédent on a

$$ut_{ab}(i) \notin (ut_{ab}(b), ut_{ab}(c))$$

par suite,

$$u(i) \notin (u(a), u(c))$$

donc

$$u(i) \notin (u(b), u(c)).$$

Alors

$$u < ut_{bc}.$$

D'autre part si $u < ut_{ac}$, on a

$$b \in (a,c)$$

donc

$$u(b) \notin (u(a), u(c)) \quad \text{(Absurde)}.$$

6. D'après la relation (ii),

$$(b-c)||(ut_{ab}(b)-ut_{ab}(c)) = u(a)-u(c)$$

alors

$$(u(a)-u(c))||(b-c)||(a-c).$$

Soit $i \in (a,c)$

(a) Si $i \in (a,b)$ alors d'après le Lemme 2.6,

$$u(i) \notin (u(a), u(b))$$

donc

$$u(i) \notin (u(a), u(c)).$$

(b) Si $i \in (b, c)$ alors d'après le Lemme 2.6,

$$ut_{ab}(i) \notin (ut_{ab}(b), ut_{ab}(c))$$

donc

$$u(i) \notin (u(a), u(c)).$$

(c) Si $i = b$ alors,

$$u(i) \notin (u(a), u(c)).$$

Alors

$$u < ut_{ac} < w.$$

(d) Si $u < ut_{bc}$ alors,

$$(b-c)||(u(b)-u(c))||(u(c)-u(a))||(u(b)-u(a))||(a-b).$$

Donc,

$$(b-c)||(a-b) \quad \text{(Absurde)}.$$

7. D'après la relation (ii),

$$(b-c)||(ut_{ab}(b)-ut_{ab}(c)) = (u(a)-u(c))||(u(b)-u(c)).$$

Soit $i \in (b, c)$ alors d'après le Lemme 2.6,

$$ut_{ab}(i) \notin (ut_{ab}(b), ut_{ab}(c))$$

donc

$$u(i) \notin (u(a), u(c))$$

Puisuqe $i \in (b, c)$ alors

$$i \in (a, b)$$

Par suite d'après le Lemme 2.6

$$u(i) \notin (u(a), u(b))$$

Or $i \neq a$, donc

$$u(i) \neq u(a)$$

Parsuite

$$u(i) \notin (u(b), u(c)).$$

donc

$$u < ut_{bc} < w.$$

Si $u < ut_{ac}$ alors

$$(a-c)||(u(a)-u(c))||(u(b)-u(a))||(b-a)$$

Alors

$$(a-c)||(b-a) \quad \text{(Absurde)}.$$

8. (a) Si $u < ut_{ac}$, alors
$$(a-c)||(u(a)-u(c)) \text{ et } (a-c)||(c-b)$$
et d'après la relation (ii) on a
$$(c-b)||(ut_{ab}(c)-ut_{ab}(b)) = u(c)-u(a)$$
Donc
$$(u(a)-u(c))||(u(c)-u(a)) \quad \text{(Absurde)}.$$
(b) Si $u < ut_{bc}$, alors $b-c||u(b)-u(c)||u(a)-u(b)||a-b$ alors $b-c||a-b$ (Absurde).

9. (a) Si $u < ut_{ac}$, on a
$$(a-c)||(u(a)-u(c)) \text{ et } (a-c)||(c-b)$$
et d'après la relation (ii),
$$(c-b)||(ut_{ab}(c)-ut_{ab}(b))||(u(c)-u(a)) \quad \text{(Absurde)}$$
(b) Si $u < ut_{bc}$, on a
$$(b-c)||(u(b)-u(c))||(u(c)-u(a))$$
et d'après la relation (ii),
$$(b-c)||(ut_{ab}(b)-ut_{ab}(c))||(u(a)-u(c)) \quad \text{(Absurde)}$$

□

Définition 2.9. *Soit u, v, w dans W tels que $u < v < w$ et $\ell(u)+2 = \ell(v)+1 = \ell(w)$. D'après le Lemme 2.4, on sait qu'il existe un unique $v' \neq v$ tel que $]u, w[= \{v, v'\}$. Dans ce cas on note,*
$$K(u, v, w) := v'$$

Proposition 2.1. *Soit $u \in \sigma_n$, et soit $a < b < c$ et supposons que $u < ut_{ab} < ut_{ab}t_{bc}$ et que $\ell(u)+2 = \ell(ut_{ab})+1 = \ell(ut_{ab}t_{bc})$. On a les deux implications suivantes :*

1. *Si $u(b) < u(c)$ alors $K(u, ut_{ab}, ut_{ab}t_{bc}) = ut_{bc}$.*
2. *Si $u(b) > u(c)$ alors $K(u, ut_{ab}, ut_{ab}t_{bc}) = ut_{ac}$.*

Démonstration. On a par hypothèse que $a < b$ et $b < c$ alors d'après l'inégalité $u < ut_{ab} < ut_{ab}t_{bc}$ et le Lemme 2.6 on a
$$u(a) < u(b) \text{ et } u(a) < u(c).$$
Donc en utilisant le Lemme 2.7, on remarque qu'on est bien dans la deuxième colonne du tableau et donc :

1. Si $u(b) < u(c)$ on a $u < ut_{bc}$.
2. Si $u(b) > u(c)$ on a $u < ut_{ac}$.

Ceci montre le résultat. □

Lemme 2.10. *Supposons qu'on est dans le cas non commutatif. Soit* $u \to_p v \to_q w$ *tel que* $u^{-1}v = t_{ij},\ v^{-1}w = t_{kl},\ i \leqslant p < j$ *et* $k \leqslant q < l$ *avec* $t_{ij}t_{kl} \neq t_{kl}t_{ij}$. *Alors,*

$$\exists! v' \text{ tel que } u <_q v' <_p w.$$

En particulier, si v'' *est tel que* $u <_p v'' <_q w$ *alors*

$$v'' = v = ut_{ij}$$

Démonstration. Comme $t_{ij}t_{kl} \neq t_{kl}t_{ij}$, les quatre entiers i, j, k, l ne peuvent pas être distincts.

1. Si $j = k$: On définit a, b et c tels que $a = i, b = j, c = l$ alors

   $$u \to_p ut_{ab} \to_q ut_{ab}t_{bc}.$$

   Donc on est dans le cas (5) ou (6) du Lemme précédent. On sait que

   $$a \leqslant p < b \leqslant q < c$$

   Alors, puisque $q \notin [a, b[$, on a

   $$u \twoheadrightarrow_q ut_{ab}$$

   - Si $u(b) \in (u(a), u(c))$ alors

     $$u < ut_{bc} < ut_{bc}t_{ac}$$

     Or

     $$q \in [b, c[\text{ et } p \in [a, c[$$

     alors

     $$u \to_q ut_{bc} \to_p ut_{bc}t_{ac}.$$

     Donc, v' existe ($v' = t_{bc} = t_{jl}$) et il est unique.
   - Si $u(c) \in (u(a), u(b))$ alors

     $$u < ut_{ac} < ut_{ac}t_{ab}$$

     Or

     $$q \in [a, c[\text{ et } p \in [a, b[$$

     alors

     $$u \to_q ut_{ac} \to_p ut_{ac}t_{ab}.$$

     Donc, v' existe ($v' = ut_{ac} = ut_{il}$) et il est unique.

2. Si $j = l$: En posant $a = i$, $b = l$ et $c = k$ on obtient

   $$u <_p ut_{ab} <_q ut_{ab}t_{bc}.$$

   - Si $p \in [c, b[$ alors

     $$u \to_q ut_{ab} \to_p ut_{ab}t_{bc} \text{ et } u \to_q ut_{bc} \twoheadrightarrow_p ut_{bc}t_{ac}.$$

     Donc, v' existe ($v' = ut_{ab} = ut_{il}$) et il est unique.
   - Si $p \in [a, c[$ alors

     $$u \to_q ut_{ab} \twoheadrightarrow_p ut_{ab}t_{bc} \text{ et } u \to_q ut_{bc} \to_p ut_{bc}t_{ac}.$$

     Donc, v' existe ($v' = ut_{bc} = ut_{lk}$) et il est unique.

- Si $q \in [c, a[$ alors

$$u \to_q ut_{ac} \to_p ut_{ac}t_{bc} \text{ et } u \to_q ut_{bc} \nrightarrow_p ut_{bc}t_{ac}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{ac} = ut_{ik}$) et il est unique.

- Si $q \in [a, b[$ alors

$$u \to_q ut_{ab} \to_p ut_{ab}t_{bc} \text{ et } u \to_q ut_{bc} \nrightarrow_p ut_{bc}t_{ac}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{ab} = ut_{il}$) et il est unique.

3. Si $i = k$: En posant $a = j$, $b = k$ et $c = l$ on a :
   (a) Si $p \in (b, a)$ et $q \in (b, c)$ alors :
   - si $q \in [a, c[$ alors

$$u \nrightarrow_q ut_{ab} \text{ et } u \to_q ut_{ac} \to_p ut_{ac}t_{ab}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{ac} = ut_{jl}$) et il est unique.

   - si $q \in [c, b[$ alors

$$u \to_q ut_{ab} \to_p ut_{ab}t_{bc} \text{ et } u \nrightarrow_q ut_{ac}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{ab} = ut_{jk}$) et il est unique.

   (b) Si $q \in (b, c)$ et $p \in (b, c)$ alors :
   - si $p \in [b, c[$ alors

$$u \to_q ut_{ab} \to_p ut_{ab}t_{bc} \text{ et } u \to_q ut_{bc} \nrightarrow_p ut_{bc}t_{ac}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{ab} = ut_{jk}$) et il est unique.

   - si $p \in [c, a[$ alors

$$u \to_q ut_{ab} \nrightarrow_p ut_{ab}t_{bc} \text{ et } u \to_q ut_{bc} \to_p ut_{bc}t_{ac}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{bc} = ut_{kl}$) et il est unique.

4. Si $i = l$: En posant $a = j$ $b = i$ et $c = k$, on a $p \in (b, a)$ et $q \in (c, b)$ alors :
   - si $q \notin [b, a[$ alors

$$u \nrightarrow_q ut_{ab}.$$

   - si $u(b) \in (u(a), u(c))$ alors

$$u \to_q ut_{bc} \to_p ut_{bc}t_{ac}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{bc} = ut_{kl}$) et il est unique.

   - si $u(c) \in (u(a), u(b))$ alors

$$u \to_q ut_{ac} \to_p ut_{ac}t_{ab}.$$

Donc, v' existe ($v' = ut_{ac} = ut_{jl}$) et il est unique.

□

Proposition 2.2. *Soit $u, v \in W$ tels que $u \leqslant w$ et $l(w) - l(u) = 2$, et soit $p, q \in \{1, ..., n\}$. Et supposons qu'on est dans le cas non commutatif. Alors dans ce cas on a deux cas possibles :*

- $\exists! v;\ u \to_p v \to_q w$ *et* $\exists! v';\ u \to_q v' \to_p w$.

ou

- $\nexists v; u \to_p v \to_q w$ *et* $\nexists v'; u \to_q v' \to_p w$.

Corollaire 2.3. *Soit $p \in \{2, \ldots, n-1\}$. Soit $u, w \in W$ tel que $(u^{-1}w)^2 \neq e$ et s_{p-1}, s_p et s_{p+1} les réflexions simples qui correspondent respectivement aux racines α_{p-1}, α_p et α_{p+1}. Alors on a :*

$$c^w_{u,s_{p-1}s_p} + c^w_{u,s_{p+1}s_p} \leqslant 1$$

Démonstration. On sait qu'en type A on a

$$(\xi^{s_p})^2 = \xi^{s_{p-1}s_p} + \xi^{s_{p+1}s_p} \quad \forall p \in \{1, ..., n\} \tag{2.1}$$

En appliquant la formule de Chevalley on obtient :

$$\xi^u \xi^{s_p} = \sum_{u \to_p v'} \xi^{v'}$$

Donc

$$\begin{aligned} \xi^u (\xi^{s_p})^2 &= \sum_{u \to_p v'} \xi^{v'} \xi^{s_p} \\ &= \sum_{u \to_p v' \to_p v''} \xi^{v''} \\ &= \sum_{u \to_p v' \to_p w} \xi^w + \sum_{\substack{u \to_p v' \to_p v'' \\ v'' \neq w}} \xi^{v''} \end{aligned}$$

Or en appliquant la Proposition 2.2 pour $p = q$ on a :

$$card(v'; u \to_p v' \to_p w) \leqslant 1$$

Alors le coefficient de ξ^w dans l'expression de $\xi^u(\xi^{s_p})^2$ est égal à 0 ou 1.
Et d'après la relation 2.1 on a

$$\xi^u \xi^{s_{p-1}s_p} + \xi^u \xi^{s_{p+1}s_p} = \xi^u (\xi^{s_p})^2.$$

Donc,

$$c^w_{u,s_{p-1}s_p} + c^w_{u,s_{p+1}s_p} \leqslant 1$$

□

Remarque 2.11. *Soit $u, w \in W$ dans le cas commutatif, alors,*

$$c^w_{u,s_{p-1}s_p} + c^w_{u,s_{p+1}s_p} = 2$$

Démonstration. On travail dans le cas commutatif, c'est à dire, il existe t_1 et t_2 deux transpositions telles que,

$$u^{-1}w = t_1 t_2 \text{ et } (u^{-1}w)^2 = 1 \quad (t_1 t_2 = t_2 t_1).$$

□

Remarque 2.12. *Les coefficients $c^w_{s_p s_q, u}$ peuvent être strictement plus grands que 1 pour $|p-q| \geqslant 2$.*
Par exemple dans A_5 on a :

$$c^{s_4 s_5 s_2 s_3 s_4 s_1 s_2}_{s_2 s_4, s_5 s_3 s_4 s_1 s_2} = 2$$

2.2 ϖ-ordre de Bruhat

On généralise les résultats précédents à un type simplement lacé quelconque X_n et un poids minuscule (cf. Définition 1.21).

Notation 2.13. *On écrit $u <_\varpi us_\alpha$ si $\langle \varpi, \alpha^\vee \rangle = 1$ et $\ell(us_\alpha) = \ell(u) + 1$.*

Dans le cas particulier de type A_n, on retrouve le p-ordre défini dans la section précédente :

Lemme 2.14. *Soit $u \in W(A_n)$, et $\alpha \in \Delta^{re}(A_n)$ alors,*

$$u \to_p ut_\alpha \Leftrightarrow [\langle \varpi_p, \alpha^\vee \rangle = 1 \quad et\ \ell(us_\alpha) = \ell(u) + 1] \Leftrightarrow u <_{\varpi_p} us_\alpha.$$

Notations 2.15. *Soit (W, S) un système de Coxeter quelconque, W' un sous-groupe de W et soit $v \in W$. On note :*

- $T(W, S) := \cup_{w \in W} wSw^{-1}$.
- $N(v) := \{t \in T(W, S);\ \ell(tw) < \ell(w)\}$.
- $\chi(W') := \{t \in T(W, S);\ N(v) \cap W' = \{t\}\}$.

Lemme 2.16. *[7] Soit (W, R) un système de Coxeter quelconque et $n \in \mathbb{N}$. Soit $I = [x, y] = \{z \in W; x \leqslant z \leqslant y\}$ un intervalle de Bruhat fermé dans (W, R) tel que $\ell(y) - \ell(x) = n$. Alors le sous-groupe W' engendré par les $\{uv^{-1}\}_{u,v \in I}$ est un sous-groupe de réflexions et*

$$card(\chi(W')) \leqslant n$$

En plus, I est isomorphe (en tant qu'ensemble partiellement ordonné) à un intervalle de Bruhat dans le système de Coxeter $(W', \chi(W'))$.

La remarque suivante est une généralisation de la Remarque 2.8.

Remarque 2.17. *Soit R un système de racines simplement lacé, et soient $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, s_\delta$ les réflexions relatives aux racines α, β, γ, et δ telles que :*

$$\begin{array}{c} \bullet\ u < v := us_\alpha < us_\alpha s_\beta \\ \bullet\ u < v' := us_\gamma < us_\gamma s_\delta \\ \bullet\ us_\alpha s_\beta = us_\gamma s_\delta \end{array}$$

Alors il y a deux cas possibles,

$$(\delta = s_\beta(\alpha)\ et\ \beta = \gamma)\ ou\ (\gamma = s_\alpha(\beta)\ et\ \alpha = \delta).$$

Démonstration. 1. Si $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 0$ alors on est dans le cas commutatif.

2. On peut supposer que $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, et $\delta > 0$. Soit $R_{u,w}$ le système de racine engendrée par α, β, γ, et δ. Or d'après le Lemme 2.16, $R_{u,w}$ est de rang 2 et simplement lacé. Donc il y a deux cas de figures :
   - $R_{u,w} = A_1 \times A_1$: Dans ce cas on est dans le cas commutatif.
   - $R_{u,w} = A_2$: Dans ce cas,
   $$card(\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}) \leqslant 3.$$

Or $\alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta, \alpha \neq \gamma$ et $\beta \neq \delta$, alors on a deux cas possibles :

a) Si $\beta = \gamma$: Dans ce cas

$$\begin{aligned} s_\alpha s_\beta &= s_\gamma s_\delta \\ &= s_\beta s_\delta \end{aligned}$$

alors,

$$\delta = s_\beta(\alpha).$$

b) Si $\alpha = \delta$: On obtient de même,

$$\gamma = s_\alpha(\beta).$$

□

Proposition 2.4. *Soit $u \in W(X_n)$ où X_n simplement lacé, et $\alpha, \beta \in \Delta(X_n)$. On note $w := us_\alpha s_\beta$. Soit ϖ, ϖ' deux poids minuscules telles que $u <_\varpi us_\alpha <_{\varpi'} w$ et que $s_\alpha s_\beta \neq s_\beta s_\alpha$. Alors,*

$$\exists! v \in W;\ u <_{\varpi'} v <_\varpi w.$$

Démonstration. Unicité : Par symétrie on peut supposer qu'on est dans le cas (a) de la preuve de la remarque 2.17. On reprend les notations de la remarque précédente, et on suppose qu'il existe deux chemins dans le cas (a). On a les deux chemins suivants :

$$u <_{\varpi'} us_\alpha <_\varpi us_\alpha s_\beta \text{ et } u <_{\varpi'} us_\beta <_\varpi us_\beta s_{s_\beta(\alpha)}.$$

Alors on a,

$$\langle \varpi', \alpha^\vee \rangle = 1,\ \langle \varpi, \beta^\vee \rangle = 1,\ \langle \varpi', \beta^\vee \rangle = 1,\ \text{et } \langle \varpi, s_\beta(\alpha^\vee) \rangle = 1.$$

Or

$$s_\beta(\alpha^\vee) = \alpha^\vee - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \beta^\vee.$$

On a ici trois cas de figures :

1. $s_\beta(\alpha^\vee) = \alpha^\vee$ alors on est dans le cas commutatif (Absurde).
2. $s_\beta(\alpha^\vee) = \alpha^\vee + \beta^\vee$ alors
$$\langle \varpi', \alpha^\vee + \beta^\vee \rangle = 2 \quad \text{(Absurde)}$$
3. $s_\beta(\alpha^\vee) = \alpha^\vee - \beta^\vee$ et donc
$$\langle \varpi, \alpha^\vee \rangle = \langle \varpi, \alpha^\vee - \beta^\vee \rangle + \langle \varpi, \beta^\vee \rangle = 2 \quad \text{(Absurde)}$$

Ce qui montre l'unicité.
Existence :
Pour l'existence on va traiter seulement le cas (a), puisque le cas (b) est traité d'une manière totalement symétrique.
Remarquons tout d'abord que dans un système de racine simplement-lacé on a toujours $\langle \beta, \delta^\vee \rangle = \pm 1$ (car $\beta \neq \delta$ et on est dans le cas non commutatif).
On a les deux relations suivantes :

$$\langle \varpi', \alpha^\vee \rangle = \langle \varpi', \delta^\vee \rangle - \langle \beta, \delta^\vee \rangle. \tag{2.2}$$

$$\langle \varpi, \delta^\vee \rangle = \langle \varpi, \alpha^\vee \rangle - \langle \varpi, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \tag{2.3}$$

La relation 2.3 découle de

$$\delta^\vee = s_\beta(\alpha^\vee) = \alpha - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \beta^\vee$$

La relation 2.2 découle de

$$\begin{aligned} \langle \varpi', \alpha^\vee \rangle &= \langle \varpi', s_\beta(\delta^\vee) \rangle \\ &= \langle s_\beta(\varpi'), \delta^\vee \rangle \\ &= \langle \varpi' - \beta, \delta^\vee \rangle \\ &= \langle \varpi', \delta^\vee \rangle - \langle \beta, \delta^\vee \rangle \end{aligned}$$

- si $\langle \varpi, \beta^\vee \rangle = 1$ alors, d'après 2.3, on en déduit que

  $$\langle \varpi, \delta^\vee \rangle = 1 - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle$$

  Comme $|\langle \varpi, \delta^\vee \rangle| \leqslant 1$ et $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle \in \{-1, 1\}$, on a

  $$\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 1 \text{ et } \langle \varpi, \delta^\vee \rangle = 0$$

  et

  $$\langle \varpi', s_\alpha(\beta)^\vee \rangle = \langle \varpi', \beta^\vee - \alpha^\vee \rangle = 1 - \langle \varpi', \alpha^\vee \rangle$$

  or $\langle \varpi, \gamma^\vee \rangle = 1$ et d'après l'unicité en en déduit que

  $$\langle \varpi', \delta^\vee \rangle = 0$$

  donc

  $$\langle \varpi', \alpha^\vee \rangle = 1 = \langle \varpi, \beta^\vee \rangle$$

  par suite

  $$u <_{\varpi'} us_\alpha <_{\varpi} us_\alpha s_\beta$$

- si $\langle \varpi, \beta^\vee \rangle = 0$ alors, d'après 2.3, on a,

  $$\begin{aligned} \langle \varpi, \delta^\vee \rangle &= \langle \varpi, \alpha^\vee \rangle - \langle \varpi, \beta^\vee \rangle \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  et

  $$\langle \varpi', \gamma^\vee \rangle = 1.$$

□

Définition 2.18. *On dit que π est une petite classe de Schubert dans l'un des cas suivants :*

- *Pour tout $\alpha \neq \alpha'$ tel que $\langle \alpha, \alpha'^\vee \rangle = -1$; $\pi = s_\alpha s_{\alpha'}$ en type A_n.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi = s_{n-2}s_n$ ou $s_{n-2}s_{n-1}$ ou $s_2 s_1$ en type D_n*
- *$\pi = s_3 s_1$ ou $\pi = s_5 s_6$ en type E_6.*
- *$\pi = s_6 s_7$ en type E_7.*

Remarque 2.19. *On remarque que la multiplication par les petites classes de Schubert de type D et E se traduit par la multiplication, deux fois, par une classe de degré* 1*. Plus précisément, en utilisant la formule de Chevalley :*

1. *En type* D_n

   - $\xi^{s_{n-2}s_n} = (\xi^{s_n})^2$
   - $\xi^{s_{n-2}s_{n-1}} = (\xi^{s_{n-1}})^2$
   - $\xi^{s_2s_1} = (\xi^{s_1})^2$

2. *En type* E_6

   - $\xi^{s_3s_1} = (\xi^{s_1})^2$
   - $\xi^{s_5s_6} = (\xi^{s_6})^2$

3. *En type* E_7

   - $\xi^{s_6s_7} = (\xi^{s_7})^2$

Corollaire 2.5. *Soient* $u, v \in W$ *tels que* $(u^{-1}w)^2 \neq e$*. Soit* π *une petite classe de Schubert de type D ou E. Alors,*

$$c_{u,\pi}^{w} \leqslant 1$$

Démonstration. Par Définition d'une petite classe de Schubert π de type D ou E, on sait qu'il existe p tel que :

$$\pi = s_{p-2}s_p \text{ ou } \pi = s_{p-2}s_{p-1} \text{ ou } \pi = s_ps_{p-1} \text{ ou } \pi = s_{p+2}s_p$$

Or, d'après la remarque 2.19, il suffit de montrer le résultat pour une petite classe de Schubert de la forme $\pi = s_{p-1}s_p$, car les autres cas sont montrés d'une façon similaire (en utilisant la formule de Chevalley). En effet, en appliquant la formule de Chevalley, on obtient :

$$\begin{aligned}\xi^u\xi^{s_p} &= \sum_{\ell(us_\alpha)=\ell(u)+1} \langle \varpi_p, \alpha^\vee \rangle \xi^{us_\alpha} \\ &= \sum_{u<_{\varpi_p} us_\alpha} \xi^{us_\alpha}\end{aligned}$$

En l'appliquant une deuxième fois, on obtient :

$$\begin{aligned}(\xi^u\xi^{s_p})\xi^{s_p} &= \sum_{u<_{\varpi_p} us_\alpha} \xi^{us_\alpha}\xi^{s_p} \\ &= \sum_{u<_{\varpi_p} us_\alpha} \sum_{us_\alpha<_{\varpi_p} us_\alpha s_\beta} \xi^{us_\alpha s_\beta} \\ &= \sum_{u<_{\varpi_p} us_\alpha <_{\varpi_p} us_\alpha s_\beta} \xi^{us_\alpha s_\beta} \\ &= \sum_{u<_{\varpi_p} us_\alpha <_{\varpi_p} w} \xi^{w} + \sum_{\substack{u<_{\varpi_p} us_\alpha <_{\varpi_p} w' \\ w' \neq w}} \xi^{w'}\end{aligned}$$

Par suite, d'après la Proposition 2.4, pour $\varpi = \varpi' = \varpi_p$, on a :

$$card(v;\ u <_{\varpi_p} v <_{\varpi_p} w) \leqslant 1$$

Alors le coefficient de ξ^w dans l'expression de $\xi^u(\xi^{s_p})^2$ est égale à 0 ou 1. Donc, puisque $\xi^{s_p}\xi^{s_p} = \xi^{s_{p-1}s_p}$, on a

$$\xi^w \xi^{s_{p-1}s_p} = \xi^u(\xi^{s_p})^2$$

Par suite,

$$c^w_{u,s_{p-1}s_p} \leqslant 1$$

□

Chapitre 3

Groupe de George et symétries : types A et C

En général un groupe de George est une certaine représentation du groupe de Weyl par un ensemble de permutations de $\mathbb{Z}$. Dans [8], les auteurs les appelle Groupes de George en l'honneur de George Lusztig, qui a inventé la représentation du groupe de Weyl affine de type A en terme de permutations de $\mathbb{Z}$. Dans [8], les auteurs développent une théorie des modèles de permutations des groupes de Weyl finies et Affines. Dans [3], Björner et Brenti démontre l'identification naturelle du Groupe de Weyl $W(\tilde{X}_l)$ ($X = A, B, C$ ou D) et le groupe de George $S(\tilde{X}_l)$ via la théorie des représentation.
Pour mieux comprendre la combinatoire du groupe de Weyl $\mathrm{W}(\tilde{X}_l)$ (en type A et C), ce chapitre sera dédié à trouver l'image d'une réflexion s_α (de $W(X_l)$) dans le groupe de George $S(\tilde{X}_l)$.

Définition 3.1. *[12, 3.7] Soit A une matrice de Cartan généralisée, soit $\mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Kac-Moody associée à A et soit $\mathfrak{h}$ son l'algèbre de Cartan. On définit les réflexions fondamentales r_m de l'espace $\chi(\bar{T})$ par*

$$\forall m = 1, \ldots, l \ \forall \lambda \in \chi(\bar{T}); \quad r_m(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_m^\vee \rangle \alpha_m$$

Le sous groupe W de $Aut(\mathfrak{h}^*)$ engendré par tout les réflexions fondamentales r_m est appelé le groupe de Weyl associé à $\mathfrak{g}(A)$.

Notation 3.2. *On note $W(\tilde{X}_l)$ le groupe de Weyl associé à l'algèbre $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ (cf. Définition 1.49).*

Proposition 3.1. *[14, 13.1.7] Il existe un (unique) isomorphisme de groupes :*

$$\beta : W(\tilde{C}_l) \to Aff(\mathring{W})$$

tel que

$$\forall m \in \{1, ..., l\}; \ \beta(s_m) = \mathring{s_m} \ et \ \beta(s_0) = t_{\theta^\vee} s_\theta$$

où $\{s_0, ..., s_l\}$ sont les réflexions simples de $W(\tilde{C}_l)$, $\{\mathring{s}_1, ..., \mathring{s}_l\}$ sont les réflexions simples de $\mathring{W}$ et $s_\theta \in \mathring{W}$ est la réflexion qui correspond à la plus grande racine θ. ($s_\theta \rho := \rho - \rho(\theta^\vee)\theta$, $\forall \rho \in \mathring{\mathfrak{h}}^*$).

3.1 Groupe de George de type A

Le but dans ce qui suit c'est d'exprimer explicitement les réflexions de $W(\tilde{A}_l)$ dans le groupe de George $S(\tilde{A}_l)$ en montrant qu'il existe des isomorphismes γ_A, ϕ_A et ψ_A, tels quels sont spécifiés

dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} Aff(\mathring{W}) & \xleftarrow{\beta} & W(\tilde{A}_l) & \xrightarrow{\gamma_A} & S(\tilde{A}_l) & \hookrightarrow & \mathfrak{S}(\mathbb{Z}) \\ & \nwarrow^{\phi} & \uparrow{\scriptstyle \phi'_A} & \nearrow_{\psi_A} & & \nearrow_{\kappa_A^*} & \\ & & \bar{N}/\bar{T} & \xrightarrow[\varphi_A]{} & \mathfrak{S}(\{u^k e_m\}) & & \end{array} \tag{3.1}$$

Plus précisément, on commence tout d'abord par définir les éléments n_α de $\bar{N}$, puis on montre qu'il existe un isomorphisme de groupe ϕ'_A entre $\bar{N}/\bar{T}$ et $W(\tilde{A}_l)$ qui envoi les classes $[n_\alpha]$ sur les réflexions s_α. Dans la suite, on en déduit que le morphisme $\psi_A := \gamma_A \circ \phi'_A$ est un isomorphisme de groupes entre $\bar{N}/\bar{T}$ et le groupe de George $S(\tilde{A}_l)$. Dans une deuxième partie, en montrant que $\bar{N}$ agit sur $\mathbb{C}^l \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ en permutant les espaces propres de $\bar{T}$ (on montre aussi que ces espaces sont les $\mathbb{C}u^k e_m$), on en déduit l'existence d'un morphisme φ_A, qui associe chaque élément de $\bar{N}/\bar{T}$ a une permutation des vecteurs $\{u^k e_m\}$. Ceci permettra, dans la partie 3, d'identifier l'élément de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ correspondant à s_α dans $W(\tilde{A}_l)$.

3.1.1 Groupe de George, description de $\bar{N}$ et action de $\bar{N}$ sur $\chi(\bar{T})$

Définition 3.3. *On définit la relation $\sim_A$ sur $\mathbb{Z}^2$ de la manière suivante :*

$$\forall\ i, i', j, j' \in \mathbb{Z}\ \ (i,j) \sim_A (i',j') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ ;\ i = i' + k(l+1),\ j = j' + k(l+1).$$

On note $\langle (i,j) \rangle$ la classe de (i,j) pour cette relation.
Maintenant on peut définir ce qu'on va appeler classe de transposition

$$\langle (i\ j) \rangle_A = \prod_{(i',j') \in \langle (i,j) \rangle} (i'j') \in Bij(\mathbb{Z}).$$

Soit $S(\tilde{A}_l)$ le groupe engendré par les classes de transpositions adjacentes dans $Bij(\mathbb{Z})$:

$$\forall m = 0, ..., l;\ \sigma_m = \langle (m\ m+1) \rangle_A$$

Le groupe $S(\tilde{A}_l)$ est appelé groupe de George de type $\tilde{A}_l$.

Remarque 3.4. *On note $L_A := l + 1$. On dit qu'une permutation σ dans $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ est périodique s'il existe un élément π dans $\mathbb{Z}$ tel que $\sigma(i + \pi) = \sigma(i) + \pi$ pour tout i dans $\mathbb{Z}$.*
Dans [3, 8.3], Björner et Brenti montrent qu'un élément σ du groupe $S(\tilde{A}_l)$ est caractérisé par les deux conditions suivantes :

- $i \in \mathbb{Z},\ \sigma(i + L_A) = \sigma(i) + L_A.$ (*σ périodique*)
- $\displaystyle\sum_{x=1}^{l} \sigma(x) = \binom{l+1}{2}.$

Les σ_m vérifient les relations de tresse. Plus précisément, on a :

Proposition 3.2. *[3] Soit $W(\tilde{A}_l)$ le groupe de Weyl associé à $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ (cf. Notation 3.2). Alors il existe un isomorphisme de groupes $\gamma_A : W(\tilde{A}_l) \to S(\tilde{A}_l)$ qui envoie s_m sur σ_m pour tout $m \in \{0, ..., l\}$.*

Rappelons la définition 1.61 de $\bar{T}$. On a :

Définition 3.5. *Soit $\bar{t} = d_z t$ dans $\bar{T}$. On sait que t s'écrit d'une manière unique comme $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1})$. On définit pour tout p dans $\{1, \dots, l+1\}$ l'application ε_p de $\bar{T}$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que :*

$$\varepsilon_p(d_z t) = \lambda_p$$

Puisque d_z et t commutent, on vérifie facilement que les ε_p sont des morphismes de groupe et donc des éléments de $\chi(\bar{T})$.

Notation 3.6. *Soit $\alpha = \varepsilon_p - \varepsilon_q + k\delta$ pour $p < q$. On définit la matrice $A_{q-p+1}(u)$ dans $M_{q-p+1}[u, u^{-1}]$ de la manière suivante,*

$$A_{q-p+1}(u) := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & u^k \\ \vdots & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \vdots \\ -u^{-k} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que,

$$A_{q-p+1}(u)^{-1} = A_{q-p+1}((-1)^{k+1}u)$$

On définit alors l'élément n_α suivant,

$$n_\alpha = \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{q-p+1}(u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l+1-q} \end{pmatrix} \in \bar{L}(\mathring{G})$$

Lemme 3.7. *Soit $\alpha = \varepsilon_p - \varepsilon_q + k\delta$ pour $p < q$ et $k \in \mathbb{Z}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $t = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}) \in T$ alors,*

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}, z^{-k}\lambda_q, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{q-1}, z^k\lambda_p, \lambda_{q+1}, \cdots, \lambda_{l+1})$$

En particulier,

$$n_\alpha \in \bar{N}$$

Démonstration. Soit $t = diag(\lambda_1, ..., \lambda_{l+1}) \in \mathring{T}$. Pour tout p', q' dans $\{1, \dots, l+1\}$ tels que $p' < q'$, on note,

$$\Lambda_{p',q'} := diag(\lambda_{p'}, \dots, \lambda_{q'})$$

Donc

$$\begin{aligned} n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} &= d_z(d_z^{-1}n_\alpha d_z)tn_\alpha^{-1} \\ &= d_z(z^{-1} \cdot n_\alpha)tn_\alpha^{-1} \\ &= d_z \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{q-p+1}(z^{-1}u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l+1-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{p,q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l+1} \end{pmatrix} n_\alpha^{-1} \\ &= d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{q-p+1}(z^{-1}u)\Lambda_{p,q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{q-p+1}((-1)^{k+1}u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l+1-q} \end{pmatrix} \\ &= d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{q-p+1}\Lambda_{p,q}A_{q-p+1}((-1)^{k+1}u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or

$$A_{q-p+1}(z^{-1}u)\Lambda_{p,q}A_{q-p+1}((-1)^{k+1}u) = diag(z^{-k}\lambda_q, \lambda_{p+1}..., \lambda_{q-1}, z^k\lambda_p)$$

Alors,

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}, z^{-k}\lambda_q, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{q-1}, z^k\lambda_p, \lambda_{q+1}, \cdots, \lambda_{l+1})$$

□

Le Lemme 3.7 implique immédiatement :

Corollaire 3.3. *Pour tout $p, q \in \{1, \ldots, l+1\}$ avec $p < q$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note $\alpha = \varepsilon_p - \varepsilon_q + k\delta \in \Delta^{re}(\tilde{A})$. Alors,*

$$n_\alpha \cdot \varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_q - k\delta & si\ i = p \\ \varepsilon_p + k\delta & si\ i = q \\ \varepsilon_i & sinon \end{cases}$$

Définition 3.8. *On définit le morphisme de groupes $\phi'_A : \bar{N}/\bar{T} \to W(\tilde{A}_l) \subset Aut(\chi(\bar{T}))$ tel que pour tout n dans $\bar{N}/\bar{T}$, pour tout $\chi \in \chi(\bar{T})$, et pour tout $\bar{t} \in \bar{T}$ on a*

$$\phi'_A(n)(\chi)(\bar{t}) = \chi(n\bar{t}n^{-1}).$$

Proposition 3.4. *Soit $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta \in \Delta^{re}(\tilde{A}_l)$.*
Pour tout $m, m' \in \{1, \ldots, l+1\}$ tels que $m < m'$, on note $\alpha_{m,m'} = \varepsilon_m - \varepsilon_{m'}$. Alors,

1. *L'action de s_α sur Q est donné par :*

$$s_\alpha(\alpha_{m,m+1}) = \alpha_{m,m+1} - \langle \mathring{\alpha}^\vee, \alpha_{m,m+1} \rangle \alpha \text{ et } s_\alpha(\delta) = \delta$$

2. *On a*

$$\phi'_A([n_\alpha]) = s_\alpha$$

3. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} W(\tilde{A}_l) & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & Aff(\mathring{W}) \\ & {\scriptstyle\phi'_A}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\phi} & \\ & \bar{N}/\bar{T} & \end{array}$$

Démonstration. 1. Pour montrer la première partie on rappelle que $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle \alpha$ pour tout $\beta \in \Delta^{re}(\tilde{A}_l)$. Alors en particulier on a :

$$\begin{aligned} s_\alpha(\alpha_m) &= \alpha_m - \langle \alpha^\vee, \alpha_m \rangle \alpha \\ &= \alpha_m - \langle \mathring{\alpha}^\vee, \alpha_m \rangle \alpha - \langle \delta^\vee, \alpha_m \rangle \alpha \\ &= \alpha_m - \langle \mathring{\alpha}^\vee, \alpha_l \rangle \alpha \end{aligned}$$

2. Puisque $\chi(\bar{T})$ est engendré par δ et les ε_i et puisque l'action de $W(\tilde{A}_l)$ sur $\chi(\bar{T})$ est fidèle, il suffit de monter que n_α et s_α agissent de la même manière sur δ et les ε_i. En effet,

(a) D'une part, on vient de montrer que

$$s_\alpha(\delta) = \delta.$$

D'autre part, soit $\bar{t} = d_z t \in \bar{T}$, on a montrer dans le lemme 3.7 qu'il existe $t' \in \mathring{T}$ tel que

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z t'$$

Or d'après la remarque 1.62,

$$\delta(\mathring{T}) = 1 \text{ et } \forall z' \in \mathbb{C}^*, \delta(d_{z'}) = z'$$

On en déduit que,

$$(n_\alpha \cdot \delta)(d_z t) = \delta(d_z t)$$

Par suite,

$$n_\alpha \cdot \delta = \delta$$

On a donc montré que n_α et s_α agissent de la même manière sur δ. Montrons dans la suite ce résultat pour les ε_i :

(b)
- Si $i = p$: Donc, d'après le corollaire 3.3,

$$\begin{aligned} n_\alpha \cdot \varepsilon_p &= \varepsilon_q - k\delta \\ &= \varepsilon_p - \varepsilon_p + \varepsilon_q - k\delta \\ &= \varepsilon_p - \alpha \end{aligned}$$

D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_p) = \varepsilon_p - \alpha.$$

- Si $i = q$: Donc,

$$\begin{aligned} n_\alpha \cdot \varepsilon_q &= \varepsilon_p + k\delta \\ &= \varepsilon_q - \varepsilon_q + \varepsilon_p + k\delta \\ &= \varepsilon_q + \alpha \end{aligned}$$

D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_q) = \varepsilon_q + \alpha.$$

- Si $i \neq q, p$: Donc,

$$n_\alpha \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_i$$

D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$$

Par suite,

$$\forall i = 1, ..., l;\ n_\alpha \cdot \varepsilon_i = s_\alpha(\varepsilon_i).$$

Donc,

$$\phi'_A([n_\alpha]) = s_\alpha.$$

3. Puisque les applications en question sont des morphismes de groupes, il suffit de montrer que,
$$\forall m \in \{0, \cdots, l\};\ \beta \circ \phi'_A([n_{\alpha_m}]) = \phi([n_{\alpha_m}])$$
Dans le deuxième point de cette preuve on a montrer que
$$\forall \alpha = \mathring{\alpha} + k\delta \in \Delta^{re}(\tilde{A}_l);\ \phi'_A([n_\alpha]) = s_\alpha$$
Alors, en particulier, on a
$$\forall m \in \{0, \cdots, l\};\ \phi'_A([n_{\alpha_m}]) = s_m$$
Par suite, ce qui reste à montrer c'est que,
$$\forall m \in \{0, \ldots, l\},\quad \beta(s_m) = \phi([n_{\alpha_m}])$$
Or, d'après la Proposition 1.7, on en déduit que :
$$\forall m \in \{1, \ldots, l\},\quad \phi([n_{\alpha_m}]) = \mathring{s}_m$$
Et que,
$$\begin{aligned}\phi([n_{\alpha_0}]) &= \phi([n_{\delta-\theta}]) \\ &= \phi([n_{\theta-\delta}])\end{aligned}$$
Par la proposition 3.1, ce qui reste à montrer c'est le suivant :
$$\phi([n_{\theta-\delta}]) = s_\theta t_{-\theta^\vee} (= \beta(s_0))$$
Par la proposition 1.7, il suffit de montrer que
$$n_{\theta-\delta} = n_\theta \cdot t^{-\theta^\vee}$$
Or par définition des n_α (cf. Notation 3.6) et puisque $\theta = \varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1}$, on sait que
$$n_{\theta-\delta} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & u^1 \\ \vdots & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \vdots \\ -u^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } n_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
Pour calculer $t^{-\theta^\vee}$ on procède de la manière suivante : On sait tout d'abord que
$$\theta^\vee \in [\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{g}_\theta]$$
On peut aussi vérifier que
$$[\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{g}_\theta] = \{diag(x, 0, \ldots, 0, -x), x \in \mathbb{C}\}$$
donc, puisque $\langle \theta, \theta^\vee \rangle = 2$, on en déduit que
$$\theta^\vee = diag(1, 0, \ldots, 0, -1)$$

et par la définition 1.64, on en trouve

$$t^{-\theta^\vee} = diag(u^{-1}, 1, \dots, 1, u)$$

ce qui montre que

$$n_{\theta-\delta} = n_\theta \cdot t^{-\theta^\vee}$$

Finalement, d'après la Proposition 3.1,

$$\forall m = 1, \dots, l;\ \beta(s_m) = \mathring{s}_m \text{ et } \beta(s_0) = s_\theta t_{-\theta^\vee}$$

□

Corollaire 3.5. *Il existe un isomorphisme de groupes qu'on note* $\psi_A : \bar{N}/\bar{T} \to S(\tilde{A}_l)$.

3.1.2 Action de $\bar{N}$ sur les espaces propres de $\bar{T}$ agissant sur $\mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$

Définition 3.9. *On note* e_m *pour* $m \in \{1, \dots, l+1\}$ *la colonne de taille* $l+1$ *qui à des coefficients nuls partout sauf un coefficient égal à* 1 *sur la* m*-ième ligne.*

Proposition 3.6. *La restriction de l'action de* $\bar{L}(\mathring{G})$ *sur* $\mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ *à* $\bar{N}$ *permute les* $\mathbb{C}u^k e_m$ *et fournit un morphisme* $\varphi_A : \bar{N}/\bar{T} \to \mathfrak{S}(\{u^k e_m\})$.

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'il existe une action de groupes $\bar{L}(\mathring{G}) \circlearrowleft \mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$. On sait que,

$$\bar{L}(\mathring{G}) = \mathbb{C}^* \ltimes L(\mathring{G}).$$

Puisqu'on est en type A affine, on sait que les éléments de $L(\mathring{G})$ sont des matrices avec coefficients dans $\mathbb{C}[u, u^{-1}]$.
Soit P un élément de $\mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ alors :

$$\exists (p_m)_{1 \leqslant m \leqslant l+1} \in \mathbb{C}[u, u^{-1}];\ P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{l+1} \end{bmatrix}.$$

Pour toute matrice polynomiale M, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on note M_z la matrice associée à M telle que :

$$M_z(u) = M(zu)$$

Soit $d_z M$ un élément de $\bar{L}(\mathring{G})$, on note $*$ tel que

$$(d_z M) * P = z \cdot (MP)$$

Sous ces notations on va montrer que $*$ définie une action de $\bar{L}(\mathring{G})$ sur $\mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$.
En effet,

$$\begin{aligned}
(d_z M) * ((d_{z'} M') * P) &= (d_z M) * (z' \cdot (M'P)) \\
&= (d_z M) * (M'_{z'} P_{z'}) \quad \text{(d'après le Lemme 1.58)} \\
&= z \cdot (M M'_{z'} P_{z'}) \\
&= M_z M'_{zz'} P_{zz'} \quad \text{(d'après le Lemme 1.58)}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(d_z M d_{z'} M') \cdot P &= (d_{zz'} M_{z'^{-1}} M) * P \quad \text{(d'après la remarque 1.60)} \\ &= (zz') \cdot (M_{z'^{-1}} M P) \\ &= M_z M'_{zz'} P_{zz'} \qquad \text{(d'après le lemme 1.58)}\end{aligned}$$

Alors

$$(d_z M) * ((d_{z'} M') * P) = (d_z M d_{z'} M') * P$$

Donc

$$\bar{L}(\mathring{G}) \circlearrowleft \mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$$

Alors $\bar{N}$ agit sur $\mathbb{C}^{l+1} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ en permutant les espaces propres $\mathbb{C}u^k e_m$ de $\bar{T}$.
En effet, montrons que les espaces propres sont les $\mathbb{C}u^k e_m$:
Soit $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{l+1} \end{bmatrix}$ un vecteur propre de $\bar{T}$ où les v_i sont des polynômes.
Soit $n = d_z \in \bar{N}$ tel que $z \in \mathbb{C}^*$ et $z^k \neq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Alors,

$$\exists \rho \in \mathbb{C}^*;\ n \cdot v = \rho v.$$

Or

$$\begin{aligned} n \cdot v &= d_z \cdot v \\ &= \begin{bmatrix} v_1(zu) \\ \vdots \\ v_{l+1}(zu) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall m = 1, ..., l+1;\ v_m(zu) = \rho v_m(u).$$

Soit $m \in \{1, ..., l+1\}$. Il existe un entier positif N_m tel que $v_m(u) = \sum_{f_m=1}^{N_m} a_{f_m} u^{f_m}$. Alors,

$$\sum_{f_m=1}^{N_m} a_{f_m} z^{f_m} u^{f_m} = \sum_{f_m=1}^{N_m} a_{f_m} \rho u^{f_m}.$$

Donc

$$\forall f_m \in \{1, \ldots, N_m\},\ a_{f_m} z^{f_m} = a_{f_m} \rho$$

alors

$$\forall f_m \in \{1, \ldots, N_m\},\ a_{f_m}(z^{f_m} - \rho) = 0.$$

Soit $F_m = \{f_m;\ a_{f_m} \neq 0\}$ alors $z^{f_m} = \rho$ pour tout f_m dans F_m.
D'autre part soit $f_m \neq f'_m$ dans F_m, alors

$$z^{f_m} = z^{f'_m} \text{ (Contradiction avec le fait que } z^f \neq 1 \text{ pour tout } f \text{ dans } \mathbb{N}.)$$

Alors,

$$\forall m \in \{1, ..., l+1\},\ \exists f_m \in F_m;\ v_m(u) = a_{f_m} u^{f_m}.$$

Maintenant soit $n' = \tau = Diag(\rho_1, ..., \rho_{l+1}) \in \bar{N}$ tel que $\rho_m \neq \rho_{m'}$ si $m \neq m'$. Alors,

$$\exists \rho' \in \mathbb{C}^*;\ n' \cdot v = \rho' v.$$

Or

$$\begin{aligned} n \cdot v &= \tau \cdot v \\ &= \begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \vdots \\ \rho_l v_{l+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\forall m = 1, ..., l+1,\ \rho_m v_m = \rho' v_m.$$

Alors

$$\forall m = 1, ..., l+1,\ v_m(\rho' - \rho_m) = 0.$$

Or v est un vecteur propre, donc,

$$\exists m \in \{1, ..., l+1\};\ v_m \neq 0.$$

Enfin

$$v \in \mathbb{C}^* u^k e_m$$

□

Remarque 3.10. *Soit $\alpha = \varepsilon_p - \varepsilon_q + k\delta$, χ un élément de $\chi(\bar{T})$ et v un vecteur propre de poids χ. Alors, $n_\alpha \cdot v$ est un vecteur propre de poids $n_\alpha(\chi)$.*

Démonstration. Soit $t \in \bar{T}$, et α, χ et v comme ci-dessus. Alors,

$$\begin{aligned} t \cdot (n_\alpha \cdot v) &= n_\alpha (n_\alpha^{-1} t n_\alpha) \cdot v \\ &= n_\alpha \cdot ((n_\alpha^{-1} \cdot t) \cdot v) \\ &= n_\alpha \cdot (\chi(n_\alpha^{-1} \cdot t) v) \\ &= \chi(n_\alpha^{-1} \cdot t)(n_\alpha \cdot v) \\ &= (n_\alpha^{-1} \cdot \chi)(t)(n_\alpha \cdot v) \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.7. *Soit $\alpha = \varepsilon_p - \varepsilon_q + k\delta$ et $k' \in \mathbb{Z}$. Alors le morphisme φ_A (c.f Proposition 3.6) vérifie :*

- $\varphi_A(n_\alpha) \cdot (u^{k'} e_p) = u^{k'-k} e_q$
- $\varphi_A(n_\alpha) \cdot (u^{k'} e_q) = u^{k'+k} e_q$
- $\forall m \neq p, q,\ \varphi_A(n_\alpha) \cdot (u^{k'} e_m) = u^{k'} e_m$

Démonstration. On sait, en utilisant la remarque 3.10, que $\varphi_A(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C} u^{k'} e_m)$ est une droite de vecteurs propres, de poids $s_\alpha(\varepsilon_m + k'\delta)$. Soit $m \in \{1, \ldots, l+1\}$, alors,

1. Si $m = p$:

$$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_p + k'\delta) &= n_\alpha \cdot (\varepsilon_p + k'\delta) \ \text{ (cf. preuve de Proposition 3.4)} \\ &= \varepsilon_q + (k' - k)\delta \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{C} u^{k'-k} e_q$ est la droite de vecteurs propres de poids $\varepsilon_q + (k' - k)\delta$. Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C} u^{k'} e_p) = \mathbb{C} u^{k'-k} e_p$$

2. Si $m = q$:

$$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_q + k'\delta) &= n_\alpha \cdot (\varepsilon_q + k'\delta) \ \text{ (cf. preuve de Proposition 3.4)} \\ &= \varepsilon_p + (k' + k)\delta \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{C}u^{k'+k}e_p$ est la droite de vecteurs propres de poids $\varepsilon_p + (k' + k)\delta$. Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'}e_q) = \mathbb{C}u^{k'+k}e_p$$

3. Si $m \neq p, q$:

$$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_m + k'\delta) &= n_\alpha \cdot (\varepsilon_m + k'\delta) \ \text{ (cf. preuve de Proposition 3.4)} \\ &= \varepsilon_m + k'\delta \end{aligned}$$

Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'}e_m) = \mathbb{C}u^{k'}e_m$$

□

3.1.3 Identification explicite de $\bar{N}/\bar{T}$ avec le groupe de George

Corollaire 3.8. *Il existe une bijection $\kappa_A : \{u^k e_m\} \to \mathbb{Z}$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} S(\tilde{A}_l) & \xhookrightarrow{\iota_A} & \mathfrak{S}(\mathbb{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle \psi_A} & & \uparrow{\scriptstyle \kappa_A^*} \\ \bar{N}/\bar{T} & \xrightarrow{\varphi_A} & \mathfrak{S}(\{u^k e_m\}) \end{array}$$

La flèche verticale à droite est $\kappa_A^* : \mathfrak{S}(\{u^k e_m\}) \to \mathfrak{S}(\mathbb{Z})$ induite par κ_A de la manière suivante :

$$\forall w \in \mathfrak{S}\{u^k e_m\}), \ \kappa_A^*(w) = \kappa_A w \kappa_A^{-1}$$

En plus, κ_A est unique si on suppose en plus que $\kappa_A(e_1) = 1$, et elle est donné explicitement par :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \forall m \in \{1, ..., l+1\}, \quad \kappa_A(u^k e_m) = -kL_A + m \tag{3.2}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence. On suppose que κ_A est définie par (3.2). On note Ψ_A la composée des deux morphismes $\psi_A : \bar{N}/\bar{T} \to S(\tilde{A}_l)$ et $\iota_A : S(\tilde{A}_l) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{Z})$.
Il faut donc montrer que $\kappa_A^* \circ \varphi_A = \Psi_A$.
En effet, soit $x \in \{1, ..., l\}$, on a

$$\kappa_A^* \circ \varphi_A([n_{\alpha_x}]) = \kappa_A \varphi_A([n_{\alpha_x}]) \kappa_A^{-1}$$

En plus, d'après le corollaire 3.7, on en déduit le suivant

$$\begin{cases} \varphi_A([n_{\alpha_0}])(e_1) = ue_{l+1} \\ \varphi_A([n_{\alpha_0}])(e_{l+1}) = u^{-1}e_1 \\ \varphi_A([n_{\alpha_0}])(e_{m'}) = e_{m'} \qquad \text{si } m' \in \{2, \ldots, l\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi_A([n_{\alpha_x}])(e_x) = e_{x+1} \\ \varphi_A([n_{\alpha_x}])(e_{x+1}) = e_x \\ \varphi_A([n_{\alpha_x}])(e_m) = e_m \quad \text{si } m \in \{1,\dots,l+1\}\backslash\{x,x+1\} \end{cases}$$

D'autre part,

$$\forall x \in \{0,\dots,l\},\ \Psi_A([n_{\alpha_x}]) = \langle (x\ x+1)\rangle_A$$

Donc ce qu'il faut montrer maintenant c'est que

$$\forall x \in \{0,\dots,l\},\ \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_x}])\kappa_A^{-1} = \langle (x\ x+1)\rangle_A.$$

En effet, soit $f \in \mathbb{Z}$, alors il existe des uniques k et m tels que $f = kL_A + m$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \{1,...,l+1\}$.
On a plusieurs cas possible :

1. Si $m < l+1$:

   (a) $x \neq 0, l$:

$$\begin{aligned} \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_x}])\kappa_A^{-1}(f) &= \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_x}])(u^{-k}e_m) \\ &= \begin{cases} \kappa_A(u^{-k}e_{m+1}) & \text{si } m = x \\ \kappa_A(u^{-k}e_{m-1}) & \text{si } m = x+1 \\ \kappa_A(u^{-k}e_m) & \text{si } m \neq x, x+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} kL_A + m + 1 & \text{si } m = x \\ kL_A + m - 1 & \text{si } m = x+1 \\ kL_A + m & \text{si } m \neq x, x+1 \end{cases} \end{aligned}$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle (x\ x+1)\rangle_A(f) &= k(L_A) + \langle (x\ x+1)\rangle_A(m) \\ &= \begin{cases} kL_A + m + 1 & \text{si } m = x \\ kL_A + m - 1 & \text{si } m = x+1 \\ kL_A + m & \text{si } m \neq x, x+1 \end{cases} \end{aligned}$$

   (b) si $x = 0$:

$$\begin{aligned} \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_0}])\kappa_A^{-1}(f) &= \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_0}])(u^{-k}e_m) \\ &= \begin{cases} \kappa_A(u^{-k+1}e_{l+1}) & \text{si } m = 1 \\ \kappa_A(u^{-k}e_m) & \text{si } m \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (k-1)L_A + L_A & \text{si } m = 1 \\ kL_A + m & \text{si } m \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned} \langle (0\ 1)\rangle_A(f) &= \langle (0\ 1)\rangle_A(kL_A + m) \\ &= kL_A + \langle (0\ 1)\rangle_A(m) \\ &= \begin{cases} kL_A & \text{si } m = 1 \\ kL_A + m & \text{si } m \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) <u>si $x = l$</u> :

$$\begin{aligned}\kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_l}])\kappa_A^{-1}(f) &= \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_l}])(u^{-k}e_m)\\ &= \begin{cases}\kappa_A(u^{-k}e_{l+1}) & \text{si } m = l\\ \kappa_A(u^{-k}e_m) & \text{si } m \neq l\end{cases}\\ &= \begin{cases}kL_A + L_A & \text{si } m = 1\\ kL_A + m & \text{si } m \neq 1\end{cases}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\langle(l\ l+1)\rangle_A(f) &= \langle(l\ l+1)\rangle_A(kL_A + m)\\ &= kL_A + \langle(l\ l+1)\rangle_A(m)\\ &= \begin{cases}kL_A + L_A & \text{si } m = l\\ kL_A + m & \text{si } m \neq l\end{cases}\end{aligned}$$

2. <u>si $m = l + 1$</u> : On rappelle que $L_A = l + 1$, alors $f = kL_A + L_A$ et,

$$\begin{aligned}\kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_x}])\kappa_A^{-1}(f) &= \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_x}])\kappa_A^{-1}(kL_A + L_A)\\ &= \kappa_A\varphi_A([n_{\alpha_x}])(u^{-k}e_{l+1})\\ &= \begin{cases}\kappa_A(u^{-k}e_{l+1}) & \text{si } x \neq l, 0\\ \kappa_A(u^{-k}e_l) & \text{si } x = l\\ \kappa_A(u^{-k-1}e_1) & \text{si } x = 0\end{cases}\\ &= \begin{cases}kL_A + L_A & \text{si } x \neq l, 0\\ kL_A + l & \text{si } x = l\\ (k+1)L_A + 1 & \text{si } x = 0\end{cases}\end{aligned}$$

D'autre part

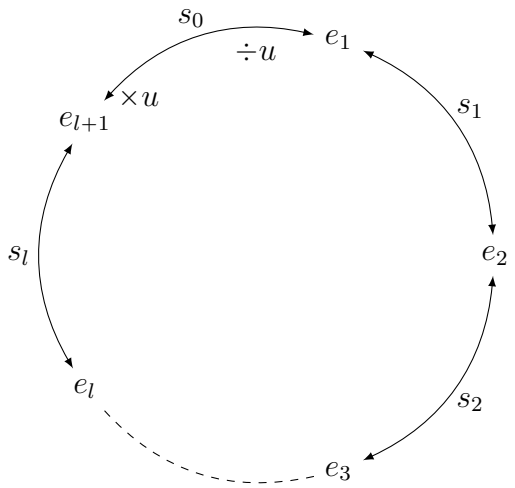
$$\begin{aligned}\langle(x\ x+1)\rangle_A(f) &= \langle(x\ x+1)\rangle_A(kL_A + L_A)\\ &= \begin{cases}kL_A + L_A & \text{si } x \neq l, 0\\ kL_A + l & \text{si } x = l\\ (k+1)L_A + 1 & \text{si } x = 0\end{cases}\end{aligned}$$

Donc on a montrer que $\kappa_A^* \circ \varphi_A = \Psi_A$ sur les générateurs de $\bar{N}/\bar{T}$ et puisque κ^*, φ_A, et Ψ_A sont des morphismes de groupes alors $\kappa_A^* \circ \varphi_A$ et Ψ_A se coïncident partout.

En fin en supposant toujours que $\kappa_A(e_1) = 1$ et en utilisant les figures ci dessous et la commutativité du diagramme en haut, on peut reconstruire le morphisme et on retombe sur κ_A. Alors κ_A est unique. □

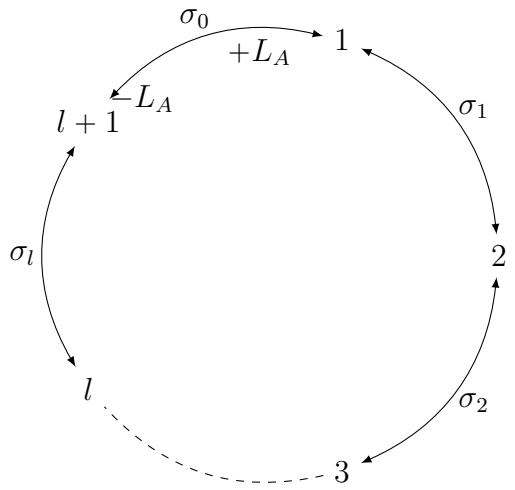
Action des s_m sur $\{u^k e_m\}$

FIGURE 3.1 – Cette figure montre l'action des s_m sur $\{u^k e_m\}$ et en particulier que $s_0(e_{l+1}) = u^{-1}e_1$ et $s_0(e_1) = ue_{l+1}$



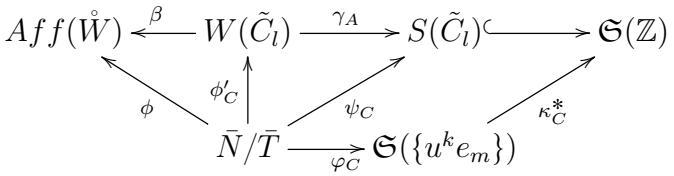
Action des σ_m sur $\mathbb{Z}$

FIGURE 3.2 – Cette figure montre l'action des σ_m sur $\mathbb{Z}$ et en particulier que $\sigma_0(l+1) = 1 + L_A$ et $\sigma_0(1) = l + 1 - L_A$ où $L_A = (l+1)$.



3.2 Groupe de George de type C

Le but dans ce qui suit c'est d'exprimer explicitement dans $S(\tilde{C}_l)$ les réflexions en montrant qu'il existe des isomorphismes γ_C, ϕ_C et ψ_C, tels quels sont spécifiés dans le diagramme suivant :



La suite se déroule d'une manière similaire qu'en type A (voir 3.1) :

3.2.1 Groupe de George, description de $\bar{N}$ et action de $\bar{N}$ sur $\chi(\bar{T})$

On note dans toute la suite $L_C := 2l + 1$.

Définition 3.11. *Pour tout m dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ on note par R_m la réflexion sur $\mathbb{Z}$ par rapport à m. On note par $\mathbf{R}$ le groupe engendré par les $R_{k(\frac{L_C}{2})}$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$. En d'autres termes $\mathbf{R}$ est l'ensemble des réflexions par rapport à m pour tout m dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et des translations de vecteur kL_C pour tout k dans $\mathbb{Z}$. On définit la relation $\sim_C$ sur $\mathbb{Z}^2$ de la manière suivante :*

$$\forall\ i, i', j, j' \in \mathbb{Z}\ \ (i,j) \sim_C (i',j') \Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{R}\ ;\ i = r(i'),\ j = r(j').$$

On note $\mathbf{R} \cdot (i,j)$ la classe de (i,j) pour cette relation.

Lemme 3.12. *Soit $i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$ tels que $(i,j) \sim_C (i',j')$, $i, j \notin L_C\mathbb{Z}$ et $j \notin i + L_C\mathbb{Z}$. Alors,*

$$\{i,j\} = \{i',j'\} \text{ ou } \{i,j\} \cap \{i',j'\} = \varnothing$$

Démonstration. Soit $i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$ tels que $(i,j) \sim_C (i',j')$. Alors,

$$\exists r \in \mathbf{R};\ i = r(i') \text{ et } j = r(j')$$

Dans la suite on distingues les deux cas possibles :

1. Si r est une translation, c'est à dire :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z};\ r(x) = x + kL_C$$

   (a) Si $k = 0$, on obtient,
   $$i = i' \text{ et } j = j'$$

   (b) Si $k \neq 0$, on obtient,
   $$i \neq i' \text{ et } j \neq j'$$

   Il faut encore montrer que $i \neq j'$ et $i' \neq j$. En effet,
   • Si $i = j'$ alors

$$j = i + kL_C \ \ \text{(contradiction avec } j \notin i + L_C\mathbb{Z})$$

   • Si $i' = j$ alors

$$i = j + kL_C \ \ \text{(contradiction avec } j \notin i + L_C\mathbb{Z})$$

2. Si r est une réflexion, c'est à dire :

$$\exists m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z};\ \forall x \in \mathbb{Z},\ r(x) = 2m - x$$

Or, dans $\mathbf{R}$, les réflexions sont celles de centre $m = k\frac{L_C}{2}$ pour un certain k dans $\mathbb{Z}$. Alors,

$$\exists k \in \mathbb{Z};\ \forall x \in \mathbb{Z},\ r(x) = kL_C - x$$

alors,

$$i + i' = kL_C \text{ et } j + j' = kL_C$$

Dans ce cas on a nécessairement,

$$i \neq i' \text{ et } j \neq j'$$

En effet, dans le cas contraire, si $i = i'$ alors,

$$i \in \frac{L_C}{2}\mathbb{Z}$$

et comme L_C est impaire et $i \in \mathbb{Z}$,

$$i \in L_C\mathbb{Z} \text{ (contradiction)}$$

de même si $j = j'$ alors de même,

$$j \in L_C\mathbb{Z} \text{ (contradiction)}$$

Il reste à traiter les deux cas suivants :

(a) Si $j' = i$, en appliquant r, on trouve $r(j') = r(i)$ donc

$$j = i'$$

(b) Si $j = i'$, en appliquant r, on trouve $r(j) = r(i')$ donc

$$j' = i$$

□

Maintenant on peut définir ce qu'on va appeler classe de transposition pour tout i, j dans $\mathbb{Z}$ vérifiant les deux relations suivantes :

Définition 3.13. *Soit $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $j \notin i + L_C\mathbb{Z}$. On définit une classe de transposition dans $Bij(\mathbb{Z})$ de la manière suivante :*

1. *Si $j \notin \mathbf{R}i$ alors,*

$$\langle (i\ j) \rangle_C := \prod_{(i',j') \in \mathbf{R}\cdot(i,j)} (i'j')$$

2. *Si $j \in \mathbf{R}i$ alors,*

$$\langle (i\ j) \rangle_C := \prod_{\substack{(i',j') \in \mathbf{R}\cdot(i,j) \\ i' < j'}} (i'j')$$

Soit $S(\tilde{C}_l)$ le groupe engendré par les classes de transpositions adjacentes dans $Bij(\mathbb{Z})$:

$$\forall m = 1, ..., l; \quad \sigma_0 = \langle (-1\ 1) \rangle_C \text{ et } \sigma_m = \langle (m\ m+1) \rangle_C$$

Le groupe $S(\tilde{C}_l)$ est appelé groupe de George de type $\tilde{C}_l$.

Remarque 3.14. *Dans la définition 3.13, on était obliger de différencier entre deux cas ($j \notin \mathbf{R}i$ et $j \in \mathbf{R}i$). Si le cas* (2) *était défini comme le cas* (1) *on aurait obtenu l'identité. Ce qu'il faut surtout retenir de cette définition c'est le suivant :*

$$\forall r \in \mathbf{R}, \forall i, j \in \mathbb{Z} \text{ tel que } j \notin i + L_C\mathbb{Z}, \text{ on a } \langle (i\ j) \rangle_C (r(i)) = r(j)$$

Remarque 3.15. *On remarque que $S(\tilde{C}_l)$ est un sous-groupe de permutations périodiques de $\mathfrak{S}(\mathbb{Z})$, c'est à dire :*

$$\forall \sigma \in S(\tilde{C}_l), \forall i \in \mathbb{Z}; \ \sigma(i + L_C) = \sigma(i) + L_C$$

Démonstration. Soit $r \in \mathbf{R}$, dans un premier temps on suppose qu'il existe $i \in \mathbb{Z} \backslash L_C\mathbb{Z}$ tel que $r(i) = i$ et on montre que

$$r = id$$

En effet, il y a deux cas possibles :

1. Si r est une translation : Alors,

   $$\exists k \in \mathbb{Z}; \ \forall x \in \mathbb{Z}, \ r(x) = x + kL_C$$

   Or, par hypothèse,

   $$\exists i \in \mathbb{Z} \backslash L_C\mathbb{Z}; \ r(i) = i$$

   Alors,

   $$i = i + kL_C$$

   Donc,

   $$k = 0$$

   Par suite,

   $$r = id$$

2. Si r est une réflexion : Alors,

   $$\exists m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}; \ \forall x \in \mathbb{Z}, \ r(x) = 2m - x$$

   Or, par hypothèse,

   $$\exists i \in \mathbb{Z} \backslash L_C\mathbb{Z}; \ r(i) = i$$

   Alors,

   $$i = 2m - i$$

   Donc,

   $$i = m$$

   Ceci montre que i est le centre de cette réflexion. Ce qui n'est pas possible puisque les centres des réflexions du groupe $S(\tilde{C}_l)$ sont des multiples de L_C ou les demi-entiers.

Dans un deuxième temps, on montre que pour $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $i, j \notin L_C\mathbb{Z}$ et $j \notin i + L_C\mathbb{Z}$:

$$\forall r \in \mathbf{R};\quad \langle (i\ j)\rangle_C \circ r = r \circ \langle (i\ j)\rangle_C$$

Dans toute la suite, l'existence des transformations r' et r'' est unique à cause de ce qu'on a montré ci-dessus. En effet, soit $x \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbf{R}$, d'une part,

$$\begin{aligned}\langle (i\ j)\rangle_C \circ r(x) &= \begin{cases} r'(j) & \text{s'il existe } r' \text{ tel que } r(x) = r'(i) \\ r'(i) & \text{s'il existe } r' \text{ tel que } r(x) = r'(j) \\ r(x) & \text{si } x \notin \mathbf{R}i \cup \mathbf{R}j \end{cases} \\ &= \begin{cases} r'(j) & \text{s'il existe } r' \text{ tel que } (r')^{-1}r(x) = i \quad (a_1) \\ r'(i) & \text{s'il existe } r' \text{ tel que } (r')^{-1}r(x) = j \quad (b_1) \\ r(x) & \text{si } x \notin \mathbf{R}i \cup \mathbf{R}j \qquad\qquad\quad (c_1) \end{cases}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$r \circ \langle (i\ j)\rangle(x) = \begin{cases} rr''(j) & \text{s'il existe } r'' \text{ tel que } x = r''(i) \quad (a_2) \\ rr''(i) & \text{s'il existe } r'' \text{ tel que } x = r''(j) \quad (b_2) \\ r(x) & \text{sinon} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad (c_2) \end{cases}$$

On a les trois cas suivants :

- S'il existe r' tel que $r^{-1}r'(i) = x$ alors, d'après le cas (a_1),

  $$\langle (i\ j)\rangle_C \circ r(x) = r'(j)$$

  On remarque dans ce cas qu'il existe $r''(= r^{-1}r')$ tel que

  $$r''(i) = x$$

  Alors, d'après le cas (a_2),

  $$\begin{aligned} r \circ \langle (i\ j)\rangle_C(x) &= rr''(j) \\ &= r'(j) \end{aligned}$$

  Par suite,

  $$\langle (i\ j)\rangle_C \circ r(x) = r \circ \langle (i\ j)\rangle_C(x)$$

- S'il existe r' tel que $r^{-1}r(j) = x$ alors, d'après le cas (b_1),

  $$\langle (i\ j)\rangle_C \circ r(x) = r'(i)$$

  On remarque dans ce cas qu'il existe $r''(= r^{-1}r')$ tel que

  $$r''(j) = x$$

  Alors, d'après le cas (b_2),

  $$\begin{aligned} r \circ \langle (i\ j)\rangle_C(x) &= rr''(i) \\ &= r'(i) \end{aligned}$$

  Par suite,

  $$\langle (i\ j)\rangle_C \circ r(x) = r \circ \langle (i\ j)\rangle_C(x)$$

- Sinon : On a
$$\langle (i\ j)\rangle_C \circ r(x) = r \circ \langle (i\ j)\rangle_C(x) = r(x)$$

□

Les $\langle (m\ m+1)\rangle_C$ vérifies les relations de tresse. Plus précisément, on a

Proposition 3.9. *[3] Il existe un isomorphisme de groupes $\gamma_C : W(\tilde{C}_l) \to S(\tilde{C}_l)$ tel que pour tout $m \in \{1, ..., l\}$:*

$$s_0 \mapsto \langle (-1\ 1)\rangle_C$$
$$s_m \mapsto \langle (m\ m+1)\rangle_C$$

Action du groupe $\bar{N}/\bar{T}$ sur $\{u^k e_m\}$

Remarque 3.16. *Soient $M \in Sp_{2l}(\mathbb{C})$ et A, B, C et $D \in M_l(\mathbb{C})$ telles que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Alors*

$$^tM\Omega M = \Omega,\ \text{où}\ \ \Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_l \\ -I_l & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Si on suppose que $B = C = \mathbf{0}$, on obtient le suivant :

$$\begin{aligned} ^tM\Omega M = \Omega &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ^tA & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & ^tD \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_l \\ -I_l & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_l \\ -I_l & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & ^tA \\ -^tD & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_l \\ -I_l & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0} & ^tAD \\ -^tDA & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_l \\ -I_l & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$D^{-1} = {}^tA$$

et donc

$$M = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}.$$

Rappelons la définition 1.61 de $\bar{T}$. On a :

Définition 3.17. *Soit $\bar{t} = d_z t$ dans $\bar{T}$. On sait que t s'écrit d'une manière unique comme $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_l, \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_l^{-1})$. On définit pour tout m dans $\{1, \ldots, l\}$ l'application ε_m de $\bar{T}$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que :*

$$\varepsilon_m(d_z t) = \lambda_m$$

Puisque d_z et t commutent, on vérifie facilement que les ε_p sont des morphismes de groupe et donc des éléments de $\chi(\bar{T})$.

Notation 3.18. *Soit $D = diag(a_1, \ldots, a_f)$ une matrice diagonale de taille f. On note dans ce cas :*

- $^oD = diag(0, a_2, \ldots, a_f)$.
- $D^o = diag(a_1, \ldots, a_{f-1}, 0)$.

- ${}^oD^o = diag(0, a_2, \ldots, a_{f-1}, 0)$.

Notation 3.19. *Soient $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $p, q \in \{1, \ldots, l\}$. On note $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta$. Alors,*

1. *Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$*

   On note $n_\alpha = \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} & \mathbf{0} & U_k(u) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -U_{-k}(u) & \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} \end{pmatrix} \in \bar{L}(\mathring{G})$

   où $U_k(u) = diag(u^k, 0, ..., 0)$.

2. *Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ et $p < q$.*

   On note $n_\alpha = \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_k(u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y_k(u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix} \in \bar{L}(\mathring{G})$

   où $Y_k(u) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & u^k \\ \vdots & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 1 & \vdots \\ u^{-k} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

3. *Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ et $p < q$*

   On note $n_\alpha = \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & V_k(u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -V_{-k}(u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix} \in \bar{L}(\mathring{G})$

   où $V_k(u) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & u^k \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ u^k & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 3.20. *Soient $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $p, q \in \{1, \ldots, l\}$. On note $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta$. Alors,*

1. *Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$ alors,*

$$n_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} & \mathbf{0} & -U_k(u) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_{-k}(u) & \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} \end{pmatrix}$$

2. *Si* $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ *et* $p < q$ *alors,*

$$n_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_k(u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y_k(u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix}$$

3. *Si* $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ *et* $p < q$ *alors,*

$$n_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -V_k(u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{-k}(u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix}$$

Notation 3.21. *Pour simplifier l'écriture dans ce qui suit on introduit la notation suivante. Pour tout élément* $t = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_1^{-1})$ *dans* T *on note :*

$$Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_l^{-1})$$

Lemme 3.22. *Soient* $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$, $k \in \mathbb{Z}$ *et* $p, q \in \{1, \dots, l\}$. *On note* $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta$. *Soit* $t = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_1^{-1}) \in T$ *alors,*

1. *Si* $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$ *alors,*

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z \cdot Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, z^{-k}\lambda_p^{-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_l)$$

2. *Si* $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ *et* $p < q$ *alors,*

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z \cdot Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, -z^{-k}\lambda_q, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{q-1}, z^k\lambda_p, \lambda_{q+1}, \dots, \lambda_l)$$

3. *Si* $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ *et* $p < q$ *alors,*

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z \cdot Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, z^{-k}\lambda_q^{-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{q-1}, z^{-k}\lambda_p^{-1}, \lambda_{q+1}, \dots, \lambda_l)$$

Démonstration. Soient $m, m' \in \{1, \dots, l\}$ tels que $m < m'$, on note $\Lambda_{m,m'} = diag(\lambda_m, \dots, \lambda_{m'})$.

1. Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$ alors,

$$\begin{aligned} n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} &= d_z(d_z^{-1}n_\alpha d_z)tn_\alpha^{-1} \\ &= d_z \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} & \mathbf{0} & U_k(z^{-1}u) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -U_{-k}(z^{-1}u) & \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{p,l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{1,p-1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{p,l}^{-1} \end{pmatrix} \cdot n_\alpha^{-1} \\ &= d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^o\Lambda_{p,l} & \mathbf{0} & \textcircled{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{1,p-1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \textcircled{2} & \mathbf{0} & {}^o(\Lambda_{p,l}^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} & \mathbf{0} & -U_k(u) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_{-k}(u) & \mathbf{0} & {}^oI_{l-p+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\textcircled{1} = diag(z^{-k}u^k, 0, ..., 0)diag(\lambda_p^{-1}, ..., \lambda_l^{-1}) = diag(z^{-k}u^k\lambda_p^{-1}, 0, ...0)$$

et

$$\textcircled{2} = diag(-z^k u^{-k}, 0, ..., .)diag(\lambda_p, ..., \lambda_l) = diag(-z^k u^{-k}\lambda_p, 0, ..., 0)$$

Alors

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \textcircled{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{1,p-1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \textcircled{4} \end{pmatrix}$$

où

$$\textcircled{3} = {}^o\Lambda_{p,l} + diag(z^{-k}u^k\lambda_p^{-1}, 0, ..., 0)diag(u^{-k}, 0, ..., 0) = diag(z^{-k}\lambda_p^{-1}, \lambda_{p+1}, ..., \lambda_l)$$

et

$$\textcircled{4} = {}^o(\Lambda_{p,l}^{-1}) + diag(z^k u^{-k}\lambda_p, 0, ..., 0)diag(u^k, 0, ..., 0) = diag(z^k\lambda^p, \lambda_{p+1}^{-1}, ..., \lambda_l^{-1})$$

2. Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ et $p < q$

$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1}$

$$= d_z \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_k(z^{-1}u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y_k(z^{-1}u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{p,q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{1,p-1}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{p,q}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l}^{-1} \end{pmatrix} n_\alpha^{-1}$$

$$= d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \textcircled{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \textcircled{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_k(u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Y_k(u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix}$$

où

$$\textcircled{5} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & z^{-k}u^k \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \vdots \\ z^k u^{-k} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \Lambda_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & z^{-k}u^k\lambda_q \\ \vdots & \lambda_{p+1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_{q-1} & \vdots \\ z^k u^{-k}\lambda_p & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\textcircled{6} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & z^{-k}u^k \\ \vdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \vdots \\ z^k u^{-k} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \Lambda_{p,q}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & z^{-k}u^k\lambda_q^{-1} \\ \vdots & \lambda_{p+1}^{-1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \lambda_{q-1}^{-1} & \vdots \\ z^k u^{-k}\lambda_p^{-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \textcircled{7} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{1,p-1}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \textcircled{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l}^{-1} \end{pmatrix}$$

où

$$\textcircled{7} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{-k}u^k\lambda_q \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ z^k u^{-k}\lambda_p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u^k \\ \vdots & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ u^{-k} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z^{-k}\lambda_q & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_{p+1} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda_{q-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & z^k\lambda_p \end{pmatrix}$$

et

$$\textcircled{8} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{-k}u^k\lambda_q^{-1} \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ z^k u^{-k}\lambda_p^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u^k \\ \vdots & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ u^{-k} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z^{-k}\lambda_q^{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_{p+1}^{-1} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda_{q-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & z^k\lambda_p^{-1} \end{pmatrix}$$

3. Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ et $p < q$

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & V_k(z^{-1}u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -V_{-k}(z^{-1}u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{p,q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda^{-1}_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda^{-1}_{p,q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda^{-1}_{q+1,l} \end{pmatrix} \cdot n_\alpha^{-1}$$

$$= d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^o\Lambda^o_{p,q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \textcircled{10} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \textcircled{9} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^o(\Lambda^{-1}_{p,q})^o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda^{-1}_{q+1,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -V_k(u) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{-k}(u) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^oI^o_{q-p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{l-q} \end{pmatrix}$$

où

$$\textcircled{9} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{-k}u^k \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ z^{-k}u^k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \Lambda^{-1}_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{-k}u^k\lambda_q^{-1} \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ z^{-k}u^k\lambda_p^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\textcircled{10} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -z^k u^{-k} \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ -z^k u^{-k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \Lambda_{p,q} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -z^k u^{-k}\lambda_q \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ -z^k u^{-k}\lambda_p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$n_\alpha(d_z t)n_\alpha^{-1} = d_z \begin{pmatrix} \Lambda_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \textcircled{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_{q+1,l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda^{-1}_{1,p-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \textcircled{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda^{-1}_{q+1,l} \end{pmatrix}$$

où,

$$(11) = {}^{o}\Lambda^{o}_{p,q} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{-k}u^{k}\lambda_q^{-1} \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ z^{-k}u^{k}\lambda_p^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u^{-k} \\ \vdots & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ u^{-k} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z^{-k}\lambda_q^{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_{p+1} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda_{q-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & z^{-k}\lambda_p^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$(12) = {}^{o}(\Lambda^{-1}_{p,q})^{o} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z^{k}u^{-k}\lambda_q \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ z^{k}u^{-k}\lambda_p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u^{k} \\ \vdots & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ u^{k} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z^{k}\lambda_q & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_{p+1}^{-1} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda_{q-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & z^{k}\lambda_p \end{pmatrix}$$

□

Le Lemme 3.22 montre que les éléments n_α sont dans $\bar{N}$ et ce dernier agit sur $\bar{T}$ et donc sur $\chi(\bar{T})$. On en déduit alors le résultat suivant :

Corollaire 3.10. *Soient $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $p, q \in \{1, \dots, l\}$. On note $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta \in \Delta^{re}(\tilde{C})$, alors*

1. *Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$. Alors,*

$$n_\alpha \cdot \varepsilon_i = \begin{cases} -\varepsilon_p - k\delta & si\ i = p \\ \varepsilon_i & sinon \end{cases}$$

2. *Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ et $p < q$. Alors,*

$$n_\alpha \cdot \varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_q - k\delta & si\ i = p \\ \varepsilon_p + k\delta & si\ i = q \\ \varepsilon_i & sinon \end{cases}$$

3. *Si* $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ *et* $p < q$. *Alors,*

$$n_\alpha \cdot \varepsilon_i = \begin{cases} -\varepsilon_q - k\delta & si\ i = p \\ -\varepsilon_p - k\delta & si\ i = q \\ \varepsilon_i & sinon \end{cases}$$

Remarque 3.23. *1. On sait que le dual d'un système de racine de type C est un système de racine de type B. Alors, avec les mêmes notations que [4] (en remplaçant la notation* ε_m *par* $\varepsilon_m^\vee$ *pour le système de racines dual), on a*

$$\forall m \in \{1, \ldots, l-1\},\ \alpha_m^\vee = \varepsilon_m^\vee - \varepsilon_{m+1}^\vee \text{ et } \alpha_l^\vee = \varepsilon_l^\vee.$$

2. Soient $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$ *et* $p, q \in \{1, \ldots, l\}$. *Alors,*

(a) Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$ *pour tout* p *dans* $\{1, \ldots, l\}$. *Alors,*

$$\mathring{\alpha} = s_p s_{p+1} \ldots s_{l-1}(\alpha_l) \text{ et } \mathring{\alpha}^\vee = \alpha_p^\vee + \ldots + \alpha_l^\vee = \varepsilon_p^\vee.$$

(b) Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ *pour tout* $p < q$. *Alors,*

$$\mathring{\alpha} = s_p \ldots s_{q-2}(\alpha_{q-1}) \text{ et } \mathring{\alpha}^\vee = \alpha_p^\vee + \ldots + \alpha_{q-1}^\vee = \varepsilon_p^\vee - \varepsilon_q^\vee.$$

(c) Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ *pour tout* $p < q$. *Alors,*

$$\mathring{\alpha} = s_q s_{q+1} \ldots s_{l-1} s_l s_{l-1} \ldots s_{p+1}(\alpha_p)$$
$$et$$
$$\mathring{\alpha}^\vee = 2\alpha_l^\vee + \ldots + 2\alpha_q^\vee + \alpha_{q-1}^\vee + \ldots + \alpha_p^\vee = \varepsilon_p^\vee + \varepsilon_q^\vee.$$

Démonstration. On utilise la propriété suivante :

$$[\beta = w(\alpha) \Rightarrow \beta^\vee = w(\alpha^\vee).]$$

□

Définition 3.24. *On définit le morphisme de groupes* $\phi'_C : \bar{N}/\bar{T} \to W(\tilde{C}_l) \subset Aut(\chi(\bar{T}))$ *tel que pour tout* $n \in \bar{N}$, $\chi \in \chi(\bar{T})$, *et* $\bar{t} \in \bar{T}$ *on a*

$$(\phi'_C([n]) \cdot \chi)(\bar{t}) = \chi(n\bar{t}n^{-1}).$$

Le résultat suivant est l'élément principale pour montrer dans la Proposition 3.11 que ϕ'_C envoie les n_α sur les s_α :

Lemme 3.25. *Soient* $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$, $k \in \mathbb{Z}$ *et* $i \in \{1, \ldots, l\}$. *On note* $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta$. *Alors,*

$$\phi'_C(n_\alpha) \cdot \varepsilon_i = s_\alpha(\varepsilon_i)$$

Démonstration. Soit α et i comme dans l'énoncé du lemme et soient $p, q \in \{1, \ldots, l\}$. Dans cette preuve on va traiter tout les cas possibles en utilisant principalement le résultat du corollaire 3.10 :

1. Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$:

- Si $i = p$: D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\begin{aligned}\phi'_C(n_\alpha) \cdot \varepsilon_p &= -\varepsilon_p - k\delta \\ &= -\varepsilon_q + \varepsilon_q - \varepsilon_p - k\delta \\ &= \varepsilon_p - \alpha\end{aligned}$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_p) = \varepsilon_p - \alpha$$

- Si $i \neq p$:

  D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\phi'_C(n_\alpha) \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_i$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$$

2. Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ et $p < q$.

- Si $i = p$: D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\begin{aligned}\phi'_C(n_\alpha) \cdot \varepsilon_p &= \varepsilon_q - k\delta \\ &= \varepsilon_p - \varepsilon_p + \varepsilon_q - k\delta \\ &= \varepsilon_p - \alpha\end{aligned}$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_p) = \varepsilon_p - \alpha$$

- Si $i = q$:

  D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\begin{aligned}\phi'_C(n_\alpha) \cdot \varepsilon_q &= \varepsilon_p + k\delta \\ &= \varepsilon_q - \varepsilon_q + \varepsilon_p + k\delta \\ &= \varepsilon_q + \alpha\end{aligned}$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_q) = \varepsilon_q + \alpha$$

- Si $i \neq p, q$: D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\phi'_C(n_\alpha) \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_i$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$$

3. Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ et $p < q$.

- Si $i = p$:

  D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\begin{aligned}\phi'_C(n_\alpha)\cdot\varepsilon_p &= -\varepsilon_q - k\delta\\ &= \varepsilon_p - \varepsilon_p - \varepsilon_q - k\delta\\ &= \varepsilon_p - \alpha\end{aligned}$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_p) = \varepsilon_p - \alpha$$

- Si $i = q$: D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\begin{aligned}\phi'_C(n_\alpha)\cdot\varepsilon_q &= -\varepsilon_p - k\delta\\ &= \varepsilon_q - \varepsilon_q - \varepsilon_p - k\delta\\ &= \varepsilon_q - \alpha\end{aligned}$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_q) = \varepsilon_q - \alpha$$

- Si $i \neq p, q$:

  D'une part, d'après le corollaire 3.10,

$$\phi'_C(n_\alpha)\cdot\varepsilon_i = \varepsilon_i$$

  D'autre part,

$$s_\alpha(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$$

□

Proposition 3.11. *Soit $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta \in \Delta^{re}(\tilde{C}_l)$. Soit $m, m' \in \{1, \dots, l\}$ tels que $m < m'$. On note $\alpha_{m,m'} = \varepsilon_m - \varepsilon_{m'}$. Alors,*

1. *L'action de s_α sur Q est donné par :*

$$s_\alpha(\alpha_{m,m+1}) = \alpha_{m,m+1} - \langle \mathring{\alpha}^\vee, \alpha_{m,m+1}\rangle\,\alpha \text{ et } s_\alpha(\delta) = \delta$$

2. *On a*

$$n_\alpha \in \bar{N} \text{ et } \phi'_C([n_\alpha]) = s_\alpha$$

3. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} W(\tilde{C}_l) & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & Aff(\mathring{W}) \\ & {\scriptstyle\phi'_C}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\phi} & \\ & \bar{N}/\bar{T} & \end{array}$$

Démonstration. 1. Pour montrer la première partie on rappelle que $s_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle\alpha^\vee, \gamma\rangle\alpha$ pour tout $\gamma \in \Delta^{re}(\tilde{A}_l)$ et que $\langle\alpha^\vee, \alpha_m\rangle = \dfrac{(\alpha_m, \alpha_m)}{(\alpha, \alpha)} \cdot \langle\alpha_m^\vee, \alpha\rangle$ pour tout $m \in \{1, ..., l\}$.

Alors en particulier on a :

$$\begin{aligned} s_\alpha(\alpha_m) &= \alpha_m - \langle \alpha^\vee, \alpha_m \rangle \alpha \\ &= \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \alpha_m)}{(\alpha, \alpha)} \langle \alpha_m^\vee, \alpha \rangle \alpha \\ &= \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \alpha_m)}{(\alpha, \alpha)} \langle \alpha_m^\vee, \mathring{\alpha} + k\delta \rangle \alpha \\ &= \alpha_m - \frac{(\alpha_m, \alpha_m)}{(\mathring{\alpha}, \mathring{\alpha})} \langle \alpha_m^\vee, \mathring{\alpha} \rangle \alpha \quad (\text{car} \quad (\alpha, \alpha) = (\mathring{\alpha}, \mathring{\alpha})) \\ &= \alpha_m - \langle \mathring{\alpha}^\vee, \alpha_m \rangle \alpha \end{aligned}$$

2. Pour montrer que $\phi'_C([n_\alpha]) = s_\alpha$, on rappelle que l'action de $W(\tilde{C}_l)$ sur $\chi(\bar{T})$ est fidèle. Alors il suffit de montrer que $\phi'_C(n_\alpha)$ et s_α ont la même action sur $\chi(\bar{T})$ (qui est engendré par les ε_i et δ). En effet, $\phi'_C(n_\alpha)$ et s_α agissent tout les deux trivialement sur δ (cf. preuve de Proposition 3.4), et d'après le Lemme 3.25, on a

$$\phi'_C(n_\alpha) \cdot \varepsilon_i = s_\alpha(\varepsilon_i)$$

Par définition de ϕ'_C (cf. Définition 3.24) on sait que,

$$\forall m, m' = 0, \dots 1, \ \forall \bar{t} \in \bar{T}; \quad (\phi'_C(n_{\alpha_m}) \cdot \varepsilon_{m'})(\bar{t}) = \varepsilon_{m'}(n_{\alpha_m} \bar{t} n_{\alpha_m}^{-1}).$$

3. Puisque les applications en question sont des morphismes de groupes, il suffit de montrer que,

$$\forall m \in \{0, \cdots, l\}; \ \beta \circ \phi'_C([n_{\alpha_m}]) = \phi([n_{\alpha_m}])$$

Dans le deuxième point de cette preuve on a montrer que

$$\forall \alpha = \mathring{\alpha} + k\delta \in \Delta^{re}(\tilde{C}_l); \ \phi'_C([n_\alpha]) = s_\alpha$$

Alors, en particulier, on a

$$\forall m \in \{0, \cdots, l\}; \ \phi'_C([n_{\alpha_m}]) = s_m$$

Par suite, ce qui reste à montrer c'est que,

$$\forall m \in \{0, \dots, l\}, \quad \beta(s_{\alpha_m}) = \phi([n_{\alpha_m}])$$

Or, d'après la Proposition 1.7, on en déduit que :

$$\forall m \in \{0, \dots, l\}, \quad \phi([n_{\alpha_m}]) = \mathring{s}_m$$

Et que,

$$\begin{aligned} \phi([n_{\alpha_0}]) &= \phi([n_{\delta - \theta}]) \\ &= \phi([n_{\theta - \delta}]) \\ &= s_\theta t_{-\theta^\vee} \quad (\text{même idée que la preuve de Proposition 3.4(3)}) \end{aligned}$$

Finalement, d'après la Proposition 3.1,

$$\forall m = 1, \dots, l; \ \beta(s_m) = \mathring{s}_m \text{ et } \beta(s_0) = s_\theta t_{-\theta^\vee}$$

□

3.2.2 Action de $\bar{N}$ sur les espaces propres de $\bar{T}$ agissant sur $\mathbb{C}^{2l} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$

Définition 3.26. *On note e_m pour $m \in \{1, \dots, l\}$ la colonne de taile $2l$ qui à des coefficients nuls partout sauf une coefficient égal à 1 sur la m-ième ligne.*
De même on note e_m pour $m \in \{-1, \dots, -l\}$ la colonne de taille $2l$ qui à des coefficients nuls partout sauf une coefficient égale à 1 sur la $(l-m)$-ième ligne.

Exemple 3.27. $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $e_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

Ce sont des matrices de taille $2l$ et le coefficient égale à 1 dans l'expression de e_{-1} est sur la $(l+1)-$ième ligne.

Proposition 3.12. *La restriction de $\bar{L}(\mathring{G}) \circlearrowleft \mathbb{C}^{2l} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ à $\bar{N}$ permute les $\mathbb{C}\{u^k e_m\}$ et fournit un morphisme $\varphi_C : \bar{N}/\bar{T} \to \mathfrak{S}(\{u^k e_m\})$.*

Démonstration. Par restriction de l'action en type A, il existe une action de groupes (cf. Proposition 3.6),

$$\bar{L}(\mathring{G}) \circlearrowleft \mathbb{C}^{2l} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}].$$

Alors $\bar{N}$ agit sur $\mathbb{C}^{2l} \otimes \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ en permutant les espaces propres $\mathbb{C}u^k e_m$ de $\bar{T}$.
En effet, en faisant la même preuve qu'en type A (cf. preuve de Proposition 3.6), on montre que les espaces propres sont les $\mathbb{C}u^k e_m$.
Maintenant soit $n' = \tau = Diag(\rho_1, \dots, \rho_l) \in \bar{N}$ tel que,

- $\forall m \neq m',\ \rho_m \neq \rho_{m'}$.
- $\forall m, m',\ \rho_m \neq \rho_{m'}^{-1}$.

Alors,

$$\exists \rho' \in \mathbb{C}^*;\ n' \cdot v = \rho' v.$$

Or,

$$n' \cdot v = \tau \cdot v = \begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \vdots \\ \rho_l v_l \\ \rho_1^{-1} v_{l+1} \\ \vdots \\ \rho_l^{-1} v_{2l} \end{bmatrix}$$

donc,

$$\forall m = 1, ..., 2l;\ \rho_m v_m = \rho' v_m.$$

Alors,

$$\forall m = 1, ..., 2l;\ v_m(\rho' - \rho_m) = 0.$$

Or v est un vecteur propre donc,

$$\exists m \in \{1, ..., 2l\};\ v_m \neq 0.$$

Enfin,

$$v \in \mathbb{C}^* u^k e_m.$$

□

Corollaire 3.13. *Soient $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$, $k, k' \in \mathbb{Z}$ et $p, q \in \{1, \ldots, l\}$. On note $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta$. Alors le morphisme φ_C de la Proposition 3.12 vérifie :*

1. *Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$*

   (a) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_p) = \mathbb{C}u^{k'-k} e_{-p}$

   (b) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{-p}) = \mathbb{C}u^{k'+k} e_p$

   (c) $\forall m \in \{1, \ldots, l\} \backslash \{p\};\ \varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{\pm m}) = \mathbb{C}u^{k'} e_{\pm m}$

2. *Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ et $p < q$*

   (a) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{\pm p}) = \mathbb{C}u^{k'-k} e_{\pm q}$

   (b) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{\pm q}) = \mathbb{C}u^{k'+k} e_{\pm p}$

   (c) $\forall m \in \{1, \ldots, l\} \backslash \{p, q\};\ \varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{\pm m}) = \mathbb{C}u^{k'} e_{\pm m}$

3. *Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ et $p < q$*

   (a) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_p) = \mathbb{C}u^{k'-k} e_{-q}$

   (b) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_q) = \mathbb{C}u^{k'-k} e_{-p}$

   (c) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{-p}) = \mathbb{C}u^{k'+k} e_q$

   (d) $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{-q}) = \mathbb{C}u^{k'+k} e_p$

   (e) $\forall m \in \{1, \ldots, l\} \backslash \{p, q\};\ \varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{\pm m}) = \mathbb{C}u^{k'} e_{\pm m}$

Démonstration. Soient p, q, k, k' et α comme dans l'énoncé. On sait que pour tout $m \in \{1, \ldots, l\}$, $\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_m)$ est une droite de vecteurs propres, de poids $s_\alpha(\varepsilon_m + k'\delta)$. Soit $m \in \{1, \ldots, l\}$, alors

1. Si $\mathring{\alpha} = 2\varepsilon_p$

   (a)

   $$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_p + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_p) + k'\delta \\ &= \varepsilon_p - \alpha + k'\delta \\ &= -\varepsilon_p + (k' - k)\delta \end{aligned}$$

   Or, $\mathbb{C}u^{k'-k}e_{-p}$ est la droite de vecteurs propres de poids $-\varepsilon_p + (k' - k)\delta$. Alors,

   $$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^k e_p) = \mathbb{C}u^{k'-k}e_{-p}$$

   (b)

   $$\begin{aligned} s_\alpha(-\varepsilon_p + k'\delta) &= s_\alpha(-\varepsilon_p) + k'\delta \\ &= -\varepsilon_p + \alpha + k'\delta \\ &= \varepsilon_p + (k' + k)\delta \end{aligned}$$

   Or, $\mathbb{C}u^{k'+k}e_p$ est la droite de vecteurs propres de poids $\varepsilon_p + (k' + k)\delta$. Alors,

   $$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^k e_{-p}) = \mathbb{C}u^{k'+k}e_p$$

   (c)

   $$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_m + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_m) + k'\delta \\ &= \varepsilon_m + k'\delta \end{aligned}$$

   Alors,

   $$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_m) = \mathbb{C}u^{k'} e_m$$

2. Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ et $p < q$

   (a)

   $$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_p + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_p) + k'\delta \\ &= \varepsilon_p - \alpha + k'\delta \\ &= \varepsilon_q + (k' - k)\delta \end{aligned}$$

   Or, $\mathbb{C}u^{k'-k}e_q$ est la droite de vecteurs propres de poids $\varepsilon_q + (k' - k)\delta$. Alors,

   $$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_p) = \mathbb{C}u^{k'-k}e_p$$

   (b)

   $$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_q + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_q) + k'\delta \\ &= \varepsilon_q + \alpha + k'\delta \\ &= \varepsilon_p + (k' + k)\delta \end{aligned}$$

   Or, $\mathbb{C}u^{k'+k}e_p$ est la droite de vecteurs propres de poids $\varepsilon_p + (k' + k)\delta$. Alors,

   $$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_q) = \mathbb{C}u^{k'+k}e_p$$

(c)

$$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_m + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_m) + k'\delta \\ &= \varepsilon_m + k'\delta \end{aligned}$$

Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_m) = \mathbb{C}u^{k'} e_m$$

3. Si $\mathring{\alpha} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ et $p < q$

(a)

$$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_p + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_p) + k'\delta \\ &= \varepsilon_p - \alpha + k'\delta \\ &= -\varepsilon_q + (k' - k)\delta \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{C}u^{k'-k} e_{-q}$ est la droite de vecteurs propres de poids $-\varepsilon_q + (k' - k)\delta$. Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_p) = \mathbb{C}u^{k'-k} e_{-q}$$

(b)

$$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_q + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_q) + k'\delta \\ &= \varepsilon_q - \alpha + k'\delta \\ &= -\varepsilon_p + (k' - k)\delta \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{C}u^{k'-k} e_{-p}$ est la droite de vecteurs propres de poids $-\varepsilon_p + (k' - k)\delta$. Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_q) = \mathbb{C}u^{k'-k} e_{-p}$$

(c)

$$\begin{aligned} s_\alpha(-\varepsilon_p + k'\delta) &= s_\alpha(-\varepsilon_p) + k'\delta \\ &= -\varepsilon_p + \alpha + k'\delta \\ &= \varepsilon_q + (k' + k)\delta \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{C}u^{k'+k} e_q$ est la droite de vecteurs propres de poids $\varepsilon_q + (k' + k)\delta$. Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{-p}) = \mathbb{C}u^{k'+k} e_q$$

(d)

$$\begin{aligned} s_\alpha(-\varepsilon_q + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_q) + k'\delta \\ &= -\varepsilon_q + \alpha + k'\delta \\ &= +\varepsilon_p + (k' + k)\delta \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{C}u^{k'+k} e_p$ est la droite de vecteurs propres de poids $\varepsilon_p + (k' + k)\delta$. Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_{-q}) = \mathbb{C}u^{k'+k} e_p$$

(e)

$$\begin{aligned} s_\alpha(\varepsilon_m + k'\delta) &= s_\alpha(\varepsilon_m) + k'\delta \\ &= \varepsilon_m + k'\delta \end{aligned}$$

Alors,

$$\varphi_C(n_\alpha) \cdot (\mathbb{C}u^{k'} e_m) = \mathbb{C}u^{k'} e_m$$

□

3.2.3 Identification explicite de $\bar{N}/\bar{T}$ avec le groupe de George

Définition 3.28. *Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}(\{u^k e_m\})$, et $\kappa : \{u^k e_m\} \to \mathbb{Z}\backslash\{kL_C; k \in \mathbb{Z}\}$ une bijection, on définit $(\kappa^*\sigma) \in Bij(\mathbb{Z})$ telle que* $(\kappa^*\sigma)(x) := \begin{cases} x & si\ L_C|x \\ \kappa\sigma\kappa^{-1}(x) & sinon \end{cases}$

Corollaire 3.14. *Il existe une bijection $\kappa_C : \{u^k e_m\} \to \mathbb{Z}\backslash\{kL_C;\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$ telle que,*

$$(\kappa_C^*\sigma)(x) := \begin{cases} x & si\ L_C|x \\ \kappa_C\sigma\kappa_C^{-1}(x) & sinon \end{cases}$$

et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S(\tilde{C}_l) & \xhookrightarrow{\iota_C} & \mathfrak{S}(\mathbb{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle \psi_C} & & \uparrow{\scriptstyle \kappa_C^*} \\ \bar{N}/\bar{T} & \xrightarrow{\varphi_C} & \mathfrak{S}(\{u^k e_m\}) \end{array}$$

En plus, κ_C est unique si on suppose en plus que $\kappa_C(e_1) = 1$, et elle est donné explicitement par :

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ \forall m \in \{1, ..., l\},\quad \kappa(u^k e_m) = -kL_C + m \text{ et } \kappa(u^k e_{-m}) = (-k+1)L_C - m \tag{3.3}$$

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence. On suppose que κ_C est définie par (3.3). On note Ψ_C la composée des deux morphismes $\psi_C : \bar{N}/\bar{T} \to S(\tilde{C}_l)$ et $\iota_C : S(\tilde{C}_l) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{Z}\backslash\{kL_C\})$. Il faut donc montrer que $\kappa_C^* \circ \varphi_C = \Psi_C$. En effet, soit $x \in \{0, \ldots, l\}$. On a

$$\kappa_C^* \circ \varphi_C([n_{\alpha_x}]) = \kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_x}])\kappa_C^{-1}$$

En plus, d'après le corollaire 3.13, on en déduit le suivant :

$$\begin{cases} \varphi_C([n_{\alpha_0}])(e_1) = ue_{-1} \\ \varphi_C([n_{\alpha_0}])(e_{-1}) = u^{-1}e_1 \\ \varphi_C([n_{\alpha_0}])(e_m) = e_m \qquad \text{si } m \in \{1, \ldots, l\}\backslash\{-1, 1\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi_C([n_{\alpha_l}])(e_{\pm l}) = e_{\mp l} \\ \varphi_C([n_{\alpha_l}])(e_m) = e_m \quad \text{si } m \in \{1, \ldots, l\}\backslash\{-l, l\} \end{cases}$$

et si $x \in \{1, \ldots, l-1\}$

$$\begin{cases} \varphi_C([n_{\alpha_x}])(e_x) = e_{x+1} \\ \varphi_C([n_{\alpha_x}])(e_{x+1}) = e_x \\ \varphi_C([n_{\alpha_x}])(e_m) = e_m \quad \text{si } m \in \{1, \ldots, l\}\backslash\{x, x+1\} \end{cases}$$

D'autre part, si $x \in \{1, \ldots, l\}$,

$$\Psi_C([n_{\alpha_x}]) = \langle (x\ x+1) \rangle.$$

Donc ce qu'il faut montrer maintenant c'est que $\kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_x}])\kappa_C^{-1} = \langle(x\ x+1)\rangle$ pour tout $x \in \{1,\dots,l\}$ et $\kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_0}])\kappa_C^{-1} = \langle(-1\ 1)\rangle$.
Soit $f \in \mathbb{Z}\backslash\{kL\}$, alors il existe des uniques k et m tels que

$$f = \begin{cases} kL_C + m & m \in \{1,...,l\},\ k \in \mathbb{Z} \\ (k+1)L_C + m & m \in \{-1,...,-l\},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dans la suite soit x dans $\{0,\dots,l\}$. On a plusieurs cas possibles :

1. Si $x \neq 0, l$:

$$\begin{aligned}
\kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_x}])\kappa_C^{-1}(f) &= \kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_x}])(u^{-k}e_m) \\
&= \begin{cases} \kappa_C(u^{-k}e_{m+1}) & \text{si } m = x \\ \kappa_C(u^{-k}e_{m-1}) & \text{si } m = x+1 \\ \kappa_C(u^{-k}e_{m-1}) & \text{si } m = -x \\ \kappa_C(u^{-k}e_{m+1}) & \text{si } m = -x-1 \\ \kappa_C(u^{-k}e_m) & \textit{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} kL_C + m + 1 & \text{si } m = x \\ kL_C + m - 1 & \text{si } m = x+1 \\ kL_C + m - 1 & \text{si } m = -x \\ kL_C + m + 1 & \text{si } m = -x-1 \\ kL_C + m & \textit{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\langle(x\ x+1)\rangle(f) &= kL_C + \langle(x\ x+1)\rangle(m) \\
&= \begin{cases} kL_C + m + 1 & \text{si } m = x \\ kL_C + m - 1 & \text{si } m = x+1 \\ kL_C + m - 1 & \text{si } m = -x \\ kL_C + m + 1 & \text{si } m = -x-1 \\ kL_C + m + 1 & \textit{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

2. si $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_0}])\kappa_C^{-1}(f) &= \kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_0}])(u^{-k}e_m) \\
&= \begin{cases} \kappa_C(u^{-k+1}e_{-1}) & \text{si } m = 1 \\ \kappa_C(u^{-k-1}e_1) & \text{si } m = -1 \\ \kappa_C(u^{-k}e_m)) & \textit{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} kL_C - 1 & \text{si } m = 1 \\ (k+1)L_C + 1 & \text{si } m = -1 \\ kL_C + m & \text{si } m \in \{2,\dots,l\} \\ (k+1)L_C + m & \text{si } m \in \{-2,\dots,-l\} \end{cases}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\langle(-1\ 1)\rangle(f) = \begin{cases} \langle(-1\ 1)\rangle(kL_C + m) & \text{si } m \in \{1, \dots, l\} \\ \langle(-1\ 1)\rangle((k+1)L_C + m) & \text{si } m \in \{-1, \dots, -l\} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} kL_C + \langle(-1\ 1)\rangle(m) & \text{si } m \in \{1, \dots, l\} \\ (k+1)L_C + \langle(-1\ 1)\rangle(m) & \text{si } m \in \{-1, \dots, -l\} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} kL_C - 1 & \text{si } m = 1 \\ (k+1)L_C + 1 & \text{si } m = -1 \\ kL_C + m & \text{si } m \in \{2, \dots, l\} \\ (k+1)L_C + m & \text{si } m \in \{-2, \dots, -l\} \end{cases}$$

3. <u>si $x = l$</u> :

$$\kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_l}])\kappa_C^{-1}(f) = \kappa_C\varphi_C([n_{\alpha_l}])(u^{-k}e_m)$$
$$= \begin{cases} \kappa_C(u^{-k}e_{-l}) & \text{si } m = l \\ \kappa_C(u^{-k}e_l) & \text{si } m = -l \\ \kappa_C(u^{-k}e_m) & sinon \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (k+1)L_C - l & \text{si } m = l \\ kL_C + l & \text{si } m = -l \\ kL_C + m & \text{si } m \in \{1, \dots, l-1\} \\ (k+1)L_C + m & \text{si } m \in \{-1, \dots, -l+1\} \end{cases}$$

D'autre part,

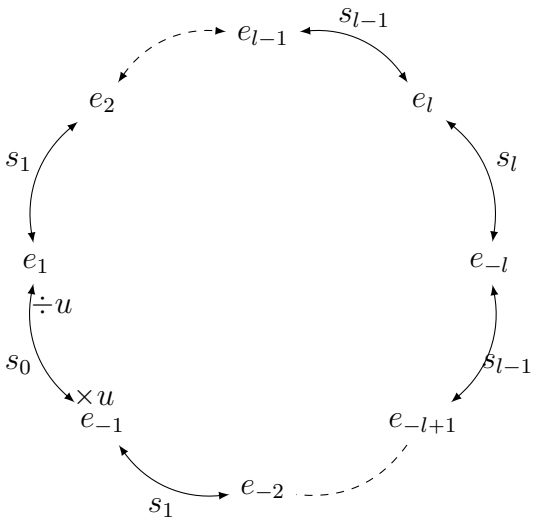
$$\langle(-l\ l)\rangle(f) = \begin{cases} \langle(-l\ l)\rangle(kL_C + m) & \text{si } m \in \{1, \dots, l\} \\ \langle(-l\ l)\rangle((k+1)L_C + m) & \text{si } m \in \{-1, \dots, -l\} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} kL_C + \langle(-l\ l)\rangle(m) & \text{si } m \in \{1, \dots, l\} \\ (k+1)L_C + \langle(-l\ l)\rangle(m) & \text{si } m \in \{-1, \dots, -l\} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} kL_C + l + 1 & \text{si } m = l \\ (k+1)L_C - l - 1 & \text{si } m = -l \\ kL_C + m & \text{si } m \in \{1, \dots, l-1\} \\ (k+1)L_C + m & \text{si } m \in \{-1, \dots, -l+1\} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (k+1)L_C - l & \text{si } m = l \\ kL_C + l & \text{si } m = -l \\ kL_C + m & \text{si } m \in \{1, \dots, l-1\} \\ (k+1)L_C + m & \text{si } m \in \{-1, \dots, -l+1\} \end{cases}$$

Donc on a montrer que $\kappa_C^* \circ \varphi_C = \Psi_C$ sur les générateurs de $\bar{N}/\bar{T}$ et puisque κ_C^*, φ_C, et Ψ_C sont des morphismes de groupes alors $\kappa_C^* \circ \varphi_C$ et Ψ_C se coïncident partout.

Enfin en supposant toujours que $\kappa_C(e_1) = 1$ et en utilisant les figures ci dessous et la commutativité du diagramme en haut, on peut reconstruire le morphisme et on retombe sur κ_C. Alors κ_C est unique. □

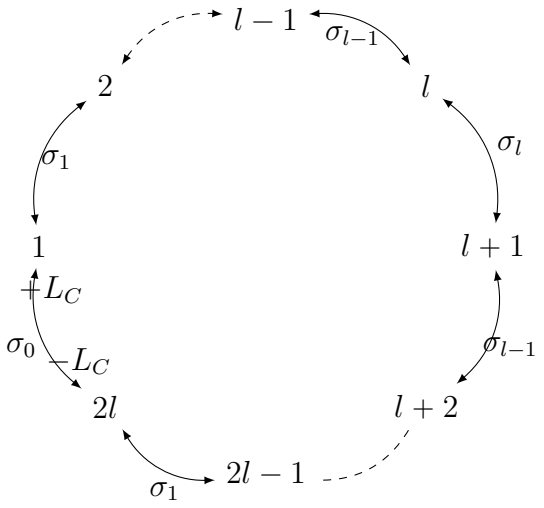
Action des s_m sur $\{u^k e_m\}$

FIGURE 3.3 – Cette figure montre l'action des s_m sur $\{t^k e_m\}$ et en particulier que $s_0(e_1) = ue_{-1}$ et $s_0(e_{-1}) = u^{-1}e_1$



Action des σ_m sur $\mathbb{Z}$

FIGURE 3.4 – Cette figure montre l'action des σ_m sur $\mathbb{Z}$ et en particulier que $\sigma_0(1) = -1 = 2l - L_C$, $\sigma_0(2l) = 2l + 2 = 1 + L_C$ et $\sigma_m(kL_C) = kL_C$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \{0, \ldots, l\}$.



Chapitre 4

Conjecture d'une formule de Pieri pour la cohomologie en type C

En type A, des travaux récents de Lam et al [16] donnent une formule de Pieri en utilisant l'identification par Kostant de l'homologie avec une algèbre de fonctions symétriques.
En effet, il existe un isomorphisme de groupes entre le groupe de Weyl affine et le groupe de George $S(\tilde{A}_l)$, tel que les réflexions sont représentées par les classes de transpositions $\langle(i\ j)\rangle$ (qu'on pourrai aussi noté t_{ij}). On définit ensuite $S^0(\tilde{A}_l)$ comme étant le sous ensemble de $S(\tilde{A}_l)$ qui est formé par les éléments de longueur minimale modulo S_{l+1} ($S(\tilde{A}_l)/S_{l+1}$).
Soit $u, w \in S^0(\tilde{A}_l)$ et $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $i \leqslant 0 < j$. Dans [16], les auteurs disent que $C := (w \rightarrow^{i,j} u)$ est une couverture forte marquée si $w < u$, $\ell(u) = \ell(w) + 1$ et $wt_{ij} = u$. Ils notent dans ce cas $inside(C) = w$, $outside(C) = u$ et $m(C) := w(j)(= u(i))$.
Dans [16] aussi, Ils disent que $S = [w; (C_1, \ldots, C_r); u]$ est une bande forte si les C_k sont des couvertures fortes telles que $outside(C_k) = inside(C_{k+1})$ pour tout k entre 0 et r, et que $m(C_1) < \ldots < m(C_r)$. Ils notent dans ce cas $size(S) := l(u) - l(w)$, $inside(S) = w$, et $outside(S) = u$.
Avant d'énoncer la formule de Pieri, définissons les éléments $a_{0,m}$:

Définition 4.1. *Soit $m = 1, \ldots, l+1$, on définit les éléments $a_{0,m}$ de la manière suivante :*

$$a_{0,m} := s_{m-1} \cdots s_0$$

Théorème 4.1. *[16] Soit $w \in S^0(\tilde{A}_l)$ et $m \in \{1, \ldots, l+1\}$. Alors,*

$$\xi^{a_{0,m}} \xi^w = \sum_S \xi^{outside(S)}$$

où la somme est sur toutes les bandes fortes S tel que $inside(S) = w$ et $w \in S^0(\tilde{A}_l)$.

Le but dans la suite est de formuler une conjecture pour une formule de Pieri en cohomologie en type C, en utilisant des notions similaires à celles utilisées par Lam et al en type A (Couvertures fortes, bandes fortes ...).
Soit $u < w$ une couverture forte tel que $u \rightarrow^{\beta} w$ (cf. Notation 1.67). Dans Lam et al [16], précisément la remarque 2.4, les auteurs ont affirmé que le nombre de couples (i,j) tels que $\beta = \langle(i\ j)\rangle$ et $i \leqslant 0 < j$ est égal au coefficient $c^w_{u,s_0} (= \langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle)$. Ils n'ont pas montré ce résultat, mais ils ont précisé que c'était une conséquence de la formule de Chevalley dans [13]. On s'est intéressé par se fait parce que, dans un sens, c'est une première étape pour comprendre la

combinatoire des formules de Pieri. Dans cette optique, on commence par montrer ce résultat en type A en traitant naïvement une première approche : On considère un élément du groupe de George $S(\tilde{A}_l)$ et on cherche a l'associé sa racine correspondante. Cela donne un lien entre les couples (i,j) en question et le système de racine et permet de montrer cette égalité. La première section de ce chapitre sera consacrée à traiter l'argument ci-dessus.
Bien que cette méthode est efficace en type A, on a trouvé qu'elle ne le sera pas dans les autres type, précisément en type C. Pour cette raison, on a décidé de choisir un autre chemin, qui nous permettra de comprendre d'une manière fondamentale la relation entre ces couples (i,j) et le système de racines : Inversement, on considère une racine dans le système de racine associé à $S(\tilde{C}_l)$. En utilisant, principalement, les corollaires 3.13 et 3.14, on arrive à l'associé l'élément correspondant dans le groupe de George.

4.1 Formule de Chevalley en type A

Dans cette section on considère un élément du groupe de George $S(\tilde{A}_l)$ et on cherche a l'associé sa racine correspondante :
Remarquons tout d'abord qu'en type A, on a (cf. Remarque 1.50)

$$\delta = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1} + \alpha_l$$

On note dans ce cas

$$\delta^\vee = \alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \cdots + \alpha_{l-1}^\vee + \alpha_l^\vee .$$

Notation 4.2. *On fixe dans la suite $u = s_0 s_1 \cdots s_{l-1} s_l$ et on définit les éléments $\beta_i^\vee$ de la manière suivante :*

$$\beta_0^\vee = \alpha_0^\vee$$
$$et$$
$$\forall i = 1, \ldots, l-2;\ \ \beta_i^\vee = s_0 s_1 \cdots s_{i-2} s_{i-1}(\alpha_i^\vee) = \alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \cdots + \alpha_{i-1}^\vee + \alpha_i^\vee$$

Lemme 4.3. *Pour tout $k \leqslant l-1$ on a ,*

$$u(\beta_k^\vee) = \beta_{k+1}^\vee + \delta^\vee$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur k
On a,

$$\begin{aligned} u(\alpha_0^\vee) &= s_0 s_1 \cdots s_{l-1} s_l(\alpha_0^\vee) \\ &= s_0 s_1 \cdots s_{l-2} s_{l-1}(\alpha_0^\vee + \alpha_l^\vee) \\ &= s_0 s_1 \cdots s_{l-2} s_{l-1}(\alpha_0^\vee) + s_0 s_1 \cdots s_{l-2} s_{l-1}(\alpha_l^\vee) \\ &= s_0 s_1(\alpha_0^\vee) + \alpha_0^\vee + \delta^\vee \\ &= s_0(\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee) + \alpha_0^\vee + \delta^\vee \\ &= \alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \delta^\vee . \end{aligned}$$

Supposons par récurrence que $u(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i^\vee) = (\sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^\vee) + \delta^\vee$.
Et montrons que $u(\sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^\vee) = \sum_{i=0}^{k+2} \alpha_i^\vee + \delta^\vee$:

On a,

$$u(\sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i^\vee) = u(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i^\vee) + u(\alpha_{k+1}^\vee).$$

Or

$$u(\sum_{i=0}^{k}\alpha_i^\vee) = \sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i^\vee + \delta^\vee.$$

Et

$$\begin{aligned} u(\alpha_{k+1}) &= s_0 s_1 \cdots s_{k+1} s_{k+2}(\alpha_{k+1}^\vee) \\ &= s_0 s_1 \cdots s_k s_{k+1}(\alpha_{k+1}^\vee + \alpha_{k+2}^\vee) \\ &= s_0 s_1 \cdots s_{k-1} s_k(\alpha_{k+2}^\vee) \\ &= \alpha_{k+2}^\vee. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} u(\sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i^\vee) &= \sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i^\vee + \delta^\vee + \alpha_{k+2}^\vee \\ &= \sum_{i=0}^{k+2}\alpha_i^\vee + \delta^\vee. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall i = 0, \ldots, l-1,\ u(\beta_i^\vee) = \delta^\vee + \beta_{i+1}^\vee.$$

□

Notation 4.4. *Dans la suite, on fixe un entier p quelconque et on note $n := p + 1 + E(\frac{p}{l})$ (où E est la fonction partie entière).*

Lemme 4.5. *Pour tout entier r tel que $0 \leqslant r < l$ on a ,*

$$p \equiv r[l] \Leftrightarrow n \equiv r + 1[l+1]$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $p \equiv r[l] \Rightarrow n \equiv r + 1[l+1]$.
Soit r l'entier non nul tel que $p \equiv r[l]$ et $0 \leqslant r < l$ alors,

$$\exists q \in \mathbb{N}^*;\ p = ql + r.$$

Alors,

$$\begin{aligned} n &= p + 1 + E(\frac{p}{l}) \\ &= p + 1 + q \\ &= ql + r + 1 + q \\ &= q(l+1) + r + 1 \end{aligned}$$

Par suite,

$$n \equiv r + 1[l+1].$$

Pour la réciproque, prenons l'entier $1 \leqslant s \leqslant l$ tel que $n \equiv s[l+1]$ et montrons que $p \equiv s-1[l]$. Soit $0 \leqslant s' < l$ l'entier non nul tel que $p \equiv s'[l]$, alors d'après le raisonnement précédent,

$$s = s' + 1$$

donc,

$$s' = s - 1.$$

□

Remarque 4.6. *1. On peut définir $\beta_m^\vee$ pour tout m dans $\mathbb{N}$ de la manière suivante : Soit $m \in \mathbb{N}$ alors il existe deux entiers k et r tels que $m = kl + r$ et $0 \leqslant r < l$, et on définit :*

$$\beta_m^\vee := \beta_r^\vee + k\delta^\vee$$

2. Si $n = (l+1)k + r + 1$ alors,

$$\begin{aligned} p &= \frac{nl - r + r}{l+1} \\ &= \frac{l(k(l+1) + r + 1) - l + r}{l+1} \\ &= \frac{kl(l+1) + lr + l - l + r}{l+1} \\ &= kl + r \end{aligned}$$

Avant d'énoncer le résultat principale de cette section, on rappelle au lecteur la formule de Chevalley :

Théorème 4.2. *Pour tout w dans $S(\tilde{A}_l)$, on a*

$$\xi^w \xi^{a_{0,1}} = \sum_{\ell(ws_\alpha)=\ell(w)+1} \langle \varpi_0, \alpha^\vee \rangle \xi^{ws_\alpha}$$

Remarque 4.7. *En générale, une réflexion s_α est représentée, dans le groupe de George $S(\tilde{A}_l)$, par une classe de transposition $\langle (m\ n) \rangle_A$ pour de m et n dans $\mathbb{Z}$. Mais dans la suite, plus précisément pour la preuve de la Proposition 4.3, puisque le Diagramme de Dynkin en type A affine est circulaire, on pourrait supposer que $m = 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposition 4.3. *Soient ϖ_0 le poids fondamental associé à α_0, et $\alpha \in \Delta^{re}$. Alors,*

$$\langle \varpi_0, \alpha^\vee \rangle = card(\{(i,j); s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_A \text{ et } i \leqslant 0 < j\})$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \Delta^{re}$. D'après la remarque 4.7, on peut supposer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$s_\alpha = \langle (0\ n) \rangle_A$$

En faisant un petit calcul, on remarque qu'il existe un unique entier p tel que,

$$n = p + 1 + E(\frac{p}{l})$$

On définit dans ce cas les entiers k, k', r et r' tels que :

- $0 \leqslant r < l$ et $p = kl + r$
- $0 \leqslant r' < l + 1$ et $p = k'(l+1) + r'$

et on note

$$w := u^{k'} s_0 s_1 \cdots s_{r'-2} s_{r'-1}.$$

On remarque tout d'abord que

$$\langle (0\ n) \rangle_A = w s_{r'} w^{-1}$$

En plus,

$$\begin{aligned} w(\alpha^\vee_{r'}) &= u^{k'} s_0 s_1 \cdots s_{r'-2} s_{r'-1}(\alpha^\vee_{r'}) \\ &= u^{k'}(\beta^\vee_{r'}) \\ &= k'\delta^\vee + \beta^\vee_{r'+k'} \quad (\text{ D'après le Lemme 4.3.}) \end{aligned}$$

Or,

$$\langle \varpi_0, \beta^\vee_{r'+k'} \rangle = E(\frac{r'+k'}{l}) + 1.$$

Par suite

$$\langle \varpi_0, w(\alpha^\vee_p) \rangle = k' + 1 + E(\frac{r'+k'}{l}).$$

D'autre part, le nombre de paires (i,j) tel que $\langle (0\ n) \rangle_A = \langle (i\ j) \rangle_A$ et $i \leqslant 0 < j$ est $k+1$.
Il faut donc montrer que $k+1 = k'+1+E(\frac{r'+k'}{l})$: En effet, on a

$$\begin{aligned} p &= kl + r \\ &= k'(l+1) + r' \\ &= k'l + (k'+r'). \end{aligned}$$

Soit k'', r'' tels que $r'' < l$ et $k'+r' = k''l + r''$ alors

$$\begin{aligned} p &= k'l + k''l + r'' \\ &= (k'+k'')l + r''. \end{aligned}$$

Par unicité de la division euclidienne, on en déduit que

$$k' + k'' = k \text{ et } r = r''.$$

Alors,

$$\begin{aligned} k' + 1 + E(\frac{r'+k'}{l}) &= k' + 1 + k'' \\ &= k+1 \end{aligned}$$

□

4.2 Énoncé de la conjecture en type C

Définition 4.8. *Soit $u, w \in S^0(\tilde{C}_l)$ et $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $i \leqslant 0 < j$.*

1. *On dit que $C := (w \rightarrow^{i,j} u)$ est une couverture forte marquée si,*

$$w < u,\ \ell(u) = \ell(w) + 1 \text{ et } wt_{ij} = u.$$

On note $inside(C) = w$, $outside(C) = u$ et $m(C) = u(i)$.

2. *On dit que* $S = [w; (C_1, \ldots, C_r); u]$ *est une bande forte si les* C_k *sont des couvertures fortes telles que,*

$$\forall\ 0 \leqslant k \leqslant r \quad outside(C_k) = inside(C_{k+1}) \quad et \quad m(C_1) < \ldots < m(C_r).$$

On note $size(S) := l(u) - l(w)$, $inside(S) = w$ *et* $outside(S) = u$.

Conjecture 4.4. *Soit* $w \in S^0(\tilde{C}_l)$ *et* $m \geqslant 0$. *Alors,*

$$\xi^{c_{o,m}} \xi^w = \sum_S \xi^{outside(S)}.$$

Où la somme parcourt touts les bandes fortes de taille m *et tel que* $inside(S) = w$.

4.3 Compatibilité avec la formule de Chevalley

Dans cette section, on veut montrer la conjecture 4.4 pour $m = 1$, en d'autres termes on montre que cette conjecture est compatible avec la formule de Chevalley. D'une part la formule de Chevalley pour la multiplication par ξ^{s_0} est :

$$\forall w \in S^0(\tilde{C}_l) \quad \xi^{s_0} \cdot \xi^w = \sum_{w \to^\beta v} \langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle \xi^v$$

D'autre part, pour $m = 1$ la conjecture 4.4 donne :

$$\forall w \in S^0(\tilde{C}_l) \quad \xi^{s_0} \cdot \xi^w = \sum_S \xi^{outside(S)}$$

où la somme parcourt toutes les bandes fortes de taille 1 et tel que $inside(S) = w$.
On note $\Sigma_\beta = \{(i, j);\ i \leqslant 0 < j$ et $\sigma_\beta = \langle (i\ j) \rangle\}$, où σ_β est l'élément dans le groupe de George (c.f. Définition 3.11) correspondant à la réflexion s_β. Alors, on a :

$$\sum_S \xi^{outside(S)} = \sum_{w \to^\beta v} card(\Sigma_\beta) \xi^v$$

Alors ce qu'il faut montrer c'est que

$$\langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle = card(\Sigma_\beta).$$

Remarque 4.9. *Soit* $\mathring{\beta}$ *une racine dans le système de racines fini, et soit* $\beta = \mathring{\beta} + k\delta$ *dans* Δ^{re}. *On a deux cas possibles :*

1. *Si* $\mathring{\beta}$ *est une racine longue on a :*

$$\langle (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee, \alpha_0 \rangle = \langle \mathring{\beta} + k\delta, \alpha_0^\vee \rangle$$

2. *Si* $\mathring{\beta}$ *est une racine courte on a :*

$$\langle (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee, \alpha_0 \rangle = 2\langle \mathring{\beta} + k\delta, \alpha_0^\vee \rangle$$

Démonstration. On rappelle tout d'abord que pour tout α et γ dans Δ^{re}, on a

$$\langle \gamma^\vee, \alpha \rangle = \frac{(\gamma, \alpha)}{(\gamma, \gamma)}$$

Alors,

$$\langle \beta^\vee, \alpha_0 \rangle = \frac{(\beta, \alpha_0)}{(\beta, \beta)} \text{ et } \langle \alpha_0^\vee, \beta \rangle = \frac{(\alpha_0, \beta)}{(\alpha_0, \alpha_0)}$$

On en déduit que

$$\langle (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee, \alpha_0 \rangle = \frac{(\alpha_0, \alpha_0)}{(\mathring{\beta} + k\delta, \mathring{\beta} + k\delta)} \langle \mathring{\beta} + k\delta, \alpha_0^\vee \rangle$$

Donc,

$$\langle (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee, \alpha_0 \rangle = \frac{2}{(\mathring{\beta}, \mathring{\beta})} \langle \mathring{\beta} + k\delta, \alpha_0^\vee \rangle$$

Ce qui montre cette remarque. □

Lemme 4.10. *Soit $\gamma = \mathring{\gamma} + k\delta$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathring{\gamma} \in \mathring{R}$. Alors on a,*

$$\langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle = \begin{cases} 2k & \text{si } \mathring{\gamma} \text{ courte} \\ k & \text{si } \mathring{\gamma} \text{ longue} \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\gamma = \mathring{\gamma} + k\delta$

1. Si $k \geqslant 0$
   Pour montrer ce résultat, on va fixer une valeur particulière $\mathring{\beta}$ dans chacun des deux cas, et on va raisonner par récurrence sur k. Et enfin on en déduit le résultat générale en utilisant le fait qu'on peut engendrer toute racine $\mathring{\gamma}$ de type fini en faisant son image par un certain $\mathring{w} \in \mathring{W}$.
   Dans un premier temps, on va montrer que le résultat est vrai pour $k = 0$. Et on va montrer que pour $k = 1$ le résulat est vrai si $\mathring{\gamma}$ est une racine longue :
   • Si $k = 0$, on a
   $$\gamma = \mathring{\gamma}$$
   Alors
   $$\langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle = 0.$$
   • On sait que $-\theta = -2\alpha_1 \cdots - 2\alpha_{l-1} - \alpha_l$ est une racine longue, et que $-\theta + \delta = \alpha_0$. Donc
   $$\begin{aligned} \langle \varpi_0, (-\theta + \delta)^\vee \rangle &= \langle \varpi_0, \alpha_0^\vee \rangle \\ &= 1 \quad (\text{par Définition de } \varpi_0) \end{aligned}$$
   Pour conclure, on sait qu'il existe $\mathring{w} \in \mathring{W}$ tel que $\mathring{w}(-\theta) = \mathring{\gamma}$ si $\mathring{\gamma}$ est longue.
   Alors,
   $$\begin{aligned} \langle \varpi_0, \mathring{\gamma} + \delta \rangle &= \langle \varpi_0, \mathring{w}(-\theta + \delta)^\vee \rangle \\ &= \langle \mathring{w}^{-1}(\varpi_0), (\mathring{\gamma} + \delta)^\vee \rangle \\ &= \langle \varpi_0, (\mathring{\gamma} + \delta)^\vee \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$
   Donc on a montré que le résultat est vrai pour $k = 1$ et $\mathring{\gamma}$ longue.

(a) Montrons maintenant l'hérédité ($k \Rightarrow k+2$) pour $\mathring{\gamma}$ une racine longue.
Soit $\mathring{\beta} = \theta = 2\alpha_1 + \ldots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$ qui est une racine longue. Par hypothèse de récurrence on a

$$\langle \varpi_0, (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle = k.$$

En plus, on a

$$\begin{aligned} s_0(\mathring{\beta}) &= \mathring{\beta} - \langle \mathring{\beta}, \alpha_0^\vee \rangle \alpha_0 \\ &= \mathring{\beta} + 2\alpha_0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} s_0(\mathring{\beta} + k\delta) &= s_0(\mathring{\beta} + k\delta) \\ &= \mathring{\beta} + 2\alpha_0 + k\delta \\ &= -\mathring{\beta} + (k+2)\delta \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} s_0((\mathring{\beta} + k\delta)^\vee) &= (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee - \langle (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee, \alpha_0 \rangle \alpha_0^\vee \\ &= (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee - \langle \mathring{\beta} + k\delta, \alpha_0^\vee \rangle \alpha_0^\vee \quad \text{(D'après la remarque 4.9)} \\ &= (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee + 2\alpha_0^\vee \end{aligned}$$

Or

$$s_0((\mathring{\beta} + k\delta)^\vee) = (s_0(\mathring{\beta} + k\delta))^\vee.$$

Alors,

$$(-\mathring{\beta} + (k+2)\delta)^\vee = (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee - 2\alpha_0^\vee.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \langle \varpi_0, (-\mathring{\beta} + (k+2)\delta)^\vee \rangle &= \langle \varpi_0, (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle + 2\langle \varpi_0, \alpha_0^\vee \rangle \\ &= k+2 \end{aligned}$$

On a montrer par récurrence sur k que $\langle \varpi_0, (-\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle = k$.
Enfin pour conclure, on sait qu'il existe $\mathring{w} \in \mathring{W}$ tel que $\mathring{\gamma} = \mathring{w}(-\mathring{\beta})$.
Alors,

$$\begin{aligned} \langle \varpi_0, (\mathring{\gamma} + k\delta)^\vee \rangle &= \langle \varpi_0, \mathring{w}(-\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle \\ &= \langle \mathring{w}^{-1}\varpi_0, (-\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle \\ &= \langle \varpi_0, (-\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle \quad \text{car } \mathring{w}^{-1}(\varpi_0) = \varpi_0 \\ &= k \end{aligned}$$

(b) De même on va montrer l'hérédité ($k \Rightarrow k+1$) pour $\mathring{\gamma}$ une racine courte.
Soit $\mathring{\beta} = \theta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{l-1}$ qui est une racine courte.

Par hypothèse de récurrence on a $\langle \varpi_0, (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle = 2k$.
On a

$$\begin{aligned} s_0(\mathring{\beta}) &= \mathring{\beta} - \langle \mathring{\beta}, \alpha_0^\vee \rangle \alpha_0 \\ &= \mathring{\beta} + \alpha_0. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} s_0(\mathring{\beta} + k\delta) &= s_0(\mathring{\beta} + k\delta) \\ &= \mathring{\beta} + \alpha_0 + k\delta \\ &= -\mathring{\beta} + (k+1) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} s_0((\mathring{\beta} + k\delta)^\vee) &= (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee - \langle (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee, \alpha_0 \rangle \alpha_0^\vee \\ &= (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee - 2\langle \mathring{\beta} + k\delta, \alpha_0^\vee \rangle \alpha_0^\vee \quad \text{(D'après la remarque 4.9)} \\ &= (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee + 2\alpha_0^\vee \end{aligned}$$

Or

$$s_0((\mathring{\beta} + k\delta)^\vee) = (s_0(\mathring{\beta} + k\delta))^\vee.$$

Alors,

$$(-\mathring{\beta} + (k+1)\delta)^\vee = (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee + 2\alpha_0^\vee.$$

Parsuite,

$$\begin{aligned} \langle \varpi_0, (-\mathring{\beta} + (k+1)\delta)^\vee \rangle &= \langle \varpi_0, (\mathring{\beta} + k\delta)^\vee \rangle + 2\langle \varpi_0, \alpha_0^\vee \rangle \\ &= 2k + 2 \\ &= 2(k+1) \end{aligned}$$

On a montrer par récurrence sur k que $\langle \varpi_0, (-\mathring{\beta} + (k)\delta)^\vee \rangle = 2k$.
Enfin pour conclure, on sait qu'il existe $\mathring{w} \in \mathring{W}$ tel que $\mathring{\gamma} = \mathring{w}(-\mathring{\beta})$.
Alors,

$$\begin{aligned} \langle \varpi_0, (\mathring{\gamma} + (k)\delta)^\vee \rangle &= \langle \varpi_0, w_0(-\mathring{\beta} + (k)\delta)^\vee \rangle \\ &= \langle w_0^{-1}\varpi_0, (-\mathring{\beta} + (k)\delta)^\vee \rangle \\ &= \langle \varpi_0, (-\mathring{\beta} + (k)\delta)^\vee \rangle \quad \text{car } w_0^{-1}(\varpi_0) = \varpi_0 \\ &= 2k \end{aligned}$$

2. Si $k < 0$
   On a $\gamma = \mathring{\gamma} + k\delta$ alors

$$-\gamma = -\mathring{\gamma} - k\delta.$$

En appliquant maintenant le resultat qu'on a montré si-dessus pour $-\gamma$ on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle &= -\langle \varpi_0, (-\gamma)^\vee \rangle \\ &= -\begin{cases} -2k & \text{si } \mathring{\gamma} \text{ courte} \\ -k & \text{si } \mathring{\gamma} \text{ longue} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2k & \text{si } \mathring{\gamma} \text{ courte} \\ k & \text{si } \mathring{\gamma} \text{ longue} \end{cases}\end{aligned}$$

□

Finalement on possède tout le matériel nécessaire pour montrer le résultat principal de cette section. Dans cette prochaine Proposition, on montrera que $\langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle = card(\Sigma_\beta)$ ce qui donne la compatibilité de la conjecture 4.4 avec la formule de Chevalley.

Proposition 4.5. *Soit $\beta \in \Delta^{re}(\tilde{C}_l)$. On note σ_β la réflection associée à β dans le groupe de George. Alors,*

$$\langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle = card(\{(i,j);\ i \leqslant 0 < j \text{ et } \sigma_\beta = \langle (i\ j) \rangle\})$$

Démonstration. Soit $\beta = \mathring{\beta} + k\delta \in \Delta^{re}(\tilde{C}_l)$ où $\mathring{\beta}$ est de type fini. On va montrer le résultat pour chacun des cas suivants :

1. Si $\mathring{\beta} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ avec $p < q$. D'après le corollaire 3.13 on a

   $$\varphi(n_\beta)(\mathbb{C}e_p) = \mathbb{C}u^{-k}e_q.$$

   Donc en utilisant le corollaire 3.14 on obtient

   $$\sigma_\beta(p) = kL + q.$$

   Alors,

   $$\forall r \in \mathbb{Z} \quad \sigma_\beta(p + rL) = (k + r)L + q$$

   On peut alors écrire,

   $$\sigma_\beta = \langle (kL + q \quad p) \rangle.$$

   D'autre part, soit $(i\ j)$ tel que $i \leqslant 0 < j$ et $\sigma_\beta = \langle (i\ j) \rangle$. Alors on a deux cas de figures :

   $(i = kL + q + k'L \text{ et } j = k'L + p,\ k' \in \mathbb{Z})$ ou $(i = -p + k'L \text{ et } j = -kL - q + k'L,\ k' \in \mathbb{Z})$

   (a) Si $i = kL + q + k'L$ et $j = k'L + p,\ k' \in \mathbb{Z}$ on a :

   $$\begin{aligned} i \leqslant 0 < j &\Leftrightarrow kL + q + k'L \leqslant 0 < k'L + p \\ &\Leftrightarrow kL + q \leqslant -k'L < p \\ &\Leftrightarrow -\frac{p}{L} < k' \leqslant -k - \frac{q}{L} \\ &\Leftrightarrow k' = 0, \ldots, -k - 1 \end{aligned}$$

   (b) Si $i = -p + k'L$ et $j = -kL - q + k'L,\ k' \in \mathbb{Z}$ on a :

   $$\begin{aligned} i \leqslant 0 < j &\Leftrightarrow -p + k'L \leqslant 0 < -kL - q + k'L \\ &\Leftrightarrow -p \leqslant -k'L < -kL - q \\ &\Leftrightarrow k + \frac{q}{L} < k' \leqslant \frac{p}{L} \\ &\Leftrightarrow k' = k + 1, \ldots, 0 \end{aligned}$$

On remarque en combinant les couples (i,j) trouvés dans (a) et (b), qu'il y en a $2k$ couples qui sont deux à deux différents. Et en utilisant le Lemme 4.10 on sait que puisque $\mathring{\beta}$ est une racine courte on a

$$\langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle = 2k.$$

Alors,

$$\langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle = card(\{(i,j);\ i \leqslant 0 < j \text{ et } \sigma_\beta = \langle (i\ j) \rangle\}$$

2. Si $\mathring{\beta} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ avec $p < q$. D'après le corollaire 3.13 on a

$$\varphi(n_\beta)(\mathbb{C}e_p) = \mathbb{C}u^{-k}e_{-q}.$$

Donc en utilisant le corollaire 3.14 on obtient

$$\sigma_\beta(p) = (k+1)L - q$$

Alors,

$$\forall r \in \mathbb{Z}\ \ \sigma_\beta(p + rL) = (k + r + 1)L - q$$

On peut alors écrire :

$$\sigma_\beta = \langle ((k+1)L - q\ \ p) \rangle$$

D'autre part, soit $(i\ j)$ tel que $i \leqslant 0 < j$ et $\sigma_\beta = \langle (i\ j) \rangle$. Alors on a deux cas de figures :

$(i = (k+1)L - q + k'L \text{ et } j = k'L + p,\ k' \in \mathbb{Z})$ ou $(i = -p + k'L \text{ et } j = (-k-1)L + q + k'L,\ k' \in \mathbb{Z})$

(a) Si $i = (k+1)L - q + k'L$ et $j = k'L + p,\ k' \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} i \leqslant 0 < j &\Leftrightarrow (k+1)L - q + k'L \leqslant 0 < k'L + p \\ &\Leftrightarrow (k+1)L - q \leqslant -k'L < p \\ &\Leftrightarrow -\frac{p}{L} < k' \leqslant -k - 1 + \frac{q}{L} \\ &\Leftrightarrow k' = 0, \ldots, -k-1 \end{aligned}$$

(b) Si $i = -p + k'L$ et $j = (-k-1)L - q + k'L,\ k' \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} i \leqslant 0 < j &\Leftrightarrow -p + k'L \leqslant 0 < (-k-1)L + q + k'L \\ &\Leftrightarrow -p \leqslant -k'L < (-k-1)L + q \\ &\Leftrightarrow -(-k-1) - \frac{q}{L} < k' \leqslant \frac{p}{L} \\ &\Leftrightarrow k' = k+1, \ldots, 0 \end{aligned}$$

3. Si $\mathring{\beta} = 2\varepsilon_p$. D'après le corollaire 3.13 on a,

$$\varphi(n_\beta)(\mathbb{C}e_p) = \mathbb{C}u^{-k}e_{-p}.$$

Donc en utilisant le corollaire 3.14 on obtient

$$\sigma_\beta(p) = (k+1)L - p.$$

Alors,

$$\forall r \in \mathbb{Z} \;\; \sigma_\beta(p + rL) = (k + r + 1)L - p$$

On peut alors écrire,

$$\sigma_\beta = \langle((k+1)L - p \;\; p)\rangle$$

D'autre part, soit $(i\ j)$ tel que $i \leqslant 0 < j$ et $\sigma_\beta = \langle(i\ j)\rangle$. Alors on a deux cas de figures :

$(i = (k+1)L - p + k'L \text{ et } j = k'L + p,\ k' \in \mathbb{Z})$ ou $(i = -p + k'L \text{ et } j = (-k-1)L + p + k'L,\ k' \in \mathbb{Z})$

(a) Si $i = (k+1)L - p + k'L$ et $j = k'L + p,\ k' \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} i \leqslant 0 < j &\Leftrightarrow (k+1)L - p + k'L \leqslant 0 < k'L + p \\ &\Leftrightarrow (k+1)L - p \leqslant -k'L < p \\ &\Leftrightarrow -\frac{p}{L} < k' \leqslant -k - 1 + \frac{p}{L} \\ &\Leftrightarrow k' = 0, \ldots, -k-1 \end{aligned}$$

(b) Si $i = -p + k'L$ et $j = (-k-1)L + p + k'L,\ k' \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} i \leqslant 0 < j &\Leftrightarrow -p + k'L \leqslant 0 < (-k-1)L + p + k'L \\ &\Leftrightarrow -p \leqslant -k'L < (-k-1)L + p \\ &\Leftrightarrow -(-k-1) - \frac{p}{L} < k' \leqslant \frac{p}{L} \\ &\Leftrightarrow k' = k+1, \ldots, 0 \end{aligned}$$

En faisant un petit calcul on remarque que les couples (i, j) trouvés dans (a) ne sont qu'une permutation de ceux trouvés dans (b), alors en total on a k couples qui sont deux à deux différents. Et en utilisant le Lemme 4.10 on sait que puisque $\mathring{\beta}$ est une racine longue on a

$$\langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle = k.$$

Alors,

$$\langle \varpi_0, \beta^\vee \rangle = card(\{(i,j);\ i \leqslant 0 < j \text{ et } \sigma_\beta = \langle(i\ j)\rangle\}$$

□

4.4 Conjecture en degré 2

En essayant de montrer la conjecture en tout degré il nous a semblé qu'il était intelligent de généraliser les Lemmes de Lam et al dans [18], et pour cela nous avons donc montré deux résultats principaux :
Le premier, Proposition 4.6, est générale et valable dans n'importe quel groupe de Weyl affine non tordu. Le deuxième, Proposition 4.8, est particulier au type C mais il est plus précis que le premier : Si $u \to u\langle(i\ j)\rangle_C$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat, on obtient que $u(j) - u(i) < L_C$ et, si la racine est courte, que $u(i)$ et $u(j)$ ont le même signe .
On remarque, avec cette stratégie envisagée, pour le degré 2 qui si les centres de symétries (de l'ensemble de marquages pour une couverture) sont égaux, la stratégie fonctionne, et que les Propositions précédentes montrent que les centres (cf. Définition (4.12)) ne peuvent pas différer "trop".

En effet, en degré 2, la conjecture affirme que la multiplication par $\xi^{s_1 s_0}$ revient à parcourir des chemins croissants de taille 2. D'autre part, une conséquence de la section précédente est que la multiplication par $(\xi^{s_0})^2$ revient à parcourir touts les chemins de taille 2. On sait aussi, par conséquence de la formule de Chevalley (cf. Théorème 1.8), que

$$(\xi^{s_0})^2 = 2\xi^{s_1 s_0}$$

On en déduit que la conjecture en degré 2 est équivalente au fait qu'il y a autant de chemins croissants que de chemins décroissants de degré 2).

Remarque 4.11. *Soit $u, v, w \in S^0(\tilde{C}_l)$ tels que $u \to v$ et $v \to w$ sont des couvertures fortes dans le 0-ordre de Bruhat. On remarque que pour montrer la conjecture en degré 2, il suffit de prouver, qu'en passant par v,il y a autant de chemins croissants que de chemins décroissants.*

Dans la suite on définit le centre d'une couverture forte marquée (cf. Définition 4.8).

Définition 4.12. *Soit $u \in S(\tilde{C}_l)$ et $i \leqslant 0 < j$ tels que $u \to u \cdot \langle (i\ j) \rangle_C$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat. On dit que C est le centre de cette couverture si $C = \frac{u(j)-u(i)}{2}$.*

Remarque 4.13. *Soit $u \to u \cdot \langle (i\ j) \rangle_C$ une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat et C son centre. On remarque que C est en effet le centre de symétrie de l'ensemble de marquages associés à cette couverture.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que le centre C est indépendant de i et j. En effet, soit $i' \leqslant 0 < j'$ tels que $\langle (i\ j) \rangle_C = \langle (i'\ j') \rangle_C$. Alors, en utilisant la Définition 3.13, on peut voir qu'on a deux cas possibles :

1. Il existe un entier k tel que

   $$i = i' + kL_C \text{ et } j = j' + kL_C$$

   Donc,

   $$u(j') - u(i') = u(j) - u(i)$$

   D'autre part, on peut voir que $u(j)$ et $-u(i)$ sont des marquages qui sont symétriques par rapport à C. Ce qui montre le résultat.

2. Il existe un entier k tel que

   $$i' = -j + kL_C \text{ et } j' = -i + kL_C$$

   Donc,

   $$u(j') - u(i') = u(j) - u(i)$$

   D'autre part, on peut voir que $u(j)$ et $-u(i)$ sont des marquages qui sont symétriques par rapport à C. Ce qui montre le résultat.

□

Définition 4.14. *Soit W un group de Weyl quelconque et u un élément de W. On définit l'ensemble $Inv(u)$ comme étant l'ensemble de toutes les racines positives dont l'image par u est négative. En d'autres termes :*

$$Inv(u) = \{\gamma > 0;\ u(\gamma) < 0\}$$

Lemme 4.15. *[3, Proposition 4.4.4] Soit $u \in W$, alors*

$$\ell(u) = card(Inv(u))$$

Lemme 4.16. *[3, Lemme 2.4.3] Un élément u est Grassmannien si et seulement si toute écriture réduite de u se termine par s_0.*

Lemme 4.17. *[3, Proposition 2.4.4] Soit $J \subset \{s_0, \cdots, s_l\}$. Alors, on a le suivant :*

1. *Tout élément $w \in W$ admet une unique factorisation $w = w^J \cdot w_J$ tels que $w^j \in W^J$ et $w_J \in W_J$.*
2. *Pour cette factorisation, $\ell(w) = \ell(w^J) + \ell(w_J)$.*

Lemme 4.18. *[3, Proposition 4.4.6] Pour tout $w \in W$ et $\gamma \in \Delta_+^{re}$, on a,*

$$w(\gamma) \in \Delta_-^{re} \Leftrightarrow \ell(ws_\gamma) < \ell(w)$$

Remarque 4.19. *Soit $u \in W(X)$ un élément Grassmannien, alors*

$$\forall \gamma \in Inv(u),\ \langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle > 0$$

Démonstration. Soit $\gamma \in Inv(u)$, alors,

$$\gamma > 0 \text{ et } u(\gamma) < 0$$

1. Si $\gamma \notin \mathring{\Delta}$: Alors,
$$\langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle \neq 0$$
Donc, puisque $\gamma > 0$,
$$\langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle > 0$$
2. Si $\gamma \in \mathring{\Delta}$: On note $J = \{s_1, \ldots, s_l\}$. Alors,
$$s_\gamma \in W_J$$
En plus, en utilisant le Lemme 4.17 et puisque $u \in W^J$, on a
$$\ell(us_\gamma) = \ell(u) + \ell(s_\gamma)$$
Par suite,
$$\ell(us_\gamma) > \ell(u)$$
Donc, d'après le Lemme 4.18,
$$u(\gamma) > 0$$
Finalement,
$$\gamma \notin Inv(u)$$

□

Remarque 4.20. *Soit W un groupe de Weyl affine non-tordue. Soit $\alpha \in \Delta^{re}(W)$, alors*

$$\alpha < \delta \text{ ou } \alpha > \delta$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \Delta^{re}(W)$ alors, d'après le Lemme 1.52,

$$\exists \mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}(W),\ \exists k \in \mathbb{Z};\quad \alpha = \mathring{\alpha} + k\delta$$

Donc,

$$\alpha - \delta = \mathring{\alpha} + (k-1)\delta$$

Finalement,

$$\alpha - \delta \in \Delta^{re}(W)$$

□

Lemme 4.21. *Soit $\alpha \in \Delta^{re}_{+}(X)$ et $w \in W(X)$ telles que $w \to ws_\alpha$ est une couverture forte. Alors,*

$$\alpha < \delta \quad ou \quad w(\alpha) < \delta$$

En réalité, il sera établi dans le Lemme 4.23 que l'inégalité $w(\alpha) < \delta$ est toujours satisfaite.

Démonstration. Soit $\alpha \in \Delta^{re}_{+}(X)$ et $w \in W(X)$ telles que $w \to ws_\alpha$ est une couverture forte. D'après la Définition 4.14, on sait que,

- $Inv(ws_\alpha) = \{\gamma > 0;\ ws_\alpha(\gamma) < 0\}$
- $Inv(w) = \{\gamma > 0;\ w(\gamma) < 0\}$

On pose dans la suite,

- $A = \{\gamma > 0;\ w(\gamma) < 0 \text{ et } ws_\alpha(\gamma) > 0\}$
- $B_1 = \{\gamma > 0;\ w(\gamma) > 0 \text{ et } ws_\alpha(\gamma) < 0\}$

Or, puisque $w \to ws_\alpha$ est une couverture forte, on a

$$w(\alpha) > 0$$

En plus, puisque $s_\alpha(\alpha) < 0$, on a

$$ws_\alpha(\alpha) < 0$$

Donc $\alpha \in B_1$, et on note dans ce cas,

$$B_2 = B_1 \backslash \{\alpha\}$$

On peut remarquer que $\alpha \in B_1$ puisque Avec ces notations on peut montrer les deux implications suivantes :

- $\gamma \in A \Rightarrow s_\alpha(\gamma) > \gamma$
- $\gamma \in B_1 \Rightarrow s\alpha(\gamma) < \gamma$

En effet, si $\gamma \in A$ alors,

$$w(\gamma) < 0 \text{ et } ws_\alpha(\gamma) > 0$$

Or $s_\alpha(\gamma) = \gamma - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \alpha$, donc

$$ws_\alpha(\gamma) = w(\gamma) - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle w(\alpha)$$

Par suite,

$$w(\gamma) - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle w(\alpha) > 0$$

Puisque $w(\gamma) < 0$ et $w(\alpha) > 0$, on en déduit que

$$\langle \gamma, \alpha^\vee \rangle < 0$$

Ce qui montre que,

$$s_\alpha(\gamma) > \gamma$$

Pour montrer la seconde implication, on raisonne de la même manière. On en déduit, puisque $card(A) = card(B_2)$, que s_α est une bijection de A dans B_2.
Dans la suite on suppose que $\alpha > \delta$ et on veut montrer que $w(\alpha) < \delta$. En effet, par contradiction, on suppose que $w(\alpha) > \delta$, alors

$$w(\alpha - \delta) > 0 \tag{4.1}$$

En plus, puisque $w(\alpha) > 0$, on a

$$ws_\alpha(\alpha - \delta) = -w(\alpha) - \delta \tag{4.2}$$

Par suite, puisque $\alpha - \delta > 0$, les conditions 4.1 et 4.2 montrent que

$$\alpha - \delta \in B_1$$

Donc,

$$s_\alpha(\alpha - \delta) \in A$$

Or $s_\alpha(\alpha - \delta) = -\alpha - \delta < 0$. Ce qui donne une contradiction avec la positivité des éléments de A. Finalement, on obtient,

$$w(\alpha) < \delta$$

□

Lemme 4.22. *Soit $\alpha \in \Delta_+^{re}$ et $u \in W$ telles que $u \to us_\alpha$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat. Alors,*

$$u \text{ est Grassmannien} \Rightarrow us_\alpha \text{ est Grassmannien}$$

Démonstration. D'après la remarque 4.19, $u \in W(X)$ est un élément Grassmannien si et seulement si,

$$\forall \gamma \in Inv(u),\ \langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle > 0$$

Or, $s_\alpha(A) = B_2$ alors les éléments de B_2 sont de la forme, pour $\gamma \in Inv(u)$,

$$\gamma - \langle \gamma, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

On a déjà montré que $\langle \gamma, \alpha^\vee \rangle < 0$, alors,

$$\langle \varpi_0, s_\alpha(\gamma)^\vee \rangle > 0$$

Alors, puisque $Inv(us_\alpha) = (Inv(u) \backslash A) \cup B_1$, on en déduit que,

$$\forall \gamma \in Inv(us_\alpha),\ \langle \varpi_0, \gamma^\vee \rangle > 0$$

Par suite,

$$us_\alpha \text{ est Grassmannien.}$$

□

Lemme 4.23. *Soit $\alpha \in \Delta_+^{re}(X)$ et $u \in W(X)$ telles que $u \to us_\alpha$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat, et u est Grassmannien. Alors,*

$$u(\alpha) < \delta$$

Démonstration. Soit α et u comme dans le Lemme ci-dessus. On suppose, par contradiction, que $u(\alpha) > \delta$, dans ce cas d'après le Lemme 4.21 on a

$$\alpha < \delta$$

Posons $\gamma = \delta - \alpha$. Alors,

$$\gamma > 0 \text{ et } u(\gamma) < 0$$

Donc,

$$\gamma \in Inv(u)$$

Et puisque u est Grassmannien, on en déduite que

$$\langle \varpi_0^\vee, \gamma \rangle > 0$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \langle \varpi_0^\vee, \gamma \rangle &= \langle \varpi_0^\vee, \delta - \alpha \rangle \\ &= 1 - \langle \varpi_0^\vee, \alpha \rangle \end{aligned}$$

Or $\langle \varpi_0^\vee, \alpha \rangle \geqslant 1$, donc,

$$\langle \varpi_0^\vee, \gamma \rangle \leqslant 0 \quad \text{(Contradiction)}$$

Finalement, on a

$$u(\alpha) < \delta$$

□

Lemme 4.24. *Soit $\alpha \in \Delta_+^{re}(\tilde{C}_l)$ et $i < j$ des entiers tels que $s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle$ dans le groupe de George, alors on a l'implication suivante :*

$$\alpha < \delta \Rightarrow j - i < L_C$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \Delta_+^{re}(\tilde{C}_l)$ et $i < j$ des entiers tels que $s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle$. On suppose que $\alpha < \delta$. Alors, on a les cas suivants :

1. Si $\alpha \in \mathring{\Delta}_+$: Dans ce cas c'est facile à voir que $j - i < L$.
2. si $\alpha = \mathring{\alpha} + k\delta$: (avec $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}$ et $k > 0$)
   (a) Si $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}_+$: Puisque $\alpha < \delta$, on a
   $$\mathring{\alpha} + k\delta < \delta \quad \text{(Contradiction)}$$
   (b) Si $\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}_-$: Puisque $\alpha < \delta$, on a
   $$\mathring{\alpha} + k\delta < \delta$$
   On en déduit que
   $$k = 1$$
   Par suite,
   $$\alpha = \mathring{\alpha} + \delta$$
   En posant $\mathring{\beta} = -\mathring{\alpha} \in \mathring{\Delta}_+$, on obtient
   $$-\alpha = \mathring{\beta} - \delta.$$

i. Si $\mathring{\beta} = \varepsilon_p - \varepsilon_q$ avec $p < q$: D'après les corollaires 3.14 et 3.13, on en déduit que :

$$\begin{aligned} s_\alpha &= \langle (p\ q - L_C) \rangle \\ &= \langle (q - L_C\ p) \rangle \end{aligned}$$

Alors,

$$j - i = p - q + L_C < L_C$$

ii. Si $\mathring{\beta} = \varepsilon_p + \varepsilon_q$ avec $p < q$: D'après les corollaires 3.14 et 3.13, on en déduit que :

$$s_\alpha = \langle (-q\ p) \rangle$$

Alors,

$$j - i = p + q < L_C$$

iii. Si $\mathring{\beta} = 2\varepsilon_p$: D'après les corollaires 3.14 et 3.13, on en déduit que :

$$s_\alpha = \langle (-p\ p) \rangle$$

Alors,

$$j - i = 2p < L_C$$

□

Proposition 4.6. *Soit $u \to us_\alpha$ une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat. Soit $i < j$ tels que $s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_C$. On note par C_α le centre de $u \to us_\alpha$. Alors,*

$$C_\alpha < \frac{L_C}{2}$$

Démonstration. Soit i, j, u et α comme dans l'énoncer de la Proposition. D'après le Lemme 4.23,

$$u(\alpha) < \delta$$

Or, puisque $u \to us_\alpha$ une couverture forte et que $s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_C$, on a

$$u(i) < u(j) \text{ et } s_{u(\alpha)} = \langle (u(i)\ u(j)) \rangle_C$$

Par suite, par conséquence du Lemme 4.24,

$$u(j) - u(i) < L_C$$

Finalement, on a

$$C_\alpha < \frac{L_C}{2}$$

□

Proposition 4.7. *Soit $u \in S^0(\tilde{C}_l)$ et $\alpha, \beta \in \Delta^{re}(\tilde{C}_l)$ tels que $u \to us_\alpha$, $u \to us_\beta$ et $us_\alpha \to us_\alpha s_\beta$ sont des couvertures fortes dans le 0-ordre de Bruhat. On suppose en plus que $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$. Alors, la conjecture 4.4 est vérifié pour $m = 2$.*

Démonstration. Pour tout $u_1, u_2 \in S^0(\tilde{C}_2)$ tels que $u_1 \to u_2$ est une couverture forte, on note par $M(u_1, u_2)$ l'ensemble de marquages associés à cette couverture. Pour montrer ce résultat, on peut remarquer qu'il suffit de montrer les deux égalités suivantes :

- $M(u, us_\alpha) = M(us_\beta, us_\beta s_\alpha)$
- $M(u, us_\beta) = M(us_\alpha, us_\alpha s_\beta)$

Ces deux égalités montrent que pour toute suite de marquages croissantes, en passant par us_α (resp. us_β) il en existe une qui est décroissante. Et vis versa. En effet, si $m \in M(u, us_\alpha)$ alors, par Définition,

$$\exists (i,j) \in \mathbb{Z}^2;\ s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_C \text{ et } m = u(j)$$

Or, puisque $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$, on a

$$us_\beta(j) = u(j) = m$$

Par suite,

$$m \in M(us_\beta, us_\beta s_\alpha)$$

Inversement, si $m \in M(us_\beta, us_\beta s_\alpha)$, alors,

$$\exists (i,j) \in \mathbb{Z}^2;\ s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_C \text{ et } m = us_\beta(j)$$

Or, $s_\beta(j) = j$ donc,

$$u(j) = m$$

Par suite,

$$m \in M(u, us_\alpha)$$

On a donc montré la première égalité. La deuxième est prouvé d'une manière similaire. □

Remarque 4.25. *Pour montrer la conjecture en degré 2, il faut encore la montrer dans le cas non-commutatif. Soit $u \in S^0(\tilde{C}_l)$, $\alpha, \beta \in \Delta^{re}(\tilde{C}_l)$ tels que $u \to us_\alpha$ et $us_\alpha \to us_\alpha s_\beta$ sont des couvertures fortes et que $s_\alpha s_\beta \neq s_\beta s_\alpha$. On note par C_α (resp. C_β) le centre de la couverture $u \to us_\alpha$ (resp. $us_\alpha \to us_\alpha s_\beta$). D'après la remarque 4.13, on sait que C_α (resp. C_β) est le centre de symétrie de l'ensemble $M(u, us_\alpha)$ (resp. $M(us_\alpha, us_\alpha s_\beta)$).*

1. *Si $C_\alpha = C_\beta$: Soit $m_1 \in M(u, us_\alpha)$ et $m_2 \in M(us_\alpha, us_\alpha s_\beta)$. On remarque qu'on a les deux implications suivantes :*

$$m_1 < m_2 \Rightarrow 2C_\alpha - m_1 > 2C_\beta - m_2$$
$$m_1 > m_2 \Rightarrow 2C_\alpha - m_1 < 2C_\beta - m_2$$

   On peut remarquer que, dans ce cas, ces deux implications montrent la conjecture pour $m = 2$. En effet, elles montrent que l'image d'une suite de marquages croissante par $C_\alpha (= C_\beta)$ est une suite de marquages décroissante et Vis Versa.

2. *Si $C_\alpha \neq C_\beta$: D'après la Proposition 4.6, on sait que*

$$0 < C_\alpha, C_\beta < \frac{L_C}{2}$$

   Alors,

$$|C_\beta - C_\alpha| < \frac{L_C}{2}$$

   Dans ce cas, on montre que même si les centres ne sont pas égaux, ils ne diffères pas trop non plus. Donc, même si on n'a pas réussi à montrer la conjecture pour $m = 2$, on peut quand même être convaincu qu'on est pas loin de la prouver.

Le but dans la suite c'est de montrer la Proposition 4.8 qui servira comme élément important pour une éventuelle preuve de la conjecture en question. Pour cette raison on utilisera la représentation du groupe $S(\tilde{C}_l)$ en tend que sous groupe de $S(\tilde{A}_{2l+1})$.

Définition 4.26. *Soit w un élément d'un group de Weyl quelconque. On dit qu'une réflection simple s est une décente à droite de w si*

$$\ell(ws) < \ell(w)$$

On note par $D_R(w)$ l'ensemble des décentes à droite de w.

Dans la suite on notera respectivement par $D_R^A(w)$ et $D_R^C(w)$ les ensembles de descentes à droite en type A et en type C.

Lemme 4.27. *[3, Proposition 8.3.2] Soit $v \in S(\tilde{A}_{2l+1})$. Alors,*

$$D_R^A(v) = \{s_i;\ v(i) > v(i+1)\}$$

Lemme 4.28. *[3, Proposition 8.3.6] Soit $u, v \in S(\tilde{A}_{2l+1})$. Alors, les Propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *$u \to v$.*
2. *Il existe des entiers i et j tels que*

$$i \not\equiv j \ mod\ 2l+1,\ u(i) < u(j),\ et\ v = u \cdot \langle (i\ j) \rangle_A$$

Lemme 4.29. *[16, Lemme 2.2] Soit $w \in S(\tilde{A}_{2l+1})$ et $i < j$ tels que $i \neq j \ mod\ 2l+2$. Alors, $w \to w\langle (i\ j) \rangle_A$ est une couverture forte si et seulement si,*

$$\forall k \in]i, j[;\ w(k) \notin [w(j), w(i)]$$

Lemme 4.30. *[3, Proposition 8.4.2] Soit $v \in S(\tilde{C}_l)$. Alors,*

$$D_R^C(v) = \{s_i;\ v(i) > v(i+1)\}$$

Lemme 4.31. *Soit $i < j$ tels que $\langle (i\ j) \rangle_C$ est une réflexion et $w \in W(\tilde{C}_l)$ alors,*

$$w \cdot \langle (i\ j) \rangle_C > w \Leftrightarrow w(i) < w(j)$$

Démonstration. 1. Si $w(i) < w(j)$: alors, d'après la preuve de 8.4.6 dans [3]

$$inv(w \cdot \langle (i\ j) \rangle_C) > inv(w)$$

2. $w(i) > w(j)$: alors,

$$w \cdot \langle (i\ j) \rangle_C(i) < w \cdot \langle (i\ j) \rangle_C(j)$$

donc,

$$\ell(w \cdot \langle (i\ j) \rangle_C \cdot \langle (i\ j) \rangle_C) > \ell(w \cdot \langle (i\ j) \rangle_C)$$

Finalement,

$$\ell(w) > \ell(w \cdot \langle (i\ j) \rangle_C)$$

□

Dans la Définition 4.32 et le Lemme 4.34 on notera les éléments de $S(\tilde{C}_l)$ par des lettres majuscules et celles de $S(\tilde{A}_{2l+1})$ par des lettres minuscules.

Définition 4.32. *On définit le morphisme de groupes φ de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\varphi : S(\tilde{C}_l) &\to S(\tilde{A}_{2l+1}) \\ S_k &\mapsto s_k s_{-k-1} \quad (\forall k \in \{1, \dots, l-1\}) \\ S_l &\mapsto s_{-l} s_l s_{-l} \\ S_0 &\mapsto s_0 s_{-1} s_0\end{aligned}$$

Si on regarde les groupes $S(\tilde{A}_{2l})$ et $S(\tilde{C}_l)$ comme sous-groupes de permutations de $\mathbb{Z}$, on remarque que φ est en effet une injection.

Lemme 4.33. *Soit $W \in W(\tilde{C}_l)$ et $S_{i_1} \cdots S_{i_k}$ une écriture réduite de W. Alors,*

$$\varphi(W) = \varphi(S_{i_1}) \cdots \varphi(S_{i_k}) \quad \textit{est une écriture réduite.}$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la longueur d'une écriture réduite. On note $W' = S_{i_1} \cdots S_{i_{k-1}}$. Par hypothèse de récurrence on sait que

$$\varphi(W') = \varphi(S_{i_1}) \cdots \varphi(S_{i_{k-1}}) \text{ est une écriture réduite.}$$

1. Si $i_k \neq 0, l$: Alors,
$$\varphi(W) = \varphi(S_{i_1}) \cdots \varphi(S_{i_{k-1}}) s_{i_k} s_{-i_k-1}$$
D'après le Lemme 4.30, on a
$$W'(i_k) < W'(i_k + 1)$$
Donc,
$$\varphi(W')(i_k) < \varphi(W')(i_k + 1)$$
D'après le Lemme 4.27, on a
$$W' S_{i_k} > w' \text{ et } W' S_{-i_k-1} > W'$$
Alors,
$$\varphi(W')(-i_k - 1) < \varphi(W')(-i_k)$$
Et puisque, $S_{i_k}(-i_k - 1) = -i_k - 1$ et $S_{i_k}(-i_k) = -i_k$, alors,
$$W' S_{i_k} S_{-i_k-1} > W' S_{i_k}$$

2. Si $i_k = 0$: Alors,
$$\varphi(W) = \varphi(W') s_0 s_{-1} s_0$$
D'après le Lemme 4.30, on a
$$W'(0) < W'(1)$$
Alors,
$$\varphi(W')(0) < \varphi(W')(1)$$
Par suite, d'après le Lemme 4.27,
$$w' s_0 > w'$$
En faisant le même type de raisonnement et en utilisant les Lemmes 4.30 et 4.27, on montre que
$$\varphi(W') s_0 s_{-1} s_0 > \varphi(W') s_0 s_{-1}$$

3. Si $i_k = l$: Dans ce cas on fait le même type de raisonnement que lorsque $i_k = 0$.

□

Lemme 4.34. *Soit α une racine courte et $i \leqslant 0 < j$ des entiers tels que $S_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_C$. Soit $U \in S(\tilde{C}_l)$ un élément Grassmannien tel que $U \to US_\alpha$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat. Alors,*

$$U(i) \cdot U(j) > 0$$

Démonstration. Tout d'abord on remarque qu'en faisant un petit calcul on peut montrer que

$$\varphi(\langle (i\ j) \rangle_C) = \langle (i\ j) \rangle_A \cdot \langle (-j\ \ -i) \rangle_A$$

Soit $S_{i_1} \cdots S_{i_{k+1}}$ une écriture réduite de $U \cdot \langle (i\ j) \rangle_C$. Alors, puisque $U \to U \cdot \langle (i\ j) \rangle_C$ est une couverture forte et en utilisant le Lemme d'échange, on trouve

$$U = S_{i_1} \cdots \hat{S}_{i_t} \cdots S_{i_{k+1}}$$

Donc,

$$S_{i_1} \cdots S_{i_{k+1}} = S_{i_1} \cdots \hat{S}_{i_t} \cdots S_{i_{k+1}} \cdot \langle (i\ j) \rangle_C$$

Alors,

$$\begin{aligned} \langle (i\ j) \rangle_C &= S_{i_{k+1}} \cdots \hat{S}_{i_t} \cdots S_{i_1} S_{i_1} \cdots S_{i_t} S_{i_{t+1}} \cdots S_{i_{k+1}} \\ &= S_{i_{k+1}} \cdots S_{i_t} \cdots S_{i_{k+1}} \end{aligned}$$

Puisque α est courte et $\alpha = S_{i_{k+1}} \cdots S_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t})$, alors

$$\alpha_{i_t} \text{ est une racine courte}$$

En d'autres termes,

$$i_t \neq 0, l$$

Donc,

$$\varphi(S_{i_t}) = s_{i_t} s_{-i_t - 1}$$

D'après , on sait que

$$\ell(\varphi(U)) = \ell(\varphi(U \cdot \langle (i\ j) \rangle_C)) - 2$$

Alors, en notant $u := \varphi(U)$, on obtient

$$u < u\langle (i\ j) \rangle_A \cdot \langle (-j\ \ -i) \rangle_A \ \text{ et } \ \ell(u \cdot \langle (i\ j) \rangle_A \cdot \langle (-j\ \ -i) \rangle_A) = \ell(u) + 2$$

D'autre part, puisque $U < U \cdot \langle (i\ j) \rangle_C$, en utilisant le Lemme 4.31, on obtient,

$$U(i) < U(j)$$

Or φ ne change pas l'action des éléments sur $\mathbb{Z}$, alors,

$$u(i) < u(j).$$

Donc, d'après le Lemme 4.27,

$$u < u \cdot \langle (i\ j) \rangle_A$$

Donc, en type A, $u \to u\langle (i\ j) \rangle_A$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat. Alors, en utilisant le Lemme 4.29 et puisque $0 \notin]i, j[$, on a

$$u(0) \in [u(i), u(j)]$$

Donc,

$$0 \notin [u(j), u(i)]$$

Finalement,

$$u(j) \cdot u(i) > 0$$

□

Proposition 4.8. *Soit $i \leqslant 0 < j$ et $\alpha \in \Delta_+^{re}(\tilde{C}_l)$ tels que $s_\alpha = \langle (i\ j) \rangle_C$. Soit u un élément Grassmannien tel que $u \to us_\alpha$ est une couverture forte dans le 0-ordre de Bruhat. Alors,*

$$u(i) \cdot u(j) > 0 \quad ou \quad 0 < u(j) = -u(i) < \frac{L_C}{2}$$

Démonstration. Soit u un élément Grassmannien tel que $u \to us_\alpha$ est une couverture forte alors, d'après le Lemme 4.23, on a

$$u(\alpha) < \delta$$

Alors,

$$0 \leqslant \langle \varpi_0^\vee, u(\alpha) \rangle \leqslant 1$$

On a donc deux cas possibles :

1. Si $\langle \varpi_0^\vee, u(\alpha) \rangle = 0$: Dans ce cas, on a

   $$\langle \varpi_0, u(\alpha)^\vee \rangle = 0$$

   D'après le Corollaire 4.5, il n'existe pas d'entiers i' et j' tels que $i' \leqslant 0 \leqslant j'$ et $s_{u(\alpha)} = \langle (i'\ j') \rangle$. Par suite,

   $$u(i) \cdot u(j) > 0$$

2. Si $\langle \varpi_0^\vee, u(\alpha) \rangle = 1$: Dans ce cas,

   $$\delta - u(\alpha) \in \mathring{\Delta}_+$$

   D'après le Lemme 5.32,

   $$\langle \varpi_0, u(\alpha)^\vee \rangle = \begin{cases} 2 & \text{si } \delta - u(\alpha) \text{ courte} \\ 1 & \text{si } \delta - u(\alpha) \text{ longue} \end{cases}$$

   (a) Si $\langle \varpi_0, u(\alpha)^\vee \rangle = 2$: ($\delta - u(\alpha)$ courte) On remarque tout d'abord qu'on a les équivalence suivantes :

   $$[\delta - u(\alpha) \text{ courte}] \Leftrightarrow [u(\delta - \alpha) \text{ courte}] \Leftrightarrow [\delta - \alpha \text{ courte}] \Leftrightarrow [\alpha \text{ courte}]$$

   Alors, puisque $\delta - u(\alpha)$ est courte, on a

   $$\alpha \text{ courte}$$

   Par suite, en utilisant le Lemme 4.34, on en déduit que

   $$u(i) \cdot u(j) > 0$$

(b) Si $\langle \varpi_0, u(\alpha)^\vee \rangle = 1$: D'après la Proposition 4.5, on sait que (i, j) est l'unique couple tels que $i \leqslant 0 < j$ et $s_{u(\alpha)} = \langle (i\ j) \rangle$. On a deux cas possibles :

$$u(i) \cdot u(j) > 0 \text{ ou } u(i) \cdot u(j) < 0$$

Dans le deuxième cas, on remarque qu'on a nécessairement $u(i) = -u(j)$. En effet, dans le cas contraire on aura deux couple $(u(i), u(j))$ et $(-u(j), -u(i))$ qui enjambent 0 et donc $\langle \varpi_0, u(\alpha)^\vee \rangle = 2$ (Contradiction).
Or, d'après le Lemme 6.1,

$$0 < u(j) - u(i) < L_C$$

Donc,

$$0 < 2u(j) < L_C$$

Finalement,

$$0 < u(j) < \frac{L_C}{2}$$

□

4.5 Produit par $\xi^{s_2 s_1 s_0}$ dans $\tilde{C}_2$

4.5.1 Comment obtenir explicitement les marquages

Pour déterminer les marquages dans la figure 4.1, ci-dessous, on procède comme suit : Soit $u <_k v$ une relation de couverture faible, cela signifie que

$$\ell(v) = \ell(u) + 1 \text{ et } v = s_k u.$$

Alors,

$$\begin{aligned} v &= s_k u \\ &= u u^{-1} s_k u \\ &= \begin{cases} u(\langle (u^{-1}(k)\ u^{-1}(k+1)) \rangle) & \text{si } k \neq 0 \\ u(\langle (u^{-1}(-1)\ u^{-1}(1)) \rangle) & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $\ell(v) > \ell(u)$, on a,

$$\begin{cases} u^{-1}(k) < u^{-1}(k+1) & \text{si } k \neq 0 \\ u^{-1}(-1) < u^{-1}(1) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

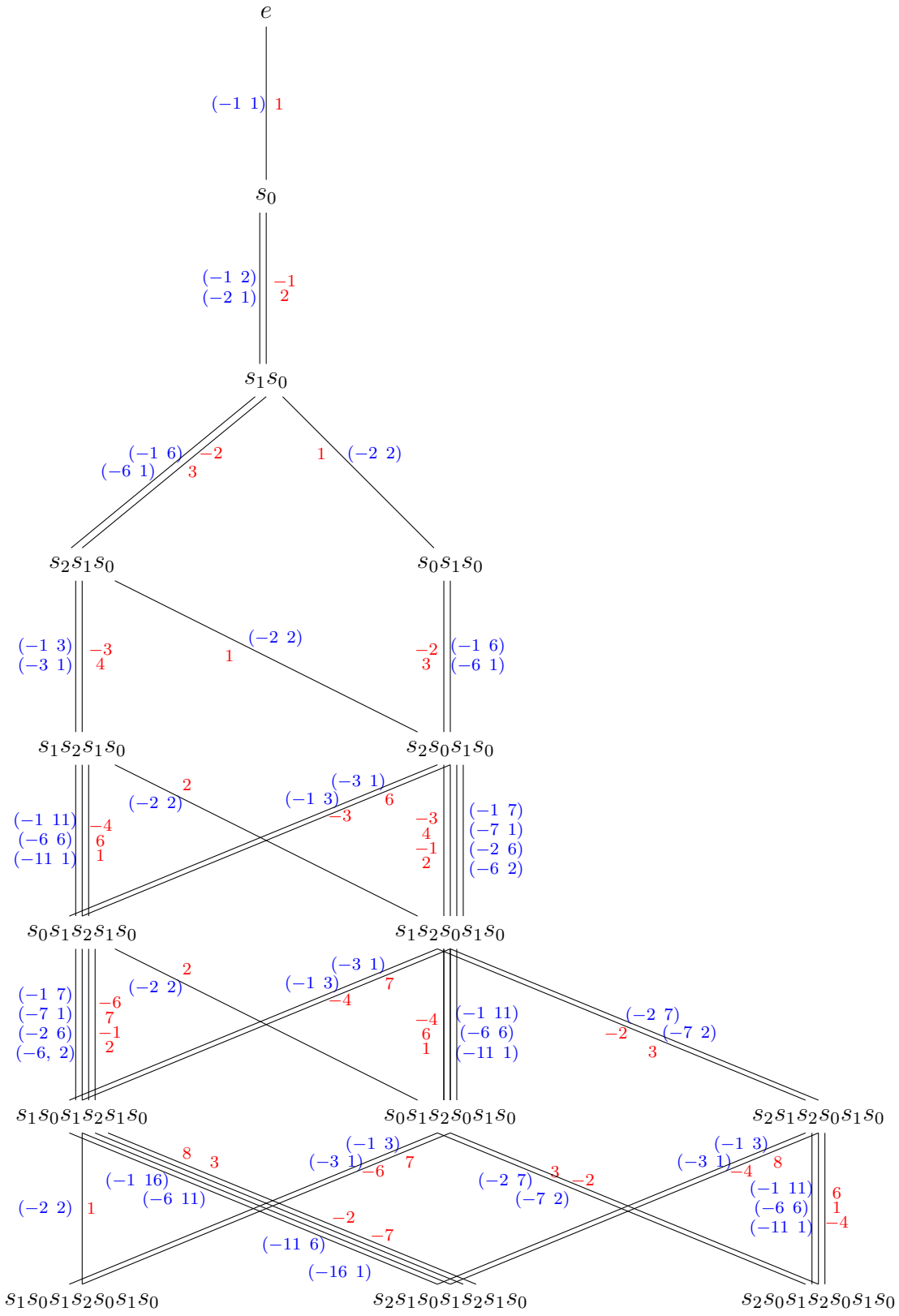
On cherche tous les entiers i, j tels que,

$$i \leqslant 0 < j \text{ et } \langle (i\ j) \rangle = \begin{cases} \langle (u^{-1}(k)\ \ u^{-1}(k+1)) \rangle & \text{si } k \neq 0 \\ \langle (u^{-1}(-1)\ \ u^{-1}(1)) \rangle & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Enfin les marquages seront tous les entiers $v(i)$.

Marquages associées à des couvertures fortes dans $\tilde{C}_2$

FIGURE 4.1 – Dans la figure qui suit, les marquages seront en rouge et en bleu on indique les réflexions s_β à droite ($v = us_\beta$)



4.5.2 Programmation du calcul de Schubert et vérification de cas particuliers à l'aide de l'ordinateur

En se basant sur [2, Lemme 5.3] par Sara Billey, plus précisément, sur un résultat qui porte sur le calcul (par récurrence) des constantes de structure de l'algèbre cohomologique de la grassmannienne affine, on a pu programmer (cf. Annexe A) sur le logiciel "Sage" le produit des éléments de la base.

Remarque 4.35. *Voici quelques exemples de produits :*

- $\xi^{s_2s_1s_0} \cdot \xi^{s_0} = 2\xi^{s_1s_2s_1s_0} + 1\xi^{s_2s_0s_1s_0}$
- $\xi^{s_2s_1s_0} \cdot \xi^{s_1s_0} = 4\xi^{s_0s_1s_2s_1s_0} + 3\xi^{s_1s_2s_0s_1s_0}$
- $\xi^{s_2s_1s_0} \cdot \xi^{s_1s_0s_1} = 6\xi^{s_1s_0s_1s_2s_1s_0} + 5\xi^{s_0s_1s_2s_0s_1s_0} + 2\xi^{s_2s_1s_2s_0s_1s_0}$
- $\xi^{s_2s_1s_0} \cdot \xi^{s_2s_1s_0} = 8\xi^{s_1s_0s_1s_2s_1s_0} + 4\xi^{s_0s_1s_2s_0s_1s_0} + 2\xi^{s_2s_1s_2s_0s_1s_0}$

4.5.3 Retrouver les produits en utilisant la conjecture 4.4

Dans cette partie, on va expliquer comment retrouver les produits cités dans la remarque 4.35, en utilisant la figure 4.1, qu'on a construit en se basant sur la conjecture 4.4. En effet, on explicitera au lecteur le calcul du deuxième produit (i.e. $\xi^{s_2s_1s_0} \cdot \xi^{s_1s_0}$). Ici il s'agît de multiplier par $\xi^{c_{0,2}} (= \xi^{s_1s_0})$, pour cette raison notre point de départ sur le graphe sera l'élément $s_2s_1s_0$. Et puisque $\ell(s_1s_0) = 2$, on va considérer tout les chemins de longueur 2, débutant par $s_2s_1s_0$ et formant des suites de marquages croissantes. On trouve :

1. Entre $s_2s_1s_0$ et $s_0s_1s_2s_1s_0$ on a les quatre suites suivantes :
   - En passant par $s_1s_2s_1s_0$:
     $$(-3,1),\ (-3,6) \text{ et } (4,6)$$
   - En passant par $s_2s_0s_1s_0$:
     $$(1,6)$$

   C'est à dire que le coefficient de $s_0s_1s_2s_1s_0$ est égale à 4.

2. Entre $s_2s_1s_0$ et $s_1s_2s_0s_1s_0$ on a les trois suites suivantes :
   - En passant par $s_1s_2s_1s_0$:
     $$(-3,2)$$
   - En passant par $s_2s_0s_1s_0$:
     $$(1,4) \text{ et } (1,2)$$

   C'est à dire que le coefficient de $s_1s_2s_0s_1s_0$ est égale à 3.

Finalement on retrouve bien,

$$\xi^{s_2s_1s_0} \cdot \xi^{s_1s_0} = 4\xi^{s_0s_1s_2s_1s_0} + 3\xi^{s_1s_2s_0s_1s_0}$$

On pourra, exceptionnellement dans ce cas, voir ce produit comme étant $\xi^{s_1s_0} \cdot \xi^{c_{0,3}}$ (puisque $c_{0,3} = s_2s_1s_0$). Dans ce cas notre point de départ sera l'élément s_1s_0, et on considérera des chemins de longueur $\ell(c_{0,3})(= 3)$, qui débuterons par s_1s_0 et qui formeront des suites de marquages croissantes. On trouve :

1. Entre s_1s_0 et $s_0s_1s_2s_1s_0$ on a les quatre suites suivantes :
   - En passant par $s_2s_1s_0$ et $s_1s_2s_1s_0$:
   $$(-2, 4, 6), \text{ et } (3, 4, 6)$$
   - En passant par $s_2s_1s_0$ et $s_2s_0s_1s_0$:
   $$(-2, 1, 6)$$
   - En passant par $s_0s_1s_0$ et $s_2s_0s_1s_0$:
   $$(1, 3, 6)$$

   C'est à dire que le coefficient de $s_0s_1s_2s_1s_0$ est égale à 4.
2. Entre s_1s_0 et $s_1s_2s_0s_1s_0$ on a les trois suites suivantes :
   - En passant par $s_2s_1s_0$ et $s_2s_0s_1s_0$:
   $$(-2, 1, 2) \text{ et } (-2, 1, 4)$$
   - En passant par $s_0s_1s_0$ et $s_2s_0s_1s_0$) :
   $$(1, 3, 4)$$

   C'est à dire que le coefficient de $s_1s_2s_0s_1s_0$ est égale à 3.

De même, on retrouve le résultat.

Chapitre 5

Anneau Nil-Hecke et algèbres de Hopf

5.1 Algèbres de Hopf

Dans cette partie on suppose que k est un anneau et on rappelle la notion d'algèbre de Hopf sur k.

Définition 5.1. *Une algèbre unitaire sur k est un k-module équipé avec les deux applications linéaires suivantes :*

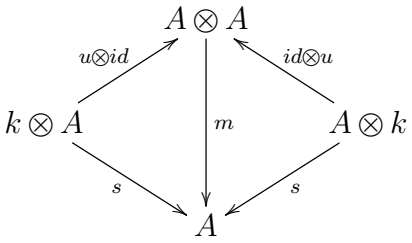
$$m : A \otimes_k A \to A \quad et \quad u : k \to A$$

telles que :

1. *Le diagramme suivant commute :(Associativité)*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes id} & A \otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle id \otimes m} & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

2. *Le diagramme suivant commute :(Elément neutre)*



Définition 5.2. *Une cogèbre sur k est un k-module C équipé avec les deux applications linéaires suivantes :*

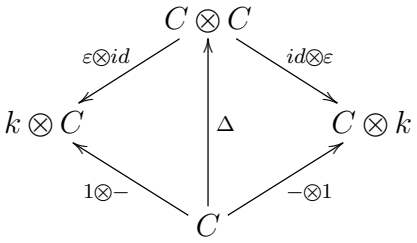
$$\Delta : C \to C \otimes_k C \ (co\text{-}multiplication) \ et \ \ \varepsilon : C \to k \ (co\text{-}unité)$$

telles que :

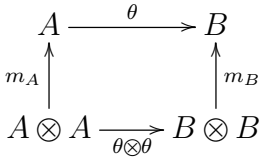
1. *Le diagramme suivant commute :(Co-associativité)*

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \\ \uparrow{\scriptstyle id \otimes \Delta} & & \uparrow{\scriptstyle \Delta} \\ C \otimes C & \xleftarrow[\Delta]{} & C \end{array}$$

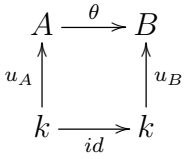
2. Le diagramme suivant commute :(Co-unité)



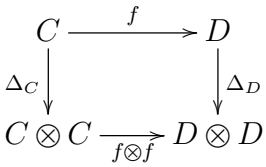
Définition 5.3. *1. Soit A et B des algèbres sur k. Soit m_A (resp. m_B) le produit associé à A (resp. B) et u_A (resp. u_B) l'unité associé à A (resp. B). On dit qu'une application linéaire $\theta : A \to B$ est un morphisme d'algèbres sur k si les deux diagrammes suivantes sont commutatifs :*



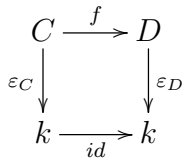
et



2. Soit C et D des cogèbres sur k. Soit Δ_C (resp. Δ_D) le co-produit associé à C (resp. D) et ε_C (resp. ε_D) le co-unité associé à C (resp. D). On dit que une application linéaire $f : C \to D$ est un morphisme de cogèbres sur k si les deux diagrammes suivantes sont commutatifs :



et

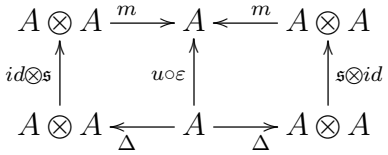


Définition 5.4. *Une bigèbre A est un k-espace vectoriel $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ où (A, m, u) est une algèbre et (A, Δ, ε) est une cogèbre telles que l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

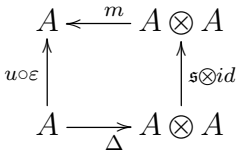
- *Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.*
- *m et u sont des morphismes de cogèbres.*

Définition 5.5. *Un morphisme de bigèbres est une application linéaire qui est en même temps un morphisme d'algèbres et de cogèbres.*

Définition 5.6. *Soit $A = (A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre. On dit qu'un endomorphisme $\mathfrak{s}$ de A est un antipode de A si le diagramme suivant commute :*



On remarque que si A est commutative, le digramme si-dessus sera équivalent au suivant :



Définition 5.7. *Soit A une cogèbre sur k. On définit l'application Flip sur $A \otimes A$ par :*

$$\begin{aligned} \iota : & A \otimes A \to A \otimes A \\ & x \otimes y \to y \otimes x \end{aligned}$$

Définition 5.8. *Soit A une algèbre sur k. L'algèbre opposée de A, notée A^{op}, possède la même structure d'espace vectoriel que A mais équipée par le produit opposé :*

$$\forall a, b \in A;\ a \cdot b := ba$$

De même,si on note par ι l'application Flip d'une cogèbre C, la cogèbre opposée de C, notée C^{cop}, possède la même structure d'espace vectoriel que C, équipée avec :

$$\Delta_{C^{\text{cop}}} := \iota \circ \Delta_C$$

En plus C est appelée co-commutative si $C^{\text{cop}} = C$, c'est à dire, si

$$\iota \circ \Delta_C = \Delta_C$$

Définition 5.9. *1. Une algèbre de Hopf est une bigèbre avec un antipode.*

2. Les morphismes d'algèbres de Hopf sont les morphismes de bigèbres que préservent l'antipode.

Exemple 5.10. *Soit G un groupe algébrique sur $\mathbf{k}$ alors $\mathbb{C}[G]$ est une algèbre de Hopf (cf. Humphreys [11])*

Démonstration. En effet, on note par $m : \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ la multiplication. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} u : & \mathbf{k} \to A \qquad \text{(unité)} \\ & k \mapsto (g \mapsto k) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon : & \mathbb{C}[G] \to \mathbf{k} \qquad \text{(co-unité)} \\ & f \mapsto f(e) \end{aligned}$$

On note par μ la multiplication et ι l'inverse du groupe G. Ces morphismes en induits des autres sur A :

$$\begin{aligned} \mu^* : & \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \quad \text{(co-produit)} \\ & f \mapsto \sum g_i \otimes h_i \qquad (\text{si } f(xy) = \sum g_i(x) h_i(y)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \iota^* : & \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \quad \text{(antipode)} \\ & f \mapsto \iota^* f \qquad (\text{tel que } \iota^* f(x) = f(x^{-1}) \end{aligned}$$

Alors, $(\mathbb{C}[G], m, u, \mu^*, \varepsilon, \iota^*)$ est une algèbre de Hopf. □

5.2 L'anneau Nil-Hecke de Kostant et Kumar

Dans ce qui suit, soit G un groupe algébrique complexe, simple et simplement connexe. Soit $B \subset G$ un sous groupe de Borel et W le groupe de Weyl associé à G. On note par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie associé à G, $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Cartan associé à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}^*$ son dual. On définit aussi l'ensemble de racines simples $\{\alpha_i,\ i \in I\}$ dans $\mathfrak{h}^*$ et l'ensemble de coracines simples $\{\alpha_i^\vee,\ i \in I\}$ dans $\mathfrak{h}$. En plus, on note par $Q := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$, le réseau de racines simples sur $\mathbb{Z}$ et par $Q^\vee := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$, le réseau de coracines simples sur $\mathbb{Z}$. Enfin on note par $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ l'algèbre de Kac Moody affine associée à $\mathfrak{g}$ (cf. 1.4.1) , $\mathfrak{h}_{\text{aff}}$ son algèbre de Cartan et $\mathfrak{h}_{\text{aff}}$ son dual. De même on défint le réseau de racines et coracines simples affine sur $\mathbb{Z}$ respectivement, par $Q_{\text{aff}} := \bigoplus_{i\in I_{\text{aff}}} \mathbb{Z}\alpha_i$ et $Q^\vee_{\text{aff}} := \bigoplus_{i\in I_{\text{aff}}} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ où $I_{\text{aff}} = I \cup \{0\}$.
Dans cette partie, on rappelle la définition de l'anneau Nil-Hecke de Kostant et Kumar : les résultats de cette section sont contenus dans [13].

5.2.1 L'anneau Nil-Hecke $\mathbb{A}_{\text{aff}}$

On note par $S := S(\mathfrak{h}^*_{\text{aff}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{h}^*_{\text{aff}}$ et par $\mathcal{Q} := Q(\mathfrak{h}^*_{\text{aff}})$ son corps quotient. Dans ce chapitre on va définir l'anneau Nil-Hecke, dans [13], Kostant et Kumar le définissent sur le corps $\mathcal{Q}$, mais pour ce qui suit, c'est plus pratique de le définir sur S.
Le groupe $W_{\text{aff}} := W \ltimes Q^\vee$ (cf. Définition 1.66) agit par automorphismes sur le corps $\mathcal{Q}$.

Définition 5.11. *On définit Q_W comme le $\mathcal{Q}$-module à droite de base $\{\delta_w\}_{w\in W_{\text{aff}}}$. On définit S_W de la même manière que Q_W en remplaçant $\mathcal{Q}$ par S.*

Définition 5.12. *Q_W admet une structure de $\mathbb{C}$-algèbres donnée par :*

$$\forall v, w \in W_{\text{aff}}\ \forall q_v, q_w \in \mathcal{Q},\quad (q_v\delta_v)(q_w\delta_w) = q_v v(q_w)\delta_{vw}$$

En plus, l'anneau Q_W admet aussi un anti-automorphisme involutif t définit de la manière suivante :

$$\forall w \in W_{\text{aff}}\ \forall q \in \mathcal{Q},\quad (q\delta_w)^t = \delta_{w^{-1}} q = (w^{-1}q)\delta_{w^{-1}}$$

Dans la suite, pour $w = e$ (l'élément neutre), on note $\delta_e = 1$.

Définition 5.13. *Pour tout $i \in \{0, \dots, l\}$ on définit les élements A_i de la manière suivante :*

$$A_i = \frac{1}{\alpha_i}(\delta_{r_i} - 1)$$

Notation 5.14. *On note $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\varpi_i$ le réseau de poids fondamentaux et $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\varpi_i^\vee$ celui des co-poids fondamentaux.*

Propriété 5.1. *Pour tout $i, j \in \{0, \dots, l\}$, et $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$ on a les relations suivantes,*

$$\begin{aligned} A_i\lambda &= (r_i \cdot \lambda)A_i - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \cdot 1 \\ A_iA_i &= 0, \\ [\underbrace{r_ir_jr_i\cdots}_{m\ facteurs} = \underbrace{r_jr_ir_j\cdots}_{m\ facteurs} &\Rightarrow \underbrace{A_iA_jA_i\cdots}_{m\ facteurs} = \underbrace{A_jA_iA_j\cdots}_{m\ facteurs}] \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $i, j \in \{0, \dots, l\}$, et $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$. Alors,

1.

$$\begin{aligned} A_i \cdot \lambda - (r_i \cdot \lambda)A_i &= \frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1) \cdot \lambda - (\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i)\frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1) \\ &= \frac{1}{\alpha_i}[r_i(\lambda)\delta_i - \lambda \cdot 1] - [\frac{\lambda}{\alpha_i}\delta_i - \frac{\lambda}{\alpha_i} - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \delta_i + \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \cdot 1] \\ &= \frac{1}{\alpha_i}(-\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \cdot 1) \\ &= -\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \cdot 1 \end{aligned}$$

Alors,

$$A_i \lambda = (r_i \cdot \lambda)A_i - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \cdot 1$$

2.

$$\begin{aligned} A_i \cdot A_i &= \frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1) \cdot \frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1) \\ &= \frac{1}{\alpha_i}[\delta_i \cdot (\frac{1}{\alpha_i}\delta_i) - \delta_i \cdot (\frac{1}{\alpha_i} \cdot 1) - \frac{1}{\alpha_i}\delta_i + \frac{1}{\alpha_i} \cdot 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Une conséquence de la propriété 5.1 est :

Proposition 5.2. *Soit $w \in W$ et $1 \leqslant i_1, \dots i_k \leqslant l$ tels que $r_{i_1} \cdots r_{i_k}$ est une écriture réduite de w. Alors l'élément $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ dans Q_W ne dépend pas du choix de l'expression réduite de w. On note $A_w := A_{i_1} \cdots A_{i_k}$.*

Proposition 5.3. *1. Soit $u, v \in W$ alors,*

$$A_v A_w = \begin{cases} A_{vw} & \text{si } \ell(vw) = \ell(v) + \ell(w) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $v \in W$ et $\chi \in \mathfrak{h}^*$ alors, (voir Notation 1.67 pour la définition de $w \to^\beta v$)

$$\chi A_v = A_v(v^{-1}\chi) - \sum_{w \to^\beta v} \langle \chi, \beta^\vee \rangle A_w$$

Remarque 5.15. *On peut remarquer que $\mathcal{Q}$ admet une structure de Q_W-module à gauche définie explicitement par :*

$$\forall w \in W_{\text{aff}} \ \forall q, q' \in \mathcal{Q}, \ (q\delta_w) \cdot q' = qw(q')$$

Définition 5.16. *On définit l'anneau Nil Hecke Affine par,*

$$\mathbb{A}_{\text{aff}} := \{x \in Q_W; \ x \cdot S \subset S\}$$

Remarque 5.17. *1. On remarque que $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ est un sous-anneau de Q_W contenant S_W. En appliquant l'involution t sur les éléments de $\mathbb{A}_{\text{aff}}$, on obtient un autre sous-anneau $\mathbb{A}_{\text{aff}}^t$ de Q_W.*

2. *En fait,* $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ *n'est pas le plein anneau Nil-hecke définit par Kostant et Kumar dans [13], parce qu'on prend* $\lambda \in \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\varpi_i$ *et non dans* $\bigoplus_{i\in I_{\text{aff}}} \mathbb{Z}\varpi_i$.

Proposition 5.4. *1.* $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ *est un* S*-module libre à droite (respectivement à gauche). En plus, les éléments* $\{A_w\}_{w\in W_{\text{aff}}}$ *forment une base de* $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ *sur* S *à droite (respectivement à gauche).*

2. En plus on a $\mathbb{A}_{\text{aff}} \cap \mathbb{A}_{\text{aff}}^t = S_W$.

Remarque 5.18. *On remarque que* $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ *est un anneau non commutatif de type fini sur* $\mathbb{C}$*, puisqu'il est engendré par les* $\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant l}$ *et* S.

5.2.2 Structure de Co-produit sur $\mathbb{A}_{\text{aff}}$

Définition 5.19. *On note par* $Q_W \otimes_S Q_W$ *le produit tensoriel où* Q_W *est considéré comme un* S*-module à gauche (cf. Définition 5.11). On définit l'application diagonale* $\Delta : Q_W \to Q_W \otimes_S Q_W$ *par* S*-linéarité à gauche et par la formule suivante :*

$$\forall w \in W_{\text{aff}},\ \Delta(\delta_w) = \delta_w \otimes \delta_w$$

Remarque 5.20. *On remarque que le co-produit* Δ *est co-associatif, co-commutatif et possède une co-unitée* $\varepsilon : Q_W \to S$ *définie par :*

$$\forall p \in S, \forall w \in W_{\text{aff}};\ \varepsilon(p\delta_w) = p$$

Démonstration. Pour montrer que Δ est co-associative il suffit de montrer que

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

En effet, soit $w \in W$ alors,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes Id) \circ \Delta(\delta_w) &= \Delta \otimes Id(\delta_w \otimes \delta_w)\\ &= \Delta(\delta_w) \otimes \delta_w\\ &= (\delta_w \otimes \delta_w) \otimes \delta_w\\ &= \delta_w \otimes \delta_w \otimes \delta_w\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(Id \otimes \Delta) \circ \Delta(\delta_w) &= Id \otimes \Delta(\delta_w \otimes \delta_w)\\ &= \delta_w \otimes (\delta_w \otimes \delta_w)\\ &= \delta_w \otimes \delta_w \otimes \delta_w\end{aligned}$$

Pour montrer que Δ est co-commutative, on pose ι l'application Flip définie sur $Q_W \otimes Q_W$ (cf. Définition 5.7). On veut montrer que

$$\iota \circ \Delta = \Delta$$

En effet, soit $w \in W$ alors,

$$\begin{aligned}\iota \circ \Delta(\delta_w) &= \iota(\delta_w \otimes \delta_w)\\ &= \delta_w \otimes \delta_w\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\Delta(\delta_w) = \delta_w \otimes \delta_w$$

Par suite Δ est bien co-associative et co-commutative. □

Lemme 5.21. *Pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$ on a,*

$$\Delta(A_i) = A_i \otimes 1 + 1 \otimes A_i + \alpha_i A_i \otimes A_i$$

Démonstration. D'une part, on a

$$\begin{aligned}\Delta(A_i) &= \Delta(\frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1)) \\ &= \Delta(\frac{1}{\alpha_i}\delta_i - \frac{1}{\alpha_i}1) \\ &= \Delta(\frac{1}{\alpha_i}\delta_i) - \Delta(\frac{1}{\alpha_i}1) \\ &= \frac{1}{\alpha_i}\delta_i \otimes \delta_i - \frac{1}{\alpha_i}1 \otimes 1\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}&A_i \otimes 1 + \delta_e \otimes A_i + \alpha_i(A_i \otimes A_i) \\ &= \frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1) \otimes 1 + 1 \otimes \frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1) + \alpha_i(\frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1)) \otimes (\frac{1}{\alpha_i}(\delta_i - 1)) \\ &= \frac{1}{\alpha_i}\delta_i \otimes 1 - \frac{1}{\alpha_i}1 \otimes 1 + \frac{1}{\alpha_i}1 \otimes \delta_i - \frac{1}{\alpha_i}1 \otimes 1 + \frac{1}{\alpha_i}\delta_i \otimes \delta_i - \frac{1}{\alpha_i}\delta_i \otimes 1 - \frac{1}{\alpha_i}1 \otimes \delta_i + \frac{1}{\alpha_i}1 \otimes 1 \\ &= \frac{1}{\alpha_i}\delta_i \otimes \delta_i - \frac{1}{\alpha_i}1 \otimes 1\end{aligned}$$

Par suite,

$$\Delta(A_i) = A_i \otimes 1 + 1 \otimes A_i + \alpha_i A_i \otimes A_i$$

□

Remarque 5.22. *Le Lemme 5.21 donne une structure de cogèbre dans $\mathbb{A}_{\text{aff}}$. Cependant, ce n'est pas une bigèbre pour la raison suivante :*

$$\begin{aligned}\Delta(A_i)^2 &= (A_i \otimes 1 + 1 \otimes A_i + \alpha_i A_i \otimes A_i)(A_i \otimes 1 + 1 \otimes A_i + \alpha_i A_i \otimes A_i) \\ &= A_i \otimes A_i + A_i \otimes A_i \\ &= 2A_i \otimes A_i\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\Delta(A_i^2) = \Delta(0) = 0$$

Proposition 5.5. *Soit $w \in W_{\text{aff}}$. Alors il existe des polynômes homogènes $\{c_{u,v}^w\}_{u,v \in W_{\text{aff}}} \in S$ tels que*

$$\Delta(A_w) = \sum_{u,v \leqslant w} c_{u,v}^w A_u \otimes A_v$$

$\mathbb{A}_{\text{aff}}$ est alors une sous-cogèbre de Q_W.

5.3 Modèle de l'homologie de la Grassmannienne affine

Kostant et Kumar dans [13] ont étudié la topologie des espaces homogènes associés à un groupe de Kac-Moody arbitraire et en particulier, ils ont calculé les constantes de structure de

la cohomologie de la Grassmannienne affine $H^*(\mathcal{G}r_G)$ dans la base de Schubert, en utilisant la construction algébrique de l'anneau Nil-Hecke. La connexion entre la topologie et la combinatoire est explicitée par l'étude de trois sous-algèbres de l'anneau Nil-Hecke.
La première sous-algèbre, "algèbre de Nil-Coxeter", notée $\mathbb{A}_0$, qui est l'algèbre engendré par les opérateurs de différence divisée $\{A_i\}_{i\in I_{\text{aff}}}$. La deuxième sous-algèbre appelée "Sous-algèbre de Peterson" et notée $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$ est l'algèbre centralisateur de S dans $\mathbb{A}_{\text{aff}}$. Peterson [20] à construit un isomorphisme j entre l'homologie T-équivariante $H_T(\mathcal{G}r_G)$ de la grassmannienne affine, et $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$. La troisième algèbre $\mathbb{B}'$ est une sous-algèbre de $\mathbb{A}_0$ appelée "Sous-algèbre de Fomin-Stanley". Dans [15], Lam à montrer que $\mathbb{B}'$ est un modèle de l'homologie $H_*(\mathcal{G}r_G)$, plus précisément il construit un isomorphisme d'algèbre de Hopf entre $H_*(\mathcal{G}r_G)$ et $\mathbb{B}'$.
Les résultats de cette section sont essentiellement contenus dans [15], mais nous proposons une justification plus détaillée de certains de ces résultats.

5.3.1 Sous-algèbre de Peterson $Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$

Kumar, dans son livre [14], étudie l'homologie et la cohomologie de la grassmannienne affine (définit comme quotient du groupe de Kac-Moody, notée $\mathcal{G}$, associé à G par le sous groupe parabolique $\mathcal{P}$). Soit $w \in W_{\text{aff}}$, Kumar note par ι_w l'application de pt dans $\mathcal{G}/\mathcal{P}$ donnée par $\iota_w(pt) = w\mathcal{P}$ (l'inclusion d'un point T-invariant). Les $\{\iota_w\}_{w\in W_{\text{aff}}}$ induisent des applications en cohomologie T-équivariante notées $\psi_w := \iota_w^* : H^T(\mathcal{G}/\mathcal{P}) \to H^T(pt)$. On sait que $H_T(\mathcal{G}r_G)$ est engendré sur $\mathcal{Q}$ par les classes $\{\psi_t;\ t = t_\lambda \in Q^\vee \subset W_{\text{aff}}\}$.

Définition 5.23. *On définit l'ensemble W_{aff}^- comme le sous ensemble du groupe de Weyl affine W_{aff} des éléments de longueur minimale dans le quotient W_{aff}/W. Pour tout $x \in W_{\text{aff}}^-$ l'élément A_x est appelé terme Grassmannien.*

Définition 5.24. *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}$. On dit que λ est antidominant si :*

$$\forall i \in I, \langle \lambda, \alpha_i \rangle \leqslant 0$$

On note par Q^- l'ensemble des éléments antidominants.

Remarque 5.25. *(Conséquence de la décomposition de Bruhat)*
$H_T(\mathcal{G}r_G)$ est un $S(= H^T(pt))$-module libre avec la base donnée par les classes de Schubert T-equivariant :

$$\{\xi_x;\ x \in W_{\text{aff}}^-\} \quad (\textit{structure donnée par le cap produit})$$

Définition 5.26. *[18] On définit l'application j de la manière suivante : $\forall t \in Q^\vee$*

$$\begin{aligned} j : H_T(\mathcal{G}r_G) &\to \mathbb{A}_{\text{aff}} \\ \psi_t &\mapsto \delta_t \end{aligned}$$

Et on l'étend par linéarité sur $\mathcal{Q}$.

Définition 5.27. *On définit l'action de $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ sur $H_T(\mathcal{G}r_G)$ par,*

$$\forall z \in W_{\text{aff}}^-, \forall y \in W_{\text{aff}};\quad A_y \cdot \xi_z = \begin{cases} \xi_{yz} & \textit{si } \ell(yz) = \ell(y) + \ell(z) \textit{ et } yz \in W_{\text{aff}}^- \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

et $S \subset \mathbb{A}_{\text{aff}}$ agit via la structure de S-module de $H_T(\mathcal{G}r_G)$.

Notation 5.28. *On note* $J := \sum_{\substack{w\in W\\ w\neq id}} \mathbb{A}_{\text{aff}} A_w$ *et* $Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$ *le centralisateur de* S *dans* $\mathbb{A}_{\text{aff}}$.

On note par w_0 l'élément dans W de plus grande longueur. Cet élément agit sur les racines simples par permutation et en les multipliant par -1. On note $\mathfrak{c}$, l'automorphisme du diagramme de Dynkin tel que

$$\forall i = 1, \dots, l;\ w_0(\alpha_i) = -\alpha_{\mathfrak{c}(i)}$$

On peut l'étendre, par linéarité sur $Q^\vee$. Cet automorphisme induit l'application $\mathbb{Z}$-linéaire suivante : Pour tout $i = 1, \dots, l$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_* :& \mathbb{A}_{\text{aff}} \to \mathbb{A}_{\text{aff}} \\ & A_i \mapsto A_{\mathfrak{c}(i)} \\ & \alpha_i \mapsto \alpha_{\mathfrak{c}(i)} \\ & \alpha_0 \mapsto \alpha_0 \end{aligned}$$

On note aussi $c_{w_0} : \mathbb{A}_{\text{aff}} \to \mathbb{A}_{\text{aff}}$ la conjugaison par w_0.

Définition 5.29. *On définit l'application* $\mathcal{Q}$*-linéaire* $\mathfrak{s}$ *telle que :*

$$\forall \lambda^\vee \in Q^\vee,\ \mathfrak{s}(\delta_{t_{\lambda^\vee}}) = \delta_{t_{\lambda^\vee}^{-1}}$$

Proposition 5.6. *Une telle application* $\mathfrak{s}$ *existe et elle est l'unique antipode de* $Z_{\mathbb{A}}(S)$. *En plus,*

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{c}_* \circ c_{w_0}$$

Démonstration. Unicité : Pour montrer l'unicité, il suffit de prouver qu'un antipode $\mathfrak{a}$ sur $Z_{\mathbb{A}}(S)$ vérifie les mêmes propriétés que $\mathfrak{s}$. En d'autres termes on va montrer que

$$\forall z \in Z_{\mathbb{A}}(S),\ \mathfrak{a}(z) = \mathfrak{s}(z)$$

Par Définition d'un antipode, on a le digramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} Z_{\mathbb{A}}(S) & \xleftarrow{m} & Z_{\mathbb{A}}(S) \otimes Z_{\mathbb{A}}(S) \\ {\scriptstyle u\circ\varepsilon}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathfrak{a}\otimes id} \\ Z_{\mathbb{A}}(S) & \xrightarrow[\Delta]{} & Z_{\mathbb{A}}(S) \otimes Z_{\mathbb{A}}(S) \end{array}$$

En particulier, pour tout $\lambda^\vee \in Q^\vee$: D'une part,

$$u \circ \varepsilon(\delta_{t_{\lambda^\vee}}) = 1$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} m \circ (\mathfrak{a} \otimes id) \circ \Delta(\delta_{t_{\lambda^\vee}}) &= m \circ (\mathfrak{a} \otimes id)(\delta_{t_{\lambda^\vee}} \otimes \delta_{t_{\lambda^\vee}}) \\ &= m(\mathfrak{a}(\delta_{t_{\lambda^\vee}}) \otimes \delta_{t_{\lambda^\vee}}) \\ &= \mathfrak{a}(\delta_{t_{\lambda^\vee}})\delta_{t_{\lambda^\vee}} \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\mathfrak{a}(\delta_{t_{\lambda^\vee}})\delta_{t_{\lambda^\vee}} = 1$$

Par suite,

$$\mathfrak{a}(\delta_{t_{\lambda^\vee}}) = \delta_{t_{\lambda^\vee}^{-1}}$$

Pour montrer que $\mathfrak{a}$ est S-linéaire, on utilise encore le diagramme ci-dessus en l'appliquant sur $s\delta_e$. On obtient :

$$\mathfrak{a}(s\delta_e) = s\delta_e$$

Ce qui montre le résultat.

Existence : Pour montrer que $\mathfrak{s}$ préserve $Z_{\mathbb{A}}(S)$, il suffit de montrer que $\mathfrak{s} = \mathfrak{c}_* \circ c_{w_0}$. En effet, pour tout $\lambda^\vee \in Q^\vee$, on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_* \circ c_{w_0}(\delta_{t_{\lambda^\vee}}) &= \mathfrak{c}_*(\delta_{w_0 t_{\lambda^\vee} w_0^{-1}}) \\
&= \mathfrak{c}_*(\delta_{t_{w_0(\lambda^\vee)}}) \\
&= \mathfrak{c}_*(\delta_{t_{-\mathfrak{c}(\lambda^\vee)}}) \\
&= \delta_{t_{-\lambda^\vee}} \\
&= \delta_{t_{\lambda^\vee}^{-1}}
\end{aligned}$$

Alors, $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{c}_* \circ c_{w_0}$ se coïncident sur la base $\{\delta_{t_{\lambda^\vee}}\}$. On doit encore montrer que $\mathfrak{c}_* \circ c_{w_0}$ est S-linéaire. En effet, soit $s \in S$ alors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}_* \circ c_{w_0}(s\delta_e) &= \mathfrak{c}_*(s\delta_e) \\
&= s\delta_e
\end{aligned}$$

En fin on a,

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{c}_* \circ c_{w_0}$$

□

Théorème 5.7. *[15]*

1. *j est un isomorphisme d'algèbres et de cogèbres de $H_T(\mathcal{G}r_G)$ à $Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$ qui est uniquement déterminé par les deux propriétés suivantes :*

   - $\forall x \in W_{\text{aff}}^-;\ j(\xi_x) = A_x \ mod\ J$
   - $j(\xi_x) \in Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$

2. *En plus, elle est compatible avec l'action de $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ sur $H_T(\mathcal{G}r_G)$ de la manière suivante :*

$$\forall \sigma, \sigma' \in H_T(\mathcal{G}r_G);\ \sigma\sigma' = j(\sigma) \cdot \sigma'$$

Remarque 5.30. *1. L'isomorphisme j est en effet un isomorphisme d'algèbres de Hopf.*

2. En plus, la seconde propriété dans le Théorème 5.7 est équivalente au suivant :

$$\forall i \in \{i, \dots, l\};\quad j(\xi_x) \cdot \alpha_i = \alpha_i j(\xi_x)$$

Proposition 5.8. *[15, Proposition 4.5] Soit $x \in W_{\text{aff}}^-$ et $\lambda \in Q^-$. On note par W_λ le stabilisateur de λ dans W. Alors on a,*

$$\xi_x \xi_{t_\lambda} = \xi_{x t_\lambda}$$

Plus explicitement,

$$j(\xi_{t_\lambda}) = \sum_{w \in W/W_\lambda} A_{t_{w(\lambda)}}$$

5.3.2 Sous-algèbre affine de Fomin-Stanley $\mathbb{B}'$

Dans [15], Lam a définit une sous-algèbre $\mathbb{B}'$ de $\mathbb{A}_0$ et il montre, sans donner les détails, qu'elle est isomorphe en tend qu'algèbre de Hopf à l'algèbre $H_*(\mathcal{G}r_G)$. Dans cette section on va détailler les preuves de ces résultats.

Définition 5.31. *Soit $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}_{\text{aff}}$ le sous anneau de $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ engendré sur $\mathbb{Z}$ par les $\{A_i\}_{i=0,\dots,l}$. On définit l'application ϕ_0 de $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ dans $\mathbb{A}_0$ de la manière suivante :*

$$\forall s \in S;\ \phi_0(s) = s(0)$$
$$\phi_0 : \sum_w a_w A_w \mapsto \sum_w \phi_0(a_w) A_w$$

Le produit de Pontryagin *pont* : $\mathcal{G}r_G \times \mathcal{G}r_G \to \mathcal{G}r_G$ en induit un autre dans l'algèbre d'homologie T-equivariante noté $*_T$. Dans ce cas, il existe des a_w telles que :

$$\forall u, v\ \ \xi_u *_T \xi_v = \sum_w a_w \xi_w$$

Alors on obtient, en faisant le Produit de Pontryagin en Non-equivariant, le produit $*_0$ sur $H_*(\mathcal{G}r_G)$ par :

$$\xi_u *_0 \xi_v := \phi_0(\xi_u *_T \xi_v)$$

Remarque 5.32. *On note par $\mathfrak{d} : \mathcal{G}r_G \to \mathcal{G}r_G \times \mathcal{G}r_G$ l'application diagonale de $\mathcal{G}r_G$. En effet cette application induit le cup produit en cohomologie :*

$$\mathfrak{d}^* : H^*(\mathcal{G}r_G) \to H^*(\mathcal{G}r_G) \otimes H^*(\mathcal{G}r_G)$$
$$\xi^u \otimes \xi^v \mapsto \sum_w c^w_{u,v} \xi^w$$

En plus, puisque $H^*(\mathcal{G}r_G)$ et $H_*(\mathcal{G}r_G)$ ont des structures d'algèbres de Hopf duales, on sait que $\mathfrak{d}$ induit le suivant :

$$\mathfrak{d}_* : H_*(\mathcal{G}r_G) \otimes H_*(\mathcal{G}r_G) \to H_*(\mathcal{G}r_G)$$
$$\xi^w \mapsto \sum_{u,v} c^w_{u,v} \xi^u \otimes \xi^v$$

Définition 5.33. *[15] On définit la sous-algèbre affine de Fomin-Stanley comme sous-espace de $\mathbb{A}_0$ de la manière suivante :*

$$\mathbb{B}' = \{a \in \mathbb{A}_0; \forall s \in S,\ \phi_0(as) = \phi_0(s)a\}$$

Remarque 5.34.

1. *On remarque que ϕ_0 envoie $\mathbb{A}_{\text{aff}} \otimes_S \mathbb{A}_{\text{aff}}$ sur $\mathbb{A}_0 \otimes_S \mathbb{A}_0$ en évaluant les coefficients en 0 dans la base $\{A_w \otimes A_v\}_{v,w \in W_{\text{aff}}}$.*
2. *ϕ_0 n'est pas un morphisme d'algèbres de $\mathbb{A}_{\text{aff}}$.*
3. *Pour tout $a \in \mathbb{A}_{\text{aff}}$ et $b \in \mathbb{A}_0$ on a :*

$$\phi_0(ab) = \phi_0(a)b = \phi_0(a)\phi_0(b)$$

4. *ϕ_0 est un morphisme de $\mathbb{B}'$-modules :*

$$\forall b \in \mathbb{B}', \forall a \in \mathbb{A}_{\text{aff}};\ \phi_0(ba) = b\phi_0(a)$$

Démonstration. 1. C'est claire.

2. Pour tout $i \in \{1, \ldots, l\}$ on a :

$$\begin{aligned}\phi_0(A_i\alpha_i) &= \phi_0(2 - \alpha_i A_i)\\ &= 2\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\phi_0(A_i)\phi_0(\alpha_i) &= A_i \cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Alors

$$\phi_0(A_i\alpha_i) \neq \phi_0(A_i)\phi_0(\alpha_i)$$

3. On peut supposer qu'il existe $s \in S$ et $u, v \in W_{\text{aff}}$ tels que $a = sA_u$ et $b = A_v$. Alors,

$$\begin{aligned}\phi_0(ab) &= \phi_0(sA_uA_v)\\ &= \phi_0(s)A_uA_v\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\phi_0(a)b = \phi_0(s)A_uA_v$$

Donc

$$\phi_0(ab) = \phi_0(a)b$$

4. On peut supposer qu'il existe $s \in S$ et $v \in W_{\text{aff}}$ tel que $a = sA_v$ et $b \in \mathbb{B}'$. Alors,

$$\begin{aligned}\phi_0(ba) &= \phi_0(bsA_v)\\ &= \phi_0(bs)A_v\\ &= \phi_0(s)bA_v\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}b\phi_0(a) &= b\phi_0(sA_v)\\ &= b\phi_0(s)A_v\\ &= \phi_0(s)bA_v\end{aligned}$$

Donc

$$\phi_0(ba) = b\phi_0(a)$$

□

Le Lemme suivant justifie la nomenclature de $\mathbb{B}'$:

Lemme 5.35. *L'espace $\mathbb{B}'$ est une sous-algèbre de $\mathbb{A}_0$.*

Démonstration. Soit a et b dans $\mathbb{B}'$ et s dans S. Alors,

$$\exists\{c_w\}_{w\in W_{\text{aff}}};\ \phi_0(c_w)=0 \text{ et } bs=\phi_0(s)b+\sum_{w\in W_{\text{aff}}} c_wA_w$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\phi_0((ab)s) &= \phi_0(a[\phi_0(s)b+\sum_{w\in W_{\text{aff}}} c_wA_w]) \\
&= \phi_0(a\phi_0(s)b)+\sum_{w\in W_{\text{aff}}} \phi_0(ac_wA_w) \\
&= a\phi_0(\phi_0(s)b)+\sum_{w\in W_{\text{aff}}} \phi_0(ac_w)A_w \quad \text{(d'après la remarque 5.34)} \\
&= a\phi_0(s)b+\sum_{w\in W_{\text{aff}}} \phi_0(c_w)aA_w \quad (\text{car } a\in\mathbb{B}') \\
&= \phi_0(s)ab \qquad\qquad (\text{car } \phi_0(c_w)=0)
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.36. *Pour tout $b\in\mathbb{A}_0$,*

$$[\forall i\in\{1,\dots,l\};\ \phi_0(b\cdot\alpha_i)=0\Leftrightarrow b\in\mathbb{B}']$$

Démonstration. Soit $b\in\mathbb{A}_0$, on va montrer que,

$$[\forall i\in\{1,\dots,l\};\ \phi_0(b\cdot\alpha_i)=0\Rightarrow b\in\mathbb{B}']$$

On suppose que pour tout $i\in\{1,\}$ on a $\phi_0(b\cdot\alpha_i)=0$ et on veut montrer que,

$$\forall s\in S,\phi_0(bs)=\phi_0(s)b$$

En effet, puisque les éléments de S sont polynômiaux en { Donc,

$$\exists\{p_w\}_{w\in W}\in S;\ p_w(0)=0 \text{ et } b\cdot\alpha_i=\sum p_wA_w$$

Alors,

$$b\cdot(\alpha_i\alpha_j)=\sum p_w(A_w\alpha_j)$$

par suite,

$$\phi_0(b)\cdot(\alpha_i\alpha_j)=0$$

On en déduit en fin que

$$b\in\mathbb{B}'$$

Ceci montre l'implication à droite. L'autre implication est évidente. □

Proposition 5.9. *On a*

$$\phi_0(Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S))=\mathbb{B}'.$$

Plus précisément, l'ensemble des éléments $\{\phi_0(j(\xi_u));u\in W_{\text{aff}}^-\}$ forment une base de $\mathbb{B}'$ sur $\mathbb{Z}$. En plus l'élément $\phi_0(j(\xi_u))$ est l'unique élément dans $\mathbb{B}'$ qui admet A_u comme unique terme Grassmannien.

Fait 5.37. *$\phi_0 : Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)\to\mathbb{B}'$ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. Soit $a, b \in Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}}(S)$ tel que $b = \sum_w b_w A_w$. Alors,

$$\begin{aligned}\phi_0(ab) &= \phi_0(a\sum_w b_w A_w)\\ &= \phi_0(\sum_w b_w a A_w) \qquad (\text{car } a \in Z_{\mathbb{A}_{aff}}(S))\\ &= \sum_w \phi_0(b_w)\phi_0(aA_w)\\ &= \sum_w \phi_0(b_w)\phi_0(a)A_w \quad (\text{remarque 5.34(3)})\end{aligned}$$

Et $\phi_0(a)\phi_0(b) = \phi_0(a)\sum_w \phi_0(b_w)A_w$. Alors,

$$\phi_0(ab) = \phi_0(a)\phi_0(b)$$

□

Fait 5.38. *$\phi_0 \circ j : H_*(Gr) \to \mathbb{B}'$ est un morphisme d'algèbres.*

Démonstration. Soit $\xi_u, \xi_v \in H_*(Gr)$. Alors il existe des éléments $\{s_w\}_{w\in W} \in S$ tels que $\phi_0(s_w) = 0$ et :

$$\xi_u *_T \xi_v = \xi_u *_0 \xi_v + \sum_w s_w \xi_w$$

Alors,

$$j(\xi_u *_T \xi_v) = j(\xi_u *_0 \xi_v) + \sum_w s_w j(\xi_w)$$

Par suite,

$$\phi_0 \circ j(\xi_u *_T \xi_v) = \phi_0 \circ j(\xi_u *_0 \xi_v)$$

Or d'après le Lemme 5.7 on sait que j est un morphisme d'algèbres. Alors,

$$\phi_0 \circ j(\xi_u *_T \xi_v) = \phi_0(j(\xi_u)j(\xi_v))$$

En plus, d'après le fait 5.37 on sait que ϕ_0 est un morphisme d'algèbres. Alors,

$$\phi_0(j(\xi_u)j(\xi_v)) = (\phi_0 \circ j)(\xi_u) \cdot (\phi_0 \circ j)(\xi_v)$$

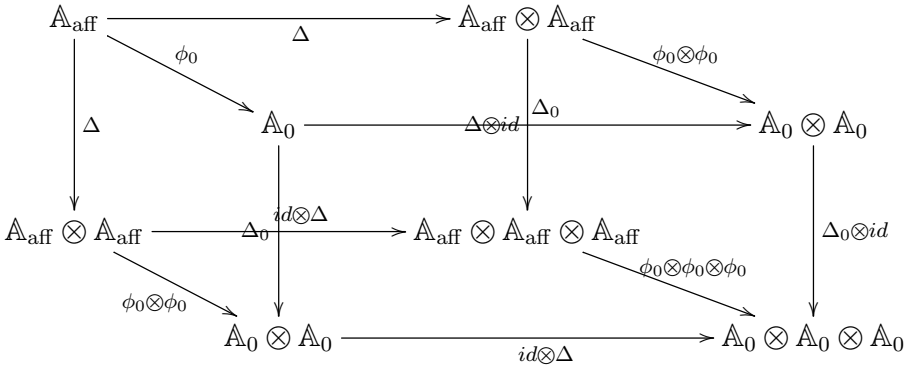
Enfin,

$$(\phi_0 \circ j)(\xi_u *_0 \xi_v) = (\phi_0 \circ j)(\xi_u) \cdot (\phi_0 \circ j)(\xi_v)$$

□

Fait 5.39. *Soit $\Delta_0 : \mathbb{A}_0 \to \mathbb{A}_0 \otimes \mathbb{A}_0$ tel que $\Delta_0 = (\phi_0 \otimes \phi_0) \circ \Delta$. Alors $\mathbb{A}_0$ est une cogèbre co-commutative et co-associative.*

Démonstration. Tout d'abord on va montrer que $\mathbb{A}_0$ est une cogèbre. En effet, il faut montrer que la face devant du diagramme suivant est commutative :

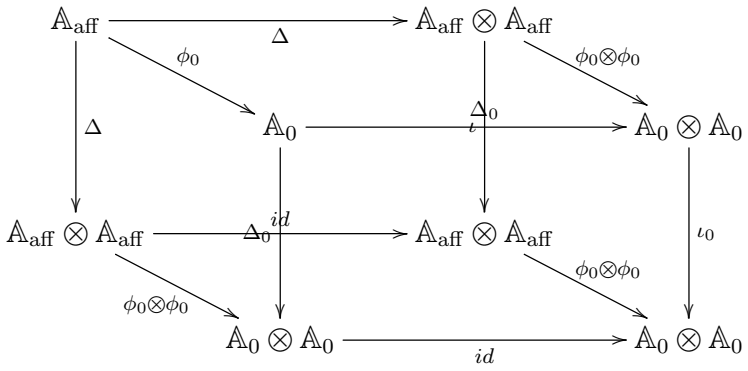


Pour montrer ce fait, il suffit de montrer que les cinq autres faces de ce diagramme cubique sont aussi commutatives :
En effet, la face derrière l'est parce que $\mathbb{A}_{\text{aff}}$ est une cogèbre. Les quatre autres faces le sont parce que $\Delta_0 \circ \phi_0 = (\phi_0 \otimes \phi_0) \circ \Delta$.

Pour montrer que $\mathbb{A}_0$ est co-commutative, on note par ι l'application Flip associée à $\mathbb{A}_0$ et on va montrer que

$$\iota \circ \Delta_0 = \Delta_0$$

En effet, en raisonnant de la même manière qu'au-dessus on peut montrer que les faces du diagramme si dessous sont commutatives :



□

Fait 5.40. *$\phi_0 \circ j : H_*(\mathcal{G}r_G) \to \mathbb{B}'$ est un morphisme de cogèbres.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H_*(\mathcal{G}r_G) & \xrightarrow{j} & Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}} & \xrightarrow{\phi_0} & \mathbb{B}' \\ \downarrow{\scriptstyle \Delta_*} & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & \swarrow{\scriptstyle \Delta} & \downarrow{\scriptstyle \Delta_0} \\ H_*(\mathcal{G}r_G) \otimes H_*(\mathcal{G}r_G) & \xrightarrow{j \otimes j} & Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}} \otimes Z_{\mathbb{A}_{\text{aff}}} & \xrightarrow{\phi_0 \otimes \phi_0} & \mathbb{B}' \otimes \mathbb{B}' \end{array}$$

En effet, d'après le Théorème 5.7, j est un isomorphisme d'algèbres de Hopf ce qui montre la commutativité de la partie gauche du digramme. La partie droite du diagramme est commutative par Définition de Δ_0 $(= (\phi_0 \otimes \phi_0) \circ \Delta)$ et le fait que :

$$\Delta_0 \circ \phi_0 = \Delta_0$$

□

Fait 5.41. *$\phi_0 \circ j : H_*(\mathcal{G}r_G) \to \mathbb{B}'$ est en même temps un isomorphisme d'algèbres et de cogèbres.*

Démonstration. $H_*(\mathcal{G}r_G)$ a comme base $(\xi_u)_{u \in W^{\text{aff}}}$. Par la Proposition 5.9 , les $\phi_0 \circ j(\xi_u)$ forment une base de $\mathbb{B}'$. Donc $\phi_0 \circ j$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules. Comme $(\phi_0 \circ j)$ est un morphisme d'algèbres et de cogèbres, c'est alors un isomorphisme d'algèbres et de cogèbres. □

On note par m et u respectivement, le produit et l'unité de l'algèbre B'. Alors,

Remarque 5.42. *$(\mathbb{B}', m, u, \Delta_0, \varepsilon)$ a une structure de bigèbre.*

Démonstration. D'après le Fait 5.40, il suffit de montrer que Δ_0 est un morphisme d'algèbres. En effet pour tout $x, y \in \mathbb{B}'$,

$$\begin{aligned}\Delta_0(xy) &= (\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \circ \Delta_* \circ (\phi_0 \circ j)^{-1}(xy) \\ &= (\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \circ \Delta_*((\phi_0 \circ j)^{-1}(x)(\phi_0 \circ j)^{-1}(y)) \quad (\phi_0 \circ j \text{ morphisme d'algèbres.}) \\ &= (\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \left(\Delta_*((\phi_0 \circ j)^{-1}(x))\Delta_*((\phi_0 \circ j)^{-1}(y))\right) \quad (\Delta_* \text{ morphisme d'algèbres})\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\Delta_0(x)\Delta_0(y) &= (\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \circ \Delta_* \circ (\phi_0 \circ j)^{-1}(x)(\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \circ \Delta_* \circ (\phi_0 \circ j)^{-1}(y) \\ &= (\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \left(\Delta_*((\phi_0 \circ j)^{-1}(x)\right) (\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \left(\Delta_*((\phi_0 \circ j)^{-1}(y)\right) \\ &= (\phi_0 \circ j) \otimes (\phi_0 \circ j) \left(\Delta_*((\phi_0 \circ j)^{-1}(x))\Delta_*((\phi_0 \circ j)^{-1}(y))\right) \quad (\phi_0 \circ j \text{ morphisme d'algèbres.})\end{aligned}$$

Alors,

$$\Delta_0(xy) = \Delta_0(x)\Delta_0(y)$$

□

Corollaire 5.10. *[15] $\mathbb{B}'$ est un modèle de l'homologie $H_*(\mathcal{G}r_G)$. Plus précisément, l'application $j_0 = \phi_0 \circ j$ définie dans la suite est un isomorphisme d'algèbres de Hopf :*

$$\begin{aligned} j_0 : H_*(\mathcal{G}r_G) &\to \mathbb{B}' \\ \xi_u &\mapsto \phi_0(j(\xi_u)) \end{aligned}$$

Remarque 5.43. *1. D'après la Proposition 5.8 on en déduit que :*

$$\forall \lambda \in Q^-;\ j_0(\xi_{t_\lambda}) = \sum_{w \in W/W_\lambda} A_{t_{w(\lambda)}}$$

2. Pour tout x dans W_{aff}^-, l'élément $j_0(\xi_x)$ est caractérisé par le fait qu'il admet A_x comme l'unique terme Grassmannien et qu'il appartient à $\mathbb{B}'$ (d'après le corollaire 5.10). En plus la deuxième propriété est équivalente au suivant,

$$\forall i \in \{1, \ldots, l\};\quad \phi_0(j_0(\xi_x) \cdot \alpha_i) = 0$$

Démonstration. 1. Soit λ un poids antidominant, alors,

$$\begin{aligned} j_0(\xi_{t_\lambda}) &= \phi_0(j(\xi_{(t_\lambda)})) \\ &= \phi_0(\sum_{w \in W/W_\lambda} A_{t_{w(\lambda)}}) \\ &= \sum_{w \in W/W_\lambda} A_{t_{w(\lambda)}} \end{aligned}$$

2. Cette équivalence découle de la remarque 5.36.

□

On exploite maintenant le fait que les algèbres de Hopf dont il est question sont graduées. Ceci nous sera utile dans le Chapitre 7.

Remarque 5.44. *On rappelle que $H_*(\mathcal{G}r_G)$ admette la graduation suivante :*

$$H_*(\mathcal{G}r_G) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} H_i(\mathcal{G}r_G)$$

On remarque que $\mathbb{A}_0$ admet aussi la graduation suivante :

$$\forall w \in W_{\text{aff}}^-,\ deg(A_w) := \ell(w),\ (\mathbb{A}_0)_i := \bigoplus_{\ell(w)=i} \mathbb{C}\mathbb{A}_w \text{ et } \mathbb{A}_0 = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} (\mathbb{A}_0)_i$$

Définition 5.45. *Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on définit les deux projections $p_*^{i,j}$ et $p_0^{i,j}$ de la manière suivante :*

- $$\begin{array}{rccc} p_*^{i,j} : & H_*(\mathcal{G}r_G)\otimes H_*(\mathcal{G}r_G) & \to & H_i(\mathcal{G}r_G)\otimes H_j(\mathcal{G}r_G) \\ & \sum c_{u,v}\xi_u\otimes\xi_v & \mapsto & \sum\limits_{\substack{\ell(u')=i\\ \ell(v')=j}} c_{u',v'}\xi_{u'}\otimes\xi_{v'} \end{array}$$

et

- $$\begin{array}{rccc} p_0^{i,j} : & \mathbb{A}_0\otimes\mathbb{A}_0 & \to & (\mathbb{A}_0)_i\otimes(\mathbb{A}_0)_j \\ & \sum c'_{u,v}A_u\otimes A_v & \mapsto & \sum\limits_{\substack{\ell(u')=i\\ \ell(v')=j}} c'_{u',v'}A_{u'}\otimes A'_{v'} \end{array}$$

Pour tout $w \in W^o$ on note $\sigma_w := j_0(\xi_w)$ et on définit aussi les deux applications suivantes :

- $$\begin{array}{rccc} \Delta_*^{i,j} : & H_*(\mathcal{G}r_G) & \to & H_i(\mathcal{G}r_G)\otimes H_j(\mathcal{G}r_G) \\ & \xi_w & \mapsto & p_*^{i,j}(\Delta_*(\xi_w)) \end{array}$$

et

- $$\begin{array}{rccc} \Delta_0^{i,j} : & \mathbb{A}_0\otimes\mathbb{A}_0 & \to & (\mathbb{A}_0)_i\otimes(\mathbb{A}_0)_j \\ & \sigma_w & \mapsto & p_0^{i,j}(\Delta_0(\sigma_w)) \end{array}$$

Lemme 5.46. *Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Delta_0^{i,j}\circ j_0 = (j_0\otimes j_0)\circ\Delta_*^{i,j}$$

Démonstration. Soit $i, j \in \mathbb{N}$ et $w \in W_{\text{aff}}^-$ tel que $i + j = \ell(w)$ alors,

$$\begin{aligned} \Delta_0^{i,j}\circ j_0(\xi_w) &= p_0^{i,j}(\Delta_0(j_0(\xi_w))) \\ &= p_0^{i,j}((j_0\otimes j_0)\circ\Delta(\xi_w)) \quad (j_0 \text{ morphisme d'algèbre de Hopf.}) \\ &= p_0^{i,j}((j_0\otimes j_0)\left(\sum c_{u,v}^w\xi_u\otimes\xi_v\right) \\ &= p_0^{i,j}\left(\sum c_{u,v}^w j_0(\xi_u)\otimes j_0(\xi_v)\right) \\ &= \sum_{\substack{\ell(u')=i\\ \ell(v')=j)}} c_{u',v'}^w j_0(\xi_{u'})\otimes j_0(\xi_{v'}) \\ &= (j_0\otimes j_0)(\sum_{\substack{\ell(u')=i\\ \ell(v')=j)}} c_{u',v'}^w\xi_{u'}\otimes\xi_{v'}) \\ &= (j_0\otimes j_0)(p_*^{i,j}(\Delta_*(\xi_w))) \\ &= (j_0\otimes j_0)\circ\Delta_*^{i,j}(\xi_w) \end{aligned}$$

Alors,

$$\Delta_0^{i,j} \circ j_0 = (j_0 \otimes j_0) \circ \Delta_*^{i,j}$$

□

Chapitre 6

Multiplication par un crochet pour la cohomologie en type A

Dans [16], Lam et al énoncent et démontrent une formule de Pieri dans la Grassmannienne affine pour la multiplication par les $\xi^{c_{0,m}}$ pour tout entier positif m. Dans [19], Lee généralise ce résultat sur les variétés de drapeaux. Dans cette section, le but c'est d'en déduire une autre formule dans une variété de drapeau pour la multiplication par un crochet, c'est à dire, un élément de la forme $s_j \ \ldots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0$ pour $i \leqslant j-3$.
En effet, pour montrer ce résultat on raisonnera par récurrence descendante sur j. Du coup, on commence cette section en définissant des bandes presque-fortes, cette notion sera utilisé pour énoncer et montrer l'initialisation de la récurrence en question :

Définition 6.1. *On dit que $S = [w; (C_1, \ldots, C_r); u]$ est une bande presque-forte si les C_k sont des couvertures fortes telles que :*

$$\forall k \in \{0, \ldots, r-1\}; \ \ outside(C_k) = inside(C_{k+1})$$
$$et$$
$$m(C_1) < \cdots < m(C_{r-1}) > m(C_r)$$

Le Lemme suivant montre que les marquages de deux couvertures fortes C_1 et C_2, tels que $outside(C_1) = inside(C_2)$, ne peuvent pas êtres égales :

Lemme 6.2. *[16, Lemme 2.7] Soient $C_1 : u_1 \rightarrow^{i_1,j_1} u_2$ et $C_2 : u_2 \rightarrow^{i_2,j_2} u_3$ deux couvertures fortes. Alors,*

$$m(C_1) \neq m(C_2)$$

Démonstration. On rappelle tout d'abord que si $C_1 : u_1 \rightarrow^{i_1,j_1} u_2$ et $C_2 : u_2 \rightarrow^{i_2,j_2} u_3$ sont des couvertures fortes alors, on a les informations suivantes :

- $i_1 \leqslant 0 < j_1$
- $i_2 \leqslant 0 < j_2$
- $u_2 = u_1 t_{i_1,j_1}$
- $u_3 = u_2 t_{i_2,j_2}$
- $\ell(u_2) = \ell(u_1) + 1$
- $\ell(u_3) = \ell(u_2) + 1$
- $m(C_1) = u_1(j_1) = u_2(i_1)$
- $m(C_2) = u_2(j_2) = u_3(i_2)$

En tenant compte de ces informations et en supposant que $m(C_1) = m(C_2)$ on trouve que,

$$u_2(i_1) = u_2(j_2)$$

Donc,

$$i_1 = j_2$$

Or $i_1 \leqslant 0$ et $j_2 > 0$ ce qui est absurde. Donc,

$$m(C_1) \neq m(C_2)$$

□

Notation 6.3. *Pour tout $1 \leqslant a < b \leqslant l$ on note,*

$$s_a \ \ldots \cdot s_b := s_a s_{a+1} \cdots s_{b-1} s_b$$

le produit croissant de a à b de toutes les réflexions simples s_i telles que $a \leqslant i \leqslant b$.
De même, on note

$$s_b \ \cdots \ s_a := s_b s_{b-1} \cdots s_{a+1} s_a$$

le produit décroissant de b à a de toutes les réflexions simples s_i telles que $a \leqslant i \leqslant b$.

Remarque 6.4. *Soit $j, k \in \{1, \ldots, l\}$ tels que $\ell(s_j \ \ldots \cdot s_l s_0 s_k) = \ell(s_j \ \ldots \cdot s_l s_0) + 1$ $(= l - j + 3)$. Alors,*

$$c^{s_j \ \ldots \cdot s_l s_0 s_k}_{s_j \ \ldots \cdot s_l s_0, s_0} = \langle \varpi_0, \alpha_k^\vee \rangle = 0$$

Remarque 6.5. *Soit $u \in W_{\text{aff}}$. En générale, par construction de l'ordre de Bruhat, pour trouver les éléments $v \in W_{\text{aff}}$ tels que $u \leqslant v$ et $\ell(v) = \ell(u) + 1$, il suffit d'ajouter à chaque écriture réduite de u une réflexion simple (dans toutes les positions possibles). En plus pour que $u \to v$ soit une couverture dans le 0-ordre de Bruhat, il faut que $u^{-1}v = s_\alpha$ tel que $\alpha \in \Delta^{re}(\tilde{A}_l)$ et $\langle \varpi_0, \alpha^\vee \rangle \neq 0$. Dans la suite, on va utiliser cette méthode pour construire de tels éléments v pour montrer le Lemme suivant :*

Voici deux formules pour la multiplication par ξ^{s_0} qui seront utiles pour les preuves du Lemme 6.7 et du Lemme 6.11 :

Lemme 6.6. *1. Soit $j \in \{2, \ldots, l\}$. Alors,*

$$\xi^{s_j \ \ldots \cdot s_l s_0} \xi^{s_0} = \xi^{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0} + \xi^{s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0}$$

2. Soit $i \in \{1, \ldots, l-1\}$. Alors,

$$\xi^{s_i \ \cdots \cdot \ s_0} \xi^{s_0} = \xi^{s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0} + \xi^{s_{i+1} \ \cdots \cdot \ s_0}$$

Démonstration. Dans la suite on montre uniquement le premier résultat. La preuve du deuxième est faite d'une manière similaire. On note $u = s_j \ \ldots \cdot s_l s_0$. Dans la suite, on va construire tout les éléments v tels que $u \leqslant v$ et $\ell(v) = \ell(u) + 1$. Remarquons tout d'abord que u admet une unique écriture réduite, donc d'après la remarque 6.5 on va ajouter des racines simples s_k pour $k = 0, \ldots, l$:

1. Si $k = j - 1$: On a deux manières pour ajouter s_k, car α_{k-1} est l'unique racine du support de u non-orthogonale à α_k.

(a) On note $v = s_{j-1}u$. Alors,

$$u^{-1}v = s_0 s_l \ \cdots . \ s_j s_{j-1} s_j \ \ldots \cdot s_l s_0$$

Alors $u^{-1}v = s_\alpha$ tel que $\alpha^\vee = s_0 s_l \ \cdots . \ s_j(\alpha_{j-1}^\vee)$. Par suite,

$$\alpha^\vee = \alpha_0^\vee + \alpha_l^\vee + \cdots + \alpha_{j-1}^\vee$$

Donc,

$$c_{u,s_0}^v = \langle \varpi_0, \alpha^\vee \rangle = 1$$

(b) On note $v = us_{j-1}$. D'après a remarque 6.4, on en déduit que,

$$c_{u,s_0}^v = 0$$

2. Si $1 < k < j-1$: Dans ce cas, il n'y a qu'une seule manière pour construire v parce que $s_k s_j \ \ldots \cdot s_l s_0 = s_j \ \ldots \cdot s_l s_0 s_k$. Alors en posant $v = s_j \ \ldots \cdot s_l s_0 s_k$ et en utilisant la remarque 6.4, on obtient :

$$c_{u,s_0}^v = 0$$

3. Si $k = 1$: On a deux manière pour ajouter s_k :

(a) On note $v = s_1 u$ $(= s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0)$. Alors

$$u^{-1}v = s_0 s_1 s_0 = s_{\alpha_0 + \alpha_1}$$

Par suite,

$$c_{u,s_0}^v = 1$$

(b) On note $v = us_1$. D'après la remarque 6.4, on obtient,

$$c_{u,s_0}^v = 0$$

4. Si $j+1 \leqslant k \leqslant l$: On a deux manière pour ajouter s_k en augmentant la longueur :

(a) On note $v = s_k u$. Alors,

$$\begin{aligned} v &= (s_j \ \ldots \cdot s_{k-2})(s_k s_{k-1} s_k)(s_{k+1} \ \ldots \cdot s_l s_0) \\ &= (s_j \ \ldots \cdot s_{k-2})(s_{k-1} s_k s_{k-1})(s_{k+1} \ \ldots \cdot s_l s_0) \\ &= (s_j \ \ldots \cdot s_{k-2})(s_{k-1} s_k)(s_{k+1} \ \ldots \cdot s_l s_0) s_{k-1} \\ &= u s_{k-1} \end{aligned}$$

Alors, d'après la remarque 6.4, on a

$$c_{u,s_0}^v = 0$$

(b) On note $v = us_k$. Alors, d'après la remarque 6.4, on a

$$c_{u,s_0}^v = 0$$

5. Si $k = j$: Puisque $\ell(s_k u) = \ell(u) - 1$, on peut uniquement ajouter s_k à droite, c'est à dire en posant $v = us_k$. Par suite, d'après la remarque 6.4, on obtient,

$$c_{u,s_0}^v = 0$$

6. Si $k = 0$: Puisque $\ell(us_k) = \ell(u) - 1$, on peut uniquement ajouter s_k à gauche, c'est à dire en posant $v = s_k u$. Par suite, on obtient,

$$\begin{aligned} v &= s_j \ \ldots \cdot s_{l-1}(s_0 s_l s_0) \\ &= s_j \ \ldots \cdot s_{l-1}(s_l s_0 s_l) \\ &= u s_l \end{aligned}$$

Donc, d'après la remarque 6.4, on obtient,

$$c^v_{u,s_0} = 0$$

Finalement on obtient ,

$$\xi^{s_j \ \cdots s_l s_0}\xi^{s_0} = \xi^{s_{j-1} \ \cdots s_l s_0} + \xi^{s_j \ \cdots s_l s_1 s_0}$$

□

Lemme 6.7 (Initialisation)**.** *Soit $u \in W_{\text{aff}}$ et $i \in \{1, \ldots, l-1\}$. Alors,*

$$\xi^{s_l s_i \ \cdots \ s_0}\xi^u = \sum_S \xi^{outside(S)}$$

Où la somme parcoure toutes les bandes presque-fortes de taille $i+2$ tel que $inside(S) = u$.

Démonstration. En fait, c'est une conséquence de la formule de Chevalley et de la formule de Pieri pour la multiplication par $\xi^{s_{i+1}\cdots s_0}$ (cf. [19]). En effet, d'après le Lemme 6.6,

$$\xi^{s_i \cdots s_0}\xi^{s_0} = \xi^{s_l s_i \cdots s_0} + \xi^{s_{i+1}\cdots s_0}$$

Alors, pour tout u dans W_{aff}, on a

$$\begin{aligned} \xi^{s_l s_i \cdots s_0}\xi^u &= \xi^{s_i \cdots s_0}\xi^{s_0}\xi^u - \xi^{s_{i+1}\cdots s_0}\xi^u \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{S \text{ forte} \\ \text{de taille } i+1 \\ inside(S)=u}} \xi^{outside(S)}\xi^{s_0}}_{A} - \underbrace{\sum_{\substack{S \text{ forte} \\ \text{de taille } i+2 \\ insideS=u}} \xi^{outside(S)}}_{B} \end{aligned}$$

On remarque que le terme A peut être écrit de la manière suivante :

$$\sum_S \xi^{outside(S)}$$

où la somme parcourt toutes les bandes $S = (C_1, \ldots, C_{i+2})$ telles que $insideS = u$ et :

$$\begin{aligned} m(C_1) < \cdots < m(C_{i+1}) > m(C_{i+2}) \\ ou \\ m(C_1) < \cdots < m(C_{i+1}) < m(C_{i+2}) \end{aligned}$$

En effet, la multiplication par ξ^{s_0} nous donne ce degré de liberté avec le dernier chemin. En plus l'égalité des deux dernières marquages ne peut pas avoir lieu par conséquence du Lemme 6.2.

De même, le terme B parcourt des chemins $\{C_k\}_{k=1,\ldots,i+2}$ de taille $i+2$ tels que :

$$m(C_1) < \cdots < m(C_{i+1}) < m(C_{i+2})$$

Par suite, en effectuant $A - B$, on obtient une somme sur toutes les bandes presque-fortes.

□

Dans la suite de cette section, on va énoncer et montrer des résultats qui vont nous permettre de prouver l'hérédité dans la démonstration du corollaire 6.4 :

Remarque 6.8. *Le résultat du Lemme 6.6 implique qu'il existe un unique marquage entre l'élément* $s_j \ \dots \cdot s_l s_0$ *et l'élément* $s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_0$ *(resp.* $s_j \ \dots \cdot s_l s_1 s_0$*), qu'on notera* $m(s_j \ \dots \cdot s_l s_0, s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_0)$ *(resp.* $m(s_j \ \dots \cdot s_l s_0, s_j \ \dots \cdot s_l s_1 s_0)$*). En plus, en faisant un petit calcul on trouve :*

- $m(s_j \ \dots \cdot s_l s_0, \ s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_0) = -l - 1 + j$
- $m(s_j \ \dots \cdot s_l s_0, \ s_j \ \dots \cdot s_l s_1 s_0) = 2$

Lemme 6.9. *Soit* $i, j \in \{1, \dots, l-1\}$ *tels que* $i \leqslant j - 3$*. Alors,*

$$c^{s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0}_{s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0, s_0} = c^{s_0 s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0}_{s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0, s_0} = c^{s_j \ \dots \cdot s_l s_{i+1} \ \cdots \cdot \ s_0}_{s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0, s_0} = 1$$

Démonstration. Soit $i, j \in \{1, \dots, l-1\}$ tels que $i \leqslant j - 3$. On pose le suivant :

$$\begin{aligned} u &= s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0 \\ v_1 &= s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0 \\ v_2 &= s_0 s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0 \\ v_3 &= s_j \ \dots \cdot s_l s_{i+1} \ \cdots \cdot \ s_0 \end{aligned}$$

Alors, en faisant un petit calcul, on trouve que

$$\begin{aligned} u^{-1} v_1 &= s_{\alpha_{j-1} + \cdots + \alpha_l + \alpha_0} \\ u^{-1} v_2 &= s_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_l} \\ u^{-1} v_3 &= s_{\alpha_0 + \cdots + \alpha_{i+1}} \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\begin{aligned} c^{v_1}_{u,s_0} &= \langle \varpi_0, \alpha_{j-1}^\vee + \cdots + \alpha_l^\vee + \alpha_0^\vee \rangle = 1 \\ c^{v_2}_{u,s_0} &= \langle \varpi_0, \alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \alpha_l^\vee \rangle = 1 \\ c^{v_3}_{u,s_0} &= \langle \varpi_0, \alpha_0^\vee + \cdots + \alpha_{i+1}^\vee \rangle = 1 \end{aligned}$$

□

Remarque 6.10. *En suivant le même genre de raisonnement que la remarque 6.8, on a*

- $m(s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0, \ s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_i \ \dots \cdot s_0) = -l - 1 + j$
- $m(s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0, \ s_0 s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0) = 1$
- $m(s_j \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0, \ s_j \ \dots \cdot s_l s_{i+1} \ \cdots \cdot \ s_0) = i + 2$

Lemme 6.11. *Soit* $i, j \in \{1, \dots, l\}$ *tels que* $i \leqslant j - 3$*. Alors, on a les deux inégalités suivantes :*

- $c^{s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0}_{s_j \ \dots \cdot s_l s_0, s_i \ \dots \cdot s_0} \geqslant 1$
- $c^{s_j \ \dots \cdot s_l s_{i+1} \ \cdots \cdot \ s_0}_{s_j \ \dots \cdot s_l s_0, s_i \ \dots \cdot s_0} \geqslant 1$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on se place dans le 0-ordre de Bruhat en se démarrant de l'élément $s_j \ \dots \cdot s_l s_0$ en étudiant les bandes fortes de taille $i + 1$. On montrera, dans la suite, qu'il existe au moins une bande forte entre $s_j \ \dots \cdot s_l s_0$ et $s_{j-1} \ \dots \cdot s_l s_i \ \cdots \cdot \ s_0$, et entre

$s_j \ \ldots \cdot s_l s_0$ et $s_j \ \ldots \cdot s_l s_{i+1} s \ \cdots \ . \ s_0$.
Observons tout d'abord ce qui se passe au premier niveau de ces bandes, c'est à dire, pour la multiplication par ξ^{s_0}. En effet, d'après le Lemme 6.6, on sait que

$$\xi^{s_j \ \ldots \cdot s_l s_0} \xi^{s_0} = \xi^{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0} + \xi^{s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0}$$

Les éléments qui interviennent au niveau 1 sont alors $s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0$ et $s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0$.
Passons maintenant au niveau 2, en d'autres termes on va multiplier, encore une fois, par ξ^{s_0} et on gardera les termes de ce produit qui feront parti d'une bande forte. En effet, d'après le Lemme 6.6, on sait que

$$\xi^{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0} \xi^{s_0} = \xi^{s_{j-2} \ \ldots \cdot s_l s_0} + \xi^{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0}$$

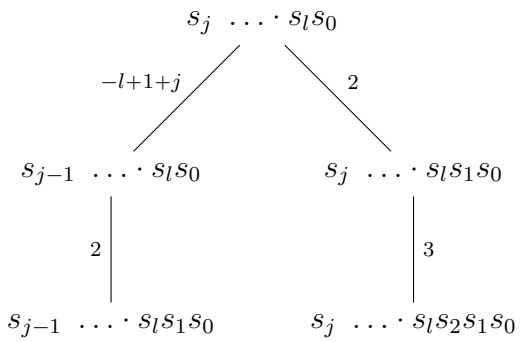
et d'après le Lemme 6.9,

$$c^{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0}_{s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, s_0} = c^{s_0 s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0}_{s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, s_0} = c^{s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0}_{s_j . ccs_l s_1 s_0, s_0} = 1$$

En plus, d'après les remarques 6.8 et 6.10, on a les marquages suivantes :

- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_0, \ s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0) = -l - 1 + j$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_0, \ s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0) = 2$
- $m(s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0, \ s_{j-2} \ \ldots \cdot s_l s_0) = -l - 2 + j$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_0, \ s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0) = 2$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, \ s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0) = -l - 1 + j$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, \ s_0 s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0) = 1$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, \ s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0) = 3$

Puisque $m(s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0, \ s_{j-2} \ \ldots \cdot s_l s_0) < m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_0, \ s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_0)$, l'élément $s_{j-2} \ \ldots \cdot s_l s_0$ ne fera pas parti des bandes fortes en question (il n'est pas relié à d'autres éléments du niveau 1). Par suite, en enlevant les arêtes qui correspondent à des suites de marquages non-croissantes, on sait que le sous-graphe suivant représente une partie des bandes fortes de taille 2 commençant par $s_j \ \ldots \cdot s_l s_0$:



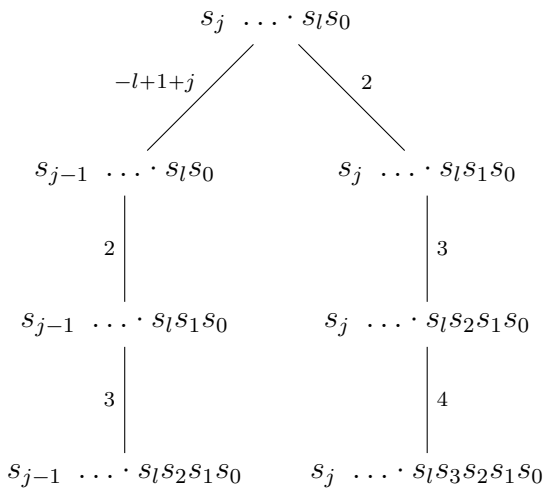
Dans la suite on va compléter ce sous-graphe en passant au niveau 3. D'après le Lemme 6.9,

- $c^{s_{j-2} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0}_{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, s_0} = c^{s_0 s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0}_{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, s_0} = c^{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0}_{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0, s_0} = 1$
- $c^{s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0}_{s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0, s_0} = c^{s_0 s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0}_{s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0, s_0} = c^{s_j \ \ldots \cdot s_l s_3 s_2 s_1 s_0}_{s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0, s_0} = 1$

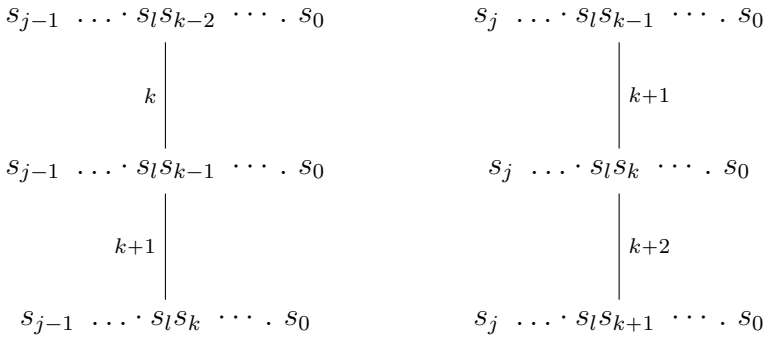
En plus, d'après les remarques 6.8 et 6.10, on a les marquages suivantes :

- $m(s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0,\ s_{j-2} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0) = -l - 2 + j$
- $m(s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0,\ s_0 s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0) = 1$
- $m(s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_1 s_0,\ s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0) = 3$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0,\ s_{j-1} \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0) = -l - 1 + j$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0,\ s_0 s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0) = 1$
- $m(s_j \ \ldots \cdot s_l s_2 s_1 s_0,\ s_j \ \ldots \cdot s_l s_3 s_2 s_1 s_0) = 4$

Alors en éliminant les éléments et les arêtes qui ne font pas parti d'une bande forte, on obtient :



Finalement, on remarque qu'en faisant un raisonnement pareil (par récurrence) sur le niveau $k \in \{3, \ldots, i\}$ on obtient : (les niveau k et $k+1$) :



De cette manière, on a construit deux bandes fortes entre les éléments en question. □

On souhaite maintenant montrer la Proposition 6.3 qui précise le Lemme 6.11. Mais le problème vient de la manque de précision du Lemme 6.9. En d'autres termes, on sait que les termes $\xi^{s_{j-1} \cdots s_l s_i \ \cdots \ . \ s_0}$, $\xi^{s_0 s_j \ \cdots s_l s_i \ \cdots \ . \ s_0}$ et $\xi^{s_j \ \cdots s_l s_{i+1} \ \cdots \ . \ s_0}$ figurent dans le produit $\xi^{s_j \ \cdots s_l s_i \ \cdots \ . \ s_0} \xi^{s_0}$, par contre, ce n'est pas évident de montrer qu'il y en a pas d'autres. Pour cette raison, dans la

suite, on utilise le fait que ξ^w (pour des éléments w grassmanniens) peut être identifier avec une fonction symétrique Weak_w (cf. Définition 6.13). En utilisant les propriétés de ces derniers et des résultats précédents, on arrive a monter la Proposition 6.3.

On commence tout d'abord par définir les bandes faibles en type A et les fonctions symétriques :

Définition 6.12. *[16, Chapitre 3]*

1. *Soit $I = [a, b] := \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$ un intervalle de $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. On note $c_I := s_b s_{b-1} \ldots s_a$ le produit décroissant dans $S(\tilde{A}_l)$ des réflexions simples indexé par I.*
   Soit A un sous-ensemble propre de $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, on sait que A peut être écrit comme union d'intervalles $\{I_i\}_{i=1,\ldots,t}$ de $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. On note $c_A := c_{I_1} \ldots c_{I_t}$.
   L'élément c_A est bien défini puisque c_{I_i} commute avec c_{I_j} si $i \neq j$.
   Enfin on dit que $c \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ est cycliquement décroissant s'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ tel que $c = c_A$.

2. *On dit que $B = (w \rightsquigarrow z)$ est une bande faible de type A si $w, z \in S^0(\tilde{A}_l)$ tel que $w \leqslant z$, zw^{-1} est cycliquement décroissant et $l(z) = l(w) + l(wz^{-1})$.*
   On définit aussi la taille d'une bande faible par $size(w \rightsquigarrow z) := \ell(z) - \ell(w)$.

Définition 6.13. *[16, Chapitre 3] On dit que $U = (W_1, W_2, \ldots)$ est un tableau faible, si pour tout $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, W_k est une bande faible, tel que $outside W_k = inside W_{k+1}$ et que $size(W_k) = 0$ si $k >> 0$. On note $inside(U) = inside(W_1)$ et $outside(U) = outside(W_k)$ pour $k >> 0$. On note aussi $wt(U) = (size(W_1), size(W_2), \ldots)$.*
On dit qu'un tableau faible U est de la forme u/v si $u = outside(U)$ et $v = inside(U)$. En plus si $v = e$, on dit que U est de la forme u.

Définition 6.14. *[16, Définition 3.2] Soit $u, v \in S(\tilde{A}_l)$, on définit la fonction de Schur faible, en une infinité de variables $x = (x_1, x_2, \ldots)$, de la manière suivante :*

$$\mathrm{Weak}_{u/v}(x) = \sum_U x^{wt(U)}$$

Où la somme parcoure tout les tableaux faibles de la forme u/v.

Théorème 6.1. *[16, Théorème 3.3] Soit $u, v \in S(\tilde{A}_l)$, alors $\mathrm{Weak}_{u/v}$ est une fonction symétrique en $x_1, x_2, \ldots$.*

Théorème 6.2. *[16, Théorème 3.5] Il y a un isomorphisme d'algèbres :*

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{G}r_G) &\to \Lambda^{(l)} \\ \xi^w &\mapsto \mathrm{Weak}_w \end{aligned}$$

$\Lambda^{(n)}$ est définie dans Lam et al [16] comme un quotient de l'algèbre des fonctions symétriques par un idéal I engendré par les fonctions monômiales symétriques avec une certaine condition (cf. [16] Section 1.1) .

Lemme 6.15. *Soit $u \in S(\tilde{A}_l)$. Si u a une unique écriture réduite $s_{i_1} \cdots s_{i_{\ell(u)}}$ alors, $x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell(u)}}$ admet un coefficient égale à 1 dans l'expression de Weak_u.*

Démonstration. Soit $u \in S(\tilde{A}_l)$ un élément qui admet une unique écriture réduite $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{\ell(u)}}$ alors, il existe un unique tableau faible $U = (W_1, W_2, \cdots)$ de la forme u tel que $size(W_1) = \cdots = size(W_{l(u)}) = 1$. Alors, en se basant sur la Définition 6.14, on sait que $x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell(u)}}$ admet un coefficient égale à 1 dans l'expression de Weak_u. □

En effet, on peut identifier, pour tout w dans $S^0(\tilde{A}_l)$, l'élément ξ^w avec Weak_w. On utilise dans la suite cet identification pour montrer le résultat suivant qui précise le Lemme 6.11 :

Proposition 6.3. *Soit $i \leqslant j-3$. Alors,*

$$\xi^{s_j \ \cdots s_l s_0} \xi^{s_i \ \cdots \ s_0} = \xi^{s_{j-1} \ \cdots s_l s_i \ \cdots \ s_0} + \xi^{s_j \ \cdots s_l s_{i+1} \ \cdots \ s_0}$$

Démonstration. D'après le Lemme 6.11, on en déduit qu'il existe des entiers positifs n_k et des éléments du groupe de Weyl w_k tels que :

$$\xi^{s_j \ \cdots s_l s_0} \xi^{s_i \ \cdots \ s_0} = \xi^{s_{j-1} \ \cdots s_l s_i \ \cdots \ s_0} + \xi^{s_j \ \cdots s_l s_{i+1} \ \cdots \ s_0} + \sum_k n_k \xi^{w_k}$$

On écrit cette expression en terme de fonctions symétriques :

$$\underbrace{\mathrm{Weak}_{s_j \ \cdots s_l s_0} \times \mathrm{Weak}_{s_i \ \cdots \ s_0}}_{A} = \underbrace{\mathrm{Weak}_{s_{j-1} \ \cdots s_l s_i \ \cdots \ s_0}}_{B} + \underbrace{\mathrm{Weak}_{s_j \ \cdots s_l s_{i+1} \ \cdots \ s_0}}_{C} + \sum_k n_k \mathrm{Weak}_{w_k} \tag{6.1}$$

On pose $\alpha = \ell(s_j \ \cdots s_l s_0)$ et $\beta = \ell(s_i \ \cdots \ s_0)$. Dans la suite on va calculer le coefficient du terme $x_1 x_2 \cdots x_{\alpha+\beta}$ dans chacune des expressions A, B et C ci-dessus. On remarque tout d'abord que ce calcul a un sens puisque l'idéal I (cf. Théorème 6.2) est constitué de fonctions dans lesquelles le monôme $x_1 \cdots x_{\alpha+\beta}$ n'apparaît pas. On notera c_A, c_B et c_C ces coefficients respectivement.

Dans l'expression A : Le terme $x_1 x_2 \cdots x_{\alpha+\beta}$, dans cette expression, est construit en multipliant deux termes, le premier provenant de $\mathrm{Weak}_{s_j \ \cdots s_l s_0}$ et le deuxième de $\mathrm{Weak}_{s_i \ \cdots \ s_0}$, de tailles respectives α et β. En d'autres termes, il existe des entiers $i_1, \ldots, i_\alpha, j_1, \ldots, j_\beta$ tels que

$$x_1 \cdots x_{\alpha+\beta} = (x_{i_1} \cdots x_{i_\alpha})(x_{j_1} \cdots x_{j_\beta})$$

Or $s_j \ \cdots s_l s_0$ admet une unique écriture réduite alors, d'après le Lemme 6.15, le coefficient de $x_j \cdots x_l x_0$ dans $\mathrm{Weak}_{s_j \ \cdots s_l s_0}$ est égale à 1.
En plus, puisque les fonctions Weak sont symétriques, alors, l'expression de $\mathrm{Weak}_{s_j \ \cdots s_l s_0}$ contient touts les produits de la forme $x_{i_1} \cdots x_{i_\alpha}$.
Le même raisonnement est fait sur $\mathrm{Weak}_{s_i \ \cdots \ s_0}$ pour montrer que l'expression de ce dernier contient tout les produits de la forme $x_{j_1} \cdots x_{j_\beta}$ Alors, on en déduit que

$$c_A = \binom{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Dans l'expression B : Le terme $x_1 \cdots x_{\alpha+\beta}$, dans cette expression, provient des tableaux faibles $U = (W_1, \cdots, W_{\alpha+\beta}, \cdots)$ de la forme $s_{j-1} \ \cdots s_l s_i \ \cdots \ s_0$ tels que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, \alpha+\beta\};\ size(W_k) = 1$$

On peut interpréter ce fait, comme étant des bandes faibles qui débutent par s_0 et arrivent à $s_{j-1} \ \cdots s_l s_i \ \cdots \ s_0$ en multipliant, consécutivement, par s_k (pour $k = 0, \ldots, i, j-1, \ldots l$)

pour enfin retrouver l'élément $s_{j-1} \ldots \cdot s_l s_i \cdots \cdot s_0$. On remarque que chacune de ces bandes est caractérisé par les positions de la multiplication par les éléments $s_{j-1}, \ldots, s_l$ On peut donc voir ces bandes commes des sous-ensemble de $\{2, \ldots, \alpha+\beta\}$ de taille α. Alors, on obtient

$$c_B = \binom{\alpha}{\alpha+\beta-1}$$

Dans l'expression C : En effectuant le même raisonnement si-dessus, on en déduit que

$$c_C = \binom{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}$$

Or, on sait que

$$\binom{\alpha}{\alpha+\beta} = \binom{\alpha}{\alpha+\beta-1} + \binom{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}$$

Alors,

$$c_A = c_B + c_C$$

Supposons maintenant, par contradiction, qu'il existe k tel que $n_k \neq 0$. On sait que l'expression de $Weak_{n_k}$ contient le terme $x_1 \cdots x_{\alpha+\beta}$. Alors, d'après l'équation 6.1, on a

$$c_A \geqslant c_B + c_C + n_k$$

Par suite

$$n_k < 0 \text{ (contradiction)}$$

Alors,

$$\forall k;\ n_k = 0$$

Ce qui implique le résultat en question. □

On arrive au résultat principale de cette section :

Corollaire 6.4. *Soit $i, j \in \{0, \ldots, l\}$ tels que $i \leqslant j-2$. Alors,*

$$\forall u \in W_{\text{aff}},\ \xi^{s_j \ldots \cdot s_l s_i \cdots \cdot s_0} \xi^u = \sum_S \xi^{outside(S)}$$

Où la somme parcoure toutes les suites de chemins dans le 0-ordre de Bruhat $S = (C_1, \ldots, C_{l-j+i+1})$ telles que $inside(S) = u$ et

$$m(C_1) < \cdots < m(C_i) > m(C_{i+1}) > \cdots > m(C_{l-j+i+1})$$

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence descendante sur j.
Initialisation :($j = l$)On a déjà montrer (cf. Lemme 6.7), le suivant

$$\forall i \in \{1, \ldots, l-1\},\ \ \xi^{s_l s_i \cdots \cdot s_0} \xi^u = \sum_S \xi^{outside(S)}$$

Où la somme parcoure toutes les bandes S presque-fortes de taille $i+2$ telle que $inside(S) = u$.
Hérédité : Supposons que le résultat est vrai à l'ordre j, et montrons qu'il l'est pour $j-1$. En effet, soit $i \leqslant j-3$, d'après la Proposition 6.3, on sait que

$$\xi^{s_j \ldots s_l s_0} \xi^{s_i \cdots \cdot s_0} = \xi^{s_{j-1} \ldots s_l s_i \cdots \cdot s_0} + \xi^{s_j \ldots s_l s_{i+1} \cdots \cdot s_0}$$

Par suite, pour tout u dans W_{aff} on a

$$\xi^{s_{j-1}\ \cdots s_l s_i\ \cdots\cdot\ s_0}\xi^u = \underbrace{\xi^{s_j\ \cdots s_l s_0}\xi^{s_i\ \cdots\cdot\ s_0}\xi^u}_{A} - \underbrace{\xi^{s_j\ \cdots s_l s_{i+1}\ \cdots\cdot\ s_0}\xi^u}_{B}$$

Dans chacun des deux termes A et B ci-dessus, la multiplication peut être vue comme des chemins dans le 0-Graphe de Bruhat, qui débutent par u. En effet,

1. Le terme A : Dans [19], Lee à montrer que la multiplication par $\xi^{s_i\ \cdots\cdot\ s_0}$ revient à parcourir des suites de chemins $\{C_k\}_{k=1,\ldots,i}$ de taille i tels que

   $$m(C_1) < \cdots < m(C_i)$$

   De même, la multiplication par $\xi^{s_j\ \cdots s_l s_0}$ revient à parcourir des suites de chemins $\{C_k\}_{k=i+1,\ldots,l-j+i+1}$ de taille $l-j+1$ tels que

   $$m(C_{i+1}) > \cdots > m(C_{l-j+i+1})$$

   Par suite, on en déduit que la multiplication par $\xi^{s_j\ \cdots s_l s_0}\xi^{s_i\ \cdots\cdot\ s_0}$ revient à parcourir des suites de chemins $\{C_k\}_{k=1,\ldots,l-j+i+1}$ de taille $l-j+i+1$ tels que

   $$m(C_1) < \cdots < m(C_i) > m(C_{i+1}) > \cdots > m(C_{l-j+i+1})$$
   $$ou$$
   $$m(C_1) < \cdots < m(C_i) < m(C_{i+1}) > \cdots > m(C_{l-j+i+1})$$

2. Le terme B : Par hypothèse de récurrence (puisque $i+1 \leqslant j-2$), on sait que la multiplication par $\xi^{s_j\ \cdots s_l s_{i+1}\ \cdots\cdot\ s_0}$ revient à compter des suites de chemins $\{C_k\}_{k=1,\ldots,l-j+i+1}$ de taille $l-j+i+1$ tels que

   $$m(C_1) < \cdots < m(C_i) < m(C_{i+1}) > \cdots > m(C_{l-j+i+1})$$

Finalement, on remarque que l'ensemble des bandes obtenue dans le terme B est inclus dans celui obtenue dans le terme A. Par suite en faisant $A-B$, on obtient des bandes formés par une suite de chemins tels que :

$$m(C_1) < \cdots < m(C_i) > m(C_{i+1}) > \cdots > m(C_{l-j+i+1})$$

□

Chapitre 7

Formule de Pieri pour l'homologie en type C

Dans ce chapitre, on se place en type C, et on est près à montrer la formule de Pieri en homologie.
Dans un premier temps, on commence par montrer des relations dans le groupe de Weyl (de type C) qui permettent le passage d'une écriture réduite à une autre pour un même élément du groupe. Ces résultats vont servir, dans la section 2, pour en montrer d'autres (Proposition 7.5, Lemme 7.27, Théorème 7.6) qui sont cruciaux pour la preuve de la formule en question (Théorème 7.8) dans la section finale.

7.1 Relations dans le groupe de Weyl

Notations 7.1. *1. Dans les Lemmes qui suivent x, m, r et r' sont des entiers tels que :*

$$0 \leqslant x \leqslant r < r' \leqslant m \leqslant l \quad ou \quad 0 \leqslant x \leqslant r' < r \leqslant m \leqslant l$$

2. On rappelle que $I = \{1, \dots, l\}$.

Lemme 7.2. *On suppose que $m < l$.*
1. Soit $v = s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{r'}$ tel que $r' < r$. Alors

$$v = s_m \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{r'} s_{r+1} \ \dots \cdot s_m$$

2. Soit $v = s_r \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{r'}$ tel que $r' > r$. Alors

$$v = s_m \ \cdots . \ s_{r'+1} s_r \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_m$$

Démonstration. 1. On sait que $v = (s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_r) \cdot s_{r-1} \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{r'}$.
Or

$$\begin{aligned}
s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_r &= s_r \ \dots \cdot s_{m-2}(s_m s_{m-1} s_m) s_{m-2} \ \cdots . \ s_r \\
&= s_m s_r \ \dots \cdot s_{m-3}(s_{m-2} s_{m-1} s_{m-2}) s_{m-3} \ \cdots . \ s_r s_m \\
&= s_m s_r \ \dots \cdot s_{m-3}(s_{m-1} s_{m-2} s_{m-1}) s_{m-3} \ \cdots . \ s_r s_m \\
&= s_m s_{m-1} s_r \ \dots \cdot s_{m-4}(s_{m-3} s_{m-2} s_{m-3}) s_{m-4} \ \cdots . \ s_r s_{m-1} s_m \\
&\ \ \vdots \\
&= s_m \ \cdots . \ s_r \ \dots \cdot s_m
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} v &= (s_r \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_r) \cdot (s_{r-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) \\ &= (s_m \ \cdots . \ s_r \ \ldots \cdot s_m) \cdot (s_{r-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) \\ &= (s_m \ \cdots . \ s_r) \cdot (s_{r+1} \ \ldots \cdot s_m) \cdot (s_{r-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) \end{aligned}$$

Or

$$(s_{r+1} \ \ldots \cdot s_m) \cdot (s_{r-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) = (s_{r-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) \cdot (s_{r+1} \ \ldots \cdot s_m) \text{ (parce que } r' < r < m)$$

Alors,

$$\begin{aligned} v &= (s_m \ \cdots . \ s_r) \cdot (s_{r-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) \cdot (s_{r+1} \ \ldots \cdot s_m) \\ &= (s_m \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) \cdot (s_{r+1} \ \ldots \cdot s_m) \end{aligned}$$

2. On sait que $v = (s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'-1}) \cdot (s_{r'} \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{r'})$.
Or

$$s_{r'} \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{r'} = s_m \ \cdots . \ s_{r'} \ \ldots \cdot s_m \text{ (Comme dans la partie 1.)}$$

Alors,

$$\begin{aligned} v &= (s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'-1}) \cdot (s_{r'} \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{r'}) \\ &= (s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'-1}) \cdot (s_m \ \cdots . \ s_{r'} \ \ldots \cdot s_m) \\ &= (s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'-1}) \cdot (s_m \ \cdots . \ s_{r'+1})(s_{r'} \ \ldots \cdot s_m) \end{aligned}$$

Or

$$(s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'-1})(s_m \ \cdots . \ s_{r'+1}) = (s_m \ \cdots . \ s_{r'+1})(s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'-1}) \text{ (parce que } r < r' < m)$$

Alors,

$$\begin{aligned} v &= (s_m \ \cdots . \ s_{r'+1})(s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'-1})(s_{r'} \ \ldots \cdot s_m) \\ &= (s_m \ \cdots . \ s_{r'+1})(s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_m) \end{aligned}$$

□

Lemme 7.3. *1. Soit $i_1, \ldots i_k \in \{1, \ldots, l\}$ tels que $r' + 1 < i_1 < \ldots < i_k \leqslant r - 1$.*
Soit $v_1 = (s_r \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_{r'})(s_{i_1} \cdots s_{i_k})$. Alors,

$$v_1 = (s_{i_1 - 1} \cdots s_{i_k - 1})(s_r \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_{r'})$$

2. Soit $i_1, \ldots i_k \in \{1, \ldots, l\}$ tels que $r - 1 \geqslant i_1 > \ldots > i_k > r' + 1$.
Soit $v_2 = (s_{i_1} \cdots s_{i_k})(s_{r'} \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_r)$. Alors,

$$v_2 = (s_{r'} \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_r)(s_{i_1 - 1} \cdots s_{i_k - 1})$$

Démonstration. On note $v_{r,r'} = s_r \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x \ \cdots . \ s_{r'}$, et $v_{r,'r} = s_{r'} \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_r$
Et soit i dans $\{i_1, \ldots, i_k\}$. Alors $i > r' + 1$.

1. On veux montrer que $v_{r,r'}s_i = s_{i-1}v_{r,r'}$.
   En effet,

$$\begin{aligned} v_{r,r'}s_i &= s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_{r'}s_i \\ &= s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}s_is_{i-1}s_is_{i-2} \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_{r'} \\ &= s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}s_{i-1}s_is_{i-1}s_{i-2} \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_{r'} \\ &= s_{i-1}s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}s_is_{i-1}s_{i-2} \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_{r'} \\ &= s_{i-1}v_{r,r'} \end{aligned}$$

   Alors,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{r,r'}(s_{i_1} \ \dots \cdot s_{i_k}) \\ &= (s_{i_1-1} \ \dots \cdot s_{i_k-1})v_{r,r'} \\ &= (s_{i_1-1} \cdots s_{i_k-1})(s_r \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_{r'}) \end{aligned}$$

2. D'une manière similaire à la partie 1, on montre que $s_iv_{r',r} = v_{r',r}s_{i-1}$. On obtient alors le résultat final en faisant un raisonnement analogue à celui de la partie 1.

□

Lemme 7.4. *Soit i, m dans $\{2, \dots, l\}$ et x dans $\{1, \dots, l\}$, tels que $x < i \leqslant m$.*

1. *On suppose que $x < i - 1$, soit $v_1 = s_i \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_{i-1}$. Alors,*

$$v_1 = s_x \ \dots \cdot s_{i-2}s_i \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x$$

2. *On suppose que $i < m$, soit $v_2 = s_i \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}$. Alors,*

$$v_2 = s_x \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}s_{i-1} \ \cdots . \ s_x$$

Démonstration. 1. On sait que

$$v_1 = (s_i \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_i) \cdot (s_{i-1} \ \cdots . \ s_x \ \dots \cdot s_{i-1}).$$

   Or

$$\begin{aligned} s_{i-1} \ \cdots . \ s_{x+2}(s_{x+1}s_xs_{x+1})s_{x+2} \ \dots \cdot s_{i-1} &= s_{i-1} \ \cdots . \ s_{x+2}(s_xs_{x+1}s_x)s_{x+2} \ \dots \cdot s_{i-1} \\ &= s_xs_{i-1} \ \cdots . \ s_{x+3}(s_{x+2}s_{x+1}s_{x+2})s_{x+3} \ \dots \cdot s_{i-1}s_x \\ &= s_xs_{i-1} \ \cdots . \ s_{x+3}(s_{x+1}s_{x+2}s_{x+1})s_{x+3} \ \dots \cdot s_{i-1}s_x \\ &= s_xs_{x+1}s_{i-1} \ \cdots . \ s_{x+4}(s_{x+3}s_{x+2}s_{x+3})s_{x+4} \ \dots \cdot s_{i-1}s_{x+1}s_x \\ &\ \ \vdots \\ &= s_x \ \dots \cdot s_{i-1} \ \cdots . \ s_x \end{aligned}$$

   Alors,

$$\begin{aligned} v_1 &= (s_i \ \dots \cdot s_m \ \cdots . \ s_i) \ \cdots . \ (s_x \ \dots \cdot s_{i-1} \ \cdots . \ s_x) \\ &= (s_x \ \dots \cdot s_{i-2}) \cdot (s_i \ \dots \cdot s_m \dots \ \cdots . \ ) \cdot (s_{i-1} \ \cdots . \ s_x) \end{aligned}$$

2. On sait que
$$v_2 = (s_i \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_i) \cdot (s_{i+1} \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}).$$
Or
$$\begin{aligned} s_i \ \cdots . \ s_{x+2}(s_{x+1}s_xs_{x+1})s_{x+2} \ \ldots \cdot s_i &= s_i \ \cdots . \ s_{x+2}(s_xs_{x+1}s_x)s_{x+2} \ \ldots \cdot s_i \\ &= s_xs_i \ \cdots . \ s_{x+3}(s_{x+2}s_{x+1}s_{x+2})s_{x+3} \ \ldots \cdot s_is_x \\ &= s_xs_i \ \cdots . \ s_{x+3}(s_{x+1}s_{x+2}s_{x+1})s_{x+3} \ \ldots \cdot s_is_x \\ &= s_xs_{x+1}s_i \ \cdots . \ s_{x+4}(s_{x+3}s_{x+2}s_{x+3})s_{x+4} \ \ldots \cdot s_is_{x+1}s_x \\ &\vdots \\ &= s_x \ \ldots \cdot s_i \ \cdots . \ s_x \end{aligned}$$
Alors,
$$\begin{aligned} v &= (s_x \ \ldots \cdot s_i \ \cdots . \ s_x) \cdot (s_{i+1} \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}) \\ &= (s_x \ \ldots \cdot s_i) \cdot (s_{i+1} \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}) \cdot (s_{i-1} \ \cdots . \ s_x) \end{aligned}$$

□

On en déduit aisément le résultat suivant,

Corollaire 7.1. *Soit i, m dans $\{2, \ldots, l\}$ et x dans $\{1, \ldots, l\}$, tels que $x < i \leqslant m$.*

1. *On suppose que $x < i - 1$, soit $w \leqslant s_i \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_{i-1}$. Alors,*
$$w \leqslant s_x \ \ldots \cdot s_{i-2}s_i \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_x$$
2. *On suppose que $i < m$, soit $v_2 = s_i \ \cdots . \ s_x \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}$. Alors,*
$$w \leqslant s_x \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_{i+1}s_{i-1} \ \cdots . \ s_x$$

Définition 7.5. *Soit $a, a', b, b', m, m', x, x' \in \{0, \ldots, l\}$ tels que $x \leqslant b < a \leqslant m$ et $x' \leqslant a' < b' \leqslant m'$.*

1. *On définit les deux ensembles suivants :*
$$\bullet \ \Pi(a, m, x, b) := \{(\pi_1, \ldots, \pi_k); \exists p, q, \ a = \pi_1 < \cdots < \pi_p = m > \pi_{p+1} > \cdots > \pi_q = x < \cdots < \pi_k = b\}.$$
$$\bullet \ \Pi'(a', x', m', b') := \{(\pi_1, \ldots, \pi_k); \exists p, q, \ a' = \pi_1 > \cdots > \pi_q = x' < \pi_{q+1} < \cdots < \pi_q = m' > \cdots > \pi_k = b'\}.$$
2. *On définit aussi Π et Π' de la manière suivante :*
$$\bullet \ \Pi = \bigcup_{0 \leqslant x \leqslant b < a \leqslant m \leqslant l} \Pi(a, m, x, b)$$
$$\bullet \ \Pi' = \bigcup_{0 \leqslant x' \leqslant a' < b' \leqslant m' \leqslant l} \Pi'(a', x', m', b')$$

3. *Pour tout sous ensemble E de $\Pi \cup \Pi'$, on définit $W(E)$ l'ensemble des éléments de $S^0(\tilde{C}_l)$ qui possèdent une écriture réduite dans E. En plus pour tout écriture $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ on note $w(\pi) := s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}$.*

4. *On définit le support d'un élément v du groupe de Weyl et on le note $supp(v)$ comme l'ensemble des indices des racines simples qui apparaissent dans une écriture réduite de v (les relations de tresse et de commutation ne changent pas le support).*

5. *Soit $v \in W(\Pi \cup \Pi')$ et $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ un mot réduit tel que $v = w(\pi)$. On dit que le support de v est connexe si*

$$\{\pi_1, \ldots, \pi_k\} = \{\min_i(\pi_i), \min_i(\pi_i) + 1, \ldots, \max_i(\pi_i)\}$$

Notation 7.6. *On note $\Pi_\wedge$ l'ensemble des $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ tels que : il existe $p \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $\pi_1 < \ldots < \pi_p > \pi_{p+1} > \ldots > \pi_k$ et $\{\pi_1, \ldots, \pi_k\} = \{\min_i(\pi_i), \min_i(\pi_i) + 1, \ldots, \max_i(\pi_i)\}$. De même on note $\Pi_\vee$ l'ensemble des $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ tels que : il existe $p \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $\pi_1 > \ldots > \pi_p < \pi_{p+1} < \ldots < \pi_k$ et $\{\pi_1, \ldots, \pi_k\} = \{\min_i(\pi_i), \min_i(\pi_i) + 1, \ldots, \max_i(\pi_i)\}$.*

Proposition 7.2. *Soit $v \in W(\Pi \cup \Pi')$ tel que le support de v (cf. Définition 7.5) est connexe.*

1. *Si $0 \notin supp(v)$ alors $v \in W(\Pi_\wedge)$.*

2. *Si $l \notin supp(v)$ alors $v \in W(\Pi_\vee)$.*

Démonstration. 1. Si $0 \notin supp(v)$, d'après le Lemme 7.4 on en déduit qu'il existe des entiers x, m et i dans $\{1, \ldots, l\}$ tels que :

$$v \leqslant s_x \ \ldots \cdot s_{i-2}s_i \ \ldots \cdot s_m \ \cdots \cdot \ s_x$$

Par hypothèse, on sait que le support de v est connexe. Alors $v \in W_\wedge$.

2. Si $l \notin supp(v)$, en utilisant le Lemme 7.2 et en raisonnant d'une manière similaire que la partie 1, on peut déduire que $v \in W_\vee$.

□

Le but dans la suite c'est de montrer que pour n'importe quelle écriture π dans $\Pi \cup \Pi'$ telle que $w(\pi)$ est a support connexe, la longueur de $w(\pi)$ est égale à la taille de π (Proposition 7.3).

Remarque 7.7. *Remarquons tout d'abord que pour tout $m \in \{2, \ldots, l\}$ on a*

$$s_0(s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots \cdot \ s_1) \neq (s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots \cdot \ s_1)s_0$$

Démonstration. En effet distinguons entre les deux cas suivant :
D'une part, on a

$$\begin{aligned} s_0s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots \cdot \ s_1(\varpi_0) &= s_0(\varpi_0) \\ &= \varpi_0 - \alpha_0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_1 s_0(\varpi_0) &= s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_1(\varpi_0 - \alpha_0) \\ &= \varpi_0 - s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_1(\alpha_0) \end{aligned}$$

En remarquant que α_m admet un coefficient non nul dans $s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_1(\alpha_0)$ on en déduit que

$$s_0 s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_1(\varpi_0) \neq s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots . \ s_1 s_0(\varpi_0)$$

d'où le résultat.

□

Lemme 7.8. *Soit $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k) \in W_\wedge$ telle que $\pi_1, \pi_k \geqslant 1$. Soit $j = \min_{1 \leqslant i \leqslant k}(\pi_i) - 1$. Alors,*

$$s_j(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) \neq (s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) s_j$$

Démonstration. On note $v = s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}$.
$j = \min_{1 \leqslant i \leqslant k}(\pi_i) - 1$ donc :

$$j = \pi_1 - 1 \ \text{ ou } \ j = \pi_k - 1$$

On suppose par récurrence que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $k-1$. Montrons le résultat jusqu'à l'ordre k. En raisonnant par l'absurde on suppose que $s_j v = v s_j$.

1. Si $j = \pi_1 - 1$ et $j \neq \pi_k - 1$: On note $v' = s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}$. Alors $v = s_{\pi_1} v'$. Or $s_j v = v s_j$. Par suite,

$$\begin{aligned} s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} v' &= s_{\pi_1} v' s_{\pi_1 - 1} \\ s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} v' &= s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} v' \quad (\text{car } s_{\pi_1 - 1} v' = v' s_{\pi_1 - 1}) \\ s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} &= s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} \quad (\text{Absurde}) \end{aligned}$$

2. Si $j \neq \pi_1 - 1$ et $j = \pi_k - 1$: On note $v' = s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{k-1}}$. Alors $v = v' s_{\pi_k}$. Or $s_j v = v s_j$. Par suite,

$$\begin{aligned} s_{\pi_k - 1} v' s_{\pi_k} &= v' s_{\pi_k} s_{\pi_k - 1} \\ v' s_{\pi_k - 1} s_{\pi_k} &= v' s_{\pi_k} s_{\pi_k - 1} \quad (\text{car } s_{\pi_k - 1} v' = v' s_{\pi_k - 1}) \\ s_{\pi_k - 1} s_{\pi_k} &= s_{\pi_k} s_{\pi_k - 1} \quad (\text{Absurde}) \end{aligned}$$

3. Si $j = \pi_1 - 1$ et $j = \pi_k - 1$: (Dans ce cas $\pi_1 = \pi_k$)

   (a) Si $\pi_1 \neq 1$: On note $v' = s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_{k-1}}$. Alors $v = s_{\pi_1} v' s_{\pi_k}$. Or $s_j v = v s_j$. Par suite,

$$\begin{aligned} s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} v' s_{\pi_k} &= s_{\pi_1} v' s_{\pi_k} s_{\pi_1 - 1} \\ s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} v' s_{\pi_1} &= s_{\pi_1} v' s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} \quad (\text{car } \pi_1 = \pi_k) \\ s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} v' &= v' s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} \\ s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} v' &= v' s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} \quad (\text{relation de tresse}) \\ s_{\pi_1 - 1} s_{\pi_1} v' s_{\pi_1 - 1} &= s_{\pi_1 - 1} v' s_{\pi_1} s_{\pi_1 - 1} \quad (\text{car } s_{\pi_1 - 1} v' = v' s_{\pi_1 - 1}) \\ s_{\pi_1} v' &= v' s_{\pi_1} \end{aligned}$$

   Or par hypothèse de récurrence on a $s_{\pi_1} v' \neq v' s_{\pi_1}$. Ceci donne une contradiction.

(b) Si $\pi_1 = 1$: Par Définition de v, on sait qu'il existe un entier p dans $\{1, \ldots, k\}$ tel que $\pi_1 < \ldots < \pi_p > \pi_{p+1} > \ldots > \pi_k$. On va distinguer entre plusieurs cas :

i. Si $v = s_1 \ \ldots \cdot s_m \ \cdots \ . \ s_1$ pour un m dans $\{2, \ldots, l\}$, on en déduit par la remarque 7.7

ii. Sinon, on a nécessairement le suivant (un trou à gauche ou à droite)

$$[\exists f \in \{1, \ldots, p\};\ \pi_f = f \text{ et } \pi_{f+1} > \pi_1 + f]$$
$$\text{ou}$$
$$[\exists g \in \{p+1, \ldots, k\};\ \pi_g = k + 1 - g \text{ et } \pi_{g-1} > k + 2 - g]$$

Supposons qu'on a un trou à gauche (f existe) mais pas à droite (g n'existe pas), dans ce cas on aura

$$\begin{aligned} v &= (s_1 \ \ldots \cdot s_f) s_{\pi_{f+1}} \cdots s_{\pi_p} s_{\pi_p - 1} \ \cdots \ . \ s_1 \\ &= (s_1 \ \ldots \cdot s_f)(s_{\pi_{f+1}} \cdots s_{\pi_p} s_{\pi_p - 1} \ \cdots \ . \ s_{f+2}) s_{f+1} \ \cdots \ . \ s_1 \end{aligned}$$

On note dans la suite $v_f = (s_{\pi_{f+1}} \cdots s_{\pi_p} s_{\pi_p - 1} \ \cdots \ . \ s_{f+2})$. Alors, en raisonnant par l'absurde on a

$$\begin{aligned} s_0(s_1 \ \ldots \cdot s_f) v_f s_{f+1} \ \cdots \ . \ s_1 &= (s_1 \ \ldots \cdot s_f) v_f s_{f+1} \ \cdots \ . \ s_1 s_0 \\ v_f s_0(s_1 \ \ldots \cdot s_f) s_{f+1} \ \cdots \ . \ s_1 &= v_f (s_1 \ \ldots \cdot s_f) s_{f+1} \ \cdots \ . \ s_1 s_0 \\ s_0(s_1 \ \ldots \cdot s_f) s_{f+1} \ \cdots \ . \ s_1 &= (s_1 \ \ldots \cdot s_f) s_{f+1} \ \cdots \ . \ s_1 s_0 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité donne une contradiction avec la remarque 7.7.
Les trois autres cas ce font d'une manière similaire en déduisant toujours par la remarque 7.7.

□

Lemme 7.9. *Soit $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k) \in W_\wedge$. Alors,*

$$\ell(s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_k}) = k.$$

Démonstration. On suppose par récurrence que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $k-1$.
On note $v = s_{\pi_2} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_{k-1}}$.

1. Si $\pi_1 < \pi_k$: Dans ce cas on peut dire que $\ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) = 1 + \ell(s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k})$. Or par hypothèse de récurrence, on a $\ell(s_{\pi_2} \cdots s_{\pi_k}) = k - 1$. Alors,

$$\ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) = k$$

2. Si $\pi_1 > \pi_k$: Dans ce cas on peut dire que $\ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) = 1 + \ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{k-1}})$. Or par hypothèse de récurrence, on a $\ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{k-1}}) = k - 1$. Alors,

$$\ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) = k$$

3. Si $\pi_1 = \pi_k$:
Montrons que $\ell(s_{\pi_1} v s_{\pi_1}) = \ell(v s_{\pi_1}) + 1$:
Si $\ell(s_{\pi_1} v s_{\pi_1}) < \ell(v s_{\pi_1})$ alors il y a deux cas de figures :

(a) Si $\ell(s_{\pi_1}v) < \ell(v)$: Alors, d'après le lemme d'échange, il existe un entier $q \in \{2, \dots, k-1\}$, tel que

$$s_{\pi_1}v = s_{\pi_2} \cdots \widehat{s}_{\pi_q} \cdots s_{\pi_{k-1}}$$

Donc

$$s_{\pi_1}v = s_{\pi_2} \cdots \hat{s}_{\pi_q} \cdots s_{\pi_{k-1}}.$$

D'une part, puisque $\pi_1 \notin supp(v)$, on a nécessairement

$$\pi_1 \in supp(s_{\pi_1}v).$$

D'autre part,

$$\pi_1 \notin supp(s_{\pi_2} \cdots \widehat{s}_{\pi_q} \cdots s_{\pi_{k-1}}).$$

Ceci donne une contradiction.

(b) Si $\ell(s_{\pi_1}v) > \ell(v)$: Dans ce cas, on peut déduire que

$$s_{\pi_1}vs_{\pi_1} = v.$$

En effet, puisque $\ell(s_{\pi_1}vs_{\pi_1}) < \ell(s_{\pi_1}v)$, on sait que

$$(s_{\pi_1}v)s_{\pi_1} < s_{\pi_1}v$$

Par suite, d'après le lemme d'échange, il existe un entier $q \in \{1, \dots, k-1\}$, tel que

$$s_{\pi_1}vs_{\pi_1} = s_{\pi_1}s_{\pi_2} \cdots \widehat{s}_{\pi_q} \cdots s_{\pi_{k-1}}$$

On remarque en plus que q est nécessairement égal à 1 (Sinon en simplifiant cette égalité à gauche par s_{π_1} on trouve une contradiction avec la longueur de vs_{π_1}.) On en déduit alors le résultat en question. Et donc,

$$s_{\pi_1}v = vs_{\pi_1}.$$

Or d'après le lemme 7.20 on a une contradiction.

Enfin en raisonnant par l'absurde on a montré que $\ell(s_{\pi_1}vs_{\pi_1}) = \ell(vs_{\pi_1}) + 1$. Et donc le résultat est vrai jusqu'à l'ordre k.

□

Lemme 7.10. *Soit $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in W_\vee$. Alors,*

$$\ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) = k.$$

Démonstration. Posons $\iota : W \to W$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, l\}$ on a $\iota(s_i) = s_{l+1-i}$. On remarque que ι définit un automorphisme de groupes Coxeter qui envoie $W_\vee$ sur $W_\wedge$. Alors ι préserve la longueur d'un élément du groupe. Ceci donne le résultat. □

Proposition 7.3. *Soit $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in \Pi \cup \Pi'$ telle que $s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}$ est à support connexe. Alors,*

$$\ell(s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}) = k$$

Démonstration. On pose $v := s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_k}$.
On remarque que si $\pi \in \Pi$ (respectivement $\pi \in \Pi'$) alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$, telles que $(\pi_1, \dots, \pi_{i-1}) \in W_\wedge$, $(\pi_i, \dots, \pi_k) \in W_\vee$ (respectivement $(\pi_1, \dots, \pi_{i-1}) \in W_\vee$, $(\pi_i, \dots, \pi_k) \in W_\wedge$) et que les deux ensembles $\{\pi_1, \dots, \pi_{i-1}\}$ et $\{\pi_i, \dots, \pi_k\}$ sont disjoints. Par suite en utilisant les Lemmes 7.9 et 7.10 on obtient le résultat. □

Lemme 7.11. *[12] Soit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_t} \in W$ (groupe de Weyl quelconque) une écriture réduite et soit α_i une racine simple. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$\ell(ws_i) < \ell(w) \Leftrightarrow w(\alpha_i) < 0$$

Lemme 7.12. *Soient $v_1, v_2 \in W$ (groupe de Weyl quelconque) tels que $\ell(v_1v_2) = \ell(v_1) + \ell(v_2)$ et soit $i \in I \cup \{0\}$. On note $v := v_1v_2$ et $w := v_1s_iv_2$. On suppose en plus que $\ell(w) = \ell(v) + 1$. Si on note $\beta = v_2^{-1}(\alpha_i)$, alors,*

$$w^{-1}v = s_\beta \text{ et } \beta > 0.$$

Démonstration. Puisque $w = v_1s_iv_2$ et $v = v_1v_2$. Alors

$$w^{-1}v = (v_2^{-1}s_iv_1^{-1}) \cdot (v_1v_2) = v_2^{-1}s_iv_2.$$

Or

$$v_2^{-1}s_iv_2 = s_{v_2^{-1}(\alpha_i)}.$$

D'autre part, d'après le Lemme 7.11 et puisque $\ell(v_2^{-1}s_i) = \ell(v_2^{-1}) + 1$ on a,

$$v_2^{-1}(\alpha_i) > 0$$

Donc

$$w^{-1}v = s_\beta \text{ tel que } \beta = v_2^{-1}(\alpha_i) > 0.$$

□

7.2 Élément principal de la preuve de la conjecture

On commence cette section par énoncer et démontrer des éléments qui serviront à prouver la proposition 7.5. Cette dernière sera l'une des arguments les plus importants pour la démonstration (par une double récurrence) de la formule en question (Théorème 7.8).

Définition 7.13. *1. On définit le sous ensemble $\mathcal{A}_{2l}$ de $S(\tilde{C}_l)$ de la manière suivante :*

$$\mathcal{A}_{2l} := \{s_i \ \ldots \cdot s_l \ \cdots \cdot \ s_0 \ \ldots \cdot s_{i-1}\}_{i=1,\ldots,l} \cup \{s_j \ \cdots \cdot \ s_0 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots \cdot \ s_{j+1}\}_{j=0,\ldots l-1}$$

2. On définit aussi $\mathcal{A} := \{t;\ \exists z \in \mathcal{A}_{2l},\ t \leqslant z\}$

Remarque 7.14. *On remarque que tout les éléments de $\mathcal{A}_{2l}$ ont longueur $2l$ ce qui justifie sa notation. On remarque aussi que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des éléments de $S(\tilde{C}_l)$ qui sont plus petits que des éléments de $\mathcal{A}_{2l}$.*

C'est facile de voir qu'on peut retrouver les éléments de $\mathcal{A}$ à partir des éléments de Π et Π'. On a alors le résultat suivant :

Lemme 7.15. $\mathcal{A} = W(\Pi \cup \Pi')$.

Lemme 7.16. *[14, Proposition 13.1.7] On a*

$$t_{\theta^\vee} = s_{\delta-\theta}s_\theta$$

Lemme 7.17. *En plus,*

$$\forall w \in S(\tilde{C}_l);\ w\mathcal{A}_{2l}w^{-1} = \mathcal{A}_{2l}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\forall i \in \{0, \dots, l\};\ s_i \mathcal{A}_{2l} s_i = \mathcal{A}_{2l}$$

Soit $w \in \mathcal{A}_{2l}$ alors il existe $j \in \{1, \dots, l\}$ tel que :

$$w = s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1} \ \text{ ou } \ w = s_j \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_l \ \dots \cdot s_{j+1}$$

Dans cette preuve on va montrer que $\mathcal{A}_{2l}$ est stable par conjugaison par le groupe de Weyl, pour les éléments de la forme $w = s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1}$. La preuve de la seconde form de w ce fait d'une manière similaire.
En effet, supposons que $w = s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1}$ et soit $i \in \{0, \dots, l\}$. On a quatre cas de figures :

1. Si $i < j - 1$:

$$\begin{aligned} s_i w s_i &= s_i s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1} s_i \\ &= s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{i+2}(s_i s_{i+1} s_i) s_{i-1} \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{i-1}(s_i s_{i+1} s_i) s_{i+2} \ \dots \cdot s_{j-1} \\ &= s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{i+2}(s_{i+1} s_i s_{i+1}) s_{i-1} \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{i-1}(s_{i+1} s_i s_{i+1}) s_{i+2} \ \dots \cdot s_{j-1} \\ &= s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1} \\ &= w \end{aligned}$$

2. Si $i = j - 1$:

$$s_{j-1} w s_{j-1} = s_{j-1} \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-2} \in \mathcal{A}_{2l}$$

3. Si $i = j$:

$$s_j w s_j = s_{j+1} \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_j \in \mathcal{A}_{2l}$$

4. Si $i > j$:

$$\begin{aligned} s_i w s_i &= s_i s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1} s_i \\ &= s_j \ \dots \cdot s_{i-2}(s_i s_{i-1} s_i) s_{i+1} \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{i+1}(s_i s_{i-1} s_i) s_{i-2} \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1} \\ &= s_j \ \dots \cdot s_{i-2}(s_{i-1} s_i s_{i-1}) s_{i+1} \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{i+1}(s_{i-1} s_i s_{i-1}) s_{i-2} \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1} \\ &= s_j \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \dots \cdot s_{j-1} \\ &= w \end{aligned}$$

□

Corollaire 7.4. *On considère l'action de $S(C_l)$ sur $S(\tilde{C}_l)$ par conjugaison. Alors,*

$$S(C_l) \cdot t_{-\theta^\vee} = \mathcal{A}_{2l}$$

Démonstration. Tout d'abord, d'après la remarque 3.23 on sait que,

$$\forall i = 1, \dots, l;\ \ \varepsilon_i^\vee = s_i \ \dots \cdot s_{l-1}(\alpha_l^\vee)$$

et puisque $\theta^\vee = \varepsilon_1^\vee$, on a

$$\theta^\vee = s_1 \ \dots \cdot s_{l-1}(\alpha_l^\vee)$$

Donc,

$$s_{\theta^\vee} = s_1 \ \dots \cdot s_l \ \cdots . \ s_1$$

Par suite, d'après le Lemme 7.16,

$$t_{-\theta^\vee} = s_1 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_1 s_0 \tag{7.1}$$

On remarque aussi que

$$\begin{aligned} s_1 t_{\theta^\vee} s_1 &= t_{-s_1(\theta^\vee)} \\ &= t_{-\varepsilon_2^\vee} \\ &= s_2 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_1 s_0 s_1 \end{aligned}$$

En tenant compte de l'initialisation (7.1), on peut montrer par récurrence sur i que :

$$\forall i = 1, \ldots, l-1; \quad s_i t_{-\varepsilon_i^\vee} s_i = s_{i+1} \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_i$$

De même, puisque

$$\begin{aligned} s_l t_{-\varepsilon_l^\vee} s_l &= t_{-s_l(\varepsilon_l^\vee)} \\ &= t_{\varepsilon_l^\vee} \\ &= s_{l-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_l \end{aligned}$$

on peut aussi montrer par récurrence descendante sur i que :

$$\forall i = 1, \ldots, l; \quad s_i t_{\varepsilon_i^\vee} s_i = s_{i-1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_i$$

On en déduit que

$$S(C_l) \cdot t_{-\theta^\vee} \supset \mathcal{A}_{2l}$$

Enfin on retrouve le résultat puisque, d'après le Lemme 7.17, $\mathcal{A}_{2l}$ est stable par conjugaison. □

Dans la suite, on veux montrer une propriété (Proposition 7.5) concernant le nombre de composantes connexes du support des éléments du groupe de Weyl. Dans ce but, on définit le suivant :

Définition 7.18. *Soit $v \in \mathcal{A}$. On note par $comp(v)$ le nombre de composantes connexes du support de v noté $supp(v)$. Soient $\{C_i\}_{i \in \{1,\ldots,comp(v)\}}$ ces composantes connexes de telle sorte que :*

$$\forall i < j, \ \forall x \in C_i, \ \forall y \in C_j; \quad x < y$$

On note pour tout $i \in \{1, \ldots, comp(v)\}$, $v_i \leqslant v$ tel que $supp(v_i) = C_i$ et $v = \prod_{i=1}^{comp(v)} v_i$. En plus v_1 sera appelé "composante la plus basse de v".

Remarque 7.19. *On remarque que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $v_i v_j = v_j v_i$.*

Définition 7.20. *Soit $m \in \{1, \ldots, 2l\}$.*

On définit, $c_{0,m} := \begin{cases} s_{m-1} \ \cdots . \ s_0 & si \ m \in \{1, \ldots, l+1\} \\ s_{2l-m+1} s_{2l-m+2} \ \ldots \cdot s_l s_{l-1} \ \cdots . \ s_0 & si \ m \in \{l+2, \ldots, 2l\} \end{cases}$

On remarque que $l(c_{0,m}) = m$ pour tout $m \in \{1, \ldots, 2l\}$.

Remarque 7.21. *Soit $v \in W_{\text{aff}}^-$ et $m \in \{2, \ldots, 2l\}$ tel que $v \leqslant c_{0,m}$ et $\ell(v) = \ell(c_{0,m}) - 1$. Alors,*

$$v = c_{0,m-1}$$

Démonstration. Soient v et m comme si-dessus. Puisque $c_{0,m}$ n'admet qu'une seule écriture réduite $s_{m-1} \cdot \cdots \cdot s_0$ si $m \in \{1, \ldots, l+1\}$ (resp. $s_{2l-m+1}s_{2l-m+2} \cdot \cdots \cdot s_l s_{l-1} \cdot \cdots \cdot s_0$ si $m = \{l+2, \ldots, 2l\}$). Alors on peut retrouver v en éliminant une racine simple de cette écriture. On remarque que si on enlève une racine de $s_{m-1} \cdot \cdots \cdot s_0$ si $m \in \{1, \ldots, l+1\}$ (resp. $s_{2l-m+1}s_{2l-m+2} \cdot \cdots \cdot s_l s_{l-1} \cdot \cdots \cdot s_0$ si $m \in \{l+2, \ldots, 2l\}$) autre que celle de l'extrémité gauche, alors $v \notin W_{\text{aff}}^-$. Or $v \in W_{\text{aff}}^-$ alors on obtient,

$$v = \begin{cases} s_{m-2} \cdot \cdots \cdot s_0 & \text{si } m \in \{2, \ldots, l+2\} \\ s_{2l-m+2}s_{2l-m+3} \cdot \cdots \cdot s_l s_{l-1} \cdot \cdots \cdot s_0 & \text{si } m \in \{l+3, \ldots, 2l\} \end{cases}$$

□

Notations 7.22. *Soit $v \in \mathcal{A}$, $m \in \{1, \ldots, 2l\}$ tel que $\ell(v) = m$ et $i \in I \cup \{0\}$.*

- *On note $\mathcal{A}_v^i := \{w \in \mathcal{A};\ v \leqslant w,\ \ell(w) = \ell(v) + 1$ et $c_{s_i,v}^w \neq 0\}$.*
- *On note c_v le coefficient de A_v dans l'expression de $j_0(\xi_{c_{0,m}})$.*
- *On note aussi $b_v := 2^{comp(v)-1}$.*

Proposition 7.5. *Soit $v \in \mathcal{A}$ tel que $\ell(v) < 2l$. Alors on a,*

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2b_v$$

Schéma de la preuve 1. *Dans le schéma suivant $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ corresponde à l'écriture réduite de v. Supposons que $0 \in supp(v)$, on définit dans le cas où $\pi \in \Pi(a, m, 0, b)$ (respectivement $\pi \in \Pi'(a', 0, m', b')$) des entiers q et p dans $\{1, \ldots, k\}$ tels que $\pi_q = 0$ et $\pi_p = m$ (respectivement $\pi_q = 0$ et $\pi_p = m'$). Dans cette preuve on aura besoin de définir un élément r et sa position i^* dans l'écriture π, qui correspond à l'extrémité de la plus grande partie connexe à gauche de 0 dans l'écriture π. Plus précisément, on définit les éléments i^* et r de la manière suivante :*

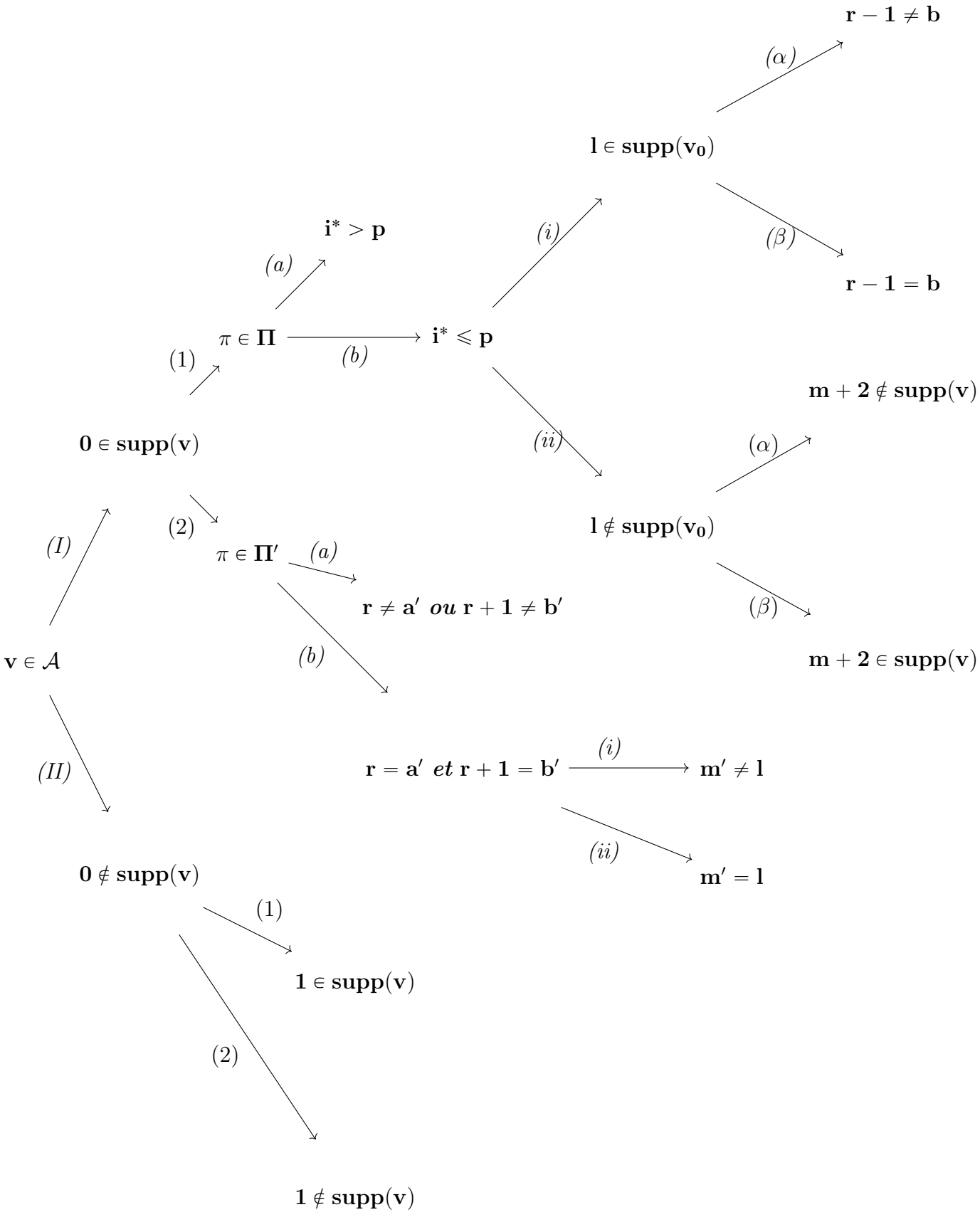
- *Si $\pi \in \Pi$:*
  Soit $i^* \in \{1, \ldots, q\}$ tel que :
  - *Si $q = p + m$ et $\pi_1 = m - p + 1$ alors $i^* = 1$.*
  - *Si $q = p + m$ et $\pi_1 < m - p + 1$ alors i^* est tel que $\pi_{i^*} = m - p + i^*$ et $\pi_{i^*-1} < m - p + i^* - 1$.*
  - *Si $q < p + m$ alors i^* est tel que $\pi_{i^*} = q - i^*$ et $\pi_{i^*-1} > q - i^* + 1$.*
- *Si $\pi \in \Pi'$:*
  Soit $i^* \in \{1, \ldots, q\}$ tel que
  - *Si $\pi_1 = q - 1$ alors $i^* = 1$.*
  - *Si $\pi_1 > q - 1$ alors i^* est tel que $\pi_{i^*} = q - i^*$ et $\pi_{i^*-1} > q - i^* + 1$.*

On note dans tout les cas $r := \pi_{i^*}$.

On aura aussi besoin de définir un élément r' et sa position i_* dans l'écriture π, qui correspond à l'extrémité de la plus grande partie connexe à droite de 0 dans l'écriture π dans Π'. Plus précisément, on définit l'élément r' de la manière suivante :

- *Si* $\pi \in \Pi'$ *:*
  Soit $i_* \in \{q, \dots, k\}$ *tel que :*
  - *Si* $p = q + m$ *et* $\pi_k = m + p - k$ *alors* $i_* = k$.
  - *Si* $p = q + m$ *et* $\pi_k < m + p - k$ *alors* i_* *est tel que* $\pi_{i_*} = m + p - i_*$ *et* $\pi_{i_*+1} < m + p - i_* - 1$.
  - *Si* $p < q + m$ *alors* i_* *est tel que* $\pi_{i_*} = i_* - q$ *et* $\pi_{i_*+1} > i^* + 1 - q$.
- *Si* $\pi \in \Pi$ *:*
  Soit $i_* \in \{q, \dots, k\}$ *tel que*
  - *Si* $\pi_k = k - q$ *alors* $i_* = k$.
  - *Si* $\pi_k > k - q$ *alors* i_* *est tel que* $\pi_{i_*} = i_* - q$ *et* $\pi_{i_*+1} < i_* + 1 - q$.

On note dans tout les cas $r' := \pi_{i_*}$.


$\mathbf{r-1\neq b}$
(α)
$\mathbf{l\in supp(v_0)}$
$\mathbf{i^*>p}$
(i)
(β)
$\mathbf{r-1=b}$
(a)
$\pi\in\mathbf{\Pi}$
$\mathbf{i^*\leqslant p}$
(b)
(1)
$\mathbf{m+2\notin supp(v)}$
$\mathbf{0\in supp(v)}$
(ii)
(α)
(2)
$\mathbf{l\notin supp(v_0)}$
(I)
$\pi\in\mathbf{\Pi'}$
(a)
(β)
$\mathbf{r\neq a'}$ *ou* $\mathbf{r+1\neq b'}$
(b)
$\mathbf{m+2\in supp(v)}$
$\mathbf{v}\in\mathcal{A}$
(II)
$\mathbf{r=a'}$ *et* $\mathbf{r+1=b'}$
(i)
$\mathbf{m'\neq l}$
(ii)
$\mathbf{m'=l}$
$\mathbf{0\notin supp(v)}$
(1)
$\mathbf{1\in supp(v)}$
(2)
$\mathbf{1\notin supp(v)}$

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{A}$ tel que $\ell(v) < 2l$. On écrit $v = \prod_i v_i$.

(I) Si $0 \in supp(v)$:
Soit $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ une écriture réduite de v_0 telle que :

- Il existe a, m et b tels que $\pi \in \Pi(a, m, 0, b)$
  ou
- Il existe a', m' et b' tels que $\pi \in \Pi'(a', 0, m, b')$

On définit dans les deux cas des entiers q et p dans $\{1, \ldots, k\}$ tels que $\pi_q = 0$ et $\pi_p = m$. (q et p sont les positions respectives de 0 et m dans l'écriture π).

(1) Si $\pi \in \Pi(a, m, 0, b)$. Alors

$$a = \pi_1 < \ldots < \pi_p > \pi_{p+1} > \ldots > \pi_q = 0 < \ldots < \pi_k = b$$

(a) Si $i^* > p$. On peut remarquer que dans ce cas on a

$$\{0, \ldots, r\} = \{\pi_q \ldots \pi_{q-r}\}$$

Alors

$$v_0 = (s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_{q-r-1}})(s_r \ \cdots \ . \ s_0 s_{\pi_{q+1}} \ldots s_{\pi_k}).$$

On note $w_1 := (\prod_{i \neq 0} v_i)(s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_{q-r-1}}) s_{r+1} (s_r \ \cdots \ . \ s_0 s_{\pi_{q+1}} \ldots s_{\pi_k})$. Alors

$$w_1 \leqslant v \ \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_{w_1} = b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1} v$ vérifie $\beta_1^\vee = s_{\pi_k} \ldots s_{\pi_{q+1}} s_0 \ \ldots \cdot s_r(\alpha_{r+1}^\vee)$. Donc,

$$\begin{aligned} \beta_1^\vee &= s_{\pi_k} \ldots s_{\pi_{q+1}} s_0 \ \ldots \cdot s_r(\alpha_{r+1}^\vee) \\ &= s_{\pi_k} \ldots s_{\pi_{q+1}} (2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \ldots + \alpha_{r+1}^\vee) \end{aligned}$$

Or $0 \notin \{\pi_k, \ldots, \pi_{q+1}\}$ alors

$$c_{s_0, v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 2.$$

Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^0} c_{s_0, v}^w b_w \geqslant 2 b_v$$

(b) $i^* \leqslant p$: On peut remarquer dans ce cas que $\{r, r+1, \ldots, m\} = \{\pi_{p-r}, \ldots, \pi_p\}$ et $\{\pi_q, \ldots, \pi_{p+1}\} = \{0, \ldots, m-1\}$.

(i) Si $m = l$:
Alors

$$v_0 = (s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_{p-r-1}})(s_r s_{r+1} \ \ldots \cdot s_l \ \cdots \ . \ s_0 s_{\pi_{q+1}} \ldots s_{\pi_k}).$$

(α) Si $b < r - 1$:

On note $w_1 := (\prod_{i \neq 0} v_i) s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_{p-r-1}} s_{r-1} s_r \ \ldots \cdot s_l \ \cdots \ . \ s_0 s_{\pi_{q+1}} \ldots s_{\pi_k}$.
Alors

$$v \leqslant w_1 \ \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après la proposition 7.3).}$$

On peut aussi remarquer que $b_{w_1} = b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1}v$ vérifie $\beta_1^\vee = s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{q+1}} s_0 \ \dots \cdot s_l \ \cdots \cdot \ s_r(\alpha_{r-1}^\vee)$. Donc,

$$\begin{aligned}\beta_1^\vee &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{q+1}} s_0 \ \dots \cdot s_l \ \cdots \cdot \ s_r(\alpha_{r-1}^\vee) \\ &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{q+1}} (2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \dots + \alpha_{r-1}^\vee + 2\alpha_r^\vee + \dots + \alpha_l^\vee)\end{aligned}$$

Or $0 \notin \{\pi_k, \dots, \pi_{q+1}\}$. Alors

$$c_{s_0,v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 2.$$

Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2b_v$$

(β) Si $r - 1 = b$: Dans ce cas on a nécessairement $a = r$ (puisque $b < a$) et donc $i^* = 1$.
D'autre part, on rappelle que $r' = \pi_{i_*}$ (cf. Schéma de la preuve). On sait que i_* est dans $\{q+1, \dots, k-1\}$ parce que $i^* = 1$.
Alors,

$$v_0 = s_r s_{r+1} \ \dots \cdot s_l \ \cdots \cdot \ s_0 s_1 \ \dots \cdot s_{r'} s_{\pi_{i_*+1}} \dots s_{\pi_k}.$$

Donc d'après le Lemme 7.3 on a

$$v_0 = s_{\pi_{i_*+1}-1} \dots s_{\pi_k - 1} s_r s_{r+1} \ \dots \cdot s_l \ \cdots \cdot \ s_0 s_1 \ \dots \cdot s_{r'}$$

et on a bien $\pi_{i_*+1} > r' + 1$ alors

$$\pi_{i_*+1} - 1 > r'.$$

On note $w_1 := (\prod_{i \neq 0} v_i) s_{\pi_{i_*+1}-1} \dots s_{\pi_k - 1} s_{r-1} s_r \ \dots \cdot s_l \ \cdots \cdot \ s_0 s_1 \ \dots \cdot s_{r'}$. Alors

$$v \leqslant w_1 \ \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après la proposition 7.3).}$$

On peut aussi remarquer que $b_{w_1} = b_v$. Comme précédemment (cas (α)) on obtient

$$c_{s_0,v}^{w_1} = 2.$$

Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2b_v$$

(ii) Si $m \neq l$:
Alors

$$v_0 = (s_{\pi_1} \dots s_{\pi_{p-r-1}})(s_r s_{r+1} \ \dots \cdot s_m \ \cdots \cdot \ s_0 s_{\pi_{q+1}} \dots s_{\pi_k}).$$

D'après les lemmes 7.2 et 7.3, on peut écrire

$$v_0 = s_m \ \cdots \cdot \ s_0 s_{i_1} \dots s_{i_{k'}}, \text{ où } 1 \leqslant i_1 < \dots i_{k'} \leqslant m.$$

(α) Si $m + 2 \notin supp(v)$:

On note $w_1 = (\prod_{i\neq 0} v_i)s_{m+1}s_m \ \cdots\ . \ s_0 s_{i_1} \dots s_{i_{k'}}$. Alors

$$v \leqslant w_1 \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_{w_1} = b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1}v = s_0$ vérifie

$$\begin{aligned}\beta_1^\vee &= s_{i_{k'}} \dots s_{i_1} s_0 \ \dots \cdot s_m(\alpha_{m+1}^\vee) \\ &= s_{i_{k'}} \dots s_{i_1}(2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \dots + \alpha_{m+1}^\vee)\end{aligned}$$

Or $0 \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ alors

$$c_{s_0,v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 2.$$

Donc,

$$\sum_{w\in\mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2b_v$$

(β) Si $m+2 \in supp(v)$:
On suppose que C_1 est la composante connexe de $m+2$. Alors $supp(v_1) = C_1$. Soit π' une écriture réduite de v_1. Alors il existe un entier m' dans $\{1, \dots, l\}$, et des entiers a_1, b_1, a_2 et b_2 dans $\{r+2, \dots, m'\}$ tels que

$$\pi' \in \Pi(a_1, m', r+2, b_1) \cup \Pi'(a_2, r+2, m', b_2)$$

On peut montrer dans ce cas d'après le corollaire 7.1 qu'il existe des entiers $i_1 < \dots < i_q < m' > j_q' > \dots > j_1$ tels que $v_1 = s_{i_1} \dots s_{i_q} s_{m'} s_{j_{q'}} \dots s_{j_1}$ et $m+2 \in \{i_1, j_1\}$.
On note $w_1 = (\prod_{i\geqslant 2} v_i)v_1 s_{m+1} v_0$. Alors

$$v \leqslant w_1 \ \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_{w_1} = \frac{1}{2}b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1}v = s_0$ vérifie,

$$\begin{aligned}\beta_1^\vee &= s_{i_{k'}} \dots s_{i_1} s_0 \ \dots \cdot s_m(\alpha_{m+1}^\vee) \\ &= s_{i_{k'}} \dots s_{i_1}(2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \dots + \alpha_{m+1}^\vee)\end{aligned}$$

Or $0 \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ alors

$$c_{s_0,v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 2.$$

On note $w_2 = (\prod_{i\geqslant 2} v_i)s_{m+1} v_0 v_1$. Alors

$$v \leqslant w_2 \ \text{ et } \ell(w_2) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_{w_2} = \frac{1}{2}b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_2} = w_2^{-1}v = s_0$ vérifie,

$$\begin{aligned}s_{\beta_2} &= v_1^{-1} s_{i_{k'}} \cdots s_{i_1} s_0 \ \dots \cdot s_m(\alpha_{m+1}^\vee) \\ &= v_1^{-1} s_{i_{k'}} \cdots s_{i_1}(2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \dots + \alpha_{m+1}^\vee)\end{aligned}$$

Or $0 \notin supp(s_{i_1} \cdots s_{i_{k'}} v_1)$ alors

$$c_{s_0,v}^{w_2} = \langle \beta_2^\vee, \varpi_0 \rangle = 2.$$

Donc,

$$\sum_{w\in\mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2b_v$$

(2) si $\pi \in \Pi'(a', 0, m', b')$. Alors

$$a' = \pi_1 > \ldots > \pi_q = 0 < \pi_{q+1} < \ldots < \pi_p = m' > \ldots > \pi_k = b'.$$

Alors

$$v_0 = (s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_{q-r-1}})(s_r \ \cdots . \ s_0 s_{\pi_{q+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_k}).$$

Dans ce qui suit on va utiliser les entiers r et r' qu'on a définit dans le schéma de la preuve.

(a) Si $r \neq a'$ ou $r+1 \neq b'$:
On note $w_1 := (s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_{q-r-1}}) s_{r+1} (s_r \ \cdots . \ s_0 s_{\pi_{q+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_k})$. Alors

$$v \leqslant w_1 \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_{w_1} = b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1} v = s_0$ vérifie

$$\begin{aligned} \beta_1^\vee &= s_{\pi_k} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_{q+1}} s_0 \ \ldots \cdot s_r(\alpha_{r+1}^\vee) \\ &= s_{\pi_k} \ldots s_{\pi_{p+1}} (2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \ldots + \alpha_{r+1}^\vee) \end{aligned}$$

Or $0 \notin \{\pi_k, \ldots, \pi_{p+1}\}$ alors

$$c_{s_0,v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 2.$$

Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2 b_v$$

(b) Si $r = a'$ et $r+1 = b'$:

(i) Si $m' \neq l$:

D'après le Lemme 7.2, on a $v_0 \leqslant s_{m'} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{m'}$. D'autre part, puisque $l \notin supp(v)$ et en utilisant la proposition 7.2(2) on en déduit que $v \in W_\vee$. Alors il existe un mot réduit $\pi' \in \Pi$ tel que $w(\pi') = v$. Ce cas est déjà traité.

(ii) Si $m' = l$:

- Si $r' < r$: Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} v_0 &= s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'} s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_k} \\ &= (s_r \ \cdots . \ s_{r'+1})(s_{r'} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'})(s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_k}) \\ &= (s_r \ \cdots . \ s_{r'+1})(s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_k})(s_{r'} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'}) \end{aligned}$$

D'après le Lemme 7.4 ,

$$s_r \ \cdots . \ s_{r'+1} s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_k} \leqslant s_{r'+1} \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{r'+1}$$

Alors il existe un mot réduit π' de v_0 dans Π. Ce cas est déjà traité.

- Si $r' \geqslant r$ et $i_* < p$: Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} v_0 &= s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'} s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_k} \\ &= (s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'})(s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_{2p-i_*-1}})(s_{\pi_{2p-i_*}} \ldots s_{\pi_k}) \\ &= (s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_p} \ldots s_{\pi_{2p-i_*-1}})(s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'})(s_{\pi_{2p-i_*}} \ldots s_{\pi_k}) \end{aligned}$$

  D'après le Lemme 7.2 ,

$$s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'} s_{\pi_{2p-i_*}} \ldots s_{\pi_k} \leqslant s_{r'+1} \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_{r'+1}$$

  Alors il existe un mot réduit π' de v_0 dans Π. Ce cas est déjà traité.

- Si $i_* \geqslant p$: Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} v_0 &= (s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{r'})(s_{\pi_{i_*+1}} \ldots s_{\pi_k}) \\ &= (s_{\pi_{i_*+1}+1} \ldots s_{\pi_k+1})(s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{r'}) \ \text{(d'après le Lemme 7.3)} \end{aligned}$$

  Or $\pi_k + 1 = r + 2$. On note

$$w_1 = (\prod_{i \neq 0} v_i)(s_{\pi_{i_*+1}+1} \ldots s_{\pi_k+1}) s_{r+1}(s_r \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_{r'}).$$

  Alors

$$v \leqslant w_1 \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

  On peut aussi remarquer que $b_{w_1} = b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1} v$ vérifie

$$\begin{aligned} \beta_1^\vee &= s_{r'} \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_0 \ \ldots \cdot s_r(\alpha_{r+1}^\vee) \\ &= s_{r'} \ \ldots \cdot s_l \ \cdots . \ s_1(2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + \ldots + \alpha_{r+1}^\vee) \end{aligned}$$

  Or $0 \notin \{1, \ldots, l\}$ alors

$$c_{s_0,v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 2.$$

  Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2 b_v$$

(II) Si $0 \notin supp(v)$:

(1) Si $1 \in supp(v)$:
Tout d'abord puisque $0 \notin supp(v)$ et d'après la Proposition 7.2(1) on en déduit qu'il existe une écriture réduite $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ de v tel que :

$$\pi_1 < \ldots < \pi_p > \pi_{p+1} > \ldots > \pi_k \text{ et } 1 \in \{\pi_1, \pi_k\}$$

Alors

$$v = s_{\pi_1} \ldots s_{\pi_p} s_{\pi_{p+1}} \ldots s_{\pi_k}.$$

On note $w_1 = v s_0$. On remarque que $w_1 \in \mathcal{A}$. Alors

$$v \leqslant w_1 \text{ et } l(w_1) = l(v) + 1 \ \ (\text{car } 0 \notin supp(v)).$$

On a aussi $b_{w_1} = b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1}v$ vérifie $\beta_1^\vee = \alpha_0^\vee$. Alors

$$c_{s_0,v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 1.$$

On note $w_2 = s_0 v$. On remarque que $w_2 \in \mathcal{A}$. Alors

$$v \leqslant w_2 \text{ et } l(w_2) = l(v) + 1 \quad (\text{car } 0 \notin supp(v)).$$

On a aussi $b_{w_2} = b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_2} = w_2^{-1}v$ vérifie $\beta_2^\vee = v^{-1}(\alpha_0^\vee)$. Alors

$$c_{s_0,v}^{w_2} = \langle \beta_2^\vee, \varpi_0 \rangle = 1.$$

Donc,

$$\sum_{\substack{w \in \mathcal{A} \\ w \to^{\beta} v \\ <\varpi_0, \beta^\vee> \neq 0}} c_{s_0,v}^{w} b_w \geqslant b_{w_1} c_{s_0,v}^{w_1} + b_{w_2} c_{s_0,v}^{w_2} = 2b_v$$

(2) Si $1 \notin supp(v)$:
On note $w_1 = vs_0 (= s_0 v)$. On remarque que $w_1 \in \mathcal{A}$. Alors

$$v \leqslant w_1 \text{ et } \ell(w_1) = \ell(v) + 1 \quad (\text{ car } 0 \notin supp(v)).$$

On a aussi $b_{w_1} = 2b_v$. En utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_{\beta_1} = w_1^{-1}v$ vérifie $\beta_1^\vee = \alpha_0^\vee$. Alors

$$c_{s_0,v}^{w_1} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_0 \rangle = 1.$$

Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^0} c_{s_0,v}^{w} b_w \geqslant 2b_v$$

□

Remarque 7.23. *Par symétrie du diagramme de Dynkin en type C affine, on en déduit de la Proposition 7.5 une deuxième inégalité :*

$$\forall v \in \mathcal{A};\ \ell(v) < 2l; \quad \sum_{w \in \mathcal{A}_v^l} c_{s_l,v}^{w} b_w \geqslant 2b_v$$

Lemme 7.24. *Soit $u \in \mathcal{A}$ tel que $\ell(u) \geqslant 2$ et pour tout $v \in \mathcal{A}$, $u \notin \mathcal{A}_v^0$ et $u \notin \mathcal{A}_v^l$. Alors, il existe un entier $i \in \{1, \ldots, l\}$ et $t \in \mathcal{A}$ tels que :*

$$u \in \mathcal{A}_t^i \text{ et } \sum_{w \in \mathcal{A}_t^i} c_{s_i,t}^{w} b_w \geqslant 2b_t$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{A}$ tel que pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v \notin \mathcal{A}_v^0$.
Montrons tout d'abord que le support de u ne contient pas 0. En effet, si $0 \in supp(u)$ alors il existe des éléments u_1 et u_2 dans $\mathcal{A}$ tels que $u = u_1 s_0 u_2$ (produit réduit) et $0 \notin supp(u_1) \cup supp(u_2)$. On a trois cas de figures :

1. Si $u_1 s_0 = s_0 u_1$: Dans ce cas $u = s_0 u_1 u_2$.
   On note $v := u_1 u_2$. On remarque que $\ell(v) = \ell(u) - 1$ et en utilisant le Lemme 7.12, la racine positive tel que $s_\beta = u^{-1}v = u_2^{-1} s_0 u_2$ vérifie $\beta^\vee = u_2^{-1}(\alpha_0^\vee)$. Alors

$$c_{s_0,v}^{u} = 1 \neq 0 \quad (\text{contradiction}).$$

2. Si $u_2 s_0 = s_0 u_2$: Dans ce cas $u = u_1 u_2 s_0$.
   On note $v := u_1 u_2$. On remarque que $\ell(v) = \ell(u) - 1$ et en utilisant le Lemme 7.12, la racine positive β telle que $s_\beta = u^{-1} v = s_0$ vérifie $\beta^\vee = \alpha_0^\vee$. Alors

$$c^u_{s_0,v} = 1 \neq 0 \quad \text{(contradiction)}.$$

3. Si $u_1 s_0 \neq s_0 u_1$ et $u_2 s_0 \neq s_0 u_2$: Dans ce cas, on remarque qu'il existe des éléments u_1' et u_2' tels que les produits $u_1 = u_1' s_1$ et $u_2 = s_1 u_2'$ sont réduits, et $1 \notin supp(u_1') \cup supp(u_2')$. Alors

$$u = u_1' s_1 s_0 s_1 u_2'.$$

   On note $v := u_1' s_0 s_1 u_2'$, d'après le Lemme 7.3 on a

$$\ell(v) = \ell(u) - 1$$

   et en utilisant le Lemme 7.12, la racine positive β telle que $s_\beta = u^{-1} v = s_0$ vérifie

$$\begin{aligned} \beta^\vee &= u_2^{'-1} s_1 s_0 (\alpha_1^\vee) \\ &= u_2^{'-1} s_1 (2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee) \\ &= u_2^{'-1} (2\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee) \end{aligned}$$

   Alors, puisque $0 \notin supp(u_2')$, on a

$$c^u_{s_0,v} = 2 \neq 0 \quad \text{(contradiction)}.$$

Puisque $u \notin \mathcal{A}_v^l$ on peut aussi montrer que

$$l \notin supp(u).$$

Pour la suite de la preuve, on note u_1 la plus petite composante connexe de u. Puisque $0, l \notin supp(u_1)$, en utilisant le Lemme 7.4, on a

$$u_1 \in W_\vee$$

c'est à dire il existe une écriture réduite $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ de u_1 telle que :

$$\exists p \in \{1, \ldots, k\};\ \pi_1 > \ldots > \pi_p < \pi_{p+1} < \ldots < \pi_k$$
$$\text{et}$$
$$\{\pi_1, \ldots, \pi_k\} = \{\min_j(\pi_j), \min_j(\pi_j) + 1, \ldots, \max_j(\pi_j)\}$$

On pose $i = \pi_p$. On a cinq cas de figures :

1. Si $p = 1$: Dans ce cas $\pi = (\pi_p, \ldots, \pi_k)$. Alors

$$u_1 = s_{\pi_p} \cdots s_{\pi_k}.$$

   Puisque le support de u_1 est complet on peut déduire que

$$u_1 = s_i \ \ldots \cdot s_m.$$

Donc

$$u = (\prod_{j\neq i} u_j)s_i \ \dots \cdot s_m.$$

On note $t := (\prod_{j\neq i} u_j)s_{i+1} \ \dots \cdot s_m$. Alors

$$t \leqslant u \text{ et } \ell(u) = \ell(t) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_t = b_u$. En utilisant le Lemme 7.12, La racine positive β telle que $s_\beta = w_1^{-1}t$ vérifie,

$$\begin{aligned}\beta^\vee &= s_m \ \cdots . \ s_{i+1}(\alpha_i^\vee)\\ &= \alpha_m^\vee + \cdots + \alpha_i^\vee\end{aligned}$$

Alors

$$c^u_{s_i,t} = \langle \beta^\vee, \varpi_i \rangle = 1.$$

On note $w_1 := (\prod_{j\neq i} u_j)s_{i+1} \ \dots \cdot s_m s_i$. Alors

$$t \leqslant w_1 \text{ et } \ell(w_1) = \ell(t) + 1 \ \text{ (d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_t = b_{w_1}$ (puisque u_1 est la composante connexe la plus basse de u). En utilisant le Lemme 7.12, La racine positive β_1 telle que $s_{\beta_1} = w_1^{-1}t$ vérifie,

$$\beta_1^\vee = \alpha_i^\vee$$

Alors

$$c^u_{s_i,t} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_i \rangle = 1.$$

Donc,

$$\sum_{w\in\mathcal{A}_t^i} c^w_{s_i,t} b_w \geqslant b_{w_1} c^{w_1}_{s_i,t} + b_u c^u_{s_i,t} = 2b_t$$

2. Si $p = k$: Ce cas est traité d'une manière similaire que le cas 1.

3. Si $\pi_{p-1} \neq i+1$: Dans ce cas on a $\pi_{p+1} = i+1$. Alors

$$u_1 = s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{p-1}} s_i s_{i+1} s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k}.$$

Donc

$$u = (\prod_{j\neq i} u_j) s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{p-1}} s_i s_{i+1} s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k}.$$

On note $t := (\prod_{j\neq i} u_j) s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{p-1}} s_{i+1} s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k}$. Alors

$$t \leqslant u \text{ et } \ell(u) = \ell(t) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_t = b_u$. En utilisant le Lemme 7.12, La racine positive β telle que $s_\beta = w_1^{-1}t$ vérifie,

$$\begin{aligned}\beta^\vee &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{p+2}} s_{i+1}(\alpha_i^\vee)\\ &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{p+2}}(\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee)\end{aligned}$$

Or $i \notin \{\pi_k, \dots, \pi_{p+2}\}$ alors

$$c^u_{s_i,t} = \langle \beta^\vee, \varpi_i \rangle = 1.$$

On note $w_1 := (\prod_{j\neq i} u_j) s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{p-1}} s_{i+1} s_i s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k}$. Alors

$$t \leqslant w_1 \text{ et } \ell(w_1) = \ell(t) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_t = b_{w_1}$. En utilisant le Lemme 7.12, La racine positive β_1 telle que $s_{\beta_1} = w_1^{-1} t$ vérifie,

$$\begin{aligned} \beta_1^\vee &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{p+2}} s_{i+1}(\alpha_i^\vee) \\ &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{p+2}} (\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee) \end{aligned}$$

Or $i \notin \{\pi_k, \dots, \pi_{p+2}\}$ alors

$$c^u_{s_i,t} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_i \rangle = 1.$$

Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}^i_t} c^w_{s_i,t} b_w \geqslant b_{w_1} c^{w_1}_{s_i,t} + b_u c^u_{s_0,t} = 2b_t$$

4. Si $\pi_{p+1} \neq i+1$: Même raisonnement que le cas 3

5. Si $\pi_{p-1} = \pi_{p+1} = i+1$: Dans ce cas,

$$\begin{aligned} u &= (\prod_{j\neq i} u_j) s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{p-2}} s_{i+1} s_i s_{i+1} s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k} \\ &= (\prod_{j\neq i} u_j) s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{p-2}} s_i s_{i+1} s_i s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k} \end{aligned}$$

On note $t = (\prod_{j\neq i} u_j) s_{\pi_1} \cdots s_{\pi_{p-2}} s_i s_{i+1} s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k}$. Alors

$$t \leqslant u \text{ et } \ell(u) = \ell(t) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_t = b_u$. En utilisant le Lemme 7.12, La racine positive β telle que $s_\beta = w_1^{-1} t$ vérifie,

$$\begin{aligned} \beta^\vee &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{p+2}} (\alpha_i^\vee) \\ &= \alpha_i^\vee \end{aligned}$$

Donc

$$c^u_{s_i,t} = \langle \beta^\vee, \varpi_i \rangle = 1.$$

On note $w_1 := (\prod_{j\neq i} u_j) s_{p-2} \cdots s_{\pi_{p-1}} s_{i-1} s_i s_{i+1} s_{\pi_{p+2}} \cdots s_{\pi_k}$. Alors

$$t \leqslant w_1 \text{ et } \ell(w_1) = \ell(t) + 1 \quad \text{(d'après le Lemme 7.9).}$$

On peut aussi remarquer que $b_t = b_{w_1}$ (la minimalité de i assure que $i-2 \notin supp(u)$). En utilisant le Lemme 7.12, La racine positive β_1 telle que $s_{\beta_1} = w_1^{-1} t$ vérifie,

$$\begin{aligned} \beta_1^\vee &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{p+2}} s_{i+1} s_i (\alpha_{i-1}^\vee) \\ &= s_{\pi_k} \dots s_{\pi_{p+2}} (\alpha_{i-1}^\vee + \alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee) \end{aligned}$$

Or $i \notin \{\pi_k, \dots, \pi_{p+2}\}$ alors $c^u_{s_i,t} = \langle \beta_1^\vee, \varpi_i \rangle = 1$.
Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}^i_t} c^w_{s_i,t} b_w \geqslant b_{w_1} c^{w_1}_{s_i,t} + b_u c^u_{s_0,t} = 2b_t$$

□

Lemme 7.25. *[18, Lemme 3.2] Soit $\lambda \in Q^\vee$ et $w \in W$ tels que $w \cdot \lambda$ antidominant. Alors,*

$$\ell(t_{w\cdot\lambda}) = \langle w \cdot \lambda, -2\rho \rangle$$

On démontre tout d'abord deux cas particuliers du théorème qui permettent d'initialiser la preuve par récurrence de celui ci :

Lemme 7.26 (Initialisation)**.** *1.* $j_0(\xi_{s_0}) = \sum_{j=0}^{l} A_{s_j}$

2. $j_0(\xi_{s_1 \dots s_l \dots s_0}) = \sum_{w \in \mathcal{A}_{2l}} A_w$

Démonstration. 1. On note $M := \sum_{j=0}^{l} A_{s_j}$. D'après la remarque 5.43 , il suffit de montrer que,

$$\forall i = 1, \dots, l; \quad \phi_0(M\alpha_i) = 0$$

(a) Si $1 \leqslant i \leqslant l-1$: On a,

$$\begin{aligned} \bullet\ A_{i-1} \cdot \alpha_i &= s_{i-1}(\alpha_i) A_{i-1} - \langle \alpha_i, \alpha_{i-1}^\vee \rangle \\ &= (\alpha_{i-1} + \alpha_i) A_{i-1} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ A_i \cdot \alpha_i &= s_i(\alpha_i) A_i - \langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle \\ &= -\alpha_i A_i - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet\ A_{i+1} \cdot \alpha_i &= s_{i+1}(\alpha_i) A_{i+1} - \langle \alpha_{i+1}, \alpha_i^\vee \rangle \\ &= (\alpha_i + \alpha_{i+1}) A_{i+1} + 1 \end{aligned}$$

$$\bullet\ \forall j \notin \{i-1, i, i+1\}\ A_j \alpha_i = \alpha_i A_j$$

Alors,

$$\begin{aligned} M \cdot \alpha_i &= \sum_{j=0}^{l} A_{s_j} \cdot \alpha_i \\ &= A_{i-1} \cdot \alpha_i + A_i \cdot \alpha_i + A_{i+1} \cdot \alpha_i + \sum_{j \neq i-1,i,i+1} A_{s_j} \cdot \alpha_i \\ &= (\alpha_{i-1} + \alpha_i) A_{i-1} - \alpha_i A_i + (\alpha_i + \alpha_{i+1}) A_{i+1} + \sum_{j \neq i-1,i,i+1} \alpha_i \cdot A_{s_j} \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\phi_0(M \cdot \alpha_i) = 0$$

(b) Si $i = l$: On a,

$$\bullet\ A_{l-1} \cdot \alpha_l = s_{l-1}(\alpha_l)A_{l-1} - \langle \alpha_l, \alpha_{l-1}^\vee \rangle$$
$$= (2\alpha_{l-1} + \alpha_l)A_{l-1} + 2$$

$$\bullet\ A_l \cdot \alpha_l = s_l(\alpha_l)A_l - \langle \alpha_l, \alpha_l^\vee \rangle$$
$$= -\alpha_l A_l - 2$$

$$\bullet\ \forall j \notin \{l-1, l\}\ A_j \alpha_l = \alpha_l A_j$$

Alors,

$$M \cdot \alpha_l = \sum_{j=0}^{l} A_{s_j} \cdot \alpha_l$$
$$= A_{l-1} \cdot \alpha_l + A_l \cdot \alpha_l + \sum_{j \neq l-1,l} A_{s_j} \cdot \alpha_l$$
$$= (2\alpha_{l-1} + \alpha_l)A_{l-1} - \alpha_l A_l + \sum_{j \neq l-1,l} \alpha_l \cdot A_{s_j}$$

De même on a,

$$\phi_0(M \cdot \alpha_l) = 0$$

2. D'après la remarque 5.43 , pour tout poids antidominant λ,

$$j_0(\xi_{t_\lambda}) = \sum_{w \in W/W_\lambda} A_{t_{w\cdot\lambda}}$$

En particulier, puisque $-\theta^\vee$ est antidominant, on va calculer $j_0(\xi_{t_{-\theta^\vee}})$.
Or

$$t_{-\theta^\vee} = t_{s_\theta(\theta^\vee)}$$
$$= s_\theta t_{\theta^\vee} s_\theta^{-1}$$
$$= s_\theta(s_{\delta-\theta}s_\theta)s_\theta^{-1} \quad \text{(d'après le Lemme 7.16)}$$
$$= s_\theta s_{\delta-\theta}$$
$$= s_\theta s_{\alpha_0}$$
$$= s_1 \ \ldots \cdot s_l \ \cdots \ . \ s_1 s_0$$

D'autre part, d'après le corollaire 7.4, on sait que,

$$W \cdot t_{-\theta^\vee} = \mathcal{A}_{2l}$$

Alors on a la bijection suivante :

$$W/W_{-\theta^\vee} \to \mathcal{A}_{2l}$$
$$w \mapsto w t_{-\theta^\vee} w^{-1}$$

Par suite,

$$\mathcal{A}_{2l} = \{t_{w(-\theta^\vee)}; w \in W/W_{-\theta^\vee}\}$$

On peut enfin déduire que

$$j_0(\xi_{s_1 \ldots s_l \cdots s_0}) = \sum_{w \in \mathcal{A}_{2l}} A_w$$

□

Lemme 7.27. *Soit $m \in \{1, \dots, 2l\}$, $i \in I \cup \{0\}$ et $v \in \mathcal{A}$ tel que $\ell(v) = m-1$. Alors,*

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_w c_{s_i,v}^w = 2c_v$$

Démonstration. D'après la remarque 5.32 , on en déduit que

$$\begin{aligned}\Delta_*^{1,m-1}(\xi_{c_{0,m}}) &= \sum_{\substack{s_i, v \in W_{aff}^- \\ s_i, v \leqslant c_{0,m}}} c_{s_i,v}^{c_{0,m}} \xi_{s_i} \otimes \xi_v \\ &= c_{s_0, c_{0,m-1}}^{c_{0,m}} \xi_{s_0} \otimes \xi_{c_{0,m-1}} \quad \text{(d'après la remarque 7.21)} \\ &= 2\xi_{s_0} \otimes \xi_{c_{0,m-1}}\end{aligned}$$

En plus, d'après le Lemme 7.26 , on sait que

$$j_0(\xi_{s_0}) = \sum_{i=0}^{l} A_{s_i}$$

Alors,

$$\begin{aligned}j_0 \otimes j_0(\Delta_*^{1,m-1}(\xi_{c_0,m})) &= 2j_0(\xi_{s_0}) \otimes j_0(\xi_{c_{0,m-1}}) \\ &= 2(A_0 + \cdots + A_l) \otimes j_0(\xi c_{0,m-1})\end{aligned}$$

Et puisque $j_0(\xi_{c_{0,m-1}}) = \sum_{\substack{v \in \mathcal{A} \\ l(v) = m-1}} c_v A_v$, on a

$$j_0 \otimes j_0(\Delta_*^{1,m-1}(\xi_{c_0,m})) = 2 \sum_{\substack{v \in \mathcal{A} \\ l(v) = m-1}} c_v (A_0 + \cdots + A_l) \otimes A_v \tag{7.2}$$

D'autre part, puisque $j_0(\xi_{c_{0,m}}) = \sum_{\substack{w \in \mathcal{A} \\ l(w) = m}} c_w A_w$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_0^{1,m-1} \circ j_0(\xi_{c_{0,m}}) &= \Delta_0^{1,m-1}\Big(\sum_{\substack{w \in \mathcal{A} \\ l(w) = m}} c_w A_w\Big) \\ &= \sum_{\substack{w \in \mathcal{A} \\ l(w) = m}} c_w \Delta_0^{1,m-1}(A_w)\end{aligned}$$

D'après la Proposition 5.5, on sait que :

$$\Delta_0^{1,m-1}(A_w) = \sum_{s_i, v \leqslant w} c_{s_i,v}^w A_{s_i} \otimes A_v$$

Enfin,

$$\Delta_0^{1,m-1} \circ j_0(\xi_{c_{0,m}}) = \sum_{\substack{w \in \mathcal{A} \\ l(w) = m}} \sum_{s_i, v \leqslant w} c_w c_{s_i,v}^w A_{s_i} \otimes A_v \tag{7.3}$$

D'après le Lemme 5.46,

$$(j_0 \otimes j_0) \circ \Delta_*^{1,m-1}(\xi_{c_0,m}) = \Delta_0^{1,m-1} \circ j_0(\xi_{c_{0,m}})$$

En comparant les équations 7.2 et 7.3 on obtient :

$$\sum_{\substack{v\in\mathcal{A}\\ l(v)=m-1}} 2c_v(A_0+\cdots+A_l)\otimes A_v = \sum_{\substack{w\in\mathcal{A}\\ l(w)=m}}\sum_{s_i,v\leqslant w} c_w c^w_{s_i,v} A_{s_i}\otimes A_v$$

Pour tout $i\in I\cup\{0\}$ et $v\in\mathcal{A}$ tel que $\ell(v)=m-1$ on remarque que :

- Le coefficient, dans le premier membre, de $A_{s_i}\otimes A_v$ est : $2c_v$.
- Le coefficient, dans le deuxième membre, de $A_{s_i}\otimes A_v$ est : $\sum_{w\in\mathcal{A}^i_v} c_w c^w_{s_i,v}$

Enfin, puisque les $(A_u\otimes A_{u'})$ forment une base, on a

$$\sum_{w\in\mathcal{A}^i_v} c_w c^w_{s_i,v} = 2c_v$$

□

Théorème 7.6. *Soit $w\in\mathcal{A}$, alors,*

$$c_w = b_w.$$

Démonstration. Soit $w\in\mathcal{A}$.

1. On commence par montrer, par récurrence descendante sur $\ell(w)$, que $c_w\geqslant b_w$:
   Initialisation : D'après le Lemme 7.26 , on sait que

   $$j_0(\xi_{s_1\ \ldots\cdot s_l\ \cdots\cdot\ s_0}) = \sum_{w\in\mathcal{A}_{2l}} A_w$$

   On en déduit que pour tout $w\in\mathcal{A}_{2l}$ on a $c_w=1$, en plus $\mathcal{A}_{2l}=\{w\in\mathcal{A};\ \ell(w)=2l\}$. D'autre part, $b_w=2^{1-1}=1$. Alors,

   $$\forall w\in\mathcal{A}, \ell(w)=2l\Rightarrow c_w=b_w$$

   Hérédité : Soit $k\in\{1,\ldots,2l\}$. On suppose que l'inégalité est vraie à l'ordre k.

   On veut montrer qu'elle est vrai à l'ordre $k-1$, c'est à dire :

   $$\forall v\in\mathcal{A}, \ell(v)=k-1\Rightarrow c_v\geqslant b_v$$

   Soit $v\in\mathcal{A}$ tel que $l(v)=k-1$, alors d'après la Proposition 7.5, on a :

   $$\sum_{w\in\mathcal{A}^0_v} c^w_{s_0,v} b_w \geqslant 2b_v$$

   Par hypothèse de récurrence, pour tout $w\in\mathcal{A}^0_v$, on a $b_w\leqslant c_w$. Alors,

   $$\sum_{w\in\mathcal{A}^0_v} c^w_{s_0,v} b_w \leqslant \sum_{w\in\mathcal{A}^0_v} c^w_{s_0,v} c_w$$

   Or d'après le Lemme 7.27 on a :

   $$2b_v \leqslant \sum_{w\in\mathcal{A}^0_v} c^w_{s_0,v} b_w \leqslant \sum_{w\in\mathcal{A}^0_v} c^w_{s_0,v} c_w \leqslant 2c_v$$

   Alors on a

   $$b_v\leqslant c_v.$$

2. En second lieu, on va montrer, par récurrence ascendante sur $\ell(w)$, que $c_w = b_w$.
Initialisation : D'après le Lemme 7.26 , on sait que

$$j_0(\xi_{s_0}) = \sum_{j=0}^{l} A_{s_j}$$

On en déduit que pour tout $j \in \{0, \dots, l\}$ on a $c_{s_j} = 1$ et $b_{s_j} = 2^{1-1} = 1$. Alors,

$$\forall w \in \mathcal{A}, \ell(w) = 1 \Rightarrow c_w = b_w$$

Hérédité : Soit $k \in \{1, \dots, 2l\}$. On suppose que l'inégalité est vraie à l'ordre k.

On veut montrer qu'elle est vrai à l'ordre $k+1$, c'est à dire :

$$\forall v \in \mathcal{A}, \ell(v) = k+1 \Rightarrow c_v = b_v$$

Soit $u \in \mathcal{A}$ tel que $\ell(u) = k+1$. On suppose tout d'abord qu'il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $u \in \mathcal{A}_v^0 \cup \mathcal{A}_v^l$. On choisit un tel élément v et on pose $i = 0$ si $u \in \mathcal{A}_v^0$, et $i = l$ sinon. On obtient par la proposition 7.5 et la remarque 7.23 :

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_0,v}^w b_w \geqslant 2b_v$$

Sinon, en appliquant le lemme 7.24, il existe un couple (v, i) dans $\mathcal{A} \times (I \cup \{0\})$ tel que $u \in \mathcal{A}_v^i$ et tel que

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w b_w \geqslant 2b_v$$

Dans la première partie de cette preuve, on a montré que pour tout $w \in \mathcal{A}$ on a $c_w \geqslant b_w$. Alors,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w c_w \geqslant \sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w b_w$$

Or par hypothèse de récurrence (puisque $\ell(v) = k$), on a $b_v = c_v$. En plus, en utilisant le Lemme 7.27, on a

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w c_w = 2c_v$$

Alors,

$$2c_v = \sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w c_w \geqslant \sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w b_w \geqslant 2b_v = 2c_v$$

Ce qui implique que,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w c_w = \sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w b_w$$

Donc,

$$\sum_{w \in \mathcal{A}_v^i} c_{s_i,v}^w (c_w - b_w) = 0$$

Puisque $c_w - b_w \geqslant 0$ et $c_{s_i,v}^w > 0$ alors,

$$\forall w \in \mathcal{A}_v^i; \quad c_w = b_w$$

Enfin, puisque $u \in \mathcal{A}_v^i$, on a

$$c_u = b_u.$$

□

7.3 Énoncé et preuve de la formule

Dans cette dernière section, on énonce et on montre une formule de Pieri en type C. Plus précisément, une règle pour la multiplication d'un élément de la base par un autre de la forme $\xi_{c_{0,m}}$ (cf. Définition 7.20) dans l'algèbre homologique de la grassmanienne affine.
Rappelons tout d'abord la Définition de bandes faible et la formule de Pieri en type A donnée par Lam et al dans [16] :

Pour ce qui concerne la définition de bandes faibles en type A, il faut revoir la Définition 6.12). On énonce maintenant la formule en homologie en type A :

Théorème 7.7. *[16] Soit $w \in S^0(\tilde{A}_l)$ et $m \in \{1, \dots, l-1\}$. Alors :*

$$\xi_{a_0,m}\xi_w = \sum_{w \rightsquigarrow z} \xi_z$$

où la somme parcourt toutes les bandes faibles $(w \rightsquigarrow z)$ de type A tel que $size(w \rightsquigarrow z) = m$.

Passons maintenant en type C et commençons par définir les bandes faibles :

Définition 7.28. *On dit que $(w \rightsquigarrow v)$ est une bande faible de type C si*

$$w, v \in S^0(\tilde{C}_l),\ w \leqslant v \text{ et } vw^{-1} \in \mathcal{A}.$$

Théorème 7.8. *Soit $w \in S^0(\tilde{C}_l)$ et $m \in \{1, \dots, 2l\}$. Alors,*

$$\xi_{c_{0,m}}\xi_w = \sum_{w \rightsquigarrow z} 2^{comp(zw^{-1})-1}\xi_z$$

où la somme parcourt toutes les bandes faibles $(w \rightsquigarrow z)$ de type C telles que $\ell(zw^{-1}) = \ell(z) - \ell(w) = m$.

Démonstration. Soit $w \in S^0(\tilde{C}_l)$ et $m \in \{1, \dots, 2l\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\xi_{c_{0,m}}\xi_w &= j_0(\xi_{c_{0,m}}) \cdot \xi_w \qquad \text{(d'après le Théorème 5.7 et la Définition 5.31)} \\
&= \sum_{\substack{\ell(v)=m \\ v \in \mathcal{A}}} c_v A_v \cdot \xi_w \\
&= \sum_{\substack{\ell(v)=m \\ v \in \mathcal{A}}} b_v A_v \cdot \xi_w \qquad \text{(d'après le Théorème 7.6)}
\end{aligned}$$

Or par Définition 5.27 , on sait que

$$A_v \cdot \xi_w = \begin{cases} \xi_{vw} & \text{si } \ell(vw) = \ell(v) + \ell(w) \text{ et } vw \in S^0(\tilde{C}_l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\xi_{c_{0,m}}\xi_w &= \sum_{\substack{\ell(v)=\ell(vw)-\ell(w)\\ vw\in S^0(\tilde{C}_l),v\in\mathcal{A}}} b_v\xi_{vw}\\
&= \sum_{\substack{\ell(v)=\ell(vw)-\ell(w)\\ vw\in S^0(\tilde{C}_l),v\in\mathcal{A}}} 2^{comp(v)-1}\xi_{vw}\\
&= \sum_{\substack{\ell(zw^{-1})=\ell(z)-\ell(w)=m\\ z\in S^0(\tilde{C}_l),zw^{-1}\in\mathcal{A}}} 2^{comp(zw^{-1})-1}\xi_z \quad \text{(En posant } z := vw\text{)}
\end{aligned}$$

Alors en posant $\mathcal{F}^w$ l'ensemble des éléments z tels que $(w \rightsquigarrow z)$ est une bande faible de type C et $\ell(zw^{-1}) = \ell(z) - \ell(w) = m$, on obtient

$$\xi_{c_{0,m}}\xi_w = \sum_{z\in\mathcal{F}^w} 2^{comp(zw^{-1})-1}\xi_z$$

□

Annexe A

Programme Billey

Dans la suite, en utilisant le logiciel "Sage", on a programmé l'algèbre cohomologique de la Grassmannienne affine. En d'autres termes, ce programme calcul les produits des éléments de la base de Schubert de cette algèbre $\xi^u \xi^v$:

```
# initialisation yields combinatorial data related to a root system.
# parameters are: the type of the root system, the rank, and boolean variable affine which tells if we want an affine Weyl group of the usual finite one.
# initialisation creates and computes a series of global variables:
# W is the corresponding affine Weyl group.
# s is an array: s[i] is the i-th reflection in the Weyl group W.
# P is a polynomial ring, it represents the T-equivariant cohomology of a point. Q is its fraction field.
# a is the array of generators of P (a[i]=equivariant class of the simple root alpha_i).
# r is the rank
def initialisation(type,rank,affine):
    global W,s,P,Q,a,r,S,is_affine
    if affine==true:
       W = WeylGroup(RootSystem([type,rank,1]).root_lattice(),prefix="s")
    else:
       W = WeylGroup(RootSystem([type,rank]).root_lattice(),prefix="s")
    s = W.simple_reflections()

    P = PolynomialRing(ZZ,rank+1,"a")
    Q=Frac(P)
    aa = P.gens()
    a=[aa[0]]
    r = rank
    is_affine = affine

    for i in range(1,r+1):
        a=a+[aa[i]]


# A HeckeMonomial is an element of the form f delta_w, with f in P and w in the affine Weyl group.
# HeckeMonomials are sum to create HeckePolynomials.
class HeckeMonomial:
    def __init__(self,w,f):
        self._w=w
        self._f=f
    def __repr__(self):
```

```
35          return "( %s : %s )"%(self._w,self._f)
36      def  w(self):
37          return self._w
38      def  f(self):
39          return self._f
40      def __mul__(self,m2):
41          return MonomialProduct(self,m2)
42
43
44
45  # A HeckePolynomial is by construction a sum of HeckeMonomials.
46  class HeckePolynomial:
47    def __init__(self,list):
48        self._list=list
49    def __repr__(self):
50        return "(%s)" %(self._list)
51    def  m(self):
52        return self._m
53
54
55
56  #MonomialProduct function takes two Heckemonomials hm1=delta_{w1} f1 and hm2
      =delta_{w2} f2,
57  #and returns the product in the NilHeck ring: hm1 hm2= delta_{w1w2} w2^{-1}(
      f1) f2.
58  def MonomialProduct(hm1,hm2):
59      global r,is_affine
60      w1=hm1.w()
61      w2=hm2.w()
62      Matrix_form_of_w2=w2.matrix()
63      Inverse_Matrix_of_w2=Matrix_form_of_w2.inverse()
64      f1=hm1.f()
65      f2=hm2.f()
66      b = [0]
67      if is_affine == True:
68          for i in range(0,len(s)+0):
69              b=b+[0]
70          for j in range(0,len(s)+0):
71              for k in range(0,len(s)+0):
72                  b[j]=b[j]+Inverse_Matrix_of_w2[k-0,j-0]*a[k]
73
74          return HeckeMonomial (w1*w2,f1.subs({a[i]:b[i] for i in range(len(s)
      +0)})*f2)
75      else:
76          for i in range(1,len(s)+1):
77              b=b+[0]
78          for j in range(1,len(s)+1):
79              for k in range(1,len(s)+1):
80                  b[j]=b[j]+Inverse_Matrix_of_w2[k-1,j-1]*a[k]
81
82          return HeckeMonomial (w1*w2,f1.subs({a[i]:b[i] for i in range(len(s)
      +1)})*f2)
83
84
85
86
87
88
```

```
#The r function takes a List b which represents a reduced word, and an integer m less than the length of b.
#The r function then returns the root s_{b[0]}s_{b[1]}...s_{b[m-1]}(a[m]).
#This function represents the mth positive root r_b(m) defined by Sarah Billey.
def r(b,m):
    r=W.one()
    for i in range(m-1):
        r=r*s[b[i]]
    r1=r**(-1)
    ab=a[b[m-1]]
    rbj=MonomialProduct(HeckeMonomial(W.one(),ab),HeckeMonomial(r1,a[1]/a[1])).f()

    return rbj


# function suite_suivante uses the global variable L, which represents an increasing sequence of k integers
# between 1 and l. It yields the next such sequence in lexicographic order. For example, let k=2 and l=4.
# If L=[1,4] then suite_suivante will return [2,3], and if L=[2,3], then suite_suivante will return [2,4].
# When L is the last sequence, then suite_suivante will return a sequence with L[0]=0, which means that
# all the sequences have been dealt with.
def suite_suivante(k,l):
    global Z
    K=k
    Z=L
    while (K>0):
        if Z[K-1]<l-k+K:     # It is possible to increase the value of Z[K-1]
            for i in range(k-K+1):
                Z[k-1-i]=Z[K-1]+k-K-i+1  # Set the next values Z[K], Z[K+1], etc, to be the minimal ones, increasing by exactly one at each step.
            K=-1
        else:       # It is not possible to increase the value of Z[K-1], so lower K to increase some value before K-1.
            K=K-1
            if K==0:
                Z[0]=0
    return Z


# The lex function takes two integers k<l, and generates lists L of length k containing all possible increasing combinations of integers from 1 to l.
def lex(k,l):
    global LL
    LL=[]
    global L
    L=[]
    for i in range (k):
        L=L+[i+1]
    while L[0]>0:
        LL=LL+[L[:k]]
        L=suite_suivante(k,l)

```

```
136
137
138 def Lex(l):
139     lexi=[]
140     for i in range(1,l):
141         lex(i,l)
142         lexi=lexi+LL
143     return lexi
144
145
146
147
148 #The xi function takes two elements, v and w, of the Weyl group W, and
    returns the following: Let b=b[1]...b[p] be a reduced word of w.
149 #If v is not less than w (in the Bruhat order), it will return 0.
150 #If v is less than w (in the Bruhat order), it will compute the sum, over
    all reduced words of v of the form b[i1]...b[ik], of the products r(b,i1)
    ....r(b,ik).
151 #This function represents the function \xi(v,w) defined by Sarah billey (cf.
     Lemme 4.1). She also proves in her article that this function is in fact
     independent of the choice of the reduced word b.
152 #Indeed, this is the value of the equivariant cohomology class \xi^v at the
    fixed point w.
153 def xi(v,w):
154     Subwords_of_w_of_length_v=[] #This List will contain all subwords of a
    given reduced word of w, which are of the same length as v.
155     length_of_w=len(w.reduced_word())
156     length_of_v=len(v.reduced_word())
157     Reduced_word_of_w=w.reduced_word()
158     Set_of_reduced_words_of_v=v.reduced_words()
159     product_1=P.one()
160     product_2=P.one()
161     result=P.zero()
162     lex(length_of_v,length_of_w)
163     for i in range (len(LL)):
164         Subwords_of_w_of_length_v=Subwords_of_w_of_length_v+[[]]
165     if v.bruhat_le(w):
166         for i in range (len(LL)):
167             for j in range (length_of_v):
168                 Subwords_of_w_of_length_v[i]=Subwords_of_w_of_length_v[i]+[
    Reduced_word_of_w[LL[i][j]-1]]
169
170         for i in range(len(Subwords_of_w_of_length_v)):
171             if Subwords_of_w_of_length_v[i] in Set_of_reduced_words_of_v:
172                 for j in range(len(Subwords_of_w_of_length_v[i])):
173                     product_1=product_1* r(Reduced_word_of_w,LL[i][j])
174                     product_2=product_2*product_1
175                     product_1=P.one()
176                 result=result+product_2
177                 product_2=P.one()
178
179     return result
180
181
182
183
184
```

```
#The pi function takes an element v (of reduced word b=[b[0],...,b[p-1]]) of the Weyl group and computes the product r(b,1)*r(b,2)*...*r(b,p).
def pi(v):
    Pi=a[1]/a[1]
    b=v.reduced_word()
    p=len(b)
    for i in range (p):
        Pi=Pi*r(b,i+1)

    return Pi

#The p function takes three elements u,v and w of the Weyl group, and computes the structure constantes p_{u,v}^w of Cohomology algebra of the affine Grassmannian.
#More precisely, using Sarah Billey's method, this function calculates these constants by induction on the length of w.
def p(u,v,w):
    lexi=Lex(len(w.reduced_word()))
    sigma=0
    for t in W.bruhat_interval(u,w):
        if v.bruhat_le(t) and t.length()<w.length():
            sigma=sigma+p(u,v,t)*xi(t,w)

    return (1/pi(w))*(xi(u,w)*xi(v,w)-sigma)

#The elements_of_length function taks an integer l, and returns a list containing all elements of the Weyl group of length l.
def elements_of_length(l):
    List=[]
    for w in W.elements_of_length(l):
        List=List+[w]
    return List

#The Schubert_Product function takes two elements u and v of the Weyl group, and returns the product xi^u xi^v,
#in function of elements xi^w such that p(u,v,w) is different than 0.
#More precisely it will calculate the coefficient of each Schubert class xi^w above.
def Schubert_Product(u,v):
    Reduced_word_of_u=u.reduced_word()
    Reduced_word_of_v=v.reduced_word()
    len_u_plus_len_v=len(Reduced_word_of_u)+len(Reduced_word_of_v)
    elements_of_length_sum_of_length=elements_of_length(len_u_plus_len_v)
    length_of_List=len(elements_of_length_sum_of_length)
    for i in range (length_of_List):
        if v.bruhat_le(elements_of_length_sum_of_length[i]) and u.bruhat_le(elements_of_length_sum_of_length[i]) and p(u,v,elements_of_length_sum_of_length[i])!=0:
            print (elements_of_length_sum_of_length[i],":",p(u,v,elements_of_length_sum_of_length[i]))

```

Annexe B

Vérification de la conjecture 4.4 en petits degrés

Dans cette partie, en programmant sur le logiciel "Julia", on calcule directement et en suivant la règle donnée par la conjecture 4.4 les coefficients $c^{w}_{u,c_{0,3}}$. Ce programme a été écrit par mon directeur de thèse et je reproduis ici le résultat obtenu à l'aide de ce programme, qui confirme la conjecture 4.4 dans un grand nombre de cas. On teste tout les éléments u de longueur au plus 15 :

```
julia> check_conjecture(C2,3)
Checking conjecture in degree 0
Checking conjecture for u=e
True for w=s0*s1*s0: 0=0
True for w=s2*s1*s0: 1=1
Checking conjecture in degree 1
Checking conjecture for u=s0
True for w=s0*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s1*s2*s1*s0: 2=2
Checking conjecture in degree 2
Checking conjecture for u=s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0: 3=3
True for w=s0*s1*s2*s1*s0: 4=4
Checking conjecture in degree 3
Checking conjecture for u=s0*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0: 5=5
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0: 6=6
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0: 2=2
Checking conjecture for u=s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0: 2=2
Checking conjecture in degree 4
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 14=14
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
Checking conjecture for u=s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 3=3
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 11=11
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 4=4
Checking conjecture in degree 5
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0
```

```
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 12=12
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 14=14
Checking conjecture for u=s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 7=7
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 12=12
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 4=4
Checking conjecture in degree 6
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 18=18
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 14=14
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
Checking conjecture for u=s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 11=11
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 20=20
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 16=16
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 15=15
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 12=12
Checking conjecture in degree 7
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 28=28
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 18=18
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 25=25
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 24=24
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 12=12
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 29=29
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 14=14
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 12=12
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 36=36
Checking conjecture in degree 8
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 26=26
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 60=60
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 16=16
Checking conjecture for u=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 5=5
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 12=12
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 37=37
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 1=1
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 24=24
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 12=12
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 16=16
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 37=37
Checking conjecture in degree 9
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 44=44
```

```
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 36=36
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 15=15
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 16=16
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 30=30
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 20=20
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 33=33
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 12=12
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 20=20
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 32=32
Checking conjecture for u=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 17=17
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 38=38
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 6=6
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 1=1
Checking conjecture in degree 10
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 60=60
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 14=14
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 34=34
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 30=30
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 68=68
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 52=52
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 59=59
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 56=56
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 46=46
Checking conjecture for u=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 23=23
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 56=56
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 6=6
Checking conjecture in degree 11
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 40=40
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 96=96
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 100=100
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 61=61
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 60=60
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 106=106
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 77=77
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 18=18
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 34=34
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
```

```
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 80=80
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 24=24
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 6=6
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 76=76
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 20=20
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 40=40
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 16=16
Checking conjecture in degree 12
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 52=52
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 22=22
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 154=154
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 80=80
Checking conjecture for u=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 7=7
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 87=87
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 24=24
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 76=76
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 36=36
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 79=79
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 10=10
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 64=64
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 44=44
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 20=20
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 61=61
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 48=48
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 40=40
True for w=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 16=16
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 60=60
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 50=50
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 40=40
True for w=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
Checking conjecture in degree 13
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 105=105
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 68=68
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 40=40
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 50=50
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 80=80
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 21=21
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 104=104
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 66=66
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 4=4
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 60=60
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 103=103
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 64=64
```

```
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 108=108
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 60=60
Checking conjecture for u=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 88=88
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 31=31
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 10=10
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 68=68
True for w=s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 44=44
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 96=96
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
Checking conjecture in degree 14
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 24=24
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 60=60
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 20=20
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 135=135
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
Checking conjecture for u=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 120=120
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 39=39
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 62=62
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 20=20
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 80=80
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 134=134
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 148=148
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 116=116
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 96=96
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 80=80
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 120=120
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 135=135
True for w=s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 136=136
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 68=68
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 42=42
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 10=10
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 172=172
Checking conjecture in degree 15
Checking conjecture for u=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 10=10
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 134=134
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 240=240
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 52=52
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 109=109
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 232=232
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 100=100
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 72=72
```

```
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 70=70
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 20=20
Checking conjecture for u=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 70=70
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 56=56
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 32=32
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 144=144
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 20=20
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 116=116
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 76=76
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 101=101
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 70=70
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0: 70=70
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 24=24
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
Checking conjecture for u=s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 8=8
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 160=160
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 1=1
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 40=40
Checking conjecture for u=s0*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0
True for w=s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 62=62
True for w=s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 232=232
True for w=s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 4=4
True for w=s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 24=24
True for w=s0*s1*s0*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0*s1*s2*s1*s0: 157=157

```

Bibliographie

[1] Nantel Bergeron and Frank Sottile. A pieri-type formula for isotropic flag manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 354(7) :2659–2705, 2002.

[2] Sara C Billey et al. Kostant polynomials and the cohomology ring for g/b. *Duke mathematical journal*, 96(1) :205, 1999.

[3] Anders Bjorner and Francesco Brenti. *Combinatorics of Coxeter groups*, volume 231. Springer Science & Business Media, 2006.

[4] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique : première partie : structures fondamentales de l'analyse.[Livre 9], Groupes et algèbres de Lie : Fasc. 34. Chapitre 4, Groupes de Coxeter et systèmes de Tits-chapitre 5, Groupes engendrés par des réflexions-chapitre 6, Systèmes de racines.* Hermann, 1968.

[5] Anders Skovsted Buch. Quantum cohomology of Grassmannians. *Compositio Math.*, 137(2) :227–235, 2003.

[6] Anders Skovsted Buch. Mutations of puzzles and equivariant cohomology of two-step flag varieties. *Ann. of Math. (2)*, 182(1) :173–220, 2015.

[7] Matthew Dyer. On the "bruhat graph" of a coxeter system. *Compositio Mathematica*, 78(2) :185–191, 1991.

[8] Henrik Eriksson and Kimmo Eriksson. Affine weyl groups as infinite permutations. *the electronic journal of combinatorics*, pages R18–R18, 1998.

[9] W. Fulton and R. Pandharipande. Notes on stable maps and quantum cohomology. In *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, volume 62 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 45–96. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[10] Victor Ginzburg. Perverse sheaves on a loop group and langlands' duality. *arXiv preprint alg-geom/9511007*, 1995.

[11] James E Humphreys. *Linear algebraic groups*, volume 21. Springer Science & Business Media, 2012.

[12] Victor G Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge university press, 1990.

[13] Bertram Kostant and Shrawan Kumar. The nil hecke ring and cohomology of g/p for a kac-moody group g. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 83(6) :1543–1545, 1986.

[14] Shrawan Kumar. *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, volume 204. Springer Science & Business Media, 2012.

[15] Thomas Lam. Schubert polynomials for the affine grassmannian. *Journal of the American Mathematical Society*, 21(1) :259–281, 2008.

[16] Thomas Lam, Luc Lapointe, Jennifer Morse, and Mark Shimozono. Affine insertion and pieri rules for the affine grassmannian. *arXiv preprint math/0609110*, 2006.

[17] Thomas Lam, Anne Schilling, and Mark Shimozono. Schubert polynomials for the affine grassmannian of the symplectic group. *Mathematische Zeitschrift*, 264(4) :765–811, 2010.

[18] Thomas Lam, Mark Shimozono, et al. Quantum cohomology of g/p and homology of affine grassmannian. *Acta mathematica*, 204(1) :49–90, 2010.

[19] Seung Jin Lee. Pieri rule for the affine flag variety. *Advances in Mathematics*, 304 :266–284, 2017.

[20] D Peterson. Quantum cohomology of g/p, lecture notes, 1997.

[21] DE Littlewood-AR Richardson. Group characters and algebra. *Trans. Royal Soc. London*, pages 99–141, 1934.

[22] MP Schützenberger. La correspondance de robinson, in "combinatoire de représentation du groupe symmetrique,". *Lecture Notes in Math*, 579, 1976.

Résumé

Les formules de Pieri sont des formules qui permettent de comprendre la structure d'algèbre de cohomologie de la Grassmannienne (affine) ou même celle des variété de Drapeaux. Plusieurs sont déjà établies dans quelques types et cas particuliers. Cependant ce problème reste encore ouvert pour la plupart des cas affines, en particulier pour trouver des formules de Pieri dans $H^*(\mathcal{G}r_G)$ en types B, C et D.

Dans cette thèse, même si on généralise quelques résultats pour un groupe de Weyl affine non-tordu général, on explore principalement les types A et C.

Dans la variété de drapeaux de type A affine, on trouve une formule pour la multiplication, dans l'algèbre de cohomologie d'une variété de drapeaux, d'un élément de la base ξ^w par un autre (spécial) qu'on appellera "crochet". On montre ce résultat en utilisant la formule de Pieri donnée par Lam et al dans [16].

En type C affine, on propose une conjecture pour une formule de Pieri en Cohomologie, en montrant qu'elle est valide en degré 1 et "presque" tous les cas du degré 2. On la vérifie aussi, en testant de nombreux exemples à l'aide de l'ordinateur.

En Homologie, on redémontre, en utilisant une nouvelle stratégie simplifiée, la formule de Pieri en type C [17]. Cette nouvelle approche pourrait éventuellement être utilisée dans le but d'établir des formules en types exceptionnels.

Dans les variétés de drapeaux de dimension finie, on trouve aussi une majoration des coefficients de Littlewood-Richardson et on la généralise, en tout type, pour des classes particulières qu'on appellera "petites classes de Schubert".

Mots-clés: Formule de Pieri, Grassmannienne affine, Variété de drapeaux, groupe de Weyl, coefficients de Littlewood-Richardson, classe de Schubert.

Abstract

Pieri's formulas are a gateway to understanding the algebra structure of the (affine) Grassmannian or even that of Flag varieties. Several are already established in a few particular types and cases. However, this problem remains open for most affine cases, especially to find Pieri formulas in $H(\mathcal{G}r_G)$ in types B, C and D.

In this thesis, even if some results are generalized for non-twisted affine Weyl groups, we mainly explore types A and C.

In the flag variete of affine type A, we find a formula for multiplying, in the cohomology algebra of a flag variety, one element of the base ξ^w by another (special) element that will be called "crochet". This result is shown using the Pieri formula given by Lam et al in [16].

In the affine Type C, we propose a conjecture for a Pieri formula in Cohomology, showing that it is valid in degree 1 and "almost" all cases of degree 2. It is also checked, by testing many examples using the computer.

In Homology, the Pieri formula in type C [17], is re-demonstrated, using a new simplified strategy. This new approach could eventually be used to establish formulas of exceptional types.

In the finite dimensional flag varieties, we find an upper bound for the littlewood-Richardson's coefficients and generalize it, in all types, to particular classes that will be called "small Schubert classes".

Keywords: Pieri's formulas, Affine Grassmannian, Flag Variety, Weyl groups, Littlewood-Richardson coefficients, Schubert Classe.