



**HAL**  
open science

# Modélisation par techniques harmoniques pour la commande et le filtrage actif de systèmes commutés associés appliquée à l'actionnement électrique

Nicolas Blin

► **To cite this version:**

Nicolas Blin. Modélisation par techniques harmoniques pour la commande et le filtrage actif de systèmes commutés associés appliquée à l'actionnement électrique. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2021. Français. NNT : 2021LORR0058 . tel-03230318

**HAL Id: tel-03230318**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03230318>**

Submitted on 19 May 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



École doctorale n° 77 : IAEM Lorraine

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 11 février 2021 pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialité : Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique

par Nicolas BLIN

### **Modélisation par techniques harmoniques pour la commande et le filtrage actif de systèmes commutés associés appliquée à l'actionnement électrique**

#### *Composition du jury*

<b>Emmanuel Godoy</b>	Professeur, L2S, CentraleSupélec	Rapporteur
<b>Franck Plestan</b>	Professeur, LS2N, École Centrale de Nantes	Rapporteur
<b>Florentina Nicolau</b>	Maître de conférences, ENSEA	Examinatrice
<b>Jamal Daafouz</b>	Professeur, CRAN, Université de Lorraine	Directeur de thèse
<b>Pierre Riedinger</b>	Professeur, CRAN, Université de Lorraine	Co-directeur de thèse
<b>Philippe Feyel</b>	Ingénieur Docteur, Safran ED	Encadrant industriel

#### *Invité*

<b>Louis Grimaud</b>	Ingénieur, Safran ED	Collaborateur industriel
----------------------	----------------------	--------------------------

**Safran Electronics & Defense**  
Safran Massy, 91300 Massy, France  
**Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)**  
UMR CNRS 7039, 54518 Vandoeuvre-les-Nancy, France



# Remerciements

Ce travail de recherche a été effectué au sein de la direction technique de Safran Electronics & Defense, dans le département de Recherche & Technologies, et en collaboration avec le Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN - UMR CNRS 7039), dans le département Contrôle, Identification, Diagnostic. Le projet de recherche s'est déroulé sous la direction de M. Jamal Daafouz, la co-direction de M. Pierre Riedinger et l'encadrement industriel de M. Philippe Feyel et M. Louis Grimaud.

Je remercie sincèrement mon directeur de thèse, M. Jamal Daafouz, professeur à l'Université de Lorraine et qui exerce ses activités de recherche au CRAN, pour m'avoir accueilli, pour avoir placé sa confiance en moi et pour avoir su me diriger tout au long de ses trois années. Je le remercie particulièrement pour le recul qu'il m'a aidé à prendre sur mes travaux, toujours avec sympathie.

Je remercie chaleureusement M. Pierre Riedinger, professeur à l'Université de Lorraine et qui exerce ses activités de recherche au CRAN, pour son enthousiasme et son investissement important dans ces travaux. Je tiens à exprimer ma gratitude pour son soutien tout au long de ses trois années. J'ai pris énormément de plaisir à travailler à ses côtés.

Je remercie sincèrement M. Philippe Feyel, ingénieur docteur chez Safran, à Massy, pour son intérêt et son engagement dans ce travail. Je tiens à exprimer ma gratitude pour son soutien et pour sa volonté que le projet s'accorde avec mes envies. Je salue aussi ses qualités humaines et l'ambiance sympathique à Safran Massy, à laquelle il a beaucoup contribué.

Je remercie sincèrement M. Louis Grimaud, ingénieur chez Safran, à Valence, pour son enthousiasme et son engagement dans ce travail. Sans lui, je ne me serais pas engagé dans ce projet. Je salue son ambition et son optimisme qui m'ont inspiré et m'ont aidé à croire plus fort en moi et viser plus haut.

Je remercie M. Emmanuel Godoy, professeur à Centrale Supélec au laboratoire L2S, et M. Franck Plestan, professeur à l'École Centrale de Nantes au laboratoire LS2N, d'avoir accepté de contribuer à ces recherches en rapportant sur ce travail. Je remercie aussi Mme. Florentina Nicolau, maître de conférence à l'ENSEA, d'avoir accepté d'être examinatrice pour ce travail.

Je tiens à remercier amicalement l'ensemble du département CID du CRAN, Mme. Christine Pierson, ainsi que l'ensemble des doctorants du campus de l'ENSEM à Nancy, pour leur accueil et pour les très bons moments passés ensemble. Je tiens aussi à remercier l'ensemble de mes collègues à Safran Massy, entre autres M. Jérémy Pinguet et M. Maxime Pouilly-Cathelain, pour l'ambiance sympathique, les échanges intéressants et les excellents moments passés ensemble.

Mes pensées les plus émues vont à ma famille, en particulier mes parents, mon frère et ma compagne, sans qui je ne serais pas l'homme que je suis et sans qui rien n'aurait la même consistance. Sans eux, ce travail n'aurait pas été possible. Je les remercie du fond du cœur pour leur soutien. Ce travail leur est dédié.



# Table des matières

Table des matières	v
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Introduction générale	1
<b>1 Contexte général et état de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Les convertisseurs de puissance	6
1.1.1 Les familles et les topologies de convertisseurs	6
1.1.2 Fonctionnement et modèles en espace d'état moyennés (SSA)	9
1.2 Réseau électrique	11
1.2.1 Réseau électrique embarqué	11
1.2.2 Chaîne d'actionnement électrique	12
1.3 Motivations	13
1.4 État de l'art de la modélisation par techniques harmoniques	15
1.4.1 Generalized State-Space Averaging (GSSA) et Dynamic Phasors (DP)	15
1.4.2 Extended/Dynamic Harmonic Domain (EHD/DHD)	17
1.4.3 Harmonic State-Space (HSS)	19
1.4.4 Synthèse sur les techniques harmoniques	22
<b>2 Modélisation harmonique</b>	<b>25</b>
2.1 Cadre formel : espaces fonctionnels et transformations	26
2.1.1 Espaces fonctionnels et décomposition de Fourier glissante	27
2.1.2 Condition nécessaire et suffisante de coïncidence	29
2.1.3 Reconstruction et transformation inverse	32
2.2 Modélisation harmonique unifiée	37
2.2.1 Résultats préliminaires sur les matrices de Toeplitz	37
2.2.2 Modèle harmonique d'une équation différentielle	39
2.2.3 Modèle harmonique des systèmes LTV et LTP	42
2.2.4 Modèle harmonique des systèmes affines commutés	43
2.2.5 Limitations des modèles harmoniques tronqués	44
2.2.6 Réflexion sur le choix de la période de la base harmonique	46
2.3 Application aux convertisseurs de puissance	48
2.3.1 Modélisation harmonique des convertisseurs DC-DC	48
2.3.2 Modélisation harmonique des convertisseurs AC-DC	53
2.3.3 Interconnexion des convertisseurs	58

2.4	Conclusion	62
<b>3</b>	<b>Contrôle-commande harmonique</b>	<b>65</b>
3.1	État de l'art du contrôle-commande par techniques harmoniques	66
3.1.1	Analyse du contrôle-commande	67
3.1.2	Synthèse du contrôle-commande	67
3.2	Schéma de contrôle-commande harmonique	68
3.2.1	Implémentation dans le domaine harmonique	68
3.2.2	Implémentation dans le domaine temporel	71
3.3	Structure du correcteur harmonique	72
3.3.1	Condition nécessaire et suffisante pour un contrôle par retour d'état harmonique	72
3.3.2	Action intégrale sur les phaseurs	75
3.4	Stabilité et stabilisation dans le domaine harmonique	76
3.4.1	Stabilité des systèmes LTP autonomes	76
3.4.2	Stabilisation des systèmes LTP non autonomes	78
3.4.3	Stabilisation des systèmes affines commutés	82
3.4.4	Stabilisation des systèmes affines commutés en présence de perturbations périodiques et d'incertitudes paramétriques	84
3.5	Application à la commande et au filtrage actif des convertisseurs	86
3.5.1	Présentation du problème et cahier des charges	86
3.5.2	Commande optimale LQ par retour d'état	88
3.5.3	Illustration de la nécessité de structurer le correcteur harmonique	91
3.5.4	Illustration de l'avantage du schéma de contrôle alternatif	92
3.5.5	Commande embedded globalement asymptotiquement stable	94
3.6	Conclusion	96
<b>4</b>	<b>Application à la chaîne d'actionnement électrique</b>	<b>99</b>
4.1	Modélisation et analyse harmoniques de la chaîne d'actionnement	101
4.1.1	La partie réseau	102
4.1.2	Liens entre modélisation harmonique et modélisation dq0	113
4.2	Contrôle-commande harmonique de la chaîne d'actionnement	114
4.2.1	Cahier des charges et stratégie de contrôle-commande	114
4.2.2	Point d'équilibre harmonique	116
4.2.3	Commande optimale LQ par retour d'état	117
4.2.4	Système perturbé et bouclages intégrales sur les phaseurs	120
4.3	Conclusion	129
	<b>Conclusion générale</b>	<b>131</b>
	<b>Perspectives</b>	<b>135</b>
<b>A</b>	<b>Rappels mathématiques</b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Modèles des convertisseurs de puissance</b>	<b>III</b>
<b>C</b>	<b>Formules de reconstructions équivalentes</b>	<b>XI</b>
<b>D</b>	<b>Base harmonique de fréquence temps-variante</b>	<b>XIII</b>





# Liste des figures

1.1	Topologie d'un convertisseur Boost. . . . .	7
1.2	Topologie d'un convertisseur Buck. . . . .	7
1.3	Topologie d'un convertisseur Buck-Boost. . . . .	7
1.4	Topologie d'un convertisseur Flyback. . . . .	7
1.5	Topologie d'un redresseur monophasé. . . . .	8
1.6	Topologie d'un redresseur triphasé. . . . .	8
1.7	Les phases de fonctionnement d'un convertisseur Boost en mode de conduction continue. . . . .	10
1.8	Les phases de fonctionnement d'un redresseur monophasé en mode de conduction continue. . . . .	11
1.9	Schéma général d'un réseau électrique. . . . .	11
1.10	Architecture générale d'un réseau électrique embarqué. . . . .	12
1.11	Schéma bloc d'une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion. . . . .	13
1.12	Réponse d'un système LTP de fréquence $f$ à un signal sinusoïdal de fréquence $f_{in}$ . . . . .	19
1.13	Propriété de séparation des fréquences et analogie entre les signaux EMP via les systèmes LTP (en bas) et les exponentielles complexes via les systèmes LTI (en haut). . . . .	21
1.14	Classification des approches de modélisation harmonique et liens entre les modèles. . . . .	23
2.1	Problématique de coïncidence. . . . .	30
2.2	Définition de $u(\tau) = \tilde{u}_T(\tau + h, \tau)$ par prolongement et recouvrement. Les valeurs de $\tilde{u}_T$ sur le segment rouge correspondent deux à deux aux valeurs de $\tilde{u}_T$ sur le segment vert. . . . .	32
2.3	Principe de la moyenne glissante. Le signal $u(\tau)$ est tracé en bleu. La fonction $\tilde{u}_T(t, \tau)$ est tracée pour $t = t_1$ en rouge et pour $t = t_2$ en vert, en fonction de sa deuxième échelle de temps $\tau$ . . . . .	34
2.4	Tracé des phaseurs du signal $u(\cdot)$ définis dans une base harmonique de période égale à celle du régime permanent de $u(\cdot)$ . . . . .	34
2.5	Comparaison des reconstructions d'un échelon selon la formule de la littérature et la formule proposée. . . . .	35
2.6	Comparaison des reconstructions d'un signal pseudo-périodique selon la formule de la littérature et la formule proposée (initialisation pour $t < 0.1s$ ). . . . .	35
2.7	Influences de la période de la base harmonique et du nombre d'harmoniques sur la reconstruction d'un échelon. . . . .	45
2.8	Influence du nombre d'harmoniques sur la redécomposition d'un vecteur harmonique. Les références des phaseurs sont tracés en pointillés. . . . .	45

2.9	Limitation des dynamiques des phaseurs d'un signal échelon en fonction de la période de la base harmonique. . . . .	46
2.10	Influence de la dynamique d'un signal arctangente sur sa reconstruction. . . . .	46
2.11	Spectre des fréquences explicitement contenues dans la base harmonique $(e^{jk\omega t})_{k \in \mathbb{Z}}$ de période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ . . . . .	47
2.12	Spectre des fréquences explicitement contenues dans la base harmonique tronquée $(e^{jk\omega t})_{k \in [-h;h]}$ de période $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ . . . . .	47
2.13	Schéma électrique d'un convertisseur Boost. . . . .	49
2.14	Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Boost en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier. . . . .	51
2.15	Schéma électrique d'un redresseur monophasé associé à un réseau alternatif. . . . .	54
2.16	Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 50kHz, h = 8$ ) en boucle ouverte pour des rapports cycliques en escalier. . . . .	56
2.17	Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{AC} = 500Hz, h = 8$ ) du redresseur monophasé en boucle ouverte pour des rapports cycliques en escalier. . . . .	57
2.18	Schéma électrique de l'association en série d'un convertisseur Boost et un convertisseur Flyback. . . . .	58
2.19	Les signaux de commande, de rapports cycliques en escalier, appliqués aux modèles temporels instantanés et aux modèles harmoniques ( $f = 25kHz, h = 12$ ) du Boost et du Flyback. . . . .	59
2.20	Comparaison des signaux obtenus à partir de l'interconnexion des modèles temporels et du modèle harmonique global ( $f = 25kHz, h = 12$ ) en boucle ouverte. . . . .	61
2.21	Liens entre les différents modèles harmoniques de la littérature et le modèle unifié proposé. Tous les modèles peuvent être facilement retrouvés à partir du modèle harmonique unifié. . . . .	63
3.1	Schéma de contrôle-commande hybride avec un correcteur implémenté dans le domaine harmonique. . . . .	69
3.2	Schéma de contrôle-commande alternatif avec un correcteur harmonique implémenté dans le domaine temporel. . . . .	71
3.3	Schéma électrique d'un convertisseur Boost. . . . .	86
3.4	Influence de la fréquence d'une oscillation en entrée sur l'amplitude des oscillations observées sur la tension en sortie du Boost en boucle ouverte. . . . .	87
3.5	Régulation de la tension en sortie du Boost selon les schémas de contrôle 3.1 et 3.2 avec une loi de commande harmonique LQ et pour une perturbation périodique à $f = 5kHz$ . . . . .	90
3.6	Comparaison des tensions en sortie du Boost régulées par un correcteur harmonique LQ structuré, par implémentation selon le schéma 3.1 et par synthèse harmonique théorique. . . . .	91
3.7	Comparaison des tensions en sortie du Boost régulées par un correcteur harmonique LQ non structuré, par implémentation selon le schéma 3.1 et par synthèse harmonique théorique. . . . .	92
3.8	Régulation de la tension en sortie du Boost selon les schémas de contrôle 3.1 et 3.2 avec une loi de commande LQ et pour une perturbation périodique à $f = 50Hz$ . . . . .	93

3.9	Régulation de la tension de sortie du convertisseur Boost selon le schéma de contrôle 3.2 et avec une loi de commande embedded pour une perturbation périodique à la fréquence critique $f = 5kHz$ . . . . .	95
4.1	Représentation par blocs d'une chaîne d'actionnement électrique type de Safran. . . . .	100
4.2	Représentation simplifiée de la chaîne d'actionnement électrique - point de vue automatique. . . . .	102
4.3	Schéma électrique simplifié de la partie réseau. . . . .	102
4.4	Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel instantané (MTi) et harmonique (MH) ( $f_{AC} = 400Hz, h = 8$ ) de la partie réseau en boucle ouverte. . . . .	109
4.5	Matrice des couplages dynamiques harmoniques de la partie réseau en boucle ouverte pour une commande harmonique $S$ associée à des signaux $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$ sinusoïdaux équilibrés. . . . .	110
4.6	Matrice des couplages dynamiques harmoniques de la partie réseau en boucle ouverte pour une commande harmonique $S$ associée à des signaux $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$ périodiques équilibrés avec des harmoniques 1,3,5,7. . . . .	110
4.7	Matrice des fonctions de transferts entre les harmoniques des entrées exogènes et des variables d'état de la partie réseau pour des commandes harmoniques $S(t)$ associées à des signaux $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$ sinusoïdaux équilibrés et pour $s = 0$ . . . . .	111
4.8	Matrice des fonctions de transferts entre les harmoniques des entrées exogènes et des variables d'état de la partie réseau pour des commandes harmoniques $S(t)$ associées à des signaux $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$ périodiques équilibrés avec des harmoniques 1,3,5,7 et pour $s = 0$ . . . . .	112
4.9	Schéma de contrôle-commande harmonique, au niveau du redresseur, de la chaîne d'actionnement électrique. . . . .	116
4.10	Contrôle de la chaîne d'actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur pour un changement de régime nominal et sans perturbations extérieures. . . . .	119
4.11	Les perturbations au sein de la partie moteur. . . . .	123
4.12	Contrôle de la chaîne d'actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur, sans bouclages intégrales et en présence de perturbations dues aux interactions avec la partie moteur. . . . .	124
4.13	Contrôle de la chaîne d'actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur, avec des bouclages intégrales (objectifs primaires seulement) et en présence de perturbations dues aux interactions avec la partie moteur. . . . .	125
4.14	Erreurs sur les phaseurs avec des bouclages intégrales sur les phaseurs pour répondre aux objectifs primaires. . . . .	126
4.15	Contrôle de la chaîne d'actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur, avec des bouclages intégrales sur les phaseurs (objectifs primaires et secondaires) et en présence de perturbations dues aux interactions avec la partie moteur. . . . .	127
4.16	Erreurs sur les phaseurs avec des bouclages intégrales sur les phaseurs pour répondre aux objectifs primaires et secondaires. . . . .	128
B.1	Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Buck en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier. . . . .	V

B.2	Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Buck-Boost en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier. . . . .	VI
B.3	Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Flyback en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier. . . . .	VII

# Liste des tableaux

2.1	Paramètres du convertisseur Boost, de la charge, de la base harmonique et valeurs des rapports cycliques appliqués. . . . .	50
2.2	Paramètres du redresseur monophasé et de la base harmonique. . . . .	55
2.3	Paramètres des convertisseurs Boost et Flyback et de la base harmonique et valeurs des rapports cycliques appliqués. . . . .	60
2.4	Types de modèles dans le domaine temporel (TD) et types de modèles associés dans le domaine harmonique (HD) en fonction de la période $T$ de la base harmonique. . . . .	63
3.1	Paramètres du convertisseur Boost et de la base harmonique. . . . .	87
4.1	Paramètres de l'alternateur et du redresseur triphasés, de la charge, de la base harmonique et rapports cycliques appliqués. . . . .	108
B.1	Paramètres des convertisseurs, de la charge, de la base harmonique et valeurs des rapports cycliques appliqués. . . . .	IV



# Introduction générale

L'électricité est sans aucun doute un élément essentiel de la société moderne. Son utilisation est croissante et la plupart des scénarii, notamment ceux de l'Agence Internationale de l'Energie (AIE), prévoient qu'elle le reste. L'électrification de la planète est intimement liée à la transition écologique. L'électricité est en effet un vecteur d'énergie efficace qui permet de démocratiser l'exploitation des sources d'énergie renouvelable (solaire, éolien, hydraulique...) pour une production d'énergie bas carbone. De plus, l'énergie électrique a l'avantage d'être facilement transportable, par rapport par exemple aux énergies hydraulique et pneumatique qui nécessitent des structures importantes résistantes à la pression. En outre, la maintenance et la réparation d'un système électrique sont beaucoup plus aisées. Par exemple, la mobilité verte et électrique a ainsi émergé comme un chemin possible pour réduire les émissions de carbone dans le monde et améliorer le quotidien de chacun d'entre nous. Ces perspectives économiques et environnementales font des problématiques du transport, de la conversion et de la distribution de l'énergie électrique des sujets essentiels parmi les scientifiques et les décideurs politiques. Ils ont déterminé les investissements croissants des industriels dans la recherche pour relever les défis technologiques et optimiser l'efficacité et la flexibilité des réseaux électriques.

L'objectif principal des travaux doctoraux présentés ici est de contribuer à maîtriser les phénomènes fréquentiels au sein d'un réseau électrique. Les systèmes sont de plus en plus complexes et ont tendance à générer des harmoniques et des dynamiques rapides dont peuvent résulter des couplages fréquentiels. Leur interconnexion peut être à l'origine de phénomènes de résonance et de pollution harmonique aujourd'hui mal maîtrisés. Le contrôle doit alors garantir la stabilité des réseaux électriques, même dans les cas de couplage harmonique entre les différentes fréquences des systèmes dynamiques interconnectés. Il doit également réguler activement les harmoniques émis par ces systèmes pour garantir le respect des normes sur les taux harmoniques et éviter ainsi l'utilisation abusive de filtres analogiques. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons plus particulièrement à l'analyse et au contrôle des convertisseurs de puissance et du comportement d'une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion (Safran). L'approche retenue consiste à exploiter les techniques innovantes de modélisation harmonique de type Harmonic State Space (HSS) et Dynamic Phasors (DP) car elles semblent particulièrement adaptées à la description des dynamiques et couplages harmoniques des systèmes. En effet, les systèmes électroniques sophistiqués d'aujourd'hui ne peuvent plus être considérés comme des systèmes à variation lente et nous ne pouvons pas nous contenter d'étudier leur comportement moyen.

Les techniques harmoniques présentées dans la littérature sont nombreuses. Un premier objectif des travaux de recherche est de mettre en évidence les avantages et les inconvénients de chacune et de clarifier leurs liens dans un cadre formel. Aujourd'hui, le potentiel offert par

ces modélisations dynamiques des harmoniques est encore largement sous exploité. En effet, il existe de nombreux travaux consacrés à l'analyse de stabilité des systèmes interconnectés, mais uniquement dans le domaine temporel. Un deuxième objectif de ces travaux doctoraux est de développer des résultats analogues dans le domaine fréquentiel, adaptés à l'analyse harmonique des réseaux électriques et notamment des chaînes d'actionnement. Enfin, nous envisageons dans ces travaux de combiner les techniques harmoniques avec des outils classiques de contrôle-commande et d'exploiter les nouvelles informations qu'elles apportent pour maîtriser les phénomènes fréquents au sein de systèmes dynamiques interconnectés. Nous nous intéressons notamment au cas des systèmes commutés tels que les convertisseurs de puissance, largement utilisés en électronique de puissance.

Les travaux doctoraux présentés ici ont été réalisés dans le cadre d'une thèse industrielle CIFRE financée par Safran Electronics & Defense (anciennement Sagem) en partenariat avec le Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN).

Ce mémoire est organisé en 4 chapitres. Le premier présente le contexte de la thèse et fournit un état de l'art. Les chapitres 2 et 3 présentent les outils théoriques développés au cours des travaux doctoraux et les appliquent, à titre d'illustration, à des convertisseurs de puissance. Le quatrième et dernier chapitre exploite les outils développés pour contribuer à maîtriser les phénomènes fréquents au sein d'une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion.

## Chapitre 1

Le premier chapitre est dédié à la présentation des convertisseurs de puissance et des réseaux et chaînes d'actionnement électrique. Il donne les enjeux de la maîtrise des phénomènes fréquents dans les réseaux électriques et en particulier dans le contexte aéronautique. Il contient également un état de l'art de la modélisation par techniques harmoniques. Nous identifions clairement des liens forts entre les approches de la littérature qui permettent de passer facilement d'un modèle harmonique à un autre. Finalement, nous montrons que les concepts mathématiques sur lesquels elles sont basées sont équivalents.

## Chapitre 2

Ce chapitre est consacré à la modélisation harmonique. Deux contributions majeures de cette thèse sont présentées : nous définissons un cadre formel dans lequel les notions données dans les techniques harmoniques ont du sens et nous présentons une méthodologie harmonique qui unifie les approches de la littérature. Le modèle harmonique unifié décompose le comportement des systèmes dans une base harmonique. Il décrit ainsi leurs dynamiques et couplages harmoniques. L'originalité des travaux consiste à considérer la période de la base harmonique comme un paramètre de réglage. Les modèles harmoniques des systèmes polynomiaux, linéaires temps-variant et affines commutés sont donnés. La stratégie est finalement validée par simulations pour modéliser le comportement harmonique des convertisseurs de puissance, continu-continu mais aussi alternatif-continu, seuls ou interconnectés.

## Chapitre 3

Ce chapitre est consacré au contrôle-commande harmonique. Il contient deux schémas de contrôle-commande où le correcteur est synthétisé dans le domaine harmonique, en considérant

des informations sur les dynamiques et couplages harmoniques habituellement négligées. Le correcteur est ensuite implémenté dans le domaine harmonique ou, par transformation, dans le domaine temporel. Ce chapitre fournit également des outils d'évaluation de la stabilité harmonique et de commande harmonique optimale stabilisante, via des équations de Lyapunov et Riccati données dans le domaine harmonique. Ce nouveau cadre permet de développer des lois de commande dans le domaine harmonique pour maîtriser les phénomènes fréquentiels. La stratégie est finalement validée par simulations via une loi de commande harmonique optimale linéaire quadratique (LQ) puis une loi de commande embedded (de type Lyapunov non-linéaire) d'un convertisseur Boost. La tension en sortie du convertisseur est régulée, filtrée activement et les perturbations périodiques sont rejetées.

### Chapitre 4

Ce chapitre est dédié à l'analyse et la maîtrise du comportement harmonique d'une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion. Nous présentons les modèles harmoniques de chacun des blocs, puis de la chaîne d'actionnement complète. Ces modèles fournissent de nombreuses informations sur les dynamiques, couplages et transferts harmoniques au sein de la chaîne. Nous élaborons ensuite une stratégie de contrôle-commande harmonique adaptée à la chaîne d'actionnement. Cette stratégie est finalement validée par simulations, via une loi de commande harmonique optimale linéaire quadratique (LQ) au niveau du redresseur triphasé. La tension délivrée au bus DC est régulée, le facteur de puissance est corrigé et les normes sur les taux harmoniques des courants réseau sont respectées, même en cas de perturbations périodiques.

## Production scientifique

### Conférence internationale

[[Blin et al., 2019](#)] : Blin, N., Riedinger, P., Daafouz, J., Grimaud, L. et Feyel, P. (2019). A comparison of harmonic modeling methods with application to control of switched systems with active filtering. *18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy, 2019*, pp. 4198-4203, doi : 10.23919/ ECC.2019.8796168.

### Revue internationale

[[Blin et al., 2020](#)] : Blin, N., Riedinger, P., Daafouz, J., Grimaud, L. et Feyel, P. (2020). A comparison of harmonic modeling methods with application to the interconnection and the control of switched systems. *European Journal of Control*. ISSN 0947-3580, doi : 10.1016/j.ejcon.2020.07.007.

Blin, N., Riedinger, P., Daafouz, J., Grimaud, L. et Feyel, P.. Necessary and Sufficient Conditions for Harmonic Control in Continuous Time. *IEEE Transactions on Automatic Control*. En cours de relecture.

## **Brevet**

Les résultats obtenus ont amené au dépôt d'un brevet auprès de l'INPI, via Safran, concernant un dispositif de pilotage pour la régulation et le filtrage d'harmoniques :

Blin, N., Grimaud, L., Feyel, P. et Riedinger, P. (2020). Dispositif de pilotage comprenant un correcteur harmonique. n° 20-09205.

# Chapitre 1

## Contexte général et état de l'art

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Les convertisseurs de puissance . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1.1	Les familles et les topologies de convertisseurs . . . . .	6
1.1.2	Fonctionnement et modèles en espace d'état moyennés (SSA) . . . . .	9
<b>1.2</b>	<b>Réseau électrique . . . . .</b>	<b>11</b>
1.2.1	Réseau électrique embarqué . . . . .	11
1.2.2	Chaîne d'actionnement électrique . . . . .	12
<b>1.3</b>	<b>Motivations . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.4</b>	<b>État de l'art de la modélisation par techniques harmoniques . . . . .</b>	<b>15</b>
1.4.1	Generalized State-Space Averaging (GSSA) et Dynamic Phasors (DP) . . . . .	15
1.4.2	Extended/Dynamic Harmonic Domain (EHD/DHD) . . . . .	17
1.4.3	Harmonic State-Space (HSS) . . . . .	19
1.4.4	Synthèse sur les techniques harmoniques . . . . .	22

---

## 1.1 Les convertisseurs de puissance

Les convertisseurs de puissance sont des équipements électroniques qui permettent le changement de la forme de l'énergie électrique. Ils adaptent les amplitudes et les fréquences des signaux ainsi que leur nature alternative ou continue pour garantir la compatibilité avec les milieux de transport et les autres équipements et pour respecter le cahier des charges des consommateurs ou sur les actionneurs.

### 1.1.1 Les familles et les topologies de convertisseurs

Les convertisseurs sont classés en quatre grandes familles en fonction de la transformation sur la nature alternative ou continu qu'ils opèrent sur les signaux :

- continu - continu (DC-DC)
- alternatif - continu (AC-DC)
- continu - alternatif (DC-AC)
- alternatif - alternatif (AC-AC)

Les convertisseurs de puissance DC-DC sont utilisés pour adapter la valeur moyenne d'un signal d'une source à une sortie. Ils fournissent une tension (ou un courant) en sortie de valeur moyenne plus importante (hacheurs élévateurs) ou plus petite (hacheurs abaisseurs) qu'en entrée. Les convertisseurs AC-DC, appelés redresseurs, sont utilisés dans la plupart des réseaux électriques pour interfacer le réseau d'alimentation alternatif (monophasé ou triphasé) avec un milieu de transport ou des composants continus (les batteries par exemple). Ils fournissent des signaux de courant et de tension avec des composantes continues à partir des signaux d'entrée de moyennes nulles. Les convertisseurs DC-AC, appelés onduleurs, sont leurs contreparties et sont utilisés pour interfacer des milieux de transport ou des composants continus avec des actionneurs alternatifs, typiquement des moteurs. Les convertisseurs AC-AC sont principalement employés dans le cadre de la production d'énergie électrique. Ils permettent de changer la valeur crête et la fréquence des signaux alternatifs pour rendre possible le transport de l'énergie électrique par le réseau de distribution.

Les convertisseurs de puissance sont des systèmes composés d'éléments passifs linéaires (des résistances, des capacités et des inductances), d'éléments passifs non linéaires (les diodes) et d'éléments actifs non linéaires (les transistors). Le seul élément de contrôle, via les transistors, est l'état des interrupteurs. Le fonctionnement d'un convertisseur est directement lié à sa topologie. Parmi les topologies de convertisseurs DC-DC les plus connues, il existe le Buck, le Boost, le Buck-Boost, le Flyback, ou encore le Cùk et le SEPIC. Les premières sont décrites sur les figures 1.1 à 1.4. Les différentes topologies possèdent chacune une plage de fonctionnement particulière, des avantages et des inconvénients [Wei et Batarseh, 1998]. La topologie d'un redresseur (AC-DC) est décrite sur les figures 1.5 et 1.6 dans les cas monophasé et triphasé. La topologie d'un onduleur (DC-AC) est la même mais inversée.

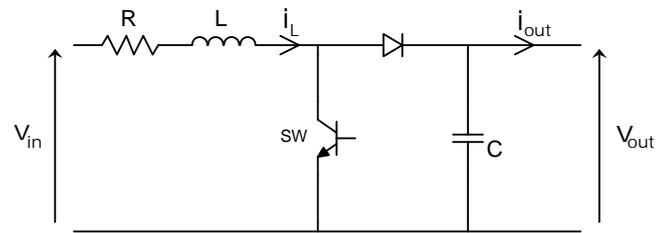


Figure 1.1 – Topologie d'un convertisseur Boost.

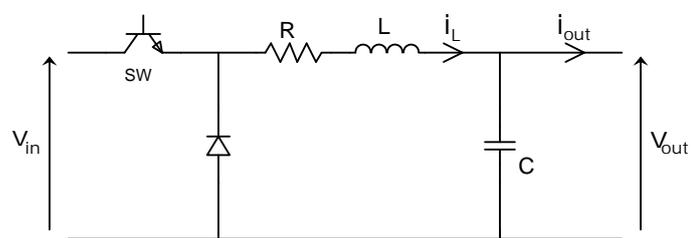


Figure 1.2 – Topologie d'un convertisseur Buck.

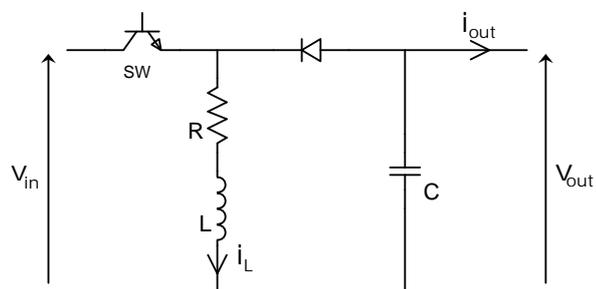


Figure 1.3 – Topologie d'un convertisseur Buck-Boost.

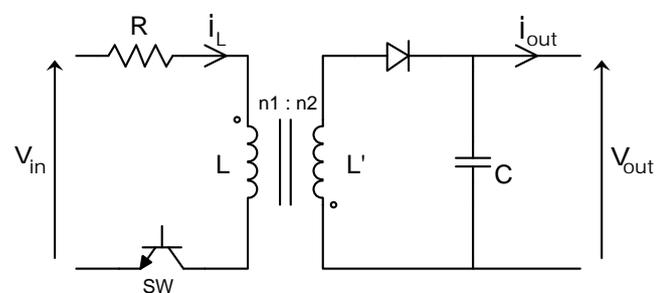


Figure 1.4 – Topologie d'un convertisseur Flyback.

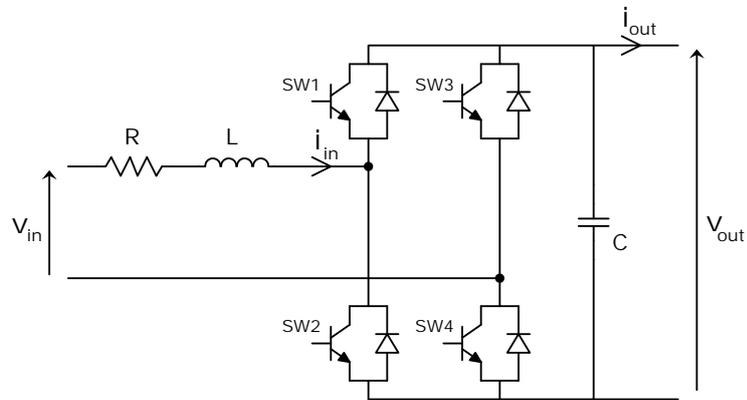


Figure 1.5 – Topologie d'un redresseur monophasé.

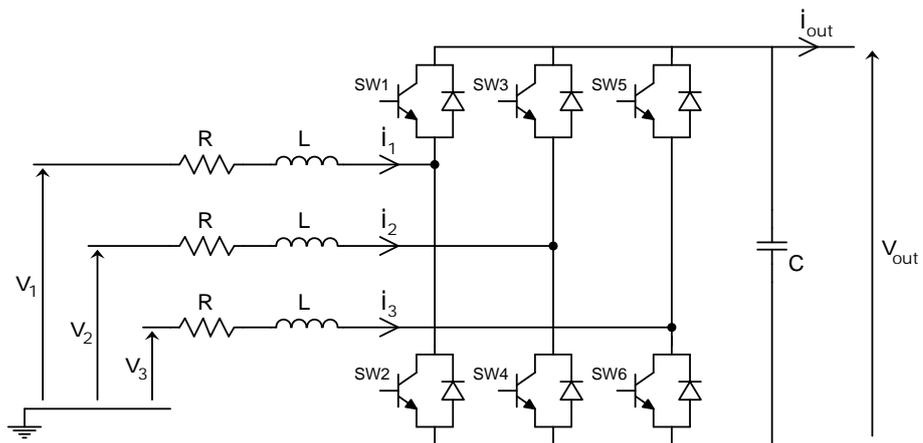


Figure 1.6 – Topologie d'un redresseur triphasé.

### 1.1.2 Fonctionnement et modèles en espace d'état moyennés (SSA)

La dynamique de fonctionnement des convertisseurs est liée à l'état des interrupteurs mais aussi à l'état des diodes. En général, la diode est bloquée lorsque l'interrupteur est fermé et elle est passante lorsque l'interrupteur est ouvert. Ce mode de fonctionnement en alternance est appelé *mode de conduction continue* ou en anglais CCM (Continuous Conduction Mode). Lorsque la diode se bloque pendant que le transistor est ouvert, le mode de fonctionnement du convertisseur est appelé *mode de conduction discontinue* ou en anglais DCM (Discontinuous Conduction Mode).

Les convertisseurs cités fonctionnent sur un régime périodique de période  $T_{sw}$ , dite période de découpage ou de commutation. Un signal commande l'ouverture et la fermeture des interrupteurs. Ce signal est discontinu et généralement issu d'une modulation par largeur d'impulsion (MLI) ou en anglais PWM (Pulse Width Modulation). Il permet de régler la tension (ou le courant) en sortie en fonction de la tension (ou le courant) en entrée en adaptant le rapport cyclique  $\alpha$ . En CCM, son fonctionnement est décomposé en deux phases. Dans la première phase, pour  $t \in [0 \ \alpha T_{sw}]$ , l'interrupteur est fermé et de l'énergie est stockée sous forme magnétique dans les inductances et les transformateurs. Lors de la seconde phase, pour  $t \in [\alpha T_{sw} \ T_{sw}]$ , l'interrupteur est ouvert et l'énergie magnétique stockée lors de la première phase est transmise à la sortie. Chaque phase de fonctionnement est décrite par un modèle linéaire.

Ces phases de fonctionnement sont illustrées pour un convertisseur Boost sur la figure 1.7 et leurs modèles sont donnés ci-dessous. Les modèles des autres convertisseurs DC-DC les plus utilisés peuvent être trouvés en annexe B.

Phase 1, pour  $t \in [0 \ \alpha T_{sw}]$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (1.1a)$$

Phase 2, pour  $t \in [\alpha T_{sw} \ T_{sw}]$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (1.1b)$$

Le comportement global du convertisseur Boost est alors décrit par le modèle affine commuté

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{d(t)-1}{L} \\ \frac{1-d(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

où  $d(t)$  est le signal MLI qui commande l'ouverture et la fermeture des interrupteurs à partir de la valeur du rapport cyclique et de la période de commutation. C'est un signal discontinu qui prend pour valeurs 1 (phase 1) ou 0 (phase 2). Toutefois, le modèle souvent utilisé, car il présente l'avantage d'être continu, est le modèle en espace d'état moyenné ou en anglais SSA (State Space Averaging)

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{\alpha(t)-1}{L} \\ \frac{1-\alpha(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

où  $\alpha(t)$  est directement la valeur du rapport cyclique de commande. Ce modèle néglige les commutations et ne caractérise que le comportement moyen du convertisseur.

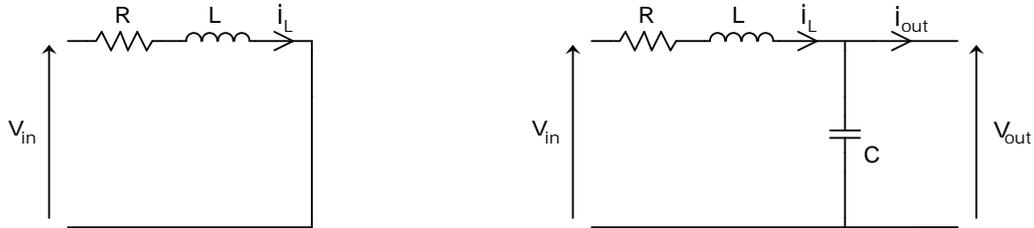
Pour les convertisseurs AC-DC et DC-AC, en CCM, les interrupteurs d'un même bras ont un fonctionnement en alternance qui permet d'inverser le sens du courant et de la tension. Sur la figure 1.5, SW1 et SW4 fonctionnent normalement en alternance avec SW2 et SW3. Dans la première phase, pour  $t \in [0, \alpha T_{sw}]$ , seuls SW1 et SW4 sont fermés. Dans la seconde phase, pour  $t \in [\alpha T_{sw}, T_{sw}]$ , seuls SW2 et SW3 sont fermés. Ces phases de fonctionnement sont illustrées pour un redresseur monophasé sur la figure 1.8. Le comportement global du redresseur monophasé est alors décrit par le modèle affine commuté

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{in}(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-s(t)}{L} \\ \frac{s(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{in}(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

où  $s(t)$  est la fonction qui commande l'ouverture et la fermeture des interrupteurs. C'est un signal discontinu qui prend pour valeurs 1 (phase 1) ou -1 (phase 2). Le modèle en espace d'état moyenné, généralement utilisé, s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{in}(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{1-2\alpha(t)}{L} \\ \frac{2\alpha(t)-1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

où  $\alpha(t)$  est directement la valeur du rapport cyclique de commande. Le cas triphasé est détaillé dans la partie 4.1.



(a) Phase 1 : interrupteur fermé et diode bloquée. (b) Phase 2 : interrupteur ouvert et diode passante.

**Figure 1.7** – Les phases de fonctionnement d'un convertisseur Boost en mode de conduction continue.

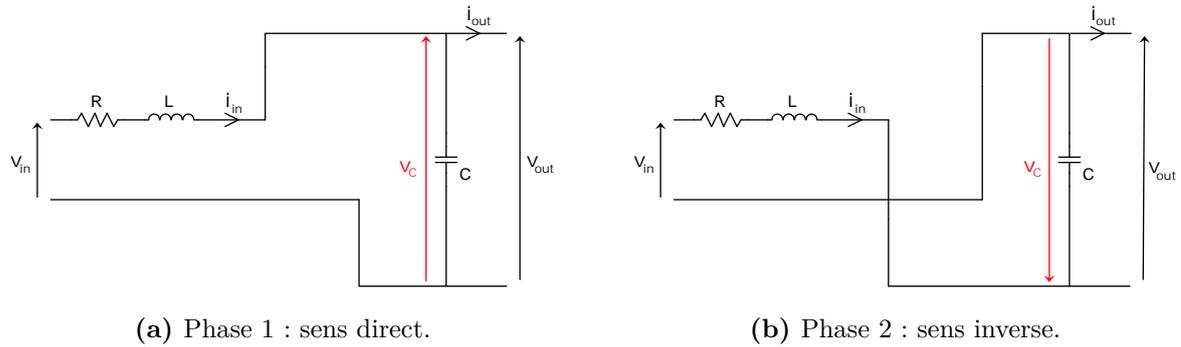


Figure 1.8 – Les phases de fonctionnement d'un redresseur monophasé en mode de conduction continue.

## 1.2 Réseau électrique

Un réseau électrique est un ensemble de systèmes énergétiques qui permet de transporter et distribuer l'énergie électrique. Il est composé de systèmes interconnectés qui forment des interfaces entre les producteurs et les consommateurs. Il est décrit de manière synthétique sur la figure 1.9. L'énergie électrique est transformée au niveau de l'interface avec les producteurs pour assurer sa compatibilité avec le milieu de transport et au niveau de l'interface avec les consommateurs pour répondre à leurs besoins et respecter les contraintes des équipements. Les interfaces sont généralement composées d'un ensemble de convertisseurs de puissance associés à des composants passifs tels que des inductances, des résistances et des condensateurs. Le réseau électrique le plus répandu est le réseau public de distribution de l'électricité. Dans ce cas, les centres de production sont liés à des exploitations de combustibles fossiles (pétrole, charbon, gaz naturel...), des centrales nucléaires, des champs éoliens et solaires ou des barrages hydrauliques et les consommateurs sont les entreprises et les particuliers.

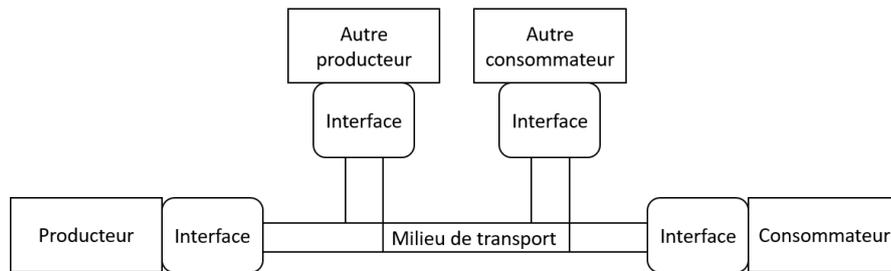


Figure 1.9 – Schéma général d'un réseau électrique.

### 1.2.1 Réseau électrique embarqué

Les réseaux électriques peuvent être embarqués dans des systèmes. C'est le cas notamment dans les voitures et les avions. Les consommateurs sont alors généralement des batteries (qui sont aussi producteurs), des accessoires ou des actionneurs tels que des moteurs électro-mécaniques (qui peuvent également être utilisés en qualité de générateur, et donc producteur). L'architecture générale d'un réseau électrique embarqué est décrite sur la figure 1.10. Le bus DC comporte des connexions physiques et constitue le milieu de transport de l'électricité à l'intérieur du réseau embarqué. Lorsqu'un avion est à l'arrêt, il peut être branché sur le réseau aéroportuaire de

distribution d'électricité. Lorsqu'il est en mouvement, c'est une génératrice électro-mécanique entraînée par un réacteur qui joue le rôle du réseau de distribution. Elle récupère de l'énergie mécanique sur le réacteur et la transforme pour générer des courants et tensions électriques alternatifs.

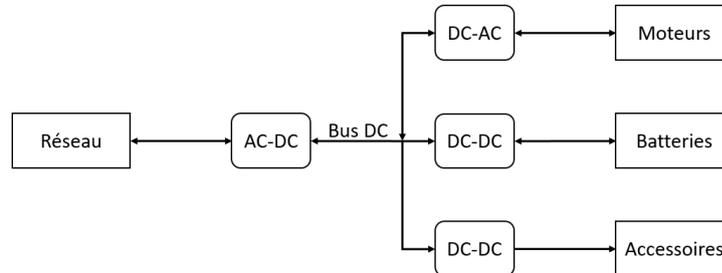


Figure 1.10 – Architecture générale d'un réseau électrique embarqué.

Les réseaux électriques embarqués sont au cœur des préoccupations dans l'aéronautique. Le besoin en énergie électrique à bord des avions est sans cesse croissant. Les entreprises se donnent notamment pour objectif un futur avion "tout électrique". Ce phénomène d'électrification des avions tend à se renforcer pour des raisons aussi bien écologiques qu'économiques. L'utilisation d'énergie électrique permet en effet de réduire le bilan carbone. De plus, elle est facilement transportable tandis que les énergies hydraulique et pneumatique nécessitent des structures importantes résistantes à la pression. En outre, la maintenance et la réparation d'un système électrique sont bien plus aisées. Ainsi, la tendance est à assurer toutes les fonctions auxiliaires (besoins non-propulsifs) par de l'énergie électrique [Laskaridis, 2004]. Récemment, des solutions technologiques commencent à apparaître pour utiliser des réseaux électriques embarqués pour la propulsion. Elles se limitent à ce jour à la propulsion au sol et doivent permettre à l'avion de se déplacer en limitant l'usage de son carburant sur le tarmac. En résumé, les avantages attendus de l'avion "plus électrique" sont entre autres [Rosero *et al.*, 2007] :

- réduire de manière significative l'utilisation de carburant
- faciliter la maintenance et réduire son coût
- faciliter les réparations et réduire les retards engendrés par les pannes

Bien entendu, les avantages des systèmes plus électriques ne se cantonnent pas aux avions mais profitent à minima à tout moyen de transport. Ces raisons font de la maîtrise des réseaux électriques embarqués un sujet central pour les systèmes de demain.

### 1.2.2 Chaîne d'actionnement électrique

Une chaîne d'actionnement électrique est un ensemble de systèmes énergétiques interconnectés. C'est une partie d'un réseau électrique dont la fonction est d'alimenter un actionneur. Elle correspond à la ligne électrique depuis le réseau jusqu'à un moteur sur l'architecture de la figure 1.10. En aéronautique, c'est une brique technologique essentielle dans les systèmes de régulation moteur et de freinage. Sa fonction est de transformer un signal triphasé issu d'un alternateur en un signal de commande moteur triphasé. Un schéma bloc général d'une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion est présenté sur la figure 1.11. Cette conversion AC-AC fait intervenir deux étages intermédiaires de conversions de puissance. Le signal d'entrée est d'abord redressé par une conversion AC-DC puis à nouveau découpé par un

onduleur (conversion DC-AC). L'alternateur est une génératrice électro-mécanique qui joue le rôle du réseau de distribution. Il est entraîné par la turbine du réacteur et fournit des tensions et courants alternatifs. Côté actionneur, des tensions sinusoïdales permettent de réguler le moteur électrique. Remarquons que l'alternateur n'est pas seulement connecté au moteur (via l'onduleur) mais également à d'autres composants électriques (voir figure 1.10).

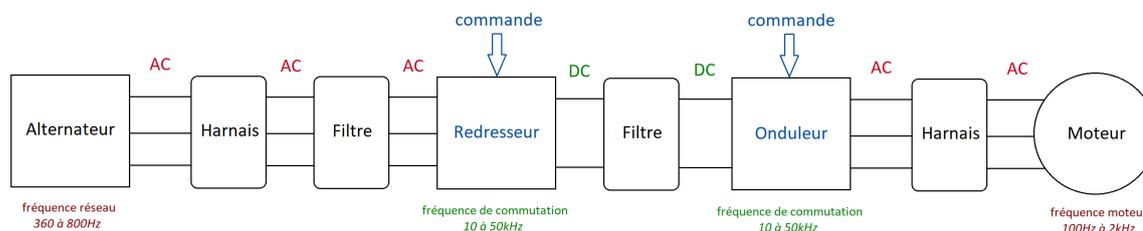


Figure 1.11 – Schéma bloc d'une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion.

### 1.3 Motivations

Dans la société moderne, les réseaux électriques permettent de répondre à des besoins de plus en plus sophistiqués et qui évoluent rapidement. L'introduction de composants actifs d'électronique de puissance améliore l'efficacité du conditionnement, de la transmission et de la conversion de l'énergie électrique. Embarquer ces technologies permet de repenser les commandes des systèmes électriques en les rendant plus complexes mais en offrant de meilleures garanties et de meilleures performances. De plus, les progrès récents de l'électronique de puissance permettent d'optimiser la masse des systèmes en réduisant les valeurs des composants. Toutefois, ces progrès technologiques sont également à l'origine de nouveaux challenges, notamment pour des besoins de certification [Hauer et Taylor, 1998]. Les machines électriques et plus généralement les systèmes électro-mécaniques sont en effet de plus en plus complexes, de comportement parfois hautement non linéaires. Ils ont tendance à générer des harmoniques et des dynamiques rapides dont peuvent résulter des couplages entre des processus dynamiques de fréquences différentes [Hauer et Taylor, 1998]. Notamment, les convertisseurs de puissance génèrent par nature de nombreux harmoniques et leurs interactions dépendent fortement du contrôle. Ainsi, les systèmes d'aujourd'hui peuvent être à l'origine d'instabilités impliquant des fréquences différentes [Hammad, 1992]. Un des principaux challenges actuels en électronique de puissance est la prédiction, la compréhension et la maîtrise des phénomènes fréquentiels au sein d'un ensemble de systèmes dynamiques interconnectés.

Historiquement en électronique de puissance, les premiers modèles ne permettaient de représenter que la dynamique moyenne des signaux par la méthode de State-Space Averaging (SSA) qui consiste en une moyennisation sur une fenêtre glissante [Middlebrook et Cuk, 1976]. Ces modèles se sont révélés efficaces pour étudier des signaux faible bande, pour lesquels les harmoniques sont négligeables. Cependant, ils ne permettent l'étude des harmoniques qu'en régime permanent par analyse de Fourier et sont insuffisants pour modéliser des signaux large bande [Erickson *et al.*, 1982]. Ces modèles révèlent ainsi leurs limites face aux comportements harmoniques complexes des nouveaux systèmes d'électronique de puissance. Cela a notamment été observé concrètement avec l'incident des locomotives suisses en 1995 [Mollerstedt et Bernhardsson, 2000b] qui se sont arrêtées plusieurs fois à cause de taux harmoniques élevés. Les modèles des chaînes électriques

des locomotives ont été incapables de prédire les instabilités engendrées par les harmoniques car ils ne considéraient pas leurs dynamiques et leurs interactions mais seulement le comportement moyen.

Dans le contexte aéronautique, la chaîne d'actionnement électrique est une brique technologique essentielle dans les systèmes de régulation moteur et de freinage. Elle s'inscrit dans de nombreux projets motivés par la problématique de transition écologique qui gagne depuis quelques années le monde industriel, ainsi que par les débouchés économiques intéressants de l'énergie électrique. Notamment, la volonté des entreprises d'aéronautique de développer un avion plus électrique la place au centre de l'intérêt. Les blocs qui composent une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion type de Safran ainsi que les plages fréquentielles usuellement associées sont présentés sur la figure 1.11. Plusieurs plages de fréquences sont mises en jeu :

- La fréquence réseau dont le fondamental évolue entre 360 et 800Hz ;
- La fréquence électrique moteur qui évolue généralement entre 100Hz et quelques kHz ;
- Les fréquences de commutation des convertisseurs dont le fondamental se situe entre 10 et 50kHz.

Dans la mesure du possible, ces gammes de fréquences sont découplées pour éviter les interactions fréquentielles et faciliter la phase de conception des algorithmes de commande et conversions. Hélas, ce découplage n'est pas toujours possible. Par exemple, lorsque les fréquences électriques moteur se superposent aux fréquences électriques du réseau, ou encore lorsqu'une pollution harmonique intervient suite à un déséquilibre du réseau. Un phénomène de mise en résonance des filtres d'interconnexions peut également intervenir lorsque la régulation opérée du côté onduleur conduit à assimiler le bloc « moteur – onduleur » à une charge à puissance constante, ce qui se traduit, coté filtres, par une impédance négative avec un effet potentiellement déstabilisateur. Ces exemples montrent que l'interconnexion de ces différents éléments, malgré l'utilisation de filtres, peut conduire à des phénomènes de résonance et de pollution harmonique aujourd'hui mal maîtrisés. Dès lors, les dispositifs d'électronique de puissance ne peuvent plus être considérés comme des systèmes à variation lente et l'analyse de stabilité ainsi que la conception de lois de contrôle ne peuvent se limiter à la valeur moyenne ou au fondamental des signaux. C'est à partir de ce constat que des techniques de modélisation innovantes, qui considèrent les dynamiques propres à chaque harmonique ainsi que leurs interactions, ont été introduites.

Le fil d'Ariane des travaux doctoraux présentés ici est d'exploiter ces techniques de modélisation pour contribuer à maîtriser les phénomènes fréquentiels au sein de systèmes dynamiques interconnectés et de les adapter au contexte de l'actionnement électrique. Un premier objectif est de construire des outils pour analyser a priori les phénomènes fréquentiels. Ils permettront d'améliorer la sûreté et l'efficacité des réseaux électriques. Le second objectif est d'établir une stratégie pour agir sur ces phénomènes fréquentiels. Les maîtriser à l'aide de nouvelles techniques de commande permettra d'assurer la stabilité des réseaux électriques et de garantir le respect des normes sur les taux harmoniques. Une conséquence directe sera alors la réduction du besoin de filtrage analogique et du surdimensionnement des composants. Cela est d'autant plus important dans le contexte aéronautique, car réduire la masse et le volume des systèmes électriques embarqués permet de limiter les coûts associés (consommation de carburant et capacité d'accueil des avions). De plus, les filtres réduisent généralement les performances des réseaux électriques et peuvent provoquer des instabilités par mise en résonance des composants.

## 1.4 État de l'art de la modélisation par techniques harmoniques

De nombreuses approches de modélisation par techniques harmoniques ont été présentées dans la littérature dans les trente dernières années :

- Generalized State-Space Averaging (GSSA) [Sanders *et al.*, 1991]
- Dynamic Phasors (DP) [Mattavelli *et al.*, 1997]
- Extended Harmonic Domain (EHD) [Martinez, 2001]
- Dynamic Harmonic Domain (DHD) [Ramirez *et al.*, 2005]
- Harmonic State-Space (HSS) [Wereley, 1990]

Grâce à ces techniques, il est possible de développer des modèles des systèmes dans une base fonctionnelle qui décompose leurs comportements selon un spectre fréquentiel contenant une fréquence fondamentale ainsi que ses harmoniques (les fréquences multiples). Elles permettent de saisir à la fois l'évolution transitoire et le régime permanent des harmoniques des signaux et décrivent leurs interactions. Dans cette partie, nous présentons les approches citées et nous comparons leurs concepts mathématiques pour fournir une vision globale de ces outils. Cela contribue à choisir la technique la mieux adaptée à un besoin donné et tirer le meilleur de chacune d'entre elles. Une contribution importante résultant de ce travail bibliographique est d'identifier clairement des opérations simples pour passer d'un modèle harmonique à un autre et de montrer que les concepts mathématiques des différentes approches sont équivalents.

### 1.4.1 Generalized State-Space Averaging (GSSA) et Dynamic Phasors (DP)

Comme son nom l'indique, l'approche GSSA (*moyennisation généralisée en espace d'état* en français) est une extension de la méthode SSA. Elle est basée sur un développement en série de Fourier avec des coefficients temps-variants [Sanders *et al.*, 1991]. Ces coefficients deviennent les nouvelles variables pour modéliser le comportement harmonique du système et analyser l'impact d'un contrôle-commande. Le terme DP (*phaseurs dynamiques* en français) a été introduit dans [Mattavelli *et al.*, 1997] pour souligner le caractère temps-variant des coefficients mais cette approche est identique.

La méthode est basée sur le fait qu'un signal peut être caractérisé sur l'intervalle  $(t - T, t]$  par une représentation en série de Fourier généralisée de la forme [Sanders *et al.*, 1991]

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k(t) e^{jk\omega\tau} \quad (1.6)$$

où  $\tau = t - T + \delta$ ,  $\delta \in (0, T]$ , où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et avec des coefficients de Fourier temps-variant

$$X_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p) e^{-jk\omega p} dp = \langle x \rangle_k(t) \quad (1.7)$$

La notation  $\langle \cdot \rangle_k(t)$  représente l'opération  $\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \cdot e^{-jk\omega p} dp$ . Les coefficients  $X_k(t)$  sont appelés *coefficients de Fourier généralisés* dans la GSSA et *phaseurs* dans les DP. Ils sont temps-variant car calculés par intégration sur une fenêtre glissante. Ils caractérisent les signaux dans la base fonctionnelle des exponentielles complexes de Fourier  $(e^{jk\omega\tau})_{k \in \mathbb{Z}}$  de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .  $T$  est également la longueur de la fenêtre glissante.  $X_k(t)$  est le  $k^e$  coefficient ou  $k^e$  phaseur et se rapporte au comportement du signal selon le  $k^e$  harmonique, à la fréquence  $f_k = \frac{k}{T}$ . Les coefficients d'indices  $+k$  et  $-k$  décrivent le comportement complet du signal selon la fréquence

$f_k$ . Si le signal étudié est  $T$ -périodique, alors ses coefficients définis par (1.7) sont constants et correspondent aux coefficients de Fourier classiques. La formule (1.6) correspond alors à la formule de décomposition en série de Fourier.

La formule (1.6) est appliquée à des signaux quasi-périodiques et la longueur de la fenêtre glissante  $T$  est fixée égale à la période fondamentale du signal. Elle n'est exacte au point  $\tau = t$  (pour  $\delta = T$ ) que si le signal est continu et  $T$ -périodique. Cela est précisé dans la partie 2.2 où une formule ajustée est donnée dans la proposition 2.3. La méthode des DP (ou GSSA) propose de construire un espace d'état harmonique dans lequel les variables sont les phaseurs (1.7) (ou coefficients de Fourier généralisés). Elle propose ainsi un changement de base vers la base fonctionnelle  $(e^{jk\omega\tau})_{k \in \mathbb{Z}}$ . Nous appelons dans la suite cette base *la base harmonique de période  $T$* , avec toujours  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Pour construire un espace d'état dans une base fonctionnelle, il faut savoir dériver les nouvelles variables d'état dans cette base. La dérivée du  $k^e$  phaseur dans la base harmonique peut être exprimée selon la formule [Sanders *et al.*, 1991]

$$\dot{X}_k(t) = \langle \dot{x} \rangle_k(t) - jk\omega X_k(t) \quad (1.8)$$

Cette relation lie la dérivée du  $k^e$  phaseur  $\dot{X}_k(t)$  au  $k^e$  phaseur de la dérivée du signal temporel  $\langle \dot{x} \rangle_k(t)$ . Le terme  $jk\omega X_k(t)$  se rapporte à la dérivation de la base fonctionnelle elle-même, en l'occurrence la dérivation de la  $k^e$  fonction exponentielle complexe. A partir des équations  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $y = g(x, u)$ , la formule (1.8) permet de déduire les relations

$$\begin{aligned} \dot{X}_k(t) &= -jk\omega X_k(t) + \langle f(x, u) \rangle_k(t) \\ Y_k(t) &= \langle g(x, u) \rangle_k(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Il reste désormais à exprimer les phaseurs de  $f(x, u)$  et  $g(x, u)$ . Le  $k^e$  phaseur d'un produit de signaux s'exprime sous la forme d'un produit de convolution dans la base harmonique [Sanders *et al.*, 1991]

$$\langle xy \rangle_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X_{k-i}(t)Y_i(t) \quad (1.10)$$

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions polynomiales scalaires en leurs arguments, alors leurs phaseurs s'expriment explicitement par (1.10). Pour un système LTV (A.2), nous obtenons ainsi un ensemble d'équations dynamiques de la forme

$$\begin{aligned} \dot{X}_k(t) &= -jk\omega X_k(t) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_{k-i}(t)X_i(t) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} B_{k-i}(t)U_i(t) \\ Y_n(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_{n-i}(t)X_i(t) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} D_{n-i}(t)U_i(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les variables du modèle sont les phaseurs des signaux. Le modèle décrit les dynamiques de ces variables harmoniques ainsi que leurs interactions via les produits de convolution. Si seul l'harmonique d'ordre zéro est retenu, alors les équations obtenues sont celles de la SSA et ne décrivent que le comportement moyen des signaux. En revanche, en considérant plusieurs harmoniques, il est possible de modéliser les dynamiques et couplages harmoniques selon les fréquences considérées, à savoir les multiples de la fréquence de la base harmonique.

En pratique, nous choisissons les harmoniques que nous souhaitons considérer (les rangs  $-k$  et  $+k$  correspondant) puis nous formons un modèle en espace d'état avec des équations de la

forme (1.9) à partir des formules (1.8) et (1.10). Dans la formule (1.10), les coefficients qui ne sont pas considérés dans le modèle sont supposés nuls. Par exemple, si seuls les deux premiers harmoniques de  $x(t)$  et le premier harmonique de  $y(t)$  sont pris en compte,  $\langle xy \rangle_0(t) = X_1(t)Y_{-1}(t) + X_0(t)Y_0(t) + X_{-1}(t)Y_1(t)$  et  $\langle xy \rangle_1(t) = X_0(t)Y_{-1}(t) + X_{-1}(t)Y_0(t) + X_{-2}(t)Y_1(t)$ . Pour savoir quels harmoniques inclure au modèle, nous pouvons nous appuyer par exemple sur une connaissance à priori du comportement harmonique du système, par la modélisation exacte du système avec un logiciel de simulation électrique, ou par des mesures. Les modèles des DP sont souvent relativement simples et considèrent un nombre limité d'harmoniques. Il est nécessaire de connaître les principales fréquences du système et de les inclure au modèle pour décrire fidèlement les phénomènes fréquentiels.

### 1.4.2 Extended/Dynamic Harmonic Domain (EHD/DHD)

Le EHD transforme un modèle LTP en un modèle LTI de dimension infinie dont les variables caractérisent les harmoniques des signaux [Martinez, 2001; Rico *et al.*, 2003]. Il permet d'analyser le comportement harmonique complet des systèmes LTP. Le terme DHD a été introduit dans [Ramirez *et al.*, 2005] mais cette approche est identique.

La méthode se base sur le même développement en série de Fourier généralisée que pour les DP (1.6) avec des coefficients de Fourier temps-variant (les phaseurs) (1.7). Simplement, la formule (1.6) est exprimée sous forme matricielle plus condensée [Martinez, 2001]

$$x(\tau) = \Gamma(\tau)X(t) \quad (1.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= [\dots e^{-jk\omega\tau} \dots 1 \dots e^{-jk\omega\tau} \dots] \\ X(t) &= [\dots X_{-k}(t)^T \dots X_0(t)^T \dots X_k(t)^T \dots]^T \end{aligned}$$

où  $\tau \in (t-T, t]$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Le vecteur  $\Gamma(\tau)$  est le vecteur de projection sur la base harmonique des fonctions exponentielles complexes. Le vecteur  $X(t)$  est le vecteur harmonique du signal  $x(\tau)$  contenant ses phaseurs. Ces deux vecteurs sont de dimension infinie en théorie. La méthode propose de construire un espace d'état harmonique, décrivant un système LTP, dans lequel les variables sont les phaseurs des signaux. Elle propose un changement de base vers la base harmonique  $(e^{jk\omega\tau})_{k \in \mathbb{Z}}$ , avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et où  $T$  est la période du système LTP.

La dérivée du vecteur harmonique d'un signal dans la base harmonique peut être exprimée sous la forme matricielle [Martinez, 2001]

$$\dot{X}(t) = \langle \dot{x} \rangle(t) - \mathcal{N}X(t) \quad (1.13)$$

avec

$$\mathcal{N} = \text{diag}(\dots -jk\omega\mathcal{U}_I \dots 0\mathcal{U}_I \dots jk\omega\mathcal{U}_I \dots) \quad (1.14)$$

où  $\mathcal{U}_I$  est la matrice identité, ici de dimension égale au nombre de variables d'état temporelles. Cette relation lie la dérivée du vecteur harmonique  $\dot{X}(t)$  au vecteur harmonique de la dérivée de la variable d'état temporelle  $\langle \dot{x} \rangle(t)$ . Le terme  $\mathcal{N}X(t)$  se rapporte à la dérivation de la base fonctionnelle elle-même. La matrice  $\mathcal{N}$ , appelée *matrice de différentiation*, contient en effet les termes  $jk\omega$  qui se rapportent aux dérivées des fonctions exponentielles complexes. En fait, la  $k^e$  ligne dans (1.13) s'écrit comme la procédure de dérivation des DP (1.8). Pour un système LTP, les matrices de l'espace d'état sont périodiques (voir annexe A.2). Les phaseurs du produit

d'un signal par une matrice  $T$ -périodique s'exprime dans la base harmonique de même période  $T$  sous la forme [Martinez, 2001]

$$\langle Ax \rangle (t) = \mathcal{T}_T(A)X(t) \quad (1.15)$$

où  $\mathcal{T}_T(A)$  désigne la forme de Toeplitz de  $A(\cdot)$  définie par [Gohberg *et al.*, 2013, volume II]

$$\mathcal{T}_T(A) = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ & A_0 & A_{-1} & A_{-2} & A_{-3} & A_{-4} & \\ & A_1 & A_0 & A_{-1} & A_{-2} & A_{-3} & \\ \cdots & A_2 & A_1 & A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \cdots \\ & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & A_{-1} & \\ & A_4 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 & \\ \ddots & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Cette matrice de Toeplitz contient sur ces diagonales les phaseurs de  $A(\cdot)$  calculés selon la formule (1.7). Si  $A(\cdot)$  est de dimension  $m \times n$ , alors ses phaseurs aussi et  $\mathcal{T}_T(A)$  est Toeplitz par bloc. Ici, les phaseurs sont constants et correspondent aux coefficients de Fourier classiques car  $A(\cdot)$  est  $T$ -périodique. Le produit d'un signal par une matrice de Toeplitz correspond en réalité à une procédure de convolution : la  $k^e$  ligne dans (1.15) s'écrit comme la formule des DP (1.10).

Les formules (1.13) et (1.15) permettent de construire à partir d'un modèle LTP un espace d'état de dimension infinie dans une base harmonique de période égale à la période du système et de la forme [Martinez, 2001]

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}U(t) \\ Y(t) &= \mathcal{C}X(t) + \mathcal{D}U(t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{T}_T(B)$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{T}_T(C)$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{T}_T(D)$ . Les variables sont les phaseurs des signaux et le modèle décrit leurs comportements selon les fréquences représentées, à savoir toutes les fréquences multiples de la fréquence de la base (la fréquence des matrices originelles). Ce modèle est finalement une écriture matricielle des équations (1.11) appliquées à un modèle temporel LTP. Les interactions fréquentielles sont caractérisées par les produits avec des matrices de Toeplitz. De plus, le modèle obtenu est LTI, ce qui permet d'envisager utiliser les techniques classiques d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires.

En pratique, il faut disposer d'un modèle temporel LTP qui décrit le comportement du système étudié puis en déduire un modèle en espace d'état harmonique de la forme (1.17) à partir des formules (1.13) et (1.15). D'un point de vue numérique, il est nécessaire de considérer un nombre fini de variables harmoniques et ainsi de tronquer le modèle harmonique. Tronquer à l'ordre  $h$  signifie considérer les harmoniques d'ordre inférieur ou égal à  $h$ . Le modèle harmonique est alors de dimension  $(2h + 1)n_x$ , avec  $n_x$  le nombre de variables d'état originelles. La matrice de différentiation et les matrices de Toeplitz sont carrées de dimensions  $(2h + 1)n_x$  et leurs coefficients d'ordre supérieur à  $h$  sont supposés nuls. Par exemple, les matrices de Toeplitz pour un modèle tronqué à l'ordre 2 sont de dimensions  $5n_x$  et de la forme

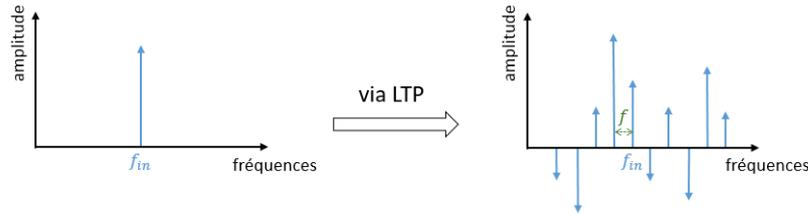
$$\mathcal{T}_T(A) = \begin{bmatrix} A_0 & A_{-1} & A_{-2} & 0 & 0 \\ A_1 & A_0 & A_{-1} & A_{-2} & 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & A_{-1} & A_{-2} \\ 0 & A_2 & A_1 & A_0 & A_{-1} \\ 0 & 0 & A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

où  $A_k \in \mathbb{C}^{n_x \times n_x}$ , et avec  $A_{-k} = \bar{A}_k$  si  $A(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ , où  $\bar{A}_k$  désigne le conjugué de  $A_k$ . Il est intéressant toutefois de conserver un nombre important d'harmoniques pour modéliser les dynamiques harmoniques. Les modèles du EHD sont ainsi généralement de dimension importante. Leur domaine d'application est limité à la modélisation des systèmes périodiques ou quasi-périodiques.

### 1.4.3 Harmonic State-Space (HSS)

La méthode du HSS permet de caractériser la réponse fréquentielle d'un système LTP en régime transitoire et en régime permanent en définissant sa fonction de transfert harmonique [Wereley, 1990]. Elle a été développée à partir des fonctions propres des systèmes LTP proposées dans la théorie de Floquet [Floquet, 1883] et dans la théorie de Hill [Hill, 1886]. Elle se distingue des techniques précédentes car elle aboutit à un modèle dans un domaine purement fréquentiel pour l'analyse harmonique et l'analyse du contrôle-commande des systèmes LTP.

La notion fondamentale derrière le développement des techniques classiques d'analyse des systèmes LTI (voir annexe A.2), notamment la caractérisation du système par sa fonction de transfert, est qu'un signal d'entrée sinusoïdal est transformé par un système LTI en un signal de sortie lui aussi sinusoïdal, de même fréquence mais d'amplitude et de phase généralement différentes. C'est de cette propriété, appelée *propriété de séparation des fréquences*, que découle le domaine de Laplace et toute la théorie d'analyse et de contrôle des systèmes linéaires. L'idéal serait de pouvoir utiliser les outils développés dans cette théorie pour étudier les systèmes LTP. Cependant, si un signal sinusoïdal est appliqué en entrée d'un système LTP, de nombreuses sinusoïdes apparaissent en général sur le signal de sortie, à la fréquence du signal d'entrée décalée d'un multiple de la fréquence fondamentale du système [Wereley et Hall, 1991], voir figure 1.12. Le domaine de Laplace ne peut être utilisé tel quel dans le cadre de l'étude des systèmes LTP et l'objectif du HSS est de trouver une alternative.



**Figure 1.12** – Réponse d'un système LTP de fréquence  $f$  à un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{in}$ .

La recherche d'une solution à l'étude des système LTP n'est pas une problématique nouvelle et des résultats intéressants ont été présentés dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle dans la théorie de Floquet [Floquet, 1883] et dans la théorie de Hill [Hill, 1886]. Ces théories ont introduit respectivement les concepts de signal géométriquement périodique (GP en anglais) et de signal périodique modulé exponentiellement (EMP en anglais).

**Définition 1.1.** *Un signal géométriquement périodique (GP) est une fonction du temps complexe caractérisée par la propriété*

$$u(t + nT) = z^n u(t) \quad (1.18)$$

où  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et où  $T$  est sa période fondamentale.

**Définition 1.2.** *Un signal périodique modulé exponentiellement (EMP) de période fondamentale  $T$  est une fonction complexe qui peut être exprimée comme le produit d'une fonction  $T$ -périodique et d'une exponentielle complexe*

$$u(t) = e^{st} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega t} \quad (1.19)$$

où  $s \in \mathbb{C}$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . La relation peut être écrite de manière compacte sous la forme matricielle

$$u(t) = e^{st}\Gamma(t)U \quad (1.20)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= [\dots e^{-jk\omega t} \dots 1 \dots e^{jk\omega t} \dots] \\ U &= [\dots U_{-k}^T \dots U_0^T \dots U_k^T \dots]^T \end{aligned}$$

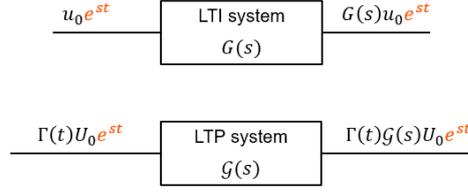
Un signal GP peut être exprimé comme un signal EMP et inversement, le lien étant clairement exprimé par  $z = e^{sT}$ . Ces signaux sont des généralisations des signaux périodiques, retrouvés pour  $z = 1$  et  $s = 0$ . Ce sont des fonctions de carré intégrable au sens de Lebesgue si  $|z| \leq 1$  et  $\mathcal{R}_e(s) \leq 0$ . La théorie de Floquet propose d'analyser les systèmes périodiques à l'aide de signaux GP dont le régime transitoire est supposé suivre un comportement exponentiel. La théorie de Hill propose de nouvelles fonctions de kernel pour étudier les systèmes LTP. Les fonctions de kernel déterminent une carte implicite qui transforme une fonction ou des données de l'espace d'entrée en un espace fonctionnel et déterminent ainsi sa distribution dans cet espace. Ceci est généralement accompli par des transformations intégrales. Parmi les noyaux bien connus, on trouve les noyaux polynomiaux, exponentiels et gaussiens. Hill ajoute une extension périodique aux fonctions de kernel exponentielles du domaine de Laplace  $e^{-st}$ ,  $s \in \mathbb{C}$  pour faire le lien avec la solution supposée de Floquet. Il introduit ainsi le concept de signal EMP. Plus de détails sur ces concepts et leurs origines peuvent être trouvés dans [Floquet, 1883] et [Hill, 1886]. Des synthèses sur leur application et leur intérêt pour l'étude des systèmes périodiques peuvent être trouvées dans [Deconinck et Kutz, 2006] et dans [Bittanti et Colaneri, 2009, chapitre 1].

Ce qu'il ressort des travaux de Floquet et Hill est qu'un système LTP de période donnée transforme un signal EMP (resp. GP) de même période en un signal encore EMP (resp. GP), toujours de même période, mais d'amplitudes et de phases généralement différentes [Wereley et Hall, 1990]. A ce titre, les signaux EMP sont aux systèmes LTP ce que les exponentielles complexes sont aux systèmes LTI. Ils possèdent pour ces systèmes une propriété de séparation des fréquences. Cette analogie, illustrée sur la figure 1.13, permet d'exprimer que l'espace des signaux EMP forme une base de fonctions propres pour l'étude des systèmes LTP au même titre que les exponentielles complexes pour l'étude des systèmes LTI [Wereley et Hall, 1991]. L'approche HSS exploite cette base pour modéliser un système LTP par un espace d'état harmonique LTI dans le domaine fréquentiel et pour définir sa fonction de transfert.

Pour construire un tel espace d'état, il faut travailler avec les fonctions propres EMP dans le domaine fréquentiel lié aux fonctions de kernel  $(e^{-(s+jk\omega)t})_{k \in \mathbb{Z}}$  introduites par Hill

$$\begin{aligned} u_s(t) &= e^{st}\Gamma(t)U_s \\ x_s(t) &= e^{st}\Gamma(t)X_s \\ y_s(t) &= e^{st}\Gamma(t)Y_s \end{aligned} \quad (1.21)$$

Il faut savoir exprimer la dérivée de ces fonctions propres dans le domaine fréquentiel. L'action de dérivation est liée aux fonctions de kernel utilisées et correspond au produit par les variables



**Figure 1.13** – Propriété de séparation des fréquences et analogie entre les signaux EMP via les systèmes LTP (en bas) et les exponentielles complexes via les systèmes LTI (en haut).

complexes  $(s + jk\omega)_{k \in \mathbb{Z}}$ , selon la relation

$$\dot{x}_s(t) = s e^{st} \Gamma(t) X_s + e^{st} \Gamma(t) \mathcal{N} X_s \quad (1.22)$$

où  $\mathcal{N}$  est la matrice de différentiation, telle que définie dans le EHD (1.14). Le produit d'un signal EMP par une matrice périodique s'exprime dans le domaine fréquentiel à l'aide de la matrice de Toeplitz de la matrice périodique selon la relation

$$A(t) x_s(t) = e^{st} \Gamma(t) \mathcal{A} X_s \quad (1.23)$$

avec  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$ . Les formules (1.22) et (1.23) permettent de déduire à partir d'un espace d'état temporel LTP A.2 les relations

$$\begin{aligned} s e^{st} \Gamma(t) X_s + e^{st} \Gamma(t) \mathcal{N} X_s &= e^{st} \Gamma(t) \mathcal{A} X_s + e^{st} \Gamma(t) \mathcal{B} U_s \\ e^{st} \Gamma(t) Y_s &= e^{st} \Gamma(t) \mathcal{C} X_s + e^{st} \Gamma(t) \mathcal{D} U_s \end{aligned} \quad (1.24)$$

avec  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{T}_T(B)$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{T}_T(C)$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{T}_T(D)$  et la matrice de différentiation  $\mathcal{N}$ . En simplifiant les termes exponentiels  $e^{st}$  car ils ne s'annulent jamais et le vecteur  $\Gamma(t)$  par identification terme à terme, il est alors possible de modéliser la réponse du système à un signal EMP. Le système LTP peut être représenté par un modèle en espace d'état harmonique de la forme [Wereley et Hall, 1990]

$$\begin{aligned} sX(s) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(s) + \mathcal{B}U(s) \\ Y(s) &= \mathcal{C}X(s) + \mathcal{D}U(s) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Tout signal peut être écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de signaux EMP, si bien que ce modèle caractérise le comportement du système vis à vis de tout signal. Il se présente sous une forme similaire à celui du EHD (1.17). Il en est en réalité une version dans le domaine fréquentiel. L'avantage considérable de l'approche HSS est qu'elle fournit un cadre dans lequel il est possible de définir une fonction de transfert harmonique des systèmes LTP [Wereley et Hall, 1990]

$$\mathcal{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathcal{C}(s\mathcal{I} + \mathcal{N} - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D} \quad (1.26)$$

Cette matrice de transferts contient les fonctions de transfert entre chaque harmonique du signal d'entrée et chaque harmonique du signal de sortie. Elle est un opérateur linéaire pour les systèmes LTP utilisée pour analyser leur réponse à une excitation harmonique [Mollerstedt et Bernhardsson, 2000a]. L'analogie forte que nous proposons est la suivante : le HSS est aux systèmes LTP ce que le domaine de Laplace est aux systèmes LTI. La différence avec le domaine de Laplace est que chaque signal physique est représenté par un nombre important de variables dans le domaine harmonique.

En pratique, il faut disposer d'un modèle temporel LTP décrivant le comportement du système étudié puis en déduire un modèle en espace d'état harmonique dans le domaine fréquentiel de la forme (1.25) en étudiant la réponse du système à des signaux EMP (1.19). D'un point de vue numérique, il est nécessaire à nouveau de travailler avec des modèles HSS tronqués. Leur domaine d'application est limité à la modélisation des systèmes périodiques ou quasi-périodiques.

#### 1.4.4 Synthèse sur les techniques harmoniques

Ces trente dernières années, de très nombreuses recherches ont porté sur la prédiction et la maîtrise des phénomènes fréquentiels qui sont des challenges importants de l'électronique de puissance. Ces travaux ont abouti à de nombreuses approches présentées dans cette partie. Certains articles ont proposé une comparaison de leurs performances selon divers critères d'applicabilité et selon leurs complexités, tout en précisant que les objectifs pour lesquels ces méthodes ont été élaborées diffèrent [Hwang, 2014; Kwon *et al.*, 2015a; Wang et Blaabjerg, 2018]. Ces travaux contribuent au choix de la méthode la mieux adaptée à un besoin donné. Dans [Hwang et Wood, 2015; Orillaza et Wood, 2012], les auteurs relèvent des similarités entre les approches EHD, DHD et HSS. Les liens qui existent entre les approches de la littérature sont finalement clairement identifiés dans ce manuscrit et synthétisés ici.

L'approche des DP (ou GSSA), présentée dans la section 1.4.1, a été développée pour effectuer la synthèse du contrôle-commande de systèmes d'électronique de puissance en considérant les principaux harmoniques des signaux. Les modèles (1.9) sont formés à partir des variables harmoniques (1.7) qui caractérisent les signaux du système selon la formule (1.6). Ils peuvent être utilisés pour étudier tout type de systèmes polynomiaux. Les modèles se présentent sous la forme d'un ensemble d'équations dynamiques et ne permet pas d'inclure facilement un grand nombre d'harmoniques, ce qui limite l'analyse harmonique à une bande fréquentielle réduite. Typiquement, des dynamiques harmoniques à des fréquences plus élevées risquent de ne pas être bien modélisées [Javaid et Dujic, 2015].

En revanche, le EHD (ou DHD), présenté dans la section 1.4.2, a été développé pour analyser le comportement harmonique complet des systèmes LTP. Les modèles (1.17) sont formés à partir des mêmes variables harmoniques que pour les DP (1.7) qui caractérisent les signaux du système selon la formule (1.12). Cette formule est en réalité une écriture matricielle condensée de celles des DP (1.6) pour tous les harmoniques. En résumé, les modèles du EHD sont des versions matricielles sous la forme d'un espace d'état harmonique des équations des DP obtenues par application à des systèmes LTP et en considérant un nombre arbitrairement grand d'harmoniques.

Enfin, l'approche HSS, présentée dans la section 1.4.3, a été développée pour caractériser les systèmes LTP par une fonction de transfert harmonique. L'objectif est d'analyser le comportement harmonique des systèmes en régime permanent et transitoire. Les modèles (1.25) sont obtenus en utilisant le concept de signaux EMP (1.20) mais peuvent également être obtenus par transformée de Laplace des modèles EHD. En résumé, les modèles du HSS sont les versions fréquentielles des modèles du EHD dans un domaine analogue au domaine de Laplace.

Pour conclure, les concepts mathématiques utilisés pour chaque technique sont équivalents. Les différences entre les approches sont dues aux objectifs et aux domaines d'application distincts pour lesquels elles ont été développées. Les approches des DP et de la GSSA ont un cadre

d'application plus large que les autres car elles ne se restreignent pas à l'étude de systèmes périodiques. Les approches des EHD, DHD et HSS sont en revanche plus complètes que les DP car elles permettent de considérer un nombre arbitrairement grand d'harmoniques, et ainsi d'analyser le comportement harmonique complet des systèmes. Ces deux aspects sont finalement complémentaires. Les liens identifiés entre les méthodes permettent de passer d'un modèle à un autre relativement simplement, par des opérations résumées sur la figure 1.14.

Concernant la problématique des travaux de thèse, les chaînes d'actionnement électriques sont constitués d'éléments de puissance de comportement généralement quasi-périodique. Les DP semblent adaptés à l'étude des dynamiques harmoniques spécifiques au réseau et leurs couplages, en particulier avec les harmoniques moteur, ainsi qu'au développement d'un correcteur pour maîtriser les taux harmoniques correspondants. Autrement, le EHD semble un bon outil pour analyser les interactions fréquentielles dans leur globalité, telles que l'influence des commutations hautes fréquences générées par les convertisseurs de puissance et leurs couplages avec les harmoniques du réseau ou encore des phénomènes de résonances inattendus, par exemple des filtres d'interconnexion. Le HSS semble également servir la problématique en fournissant les fonctions de transfert harmonique de chaque système de la chaîne, ce qui facilite l'analyse de leurs couplages dynamiques. L'objectif serait de développer une méthodologie unifiée permettant d'exploiter les spécificités et avantages de chacune de ces méthodes. Cela fait l'objet du prochain chapitre.

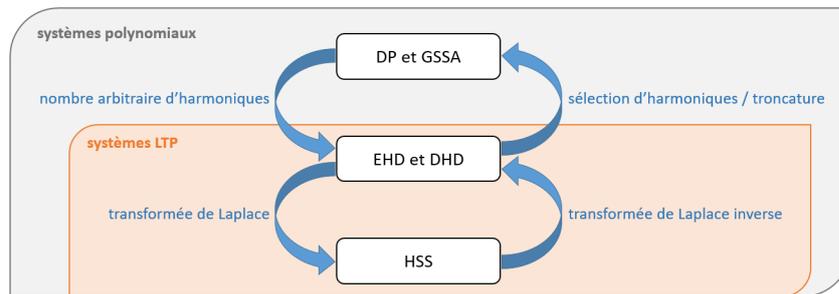


Figure 1.14 – Classification des approches de modélisation harmonique et liens entre les modèles.



## Chapitre 2

# Modélisation harmonique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Cadre formel : espaces fonctionnels et transformations . . . . .</b>	<b>26</b>
2.1.1	Espaces fonctionnels et décomposition de Fourier glissante . . . . .	27
2.1.2	Condition nécessaire et suffisante de coïncidence . . . . .	29
2.1.3	Reconstruction et transformation inverse . . . . .	32
<b>2.2</b>	<b>Modélisation harmonique unifiée . . . . .</b>	<b>37</b>
2.2.1	Résultats préliminaires sur les matrices de Toeplitz . . . . .	37
2.2.2	Modèle harmonique d'une équation différentielle . . . . .	39
2.2.3	Modèle harmonique des systèmes LTV et LTP . . . . .	42
2.2.4	Modèle harmonique des systèmes affines commutés . . . . .	43
2.2.5	Limitations des modèles harmoniques tronqués . . . . .	44
2.2.6	Réflexion sur le choix de la période de la base harmonique . . . . .	46
<b>2.3</b>	<b>Application aux convertisseurs de puissance . . . . .</b>	<b>48</b>
2.3.1	Modélisation harmonique des convertisseurs DC-DC . . . . .	48
2.3.2	Modélisation harmonique des convertisseurs AC-DC . . . . .	53
2.3.3	Interconnexion des convertisseurs . . . . .	58
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>62</b>

---

## Introduction

De nombreuses approches de modélisation par techniques harmoniques ont été présentées dans la littérature. Il est nécessaire de choisir la méthode adaptée à un besoin donné, voir d'utiliser plusieurs d'entre elles pour des objectifs différents, ce qui demande un effort important et coûteux en temps. De plus, les outils sont généralement décrits sans hypothèses formelles, dans des espaces qui ne sont pas mathématiquement définis. Toutefois, ce qui ressort du travail bibliographique entrepris dans la partie 1.4 est que les concepts mathématiques des différentes techniques sont équivalents. Nous envisageons alors dans ce chapitre de proposer une méthodologie unifiée et complète dans un cadre formel pour modéliser et étudier le comportement harmonique d'un système ou d'un ensemble de systèmes dynamiques interconnectés.

Dans la partie 2.1, nous développons un cadre formel dans lequel les notions données dans les techniques harmoniques ont du sens. Nous définissons les espaces fonctionnels qui formalisent les domaines temporel et harmonique de la littérature, les transformations de type Fourier généralisé pour passer d'un espace fonctionnel à un autre, ainsi que les conditions à respecter pour associer les variables harmoniques et temporelles. Dans la partie 2.2, nous développons dans ce cadre formel une méthodologie harmonique unifiant les techniques de la littérature. Elle associe un modèle harmonique analytique aux systèmes généralement polynomiaux en considérant un nombre arbitraire d'harmoniques, possiblement infini. Les modèles harmoniques des systèmes LTV, LTP et affines commutés sont donnés explicitement. Nous proposons également une réflexion sur le choix de la période de la base harmonique qui ouvre de nouvelles perspectives pour l'analyse et le contrôle-commande des systèmes. Finalement, ce chapitre fournit un outil unifié et complet pour prédire et comprendre les phénomènes fréquentiels qui ont lieu au sein d'un ensemble de systèmes dynamiques interconnectés. A titre d'illustration, nous validons la stratégie proposée pour modéliser les convertisseurs de puissance, continu-continu mais aussi alternatif-continu, seuls ou associés. Nous présentons des résultats de simulation en boucle ouverte dans la partie 2.3 et nous comparons les signaux avec ceux obtenus avec des modèles temporels instantanés.

## 2.1 Cadre formel : espaces fonctionnels et transformations

Dans les travaux de la littérature sur les techniques harmoniques, les transformations permettant de passer des variables temporelles à des variables harmoniques et inversement sont généralement présentées sans hypothèses formelles. Les domaines temporels et harmoniques ne sont pas mathématiquement définis. A notre connaissance, seuls [Almer et Jonsson, 2009; Sandberg *et al.*, 2005] ont commencé à définir formellement des espaces de travail. Nous proposons dans cette première partie un cadre mathématique complet dans lequel les notions données dans les techniques harmoniques ont du sens. Le théorème de Riesz-Fischer sert de base pour construire les espaces fonctionnels, que nous appelons domaines temporel et harmonique, à partir des espaces  $L^2$  et  $l^2$ . Nous définissons alors la décomposition de Fourier glissante  $\mathcal{F}_T$  et son inverse  $\mathcal{F}_T^{-1}$  qui forment une bijection entre ces espaces fonctionnels et garantissent ainsi une stricte association entre variables temporelles et harmoniques. Un résultat remarquable est la condition nécessaire et suffisante sur le domaine harmonique, présentée dans la section 2.1.2, que nous appelons *condition de coïncidence* et dont il n'est pas fait mention dans la littérature. Elle est essentielle pour associer une variable temporelle aux variables harmoniques et ainsi pour modéliser un système dans le domaine harmonique. Elle sera également essentielle pour effectuer proprement une synthèse de correcteur dans le domaine harmonique (voir partie 3.3).

### 2.1.1 Espaces fonctionnels et décomposition de Fourier glissante

**Définition 2.1.** L'espace des fonctions de  $L^2([a, b], \mathbb{C}^n)$  est défini comme l'espace des fonctions mesurables sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  et de carré intégrable

$$L^2([a, b], \mathbb{C}^n) = \{u : \tau \in [a, b] \mapsto u(\tau) \in \mathbb{C}^n : \int_a^b u(p)^* u(p) dp < +\infty\} \quad (2.1)$$

muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2([a, b])} = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(p)^* v(p) dp$$

et de la norme induite

$$\|u\|_{L^2([a, b])} = \langle u, u \rangle_{L^2([a, b])}^{\frac{1}{2}}$$

où  $u(p)^*$  désigne la transposée conjuguée complexe de  $u(p)$ . Une fonction  $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  si pour tout ensemble compact  $A \in \mathbb{R}$ , sa restriction à ce compact  $u|_A \in L^2(A, \mathbb{C}^n)$

**Définition 2.2.** L'espace des suites de  $\ell^2(\mathbb{C}^n)$  est défini comme l'espace des suites complexes de carré sommable

$$\ell^2(\mathbb{C}^n) = \{U : k \in \mathbb{Z} \mapsto U_k \in \mathbb{C}^n : \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k^* U_k < +\infty\} \quad (2.2)$$

muni du produit scalaire

$$\langle U, V \rangle_{\ell^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k^* V_k$$

et de la norme induite

$$\|U\|_{\ell^2} = \langle U, U \rangle_{\ell^2}^{\frac{1}{2}}$$

où  $U_k^*$  désigne la transposée conjuguée complexe de  $U_k$ .

**Théorème 2.1. (Identité de Parseval)** Pour tout  $u \in L^2([b-T, b], \mathbb{C}^n)$ , nous avons

$$\|u\|_{L^2([b-T, b])} = \|U\|_{\ell^2} \quad (2.3)$$

où la suite  $U$  est déterminée par

$$U : k \mapsto U_k = \langle e^{jk\omega(\cdot)}, u(\cdot) \rangle_{L^2([b-T, b])} = \frac{1}{T} \int_{b-T}^b u(p) e^{-jk\omega p} dp$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

**Théorème 2.2. (Théorème de Riesz-Fischer)** Une fonction  $u$  est de carré intégrable si et seulement si la série de Fourier associée converge dans l'espace  $L^2$  vers  $u$ .

L'identité de Parseval permet de conclure qu'il y a isométrie entre les espaces  $L^2([b-T, b], \mathbb{C}^n)$  et  $\ell^2(\mathbb{C}^n)$ . Le théorème de Riesz-Fischer est essentiel car il nous enseigne qu'à toute fonction  $u \in L^2$  nous pouvons associer une suite  $U \in \ell^2$  dont les éléments sont les coefficients de Fourier  $u$ . Et inversement à toute suite  $U \in \ell^2$  nous pouvons associer une fonction  $u \in L^2$  dont les coefficients de Fourier sont les éléments de  $U$ .

*Remarque.* Les suites  $U$  de coefficients de Fourier vérifiant  $\forall k \in \mathbb{Z}, U_{-k} = \bar{U}_k$ , où  $\bar{U}_k$  désigne le conjugué de  $U_k$ , sont associées à des fonctions  $u$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Nous désirons considérer des fenêtres d'intégration glissantes pour saisir les dynamiques transitoires, donc des éléments  $U_k(t)$  qui dépendent du temps. Nous nous intéressons aux fonctions bornées localement presque partout pour conserver l'association entre les fonctions temporelles et les suites fonctionnelles ainsi définies.

**Définition 2.3.** L'espace des fonctions de  $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  est défini comme l'espace des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  et bornées presque partout

$$L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) = \{u : \tau \in \mathbb{R} \mapsto u(\tau) \in \mathbb{C}^n : \sup \text{ess}|u| < +\infty\} \quad (2.4)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup \text{ess}|u| = \inf_M \{M : |u(\tau)| \leq M \text{ p.p.}\}$$

où p.p. signifie presque partout. Et l'espace des fonctions de  $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  est défini comme l'espace des fonctions bornées localement presque partout. Plus précisément,  $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  si pour tout ensemble compact  $A$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$\|u\|_{L^\infty}(A) = \sup \text{ess}|u|(A) = \inf_M \{M : \tau \in A, |u(\tau)| \leq M \text{ p.p.}\} = M(A) < +\infty$$

**Définition 2.4.** Une fonction  $u : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  est dite absolument continue sur l'intervalle réel  $I$  si, pour tout réel  $\epsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  tel que, pour toute suite finie  $([a_n, b_n])_{n \leq N}$  de sous-intervalles de  $[a, b]$  d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |u(a_n) - u(b_n)| < \epsilon \quad (2.5)$$

Nous notons  $C_a(I, \mathbb{C}^n)$  ce sous-espace vectoriel de  $L^\infty(I, \mathbb{C}^n)$ . Une fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  est dite absolument continue si elle est absolument continue sur tout sous-intervalle compact de  $\mathbb{R}$ .

Une fonction  $u$  est absolument continue sur  $[a, b]$  si et seulement s'il existe une fonction  $u'$  intégrable sur  $[a, b]$  (au sens de Lebesgue) telle que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $u(x) - u(a) = \int_a^x u'(t) dt$ . La notion de fonction absolument continue est un peu plus forte que la notion de fonction uniformément continue. Une fonction  $u$  absolument continue est continue, à variation bornée (donc dérivable presque partout) et possède la propriété N de Luzin : l'image par  $u$  de tout ensemble de mesure nulle (au sens de Lebesgue) est de mesure nulle. En particulier, une fonction absolument continue sur un intervalle fermé est essentiellement bornée ( $\in L^\infty$ ) sur cet intervalle. Par relation entre espaces  $L^p$  (théorème A.1), elle est donc  $L^p$ , pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , sur l'intervalle.

Si  $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , alors la restriction de  $u$  à un intervalle quelconque  $[t-T, t]$ , notée  $u|_{[t-T, t]}$ , est dans  $L^p([t-T, t], \mathbb{C}^n)$ , quel que soit  $t \in \mathbb{R}$ . Par abus de langage, nous écrirons dans la suite qu'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  appartient à  $L^p(I)$  si sa restriction à cet intervalle  $u|_I \in L^p(I)$ . En particulier, si  $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , alors  $u \in L^2$  sur tout intervalle  $[t-T, t]$  et peut donc être associée à la suite des coefficients de Fourier de sa restriction à cet intervalle par Riesz-Fischer. Par suite, nous pouvons associer à  $u$  une fonction  $U \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  qui à un temps  $t$  associe la suite de carré sommable  $U(t) \in \ell^2(\mathbb{C}^n)$  des coefficients de Fourier de  $u|_{[t-T, t]}$ . Nous définissons de cette manière la décomposition de Fourier glissante  $\mathcal{F}_T$ .

**Définition 2.5.** La décomposition de Fourier glissante  $\mathcal{F}_T$  est définie pour une période  $T$

quelconque par

$$\mathcal{F}_T : L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \rightarrow L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$$

$$u \mapsto U : (t \mapsto U(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ U_{-k}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{jk\omega p} dp \\ \vdots \\ U_0(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) dp \\ \vdots \\ U_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{-jk\omega p} dp \\ \vdots \end{pmatrix}) \quad (2.6)$$

où les  $U_k(t)$  sont appelés phaseurs et sont définis par

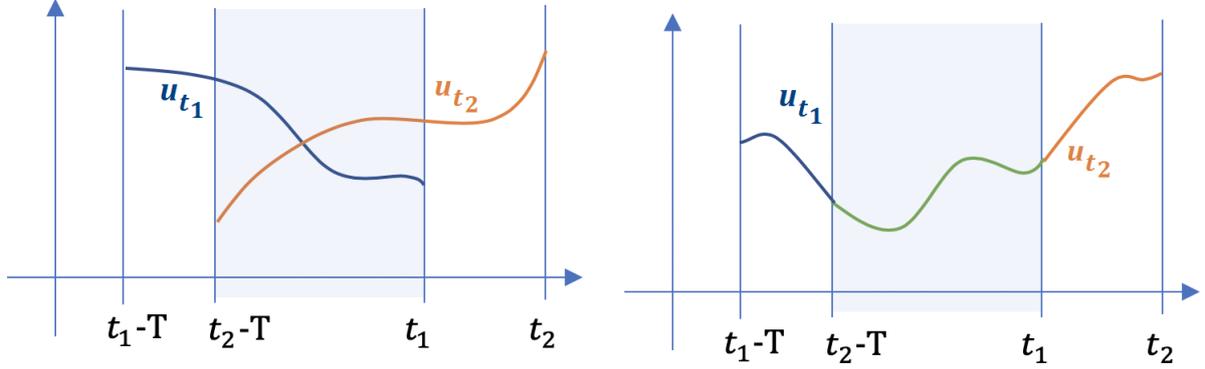
$$U_k(t) = \langle e^{jk\omega(\cdot)}, u(\cdot) \rangle_{L^2([t-T, t])} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{-jk\omega p} dp \quad (2.7)$$

La base fonctionnelle  $(e^{jk\omega(\cdot)})_{k \in \mathbb{Z}}$  est appelée base harmonique. Nous avons  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , donc  $T$  est à la fois la longueur de la fenêtre glissante et la période des exponentielles complexes (période de la base harmonique).

Notons que  $U$  est bien définie dans  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  car les fonctions  $U_k(\cdot)$  sont absolument continues (car définies par des intégrales) et que pour tout  $t$  fixé, la suite des termes  $U_k(t)$  est de carré sommable (Riesz-Fischer). Notons également que  $\mathcal{F}_T$  est applicable par extension à toute fonction intégrable localement au sens de Lebesgue  $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , mais alors la suite fonctionnelle  $U = \mathcal{F}_T(u)$ , pour un  $t$  fixé, n'est pas de carré sommable. L'espace d'arrivée n'est plus dans ce cas  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  mais  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^\infty(\mathbb{C}^n))$ .

### 2.1.2 Condition nécessaire et suffisante de coïncidence

À l'inverse, considérons une fonction  $U \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$ . Il est clair, par application du théorème de Riesz-Fischer, que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  nous pouvons associer à  $U(t)$  une fonction  $u_t \in L^2([t-T, t], \mathbb{C}^n)$  dont les coefficients de Fourier sont les éléments de  $U(t)$ . Cependant, les fonctions associées pour différents  $t$  peuvent ne pas coïncider sur leur domaine de définition commun : pour deux instants  $t_1 < t_2$  tels que  $t_2 - t_1 < T$ , il n'est pas garanti que  $u_{t_1}(\tau) = u_{t_2}(\tau)$  pour tous les  $\tau \in [t_2 - T, t_1]$ . Ce problème de coïncidence est illustré sur la figure 2.1. En d'autres termes, il n'existe pas a priori une fonction  $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  telle que  $\mathcal{F}_T(u) = U$ . De nombreux exemples peuvent être trouvés, qui ne respectent pas la condition de coïncidence (2.8), nécessaire et suffisante.



(a) Les fonctions  $u_{t_1}$  et  $u_{t_2}$  ne coïncident pas sur l'intervalle  $[t_2 - T, t_1]$ .

(b) Coïncidence : Les fonctions  $u_{t_1}$  et  $u_{t_2}$  coïncident sur l'intervalle  $[t_2 - T, t_1]$ .

Figure 2.1 – Problématique de coïncidence.

**Proposition 2.1.** Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction  $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  telle que  $U = \mathcal{F}_T(u)$  est que  $U$  soit absolument continue et vérifie la condition de coïncidence

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \dot{U}_k(t) = \dot{U}_0(t)e^{-jk\omega t} \quad p.p. \quad (2.8)$$

Et une condition nécessaire et suffisante pour que  $u$  soit de plus à valeurs réelles est que  $U$  vérifie la condition de conjugaison

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad U_{-k}(t) = \bar{U}_k(t) \quad (2.9)$$

*Démonstration.* La condition est nécessaire : pour tout  $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , nous pouvons considérer  $U = \mathcal{F}_T(u) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout indice  $k \in \mathbb{Z}$ , nous avons la relation

$$U_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{-jk\omega p} dp$$

Si nous supposons que  $u$  est à valeurs réelles, alors la relation de conjugaison (2.9) est facilement vérifiée. D'autre part, les éléments  $U_k(\cdot)$  sont définis par des intégrales, donc absolument continus. Alors, ils sont continus et dérivables presque partout et le calcul de leur dérivée donne

$$\begin{aligned} \dot{U}_k(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(\tau) e^{-jk\omega \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{1}{T} (u(t) e^{-jk\omega t} - u(t-T) e^{-jk\omega(t-T)}) \\ &= \frac{u(t) - u(t-T)}{T} e^{-jk\omega t} \quad p.p. \end{aligned}$$

En particulier pour  $k = 0$ ,

$$\dot{U}_0(t) = \frac{u(t) - u(t-T)}{T} \quad p.p.$$

Par suite, nous en déduisons la relation entre phaseurs (2.8).

Réciproquement, la condition est suffisante : soit  $U \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  une fonction absolument continue (donc dérivable presque partout) et vérifiant la condition de coïncidence (2.8). Pour tout  $t$  fixé,  $U(t) \in \ell^2(\mathbb{C}^n)$  et par application du théorème de Riesz-Fischer il existe une fonction  $u_t \in L^2([t-T, t], \mathbb{C}^n)$  telle que  $u_t(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega \tau}$ , avec  $U_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u_t(\tau) e^{-jk\omega \tau} d\tau$ .

Nous pouvons alors définir la fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  périodique en son second argument par

$$(t, \tau) \mapsto \tilde{u}_T(t, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega\tau}$$

Puisque  $U$  est absolument continue, les fonctions  $U_k(\cdot)$  sont continues et dérivables presque partout. La dérivée  $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_T(t, \tau)$  au sens des distributions donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_T(t, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{U}_k(t) e^{jk\omega\tau} \\ &= \dot{U}_0(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega k(\tau-t)} \quad p.p. \end{aligned}$$

Cette série n'est pas convergente au sens classique mais au sens des distributions et converge vers un Peigne de Dirac, noté  $\mathbb{I}\mathbb{I}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{kT}(t)$ .  $\mathbb{I}\mathbb{I}_T(t)$  est une distribution périodique tempérée et son développement en série de Fourier est donné par  $\mathbb{I}\mathbb{I}_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega t}$ . Nous écrivons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_T(t, \tau) &= T \dot{U}_0(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{t+kT}(\tau) \\ &= T \dot{U}_0(t) \mathbb{I}\mathbb{I}_T(\tau - t) \quad p.p. \end{aligned}$$

La restriction de cette distribution à la bande  $\{(t, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t - T < \tau < t\}$  conduit à

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}_T(t, \tau) = 0 \quad p.p.$$

Alors, pour tout  $h$  tel que  $\tau < t + h < \tau + T$ , nous parvenons à

$$\tilde{u}_T(t + h, \tau) = \tilde{u}_T(t, \tau) \quad p.p.$$

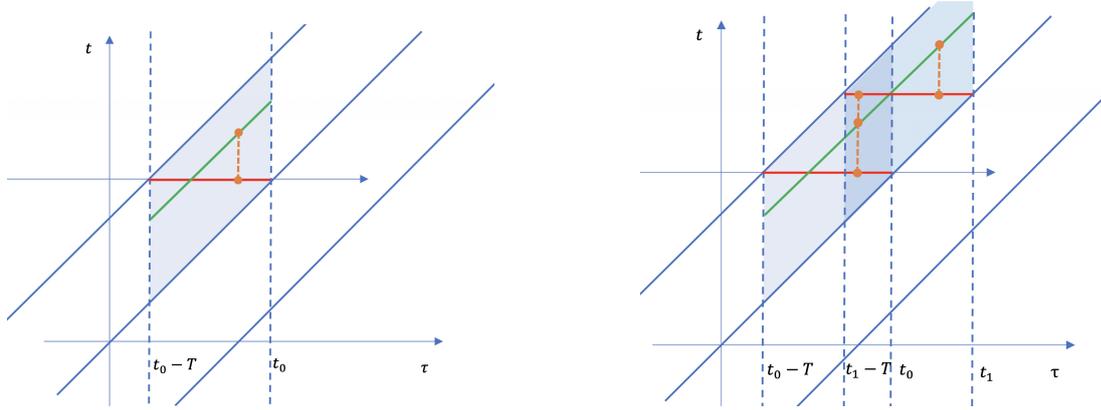
Autrement dit, les 2 fonctions  $\tilde{u}_T(t + h, \cdot)$  et  $\tilde{u}_T(t, \cdot)$  coïncident presque partout sur  $]t + h - T, t[$ . En considérant les droites paramétrées par  $h, \tau \mapsto t = \tau + h$  avec  $0 < h < T$ , strictement incluses dans la bande  $\{(\tau, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : t - T < \tau < t\}$ , nous pouvons donc définir par prolongement et recouvrement, comme illustré sur la figure 2.2, une fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \tilde{u}_T(\tau + h, \tau) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(\tau + h) e^{jk\omega\tau} \end{aligned}$$

pour tout  $0 < h < T$  et telle que

$$U_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{-jk\omega p} dp$$

Si de plus, les phaseurs vérifient la condition (2.9), alors  $u(\cdot)$  est à valeurs réelles. Notons bien que pour tout  $0 < h < T$ , la fonction  $u(\cdot)$  est uniquement définie et indépendante du choix de  $h$  car  $\tilde{u}_T(\tau + h_1, \tau) = \tilde{u}_T(\tau + h_2, \tau)$  pour tout  $h_1$  et  $h_2$  tels que  $0 < (h_1, h_2) < T$ . Nous venons donc de démontrer qu'il existe une fonction  $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  telle que  $U = \mathcal{F}_T(u)$ . □



(a) Définition de  $u(\tau) = \tilde{u}_T(\tau + h, \tau)$  pour  $t_0 - T < \tau < t_0$ . Le parallélogramme en bleu représente le domaine où  $\tilde{u}_T(t_0, \tau) = \tilde{u}_T(t_0 + h, \tau)$  pour  $t_0 - T < \tau < t_0$ .

(b) Construction de  $u(\tau) = \tilde{u}_T(\tau + h, \tau)$  pour  $\tau \in \mathbb{R}$  par prolongement et recouvrement.

**Figure 2.2** – Définition de  $u(\tau) = \tilde{u}_T(\tau + h, \tau)$  par prolongement et recouvrement. Les valeurs de  $\tilde{u}_T$  sur le segment rouge correspondent deux à deux aux valeurs de  $\tilde{u}_T$  sur le segment vert.

### 2.1.3 Reconstruction et transformation inverse

L'objectif ici est de reconstruire le signal originel à partir de sa suite fonctionnelle associée et de définir ainsi la transformation inverse de  $\mathcal{F}_T$ . Cela est difficilement envisageable dans le cas général pour des fonctions de  $L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  car regarder ces fonctions ponctuellement n'a pas de sens et ainsi montrer que  $u(\tau) = \mathcal{F}_T^{-1}(\mathcal{F}_T(u))(\tau)$  non plus. Dans ce but, nous considérons dans la suite des fonctions continues par morceaux ( $\mathcal{C}_m^0$ ) et à variation bornée.

**Définition 2.6.** Une fonction  $u$  est dite  $C^k$  par morceaux sur le segment  $[a, b]$  et notée  $\mathcal{C}_m^k$  s'il existe une subdivision  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  de l'intervalle  $[a, b]$  telle que, pour tout  $i = 0, \dots, n - 1$ , si on pose  $v_i = u|_{[a_i, a_{i+1}[}$ , alors  $v_i$  se prolonge en une fonction  $C^k$  à tout l'intervalle  $[a_i, a_{i+1}]$ . Autrement dit, les limites à droite et à gauche en tout point de discontinuité existent. Pour une fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , cette propriété sera exigée sur tout intervalle fermé borné  $[a, b]$ , soit pour un nombre de points au plus dénombrables et isolés.

En particulier, une fonction  $\mathcal{C}_m^0$  sur un intervalle fermé est essentiellement bornée ( $\in L^\infty$ ) sur cet intervalle. Par relation entre espaces  $L^p$  (théorème A.1), elle est donc  $L^p$ , pour tout  $p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , sur l'intervalle.

**Proposition 2.2.** Pour tout  $u \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , les éléments de  $U = \mathcal{F}_T(u)$  (les phaseurs déterminés par (2.7)) sont  $C^0 \cap \mathcal{C}_m^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et vérifient la relation

$$\dot{U}_k(t) = \dot{U}_0(t)e^{-jk\omega t} \quad (2.10)$$

sauf en un nombre de points dénombrables et isolés (les points de discontinuités de  $u(\cdot)$  ou de  $\dot{U}_k(\cdot)$ ) mais pour lesquels les limites à gauche et à droite existent. Si  $u \in C^0$ , les phaseurs sont  $C^1$  et vérifient (2.10) pour tout  $t$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ . Alors,  $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et nous pouvons définir  $U = \mathcal{F}_T(u)$ . Comme  $u \in \mathcal{C}_m^0$ , les phaseurs définis par (2.7) sont  $C^0 \cap \mathcal{C}_m^1$  et le calcul de la dérivée de  $U_k(t)$  donne

$$\dot{U}_k(t) = \frac{u(t) - u(t-T)}{T} e^{-jk\omega t}$$

sauf aux points de discontinuités, dénombrables et isolés, de  $u(\cdot)$  (ou de manière équivalente, de  $\dot{U}_k(\cdot)$ ). En particulier, pour  $k = 0$ ,

$$\dot{U}_0(t) = \frac{u(t) - u(t-T)}{T}$$

Par suite, nous déduisons la relation (2.10), vraie partout sauf aux points de discontinuités. Comme  $U_k \in C^0 \cap C_m^1$ , les limites à gauche et à droite existent en ces points.  $\square$

**Proposition 2.3.** *Tout  $u \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et à variation bornée (par exemple  $u \in \mathcal{C}_m^1$ ) peut être reconstruit à partir de  $U = \mathcal{F}_T(u)$  selon la formule causale*

$$u(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega t} - u(t-T) \quad (2.11a)$$

et pour un réel  $\delta \in ]0, T[$  selon la formule non-causale

$$u(t - \delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega(t-\delta)} \quad (2.11b)$$

où (2.11a) et (2.11b) sont vraies partout sauf en un nombre de points dénombrables et isolés (les points de discontinuités de  $u(\cdot)$ ). Si  $u \in \mathcal{C}^0$ , (2.11a) et (2.11b) sont vraies partout.

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et à variation bornée. Considérons la fonction définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par

$$\tilde{u}_T : (t, \tau) \mapsto \tilde{u}_T(t, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega\tau}$$

avec des coefficients définis par (2.7), à savoir les phaseurs associés à  $u(\cdot)$ . Cette fonction dépend de deux échelles de temps exprimées par les variables  $t$  et  $\tau$ . Elle est  $T$ -périodique par rapport à  $\tau$ . Pour illustration, elle est tracée pour deux valeurs différentes de  $t$  sur la figure 2.3 et les phaseurs de  $u(\cdot)$  sont tracés sur la figure 2.4. Pour tout réel  $t$  fixé, le théorème de Jordan-Dirichlet sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier donne, pour tout réel  $\tau \in ]t - T, t[$

$$\tilde{u}_T(t, \tau) = \frac{u(\tau_-) + u(\tau_+)}{2}$$

où  $u(\tau_-)$  et  $u(\tau_+)$  représentent respectivement les limites à gauche et à droite de  $u(\cdot)$  en  $\tau$ , définies même aux points de discontinuité. Alors, pour un réel  $\delta \in ]0, T[$ , en écrivant  $\tau = t - \delta$ ,

$$\tilde{u}_T(t, t - \delta) = \frac{u((t - \delta)_-) + u((t - \delta)_+)}{2}$$

Cela permet de déduire que la relation (2.11b) est vraie partout à l'exception des points de discontinuité de  $u(\cdot)$ . Du fait de la périodicité de la série, le théorème de Jordan-Dirichlet permet également d'écrire, pour  $\tau = t$ ,

$$\tilde{u}_T(t, t) = \frac{u(t_-) + u((t - T)_+)}{2}$$

Cela permet cette fois de déduire que la relation (2.11a) est vraie partout à l'exception des points de discontinuité de  $u(\cdot)$ .

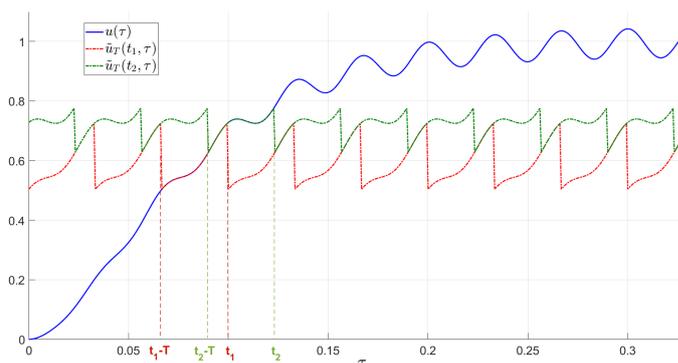
Par ailleurs, puisque  $u \in \mathcal{C}_m^0$ , il est clair que  $U_k \in C^0 \cap C_m^1$ . Le calcul de la dérivée de  $U_k(t)$  permet d'établir la relation

$$\dot{U}_k(t) = \frac{u(t) - u(t-T)}{T} e^{-jk\omega t}$$

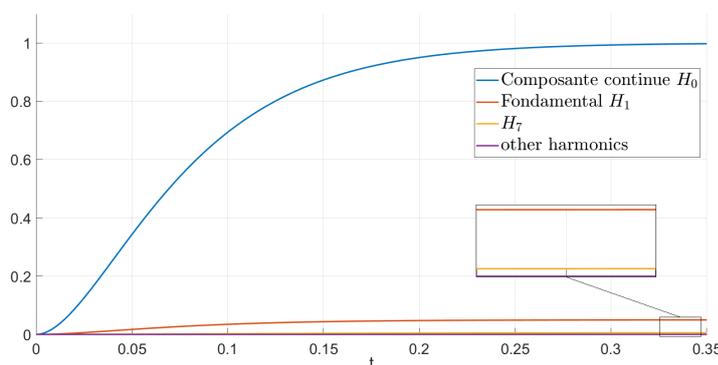
partout à l'exception des points de discontinuité de  $u(\cdot)$  (ou de manière équivalente ceux de  $\dot{U}_k(\cdot)$ ). En particulier, pour  $k = 0$ ,

$$\dot{U}_0(t) = \frac{u(t) - u(t - T)}{T}$$

Par suite on en déduit la relation entre phaseurs (2.10), vraie partout sauf aux points de discontinuités de  $u(\cdot)$ .



**Figure 2.3** – Principe de la moyenne glissante. Le signal  $u(\tau)$  est tracé en bleu. La fonction  $\tilde{u}_T(t, \tau)$  est tracée pour  $t = t_1$  en rouge et pour  $t = t_2$  en vert, en fonction de sa deuxième échelle de temps  $\tau$ .

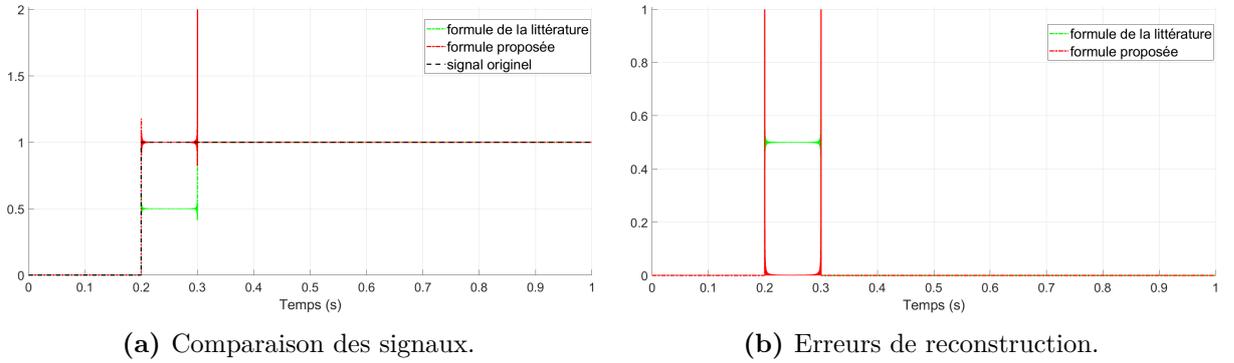


**Figure 2.4** – Tracé des phaseurs du signal  $u(\cdot)$  définis dans une base harmonique de période égale à celle du régime permanent de  $u(\cdot)$ .

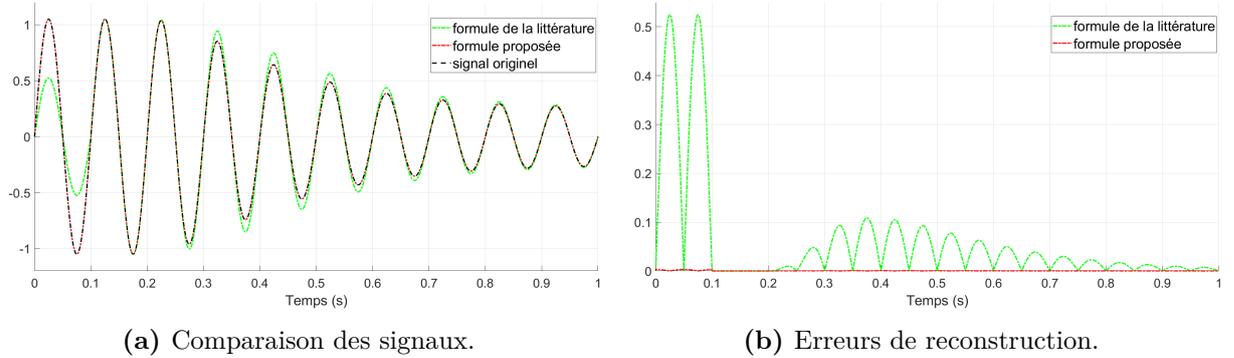
□

*Remarque.* Si le signal  $u(\cdot)$  est  $T$ -périodique après un certain temps  $t_r$ , comme sur la figure 2.3, alors ses phaseurs calculés pour cette période  $T$  (période des exponentielles complexes et longueur de la fenêtre d'intégration) sont constants pour  $t \geq t_r + T$ , comme illustré sur la figure 2.4. Dans ce cas, (2.11a) correspond à la formule de Fourier classique  $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{jk\omega t}$ , pour  $t \geq t_r + T$ . En d'autres termes, un régime permanent  $T$ -périodique est associé à un ensemble de coefficients constants et constitue ainsi un *équilibre harmonique* dans la base harmonique de période  $T$ . Il est tout de même intéressant de noter que la proposition est valable en théorie quelque soit la période  $T$ .

La formule de reconstruction des signaux temporels (2.11a) diffère de celle présentée dans la littérature (1.6). La formule de la littérature est inexacte au point  $\tau = t$  (ou  $\delta = 0$ ) pour des signaux non périodiques. Cela peut être compris dans la preuve présentée où nous pouvons aisément remarquer que les limites à gauche et à droite de  $\tilde{u}_T(t, \cdot)$  au point  $\tau = t$  ne sont égales que pour des fonctions  $u(\cdot)$   $T$ -périodiques. Elle ne permet donc pas de reconstruire les signaux non périodiques en temps-réel. Cela est illustré sur les figures 2.5 et 2.6 où la formule proposée et celle de la littérature sont comparées pour leur aptitude à reconstruire en temps-réel un signal échelon et un signal pseudo-périodique. La méthode proposée permet de reconstruire fidèlement les signaux (parfaitement sauf aux points de discontinuité), contrairement à la formule présentée dans la littérature. Ce problème n'a pas été, à notre connaissance, traité dans la littérature où la méthode a en général été appliquée à des signaux quasi-périodiques de variations d'amplitudes très lentes devant la période de la base harmonique et pour lesquels l'erreur est négligeable.



**Figure 2.5** – Comparaison des reconstructions d'un échelon selon la formule de la littérature et la formule proposée.



**Figure 2.6** – Comparaison des reconstructions d'un signal pseudo-périodique selon la formule de la littérature et la formule proposée (initialisation pour  $t < 0.1s$ ).

**Proposition 2.4.** *Pour tout  $u \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et à variation bornée (par exemple  $u \in \mathcal{C}_m^1$ ), la formule de reconstruction*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega t} + \frac{T}{2} \dot{U}_0(t) \quad (2.12)$$

*est équivalente à la formule (2.11a) et vraie partout sauf en un nombre de points dénombrables et isolés (les points de discontinuités de  $u(\cdot)$ ). Si  $u \in \mathcal{C}^0$ , (2.12) est vraie partout.*

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathcal{C}_m^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et à variation bornée. D'après la proposition 2.3, la formule (2.11a) est vraie partout sauf aux points de discontinuité de  $u(\cdot)$ . Par ailleurs, les phaseurs sont  $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{C}_m^1$  et dériver  $U_0(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p) dp$  conduit à la relation

$$u(t) = T\dot{U}_0(t) + u(t-T)$$

partout à l'exception des points de discontinuité de  $u(\cdot)$ . On peut donc écrire (2.12) en sommant avec (2.11a).  $\square$

Cette formule a l'avantage de ne pas impliquer de retard. Elle nous permet de définir la transformation inverse de la décomposition de Fourier glissante  $\mathcal{F}_T$ . La proposition 2.1 permet de conclure que la transformation  $\mathcal{F}_T$  est à valeurs dans un sous-espace  $H_T$  de  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  que nous introduisons ici. Il sert d'espace de départ pour la transformation inverse.

**Définition 2.7.** *L'espace  $H_T$  des suites fonctionnelles absolument continues ( $C_a$ ) qui vérifient la condition de coïncidence (2.8) est un sous-espace de  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  défini pour une période  $T$  quelconque par*

$$H_T = \{U \in C_a(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n)) : \forall k \in \mathbb{Z}, \dot{U}_k(t) = \dot{U}_0(t)e^{-jk\omega t} \text{ p.p.}\} \quad (2.13)$$

où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et où p.p. signifie presque partout.

**Proposition 2.5.** *Si  $U \in H_T$ , alors pour presque tout  $t$ ,  $\dot{U}(t) \notin \ell^p$ , pour  $1 \leq p < +\infty$  et  $\dot{U} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \ell^\infty(\mathbb{C}^n))$*

*Démonstration.* Comme  $\forall k, \dot{U}_k(t) = \dot{U}_0(t)e^{-jk\omega t}$  p.p., on a  $|\dot{U}_k(t)| = |\dot{U}_0(t)|$  ce qui prouve que  $\dot{U}(t) \notin \ell^p$ , pour  $1 \leq p < +\infty$ . Par ailleurs, comme l'existence d'un  $u \in L_{loc}^2$  tel que  $U = \mathcal{F}_T(u)$  entraîne  $\dot{U}_0(t) = \frac{u(t)-u(t-T)}{T}$ , nous pouvons en déduire que  $\dot{U}_0(t)$  est dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ . Nous concluons que  $\dot{U} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \ell^\infty(\mathbb{C}^n))$  puisque pour tout réel  $a$  et  $b$ ,

$$\int_a^b |\dot{U}(t)|_{\ell^\infty}^2 dt = \int_a^b |\dot{U}_0(t)|^2 dt < +\infty$$

$\square$

**Définition 2.8.** *La transformation inverse de la décomposition de Fourier glissante  $\mathcal{F}_T$  est définie pour une période  $T$  quelconque par*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T^{-1} : H_T &\rightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \\ U &\mapsto u : (t \mapsto u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t)e^{jk\omega t} + \frac{T}{2}\dot{U}_0(t)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

La condition de coïncidence (2.8) est essentielle. Elle permet de définir l'ensemble  $H_T$  et par suite la transformation inverse de  $\mathcal{F}_T$  pour aboutir finalement sur une bijection entre les espaces  $L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et  $H_T$ . En effet, pour toute fonction  $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  il existe bien une suite fonctionnelle  $U \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  telle que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t)e^{jk\omega t} = \frac{u(t)+u(t-T)}{2}$  selon la formule de reconstruction (2.11a), mais cet antécédent n'est pas unique en général. Prenons à titre d'exemple le signal  $u : t \mapsto \sin(N\omega t)$ ,  $N \in \mathbb{Z}$  à étudier dans la base harmonique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Considérons d'une part la fonction candidate  $U = \mathcal{F}_T(u) \in H_T$ . Elle est telle que  $U_{-N} = \frac{j}{2}, U_N = -\frac{j}{2}$

et ses autres composantes sont nulles. Alors,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t)e^{jk\omega t} = e^{-jN\omega t}U_{-N} + e^{jN\omega t}U_N$  et on déduit des formules d'Euler que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t)e^{jk\omega t} = u(t) = \frac{u(t)+u(t-T)}{2}$ . Considérons d'autre part la fonction candidate  $V \in L^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n)) \not\subset H_T$  telle que  $V_0 : t \mapsto u(t)$  et ses autres composantes sont nulles. Alors,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k(t)e^{jk\omega t} = V_0(t) = u(t) = \frac{u(t)+u(t-T)}{2}$ .

**Proposition 2.6.** *Une condition suffisante pour que  $U \in H_T$  est que  $U = \mathcal{F}_T(\mathcal{F}_T^{-1}(U))$ . Elle est nécessaire si le représentant  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$  est  $C_m^0$ .*

*Démonstration.* La condition est suffisante puisque  $U$  est alors issu de la décomposition de Fourier glissante d'un représentant  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$ . La condition est nécessaire : si  $U \in H_T$  et  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$  est  $C_m^0$ , alors  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(\mathcal{F}_T(u))$  presque partout, donc  $U = \mathcal{F}_T(u) = \mathcal{F}_T(\mathcal{F}_T^{-1}(U))$ .  $\square$

Pour résumer, cette section aboutit à un cadre formel dans lequel il est possible d'associer à une fonction de  $L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  une suite fonctionnelle de  $H_T \subset L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$  à partir de laquelle la fonction originelle peut être retrouvée. Et inversement à associer à une suite fonctionnelle de  $H_T$  une fonction de  $L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  à partir de laquelle la suite fonctionnelle originelle peut être retrouvée. Nous définissons ainsi mathématiquement le domaine temporel comme l'ensemble des fonctions de  $L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  et le domaine harmonique comme l'ensemble des fonctions de  $H_T$ , ainsi que les transformations  $\mathcal{F}_T$  et  $\mathcal{F}_T^{-1}$  permettant de passer de l'un à l'autre. La condition de coïncidence (2.8) est essentielle pour que  $\mathcal{F}_T$  et  $\mathcal{F}_T^{-1}$  forment une bijection entre ces domaines.

## 2.2 Modélisation harmonique unifiée

Chacune des approches de modélisation par techniques harmoniques présentées dans la littérature possède des spécificités qui répondent à des besoins différents et parfois complémentaires. Nous avons identifié des liens forts entre ces méthodes et ce qui ressort du travail bibliographique entrepris est que les concepts théoriques sur lesquels elles s'appuient sont équivalents. Nous proposons alors dans la section 2.2.2 une méthodologie harmonique générale qui permet d'unifier l'ensemble des approches de modélisation par techniques harmoniques présentées dans la partie 1.4. Les outils sont développés dans le cadre formel présenté dans la partie précédente et les modèles harmoniques obtenus pour des systèmes LTV, LTP et affines commutés sont spécifiés dans les sections 2.2.3 et 2.2.4. Nous donnons également dans la section 2.2.5 les limitations des outils développés, en pratique, avec un nombre fini d'harmoniques. Pour finir, nous explorons la possibilité de choisir la période de la base harmonique dans la section 2.2.6 et nous discutons des nouvelles perspectives que cela offre.

### 2.2.1 Résultats préliminaires sur les matrices de Toeplitz

Nous présentons ici quelques propriétés et résultats préliminaires sur les matrices de Toeplitz (ou de Lorentz) qui découlent de [Gohberg *et al.*, 2013, volume II, pages 562-573].

**Définition 2.9.** *Pour toute fonction matricielle  $M \in L_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n})$ , nous notons  $\mathcal{T}_T(M)$ , ou  $\mathcal{M}$ , la matrice de Toeplitz de dimension infinie associée à  $M$  dans la base harmonique de période*

$T$  et définie par

$$\mathcal{T}_T(M)(t) = \begin{bmatrix} \cdots & & & \vdots & & \cdots \\ & M_0(t) & M_{-1}(t) & M_{-2}(t) & M_{-3}(t) & M_{-4}(t) \\ & M_1(t) & M_0(t) & M_{-1}(t) & M_{-2}(t) & M_{-3}(t) \\ \cdots & M_2(t) & M_1(t) & M_0(t) & M_{-1}(t) & M_{-2}(t) & \cdots \\ & M_3(t) & M_2(t) & M_1(t) & M_0(t) & M_{-1}(t) \\ & M_4(t) & M_3(t) & M_2(t) & M_1(t) & M_0(t) \\ \cdots & & & \vdots & & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

avec

$$M_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t M(p) e^{-jk\omega p} dp$$

Pour tout  $M \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n})$ , nous avons  $\mathcal{T}_T(M) \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^{2 \times 2})$  et, pour tout  $t$  fixé,  $\mathcal{T}_T(M)(t)$  définit ainsi un opérateur de  $\ell^2$  dans  $\ell^2$ . Inversement, pour une matrice de Toeplitz  $\mathcal{M}$ , nous notons  $M = \mathcal{T}_T^{-1}(\mathcal{M})$  la fonction matricielle associée par transformation inverse  $\mathcal{F}_T^{-1}$  sur la colonne centrale (indice 0).

**Propriété 2.1.** Pour tout  $t$  fixé,  $\mathcal{T}_T(M)(t)$  est borné sur  $\ell^2$  (c.a.d  $\sup_{X(t)} \frac{\|\mathcal{T}_T(M)(t)X(t)\|_{\ell^2}}{\|X(t)\|_{\ell^2}} < +\infty$ ) si et seulement si  $M \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n})$ .

**Propriété 2.2.** Pour toute fonction matricielle  $M \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  à valeurs réelles :  $M_{-k}(t) = M_k^*(t)$ .

**Propriété 2.3.** Pour toute fonction matricielle  $M$  et tout vecteur  $x$  telle que  $M$ ,  $x$  et  $Mx$  admettent une image par décomposition de Fourier glissante :  $\mathcal{F}_T(Mx) = \mathcal{T}_T(M)\mathcal{F}_T(x)$ .

**Propriété 2.4.** Pour toutes fonctions matricielles  $A$  et  $B$  telles que  $A$ ,  $B$  et  $AB$  admettent une image par décomposition de Fourier glissante :  $\mathcal{T}_T(AB) = \mathcal{T}_T(A)\mathcal{T}_T(B)$ .

Remarquons que cette dernière propriété implique que le produit de deux matrices Toeplitz est Toeplitz, ce qui n'est pas le cas en dimension finie.

**Propriété 2.5.** Pour tout  $M \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n})$ ,  $\mathcal{T}_T(M)$  est inversible si et seulement si il existe  $\gamma > 0$  tel que l'ensemble  $\{t : |\det(M(t))| < \gamma\}$  soit de mesure nulle. Alors,  $\mathcal{T}_T(M)^{-1} = \mathcal{T}_T(M^{-1})$ .

**Proposition 2.7.** Pour tout  $Q \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n})$  :

1.  $Q$  est  $T$ -périodique si et seulement si  $Q = \mathcal{T}_T(Q)$  est constante et définit un opérateur borné sur  $\ell^2$
2.  $Q$  est symétrique ( $Q(t)^T = Q(t)$  p.p.) si et seulement si  $Q$  est hermitienne ( $Q^*(t) = Q(t)$ )
3.  $Q$  est définie positive ( $Q(t) > 0$  p.p.) si et seulement si  $Q$  est définie positive ( $Q(t) > 0$ ).

*Démonstration.* 1. Soit  $Q \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times m})$  et  $T$ -périodique, nous pouvons définir les phaseurs constants associés  $Q_k = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t Q(p) e^{-jk\omega p} dp = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 Q(p) e^{-jk\omega p} dp$  (les coefficients de Fourier classiques). Par suite, nous construisons la matrice de Toeplitz constante  $Q = \mathcal{T}_T(Q)$  qui définit un opérateur borné sur  $\ell^2$  (propriété 2.1). Réciproquement, la suite des matrices constantes ( $Q_k$ ) sont dans  $\ell^2(\mathbb{C}^{m \times n})$  et le théorème de Riesz-Fischer permet de définir une unique matrice périodique  $Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k e^{jk\omega t} \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$  dont les  $Q_k$  sont les coefficients de Fourier, donc  $Q = \mathcal{T}_T(Q)$ .

2. Pour une fonction matricielle  $Q$  à valeur réelles,  $Q_{-k}(t) = Q_k^*(t)$  (propriété (2.2)), donc  $\mathcal{T}_T(Q^T) = \mathcal{T}_T(Q)^*$ . Nous pouvons en conclure que  $Q(t) = Q(t)^T$  p.p. implique que  $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_T(Q)$  est hermitienne et réciproquement.

3. Puisque  $Q \in L^\infty$  sur tout intervalle  $[t-T, t]$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Par application de l'inégalité de Hölder (théorème A.2), pour tout  $x \in L^2([t-T, t])$ ,  $Qx \in L^2([t-T, t])$ . Par Parseval (théorème 2.3), nous pouvons alors écrire

$$X(t)^* \mathcal{Q}(t) X(t) = \langle X(t), \mathcal{Q}(t) X(t) \rangle_{\ell^2} = \langle x, Qx \rangle_{L^2([t-T, t])} (t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p)^T Q(p) x(p) dp$$

avec  $X = \mathcal{F}_T(x)$  et  $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_T(Q)$ . Si  $Q(t) > 0$  p.p., alors l'intégrale est nulle si et seulement si  $x = 0$  p.p., c'est-à-dire si et seulement si  $X = 0$ , et nous concluons que  $\mathcal{Q}(t) > 0$ . Réciproquement, si  $\mathcal{Q}(t) > 0$ ,  $X(t)^* \mathcal{Q}(t) X(t) = 0$  si et seulement si  $X(t) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $x = 0$  p.p. et nous concluons que  $Q(t) > 0$ .  $\square$

### 2.2.2 Modèle harmonique d'une équation différentielle

L'approche proposée consiste à considérer les variables harmoniques (2.7) et à appliquer la formule de différentiation (2.17) et la procédure de convolution (2.19) pour aboutir, dans le cas général, à un modèle harmonique unifié de la forme (2.18). Un modèle harmonique analytique est ainsi associé à tout système polynomial.

**Théorème 2.3. (Théorème d'existence et d'unicité de Carathéodory)** *Pour toute équation différentielle*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

*de condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , où la fonction  $f$  est défini sur un domaine rectangulaire de la forme  $R = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b\}$ , si  $f$  vérifie les trois conditions suivantes : (conditions de Carathéodory)*

- $f(t, x)$  est continue en  $x$  pour tout  $t$  fixé,
- $f(t, x)$  est mesurable en  $t$  pour tout  $x$  fixé,
- il existe une fonction intégrable au sens de Lebesgue  $m : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow [0, \infty)$  telle que  $|f(t, x(t))| \leq m(t)$  pour tout  $(t, x(t)) \in R$ ,

*alors l'équation différentielle admet une solution définie sur un voisinage de la condition initiale et absolument continue. Si, de plus, il existe une fonction intégrable au sens de Lebesgue  $k : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow [0, \infty)$  telle que  $|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \leq k(t)|x_1(t) - x_2(t)|$  pour tout  $(t, x_1(t)) \in R, (t, x_2(t)) \in R$ , alors cette solution est unique pour la condition initiale  $x_0$ .*

**Proposition 2.8.** *Soit  $f(t, x)$  une fonction satisfaisant les conditions de Carathéodory et telle que la fonction  $\tilde{f} : (t \mapsto f(t, x(t))) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  pour tout  $x \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ .  $x$  est une solution au sens de Carathéodory, définie sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{2.16}$$

*si et seulement si les éléments de la suite fonctionnelle associée  $X = \mathcal{F}_T(x)$  (les phaseurs) vérifient l'équation différentielle*

$$\dot{X}_k(t) = \langle f(\tau, x(\tau)) \rangle_k (t) - jk\omega X_k(t) \tag{2.17}$$

où  $\langle f(\tau, x(\tau)) \rangle_k (\cdot)$  représente le  $k^e$  phaseur de  $f(\tau, x(\tau))$ . Autrement dit, si et seulement si  $X \in H_T$  est une solution, définie sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle

$$\dot{X}(t) = \mathcal{F}_T(f(\tau, x(\tau)))(t) - \mathcal{N}X(t) \quad (2.18)$$

avec la matrice de différentiation  $\mathcal{N} = \text{diag}(\dots -jk\omega\mathcal{U}_I \dots 0\mathcal{U}_I \dots jk\omega\mathcal{U}_I \dots)$ . De plus,  $x = \mathcal{F}_T^{-1}(X)$ . Si de plus la solution  $x$  de (2.16) est unique pour la condition initiale  $x(t_0) = x_0$ , alors la solution  $X$  de (2.18) est unique pour la condition initiale  $X(t_0) = \mathcal{F}_T(x)(t_0)$ , telle que  $X_k(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x(p)e^{-jk\omega p} dp$ . La réciproque n'est pas vraie en général.

*Démonstration.* Soit  $x(\cdot)$  une solution (au sens de Carathéodory), définie sur  $\mathbb{R}$ , de (2.16). Alors,  $x$  est absolument continue et en particulier  $x \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , donc nous pouvons définir la suite fonctionnelle associée  $X = \mathcal{F}_T(x)$  dont les éléments sont définis par

$$X_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p)e^{-jk\omega p} dp$$

En posant  $v = p - t$ , nous pouvons écrire

$$X_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x(v+t)e^{-jk\omega(v+t)} dv$$

La fonction  $x$  est absolument continue, donc dérivable presque partout et sa dérivée est égale, pour presque tout  $v \in [t_0 - T, t_0]$ , à :

$$\frac{d}{dt}(x(v+t)e^{-jk\omega(v+t)}) = \frac{d}{dt}(x(v+t))e^{-jk\omega(v+t)} - jk\omega x(v+t)e^{-jk\omega(v+t)}$$

Comme  $x$  est absolument continue,  $x$  est borné sur tout intervalle borné et il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $v \in [t_0 - T, t_0]$ ,

$$|-jk\omega x(v+t)e^{-jk\omega(v+t)}| = k\omega|x(v+t)| \leq C$$

Toujours pour  $t$  fixé, comme  $x(v+t)$  est continue pour  $v \in [t_0 - T, t_0]$ ,  $x(v+t) \in L^2[t_0 - T, t_0]$  et par hypothèse  $g(v+t) = f(v+t, x(v+t)) \in L^1[t_0 - T, t_0]$ . Par suite, pour presque tout  $v \in [-T, 0]$  :

$$\left| \frac{dx(v+t)e^{-jk\omega(v+t)}}{dt} \right| \leq |g(v+t)| + C$$

Cela prouve que le terme  $\left| \frac{dx(v+t)e^{-jk\omega(v+t)}}{dt} \right|$  est majoré par une fonction intégrable sur  $[t_0 - T, t_0]$ . Il est donc possible de dériver sous le signe intégrale dans les expressions qui suivent :

$$\begin{aligned} \dot{X}_k(t) &= \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} \frac{dx(v+t)e^{-jk\omega(v+t)}}{dt} dv \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} \frac{dx(v+t)}{dt} e^{-jk\omega(v+t)} dv - \frac{jk\omega}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x(v+t)e^{-jk\omega(v+t)} dv \\ &= \langle \dot{x} \rangle_k(t) - jk\omega X_k(t) \\ &= \langle f(\tau, x(\tau)) \rangle_k(t) - jk\omega X_k(t) \end{aligned}$$

En écrivant cette relation pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , nous établissons le modèle dynamique des phaseurs (2.18). De plus,

$$-jk\omega X_k(t) = -\frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p)jk\omega e^{-jk\omega p} dp$$

Une intégration par parties (de fonctions absolument continues et dérivables p.p.) conduit à :

$$-jk\omega X_k(t) = -\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \dot{x}(p)e^{-jk\omega p} dp + \frac{1}{T}(x(t) - x(t-T))e^{-jk\omega t}$$

A partir de (2.17), nous parvenons alors à :

$$\dot{X}_k(t) = \frac{1}{T}(x(t) - x(t-T))e^{-jk\omega t}$$

Et par suite nous retrouvons bien la condition de coïncidence. Nous remarquons également que puisque  $\dot{X} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \ell^\infty)$ , pour tout réels  $a$  et  $b$ ,

$$\int_a^b |\dot{X}(t)|_{\ell^\infty} dt = \int_a^b |\dot{X}_0(t)| dt = \int_a^b | \langle f(\tau, x(\tau)) \rangle_0(t) | < +\infty$$

Réciproquement, si  $X$  est une solution de  $H_T$  définie sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation différentielle (2.18), alors  $X$  admet un représentant  $x \in L^2_{loc}$  tel que  $X = \mathcal{F}_T(x)$ . Nous notons que les phaseurs  $\langle f(\tau, x(\tau)) \rangle_k(\cdot)$  sont bien définis pour  $x$  puisque nous avons supposé que  $\tilde{f} : (t \mapsto f(t, x(t))) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  pour tout  $x \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ . Montrons que ce représentant  $x$  vérifie l'équation différentielle (2.16). Nous pouvons écrire, en effectuant une intégration par parties et en notant  $z$  une primitive de  $g$ , que

$$\begin{aligned} \dot{X}_k(t) &= \langle f(\tau, x(\tau)) \rangle_k(t) - jk\omega X_k(t) \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t f(p, x(p)) e^{-jk\omega p} dp - \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p) jk\omega e^{-jk\omega p} dp \\ &= \frac{z(t)-z(t-T)}{T} e^{-jk\omega t} + \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(p) jk\omega e^{-jk\omega p} dp - \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p) jk\omega e^{-jk\omega p} dp \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme  $X \in H_T$ , les  $X_k(\cdot)$  vérifient la condition de coïncidence. Par identification, on parvient alors à :

$$\frac{x(t)-x(t-T)}{T} e^{-jk\omega t} = \frac{z(t)-z(t-T)}{T} e^{-jk\omega t} + \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(p) jk\omega e^{-jk\omega p} dp - \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p) jk\omega e^{-jk\omega p} dp$$

En particulier, pour  $k = 0$ ,  $\frac{x(t)-x(t-T)}{T} = \frac{z(t)-z(t-T)}{T}$ , et ainsi l'expression se simplifie par :

$$0 = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t (z(p) - x(p)) jk\omega e^{-jk\omega p} dp$$

Cette relation est vraie presque partout. En divisant cette expression par  $jk\omega$ , pour  $k \neq 0$ , et par unicité de la décomposition de Fourier, nous pouvons conclure que  $z$  et  $x$  sont égaux à une constante  $z_0$  prêt :

$$z = x + z_0 \quad p.p.$$

Par conséquent, comme  $\dot{z}(\tau) = f(\tau, x(\tau))$ , nous pouvons conclure que  $x$  est dérivable presque partout et est bien une solution de l'équation différentielle (2.16). Par suite  $x$  est absolument continue et  $x = \mathcal{F}_T^{-1}(X)$ . En particulier,  $x(t_0) = \mathcal{F}_T^{-1}(X)(t_0)$ . De plus, si  $x$  est solution, alors  $x$  est absolument continue, donc continue, et alors  $x = \mathcal{F}_T^{-1}(\mathcal{F}_T(x)) = \mathcal{F}_T^{-1}(X)$ .

Concernant l'unicité des solutions : Si le problème (2.16) admet une seule solution pour un  $x_0$  donné, alors l'unicité de la trajectoire  $x$  pour une condition initiale  $x_0$  entraîne l'unicité de la condition initiale pour le problème (2.18) avec  $X_k(0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x(p) e^{-jk\omega p} dp$ . Si ce dernier problème admettait plusieurs solutions dans  $H_T$ , alors pour deux solutions distinctes  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , on pourrait associer des solutions  $x_i = \mathcal{F}_T^{-1}(X_i)$ ,  $i = 1, 2$  (Riesz-Fischer) distinctes avec  $x_0 = \mathcal{F}_T^{-1}(X_i)(t_0)$ ,  $i = 1, 2$ , ce qui contredirait l'hypothèse d'unicité de la solution  $x$ . En revanche il n'est pas possible de conclure à l'unicité de la solution du problème (2.16) à partir de l'unicité de la solution de (2.18) car si il existe deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  au problème (2.16), alors les conditions initiales générées par  $x_1$  et  $x_2$

$$\begin{aligned} X_1(t_0) &= \mathcal{F}_T(x_1)(t_0) \\ X_2(t_0) &= \mathcal{F}_T(x_2)(t_0) \end{aligned}$$

sont distinctes si  $x_1$  et  $x_2$  ne coïncident pas sur  $[t_0 - T, t_0]$  et chaque condition initiale  $X_1(t_0)$  et  $X_2(t_0)$  conduit à deux problèmes distincts.  $\square$

La proposition 2.8 associe à une équation différentielle une autre équation différentielle pour laquelle les variables sont les phaseurs des variables originelles. Dans le but d'obtenir un modèle harmonique analytique, le travail doit alors porter sur l'expression analytique de  $\mathcal{F}_T(f(\tau, x(\tau)))(t)$ . Pour cela, nous utilisons l'opérateur de Toeplitz (2.15).

**Proposition 2.9.** *Pour toute matrice fonctionnelle  $M \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n})$  et toute fonction  $x \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , les éléments de la suite fonctionnelle  $Z = \mathcal{F}_T(Mx)$  associée à leur produit peuvent être calculés par la procédure de convolution*

$$Z_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} M_{k-i}(t)X_i(t) \quad (2.19)$$

Autrement dit,

$$\mathcal{F}_T(Mx)(t) = \mathcal{T}_T(M)(t)\mathcal{F}_T(x)(t) \quad (2.20)$$

*Démonstration.* Soient  $M \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m \times n})$  et  $x \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , alors  $Mx \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  (Hölder). Nous pouvons donc définir  $Z = \mathcal{F}_T(Mx)$ . La formule (2.19) peut être facilement montrée en utilisant la formule (2.11b) pour  $M$  et  $x$ . En écrivant (2.19) pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , nous obtenons (2.20). Nous sommes dans le cadre d'application de la propriété 2.3.  $\square$

Le modèle harmonique analytique associé à tout système polynomial (A.1) peut être déduit à partir des formules (2.18) et (2.20). En effet, l'expression polynomiale de  $f(t, x(t))$  permet d'obtenir une expression analytique de sa décomposition de Fourier glissante en appliquant (2.20) autant de fois que nécessaire.

### 2.2.3 Modèle harmonique des systèmes LTV et LTP

Nous présentons ici explicitement les modèles harmoniques (2.17) dans le cas des systèmes LTV. Le cas des systèmes LTP est également précisé car alors le modèle harmonique est LTI.

**Théorème 2.4. (Application du théorème de Carathéodory)** *Soient  $A, b \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ . Le système LTV autonome  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)$  admet une unique solution  $x$  telle que  $x(t_0) = x_0$  et cette solution est définie sur  $\mathbb{R}$  et absolument continue.*

**Proposition 2.10.** *Soient  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$  et  $b \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ .  $x$  est l'unique solution du système LTV autonome*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

si et seulement si  $X$  est l'unique solution dans  $H_T$  du modèle harmonique associé

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= (\mathcal{A}(t) - \mathcal{N})X(t) + B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

avec  $X = \mathcal{F}_T(x)$ ,  $B = \mathcal{F}_T(b)$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$  et où  $X_k(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x(p)e^{-jk\omega p} dp$ . De plus, si le système (2.21) est LTP, avec  $A(\cdot)$  et  $b(\cdot)$   $T$ -périodiques, alors  $\mathcal{A}$  et  $B$  sont constants et (2.22) est LTI.

*Démonstration.* Comme  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$  et  $b \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ ,  $f : ((t, x) \mapsto A(t)x + b(t))$  vérifie les conditions de Carathéodory et la condition d'unicité et  $\tilde{f} : (t \mapsto A(t)x(t) + b(t)) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$  (Hölder). Par Hölder toujours, comme  $C \in L_{loc}^\infty$  et  $d \in L_{loc}^2$ ,  $\tilde{g} : (t \mapsto C(t)x(t) + d(t)) \in L_{loc}^2$  pour tout  $x \in L_{loc}^2$ . Par application de la proposition 2.8, le résultat est ensuite immédiat. De plus, si  $A(\cdot)$  et  $b(\cdot)$  sont  $T$ -périodiques, alors leurs phaseurs dans la base harmonique de période  $T$  sont constants, donc  $\mathcal{A}$  et  $B$  aussi.  $\square$

**Corollaire 2.1.** Soient  $A, B, u \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ .  $x$  est l'unique solution du système LTV

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.23}$$

si et seulement si  $X$  est l'unique solution dans  $H_T$  du modèle harmonique associé

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (\mathcal{A}(t) - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}(t)U(t) \\ X(t_0) &= X_0\end{aligned}\tag{2.24}$$

avec  $X = \mathcal{F}_T(x)$ ,  $U = \mathcal{F}_T(u)$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{T}_T(B)$  et où  $X_k(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x(p)e^{-jk\omega p} dp$ . De plus, si le système (2.23) est LTP, avec  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$   $T$ -périodiques, alors  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont constants et (2.24) est LTI.

*Démonstration.* Comme  $u, B \in L^2_{loc}$ , nous avons  $Bu \in L^1_{loc}$  (Hölder) et nous retrouvons ainsi les hypothèses de la proposition 2.10. Le résultat est alors immédiat, en notant que  $\mathcal{F}_T(Bu) = \mathcal{T}_T(B)\mathcal{F}_T(u)$ .  $\square$

### 2.2.4 Modèle harmonique des systèmes affines commutés

Nous présentons ici explicitement les modèles harmoniques (2.17) dans le cas des systèmes affines commutés (B.9)

$$\dot{x}(t) = A(d(t))x(t) + B(d(t))w(t)\tag{2.25}$$

où  $d(t)$  est la variable (discontinue) de contrôle et avec  $w(t)$  une entrée exogène. Les matrices temps-variantes peuvent être décomposées en une somme matricielle affine en  $d(t)$  selon

$$\begin{aligned}A(d(t)) &= A_{ind} + d(t)A_{dep} \\ B(d(t)) &= B_{ind} + d(t)B_{dep}\end{aligned}\tag{2.26}$$

où  $d(t)$  est scalaire borné et  $A_{ind}, B_{ind}, A_{dep}, B_{dep}$  sont des matrices constantes.

**Proposition 2.11.** Soient  $d \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$  et  $w \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ .  $x$  est l'unique solution du système affine commuté (2.25) pour la solution initiale  $x(t_0) = x_0$  si et seulement si  $X$  est l'unique solution dans  $H_T$  du modèle harmonique associé

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (\mathcal{A}(D(t)) - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}(D(t))W(t) \\ X(t_0) &= X_0\end{aligned}\tag{2.27}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D(t)) &= \mathcal{A}_{ind} + \mathcal{D}(t) \otimes \mathcal{A}_{dep} \\ \mathcal{B}(D(t)) &= \mathcal{B}_{ind} + \mathcal{D}(t) \otimes \mathcal{B}_{dep}\end{aligned}\tag{2.28}$$

avec  $X = \mathcal{F}_T(x)$ ,  $W = \mathcal{F}_T(w)$ ,  $D = \mathcal{F}_T(d)$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{T}_T(d)$ , où  $X_k(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} x(p)e^{-jk\omega p} dp$  et où  $\otimes$  désigne le produit de kronecker. De plus, si  $d(\cdot)$  et  $w(\cdot)$  sont  $T$ -périodiques, alors  $D$ ,  $\mathcal{D}$  et  $W$  sont constants et (2.27) est LTI.

*Démonstration.* Comme  $d \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$  et  $w \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $f : ((t, x) \mapsto A(d(t))x + B(d(t))w(t))$  vérifie les conditions de Carathéodory et la condition d'unicité (théorème 2.3) et  $\tilde{f} : (t \mapsto f(t, x(t))) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$  (Hölder). Par application de la proposition 2.8, le résultat est ensuite immédiat.  $\square$

Nous avons développé un algorithme de génération automatique des modèles harmoniques des systèmes affines commutés selon la méthode précisée dans la proposition 2.11. Nous proposons deux versions : la première pour étudier la réponse harmonique du système à une commande harmonique donnée et la seconde pour construire un modèle pour simuler le comportement harmonique du système.

La première version prend en entrée :

- les matrices  $A_{ind}, A_{dep}, B_{ind}, B_{dep}$  définies par (2.26)
- la période  $T$  de la base harmonique choisie
- l'ordre de troncature  $h$  souhaité
- la valeur des harmoniques en entrée : la commande  $D$  et l'entrée exogène  $W$

L'algorithme génère alors la matrice  $\mathcal{N}$  et les matrices de Toeplitz (2.28) et calcule la réponse harmonique du système  $X$ .

La seconde version prend en entrée :

- les matrices  $A_{ind}, A_{dep}, B_{ind}, B_{dep}$  définies par (2.26)
- la période  $T$  de la base harmonique choisie
- l'ordre de troncature  $h$  souhaité
- les variables en entrée du système  $d(t)$  et  $w(t)$  ou leurs phaseurs  $D(t)$  et  $W(t)$

L'algorithme génère alors la matrice  $\mathcal{N}$  et les matrices de Toeplitz (2.28) en temps-réel en fonction des phaseurs de la commande, calculés si nécessaire par (2.7), et donne les phaseurs d'état du système  $X(t)$  en temps-réel.

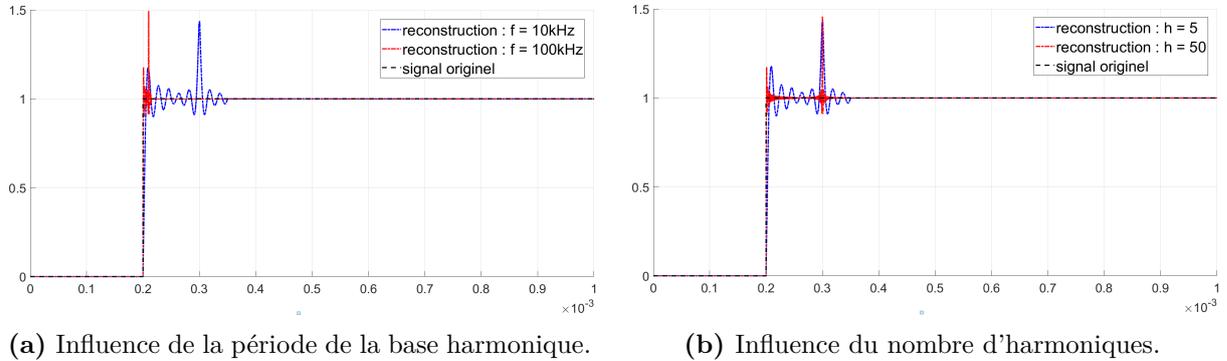
Ces deux versions sont disponibles en annexe B. La première peut être utilisé pour obtenir des modèles harmoniques analytiques, à l'aide par exemple de la Symbolic Toolbox de Matlab. La seconde permet d'obtenir des résultats de simulations, par exemple en l'implémentant dans un masque sous Matlab-Simulink. Elles seront toutes deux exploitées dans la partie 2.3.

### 2.2.5 Limitations des modèles harmoniques tronqués

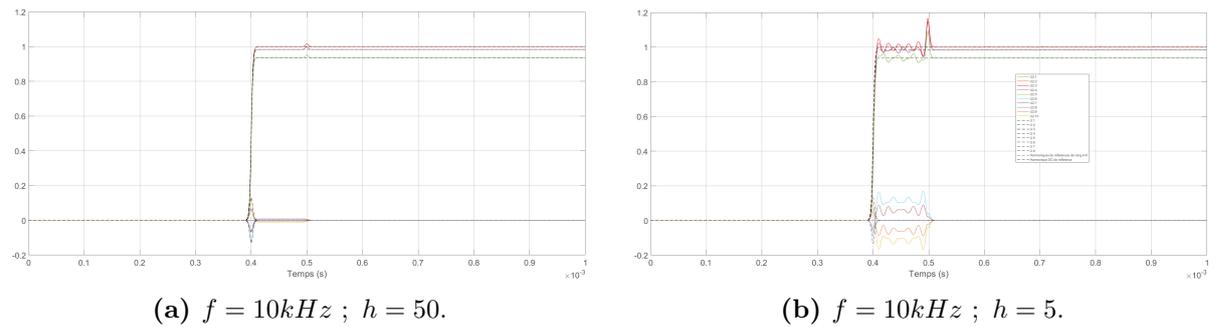
Tous les résultats qui ont été donnés jusqu'à présent considèrent des séries de Fourier et des vecteurs harmoniques de dimensions infinies. En pratique, d'un point de vue numérique, il est nécessaire de se limiter à un ordre maximal d'harmoniques  $h$  et travailler ainsi avec une base harmonique tronquée  $(e^{jk\omega t})_{k \in [-h, h]}$ . Les transformations tronquées  $\tilde{\mathcal{F}}_T$  et  $\tilde{\mathcal{F}}_T^{-1}$  sont alors telles que  $u \neq \tilde{\mathcal{F}}_T^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}_T(u))$  et  $U \neq \tilde{\mathcal{F}}_T(\tilde{\mathcal{F}}_T^{-1}(U))$  en général. Une erreur peut apparaître, d'autant plus petite que le nombre d'harmoniques  $h$  est grand et pendant une durée d'autant plus courte que la fréquence de la base harmonique est grande. Nous avons  $u \approx \tilde{\mathcal{F}}_T^{-1}(\tilde{\mathcal{F}}_T(u))$  et  $U \approx \tilde{\mathcal{F}}_T(\tilde{\mathcal{F}}_T^{-1}(U))$  si  $h \rightarrow \infty$  ou si  $T \rightarrow 0$  (et si  $U \in H_T$  pour la deuxième).

L'influence du nombre d'harmoniques et celle de la fréquence de la base harmonique sur la reconstruction d'un signal sont illustrées sur la figure 2.7 en prenant pour exemple un échelon. Le phénomène de Dirichlet apparaît du fait de la discontinuité du signal échelon. De même, les résultats concernant la redécomposition d'un vecteur harmonique, dont la composante continue est une arctangente et ses autres phaseurs sont déterminés par  $U_k(t) = U_k(0) + \int_0^t \dot{U}_0(p)e^{-jk\omega p} dp$  (donc  $\dot{U}_k(t) = \dot{U}_0(t)e^{-jk\omega t}$ ), sont présentés sur la figure 2.8. Nous retiendrons que plus la période de la base harmonique est grande, plus les dynamiques des phaseurs sont limitées, et donc plus un nombre important d'harmoniques est nécessaire pour saisir les dynamiques rapides (hautes fréquences). Cela est illustré sur la figure 2.9 où sont tracés les phaseurs d'un signal échelon

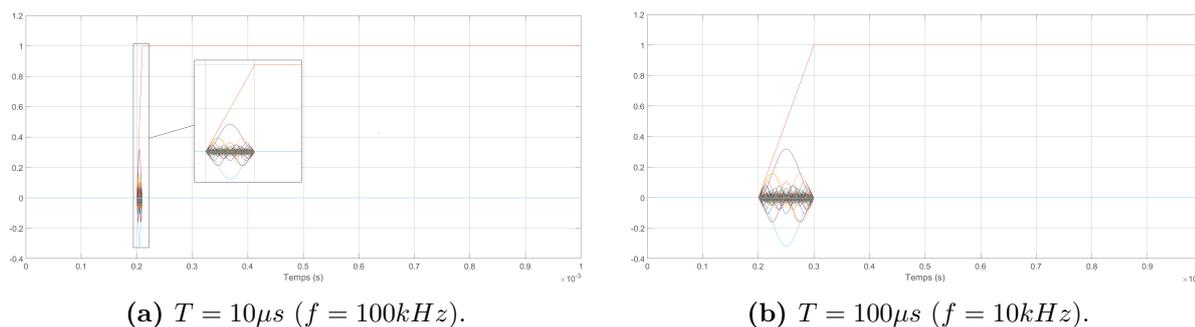
pour deux périodes différentes de la base. Enfin, il est intéressant de regarder l'influence de la dynamique du signal étudié sur les erreurs. Pour une base harmonique tronquée et fixée, nous montrons les résultats obtenus pour la reconstruction d'une arctangente plus ou moins lisse sur la figure 2.10.



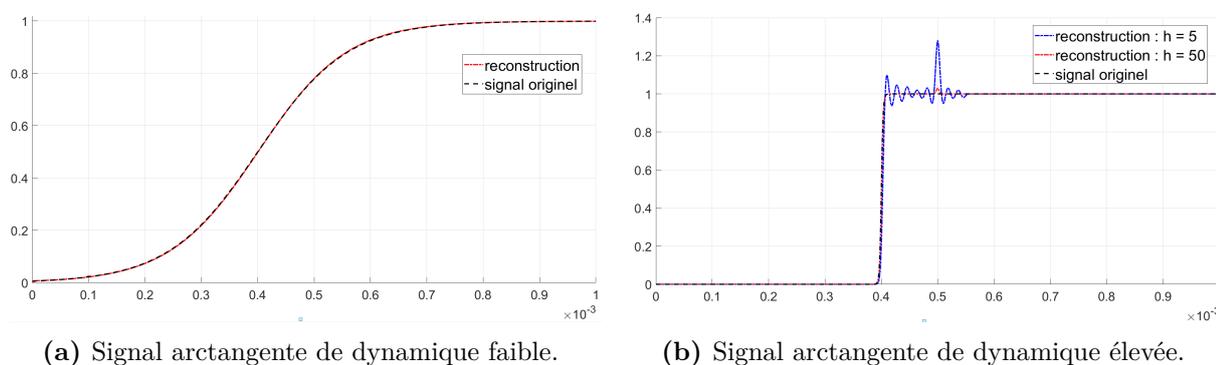
**Figure 2.7** – Influences de la période de la base harmonique et du nombre d'harmoniques sur la reconstruction d'un échelon.



**Figure 2.8** – Influence du nombre d'harmoniques sur la redécomposition d'un vecteur harmonique. Les références des phaseurs sont tracés en pointillés.



**Figure 2.9** – Limitation des dynamiques des phaseurs d'un signal échelon en fonction de la période de la base harmonique.



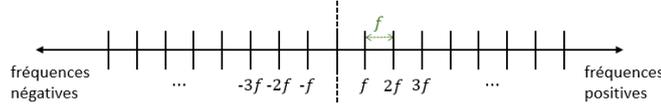
**Figure 2.10** – Influence de la dynamique d'un signal arctangente sur sa reconstruction.

## 2.2.6 Réflexion sur le choix de la période de la base harmonique

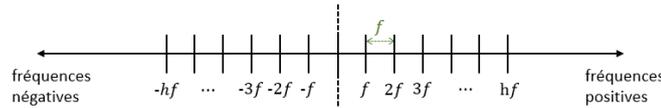
Tout au long du chapitre, nous avons développé les outils et les modèles harmoniques pour une base harmonique de période arbitraire. Dans la littérature, la période de la base harmonique est, à notre connaissance, systématiquement fixée égale à la fréquence fondamentale du système quasi-périodique étudié. Par exemple, dans le cadre de l'étude des convertisseurs de puissance DC-DC, la période de la base harmonique est systématiquement fixée égale à la période de commutation du convertisseur [Javaid et Dujic, 2015; Kwon *et al.*, 2015b; Mahdavi *et al.*, 1997; Sanders *et al.*, 1991], sans qu'une autre possibilité ne soit évoquée. Nous avons constaté dans la section 2.2.5 que la précision des transformations tronquées dépend fortement de ce choix. Nous discutons ici du choix de la base harmonique dans laquelle travailler et nous montrons qu'il a un impact considérable, que ce soit en théorie (avec une infinité d'harmoniques) ou en pratique (avec des modèles tronqués).

En théorie, une infinité d'harmoniques sont considérés dans la base harmonique  $(e^{jk\omega t})_{k \in \mathbb{Z}}$  de période  $T$  choisie. Elle contient alors explicitement toutes les composantes fréquentielles aux multiples de la fréquence de la base, comme illustré sur la figure 2.11. L'idée générale est que la période de la base harmonique  $T$  calibre la précision du spectre de fréquences puisque les fréquences représentées sont séparées de  $\frac{1}{T}$ . Plus la période  $T$  est grande, plus les fréquences représentées sont proches, ce qui améliore la résolution fréquentielle de la décomposition des signaux. Pour un système LTP, une base harmonique de période multiple de la période fondamentale du système contient alors explicitement ses fréquences harmoniques. En conséquent,

les variables harmoniques ainsi définies ont des variations d'amplitudes faibles, ce qui optimise l'étude. Concrètement, un signal  $T$ -périodique aura des composantes constantes dans cette base mais pas nécessairement dans une base de période quelconque. Toute base harmonique de période égale à un multiple de la période fondamentale d'un système quasi-périodique semble en théorie un choix judicieux pour étudier le comportement harmonique global du système.



**Figure 2.11** – Spectre des fréquences explicitement contenues dans la base harmonique  $(e^{jk\omega t})_{k \in \mathbb{Z}}$  de période  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ .



**Figure 2.12** – Spectre des fréquences explicitement contenues dans la base harmonique tronquée  $(e^{jk\omega t})_{k \in [-h;h]}$  de période  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

En pratique, les transformations, les séries de Fourier et les modèles harmoniques doivent être tronqués pour être calculés et la base harmonique utilisée est de la forme  $(e^{jk\omega t})_{k \in [-h;h]}$ . La bande fréquentielle explicitement représentée dans la base harmonique est alors limitée, comme illustré sur la figure 2.12. Dans ce cas, la précision du modèle tronqué dépend fortement du choix de la période de la base couplé du nombre d'harmoniques considérés (voir section 2.2.5). En réalité, il s'agit d'un compromis entre la complexité et la précision du modèle. La période de la base harmonique  $T$  calibre la précision du spectre de fréquences et, en dimension finie, limite les dynamiques harmoniques modélisées. Couplée de l'ordre maximal des harmoniques  $h$ , elle calibre la largeur de la bande fréquentielle  $[\frac{-h}{T}, \frac{h}{T}]$ .  $h$  spécifie également la dimension du modèle harmonique qui est  $(2h + 1)n_x$ , avec  $n_x$  le nombre de variables physiques et  $(2h + 1)$  le nombre de variables harmoniques associées à chaque variable physique. Plus  $h$  est grand, plus des fréquences élevées sont explicitement représentées, ce qui améliore la précision du modèle, mais plus la dimension du modèle harmonique est grande, ce qui augmente sa complexité. Ainsi, choisir la base harmonique de période égale à la période fondamentale d'un système quasi-périodique semble le plus judicieux pour décrire fidèlement le comportement harmonique du système avec un nombre d'harmoniques limité.

Une base théorique rigoureuse pour déterminer l'ordre de troncature optimal en fonction de la période de la base est difficile à développer car il dépend de nombreux paramètres. En particulier, les harmoniques d'ordres élevés peuvent être excités par des dynamiques transitoires et sont donc potentiellement nécessaires en fonction du système, du contrôle ou encore des régimes étudiés. La troncature optimale dépend de ce qu'on veut faire et est encore aujourd'hui une question ouverte. Dans [Sandberg *et al.*, 2005; Tadmor, 2002], l'erreur de troncature est bornée au sens d'une norme  $L_r$  mais avec un majorant qui dépend du système et du problème. Nous donnons ici simplement des règles de bon sens et des éléments pour comprendre l'impact sur la dimension et la précision du modèle harmonique.

Intéressons-nous désormais à l'interconnexion de systèmes quasi-périodiques dont les fréquences fondamentales sont différentes (deux convertisseurs DC-DC de périodes de commutations différentes par exemple). Une base harmonique commune est nécessaire pour interconnecter les modèles harmoniques. Il est possible de choisir une base harmonique de période multiple commun des périodes fondamentales de chacun des systèmes. L'augmentation du nombre de variables qui en résulte peut être acceptée si cela permet en contrepartie d'étudier leurs interactions fréquentielles. Choisir comme période le plus petit multiple commun permet de limiter le nombre de variables harmoniques. Le cas des convertisseurs AC-DC est particulier car deux fréquences ont un rôle essentiel dans leur fonctionnement : la fréquence des signaux alternatifs (basse fréquence) et la fréquence des commutations (haute fréquence). En fonction de l'objectif de l'étude, l'une ou l'autre peut être choisie comme fréquence de la base harmonique : la fréquence des signaux alternatifs pour analyser le comportement basses fréquences plus finement qu'avec un modèle moyen ou la fréquence de commutation pour considérer les effets des commutations sur le comportement du convertisseur. Nous proposons l'idée, avec un raisonnement similaire aux cas de deux convertisseurs DC-DC, d'étudier les dynamiques et interactions à la fois aux fréquences propres aux signaux alternatifs et aux commutations en choisissant le plus grand diviseur commun à leurs fréquences respectives.

Pour résumer, pour un système périodique (ou quasi-périodique) de période  $T$  et en l'absence de perturbations harmoniques, il semble judicieux de choisir la base harmonique de période  $T$ . Pour interconnecter deux systèmes de périodes  $T_1 \neq T_2$ , nous choisissons leur plus petit multiple commun  $T = \text{PPCM}(T_1, T_2)$ , où en parlant de fréquences  $f_1 \neq f_2$ , leur plus grand diviseur commun  $f = \text{PGCD}(f_1, f_2)$ . Le cas où les fréquences n'ont pas de multiple commun reste un problème ouvert. Une idée pourrait être d'approximer ce multiple commun, mais la sensibilité du modèle à cette approximation doit être étudiée. Les cas où le PGCD est très grand peuvent également poser des problèmes d'explosion du nombre de variables. Par réflexion inverse, il est envisageable d'exploiter les modèles harmoniques comme ligne directrice pour choisir astucieusement les fréquences des composants d'électroniques tels que les convertisseurs de puissance.

## 2.3 Application aux convertisseurs de puissance

Dans cette partie, nous avons choisi d'appliquer la méthodologie harmonique présentée dans la partie 2.2 aux convertisseurs de puissance car ces systèmes sont couramment utilisés en électronique de puissance et présents dans les chaînes d'actionnement électrique. La méthode a été précisée dans le cadre des systèmes affines commutés dans la section 2.2.4. Nous la mettons en œuvre dans la section 2.3.1 pour construire les modèles harmoniques analytiques des convertisseurs de puissance DC-DC les plus utilisés et les valider par simulation. Nous illustrons également l'intérêt de considérer la période de la base harmonique comme un paramètre de réglage, d'une part pour étudier des convertisseurs AC-DC dans la section 2.3.2 et d'autre part pour étudier l'interconnexion de convertisseurs de fréquences différentes dans la section 2.3.3.

### 2.3.1 Modélisation harmonique des convertisseurs DC-DC

Nous présentons ici les modèles harmoniques analytiques des topologies de convertisseurs de puissance DC-DC les plus utilisées. Ils sont obtenus via l'algorithme de génération des modèles harmoniques, donné en annexe B, à partir des modèles temporels instantanés, également donnés

en annexe B. Cette section pourra être comprise comme une bibliothèque de modèles harmoniques. Le lecteur est invité à prêter attention à l'ordre dans lequel les équations harmoniques sont écrites. En effet, pour simplifier les écritures, les équations sont permutées par rapport au modèle théorique (2.27) pour séparer les phaseurs propres à chaque signal. Les modèles harmoniques temps-réels, obtenus par l'algorithme de génération des modèles harmoniques temps-réel, qui est aussi donné en annexe B, sont finalement validés par simulations et comparés aux modèles temporels instantanés.

Le modèle harmonique d'un convertisseur Boost, dont le schéma électrique est rappelé sur la figure 2.13, peut s'écrire dans la base harmonique de période  $T$  arbitraire sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) \\ \frac{1}{C}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) & -\mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \frac{-1}{C}\mathcal{U}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ I_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où  $I_L = \mathcal{F}_T(i_L)$ ,  $V_{out} = \mathcal{F}_T(v_{out})$ ,  $V_{in} = \mathcal{F}_T(v_{in})$ ,  $I_{out} = \mathcal{F}_T(i_{out})$ ,  $\mathcal{D}(t) = \mathcal{T}_T(d(t))$ ,  $\mathcal{N}$  est la matrice de différentiation,  $\mathcal{U}_I$  est la matrice d'identité et  $\mathcal{Z}$  est la matrice nulle. La figure 2.14 présente les résultats des simulations de ce modèle en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier. La base harmonique utilisée est de période  $T = T_{sw}$  égale à la période de commutation et le modèle est tronqué à l'ordre  $h = 8$ . Nous avons choisi de considérer 8 harmoniques car l'idée, lorsque nous considérerons la chaîne d'actionnement, sera d'étudier finement les harmoniques 3, 5 et 7. Cependant, en l'absence de perturbation, 3 à 5 harmoniques sont suffisants pour garantir la qualité des modèles harmoniques. Nous ne comparons pas ici la qualité des modèles en fonction du nombre d'harmoniques car ce point a déjà été largement exploré dans la littérature, voir [Javaid et Dujčić, 2015; Sanders *et al.*, 1991]. Les signaux obtenus sont comparés à ceux provenant du modèle temporel instantané 1.2. La charge considérée en sortie du Boost est une charge résistive constante  $R_c = 10\Omega$  :  $i_{out}(t) = \frac{v_{out}(t)}{R_c}$ . La tension  $v_{in}(t)$  en entrée est supposée à un régime nominal constant  $v_{in} = 100V$ . Les paramètres du convertisseur, de la charge, de la base harmonique et les valeurs des rapports cycliques générés sont présentés dans le tableau 2.1.

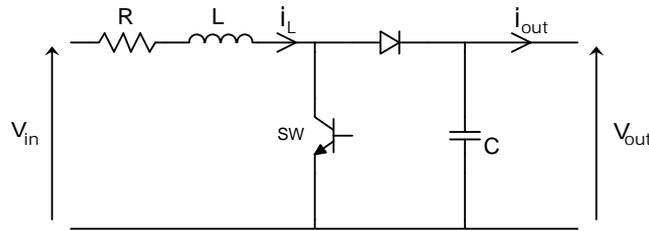
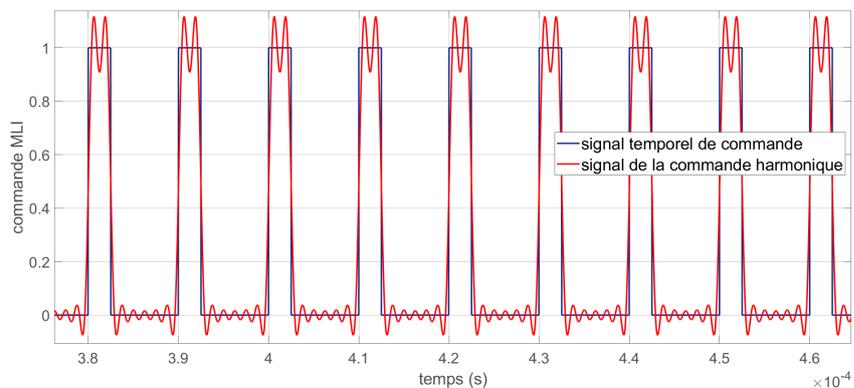


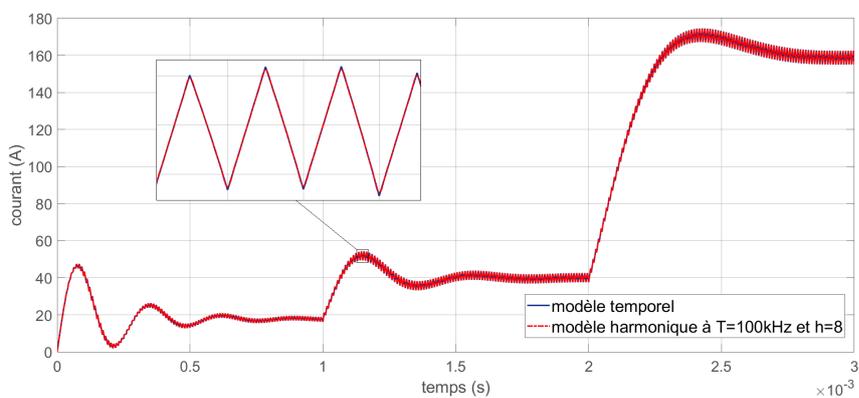
Figure 2.13 – Schéma électrique d'un convertisseur Boost.

noms	valeurs	paramètres
<b>R</b>	$1m\Omega$	résistance
<b>L</b>	$0.1mH$	inductance
<b>C</b>	$10\mu H$	capacité
<b>f<sub>sw</sub></b>	$100kHz$	fréquence de commutation
<b>R<sub>c</sub></b>	$10\Omega$	charge résistive constante
<b>f</b>	$100kHz$	fréquence de la base harmonique
<b>h</b>	8	ordre de troncature
<b><math>\alpha(t)</math></b>	$\begin{cases} 0.25 & \text{pour } t \in [0, 1](ms) \\ 0.5 & \text{pour } t \in [1, 2](ms) \\ 0.75 & \text{pour } t \in [2, 3](ms) \end{cases}$	rappports cycliques appliqués

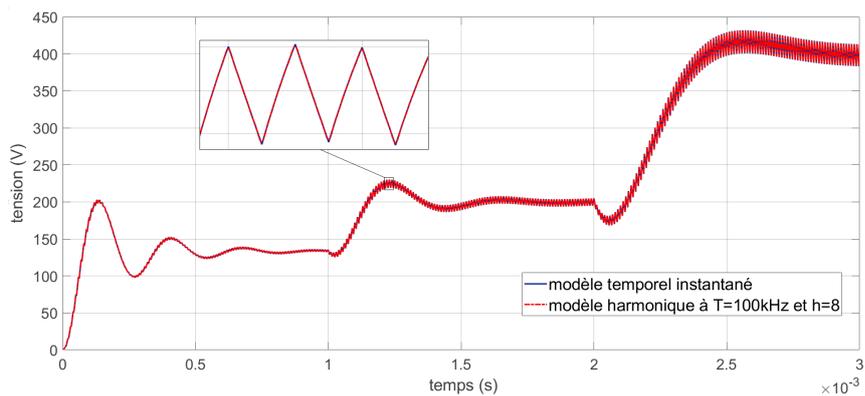
**Tableau 2.1** – Paramètres du convertisseur Boost, de la charge, de la base harmonique et valeurs des rapports cycliques appliqués.



(a) Les signaux de commande.



(b) Comparaison des courants dans l'inductance.



(c) Comparaison des tensions en sortie.

**Figure 2.14** – Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Boost en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier.

A titre d'illustration, nous donnons explicitement les vecteurs et matrices harmoniques du modèle harmonique à l'ordre 2 (les indices  $(t)$  sont omis pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned}
 I_L &= [I_{L-2} \ I_{L-1} \ I_{L_0} \ I_{L_1} \ I_{L_2}]^T \\
 V_{out} &= [V_{out-2} \ V_{out-1} \ V_{out_0} \ V_{out_1} \ V_{out_2}]^T \\
 V_{in} &= [V_{in-2} \ V_{in-1} \ V_{in_0} \ V_{in_1} \ V_{in_2}]^T \\
 I_{out} &= [I_{out-2} \ I_{out-1} \ I_{out_0} \ I_{out_1} \ I_{out_2}]^T \\
 \left[\frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N}\right] &= \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} + j2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-R}{L} + j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-R}{L} - j\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-R}{L} - j2\omega \end{bmatrix} \\
 \left[\frac{-1}{L}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t))\right] &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} + D_0 & \bar{D}_1 & \bar{D}_2 & 0 & 0 \\ D_1 & \frac{-1}{L} + D_0 & \bar{D}_1 & \bar{D}_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & \frac{-1}{L} + D_0 & \bar{D}_1 & \bar{D}_2 \\ 0 & D_2 & D_1 & \frac{-1}{L} + D_0 & \bar{D}_1 \\ 0 & 0 & D_2 & D_1 & \frac{-1}{L} + D_0 \end{bmatrix} \\
 \left[\frac{1}{C}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t))\right] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C} - D_0 & -\bar{D}_1 & -\bar{D}_2 & 0 & 0 \\ -D_1 & \frac{1}{C} - D_0 & -\bar{D}_1 & -\bar{D}_2 & 0 \\ -D_2 & -D_1 & \frac{1}{C} - D_0 & -\bar{D}_1 & -\bar{D}_2 \\ 0 & -D_2 & -D_1 & \frac{1}{C} - D_0 & -\bar{D}_1 \\ 0 & 0 & -D_2 & -D_1 & \frac{1}{C} - D_0 \end{bmatrix} \\
 [-\mathcal{N}] &= \begin{bmatrix} j2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j2\omega \end{bmatrix} \\
 \left[\frac{1}{L}\mathcal{U}_I\right] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\
 \left[\frac{-1}{C}\mathcal{U}_I\right] &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Notons que pour un signal de commande  $d(t)$   $T$ -périodique, les matrices obtenues sont constantes.

Le modèle harmonique d'un convertisseur Buck, dont le schéma électrique peut être trouvé sur la figure 1.2, peut s'écrire dans la base harmonique de période  $T$  arbitraire sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}\mathcal{U}_I \\ \frac{1}{C}\mathcal{U}_I & -\mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\mathcal{D}(t) & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \frac{-1}{C}\mathcal{U}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ I_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Le modèle harmonique d'un convertisseur Buck-Boost, dont le schéma électrique peut être trouvé sur la figure 1.3, peut s'écrire dans la base harmonique de période  $T$  arbitraire sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) \\ \frac{1}{C}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) & -\mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\mathcal{D}(t) & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \frac{-1}{C}\mathcal{U}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ I_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le modèle harmonique d'un convertisseur Flyback, dont le schéma électrique peut être trouvé sur la figure 1.4, peut s'écrire dans la base harmonique de période  $T$  arbitraire sous la forme d'un espace d'état harmonique

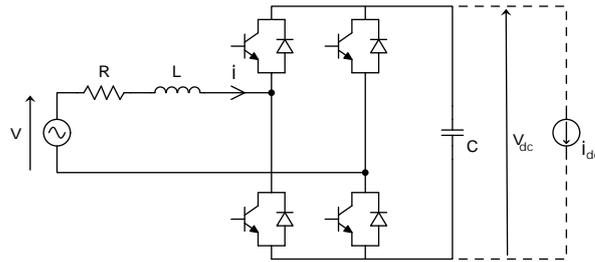
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-n}{L}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) \\ \frac{n}{C}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) & -\mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\mathcal{D}(t) & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \frac{-1}{C}\mathcal{U}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ I_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Les résultats de simulations pour les modèles (2.30), (2.31) et (2.32) peuvent être trouvés en annexe B. Les modèles harmoniques sont continus et nous avons pu vérifier qu'ils nécessitent un pas de simulation significativement plus grand que les modèles temporels instantanés (discontinus). En théorie, en dimension infinie, ces modèles décrivent parfaitement le comportement harmonique des convertisseurs. Cependant, chaque modèle doit en pratique être tronqué et il faut alors choisir astucieusement la période de la base harmonique et considérer un nombre suffisamment grand d'harmoniques. D'après la section 2.2.6, pour un convertisseur seul sans perturbation harmonique, la période de la base harmonique doit être choisie égale à la période de commutation du système. C'est le choix effectué implicitement dans la littérature [Mattavelli *et al.*, 1997; Sanders *et al.*, 1991]. Avec ce choix, par simulation, nous avons pu constater que trois harmoniques ont été suffisants pour bien approximer les effets des commutations. En choisissant une base harmonique de fréquence un multiple  $N$  de la fréquence de commutation, nous avons observé qu'il fallait alors considérer  $h = 3N$  harmoniques pour des résultats similaires. Cette possibilité, qui n'est pas exploitée dans la littérature, ouvre de nouvelles portes notamment pour étudier des convertisseurs AC-DC et pour interconnecter des convertisseurs.

### 2.3.2 Modélisation harmonique des convertisseurs AC-DC

Nous présentons ici le modèle harmonique d'un redresseur monophasé associé à un réseau alternatif, dont le schéma électrique est rappelé sur la figure 2.15. Le modèle harmonique est obtenu à partir du modèle temporel instantané 1.4 par l'algorithme présenté en annexe B. Le modèle harmonique d'un redresseur monophasé associé à un réseau peut s'écrire dans la base harmonique de période  $T$  arbitraire sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ V_{dc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}\mathcal{S}(t) \\ \frac{1}{C}\mathcal{S}(t) & -\mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ V_{dc}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \frac{-1}{C}\mathcal{U}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(t) \\ I_{dc}(t) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$



**Figure 2.15** – Schéma électrique d'un redresseur monophasé associé à un réseau alternatif.

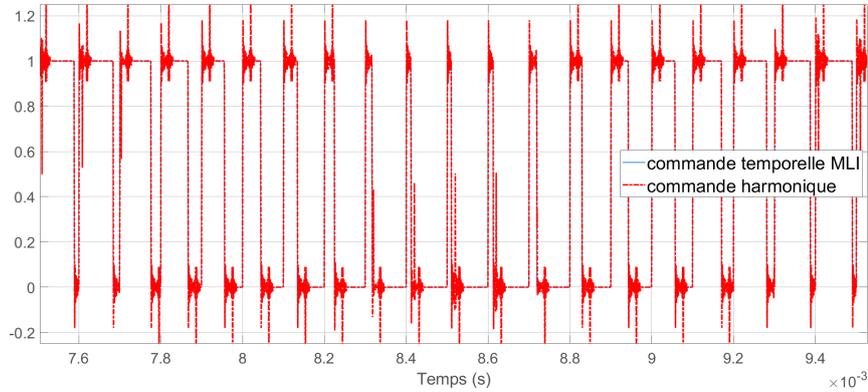
avec  $I = \mathcal{F}_T(i)$ ,  $V = \mathcal{F}_T(v)$ ,  $I_{dc} = \mathcal{F}_T(i_{dc})$ ,  $V_{dc} = \mathcal{F}_T(v_{dc})$ ,  $\mathcal{S} = \mathcal{T}_T(s)$  et où  $U_I$  est la matrice d'identité et  $\mathcal{Z}$  est la matrice nulle.

Les figures 2.16 et 2.17 présentent les résultats des simulations de ce modèle en boucle ouverte pour une commande de rapport cyclique en escalier. Dans un premier temps, la base harmonique est fixée de fréquence  $f = f_{sw}$  égale à la fréquence de commutation du redresseur pour étudier les effets des commutations sur le comportement harmonique du système. Dans un second temps, la base harmonique est fixée de fréquence  $f = f_{AC}$  égale à la fréquence des signaux alternatifs pour étudier leurs dynamiques et couplages harmoniques. Le modèle harmonique est tronqué à l'ordre  $h = 8$ . Les signaux obtenus sont comparés à ceux provenant du modèle temporel instantané (1.4). Nous avons considéré une charge résistive constante  $R_c = 10\Omega$ . La tension  $v(t)$  fournie par le réseau est supposé à un régime nominal sinusoïdal :  $v(t) = -80\sin(2\pi f_{AC}t)$ . Les paramètres du convertisseur, de la charge et de la base harmonique peuvent être trouvés dans le tableau 2.2.

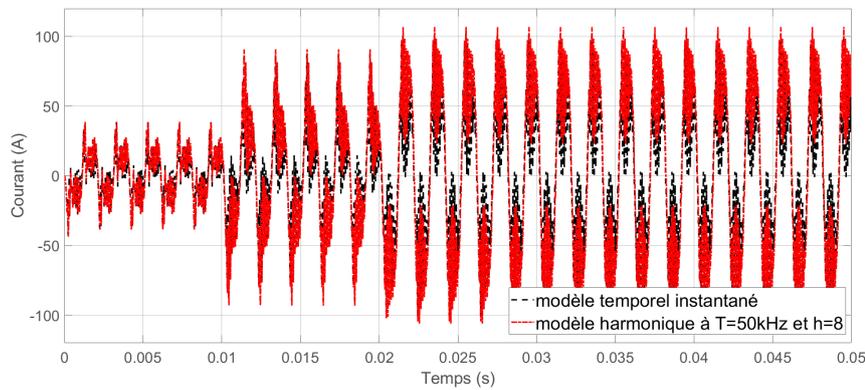
Dans le premier cas ( $f = f_{sw}$ ), les signaux coïncident presque exactement. Les hautes fréquences générées par les commutations sont bien modélisées mais les composantes dans la base harmonique varient, y compris en régime permanent, car les basses fréquences associées aux signaux alternatifs ne sont pas explicitement représentées dans la base harmonique choisie. Elles sont ainsi caractérisées par excitation des harmoniques de plus hautes fréquences. Dans le second cas ( $f = f_{AC}$ ), les signaux coïncident, à l'exception des hautes fréquences dues aux commutations qui ne sont pas bien décrites par le modèle harmonique tronqué. Ici, puisque la fréquence des commutations est cent fois plus grande que celle des signaux alternatifs, il faudrait considérer beaucoup d'harmoniques pour retranscrire le comportement du système sur les deux bandes fréquentielles, mais cela est a priori peu utile car elles sont bien distinctes. Cela serait en revanche envisageable si la fréquence de commutation du redresseur était abaissée à  $5kHz$  par exemple.

paramètres	valeurs
<b>R</b>	$1m\Omega$
<b>L</b>	$0.1mH$
<b>C</b>	$10\mu H$
<b>f<sub>sw</sub></b>	$50kHz$
<b>f<sub>AC</sub></b>	$500Hz$
<b>R<sub>C</sub></b>	$10\Omega$
<b>f</b>	$\{500Hz ; 50kHz\}$
<b>h</b>	8

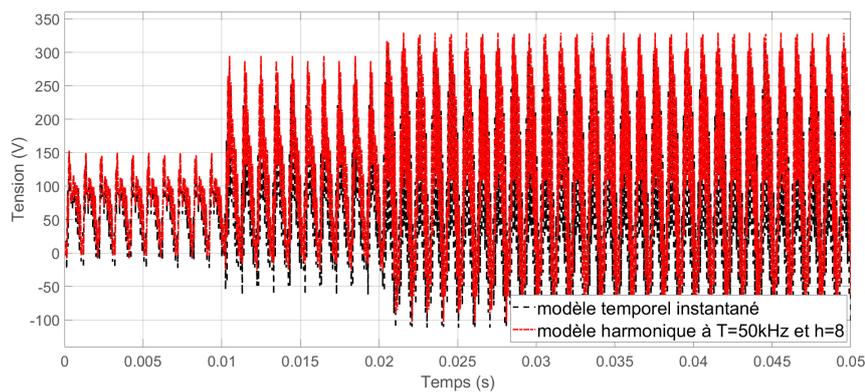
**Tableau 2.2** – Paramètres du redresseur monophasé et de la base harmonique.



(a) Les signaux de commande.

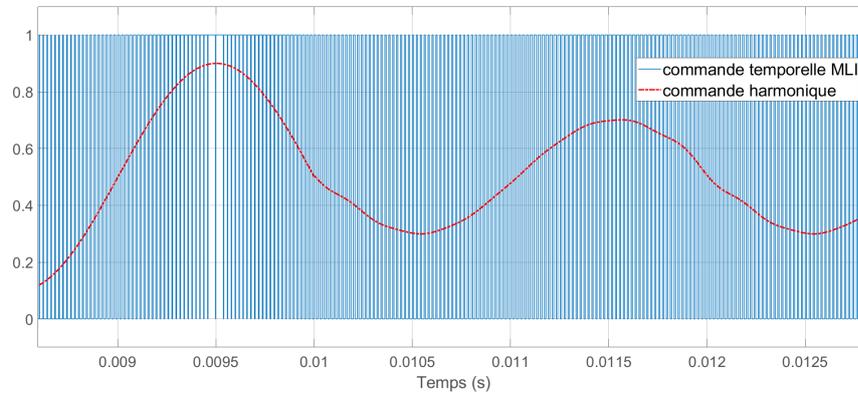


(b) Comparaison des courants dans l'inductance.

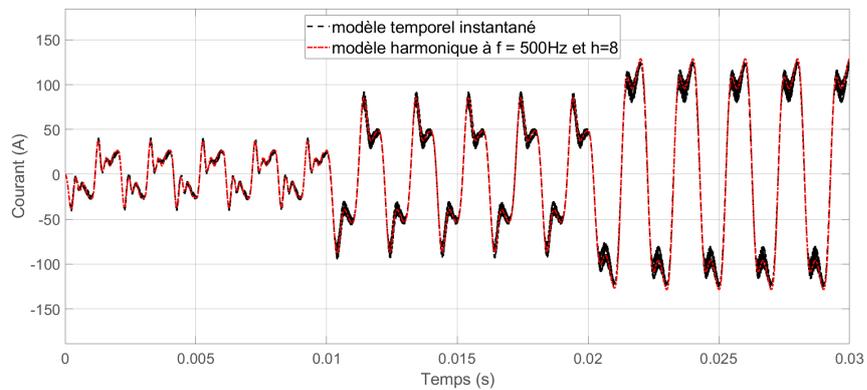


(c) Comparaison des tensions en sortie sur le bus DC.

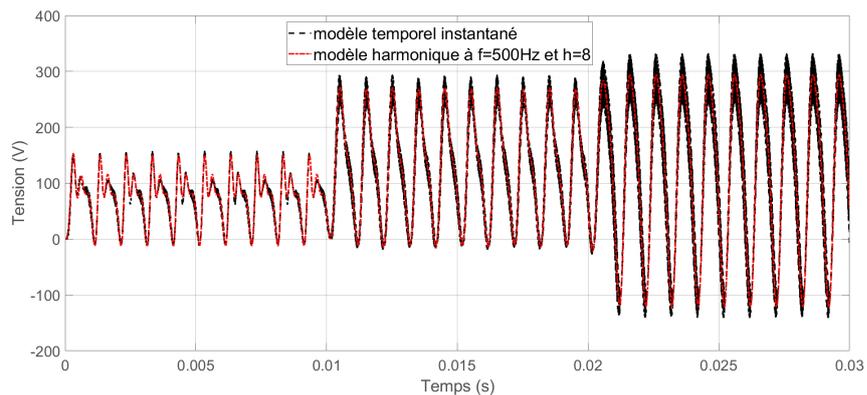
**Figure 2.16** – Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 50kHz, h = 8$ ) en boucle ouverte pour des rapports cycliques en escalier.



(a) Les signaux de commande.



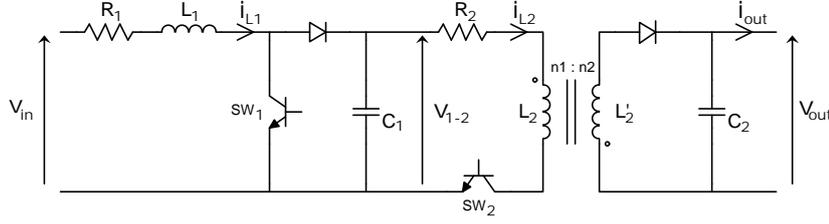
(b) Comparaison des courants dans l'inductance.



(c) Comparaison des tensions en sortie sur le bus DC.

**Figure 2.17** – Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{AC} = 500Hz, h = 8$ ) du redresseur monophasé en boucle ouverte pour des rapports cycliques en escalier.

## 2.3.3 Interconnexion des convertisseurs



**Figure 2.18** – Schéma électrique de l'association en série d'un convertisseur Boost et un convertisseur Flyback.

Nous présentons ici le modèle harmonique de l'interconnexion de deux convertisseurs de puissance : un convertisseur Boost de fréquence de commutation  $f_{boost} = 100kHz$  et un convertisseur Flyback de fréquence de commutation  $f_{flyback} = 75kHz$ , associés en série selon le schéma de la figure 2.18. Le modèle harmonique global est obtenu par simple combinaison des modèles harmoniques des convertisseurs seuls (2.29) et (2.32) dans une base harmonique commune. La tension de sortie du Boost impose la tension d'entrée du Flyback selon  $v_{1-2}(t) = v_{out}^{boost}(t) = v_{in}^{flyback}(t)$ . Le courant en sortie du Boost est imposé par le courant tiré par le Flyback via sa loi de commutation selon  $i_{out}^{boost} = d^{flyback} i_L^{flyback}$ . En choisissant une base harmonique commune pour exprimer les variables harmoniques, nous obtenons alors les relations simples  $V_{1-2} = V_{out}^{boost} = V_{in}^{flyback}$  et  $I_{out}^{boost} = \mathcal{D}^{flyback} I_L^{flyback}$ , avec  $\mathcal{D}^{flyback} = \mathcal{T}_T(d^{flyback})$ . En combinant à partir de ces relations les modèles harmoniques (2.29) et (2.32), nous pouvons alors exprimer le modèle harmonique de leur interconnexion dans une base harmonique commune de période  $T$  sous la forme d'un espace d'état harmonique de la forme

$$\dot{X}(t) = \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{D}(t))X(t) + \tilde{\mathcal{B}}W(t) \quad (2.34)$$

avec

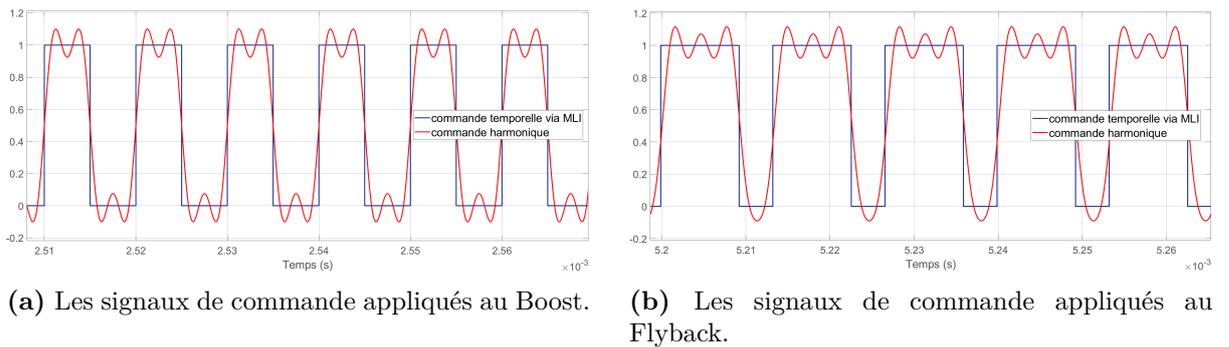
$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} I_{L1}(t) \\ V_{1-2}(t) \\ I_{L2}(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} \\ W(t) &= \begin{bmatrix} V_{in}(t) \\ I_{out}(t) \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{D}(t)) &= \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L_1}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}_1(t)) & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} \\ \frac{1}{C_1}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}_1(t)) & -\mathcal{N} & \frac{-1}{C_1}\mathcal{D}_2(t) & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \frac{1}{L_2}\mathcal{D}_2(t) & \frac{-R_2}{L_2}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-n}{L_2}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}_2(t)) \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \frac{n}{C_2}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}_2(t)) & -\mathcal{N} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1}\mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \frac{-1}{C_2}\mathcal{U}_I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où l'index 1 fait référence aux variables du Boost et l'index 2 aux variables du Flyback, où  $V_{in} = \mathcal{F}_T(v_{in})$  est une entrée exogène du système global,  $V_{out} = \mathcal{F}_T(v_{out})$  la tension en sortie

du système global,  $V_{1-2} = \mathcal{F}_T(v_{1-2})$  une tension intermédiaire entre les deux systèmes,  $\mathcal{D}_1(t) = \mathcal{T}_T(d_1(t))$ ,  $\mathcal{D}_2(t) = \mathcal{T}_T(d_2(t))$ ,  $\mathcal{U}_I$  est la matrice identité et  $\mathcal{Z}$  est la matrice nulle.

Ce modèle est valable pour une base commune de période  $T$  arbitraire, à condition qu'elle existe. Un choix judicieux est la base harmonique de fréquence  $f = PGCD(f_{boost}, f_{flyback})$  égale au plus grand diviseur commun des fréquences de commutation de chaque convertisseur (voir section 2.2.6). Ici,  $f = 25kHz$ . Puisque  $f = \frac{f_{boost}}{4}$ , il est nécessaire d'inclure dans le modèle quatre fois plus d'harmoniques qu'initialement pour modéliser aussi fidèlement les effets des commutations sur le comportement harmonique du Boost. De même, puisque  $f = \frac{f_{flyback}}{3}$ , il est nécessaire d'inclure trois fois plus d'harmoniques pour modéliser fidèlement les effets des commutations sur le comportement harmonique du Flyback. Dans notre cas, trois harmoniques permettaient une approximation que nous jugeons satisfaisante pour chaque modèle séparément. Nous posons ainsi  $h = 12$ .

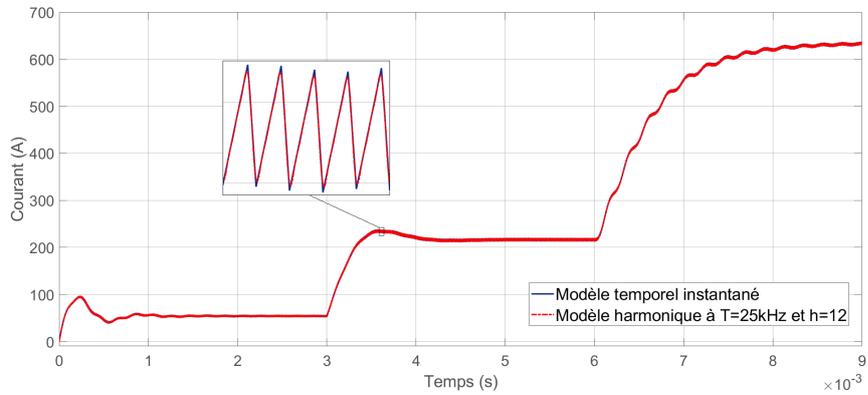
Les figures 2.19 et 2.20 présentent les résultats des simulations du modèle présenté en boucle ouverte pour des commandes (au niveau du Boost et au niveau du Flyback) de rapports cycliques en escalier. La base harmonique utilisée est de fréquence  $f = 25kHz$  et le modèle est tronqué à l'ordre  $h = 12$ . Les signaux obtenus sont comparés à ceux provenant de l'interconnexion des modèles temporels instantanés (1.2) et (B.7). La charge considérée en sortie du Flyback est une charge résistive constante  $R_c = 10\Omega$ . La tension  $v_{in}(t)$  en entrée est supposée à un régime nominal constant  $v_{in} = 30V$ . Les paramètres du convertisseur, de la charge, de la base harmonique et les valeurs des rapports cycliques appliqués sont présentés dans le tableau 2.3. Les résultats montrent la pertinence du modèle harmonique. Il est continu et décrit les interactions fréquentielles entre les harmoniques dues aux commutations de chacun des convertisseurs. Il modélise le comportement harmonique global de leur interconnexion avec un pas de simulation plus grand que les modèles temporels discontinus. Par là même, nous montrons l'utilité de considérer la période de la base harmonique comme un paramètre adaptable au besoin. Il faut garder à l'esprit que ces avantages disparaissent si la base harmonique n'est pas choisie précautionneusement. Les cas pour lesquels les fréquences de commutation des convertisseurs sont mal connues ou premières entre elles posent problème.



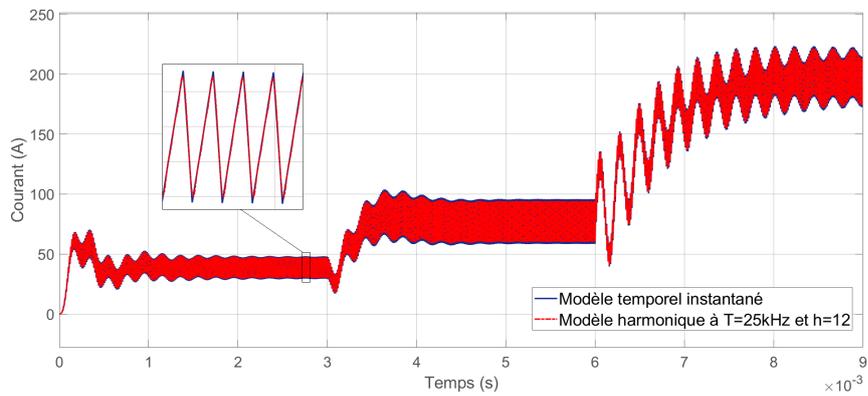
**Figure 2.19** – Les signaux de commande, de rapports cycliques en escalier, appliqués aux modèles temporels instantanés et aux modèles harmoniques ( $f = 25kHz$ ,  $h = 12$ ) du Boost et du Flyback.

paramètres	Boost	Flyback
<b>R</b>	$1m\Omega$	$1m\Omega$
<b>L</b>	$0.1mH$	$0.1mH$
<b>C</b>	$10\mu H$	$10\mu H$
<b>n</b>	$\times$	2
<b>f<sub>sw</sub></b>	$100kHz$	$75kHz$
$\alpha(t)$	0.5 pour $t \in [0, 3](ms)$ 0.75 pour $t \in [3, 9](ms)$	0.7 pour $t \in [0, 6](ms)$ 0.8 pour $t \in [6, 9](ms)$
<b>R<sub>c</sub></b>	10Ω	
<b>f</b>	25kHz	
<b>h</b>	12	

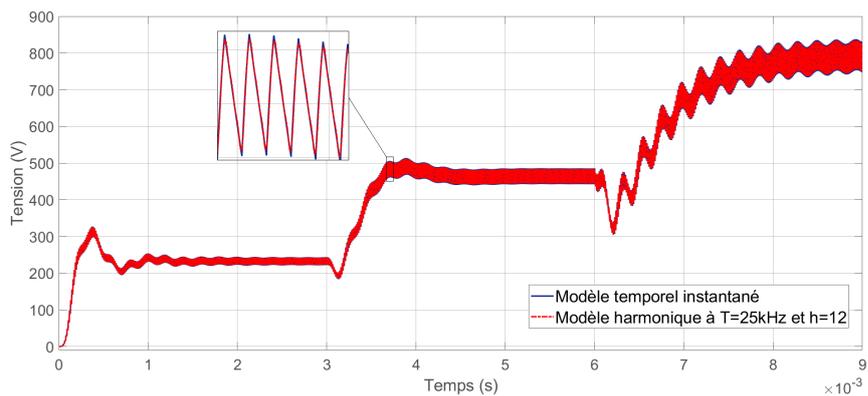
**Tableau 2.3** – Paramètres des convertisseurs Boost et Flyback et de la base harmonique et valeurs des rapports cycliques appliqués.



(a) Comparaison des courants dans l'inductance du Boost.



(b) Comparaison des courants dans l'inductance du Flyback.



(c) Comparaison des tensions en sortie de l'interconnexion.

**Figure 2.20** – Comparaison des signaux obtenus à partir de l'interconnexion des modèles temporels et du modèle harmonique global ( $f = 25kHz$ ,  $h = 12$ ) en boucle ouverte.

## 2.4 Conclusion

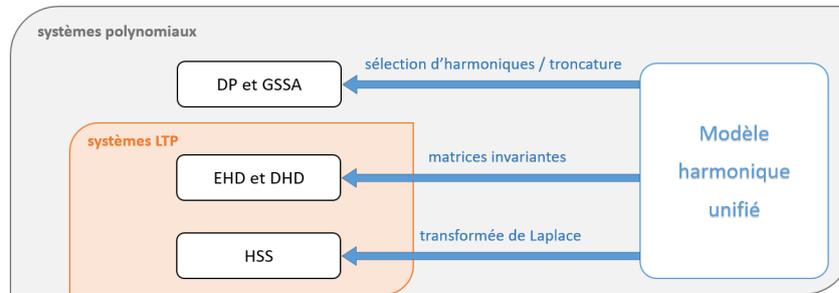
Dans ce chapitre, nous avons développé dans un cadre formel une méthode unifiée et complète de modélisation harmonique, que nous avons validée pour modéliser le comportement harmonique de convertisseurs de puissance, seuls et associés. De nombreuses approches de modélisation par techniques harmoniques ont été développées dans la littérature et sont présentées sans hypothèses de travail explicites. Une contribution importante de ce chapitre est de définir un cadre formel dans lequel les notions utilisées ont du sens. Les espaces fonctionnels (domaines temporel et harmonique  $H_T$ ) et les transformations (Fourier glissante  $\mathcal{F}_T$  et son inverse  $\mathcal{F}_T^{-1}$ ) sont mathématiquement définis. Notamment, ces travaux ont permis de mettre en exergue une condition nécessaire et suffisante pour associer les variables temporelles et harmoniques, et ainsi définir une bijection par  $\mathcal{F}_T$  et  $\mathcal{F}_T^{-1}$ . Cette condition, que nous appelons la condition de coïncidence, est présentée en (2.8). Elle est essentielle pour garantir que les opérations effectuées dans le domaine harmonique ont du sens, et ainsi pour garantir la réalisation des variables harmoniques sous la forme de signaux temporels. Nous avons également proposé deux formules équivalentes pour reconstruire un signal à partir des variables harmoniques associées. Elles diffèrent de la formule présentée dans la littérature qui se révèle être fautive en un point et ne permet pas une reconstruction temps-réel (causale) des signaux non périodiques.

Les nombreuses approches de la littérature ont été développées pour des applications distinctes (systèmes périodiques ou non) et pour des objectifs différents et parfois complémentaires (analyse d'une bande fréquentielle spécifique, analyse harmonique globale, contrôle-commande). Une seconde contribution importante de ce chapitre est de présenter, dans le cadre formel défini, une méthode de modélisation harmonique qui permet d'unifier les techniques de la littérature. La méthodologie développée aboutit au modèle harmonique général (2.18). Les variables harmoniques sont les phaseurs (2.7) calculés à partir des signaux temporels par  $\mathcal{F}_T$  selon une formule identique à celle des DP. Le modèle finalement obtenu est présenté sous la forme d'un espace d'état harmonique de dimension arbitrairement grande (2.24) avec une écriture matricielle semblable à celle du EHD. Tous les modèles présentés dans l'état de l'art peuvent être retrouvés à partir du modèle proposé par des opérations relativement simples. En d'autres termes, nous proposons un modèle unifié qui peut servir de passerelle entre les modèles harmoniques de la littérature, tel qu'illustré sur la figure 2.21. Les travaux entrepris permettent ainsi d'éviter de passer du temps à comparer les approches, à choisir la mieux adaptée à un problème donné, voir à en utiliser plusieurs en fonction des objectifs. Au lieu de cela, le lecteur pourra se reposer sur une approche unifiée qui permet d'étudier les dynamiques et couplages harmoniques d'un large éventail de systèmes, généralement polynomiaux, en leur associant un modèle harmonique analytique contenant un nombre arbitrairement grand d'harmoniques.

Les variables harmoniques étudiées, les phaseurs, sont liées à une base harmonique, la base fonctionnelle des exponentielles complexes de Fourier, de période quelconque. Le comportement harmonique du système est décomposé selon les fréquences explicitement représentées dans la base, à savoir les multiples de la fréquence de la base. Alors, le modèle harmonique unifié décrit les dynamiques et couplages harmoniques qui caractérisent les phénomènes fréquents au sein du système. L'originalité de nos travaux consiste notamment à considérer la période de la base harmonique comme un paramètre. La choisir astucieusement permet de se rapporter à un espace harmonique dans lequel les variables varient selon des amplitudes petites. Cela permet notamment d'augmenter le pas de simulation ou le pas d'échantillonnage et d'obtenir des modèles

linéaires. Les principaux types de modèles harmoniques obtenus sont détaillés en fonction du choix de la période de la base dans le tableau 2.4. Ainsi, pour un système  $T$ -périodique seul, nous choisissons la période  $T$ . Et pour interconnecter deux systèmes de périodes  $T_1 \neq T_2$ , nous choisissons la période  $T = \text{PPCM}(T_1, T_2)$ . Le cas de périodes premières entre elles reste une question ouverte et nécessite une approximation. Obtenir des modèles LTI permet d'envisager exploiter les outils de la théorie des systèmes linéaires pour prédire et maîtriser les phénomènes fréquentiels. Le modèle harmonique unifié est ainsi à la fois un outil d'analyse harmonique complet et un outil potentiel de synthèse d'un contrôle-commande qui considère des informations sur les dynamiques et couplages harmoniques des signaux.

Le choix de la période de la base harmonique est d'autant plus important qu'en pratique il est impossible de prendre en compte une infinité d'harmoniques. Le choix de la période de la base harmonique couplé de l'ordre auquel le modèle est tronqué impacte alors fortement la précision du modèle harmonique. Nous retiendrons que plus la période de la base harmonique est grande, plus les dynamiques harmoniques modélisées sont limitées, et donc plus il est nécessaire de considérer un nombre important d'harmoniques pour saisir les dynamiques harmoniques rapides (régimes transitoires et hautes fréquences). L'efficacité de la méthode et des outils développés pour modéliser et analyser des convertisseurs de puissance a été démontrée. La méthode a par exemple clairement contribué à modéliser les dynamiques et couplages fréquentiels d'un convertisseur seul, DC-DC mais également AC-DC, ainsi que les interactions entre deux convertisseurs de fréquences de commutation différentes. Dans le cadre des travaux de thèse, ce chapitre fournit une méthodologie unifiée et complète pour modéliser et analyser le comportement harmonique des systèmes, notamment les convertisseurs de puissance qui sont des composants récurrents des réseaux électriques et des chaînes d'actionnement électrique. La méthode élaborée dans ce chapitre pose également les bases pour construire des outils innovants pour améliorer le contrôle-commande des systèmes d'électronique de puissance.



**Figure 2.21** – Liens entre les différents modèles harmoniques de la littérature et le modèle unifié proposé. Tous les modèles peuvent être facilement retrouvés à partir du modèle harmonique unifié.

TD \ HD	LTI	LTP	polynomiaux
LTI	$\forall T$	×	×
LTP ( $T_0$ )	$T$ multiple de $T_0$	$T$ non multiple de $T_0$	×
polynomiaux	×	×	$\forall T$

**Tableau 2.4** – Types de modèles dans le domaine temporel (TD) et types de modèles associés dans le domaine harmonique (HD) en fonction de la période  $T$  de la base harmonique.



# Chapitre 3

## Contrôle-commande harmonique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>État de l'art du contrôle-commande par techniques harmoniques .</b>	<b>66</b>
3.1.1	Analyse du contrôle-commande . . . . .	67
3.1.2	Synthèse du contrôle-commande . . . . .	67
<b>3.2</b>	<b>Schéma de contrôle-commande harmonique . . . . .</b>	<b>68</b>
3.2.1	Implémentation dans le domaine harmonique . . . . .	68
3.2.2	Implémentation dans le domaine temporel . . . . .	71
<b>3.3</b>	<b>Structure du correcteur harmonique . . . . .</b>	<b>72</b>
3.3.1	Condition nécessaire et suffisante pour un contrôle par retour d'état harmonique . . . . .	72
3.3.2	Action intégrale sur les phaseurs . . . . .	75
<b>3.4</b>	<b>Stabilité et stabilisation dans le domaine harmonique . . . . .</b>	<b>76</b>
3.4.1	Stabilité des systèmes LTP autonomes . . . . .	76
3.4.2	Stabilisation des systèmes LTP non autonomes . . . . .	78
3.4.3	Stabilisation des systèmes affines commutés . . . . .	82
3.4.4	Stabilisation des systèmes affines commutés en présence de perturbations périodiques et d'incertitudes paramétriques . . . . .	84
<b>3.5</b>	<b>Application à la commande et au filtrage actif des convertisseurs .</b>	<b>86</b>
3.5.1	Présentation du problème et cahier des charges . . . . .	86
3.5.2	Commande optimale LQ par retour d'état . . . . .	88
3.5.3	Illustration de la nécessité de structurer le correcteur harmonique . . . . .	91
3.5.4	Illustration de l'avantage du schéma de contrôle alternatif . . . . .	92
3.5.5	Commande embedded globalement asymptotiquement stable . . . . .	94
<b>3.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>96</b>

---

## Introduction

La contribution des techniques harmoniques à la prédiction et la compréhension des phénomènes fréquentiels passe par la modélisation du comportement des systèmes décomposé sur un spectre fréquentiel, avec des modèles dont les variables caractérisent les signaux selon des fréquences harmoniques. Cela fait l'objet du chapitre précédent où nous définissons un cadre formel dans lequel nous présentons une méthodologie harmonique qui permet d'unifier les techniques de la littérature. Désormais que nous sommes capable de prédire et comprendre les phénomènes fréquentiels, l'objectif est d'agir sur eux, de les maîtriser. Les approches conventionnelles pour limiter les phénomènes fréquentiels indésirables consistent en l'intégration d'éléments de filtrages, actif ou passif [Ahmed *et al.*, 2007; Fujita et Akagi, 1991; Singh *et al.*, 1999]. Ils permettent de désensibiliser les systèmes aux phénomènes fréquentiels mais ils limitent également leur bande passante et dégradent leurs performances. De plus, les éléments de filtrage sont souvent coûteux, lourds et volumineux. Ces deux dernières problématiques sont importantes, en particulier dans l'aéronautique où le poids et le volume embarqués affectent directement les coûts d'exploitation et l'impact écologique (notamment la consommation de kérosène et la capacité d'accueil de passagers). Maîtriser les phénomènes fréquentiels de manière active par le contrôle-commande permettrait de limiter l'utilisation des éléments de filtrage analogiques.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la synthèse d'un contrôle-commande qui considère des informations sur les harmoniques des signaux. Nous présentons un court état de l'art dans ce domaine dans la partie 3.1. Nous détaillons ensuite dans la partie 3.2 deux schémas de contrôle-commande pour implémenter un correcteur synthétisé dans le domaine harmonique. La méthode de modélisation harmonique développée dans le chapitre 2 est combinée à des techniques de contrôle-commande classiques pour contribuer à maîtriser les phénomènes fréquentiels. Nous identifions notamment des contraintes à respecter pour la synthèse du correcteur harmonique, liées à la condition de coïncidence. Nous précisons ainsi la structure à imposer au correcteur pour une commande par retour d'état harmonique et pour des actions intégrales sur les phaseurs dans la partie 3.3. Ensuite, dans la partie 3.4, nous développons un cadre pour évaluer la stabilité harmonique d'un système et construire une loi de commande optimale stabilisante dans le domaine harmonique. Pour cela, nous associons aux modèles temporels des systèmes des équations de Lyapunov et Riccati liées aux modèles harmoniques. Notamment, des équations algébriques harmoniques permettent d'évaluer la stabilité et stabiliser les systèmes LTP. Enfin, à titre d'illustration, nous mettons en œuvre les schémas présentés pour contrôler un système affine commuté. Nous présentons dans la partie 3.5 des résultats de simulation pour la régulation de la tension en sortie d'un convertisseur Boost et le rejet de perturbations périodiques (rejet d'oscillations). Nous implémentons des lois de commande harmonique LQ et embedded (commande non-linéaire type Lyapunov).

### 3.1 État de l'art du contrôle-commande par techniques harmoniques

Nous présentons dans cette partie un rapide état de l'art des applications des techniques harmoniques au contrôle-commande des systèmes. Les modèles harmoniques des systèmes sont utilisés pour ajuster les paramètres du contrôle-commande en considérant des informations sur les dynamiques et les couplages harmoniques.

### 3.1.1 Analyse du contrôle-commande

De récents travaux proposent d'analyser le comportement harmonique des systèmes en boucle fermée, notamment en termes de stabilité. Les auteurs développent le modèle harmonique de la boucle fermée, dont les variables sont les phaseurs des signaux. En général, les systèmes étudiés sont quasi-périodiques et les auteurs s'intéressent au régime permanent périodique atteint en fonction du contrôle-commande. Les modèles harmoniques exploités sont donc LTI et les outils d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires peuvent à priori être employés.

Les modèles harmoniques permettent de comprendre les phénomènes fréquentiels et de prédire l'influence du contrôle-commande sur ces phénomènes. Dans [Lyu *et al.*, 2017], l'auteur caractérise l'impédance de modules de conversion multi-niveaux plus finement qu'avec des techniques de moyennisation classiques et analyse l'impact du contrôle-commande sur ses caractéristiques fréquentielles, notamment avec des diagrammes de Bode. Ces travaux ont été complétés par l'étude des valeurs propres du modèle harmonique en fonction des paramètres du correcteur [Yin *et al.*, 2019]. L'analyse des valeurs propres de la matrice des dynamiques harmoniques ou des pôles de la fonction de transfert harmonique permet de prédire la stabilité de la boucle fermée, non seulement en termes de comportement moyen mais en également selon les dynamiques harmoniques habituellement négligés. Effectuer cette analyse permet de borner les paramètres du contrôle-commande pour garantir la stabilité harmonique de la boucle fermée, notamment pour des systèmes commutés [Guo *et al.*, 2014; Orillaza et Wood, 2012; Ormrod, 2013]. Des critères équivalents à ceux de la théorie des systèmes linéaires peuvent également être employés. Dans [Wereley, 1990], l'auteur développe un critère de Nyquist applicable aux systèmes LTP. Il a permis d'analyser la stabilité harmonique d'un redresseur à pont de diodes et de borner en conséquence les paramètres du correcteur dans [Mollerstedt et Bernhardsson, 2000a].

### 3.1.2 Synthèse du contrôle-commande

D'autres travaux proposent d'exploiter le domaine harmonique pour synthétiser et implémenter un correcteur harmonique. L'exercice permet de contrôler directement les variables harmoniques. Les auteurs développent le modèle harmonique du système étudié, le linéarisent si besoin (dans le domaine harmonique), puis développent et implémentent un correcteur optimisé pour maîtriser le comportement harmonique du système.

Dans [Williams et Hoft, 1991], l'auteur propose d'implémenter un correcteur de type retour d'état directement dans le domaine harmonique entre deux changements de domaine de type Fourier ("Fast Fourier Transform", FFT) et Fourier inverse ("Inverse Fast Fourier Transform", IFFT). Ce schéma de contrôle lui permet d'ajuster le facteur de puissance d'une chaîne électrique tout en injectant des harmoniques au niveau de l'onduleur pour compenser les oscillations indésirables sur le courant alternatif. Il en résulte un facteur de puissance quasi-unitaire et un taux de distorsion harmoniques (THD en anglais) considérablement réduit. Ce schéma de contrôle-commande se retrouve dans les travaux qui portent sur les vecteurs de contrôle harmonique ("Harmonic Control Arrays", HCA) [Celebi et Dogruel, 2017; Dogruel et Çelik, 2010; Karbasforooshan *et al.*, 2016]. Ils proposent d'appliquer des contrôleurs, généralement de type PID, en parallèle sur chaque partie réelle et imaginaire de chaque harmonique ou leurs couplages. Les étapes de changement de domaine de type Fourier et Fourier inverse y sont désignées sous les noms respectivement de dispersion d'harmoniques ("Harmonic disperser") et d'assemblage

d'harmoniques ("Harmonic assembler"). Dans [Almér *et al.*, 2014], l'auteur propose d'optimiser le contrôle-commande d'un onduleur selon une fonction de coût quadratique en les composantes harmoniques. Il implémente le correcteur dans le domaine harmonique pour lui faire parvenir des informations plus fines sur les harmoniques et réduire activement le THD.

Des alternatives aux transformations de type Fourier et Fourier inverse ont également été proposées. Dans [Ghita *et al.*, 2017a], les auteurs ont conçu un contrôleur Linéaire Quadratique (LQ) pour un redresseur en pont complet associé à un réseau. Le modèle harmonique a été linéarisé et la synthèse de contrôle a été effectuée dans le domaine harmonique avec les premiers harmoniques. Le calcul des composantes harmoniques est effectué par une bibliothèque de filtres quasi-oscillants dont les sorties sont démodulées selon les fréquences des harmoniques. Les composantes harmoniques générées par la commande sont ensuite modulées et synchronisées avec le système réel par une boucle à verrouillage de phase (PLL en anglais). Le correcteur développé a permis de contrôler activement les basses fréquences du système, de rejeter les harmoniques sur le courant réseau et de répondre au cahier des charges en termes de taux harmoniques. Dans [Ghita *et al.*, 2017b], les auteurs ont conçu un contrôleur à mode glissant pour un chargeur de batterie de véhicules électriques. Les composantes harmoniques sont cette fois extraites par un filtre de Kalman étendu.

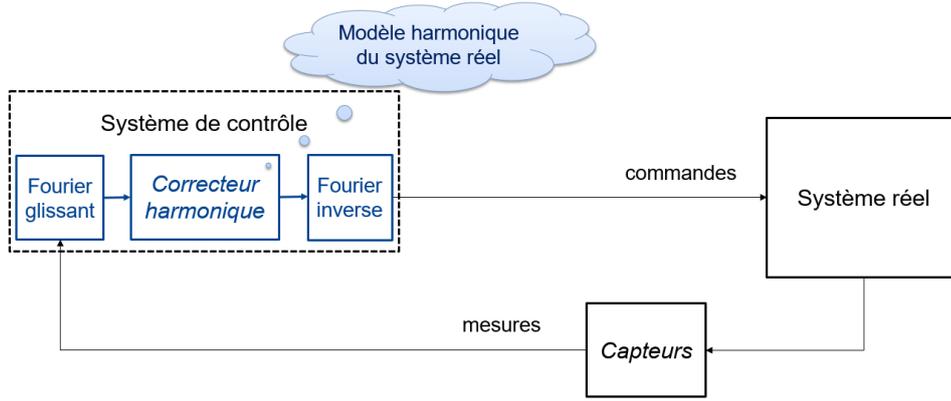
Les travaux cités dans cette section exploitent les techniques harmoniques pour contrôler directement les phaseurs des signaux. La synthèse de correcteur est effectuée dans le domaine harmonique, ce qui permet de prendre en compte des informations sur les dynamiques et couplages harmoniques en ligne pour garantir la stabilité de la boucle fermée, rejeter des oscillations et réduire les taux harmoniques. L'exercice requiert un nouveau schéma de contrôle-commande et la solution proposée dans la littérature consiste à implémenter le correcteur dans le domaine harmonique. Nous étudions plus en détails ce schéma de contrôle-commande dans la section 3.2.1.

## 3.2 Schéma de contrôle-commande harmonique

Dans cette partie, nous nous intéressons aux différentes manières d'implémenter un correcteur synthétisé dans le domaine harmonique. Tout d'abord, nous étudions plus en détails un schéma de contrôle-commande avec un correcteur qui est synthétisé et implémenté dans le domaine harmonique, déjà introduit dans la littérature. Nous identifions ses avantages et ses limitations, surtout en pratique, puis nous proposons un schéma alternatif où le correcteur harmonique est cette fois implémenté dans le domaine temporel. Nous montrons que certaines conditions doivent être respectées pour mettre en œuvre ces schémas de contrôle harmonique.

### 3.2.1 Implémentation dans le domaine harmonique

Nous nous intéressons ici au schéma de contrôle-commande de la figure 3.1. Il a été présenté dans la littérature [Celebi et Dogruel, 2017; Dogruel et Çelik, 2010; Karbasforooshan *et al.*, 2016; Williams et Hoft, 1991] mais est détaillé ici dans le cadre formel développé dans le chapitre 2. Le schéma est hybride dans le sens où le correcteur appartient au domaine harmonique alors que le système appartient au domaine temporel. Le correcteur est implémenté dans le domaine harmonique mais doit être associé au système réel (domaine temporel). Le système de contrôle comprend ainsi deux étages de changement de domaine (temporel  $\leftrightarrow$  harmonique). En amont



**Figure 3.1** – Schéma de contrôle-commande hybride avec un correcteur implémenté dans le domaine harmonique.

du correcteur harmonique, un étage de type Fourier glissant permet de décomposer les signaux de mesures en composantes harmoniques :

$$\mathcal{F}_T : L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \rightarrow L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \ell^2(\mathbb{C}^n))$$

$$u \mapsto U : (t \mapsto U(t) = \begin{pmatrix} \vdots \\ U_{-k}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{jk\omega p} dp \\ \vdots \\ U_0(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) dp \\ \vdots \\ U_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{-jk\omega p} dp \\ \vdots \end{pmatrix}) \quad (3.1)$$

où les  $U_k(t)$  sont appelés *phaseurs* et sont définis par

$$U_k(t) = \langle e^{jk\omega(\cdot)}, u(\cdot) \rangle_{L^2([t-T, t])} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) e^{-jk\omega p} dp \quad (3.2)$$

où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Les variables obtenues (les phaseurs) caractérisent les signaux selon les fréquences contenues dans la base fonctionnelle  $(e^{jk\omega t})_{k \in \mathbb{Z}}$  de période  $T$  (la base harmonique), à savoir les multiples de la fréquence de la base  $f = \frac{1}{T}$  (ses harmoniques). Si des signaux réels sont considérés, il est intéressant de travailler exclusivement avec des variables réelles, dans les bases fonctionnelles des cosinus  $(\cos(k\omega t))_{k \in \mathbb{Z}}$  et des sinus  $(\sin(k\omega t))_{k \in \mathbb{Z}}$  avec les formules équivalentes à (3.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e(U_k(t)) &= \langle \cos(k\omega(\cdot)), u(\cdot) \rangle_{L^2([t-T, t])} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(p) \cos(k\omega p) dp \\ \mathcal{I}_m(U_k(t)) &= \langle -\sin(k\omega(\cdot)), u(\cdot) \rangle_{L^2([t-T, t])} = \frac{-1}{T} \int_{t-T}^t u(p) \sin(k\omega p) dp \end{aligned} \quad (3.3)$$

Inversement, en aval du correcteur harmonique, un étage de type Fourier inverse permet de constituer un signal temporel par combinaison des composantes harmoniques générées par le correcteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T^{-1} : H_T &\rightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \\ U &\mapsto u : (t \mapsto u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega t} + \frac{T}{2} \dot{U}_0(t)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  et où  $H_T$  est défini par (2.13). La formule de reconstruction d'un signal déduite du théorème de Dirichlet est

$$u(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega t} - u(t - T) \quad (3.5a)$$

Pour utiliser seulement des informations du domaine harmonique et faciliter l'implémentation, nous pouvons utiliser, pour  $\delta \in ]0; T[$ , la formule équivalente

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (U_k(t) - U_k(t - \delta)) e^{jk\omega t} \quad (3.5b)$$

La preuve que (3.5a) et (3.5b) sont équivalents peut être trouvée en annexe C. Pour assurer que  $\mathcal{F}_T$  et  $\mathcal{F}_T^{-1}$  forment une bijection entre les domaines temporel et harmonique, le vecteur harmonique doit respecter la condition de coïncidence (2.8). Alors, nous pouvons également utiliser la formule équivalente

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega t} + \frac{T}{2} \dot{U}_0(t) \quad (3.5c)$$

La fonction du temps constituée a un comportement fréquentiel qui dépend de tous les phaseurs contenus dans le vecteur harmonique. Si des signaux réels sont considérés, il est encore une fois intéressant de travailler exclusivement avec des variables réelles selon les formules équivalentes

$$x(t) = 2X_0(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2\mathcal{R}_e(X_k(t)) \cos(k\omega t) - 2\mathcal{I}_m(X_k(t)) \sin(k\omega t)) - x(t - T) \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= 2X_0(t) - X_0(t - \delta) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (2\mathcal{R}_e(X_k(t)) - \mathcal{R}_e(X_k(t - \delta))) \cos(k\omega t) - (2\mathcal{I}_m(X_k(t)) - \mathcal{I}_m(X_k(t - \delta))) \sin(k\omega t) \end{aligned} \quad (3.6b)$$

$$x(t) = \frac{T}{2} \dot{X}_0(t) + X_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (2\mathcal{R}_e(X_k(t)) \cos(k\omega t) - 2\mathcal{I}_m(X_k(t)) \sin(k\omega t)) \quad (3.6c)$$

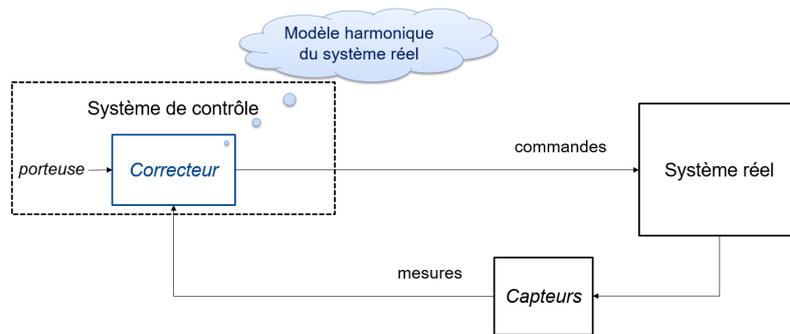
De manière générale, le correcteur harmonique prend en entrée le vecteur harmonique  $Y(t)$  contenant les phaseurs  $Y_k(t)$  calculés à partir des signaux de mesures  $y(t)$  (ou leurs estimations) selon (3.1). Nous notons  $Y = \mathcal{F}_T(y)$ . Il peut prendre d'autres informations en entrée et fournit un vecteur harmonique de commande  $U(t)$  en sortie. La commande générée par le système de contrôle est alors constituée à partir de  $U(t)$  selon une des formules présentées (3.5a), (3.5b) ou (3.5c). Nous notons  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$ . Il existe un signal  $\bar{u}(t)$  tel que  $\mathcal{F}_T(\bar{u}) = U$  si et seulement si  $U \in H_T$ , c'est-à-dire  $U(\cdot)$  est absolument continu et vérifie la condition de coïncidence (2.8). Si c'est le cas, alors  $\bar{u} = u$  p.p. (notons que le signal de commande est  $C_m^0$ ). Autrement dit, la commande harmonique  $U$  fournie par le correcteur harmonique peut être associée à un signal  $u$  (sa réalisation temporelle telle que  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$  et  $U = \mathcal{F}_T(u)$ ) si et seulement si  $U \in H_T$ . Cette condition doit donc être vérifiée pour que le contrôle-commande implémenté ait bien l'effet escompté et ainsi pour que le système en boucle fermée ait le comportement réglé lors de la synthèse du correcteur harmonique.

En pratique, les transformations de type Fourier glissant et Fourier inverse sont tronquées. Des erreurs d'approximation peuvent alors apparaître. Prendre en compte ces erreurs lors de

la synthèse du contrôle-commande est compliqué car elles dépendent de nombreux paramètres couplés comme la période de la base harmonique, le nombre d'harmoniques et les dynamiques des signaux, voir section 2.2.5. Des idées pratiques ont été présentées pour choisir astucieusement la période de la base afin de limiter ces erreurs, voir section 2.2.6. Cependant, le choix d'une période permettant de répondre au cahier des charges tout en garantissant en pratique des erreurs négligeables n'est pas toujours possible. Dans ce cas, il semble en l'état de recherche difficile de tirer partie du schéma de contrôle présenté. Une solution serait de considérer un nombre vraiment conséquent d'harmoniques, mais cela rendrait l'implémentation pratique coûteuse en termes de calcul et de mémoire. Nous présentons dans la section suivante un schéma de contrôle alternatif pour se prémunir contre ses problématiques.

### 3.2.2 Implémentation dans le domaine temporel

Nous présentons ici un schéma de contrôle-commande qui permet d'implémenter dans le domaine temporel un correcteur synthétisé dans le domaine harmonique, présenté sur la figure 3.2. Le correcteur temporel est associé au correcteur harmonique par transformation de type Fourier inverse et son implémentation requiert l'utilisation d'une porteuse.



**Figure 3.2** – Schéma de contrôle-commande alternatif avec un correcteur harmonique implémenté dans le domaine temporel.

La porteuse contient des signaux cosinus et sinus aux fréquences contenues dans la base harmonique, à savoir les fréquences multiples de la fréquence de la base harmonique :  $(\sin(k\omega t))_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(\cos(k\omega t))_{k \in \mathbb{Z}}$ . Dans le cas d'un contrôle par retour de sortie  $U(t) = -\mathcal{K}Y(t)$ , elle permet de constituer à partir des paramètres du correcteur harmonique  $\mathcal{K}$  un signal  $k(t)$   $T$ -périodique, par les formules (3.6a), (3.6b) ou (3.6c). Il faut pour cela que  $\mathcal{K}$  soit de structure Toeplitz, et alors  $\mathcal{K} = \mathcal{T}_T(k)$ . Ensuite,  $k(t)$  est utilisé pour générer une commande  $u(t)$  par produit avec les signaux à contrôler  $y(t)$ , typiquement les signaux de mesures ou leurs intégrales :  $u(t) = -k(t)y(t)$ , avec  $k(t) = f(\mathcal{K}, \text{porteuse})$ . Autrement dit, une commande par retour d'état ou retour de sortie harmonique est implémentée sous la forme d'un retour d'état ou de sortie temps-variant dans le domaine temporel.

La particularité des schémas de contrôle-commande présentés consiste en l'implémentation d'un correcteur synthétisé dans le domaine harmonique. La synthèse harmonique permet de considérer des informations sur les dynamiques et les couplages harmoniques. De plus, le domaine harmonique confère au correcteur un cadre pour agir directement sur les harmoniques des signaux et contribuer à maîtriser les phénomènes fréquentiels. Cela permet d'envisager un suivi de trajectoires périodiques, du filtrage actif, du rejet d'oscillations et de perturbations périodiques,

sans complexifier le type de lois de commande. Toutefois, effectuer la synthèse dans le domaine harmonique nécessite de respecter certaines contraintes qui sont détaillées dans la partie 3.3.

### 3.3 Structure du correcteur harmonique

Effectuer la synthèse du contrôle-commande dans le domaine harmonique nécessite quelques prérequis pour travailler proprement. Il est nécessaire que les modèles considérés lors de la synthèse de contrôle-commande décrivent bien le comportement de la boucle fermée finalement obtenue, sans quoi ses propriétés, bien qu'optimisées dans le domaine harmonique, ne sont pas garanties après implémentation. D'autre part, il peut être nécessaire que la commande générée par le système de contrôle soit un signal réel pour être appliqué en entrée du système. Ces deux prérequis se traduisent par des contraintes sur la structure du correcteur harmonique. Nous détaillons ces conditions pour un contrôle par retour d'état harmonique, facilement dérivables pour un contrôle par retour de sortie harmonique, et pour des actions intégrales sur les phaseurs.

#### 3.3.1 Condition nécessaire et suffisante pour un contrôle par retour d'état harmonique

Illustrons la problématique pour un système LTV de la forme  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ , de modèle harmonique  $\dot{X}(t) = (A(t) - \mathcal{N})X(t) + B(t)U(t)$ , et une commande par retour d'état harmonique  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$ , implémentée selon le schéma de la figure 3.1. L'expression de la boucle fermée harmonique utilisée pour la synthèse du correcteur harmonique est alors

$$\dot{X}(t) = (A(t) - \mathcal{N} - B(t)\mathcal{K})X(t) \quad (3.7)$$

La commande générée par le système de contrôle s'écrit

$$u(t) = -\mathcal{F}_T^{-1}(\mathcal{K}\mathcal{F}_T(x))(t) \quad (3.8)$$

L'expression de la boucle fermée réellement obtenue est finalement

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) - B(t)\mathcal{F}_T^{-1}(\mathcal{K}\mathcal{F}_T(x))(t) \quad (3.9)$$

Il n'est pas évident que (3.7) et (3.9) soient l'image l'une de l'autre et décrivent le même comportement. Il faudrait pour cela que  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$  et  $U = \mathcal{F}_T(u)$ . Nous avons  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$  par construction mais il est nécessaire d'imposer une structure au correcteur harmonique pour limiter le champs des commandes harmoniques aux commandes  $U(\cdot)$  telles que  $U(t) = \mathcal{F}_T(u)(t)$ , ou de manière équivalente  $U \in H_T$ . Pour un retour d'état harmonique, la structure porte sur la matrice de gains  $\mathcal{K}$  du correcteur harmonique.

**Proposition 3.1.** *La commande  $U(t) = -\mathcal{K}\mathcal{F}_T(x)(t)$  est associée à un signal  $u$  ( $U = \mathcal{F}_T(u)$ ) si et seulement si la matrice  $\mathcal{K}$  possède une structure Toeplitz. Et alors,  $u(t) = -K(t)x(t)$ , où  $K(\cdot) \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ ,  $T$ -périodique et telle que  $\mathcal{K} = \mathcal{T}_T(K)$ . Si de plus,  $u \in \mathcal{C}_m^0$  et à variations bornées (par exemple  $u \in \mathcal{C}_m^1$ ), alors  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$  partout sauf aux points de discontinuités.*

*Démonstration.* Soit  $x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ ,  $X = \mathcal{F}_T(x)$  et  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$ . Nous cherchons une structure de  $\mathcal{K}$  nécessaire et suffisante pour que  $U = \mathcal{F}_T(u)$ , ou de manière équivalente pour que  $U \in H_T$ , indépendamment de  $x(t)$ .

Nécessité : soit  $U \in H_T$ , nous avons alors  $\dot{U}_k(t) = \dot{U}_0(t)e^{-jk\omega t}$  p.p. (coïncidence). Comme

$U(t) = -\mathcal{K}X(t)$ , en particulier  $\dot{U}_0(t) = -\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{0,i}\dot{X}_i(t)$  (en indexant les lignes et les colonnes par rapport à l'élément central  $\mathcal{K}_{0,0}$  de la matrice  $\mathcal{K}$ ) et nous déduisons que

$$\dot{U}_k(t) = -\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{0,i}\dot{X}_i(t)e^{-jk\omega t} \text{ p.p.}$$

Puisque  $X = \mathcal{F}_T(x) \in H_T$ , nous avons  $\dot{X}_{i+k}(t) = \dot{X}_i(t)e^{-jk\omega t}$  p.p. et nous obtenons alors

$$\dot{U}_k(t) = -\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{0,i}\dot{X}_{i+k}(t) \text{ p.p.}$$

D'autre part, comme  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$ , nous avons

$$\dot{U}_k(t) = -\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{k,i}\dot{X}_i(t) \text{ p.p.}$$

Autrement dit, il est nécessaire que  $\mathcal{K}_{k,i} = \mathcal{K}_{0,i-k}$  pour tout indice  $k$ , ce qui définit une matrice de Toeplitz.

Suffisance : soit  $\mathcal{K} = \mathcal{T}_T(K)$ , alors  $U = -\mathcal{T}_T(K)\mathcal{F}_T(x) = -\mathcal{F}_T(Kx) \in H_T$ .

De plus, le représentant  $u$  de  $U$  s'écrit  $u(t) = -K(t)x(t)$  car  $\mathcal{F}_T(Kx) = \mathcal{T}_T(K)\mathcal{F}_T(x) = \mathcal{K}X$ ,  $K(\cdot)$  est  $T$ -périodique car  $\mathcal{K}$  est constante et  $K(\cdot) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$  pour que le produit  $K(t)x(t)$  puisse être associé, pour tout  $t$ , à sa transformée de Fourier par Riesz-Fischer. Dans le cas d'un signal  $u \in \mathcal{C}_m^0$  et à variations bornées, sa reconstruction est exacte, donc  $u(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(\mathcal{F}_T(u))$ , soit  $u(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$ .  $\square$

**Proposition 3.2.** *La commande  $u(t) = -\mathcal{F}_T^{-1}(\mathcal{K}\mathcal{F}_T(x))(t)$ , où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , est à valeurs réelles si et seulement si la matrice  $\mathcal{K}$  possède une propriété de symétrie conjuguée par rapport à son élément central*

$$\forall l, c \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{K}_{l,c} = \mathcal{K}_{-l,-c}^* \quad (3.10)$$

où les lignes et colonnes sont indexées par rapport à l'élément central  $\mathcal{K}_{0,0}$  de la matrice  $\mathcal{K}$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ,  $X = \mathcal{F}_T(x)$ ,  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$  et  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$ . Nous cherchons une structure de  $\mathcal{K}$  nécessaire et suffisante pour que  $u(t) \in \mathbb{R}$ , ou de manière équivalente pour que  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $U_{-k}(t) = \bar{U}_k(t)$ , indépendamment de  $x(t)$ . Comme  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$ , nous avons pour chaque phaseur :

$$U_k(t) = -\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{k,i}X_i(t)$$

où les lignes et colonnes sont indexées par rapport à l'élément central  $\mathcal{K}_{0,0}$ . Puisque  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons  $\forall i \in \mathbb{Z}$ ,  $X_{-i}(t) = \bar{X}_i(t)$  et nous obtenons

$$U_k(t) = \mathcal{K}_{k,0}X_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{k,i}X_i(t) + \mathcal{K}_{k,-i}\bar{X}_i(t))$$

Les équations conjuguées sont

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \bar{U}_k(t) = \bar{\mathcal{K}}_{k,0}X_0(t) + \sum_{i=1}^h (\bar{\mathcal{K}}_{k,-i}X_i(t) + \bar{\mathcal{K}}_{k,i}\bar{X}_i(t))$$

En écrivant les équations pour des indices  $-k$  et les équations conjuguées pour des indices  $k$ , il apparaît alors que la condition  $\forall k \in \mathbb{Z}, U_{-k}(t) = \bar{U}_k(t)$  est vérifiée indépendamment de  $x(t)$  si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathcal{K}_{-k,i} = \bar{\mathcal{K}}_{k,-i} \\ \mathcal{K}_{-k,-i} = \bar{\mathcal{K}}_{k,i} \end{cases}$$

Nous pouvons l'écrire plus simplement  $\forall k, i \in \mathbb{Z}, \mathcal{K}_{-k,-i} = \bar{\mathcal{K}}_{k,i}$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.** *La commande  $U(t) = -\mathcal{K}\mathcal{F}_T(x)(t)$ , où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , est associée à un signal réel  $u$  ( $U = \mathcal{F}_T(u)$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ) si et seulement si  $\mathcal{K}$  est une matrice de structure Toeplitz telle que  $K_{-k} = K_k^*$ . Et alors,  $u(t) = -K(t)x(t)$ , où  $K(\cdot) \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ , à valeurs réelles,  $T$ -périodique et telle que  $\mathcal{K} = \mathcal{T}_T(K)$ . Si de plus,  $u \in \mathcal{C}_m^0$  et à variations bornées (par exemple  $u \in \mathcal{C}_m^1$ ), alors  $u = \mathcal{F}_T^{-1}(U)$  partout sauf aux points de discontinuités.*

*Démonstration.* Ce corollaire est prouvé en combinant les propositions 3.1 et 3.2.  $\square$

*Exemple.* Considérons  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$  et examinons la forme d'une matrice tronquée  $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{C})$  respectant la condition (3.10). Chaque variable temporelle est caractérisée dans le domaine harmonique par 5 composantes : la composante continue (l'harmonique DC), deux harmoniques positifs et deux harmoniques négatifs. La matrice s'écrit en général

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} a & l^* & k^* & j^* & i^* \\ b & c & h^* & g^* & f^* \\ d & e & a_0 & e^* & d^* \\ f & g & h & c^* & b^* \\ i & j & k & l & a^* \end{bmatrix}$$

avec  $a_0 \in \mathbb{R}$  (car  $a_0 = a_0^*$ ) et  $a$  jusqu'à  $l$  des nombres complexes. Nous notons  $*$  pour les transposées conjuguées, car si  $x(t)$  ou  $u(t)$  étaient multivariable, les éléments seraient de dimensions supérieures à 1. La matrice  $\mathcal{K}$  possède une propriété de symétrie conjuguée par rapport à son élément central  $a_0$ . Elle possède 25 degrés de liberté, à savoir le réglage de  $a_0$  et des parties réelles et imaginaires de  $a$  jusqu'à  $l$ . C'est la moitié des 50 degrés de liberté possibles dans  $\mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{C})$ . La commande par retour d'état harmonique  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$  s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} U_{-2}(t) \\ U_{-1}(t) \\ U_0(t) \\ U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_{-2}(t) + \bar{l}X_{-1}(t) + \bar{k}X_0(t) + \bar{j}X_1(t) + \bar{i}X_2(t) \\ bX_{-2}(t) + cX_{-1}(t) + \bar{h}X_0(t) + \bar{g}X_1(t) + \bar{f}X_2(t) \\ dX_{-2}(t) + eX_{-1}(t) + a_0X_0(t) + \bar{e}X_1(t) + \bar{d}X_2(t) \\ fX_{-2}(t) + gX_{-1}(t) + hX_0(t) + \bar{c}X_1(t) + \bar{b}X_2(t) \\ iX_{-2}(t) + jX_{-1}(t) + kX_0(t) + lX_1(t) + \bar{a}X_2(t) \end{pmatrix}$$

En considérant que  $a_0, X_0(t) \in \mathbb{R}$ , que  $X_{-1}(t) = \bar{X}_1(t)$  et que  $\bar{X}_{-2}(t) = X_2(t)$ , nous trouvons bien que  $U_0(t) = \bar{U}_0(t)$ , que  $U_{-1}(t) = \bar{U}_1(t)$  et que  $U_{-2}(t) = \bar{U}_2(t)$ .

D'autre part, une matrice de Toeplitz tronquée  $\mathcal{K} \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{C})$  s'écrit

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_0 & K_{-1} & K_{-2} & K_{-3} & K_{-4} \\ K_1 & K_0 & K_{-1} & K_{-2} & K_{-3} \\ K_2 & K_1 & K_0 & K_{-1} & K_{-2} \\ K_3 & K_2 & K_1 & K_0 & K_{-1} \\ K_4 & K_3 & K_2 & K_1 & K_0 \end{bmatrix}$$

avec  $K_{-4}$  à  $K_4$  des nombres complexes. Si  $\mathcal{K}$  est Toeplitz et vérifie la condition de symétrie conjuguée (3.10), alors elle s'écrit

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_0 & K_1^* & K_2^* & K_3^* & K_4^* \\ K_1 & K_0 & K_1^* & K_2^* & K_3^* \\ K_2 & K_1 & K_0 & K_1^* & K_2^* \\ K_3 & K_2 & K_1 & K_0 & K_1^* \\ K_4 & K_3 & K_2 & K_1 & K_0 \end{bmatrix}$$

avec  $K_0 \in \mathbb{R}$  et  $K_{k \neq 0} \in \mathbb{C}$ . Notons que la matrice est alors hermitienne ( $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}$ ) seulement pour  $x(t)$  et  $u(t)$  monovariante. Elle possède 9 degrés de liberté sur les 50 possibles. En pratique, puisque nous nous limitons à  $h = 2$ , nous considérons  $K_4 = K_3 = 0$  et la matrice possède seulement 5 degrés de liberté sur les 50 possibles.

Pour conclure, nous fournissons une condition nécessaire et suffisante pour effectuer la synthèse d'un contrôle-commande par retour d'état harmonique (ou retour de sortie harmonique) et garantir l'existence d'un signal associé (sa réalisation temporelle). La structure résultante est une matrice de gains de retour d'état Toeplitz. Et si la commande est applicable au système sous la forme d'un signal réel, alors la condition Toeplitz doit être combinée avec une propriété de symétrie conjuguée (3.10), dont résulte une structure de Toeplitz particulière :  $\mathcal{K}$  Toeplitz telle que  $\mathcal{K}_{-k} = \mathcal{K}_k^*$ . Remarquons que dans la littérature les correcteurs harmoniques sont souvent implémentés à l'aide des équations des DP sur les harmoniques positifs seulement [Ghita *et al.*, 2017a,b]. La formule de constitution d'un signal utilisée est alors  $u(t) = U_0(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}_e(U_k(t)) \cos(k\omega t) - \mathcal{I}_m(U_k(t)) \sin(k\omega t)$  et contient implicitement la contrainte  $U_{-k}(t) = \overline{U_k(t)}$ . En revanche, la condition de coïncidence et la structure Toeplitz résultante ne sont pas évoquées. Pourtant, si cette condition n'est pas respectée, le modèle harmonique utilisé pour la synthèse de correcteur ne décrit plus le comportement harmonique du système réel, donc l'implémentation du signal  $u(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(U)(t)$  n'est pas correcte.

### 3.3.2 Action intégrale sur les phaseurs

Nous nous intéressons ici au rejet des erreurs statiques sur les variables harmoniques, c'est-à-dire au rejet des erreurs sur les amplitudes et phases des harmoniques. La technique proposée consiste à augmenter le modèle en espace d'état de variables d'intégrateurs et d'oscillateurs pour incorporer une action intégrale sur des phaseurs spécifiques. Nous pouvons envisager une action intégrale sur le  $k^e$  phaseur d'une sortie  $y(t) = C(t)x(t)$  en considérant l'état augmenté  $(x, z)$  où  $z$  est donné par

$$\dot{z}(t) = jk\omega z(t) + y(t) \quad (3.11)$$

Cette équation est celle d'un intégrateur sur  $y(t)$  si  $k = 0$  et celle d'un oscillateur à la fréquence harmonique  $f = \frac{k\omega}{2\pi}$  si  $k \neq 0$ , que nous pouvons alors décomposer suivant les parties réelles et imaginaires, en posant  $r = [r_1, r_2]^T$ , sous la forme

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -k\omega \\ k\omega & 0 \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y(t) \quad (3.12)$$

où nous considérons une sortie  $y(t) \in \mathbb{R}$ . L'ensemble d'équations correspondant à (3.11) dans le domaine harmonique est de la forme

$$\dot{Z}(t) = (jk\omega \mathcal{U}_I - \mathcal{N})Z(t) + Y(t) \quad (3.13)$$

avec  $Y(t) = \mathcal{C}(t)X(t)$ , où  $\mathcal{C} = \mathcal{T}_T(\mathcal{C})$ , avec  $\mathcal{N}$  la matrice de différentiation et  $\mathcal{U}_I$  la matrice identité. Nous obtenons bien une action intégrale sur le  $k^e$  phaseur, exprimée par l'équation  $\dot{Z}_k(t) = Y_k(t)$  contenue dans (3.13). Il est important de noter que les variables augmentées (3.11), au-delà d'intégrer le  $k^e$  phaseur, impactent également les autres phaseurs selon les équations  $\forall m \neq k, \dot{Z}_m(t) = j(k - m)\omega Z_m(t) + Y_m(t)$  contenues dans (3.13).

Pour un système LTV  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  et une sortie  $y(t) = C(t)x(t)$ , le modèle augmenté est alors

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \mathcal{Z} \\ C(t) & jk\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(t) \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} u(t) \quad (3.14)$$

où  $\mathcal{Z}$  est la matrice nulle. La commande par retour d'état peut alors être synthétisée dans le domaine harmonique avec le modèle augmenté sous la forme  $U(t) = -\mathcal{K}X(t) - \mathcal{K}_z(t)Z(t)$ , avec des matrices  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}_z$  respectant les conditions sur la structure d'un correcteur harmonique, donc de structures Toeplitz (et si nécessaire avec une propriété de transposée conjuguée). Une telle commande harmonique est associée dans le domaine temporel à  $u(t) = -k(t)x(t) - k_z(t)z(t)$ , avec des signaux  $k(t)$ ,  $k_z(t)$   $T$ -périodiques de même période que la base harmonique (et si nécessaire réels).

### 3.4 Stabilité et stabilisation dans le domaine harmonique

Nous développons dans cette partie un cadre exploitant les équations de Lyapunov et de Riccati dans le domaine harmonique pour évaluer la stabilité en considérant les phénomènes fréquentiels et pour optimiser les paramètres du contrôle-commande selon des critères temporels et fréquentiels pour stabiliser les systèmes. Il en ressort qu'il y a équivalence entre la résolution des équations différentielles de Lyapunov (resp. Riccati) périodiques et celle des équations algébriques de Lyapunov (resp. Riccati) harmoniques associées, avec des matrices de Toeplitz. Les résultats présentés s'inscrivent dans le prolongement des travaux de Zhou [Zhou et Duan, 2011; Zhou, 2008].

#### 3.4.1 Stabilité des systèmes LTP autonomes

**Proposition 3.3.** *Soit  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $T$ -périodique.  $P$  est l'unique solution symétrique définie positive (et  $T$ -périodique) de l'équation différentielle périodique de Lyapunov*

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A(t)^T P(t) + Q(t) = 0 \quad (3.15)$$

où  $Q \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  symétrique définie positive et  $T$ -périodique, si et seulement si  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  est l'unique solution hermitienne définie positive de l'équation algébrique harmonique de Lyapunov

$$\mathcal{P}(\mathcal{A} - \mathcal{N}) + (\mathcal{A} - \mathcal{N})^* \mathcal{P} + \mathcal{Q} = 0 \quad (3.16)$$

où  $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_T(Q)$  hermitienne définie positive et où  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$ .

*Démonstration.* Soient  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $Q \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$   $T$ -périodiques telles que  $Q(t) = Q^T(t) > 0$ . La fonction  $f : ((t, P) \mapsto A(t)^T P(t) + P(t)A(t) + Q(t))$  vérifie les conditions de Carathéodory et la condition d'unicité (théorème 2.3), donc (3.15) admet une unique solution pour la condition initiale  $P(t_0)$ . De plus,  $\tilde{f} : (t \mapsto f(t, P(t))) \in L_{loc}^1(\mathcal{R})$  pour tout  $P \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ .

Alors, par la proposition 2.8, nous concluons que  $P$  est solution de (3.15) si et seulement si  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  est solution dans  $H_T$  de l'équation différentielle harmonique associée et l'unicité de  $P$  entraîne l'unicité de  $\mathcal{P}$  avec la condition initiale  $P_k(t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0} P(p)e^{-jk\omega p} dp$ . Les équations harmoniques associées à (3.15) par  $\mathcal{F}_T$  sont

$$\dot{P}_k(t) = - \langle PA + A^T P + Q \rangle_k(t) - jk\omega P_k(t)$$

Les formes de Toeplitz associées aux phaseurs sont alors déterminées par

$$\dot{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt}(\mathcal{T}(P)) = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ \dots & \dot{P}_0(t) & \dot{P}_1^*(t) & \dot{P}_2^*(t) & \dots \\ & \dot{P}_1(t) & \dot{P}_0(t) & \dot{P}_1^*(t) & \dots \\ & \dot{P}_2(t) & \dot{P}_1(t) & \dot{P}_0(t) & \dots \\ \dots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}_T(PA + A^T P + Q) = \mathcal{P}\mathcal{A} + \mathcal{A}^*\mathcal{P} + \mathcal{Q}$$

Enfin, puisque

$$\mathcal{N} = \text{diag}(jk\omega U_I) = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ \dots & j\omega U_I & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \dots \\ & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \dots \\ & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & -j\omega U_I & \dots \\ \dots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

et en utilisant le fait que  $\mathcal{P}$  est hermitienne, il est facile de vérifier que

$$\mathcal{P}\mathcal{N} + \mathcal{N}^*\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ \dots & \mathcal{Z} & -j\omega\mathcal{P}_1^*(t) & -j2\omega\mathcal{P}_2^*(t) & \dots \\ & j\omega\mathcal{P}_1(t) & \mathcal{Z} & -j\omega\mathcal{P}_1^*(t) & \dots \\ & j2\omega\mathcal{P}_2(t) & j\omega\mathcal{P}_1(t) & \mathcal{Z} & \dots \\ \dots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

avec  $\mathcal{Z}$  la matrice nulle. D'où le résultat final :

$$\dot{\mathcal{P}} + \mathcal{P}(\mathcal{A} - \mathcal{N}) + (\mathcal{A} - \mathcal{N})^*\mathcal{P} + \mathcal{Q} = 0$$

Notons que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont nécessairement hermitiennes et définies positives par la proposition 2.7. Si maintenant, la longueur de la fenêtre glissante est égale à la période des matrices, alors comme  $P$ ,  $A$  et  $Q$  sont  $T$ -périodiques,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{Q}$  sont constants et  $\dot{\mathcal{P}} = 0$ . Nous en déduisons que  $P$  est solution de (3.15) si et seulement si  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  est solution dans  $H_T$  de (3.16) telle que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* > 0$  et l'unicité de  $P$  entraîne l'unicité de la solution  $\mathcal{P}$ . Réciproquement, puisque la solution de l'équation algébrique harmonique est ici indépendante de la condition initiale, si  $P$  est un représentant de  $\mathcal{P}$  ( $\in H$ ), c'est à dire  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$ , il est l'unique solution de (3.15).  $\square$

**Corollaire 3.2.** Soient  $P$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  données par la proposition 3.3, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la fonction  $V(X) = X^*\mathcal{P}X$  est une fonction de Lyapunov pour le système linéaire harmonique  $\dot{X}(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(t)$

2. la fonction  $v(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov pour le système linéaire périodique  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

3. la fonctionnelle  $v(x)(t) = \langle x, P x \rangle_{L^2([t-T, t])} (t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p)^T P(p) x(p) dp$  est une fonction de Lyapunov pour le système linéaire périodique  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

*Démonstration.* L'équivalence entre les deux premières propositions est évidente par la proposition 3.3 et d'après la théorie de Lyapunov. Pour la troisième, l'équivalence entre 1 et 3 se montre via Parseval. La fonction  $V(X(t)) = X(t)^* \mathcal{P} X(t)$  est bien définie puisque pour tout  $X(t) \in \ell^2$ ,  $\mathcal{P} X(t) \in \ell^2$  (opérateur borné) et dérivable presque partout puisque  $X$  est absolument continue. Nous avons  $\dot{V}(X(t)) = -X(t)^* \mathcal{Q} X(t)$  avec  $\mathcal{Q} X(t) \in \ell^2$  pour tout  $X(t) \in \ell^2$  (opérateur borné). De même, pour tout  $x \in L^2([t-T, t])$ , comme  $P(\cdot)$  est absolument continue,  $Px \in L^2([t-T, t])$  et la fonctionnelle est bien définie, et puisque  $Q \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ ,  $Qx \in L^2([t-T, t])$ . En utilisant Parseval, nous avons l'égalité :

$$v(x)(t) = \langle x, P x \rangle_{L^2([t-T, t])} (t) = \langle X(t), \mathcal{P} X(t) \rangle_{\ell^2} = V(X)(t)$$

La dérivée conduit également à :

$$\dot{v}(x)(t) = - \langle x, Q x \rangle_{L^2([t-T, t])} (t) = - \langle X(t), \mathcal{Q} X(t) \rangle_{\ell^2} = \dot{V}(X)(t)$$

Nous montrons alors sans difficulté que :

- $v(x) > 0$  si et seulement si  $V(X) > 0$
- $\dot{v}(x) < 0$  si et seulement si  $\dot{V}(X) < 0$
- $x = 0$  p.p. sur  $[t-T, t]$  si et seulement si  $X = 0$ .

□

**Corollaire 3.3.** Soit  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $T$ -périodique. Le système LTP autonome

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \tag{3.17}$$

est globalement asymptotiquement stable si et seulement si il existe une unique matrice  $\mathcal{P}$  hermitienne définie positive, de structure Toeplitz, solution de l'équation algébrique harmonique de Lyapunov (3.16), où  $\mathcal{Q}$  est hermitienne définie positive et de structure Toeplitz et où  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$ . Autrement dit, si et seulement si le système linéaire harmonique associé

$$\dot{X}(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(t) \tag{3.18}$$

est globalement asymptotiquement stable.

*Démonstration.* Ce corollaire est directement déduit de la proposition 3.3 ou du corollaire 3.2 d'après la théorie de la stabilité de Lyapunov. □

### 3.4.2 Stabilisation des systèmes LTP non autonomes

**Définition 3.1.** L'ensemble des points d'équilibre harmonique d'un modèle harmonique LTI de la forme  $\dot{X}(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}U(t)$  est défini par

$$E_T = \{(X^e, U^e) \mid 0 = \mathcal{A}X^e + \mathcal{B}U^e\} \tag{3.19}$$

Toutes les conditions initiales des systèmes harmoniques ne fournissent pas un élément  $X \in H$  puisque les conditions initiales admissibles sont liées par la condition  $X_k(t_0) = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x(\tau) e^{-j\omega k \tau} d\tau$ , pour tout  $k$ . Néanmoins, pour les équilibres harmoniques, nous avons le résultat suivant :

**Proposition 3.4.**  *$x^e(t)$  est une trajectoire  $T$ -périodique du système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  si et seulement si  $X^e = \mathcal{F}_T(x^e) \in H_T$  est un équilibre du modèle harmonique  $\dot{X}(t) = \mathcal{F}_T(f(t, x(t))) - \mathcal{N}X(t)$  associé.*

*Démonstration.* Si  $x^e(t)$  est une trajectoire  $T$ -périodique du système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ , alors  $X^e = \mathcal{F}_T(x^e) \in H_T$  est constant et solution du modèle harmonique  $\dot{X}(t) = \mathcal{F}_T(f(t, x(t))) - \mathcal{N}X(t)$ . Comme  $\dot{X}^e = 0$  à tout instant,  $X^e$  définit un équilibre dans  $H_T$  du modèle harmonique. Inversement, si  $X^e$  est un équilibre du modèle harmonique, alors il est constant et donc trivialement dans  $H_T$  car les phaseurs vérifient la relation  $\dot{X}_k = 0$ , pour tout  $k$ . Ainsi, il existe un représentant  $x^e(t)$  qui est  $T$ -périodique et solution de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .  $\square$

Pour évaluer la stabilité d'un système à partir du modèle harmonique associé, une première idée est d'étudier sa fonction de transfert harmonique en boucle fermée. Considérons une commande par retour d'état harmonique  $U(t) = R - \mathcal{K}X(t)$ , où  $R$  est un ensemble de composantes harmoniques auxiliaires calculées à partir d'un signal de référence périodique (un équilibre harmonique). Cette commande appliquée à un système LTP de modèle harmonique LTI  $\dot{X}(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}U(t)$  donne, dans le domaine harmonique, la boucle fermée

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N} - \mathcal{B}\mathcal{K})X(t) + \mathcal{B}R \\ Y(t) &= (\mathcal{C} - \mathcal{D}\mathcal{K})X(t) + \mathcal{D}R \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les transferts en boucle fermée entre les harmoniques de référence et les harmoniques de sortie sont définis analytiquement par

$$\mathcal{G}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = (\mathcal{C} - \mathcal{D}\mathcal{K})(s\mathcal{U}_I - \mathcal{A} + \mathcal{N} + \mathcal{B}\mathcal{K})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D} \quad (3.21)$$

avec  $\mathcal{U}_I$  la matrice identité. L'étude des pôles et zéros de cette fonction de transfert harmonique permet d'évaluer la stabilité du modèle harmonique et donc la stabilité harmonique du système étudié en boucle fermée [Guo *et al.*, 2014; Orillaza et Wood, 2012; Ormrod, 2013; Yin *et al.*, 2019]. Le modèle harmonique utilisé est linéaire alors même que les phénomènes fréquentiels sont considérés, contrairement aux analyses temporelles. Il est alors possible de stabiliser le système par des techniques classiques de placements de pôles ou par exemple en exploitant le critère de Nyquist pour les systèmes LTP présenté dans [Wereley, 1990] et mis en œuvre dans [Mollerstedt et Bernhardsson, 2000a]. Cependant, dans le cas des systèmes à plusieurs entrées, le problème du placement de pôles n'admet pas une solution unique et certaines des solutions ne sont pas robustes. Nous pouvons alors recourir à la théorie de Lyapunov et aux équations de Riccati pour étudier la stabilité harmonique des systèmes.

**Proposition 3.5.** *Soient  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $T$ -périodique et  $B \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$ . Si le système linéaire périodique  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  est globalement asymptotiquement stable, alors la commande  $u(t) = -K(t)x(t)$  stabilise asymptotiquement le système*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.22)$$

avec une matrice de gains  $K(t) = G(t)B(t)^T P(t)$ , où  $G \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times m})$  symétrique définie positive et où  $P = \mathcal{T}_T^{-1}(\mathcal{P})$ , avec  $\mathcal{P}$  donnée par le corollaire 3.3.

*Démonstration.* Soient  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $T$ -périodique et  $B, G \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ . Si le système  $\dot{x} = A(t)x$  est asymptotiquement stable, alors il existe un unique  $P(\cdot)$   $T$ -périodique solution de l'équation périodique de Lyapunov tel que  $P(t) = P^T(t) > 0$ . Comme  $B, G \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  et  $P$  continue, les produits  $BGB^T Px \in L^2([t-T, t])$  pour tout  $x \in L^2([t-T, t])$ , et en posant  $u(t) = -K(t)x(t)$ , nous obtenons par  $\mathcal{F}_T$  le modèle harmonique :

$$\dot{X}(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{B}(t)\mathcal{K}(t))X(t)$$

avec  $\mathcal{K} = \mathcal{T}_T(K) = \mathcal{T}_T(G)\mathcal{T}_T(B^T)\mathcal{T}_T(P)$ . Notons que  $\mathcal{K}(t)$  est temps-variant car  $B(t)$  et  $G(t)$  ne sont pas périodiques. Comme  $V(X) = X^*PX$  est une fonction de Lyapunov pour ce modèle, nous en déduisons que la fonctionnelle  $v(x)$  est une fonction de Lyapunov pour le système  $\dot{x}(t) = (A(t) - B(t)K(t))x(t)$  (corollaire 3.2).  $\square$

L'intérêt de ce résultat est que  $B(t)$  n'est pas nécessairement périodique. Si c'est le cas, nous pouvons donner une condition suffisante d'existence d'une solution à l'équation de Riccati harmonique et utiliser les résultats suivants :

**Proposition 3.6.** *Soient  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $B \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$   $T$ -périodiques.  $P$  est l'unique solution symétrique définie positive (et  $T$ -périodique) de l'équation différentielle périodique de Riccati*

$$\dot{P}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)^T P(t) + Q(t) = 0 \quad (3.23)$$

où  $Q, R \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  symétriques définies positives et  $T$ -périodiques et où il existe  $\gamma > 0$  tel que l'ensemble  $\{t : |\det(R(t))| < \gamma\}$  est de mesure nulle, si et seulement si la matrice  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  est l'unique solution hermitienne définie positive de l'équation algébrique harmonique de Riccati

$$\mathcal{P}(\mathcal{A} - \mathcal{N}) + (\mathcal{A} - \mathcal{N})^* \mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* \mathcal{P} + \mathcal{Q} = 0 \quad (3.24)$$

où  $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_T(Q)$  et  $\mathcal{R} = \mathcal{T}_T(R)$  sont hermitiennes définies positives et où  $\mathcal{A} = \mathcal{T}_T(A)$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{T}_T(B)$ .

*Démonstration.* Soient  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $B, Q, R \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$   $T$ -périodiques telles que  $Q(t) = Q^T(t) > 0$ ,  $R(t) = R^T(t) > 0$  et tel qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que l'ensemble  $\{t : |\det(R(t))| < \gamma\}$  est de mesure nulle.  $\mathcal{R}$  est inversible et  $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{T}_T(R^{-1})$  d'après la propriété 2.5. La fonction  $f : ((t, P) = A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B(t)^T P(t) + Q(t))$  vérifie les conditions de Carathéodory et la condition d'unicité (théorème 2.3). De plus,  $\hat{f} : (t \mapsto f(t, P(t))) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$  pour tout  $P \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ . Alors, nous obtenons de manière analogue à la démonstration de la proposition 3.3 que  $P$  solution de (3.23) telle que  $P(t) = P^T(t) > 0$  si et seulement  $\mathcal{P}$  est solution dans  $H_T$  de

$$\dot{P} + \mathcal{P}(\mathcal{A} - \mathcal{N}) + (\mathcal{A} - \mathcal{N})^* \mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{B}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^* \mathcal{P} + \mathcal{Q} = 0$$

et que l'unicité de  $P$  entraîne celle de  $\mathcal{P}$  avec la condition initiale  $P_k(t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0} P(p)e^{-jk\omega p} dp$ . Notons que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont nécessairement hermitiennes et définies positives par la proposition 2.7. Si maintenant, la longueur de la fenêtre glissante est égale à la période  $T$ , alors comme  $P, A$  et  $Q$  sont  $T$ -périodiques,  $\mathcal{P}, \mathcal{A}$  et  $\mathcal{Q}$  sont constants et  $\dot{\mathcal{P}} = 0$ . Nous en déduisons que  $P$  est solution de (3.23) si et seulement si  $\mathcal{P}$  est solution dans  $H_T$  de l'équation algébrique harmonique (3.24) telle que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* > 0$  et l'unicité de  $P$  entraîne celle de  $\mathcal{P}$ . Réciproquement, puisque la solution de l'équation algébrique harmonique est ici indépendante de la condition initiale, si  $P$  est un représentant de  $\mathcal{P}$  ( $\in H$ ), c'est à dire  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$ , il est l'unique solution de (3.24).  $\square$

**Corollaire 3.4.** Soient  $P, R, \mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  et  $\mathcal{R} = \mathcal{T}_T(R)$  données par la proposition 3.6, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. la fonction  $V(X) = X^* \mathcal{P} X$  est une fonction de Lyapunov pour le système LTI harmonique  $\dot{X}(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}U(t)$  bouclé par la commande  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$ , où  $\mathcal{K} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^* \mathcal{P}$
2. la fonction  $v(x) = x^T P x$  est une fonction de Lyapunov pour le système LTP  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  bouclé par la commande  $u(t) = -K(t)x(t)$ , où  $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$
3. la fonctionnelle  $v(x)(t) = \langle x, P x \rangle_{L^2([t-T, t])}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(p)^T P(p) x(p) dp$  est une fonction de Lyapunov pour le système LTP  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$  bouclé par la commande  $u(t) = -K(t)x(t)$ , où  $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$

*Démonstration.* L'équivalence entre les deux premières propositions est évidente par la proposition 3.6 et d'après la théorie sur les équations de Riccati. L'équivalence entre 1 et 3 se montre via Parseval, comme dans la démonstration du corollaire 3.2.  $\square$

**Corollaire 3.5.** Soient  $A \in L_{loc}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $B \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$   $T$ -périodiques. La commande par retour d'état périodique  $u(t) = -K(t)x(t)$  stabilise globalement asymptotiquement le système LTP

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.25)$$

avec une matrice de gains  $K(t) = R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$   $T$ -périodique, où  $R = \mathcal{T}_T^{-1}(\mathcal{R})$  et  $P = \mathcal{T}_T^{-1}(\mathcal{P})$  telle que  $\mathcal{P}$  est l'unique solution hermitienne définie positive de l'équation algébrique harmonique de Riccati (3.24). Autrement dit, la commande par retour d'état harmonique  $U(t) = -\mathcal{K}X(t)$ , où  $\mathcal{K} = \mathcal{T}_T(K) = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^* \mathcal{P}$  stabilise globalement asymptotiquement le système LTI harmonique

$$\dot{X}(t) = (\mathcal{A} - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}U(t) \quad (3.26)$$

Et alors, la commande  $u(t)$ , et de manière équivalente la commande harmonique  $U = \mathcal{F}_T(u)$ , minimise la fonction de coût quadratique harmonique

$$J(X, U)(t) = \int_0^{+\infty} (X(t)^* \mathcal{Q} X(t) + U(t)^* \mathcal{R} U(t)) dt \quad (3.27)$$

*Démonstration.* Ce corollaire découle directement de la proposition 3.6 ou du corollaire 3.4 d'après la théorie sur les équations de Riccati.  $\square$

**Proposition 3.7.** L'algorithme itératif suivant sur l'équation de Riccati harmonique (3.24) permet de déterminer  $\mathcal{P}$  : pour  $p=0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{P}_{p+1}(\mathcal{A} - \mathcal{N}) + (\mathcal{A} - \mathcal{N})^* \mathcal{P}_{p+1} = \mathcal{P}_p \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^* \mathcal{P}_p - \mathcal{Q} \quad (3.28)$$

*Démonstration.* Voir [Zhou, 2008].  $\square$

Pour conclure, la résolution des équations algébriques de Lyapunov (resp. Riccati) harmoniques permet d'évaluer la stabilité et d'optimiser la commande pour stabiliser un système en boucle fermée, en considérant des informations sur les dynamiques et les couplages harmoniques. La fonction de coût (3.27) minimisée peut en effet contenir des informations sur la composante moyenne des signaux mais également sur leurs harmoniques. De plus, la résolution des équations de Lyapunov (resp. Riccati) harmoniques présentées est plus aisée que celle des équations temporelles différentielles car elles sont algébriques. Toutefois, les développements effectués considèrent des matrices de dimensions infinies et leur troncature est susceptible de remettre en cause les résultats. En particulier, si le produit de deux matrices de Toeplitz infinies est une

matrice de Toeplitz, ce n'est pas le cas en dimension finie, et de même pour l'inverse. Un effet de bord peut être observé et peut se révéler problématique si trop peu d'harmoniques sont pris en compte. Dans ce cas, imposer une matrice  $\mathcal{Q}$  Toeplitz dans l'algorithme (3.28) ne garantit alors pas de trouver une matrice  $\mathcal{P}$  Toeplitz. En pratique, il est possible de modifier légèrement les gains dans  $\mathcal{P}$  pour forcer une structure Toeplitz.

### 3.4.3 Stabilisation des systèmes affines commutés

Nous nous intéressons dans cette partie à une loi de commande pour les systèmes commutés qui a été proposée dans [Beneux *et al.*, 2017]. C'est une loi de commande adaptative qui présente l'avantage considérable de garantir une stabilité asymptotique globale pour les systèmes affines commutés. Nous développons ici une loi de commande similaire (dans le cadre non adaptatif) mais synthétisée dans le domaine harmonique.

**Définition 3.2.** *L'ensemble des points d'équilibre harmonique d'un modèle harmonique de la forme  $\dot{X}(t) = (\mathcal{A}(D(t)) - \mathcal{N})X(t) + \mathcal{B}(D(t))W$ , associé à un système affine commuté (3.30), est défini par*

$$\mathcal{E}_T = \{(X^e, D^e) \mid 0 = (\mathcal{A}(D^e) - \mathcal{N})X^e + \mathcal{B}(D^e)W\} \quad (3.29)$$

*Ces points d'équilibre harmonique sont associées à des trajectoires périodiques de même période que la base harmonique, définies par :  $x^e(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(X^e)$  et  $u^e(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(U^e)$ .*

Définir les points d'équilibre dans le domaine harmonique permet de considérer des entrées exogènes  $w(t)$   $T$ -périodique (dans une base harmonique de période  $T$ ) et non plus seulement constantes.

**Proposition 3.8.** *Soient  $w \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$   $T$ -périodique et  $d \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$ . Toute trajectoire périodique  $(x^e(t), d^e(t))$  du système affine commuté*

$$\dot{x}(t) = A(d(t))x(t) + B(d(t))w(t) \quad (3.30)$$

*où  $A(d(t)) = A_{ind} + A_{dep}d(t)$  et  $B(d(t)) = B_{ind} + B_{dep}d(t)$ , associée à un point d'équilibre harmonique stable  $(X^e, D^e) \in \mathcal{E}_T$  tel que  $\mathcal{A}(D^e) - \mathcal{N}$  soit Hurwitz, est globalement asymptotiquement stable par la loi de commande*

$$d(t) = d^e(t) - G(t)\tilde{B}^T(x, w)(t)P(t)(x(t) - x^e(t)) \quad (3.31)$$

avec

$$\tilde{B}(x, w)(t) = A_{dep}x(t) + B_{dep}w(t)$$

*et avec  $G, P \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  symétriques définies positives et  $T$ -périodiques, où  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  est l'unique solution hermitienne définie positive de l'équation de Lyapunov harmonique  $\mathcal{A}(D^e)^* \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}(D^e) + \mathcal{Q} = 0$ , avec  $\mathcal{Q}$  hermitienne définie positive et de structure Toeplitz. Autrement dit, tout point d'équilibre harmonique stable  $(X^e, D^e)$  du système harmonique*

$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}(D(t))X(t) + \mathcal{B}(D(t))W \quad (3.32)$$

*où  $\mathcal{A}(D) = \mathcal{T}_T(A(d))$  et  $\mathcal{B}(D) = \mathcal{T}_T(B(d))$ , est globalement asymptotiquement stable par la loi de commande*

$$D(t) = D^e - \mathcal{G}\tilde{\mathcal{B}}^*(X)(t)\mathcal{P}(X(t) - X^e) \quad (3.33)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{B}}(X)(t) = \mathcal{A}_{dep}\mathcal{X}(t) + \mathcal{B}_{dep}W = \mathcal{X}(t) \otimes A_{dep} + W \otimes B_{dep}$$

*où  $\mathcal{X} = \mathcal{T}_T(X)$ ,  $W = \mathcal{T}_T(W)$ ,  $\mathcal{A}_{dep} = \mathcal{T}_T(A_{dep})$ ,  $\mathcal{B}_{dep} = \mathcal{T}_T(B_{dep})$ , où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker et avec  $\mathcal{G} = \mathcal{T}_T(G)$  hermitienne définie positive.*

*Démonstration.* Soient  $w \in L^2(\mathbb{R})$   $T$ -périodique et  $d \in L^2(\mathbb{R})$ . Le modèle (3.30) est affine commuté. La stabilité en présence des non-linéarités est démontrée à l'aide d'une fonction de Lyapunov selon l'approche détaillée dans la suite et similaire à celle proposée dans [Beneux et al., 2017]. La nouveauté est que nous travaillons pour notre part dans le domaine harmonique, ce qui permet de considérer une entrée exogène  $w(t)$   $T$ -périodique et non plus constante. Comme  $w(t)$  est  $T$ -périodique, dans la base harmonique de période  $T$ ,  $W = \mathcal{F}_T(w)$  est constant. Soit un équilibre harmonique du modèle (3.32) donné par :

$$0 = (\mathcal{A}(D^e) - \mathcal{N})X^e + \mathcal{B}(D^e)W$$

A partir de l'équilibre harmonique  $(X^e, D^e)$ , le modèle harmonique peut être réécrit sans approximation sous la forme

$$\dot{X}(t) = (\mathcal{A}(D^e) - \mathcal{N})(X(t) - X^e) + (\mathcal{A}(D(t)) - \mathcal{A}(D^e))X(t) + (\mathcal{B}(D(t)) - \mathcal{B}(D^e))W$$

Notons que

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(d(t)) - \mathcal{A}(d^e(t)))x(t) &= ((A_{ind} + d(t)A_{dep}) - (A_{ind} + d^e(t)A_{dep}))x(t) \\ &= A_{dep}x(t)(d(t) - d^e(t)) \end{aligned}$$

Par décomposition de Fourier glissante, nous obtenons

$$(\mathcal{A}(D(t)) - \mathcal{A}(D^e))X(t) = \mathcal{A}_{dep}\mathcal{X}(t)(\mathcal{D}(t) - \mathcal{D}^e) = \mathcal{X}(t) \otimes A_{dep}(\mathcal{D}(t) - \mathcal{D}^e)$$

avec  $\mathcal{X} = \mathcal{T}_T(F)$ . Avec le même raisonnement, nous obtenons

$$(\mathcal{B}(D(t)) - \mathcal{B}(D^e))W = \mathcal{B}_{dep}\mathcal{W}(\mathcal{D}(t) - \mathcal{D}^e) = \mathcal{W} \otimes B_{dep}(\mathcal{D}(t) - \mathcal{D}^e)$$

avec  $\mathcal{W} = \mathcal{T}_T(W)$ . Nous pouvons alors écrire

$$\dot{X}(t) = (\mathcal{A}(D^e) - \mathcal{N})(X(t) - X^e) + \tilde{\mathcal{B}}(X)(t)(\mathcal{D}(t) - \mathcal{D}^e)$$

Supposons que  $\mathcal{A}(D^e)$  Hurwitz. Alors, le système harmonique  $\dot{X}(t) = \mathcal{A}(D^e)X(t)$  est globalement asymptotiquement stable et, pour toute matrice  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^* > 0$  de structure Toeplitz, il existe une unique matrice  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* > 0$  de structure Toeplitz et solution de l'équation de Lyapunov  $\mathcal{A}(D^e)^*\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A}(D^e) + \mathcal{Q} = 0$ . De manière équivalente, le système périodique  $\dot{x}(t) = A(d^e(t))x(t)$  est globalement asymptotiquement stable (corollaire 3.3), et alors, par application de la proposition 3.5, nous considérons la commande (3.33). La fonction de Lyapunov associée à  $\mathcal{P}$

$$V(X)(t) = (X(t) - X^e)^*\mathcal{P}(X(t) - X^e)$$

est alors de dérivée exprimée, en posant  $Z(t) = \tilde{\mathcal{B}}^*(X)(t)\mathcal{P}(X(t) - X^e)$ , par :

$$\dot{V}(X)(t) = -(X(t) - X^e)^*\mathcal{Q}(X(t) - X^e) - 2Z(t)^*\mathcal{G}Z(t) \leq 0$$

Comme  $\mathcal{Q}, \mathcal{G} > 0$ , cette fonction est nulle si et seulement si  $X = X^e$ . Ainsi, la fonction de Lyapunov  $V(X)(t)$  permet de prouver la stabilité asymptotique du point d'équilibre harmonique  $(X^e, D^e)$  par la loi de commande (3.33). Par le corollaire 3.4, la fonctionnelle

$$v(x - x^e)(t) = (x(t) - x^e(t))^T P(t)(x(t) - x^e(t))$$

où  $P = \mathcal{T}_T^{-1}(\mathcal{P})$ , est une fonction de Lyapunov pour le système (3.30) bouclé par la commande (3.31). Autrement dit, cette commande stabilise asymptotiquement le système affine commuté vers la trajectoire  $x^e(t) = \mathcal{T}_T^{-1}(X^e)$ .  $\square$

Nous avons présenté une loi de commande globalement asymptotiquement stable pour le contrôle de systèmes affines commutés, établie dans le domaine harmonique.  $\mathcal{Q}$  est la matrice de gains de Lyapunov pour répartir l'effort du contrôle-commande et  $\mathcal{R}$  est le gain de retour d'état pour régler la puissance du contrôle-commande.  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{R}$  doivent être choisies hermitiennes définies positives et de structure Toeplitz pour obtenir une matrice  $\mathcal{P}$  qui définit une fonction de Lyapunov pour le système harmonique. Alors, la matrice de retour d'état  $\mathcal{K} = \mathcal{R}\mathcal{B}^*(X)(t)\mathcal{P}$  est également de structure Toeplitz et respecte les conditions du corollaire 3.1.

### 3.4.4 Stabilisation des systèmes affines commutés en présence de perturbations périodiques et d'incertitudes paramétriques

En présence de perturbations harmoniques extérieures et d'incertitudes paramétriques, une approche plus robuste peut être nécessaire pour éviter de dévier de la trajectoire nominale. Une solution est d'utiliser la technique de contrôle par retour d'état présentée dans [Astolfi et Praly, 2016], [Astolfi et al., 2019].

Considérons un état harmonique augmenté  $(X, Z)$  de dynamiques données par

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (\mathcal{A} - \mathcal{N})(X(t) - X^e) + \tilde{\mathcal{B}}(X(t))(D(t) - D^e) \\ \dot{Z}(t) &= (\mathcal{O} - \mathcal{N})Z(t) + \mathcal{L}\mathcal{C}(X(t) - X^e)\end{aligned}\quad (3.34)$$

Pour la seconde équation, nous supposons qu'il existe des représentants  $L, C \in L^\infty$  et  $T$ -périodiques de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$ , ainsi qu'une fonction matricielle  $O(t) \in L^2$ , anti-symétrique et  $T$ -périodique telle que  $\mathcal{O} = \mathcal{T}_T(O)$  est anti-hermitienne, c'est-à-dire  $\mathcal{O}^* = -\mathcal{O}$ .

Nous montrons dans la suite que ces équations permettent d'incorporer des actions intégrales ou des oscillateurs pour rejeter les erreurs sur les phaseurs. Par exemple, considérons

$$O(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k\omega \\ 0 & k\omega & 0 \end{pmatrix}$$

et  $(y_1, y_2, 0)' = L(t)C(t)(x - x^e)$ . Alors, une action intégrale est introduite sur la variable  $y_1$  sur la première ligne et un oscillateur est introduit sur l'entrée  $y_2$  via les deux autres lignes. L'introduction d'un oscillateur d'ordre  $k$  a pour objectif de rejeter les erreurs sur le  $k^e$  phaseur de l'entrée  $y_2$ . Autrement dit, cette action permet de rejeter les perturbations extérieures sur cette variable, donc les oscillations à la fréquence  $kf$  (voir Astolfi et al. [2019] pour plus de détails).

**Proposition 3.9.** *Le système (3.34) est globalement asymptotiquement stable sur l'équilibre  $X^e$  par la loi de commande*

$$D(t) = D^e - \mathcal{G}\tilde{\mathcal{B}}(X(t))^* [\mathcal{P}(X(t) - X^e) - \mathcal{M}^*(Z(t) - \mathcal{M}(X(t) - X^e))] \quad (3.35)$$

où  $\mathcal{G} > 0$ , où  $\mathcal{P}$  est donné par la proposition (3.6) et où  $\mathcal{M}$  satisfait l'équation de Sylvester harmonique

$$(\mathcal{O} - \mathcal{N})\mathcal{M} - \mathcal{M}(\mathcal{A} - \mathcal{N}) + \mathcal{L}\mathcal{C} = 0 \quad (3.36)$$

*Démonstration.* Pour commencer, l'équivalence entre la solution d'une équation harmonique de Sylvester et celle de sa version différentielle  $T$ -périodique peut être prouvée comme dans la preuve

de la proposition 3.3. Notons  $\bar{X} = (X - X^e)$  et considérons la fonction de Lyapunov candidate  $\mathcal{V}(\bar{X}, Z) = \bar{X}^* \mathcal{P} \bar{X} + (Z - \mathcal{M} \bar{X})^* (Z - \mathcal{M} \bar{X})$ . Sa dérivée le long de la trajectoire mène à

$$\dot{\mathcal{V}} = -\bar{X}^* \mathcal{Q} \bar{X} + 2\bar{X}^* \mathcal{P} \tilde{\mathcal{B}}(X) \bar{D} + 2(Z - \mathcal{M} \bar{X})^* ((\mathcal{O} - \mathcal{N})Z + \mathcal{L} \mathcal{C} \bar{X} - \mathcal{M}((\mathcal{A} - \mathcal{N})\bar{X} + \tilde{\mathcal{B}}(X)\bar{D}))$$

où  $\bar{D} = (D - D^e)$ . D'après la relation (3.36), nous pouvons écrire

$$\dot{\mathcal{V}} = -\bar{X}^* \mathcal{Q} \bar{X} + 2 \left( \bar{X}^* \mathcal{P} \tilde{\mathcal{B}}(X) - (Z - \mathcal{M} \bar{X})^* \mathcal{M} \tilde{\mathcal{B}}(X) \right) \bar{D} + 2(Z - \mathcal{M} \bar{X})^* (\mathcal{O} - \mathcal{N})(Z - \mathcal{M} \bar{X})$$

Puisque  $(\mathcal{O} - \mathcal{N})^* = -(\mathcal{O} - \mathcal{N})$ , pour tout  $Y$ , nous avons  $Y^* (\mathcal{O} - \mathcal{N}) Y = 0$ , et la dérivée peut être simplifiée :

$$\dot{\mathcal{V}}(\bar{X}, Z) = -\bar{X}^* \mathcal{Q} \bar{X} + 2 \left( \bar{X}^* \left[ \mathcal{P} - (Z - \mathcal{M} \bar{X})^* \mathcal{M} \right] \tilde{\mathcal{B}}(X) \right) \bar{D}.$$

Alors, nous choisissons

$$\bar{D} = -\mathcal{G} \tilde{\mathcal{B}}(X)^* \left[ \mathcal{P} \bar{X} - \mathcal{M}^* (Z - \mathcal{M} \bar{X}) \right]$$

Pour tout  $\mathcal{G} > 0$ , nous obtenons

$$\dot{\mathcal{V}}(\bar{X}, Z) = -\bar{X}^* \mathcal{Q} \bar{X} - \mathcal{G}^{-1} \bar{D}^* \bar{D} < 0, \quad \bar{X} \neq 0$$

De plus, puisque  $\dot{\mathcal{V}} = 0$  implique que  $\bar{X} = 0$ , nous obtenons que  $\mathcal{V}(0, Z) = Z^* Z$  est constant et nous concluons que  $Z$  est borné et que  $\mathcal{V}(\bar{X}, Z)$  est une fonction de Lyapunov faible.  $\square$

**Corollaire 3.6.** *Le système*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(d(t))x(t) + B(d(t))w(t) \\ \dot{z}(t) &= O(t)z(t) + L(t)C(t)\bar{x}(t) \end{aligned}$$

est globalement asymptotiquement stable sur la trajectoire  $T$ -périodique  $x^e(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(X^e)(t)$  par la loi de commande

$$d(t) = d^e(t) - g(t) \tilde{B}(x(t))^T \left[ P(t)\bar{x}(t) - M(t)^T (z(t) - M(t)\bar{x}(t)) \right]$$

où  $\bar{x}(t) = x(t) - x^e(t)$ ,  $\tilde{B}(x(t)) = A_{dep}x(t) + B_{dep}w(t)$  et où  $P(t)$  et  $M(t)$  sont respectivement les représentants de  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  and  $\mathcal{M} = \mathcal{T}_T(M)$  dans le cadre de la proposition 3.9.

*Démonstration.* La preuve est établie une fois de plus à partir de la proposition 3.1.  $\square$

**Proposition 3.10.** *Si le domaine de contrôle est restreint à un ensemble fermé  $D_c$  et si la trajectoire  $T$ -périodique  $d^e$  est à l'intérieur de  $D_c$ , alors la fonction de saturation*

$$sat(d(t)) = d^e(t) + \gamma(t)(d(t) - d^e(t)) \tag{3.37}$$

avec  $\gamma(t) = \max\{0 \leq \gamma \leq 1 : d^e(t) + \gamma \bar{d}(t) \in D_c\}$  ne modifie pas la propriété de stabilité via la loi de commande du corollaire 3.6.

*Démonstration.* Si la trajectoire  $T$ -périodique  $d^e$  est à l'intérieur de  $D_c$ , il existe toujours, pour tout  $t$ , un unique  $\gamma(t) \leq 1$  strictement positif tel que  $\gamma(t) = \max\{0 \leq \gamma \leq 1 : d^e(t) + \gamma(d(t) - d^e(t)) \in D_c\}$ . Considérons la fonctionnelle définie positive (comme dans le corollaire 3.2) :

$$v(\bar{x}, z)(t) = \langle \bar{x}, P\bar{x} \rangle_{L^2([t-T, t])}(t) + \langle z - M\bar{x}, z - M\bar{x} \rangle_{L^2([t-T, t])}(t)$$

Quand la loi de commande est saturée, la dérivée le long de la trajectoire est alors donnée par

$$\begin{aligned} \dot{v}(\bar{x}, z)(t) &= -\langle \bar{x}, \mathcal{Q}\bar{x} \rangle_{L^2([t-T, t])}(t) - g(t) \langle \tilde{B}(x)^T P\bar{x}, \gamma \tilde{B}(x)^T P\bar{x} \rangle_{L^2([t-T, t])}(t) \cdots \\ &\quad - g(t) \langle \tilde{B}(x)^T M^T (z - M\bar{x}), \gamma \tilde{B}(x)^T M^T (z - M\bar{x}) \rangle_{L^2([t-T, t])}(t) \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma(t) > 0$ , les deux derniers termes du membre de droite sont toujours de signes négatifs, ce qui prouve le corollaire.  $\square$

### 3.5 Application à la commande et au filtrage actif des convertisseurs

La modélisation harmonique peut être utilisée pour améliorer le contrôle des systèmes industriels via un des schémas de contrôle-commande présentés dans la partie 3.2. Elle permet de concevoir un contrôleur agissant sur les harmoniques des signaux pour répondre à des objectifs temporels mais également fréquentiels (THD, filtrage actif, rejet d'oscillations ...). Nous présentons ici des résultats sur la régulation de la tension en sortie d'un convertisseur Boost avec filtrage actif et rejet de perturbations périodiques (rejet d'oscillations). Nous validons les résultats obtenus pour une loi de commande par retour d'état harmonique de type LQ ainsi qu'une loi de commande harmonique de type embedded.

#### 3.5.1 Présentation du problème et cahier des charges

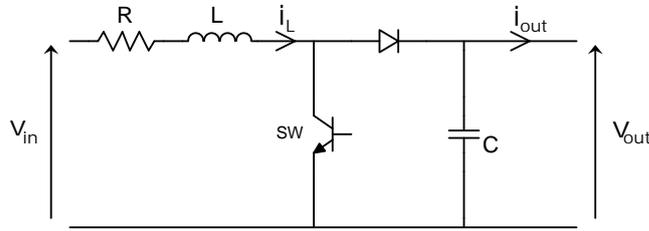


Figure 3.3 – Schéma électrique d'un convertisseur Boost.

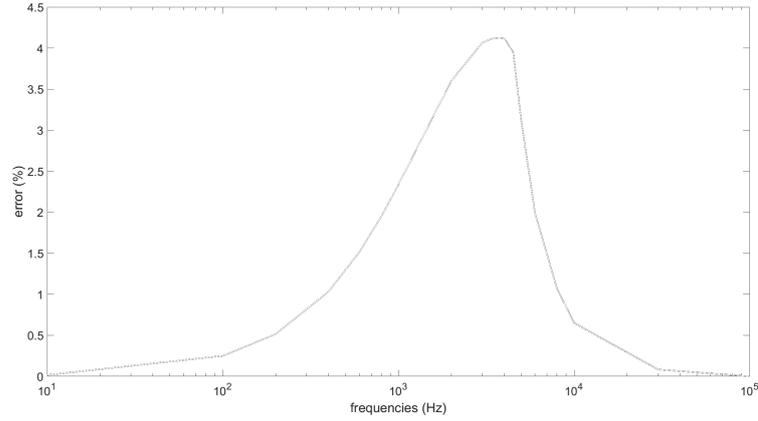
Le système choisi pour démontrer l'efficacité des approches développées est un convertisseur Boost, dont le schéma électrique est rappelé sur la figure 3.3. Les objectifs du contrôle-commande sont de réguler la tension en sortie du convertisseur autour de  $60V$ , de la filtrer activement pour éliminer ses oscillations ( $< 0.8\%$ ) et de rejeter les perturbations harmoniques. La charge en sortie considérée pour illustration est une charge résistive constante  $R_c = 10\Omega$ . En prenant explicitement en compte son association avec la charge résistive constante, le modèle harmonique d'un convertisseur Boost peut s'écrire dans la base harmonique de période  $T$  arbitraire sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) \\ \frac{1}{C}(\mathcal{U}_I - \mathcal{D}(t)) & \frac{-1}{R_c C}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) \\ V_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\mathcal{U}_I \\ \mathcal{Z} \end{bmatrix} V_{in}(t) \quad (3.38)$$

où  $I_L = \mathcal{F}_T(i_L)$ ,  $V_{out} = \mathcal{F}_T(v_{out})$ ,  $V_{in} = \mathcal{F}_T(v_{in})$ ,  $I_{out} = \mathcal{F}_T(i_{out})$ ,  $\mathcal{D}(t) = \mathcal{T}_T(d(t))$ ,  $\mathcal{N}$  est la matrice de différentiation,  $\mathcal{U}_I$  est la matrice identité et  $\mathcal{Z}$  est la matrice nulle. Le lecteur est à nouveau invité à prêter attention à l'ordre dans lequel les équations harmoniques sont écrites. En effet, pour simplifier les écritures, les équations sont permutées par rapport au modèle théorique (3.32) pour séparer les phaseurs propres à chaque variable.

La tension en entrée  $v_{in}(t)$  est la tension d'alimentation du Boost. En régime nominal, cette entrée exogène est généralement supposée constante, mais en réalité elle peut contenir des harmoniques. Par exemple, si cette tension est redressée à partir de la tension fournie par un réseau électrique alternatif, elle peut contenir des harmoniques à la fréquence du réseau. Les perturbations hautes fréquences sur cette entrée peuvent à priori être négligées car elles sont

naturellement filtrées par le système. Les perturbations basses fréquences peuvent quant à elles être traitées à l'aide de techniques adaptatives aujourd'hui assez bien maîtrisées. En revanche, une gamme fréquentielle spécifique reste critique du point de vue du rejet d'oscillations. Cela est illustré sur la figure 3.4 où l'amplitude des oscillations obtenues sur la tension en sortie du modèle instantané du Boost 1.2 est tracée en fonction de la fréquence des oscillations en entrée sur  $v_{in}(t)$ , en boucle ouverte et avec un rapport cyclique constant par morceaux, mis à jour par technique adaptative. Les paramètres du Boost et de la charge sont donnés dans le tableau 3.1. Il en résulte que la gamme fréquentielle critique se situe entre  $200Hz$  et  $10kHz$ , le pire cas se situant autour de  $5kHz$ .



**Figure 3.4** – Influence de la fréquence d'une oscillation en entrée sur l'amplitude des oscillations observées sur la tension en sortie du Boost en boucle ouverte.

noms	valeurs	paramètres
<b>R</b>	$1m\Omega$	résistance
<b>L</b>	$0.1mH$	inductance
<b>C</b>	$10\mu H$	capacité
<b>f<sub>sw</sub></b>	$100kHz$	fréquence de commutation
<b>R<sub>c</sub></b>	$10\Omega$	charge résistive constante
<b>f<sub>in</sub></b>	$5kHz$	fréquence de la base harmonique
<b>h</b>	8	ordre de troncature

**Tableau 3.1** – Paramètres du convertisseur Boost et de la base harmonique.

A titre de démonstrateur,  $v_{in}(t)$  est ici considéré périodique de période  $T_{in}$  connue. L'hypothèse que nous connaissons la période  $T_{in}$  de la perturbation en entrée est forte. En pratique, si la perturbation provient d'un autre système auquel le convertisseur Boost est associé (un réseau par exemple), la fréquence de ce système peut raisonnablement être connue, mesurée ou estimée avec une précision convenable. Pour un régime nominale périodique donné, en considérant  $v_{in}(t)$  constant ou  $T_{in}$ -périodique, alors  $v_{in}(t)$  est associé à un vecteur harmonique  $V_{in} = \mathcal{F}_T(v_{in})$  constant. Dans ce cas, il est possible de définir un point d'équilibre harmonique  $(I_L^e, V_{out}^e, D^e) \in \mathcal{E}_T$  du modèle (3.38), dans la base harmonique de période  $T = T_{in}$ . Cet équilibre harmonique est associé à des trajectoires  $T_{in}$ -périodiques  $v_{out}^e(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(v_{out}^e)$ ,  $i_L^e(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(i_L^e)$

et  $d^e(t) = \mathcal{F}_T^{-1}(D^e)$ .

Si nous connaissons le régime nominale périodique de  $v_{in}(t)$ , alors il est possible de directement le prendre en compte lors de la synthèse du contrôle-commande. Dans ce cas, nous choisissons un point d'équilibre harmonique qui prend en compte les oscillations de  $v_{in}(t)$  et dont le contenu harmonique nous satisfait. Cela procure un avantage considérable par rapport aux techniques conventionnelles. En revanche, si nous ne connaissons pas le régime nominale périodique de  $v_{in}(t)$ , nous supposons un régime constant  $v_{in}$  et nous considérons ses harmoniques comme des perturbations. Ici, l'objectif est d'obtenir une tension constante en sortie du convertisseur. Nous choisissons donc un vecteur harmonique de tension à l'équilibre  $V_{out}^e$  dont les phaseurs sont tous nuls ou presque, exceptée la composante continue (phaseur 0) qui est choisie au niveau de tension désiré. Nous obtenons l'équilibre harmonique suivant :

$$\begin{aligned} I_L^e &= [\dots 0 \dots 0 \ I_0^e = 12A \ 0 \dots 0 \dots]^T \\ V_{out}^e &= [\dots 0 \dots 0 \ V_0^e = 60V \ 0 \dots 0 \dots]^T \\ D^e &= [\dots 0 \dots 0 \ D_0^e = 0.5 \ 0 \dots 0 \dots]^T \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les fréquences de la gamme critique sont assez éloignées de la fréquence de commutation du convertisseur. Nous supposons alors que les hautes fréquences générées par les commutations peuvent être négligées dans le problème du rejet d'oscillations dans la gamme critique, ce qui permet de limiter le nombre d'harmoniques. Cette hypothèse peut être vérifiée en choisissant une base harmonique commune, comme présenté dans la section 2.2.6, afin d'analyser les couplages entre basses et hautes fréquences.

A partir du point d'équilibre harmonique (3.39), le modèle harmonique (3.38) peut se réécrire, sans approximation, dans la base harmonique de période  $T_{in}$  sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ \dot{V}_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}\mathcal{U}_I \\ \frac{1}{C}\mathcal{U}_I & \frac{-1}{R_c C}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) - I_L^e \\ V_{out}(t) - V_{out}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{V}_{out}}{L} \\ \frac{\mathcal{I}_L}{L} \end{bmatrix} (D(t) - D^e) \quad (3.40)$$

où  $\mathcal{V}_{out} = \mathcal{T}_T(v_{out})$  et  $\mathcal{I}_L = \mathcal{T}_T(i_L)$ .

### 3.5.2 Commande optimale LQ par retour d'état

La commande LQ est une technique de contrôle linéaire. Nous linéarisons donc le modèle harmonique du Boost (3.40) autour du point d'équilibre harmonique (3.39), dans la base harmonique de période  $T_{in}$ . Le modèle harmonique linéarisé s'écrit sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ \dot{V}_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}\mathcal{U}_I \\ \frac{1}{C}\mathcal{U}_I & \frac{-1}{R_c C}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) - I_L^e \\ V_{out}(t) - V_{out}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{V}_{out}^e}{L} \\ \frac{\mathcal{I}_L^e}{L} \end{bmatrix} (D(t) - D^e) \quad (3.41)$$

où  $\mathcal{V}_{out}^e = \mathcal{T}_T(v_{out}^e)$  et  $\mathcal{I}_L^e = \mathcal{T}_T(i_L^e)$ .

Pour tester l'efficacité de la commande, l'entrée exogène  $v_{in}(t)$  du convertisseur subit une perturbation non seulement de sa valeur moyenne mais également par une oscillation à la fréquence critique  $f = 5kHz$  et ses harmoniques 3 et 7 (à  $15kHz$  et  $35kHz$ ), comme illustré sur

la figure 3.5a. Nous considérons alors une commande par retour d'état harmonique avec bouclage intégral sur la composante continue de la tension via le vecteur  $Z_0$ , sur son fondamental via le vecteur  $Z_1$  et sur l'harmonique 3 via le vecteur  $Z_3$ . Les intégrateurs et oscillateurs sont ajoutés au correcteur directement dans le domaine harmonique pour rejeter les erreurs statiques sur les variables harmoniques  $V_0$ ,  $V_1$  et  $V_3$  et ainsi rejeter les oscillations car les références sont à zéro. Le modèle est donc augmenté par des variables d'état  $Z_0$ ,  $Z_1$  et  $Z_3$ , conformément à la section 3.3.2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \\ Z_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}\mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ \frac{1}{C}\mathcal{U}_I & \frac{-1}{R_c C}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{U}_I & jk\omega\mathcal{U}_I - \mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) - I_L^e \\ V_{out}(t) - V_{out}^e \\ Z_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{out}^e}{L} \\ \frac{I^e}{L} \\ \mathcal{Z} \end{bmatrix} (D(t) - D^e) \quad (3.42)$$

Une commande par retour d'état harmonique est alors appliquée au modèle augmenté, soit

$$D(t) = D^e - \mathcal{K}_1 I_L(t) - \mathcal{K}_2 V_{out}(t) - \mathcal{K}_{z0} Z_0(t) - \mathcal{K}_{z1} Z_1(t) - \mathcal{K}_{z3} Z_3(t) \quad (3.43)$$

avec des matrices de structure Toeplitz particulières, conformément au corollaire 3.1. La boucle fermée étudiée pour ajuster les paramètres du contrôle-commande s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \\ Z_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} - \frac{V_{out}^e}{L}\mathcal{K}_1 & \frac{-1}{L}\mathcal{U}_I - \frac{V_{out}^e}{L}\mathcal{K}_2 & -\frac{V_{out}^e}{L}\mathcal{K}_{zk} \\ \frac{1}{C}\mathcal{U}_I - \frac{I^e}{L}\mathcal{K}_1 & \frac{-1}{R_c C}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} - \frac{I^e}{L}\mathcal{K}_2 & -\frac{I^e}{L}\mathcal{K}_{zk} \\ \mathcal{Z}_k & \mathcal{U}_I & jk\omega\mathcal{U}_I - \mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) - I_L^e \\ V_{out}(t) - V_{out}^e \\ Z_k(t) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

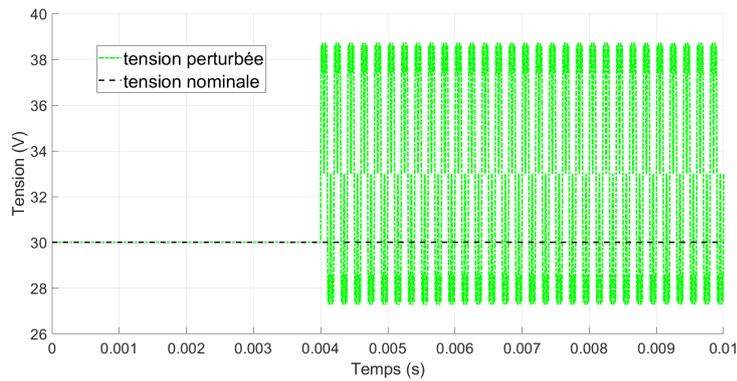
Nous nous intéressons ensuite au réglage des matrices de gains. Il est possible de les choisir de sorte à fixer les pôles d'un système. Nous choisissons ici d'optimiser leur réglage selon une loi de commande de critère LQ (3.27) car elle possède intrinsèquement de très bonnes propriétés de robustesse. Les lois de commande implémentées pour rejeter les oscillations sur la tension d'entrée sont illustrées sur la figure 3.5b. Les matrices de gains choisies sont

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= 10^3 \mathcal{U}_I \\ \mathcal{Q} &= \text{diag}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_{z0}, \mathcal{Q}_{z1}, \mathcal{Q}_{z3}) \end{aligned}$$

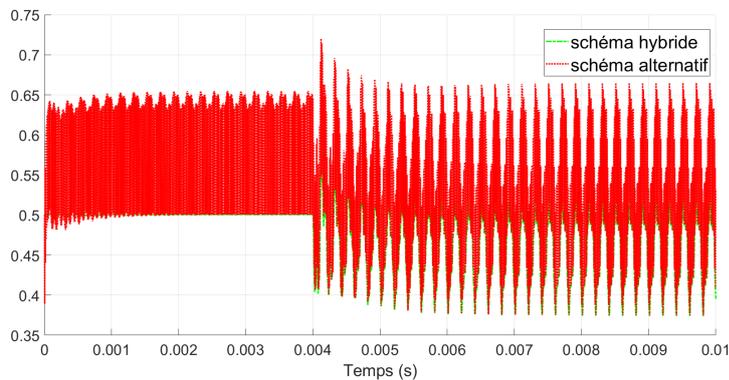
avec la matrice identité  $\mathcal{U}_I$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \mathcal{Q}_2 = 10^{-1} \mathcal{U}_I \\ \mathcal{Q}_{z0} &= \mathcal{Q}_{z1} = \mathcal{Q}_{z3} = 10^7 \mathcal{U}_I \end{aligned}$$

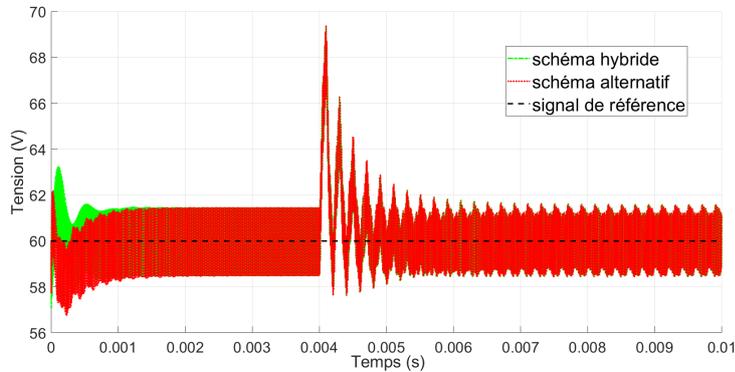
où  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  se rapportent aux gains sur le courant et la tension,  $\mathcal{Q}_{z0}$  à l'action intégrale sur la composante continue,  $\mathcal{Q}_{z1}$  celle sur le fondamental et  $\mathcal{Q}_{z3}$  celle sur l'harmonique 3. La figure 3.5c montre que le correcteur développé permet de rejeter les oscillations sur la tension en sortie. La base harmonique est choisie de période  $T = T_{in}$  égale à la période des perturbations et le nombre d'harmoniques est limité à  $h = 8$ . Les actions intégrales sur la composante moyenne, le fondamental et l'harmonique 3 permettent de cibler et rejeter les perturbations harmoniques aux fréquences correspondantes. Ceci est mieux illustré par la figure 3.5d dans laquelle les phaseurs de la tension de sortie sont tracés.



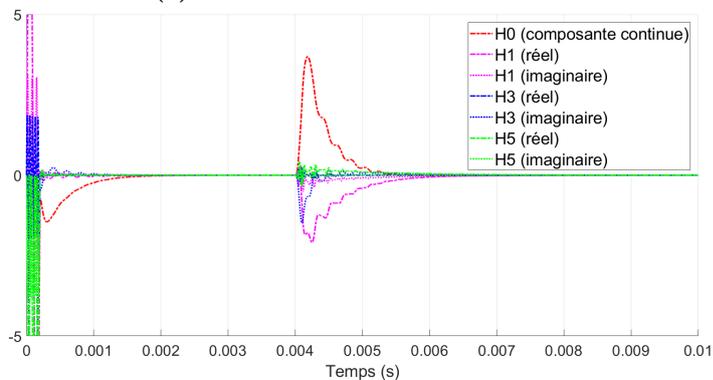
(a) La tension en entrée, perturbée à partir de  $t = 4ms$  en moyenne et par des harmoniques 1, 3 et 7 de  $f = 5kHz$ .



(b) Les lois de commande appliquées.



(c) Les tensions obtenues en sortie.

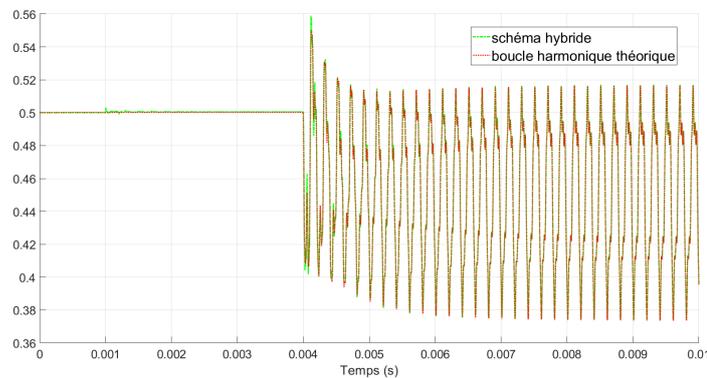


(d) Les erreurs sur les phaseurs des tensions obtenues en sortie.

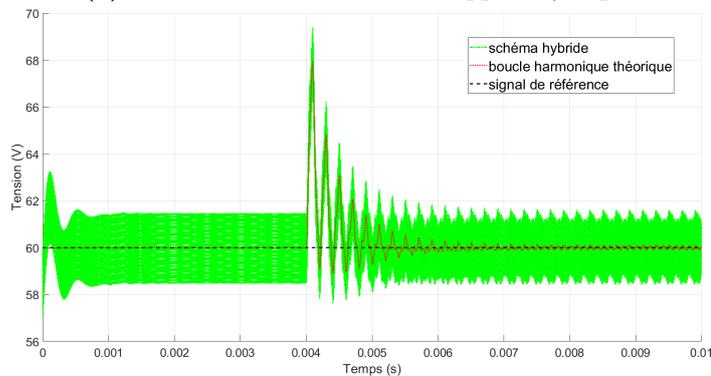
**Figure 3.5** – Régulation de la tension en sortie du Boost selon les schémas de contrôle 3.1 et 3.2 avec la loi de commande harmonique LQ et pour une perturbation périodique à  $f = 5kHz$ .

### 3.5.3 Illustration de la nécessité de structurer le correcteur harmonique

Les résultats présentés dans la section précédente ont été obtenus en s'efforçant de structurer le correcteur lors de sa synthèse dans le domaine harmonique. La littérature n'aborde pas cette problématique alors que nous expliquons que ces conditions sont indispensables pour travailler dans un cadre rigoureux. Nous illustrons la nécessité de structurer le correcteur harmonique pour l'exemple de la régulation de la tension en sortie du convertisseur Boost en comparant les signaux obtenus théoriquement avec la synthèse harmonique et les signaux réellement obtenus par implémentation de la loi de commande selon le schéma de contrôle 3.1 (le schéma 3.2 ne peut pas être mis en œuvre sans structurer le correcteur, voir proposition 3.1). Nous comparons les résultats dans le cadre d'un correcteur harmonique structuré sur la figure 3.6 et non structuré sur la figure 3.7.

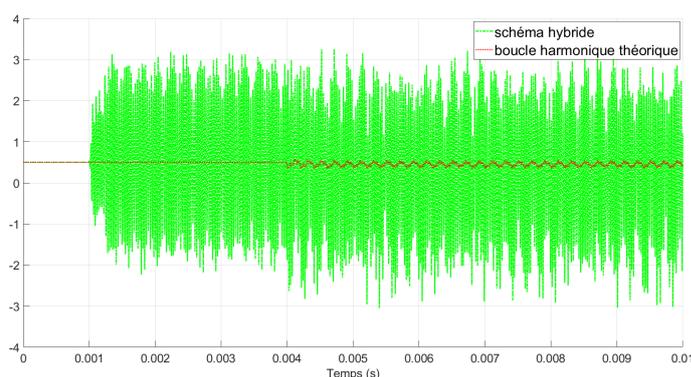


(a) Les lois de commandes en rapport cyclique.

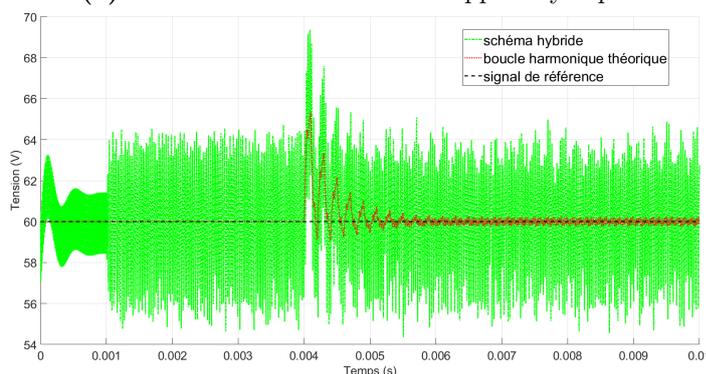


(b) Les tensions obtenues en sortie.

**Figure 3.6** – Comparaison des tensions en sortie du Boost régulées par un correcteur harmonique LQ structuré, par implémentation selon le schéma 3.1 et par synthèse harmonique théorique.



(a) Les lois de commandes en rapport cyclique.

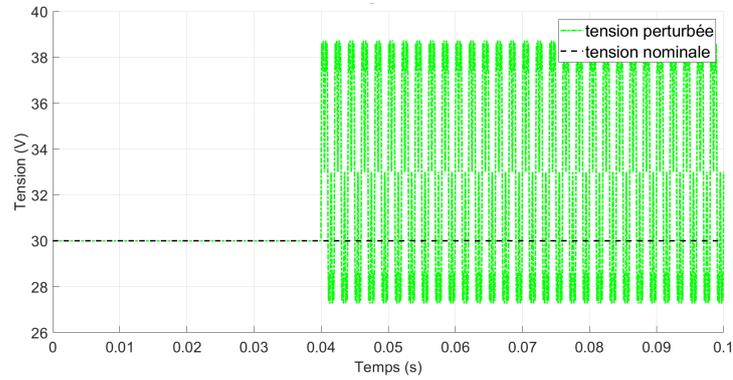


(b) Les tensions obtenues en sortie.

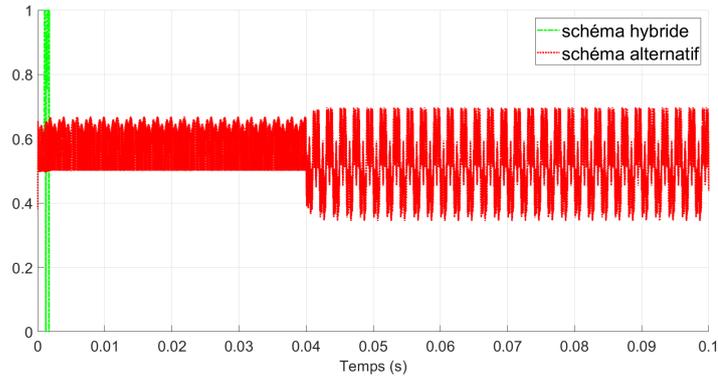
**Figure 3.7** – Comparaison des tensions en sortie du Boost régulées par un correcteur harmonique LQ non structuré, par implémentation selon le schéma 3.1 et par synthèse harmonique théorique.

### 3.5.4 Illustration de l'avantage du schéma de contrôle alternatif

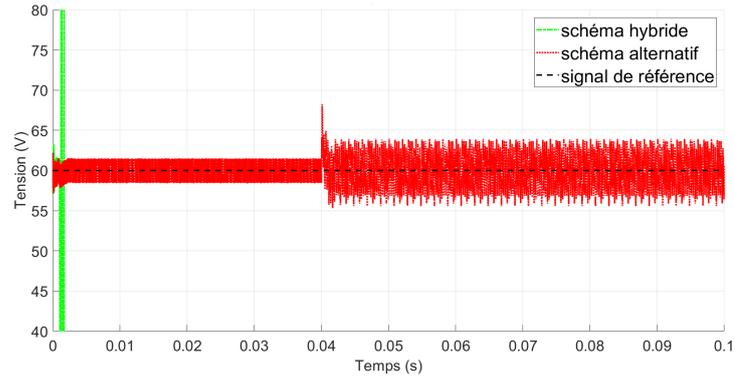
Dans l'exemple précédent, les résultats obtenus en suivant les deux schémas de contrôle donnent des résultats similaires. Cependant, le premier schéma révèle ses limites lorsque trop peu d'harmoniques sont pris en compte ou pour une perturbation harmonique basse fréquence (nécessitant une période de la base harmonique élevée). En effet, l'extraction des harmoniques en ligne, effectuée par décomposition de Fourier glissante tronquée, est dans ce cas limitée. Elle ne rend pas bien compte des variations des signaux réels et injecte des erreurs de type retard sur les informations en entrée du correcteur, dont l'effet peut être déstabilisateur. Le schéma de contrôle alternatif permet de se passer de ces transformations en ligne. Ces difficultés sont illustrées sur la figure 3.8 pour la même loi de commande et les mêmes gains, mais avec une perturbation à la fréquence  $f_{in} = 50Hz$ . La base harmonique choisie pour rejeter la perturbation est alors de fréquence  $f = f_{in}$ , avec toujours  $h = 8$ . Les erreurs injectées par les transformations de Fourier en ligne déstabilisent le convertisseur lors de la mise en œuvre du schéma de contrôle hybride.



(a) La tension en entrée, perturbée à partir de  $t = 40ms$  en moyenne et par des harmoniques 1,3 et 7 de  $f = 50Hz$ .



(b) Les lois de commande appliquées.



(c) Les tensions obtenues en sortie.

**Figure 3.8** – Régulation de la tension en sortie du Boost selon les schémas de contrôle 3.1 et 3.2 avec une loi de commande LQ et pour une perturbation périodique à  $f = 50Hz$ .

### 3.5.5 Commande embedded globalement asymptotiquement stable

Nous nous intéressons ici à la mise en œuvre de la loi de commande harmonique pour les systèmes commutés présentée en (3.33). Cette loi de commande ne nécessite pas de linéariser le modèle harmonique (3.40) et présente l'avantage de garantir une stabilité asymptotique globale pour les systèmes affines commutés. Des intégrateurs et oscillateurs sont ajoutés au contrôleur directement dans le domaine harmonique, ce qui revient à augmenter le modèle harmonique :

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_L(t) \\ V_{out}(t) \\ Z_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \frac{-1}{L}\mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ \frac{1}{C}\mathcal{U}_I & \frac{-1}{R_c C}\mathcal{U}_I - \mathcal{N} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{L}_k & jk\omega\mathcal{U}_I - \mathcal{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(t) - I_L^e \\ V_{out}(t) - V_{out}^e \\ Z_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_{out}(t)}{L} \\ \frac{I_L(t)}{L} \\ \mathcal{Z} \end{bmatrix} (D(t) - D^e) \quad (3.45)$$

Pour tester l'efficacité de la commande, la tension d'alimentation du convertisseur subit une perturbation non seulement de sa valeur moyenne mais également par une oscillation à la fréquence critique  $f = 5kHz$  et ses harmoniques 3 et 7 (à  $15kHz$  et  $35kHz$ ), comme illustré sur la figure 3.9a. Nous considérons alors un bouclage intégral sur la composante continue de la tension via le vecteur  $Z_0$ , sur son fondamental via le vecteur  $Z_1$  et sur l'harmonique 3 via le vecteur  $Z_3$ , selon la technique présentée dans la section 3.4.4. La commande harmonique appliquée est alors de la forme

$$D(t) = D^e - \mathcal{G}\tilde{\mathcal{B}}(X(t))^* [\mathcal{P}(X(t) - X^e) - \mathcal{M}^*(Z(t) - \mathcal{M}(X(t) - X^e))] \quad (3.46)$$

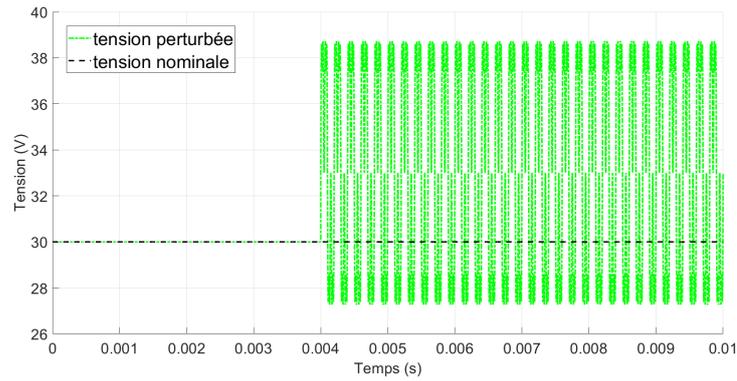
avec des matrices données par les propositions 3.8 et 3.9, de structure Toeplitz particulière, conformément au corollaire 3.1. Les lois de commande implémentées pour rejeter les oscillations sur la tension d'entrée sont illustrées sur la figure 3.5b. Les matrices de gains choisies sont

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= 10^3\mathcal{U}_I \\ \mathcal{Q} &= \text{diag}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) \end{aligned}$$

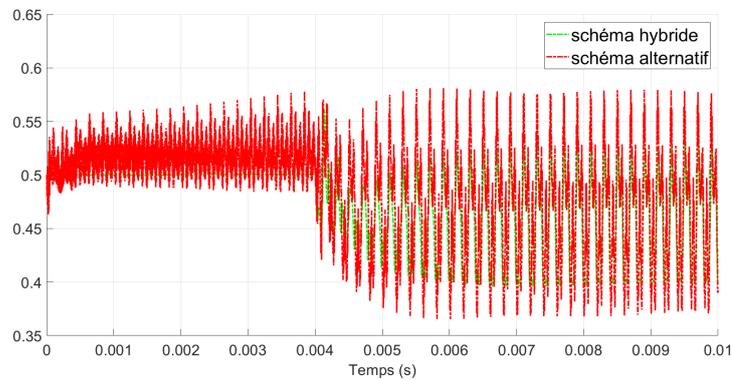
avec la matrice identité  $\mathcal{U}_I$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 &= 10^{-1}\mathcal{U}_I \\ \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_3 &= 10^7\mathcal{U}_I \end{aligned}$$

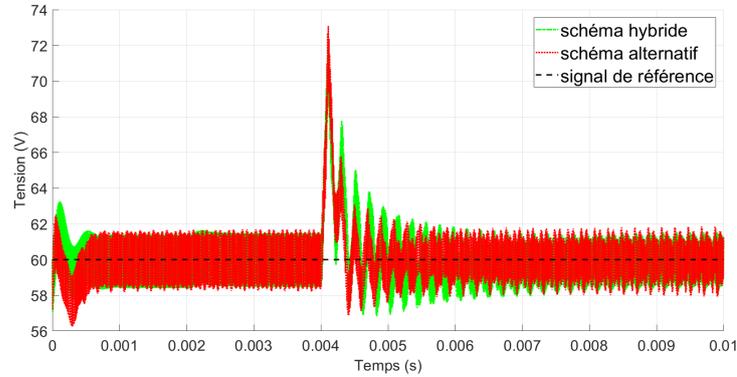
où  $\mathcal{Q}_1$  et  $\mathcal{Q}_2$  se rapportent aux gains sur le courant et la tension,  $\mathcal{L}_0$  à l'action intégrale sur la composante continue,  $\mathcal{L}_1$  celle sur le fondamental et  $\mathcal{L}_3$  celle sur l'harmonique 3. La figure 3.9c montre que le contrôleur développé permet de rejeter les oscillations sur la tension en sortie. La base harmonique est choisie de période  $T = T_{in}$  égale à la période des perturbations et le nombre d'harmoniques est limité à  $h = 8$ . Les actions intégrales sur la composante moyenne, le fondamental et l'harmonique 3 permettent de cibler et rejeter les perturbations harmoniques aux fréquences correspondantes. Ceci est mieux illustré sur la figure 3.9d dans laquelle les harmoniques de la tension en sortie sont tracés.



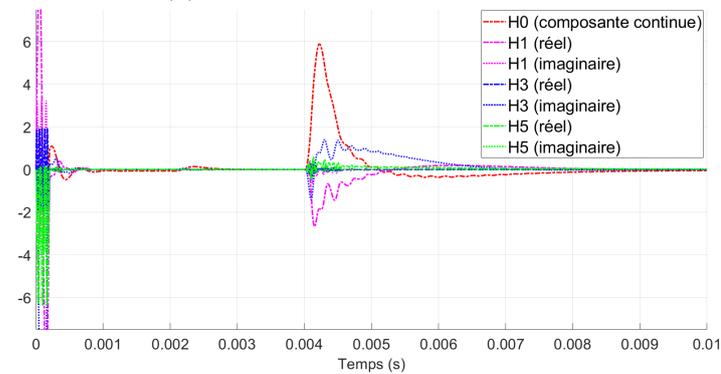
(a) Le signal de tension en entrée, perturbé à partir de  $t = 4ms$  en moyenne et par des harmoniques 1,3 et 7.



(b) Les lois de commande appliquées.



(c) Les tensions obtenues en sortie.



(d) Les erreurs sur les phaseurs des tensions obtenues en sortie.

**Figure 3.9** – Régulation de la tension de sortie du convertisseur Boost selon le schéma de contrôle 3.2 et avec une loi de commande embedded pour une perturbation périodique à la fréquence critique  $f = 5kHz$

### 3.6 Conclusion

Le domaine harmonique contribue largement à la maîtrise des phénomènes fréquentiels. Il permet d'analyser les dynamiques et couplages harmoniques au sein d'un système et l'influence d'un correcteur sur le comportement harmonique de la boucle fermée. Pour améliorer le contrôle-commande des systèmes, une idée présentée dans la littérature est d'implémenter le correcteur dans le domaine harmonique. En pratique, avec des transformations et modèles tronqués, le schéma de contrôle correspondant peut toutefois entraîner des erreurs, dont l'effet est déstabilisateur. Ce chapitre présente une solution alternative où le correcteur est également synthétisé dans le domaine harmonique mais implémenté dans le domaine temporel, par transformation. De plus, une contribution importante de ce chapitre est d'identifier des conditions nécessaires et suffisantes pour associer un signal, qui a bien l'effet escompté, à la commande harmonique générée et pour que ce signal soit applicable au système (réel si besoin). Typiquement, les phaseurs générés par le correcteur harmonique doivent vérifier la condition de coïncidence. Dans le cadre d'un contrôle par retour d'état harmonique, il en résulte une structure Toeplitz de la matrice de gains du correcteur. C'est un résultat important, dont il n'est pas fait mention dans la littérature, mais qui conditionne une synthèse dans le domaine harmonique. Et pour obtenir un bouclage intégrale sur certains phaseurs tout en respectant cette condition, une solution est d'augmenter le correcteur de variables associées à des intégrateurs sur les moyennes et à des oscillateurs aux fréquences associées. Ces oscillateurs permettent de filtrer activement le système et de rejeter les perturbations périodiques en éliminant les oscillations.

Le domaine harmonique fournit également un cadre pour analyser plus finement la stabilité de la boucle fermée. Cela a déjà été exploité dans la littérature, par exemple en étudiant les pôles et zéro de la fonction de transfert harmonique ou en développant un critère de Nyquist pour les systèmes LTP. Pour aller plus loin, nous avons développé des outils d'évaluation de la stabilité et stabilisation des systèmes via des équations de Lyapunov et de Riccati exprimées dans le domaine harmonique. Une contribution de ce chapitre est de montrer qu'il y a équivalence entre les solutions des équations différentielles périodiques de Lyapunov (resp. Riccati) et celles des équations algébriques harmoniques de Lyapunov (resp. Riccati) associées, avec des matrices de Toeplitz. Nous pouvons alors déterminer des fonctions de Lyapunov et construire des lois de commande optimales stabilisantes pour les modèles temporels à partir des modèles harmoniques associés. Les travaux entrepris ont donc abouti à la définition d'un cadre formel pour évaluer la stabilité et stabiliser les systèmes en considérant des informations sur les dynamiques et les couplages harmoniques. Cette analyse de stabilité ne concerne pas seulement le comportement moyen comme avec les analyses moyennes (SSA), mais également selon les fréquences multiples de la fréquence de la base harmonique.

Les résultats de ce chapitre ouvrent la voie à un contrôle-commande amélioré pour effectuer du filtrage actif ou du suivi de trajectoires périodiques et pour rejeter des perturbations périodiques en utilisant des types de lois de commande classiques. A titre d'illustration, nous avons montré des résultats de simulations intéressants pour réguler la tension en sortie d'un convertisseur Boost. Pour rejeter les harmoniques indésirables, le correcteur harmonique prend en compte les couplages entre les harmoniques d'entrée, de commande et de sortie. Il génère une loi de commande avec quelques harmoniques pour réduire voire éliminer les oscillations aux fréquences associées sur la tension en sortie. Cela peut être compris comme des injections de signaux harmoniques compensateurs. Ce qui est remarquable dans ce résultat est que les lois

de commande implémentées sont du même type que les commandes classiques, notamment de type LQ, mais permettent de contrôler directement les harmoniques de la tension de sortie et du courant dans l'inductance. Le correcteur harmonique possède en effet des paramètres de contrôle supplémentaires que nous pouvons ajuster pour éliminer certains harmoniques tout en régulant la composante continue (le comportement moyen) de la tension en sortie. Il paraît toutefois évident que la pertinence de cette méthode de contrôle-commande dépend de l'hypothèse selon laquelle nous connaissons la fréquence de la perturbation avec une précision satisfaisante. La sensibilité de l'approche à la connaissance de la fréquence de la perturbation est une question ouverte où de nombreux paramètres sont impliqués. Cela ferait un bon sujet pour des travaux futurs.



## Chapitre 4

# Application à la chaîne d'actionnement électrique

### Sommaire

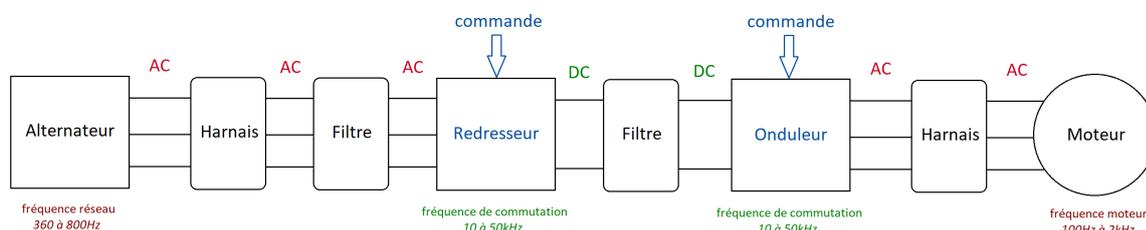
---

<b>4.1</b>	<b>Modélisation et analyse harmoniques de la chaîne d'actionnement .</b>	<b>101</b>
4.1.1	La partie réseau . . . . .	102
4.1.2	Liens entre modélisation harmonique et modélisation dq0 . . . . .	113
<b>4.2</b>	<b>Contrôle-commande harmonique de la chaîne d'actionnement . . .</b>	<b>114</b>
4.2.1	Cahier des charges et stratégie de contrôle-commande . . . . .	114
4.2.2	Point d'équilibre harmonique . . . . .	116
4.2.3	Commande optimale LQ par retour d'état . . . . .	117
4.2.4	Système perturbé et bouclages intégrales sur les phaseurs . . . . .	120
<b>4.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>129</b>

---

## Introduction

La chaîne d'actionnement électrique est un élément central de nombreux systèmes industriels complexes pour la transmission et la conversion de l'énergie électrique. Elle est abondamment utilisée dans le domaine des transports (automobile, aéronautique, ferroviaire...). En aéronautique, c'est une brique technologique essentielle dans les systèmes de régulation moteur et de freinage. Elle s'inscrit dans de nombreux projets, motivés par le courant écologique qui gagne depuis quelques années le monde industriel ainsi que par les débouchés économiques intéressants de l'énergie électrique. La chaîne d'actionnement électrique considérée dans ce chapitre est une chaîne d'actionnement d'un moteur d'avion de Safran. C'est un ensemble de systèmes énergétiques interconnectés dont la fonction est de transformer un signal triphasé issu d'un alternateur en un signal de commande moteur triphasé. Les blocs qui la composent ainsi que les plages fréquentielles usuellement associées sont présentés sur la figure 4.1.



**Figure 4.1** – Représentation par blocs d'une chaîne d'actionnement électrique type de Safran.

De gauche à droite, l'alternateur est entraîné par la turbine d'un réacteur de l'avion et génère des courants et tensions alternatifs. Ces signaux sont ensuite redressés par un premier étage de conversion de puissance de type AC-DC puis l'énergie électrique est transportée via le bus DC. Les signaux sont alors redécoupés par un second étage de conversion de puissance de type DC-AC pour finalement fournir des courants et tensions alternatifs pour piloter le moteur. Plusieurs plages de fréquences sont mises en jeu :

- La fréquence réseau dont le fondamental évolue entre 360 et 800Hz ;
- La fréquence électrique moteur qui évolue généralement entre 100Hz et quelques kHz ;
- Les fréquences de commutation des convertisseurs dont le fondamental se situe entre 10 et 50kHz.

Dans la mesure du possible, ces gammes de fréquences sont découplées pour éviter les interactions fréquentielles et faciliter la phase de conception des algorithmes de commande et conversions. Hélas, ce découplage n'est pas toujours possible. Par exemple, lorsque les fréquences électriques moteur se superposent aux fréquences électriques du réseau, ou encore lorsqu'une pollution harmonique intervient suite à un déséquilibre du réseau. Un phénomène de mise en résonance des filtres d'interconnexions peut également intervenir lorsque la régulation opérée du côté onduleur conduit à assimiler le bloc « moteur – onduleur » à une charge à puissance constante, ce qui se traduit, coté filtres, par une impédance négative avec un effet potentiellement déstabilisateur. Dès lors, l'analyse de stabilité de la chaîne d'actionnement et la conception de ses lois de contrôle ne peuvent se limiter à la valeur moyenne ou au fondamental des signaux mais doit prendre en compte les dynamiques propres à chaque harmonique ainsi que leurs interactions.

L'objectif de ce chapitre est de tirer profit des méthodes et outils développés au cours des travaux de thèse pour prédire, analyser et maîtriser les phénomènes fréquentiels qui ont lieu au

sein d'une chaîne d'actionnement électrique. Dans la partie 4.1, nous appliquons la méthodologie harmonique unifiée développée dans le chapitre 2 à la chaîne d'actionnement pour obtenir les modèles harmoniques de chacun de ses principaux éléments, puis par suite celui de la chaîne d'actionnement complète. Nous utilisons ces modèles harmoniques notamment pour tirer des informations sur les couplages dynamiques, les transferts harmoniques et la stabilité de la chaîne. Enfin, dans la partie 4.2, nous exploitons les outils d'analyse et de contrôle définis dans le chapitre 3 pour construire un contrôle-commande harmonique qui contribue à maîtriser les phénomènes fréquentiels au sein de la chaîne d'actionnement. Ainsi, nous obtenons des signaux de tension et courant quasi-sinusoïdaux côté réseau et nous pouvons limiter l'utilisation de filtres analogiques qui sont lourds, volumineux, coûteux, qui limitent les performances des systèmes et qui augmentent les risques d'instabilité par mise en résonance.

## 4.1 Modélisation et analyse harmoniques de la chaîne d'actionnement

Nous présentons dans cette partie les modèles harmoniques des principaux blocs de la chaîne d'actionnement électrique, présentés sur la figure 4.2. Le modèle harmonique de la chaîne complète est ensuite obtenu par interconnexion des modèles harmoniques de chacun des blocs. Physiquement, les signaux se transmettent de gauche à droite mais, dans ce schéma simplifié, nous adoptons le point de vue de l'automaticien. Pour l'automaticien, le fonctionnement du moteur est régi par des tensions alternatives (entrées du modèle moteur) qui sont régulées à l'aide des lois de contrôle (entrées de commande du modèle onduleur). Ces lois de contrôle adaptent les tensions fournies (sorties du modèle onduleur) pour piloter le moteur (profil de vitesse ou de couple - sorties du modèle moteur). En fonction de son comportement, le moteur tire alors les courants alternatifs nécessaires à son fonctionnement, c'est pourquoi l'automaticien considère ces courants comme des sorties pour le modèle moteur. C'est parce que le moteur est alimenté par des tensions contrôlées qu'il tire un profil de courants particulier. De même, l'onduleur tire un courant continu au niveau du bus DC, et ainsi de suite.

La chaîne d'actionnement électrique est généralement scindée en deux parties, au niveau du bus DC, pour son étude :

- La partie réseau contenant les éléments depuis l'alternateur jusqu'au redresseur
- La partie moteur contenant les éléments depuis l'onduleur jusqu'au moteur

L'alternateur et le moteur considérés sont des machines synchrones triphasées à aimants permanents, à f.e.m sinusoïdale et en couplage étoile. Elles sont constituées d'une partie tournante, le rotor, et d'une partie fixe, le stator. L'alternateur est une génératrice électrique qui joue le rôle d'un réseau électrique. Le moteur est l'actionneur, régulé par une loi de commande au niveau de l'onduleur. Le redresseur et l'onduleur sont de même structure mais d'utilisation inversée. Ce sont des convertisseurs triphasés à commutations hautes fréquences respectivement AC-DC et DC-AC.

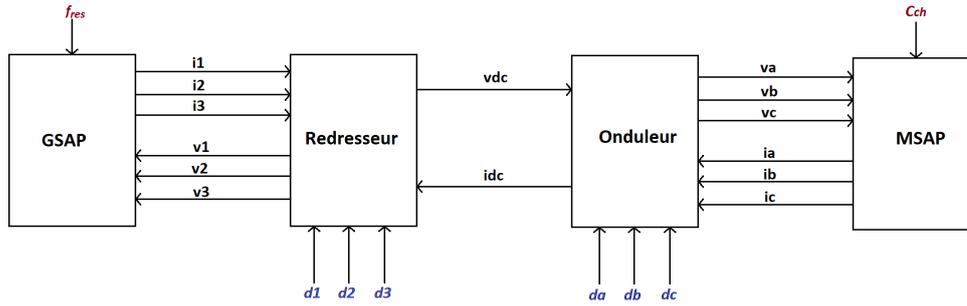


Figure 4.2 – Représentation simplifiée de la chaîne d'actionnement électrique - point de vue automatique.

### 4.1.1 La partie réseau

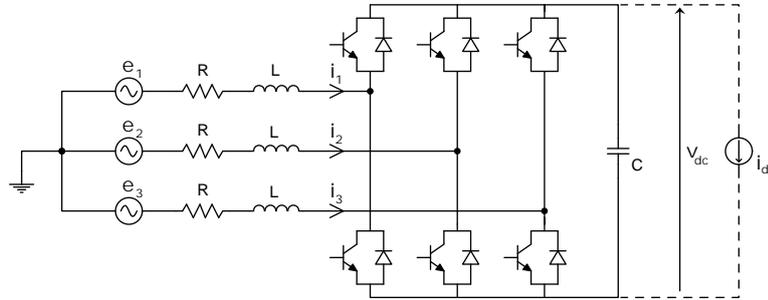


Figure 4.3 – Schéma électrique simplifié de la partie réseau.

La partie réseau est principalement composée d'un alternateur et d'un redresseur triphasés, associés selon le schéma de la figure 4.3. Le redresseur est alimenté par le réseau (alternateur) et ses éléments de commutations sont commandés afin de fournir efficacement un niveau de tension constant au bus DC à partir des signaux réseaux. Les équations électriques qui décrivent le fonctionnement d'une génératrice synchrone triphasée à aimant permanent dans le repère statique abc lié aux trois phases de son stator sont :

$$\frac{d}{dt}(L(\theta(t))i(t) - \phi(\theta(t))) = -Ri(t) - v(t) \quad (4.1)$$

avec

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} ; \quad v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} ; \quad \phi(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \phi_1(\theta(t)) \\ \phi_2(\theta(t)) \\ \phi_3(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

$$L(\theta(t)) = \begin{bmatrix} L_c + L_v \cos(2\theta(t)) & M + L_v \cos(2\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) & M + L_v \cos(2\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) \\ M + L_v \cos(2\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) & L_c + L_v \cos(2\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) & M + L_v \cos(2\theta(t)) \\ M + L_v \cos(2\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) & M + L_v \cos(2\theta(t)) & L_c + L_v \cos(2\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}$$

où  $i(t)$  contient les courants des phases réseau,  $v(t)$  contient les tensions des phases réseau aux points de connexion avec le redresseur,  $\phi(t)$  contient les flux engendrés sur chaque phase,  $L(\theta(t))$

contient les inductances des phases et les inductances mutuelles entre phases,  $R$  contient les résistances sur chaque phase et où  $\theta(t)$  est l'angle électrique de la partie tournante de la machine électrique (le rotor).  $\theta(t)$  est ainsi lié à la fréquence électrique du réseau :  $\theta(t) = \int_0^t \omega_{res}(p) dp$ .

Les équations électriques qui décrivent le fonctionnement du redresseur triphasé sont :

$$\begin{aligned} C\dot{v}_{dc}(t) &= s(t)^T i(t) - i_{dc}(t) \\ v(t) &= C_{33} s(t) \frac{v_{dc}(t)}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

avec

$$C_{33} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

où  $i_{dc}(t)$  est le courant tiré par la partie moteur via le bus DC,  $v_{dc}(t)$  est la tension du bus DC (aux bornes de la capacité) et où  $s(t)$  contient les fonctions de commutation des interrupteurs qui prennent pour valeurs  $\{-1, 1\}$ . Nous retrouvons alors le signal généré en pratique par la MLI pour les interrupteurs du haut par la relation  $d_h(t) = \frac{1+s(t)}{2}$  et pour les interrupteurs du bas par la relation  $d_b(t) = \frac{1-s(t)}{2}$ .

Dans le but d'obtenir des matrices harmoniques constantes, nous travaillons dans la suite dans la base harmonique de pulsation lentement variable  $\omega(t) = \omega_{res}(t)$  égale à celle du réseau. La méthodologie développée dans le chapitre 2 s'applique encore pour cette base harmonique et mène à des erreurs négligeables [Sanders *et al.*, 1991], voir annexe D. Les phaseurs sont alors définis à partir de l'angle électrique instantané  $\theta(t)$  par

$$\begin{aligned} U_k(t) &= \langle e^{jk(\cdot)}, u(t(\cdot)) \rangle_{L^2([\theta(t)-2\pi, \theta(t)])} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta(t)-2\pi}^{\theta(t)} u(p(\phi)) e^{-jk\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-T(t)}^t u(p) e^{-jk\theta(p)} \omega(p) dp \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  et où  $T(t)$  est défini comme la durée pendant laquelle l'angle  $\theta(t)$  varie d'exactly  $2\pi$  (un tour). Les signaux temporels sont reconstruits à l'aide de la formule

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\theta(t)} + \frac{T}{2} \dot{U}_0(t) \quad (4.4)$$

**Proposition 4.1.** *Le modèle harmonique d'une génératrice synchrone triphasée à aimants permanents est donné, dans la base harmonique de pulsation  $\omega_{res}(t)$ , sous la forme d'un espace d'état harmonique*

$$\mathcal{L}\dot{I}(t) = (-\mathcal{R} - \mathcal{N}\mathcal{L})I(t) - V(t) + \mathcal{N}\Phi \quad (4.5)$$

avec  $I = \mathcal{F}_T(i)$ ,  $V = \mathcal{F}_T(v)$ ,  $\Phi = \mathcal{F}_T(\phi)$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{T}_T(L)$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{T}_T(R)$  et la matrice de différentiation  $\mathcal{N}$ .

*Démonstration.* Le modèle temporel d'une génératrice synchrone triphasée à aimants permanents dans le repère statique abc lié aux trois phases de son stator est donné sous la forme d'un espace d'état (4.1). Posons

$$x(t) = L(\theta(t))i(t) - \phi(\theta(t))$$

Le vecteur associé dans la base harmonique de pulsation  $\omega_{res}(t)$  est

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathcal{F}_T(x)(t) \\ &= \mathcal{T}_T(L)\mathcal{F}_T(i)(t) - \mathcal{F}_T(\phi) \\ &= \mathcal{L}I(t) - \Phi \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$  et  $\Phi$  contiennent les harmoniques de  $L(\theta(t))$  et  $\phi(\theta(t))$ , constants dans la base considérée car  $L(\theta(t))$  et  $\phi(\theta(t))$  sont de pulsation  $\omega_{res}(t)$  égale à la pulsation de la base harmonique. D'une part, sa dérivée s'écrit

$$\dot{X}(t) = \mathcal{L}\dot{I}(t) - \dot{\Phi}$$

D'autre part, selon (4.1), la dérivée de  $x(t)$  est exprimée par

$$\dot{x}(t) = -Ri(t) - v(t)$$

et le vecteur harmonique associé à cette dérivée est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T(\dot{x})(t) &= -\mathcal{T}_T(R)\mathcal{F}_T(i)(t) - \mathcal{F}_T(v)(t) \\ &= -\mathcal{R}I(t) - V(t) \end{aligned}$$

Nous appliquons ensuite la relation de différentiation (2.18) et nous obtenons ainsi le modèle harmonique (4.5) associé à l'alternateur.  $\square$

**Proposition 4.2.** *Le modèle harmonique d'un redresseur triphasé est donné, dans la base harmonique de pulsation  $\omega_{res}(t)$ , sous la forme d'un espace d'état harmonique*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\dot{V}_{dc}(t) &= -\mathcal{N}\mathcal{C}V_{dc}(t) + \mathcal{S}(t)^*I(t) - I_{dc}(t) \\ V(t) &= \frac{1}{2}(\mathcal{C}_{33} \otimes \mathcal{S}(t))V_{dc}(t) \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec  $I = \mathcal{F}_T(i)$ ,  $V = \mathcal{F}_T(v)$ ,  $I_{dc} = \mathcal{F}_T(i_{dc})$ ,  $V_{dc} = \mathcal{F}_T(v_{dc})$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{T}_T(C)$ ,  $\mathcal{S} = \mathcal{T}_T(s)$  et la matrice de différentiation  $\mathcal{N}$ .

*Démonstration.* Le modèle temporel d'un redresseur triphasé est donné sous la forme d'un espace d'état (4.2). Posons

$$x(t) = \mathcal{C}v_{dc}(t)$$

Le vecteur associé dans la base harmonique de pulsation  $\omega_{res}(t)$  est

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathcal{F}_T(x)(t) \\ &= \mathcal{T}_T(C)\mathcal{F}_T(v_{dc})(t) \\ &= \mathcal{C}V_{dc}(t) \end{aligned}$$

D'une part, sa dérivée s'écrit

$$\dot{X}(t) = \mathcal{C}\dot{V}_{dc}(t)$$

D'autre part, selon (4.2), la dérivée de  $x(t)$  est exprimée par

$$\dot{x}(t) = s(t)^T i(t) - i_{dc}(t)$$

et le vecteur harmonique associé à cette dérivée est

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T(\dot{x})(t) &= -\mathcal{T}_T(S)^*(t)\mathcal{F}_T(i)(t) - \mathcal{F}_T(i_{dc})(t) \\ &= -\mathcal{S}^*I(t) - I_{dc}(t) \end{aligned}$$

Nous appliquons ensuite la relation de différentiation (2.18) et nous obtenons ainsi l'équation différentielle dans (4.6). De plus,

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathcal{F}_T(v)(t) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{T}_T(C_{33}s)(t) \mathcal{F}_T(v_{dc})(t) \\ &= \frac{1}{2} (C_{33} \otimes \mathcal{T}_T(s)(t)) V_{dc}(t) \end{aligned}$$

et nous obtenons ainsi l'équation différentielle dans (4.6), complétant le modèle harmonique associé au redresseur.  $\square$

**Proposition 4.3.** *Le modèle harmonique de la partie réseau, sous sa version simplifiée comprenant l'alternateur et le redresseur triphasé, est donné, dans la base harmonique de pulsation  $\omega_{res}(t)$ , sous la forme d'un espace d'état harmonique*

$$\mathcal{E} \dot{X}(t) = \tilde{A}(S(t))X(t) + \mathcal{B}_w W(t) \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} I(t) \\ V_{dc}(t) \end{bmatrix} ; & W(t) &= \begin{bmatrix} \Phi \\ I_{dc}(t) \end{bmatrix} \\ \mathcal{E} &= \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{C} \end{bmatrix} \\ \tilde{A}(S(t)) &= \begin{bmatrix} -\mathcal{R} - \mathcal{N}\mathcal{L} & -\frac{1}{2}C_{33} \otimes \mathcal{S}(t) \\ \mathcal{S}^*(t) & -\mathcal{N}\mathcal{C} \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}_w &= \begin{bmatrix} \mathcal{N} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & -\mathcal{U}_I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

où  $\mathcal{U}_I$  est la matrice identité et  $\mathcal{Z}$  la matrice nulle.

*Démonstration.* Nous obtenons ce modèle par interconnexion des modèles harmoniques de l'alternateur (4.5) et du redresseur (4.6).  $\square$

**Corollaire 4.1.** *Si la matrice des inductances est constante (hypothèse d'une machine à pôles lisses :  $L_v = 0$ ) :*

$$L = \begin{bmatrix} L_c & M & M \\ M & L_c & M \\ M & M & L_c \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

alors le modèle harmonique de la partie réseau, sous sa version simplifiée comprenant l'alternateur et le redresseur triphasé, est donné, dans la base harmonique de pulsation  $\omega_{res}(t)$ , sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\mathcal{E} \dot{X}(t) = \tilde{A}(S(t))X(t) + \mathcal{B}_w W(t) \quad (4.10)$$

avec

$$\begin{aligned}
 X(t) &= \begin{bmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \\ I_3(t) \\ V_{dc}(t) \end{bmatrix} ; & W(t) &= \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ I_{dc}(t) \end{bmatrix} \\
 \mathcal{E} &= \begin{bmatrix} L_c \mathcal{U}_I & M \mathcal{U}_I & M \mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ M \mathcal{U}_I & L_c \mathcal{U}_I & M \mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ M \mathcal{U}_I & M \mathcal{U}_I & L_c \mathcal{U}_I & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & C \mathcal{U}_I \end{bmatrix} \\
 \tilde{A}(S(t)) &= \begin{bmatrix} -R_s \mathcal{U}_I - L_c \mathcal{N} & -M \mathcal{U}_I & -M \mathcal{U}_I & -\frac{1}{6}(2\mathcal{S}_1(t) - \mathcal{S}_2(t) - \mathcal{S}_3(t)) \\ -M \mathcal{U}_I & -R_s \mathcal{U}_I - L_c \mathcal{N} & -M \mathcal{U}_I & -\frac{1}{6}(2\mathcal{S}_2(t) - \mathcal{S}_3(t) - \mathcal{S}_1(t)) \\ -M \mathcal{U}_I & -M \mathcal{U}_I & -R_s \mathcal{U}_I - L_c \mathcal{N} & -\frac{1}{6}(2\mathcal{S}_3(t) - \mathcal{S}_1(t) - \mathcal{S}_2(t)) \\ \mathcal{S}_1(t) & \mathcal{S}_2(t) & \mathcal{S}_3(t) & -C \mathcal{N} \end{bmatrix} \\
 \mathcal{B}_w &= \begin{bmatrix} \mathcal{N} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{N} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \mathcal{N} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & -\mathcal{U}_I \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

où  $\mathcal{U}_I$  est la matrice identité et  $\mathcal{Z}$  la matrice nulle.

**Corollaire 4.2.** La matrice des couplages dynamiques harmoniques en boucle ouverte de la partie réseau s'écrit :

$$\mathcal{A}_{dyn}(S(t)) = \mathcal{E}^{-1} A(S(t)) \tag{4.12}$$

et la fonction de transfert en boucle ouverte entre les perturbations harmoniques  $W(t)$  et l'état harmonique  $X(t)$  s'écrit dans le domaine HSS analogue à Laplace :

$$\mathcal{G}(s) = (s\mathcal{E} - \tilde{A}(S(s)))^{-1} \mathcal{B}_w \tag{4.13}$$

La figure 4.4 présente les résultats des simulations du modèle harmonique (4.7) en boucle ouverte pour une commande de rapports cycliques de pulsation synchrone avec le réseau. La base harmonique utilisée est de période  $T = T_{res}$  égale à celle du réseau (supposée constante) et le modèle est tronqué à l'ordre  $h = 8$ . Les signaux obtenus sont comparés à ceux provenant de l'interconnexion des modèles temporels instantanés (4.1) et (4.2). La charge considérée en sortie du redresseur est ici une charge résistive constante pour ne pas poser de problèmes de stabilité :  $i_{out}(t) = \frac{v_{dc}(t)}{R_c}$ . Les paramètres de l'alternateur, du redresseur, de la charge, de la base harmonique et les rapports cycliques appliqués sont présentés dans le tableau 4.1. Le modèle harmonique décrit parfaitement le comportement de la partie réseau, à l'exception des commutations hautes fréquences pour lesquelles il faudrait prendre en compte bien plus d'harmoniques.

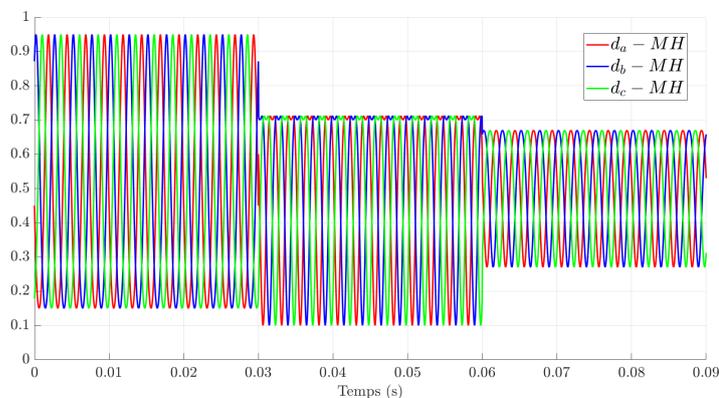
Le corollaire 4.2 donne des éléments d'analyse des couplages dynamiques harmoniques via l'écriture explicite de la matrice (4.12). La figure 4.5 présente les valeurs contenues dans la matrice (4.12), pour  $h = 8$  et pour une commande harmonique  $S(t)$  associée à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  sinusoïdaux équilibrés. Ces figures permettent d'analyser les couplages dynamiques harmoniques au sein de la partie réseau, habituellement négligés, pour les commandes appliquées. La figure 4.5b montre le couplage dynamique évident d'une variable avec elle-même :

chaque harmonique est couplé à lui-même et d'un coefficient dynamique d'autant plus important que la fréquence regardée est élevée (l'ordre de l'harmonique). D'autre part, la figure 4.5d montre que les harmoniques des courants de deux phases différentes ne sont pas dynamiquement couplés pour un réseau équilibré. Enfin, la figure 4.5c montre le couplage dynamique entre un courant sur une phase et la tension du bus DC. Elle présente une structure diagonale avec la diagonale principale nulle mais la sur-diagonale et la sous-diagonale pleines, ce qui montre qu'un harmonique d'ordre  $n$  d'une de ces variables est dynamiquement couplé aux harmoniques d'ordres  $n + 1$  et  $n - 1$  de la seconde. Ce résultat est attendu car ces variables sont couplées par la commande sinusoïdale. En effet, les couplages dynamiques sont largement dépendant du contrôle. La figure 4.6 présente les valeurs contenues dans la matrice (4.12), pour  $h = 8$  et pour des commandes harmoniques  $S(t)$  associées à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  périodiques avec des harmoniques 1,3,5 et 7. Alors, nous observons sur la figure 4.6b que les couplages dynamiques entre courant AC et tension DC s'étendent, même si de manière moindre, aux harmoniques  $n + 5, n - 5, n + 7$  et  $n - 7$ .

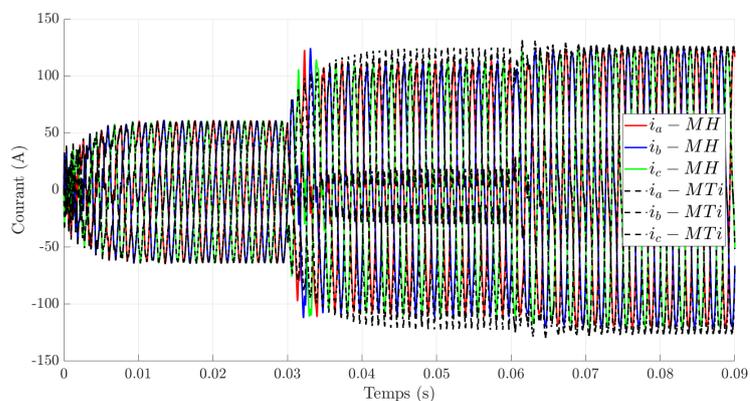
Le corollaire 4.2 donne également des éléments d'analyse des transferts harmoniques via l'écriture explicite de la fonction de transfert harmonique (4.13). La figure 4.7 présente les valeurs contenues dans la matrice (4.13), de nouveau pour une commande harmonique  $S(t)$  associée à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  sinusoïdaux équilibrés. La figure 4.8 présente ces valeurs pour des commandes harmoniques  $S(t)$  associées à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  périodiques avec des harmoniques 1,3,5 et 7. Nous fixons  $s = 0$  pour étudier les couplages avec des entrées exogènes périodiques à la période de la base harmonique (du réseau), mais il est possible de faire varier  $s = j\omega_s$  pour étudier les couplages avec des entrées exogènes non-périodiques ou de période différente (les inter-harmoniques). Remarquons qu'étudier les  $\omega_s \in [-\frac{\omega_{res}}{2}, \frac{\omega_{res}}{2}]$  est suffisant pour étudier toute la bande fréquentielle  $f_s \in [-hf_s, hf_s]$ . Ces figures permettent d'analyser les transferts harmoniques au sein de la partie réseau, habituellement étudiées qualitativement avec des diagrammes de Bode. Par exemple, nous observons qu'une perturbation de la f.e.m a un impact sur le contenu harmonique des courants réseau de la même phase (figure 4.8b) ou d'une autre phase (figure 4.8c). Ce couplage harmonique est conséquent sur les premiers ordres et laisse apparaître une structure diagonale : nous retrouvons bien qu'un harmonique d'ordre  $n$  de la f.e.m est couplée avec l'harmonique d'ordre  $n$  d'un courant, et de manière moindre avec ses harmoniques d'ordres  $n + 2$  et  $n - 2$ . Pour les transferts entre le courant DC et la tension DC, la même structure diagonale apparaît, mais cette fois ci avec des couplages amoindris pour des ordres  $n + 6$  et  $n - 6$ . En revanche, les couplages harmoniques des f.e.m avec la tension du bus DC (figure 4.8d) montrent que les harmoniques impairs (resp. pairs) des f.e.m sont couplés avec les harmoniques pairs (resp. impairs) de la tension du bus en fonction du contrôle (ici, d'ordres  $n + 1, n - 1, n + 5, n - 5, n + 7$  et  $n - 7$ ). Nous observons une structure équivalente et donc tirons les mêmes conclusions pour les couplages harmoniques entre le courant DC tiré par la charge et les courants réseau (figure 4.8f).

paramètres	valeurs
$n_{pp}$	2 paires de pôles
$R_s$	$37.1m\Omega$
$L_c$	$112.5\mu H$
$C$	$10\mu F$
$K_e$	0.07
$\phi_f$	0.035
$f_{res}$	$400Hz$
$f_{red}$	$50kHz$
$R_c$	$30\Omega$
$f$	$400Hz$
$h$	8
$\alpha_a(t)$	$0.5 - 0.4\sin(\theta(t)) - 0.05\cos(2\theta(t))$ pour $t \in [0, 30](ms)$ $0.5 - 0.3\sin(\theta(t)) + 0.06\cos(2\theta(t))$ pour $t \in [30, 60](ms)$ $0.5 - 0.2\sin(\theta(t)) + 0.03\cos(2\theta(t))$ pour $t \in [60, 90](ms)$

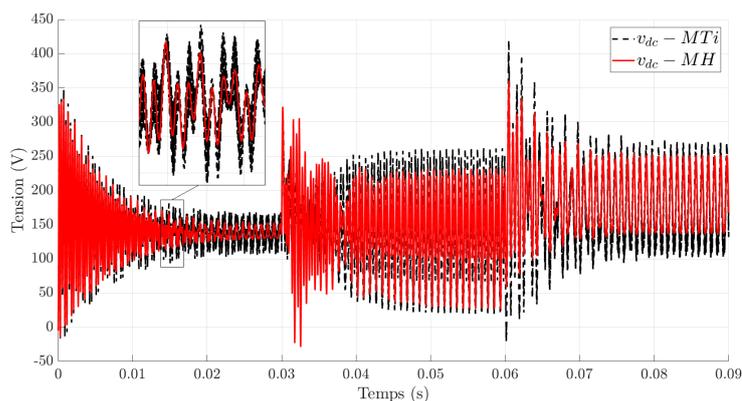
**Tableau 4.1** – Paramètres de l'alternateur et du redresseur triphasés, de la charge, de la base harmonique et rapports cycliques appliqués.



(a) Les signaux de commande en rapport cyclique.

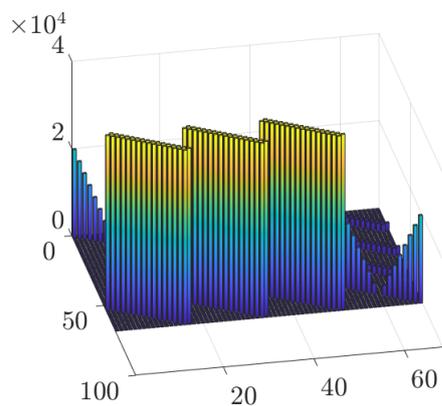


(b) Comparaison des courants dans chaque phase.

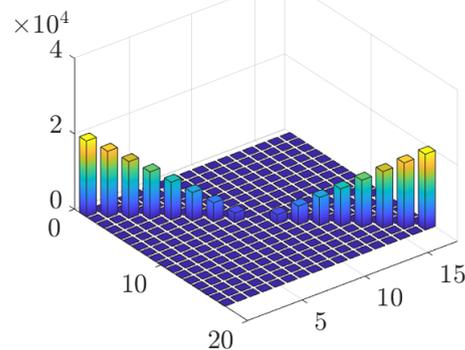


(c) Comparaison des tensions en sortie sur le bus DC.

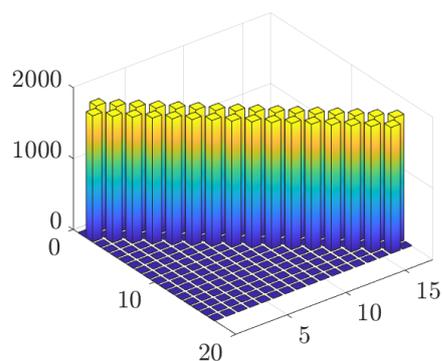
**Figure 4.4** – Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel instantané (MTi) et harmonique (MH) ( $f_{AC} = 400Hz$ ,  $h = 8$ ) de la partie réseau en boucle ouverte.



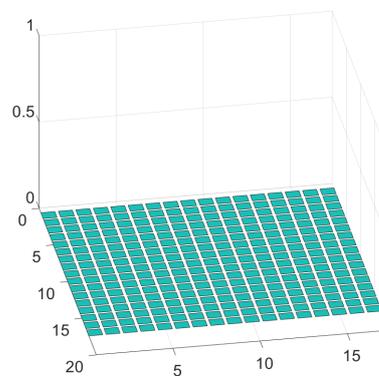
(a) Tous les couplages dynamiques harmoniques.



(b) Les couplages d'une variable avec elle-même.

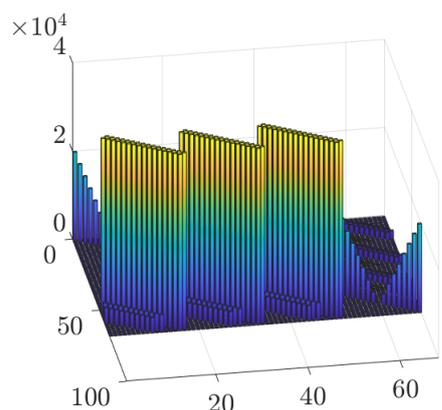


(c) Les couplages entre un courant sur une phase et la tension DC.

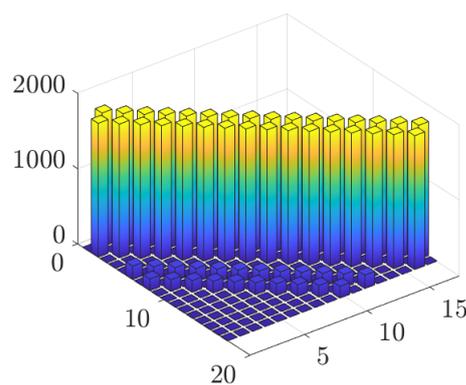


(d) Les couplages entre les courants de deux phases différentes.

**Figure 4.5** – Matrice des couplages dynamiques harmoniques de la partie réseau en boucle ouverte pour une commande harmonique  $S$  associée à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  sinusoïdaux équilibrés.

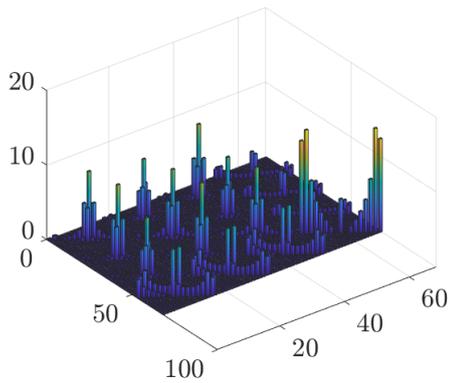


(a) Tous les couplages dynamiques harmoniques.

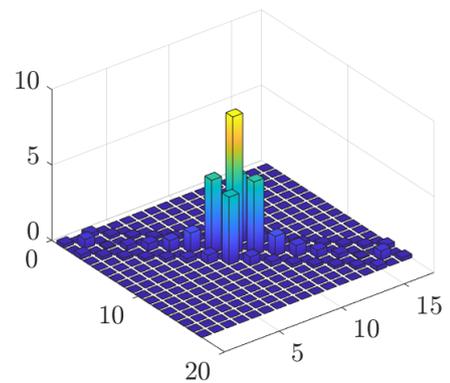


(b) Les couplages entre un courant sur une phase et la tension DC.

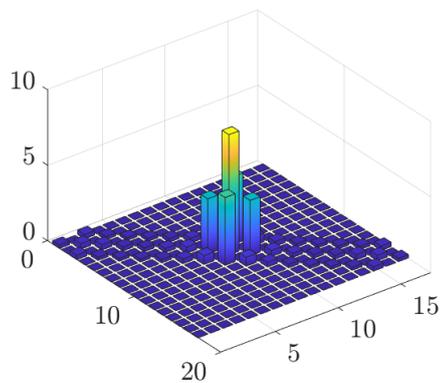
**Figure 4.6** – Matrice des couplages dynamiques harmoniques de la partie réseau en boucle ouverte pour une commande harmonique  $S$  associée à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  périodiques équilibrés avec des harmoniques 1,3,5,7.



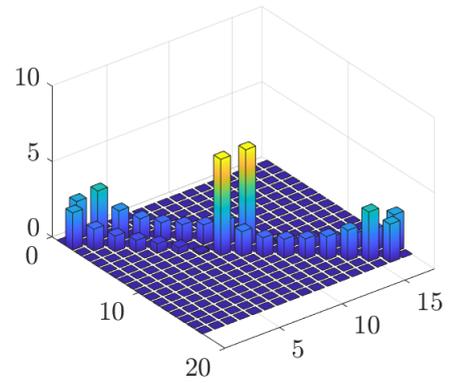
(a) Tous les transferts harmoniques.



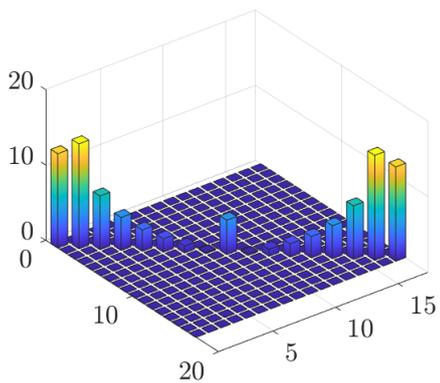
(b) Transferts entre une f.e.m et le courant de la même phase.



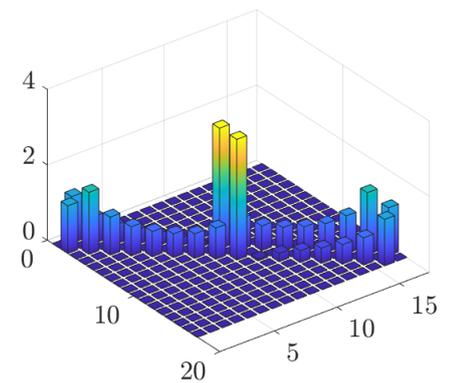
(c) Transferts entre une f.e.m et le courant d'une autre phase.



(d) Transferts entre une f.e.m et la tension du bus DC.

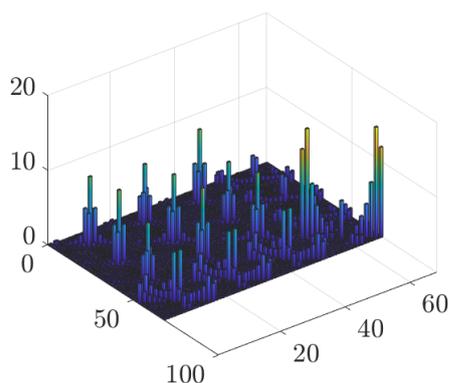


(e) Transferts entre le courant tiré par le bus DC et la tension du bus.

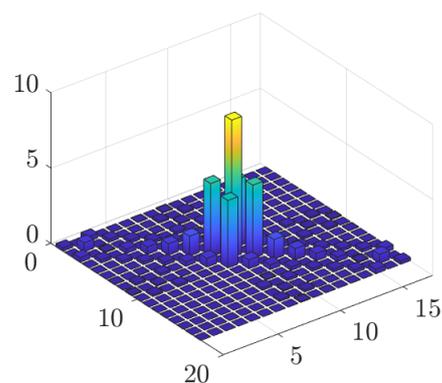


(f) Transferts entre le courant tiré par le bus DC et un courant sur une phase.

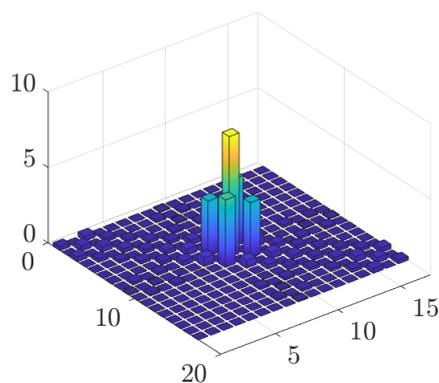
**Figure 4.7** – Matrice des fonctions de transferts entre les harmoniques des entrées exogènes et des variables d'état de la partie réseau pour des commandes harmoniques  $S(t)$  associées à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  sinusoïdaux équilibrés et pour  $s = 0$ .



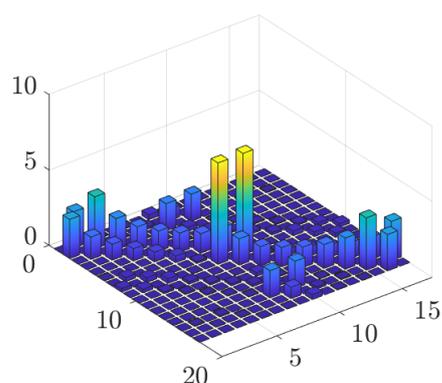
(a) Tous les transferts harmoniques.



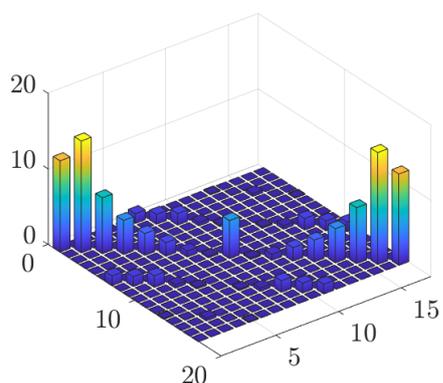
(b) Transferts entre une f.e.m et le courant de la même phase.



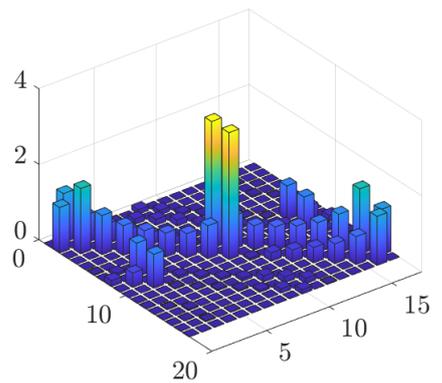
(c) Transferts entre une f.e.m et le courant d'une autre phase.



(d) Transferts entre une f.e.m et la tension du bus DC.



(e) Transferts entre le courant tiré par le bus DC et la tension du bus.



(f) Transferts entre le courant tiré par le bus DC et un courant sur une phase.

**Figure 4.8** – Matrice des fonctions de transferts entre les harmoniques des entrées exogènes et des variables d'état de la partie réseau pour des commandes harmoniques  $S(t)$  associées à des signaux  $s_a(t), s_b(t), s_c(t)$  périodiques équilibrés avec des harmoniques 1,3,5,7 et pour  $s = 0$ .

### 4.1.2 Liens entre modélisation harmonique et modélisation dq0

La méthodologie de modélisation harmonique proposée dans le chapitre 2 permet de décomposer le comportement d'un système selon un spectre fréquentiel. Cela se traduit par une opération de changement de base vers la base fonctionnelle des exponentielles complexes de Fourier. Cela peut être compris comme un ensemble d'opérations de rotation. En effet, les composantes dont le caractère temps-variant est dû aux éléments en rotation, telles que la matrice des inductances et les flux permanents engendrés par les aimants (voir (4.1)), sont alors décrites par des composantes constantes dans la base harmonique. Alors, le parallèle peut être effectué avec le repère dq0 qui définit un cadre référentiel lié au rotor d'une machine électromécanique [Baimel *et al.*, 2017].

Dans le référentiel dq0, avec une référence tournante définissant un angle  $\theta(t)$  par rapport à la phase  $a$ , les variables  $x_a(t)$ ,  $x_b(t)$ ,  $x_c(t)$  sont caractérisées par trois composantes :

- $x_d(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}(x_a(t)\cos(\theta(t)) + x_b(t)\cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) + x_c(t)\cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}))$  en phase avec la référence et qui correspond à la partie active
- $x_q(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}(x_a(t)\sin(\theta(t)) + x_b(t)\sin(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) + x_c(t)\sin(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}))$  en quadrature avec la référence et qui correspond à la partie réactive
- $x_0(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_a(t) + x_b(t) + x_c(t))$  qui est la composante homopolaire, nulle pour un réseau équilibré.

Nous notons

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}(x_d(t)\cos(\theta(t)) - x_q(t)\sin(\theta(t))) + \frac{1}{\sqrt{3}}x_0(t) \\ x_b(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}(x_d(t)\cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) - x_q(t)\sin(\theta(t) - \frac{2\pi}{3})) + \frac{1}{\sqrt{3}}x_0(t) \\ x_c(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}}(x_d(t)\cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) - x_q(t)\sin(\theta(t) + \frac{2\pi}{3})) + \frac{1}{\sqrt{3}}x_0(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

D'autre part, dans la base harmonique de période  $T(t)$  définie par l'angle  $\theta(t)$  et tronquée à l'ordre  $h = 1$ , les variables  $x_n(t)$ ,  $n \in \{a, b, c\}$ , sont caractérisées chacune par trois composantes :

- $X_{n,0}(t) = \int_{t-T(t)}^t x_n(p) \frac{\omega(p)}{2\pi} dp$  liée à la phase  $n$
- $X_{n,-1}(t) = \int_{t-T(t)}^t x_n(p) e^{j\theta(p)} \frac{\omega(p)}{2\pi} dp$  en rotation d'angle  $-\theta(t)$  par rapport à la phase  $n$
- $X_{n,1}(t) = \int_{t-T(t)}^t x_n(p) e^{-j\theta(p)} \frac{\omega(p)}{2\pi} dp$  en rotation d'angle  $\theta(t)$  par rapport à la phase  $n$ .

En décomposant les phaseurs en parties réelles et imaginaires, les variables sont autrement caractérisées chacune par :

- $X_{n,0}(t) = \int_{t-T(t)}^t x_n(p) \frac{\omega(p)}{2\pi} dp$  liée à la phase  $n$
- $\mathcal{R}_e(X_{n,1}(t)) = \int_{t-T(t)}^t x_n(p) \cos(\theta(p)) \frac{\omega(p)}{2\pi} dp$  en rotation d'angle  $\theta(t)$  par rapport à la phase  $n$
- $\mathcal{I}_m(X_{n,1}(t)) = -\int_{t-T(t)}^t x_n(p) \sin(\theta(p)) \frac{\omega(p)}{2\pi} dp$  en rotation d'angle  $\theta(t) + \frac{\pi}{2}$  par rapport à la phase  $n$ .

Pour des composantes équilibrées, nous avons  $X_{b,k}(t) = X_{a,k}(t)e^{-jk\frac{2\pi}{3}}$  et  $X_{c,k}(t) = X_{a,k}(t)e^{jk\frac{2\pi}{3}}$ , donc les variables équilibrées  $x_n(t)$ ,  $n \in \{a, b, c\}$  sont toutes caractérisées par les trois compo-

santes liées à une phase, par exemple la phase a :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_e(X_{b,1})(t) &= -\frac{1}{2}\mathcal{R}_e(X_{a,1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{I}_m(X_{a,1}) \\ \mathcal{R}_e(X_{c,1})(t) &= -\frac{1}{2}\mathcal{R}_e(X_{a,1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{I}_m(X_{a,1}) \\ \mathcal{I}_m(X_{b,1})(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{R}_e(X_{a,1}) - \frac{1}{2}\mathcal{I}_m(X_{a,1}) \\ \mathcal{I}_m(X_{c,1})(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{R}_e(X_{a,1}) - \frac{1}{2}\mathcal{I}_m(X_{a,1})\end{aligned}$$

Finalement, nous avons des variables  $x_d(t)$  et  $\mathcal{R}_e(X_{a,1}(t))$  en phase et des variables  $x_q(t)$  et  $\mathcal{I}_m(X_{a,1}(t))$  en phase. En particulier, pour des variables  $x_a(t)$ ,  $x_b(t)$ ,  $x_c(t)$  supposées sinusoïdales et équilibrées, nous avons  $x_0 = X_{a,0} = 0$  et nous écrivons

$$x_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}(x_d \cos(\theta(t)) - x_q \sin(\theta(t))) \quad (4.15a)$$

et

$$x_a(t) = 2\mathcal{R}_e(X_{a,1})\cos(\theta(t)) - 2\mathcal{I}_m(X_{a,1})\sin(\theta(t)) \quad (4.15b)$$

Autrement dit, pour des signaux triphasés sinusoïdaux équilibrés, nous avons la relation suivante entre repère dq0 et domaine harmonique d'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_e(X_{a,1}) &= \frac{x_d}{\sqrt{6}} \\ \mathcal{I}_m(X_{a,1}) &= \frac{x_q}{\sqrt{6}}\end{aligned} \quad (4.16)$$

## 4.2 Contrôle-commande harmonique de la chaîne d'actionnement

Nous utilisons dans cette partie les techniques harmoniques pour améliorer le contrôle de la chaîne d'actionnement d'un moteur d'avion, via le schéma de contrôle-commande alternatif présenté dans la partie 3.2. L'objectif est de concevoir un contrôleur agissant sur les harmoniques des signaux pour répondre à des objectifs temporels mais également fréquentiels (stabilité harmonique, THD, filtrage actif, rejet d'oscillations ...). Nous présentons ici des résultats sur la commande harmonique du redresseur triphasé, dans la partie réseau, en présence de perturbations et de pollution harmonique dues aux interactions avec la partie moteur. Nous validons la stratégie pour une loi de commande par retour d'état harmonique de type LQ, élaborée selon la structure décrite dans la partie 3.3 et avec les techniques de bouclage intégrale sur les phaseurs données dans cette même partie.

### 4.2.1 Cahier des charges et stratégie de contrôle-commande

Le cahier des charges de la chaîne d'actionnement complète comprend des spécifications temporelles sur les performances électriques ainsi que des spécifications fréquentielles sur le respect des normes sur les taux harmoniques :

#### Performances électriques temporelles :

1. Régulation de la vitesse moteur : consigne variable, temps de réponse  $< 1s$ .
2. Régulation de la tension du bus DC : 270V, précision à  $\pm 10\%$ , ondulations d'amplitude maximale 10V.

3. Correction du facteur de puissance : supérieur à 0.99.

**Performances harmoniques du réseau (respect de la norme DO-160) :**

3. THD (Taux de distorsion harmonique) :  $< 8\%$  quelque soit la puissance moteur.

4. TDH (Taux de distorsion par harmoniques) :

- harmoniques 3, 5, 7 sur les courants limités à 2% du fondamental
- harmonique 11 sur les courants limité à 10% du fondamental
- harmonique 13 sur les courants limité à 8% du fondamental
- ...

**Robustesse :** aux variations paramétriques et aux perturbations extérieures, jusqu'à  $\pm 1kW$  en  $1ms$  sur la puissance moteur.

Nous devons également tenir compte de la complexité des lois de commande développées afin de permettre leur implémentation.

L'objectif serait dans un premier temps de contrôler le comportement dynamique de la chaîne par des commandes classiques (PI cascade découplés pour la partie moteur et pour la partie réseau), puis une fois proche de l'équilibre, d'ajouter une commande harmonique venant réduire les harmoniques indésirables et rejeter les oscillations. Autour de l'équilibre, la fréquence moteur peut être supposée constante de valeur bien approximée par la référence de vitesse. La fréquence électrique du réseau est quant à elle supposée constante, ses variations étant lentes. Plusieurs choix s'offrent à nous pour définir la stratégie de commande de la chaîne complète, plus ou moins ambitieuses :

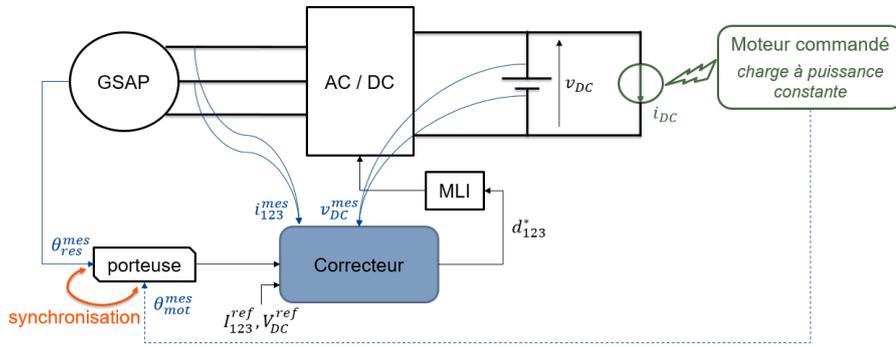
- Une commande temporelle ayant été optimisée hors ligne et incorporant des critères harmoniques sur les modèles harmoniques.
- Une commande harmonique agissant au niveau du redresseur pour compenser la génération d'harmoniques de la partie moteur.
- Une commande harmonique centralisée agissant au niveau des deux convertisseurs.

Nous avons décidé de tester l'implémentation d'une commande harmonique au niveau du redresseur pour filtrer activement les courants réseaux, dans le but d'obtenir des courants quasi-sinusoïdaux (respect de la norme DO-160). Le schéma présenté dans la section 3.2.1 n'est pas adapté au problème du fait des fréquences en jeu, l'objectif étant de compenser des harmoniques proches de la bande passante du système, notamment les harmoniques 3, 5, 7, 11, 13 sur les courants réseau. Alors, nous exploitons dans cette partie le schéma de contrôle-commande alternatif présenté dans la section 3.2.2, sous la forme adaptée présentée sur la figure 4.9.

La porteuse est constituée de signaux cosinus et sinus qui sont générés en fonction de l'angle électrique réseau, comme dans les techniques de contrôle du repère dq0. La différence est que des signaux cosinus et sinus correspondant aux multiples de cet angle électrique sont également générés. Il est envisageable également de considérer un diviseur commun aux fréquences électriques réseau et moteur si celles-ci varient peu et si ce multiple existe. L'avantage est que la base harmonique dans laquelle le correcteur est construit est alors commune aux partie réseau

et moteur et permet ainsi de contenir la plupart des fréquences électriques en jeu au sein de la chaîne d'actionnement.

La charge considérée en sortie du redresseur est ici la partie moteur, habituellement assimilée à une charge à puissance constante. Le moteur est piloté via un onduleur par une loi de contrôle classique composée de régulateurs PI en cascade. Un tel contrôle permet de garantir la régulation en vitesse du moteur mais ne compense pas les éventuelles oscillations et perturbations harmoniques, qui sont alors transmises à la partie réseau. L'objectif est de traiter ces perturbations au niveau du redresseur à l'aide d'un correcteur synthétisé dans le domaine harmonique qui compense les oscillations indésirables. Cela permet de limiter le filtrage analogique, coûteux, lourd, volumineux et qui dégrade les performances et augmente les risques de résonance.



**Figure 4.9** – Schéma de contrôle-commande harmonique, au niveau du redresseur, de la chaîne d'actionnement électrique.

#### 4.2.2 Point d'équilibre harmonique

Un point d'équilibre harmonique de la partie réseau est associé à un régime permanent périodique. Les signaux de commande en rapports cycliques, les signaux de tensions et de courants sont alors T-périodiques. Un point d'équilibre harmonique de la partie réseau s'exprime selon la formule

$$X^e = -\tilde{\mathcal{A}}(S^e)^{-1}\tilde{\mathcal{B}}W^{nom} \quad (4.17)$$

où les matrices sont données dans (4.7) et où  $W^{nom}$  contient les phaseurs caractérisant le régime nominal périodique des f.e.m du réseau et du courant continu tiré par la partie moteur. La relation permet d'obtenir facilement les phaseurs d'état en fonction des phaseurs de commande. Cependant, c'est l'opération inverse qui nous intéresse ici car nous souhaitons imposer la tension moyenne ainsi qu'un contenu harmonique faible sur les courants réseaux. En effet, les spécifications du cahier des charges peuvent être plus facilement exprimées dans le domaine harmonique pour le point d'équilibre, comme suit :

##### Objectifs primaires (performances électriques) :

1.  $v^{ref} = 270V$ ,  $\frac{|V_{dc0} - v^{ref}|}{v^{ref}} < 0.1$  et  $\sum_{k=1}^{\infty} |V_{dc_k}^e| \rightarrow 0$  pour réduire les oscillations.
2.  $\Re(I_{a1}) - \frac{1}{2}\Re(I_{b1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(I_{b1}) - \frac{1}{2}\Re(I_{c1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(I_{c1}) \rightarrow 0$  pour forcer les tensions et les fondamentaux des courants réseau à être en phase et ainsi obtenir un facteur de puissance

proche de 1.

**Objectifs secondaires (performances harmoniques du réseau) :**

3. THD :  $\sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^e|^2}{\mathfrak{S}(I_1)}} < 0.08.$
4. TDH :  $\frac{\sqrt{|I_{3,5,7}^e|^2}}{\mathfrak{S}(I_1)} < 0.02, \frac{\sqrt{|I_{11}^e|^2}}{\mathfrak{S}(I_1)} < 0.1, \frac{\sqrt{|I_{13}^e|^2}}{\mathfrak{S}(I_1)} < 0.08 \dots$

Remarquons que la régulation de la vitesse moteur n'est pas reportée ici car elle est assurée par la commande moteur. Remarquons également que le facteur de puissance (point 2) est considéré principalement impacté par les fondamentaux des courants, ce qui est d'autant plus vrai pour des courants dominés par leur fondamental (quasi-sinusoidaux). Remarquons enfin que les signaux devant être réels, le problème est finalement simplifié en imposant la relation  $X_{-k}^e = \bar{X}_k^e$ . Ainsi, nous pouvons écrire la fonction objectif

$$J^* = \min_{S_e} \left( w_0 \frac{\sum_{k=2}^{\infty} |I_k^e|^2}{\mathfrak{S}(I_1)^2} + w_1 \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |V_{dc_k}^e|^2}{v^{ref2}} \right) \quad (4.18)$$

où  $V^e$  et  $I^e$  sont donnés par (4.17) et avec comme contraintes

$$\begin{aligned} \frac{|V_{dc0} - v^{ref}|}{v^{ref}} &< 0.1 \\ \Re(I_{a_1}) - \frac{1}{2}\Re(I_{b_1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(I_{b_1}) - \frac{1}{2}\Re(I_{c_1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(I_{c_1}) &< 0.01 \end{aligned} \quad (4.19)$$

C'est un problème non linéaire du moindre carré avec des contraintes linéaires, qui peut être facilement résolu pour tout ensemble de poids  $w_0, w_1$  avec un solveur ad hoc.

### 4.2.3 Commande optimale LQ par retour d'état

Une fois l'équilibre harmonique déterminé, une loi de contrôle de type LQ donnée dans la proposition 3.5 peut être utilisée pour stabiliser asymptotiquement le système linéarisé en boucle fermée. En pratique, une troncature est nécessaire pour l'implémentation numérique. L'ordre optimal de troncature dépend de nombreux paramètres et est propre à l'application, mais nous considérons dans la suite une troncature à l'ordre  $h = 8$  comme satisfaisante. En effet, des ordres supérieurs ne modifient ni n'améliorent les résultats de simulation obtenus.

Nous linéarisons le modèle harmonique de la partie réseau (4.7) autour du point d'équilibre harmonique (4.17), déterminé par un ensemble de poids  $w_0, w_1 = 10^4, 10^4$ , dans la base harmonique de période  $T = T_{res}$ . Le modèle harmonique linéarisé s'écrit sous la forme d'un espace d'état harmonique

$$\mathcal{E}\dot{X}(t) = \tilde{\mathcal{A}}^e \bar{X}(t) + \tilde{\mathcal{B}}\bar{S}(t) \quad (4.20)$$

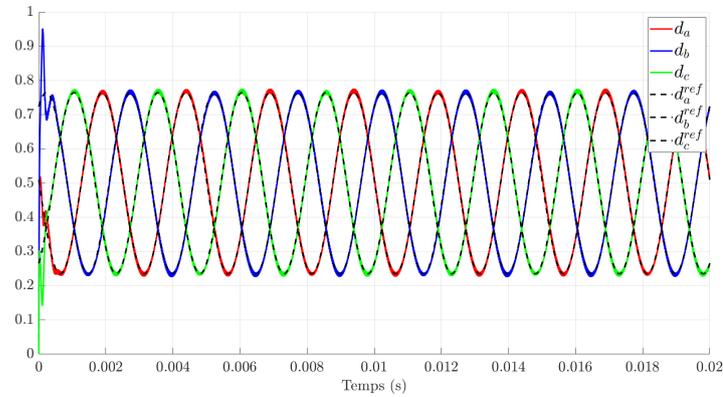
avec

$$\begin{aligned}
 \bar{X}(t) &= \begin{bmatrix} I(t) - I^e \\ V_{dc}(t) - V_{dc}^e \end{bmatrix} ; & \bar{S}(t) &= S(t) - S^e \\
 \mathcal{E} &= \begin{bmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{C} \end{bmatrix} \\
 \tilde{\mathcal{A}}^e &= \begin{bmatrix} -\mathcal{R} - \mathcal{N}\mathcal{L} & -\frac{1}{2}C_{33} \otimes S^e \\ S^{e*}(t) & -\mathcal{N}\mathcal{C} \end{bmatrix} \\
 \tilde{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}C_{33} \otimes V_{dc}^e \\ I^{e*} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

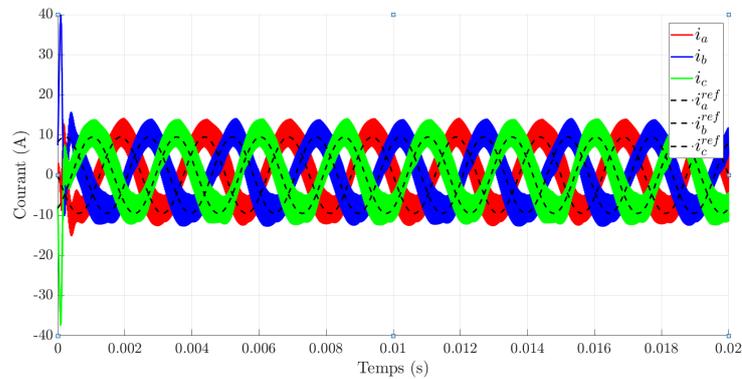
où  $\mathcal{N}$  est la matrice de différentiation et  $\mathcal{Z}$  la matrice nulle.

La matrice  $Q(t)$  impliquée dans l'équation de Lyapunov est choisie constante :  $Q = \text{diag}(Q_i, Q_v)$ , avec  $Q_i = \mathcal{U}_I$  pour la partie courant et  $Q_v = 0.1$  pour la partie tension. Elle permet de répartir l'effort de commande sur les variables d'états. Enfin, la matrice  $R(t)$  impliquée dans l'équation de Riccati est choisie constante :  $R = 10^4 \mathcal{U}_I$ . Elle permet de prévenir la saturation du contrôle et d'ajuster l'agressivité de la loi de commande.

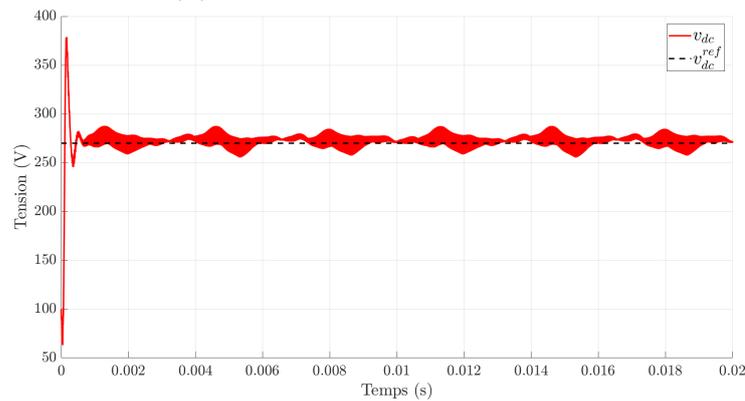
La figure 4.10 montre respectivement les courants  $i_a, i_b, i_c$  dans les phases réseau, la tension du bus DC  $v_{dc}$  et la commande en rapports cycliques  $d_a, d_b, d_c$  pour un changement de régime nominal et en l'absence de perturbations. Comme nous pouvons l'observer et comme prévu, toutes ces variables convergent vers l'équilibre  $x^e = \{i_a^e, i_b^e, i_c^e, v^e\}$  et  $s^e$  déterminé en résolvant le précédent problème d'optimisation non linéaire. Le facteur de puissance est maximisé et la tension de bus DC atteint l'objectif en valeur moyenne  $v^{ref} = 270V \pm 10\%$ . De plus, le contenu harmonique du courant et de la tension respecte le cahier des charges.



(a) Les lois de commande en rapports cycliques appliquées au niveau du redresseur.



(b) Les courants des phases réseau.



(c) La tension du bus DC.

**Figure 4.10** – Contrôle de la chaîne d'actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur pour un changement de régime nominal et sans perturbations extérieures.

#### 4.2.4 Système perturbé et bouclages intégrales sur les phaseurs

Dans cette section, nous considérons des perturbations dues aux interactions avec la partie moteur, c'est-à-dire sur le courant tiré au niveau du bus DC par la partie moteur. Le modèle harmonique de la partie réseau est alors donné, dans la base harmonique de pulsation  $\omega_{res}(t)$ , sous la forme d'un espace d'état harmonique 4.7 avec  $W(t) = \begin{bmatrix} \Phi(t) + \Phi_p(t) \\ I_{dc}^{nom} + I_{dc_p}(t) \end{bmatrix}$ . Les hautes fréquences dues aux commutations sont supposées interagir de manière négligeable avec la bande fréquentielle du réseau et du moteur, les résultats présentés dans cette section sont donc présentés sans ces commutations pour plus de lisibilité.

La figure 4.12 montre respectivement les courants  $i_a, i_b, i_c$  dans les phases réseau, la tension du bus DC  $v_{dc}$  et la commande en rapports cycliques  $d_a, d_b, d_c$  pour des perturbations harmoniques sur le couple de charge et les f.e.m moteur, présentées sur la figure 4.11, et en l'absence de bouclages intégrales. Ces perturbations sont à la fois d'origines structurelles (erreurs sur le flux permanent côté moteur dues à une dissymétrie des composants par exemple) et d'origines extérieures (couple de charge moteur). Comme nous pouvons l'observer, le cahier des charges n'est alors plus respecté. Afin de respecter le cahier des charges malgré ces perturbations harmoniques extérieures, des actions intégrales sont envisagées dans la conception du contrôle, sur les variables harmoniques. Cela est possible à condition que le système, complété par ces actions intégrales, reste stabilisable. Ainsi, tous les choix ne sont pas possibles et le nombre de d'actions intégrales est évidemment limitée.

Dans un premier temps, nous construisons une commande harmonique qui se focalise sur le respect des objectifs primaires du cahier des charges. Afin de préserver le premier objectif, une action intégrale sur la composante continue de la tension de sortie  $V_{dc0}$  est ajoutée au correcteur. Pour le second objectif, une autre action intégrale est introduite sur  $\Re(I_{a_1}) - \frac{1}{2}\Re(I_{b_1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(I_{b_1}) - \frac{1}{2}\Re(I_{c_1}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(I_{c_1})$ . Ce bouclage intégral force la déviation du signal  $i_a(t)\cos(\omega_{res}(t)) + i_b(t)\cos(\omega_{res}(t) - \frac{2\pi}{3}) + i_c(t)\cos(\omega_{res}(t) + \frac{2\pi}{3})$  à zéro, au même titre qu'un intégrateur sur le courant direct  $i_d$  dans le repère dq0. Ainsi, ces actions intégrales peuvent être prises en compte en considérant  $Z = (Z_1, Z_2)$  dont la dynamique est donnée par

$$\dot{Z}(t) = -\mathcal{N}Z + \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1\mathcal{C}_1 \\ \mathcal{L}_2\mathcal{C}_2 + \mathcal{L}_3\mathcal{C}_3 + \mathcal{L}_4\mathcal{C}_4 \end{bmatrix} \bar{X} \quad (4.22)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 &= \mathcal{U}_I \\
 \mathcal{L}_2 &= \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots \\ & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ \ddots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{T}_T(\cos(\omega_{res}(t))) \\
 \mathcal{L}_3 &= \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ & 0 & -\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \\ \cdots & -\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & -\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4} & \cdots \\ & 0 & -\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \\ \ddots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{T}_T(\cos(\omega_{res}(t) - \frac{2\pi}{3})) \\
 \mathcal{L}_4 &= \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \ddots \\ & 0 & -\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \\ \cdots & -\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & -\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4} & \cdots \\ & 0 & -\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \\ \ddots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{T}_T(\cos(\omega_{res}(t) + \frac{2\pi}{3}))
 \end{aligned}$$

et avec

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_1 &= \text{diag}(\mathcal{U}_I, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}) \\
 \mathcal{C}_2 &= \text{diag}(\mathcal{Z}, \mathcal{U}_I, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}) \\
 \mathcal{C}_3 &= \text{diag}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}_I, \mathcal{Z}) \\
 \mathcal{C}_4 &= \text{diag}(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}_I)
 \end{aligned}$$

Nous appliquons ensuite au modèle, augmenté par les variables de  $Z$ , une commande de type LQ harmonique donnée par

$$S(t) = S^e - \mathcal{R}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}^* \mathcal{P} \begin{bmatrix} \bar{X}(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Le retour d'état augmenté est alors donné par

$$s(t) = \text{sat} \left( s^e(t) - R^{-1}(t) \tilde{B}^T(t) P(t) \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \right) \quad (4.24)$$

avec  $\bar{x}(t) = x(t) - x^e(t)$  et où la fonction de saturation est donnée par

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 1 \\ -1 & \text{si } s < -1 \\ s & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.25)$$

La matrice  $Q(t)$  impliquée dans l'équation de Lyapunov est ainsi augmentée par rapport à celle utilisée dans la section précédente et toujours choisie constante :  $Q = \text{diag}(Q_i, Q_v, Q_{V_0}, Q_{I_{1r}})$ , avec  $Q_i = \mathcal{U}_I$ ,  $Q_v = 0.1$ ,  $Q_{V_0} = 10^3$  pour la tension moyenne et  $Q_{I_{1r}} = 3.10^4$  pour la correction

du facteur de puissance. Nous conservons  $R = 10^4 \mathcal{U}_I$ .

La figure 4.13 montre respectivement les courants  $i_a, i_b, i_c$  dans les phases réseau, la tension du bus DC  $v_{dc}$  et la commande en rapports cycliques  $d_a, d_b, d_c$  pour une commande harmonique au niveau du redresseur, avec ces deux bouclages intégrales. Comme nous pouvons l'observer, les objectifs primaires du cahier des charges sont respectés malgré les perturbations. En effet, la commande rejette les perturbations sur la tension moyenne et le facteur de puissance. En revanche, les courants réseau ne respectent pas les normes sur les taux harmoniques. Cela est plus clairement montré sur la figure 4.14 qui montre les erreurs sur les phaseurs du courant dans la phase a et de la tension du bus DC.

Dans un second temps, nous construisons une commande harmonique qui permet de respecter tous les objectifs du cahier des charges, y compris les objectifs secondaires. Afin de rejeter les perturbations harmoniques sur les courants réseau, des actions intégrales sur leurs phaseurs d'ordres impaires sont introduits. Pour conserver l'équilibre du réseau, une idée est de faire porter l'action intégrale sur les courants direct et quadratique. Ces bouclages intégrales prennent alors la forme d'oscillateurs d'ordres pairs qui forcent la déviation des phaseurs des signaux  $i_a(t)\cos(\omega_{res}(t)) + i_b(t)\cos(\omega_{res}(t) - \frac{2\pi}{3}) + i_c(t)\cos(\omega_{res}(t) + \frac{2\pi}{3})$  et  $-i_a(t)\sin(\omega_{res}(t)) - i_b(t)\sin(\omega_{res}(t) - \frac{2\pi}{3}) - i_c(t)\sin(\omega_{res}(t) + \frac{2\pi}{3})$  à zéro. Ainsi, des actions intégrales sur les phaseurs d'ordre 4 et 6 de ces signaux, soient sur les phaseurs d'ordre 3, 5, 7 des courants réseau, peuvent être pris en compte en considérant  $Z = (Z_3, Z_4, Z_5, Z_6)$  dont la dynamique est donnée par

$$\dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} j4\omega - \mathcal{N} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & j4\omega - \mathcal{N} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & j6\omega - \mathcal{N} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & \mathcal{Z} & j6\omega - \mathcal{N} \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} \mathcal{L}_2\mathcal{C}_2 + \mathcal{L}_3\mathcal{C}_3 + \mathcal{L}_4\mathcal{C}_4 \\ \mathcal{L}_5\mathcal{C}_2 + \mathcal{L}_6\mathcal{C}_3 + \mathcal{L}_7\mathcal{C}_4 \\ \mathcal{L}_2\mathcal{C}_2 + \mathcal{L}_3\mathcal{C}_3 + \mathcal{L}_4\mathcal{C}_4 \\ \mathcal{L}_5\mathcal{C}_2 + \mathcal{L}_6\mathcal{C}_3 + \mathcal{L}_7\mathcal{C}_4 \end{bmatrix} \bar{X} \quad (4.26)$$

avec

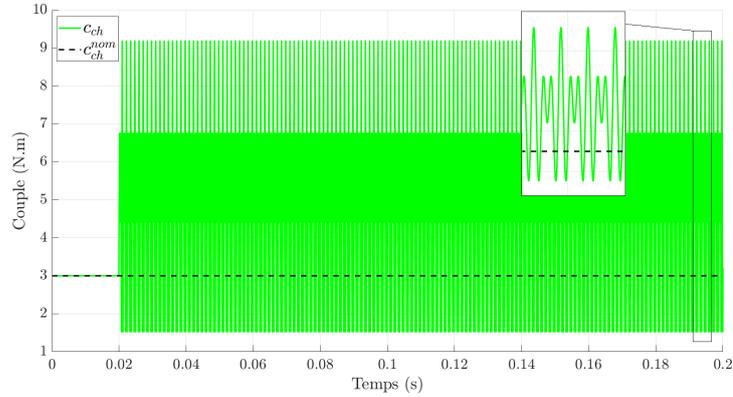
$$\mathcal{L}_5 = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \ddots \\ \cdots & 0 & -j\frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ & j\frac{1}{2} & 0 & -j\frac{1}{2} & \cdots \\ & 0 & j\frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{T}_T(-\sin(\omega_{res}(t)))$$

$$\mathcal{L}_6 = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \ddots \\ \cdots & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} + j\frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ & \frac{\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} + j\frac{1}{4} & \cdots \\ & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{T}_T(-\sin(\omega_{res}(t) - \frac{2\pi}{3}))$$

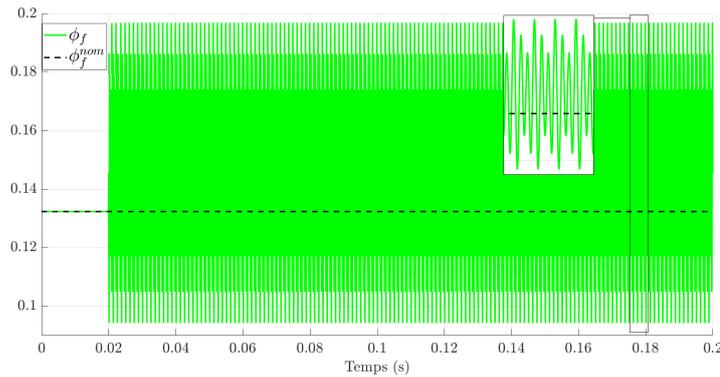
$$\mathcal{L}_7 = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \ddots \\ \cdots & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} + j\frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ & -\frac{\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} + j\frac{1}{4} & \cdots \\ & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} - j\frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{T}_T(-\sin(\omega_{res}(t) + \frac{2\pi}{3}))$$

La matrice  $Q(t)$  impliquée dans l'équation de Lyapunov est ainsi encore augmentée par rapport à la précédente et toujours choisie constante :  $Q = \text{diag}(Q_i, Q_v, Q_{V_0}, Q_{I_{1r}}, Q_{I_{\{3,5r\}}}, Q_{I_{\{3,5i\}}}, Q_{I_{\{5,7r\}}}, Q_{I_{\{5,7i\}}})$ , avec  $Q_i = \mathcal{U}_I$ ,  $Q_v = 0.1$ ,  $Q_{V_0} = 10^3$ ,  $Q_{I_{1r}} = 3.10^4$ ,  $Q_{I_{\{3,5r\}}} = 10^5$  pour l'oscillateur d'ordre 4 agissant sur les harmoniques 3 et 5 des courants,  $Q_{I_{\{3,5r\}}} = 10^5$  et  $Q_{I_{\{3,5i\}}} = 10^5$  pour les oscillateurs d'ordre 4 agissant sur les harmoniques 3 et 5 des courants,  $Q_{I_{\{5,7r\}}} = 10^5$  et  $Q_{I_{\{5,7i\}}} = 10^5$  pour les oscillateurs d'ordre 6 agissant sur les harmoniques 5 et 7 des courants. Nous conservons  $R = 10^4 \mathcal{U}_I$ .

La figure 4.15 montre respectivement les courants  $i_a, i_b, i_c$  dans les phases réseau, la tension du bus DC  $v_{dc}$  et la commande en rapports cycliques  $d_a, d_b, d_c$  pour une commande harmonique au niveau du redresseur, avec tous les bouclages intégrales introduits dans cette section. Comme nous pouvons l'observer, le cahier des charges est respecté malgré les perturbations. En effet, la commande rejette les perturbations harmoniques sur le couple de charge et les f.e.m moteur. Le respect des spécifications harmoniques est plus clairement montré sur la figure 4.16 qui montre les erreurs sur les phaseurs du courant dans la phase a et de la tension du bus DC.

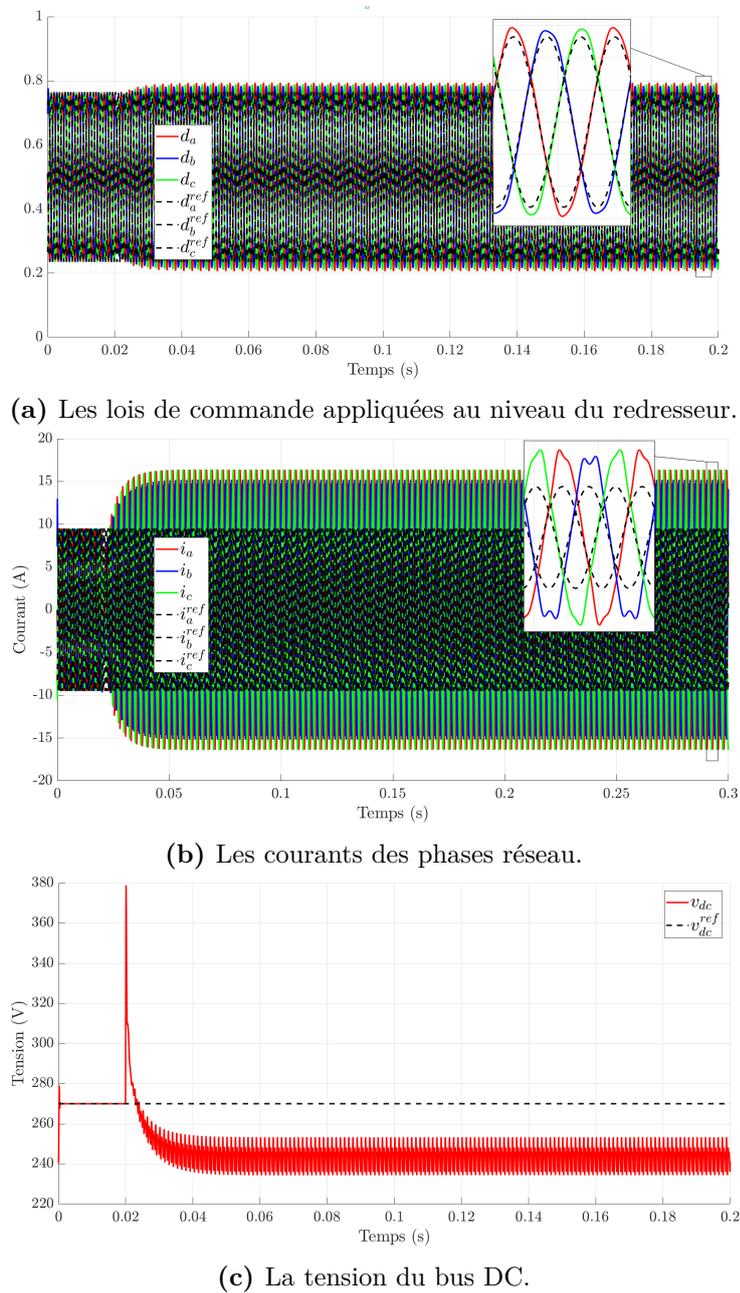


(a) Les perturbations sur le couple de charge moteur.

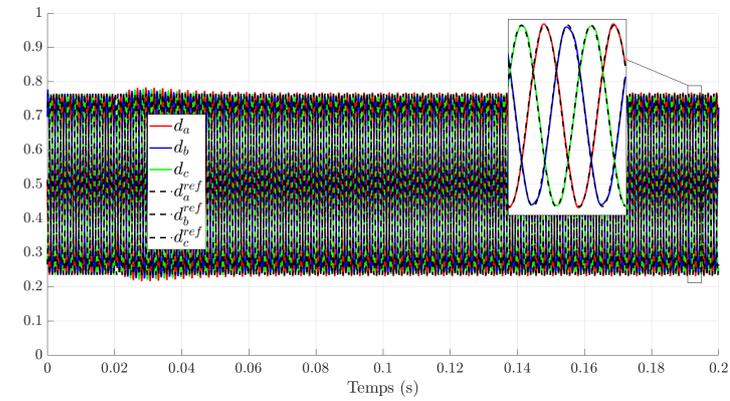


(b) Les perturbations sur le flux engendré par les aimants, donc sur les f.e.m moteur.

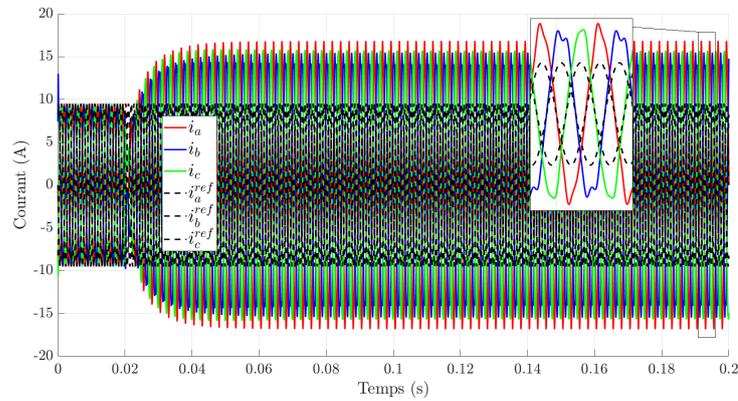
Figure 4.11 – Les perturbations au sein de la partie moteur.



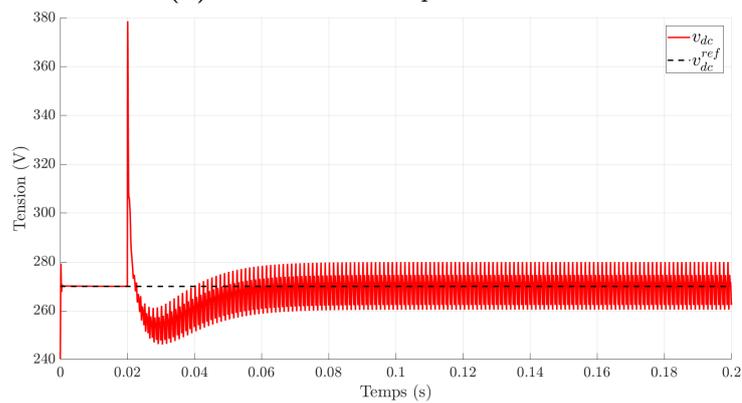
**Figure 4.12** – Contrôle de la chaîne d’actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur, sans bouclages intégrales et en présence de perturbations dues aux interactions avec la partie moteur.



(a) Les lois de commande appliquées au niveau du redresseur.

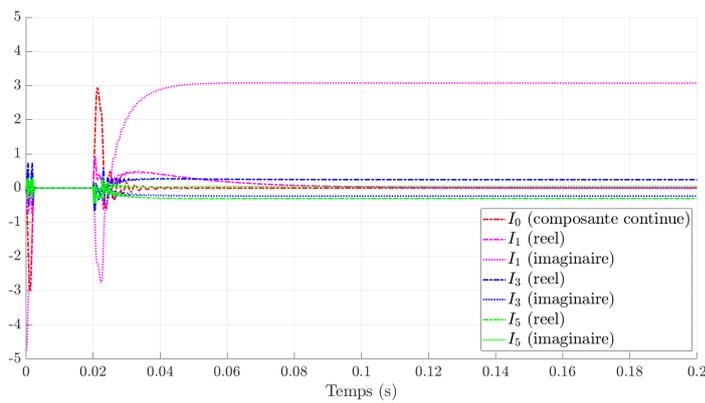


(b) Les courants des phases réseau.

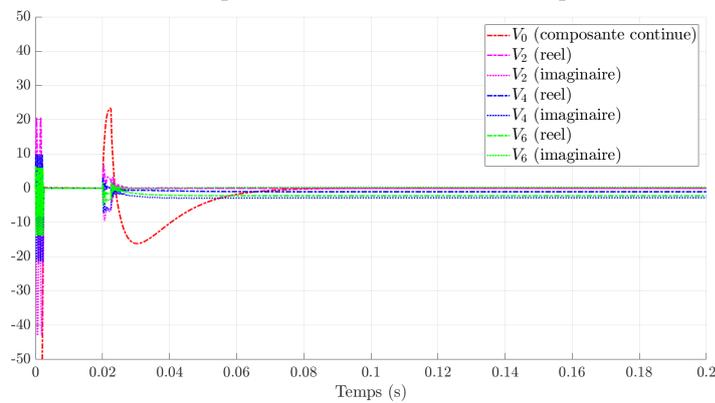


(c) La tension du bus DC.

**Figure 4.13** – Contrôle de la chaîne d'actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur, avec des bouclages intégraux (objectifs primaires seulement) et en présence de perturbations dues aux interactions avec la partie moteur.

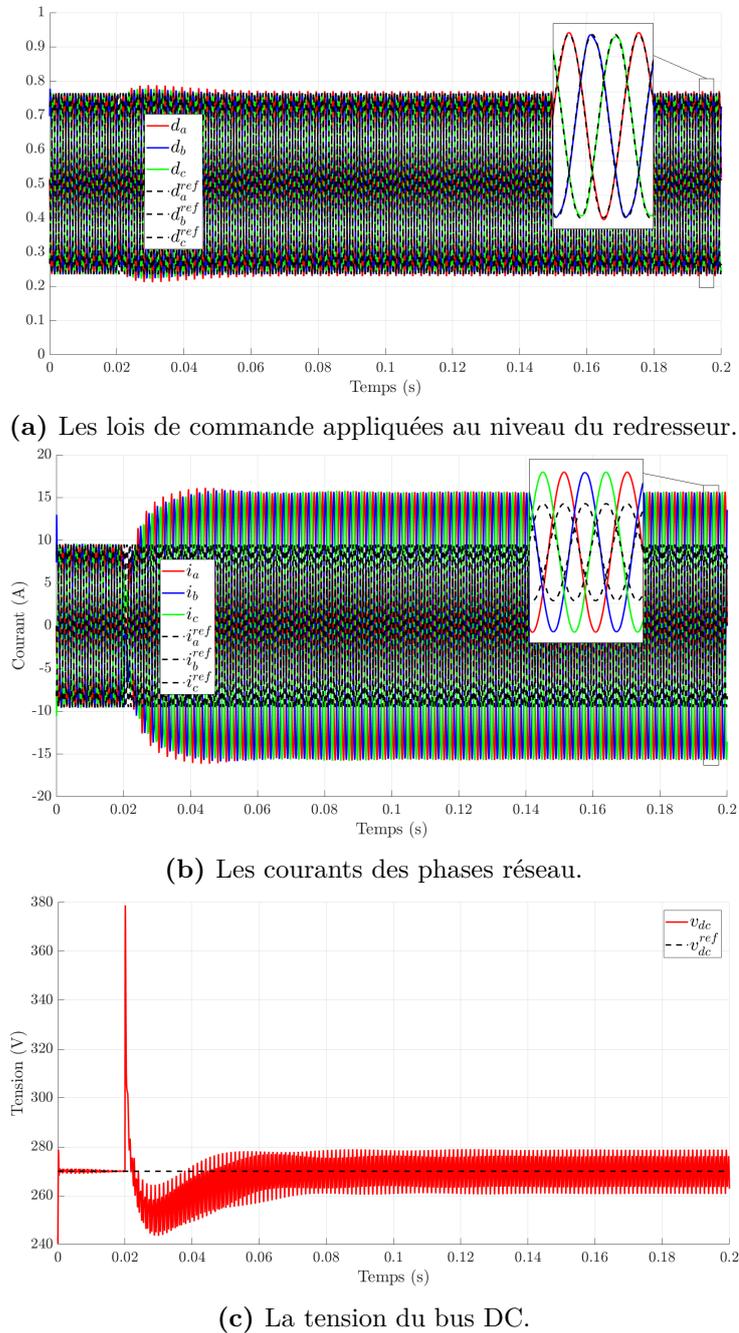


(a) Les erreurs sur les phaseurs du courant dans la phase a du réseau.

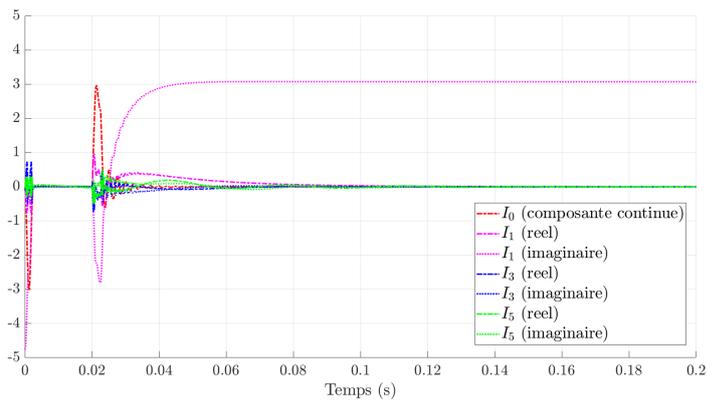


(b) Les erreurs sur les phaseurs de la tension de bus DC.

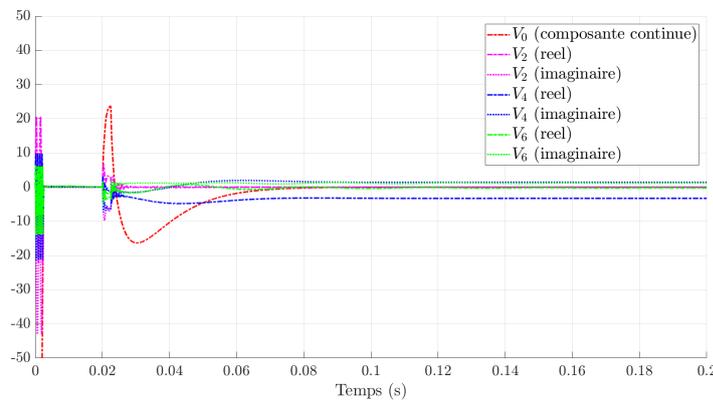
**Figure 4.14** – Erreurs sur les phaseurs avec des bouclages intégrales sur les phaseurs pour répondre aux objectifs primaires.



**Figure 4.15** – Contrôle de la chaîne d’actionnement avec une loi de commande harmonique LQ au niveau du redresseur, avec des bouclages intégraux sur les phaseurs (objectifs primaires et secondaires) et en présence de perturbations dues aux interactions avec la partie moteur.



(a) Les erreurs sur les phaseurs des courants des phases réseau.



(b) Les erreurs sur les phaseurs de la tension de bus DC.

**Figure 4.16** – Erreurs sur les phaseurs avec des bouclages intégrales sur les phaseurs pour répondre aux objectifs primaires et secondaires.

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous tirons profit des résultats théoriques obtenus au cours des travaux doctoraux et présentés dans ce mémoire pour prédire, analyser et maîtriser les phénomènes fréquentiels qui ont lieu au sein d'une chaîne d'actionnement électrique. Nous appliquons la méthodologie de modélisation harmonique unifiée et complète développée dans le chapitre 2 à la chaîne d'actionnement pour obtenir les modèles harmoniques de chacun de ses principaux éléments, puis par suite celui de la chaîne d'actionnement complète. Nous pouvons ainsi tirer des informations sur les couplages dynamiques, les transferts harmoniques et finalement sur la stabilité harmonique de la chaîne. Ces informations peuvent permettre aux électroniciens d'effectuer les bons choix de matériels et de paramètres, en fonction des bandes fréquentiels et des couplages induits. Notamment, cela peut permettre d'éviter des choix de composants (des filtres par exemple) qui entraîneront une pollution harmonique de la chaîne ou un risque accru d'instabilités.

En prenant le problème dans l'autre sens, pour des composants donnés, nous exploitons les outils d'analyse et de contrôle définis dans le chapitre 3 pour construire un contrôle-commande harmonique qui contribue à maîtriser les phénomènes fréquentiels au sein de la chaîne d'actionnement. La chaîne d'actionnement est composée d'éléments dynamiques interconnectés dont résultent des couplages harmoniques entre des processus de fréquences différentes. Nous considérons notamment des perturbations sur le couple de charge moteur et les f.e.m moteur, selon des fréquences qui sont couplées avec les courants réseaux. Ces perturbations entraînent, en l'absence de bouclages intégrales, un offset sur la tension du bus DC, une dégradation du facteur de puissance, ainsi que des oscillations sur les courants réseaux. Ainsi, et le cahier des charges n'est plus respecté. Par des techniques de contrôle classiques, il est possible d'ajouter une action intégrale sur la tension, ou encore sur le courant direct dans le repère dq0, et alors la tension du bus est bien régulée en moyenne et le facteur de puissance est corrigé, au moins partiellement. Cependant, il est nécessaire d'exploiter des techniques plus avancées de contrôle pour filtrer les courants réseau et rejeter les perturbations harmoniques.

Dans la stratégie développée dans ce chapitre, l'élaboration de la loi de commande se faisant dans le domaine harmonique, nous pouvons construire un correcteur augmenté de variables d'intégration variées : des intégrateurs sur les moyennes et des oscillateurs sur les fréquences sur lesquelles nous souhaitons agir. Finalement, une commande harmonique au niveau du redresseur triphasé permet de réguler la tension du bus DC, de corriger le facteur de puissance et de filtrer activement les courants réseau pour respecter les normes sur les taux harmoniques, malgré des perturbations sur le couple de charge moteur et les f.e.m moteur. De plus, la loi de commande utilisée est de type linéaire quadratique, donc classique et connue des automaticiens. Son principe est simple et elle est facile à régler, mais augmentée des techniques harmoniques elle permet de répondre à des objectifs complexes, temporels mais également harmoniques. C'est le fait que la synthèse du correcteur est effectuée dans le domaine harmonique qui permet d'ajouter simplement des actions intégrales non seulement sur les moyennes mais également sur des fréquences spécifiques pour filtrer activement les courants réseau et rejeter les perturbations périodiques et harmoniques. De cet manière, nous pouvons limiter l'utilisation de filtres analogiques qui sont lourds, volumineux, coûteux, qui limitent les performances des systèmes et qui augmentent les risques d'instabilité par mise en résonance.



# Conclusion générale

De nombreuses approches de modélisation par techniques harmoniques ont été présentées dans la littérature pour contribuer à la prédiction, l'analyse et la maîtrise des phénomènes fréquentiels. Il en résulte des modèles harmoniques qui décomposent le comportement des systèmes dans une base fonctionnelle de période  $T$  donnée, appelée base harmonique, selon un spectre fréquentiel qui contient explicitement la fréquence de la base  $f = \frac{1}{T}$  ainsi que ses multiples. Ils décrivent ainsi les dynamiques et les couplages harmoniques. Les techniques harmoniques ont été élaborées pour des objectifs différents, depuis l'analyse harmonique d'une bande fréquentielle spécifique et la synthèse d'un contrôle-commande agissant sur ces fréquences à l'analyse du comportement harmonique complet des systèmes, en passant par l'analyse harmonique de l'influence d'un contrôle-commande sur la boucle fermée. Leurs formulations sont spécifiquement adaptées à des applications distinctes, la plupart étant limitées à l'étude de systèmes périodiques. De plus, les espaces fonctionnels dans lesquels les outils sont développés et les hypothèses de travail ne sont pas formellement définis dans la littérature. Deux contributions importantes des travaux doctoraux présentés dans ce manuscrit sont de définir un cadre formel dans lequel les notions ont du sens et d'unifier dans ce cadre formel les approches de la littérature.

Au cours de l'étude bibliographique, nous avons clairement identifié des liens forts entre les méthodes harmoniques qui permettent de passer facilement d'un modèle harmonique à un autre. Finalement, nous avons prouvé que les outils et concepts mathématiques qui les constituent sont équivalents. Nous avons alors défini mathématiquement les espaces fonctionnels et les transformations et nous avons développé une méthodologie harmonique qui permet d'unifier les techniques de la littérature. Notamment, ces travaux ont permis de mettre en exergue une condition nécessaire et suffisante, que nous avons appelée condition de coïncidence, pour associer les variables temporelles et harmoniques. Autrement dit, cette condition est essentielle pour définir une bijection entre les espaces fonctionnels définis, qui sont appelés domaines temporel et harmonique, et ainsi effectuer des opérations dans le domaine harmonique qui ont du sens et sont réalisables. Nous avons également proposé deux formules équivalentes pour reconstruire un signal à partir des variables harmoniques associées. Elles diffèrent de la formule présentée dans la littérature qui se révèle être non causale et ne permet pas une reconstruction temps-réel des signaux non périodiques. L'originalité de nos travaux consiste également à considérer la période de la base harmonique comme un paramètre de réglage. Le modèle harmonique unifié, présenté dans la proposition 2.8, permet de décrire le comportement harmonique complet d'un large éventail de systèmes. En effet, la méthodologie proposée dans ce manuscrit permet de développer les modèles harmoniques analytiques associés à tout système généralement polynomial et de considérer un nombre arbitraire d'harmoniques, possiblement infini. Enfin, elle permet, par simple transformée de Laplace, de définir la fonction de transfert harmonique d'un système LTP.

Le domaine harmonique, en donnant accès à des informations sur les dynamiques et les couplages harmoniques habituellement négligées, ouvre la voie à un contrôle-commande amélioré. Une idée présentée dans la littérature est de synthétiser et d'implémenter le correcteur dans le domaine harmonique. Ce schéma de contrôle harmonique peut révéler ses limites en pratique, avec un nombre fini d'harmoniques, typiquement lorsque le cahier des charges requiert une période de la base harmonique plus grande que les constantes de temps du système. Alors les transformations de type Fourier en ligne engendrent des erreurs sur les informations en entrée du correcteur harmonique, dont l'effet est possiblement déstabilisateur. Une solution alternative pour se passer des transformations en ligne consiste à implémenter le correcteur temporel associé au correcteur harmonique. Une autre contribution de ces travaux est de montrer que ces schémas de contrôle impliquent d'imposer certaines conditions lors de la synthèse du correcteur harmonique, liées à la condition de coïncidence. Dans le cadre d'un contrôle par retour d'état harmonique, cela se traduit par une structure Toeplitz de la matrice de gains. Dans le cadre d'un bouclage intégral sur un phaseur, cela se traduit par une augmentation d'état du correcteur par un oscillateur. Une contribution supplémentaire de la thèse au contrôle-commande harmonique est de présenter des outils d'évaluation de la stabilité et de commande optimale stabilisante avec des équations de Lyapunov et de Riccati exprimées dans le domaine harmonique. Les solutions des équations algébriques harmoniques de Lyapunov (resp Riccati) de matrices Toeplitz sont équivalentes aux solutions des équations différentielles périodiques de Lyapunov (resp. Riccati) avec une solution temporelle  $T$ -périodique  $P(\cdot)$  et une solution harmonique  $\mathcal{P} = \mathcal{T}_T(P)$  constante. Cela permet notamment de développer des lois de commandes de type LQ ou embedded dans le domaine harmonique pour maîtriser les phénomènes fréquentiels.

Les travaux théoriques entrepris ont donc abouti à la définition formelle d'une méthodologie unifiée et complète de modélisation et contrôle-commande par techniques harmoniques, adaptée au contexte de l'actionnement électrique. Au cours de nos travaux, l'efficacité de la méthode et des outils développés pour modéliser, analyser et contrôler des systèmes a été démontrée, à titre d'illustration, pour les convertisseurs de puissance. Nous avons ensuite exploité ces nombreux résultats pour analyser et maîtriser le comportement harmonique d'une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion. Tout d'abord, la méthode a clairement contribué à modéliser le comportement harmonique de chacun des blocs de la chaîne avec, pour les convertisseurs de puissance, des modèles harmoniques plus précis qu'un modèle moyen et moins coûteux en temps et puissance de calcul qu'un modèle temporel instantané. Nous pouvons tirer de ces modèles de précieuses informations sur les dynamiques et couplages harmoniques au sein de la chaîne d'actionnement. De même, en exploitant la possibilité de choisir la période de la base harmonique, nous pouvons interconnecter ces modèles harmoniques dans une base harmonique commune et ainsi contribuer à décrire le comportement harmonique complet de la chaîne d'actionnement. Ensuite, les schémas de contrôle et outils de synthèse développés ont permis d'élaborer une stratégie de contrôle harmonique qui tire profit des informations sur les dynamiques et couplages harmoniques. Cette stratégie a clairement contribué à maîtriser les phénomènes fréquentiels au sein de la chaîne d'actionnement électrique. Finalement, une commande harmonique au niveau du redresseur triphasé permet de réguler la tension du bus DC et de corriger le facteur de puissance tout en filtrant activement les courants réseau pour respecter les normes sur les taux harmoniques et en rejetant les perturbations périodiques et harmoniques (les oscillations).

Les débouchés industriels des résultats présentés sont les suivants :

- Analyser les phénomènes fréquentiels au sein de l'interconnexion de systèmes dynamiques.

- Choisir astucieusement, si possible, les fréquences des régimes nominaux et des composants.
- Simplifier les lois de commande pour filtrer activement les systèmes et rejeter les perturbations périodiques.
- Maîtriser les phénomènes fréquentiels et garantir le respect des normes sur les taux harmoniques.
- Limiter l'utilisation d'éléments de filtrage analogique et leur surdimensionnement.

Réduire le filtrage analogique permet de limiter la dégradation des performances qu'il engendre et les risques d'instabilités par mise en résonance de ces filtres. De plus, cela entraîne une baisse du poids, du volume et des coûts associés. Ces problématiques sont essentielles, en particulier dans le contexte aéronautique.



# Perspectives

Les travaux entrepris ont permis d'aboutir à la définition formelle d'une méthodologie unifiée et complète de modélisation et contrôle-commande harmoniques, adaptée au contexte de l'actionnement électrique. Ils ouvrent de nombreuses perspectives dans ces domaines et leurs applications. Nous proposons dans la suite quelques voies de recherche à explorer pour compléter les résultats présentés dans ce manuscrit.

## Concernant la troncature

Les outils de modélisation, d'analyse et de synthèse présentés possèdent une certaine propriété de robustesse car les dynamiques et couplages harmoniques sont considérés, contrairement aux modèles moyens classiquement utilisés. Toutefois, nous avons montré qu'en pratique, en dimension finie, les choix de la période de la base harmonique tronquée et du nombre d'harmoniques considérés ont une influence sur la pertinence des transformations et des modèles harmoniques. Les transformations et les modèles approximent alors le comportement des signaux et des systèmes. En boucle ouverte, nous disposons d'une borne sur les erreurs, qui dépend de ces paramètres et des constantes de temps du système. Cependant, en boucle fermée, les erreurs engendrées par la troncature peuvent limiter les performances d'un contrôle-commande harmonique et remettre en cause la stabilité harmonique d'un système. Nous avons donné des pistes concrètes pour effectuer les bons choix de période et de nombre d'harmoniques pour limiter ces erreurs et nous avons proposé un schéma de contrôle qui permet de se passer des transformations en ligne. Toutefois, pour aller plus loin, il serait intéressant qu'un travail théorique soit entrepris pour préciser la robustesse de la méthode en dimension finie. Cela permettra de déterminer la robustesse d'un contrôle-commande harmonique en stabilité et performances vis à vis du choix couplé de la période de la base harmonique et de l'ordre de troncature.

## Concernant la connaissance des fréquences

Les modèles et les techniques de contrôle harmoniques théoriques ont été validés en simulation, avec un nombre d'harmoniques limité. Les fréquences des signaux ont été supposées connues exactement, que ce soit pour les variables d'état du système ou les perturbations. Cette hypothèse est essentielle pour sélectionner la base harmonique à la fréquence des signaux, qui contient explicitement les fréquences en jeu. De plus, pour des systèmes dynamiques interconnectés, nous avons donné la base harmonique commune dans les cas où qu'il est possible de trouver un diviseur commun à ces fréquences. Toutefois, si ces fréquences ne sont pas connues exactement, varient dans le temps, ou qu'un diviseur commun n'existe pas, alors la fréquence d'une base harmonique commune à ces systèmes doit être approximée. Ainsi, des travaux futurs permettront de préciser la robustesse de la méthode vis à vis de la connaissance des fréquences en jeu, notamment dans

les cas où une base harmonique commune est requise.

### **Concernant les critères de contrôle-commande**

Nous avons traduit dans le domaine harmonique la stabilité du système et le rejet des perturbations harmoniques. Nous avons montré que les techniques de contrôle-commande développées sont efficaces. Elles permettent de répondre à un cahier des charges exprimé dans le domaine harmonique. Pour poursuivre les travaux sur le contrôle harmonique linéaire, il serait intéressant d'étudier des critères classiques tels que le temps de réponse et les marges de robustesses sur les transferts harmoniques et d'identifier leur influence sur les performances et la robustesse de la boucle fermée obtenue.

### **Concernant l'échantillonnage des lois de commande**

Les techniques de contrôle-commande présentées ont été développées sans prendre en compte l'aspect numérique de l'implémentation des lois de commande. Il serait intéressant d'étudier la robustesse de la méthode à l'échantillonnage des lois de commande et de développer des résultats analogues à ceux présentés dans ce mémoire dans le cas discret. Ils permettraient de faciliter l'exploitation de ces travaux doctoraux pour des applications concrètes impliquant une implémentation numérique.

### **Concernant le contrôle-commande de la chaîne d'actionnement électrique**

Les outils développés ont été appliqués à l'analyse et au contrôle-commande d'une chaîne d'actionnement électrique complète. Des résultats de simulation prometteurs sont présentés dans ce manuscrit. Des résultats pratiques de contrôle-commande sur une chaîne d'actionnement, qui exploite le domaine harmonique pour maîtriser les phénomènes fréquentiels, permettraient de compléter les travaux. Cela terminera de prouver que le concept est intéressant et exploitable en l'état par l'industriel. Ce démonstrateur fournira également des données quantitatives sur la réduction des éléments de filtrage analogique rendue possible par l'approche harmonique et possiblement sur la robustesse de la méthodologie aux incertitudes sur les fréquences en jeu.

# Annexe A

## Rappels mathématiques

Cette annexe a pour objectif de présenter les types de modèles auxquels il est régulièrement fait référence dans le manuscrit ainsi que quelques notions mathématiques utiles pour la compréhension.

**Définition A.1. (Systèmes polynomiaux)** *Sous leur forme générale, les systèmes polynomiaux sont décrits par un modèle en espace d'état de la forme*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(t, x(t), u(t))\end{aligned}\tag{A.1}$$

avec  $x(t) \in \mathbb{C}^{n_x}$ ,  $y(t) \in \mathbb{C}^{n_y}$ ,  $u(t) \in \mathbb{C}^{n_u}$  et où  $f(t, x(t), u(t))$  et  $g(t, x(t), u(t))$  sont des fonctions polynomiales en les variables d'état  $x(t)$  et en les variables de commande  $u(t)$ , de coefficients temps-variant. Si le système est autonome, alors il n'y a pas de variables de commande et nous écrivons  $f(t, x(t))$  et  $g(t, x(t))$ . Les modèles polynomiaux permettent de décrire un large éventail de systèmes.

**Définition A.2. (Systèmes linéaires temps-variant (LTV), linéaires temps-périodique (LTP) et linéaires temps-invariant (LTI))** *Une sous-classe intéressante des systèmes polynomiaux est celle des systèmes linéaires généralement temps-variant. Sous leur forme générale, les systèmes linéaires temps-variant (LTV) sont décrits par un modèle en espace d'état de la forme*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\tag{A.2}$$

avec  $x(t) \in \mathbb{C}^{n_x}$ ,  $y(t) \in \mathbb{C}^{n_y}$ ,  $u(t) \in \mathbb{C}^{n_u}$  et où  $A(t), B(t), C(t), D(t)$  sont des fonctions matricielles de dimensions appropriées et indépendantes de l'état  $x(t)$  et de la commande  $u(t)$ . Si ces fonctions matricielles sont  $T$ -périodiques, le système est linéaire temps-périodique (LTP). Si elles sont constantes, le système est linéaire temps-invariant (LTI).

*Remarque.* Les systèmes LTI sont souvent appelés systèmes linéaires dans la littérature. Ils sont particulièrement intéressants car de nombreux outils ont été développés pour analyser et contrôler ce type de systèmes dans la *théorie des systèmes linéaires*. Ils sont aujourd'hui bien connus et leur efficacité a été maintes fois démontrée. Citons par exemple la notion de fonction de transfert, dont les pôles et zéros peuvent être étudiés pour évaluer la stabilité d'un système, et les diagrammes de Bode, de Black-Nichols et de Nyquist qui permettent d'évaluer les marges de stabilité pour caractériser la robustesse du système en stabilité. Citons encore les contrôles de type retour d'état, tels que la commande optimale linéaire quadratique (LQ), qui permettent de stabiliser un système LTI.

**Définition A.3. (Systèmes affines commutés)** Une autre sous-classe importante des systèmes polynomiaux, particulièrement en électronique de puissance, est celle des systèmes affines (commutés). Les systèmes affines sont décrits par un modèle en espace d'état de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(u(t))x(t) + B(u(t))w(t) \\ y(t) &= C(u(t))x(t) + D(u(t))w(t)\end{aligned}\tag{A.3}$$

avec  $x(t) \in \mathbb{C}^{n_x}$ ,  $y(t) \in \mathbb{C}^{n_y}$ ,  $u(t) \in \mathbb{C}^{n_u}$ , où  $w(t) \in \mathbb{C}^{n_w}$  est une entrée exogène et où  $A(u(t)), B(u(t)), C(u(t)), D(u(t))$  sont des matrices de dimensions appropriées, affines en la commande  $u(t)$  et indépendantes de l'état  $x(t)$ . Pour certains systèmes hybrides, notamment les convertisseurs de puissance, le signal de commande  $u(t)$  est discontinu et prend un nombre fini de valeurs (typiquement 0 et 1). Nous parlons alors de système affine commuté.

**Définition A.4. (Espaces  $L^p$ )** Un espace  $L^p$  est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant  $p$  est intégrable au sens de Lebesgue, où  $p$  est un nombre réel strictement positif. Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction de l'espace  $L^\infty$  des fonctions essentiellement bornées. Les espaces  $L^p$  sont appelés espaces de Lebesgue.

**Théorème A.1. (Relation entre espaces  $L^p$ )** Soient  $I$  un intervalle borné et  $p, q \in \mathbb{R}^+$  tels que  $1 \leq p < q \leq +\infty$ , alors  $L^q(I, \mathbb{R}^n) \subset L^p(I, \mathbb{R}^n)$ . De plus, il existe un réel  $\gamma$  ne dépendant que de  $p$  et  $q$  tel que, pour tout  $u \in L^q(I, \mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^q}$$

**Théorème A.2. (Inégalité de Hölder)** Soient  $p, q, r \in [1, +\infty]$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ . Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ . Alors,  $fg \in L^r$  et

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

En particulier, si  $p = \infty$ ,  $q = 2$  et  $r = 2$

$$\|fg\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2}$$

et si  $p = \infty$ ,  $q = \infty$  et  $r = \infty$

$$\|fg\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^\infty}$$

**Théorème A.3. (Théorème de stabilité de Lyapunov)** Soit une fonction matricielle  $A(\cdot)$  à valeurs réelles ( $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ ). Le système linéaire temps-variant

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)\tag{A.4}$$

est globalement asymptotiquement stable si et seulement si il existe un unique  $P(\cdot)$  symétrique défini positif ( $P(t) = P^T(t) > 0$ ) solution de l'équation différentielle de Lyapunov

$$\dot{P}(t) + A(t)^T P(t) + P(t)A(t) + Q(t) = 0\tag{A.5}$$

pour tout  $Q(\cdot)$  symétrique défini positif. Et alors la fonction  $v(x)(t) = x^T(t)P(t)x(t)$  est une fonction de Lyapunov qui peut être utilisée pour vérifier la stabilité.

*Remarque.* Résoudre (A.5) peut se révéler difficile dans le cas général. Le cas des systèmes LTI est de nouveau plus évident car (A.5) devient alors une équation algébrique de Lyapunov

$$A^T P + P A + Q = 0$$

## Annexe B

# Modèles des convertisseurs de puissance

**Convertisseur Boost.** Le comportement global d'un convertisseur Boost est décrit par le modèle affine commuté

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{d(t)-1}{L} \\ \frac{1-d(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

où  $d(t)$  est le signal MLI qui commande l'ouverture et la fermeture des interrupteurs à partir de la valeur du rapport cyclique et de la période de commutation. C'est un signal discontinu qui prend pour valeurs 1 ou 0. Le modèle en espace d'état moyenné (SSA) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{\alpha(t)-1}{L} \\ \frac{1-\alpha(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

où  $\alpha(t)$  est directement la valeur du rapport cyclique de commande. Le modèle harmonique associé à un convertisseur Boost est donné en (2.29).

**Convertisseur Buck.** Le comportement global d'un convertisseur Buck est décrit par le modèle affine commuté

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d(t)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Le modèle en espace d'état moyenné (SSA) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha(t)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Le modèle harmonique associé à un convertisseur Buck est donné en (2.30).

**Convertisseur Buck-Boost.** Le comportement global d'un convertisseur Buck-Boost est décrit par le modèle affine commuté

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{d(t)-1}{L} \\ \frac{1-d(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d(t)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Le modèle en espace d'état moyenné (SSA) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{\alpha(t)-1}{L} \\ \frac{1-\alpha(t)}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha(t)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

Le modèle harmonique associé à un convertisseur Buck-Boost est donné en (2.31).

**Convertisseur Flyback.** Le comportement global d'un convertisseur Flyback est décrit par le modèle affine commuté

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{n(d(t)-1)}{L} \\ \frac{n(1-d(t))}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d(t)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Le modèle en espace d'état moyenné (SSA) s'écrit

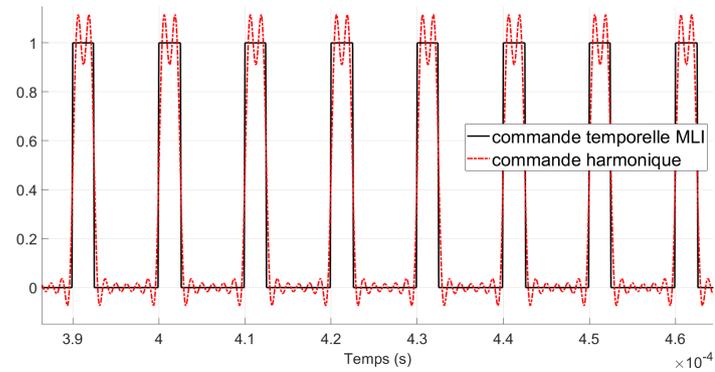
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{n(\alpha(t)-1)}{L} \\ \frac{n(1-\alpha(t))}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_{out}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha(t)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{in}(t) \\ i_{out}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Le modèle harmonique associé à un convertisseur Flyback est donné en (2.32).

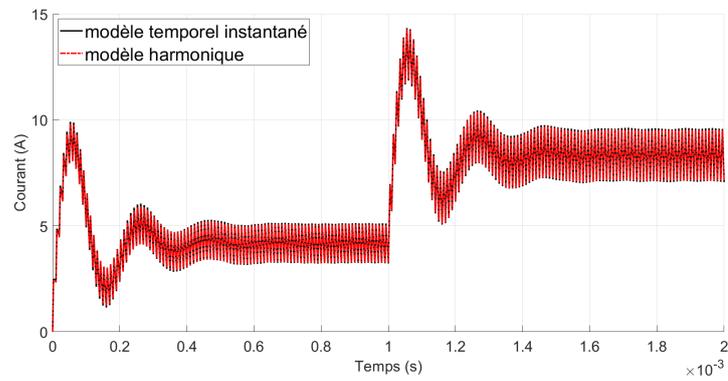
Les figures B.1, B.2 et B.3 présentent les résultats des simulations des modèles harmoniques (2.30), (2.31) et (2.32) en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier. La base harmonique utilisée est de période  $T = T_{sw}$  égale à la période de commutation des convertisseurs et les modèles sont tronqués à l'ordre  $h = 8$ . Les signaux obtenus sont comparés à ceux provenant des modèles temporels instantanés (B.3), (B.5) et (B.7). La charge considérée en sortie est une charge résistive constante  $R_c = 5\Omega$ . La tension  $v_{in}(t)$  en entrée est supposée à un régime nominal constant  $v_{in} = 100V$ . Les paramètres des convertisseurs, de la charge, de la base harmonique et les valeurs des rapports cycliques générés sont présentés dans le tableau B.1.

noms	valeurs	paramètres
<b>R</b>	$1m\Omega$	résistance
<b>L</b>	$0.1mH$	inductance
<b>C</b>	$10\mu H$	capacité
<b>n</b>	1.5	rapport du nombre de spires
<b>f<sub>sw</sub></b>	$100kHz$	fréquence de commutation
<b>R<sub>c</sub></b>	$6\Omega$	charge résistive constante
<b>f</b>	$100kHz$	fréquence de la base harmonique
<b>h</b>	8	ordre de troncature
<b><math>\alpha(t)</math></b>	$\begin{cases} 0.25 & \text{pour } t \in [0, 1](ms) \\ 0.5 & \text{pour } t \in [1, 2](ms) \end{cases}$	rapports cycliques appliqués

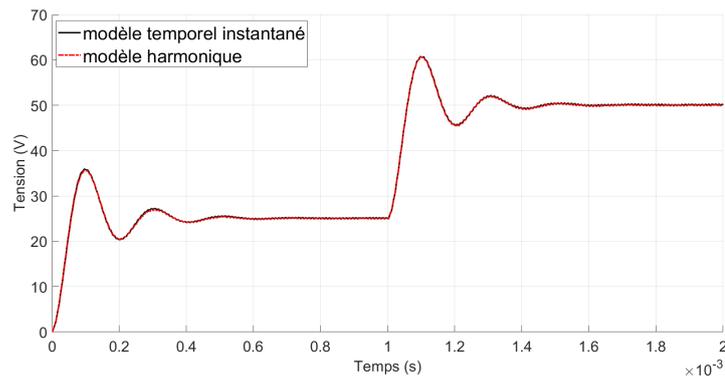
**Tableau B.1** – Paramètres des convertisseurs, de la charge, de la base harmonique et valeurs des rapports cycliques appliqués.



(a) Les signaux de commande.

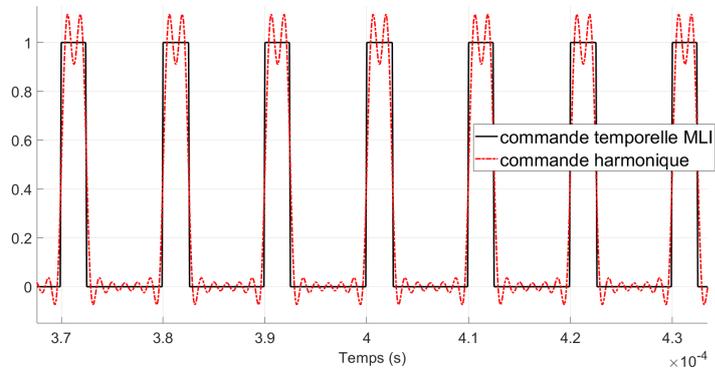


(b) Comparaison des courants dans l'inductance.

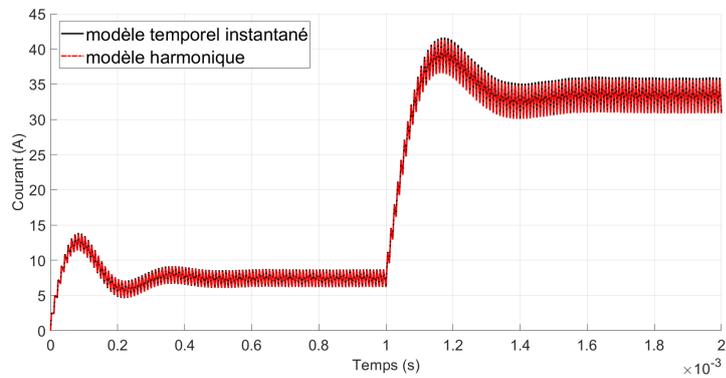


(c) Comparaison des tensions en sortie.

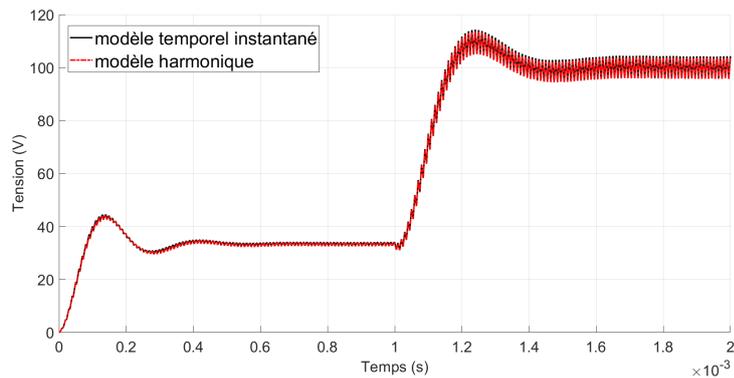
**Figure B.1** – Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Buck en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier.



(a) Les signaux de commande.

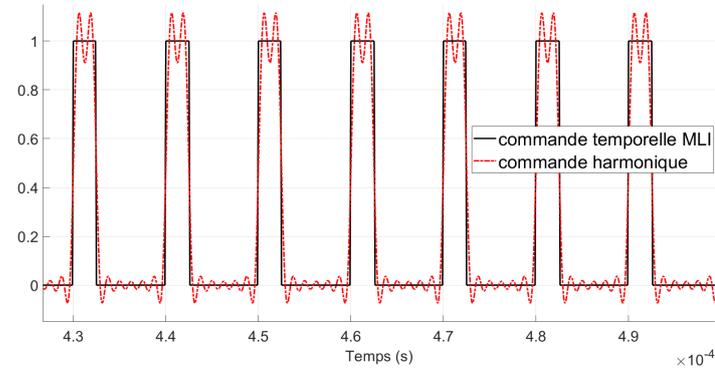


(b) Comparaison des courants dans l'inductance.

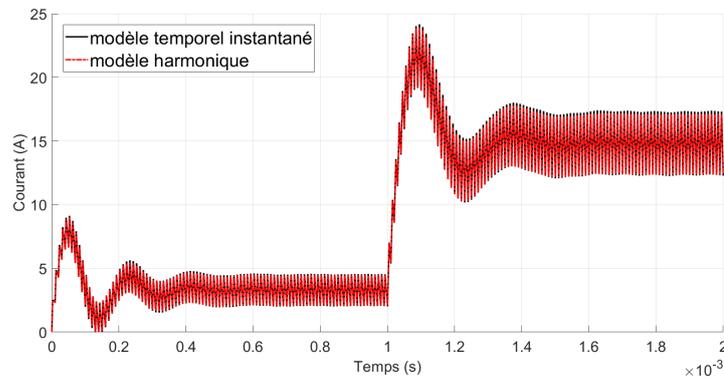


(c) Comparaison des tensions en sortie.

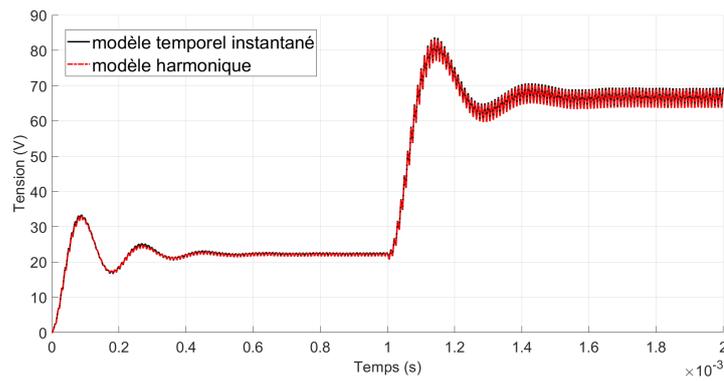
**Figure B.2** – Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Buck-Boost en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier.



(a) Les signaux de commande.



(b) Comparaison des courants dans l'inductance.



(c) Comparaison des tensions en sortie.

**Figure B.3** – Comparaison des signaux obtenus à partir des modèles temporel et harmonique ( $f_{sw} = 100kHz, h = 8$ ) du Flyback en boucle ouverte pour une commande MLI de rapport cyclique en escalier.

**Algorithme de génération des modèles harmoniques (Matlab).** Soit un modèle temporel instantané d'un convertisseur de puissance, écrit sous la forme d'un espace d'état affine commuté

$$\dot{x}(t) = A(d(t))x(t) + B(d(t))w(t) \quad (\text{B.9})$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  le vecteur d'état,  $d(t) \in \mathbb{R}$  la loi de commutation du convertisseur,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  une entrée exogène et où

$$\begin{aligned} A(d(t)) &= A_{ind} + d(t)A_{dep} \\ B(d(t)) &= B_{ind} + d(t)B_{dep} \end{aligned}$$

avec des matrices  $A_{ind}, B_{ind}, A_{dep}, B_{dep}$  constantes. L'algorithme prend comme paramètres en entrée les matrices  $A_{ind}, B_{ind}, A_{dep}, B_{dep}$ , la période  $T$  de la base harmonique choisie, l'ordre de troncature  $h$  désiré et les harmoniques  $D$  de la commande étudiée.

1. Extraire le nombre d'état  $n_x$  et déterminer le nombre d'harmoniques  $n_h$  :

$$\begin{aligned} n_x &= \text{size}(A_{ind}, 1) \\ n_h &= 2 * h + 1 \end{aligned}$$

2. Générer la matrice identité  $\mathcal{U}_I$  et la matrice de différentiation  $\mathcal{N}$  de dimensions appropriées :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_I &= \text{eye}(n_h, n_h) \\ \mathcal{N} &= \text{kron}(\text{eye}(n_x), \text{diag}(-jh\frac{2\pi}{T} \cdots 0 \cdots jh\frac{2\pi}{T})) \end{aligned}$$

3. Générer la matrice de Toeplitz pour la commande étudiée :

$$\begin{aligned} D_+ &= D(h+1 : \text{end}, :) \\ \mathcal{D} &= \text{toeplitz}(D_+, D_+^*) \end{aligned}$$

4. Générer les matrices du modèle harmonique :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} &= \text{kron}(A_{ind}, \mathcal{U}_I) + \text{kron}(A_{dep}, \mathcal{D}) - \mathcal{N} \\ \tilde{\mathcal{B}} &= \text{kron}(B_{ind}, \mathcal{U}_I) + \text{kron}(B_{dep}, \mathcal{D}) \end{aligned}$$

Cet algorithme, pour un vecteur d'harmoniques de commande  $D$  donné, associe à (B.9) le modèle harmonique

$$\dot{X}(t) = \tilde{\mathcal{A}}X(t) + \tilde{\mathcal{B}}W(t) \quad (\text{B.10})$$

avec  $X = \mathcal{F}_T(x)$ ,  $W = \mathcal{F}_T(w)$ .

**Algorithme de génération des modèles harmoniques temps-réel (Simulink).** Soit un modèle temporel instantané d'un convertisseur de puissance, écrit sous la forme d'un espace d'état affine commuté (B.9). L'algorithme prend comme paramètres en entrée les matrices  $A_{ind}, B_{ind}, A_{dep}, B_{dep}$ , la période  $T$  de la base harmonique choisie et l'ordre de troncature  $h$  désiré. Il prend comme variables en entrée  $x(t), d(t), w(t)$  ou leurs phaseurs.

1. Extraire le nombre d'état  $n_x$  et déterminer le nombre d'harmoniques  $n_h$  :

$$\begin{aligned} n_x &= \text{size}(A_{ind}, 1) \\ n_h &= 2 * h + 1 \end{aligned}$$

2. Générer la matrice identité  $\mathcal{U}_I$  et la matrice de différentiation  $\mathcal{N}$  de dimensions appropriées :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_I &= \text{eye}(n_h, n_h) \\ \mathcal{N} &= \text{kron}(\text{eye}(n_x), \text{diag}(-jh\frac{2\pi}{T} \cdots 0 \cdots jh\frac{2\pi}{T})) \end{aligned}$$

3. Si les variables en entrée sont  $x(t), d(t), w(t)$ , alors extraire leurs phaseurs en temps-réel :

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{F}_T(x) \\ D &= \mathcal{F}_T(d) \\ W &= \mathcal{F}_T(w) \end{aligned}$$

4. Générer la matrice de Toeplitz temps-réel de la commande :

$$\begin{aligned} D_+ &= D(h+1 : \text{end}, :) \\ \mathcal{D} &= \text{toeplitz}(D_+, D_+^*) \end{aligned}$$

5. Générer les matrices temps-réel du modèle harmonique :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} &= \text{kron}(A_{ind}, U_I) + \text{kron}(A_{dep}, \mathcal{D}) - \mathcal{N} \\ \tilde{\mathcal{B}} &= \text{kron}(B_{ind}, U_I) + \text{kron}(B_{dep}, \mathcal{D}) \end{aligned}$$

6. Calculer le vecteur d'état en temps-réel :

$$X = \int_0^t (\mathcal{A}X + \mathcal{B}W)$$

Cet algorithme associe à (B.9) le modèle harmonique

$$\dot{X}(t) = \tilde{\mathcal{A}}(D(t))X(t) + \tilde{\mathcal{B}}(D(t))W(t) \quad (\text{B.11})$$

avec  $X = \mathcal{F}_T(x)$ ,  $D = \mathcal{F}_T(d)$ ,  $W = \mathcal{F}_T(w)$ .



## Annexe C

# Formules de reconstructions équivalentes

**Proposition C.1.** Soit  $U \in H_T$ . La formule de reconstruction

$$u(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\omega t} - u(t-T)$$

et, pour  $\delta \in ]0; T[$ , la formule

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2U_k(t) - U_k(t-\delta)) e^{jk\omega t}$$

sont équivalentes

*Démonstration.* Soient  $U \in H_T$  et  $\delta' \in ]0; T[$ . Nous avons

$$u(t-T) = u(t - (T - \delta') - \delta')$$

D'autre part, d'après la formule de reconstruction non causale 2.11b,

$$u(t - (T - \delta') - \delta') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t - (T - \delta')) e^{jk\omega(t - (T - \delta') - \delta')}$$

Alors, en posant  $\delta = T - \delta' \in ]0; T[$ ,

$$\begin{aligned} u(t-T) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t-\delta) e^{jk\omega(t-T)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t-\delta) e^{jk\omega t} \end{aligned}$$

□



## Annexe D

# Base harmonique de fréquence temps-variante

La méthodologie développée dans le chapitre 2 est valable pour une fréquence de la base harmonique constante. Dans le cas où la fréquence varie au cours du temps, il est nécessaire de considérer non plus la fréquence mais l'angle instantané  $\theta(t)$ , tel que

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t)$$

La base harmonique considérée est dans ce cas la base fonctionnelle des exponentielles complexes de Fourier  $(e^{jk\theta(t)})_{k \in \mathbb{Z}}$ , où  $\theta(t)$  peut être considéré sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , et non plus la base fonctionnelle  $(e^{jk\omega t})_{k \in \mathbb{Z}}$ . Alors,  $T(t)$  est la durée pendant laquelle l'angle  $\theta(t)$  varie d'exactly  $2\pi$  (un tour), définie par [Sanders *et al.*, 1991] :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta(t_1) \\ \theta_1 - 2\pi &= \theta(t_1 - T(t_1))\end{aligned}$$

Nous définissons les phaseurs selon la formule [Sanders *et al.*, 1991] :

$$\begin{aligned}U_k(t) &= \langle e^{jk(\cdot)}, u(t(\cdot)) \rangle_{L^2([\theta(t)-2\pi, \theta(t)])} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta(t)-2\pi}^{\theta(t)} u(p(\phi)) e^{-jk\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t-T(t)}^t u(p) e^{-jk\theta(p)} \omega(p) dp\end{aligned}\tag{D.1}$$

Les signaux temporels sont reconstruits par la formule :

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k(t) e^{jk\theta(t)} + \frac{T}{2} \dot{U}_0(t)\tag{D.2}$$

La différentiation d'un phaseur dans le domaine harmonique est exprimée selon la formule [Sanders *et al.*, 1991] :

$$\dot{X}_k(t) = x(t - T(t)) e^{-jk\theta(t-T(t))} \omega(t - T(t)) \dot{T}(t) + \langle \dot{x} \rangle_k(t) + \langle \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} - jk\omega\right) x \rangle_k(t)\tag{D.3}$$

avec

$$\dot{T}(t) = \frac{1 - \omega(t)}{\omega(t - T(t))}$$

Il est clair que (D.3) est réduit à (2.17) pour une fréquence constante. De plus, pour une fréquence qui varie lentement au cours du temps, nous avons

$$\begin{aligned} T(t) &\approx \frac{2\pi}{\omega(t)} \\ x(t - T(t))e^{-jk\theta(t-T(t))}\omega(t - T(t))\dot{T}(t) &\approx 0 \\ \langle (\frac{\dot{\omega}}{\omega} - jk\omega)x \rangle_k(t) &\approx -jk\omega(t)X_k(t) \end{aligned}$$

Dans ce cas, (D.3) est bien approximé par (2.17).

En conclusion, la méthodologie présentée dans le chapitre 2 s'applique toujours dans le cas d'une fréquence lentement variable. Il faut alors remplacer les formules (2.7) et (2.12) par les formules (D.1) et (D.2).

## Bibliographie

- AHMED, K. H., FINNEY, S. J. et WILLIAMS, B. W. (2007). Passive filter design for three-phase inverter interfacing in distributed generation. *2007 Compatibility in Power Electronics*, pages 1–9.
- ALMER, S. et JONSSON, U. (2009). Dynamic phasor analysis of periodic systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 54(8):2007–2012.
- ALMÉR, S., MARIÉTHOZ, S. et MORARI, M. (2014). Dynamic phasor model predictive control of switched mode power converters. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(1): 349–356.
- ASTOLFI, D. et PRALY, L. (2016). Integral action in output feedback for multi-input multi-output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(4):1559–1574.
- ASTOLFI, D., PRALY, L. et MARCONI, L. (2019). Francis-wonham nonlinear viewpoint in output regulation of minimum phase systems. *IFAC-PapersOnLine*, 52(16):532–537.
- BAIMEL, D., BELIKOV, J., GUERRERO, J. M. et LEVRON, Y. (2017). Dynamic modeling of networks, microgrids, and renewable sources in the dq0 reference frame : A survey. *Ieee Access*, 5:21323–21335.
- BENEUX, G., RIEDINGER, P., DAAFOUZ, J. et GRIMAUD, L. (2017). Robust stabilization of switched affine systems with unknown parameters and its application to dc/dc flyback converters. *2017 American Control Conference (ACC)*, pages 4528–4533.
- BITTANTI, S. et COLANERI, P. (2009). *Periodic systems : filtering and control*, volume 5108985. Springer Science & Business Media.
- BLIN, N., RIEDINGER, P., DAAFOUZ, J., GRIMAUD, L. et FEYEL, P. (2019). A comparison of harmonic modeling methods with application to control of switched systems with active filtering. *2019 18th European Control Conference (ECC), Naples, Italy*, pages 4198–4203. doi : 10.23919/ ECC.2019.8796168.
- BLIN, N., RIEDINGER, P., DAAFOUZ, J., GRIMAUD, L. et FEYEL, P. (2020). A comparison of harmonic modeling methods with application to the interconnection and the control of switched systems. *European Journal of Control*. ISSN 0947-3580, doi : 10.1016/j.ejcon.2020.07.007.
- CELEBI, M. F. et DOGRUEL, M. (2017). Microcontroller implementation of a harmonic control arrays system. *In 2017 6th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, pages 145–149. IEEE.

- DECONINCK, B. et KUTZ, J. N. (2006). Computing spectra of linear operators using the floquet–fourier–hill method. *Journal of Computational Physics*, 219(1):296–321.
- DOGRUEL, M. et ÇELİK, H. H. (2010). Harmonic control arrays method with a real time application to periodic position control. *IEEE transactions on control systems technology*, 19(3):521–530.
- ERICKSON, R. W., CUK, S. et MIDDLEBROOK, R. (1982). Large-signal modelling and analysis of switching regulators. *1982 IEEE Power Electronics Specialists conference*, pages 240–250.
- FLOQUET, G. (1883). Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 12:47–88.
- FUJITA, H. et AKAGI, H. (1991). A practical approach to harmonic compensation in power systems-series connection of passive and active filters. *IEEE Transactions on industry applications*, 27(6):1020–1025.
- GHITA, I., KVIESKA, P., BEAUVOIS, D. et GODOY, E. (2017a). Harmonic state space feedback control for ac/dc power converters. *2017 American Control Conference (ACC)*, pages 4087–4092.
- GHITA, I., KVIESKA, P., BEAUVOIS, D. et GODOY, E. (2017b). Output feedback non-linear harmonic control of an industrial electric vehicle battery charger. *2017 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, pages 346–351.
- GOHBERG, I., GOLDBERG, S. et KAASHOEK, M. A. (2013). *Classes of linear operators, vol II*, volume 63. Birkhäuser.
- GUO, X., LU, Z., WANG, B., SUN, X., WANG, L. et GUERRERO, J. M. (2014). Dynamic phasors-based modeling and stability analysis of droop-controlled inverters for microgrid applications. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 5(6):2980–2987.
- HAMMAD, A. (1992). Analysis of second harmonic instability for the chateauguay hvdc/svc scheme. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 7(1):410–415.
- HAUER, J. et TAYLOR, C. (1998). Information, reliability, and control in the new power system. *In Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 98CH36207)*, volume 5, pages 2986–2991. IEEE.
- HILL, G. W. (1886). On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta mathematica*, 8(1):1–36.
- HWANG, M. S.-P. et WOOD, A. R. (2015). Harmonic state-space modelling of a controlled hvdc converter. *Electric Power Systems Research*, 124:65–73.
- HWANG, S.-P. (2014). *Harmonic state-space modelling of an HVdc converter with closed-loop control*. Thèse de doctorat, University of Canterbury.
- JAVAI, U. et DUJIĆ, D. (2015). Arbitrary order generalized state space average modeling of switching converters. *2015 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, pages 6399–6406.

- KARBASFOROOSHAN, M.-S., MONFARED, M. et DOGRUEL, M. (2016). Application of the harmonic control arrays technique to single-phase stand-alone inverters. *IET Power Electronics*, 9(7):1445–1453.
- KWON, J., WANG, X., BAK, C. L. et BLAABJERG, F. (2015a). Comparative evaluation of modeling methods for harmonic stability analysis of three-phase voltage source converters. In *Proceedings of PCIM Europe 2015*, pages 1–9. PCIM.
- KWON, J. B., WANG, X., BAK, C. L. et BLAABJERG, F. (2015b). Modeling and simulation of dc power electronics systems using harmonic state space (hss) method. In *Proceedings of the 2015 IEEE 16th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL)*, pages 1–8. IEEE.
- LASKARIDIS, P. (2004). *Performance investigations and systems architectures for the more electric aircraft*. Thèse de doctorat, Cranfield University.
- LYU, J., CHEN, Q., CAI, X. et MOLINAS, M. (2017). Impedance analysis of modular multilevel converter based on harmonic state-space modeling method. *arXiv preprint arXiv :1705.01030*.
- MAHDAVI, J., EMAADI, A., BELLAR, M. et EHSANI, M. (1997). Analysis of power electronic converters using the generalized state-space averaging approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 44(8):767–770.
- MARTINEZ, M. M. (2001). *Modelling of power electronics controllers for harmonic analysis in power systems*. Thèse de doctorat, University of Glasgow.
- MATTAVELLI, P., VERGHESE, G. C. et STANKOVIC, A. M. (1997). Phasor dynamics of thyristor-controlled series capacitor systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(3):1259–1267.
- MIDDLEBROOK, R. D. et CUK, S. (1976). A general unified approach to modelling switching-converter power stages. *1976 IEEE Power Electronics Specialists Conference*, pages 18–34.
- MOLLERSTEDT, E. et BERNHARDSSON, B. (2000a). A harmonic transfer function model for a diode converter train. In *2000 IEEE Power Engineering Society Winter Meeting. Conference Proceedings (Cat. No. 00CH37077)*, volume 2, pages 957–962. IEEE.
- MOLLERSTEDT, E. et BERNHARDSSON, B. (2000b). Out of control because of harmonics-an analysis of the harmonic response of an inverter locomotive. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(4):70–81.
- ORILLAZA, J. R. C. et WOOD, A. R. (2012). Harmonic state-space model of a controlled tcr. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 28(1):197–205.
- ORMROD, J. E. (2013). *Harmonic state space modelling of voltage source converters*. Thèse de doctorat, University of Canterbury.
- RAMIREZ, A., SEMLYEN, A. et IRAVANI, R. (2005). Harmonic domain characterization of the resonant interaction between generator and transmission line. *IEEE transactions on power delivery*, 20(2):1753–1762.
- RICO, J. J., MADRIGAL, M. et ACHA, E. (2003). Dynamic harmonic evolution using the extended harmonic domain. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 18(2):587–594.

- ROSETO, J., ORTEGA, J., ALDABAS, E. et ROMERAL, L. (2007). Moving towards a more electric aircraft. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 22(3):3–9.
- SANDBERG, H., MOLLERSTEDT, E. *et al.* (2005). Frequency-domain analysis of linear time-periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(12):1971–1983.
- SANDERS, S. R., NOWOROLSKI, J. M., LIU, X. Z. et VERGHESE, G. C. (1991). Generalized averaging method for power conversion circuits. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(2):251–259.
- SINGH, B., AL-HADDAD, K. et CHANDRA, A. (1999). A review of active filters for power quality improvement. *IEEE transactions on industrial electronics*, 46(5):960–971.
- TADMOR, G. (2002). On approximate phasor models in dissipative bilinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 49(8):1167–1179.
- WANG, X. et BLAABJERG, F. (2018). Harmonic stability in power electronic-based power systems : Concept, modeling, and analysis. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 10(3):2858–2870.
- WEI, H. et BATARSEH, I. (1998). Comparison of basic converter topologies for power factor correction. *IEEE Southeastcon'98'Engineering for a New Era'*, pages 348–353.
- WERELEY, N. M. (1990). *Analysis and control of linear periodically time varying systems*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology.
- WERELEY, N. M. et HALL, S. R. (1990). Frequency response of linear time periodic systems. *29th IEEE conference on decision and control*, pages 3650–3655.
- WERELEY, N. M. et HALL, S. R. (1991). Linear time periodic systems : transfer function, poles, transmission zeroes and directional properties. *1991 American Control Conference*, pages 1179–1184.
- WILLIAMS, S. M. et HOFT, R. G. (1991). Adaptive frequency domain control of pwm switched power line conditioner. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(4):665–670.
- YIN, S., WANG, Y., YIN, T., WANG, Z., AN, R., XU, P., NIE, C. et JIANG, Y. (2019). Small-signal modeling and stability analysis of mmc with the consideration of internal harmonic interactions. *2019 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*, pages 2872–2876.
- ZHOU, B. et DUAN, G.-R. (2011). Periodic lyapunov equation based approaches to the stabilization of continuous-time periodic linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(8):2139–2146.
- ZHOU, J. (2008). Derivation and solution of harmonic riccati equations via contraction mapping theorem. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, 44(2):156–163.

**Titre :** Modélisation par techniques harmoniques pour la commande et le filtrage actif de systèmes commutés associés appliquée à l'actionnement électrique

**Mots clés :** modélisation harmonique, filtrage actif, convertisseurs de puissance, actionnement électrique, interactions fréquentielles, commande optimale

**Résumé :** Cette thèse CIFRE a pour objectif principal de contribuer à maîtriser les phénomènes fréquentiels au sein des réseaux électriques. Les systèmes sont de plus en plus complexes et ont tendance à générer des harmoniques et des dynamiques rapides. Leur interconnexion peut être à l'origine de phénomènes de résonance et de pollution harmonique aujourd'hui mal maîtrisés, ainsi que d'instabilités harmoniques. L'approche retenue consiste à exploiter les techniques innovantes de modélisation harmonique. Nous définissons un cadre formel dans lequel les notions ont du sens et nous proposons une méthodologie complète qui unifie les approches de la littérature. Le modèle harmonique unifié décrit les dynamiques et couplages harmoniques des systèmes. L'accès à ces informations ouvre la voie à un contrôle-commande amélioré. Nous proposons deux schémas de contrôle adaptés et nous identifions les conditions à respecter lors de la synthèse du correcteur harmonique. Nous présentons de plus des outils d'évaluation de la stabilité harmonique et de commande optimale stabilisante. Ce nouveau cadre permet de développer des lois de commande dans le domaine harmonique pour maîtriser les phénomènes fréquentiels. Finalement, les travaux doctoraux aboutissent à la définition formelle d'une méthodologie unifiée et complète de modélisation et contrôle-commande harmoniques de systèmes dynamiques interconnectés. La stratégie est validée via des simulations pour modéliser, analyser et contrôler des convertisseurs de puissance, puis en pratique sur une chaîne d'actionnement électrique d'un moteur d'avion.

**Title :** Harmonic modeling techniques to control and actively filter associated switched systems applied to electrical drive

**Keywords :** harmonic modeling, active filtering, power converters, electrical actuation, frequency interactions, optimal control

**Abstract :** The main objective of this industrial PhD thesis is to contribute to the control of frequency phenomena within electrical networks. Systems are more and more complex and tend to generate harmonics and high dynamics. Their interconnection may be at the origin of resonance and harmonic pollution phenomena that are currently poorly contained, as well as harmonic instabilities. The selected approach consists in applying innovative harmonic modeling techniques. We define a formal framework in which the notions make sense and we propose a comprehensive methodology that unifies the literature approaches. The unified harmonic model describes the systems' harmonic dynamics and couplings. Access to this knowledge paves the way for an improved control. Two suitable control schemes are proposed and we identify the conditions when synthesizing the harmonic controller. In addition, some tools for harmonic stability evaluation and optimal stabilizing control are presented. This new framework allows developing some control laws in the harmonic domain to control frequency phenomena. Finally, the doctoral work leads to the formal definition of a unified and comprehensive methodology for harmonic modeling and control of interconnected dynamic systems. The strategy is validated through simulations to model, analyze and control power converters, then in practice to an electrical drive chain for an aircraft engine.