



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude des instabilités plastiques et de la localisation : aspects macroscopiques et mésoscopiques

Jean-Lin Dequiedt

► **To cite this version:**

Jean-Lin Dequiedt. Contribution à l'étude des instabilités plastiques et de la localisation : aspects macroscopiques et mésoscopiques. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Lorraine, 2021. tel-03279249

**HAL Id: tel-03279249**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03279249v1>**

Submitted on 6 Jul 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des  
Recherches de l'Université de Lorraine

présenté par

Jean-Lin DEQUIEDT

Ingénieur de Recherche au CEA, DAM, DIF  
Membre du Laboratoire des Matériaux en Conditions Extrêmes (LMCE)  
de l'Université Paris-Saclay

**Contribution à l'étude des instabilités  
plastiques et de la localisation : aspects  
macroscopiques et mésoscopiques**

# Remerciements

---

*L'essentiel du travail de recherche présenté dans ce mémoire, qui m'a amené à candidater à l'Habilitation à Diriger des Recherches, a été réalisé au CEA/DAM sur des thématiques en lien avec les besoins opérationnels. Mes responsables m'ont néanmoins toujours accordé leur confiance et laissé une grande liberté pour explorer des domaines que j'estimais pertinents ; qu'ils s'en trouvent ici remerciés.*

*Je remercie Monsieur Samuel Forest de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

*Je remercie Madame Brigitte Bacroix, Messieurs Renald Brenner et Patrice Longère d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail. Ils ont pris la peine, en un temps court, d'analyser un document touffu et m'ont fait part de conseils fort utiles.*

*Je remercie Madame Marion Martiny, Messieurs Basile Audoly, Marc Fivel, Nicolas Jacques et Laurent Tabourot d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Les échanges que nous avons eus au cours de la soutenance donnent des pistes intéressantes pour approfondir les thématiques développées.*

*Je remercie vivement Sébastien Mercier de m'avoir accompagné tout au long de ma démarche et de m'avoir aidé à mettre en forme le présent mémoire. Dans la continuité des collaborations et des relations professionnelles de qualité que nous avons depuis plusieurs années, nous aurons, j'en suis sûr, d'autres occasions de travailler ensemble à l'avenir.*

*Je remercie toutes les personnes de l'Université de Lorraine qui m'ont aidé à constituer le dossier et organiser la soutenance.*

*J'assure de toutes mes amitiés l'ensemble de mes collègues au CEA/DAM qui contribuent à entretenir une atmosphère de travail stimulante.*

*Je renouvelle enfin toute mon affection à mes proches, mon épouse Tiphaine, mes enfants Pauline et Benoît, mes parents, beaux-parents, frère, beaux-frères et belles sœurs, neveux et nièces.*

## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	<b>5</b>
<b>Partie 1 : Notice individuelle</b> .....	<b>8</b>
1. Curriculum vitae .....	8
2. Résumé des travaux de recherche .....	11
2.1. Bandes de localisation et surface de charge plastique .....	11
2.2. Instabilités et localisation à l'échelle de la microstructure .....	12
3. Publications et Communications.....	15
<b>Partie 2 : Dossier scientifique</b> .....	<b>20</b>
1. Localisation à l'échelle macroscopique .....	20
1.1. Etat de l'art général du domaine.....	21
1.1.1. Initiation du processus .....	21
1.1.2. Phases ultimes du processus de localisation.....	24
1.1.3. Travaux encadrés.....	25
1.2. Bandes de localisation et sensibilité à la forme de la surface de charge plastique .....	26
1.2.1. Etat de l'art et contexte de l'étude .....	26
1.2.2. Conditions générales d'apparition des bandes .....	28
1.2.3. Application au cas de l'élasticité isotrope et du critère de von Mises.....	33
1.2.4. Application au cas de l'élasticité isotrope et du critère de Hill anisotrope.....	43
1.2.5. Bilan de l'analyse .....	55
1.3. Bandes de localisation dans le cas d'un comportement viscoplastique .....	56
2. Instabilités et localisation à l'échelle de la microstructure .....	59
2.1. Modèle de plasticité cristalline .....	59
2.1.1. Formulation locale en transformations finies .....	59
2.1.2. Cas des petites transformations.....	69
2.1.3. Introduction d'effets non-locaux.....	70

2.2.	Déformation hétérogène à l'échelle des grains .....	78
2.2.1.	Etat de l'art et contexte de l'étude .....	78
2.2.2.	Simulations de monocristaux en bi-traction. ....	80
2.2.3.	Analyse de stabilité.....	86
2.2.4.	Incidence d'effets non-locaux dans le cas de modèles de plasticité à gradient .....	90
2.2.5.	Bilan de l'étude.....	94
2.3.	Localisation à l'échelle d'une structure : cas d'une plaque plane.....	95
2.3.1.	Conditions de simulation et outils d'analyse.....	97
2.3.2.	Cas d'une plaque de texture isotrope en traction equi-biaxiale.....	101
2.3.3.	Cas d'une plaque pré-texturée.....	107
2.3.4.	Cas d'une densité de dislocations hétérogène.....	109
2.3.5.	Cas de la déformation plane et effet de la vitesse de déformation.....	111
2.3.6.	Bilan de l'étude.....	115
3.	Perspectives.....	115
3.1.	Déformation des grains : ségrégation des systèmes dans les structures CC et HCP.....	115
3.2.	Texture et anisotropie .....	117
3.3.	Extension de l'approche non locale aux transformations finies .....	118
3.4.	Modèles non-locaux et joints de grains .....	123
3.5.	Localisation dans une plaque et microstructures de mise en forme .....	127
3.6.	Modélisation de la fragmentation.....	128
4.	Conclusion .....	129
5.	Notations, conventions et identités mathématiques utiles .....	130
	<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>133</b>

# Introduction

---

Le présent mémoire a pour objectif de présenter un aperçu général de mes activités scientifiques en vue de candidater à l'obtention d'une Habilitation à Diriger des Recherches. La première partie consiste en une Notice Individuelle présentant mon parcours professionnel et un résumé de ces activités. La seconde partie détaille les principales études et les résultats les plus saillants.

Au cours des vingt dernières années, j'ai mené des travaux successivement au sein du Centre d'Etudes de Gramat (DGA) puis à la Direction des Applications Militaires du CEA (Centre de Bruyères-le-Chatel) autour de deux thématiques dominantes :

- La modélisation de l'effet d'ondes de choc intenses sur les matériaux métalliques et de l'état d'érouissage résultant ;
- La prédiction de la localisation plastique et de la fragmentation dans des enveloppes métalliques ductiles en expansion dynamique.

Il me semble important, en introduction générale, de présenter de manière succincte la chronologie de ces activités et le contexte dans lequel elles se sont inscrites, les introductions des différents chapitres de la Partie 2 s'attachant davantage au cadre scientifique. L'ensemble, en apparence un peu disparate, est en réalité un regroupement d'études qui répondaient chacune à un questionnement bien précis. J'ai évidemment choisi de présenter les analyses les plus abouties et qui présentent un intérêt scientifique réel.

Mes activités à la DGA ont porté sur la modélisation des ondes de choc dans les matériaux métalliques et notamment l'évolution de la plasticité dans le front de choc. Du point de vue des applications, ces études visaient à décrire le fonctionnement d'une charge formée (charge génératrice de noyau (C.G.N.)) ; la déformation en vol de celle-ci, conduisant au projectile impactant la cible, est précédée d'une mise en vitesse par explosif altérant les caractéristiques microstructurales et donc les propriétés mécaniques du matériau. Ces travaux ont constitué le sujet de mon travail de thèse, sous la direction de M. Claude Stolz du L.M.S. de l'Ecole Polytechnique, dans lequel s'est également fortement impliqué M. Jacques Petit de la DGA ; il m'a fait bénéficier de son expertise dans le domaine des hautes vitesses de déformation. Ces travaux ont donné lieu à quelques développements supplémentaires que je n'ai pas poursuivis après mon arrivée au CEA ; c'est pourquoi, j'ai fait le choix de ne pas aborder cette thématique dans le présent mémoire, bien que des liens existent avec la seconde thématique, en particulier lorsque l'on étudie des enveloppes mises en vitesse par explosif.

On m'a alors demandé d'étudier la localisation de la déformation plastique dans des enveloppes métalliques de faible épaisseur en expansion dynamique, phénomène à l'origine de la

fragmentation de ces mêmes enveloppes. Les géométries d'intérêt sont diverses et souvent complexes de telle sorte que, en fonction du point de l'enveloppe, le chargement peut varier de la déformation uniaxiale dans le plan tangent (que l'on rencontrerait dans un cylindre infini en expansion uniforme par exemple) à la déformation équi-biaxiale (que l'on rencontrerait dans une sphère en expansion uniforme). Des expériences d'expansion de cylindres et de sphères réalisées par le passé ou en cours (cf. Olive et al., 1979, Mercier et al., 2010), permettent de mettre en évidence et de quantifier le processus dans des régimes de sollicitations pertinents ; elles mettent en œuvre des techniques d'imagerie rapide et ont également donné lieu à des développements de diagnostics tels que la stéréo-corrélation (Besnard et al., 2010) ou la reconstruction de surface (Frugier, 2015). J'ai, pour ma part, abordé le sujet par la simulation numérique à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire celle du milieu continu homogène, en poursuivant une démarche engagée par France Dalle (Dalle, 2006). J'ai été, parallèlement, amené à suivre un travail de thèse étudiant l'instabilité plastique de striction pour une plaque plane en traction biaxiale au moyen de l'analyse linéaire de stabilité (thèse de Dominique Jouve, 2010). Ce travail, développé dans un cadre tri-dimensionnel, étend des résultats de la littérature qui mettent en évidence la sensibilité de la localisation au rapport des déformations principales dans le plan de la plaque et relie cette sensibilité à la forme de la surface de charge plastique. Cette dernière propriété revêt une importance particulière dans la mesure où des simulations utilisant le critère de von Mises conduisent généralement à une sous-estimation de la localisation en expansion sphérique par rapport à ce qui est observé expérimentalement. C'est pour cela également que j'ai développé une démarche théorique permettant de préciser les liens entre instabilité et forme du convexe de plasticité. En outre, les vitesses de déformation atteintes dans les enveloppes mises en vitesse par explosif sont telles que l'instabilité de striction s'y développe avec des temps caractéristiques du même ordre que ceux du chargement. L'étude rigoureuse de cette instabilité nécessite une généralisation de l'analyse linéaire de stabilité classique pour prendre en compte cet effet, ce qui a été proposé dans la thèse de Mathieu Xavier (2019) que j'ai également co-encadrée.

Afin de pousser plus loin l'analyse de la sensibilité du phénomène de striction à une description fine du comportement plastique, je me suis parallèlement intéressé à la plasticité cristalline et c'est donc sous l'angle « localisation » que j'ai abordé ce domaine de la mécanique, même si les développements engagés ont une portée plus générale. Les questions sous-jacentes, du moins telles que l'on se les posait à l'époque, étaient les suivantes :

- L'approche macroscopique permet-elle de bien appréhender le processus de localisation et sa chronométrie ou bien existe-t-il des phénomènes liés à l'hétérogénéité microstructurale qui pourraient l'influencer ? Pour le dire d'une autre manière, la localisation macroscopique pourrait-elle résulter d'une coalescence de zones de localisation (ou de concentration de la déformation) se développant à l'échelle d'un grain ou de quelques grains ?

- Si la localisation en chargement biaxial dépend fortement de la forme de la surface de charge plastique et de son évolution au cours du temps, des simulations d'agrégats polycristallins, qui reproduisent l'évolution de la texture<sup>1</sup> au cours de la déformation (puisque la rotation des grains est prise en compte dans le calcul) et prennent en compte l'anisotropie de l'écroutissage, permettent-elles de prendre en compte naturellement ces effets ?
- Comment l'état microstructural du matériau qui résulte, entre autres, de la gamme d'élaboration de l'enveloppe (succession d'opérations de mise en forme et de traitements thermiques), impacte-t-il la localisation et peut-on intégrer les caractéristiques les plus influentes dans un calcul polycristallin ?<sup>2</sup>

Je me suis alors rapproché d'un laboratoire du CEA/DAM qui regroupait les compétences en plasticité cristalline, laboratoire que j'ai intégré par la suite. Les modèles qui y sont développés sont dérivés du modèle de Teodosiu (Teodosiu et al., 1991) et les lois d'écroutissage s'appuient sur des études de dynamique des dislocations (DD) menées en collaboration avec d'autres laboratoires (laboratoire LEM de l'ONERA notamment). C'est pourquoi c'est le formalisme qui a été retenu dans la majeure partie des analyses même si certains résultats pourraient être retrouvés, au moins qualitativement, avec des lois de comportement plus sommaires.

Lorsque l'on appréhende la localisation à l'échelle des grains du polycristal, se pose la question de l'existence d'une échelle de longueur caractéristique du phénomène (largeur des bandes de localisation par exemple). Or, les formulations locales des modèles de comportement ne permettent pas de faire émerger une telle longueur. Par ailleurs, la propagation des phénomènes d'un grain aux grains voisins dépend à l'évidence fortement de la manière dont la plasticité se développe au voisinage des joints de grains, autrement dit des conditions de bords qui s'y appliquent sur les glissements plastiques. C'est pour ces raisons que je me suis attaché à proposer une extension non-locale de la loi de plasticité cristalline qui permet de prendre en compte ces effets.

L'objectif du présent mémoire est de développer quelques-unes des thématiques précédemment évoquées ; la partie concernant les approches mésoscopiques est la plus importante dans la mesure où c'est à cette échelle d'analyse que j'ai consacré la plus grande part de mes travaux.

---

<sup>1</sup> On rappelle que la texture désigne la distribution des orientations cristallines dans un matériau polycristallin. Elle impacte la réponse tridimensionnelle de l'agrégat et son éventuelle anisotropie.

<sup>2</sup> La manière dont les processus de restauration et de recristallisation, opérant au cours de la mise en forme, impactent la microstructure finale des enveloppes a fait l'objet de travaux suivis (on peut citer par exemple la thèse de doctorat de C. Kerisit, 2012, et les travaux de C. Moussa et al., 2015).



# Partie 1 : Notice individuelle

---

## 1. Curriculum vitae

### Situation Professionnelle :

---

**Ingénieur de recherche au CEA-DAM Ile-de-France** depuis le 1<sup>er</sup> novembre 2006

Adresse Professionnelle :

M. J.L. Dequiedt

CEA, DAM, DIF

F-91297 Arpajon France

### Formation :

---

**1998-2002 : Thèse de doctorat en Mécanique de l'Ecole Polytechnique**

Sujet : « *Caractérisation de l'état thermomécanique d'un matériau métallique après une phase de choc* » (directeur de thèse : M. Claude Stolz, L.M.S., Ecole Polytechnique, encadrant DGA : M. Jacques Petit)

**1996-1998 : ENSTA – Corps des Ingénieurs de l'Armement**

**DEA « Mécanique et Matériaux »** (Paris XIII, Ecole des Mines, Ecole Polytechnique, ENSAM)

**1996 : Diplôme de l'Ecole Polytechnique**

### Parcours professionnel :

---

**Depuis 2004 : CEA-DAM Ile-de-France : Ingénieur d'Etudes et de Recherche**

**1998-2004 : DGA – Centre d'Etudes de Gramat : Ingénieur d'Etudes et de Recherche**

Sujets d'études :

- Vulnérabilité des systèmes d'armes ;
- Effets des chocs sur les matériaux métalliques.

## Activités d'enseignement :

---

- **Ecole des Mines de Paris** : Enseignant vacataire, travaux dirigés du cours de 1<sup>ère</sup> année du cycle ingénieur « Mécanique des Matériaux Solides » durant les années scolaires 2011-2012 à 2015-2016 ; 5 séances de TD de 1h15 par an ;
- Implication dans divers modules de formation en interne (préparation et animation de travaux dirigés en application du cours) :
  - o notions de base en mécanique (4 séances de TD de 1h30 en 2008 et idem en 2014) : notion de déformation et de contrainte, élasticité et résolution de problèmes associés, plasticité ;
  - o rappels de thermodynamique (3 séances de TD de 1h30 en 2008) : notion de potentiel énergétique, premier et second principes, changement de phase, énergie de surface et capillarité ;
  - o homogénéisation (3 séances de TD de 1h30 en 2011) : notion de changement d'échelle, établissement de bornes en élasticité linéaire ;
  - o introduction à l'analyse bayésienne (4 séances de TD de 1h30 en 2017) : rappels de théorie des probabilités, introduction à l'inférence bayésienne (estimation d'une loi de probabilité à partir d'un nombre fini de réalisations d'un processus aléatoire), application à l'identification de modèles à partir de mesures entachées d'incertitudes ;
- **Ecole thématique interne** : « **Lois de comportement des matériaux solides et résolution des problèmes de statique et d'évolution associés** » en 2016 et 2019 (formation d'une semaine en résidentiel) : rappels de mécanique et introduction aux approches variationnelles en élasticité, théorie des charges limites en plasticité, modèles d'endommagement dérivant d'une énergie potentielle, introduction d'effets de gradients ; co-organisation avec MM. G. Damamme (CEA/DAM) et J.J. Marigo (LMS/ Ecole Polytechnique) ; une dizaine de participants des différents centres de la DAM à chacune des deux sessions.

## Encadrement de doctorants et stagiaires

---

### Doctorants :

**2016 – 2019** : M. Mathieu Xavier – *Etude analytique et numérique du développement de la striction multiple pour des cylindres métalliques en expansion dynamique* – Thèse de doctorat de l'Université de Lorraine ; j'ai été co-encadrant avec M. Dominique Jouve, les directeurs de thèse étaient MM. Sébastien Mercier et Christophe Czarnota de l'Université de Lorraine. Soutenue le 26 avril 2019.

Devenir : Mathieu Xavier est ingénieur de recherche au CEA, DIF, embauché à la suite de sa thèse depuis mai 2019.

**2006 – 2010** : M. Dominique Jouve – *Etude analytique de l’instabilité plastique de striction pour une plaque sollicitée en traction biaxiale* – Thèse de doctorat de l’Ecole Polytechnique ; j’ai participé à l’encadrement, le directeur de thèse était M. Patrick Le Tallec de l’Ecole Polytechnique. Soutenue le 12 mai 2010.

Devenir : Dominique Jouve est actuellement ingénieur de recherche au CEA, DIF.

### Stagiaires :

**2019** : M. Alexandre Masson – *Plasticité du monocristal cubique centré : du régime athermique vers les basses températures via l’introduction des effets non-Schmid* – Stage de fin d’études de l’Université de Technologie de Compiègne d’une durée de 6 mois ; j’ai co-encadré le stagiaire avec M. Ronan Madec (CEA/DAM).

**2020** : Mlle Julie Plantefève – *Ecrouissage des métaux hexagonaux par plasticité cristalline* – Stage de deuxième année de l’Université de Technologie de Troyes d’une durée de 6 mois ; j’ai co-encadré la stagiaire avec M. Ronan Madec (CEA/DAM).

### Autres activités

---

- Participation à deux jurys de thèse (en plus des co-encadrements) :
  - o M. G Wen – *Stabilité et localisation dans les solides et les structures en déformations finies : aspects statiques et dynamiques* – Thèse de doctorat de l’Université Paris-Saclay (2016)
  - o Mlle E. Gayraud – *Analyse bayésienne de la gerbe d’éclats provoquée par l’explosion d’une bombe à fragmentation naturelle* – Thèse de doctorat de l’Université de Clermont-Ferrand (2019)
  
- Relecture d’articles soumis à des revues : *Mechanics of Materials*, *International Journal of Plasticity*, *International Journal of Solids and Structures*, *Meccanica*.
  
- Participation à un Laboratoire de Recherche Conventionné (L.R.C.) en cours de constitution entre le CEA, le LEM3 de l’Université de Lorraine, l’Ecole des Mines de St Etienne et le LSM de l’ISAE-SUPAERO : correspondant CEA pour la thématique « Modèles de fragmentation ».

## 2. Résumé des travaux de recherche

### 2.1. Bandes de localisation et surface de charge plastique

Lorsque l'on étudie la problématique des bandes de localisation dans une structure infinie en chargement quasi-statique, on peut formuler des conditions de bifurcation (cf. Rice, 1976 par exemple)<sup>3</sup> mais on peut également expliciter, en suivant une analyse proposée par Barbier et al. (1998), des conditions de croissance d'une petite perturbation, les premières constituant un cas particulier des secondes obtenu à la limite des taux de croissance infinis.

Supposons un matériau dont le comportement incrémental en petites déformations s'exprime sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

L'existence d'une bifurcation sous la forme d'un réseau de bandes de normale  $\mathbf{N}$ , à partir d'un état de contrainte homogène  $\boldsymbol{\sigma}_{10}$ , est donnée par la condition :

$$\text{Det}(\mathbf{N} \cdot \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) \cdot \mathbf{N}) = 0$$

La condition d'existence d'une perturbation instable de taux de croissance  $\eta$  dans un écoulement moyen à vitesse de déformation  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10}$  s'écrit sous la forme suivante (pour la même orientation des bandes  $\mathbf{N}$  ;  $\mathbb{I}$  est le tenseur identité d'ordre 4) :

$$\text{Det}(\mathbf{N} \cdot \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10}, \eta) \cdot \mathbf{N}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10}, \eta) = \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10})}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} : \mathbb{L}$$

Lorsque le comportement du matériau est élasto-plastique et obéit à la règle de normalité, la condition de bifurcation fait intervenir, en dehors des constantes élastiques et du module d'écroutissage, la normale  $\mathbf{n}$  à la surface de charge plastique. La condition de croissance d'une perturbation fait intervenir la dérivée de cette normale  $d\mathbf{n}/d\boldsymbol{\sigma}$ , i.e. les variations de celle-ci au voisinage de l'état de contrainte relatif à l'écoulement moyen.

La comparaison de ce que donnent l'une et l'autre conditions lorsque la plasticité du matériau est régie par un critère de von Mises ou un critère de Hill anisotrope permet d'analyser l'effet de la forme du critère sur les conditions d'apparition et l'orientation des bandes de localisation : une illustration est donnée sur la figure 1 qui montre notamment que la biaxialité la plus favorable (rapport des contraintes principales) dépend de l'anisotropie. On peut également démontrer, pour l'un et l'autre critère, que les conditions d'existence d'une perturbation de taux de croissance fini sont plus facilement satisfaites que les conditions de bifurcation. Cette thématique a fait l'objet de deux publications (Dequiedt, 2010 et 2011).

---

<sup>3</sup> On renvoie ici et dans ce qui suit à la partie « Références Bibliographiques » de la fin du manuscrit.

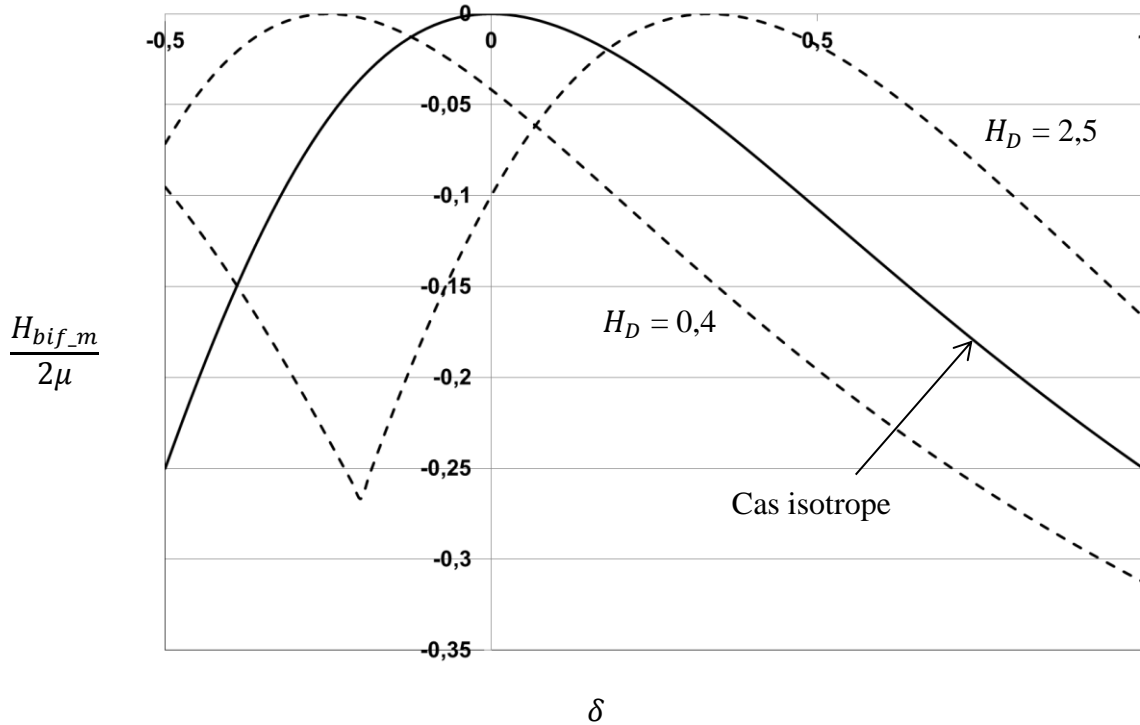


Figure 1 : Coefficient d'érouissage  $H_{bif\_m}$  associé à une bifurcation ( $\mu$  est le module de cisaillement), pour le critère de Hill isotrope transverse et un état de contrainte plane, en fonction du rapport  $\delta$  des deux contraintes principales pour différentes valeurs du degré d'anisotropie (coefficient de Lankford  $H_D$ ).

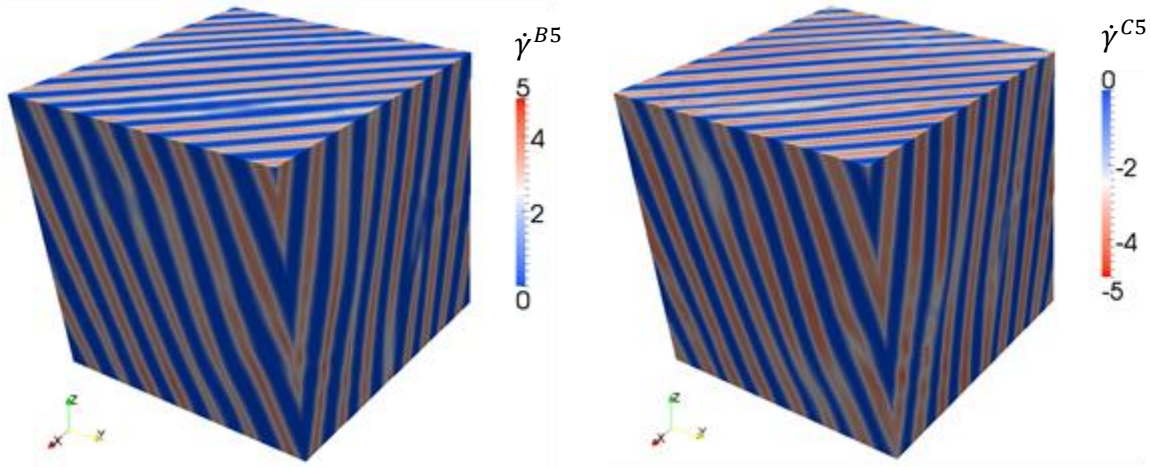
## 2.2. Instabilités et localisation à l'échelle de la microstructure

Dans ce qui précède, le comportement plastique était fondé sur des approches macroscopiques, sans prise en compte du caractère polycristallin du matériau. J'ai donc opté pour intégrer la plasticité cristalline dans mes recherches. Cela consiste à modéliser la déformation plastique des grains d'un métal comme résultant du glissement de plans cristallins les uns sur les autres par le mouvement de dislocations. Une orientation de plan et une direction de glissement forment un système de glissement et le critère de plasticité pour chacun d'eux s'écrit sur la cission résolue, i.e. la contrainte projetée sur le système. L'érouissage est lié à la multiplication des dislocations qui interagissent et se bloquent les unes les autres. Un code de calcul dédié a été développé par des collègues au CEA (Denoual et al., 2006) afin de simuler la réponse mécanique de monocristaux et de polycristaux. Le modèle de comportement utilisé est un modèle dérivé du

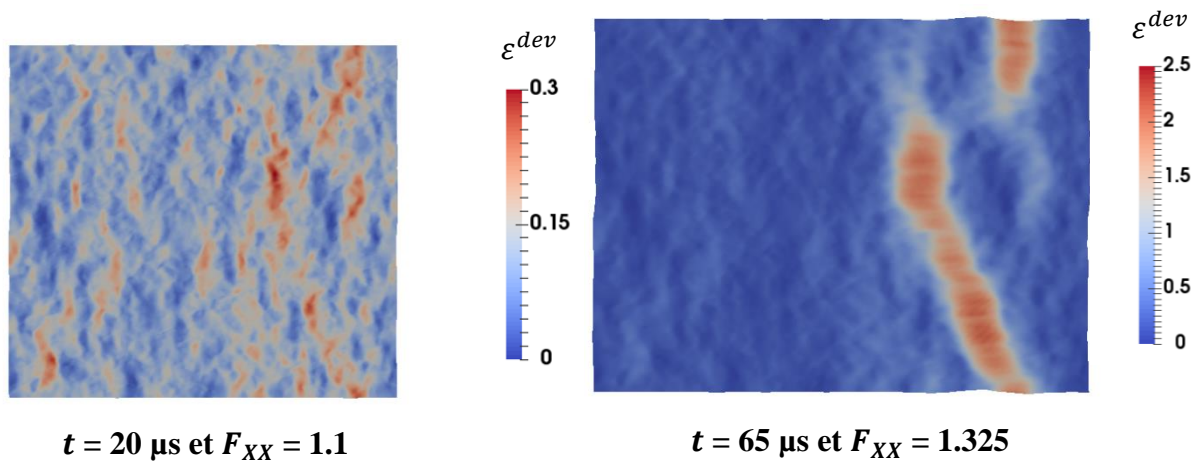
modèle de Teodosiu (Teodosiu et al., 1991) utilisant les densités de dislocations par système comme variables internes.

Le premier type d'études que j'ai entrepris concernait l'apparition d'hétérogénéités de déformation à l'échelle intra-granulaire qui peuvent constituer des germes de la localisation à plus grande échelle. Une des sources possibles du phénomène provient d'un écrouissage croisé fort entre systèmes de plans sécants qui peut favoriser leur ségrégation dans des zones disjointes, lorsque la déformation imposée nécessite l'activation simultanée de plusieurs d'entre eux. Ce phénomène est justifié dans la littérature comme résultant d'une perte de convexité de l'énergie potentielle dont dérive le comportement du monocristal (cf. Petryk et Kurza, 2013, par exemple). Toutefois, j'ai pu l'analyser de manière plus précise pour des matériaux cubique à faces centrées (CFC) en intégrant une estimation fine des coefficients d'interaction entre systèmes issue de calculs de Dynamique des Dislocations (cf. Kubin et al., 2008). Ces calculs aboutissent à l'identification de coefficients d'écrouissage croisé très différents suivant la paire de systèmes de glissement considérée qui impactent la manière dont les systèmes se regroupent lorsque la ségrégation s'initie (cf. figure 2). Cet aspect a fait l'objet de deux publications dans lesquelles des résultats de simulation ont été confrontés à une analyse de bandes de localisation (Dequiedt et al., 2015, Dequiedt, 2018).

Le second type d'études visait à prendre en compte la structure polycristalline du matériau dans la simulation de la localisation dans une plaque en extension. Cette approche permet d'évaluer l'incidence de phénomènes à l'œuvre à l'échelle de la microstructure qui ne sont pas accessibles à une modélisation macroscopique. La transition s'opérant entre l'hétérogénéité de déformation à l'échelle de quelques grains et le développement de zones de localisation à l'échelle de la plaque est mise en évidence par ces calculs (figure 3). Pour de gros grains et à vitesse d'extension modérée, il apparaît un effet de type « maillon le plus faible » : la localisation macroscopique (strictions marquées) s'amorce à partir de zones de l'agrégat où la déformation plastique est intense dès les premiers instants, cette concentration pouvant être reliée à des orientations cristallines favorables par rapport au chargement appliqué. A l'inverse, pour des grains plus petits et à plus forte vitesse de chargement, il apparaît une étape intermédiaire au cours de laquelle des fluctuations de la déformation apparaissent à une échelle de l'ordre de l'épaisseur de la plaque à l'instar de modes d'instabilité qui sont caractérisés par les approches macroscopiques (cf. Mercier et Molinari, 2003, par exemple). Ces résultats sont présentés plus en détails dans Dequiedt et Denoual (2021).



**Figure 2** : Ségrégation des deux systèmes de glissement B5 et C5 dans un monocristal de cuivre de structure CFC.



**Figure 3** : Cartes de déformation déviatoire  $\varepsilon^{dev}$  (norme du tenseur) dans une plaque à différents instants pour une microstructure avec gros grains.

Enfin, lorsque l'on s'intéresse à la localisation de la déformation plastique, se pose la question de l'existence d'une échelle de longueur intrinsèque au comportement qui soit en mesure de contrôler la taille caractéristique des bandes de localisation qui apparaissent. Dans les modèles de plasticité cristalline, une telle échelle peut être introduite par les formulations non-locales faisant intervenir des densités de dislocations polaires (appelées « geometrically necessary dislocations » ou GND) accommodant les gradients de glissement. Une partie de mon travail a consisté à m'approprier ce formalisme et à l'appliquer à des situations élémentaires en vue de pouvoir à terme l'intégrer dans le modèle de plasticité cristalline utilisé dans le code de calcul disponible au CEA (Dequiedt, 2019).

### 3. Publications et Communications.

*En tant que chercheur au CEA-DAM, une part de mes activités est consacrée à des développements scientifiques non-publiables et non présentables lors de conférences scientifiques.*

Le bilan de mon activité de publications est de 12 publications dans des revues reconnues de la section 60, (voir liste dans *Articles de revues internationales à comité de lecture*). A noter aussi que j'ai participé aux conférences DYMAT en 2003, 2006, 2009, 2012 et 2015. Ces conférences, considérées comme la référence pour le comportement dynamique des matériaux, donnent lieu à des actes de 6 à 8 pages publiés dans J. Physique IV et maintenant dans EDJ Web of Conferences. J'ai donc en plus 5 papiers correspondant à mes participations à ces conférences (voir liste dans *Communications lors de congrès internationaux avec actes*).

#### *Articles de revues internationales à comité de lecture :*

1. M. Xavier, S. Mercier, C. Czarnota, S. El Maï, D. Jouve, J.L. Dequiedt, A. Molinari. *Extension of 1D linear stability analysis based on the Bridgman assumption. Applications to the dynamic stretching of a plate and expansion of a ring*, International Journal of Solids and Structures, accepté 2021.
2. J.L. Dequiedt, C. Denoual. *Localization of plastic deformation in stretching sheets with a crystal plasticity approach: competition between weakest link and instable mode controlled process*, International Journal of Solids and Structures, vol. 210-211, pp. 183-202, **2021**.
3. M. Xavier, C. Czarnota, D. Jouve, S. Mercier, J.L. Dequiedt, A. Molinari. *Extension of linear stability analysis for the dynamic stretching of plates: spatio-temporal evolution of the perturbation*, European Journal of Mechanics – A/Solids, vol. 79, 103860, **2020**.
4. J.L. Dequiedt. *Selection of slip systems in confined single crystal gradient plasticity: coupled effects of slip system orientations, latent hardening, and grain boundaries*, Archives of Mechanics, vol. 71, 3, pp. 1-32, Warszawa, **2019**.
5. J.L. Dequiedt. *The incidence of slip system interactions on the deformation of FCC single crystals: system selection and segregation for local and non-local constitutive behavior*. International Journal of Solids and Structures, vol. 141-142, pp. 1-14, **2018**.



6. J.L. Dequiedt. *Statistics of dynamic fragmentation for a necking instability*, International Journal of Solids and Structures, vol. 75-76, pp. 32-44, **2015**.
7. J.L. Dequiedt, C. Denoual, R. Madec. *Heterogeneous deformation in ductile FCC single crystals in biaxial stretching: the influence of slip system interactions*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 83, pp. 301-318, **2015**.
8. J.L. Dequiedt. *Localization in heterogeneous materials: a variational approach and its application to polycrystalline solids*. International Journal of Plasticity, vol. 48, pp. 92-110, **2013**.
9. J.L. Dequiedt. *Localization in elasto-plastic materials: influence of an evolving yield surface in biaxial loading conditions*. International Journal of Solids and Structures, vol. 48, pp. 2324-2332, **2011**.
10. J.L. Dequiedt. *Localization in elasto-plastic materials: influence of the plasticity yield surface in biaxial loading conditions*. International Journal of Solids and Structures, vol. 47, pp. 2937-2951, **2010**.
11. J. Petit, J.L. Dequiedt. *Constitutive relations for copper under shock wave loading: twinning activation*. Mechanics of Materials, vol. 38, pp. 173-185, **2006**.
12. J.L. Dequiedt, C. Stolz. *Propagation of a shock discontinuity in an elasto-plastic material: constitutive relations*. Archives of Mechanics, vol. 56, 5, pp. 391-410, Warszawa, **2004**.

***Communications lors de congrès internationaux avec actes***

J.L. Dequiedt, C. Denoual. *Polycrystal plasticity approach of the sheet necking problem*. DYMAT Winter School, Les Houches, February 9-14, 2020.

J.L. Dequiedt. *Statistics of dynamic fragmentation for a necking instability*. 11<sup>th</sup> International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading (DYMAT), Lugano, September 7-11, 2015, EPJ Web of Conferences, 94, 04009.

J.L. Dequiedt: *Crystalline plasticity and the elasto-plastic behavior of ductile materials*. 41<sup>st</sup> Pyrotechnics Seminar, EUROPYRO, Toulouse, May 4-7, 2015.

J.L. Dequiedt, C. Bolis, F. Dambakizi. *Tresca criterion for plasticity and viscoplasticity – Application to localization in biaxial loading conditions*. 10<sup>th</sup> International DYMAT Conference, Freiburg, September 2-7, 2012, EPJ Web of Conferences, 26, 04002.

C. Bolis, J.L. Dequiedt, J.M. Servas, C. Voltz, N. Cordier, D. Sihachakr. *Determination of damage parameters without numerical simulation using various shock experiments. The lead example*. 9<sup>th</sup> International DYMAT Conference, Brussels, September 7-11, 2009, EDP Sciences, pp. 1271-1276.

J.L. Dequiedt. *Localization in shell expansion in biaxial loading conditions*. 9<sup>th</sup> International DYMAT Conference, Brussels, September 7-11, 2009, EDP Sciences, pp. 1595-1600.

J.L. Dequiedt. *Shock waves and the heterogeneity of materials*. 8<sup>th</sup> International DYMAT Conference, Dijon, September 11-15, 2006, J. Phys. IV France, 134, pp. 237-241.

J. Petit, J.L. Dequiedt. *Constitutive relations for copper with two mechanisms including twinning for a use under shock wave loading*. 7<sup>th</sup> International DYMAT Conference, Porto, September 8-12, 2003, J. Phys. IV France, 110, pp. 105-110.

### **Remise du prix de thèse DYMAT 2003**

#### ***Communications lors de congrès nationaux avec actes***

R. Madec, C. Denoual, J.L. Dequiedt, A. Masson. *Calibration du modèle de Teodosiu par approche multi-échelle*. 24<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique (CFM), Brest, 26-30 août 2019.

J.L. Dequiedt. *Activation des systèmes de glissement dans un monocristal en plasticité confinée*. 24<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique (CFM), Brest, 26-30 août 2019.

#### ***Autres conférences internationales***

M. Xavier, D. Jouve, S. Mercier, C. Czarnota, J.L. Dequiedt, A. Molinari. *A spectral method to study the onset of necking instability for dynamic plane strain*. 13<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics (WCCM XIII), New-York, July 22-27, 2018.

M. Xavier, D. Jouve, S. Mercier, C. Czarnota, J.L. Dequiedt, A. Molinari. *A spectral method to study the onset of necking instability for dynamic plane strain*. ECCOMAS, 6<sup>th</sup> European Conference on Computational Mechanics (ECCM6), Glasgow, June 11-15, 2018.

J.L. Dequiedt, C. Denoual. *Localization of plastic deformation in a stretching metal sheet; a mesoscopic approach*. ECCOMAS Thematic Conference on Computational Mechanics across the Scales (CMCS), Paris, November 7-9, 2017.

J.L. Dequiedt, R. Madec, C. Denoual. *Slip system interactions in FCC single crystals: system selection and segregation for local and non-local constitutive behavior*. 5<sup>th</sup> International Conference on Material Modeling (ICMM5), Rome, June 14-16, 2017.

J.L. Dequiedt, C. Denoual, R. Madec *Heterogeneous deformation of ductile FCC single crystals in biaxial stretching: the influence of slip system interactions*. 8<sup>th</sup> International Conference on Multiscale Materials Modeling (MMM), Dijon, October 9-14, 2016.

#### ***Autres conférences nationales***

J.L. Dequiedt *Sélection des systèmes de glissement dans un monocristal en déformation imposée*. Conférence Matériaux, 19-23 Novembre 2018, Strasbourg.

M. Xavier, D. Jouve, S. El Maï, J.L. Dequiedt, C. Czarnota, S. Mercier, A. Molinari. *Etude de la rupture de cylindres métalliques minces en expansion dynamique : du développement de la striction à la fragmentation*. Conférence Matériaux, 19-23 Novembre 2018, Strasbourg.

J.L. Dequiedt, C. Denoual. *Localisation de la déformation plastique dans une plaque en traction biaxiale – apport de la plasticité cristalline*. Colloque Plasticité, 9-11 avril 2018, Nancy.

J.L. Dequiedt, C. Denoual, R. Madec *Déformation hétérogène dans les monocristaux CFC en traction biaxiale : influence de l'interaction entre systèmes de glissement*. Colloque Plasticité, 28-30 avril 2014, Lyon.

J.L. Dequiedt, C. Denoual, R. Madec, L. Pillon. *Localisation de la déformation dans un matériau métallique polycristallin : phénomènes opérant à l'échelle des grains*. Journées 2013 du groupe de travail MECADYMAT : Comportement et rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques, Brest, 11-12 avril 2013.

J.L. Dequiedt. *Bandes de localisation en chargement biaxial. Etude de l'influence de divers paramètres*. Conférence Matériaux, 18-22 octobre 2010, Nantes.

J. Petit, J.L. Dequiedt. *Modélisation du comportement dynamique d'un cuivre : grandes déformations et maclage sous choc*. Colloque National MECAMAT Ecole de Mécanique des Matériaux, Aussois, 24-28 janvier 2005.

J.L. Dequiedt, J. Petit *Modélisation des effets des chocs sur le cuivre*. Colloque National MECAMAT Ecole de Mécanique des Matériaux, Aussois, 20-24 janvier 2003.

# Partie 2 : Dossier scientifique

---

Cette partie est consacrée à l'exposé plus détaillé de mes principaux travaux de recherche sur les phénomènes de localisation de la déformation plastique. Le premier chapitre est consacré aux approches macroscopiques. Le second développe les travaux s'intéressant à l'échelle de la microstructure, i.e. celle de l'agrégat polycristallin constituant le métal, et mettant en œuvre la modélisation de la plasticité cristalline. Le troisième chapitre présente quelques projets d'études complémentaires dans la continuité des travaux précédents et, dans un quatrième chapitre de conclusion, je me suis efforcé de remettre en perspective l'ensemble du travail effectué. L'ensemble des conventions de notation et identités mathématiques utiles est donné au chapitre 5.

## 1. Localisation à l'échelle macroscopique

Concernant l'approche macroscopique de la localisation, le cas d'enveloppes d'épaisseur finie a fait l'objet des deux thèses de doctorat successives de D. Jouve et M. Xavier (Jouve, 2010, et Xavier, 2019) que j'ai été amené à co-encadrer. Je me suis, pour ma part, intéressé à l'initiation du processus dans un milieu tridimensionnel supposé d'extension infini et à la sensibilité de celle-ci à la forme du critère de plasticité, plus précisément la forme de la surface de charge. Je me suis efforcé de comparer les résultats donnés, en chargement quasi-statique, par un critère de bifurcation et par un critère de croissance de perturbation.

Le contexte scientifique général de la thématique et les principales notions sous-jacentes sont résumés dans le paragraphe 1.1. Les conditions de bifurcation et de croissance d'une perturbation dans un milieu infini sont analysées dans le paragraphe 1.2 pour un comportement plastique non visqueux : le contexte de l'étude est exposé au paragraphe 1.2.1, les critères d'instabilité associés sont explicités tout d'abord dans un cadre général (paragraphe 1.2.2) puis en les particularisant à des surfaces de charge isotrope et anisotrope (paragraphe 1.2.3 et 1.2.4). Les conditions de croissance d'une perturbation dans le cas d'un comportement viscoplastique, qui seront par ailleurs utiles à l'analyse de la localisation dans un monocristal au chapitre 2, sont développées dans le paragraphe 1.3.

## 1.1. Etat de l'art général du domaine

### 1.1.1. Initiation du processus

A l'échelle macroscopique, l'initiation du processus de localisation plastique est classiquement analysée comme étant provoquée par un ensemble de phénomènes que l'on désigne sous le vocable « instabilités » et qui gouvernent l'apparition progressive d'une solution en déformation hétérogène au problème de chargement. Ces instabilités sont liées au caractère adoucissant ou faiblement durcissant du comportement du matériau qui résulte de l'effet combiné de la saturation de l'érouissage, de l'adoucissement thermique (à haute vitesse de déformation, le processus est souvent considéré comme adiabatique et conduit à l'échauffement du matériau) et éventuellement de phénomènes d'endommagement dégradant les propriétés mécaniques. Précisons que ces instabilités sont sensibles au caractère tridimensionnel du comportement, i.e. elles dépendent non seulement de la relation scalaire entre la limite élastique et la déformation plastique équivalente (éventuellement la vitesse de déformation plastique équivalente et la température) mais aussi de la forme de la surface de plasticité dans l'espace des contraintes. En transformations finies, elles sont impactées par la déformation du volume de matière sur lequel s'applique le chargement (ce qui se traduit par le fait que les critères d'instabilité s'écrivent sur la contrainte nominale ou la première contrainte de Piola-Kirchhoff).

Lorsqu'elles apparaissent à l'échelle d'une structure de dimension finie, les instabilités font intervenir, en plus du comportement, des effets liés aux conditions de bords. On applique alors l'analyse à la structure complète qui, dans le cas d'enveloppes en extension, est souvent assimilée localement à une plaque plane en traction dans son plan. Lorsque les instabilités se présentent sous forme d'amincissements localisés, on parle de « strictions ».

Pour des enveloppes minces, le problème peut être étudié dans un formalisme en contrainte plane homogène dans l'épaisseur aboutissant à l'écriture d'un problème bidimensionnel. Pour des barreaux, le problème peut être étudié en contrainte uniaxiale aboutissant à l'écriture d'un problème unidimensionnel. Toutefois, cette réduction de dimension ne tenant pas compte de la triaxialité des contraintes apparaissant dans les strictions lorsque la courbure des surfaces libres est localement forte, il est possible d'affiner la modélisation en incorporant une contrainte hydrostatique additionnelle ; une formule approchée de cette contrainte en fonction de la courbure est donnée par Bridgman (1952)<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Une écriture unidimensionnelle du problème de striction en déformation plane est également proposée par Audoly et Hutchinson (2016) : la triaxialité des contraintes est reliée à un terme de gauchissement des sections apparaissant dans le développement limité de la solution en fonction du rapport d'aspect de la structure.

Par ailleurs, la notion d'instabilité fait plus précisément référence à trois types de propriétés qui ne sont pas rigoureusement identiques :

- L'apparition de bifurcations, ou de pertes d'unicité de la réponse incrémentale en temps. Ces bifurcations sont mises en évidence le plus souvent dans le cas de chargements quasi-statiques et conduisent soit à une non-unicité de la réponse homogène au problème de chargement soit à l'apparition de solutions en déformation localisée. Des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de bifurcations ont été données par Hill, 1958. Différents critères associés aux bifurcations homogènes et localisées et leurs inclusions respectives sont discutés par exemple par Bigoni et Hueckel, 1991, ou Neilsen et Schreyer, 1993. L'analyse des bifurcations a été mise en œuvre dans de nombreuses études s'intéressant à la formation de bandes de localisation dans un milieu tridimensionnel pour des comportements divers couplant, pour certains, plasticité et endommagement (Rudnicki et Rice, 1975, Rice, 1976, Doghri et Billardon, 1995, ou Haddag et al., 2009, pour ne citer que quelques exemples). Elle a également été appliquée à la striction localisée dans des plaques minces sous une hypothèse de contrainte plane homogène dans l'épaisseur (Storen et Rice, 1975) et à des modes de striction périodiques dans des plaques épaisses en déformation plane (Hill et Hutchinson, 1975).
- L'instabilité proprement dite à savoir l'existence, en chargement quasi-statique ou dynamique, de perturbations de la solution homogène pouvant croître indéfiniment en amplitude aussi petites soient-elles à l'instant initial (on fait référence à la notion de stabilité au sens de Lyapounov). Les modes de perturbation ayant les taux de croissance les plus importants sont supposés gouverner la localisation. Le cas quasi-statique est, par exemple, développé dans les travaux de Hutchinson et Obrecht (1977) pour des barres et dans ceux de Dudzinski et Molinari (1991) pour des plaques en contrainte plane. Le cas dynamique est l'objet des nombreux travaux d'analyse linéaire de stabilité (A.L.S.) dans la suite de ceux de Fressengeas et Molinari (1994), Shenoy et Freund (1999) et Mercier et Molinari (2003). Moyennant de supposer que les perturbations instables se développent sur des temps caractéristiques beaucoup plus courts que le temps caractéristique de la réponse homogène (hypothèse dite de « découplage des échelles de temps »), leur évolution est gouvernée par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants ; l'existence de modes instables est alors analysé à chaque instant du chargement. L'instant d'apparition de la localisation est caractérisé en se donnant en général un critère sur le taux de croissance instantané des perturbations (Guduru et Freund, 2002) ou leur amplitude obtenue en intégrant ce taux de croissance au cours du temps pour une longueur d'onde donnée (El Maï et al., 2014)<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Le même type de raisonnement est appliqué à la localisation conduisant à la fragmentation de jets de charges creuses dans Petit et al. (2005).

- L'évolution de défauts initiaux (défauts géométriques ou hétérogénéités des propriétés mécaniques) qui constituent des sites potentiels de localisation de la déformation. Les relations gouvernant la croissance d'un défaut d'épaisseur le long d'une bande ont été établies par Marciniak et Kuczynski (1967) dans un formalisme en contrainte plane et en chargement quasistatique pour caractériser la striction d'une plaque mince<sup>6</sup>. L'approche est classiquement utilisée pour la construction d'abaques appelées « diagrammes limites de formage » visant à prévoir le risque de déchirement de tôles minces au cours d'opérations d'emboutissage. Elle a été appliquée à divers matériaux (parmi les nombreux travaux, on peut citer Sowerby et Duncan, 1971, Hutchinson et Neale, 1978, ou Barlat, 1987) et permet d'identifier, pour un comportement donné, une déformation limite pour différents trajets de chargements dans le plan des déformations principales : cette déformation est la déformation maximale atteinte en dehors de la bande (qui, elle, se déforme indéfiniment). Une modélisation un peu plus élaborée incorporant les effets d'inertie et la triaxialité des contraintes dans la bande par la formule approchée de Bridgman a permis à Jacques (2020) de mettre en évidence la sensibilité de la déformation limite à la vitesse de déformation et à la taille de la bande rapportée à l'épaisseur. Notons qu'un désavantage de ce type d'approche réside dans le fait que les conditions de localisation dépendent certes du comportement du matériau et des conditions de chargement mais également de l'amplitude du défaut initial dont il est souvent difficile d'estimer un ordre de grandeur représentatif de la physique.

D'une façon générale, le lien entre les notions de bifurcation et d'instabilité est une question complexe, une correspondance précise étant établie pour les systèmes conservatifs, i.e. dont le comportement est réversible et dérive d'une énergie potentielle (cf. Nguyen, 2000, par exemple) : pour un chargement quasistatique, l'apparition d'une bifurcation est alors concomitante avec une perte de convexité de l'énergie qui conduit à une perte de stabilité de la solution principale.

Signalons enfin que, dans le cas de processus irréversibles de type plasticité ou endommagement fragile, i.e. pour lesquels, à partir d'un état de chargement donné, certaines variables mécaniques ne peuvent que croître, l'analyse de la stabilité au sens de Lyapounov ne peut être menée qu'à condition de supposer que ces dernières variables ont un taux de croissance strictement positif aussi bien dans l'écoulement de base que dans l'écoulement perturbé. En effet, les relations d'évolution de perturbations infinitésimales ne s'explicitent sous forme d'équations linéaires qu'à la condition d'exclure toutes les phases au cours desquelles l'évolution de l'une des variables précédentes s'annule (décharge élastique dans le cas de la plasticité). Pour remédier à cette difficulté, on peut caractériser la stabilité au sens de Drucker (Drucker, 1959), qui est la nécessité de fournir un travail mécanique positif (aussi bien en charge plastique qu'en décharge élastique dans le cas de la plasticité) pour perturber l'écoulement de base : dans le cas particulier où le

---

<sup>6</sup> Dans le même esprit, dans un milieu infini tridimensionnel, la croissance de bandes de localisation dans lesquelles préexiste un faible endommagement ductile (porosité) a été étudiée par Yamamoto (1978) et Pan et al. (1983) par exemple.



comportement peut être dérivé d'une énergie potentielle et en chargement quasi-statique, sont stables au sens de Drucker les solutions qui correspondent à des minima locaux de cette énergie. Ce type d'approche, qui ne permet pas d'explicitier la loi d'évolution d'un mode d'instabilité mais seulement d'identifier des conditions nécessaires à son apparition, ne sera pas développé dans le présent document.

### 1.1.2. Phases ultimes du processus de localisation

En chargement dynamique, dans les phases qui suivent l'apparition des premières instabilités, d'autres phénomènes entrent en jeu qui conduisent à une localisation marquée puis à la fragmentation de la structure. Dans le cas d'enveloppes minces, ces phénomènes sont :

- la concentration de la déformation dans des zones de localisation induites par l'instabilité plastique (zones d'une largeur de l'ordre de grandeur de l'épaisseur en général) qui se comportent, vis-à-vis du reste de la structure, comme des points faibles (i.e. reprenant des efforts plus faibles),
- la décharge élastique de certaines parties de la structure au voisinage de ces points faibles,
- l'interruption du processus de localisation en certains des points faibles,
- la rupture d'autres points faibles par des processus d'endommagement dépendant du matériau et des conditions de chargement.

L'ensemble de ces phases fait intervenir des fronts de relaxation des contraintes partant des points faibles qui tendent à inhiber le développement de la localisation et de la rupture dans les zones qu'ils balaient (on parle « d'écrantage » des points faibles présents dans ces zones).

L'apparition de décharges élastiques et l'inhibition de certaines zones de localisation a été mise en évidence au cours de simulations de strictions en déformation plane par Dalle (2006) et Rodriguez-Martinez et al. (2013). Concernant la phase de fragmentation proprement dite, les analyses présentées dans la littérature, qui permettent de justifier les distributions de tailles de fragments observées expérimentalement (voir par exemple les expansions d'anneaux de Wesenberg et Sagartz, 1977, et plus récemment de Grady et Benson, 2003, ou Zhang et Ravi-Chandar, 2006), s'appuient sur les premiers travaux de Mott (1947). Celui-ci analyse l'écrantage dans le cas unidimensionnel d'un brin et d'une distribution aléatoire de points de rupture instantanée activés à des instants différents. Ces travaux ont été étendus ensuite par Kipp et Grady (1985) au cas d'une rupture non-instantanée et dissipant du travail plastique (que l'on pourrait modéliser en chaque point de rupture par une loi dite de « zone cohésive » relâchant progressivement la contrainte au fur et à mesure de l'ouverture du défaut). Une analyse de

l'écrantage dans ce cas de figure a été menée au CEA/Gramat en collaboration avec l'Ecole des Mines de St Etienne au cours du travail de thèse de J. Vermunt (cf. Damamme et al., 2019) : elle a notamment permis de préciser la manière dont se comportent les défauts partiellement ouverts lorsque se rejoignent les fronts de relaxation qu'ils émettent.

L'analyse de la fragmentation fait actuellement l'objet de travaux complémentaires au CEA/Gramat (thèse en cours de D.P. Zappa) afin d'intégrer, entre autres, les effets de courbure qui peuvent induire une légère rotation des fragments impactant leur direction d'éjection (dans le cas où l'application concerne une charge militaire par exemple). C'est une thématique dans laquelle je m'impliquerai à l'avenir, j'y reviendrai au chapitre 3.

Une des limites des modèles de fragmentation précédents réside dans le fait qu'ils postulent une répartition aléatoire des points de rupture potentiels. Pourtant, lorsque la localisation est initiée par des modes d'instabilité de la structure, leurs positions respectives sont liées aux longueurs d'onde de ces mêmes modes. Une analyse des distances entre points de rupture potentiels générés par une perturbation multimodale a été proposée dans la thèse de S. El Maï (cf. El Maï et al., 2014) ; une analyse du phénomène d'écrantage pour une telle famille de points est esquissée dans Dequiedt (2015)<sup>7</sup>.

### 1.1.3. Travaux encadrés

Concernant le développement des instabilités, j'ai été amené à suivre deux thèses de doctorat :

- celle de Dominique Jouve qui étudiait la striction dans une plaque en bi-traction dans son plan par l'A.L.S. dans un formalisme tridimensionnel ; son travail a mis en évidence d'une part la disparition d'un mode dominant de longueur d'onde finie en déformation plane lorsque l'on se trouve dans des conditions de comportement strictement adoucissant (Jouve, 2013) et d'autre part la forte sensibilité des conditions d'instabilité à la biaxialité du chargement dans le plan de la plaque lorsque la plasticité est régie par une loi d'écoulement « de type J2 » (critère de von Mises et vitesse de déformation plastique proportionnelle au déviateur de contrainte<sup>8</sup>) : lorsque la biaxialité augmente, le taux de croissance des modes instables diminue et la longueur d'onde dominante augmente sensiblement (Jouve, 2015) ; cette dernière propriété permet en outre de valider les résultats établis dans un cadre bidimensionnel sous une hypothèse de plaque mince

---

<sup>7</sup> C'est un début d'étude que je n'ai pas poussé suffisamment loin pour justifier de le développer dans le présent mémoire.

<sup>8</sup> Un cas particulier de ce type de loi est la loi normale avec un potentiel viscoplastique fonction de la contrainte de von Mises.

(autrement dit lorsque les longueurs d'onde considérées sont grandes devant l'épaisseur, cf. Dudzinski et Molinari, 1991).

- celle de Mathieu Xavier qui étudiait la striction dans une plaque en déformation plane en s'affranchissant de la condition de séparation des échelles de temps ; il a développé une méthode de résolution des équations de l'A.L.S à coefficients dépendant du temps ; son travail a notamment permis d'analyser l'évolution au cours du chargement de perturbations préexistant à l'instant initial et de mettre en évidence l'incidence sur leur amplitude finale de la première phase au cours de laquelle la réponse homogène de la structure est encore stable (Xavier et al., 2020).

L'étude présentée dans les paragraphes qui suivent visait, en parallèle des travaux de Dominique Jouve, à préciser les liens entre conditions de localisation, triaxialité du chargement et forme de la surface de plasticité dans l'espace des contraintes.

## **1.2. Bandes de localisation et sensibilité à la forme de la surface de charge plastique**

### **1.2.1. Etat de l'art et contexte de l'étude**

Le lien entre la localisation et la surface de charge plastique est un sujet largement documenté dans la littérature. Le point de départ de ces études semble être la constatation par Hill (1952) de l'impossibilité de prédire une localisation sous forme de bande de striction dans une plaque mince lorsque le matériau est rigide plastique et obéit à une loi J2 et lorsque les deux contraintes principales sont positives dans le plan de la plaque. Dans ce cas, il est en effet impossible de trouver une solution bifurquée qui satisfasse simultanément la continuité du champ de déplacement tangentiel le long de la bande et la règle de normalité (incrément de déformation colinéaire au déviateur de contrainte dans le cas du critère J2). D'une façon plus générale, Hill a mis en évidence le fait que, lorsque des bandes peuvent se développer, elles sont nécessairement orientées selon une direction d'extension nulle en vertu de la règle d'écoulement. Ce type de raisonnement a été repris, par exemple, par Cazacu et Rodriguez-Martinez (2019) pour caractériser l'incidence de la forme de la surface de charge sur l'orientation des bandes dans le cas d'une contrainte uniaxiale de direction quelconque dans le plan de la plaque.

L'approche de Marciniak a été plus tard mise en œuvre par de nombreux auteurs en utilisant différentes formes de surface de charge plastique. D'une manière générale, celle-ci, qui postule l'existence d'un défaut initial, prédit des conditions de localisation plus favorables qu'un critère en bifurcation. Marciniak et Kuczynski (1967) ont évalué les déformations limites dans le cas

d'un comportement isotrope transverse modélisé par un critère de Hill anisotrope (Hill, 1948) pour un chargement equi-biaxial (les deux déformations principales sont égales à tout instant) et montré que celles-ci dépendaient du degré d'anisotropie de manière sensible, i.e. du rapport des contraintes seuil dans le plan de la plaque et dans la direction normale. La confrontation à des résultats expérimentaux a été effectuée par exemple par Lee et Zaverl (1982) qui s'efforcent en outre de donner au défaut d'épaisseur un ordre de grandeur en accord avec des mesures ; ils mettent en évidence le caractère trop conservatif de l'approche (i.e. elle surestime la déformation limite) dans le cas de deux déformations principales positives (partie droite du diagramme de formage) notamment pour l'aluminium. Par ailleurs, d'autres auteurs (Parmar et Mellor, 1978, Barlat, 1987, par exemple) ont mis en œuvre une généralisation du critère de Hill (Hill, 1979) s'appliquant à des cas de chargement tels que les directions des déformations principales sont confondues avec les directions d'orthotropie : ce critère fait intervenir les contraintes principales avec un exposant ajustable, ce qui modifie la courbure de la surface de charge et impacte de manière très sensible la partie droite du diagramme de formage<sup>9</sup>. La majorité des études précédemment évoquées s'intéresse à des défauts perpendiculaires à la direction de déformation principale majeure. Il a pu être montré que cette orientation était la plus favorable au développement de la striction (i.e. donnait la déformation limite la plus faible) dans le cas d'un comportement isotrope transverse mais que cela n'était pas systématiquement le cas pour un comportement orthotrope quelconque même lorsque les directions principales sont alignées avec les directions d'orthotropie (cf. Barata da Rocha et al., 1984-1985, Lian et al., 1989, par exemple). Signalons enfin que Kuroda et Tvergaard (2000) ont étendu l'analyse au cas de chargements pour lesquels les directions principales sont inclinées par rapport aux directions d'orthotropie et ont intégré la prise en compte d'une rotation des axes d'orthotropie.

Les principales tendances mises en évidence avec l'approche de Marciniak et Kuczynski et le critère de Hill quadratique sont retrouvées par l'analyse linéaire de stabilité bidimensionnelle (Dudzinski et Molinari, 1991, ou Boudeau et Gelin, 2000) : dans le cas isotrope transverse, la déformation limite, caractérisée par un critère sur le taux de croissance des perturbations, évolue dans le même sens en fonction du rapport des contraintes seuil dans le plan et hors plan. Par ailleurs, l'évolution de l'orientation des bandes dans le plan de la plaque par rapport à celle de la déformation principale majeure en fonction des coefficients d'anisotropie est cohérente entre les deux approches (cf. Dudzinski et Molinari, 1991, et Barata da Rocha et al., 1984-1985).

La sensibilité de la localisation à la surface de charge plastique apparaît de manière explicite dans l'analyse des bifurcations pour un comportement plastique non visqueux dans un formalisme tridimensionnel ; en effet, la normale à cette surface intervient dans le module tangent reliant l'incrément de déformation et l'incrément de contrainte (cf. Rice, 1976, ou Rice et Rudnicki, 1980). Par ailleurs, la comparaison entre les conditions de bifurcation et les conditions de développement d'une perturbation a été formalisée par Barbier et al. (1998) dans un cas général pour une instabilité sous forme de bandes. Les auteurs montrent d'une part que les conditions

---

<sup>9</sup> Dans le cas isotrope, un exposant infini redonnerait le critère de Tresca.

d'apparition d'une bifurcation sont équivalentes à des conditions d'existence d'une perturbation de taux de croissance infini et, d'autre part, que la loi d'évolution d'une perturbation fait intervenir à la fois le module tangent mais également ses variations autour de l'état de chargement relatif à l'écoulement moyen homogène.

Je me suis proposé de préciser l'influence de la surface de charge plastique sur l'apparition d'une bifurcation et l'existence de perturbations instables en particulierisant la démarche de Barbier et al. (1998) au cas d'un comportement élasto-plastique écrouissable ; dans les développements qui suivent, dont les premiers éléments ont été publiés dans Dequiedt (2011), on considère successivement le critère de von Mises et le critère de Hill (1948). On cherche à identifier un coefficient d'écrouissage limite et une orientation des bandes associées.

L'approche est développée dans le cadre des petites déformations élasto-plastiques. Le chargement étant appliqué en régime quasi-statique, on suppose que la température reste constante et les équations de la thermique ne sont pas prises en compte. On exclut les décharges élastiques aussi bien pour l'écoulement homogène que pour l'écoulement perturbé, ce qui permet de mettre en œuvre une analyse linéaire de perturbation.

### 1.2.2. Conditions générales d'apparition des bandes

On suppose que l'état mécanique du matériau est caractérisé par le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , le tenseur de déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et une variable interne scalaire notée  $\alpha$  caractérisant l'écrouissage. On se donne une surface de charge définie par une fonction  $F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$  et on exprime dans un premier temps la règle d'écoulement dans un cadre suffisamment général pour englober aussi bien la plasticité associée que la plasticité non-associée. On autorise un écrouissage négatif dont la vocation est de rendre compte de manière générique d'un effet adoucissant du comportement.

Le comportement s'écrit sous la forme qui suit dans laquelle  $\mathbb{C}$  est le tenseur d'élasticité et  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})$  est la direction de l'écoulement plastique dans l'espace des déformations. On suppose que l'évolution de la variable interne est proportionnelle à celle du multiplicateur plastique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \tilde{B}(\alpha). \quad (1.1)$$

On définit  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})$  de telle sorte qu'il ne dépende que de la direction de  $\boldsymbol{\sigma}$  ; il s'agit donc d'une fonction homogène de degré 0 en  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  et la fonction de charge  $F$  satisfont la condition de charge plastique (dite condition de Kuhn-Tucker) :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0. \quad (1.2)$$

On suppose que l'écoulement est isotrope ; dans ce cas, la fonction de charge est définie par une relation de la forme :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = f(\boldsymbol{\sigma}) - Y(\alpha), \quad (1.3)$$

dans laquelle la fonction  $f$  est homogène de degré 1 en  $\boldsymbol{\sigma}$  ; la dépendance de  $Y$  en  $\alpha$  traduit l'écoulement du matériau.

Lors d'un chargement pour lequel on exclut les décharges élastiques, l'état de contrainte se trouve à tout instant sur la surface de charge. Cette condition permet d'identifier le multiplicateur plastique. En effet :

$$\dot{F} = \frac{df}{d\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{dY}{d\alpha} \dot{\alpha} = 0. \quad (1.4)$$

En utilisant les relations (1.1), on en déduit que :

$$\lambda = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{(\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}) + \tilde{A}(\alpha) \tilde{B}(\alpha))} ;$$

$\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma})$  et  $\tilde{A}(\alpha)$  désignent la normale à la surface de charge et le module d'écoulement ( $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma})$  est donc une fonction homogène de degré 0 en  $\boldsymbol{\sigma}$ ) :

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{df}{d\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{et} \quad \tilde{A}(\alpha) = \frac{dY}{d\alpha}. \quad (1.5)$$

En éliminant le multiplicateur plastique, les relations de comportement s'écrivent in fine sous la forme incrémentale suivante ( $\mathbb{L}$  est un tenseur du quatrième ordre et  $\mathbf{B}$  du second ordre) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

avec (cf. Rice et Rudnicki, 1980) :

$$\mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \mathbb{C} - \frac{1}{(\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}) + \tilde{A}(\alpha) \tilde{B}(\alpha))} (\mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})) \otimes (\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbb{C}),$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \frac{\tilde{B}(\alpha)}{(\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}) + \tilde{A}(\alpha) \tilde{B}(\alpha))} \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) : \mathbb{C}. \quad (1.6)$$

On s'intéresse à un chargement du matériau en contrainte ou en déformation moyenne imposée et on suppose que le problème admet une solution homogène  $(\boldsymbol{\varepsilon}_1(t), \boldsymbol{\sigma}_1(t), \alpha_1(t))$  à tout instant, appelée aussi « écoulement moyen ». A l'instant  $t = 0$ , on suppose que la contrainte et la variable interne sont telles que l'on se trouve sur la surface de charge (et de même à tout instant du chargement).

En vertu des relations (1.6), les champs  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  et  $\delta\alpha$  relatifs à une perturbation infinitésimale de cet écoulement sont reliés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_1(t), \alpha_1(t)) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial(\mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t))}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial(\mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t))}{\partial\alpha} \delta\alpha \\ \delta\dot{\alpha} &= \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_1(t), \alpha_1(t)) : \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial(\mathbf{B}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t))}{\partial\boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial(\mathbf{B}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t))}{\partial\alpha} \delta\alpha.\end{aligned}\quad (1.7)$$

A une localisation en réseau de bandes de normale  $\mathbf{N}$  correspond un champ de déplacement, de direction  $\mathbf{M}$  supposée constante, de la forme :

$$\delta\mathbf{u} = \delta\tilde{u}(t)\mathbf{M} e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}}. \quad (1.8)$$

Le champ de déformation associé s'écrit :

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = i \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}} = ik\delta\tilde{u}(t) \{\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}\}_S e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}}. \quad (1.9)$$

Si on fait l'hypothèse que, à  $t = 0$ , les champs de contraintes  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  et de variable interne  $\delta\alpha$  ont la même dépendance spatiale que le champ de déformation  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  (en  $e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}}$ ), alors, d'après les relations (1.7), cela se vérifie à tout instant. En conséquence, la condition d'équilibre en contrainte s'écrit (cf. Rice, 1976) :

$$\mathbf{N} \cdot \delta\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (1.10)$$

Une bifurcation de la solution homogène à  $t = 0$  sous forme d'un réseau de bandes est un champ de déplacement infinitésimal de la forme (1.8) satisfaisant :

$$\delta\mathbf{u}(t = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \delta\dot{\mathbf{u}}(t = 0) \neq 0. \quad (1.11)$$

Il existe un tel champ à la condition que les vecteurs  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$  satisfassent la condition suivante (on a posé :  $\boldsymbol{\sigma}_1(t = 0) = \boldsymbol{\sigma}_{10}$  et  $\alpha_1(t = 0) = \alpha_{10}$ ) :

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}) \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (1.12)$$

La condition d'existence d'une bifurcation de normale  $\mathbf{N}$  s'écrit donc (Rice, 1976) :

$$\text{Det}(\mathbf{N} \cdot \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}) \cdot \mathbf{N}) = 0, \quad (1.13)$$

et la direction  $\mathbf{M}$  du champ de déplacement est le vecteur propre de valeur propre nulle du tenseur  $\mathbf{N} \cdot \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}) \cdot \mathbf{N}$ .

On s'intéresse maintenant à l'évolution de perturbations initiales ( $\delta\mathbf{u}(t = 0) \neq 0$ ).

On suppose en outre que l'on étudie des perturbations se développant sur des temps suffisamment courts de telle sorte que l'on puisse assimiler l'écoulement moyen à son développement limité au premier ordre autour de l'état initial  $t = 0$  :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_1(t) &\approx \boldsymbol{\varepsilon}_{10} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10}t && \text{avec} && \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10}t \ll \boldsymbol{\varepsilon}_{10}, \\ \boldsymbol{\sigma}_1(t) &\approx \boldsymbol{\sigma}_{10} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}t && \text{avec} && \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}t \ll \boldsymbol{\sigma}_{10}, \\ \alpha_1(t) &\approx \alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}t.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Avec cette hypothèse, les champs  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\delta\boldsymbol{\sigma}$  et  $\delta\alpha$  sont reliés par la relation (1.7) qui se développe sous la forme :

$$\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \left( \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}) + \left( \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10} + \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \alpha} \dot{\alpha}_{10} \right) t \right) : \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial(\mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial(\mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10})}{\partial \alpha} \delta\alpha \\ \delta\dot{\alpha} &= \left( \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}) + \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \alpha} \dot{\alpha}_{10} \right) t \right) : \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial(\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial(\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10})}{\partial \alpha} \delta\alpha.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Dans le cas le plus général, les équations différentielles en temps (1.15) ont des coefficients dépendant du temps et rien ne garantit que l'on puisse trouver une solution du système (1.10)-(1.15) de la forme (1.9) avec une direction de déplacement  $\mathbf{M}$  constante.

En revanche, supposons que l'on se place dans un cas tel que la solution homogène n'induit pas de variation en temps du module  $\mathbb{L}$ . Autrement dit :

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10} = 0, \quad \frac{\partial \mathbb{L}}{\partial \alpha} \dot{\alpha}_{10} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_1(t), \alpha_1(t)) = \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}).\tag{1.16}$$

Cette condition est notamment vérifiée si la solution homogène n'induit pas de variation en temps des tenseurs  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma})$  d'une part et du produit  $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}$  d'autre part :

$$\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}_1(t)) = \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}), \quad \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}_1(t)) = \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}), \quad \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}(\alpha_1(t)) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}(\alpha_{10}).\tag{1.17}$$

Les tenseurs  $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma})$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma})$  étant homogènes de degré 0 en  $\boldsymbol{\sigma}$ , ils vérifient la propriété :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}}{d\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} = 0.\tag{1.18}$$

Les deux premières conditions (1.17) sont donc vérifiées dans le cas d'un chargement « radial » en contrainte, c'est-à-dire tel que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}$  est proportionnel à  $\boldsymbol{\sigma}_{10}$ .

En notant que  $\dot{Y} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \dot{\lambda}$ , la troisième condition (1.17) est satisfaite pour un écrouissage évoluant linéairement avec le multiplicateur plastique ; dans ce cas, le module  $\mathbb{L}$  est indépendant de la variable d'écrouissage.



La première des relations (1.15) s'écrit alors sous la forme d'une équation différentielle en temps à coefficients constants :

$$\delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) : \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{\partial(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{\partial \sigma} : \delta \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.19)$$

On recherche des modes instables sous la forme suivante (cf. Bai, 1982, Molinari, 1988, Rousselier, 1995, par exemple) :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \delta \tilde{u} \mathbf{M} e^{ikx \cdot \mathbf{N} + \eta t}, \\ \delta \boldsymbol{\epsilon} &= i \delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} e^{ikx \cdot \mathbf{N} + \eta t} = ik \delta \tilde{u} \{ \mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \}_S e^{ikx \cdot \mathbf{N} + \eta t}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

La perturbation en contrainte est recherchée sous la forme :

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = i \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} e^{ikx \cdot \mathbf{N} + \eta t}. \quad (1.21)$$

La relation (1.19) donne :

$$\left( \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{\partial \sigma} \right) : \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{L} : \delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (1.22)$$

On exprime la perturbation en contrainte en fonction de la perturbation en déformation en inversant la relation (1.22) :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}, \eta) : \delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \text{avec :} \\ \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}, \eta) &= \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{\partial \sigma} \right)^{-1} : \mathbb{L}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

La condition d'équilibre appliquée à la perturbation s'écrit :

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}, \eta) \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (1.24)$$

Il existe une telle perturbation de normale  $\mathbf{N}$  à la condition que :

$$\text{Det}(\mathbf{N} \cdot \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}, \eta) \cdot \mathbf{N}) = 0. \quad (1.25)$$

Comme cela a déjà été mis en évidence par Barbier et al. (1998), il ressort des relations (1.13), (1.23) et (1.24) que la condition de bifurcation est équivalente à une condition d'existence d'une perturbation de taux de croissance infini ou du moins très grand devant la vitesse de déformation associée à l'écoulement de base ( $\eta \gg \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}\|$ ).

En revanche, tandis que la condition de bifurcation ne fait intervenir que le module le long de l'écoulement moyen, la condition de croissance d'une perturbation fait intervenir les variations de ce module au voisinage de l'écoulement moyen (dans l'espace des contraintes) par l'intermédiaire du terme qui s'explique sous la forme (dans ce qui suit, on a tenu compte de la symétrie du tenseur d'élasticité  $C_{ijkl} = C_{klij}$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10})}{\partial\sigma} &= -\frac{1}{(\tilde{\mathbf{Q}}:\mathbb{C}:\tilde{\mathbf{P}}+\tilde{A}\tilde{B})} \left( (\tilde{\mathbf{Q}}:\mathbb{C}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10}) \left( \mathbb{C}:\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\sigma} \right) + (\mathbb{C}:\tilde{\mathbf{P}}) \otimes \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10}:\mathbb{C}:\frac{d\tilde{\mathbf{Q}}}{d\sigma} \right) \right) \\ &+ \frac{(\tilde{\mathbf{Q}}:\mathbb{C}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{10})}{(\tilde{\mathbf{Q}}:\mathbb{C}:\tilde{\mathbf{P}}+\tilde{A}\tilde{B})^2} \left( (\mathbb{C}:\tilde{\mathbf{P}}) \otimes \left( \tilde{\mathbf{Q}}:\mathbb{C}:\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\sigma} + \tilde{\mathbf{P}}:\mathbb{C}:\frac{d\tilde{\mathbf{Q}}}{d\sigma} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.26)$$

En d'autres termes, elle fait intervenir les variations de la normale à la surface de charge d'une part et de la direction d'écoulement plastique d'autre part au voisinage de l'état de contrainte associé à l'écoulement moyen.

### 1.2.3. Application au cas de l'élasticité isotrope et du critère de von Mises

On particularise maintenant l'approche du paragraphe 1.2.2 au cas d'un comportement élastique isotrope et d'un écoulement plastique obéissant au critère de von Mises et à la loi de normalité. L'analyse tridimensionnelle des bifurcations, qui est reprise ici, a par ailleurs déjà été développée par Harireche et Loret (1992) (qui présentent des courbes similaires à celles de la figure 1.1). Plus précisément, la déformation plastique est isochore (donc  $\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0$ ) et l'élasticité s'écrit sous la forme suivante dans laquelle  $\boldsymbol{\varepsilon}^d$  désigne le déviateur du tenseur de déformation ( $\boldsymbol{\varepsilon}^d = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} = K \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}^p). \quad (1.27)$$

$K$  est le coefficient de compressibilité et  $\mu$  le module de cisaillement. On exprimerait le tenseur d'élasticité sous la forme :

$$\mathbb{C} = 3K \left( \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + 2\mu \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right). \quad (1.28)^{10}$$

La surface de charge plastique est fonction du déviateur de contrainte  $\mathbf{s}$  :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\mathbf{s}) = \sigma^{\text{éq}} = \sqrt{\mathbf{s}:\mathbf{s}}. \quad (1.29)$$

<sup>10</sup> Dans cette relation, les tenseurs du quatrième ordre  $\frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$  et  $\left( \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)$  sont les tenseurs de projection qui associent à tout tenseur du second ordre sa partie isostatique (ou valeur moyenne) et sa partie déviatoire respectivement.

La règle de normalité stipule que la direction de l'écoulement plastique est confondue avec la normale à la surface de charge ( $\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma})$ ), on parle également de plasticité associée ; on observe que, dans ce cas, le tenseur  $\mathbb{L}$  défini par la relation (1.6)<sub>1</sub> est symétrique, i.e.  $L_{ijkl} = L_{klij}$ . Dans le cas du critère de von Mises :

$$\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{\sigma^{éq}}. \quad (1.30)^{11}$$

On suppose que le taux d'évolution de la variable interne est égal au multiplicateur plastique et que l'écroutissage est linéaire :

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \quad \text{et} \quad Y(\alpha) = Y_0 + H\alpha \quad \text{d'où :} \quad \tilde{A}(\alpha) = H \quad \text{et} \quad \tilde{B}(\alpha) = 1. \quad (1.31)$$

Dans les relations (1.31), la limite élastique  $Y_0$  et le coefficient d'écroutissage  $H$  peuvent être sensibles à l'histoire du matériau ; en particulier, un matériau pré-écroui aura une limite élastique plus élevée et un coefficient d'écroutissage plus faible (diminution de l'écroutissage avec la déformation plastique).

Les tenseurs  $\mathbb{L}$  et  $\mathbf{B}$  s'en déduisent (en observant que  $\mathbf{n} : \mathbf{n} = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}) &= 3K \left( \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + 2\mu \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \frac{4\mu^2}{H+2\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = 2\mu \mathbb{I} + \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{4\mu^2}{H+2\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{2\mu}{H+2\mu} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

### Conditions de bifurcation

En utilisant l'identité  $\mathbf{N} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N})$  pour tout vecteur  $\mathbf{N}$  normé, le tenseur  $\mathbf{N} \cdot \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) \cdot \mathbf{N}$  s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{N} \cdot \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) \cdot \mathbf{N} = \left( K + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu \mathbf{1} - \frac{4\mu^2}{H+2\mu} (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}). \quad (1.33)$$

On pourrait montrer que :

$$\left( \left( K + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu \mathbf{1} \right)^{-1} = \frac{1}{\mu} (-\Gamma \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{1}),$$

$$\text{en posant :} \quad \Gamma = \frac{\left( K + \frac{1}{3}\mu \right)}{\left( K + \frac{4}{3}\mu \right)}. \quad (1.34)$$

<sup>11</sup> La formulation classique du critère de von Mises fait apparaître un coefficient 3/2 sous la racine dans la relation (1.29) qui permet à  $Y$  d'être le seuil d'écoulement en traction uniaxiale ; la formulation retenue ici permet en revanche à  $\mathbf{n}$  d'être de norme 1.

Remarquons que  $\Gamma = 1$  dans le cas d'un matériau incompressible et que, dans le cas général,  $\frac{1}{4} < \Gamma < 1$ .

La condition (1.12) d'existence d'une bifurcation peut s'expliciter sous la forme suivante (en suivant Rice, 1976) :

$$\mathbf{M} = (\mathbf{a}(\mathbf{N}) \otimes \mathbf{b}(\mathbf{N})) \cdot \mathbf{M},$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{N}) &= 2\mu \left( \left( K + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu \mathbf{1} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}) = -2\Gamma (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} + 2(\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}), \\ \mathbf{b}(\mathbf{N}) &= \frac{1}{(H/2\mu)+1} (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Il existe un vecteur  $\mathbf{M}$  colinéaire à  $\mathbf{a}(\mathbf{N})$ , satisfaisant la relation (1.35), à la condition que :

$$\mathbf{a}(\mathbf{N}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{N}) = 1. \quad (1.36)$$

On peut donc identifier le coefficient d'écrouissage  $H_{bif}(\mathbf{N})$  associé à l'existence d'une bifurcation de normale  $\mathbf{N}$  :

$$\frac{H_{bif}(\mathbf{N})}{2\mu} = 2((\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2 - \Gamma(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2) - 1. \quad (1.37)$$

Considérons un état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_{10}$  dont les directions principales sont les axes d'un repère  $(x, y, z)$  et telles que :  $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}$  (on omet l'indice (10) ici et dans ce qui suit pour ne pas alourdir l'écriture). Le déviateur de contrainte (qui est de trace nulle) vérifie donc :

$$s_{xx} > s_{yy} > s_{zz}, \quad s_{xx} > 0, \quad s_{zz} < 0, \quad -2s_{xx} < s_{zz} < -\frac{1}{2}s_{xx}. \quad (1.38)$$

Il peut être défini dans ce repère par  $s_{xx}$  et un paramètre  $\delta$  qui caractérise la tridimensionnalité du chargement :

$$\mathbf{s} = s_{xx} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \delta & \\ & & -1 - \delta \end{pmatrix}, \quad -\frac{1}{2} < \delta < 1. \quad (1.39)$$

En vertu des relations (1.29) et (1.30) :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2+(1+\delta)^2}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \delta & \\ & & -1 - \delta \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Observons que l'hypothèse précédente englobe notamment tous les états de contrainte plane dans le plan  $(x, y)$  (tels que  $\sigma_{zz} = 0$ ) avec deux composantes de traction dans le plan ; pour une

contrainte uniaxiale selon l'axe  $x$  :  $\sigma_{yy} = 0$ ,  $s_{yy} = s_{zz} = -\frac{1}{2}s_{xx}$  et  $\delta = -\frac{1}{2}$  ; pour une traction équi-biaxiale :  $\sigma_{yy} = \sigma_{xx} > 0$  et  $\delta = 1$ . Le cas  $\delta = 0$  correspond à :  $\sigma_{xx} > 0$  et  $\sigma_{yy} = \sigma_{xx}/2$ . Ce dernier cas tel que  $s_{yy} = 0$  et  $s_{zz} = -s_{xx}$  correspond aussi à de la déformation plastique plane dans le plan  $(x, z)$  en vertu de la relation (1.30).

On pourrait montrer que, pour une valeur de  $\delta$  donnée, la bifurcation la plus favorable, i.e. celle qui apparait pour le coefficient d'érouissage le plus élevé, possède une normale  $\mathbf{N}_m$  qui appartient au plan  $(x, z)$ , i.e. au plan des deux contraintes principales extrêmes, et qui est telle que :

$$\begin{aligned} N_{m_x}^2 &= \frac{n_{xx} + (1-2\Gamma)n_{zz}}{2\Gamma(n_{xx} - n_{zz})} = \frac{1 - (1-2\Gamma)(1+\delta)}{2\Gamma(2+\delta)}, \\ N_{m_y}^2 &= 0, \\ N_{m_z}^2 &= \frac{n_{zz} + (1-2\Gamma)n_{xx}}{2\Gamma(n_{zz} - n_{xx})} = \frac{(1+\delta) - (1-2\Gamma)}{2\Gamma(2+\delta)}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Le coefficient d'érouissage associé vaut :

$$\frac{H_{bif_m}(\delta)}{2\mu} = \frac{1}{2\Gamma} (n_{xx} + n_{zz})^2 - 2n_{xx}n_{zz} - 1 = \frac{\frac{1}{2\Gamma}\delta^2 + 2(1+\delta)}{1+\delta^2 + (1+\delta)^2} - 1. \quad (1.42)$$

Il existe donc deux directions de bandes, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe  $x$ . On peut repérer les normales par les angles notés  $\varphi_m$  et  $-\varphi_m$  qu'elles forment avec l'axe  $x$ .

De la relation (1.35)<sub>1</sub> et des relations (1.41), on établit que, pour chacun des deux réseaux de bandes, la direction de déplacement  $\mathbf{M}_m$ , colinéaire à  $\mathbf{a}(\mathbf{N}_m)$ , est symétrique de  $\mathbf{N}_m$  par rapport à l'axe  $x$  ; en effet :

$$a_x = -2\Gamma(n_{xx}N_{m_x}^2 + n_{zz}N_{m_z}^2)N_{m_x} + 2n_{xx}N_{m_x} = (n_{xx} - n_{zz})N_{m_x},$$

$$a_y = 0,$$

$$a_z = -2\Gamma(n_{xx}N_{m_x}^2 + n_{zz}N_{m_z}^2)N_{m_z} + 2n_{zz}N_{m_z} = (n_{zz} - n_{xx})N_{m_z},$$

d'où :

$$M_{m_x} = N_{m_x}, \quad M_{m_y} = 0, \quad M_{m_z} = -N_{m_z}. \quad (1.43)$$

On peut tracer le coefficient d'érouissage  $H_{bif_m}$  et l'angle  $\varphi_m$  en fonction de  $\delta$  pour différentes valeurs du module  $\Gamma$  (figure 1.1).

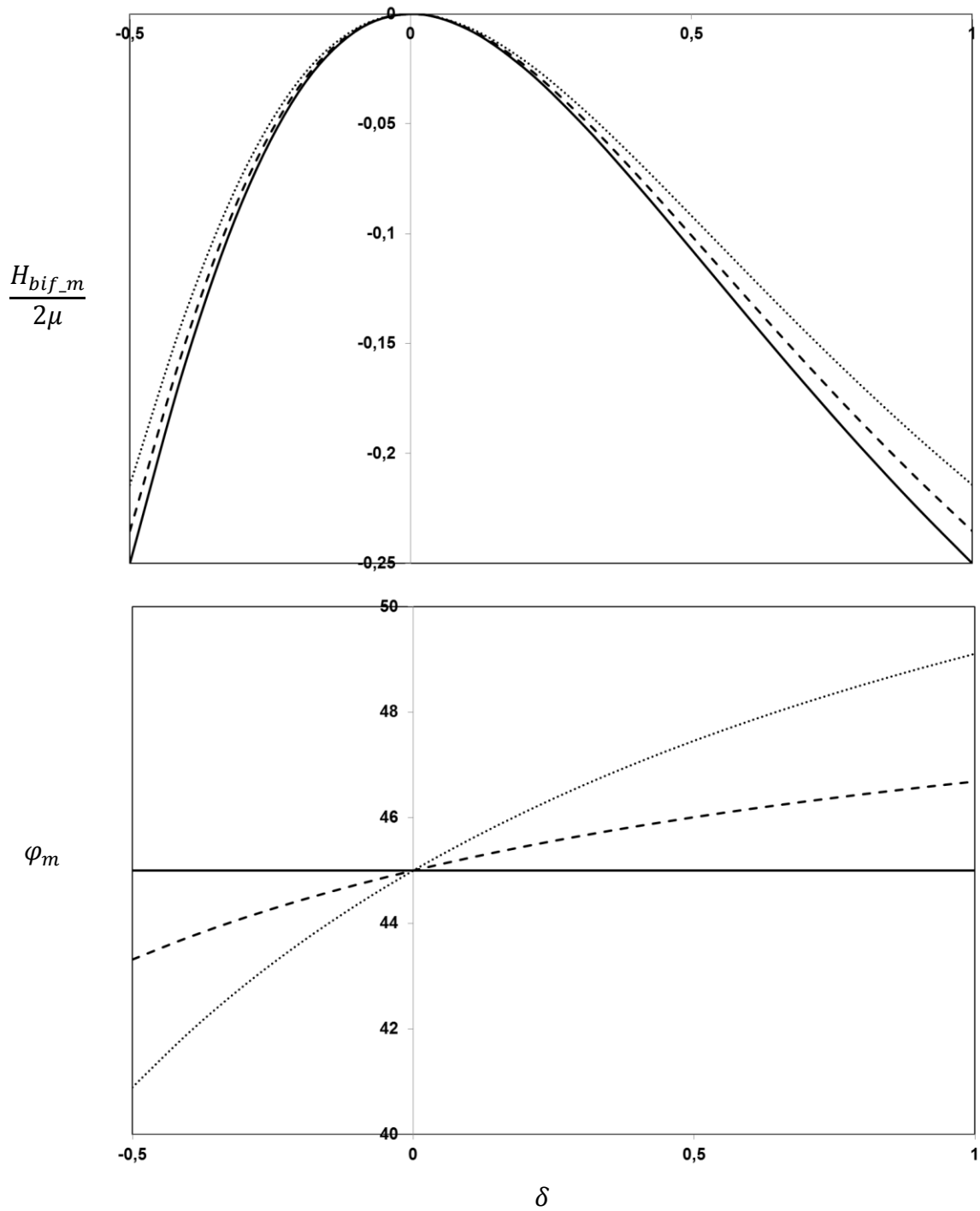


Figure 1.1 : Coefficient d'écroissage  $H_{bif\_m}$  associé à une bifurcation et orientation  $\varphi_m$  des bandes en fonction de la tridimensionnalité  $\delta$  du chargement pour les modules  $\Gamma = 1$  (cas incompressible en trait plein),  $\Gamma = 0,85$  (tirets) et  $\Gamma = 0,7$  (pointillés).

Il apparaît notamment que le cas le plus favorable à la localisation, i.e. qui correspond au coefficient d'écroutissage le plus élevé ( $H_{bif\_m} = 0$ ), est le cas tel que  $\delta = 0$ , et ce pour toutes les valeurs de  $\Gamma$ . Pour toutes les autres valeurs de  $\delta$ ,  $H_{bif\_m}$  est négatif avec des valeurs légèrement plus élevées (i.e. inférieures en valeur absolue) lorsque le matériau est compressible ( $\Gamma < 1$ ) ; en d'autres termes, une petite compressibilité facilite la localisation. Dans le cas incompressible ( $\Gamma = 1$ ), les bandes sont orientées à  $45^\circ$  des axes  $x$  et  $z$  pour toutes les valeurs de  $\delta$  ; ce sont donc des bandes en cisaillement pur qui se développent dans le plan de cisaillement maximal. Dans le cas d'un matériau compressible ( $\Gamma < 1$ ), on schématise l'orientation des bandes  $\mathbf{N}_m$  et la direction du déplacement  $\mathbf{M}_m$  sur la figure 1.2, pour les valeurs de  $\delta$  négatives et positives : on met notamment en évidence le fait que la déformation dans la bande comprend une composante de traction ou compression et pas uniquement une composante de cisaillement (elle n'est plus de trace nulle contrairement au cas du matériau incompressible puisque  $\mathbf{N}_m \cdot \mathbf{M}_m \neq 0$ ).

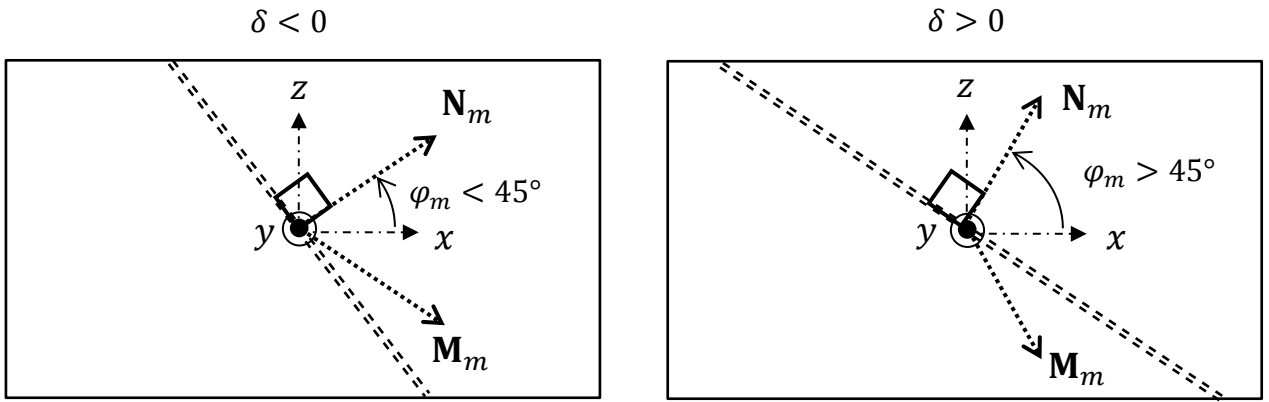


Figure 1.2 : Schématisation de l'orientation des bandes dans le cas d'un matériau compressible ( $\Gamma < 1$ ) et pour des valeurs négatives et positives du paramètre  $\delta$ .

### Conditions de croissance d'une perturbation

De manière à établir maintenant les conditions d'existence de perturbations instables, on considère un écoulement moyen en déformation imposée et chargement proportionnel partant d'un état non déformé plastiquement et sans écroutissage :

$$\sigma_{10}^{éq} = Y_0, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d = \frac{\mathbf{s}_{10}}{2\mu}, \quad \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}_{10}) = \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{10})}{3K}$$

$$\text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} = \boldsymbol{\epsilon}_{10}/\tau, \quad (1.44)$$

$\tau$  jouant le rôle de temps caractéristique.

L'évolution du tenseur de contrainte associé à l'écoulement moyen vérifie :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}) &= 3K \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}) = 3K \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}_{10})}{\tau} = \frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{10})}{\tau}, \\ \dot{\mathbf{s}}_{10} &= 2\mu \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d - \frac{4\mu^2}{H+2\mu} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d : \mathbf{n}_{10}) \mathbf{n}_{10} = \frac{2\mu H}{H+2\mu} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d = \frac{H}{H+2\mu} \frac{\mathbf{s}_{10}}{\tau}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Le tenseur  $\mathbf{n}$  étant proportionnel au déviateur de contrainte, son invariance dans l'écoulement moyen et par conséquent celle du tenseur  $\mathbb{L}$  sont vérifiées en vertu de la relation (1.32) :

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} : \mathbf{s} = 0 \quad \text{d'où :} \quad \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} : \dot{\mathbf{s}}_{10} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbb{L}}{d\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10} = 0. \quad (1.46)$$

Dans ce cas, l'existence de modes de perturbation instables est gouvernée par les relations (1.23) et (1.24) avec :

$$\frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{4\mu^2}{H+2\mu} (\mathbf{n}_{10} \otimes (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} : \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}}) + (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} : \mathbf{n}_{10}) \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}}). \quad (1.47)$$

Comme déjà mis en évidence à la fin du paragraphe 1.2.2, tandis que la condition d'existence d'une bifurcation fait intervenir la normale à la surface de charge  $\mathbf{n}_{10}$  dans l'état de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}_{10}$ , la condition d'existence d'une perturbation instable fait intervenir les variations de  $\mathbf{n}$  au voisinage de cet état, par l'intermédiaire du tenseur du quatrième ordre  $d\mathbf{n}/d\boldsymbol{\sigma}$ .

Pour le critère de von Mises, ce tenseur vérifie :

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} : \frac{ds}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\sigma_{10}^{\dot{e}q}} (\mathbb{I} - \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10}) : \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) = \frac{1}{\sigma_{10}^{\dot{e}q}} \left( \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10} \right). \quad (1.48)$$

Notons qu'il vérifie la propriété :

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{n}_{10} = 0. \quad (1.49)$$

Il peut donc s'interpréter comme un « tenseur de courbure » de la surface de charge c'est-à-dire une mesure des variations de  $\mathbf{n}$  lorsque l'on se déplace sur cette surface dans l'espace des contraintes.

En vertu de (1.30), (1.44) et (1.48), la relation (1.47) se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} &= -\left( \frac{4\mu^2}{H+2\mu} \right) \frac{1}{\sigma_{10}^{\dot{e}q}} \left( \mathbf{n}_{10} \otimes \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d - 2(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d : \mathbf{n}_{10}) \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10} + (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d : \mathbf{n}_{10}) \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{\tau} \left( \frac{2\mu}{H+2\mu} \right) \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10} \right). \end{aligned} \quad (1.50)$$



En posant l'intermédiaire de calcul :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\eta\tau} \left( \frac{2\mu}{H+2\mu} \right),$$

on déduit que :

$$\mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (\mathcal{A} + 1) \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \mathcal{A} \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10}$$

et

$$\left( \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{1}{\mathcal{A}+1} \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}+1} \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10}. \quad (1.51)$$

Le tenseur  $\mathbb{H}$  (relation (1.23)) vérifie :

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \eta) = \left( K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{2\mu}{\mathcal{A}+1} \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + \left( - \left( \frac{4\mu^2}{H+2\mu} \right) + 2\mu \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}+1} \right) \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10} \right) \quad (1.52)$$

et :

$$\mathbf{N} \cdot \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}, \eta) \cdot \mathbf{N} =$$

$$\frac{1}{\mathcal{A}+1} \left( \left( K(\mathcal{A} + 1) + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu \mathbf{1} + \left( - \left( \frac{4\mu^2}{H+2\mu} \right) (\mathcal{A} + 1) + 2\mu\mathcal{A} \right) (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}) \right). \quad (1.53)$$

Pour établir les conditions d'existence d'une perturbation instable, on reprend la démarche ayant conduit aux relations (1.36) et (1.37) :

$$\left( \left( K(1 + \mathcal{A}) + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu \mathbf{1} \right)^{-1} = - \frac{\left( K(1+\mathcal{A}) + \frac{1}{3}\mu \right)}{\mu \left( K(1+\mathcal{A}) + \frac{4}{3}\mu \right)} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \frac{1}{\mu} \mathbf{1} =$$

$$\frac{1}{\mu} \left( - \frac{3\Gamma + (4\Gamma - 1)\mathcal{A}}{3 + (4\Gamma - 1)\mathcal{A}} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{1} \right). \quad (1.54)$$

La relation (1.35) devient :

$$\mathbf{M} = (\mathbf{a}(\mathbf{N}) \otimes \mathbf{b}(\mathbf{N})) \cdot \mathbf{M},$$

avec :

$$\mathbf{a}(\mathbf{N}) = 2\mu \left( \left( K(1 + \mathcal{A}) + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu \mathbf{1} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}) = - \frac{6\Gamma + 2(4\Gamma - 1)\mathcal{A}}{3 + (4\Gamma - 1)\mathcal{A}} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} + 2(\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}),$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{N}) = \left( \left( \frac{1}{(H/2\mu + 1)} \right) (1 + \mathcal{A}) - \mathcal{A} \right) (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N}). \quad (1.55)$$

En appliquant la relation (1.36), on en déduit que le coefficient d'écrouissage et le taux de croissance  $\eta$  associé à une perturbation de normale  $\mathbf{N}$  satisfont :

$$\left( \left( \frac{1}{(H/2\mu)+1} \right) (1 + \mathcal{A}) - \mathcal{A} \right) \left( 2(\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2 - \frac{6\Gamma+2(4\Gamma-1)\mathcal{A}}{3+(4\Gamma-1)\mathcal{A}} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2 \right) - 1 = 0. \quad (1.56)$$

Cette équation permet d'obtenir le coefficient d'écrouissage  $H_{pert}(\mathbf{N}, \eta\tau)$  associé à une perturbation de taux de croissance relatif  $\eta\tau$ . Cette dernière grandeur adimensionnelle caractérise la vitesse de croissance de la perturbation rapportée à la vitesse caractéristique de l'écoulement de base. Pour un taux de croissance et une tridimensionnalité  $\delta$  donnés, les perturbations qui apparaissent pour le coefficient d'écrouissage le plus élevé ont une direction notée  $\mathbf{N}_m$  et on leur associe le coefficient d'écrouissage  $H_{pert\_m}(\delta, \eta\tau)$ .

La relation (1.56) se simplifie dans le cas incompressible ( $\Gamma = 1$ ) :

$$\begin{aligned} & (2(\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2 - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2) \left( \frac{1}{(H/2\mu)+1} \right)^2 \\ & + ((\eta\tau - 1)(2(\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2 - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2)) \left( \frac{1}{(H/2\mu)+1} \right) - \eta\tau = 0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

En posant :

$$\mathcal{X} = (\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2 - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2,$$

le coefficient d'écrouissage  $H_{pert}(\mathbf{N}, \eta\tau)$  vérifie :

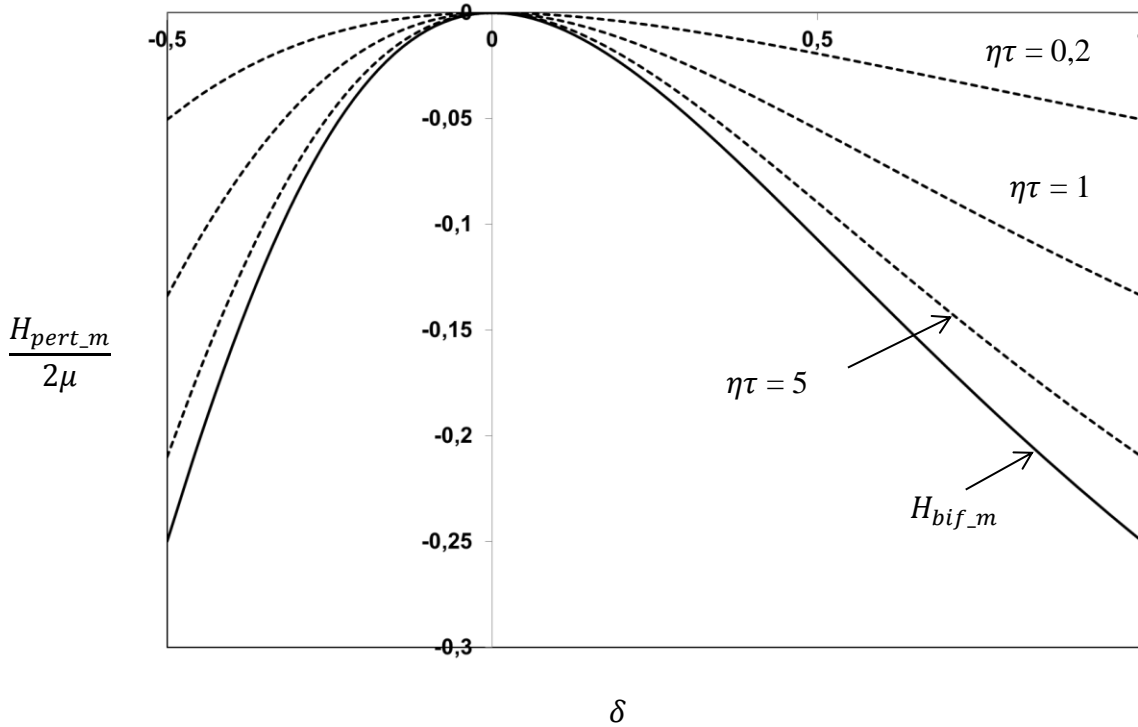
$$\frac{H_{pert}(\mathbf{N}, \eta)}{2\mu} = \frac{2\mathcal{X}}{-(\eta\tau-1)\mathcal{X} + \sqrt{((\eta\tau-1)\mathcal{X})^2 + 2\eta\tau\mathcal{X}}} - 1. \quad (1.58)$$

On peut montrer facilement que  $H_{pert}(\mathbf{N}, \eta\tau)$  est une fonction monotone croissante de  $\mathcal{X}$  ; autrement dit, pour un taux de croissance donné, les perturbations qui apparaissent pour le coefficient d'écrouissage le plus élevé ont une direction  $\mathbf{N}_m$  orientée à  $45^\circ$  de l'axe  $x$  dans le plan  $(x, z)$ , comme les bifurcations les plus favorables ;  $H_{pert\_m}(\delta, \eta\tau)$  est donné par la relation (1.58) avec :

$$\mathcal{X} = \frac{1}{4}(n_{xx} + n_{zz})^2 - n_{xx}n_{zz} = \frac{\frac{1}{4}\delta^2 + (1+\delta)}{1+\delta^2 + (1+\delta)^2}. \quad (1.59)$$

On trace les courbes  $H_{pert\_m}(\delta, \eta\tau)$  pour trois valeurs du taux de croissance relatif  $\eta\tau$  :  $\eta\tau = 5$ ,  $\eta\tau = 1$  et  $\eta\tau = 0,2$  (figure 1.3). Il en ressort notamment que les perturbations de taux de croissance fini se développent pour des coefficients d'écrouissage sensiblement plus élevés que ceux nécessaires à l'apparition de bifurcations, autrement dit dans des conditions moins

restrictives, et ce d'autant plus que le taux de croissance relatif est faible. Pour le cas  $\delta = 0$ , tous les taux de croissance donnent le même coefficient d'écroissance  $H_{pert\_m}(\delta = 0, \eta\tau) = 0$  qui est également celui relatif à une bifurcation (en d'autres termes, en chargement quasi-statique, la détermination d'un taux de croissance relatif est un problème mal posé pour ce cas de figure).



**Figure 1.3 :** Coefficient d'écroissance  $H_{pert\_m}$  fonction du paramètre  $\delta$  associé à une perturbation du chargement (cas incompressible) pour différents taux de croissance relatifs. Comparaison au coefficient  $H_{bif\_m}$  associé à une bifurcation.

Dans le cas compressible, le coefficient  $H_{pert}(\mathbf{N}, \eta)$  est solution de l'équation (1.56). On peut également montrer qu'il est le plus élevé pour une perturbation de normale  $\mathbf{N}_m$  dans le plan  $(x, z)$ , formant un angle  $\varphi_m$  avec l'axe  $x$ . La comparaison des coefficients d'écroissance  $H_{pert\_m}$  et  $H_{bif\_m}$  pour différentes valeurs de  $\eta\tau$  donnerait des allures de courbes identiques à celles de la figure 1.3 pour le cas incompressible (non reportées ici). L'angle  $\varphi_m$  croît avec la tridimensionnalité  $\delta$  mais est d'autant plus proche de  $45^\circ$  que  $\eta\tau$  est faible (figure 1.4).

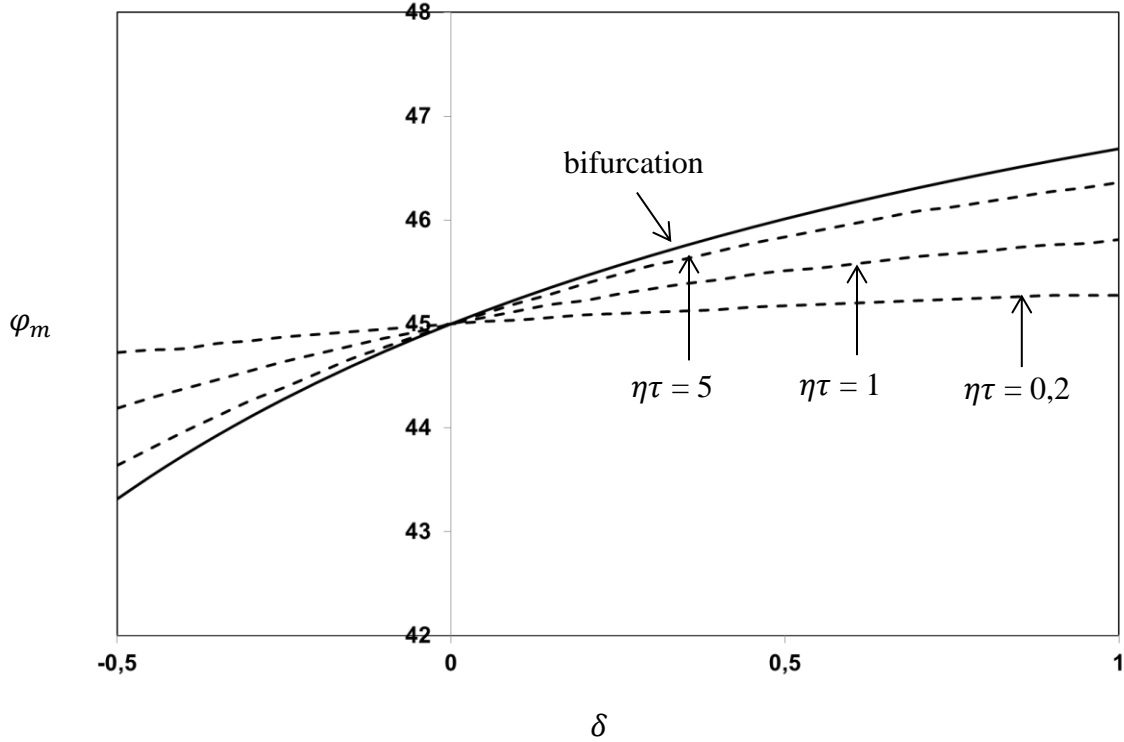


Figure 1.4 : Orientation  $\varphi_m$  des bandes fonction du paramètre  $\delta$  associée à une perturbation du chargement (cas compressible  $\Gamma = 0,85$ ) pour différents taux de croissance relatifs. Comparaison à l'orientation associée à une bifurcation.

#### 1.2.4. Application au cas de l'élasticité isotrope et du critère de Hill anisotrope

Dans ce paragraphe, on étend l'écriture de conditions de bifurcation et d'existence de perturbations instables au cas d'un comportement plastique orthotrope et d'un chargement moyen dont les directions principales sont confondues avec les directions d'orthotropie. On détaille ensuite les résultats dans le cas isotrope transverse. Afin de ne pas alourdir les développements, on fait l'hypothèse que la partie élastique du comportement reste isotrope.

On suppose que l'écoulement plastique obéit au critère de Hill (1948) avec un écrouissage isotrope ; la fonction de charge  $F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$  est définie par la relation (1.3) avec :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\mathbf{s}) = \sigma_{Hill}^{eq} = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbb{D} : \mathbf{s}}. \quad (1.60)$$

$\mathbb{D}$  est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des déviateurs, i.e.  $\mathbb{D} : \mathbf{s}$  est de trace nulle pour tout  $\mathbf{s}$  de trace nulle et d'autre part  $\mathbb{D} : \mathbf{1} = 0$ . De la même manière que la loi d'écoulement, l'anisotropie (i.e. le tenseur  $\mathbb{D}$ ) est sensible à l'histoire du matériau.

La direction d'écoulement et normale à la surface de charge vérifie maintenant :

$$\tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}) = \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{n} = \frac{d\sigma_{Hill}^{eq}}{ds} : \frac{d\mathbf{s}}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbb{D}:\mathbf{s}}{\sigma_{Hill}^{eq}} : \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) = \frac{\mathbb{D}:\mathbf{s}}{\sigma_{Hill}^{eq}}. \quad (1.61)$$

Les tenseurs  $\mathbb{L}$  et  $\mathbf{B}$  s'écrivent sous la forme suivante (en observant que, pour le critère de Hill contrairement au critère de von Mises, le produit  $\mathbf{n} : \mathbf{n}$  dépend de l'état de contrainte) :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}) &= 2\mu\mathbb{I} + \left( K - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \frac{4\mu^2}{H+2\mu(\mathbf{n}:\mathbf{n})} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{2\mu}{H+2\mu(\mathbf{n}:\mathbf{n})} \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

### Conditions de bifurcation

En reprenant les raisonnements du paragraphe 1.2.3, le coefficient d'écrouissage associé à une bifurcation de normale  $\mathbf{N}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{H_{bif}(\mathbf{N})}{2\mu} &= 2((\mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2 - \Gamma(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{10} \cdot \mathbf{N})^2) - (\mathbf{n}_{10} : \mathbf{n}_{10}), \\ \text{avec :} \quad \mathbf{n}_{10} &= \frac{\mathbb{D}:\mathbf{s}_{10}}{\sigma_{Hill\_10}^{eq}} = \frac{\mathbb{D}:\mathbf{s}_{10}}{\sqrt{\mathbf{s}_{10}:\mathbb{D}:\mathbf{s}_{10}}}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Dans le cas où les axes d'orthotropie sont les axes  $(x, y, z)$  :

$$\mathbf{s} : \mathbb{D} : \mathbf{s} = \frac{F_D(s_{yy}-s_{zz})^2 + G_D(s_{zz}-s_{xx})^2 + H_D(s_{xx}-s_{yy})^2 + 2L_D s_{yz}^2 + 2M_D s_{zx}^2 + 2N_D s_{xy}^2}{F_D + G_D + H_D}. \quad (1.64)$$

Le tenseur  $\mathbb{D}$  s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \frac{1}{F_D + G_D + H_D} \left( (G_D + H_D) \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + (H_D + F_D) \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \right. \\ &\quad + (F_D + G_D) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\ &\quad - H_D (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x) \\ &\quad - F_D (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) \\ &\quad - G_D (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \\ &\quad + N_D (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) \\ &\quad + L_D (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y) \\ &\quad \left. + M_D (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z) \right). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Supposons que les directions  $(x, y, z)$  soient également les directions principales de la contrainte  $\sigma_{10}$  (vérifiant  $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > \sigma_{zz}$ ) ; en utilisant la tridimensionnalité  $\delta$  telle que définie au paragraphe 1.2.3, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} : \mathbb{D} : \mathbf{s} &= \left( \sigma_{Hill}^{\acute{e}q} \right)^2 = \frac{\delta^2(4F_D+G_D+H_D)+\delta(4F_D+4G_D-2H_D)+(F_D+4G_D+H_D)}{F_D+G_D+H_D} S_{xx}^2, \\ n_{xx} &= \frac{(G_D(2+\delta)+H_D(1-\delta))s_{xx}}{(F_D+G_D+H_D)\sigma_{Hill}^{\acute{e}q}}, \\ n_{yy} &= \frac{(F_D(2\delta+1)+H_D(\delta-1))s_{xx}}{(F_D+G_D+H_D)\sigma_{Hill}^{\acute{e}q}}, \\ n_{zz} &= -\frac{(F_D(2\delta+1)+G_D(2+\delta))s_{xx}}{(F_D+G_D+H_D)\sigma_{Hill}^{\acute{e}q}}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

En vertu de la relation (1.63), la bifurcation qui apparait pour le coefficient d'écrouissage le plus élevé possède une normale  $\mathbf{N}_m$  dans le plan des deux valeurs extrêmes de  $\mathbf{n}$ . Contrairement au cas du critère de von Mises, pour un matériau orthotrope quelconque, il ne s'agit pas nécessairement du plan  $(x, z)$  ; cela dépend du paramètre de chargement  $\delta$  mais également des coefficients d'anisotropie  $F_D$ ,  $G_D$  et  $H_D$ . (N.B. : en revanche, ni la direction  $\mathbf{N}_m$  ni le coefficient d'écrouissage associé ne dépendent des coefficients  $L_D$ ,  $M_D$  et  $N_D$ ).

Un cas particulier intéressant est celui de l'isotropie transverse dans le plan  $(x, y)$  des deux contraintes principales majeures (et celui des deux directions de traction dans le cas d'une contrainte plane) ; dans ce cas :

$$F_D = G_D, \quad L_D = M_D \quad \text{et} \quad N_D = F_D + 2H_D. \quad (1.67)$$

D'après la relation (1.66), on peut poser sans perte de généralité  $F_D = G_D = 1$ . On peut interpréter l'effet des deux coefficients  $H_D$  et  $L_D$  de la façon suivante<sup>12</sup> :

- les limites d'écoulement en traction uniaxiale dans une direction quelconque du plan  $(x, y)$  et dans la direction  $z$  valent respectivement  $Y(\alpha)\sqrt{(2+H_D)/(1+H_D)}$  et  $Y(\alpha)\sqrt{(2+H_D)/2}$  ;

---

<sup>12</sup> Notons que, pour les états de contraintes planes dans le plan  $(x, y)$ ,  $H_D$  s'identifie au coefficient de Lankford qui est le rapport entre l'incrément de déformation transverse et l'incrément de déformation dans l'épaisseur pour une contrainte uniaxiale ; ce coefficient est utilisé dans les analyses de localisation en contraintes planes (cf. par exemple Barata da Rocha et al., 1984-1985, Dudzinski et Molinari, 1991)

- les limites d'écoulement en cisaillement du plan  $(x, y)$  dans une direction quelconque et des plans  $(y, z)$  et  $(z, x)$  selon les axes valent respectivement  $Y(\alpha)\sqrt{(2 + H_D)/2(1 + 2H_D)}$  et  $Y(\alpha)\sqrt{(2 + H_D)/2L_D}$  ;
- la limite d'écoulement en cisaillement des plans  $(y, z)$  et  $(z, x)$  à 45 degrés des axes vaut  $Y(\alpha)\sqrt{(2 + H_D)/(5 + H_D)}$ .

Lorsque  $H_D < 1$  (respectivement  $H_D > 1$ ), la limite d'écoulement plastique en traction uniaxiale dans la direction  $z$  est inférieure (respectivement supérieure) à la limite d'écoulement plastique en traction uniaxiale dans une direction quelconque du plan  $(x, y)$ . La limite d'écoulement en cisaillement des plans  $(y, z)$  et  $(z, x)$  à 45 degrés des axes est inférieure (respectivement supérieure) à la limite d'écoulement en cisaillement du plan  $(x, y)$ .

Lorsque  $L_D < N_D = 1 + 2H_D$  (respectivement  $L_D > N_D$ ), la limite d'écoulement en cisaillement des plans  $(y, z)$  et  $(z, x)$  selon les axes est supérieure (respectivement inférieure) à la limite d'écoulement en cisaillement du plan  $(x, y)$ .

Dans le cas d'un matériau isotrope transverse, la normale à la surface de charge vérifie :

$$n_{xx} = \frac{((2+\delta)+H_D(1-\delta))s_{xx}}{(2+H_D)\sigma_{Hill}^{éq}}, \quad n_{yy} = \frac{((2\delta+1)+H_D(\delta-1))s_{xx}}{(2+H_D)\sigma_{Hill}^{éq}}, \quad n_{zz} = -\frac{3(\delta+1)s_{xx}}{(2+H_D)\sigma_{Hill}^{éq}},$$

avec :

$$(\sigma_{Hill}^{éq})^2 = \frac{\delta^2(5+H_D)+\delta(8-2H_D)+(5+H_D)}{2+H_D} s_{xx}^2 \quad (1.68)$$

Lorsque  $H_D < 1$ , autrement dit lorsque le cisaillement à 45 degrés des axes est plus difficile dans le plan  $(x, y)$ ,  $n_{xx} > n_{yy} > n_{zz}$  pour tout  $-\frac{1}{2} < \delta < 1$  ; la bifurcation la plus favorable a une normale  $\mathbf{N}_m$  dans le plan  $(x, z)$  telle que :

$$N_{m_x}^2 = \frac{n_{xx}+(1-2\Gamma)n_{zz}}{2\Gamma(n_{xx}-n_{zz})} = \frac{((2+\delta)+H_D(1-\delta))-3(1-2\Gamma)(1+\delta)}{2\Gamma((5+4\delta)+H_D(1-\delta))},$$

$$N_{m_z}^2 = \frac{n_{zz}+(1-2\Gamma)n_{xx}}{2\Gamma(n_{zz}-n_{xx})} = \frac{3(1+\delta)-(1-2\Gamma)((2+\delta)+H_D(1-\delta))}{2\Gamma((5+4\delta)+H_D(1-\delta))}. \quad (1.69)$$

Le coefficient d'écrouissage associé vaut :

$$\frac{H_{bif\_m}(\delta)}{2\mu} = \frac{1}{2\Gamma} (n_{xx} + n_{zz})^2 - 2n_{xx}n_{zz} - (n_{xx}^2 + n_{yy}^2 + n_{zz}^2). \quad (1.70)$$

Lorsque  $H_D > 1$ , autrement dit lorsque le cisaillement à 45 degrés des axes est plus facile dans le plan  $(x, y)$ ,  $n_{xx} > n_{yy} > n_{zz}$  pour  $\frac{-4+H_D}{5+H_D} < \delta < 1$  ; la normale  $\mathbf{N}_m$ , qui appartient au plan  $(x, z)$ , et le coefficient  $H_{bif\_m}(\delta)$  sont donnés par les relations (1.69) et (1.70). Par contre, pour

$-\frac{1}{2} < \delta < \frac{-4+H_D}{5+H_D}$ ,  $n_{xx} > n_{zz} > n_{yy}$  et la normale  $\mathbf{N}_m$  appartient au plan  $(x, y)$ .  $\mathbf{N}_m$  et  $H_{bif\_m}(\delta)$  satisfont les relations :

$$N_{m\_x}^2 = \frac{n_{xx} + (1-2\Gamma)n_{yy}}{2\Gamma(n_{xx} - n_{yy})} = \frac{((2+\delta)+H_D(1-\delta)) + (1-2\Gamma)((2+\delta)+H_D(\delta-1))}{2\Gamma(1+2H_D)(1-\delta)},$$

$$N_{m\_y}^2 = \frac{n_{yy} + (1-2\Gamma)n_{xx}}{2\Gamma(n_{yy} - n_{xx})} = \frac{-((2+\delta)+H_D(\delta-1)) - (1-2\Gamma)((2+\delta)+H_D(1-\delta))}{2\Gamma(1+2H_D)(1-\delta)}, \quad (1.71)$$

$$\frac{H_{bif\_m}(\delta)}{2\mu} = \frac{1}{2\Gamma} (n_{xx} + n_{yy})^2 - 2n_{xx}n_{yy} - (n_{xx}^2 + n_{yy}^2 + n_{zz}^2). \quad (1.72)$$

On trace le coefficient d'érouissage  $H_{bif\_m}(\delta)$  dans le cas incompressible ( $\Gamma = 1$ ) pour les deux valeurs  $H_D = 0,4$  et  $H_D = 2,5$  du paramètre  $H_D$  sur la figure 1.5. La normale  $\mathbf{N}_m$  est à  $\pm 45^\circ$  de l'axe  $x$  dans le plan  $(x, z)$  ou dans le plan  $(x, y)$  suivant les valeurs de  $\delta$  et de  $H_D$ .

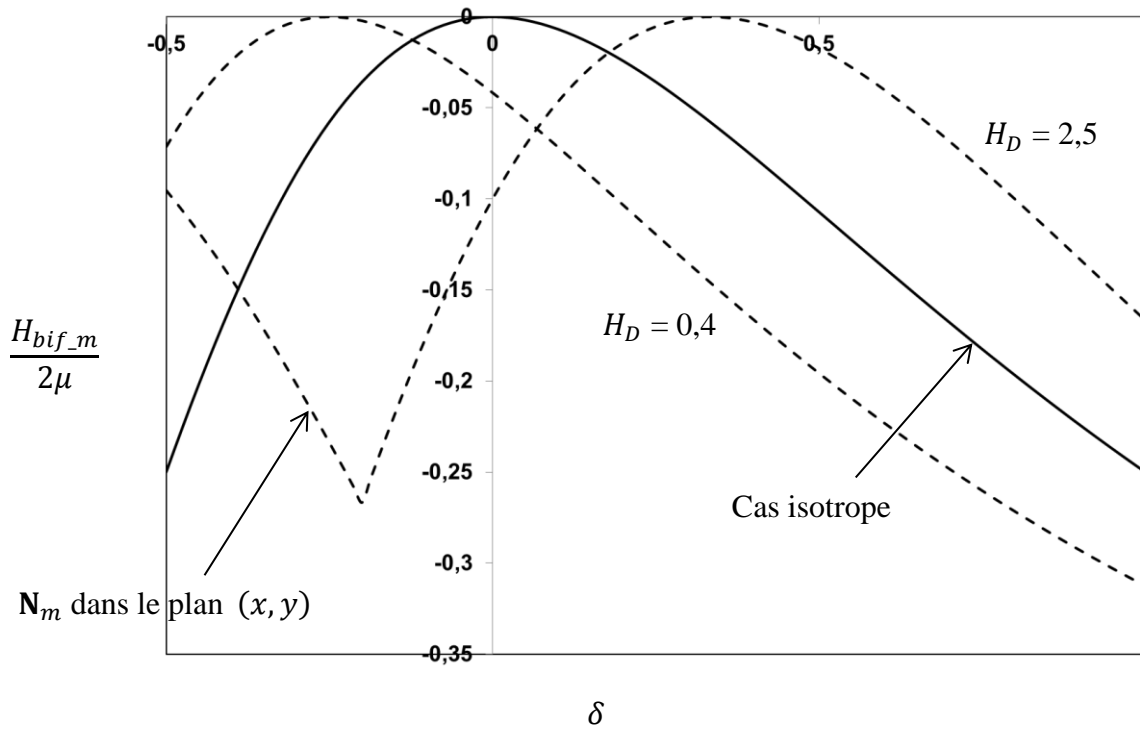


Figure 1.5 : Coefficient d'érouissage  $H_{bif\_m}$  associé à une bifurcation pour le critère de Hill isotrope transverse (cas incompressible) en fonction du paramètre  $\delta$  du chargement pour les valeurs du coefficient d'anisotropie  $H_D = 0,4$  et  $H_D = 2,5$  et comparaison au cas limite isotrope  $H_D = 1$ .



Il apparait que le coefficient d'écroûissage  $H_{bif\_m}$  évolue dans des intervalles de valeurs comparables dans les cas isotrope et anisotrope ; toutefois, les minima et maxima ne correspondent pas aux mêmes valeurs de  $\delta$ . La valeur maximale  $H_{bif\_m} = 0$  correspond à  $\delta = 0$  dans le cas isotrope mais augmente avec  $H_D$ . La localisation dans le cas  $\delta = 1$ , qui correspondrait à une traction equi-biaxiale dans le plan, est d'autant plus facile que  $H_D$  est fort, i.e. que la limite élastique est plus élevée pour une traction dans la direction  $z$  que pour une traction dans le plan  $(x, y)$ .

La prise en compte d'une compressibilité finie donnerait des courbes très similaires avec des valeurs très légèrement au-dessus de ce qu'elles sont dans le cas incompressible, comme cela a été constaté avec le critère de von Mises. Les bandes ne sont alors plus exactement à  $45^\circ$  : la normale  $\mathbf{N}_m$  forme un angle inférieur à  $45^\circ$  avec l'axe  $x$  (dans le plan  $(x, z)$  ou dans le plan  $(x, y)$ ) pour une triaxialité en-dessous de la valeur  $H_{bif\_m} = 0$  et un angle supérieur à  $45^\circ$  avec l'axe  $x$  (dans le plan  $(x, z)$ ) pour une triaxialité au-dessus de  $H_{bif\_m} = 0$ .

### Conditions de croissance d'une perturbation

Intéressons-nous maintenant à la condition d'existence d'une perturbation instable ; celle-ci ne s'écrit simplement que dans le cas d'un chargement radial en contrainte déviatoire d'après ce qui a été vu au paragraphe 1.2.2. Par ailleurs, un chargement proportionnel en déformation imposée de la forme de celui retenu dans le cas du critère de von Mises (équation (1.44)) vérifierait les relations :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{10}^d &= \frac{\mathbf{s}_{10}}{2\mu}, & \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d &= \boldsymbol{\epsilon}_{10}^d / \tau, & \text{et} \\ \dot{\mathbf{s}}_{10} &= 2\mu \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d - \frac{4\mu^2}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d : \mathbf{n}_{10}) \mathbf{n}_{10} = \\ &= \frac{1}{\tau} \left( \mathbf{s}_{10} - \frac{2\mu}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} (\mathbf{s}_{10} : \mathbf{n}_{10}) \mathbf{n}_{10} \right) = \frac{1}{\tau} \left( \mathbf{s}_{10} - \frac{2\mu}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \mathbb{D} : \mathbf{s}_{10} \right). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Ce chargement n'est radial que si  $\mathbb{D} : \mathbf{s}_{10}$  est proportionnel à  $\mathbf{s}_{10}$  autrement dit pour des orientations particulières de la déformation  $\boldsymbol{\epsilon}_{10}^d$ . On choisit donc plutôt de mener la comparaison entre les deux critères en conservant un chargement en contrainte de la même forme qu'au paragraphe 1.2.3 tel que :

$$\dot{\mathbf{s}}_{10} = \frac{H}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \frac{\mathbf{s}_{10}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_{Hill\_10}^{éq} = Y_0. \quad (1.74)$$

L'inversion de la dernière relation (1.73) permet d'en déduire le chargement en déformation déviatoire :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}^d = \frac{\dot{\mathbf{s}}_{10}}{2\mu} + \frac{1}{H} (\dot{\mathbf{s}}_{10} : \mathbf{n}_{10}) \mathbf{n}_{10} = \frac{1}{(H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10}))\tau} \left( \frac{H}{2\mu} \mathbf{s}_{10} + \mathbb{D} : \mathbf{s}_{10} \right). \quad (1.75)$$

L'existence d'une perturbation de taux de croissance  $\eta$  est caractérisée par les relations (1.23) et (1.24) avec :

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} = & \\ & - \frac{4\mu^2}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \left( \mathbf{n}_{10} \otimes \left( \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} : \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} \right) + (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} : \mathbf{n}_{10}) \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} \right) \\ & + (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} : \mathbf{n}_{10}) \frac{16\mu^3}{(H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10}))^2} \left( \mathbf{n}_{10} \otimes \left( \mathbf{n}_{10} : \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} \right) \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Elle fait de nouveau intervenir, en plus de la normale à la surface de charge, les variations de cette normale au voisinage de l'état de contrainte moyen.

La dérivée de la normale à la surface de charge autour de l'état de contrainte vérifie :

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\mathbf{n}}{d\mathbf{s}} : \frac{d\mathbf{s}}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\sigma_{Hill_{10}}^{\dot{\epsilon}q}} (\mathbb{D} - \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10}) : \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) = \frac{1}{\sigma_{Hill_{10}}^{\dot{\epsilon}q}} (\mathbb{D} - \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10}). \quad (1.77)$$

Les différents termes de la relation (1.76) vérifient :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} : \mathbf{n}_{10} &= \frac{1}{2\mu\tau} (\mathbf{s}_{10} : \mathbf{n}_{10}) = \frac{\sigma_{Hill_{10}}^{\dot{\epsilon}q}}{2\mu\tau}, \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10} : \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{2\mu\tau} \left( \frac{1}{(H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10}))} (2\mu \mathbb{D} : \mathbf{n}_{10} - 2\mu(\mathbf{n}_{10} : \mathbf{n}_{10}) \mathbf{n}_{10}) \right), \\ \mathbf{n}_{10} : \frac{d\mathbf{n}}{d\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{\sigma_{Hill_{10}}^{\dot{\epsilon}q}} (\mathbb{D} : \mathbf{n}_{10} - (\mathbf{n}_{10} : \mathbf{n}_{10}) \mathbf{n}_{10}). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Cette même relation (1.76) se réarrange alors sous la forme :

$$\frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\tau} \frac{2\mu}{(H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10}))^2} \left( H \mathbf{n}_{10} \otimes \mathbf{n}_{10} + 2\mu \mathbf{n}_{10} \otimes (\mathbb{D} : \mathbf{n}_{10}) - (H + 2\mu(\mathbf{n}_{10} : \mathbf{n}_{10})) \mathbb{D} \right). \quad (1.79)$$

Une manière d'expliciter le tenseur  $\mathbb{H}$  donné par la relation (1.23) consiste à diagonaliser  $\mathbb{D}$  dans l'espace des déviateurs ; puisqu'il est symétrique, il possède cinq vecteurs propres orthogonaux deux à deux  $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}, \mathbf{n}_{IV}, \mathbf{n}_V$  (qui sont donc des tenseurs d'ordre 2 symétriques et de trace nulle):

$$\mathbb{D} = D_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \dots + D_V \mathbf{n}_V \otimes \mathbf{n}_V. \quad (1.80)$$

On exprime le déviateur de contraintes et la normale à la surface de charge dans cette même base :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{10} &= s_{10_I} \mathbf{n}_I + \dots + s_{10_V} \mathbf{n}_V, \\ \mathbf{n}_{10} &= n_{10_I} \mathbf{n}_I + \dots + n_{10_V} \mathbf{n}_V = \frac{D_I s_{10_I} \mathbf{n}_I + \dots + D_V s_{10_V} \mathbf{n}_V}{\sqrt{D_I s_{10_I}^2 + \dots + D_V s_{10_V}^2}}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

En conséquence :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} &= \\ \mathbb{I} - \frac{1}{\eta\tau} \frac{2\mu}{(H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10}))^2} \sum_{\alpha,\beta} \left( (H + 2\mu D_\beta) n_{10_\alpha} n_{10_\beta} - (H + 2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})) D_\alpha \delta_{\alpha\beta} \right) \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Par ailleurs, le tenseur de projection dans l'espace des déviateurs peut s'exprimer sous la forme :

$$\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + \dots + \mathbf{n}_V \otimes \mathbf{n}_V. \quad (1.83)$$

En posant les intermédiaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{\eta\tau} \frac{2\mu}{(H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10}))} \quad \text{et} \quad \mathcal{b}_\beta = \frac{H+2\mu D_\beta}{(H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10}))}, \\ \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sum_{\alpha,\beta} \left( (\mathcal{A} D_\alpha + 1) \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{A} \mathcal{b}_\beta n_{10_\alpha} n_{10_\beta} \right) \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta. \end{aligned} \quad (1.84)$$

D'où :

$$\left( \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathcal{M}_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta, \quad (1.85)$$

dans lequel la matrice  $\mathcal{M}_{\alpha\beta}$  est l'inverse de la matrice de composantes  $\left( (\mathcal{A} D_\alpha + 1) \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{A} \mathcal{b}_\beta n_{10_\alpha} n_{10_\beta} \right)$ . Par ailleurs :

$$\mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) = 3K \left( \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + 2\mu \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \frac{4\mu^2}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \sum_{\alpha,\beta} n_{10_\alpha} n_{10_\beta} \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\beta, \quad (1.86)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}, \eta) &= \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\eta} \frac{d(\mathbb{L}:\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10})}{d\boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} : \mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) = \\ K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sum_{\alpha, \beta} \left( 2\mu \mathcal{M}_{\alpha\beta} - \frac{4\mu^2}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \sum_{\zeta} \mathcal{M}_{\alpha\zeta} n_{10_{\zeta}} n_{10_{\beta}} \right) \mathbf{n}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\beta}, \end{aligned} \quad (1.87)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbb{H}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{10}, \eta) \cdot \mathbf{N} &= \left( K + \frac{1}{3}\mu \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mu \mathbf{1} \\ + 2\mu \sum_{\alpha, \beta} \left( \left( \mathcal{M}_{\alpha\beta} - \frac{2\mu}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \sum_{\zeta} \mathcal{M}_{\alpha\zeta} n_{10_{\zeta}} n_{10_{\beta}} \right) - \delta_{\alpha\beta} \right) (\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{n}_{\beta} \cdot \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (1.88)$$

En tenant compte de la relation (1.34), la relation (1.24) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M} = 2 \left( \begin{array}{c} \sum_{\alpha, \beta} \left( \delta_{\alpha\beta} - \left( \mathcal{M}_{\alpha\beta} - \frac{2\mu}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \sum_{\zeta} \mathcal{M}_{\alpha\zeta} n_{10_{\zeta}} n_{10_{\beta}} \right) \right) \\ \left( (\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{n}_{\beta} \cdot \mathbf{N}) - \Gamma(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \otimes (\mathbf{n}_{\beta} \cdot \mathbf{N}) \right) \end{array} \right) \cdot \mathbf{M}. \quad (1.89)$$

L'existence d'une perturbation instable de normale  $\mathbf{N}$  s'écrit :

$$\text{Det} \left( \mathbf{1} - 2 \sum_{\alpha, \beta} \left( \begin{array}{c} \delta_{\alpha\beta} - \left( \mathcal{M}_{\alpha\beta} - \frac{2\mu}{H+2\mu(\mathbf{n}_{10}:\mathbf{n}_{10})} \sum_{\zeta} \mathcal{M}_{\alpha\zeta} n_{10_{\zeta}} n_{10_{\beta}} \right) \\ \left( (\mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{n}_{\beta} \cdot \mathbf{N}) - \Gamma(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_{\alpha} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N} \otimes (\mathbf{n}_{\beta} \cdot \mathbf{N}) \right) \end{array} \right) \right) = 0. \quad (1.90)$$

Cette relation permet d'obtenir le coefficient d'érouissage  $H_{pert}(\mathbf{N}, \eta\tau)$  pour toute orientation de bande et tout taux de croissance relatif. On note, comme au paragraphe 1.2.3,  $\mathbf{N}_m$  et  $H_{pert_m}(\delta, \eta\tau)$  l'orientation et le coefficient d'érouissage associés à la perturbation la plus favorable, que l'on identifie en recherchant le maximum de  $H_{pert}(\mathbf{N}, \eta\tau)$ .

Dans le cas de l'isotropie transverse, les vecteurs propres et valeurs propres du tenseur  $\mathbb{D}$ , donné par la relation (1.65) en tenant compte des relations (1.67), sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_I &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y - 2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) & \text{et} & & \mathbb{D} : \mathbf{n}_I &= \frac{3}{2+H_D} \mathbf{n}_I, \\
\mathbf{n}_{II} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y) & \text{et} & & \mathbb{D} : \mathbf{n}_{II} &= \frac{1+2H_D}{2+H_D} \mathbf{n}_{II}, \\
\mathbf{n}_{III} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) & \text{et} & & \mathbb{D} : \mathbf{n}_{III} &= \frac{1+2H_D}{2+H_D} \mathbf{n}_{III}, \\
\mathbf{n}_{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y) & \text{et} & & \mathbb{D} : \mathbf{n}_{IV} &= \frac{L_D}{2+H_D} \mathbf{n}_{IV}, \\
\mathbf{n}_V &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z) & \text{et} & & \mathbb{D} : \mathbf{n}_V &= \frac{L_D}{2+H_D} \mathbf{n}_V.
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Le déviateur de contraintes et la normale à la surface de charge, donnée par la relation (1.63), s'explicitent en fonction de  $\delta$  et du coefficient d'anisotropie  $H_D$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{10} &= \left( \sqrt{6} \left( \frac{1+\delta}{2} \right) \mathbf{n}_I + \sqrt{2} \left( \frac{1-\delta}{2} \right) \mathbf{n}_{II} \right) s_{xx}, \\
\mathbf{n}_{10} &= \frac{3\sqrt{3}(1+\delta)}{\sqrt{2+H_D}\sqrt{9(1+\delta)^2+(1+2H_D)(1-\delta)^2}} \mathbf{n}_I + \frac{(1+2H_D)(1-\delta)}{\sqrt{2+H_D}\sqrt{9(1+\delta)^2+(1+2H_D)(1-\delta)^2}} \mathbf{n}_{II}.
\end{aligned} \tag{1.92}$$

En vertu de la relation (1.90),  $\mathbf{N}_m$  et  $H_{pert\_m}(\delta, \eta\tau)$  dépendent de la compressibilité  $\Gamma$  et des deux coefficients  $H_D$  et  $L_D$ .

Sur la figure 1.6, on trace le coefficient d'écrouissage  $H_{pert\_m}(\delta, \eta\tau)$  associé à une perturbation pour différentes valeurs du taux de croissance relatif et pour les deux valeurs  $H_D = 0,4$  et  $H_D = 2,5$  du paramètre  $H_D$ . On fait l'hypothèse que  $L_D = N_D = 1 + 2H_D$ . En d'autres termes, les limites d'écoulement en cisaillement selon les axes sont identiques (i.e. pour les trois composantes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xy}$ ) ; en revanche, la limite d'écoulement en cisaillement à 45 degrés dans les plans  $(y, z)$  et  $(z, x)$  est inférieure à la limite d'écoulement en cisaillement dans le plan  $(x, y)$  pour le premier cas et supérieure pour le second. On se restreint au cas incompressible  $\Gamma = 1$ . On compare  $H_{pert\_m}(\delta, \eta\tau)$  au coefficient d'écrouissage  $H_{bif\_m}(\delta)$  associé à une bifurcation dans chacun des deux cas. Pour le cas  $H_D = 0,4$ , on observe les mêmes tendances que dans le cas isotrope à savoir que les perturbations se développent pour des coefficients d'écrouissage plus élevés (ou moins négatifs) que les bifurcations et que  $H_{pert\_m}$  et  $H_{bif\_m}$  évoluent de la même manière avec la triaxialité  $\delta$  ; la normale  $\mathbf{N}_m$  est systématiquement dans le plan  $(x, z)$  à 45° de l'axe  $x$ . Pour le cas  $H_D = 2,5$ , le passage de la normale  $\mathbf{N}_m$  du plan  $(x, y)$  au plan  $(x, z)$  dépend légèrement du taux de croissance relatif  $\eta\tau$  ; autrement dit, il existe un petit domaine de taux de biaxialité pour lesquels la bifurcation la plus favorable (apparaissant pour le module d'écrouissage le plus élevé) apparaît dans le plan  $(x, y)$  mais les perturbations instables les plus favorables se développent dans le plan  $(x, z)$ .

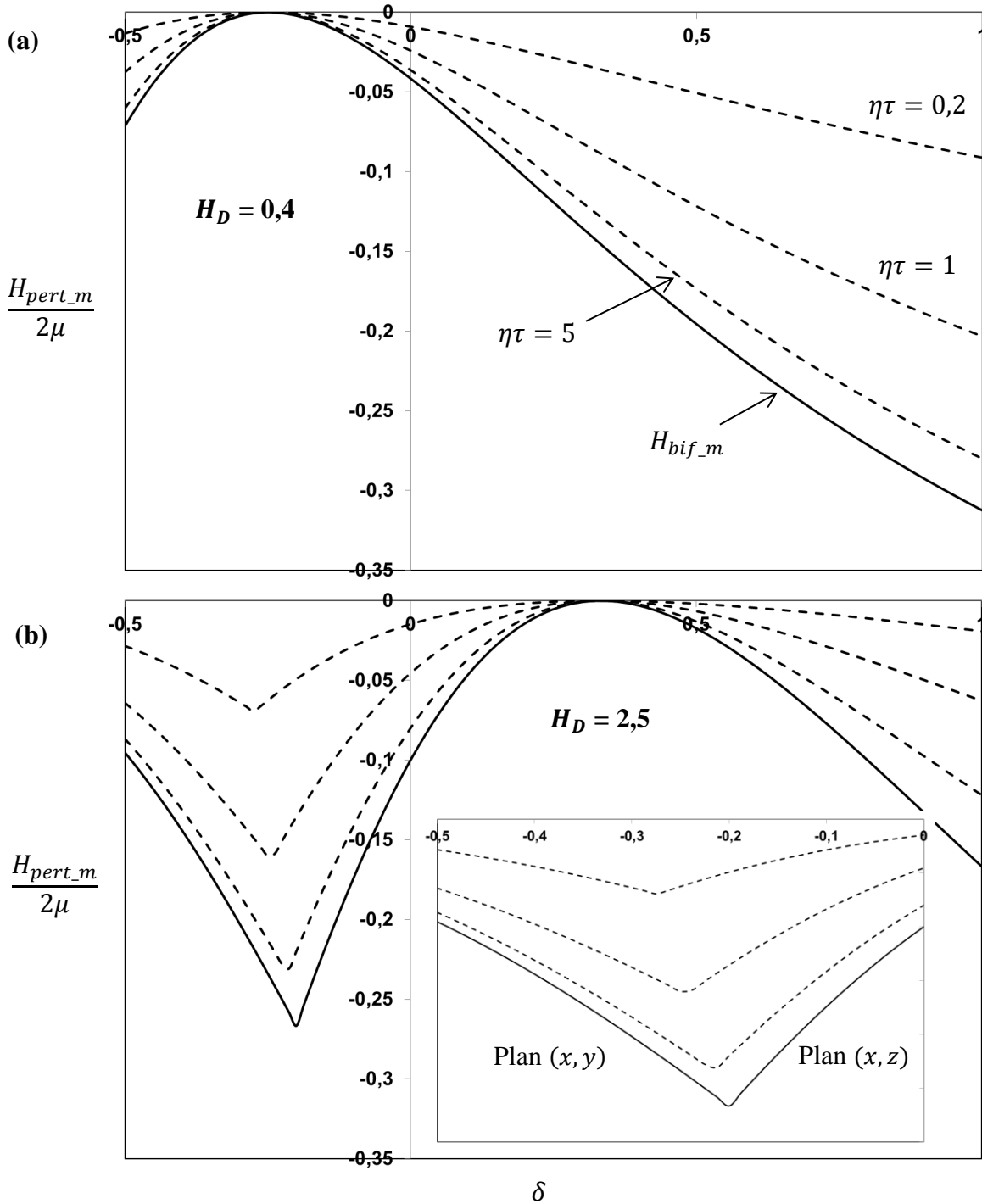


Figure 1.6 : Coefficient d'écroissage  $H_{pert\_m}$  fonction du paramètre  $\delta$  associé à une perturbation du chargement pour le critère de Hill isotrope transverse (cas incompressible) pour différents taux de croissance relatifs et les deux valeurs (a)  $H_D = 0,4$  et (b)  $H_D = 2,5$ . La partie dilatée de la figure (b) illustre le fait que le taux de triaxialité  $\delta$  au passage de la normale  $\mathbf{N}_m$  du plan  $(x, y)$  au plan  $(x, z)$  dépend du taux de croissance relatif  $\eta\tau$ .

Sur la figure 1.7, on s'intéresse à l'incidence du paramètre  $L_D$ ; on suppose que les limites d'écoulement en traction uniaxiale sont identiques dans les trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  et donc les limites en cisaillement à 45 degrés (i.e.  $H_D = 1$ ). On suppose en outre que  $L_D = 7,5 > N_D = 3$ , ce qui signifie que les limites d'écoulement en cisaillement des plans  $(y, z)$  et  $(z, x)$  selon les axes sont plus faibles que les limites d'écoulement en cisaillement à 45 degrés. On compare ce cas avec le cas isotrope  $L_D = N_D = 3$  pour un taux de croissance relatif  $\eta\tau = 1$ . Rappelons que les conditions d'apparition d'une bifurcation sont identiques pour les deux cas. Les conditions de développement d'une perturbation diffèrent pour les faibles valeurs du paramètre  $\delta$  ( $\delta < -0,3$ ) et  $H_{pert\_m}(\delta, \eta\tau)$  est plus élevé dans le cas  $L_D = 7,5$ ; dans ce cas, la normale  $\mathbf{N}_m$  est toujours à 45 degrés de l'axe mais n'est plus dans le plan  $(x, z)$ ; lorsque  $\delta$  décroît, elle en dévie progressivement pour atteindre le plan  $y = z$  lorsque  $\delta = -0,5$  (figure 1.8).

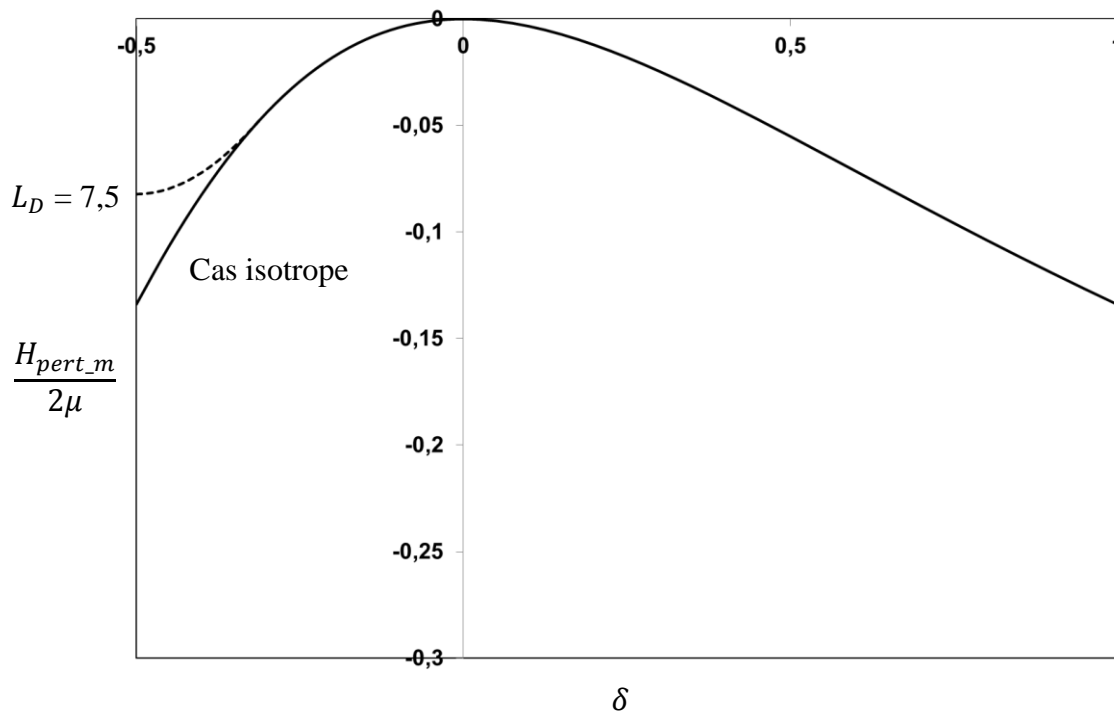


Figure 1.7 : Coefficient d'écrouissage  $H_{pert\_m}$  fonction du paramètre  $\delta$  associé à une perturbation du chargement (taux de croissance relatif  $\eta\tau = 1$ ) ; comparaison du critère de von Mises et du critère de Hill isotrope transverse tel que  $H_D = 1$  et  $L_D = 7,5$  (cas d'un cisaillement plus facile des plans  $(x, z)$  et  $(y, z)$  que du plan  $(x, y)$ ).

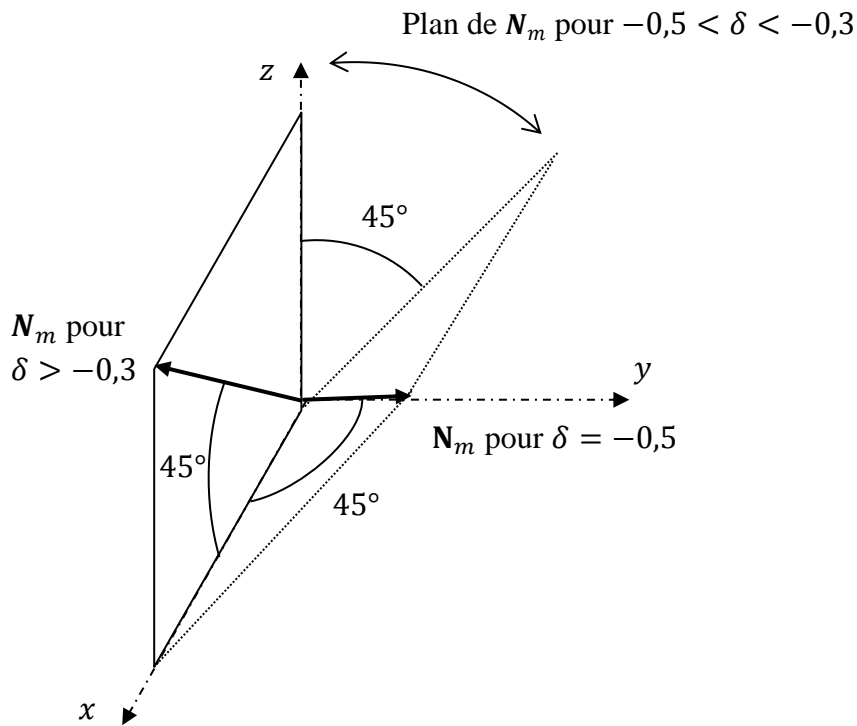


Figure 1.8 : Orientation de la normale  $\mathbf{N}_m$  pour de faibles valeurs de  $\delta$  pour le critère de Hill isotrope transverse tel que  $H_D = 1$  et  $L_D = 7,5$ .

### 1.2.5. Bilan de l'analyse

L'étude des conditions de localisation en chargement quasistatique montrent que celles-ci dépendent fortement des caractéristiques tridimensionnelles du comportement, en particulier la forme de la surface de charge plastique, forme qui est susceptible d'évoluer avec une pré-déformation.

Une surface de charge anisotrope (surface de Hill), peut, suivant le chargement appliqué, favoriser ou défavoriser l'apparition des premières bandes de localisation par rapport à une surface de charge isotrope (surface de von Mises). En outre, l'orientation de ces bandes peut s'écarter sensiblement de celle du plan de cisaillement maximal.

Les conditions de croissance d'une perturbation instable sont, d'une façon générale, moins sévères que les conditions de bifurcation ; elles sont par exemple satisfaites pour une pré-déformation plus faible si on fait l'hypothèse que le module d'écroutissage décroît continument avec celle-ci. En outre, tandis que les conditions de bifurcation ne dépendent que de la normale à



la surface de charge au point caractéristique de l'écoulement moyen dans l'espace des contraintes, les conditions de croissance d'une perturbation font également intervenir les variations de la normale au voisinage de cet état, ce qui peut conduire à des orientations de bandes différentes entre bifurcations et perturbations instables.

### 1.3. Bandes de localisation dans le cas d'un comportement viscoplastique

On établit dans ce paragraphe une extension de l'approche du paragraphe 1.2.2 au cas d'un comportement viscoplastique. On suppose pour cela que le multiplicateur plastique est donné par une relation de la forme suivante (dans laquelle l'exposant  $m$  est tel que  $m \ll 1$ , ce qui traduit un effet de viscosité faible) :

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_0 \left( \frac{f(\boldsymbol{\sigma})}{Y(\alpha)} \right)^{1/m} \quad \text{ou, de manière équivalente,} \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \left( \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\lambda}_0} \right)^m Y(\alpha). \quad (1.93)^{13}$$

En vertu des relations (1.1) et (1.5), une perturbation de l'écoulement moyen satisfait :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : \left( \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \delta \dot{\lambda} \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}_1(t)) - \dot{\lambda}_1(t) \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\boldsymbol{\sigma}} : \delta \boldsymbol{\sigma} \right), \\ \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}_1(t)) : \delta \boldsymbol{\sigma} &= \left( \frac{\dot{\lambda}_1(t)}{\dot{\lambda}_0} \right)^m \tilde{A}(\alpha_1(t)) \delta \alpha + Y(\alpha_1(t)) \frac{m}{\dot{\lambda}_0} \left( \frac{\dot{\lambda}_1(t)}{\dot{\lambda}_0} \right)^{m-1} \delta \dot{\lambda}, \\ \delta \dot{\alpha} &= \delta \dot{\lambda} \tilde{B}(\alpha_1(t)) + \dot{\lambda}_1(t) \frac{d\tilde{B}}{d\alpha} \delta \alpha. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Une bifurcation de la solution homogène vérifierait :

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(t=0) = 0, \quad \delta \boldsymbol{\sigma}(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \delta \alpha(t=0) = 0. \quad (1.95)$$

Et, en vertu des relations (1.94) :

$$\delta \dot{\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.96)$$

Il existerait une bifurcation sous la forme de bandes de localisation de normale  $\mathbf{N}$  si  $\mathbf{N}$  vérifiait  $\text{Det}(\mathbf{N} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{N}) = 0$ , ce qui est impossible du fait de la définie positivité de  $\mathbb{C}$ .

<sup>13</sup> On introduit donc une viscosité « multiplicative » qui fait disparaître la notion de seuil.

En développant les grandeurs relatives à l'écoulement moyen à l'ordre 1 en temps, les relations (1.94) se simplifient sous la forme :

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C} : \left( \delta\boldsymbol{\varepsilon} - \delta\dot{\lambda} \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}_{10} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}t) - \dot{\lambda}_{10} \frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} \right), \\ \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}_{10} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}t) : \delta\boldsymbol{\sigma} &= \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\dot{\lambda}_0} \right)^m \tilde{A}(\alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}t) \delta\alpha + Y(\alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}t) \frac{m}{\dot{\lambda}_0} \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\dot{\lambda}_0} \right)^{m-1} \delta\dot{\lambda}, \\ \delta\dot{\alpha} &= \delta\dot{\lambda} \tilde{B}(\alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}t) + \dot{\lambda}_{10} \frac{d\tilde{B}}{d\alpha} \delta\alpha.\end{aligned}\tag{1.97}$$

Les équations d'évolution d'une perturbation sont plus complexes que dans le cas plastique et feraient intervenir, même sous une hypothèse de chargement radial en contrainte, des coefficients dépendant du temps.

Le cas limite d'une « condition de séparation des échelles de temps » revient à assimiler tous les modules relatifs à l'écoulement de base à leur valeur à  $t = 0$  :

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}t) &= \tilde{A}(\alpha_{10}), & \tilde{B}(\alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}t) &= \tilde{B}(\alpha_{10}), \\ Y(\alpha_{10} + \dot{\alpha}_{10}t) &= Y(\alpha_{10}), \\ \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}_{10} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}t) &= \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}_{10} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{10}t) &= \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}).\end{aligned}\tag{1.98}$$

On recherche alors des solutions sous la forme donnée par les relations (1.20) et (1.21) en supposant que  $\eta \gg \dot{\lambda}_{10}$ . On pose de plus :

$$\delta\alpha = i \delta\tilde{\alpha} e^{ikx \cdot \mathbf{N} + \eta t} \quad \text{et} \quad \delta\dot{\lambda} = i\eta \delta\tilde{\lambda} e^{ikx \cdot \mathbf{N} + \eta t}.\tag{1.99}$$

Le système (1.97) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : \left( \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \delta\tilde{\lambda} \tilde{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) \right), \\ \tilde{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}) : \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \tilde{A}(\alpha_{10}) \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\dot{\lambda}_0} \right)^m \delta\tilde{\alpha} + \eta \frac{m}{\dot{\lambda}_0} Y(\alpha_{10}) \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\dot{\lambda}_0} \right)^{m-1} \delta\tilde{\lambda}, \\ \delta\tilde{\alpha} &= \delta\tilde{\lambda} \tilde{B}(\alpha_{10}).\end{aligned}\tag{1.100}$$

Il s'ensuit les relations :

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \widehat{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}, \dot{\lambda}_{10}, \eta) : \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \delta\tilde{\alpha} = \widehat{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}, \dot{\lambda}_{10}, \eta) : \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

avec :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}, \dot{\lambda}_{10}, \eta) &= \\ \mathbb{C} - \frac{1}{\left( \tilde{\mathbf{Q}} : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{A}\tilde{B} \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\lambda_0} \right)^m + \eta \frac{m}{\lambda_0} Y \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\lambda_0} \right)^{m-1} \right)} & (\mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}) \otimes (\tilde{\mathbf{Q}} : \mathbb{C}) \\ \widehat{\mathbb{B}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}, \dot{\lambda}_{10}, \eta) &= \frac{\tilde{B}}{\left( \tilde{\mathbf{Q}} : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{A}\tilde{B} \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\lambda_0} \right)^m + \eta \frac{m}{\lambda_0} Y \left( \frac{\dot{\lambda}_{10}}{\lambda_0} \right)^{m-1} \right)} \tilde{\mathbf{Q}} : \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

La condition d'existence de tels modes et la direction de déplacement  $\mathbf{M}$  associée sont données par les relations :

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{N} \cdot \widehat{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}, \dot{\lambda}_{10}, \eta) \cdot \mathbf{N}) &= 0, \\ (\mathbf{N} \cdot \widehat{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}, \dot{\lambda}_{10}, \eta) \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{M} &= 0. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Le comportement plastique non visqueux correspond au cas limite lorsque  $m \rightarrow 0$ . Dans ce cas, le module  $\widehat{\mathbb{L}}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10}, \dot{\lambda}_{10}, \eta)$  est égal au module  $\mathbb{L}(\boldsymbol{\sigma}_{10}, \alpha_{10})$  pour toute vitesse de déformation plastique  $\dot{\lambda}_{10}$  et la condition d'existence d'un mode instable avec séparation des échelles de temps est équivalente à la condition de bifurcation.

## 2. Instabilités et localisation à l'échelle de la microstructure

L'ensemble des études développées dans ce chapitre met en œuvre la modélisation du comportement plastique à l'échelle des grains de l'agrégat polycristallin constituant le métal. Les simulations numériques qui sont présentées sont réalisées au moyen d'un code de calcul aux éléments diffus (« element free Galerkin ») développé au CEA/DAM (code Coddex, cf. Denoual et al., 2006) qui s'appuie sur une formulation Lagrangienne des équations d'équilibre mécanique.

Dans un premier paragraphe (paragraphe 2.1), on présente le modèle de plasticité cristalline dans le cadre des grandes transformations élasto-plastiques. Dans un second paragraphe (paragraphe 2.2), on développe une étude sur l'incidence des interactions entre systèmes de glissement et l'apparition de déformations hétérogènes à l'échelle intra-granulaire ; on évalue ensuite les conséquences d'effets non-locaux sur le phénomène mis en évidence. Cette étude met en œuvre une analyse de perturbation sous forme de bandes de localisation de la déformation telle que développée au paragraphe 1.3. Dans un troisième paragraphe (paragraphe 2.3), on tente d'évaluer l'incidence de phénomènes opérant à l'échelle de la microstructure sur la localisation de la déformation dans des plaques en extension : on a réalisé pour cela des simulations de la plaque dans lesquels l'agrégat constitutif est reproduit. Le contexte de chacune de ces deux études, déjà brièvement évoqué en introduction, est précisé dans le paragraphe associé.

### 2.1. Modèle de plasticité cristalline

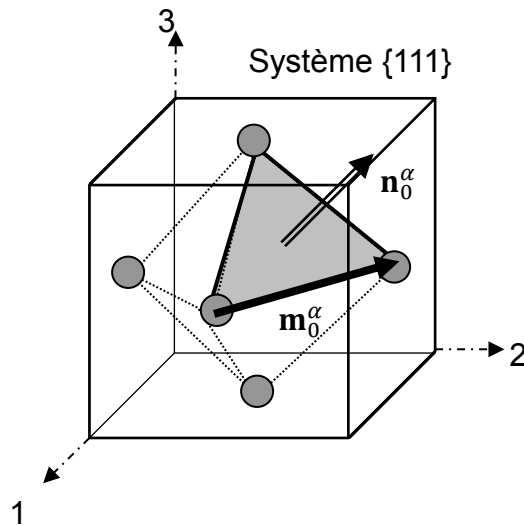
#### 2.1.1. Formulation locale en transformations finies

Les modèles de plasticité cristalline permettent de reproduire le comportement thermomécanique à l'échelle des grains du métal. La déformation plastique est assurée par le glissement des plans cristallins denses les uns sur les autres dans les directions reliant les atomes voisins dans chacun de ces plans. Dans ce qui suit, on ne tient pas compte d'autres phénomènes tels que le maillage ou les transformations de phase qui font néanmoins l'objet d'études au CEA/DAM à différentes échelles d'analyse (cf. Vattré et Denoual, 2016, pour une approche « champ de phase » à l'échelle du milieu continu ou Riffet et al., 2020, pour une approche à l'échelle atomique) et dont la modélisation est en cours d'implantation dans le code (travaux en cours de Nicolas Bruzy).

Concernant la plasticité, une orientation de plan et une direction de glissement forment un système de glissement, l'ensemble des systèmes de glissement  $\alpha$  étant propre à une structure cristalline donnée. Pour les analyses développées dans ce manuscrit, on se limite aux structures cubiques à faces centrées (CFC) et cubique centrée (CC). Les systèmes relatifs à ces structures sont respectivement représentés sur les figures 2.1 et 2.2 (pour le système  $\alpha$ ,  $\mathbf{m}_0^\alpha$  et  $\mathbf{n}_0^\alpha$  sont des

vecteurs unitaires orthogonaux désignant respectivement la direction de glissement et la normale au plan de glissement dans le réseau cristallin non déformé). Les 12 systèmes  $\{111\}$  de la structure CFC sont donnés dans le tableau 2.1 en utilisant la notation de Schmid et Boas (1935) et les 24 principaux systèmes de la structure CC (12 systèmes  $\{110\}$  et 12 systèmes  $\{112\}$ ) sont donnés dans le tableau 2.2.

Le glissement des plans est assuré par le mouvement de dislocations ; à chaque système de glissement sont associées des boucles de dislocations contenues dans le plan de glissement et dont le vecteur de Burgers est colinéaire à  $\mathbf{m}_0^\alpha$ . Les dislocations opérant sur des systèmes différents interagissent, ce qui est responsable du durcissement et, de fait, de l'écroutissage observé à l'échelle macroscopique. Le modèle utilisé dans la suite est un modèle dérivé du modèle de Teodosiu (Teodosiu et al., 1991) utilisant les densités de dislocations par système comme variables internes et dont la matrice d'interaction est identifiée à partir de calculs de dynamique des dislocations (DD) pour les deux structures cristallines<sup>14</sup>. Les différentes composantes de ce modèle font l'objet d'une démarche continue de validation à partir de résultats d'essais de traction sur monocristaux disponibles dans la littérature.



**Figure 2.1** : Système de glissement  $\{111\}$  de la structure CFC.  $\mathbf{n}_0^\alpha$  désigne la normale au plan de glissement et  $\mathbf{m}_0^\alpha$  la direction de glissement. Dans un souci de lisibilité, seuls sont représentés les atomes au centre des faces.

<sup>14</sup> La structure hexagonale compacte (HCP), qui se déforme aussi par glissement plastique sur des plans qui lui sont propres, est en cours d'implantation dans le code Coddex et de premiers coefficients d'interaction ont été évalués par DD.

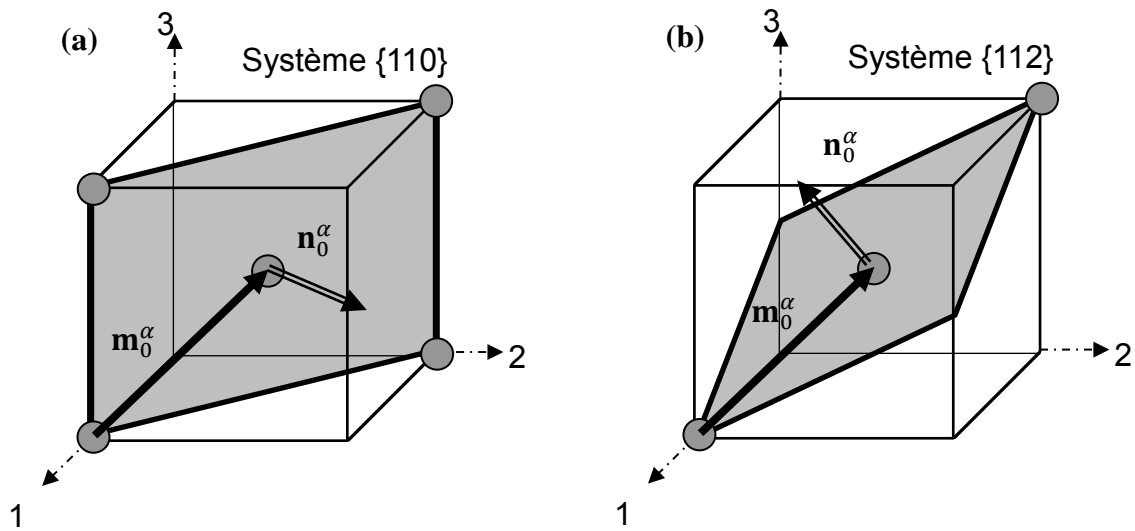


Figure 2.2 : (a) Système de glissement  $\{110\}$  et (b) système de glissement  $\{112\}$  de la structure CC. Dans chacun des deux cas, seuls sont représentés les atomes de la maille appartenant au plan de glissement.

Tableau 2.1 : Systèmes de glissement  $\{111\}$  de la structure CFC. On utilise la notation de Schmid et Boas (1935) qui désigne le plan de glissement par une lettre et la direction de glissement par un chiffre.

Plan de glissement $\mathbf{n}_0^\alpha$	Direction de glissement $\mathbf{m}_0^\alpha$
A $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$	1 $[011]$
B $(111)$	2 $[0\bar{1}\bar{1}]$
C $(11\bar{1})$	3 $[101]$
D $(\bar{1}\bar{1}1)$	4 $[10\bar{1}]$
	5 $[\bar{1}\bar{1}0]$
	6 $[\bar{1}10]$

Tableau 2.2 : Systèmes de glissement {110} et {112} de la structure CC. Le plan de glissement est maintenant désigné par un chiffre et la direction de glissement par une lettre ; pour les plans de glissement {112}, on utilise la numérotation de Madec et Kubin (2017) .

Plan de glissement $\mathbf{n}_0^\alpha$		Direction de glissement $\mathbf{m}_0^\alpha$
1 (011)	<u>1</u> ( $\bar{1}12$ )	A [ $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ]
2 (01 $\bar{1}$ )	<u>2</u> ( $\bar{1}\bar{1}\bar{2}$ )	B [111]
3 (101)	<u>3</u> ( $2\bar{1}\bar{1}$ )	C [ $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ]
4 (10 $\bar{1}$ )	<u>4</u> (211)	D [ $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ ]
5 ( $\bar{1}\bar{1}0$ )	<u>5</u> ( $\bar{1}21$ )	
6 (110)	<u>6</u> ( $\bar{1}\bar{2}\bar{1}$ )	
	<u>7</u> ( $\bar{1}\bar{1}\bar{2}$ )	
	<u>8</u> ( $\bar{1}\bar{1}\bar{2}$ )	
	<u>9</u> ( $2\bar{1}\bar{1}$ )	
	<u>10</u> ( $2\bar{1}\bar{1}$ )	
	<u>11</u> ( $\bar{1}\bar{2}\bar{1}$ )	
	<u>12</u> ( $\bar{1}\bar{2}\bar{1}$ )	

Plus précisément, dans le cadre des grandes transformations élasto-plastique, les équations constitutives s'explicitent de la façon suivante. Le gradient de transformation  $\mathbf{F}$ , qui est l'application linéaire associant à un vecteur matériel  $d\mathbf{X}$  dans la configuration initiale sa transformée  $d\mathbf{x}$  dans la configuration finale (et peut s'exprimer également en fonction du gradient du champ de déplacement  $\mathbf{u}$ ), se décompose en une composante plastique  $\mathbf{F}^p$  et une composante élastique  $\mathbf{F}^e$  en suivant Lee (1969) :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{1} + \text{Grad}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p. \quad (2.1)$$

Pour chaque élément de matière, l'application  $\mathbf{F}^p$  transforme la configuration initiale non déformée (indicée 0) en une configuration dite « relâchée » (indicée \*) dans laquelle les plans cristallins ont glissé mais le réseau cristallin conserve la même orientation que dans la configuration initiale (cette configuration relâchée est dite « isocline », cf. Mandel, 1974) ; on note  $d\mathbf{X}_*$  un vecteur matériel dans cette configuration. L'application  $\mathbf{F}^e$ , qui englobe les déformations élastiques et les rotations du réseau cristallin, transforme la configuration relâchée pour obtenir la configuration finale déformée (figure 2.3). Elle s'écrit comme le produit d'un tenseur symétrique  $\mathbf{S}^e$  (décrivant les déformations du réseau cristallin) et d'un tenseur de rotation  $\mathbf{R}^e$  (décrivant les rotations du réseau) :

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \cdot \mathbf{S}^e. \quad (2.2)$$

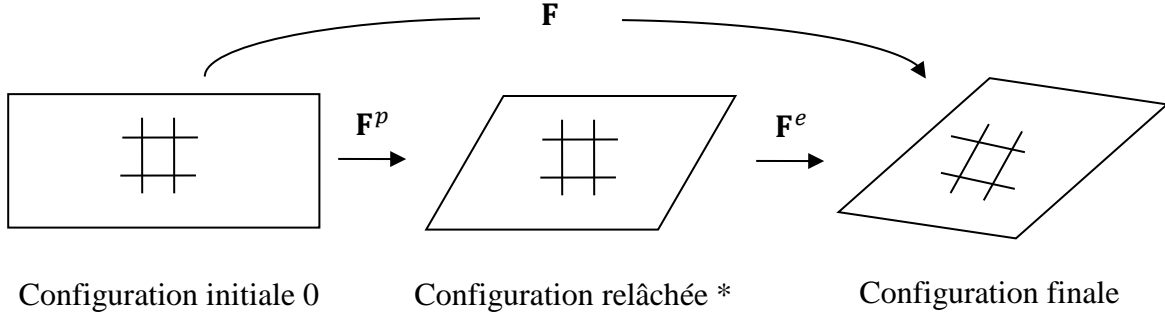


Figure 2.3 : Décomposition du gradient de transformation (sont également schématisées les déformations du réseau cristallin)

On adopte le principe des puissances virtuelles (PPV) pour décrire l'évolution de l'état mécanique du système. Pour un volume de matière  $\Omega_0$  dans la configuration initiale et pour tout champ de vitesses virtuel  $\hat{\mathbf{v}}$ , le PPV se met sous la forme :

$$W_{int}(\hat{\mathbf{v}}) + W_{ext}(\hat{\mathbf{v}}) = W_{acc}(\hat{\mathbf{v}}). \quad (2.3)^{15}$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est une forme linéaire du champ de vitesses virtuelles faisant intervenir le champ de contrainte  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}$  est appelé premier tenseur de Piola-Kirchhoff) :

$$W_{int}(\hat{\mathbf{v}}) = - \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \hat{\mathbf{F}} \, d\Omega_0 \quad \text{où :} \quad \hat{\mathbf{F}} = \text{Grad}(\hat{\mathbf{v}}). \quad (2.4)$$

En l'absence de forces extérieures volumiques, la puissance virtuelle des efforts extérieurs et celles des quantités d'accélération s'écrivent :

$$W_{ext}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, da_0 \quad \text{et} \quad W_{acc}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_0} \rho_{m0} \dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_0. \quad (2.5)$$

$\rho_{m0}$  est la masse volumique initiale et  $\mathbf{t}$  désigne une densité surfacique d'efforts sur la surface extérieure  $\partial\Omega_0$ .

Les relations d'équilibre local se déduisent de la relation (2.3) en appliquant une intégration par partie à  $W_{int}(\hat{\mathbf{v}})$  :

$$\text{Div}(\mathbf{P}) = \rho_{m0} \dot{\mathbf{v}} \quad \text{sur } \Omega_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial\Omega_0 \text{ de normale sortante } \mathbf{N}. \quad (2.6)$$

Les relations de comportement s'expriment sur la configuration relâchée (\*). Elles sont définies de manière à ce que soient vérifiés les principes de base de la thermodynamique. Le

<sup>15</sup> Le principe des puissances virtuelles sous la forme (2.3) suppose d'affecter un signe (-) à la puissance des efforts intérieurs qui est une puissance résistive mais les deux conventions existent dans la littérature.



comportement élastique dérive d'une énergie libre (supposée quadratique) fonction du tenseur des déformations de Green-Lagrange<sup>16</sup> :

$$\varphi^e = \frac{1}{2} \mathbf{E}^e : \mathbb{C} : \mathbf{E}^e \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e - \mathbf{I}). \quad (2.7)$$

Le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C}$  dépend des propriétés de symétrie de la structure cristalline. Pour les structures à symétrie cubique, il est défini par les trois coefficients  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{44}$  (en notation de Voigt). Le second tenseur de Piola-Kirchhoff est la dérivée de l'énergie libre élastique :

$$\boldsymbol{\pi}_* = \frac{d\varphi^e}{d\mathbf{E}^e} = \mathbb{C} : \mathbf{E}^e. \quad (2.8)$$

En décomposant la puissance des efforts intérieurs en une partie élastique et une partie plastique et en utilisant le fait que la partie élastique est entièrement stockée sous forme d'énergie libre, on peut relier les premier et second tenseurs de Piola-Kirchhoff ; plus précisément :

$$W_{int} = - \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, d\Omega_0 = W_{int}^e + W_{int}^p = - \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : (\dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p) \, d\Omega_0,$$

$$W_{int}^e = - \int_{\Omega_0} \dot{\varphi}^e \, d\Omega_0 = - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\pi}_* : \dot{\mathbf{E}}^e \, d\Omega_0. \quad (2.9)$$

En vertu des relations (2.7)<sub>2</sub> et (2.9), on déduit que :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}^e \cdot \boldsymbol{\pi}_* \cdot \mathbf{F}^{p-T}. \quad (2.10)$$

La vitesse de transformation plastique est reliée aux vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^\alpha$  sur les différents systèmes :

$$\mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} = \sum_\alpha \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha. \quad (2.11)$$

$\mathbf{m}_0^\alpha$  et  $\mathbf{n}_0^\alpha$  désignent la direction de glissement et la normale au plan de glissement pour le réseau non-déformé, i.e. dans la configuration initiale et également dans la configuration relâchée isocline.

Les lois d'écoulement plastique donnent l'évolution des vitesses de glissement en fonction des contraintes. La loi de Schmid postule que la vitesse de glissement  $\dot{\gamma}^\alpha$  dépend uniquement de la cission résolue  $\tau^\alpha$  qui est définie comme la variable conjuguée de  $\dot{\gamma}^\alpha$  dans l'expression de la puissance plastique (cf. Kalidindi et Anand, 1993).

---

<sup>16</sup> Ici et dans ce qui suit, on définit une densité d'énergie libre, i.e. une énergie libre par unité de volume dans la configuration initiale ou relâchée.

Plus précisément :

$$W_{int}^p = - \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : (\mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p) d\Omega_0 = - \int_{\Omega_0} (\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{pT}) : \mathbf{L}^p d\Omega_0 = - \int_{\Omega_0} \sum_{\alpha} \tau^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} d\Omega_0,$$

avec :

$$\tau^{\alpha} = (\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{pT}) : (\mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes \mathbf{n}_0^{\alpha}) = (\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \cdot \boldsymbol{\pi}_*) : (\mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes \mathbf{n}_0^{\alpha}). \quad (2.12)$$

Dans le cas des matériaux CFC, le principal obstacle au glissement est constitué par les dislocations stockées sur les différents systèmes de glissement. La vitesse de glissement est donnée par un modèle viscoplastique qui restitue en plus un petit effet de friction de réseau :

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{|\tau^{\alpha}|}{\tau_c^{\alpha}} \right)^{1/m} \text{sgn}(\tau^{\alpha}). \quad (2.13)$$

Le terme  $\text{sgn}(\tau^{\alpha})$  traduit le fait que le sens de glissement est donné par le signe de la cission résolue.  $\dot{\gamma}_0$  et  $m$  sont des constantes du modèle ( $m \ll 1$ ). La relation (2.13) revient à définir pour le glissement une contrainte d'écoulement  $\pi^{\alpha}$  fonction de la vitesse de glissement :

$$\tau^{\alpha} = \pi^{\alpha} = \tau_c^{\alpha} \left( \frac{|\dot{\gamma}^{\alpha}|}{\dot{\gamma}_0} \right)^m \text{sgn}(\dot{\gamma}^{\alpha}). \quad (2.14)$$

La cission critique  $\tau_c^{\alpha}$  est reliée aux densités de dislocations par système par un « modèle de la forêt » généralisé et une matrice d'interaction  $a^{\alpha\beta}$ . La formulation initiale de ce modèle proposée par Franciosi et al. (1980) est la suivante :

$$\tau_c^{\alpha} = \tau_0 + \mu b \sqrt{\sum_{\beta} a^{\alpha\beta} \rho^{\beta}}. \quad (2.15)$$

$b$  est le vecteur de Burgers et la constante  $\tau_0$  permet de prendre en compte l'effet de défauts ou de précipités.  $\mu$  est un module de cisaillement moyen intervenant dans le calcul de l'énergie de ligne des dislocations vis (cf. Kubin, 2013) ; pour les structures cubiques :

$$\mu = \sqrt{C_{44} \left( \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \right)}. \quad (2.16)$$

Le coefficient  $a^{\alpha\alpha}$  caractérise l'effet du système  $\alpha$  sur lui-même (écrouissage propre). Le coefficient  $a^{\alpha\beta}$  caractérise l'effet du système  $\beta$  sur le système  $\alpha$  (écrouissage latent) ; il est fonction de la force de la jonction formée par les dislocations mobiles du système  $\alpha$  avec les dislocations obstacle du système  $\beta$ .

Des travaux récents de Devincre et al. (2006) ont montré que les cissions critiques dépendaient également de la longueur des segments de dislocations formant les jonctions et ont abouti à la relation suivante que l'on utilisera également dans la suite :

$$\tau_c^\alpha = \tau_0 + \mu b \log \left( \frac{1/b \sqrt{\sum_\gamma a^{\alpha\gamma} \rho^\gamma}}{1/b \sqrt{\sum_\gamma a^{\alpha\gamma} \rho_{ref}}} \right) \sqrt{\sum_\beta a^{\alpha\beta} \rho^\beta}. \quad (2.17)$$

En tenant compte des symétries de la maille cristalline CFC et si l'on suppose que, lors de la formation d'une jonction, les dislocations du système mobile et celles du système obstacle jouent des rôles identiques, la matrice  $a^{\alpha\beta}$  est symétrique et possède six coefficients indépendants :

- $a'_0$  caractérise l'écroutissage propre ;
- $a_1^{copla}$  caractérise l'interaction dipolaire, c'est-à-dire entre deux systèmes coplanaires (i.e. de plans de glissement parallèles :  $\mathbf{m}_0^\alpha \neq \mathbf{m}_0^\beta$  et  $\mathbf{n}_0^\alpha = \mathbf{n}_0^\beta$ ) ;
- $a_1^{coli}$  caractérise l'interaction colinéaire, c'est-à-dire entre systèmes ayant des plans de glissement sécants et même direction de glissement ( $\mathbf{m}_0^\alpha = \mathbf{m}_0^\beta$  et  $\mathbf{n}_0^\alpha \neq \mathbf{n}_0^\beta$ ) ;
- $a_1^{ortho}$  caractérise la jonction de Hirth, entre systèmes de directions de glissement orthogonales ( $\mathbf{m}_0^\alpha \perp \mathbf{m}_0^\beta$  et  $\mathbf{n}_0^\alpha \neq \mathbf{n}_0^\beta$ ) ;
- $a_2$  caractérise la jonction glissile, entre systèmes de plans de glissement sécants et de directions de glissement différentes ( $\mathbf{m}_0^\alpha \neq \mathbf{m}_0^\beta$  et  $\mathbf{n}_0^\alpha \neq \mathbf{n}_0^\beta$ ) tels que l'une des deux directions de glissement appartienne aux deux plans ;
- $a_3$  caractérise la jonction de Lomer, entre systèmes de plans sécants dans les autres cas.

Les calculs de DD de Devincre et al. (2006) prédisaient un jeu de coefficients commun à tous les matériaux CFC et un coefficient d'interaction colinéaire  $a_1^{coli}$  très supérieur aux autres coefficients, du fait de la grande stabilité des jonctions formées par des dislocations de même vecteur de Burgers. Les calculs plus récents de Madec et Kubin (2017) ont montré, d'une part, que la valeur des coefficients d'interaction dépendait du matériau (plus précisément de ces différentes constantes élastiques<sup>17</sup>) et, d'autre part, que la matrice d'interaction n'était pas symétrique. En effet, dans le cas d'une jonction glissile, le système mobile et le système obstacle

---

<sup>17</sup> La plupart des calculs de DD font l'hypothèse que le monocristal est isotrope et utilisent un module de cisaillement et un coefficient de Poisson apparents permettant de restituer simultanément l'énergie de ligne des dislocations pure vis et celle des dislocations pure coin (approximation dite de Bacon-Scattergood).

ne jouent pas des rôles symétriques par rapport au segment de dislocation formant la jonction. Il s'ensuit un coefficient supplémentaire dans la matrice noté  $a_2^*$ .

L'évolution des densités de dislocations est ensuite donnée par un modèle dit « de stockage-restauration » dans lequel le premier terme décrit l'augmentation de la densité liée à l'accrochage des dislocations mobiles sur les obstacles ; le second terme traduit l'annihilation de dislocations de signe opposé et de plans de glissement parallèles avec l'aide du glissement dévié :

$$\dot{\rho}^\alpha = \frac{1}{b} \left( \sqrt{\sum_\beta d^{\alpha\beta} \rho^\beta} - 2y_c \rho^\alpha \right) |\dot{\gamma}^\alpha|. \quad (2.18)$$

La matrice  $d^{\alpha\beta}$  des libres parcours moyens est reliée à la matrice d'interaction  $a^{\alpha\beta}$  et au nombre  $n$  de systèmes actifs par les relations qui suivent (Kubin et al., 2008) :

$$d^{\alpha\beta} = \frac{a^{\alpha\beta}}{k_{nc}^2} \quad \text{où } k_{nc} \text{ est une constante si les systèmes } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont coplanaires.}$$

$$d^{\alpha\beta} = \frac{a^{\alpha\beta}}{k_c^2} \quad \text{avec } k_c = \frac{n\sqrt{\bar{a}}(1+\kappa)^{3/2}}{p_0 k_0 (n-1-\kappa)} \quad \text{si les systèmes sont de plans sécants.} \quad (2.19)$$

( $\bar{a}$  est la moyenne des coefficients d'interaction entre les systèmes actifs,  $\kappa$ ,  $p_0$  et  $k_0$  sont des constantes du modèle).

Dans le terme d'annihilation,  $y_c$  est une distance moyenne de capture entre dislocations de signe opposé<sup>18</sup>.

En dérivant en temps la relation (2.15) et en la combinant avec la relation (2.18), on peut récrire l'écroissage sous la forme d'une relation entre taux d'évolution des cissions critiques et vitesses de glissement (on trouve ce type de formulation dans Peirce et al., 1982, par exemple) :

$$\dot{\tau}_c^\alpha = \sum_\beta H_{\alpha\beta} |\dot{\gamma}^\beta|. \quad (2.20)$$

Les coefficients de la matrice d'écroissage ainsi définie vérifient (cf. Madec, 2011) :

$$H_{\alpha\beta} = \mu \left( \frac{\sqrt{\sum_\gamma d^{\beta\gamma} \rho^\gamma} - 2y_c \rho^\beta}{2\sqrt{\sum_\gamma a^{\alpha\gamma} \rho^\gamma}} \right) a^{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

Dans le cas des matériaux CC, la résistance au glissement résulte de l'effet combiné des dislocations stockées (forêt) et de la contrainte de Peierls, contrainte nécessaire à une dislocation seule pour passer d'un rang d'atomes au suivant (vallées de Peierls). Le glissement ne peut se

<sup>18</sup> Des travaux récents (Kubin et al., 2009) ont montré que le glissement dévié était plus ou moins aisé suivant l'orientation du chargement et que, par voie de conséquence, la distance de capture en dépendait également. Toutefois, on a choisi de ne pas tenir compte de cette dépendance dans les travaux présentés ici et  $y_c$  est supposée constante.

produire que si la cission résolue est supérieure à la cission critique ; le franchissement des vallées de Peierls est par contre activable thermiquement et la vitesse de glissement est donnée par une loi d'Arrhénius ( $k_B$  est la constante de Boltzmann) :

$$\dot{\gamma}^\alpha = 0 \quad \text{si} \quad |\tau^\alpha| < \tau_c^\alpha,$$

$$\dot{\gamma}^\alpha = \dot{\gamma}_0 \operatorname{sgn}(\tau^\alpha) \exp\left(-\frac{\Delta G}{k_B T}\right) \quad \text{si} \quad |\tau^\alpha| \geq \tau_c^\alpha. \quad (2.22)$$

L'énergie libre d'activation  $\Delta G$  est fonction de la contrainte de Peierls notée  $s_0$  et s'écrit sous la forme suivante introduite par Kothari et Anand (1998) :

$$\Delta G = \Delta F \left(1 - \left(\frac{|\tau^\alpha| - \tau_c^\alpha}{s_0}\right)^p\right)^q. \quad (2.23)$$

L'énergie libre d'activation à contrainte nulle  $\Delta F$  et les exposants  $p$  et  $q$  sont des constantes.

La cission critique est donnée par la relation (2.15) ou la relation (2.17). Dans l'hypothèse où elle est symétrique, la matrice d'interaction possède dix-sept coefficients indépendants :

- pour les interactions entre systèmes  $\{110\}$  : un coefficient d'écrouissage propre, un coefficient d'interaction dipolaire, un coefficient d'interaction colinéaire et trois coefficients pour les trois types de jonctions possibles (notées  $J_1, J_2$  et  $J_3$ ) ;
- pour les interactions entre systèmes  $\{112\}$  : quatre coefficients pour les quatre types de jonctions (notées  $J_9, J_{10}, J_{11}$  et  $J_{12}$ ), les coefficients d'écrouissage propre, d'interaction dipolaire et d'interaction colinéaire sont supposés être les mêmes que pour les systèmes  $\{110\}$  ;
- pour les interactions entre systèmes  $\{110\}$  et systèmes  $\{112\}$  : deux coefficients d'interaction colinéaires et cinq coefficients pour les cinq types de jonction (notées  $J_4, J_5, J_6, J_7$  et  $J_8$ ).

Si l'on tient compte de la dissymétrie de la matrice d'interaction, il en résulte sept coefficients supplémentaires liés à la non-symétrie des jonctions  $J_1, J_{10}, J_4, J_5, J_6, J_7$  et  $J_8$  (Madec et Kubin, 2017).

Les calculs de DD donnent de nouveau des coefficients élevés pour toutes les interactions colinéaires (Madec et Troadec, 2005).

Pour finir, signalons qu'en chargement dynamique (toutes structures cristallines confondues) les effets thermiques sont pris en compte en faisant une hypothèse d'adiabaticité et de fraction constante de la puissance plastique convertie en chaleur :

$$\rho_{m0} C_p \dot{T} = \beta_{TQ} \sum_{\alpha} \tau^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha}. \quad (2.24)$$

$C_p$  est la chaleur spécifique et  $\beta_{TQ}$  est appelé coefficient de Taylor-Quinney<sup>19</sup>.

N.B. : Dans le cas des matériaux cubiques centrés (CC), la confrontation du modèle à des essais de traction sur monocristaux semble indiquer de possibles écarts à la loi de Schmid pour certaines orientations de l'axe de traction. Cette question était l'objet du stage d'A. Masson. L'explication physique serait que la contrainte de Peierls, qui est lié à la structure de cœur des dislocations et au paysage énergétique entre deux positions d'équilibre voisines, dépendrait en réalité de l'ensemble des composantes du tenseur de contraintes. Cette question dépasse le cadre du présent mémoire, le lecteur intéressé pourra se référer à Dezerald et al. (2016) ou Gröger et Vitek (2019) par exemple. Quoiqu'il en soit, dans les études présentées ici, on a choisi de négliger ces écarts.

### 2.1.2. Cas des petites transformations

La déclinaison de la modélisation précédente en petites transformations s'obtient en remplaçant la décomposition multiplicative entre gradients de transformation élastique et plastique par une décomposition additive sur le gradient de déplacement :

$$\mathbf{U} = \text{grad}(\mathbf{u}) = \mathbf{U}^e + \mathbf{U}^p. \quad (2.25)$$

$\mathbf{U}^e$  se décompose en une partie symétrique (la déformation infinitésimale  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ) et une partie antisymétrique (la rotation infinitésimale  $\boldsymbol{\omega}^e$ ) ;  $\mathbf{U}^p$  s'écrit comme une somme de glissements sur les différents systèmes :

$$\mathbf{U}^e = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\omega}^e \quad \text{et} \quad \mathbf{U}^p = \sum_{\alpha} \gamma^{\alpha} \mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes \mathbf{n}_0^{\alpha}. \quad (2.26)$$

---

<sup>19</sup> Il faudrait, en toute rigueur, dériver l'évolution de la température des équations de la thermodynamique (premier et second principe). Cela supposerait d'associer au modèle de Teodosiu une énergie libre bloquée fonction des densités de dislocations (et éventuellement de la température) ; il serait alors possible de dériver une expression pour le coefficient de Taylor-Quinney, sans hypothèse supplémentaire comme cela est fait dans le cas de la plasticité macroscopique (cf. Longère et Dragon, 2008, par exemple).

Le principe des puissances virtuelles (2.3) s'écrit indifféremment sur la configuration finale (sur le volume de matière déformé  $\Omega$ ) ou sur la configuration initiale qui sont supposées identiques et il fait intervenir la contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  (la masse volumique est également supposée identique entre les deux configuration et égale à  $\rho_{m0}$ ) :

$$W_{int}(\hat{\mathbf{v}}) = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\hat{\mathbf{v}}) \, d\Omega, \quad W_{ext}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, da, \quad W_{acc}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} \rho_{m0} \dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega \quad (2.27)$$

Les relations d'équilibre s'en déduisent :

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \rho_{m0} \dot{\mathbf{v}} \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ de normale sortante } \mathbf{n}. \quad (2.28)$$

La loi de comportement élastique relie la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  à la déformation élastique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2.29)$$

Les lois d'écoulement plastique font intervenir des cissions résolues qui s'écrivent :

$$\tau^\alpha = \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha). \quad (2.30)$$

### 2.1.3. Introduction d'effets non-locaux

Il existe différentes manières d'introduire des effets non-locaux dans la modélisation du comportement plastique des monocristaux. L'une d'elle s'appuie sur le fait que les gradients de glissement plastique conduisent à des accumulations de dislocations de même signe (dites « dislocations géométriquement nécessaires » ou GND) qui induisent localement des efforts. On associe aux densités de dislocations polaires (ou densités de GND) des micro-forces qui modifient la cission résolue effective intervenant dans la règle d'écoulement plastique et introduisent un terme d'écrouissage cinématique (on peut citer, entre autres, les approches développées par Yefimov et al., 2004, Evers et al., 2004, Kuroda et Tvergaard, 2006).

A été retenu, dans les travaux présentés dans ce document, le formalisme développé par Gurtin et co-auteurs (Gurtin, 2002, Gurtin et al., 2007, Gurtin, 2008b) qui définissent les micro-forces au moyen d'un principe des puissances virtuelles étendu et expriment celles-ci en fonction des densités polaires en les dérivant d'une énergie libre. On donne les principaux éléments de ces approches en petites déformations ; l'extension au cas des transformations finies sera abordée au paragraphe 3.3.

Plus précisément, une mesure globale des densités polaires induites par la déformation est donnée par le « tenseur densité de dislocations » noté  $\mathbf{G}$ , introduit par Nye (1953). Celui-ci est défini de

telle sorte que, pour un circuit de Burgers  $\partial S$  constituant le pourtour d'une surface élémentaire  $S$  de normale  $\mathbf{e}$  (cf. figure 2.4),  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} S$  est égal au vecteur de Burgers, i.e. à la non-fermeture induite par la transformation plastique en parcourant le circuit dans le sens positif relativement à l'orientation donné par la normale  $\mathbf{e}$  (cf. Cermelli et Gurtin, 2001) :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} S = \mathbf{b}^p(\partial S) = \int_{\partial S} \mathbf{U}^p \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.31)$$

En vertu de la formule de Stokes :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} S = \int_S (\text{rot}(\mathbf{U}^p) \cdot \mathbf{e}) da = \text{rot}(\mathbf{U}^p) \cdot \mathbf{e} S. \quad (2.32)$$

Cette définition s'appliquant à toute orientation de normale  $\mathbf{e}$ , il s'ensuit que :

$$\mathbf{G} = \text{rot}(\mathbf{U}^p). \quad (2.33)$$

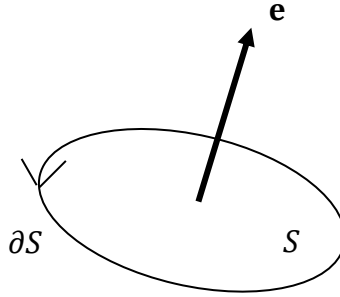


Figure 2.4 : Boucle et surface élémentaires pour la définition du tenseur densité de dislocations.

En d'autres termes,  $\mathbf{G}$  est une mesure de la non-compatibilité du champ de transformation plastique. Le rotationnel d'un gradient étant nul,  $\text{rot}(\mathbf{U}) = 0$  et on peut également écrire :

$$\mathbf{G} = -\text{rot}(\mathbf{U}^e). \quad (2.34)$$

Observons que, dans le cas où la déformation élastique est négligeable ( $\boldsymbol{\epsilon}^e \approx 0$ ),  $\mathbf{G}$  s'exprime en fonction de la courbure  $\boldsymbol{\kappa}^e$  du réseau cristallin, i.e. le gradient de sa rotation (cf. Mura, 1965). Plus précisément, si on note  $\boldsymbol{\varphi}^e$  le vecteur rotation :

$$\boldsymbol{\omega}^e = (\boldsymbol{\varphi}^e \times), \quad \boldsymbol{\kappa}^e = \text{grad}(\boldsymbol{\varphi}^e), \quad \mathbf{G} = -\text{rot}(\boldsymbol{\omega}^e) = \boldsymbol{\kappa}^{eT} - \text{Tr}(\boldsymbol{\kappa}^e)\mathbf{1}. \quad (2.35)^{20}$$

<sup>20</sup> Pour un vecteur  $\mathbf{a}$ , le tenseur du second ordre  $(\mathbf{a} \times)$  est défini au chapitre 5.



Dans le cas général, ce tenseur peut s'écrire en fonction des gradients des glissements en utilisant la décomposition (2.26)<sub>2</sub> et en posant  $\mathbf{p}_0^\alpha = \mathbf{n}_0^\alpha \times \mathbf{m}_0^\alpha$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \sum_\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \otimes (\text{grad}(\gamma^\alpha) \times \mathbf{n}_0^\alpha) = \\ &= \sum_\alpha -(\text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{m}_0^\alpha) \mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{p}_0^\alpha + (\text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{p}_0^\alpha) \mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{m}_0^\alpha \end{aligned} \quad (2.36)$$

Par ailleurs, pour des dislocations ayant toutes le même vecteur de Burgers  $\mathbf{b}$ , la même direction de ligne  $\mathbf{t}_b$  et dont la densité est  $\rho_b$ ,  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{e}$  est proportionnel à  $\mathbf{b}$  et au nombre de dislocations interceptant la surface unitaire<sup>21</sup>. En conséquence :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = \rho_b (\mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}) \mathbf{b} \quad \text{d'où :} \quad \mathbf{G} = \rho_b (\mathbf{b} \otimes \mathbf{t}_b). \quad (2.37)$$

Au système de glissement  $\alpha$  est associé le vecteur de Burgers  $\mathbf{b}^\alpha = b \mathbf{m}_0^\alpha$  et des boucles de dislocations contenues dans le plan de glissement. Les segments dont le vecteur tangent  $\mathbf{t}^\alpha$  est colinéaire à  $\mathbf{m}_0^\alpha$  sont des segments purs vis et ceux dont le vecteur tangent est colinéaire à  $\mathbf{p}_0^\alpha$  sont des segments purs coins ; dans tous les autres cas, ce sont des segments mixtes qui ont une composante vis et une composante coin.

En notant  $\rho(\mathbf{t}^\alpha) \|\text{d}\mathbf{t}^\alpha\|/2\pi$  la densité volumique de ces segments dont le vecteur tangent est compris entre  $\mathbf{t}^\alpha$  et  $\mathbf{t}^\alpha + \text{d}\mathbf{t}^\alpha$  (i.e. contenu dans le secteur angulaire du plan de glissement délimité par  $\mathbf{t}^\alpha$  et  $\mathbf{t}^\alpha + \text{d}\mathbf{t}^\alpha$ ), on peut dériver un vecteur densité de dislocations pour le système  $\alpha$  (cf. Hochrainer et al., 2014, par exemple):

$$\boldsymbol{\kappa}^\alpha = \int_{\mathbf{t}^\alpha} \rho(\mathbf{t}^\alpha) \mathbf{t}^\alpha \frac{\|\text{d}\mathbf{t}^\alpha\|}{2\pi}. \quad (2.38)$$

Le tenseur densité de dislocations associé vérifie :

$$\mathbf{G}^\alpha = \int_{\mathbf{t}^\alpha} \rho(\mathbf{t}^\alpha) (\mathbf{b}^\alpha \otimes \mathbf{t}^\alpha) \frac{\|\text{d}\mathbf{t}^\alpha\|}{2\pi} = \mathbf{b}^\alpha \otimes \boldsymbol{\kappa}^\alpha. \quad (2.39)$$

N.B. : La densité totale associée au système, intervenant dans le modèle de la forêt, est donnée par (Hochrainer et al., 2014) :

$$\rho^\alpha = \int_{\mathbf{t}^\alpha} \rho(\mathbf{t}^\alpha) \frac{\|\text{d}\mathbf{t}^\alpha\|}{2\pi}. \quad (2.40)$$

On peut en outre écrire  $\boldsymbol{\kappa}^\alpha$  dans le repère  $(\mathbf{m}_0^\alpha, \mathbf{p}_0^\alpha)$ , c'est-à-dire décomposer le vecteur densité en une densité polaire coin et une densité polaire vis :

$$\boldsymbol{\kappa}^\alpha = \kappa_c^\alpha \mathbf{p}_0^\alpha + \kappa_v^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha. \quad (2.41)$$

---

<sup>21</sup> Le sens du vecteur  $\mathbf{t}_b$  (i.e. le sens de parcours de la ligne de dislocation) est défini de telle sorte que  $\mathbf{b}$  soit le vecteur de Burgers d'une surface de normale  $\mathbf{t}_b$  percée par la ligne.

En tenant compte de l'ensemble des systèmes de glissement, on peut exprimer le tenseur  $\mathbf{G}$  en fonction des densités polaires vis et coins de chacun des systèmes :

$$\mathbf{G} = \sum_{\alpha} \mathbf{G}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{b}^{\alpha} \otimes \boldsymbol{\kappa}^{\alpha} = \sum_{\alpha} b \mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes (\kappa_c^{\alpha} \mathbf{p}_0^{\alpha} + \kappa_v^{\alpha} \mathbf{m}_0^{\alpha}). \quad (2.42)$$

Par ailleurs, en vertu de la relation (2.33), l'évolution de  $\mathbf{G}$  peut s'écrire sous la forme d'une équation de conservation dans laquelle  $(\dot{\mathbf{U}}^p \times)$  joue le rôle d'une densité de courant (cf. Gurtin et Needleman, 2005) :

$$\dot{\mathbf{G}} = -\text{div}(\dot{\mathbf{U}}^p \times). \quad (2.43)$$

En conséquence, pour une surface unitaire de normale  $\mathbf{n}$ , le tenseur  $\dot{\mathbf{U}}^p \times \mathbf{n}$  représente le flux sortant du tenseur  $\mathbf{G}$ .

Les approches non-locales de Gurtin et coauteurs (cf. Gurtin, 2002 par exemple) dérivent les conditions d'équilibre et les lois d'écoulement plastique de l'écriture d'un principe des puissances virtuelles étendu dans lequel un champ de vitesse virtuel  $\hat{\mathbf{v}}$  et des champs de vitesses de glissement virtuels  $\hat{\gamma}^{\alpha}$  peuvent être imposés de manière indépendante. La puissance virtuelle des efforts intérieurs fait intervenir, dans le volume  $\Omega$ , la contrainte qui développe une puissance proportionnelle à la vitesse de déformation élastique et, pour chaque système de glissement, la partie « locale » de la contrainte d'écoulement qui développe une puissance proportionnelle au glissement. Ils supposent en outre qu'il s'y ajoute des efforts volumiques (appelés microforces) s'opposant à l'augmentation des densités de dislocations polaires ou plus exactement aux composantes des gradients de glissement qui les induisent. Si on fait l'hypothèse que la variable interne à même de décrire ces densités est le tenseur  $\mathbf{G}$ , il existe une microforce qui s'oppose à  $\dot{\mathbf{G}}$  donc à  $\text{rot}(\dot{\mathbf{U}}^p)$ . Par ailleurs, suivant la nature de la surface extérieure  $\partial\Omega$  (surface libre ou interface plus ou moins rigide avec un autre milieu), il peut exister des efforts (microforces surfaciques) s'opposant au flux sortant de  $\mathbf{G}$  donc à  $(\dot{\mathbf{U}}^p \times \mathbf{n})$ . De fait :

$$W_{int}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\gamma}^{\alpha}) = -\int_{\Omega} \left( \boldsymbol{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \sum_{\alpha} \pi^{\alpha} \hat{\gamma}^{\alpha} + \mathbf{T} : \text{rot}(\hat{\mathbf{U}}^p) \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\Xi} : (\hat{\mathbf{U}}^p \times \mathbf{n}) da. \quad (2.44)$$

Le champ de vitesse de déformation élastique s'écrit :  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \{\text{grad}(\hat{\mathbf{v}}) - \sum_{\alpha} \hat{\gamma}^{\alpha} \mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes \mathbf{n}_0^{\alpha}\}_S$  et la puissance peut se ré-exprimer sous la forme :

$$W_{int}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\gamma}^{\alpha}) = -\int_{\Omega} \left( \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\hat{\mathbf{v}}) + \sum_{\alpha} (\pi^{\alpha} - \tau^{\alpha}) \hat{\gamma}^{\alpha} + \mathbf{T} : \text{rot}(\hat{\mathbf{U}}^p) \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\Xi} : (\hat{\mathbf{U}}^p \times \mathbf{n}) da. \quad (2.45)$$

L'intégration par parties de la formule (2.45) donne :

$$\begin{aligned}
W_{int}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\gamma}^\alpha) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}} \, da \\
&- \int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha} (\pi^\alpha - \tau^\alpha) \hat{\gamma}^\alpha + \operatorname{rot}(\mathbf{T}) : \hat{\mathbf{U}}^p \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \times \mathbf{n} - \boldsymbol{\Xi} \times \mathbf{n}) : \hat{\mathbf{U}}^p \, da. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

L'écriture du principe des puissances virtuelles (2.3) fournit, en plus de l'équilibre des contraintes (2.28), une forme non-locale de la règle d'écoulement et des conditions de bords reliant microforces volumique et surfacique :

$$\begin{aligned}
\tau^\alpha &= \pi^\alpha + \operatorname{rot}(\mathbf{T}) : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha) = \pi^\alpha + \operatorname{div}((\mathbf{m}_0^\alpha \cdot \mathbf{T}) \times \mathbf{n}_0^\alpha), \quad \text{sur } \Omega^{22} \\
(\mathbf{T} \times \mathbf{n}) : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha) &= (\boldsymbol{\Xi} \times \mathbf{n}) : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha) \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

On parle de condition de bords « microscopiquement libres » lorsque la microforce surfacique est nulle sur  $\partial\Omega$  ( $\boldsymbol{\Xi} = 0$ ). Dans ce cas :

$$(\mathbf{T} \times \mathbf{n}) : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha) = 0. \tag{2.48}$$

On parle de conditions de bords « microscopiquement rigides » lorsque cette microforce impose un flux de  $\mathbf{G}$  nul sur  $\partial\Omega$  :

$$\dot{\mathbf{U}}^p \times \mathbf{n} = 0 \quad (\text{pour les champs de vitesses de glissement réels et virtuels}). \tag{2.49}$$

L'ensemble des relations de comportement doit être définie dans un cadre thermodynamique, c'est-à-dire en se donnant des énergies libres volumique  $\psi$  et surfacique  $\psi_{\partial\Omega}$  et des lois d'évolution pour la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ , les contraintes d'écoulement locale  $\pi^\alpha$  et les microforces volumique  $\mathbf{T}$  et surfacique  $\boldsymbol{\Xi}$  qui satisfassent le second principe de la thermodynamique. On suppose que l'on s'intéresse à des transformations isothermes et on laisse de côté, pour l'instant, la partie surfacique du comportement sur laquelle on reviendra au paragraphe 3.4. Concernant la partie volumique, le second principe appliqué à un sous-domaine quelconque du volume  $\Omega$  conduit à la forme locale de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \sum_{\alpha} \pi^\alpha \dot{\gamma}^\alpha + \mathbf{T} : \operatorname{rot}(\dot{\mathbf{U}}^p) - \dot{\psi} \geq 0. \tag{2.50}$$

Gurtin (2002) fait l'hypothèse que  $\psi$  dépend de la déformation élastique et du tenseur densité de dislocations sous la forme :

$$\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Psi(\mathbf{G}). \tag{2.51}$$

---

<sup>22</sup> Cette relation peut également s'écrire sous la forme  $\tau^\alpha - \tau_b^\alpha = \pi^\alpha$  dans laquelle  $\tau_b^\alpha = \operatorname{rot}(\mathbf{T}) : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha)$  est une contrainte appelée « back stress » par différents auteurs (Evers et al., 2004, par exemple).

La relation (2.50) étant vérifiée pour toute évolution mécanique du monocristal<sup>23</sup> :

$$\pi^\alpha \dot{\gamma}^\alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad \left( \mathbf{T} - \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}} \right) : \dot{\mathbf{G}} \geq 0. \quad (2.52)$$

Si on suppose que  $\pi^\alpha$  est donnée par la relation (2.14), la relation (2.52)<sub>1</sub> est bien toujours vérifiée :

$$\pi^\alpha \dot{\gamma}^\alpha = \tau_c^\alpha \left( \frac{|\dot{\gamma}^\alpha|}{\dot{\gamma}_0} \right)^m |\dot{\gamma}^\alpha| \geq 0. \quad (2.53)$$

En suivant Gurtin et al. (2007), on décompose la microforce  $\mathbf{T}$  en une partie dérivant de l'énergie libre et une partie dissipative :

$$\mathbf{T} = \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}} + \mathbf{T}^{diss} \quad \text{telle que : } \mathbf{T}^{diss} : \dot{\mathbf{G}} \geq 0. \quad (2.54)$$

Si on fait l'hypothèse que l'énergie  $\Psi$  (appelée « énergie de défauts ») est associée aux interactions dipolaires entre dislocations GND, elle doit être bilinéaire en fonction des densités polaires<sup>24</sup>. Des considérations d'existence et d'unicité (Gurtin et Needleman, 2005) de la solution du problème non-local impliquent que  $\Psi$  soit définie positive. La forme la plus simple possible est une énergie proportionnelle à la norme au carré du tenseur  $\mathbf{G}$ <sup>25</sup> :

$$\Psi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2} S_0 L^2 (\mathbf{G} : \mathbf{G}). \quad (2.55)$$

$S_0$  ayant la dimension d'une contrainte, on peut, sans perte de généralité, l'assimiler au module de cisaillement moyen, l'intensité de l'énergie  $\Psi$  étant quantifiée par la longueur caractéristique  $L$  :

$$\Psi(\mathbf{G}) = \frac{1}{2} \mu L^2 (\mathbf{G} : \mathbf{G}). \quad (2.56)$$

Dans le cas où la partie dissipative de la microforce est négligée ( $\mathbf{T}^{diss} = 0$ ), la règle d'écoulement sur chacun des systèmes s'écrit sur la contrainte :

$$\pi^\alpha = \tau^\alpha - \mu L^2 (\text{rot}(\mathbf{G})) : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha) = \tau^\alpha - \mu L^2 \left( \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{U}^p)) \right) : (\mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha). \quad (2.57)$$

<sup>23</sup> Notons qu'en adoptant la forme (2.51) pour l'énergie libre, on fait l'hypothèse que la partie locale de la loi d'écoulement est intégralement dissipée.

<sup>24</sup> Certains auteurs, tels Ohno et Okumura (2007), font l'hypothèse que  $\Psi$  est associée aux énergies de ligne des dislocations GND ce qui donne une dépendance linéaire en fonction des densités ; ce n'est pas cette dernière hypothèse qui est retenue ici.

<sup>25</sup> L'énergie libre  $\Psi$  doit être invariante dans le groupe de symétries de la matière : dans le cas de la symétrie cubique, la forme la plus générale ferait intervenir 4 coefficients (cf. Mesarovic et al., 2015).

Une autre manière de modéliser les effets non-locaux est de supposer que l'énergie  $\Psi$  est une forme quadratique des densités polaires  $\kappa_c^\alpha$  et  $\kappa_v^\alpha$  que l'on suppose alors être les bonnes variables internes pour décrire les effets non-locaux (Gurtin et al. 2007). Dans ce cas,  $\Psi$  s'écrit de façon univoque en fonction des gradients de glissement à la condition de supposer que l'accommodation de ces gradients par des densités polaires s'opère système par système, ce qui revient à identifier terme à terme les expressions (2.36) et (2.42) de  $\mathbf{G}$  :

$$b\kappa_c^\alpha = -(\text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{m}_0^\alpha) \quad \text{et} \quad b\kappa_v^\alpha = \text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{p}_0^\alpha. \quad (2.58)$$

L'évolution de ces densités peut se récrire sous forme d'équations de conservation dans lesquelles  $\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha$  et  $-\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{p}_0^\alpha$  jouent le rôle de densités de courant :

$$b\dot{\kappa}_c^\alpha = -\text{div}(\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha) \quad \text{et} \quad b\dot{\kappa}_v^\alpha = -\text{div}(-\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{p}_0^\alpha). \quad (2.59)$$

Les flux sortants à travers une surface unitaire de normale  $\mathbf{n}$  valent respectivement  $\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \mathbf{n}$  et  $-\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{p}_0^\alpha \cdot \mathbf{n}$ . Notons qu'ils sont tous deux nuls si le plan de glissement est parallèle à la surface ( $\mathbf{n}_0^\alpha = \pm \mathbf{n}$ ).

La puissance des efforts intérieurs fait intervenir des microforces volumiques  $\xi^\alpha$  qui, en vertu des relations (2.58), s'opposent aux composantes de  $\text{grad}(\dot{\gamma}^\alpha)$  dans le plan de glissement et des microforces surfaciques  $\Xi^\alpha$  s'opposant aux flux précédents, i.e. aux vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^\alpha$  pour tous les systèmes dont les plans intersectent  $\partial\Omega$  :

$$W_{int}(\hat{\mathbf{v}}) = - \int_\Omega \left( \boldsymbol{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \sum_\alpha \left( \pi^\alpha \hat{\gamma}^\alpha + \xi^\alpha \cdot \text{grad}^\alpha(\gamma^\alpha) \right) \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sum_\alpha \Xi^\alpha \hat{\gamma}^\alpha da,$$

avec :

$$\text{grad}^\alpha(\gamma^\alpha) = (\text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{m}_0^\alpha) \mathbf{m}_0^\alpha + (\text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{p}_0^\alpha) \mathbf{p}_0^\alpha \quad . \quad (2.60)$$

La formulation non-locale de la règle d'écoulement et les conditions de bord se déduisent du principe des puissances virtuelles sous la forme :

$$\begin{aligned} \tau^\alpha &= \pi^\alpha - \text{div}(\xi^\alpha) && \text{sur } \Omega, \\ -\xi^\alpha \cdot \mathbf{n} &= \Xi^\alpha && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dans le cas de conditions de bord « microscopiquement libres », les microforces surfaciques sont nulles sur  $\partial\Omega$  :

$$\xi^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.62)$$

Dans le cas de conditions de bord « microscopiquement rigides », les flux de dislocations polaires sont nuls sur  $\partial\Omega$  :

$$\dot{\gamma}^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \mathbf{n} = \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{p}_0^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.63)$$

Supposons que l'énergie libre soit proportionnelle à la somme des carrés des densités polaires par système :

$$\Psi(\kappa_c^\alpha, \kappa_v^\alpha) = \frac{1}{2} \mu L^2 b^2 \sum_\alpha ((\kappa_c^\alpha)^2 + (\kappa_v^\alpha)^2) = \frac{1}{2} \mu L^2 \|\text{grad}^\alpha(\gamma^\alpha)\|^2 . \quad (2.64)$$

Dans le cas de microforces non-dissipatives :

$$\xi^\alpha = \mu L^2 \text{grad}^\alpha(\gamma^\alpha) \quad (2.65)$$

et la règle d'écoulement sur chaque système fait intervenir le Laplacien du glissement dans le plan de glissement :

$$\tau^\alpha = \pi^\alpha - \mu L^2 \Delta^\alpha \gamma^\alpha$$

avec :

$$\Delta^\alpha \gamma^\alpha = \mathbf{m}_0^\alpha \cdot \text{grad}(\text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{m}_0^\alpha) + \mathbf{p}_0^\alpha \cdot \text{grad}(\text{grad}(\gamma^\alpha) \cdot \mathbf{p}_0^\alpha). \quad (2.66)$$

Observons que la forme (2.64) pour l'énergie libre suppose qu'il n'existe pas de couplages entre les dislocations polaires des différents systèmes.

D'une façon plus générale, la physique des interactions entre dislocations doit guider le choix des variables internes caractérisant les effets non-locaux, i.e. tenseur densité de dislocations ou densités polaires par système, et, dans le second cas, permettre d'évaluer l'intensité des termes de couplage entre systèmes<sup>26</sup>. Elle doit également permettre de valider (ou invalider) la dépendance quadratique admise dans les expressions de l'énergie de défauts (relations (2.56) et (2.64))<sup>27</sup>. Des éléments sont donnés par la théorie continue des dislocations qui dérive une énergie à partir de fonctions de corrélations (citons les travaux de Groma et al. (2003) par exemple). Cette approche permet en particulier, sous certaines hypothèses, de donner un sens physique à la longueur caractéristique  $L$  (dans un cas bidimensionnel, Yefimov et Van der Giessen, 2005, identifie  $L$  à la distance moyenne entre dislocations  $1/\sqrt{\rho}$ ). Une estimation expérimentale de cette longueur, qui gouverne la concentration des déformations sous fort gradient de chargement, a également été entreprise : on peut citer par exemple les travaux de Nix et Gao (1998) ou Abu Al-Rub et Voyiadjis (2004) qui analysent des essais de micro-indentation sur monocristaux.

L'incidence des effets non-locaux sur la déformation plastique des monocristaux en plasticité confinée est classiquement illustrée par le problème unidimensionnel d'une bande de matière en cisaillement avec des conditions de bords microscopiquement rigides (cf. Kuroda et Tvergaard, 2008 par exemple). Ces conditions imposent des glissements plastiques nuls pour tous les

---

<sup>26</sup> L'application de différentes formes d'énergie de défauts, couplant ou non les systèmes entre eux, au cas de couches minces est par exemple analysée par Nicola et al., 2005.

<sup>27</sup> L'incidence de cette dépendance dans le cas d'un problème bidimensionnel avec conditions de bord microscopiquement rigides est évaluée par Forest et Guéninchault (2013).

systèmes dont le plan intersecte les bords et la longueur caractéristique  $L$  contrôle l'épaisseur d'une couche limite dans laquelle existent des gradients de glissement. L'extension de cette analyse au cas de figure pour lequel les systèmes actifs sont en surnombre a été proposée dans Dequiedt (2019). C'est une étude en cours que j'ai fait le choix de ne pas détailler dans ce document.

L'introduction d'effets non-locaux a par ailleurs été appliquée à l'apparition de motifs de déformation hétérogène dans un monocristal, en utilisant une formulation en  $\mathbf{G}$  de l'énergie de défaut (cf. paragraphe 2.2.3).

## 2.2. Déformation hétérogène à l'échelle des grains

### 2.2.1. Etat de l'art et contexte de l'étude

Un des germes possibles de la localisation dans un agrégat polycristallin est constitué par les hétérogénéités de déformation se développant dans le grain, dans certaines conditions de chargement. Celles-ci s'expliquent par des phénomènes opérant à diverses échelles. L'apparition de bandes de glissement est par exemple associée à l'activation de sources de Frank et Read qui produisent des avalanches de dislocations glissant sur les mêmes plans.

Toutefois, on peut analyser un certain nombre de ces phénomènes à l'échelle du milieu continu, en s'appuyant sur une modélisation du glissement telle que développée au paragraphe précédent. Dans le cas du glissement simple, on peut interpréter l'apparition de bandes de localisation comme résultant de l'effet combiné de la saturation de la cission critique et d'un adoucissement géométrique lié à la rotation du réseau cristallin sous l'effet de la déformation qui rend instables les solutions en déformation homogène (Asaro et Rice, 1977) : en effet, dans certains cas de figure, la rotation s'opère dans un sens tel que la cission résolue augmente à contrainte appliquée constante.

Dans le cas de plusieurs systèmes de glissement, une déformation homogène du monocristal en glissement multiple est susceptible, sous certaines conditions, d'évoluer vers une déformation hétérogène engendrée par la ségrégation des systèmes actifs dans des zones disjointes. L'écroûissage latent, qui pénalise la coexistence de paires de systèmes dont les dislocations forment des interactions fortes, tend à favoriser cette organisation. Le phénomène a été observé expérimentalement. Pour de grandes quantités de déformation ou des chargements cycliques, le rôle des structures de dislocations à l'échelle microscopique est clairement mis en évidence (Piercy et al., 1955, Saimoto, 1963), ce qui limite la pertinence d'une analyse à l'échelle du milieu continu. Toutefois, il apparaît également pour des déformations plus faibles (Dmitrieva et

al., 2009 par exemple) pour lesquelles ces sous-structures sont vraisemblablement encore peu marquées.

En chargement quasi-statique, la ségrégation des systèmes est analysée comme une bifurcation stable de la solution homogène sur un volume élémentaire. Lorsque le comportement du monocristal peut s'exprimer comme dérivant d'un potentiel, les solutions stables au sens de Drucker (i.e. celles qui sont pertinentes physiquement) sont celles qui minimisent l'énergie potentielle sur le volume élémentaire : cette approche, développée par ailleurs en mécanique de la rupture (cf. Bourdin et al., 2008, par exemple), a été appliquée à la plasticité cristalline par Petryk et co-auteurs (Petryk, 2005). En petites déformations, l'existence de ce potentiel énergétique est subordonnée à la symétrie de la matrice d'érouissage<sup>28</sup>. Dans le cas de coefficients d'érouissage latent forts entre les systèmes actifs, le potentiel exprimé en fonction de la déformation peut être non-convexe et ce sont les solutions en déformation hétérogène qui minimisent l'énergie potentielle totale d'un volume de matière monocristallin. Cette propriété a été analysée par Ortiz et Repetto (1999) puis divers auteurs tels que Kratochvil et Kruzik (2015) et retrouvée par la simulation par Yalcinkaya et al. (2012) en glissement double ; ces travaux utilisent les matrices d'érouissage de Cuitino et Ortiz (1993) ou Peirce et al. (1982) qui confèrent l'une et l'autre un érouissage latent fort aux paires de systèmes non coplanaires.

Dans des conditions de chargement telles que plus de deux systèmes de glissement sont actifs, la ségrégation peut également intervenir ; elle regroupe les systèmes en fonction de leurs différents coefficients d'érouissage latent : une approche variationnelle s'appuyant sur un pseudo-potential caractérisant le comportement incrémental a permis à Petryk et Kurska (2013) d'interpréter l'expérience de Dmitrieva et al. (2009). En glissement multiple, l'ordre des différents coefficients jouant un rôle important, le modèle de Teodosiu et les coefficients d'interaction issus de la DD permettent d'analyser le processus d'une manière précise et s'appuyant sur la physique opérant à plus petite échelle. Cette question, qui a fait l'objet de la publication de Dequiedt et al. (2015), est abordée dans les paragraphes qui suivent (Notons que la ségrégation a également été analysée numériquement en utilisant le même modèle par Wang et al., 2018).

Comme pour les problèmes de localisation de la déformation à l'échelle macroscopique dans un milieu d'extension infini, dans les monocristaux, les formulations locales des modèles de comportement ne permettent pas d'identifier une échelle caractéristique de l'organisation hétérogène du glissement plastique. Les effets non-locaux sont donc pris en compte aussi bien dans les analyses de stabilité et de bifurcation (voir par exemple Forest, 1998) que les approches énergétiques (voir Kratochvil et al., 2010 ou Lancioni et al. 2015). L'incidence d'effets non-locaux sur la ségrégation est développée dans Dequiedt (2018) au moyen du modèle présenté dans le paragraphe 2.1.3.

---

<sup>28</sup> En grandes transformations, le problème est un peu plus complexe ; la réponse incrémentale est dérivée d'un pseudo-potential quadratique dans le cas où la composante antisymétrique de la matrice d'érouissage compense exactement la non-symétrie de termes géométriques dans l'expression des conditions de Kuhn-Tucker pour tous les systèmes actifs (Petryk et Kurska, 2011).



Dans le paragraphe 2.2.1., on présente des résultats de simulation sur des monocristaux de cuivre (CFC) de différentes orientations en traction équi-biaxiale qui font apparaître de la ségrégation pour de faibles quantités de déformation. Dans les paragraphes suivants, on tente d'expliquer analytiquement les résultats numériques. Toutefois, la matrice d'écroutissage déduite du modèle de Teodosiu n'étant pas symétrique (sauf dans des cas particuliers d'après la relation (2.21)), il n'est pas possible de dériver le comportement d'un potentiel et d'associer la solution en déformation hétérogène à un minimum d'énergie. Dans ce cas, on propose de mettre en œuvre une analyse linéaire de stabilité (A.L.S.) et de relier l'apparition de la ségrégation à un mode de perturbation instable de la solution en déformation homogène : c'est cette démarche qui est présentée au paragraphe 2.2.2. On étend l'analyse au modèle de plasticité à gradient au paragraphe 2.2.3 (A.L.S. avec effet non-local).

### 2.2.2. Simulations de monocristaux en bi-traction.

Les simulations sont réalisées sur un volume de matière cubique (auquel on impose des conditions de bords précisées plus loin) en se définissant un gradient de transformation moyen  $\mathbf{F}(t)$  ( $X, Y, Z$  sont les trois directions normales aux faces du cube). On s'intéresse à un chargement de faible amplitude à volume constant au premier ordre et en traction équi-biaxiale dans le plan  $(X, Y)$  tel que :

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad \text{avec :} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{max} & & \\ & \varepsilon_{max} & \\ & & -2\varepsilon_{max} \end{pmatrix} * \frac{t}{t_{max}}. \quad (2.67)$$

On se donne des valeurs  $\varepsilon_{max} = 0,005$  et  $t_{max} = 5$  ms de telle sorte que la vitesse de déformation vaille  $\dot{\varepsilon}_{XX} = \dot{\varepsilon}_{YY} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

Différentes orientations cristallines sont définies en supposant la direction  $Z$  alignée avec une direction portée par un vecteur  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  donné dans le triangle standard<sup>29</sup>. Les trois directions étudiées dans ce paragraphe sont repérées sur la figure 2.5-a. Pour obtenir l'une des orientations cristallines associées dans le repère  $(X, Y, Z)$ , on fait tourner le repère  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  du réseau cristallin d'un angle  $\vartheta$  autour d'un axe contenu dans le plan  $(X, Y)$ , angle et axe étant calculés en fonction des coordonnées du vecteur  $\mathbf{v}$  (cf. figure 2.5-b).

<sup>29</sup> Ce type de représentation est classiquement utilisé pour identifier le ou les systèmes de glissement actifs lors d'un chargement en contrainte uniaxiale selon  $Z$  ; le cas de figure envisagé ici est évidemment différent.

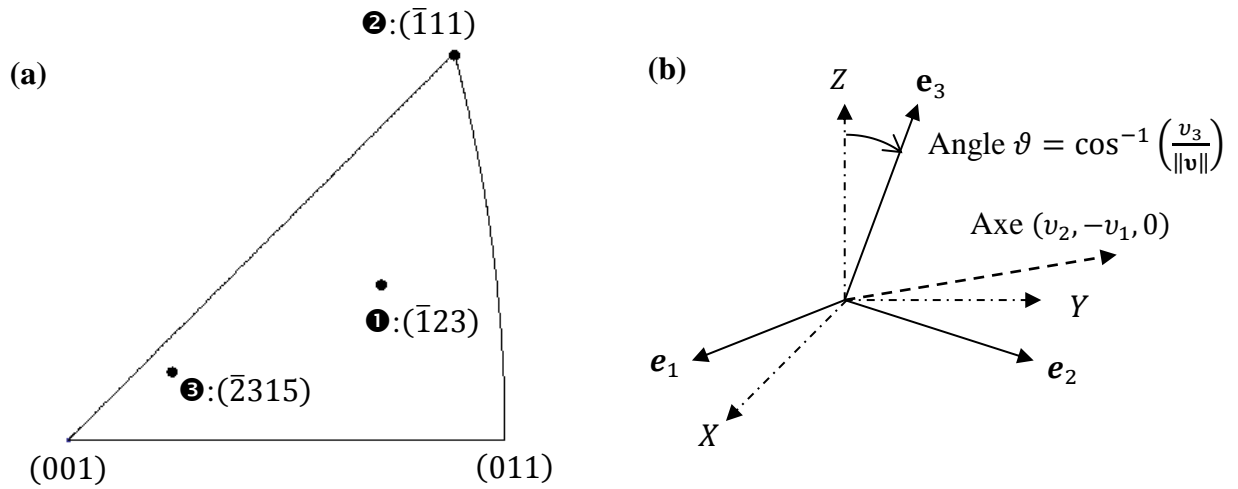


Figure 2.5 : (a) Position  $(v_1, v_2, v_3)$  de l'axe Z dans le triangle standard pour les trois orientations cristallines ❶, ❷, ❸ étudiées et (b) rotation du repère du réseau cristallin.

Les coefficients de la matrice d'interaction pour la structure CFC sont ceux donnés par Kubin et al. (2008) et sont rappelés dans le tableau 2.3. L'étude a été menée avec une hypothèse de matrice d'interaction symétrique et la loi d'écrouissage (2.15) sans correction logarithmique a été retenue.

Tableau 2.3 : Coefficients de la matrice d'interaction des matériaux CFC.

$a'_0$	$a_1^{copla}$	$a_1^{ortho}$	$a_1^{coli}$	$a_2$	$a_3$
0.122	0.122	0.07	0.625	0.137	0.122

Les autres paramètres du modèle sont donnés dans le tableau 2.4. Les coefficients de la loi d'écoulement viscoplastique (2.13) proviennent de Kalidindi et al. (1992) ; le paramètre  $k_c$  est supposé constant dans ce paragraphe et une valeur moyenne dans l'intervalle de celles identifiées par Kubin et al. (2008) est retenue. La distance d'annihilation  $y_c$  est de peu d'influence pour des déformations faibles et une valeur générique a été choisie.

Tableau 2.4 : Paramètres de la loi d'écoulement et du modèle de stockage restauration pour le cuivre.

$y_c$	$\tau_0$	$\dot{\gamma}_0$	$m$	$b$	$k_c$	$k_{nc}$
$10 * b$	1 MPa	$10^{-3} \text{ s}^{-1}$	0.012	$2.56 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	12	180

De manière à mettre en évidence le phénomène de ségrégation, on réalise deux séries de simulations :

- une première série pour laquelle on contraint le volume de matière à se déformer de manière homogène ;
- une deuxième série pour laquelle on impose simplement des conditions de bords périodiques dans les trois directions  $X, Y, Z$ .

Pour la première série, on identifie les systèmes de glissement actifs pour chacune des trois orientations cristallines retenues. Les vitesses de glissement (quasiment constantes une fois passée une première phase de chargement élastique du cristal) sont reportées dans le tableau 2.5. Sont inscrites en gras les vitesses de glissement relatives aux paires de systèmes colinéaires : on a vu au paragraphe 2.1.1 qu'il leur était associé un coefficient d'interaction très fort. Notons que l'orientation ❶ fait intervenir deux paires de systèmes colinéaires (A3/C3 et B5/C5), l'orientation ❷, qui revient à solliciter le cristal suivant un axe de symétrie du réseau cristallin, fait intervenir trois paires colinéaires (C1/D1, B4/D4 et B5/C5) tandis que l'orientation ❸ ne fait pas intervenir d'interaction colinéaire.

Tableau 2.5 : Systèmes de glissement actifs et vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^\alpha$  associées pour une déformation homogène imposée à chacune des orientations ❶, ❷ et ❸.

	A2	A3	A6	B2	B4	B5	C1	C3	C5	D1	D4	D6
❶		<b>0,13</b>			2,6	<b>1,3</b>		<b>-0,4</b>	<b>-1,6</b>			
❷					<b>1,2</b>	<b>1,2</b>	<b>1,2</b>		<b>-1,2</b>	<b>1,2</b>	<b>-1,2</b>	
❸	-0,9	1,2			1,4		1,1		-0,1			-0,1

La deuxième série de simulations fait apparaître le développement, plus ou moins rapide selon les cas, d'une déformation hétérogène du monocristal sous la forme de motifs : motif en bandes pour les deux orientations ❶ et ❸, motif en « îlots » pour l'orientation ❷.

On peut visualiser ces motifs en traçant des cartes de la déformation déviatoire :

$$\varepsilon^{dev} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}. \quad (2.68)^{30}$$

Ces cartes sont reportées sur la figure 2.6 pour les orientations ❶, ❷ et ❸ aux temps  $t = 0,4$  ms,  $t = 0,45$  ms et  $t = 4$  ms respectivement (correspondant à des instants pour lesquels le processus est bien développé).

<sup>30</sup> Les monocristaux étant sollicités en petites déformation, dans la relation (2.68), on a assimilé la déformation de Green-Lagrange à la déformation infinitésimale  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Dans le cas de l'orientation **1**, est associé au motif en bandes une ségrégation complète des deux systèmes de glissement B5 et C5 qui sont actifs dans des réseaux de bandes exactement complémentaires (figure 2.7) : la vitesse de glissement  $\dot{\gamma}^{B5}$  est nulle dans les bandes où la vitesse de glissement  $\dot{\gamma}^{C5}$  est non nulle et vice-versa ; les trois autres systèmes actifs A3, B4 et C3 s'organisent également selon la même orientation mais de manière moins marquée. Le même type de ségrégation est mis en évidence pour les trois paires de systèmes C1/D1, B4/D4 et B5/C5 dans le cas de l'orientation **2**. Le cas de l'orientation **3** ne met pas en évidence de ségrégation complète mais des variations des vitesses de glissement pour l'ensemble des systèmes actifs.

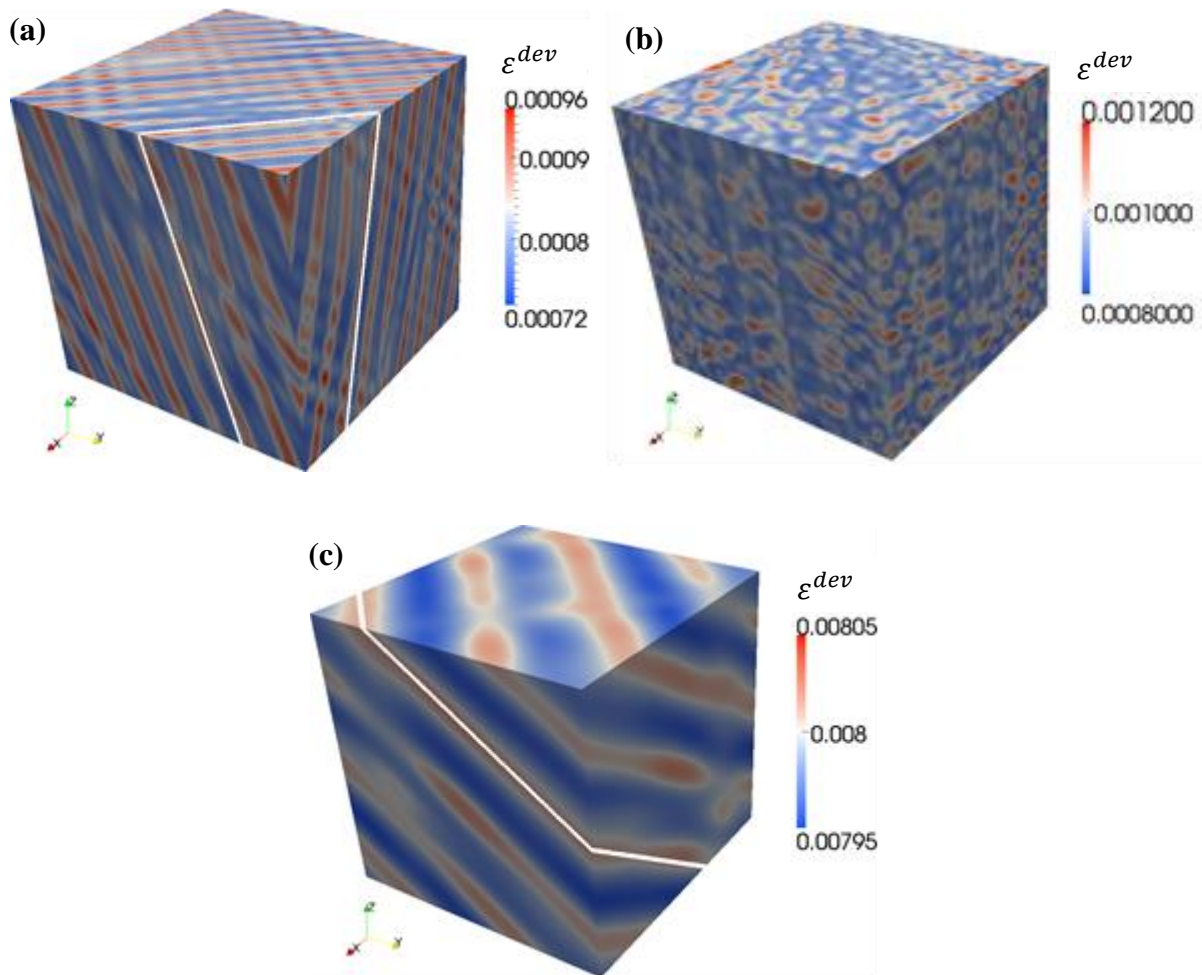


Figure 2.6 : Cartes de déformations déviatoires dans les monocristaux en bi-traction (a) d'orientation **1** à  $t = 0,4$  ms (b) d'orientation **2** à  $t = 0,45$  ms (c) d'orientation **3** à  $t = 4$  ms. Pour les orientations **1** et **3**, le trait continu blanc repère l'orientation des bandes prédite par l'analyse de stabilité (cf. paragraphe 2.2.3).

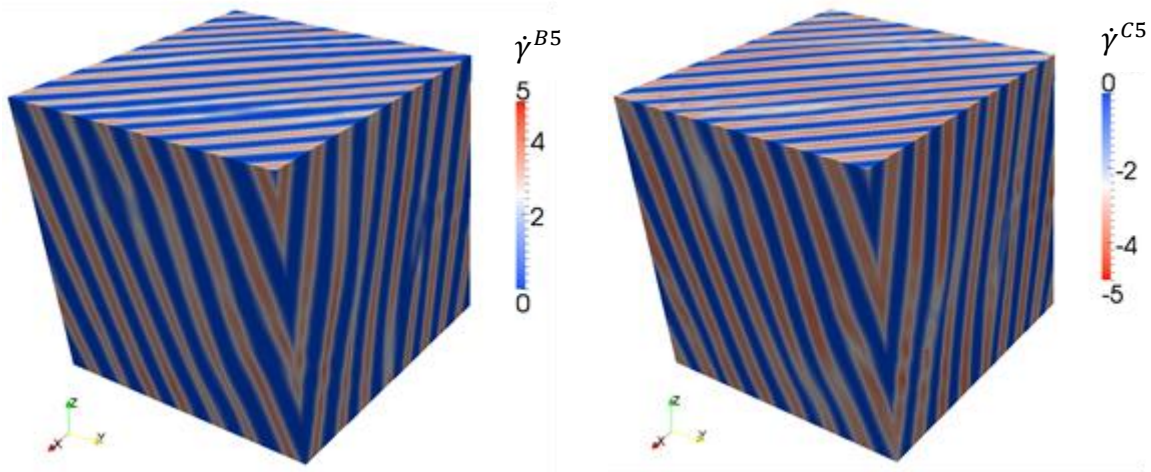


Figure 2.7 : Cartes des vitesses de glissement pour les systèmes B5 et C5 dans le monocristal d'orientation ❶ à  $t = 0,4$  ms.

Une analyse de la sensibilité au maillage des résultats précédents montre que la largeur des bandes est d'autant plus faible (et donc leur nombre d'autant plus élevé) que le maillage est fin. En revanche leur orientation n'en dépend quasiment pas<sup>31</sup>, ce qui laisse penser que celle-ci a bien un sens physique.

Pour les deux orientations ❶ et ❸, pour lesquelles la déformation hétérogène s'organise en bandes, on peut analyser l'initiation du phénomène en traçant le long d'une droite de coupe les profils de vitesse de glissement pour l'ensemble des systèmes actifs : c'est ce qui est fait en figure 2.8 aux instants  $t = 0,2$  ms et  $t = 3$  ms pour les orientations ❶ et ❸ respectivement. Pour l'orientation ❶, ces profils font apparaître des fluctuations spatiales en opposition de phase pour les systèmes B5 et C5 alors que les vitesses de glissement des autres systèmes sont quasiment uniformes ; il semble donc que ce soit bien la ségrégation de ces deux systèmes colinéaires qui soit à l'origine de l'organisation de la déformation en bandes. A titre de comparaison, sont également reportés sur la figure 2.8 les profils que l'on obtiendrait pour cette même orientation ❶ en retenant une matrice d'interaction avec des coefficients tous égaux ( $a^{\alpha\beta} = 0,122$  pour tous les  $\alpha$  et  $\beta$ ) : ces profils ne font apparaître aucun début de ségrégation, ce qui confirme le rôle primordial des coefficients de la matrice. Pour l'orientation ❸, les profils font apparaître des fluctuations spatiales pour les systèmes C1 et A2 en opposition de phase avec les fluctuations spatiales relatives aux systèmes A3 et B4. Les coefficients d'interaction gouvernant l'écrouissage entre ces quatre systèmes sont rappelés dans le tableau 2.6 ; il apparaît que la ségrégation s'opère d'une manière qui regroupe les paires de systèmes formant des jonctions de Hirth auxquelles correspond le coefficient d'interaction le plus faible (cf. tableau 2.3).

<sup>31</sup> A condition toutefois de mailler assez finement pour capturer un nombre de bandes suffisant de sorte que cette orientation ne soit pas biaisée par les conditions de périodicité.

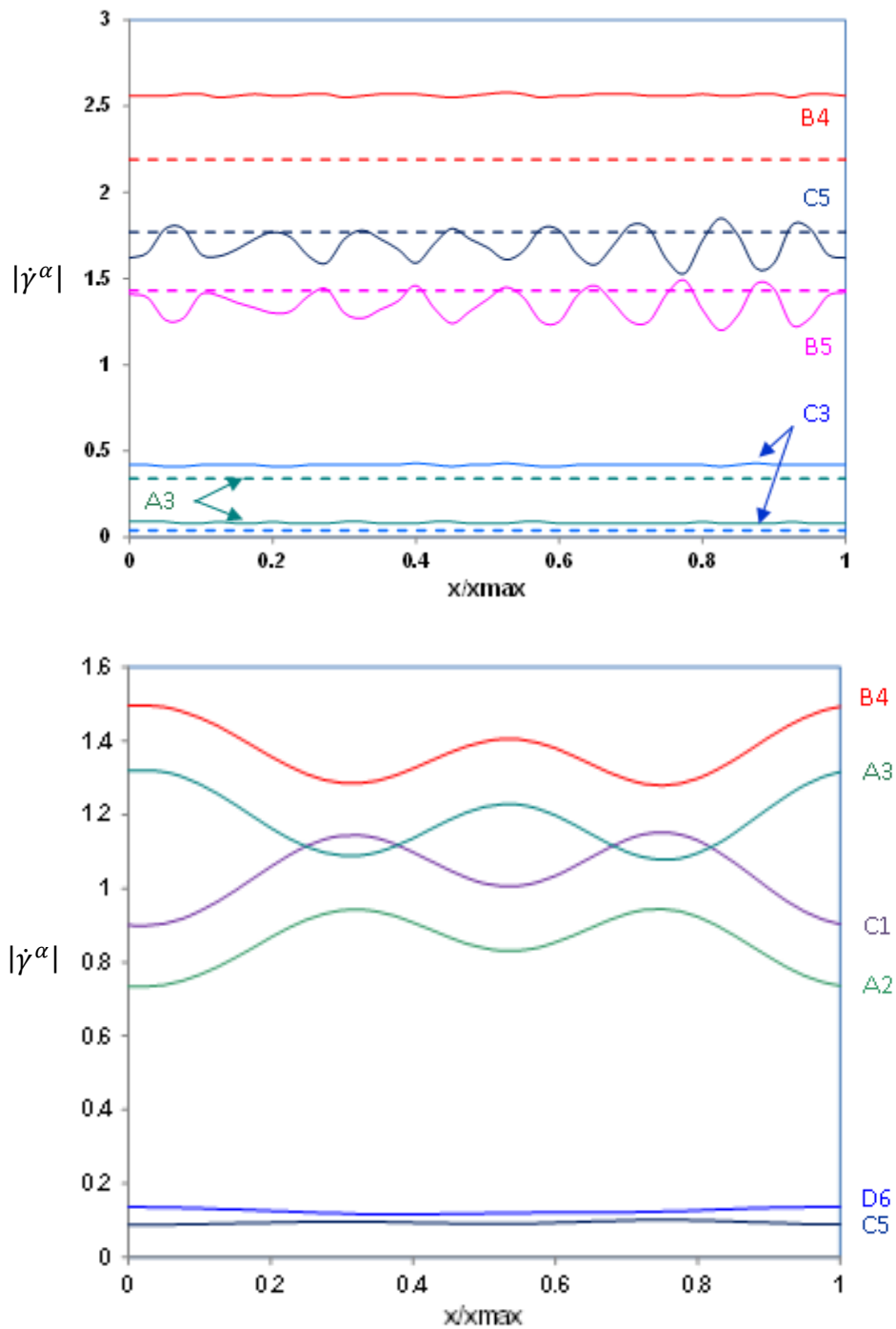


Figure 2.8 : Profil des vitesses de glissement le long de la droite de coupe  $Y = Z = 0$  dans les monocristaux (a) d'orientation 1 à  $t = 0,2$  ms et (b) d'orientation 2 à  $t = 3$  ms. Pour l'orientation 1 sont également reportées en pointillés les vitesses de glissement que l'on obtiendrait pour une matrice d'écroutissage de coefficients tous égaux ( $a^{\alpha\beta} = 0,122$ ).

Tableau 2.6 : Coefficients d'interaction  $a^{\alpha\beta}$  entre les quatre systèmes se dissociant dans le cas de l'orientation ③.

	A2	A3	B4	C1
A2	$a'_0$	$a_1^{copla}$	$a_2$	$a_1^{ortho}$
A3	$a_1^{copla}$	$a'_0$	$a_1^{ortho}$	$a_2$
B4	$a_2$	$a_1^{ortho}$	$a'_0$	$a_3$
C1	$a_1^{ortho}$	$a_2$	$a_3$	$a'_0$

### 2.2.3. Analyse de stabilité

Dans ce paragraphe, on se propose de justifier la ségrégation en bandes mise en évidence pour les orientations ① et ③ par une analyse de perturbation de la solution homogène telle que développée dans le paragraphe 1.3. Bien que les simulations ait été menées dans le cadre des transformations finies, on fait l'hypothèse que les motifs émergent suffisamment tôt pour pouvoir mener l'analyse en petites déformations.

Le comportement viscoplastique d'un monocristal CFC s'exprime sous une forme similaire à celle adoptée dans le paragraphe 1.3 dans laquelle les vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^\alpha$  jouent le rôle de multiplicateurs plastiques tandis que les densités de dislocations  $\rho^\alpha$  jouent le rôle de variables internes. En supposant que, pour chaque système, le glissement s'opère toujours dans le même sens, identique pour l'écoulement moyen et l'écoulement perturbé, on considère des systèmes de glissement orientés de telle sorte que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_\alpha \dot{\gamma}^\alpha \tilde{\mathbf{P}}^\alpha, \quad \dot{\rho}^\alpha = \dot{\gamma}^\alpha \tilde{B}^\alpha(\rho^\beta),$$

avec :

$$\bar{\gamma}^\alpha = |\dot{\gamma}^\alpha| > 0, \quad \tilde{\mathbf{P}}^\alpha = \{\bar{\mathbf{m}}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha\}_S, \quad \tilde{B}^\alpha(\rho^\beta) = \frac{1}{b} \left( \sqrt{\sum_\beta d^{\alpha\beta} \rho^\beta} - 2\gamma_c \rho^\alpha \right);$$

$$\bar{\mathbf{m}}_0^\alpha = \frac{\dot{\gamma}^\alpha}{|\dot{\gamma}^\alpha|} \mathbf{m}_0^\alpha \text{ est la direction de glissement orientée.} \quad (2.69)$$

La règle d'écoulement viscoplastique (2.13) s'écrit sous la forme (1.93) :

$$\dot{\gamma}^\alpha = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{f^\alpha(\boldsymbol{\sigma})}{\dot{\gamma}^\alpha(\rho^\beta)} \right)^{1/m},$$

avec :

$$f^\alpha(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\tau}^\alpha = |\tau^\alpha| = \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\mathbf{P}}^\alpha \quad \text{et} \quad Y^\alpha(\rho^\beta) = \tau_c^\alpha(\rho^\beta) = \tau_0 + \mu b \sqrt{\sum_\beta a^{\alpha\beta} \rho^\beta}. \quad (2.70)$$

On en déduit que :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^\alpha = \frac{df^\alpha}{d\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{P}}^\alpha. \quad (2.71)^{32}$$

Par ailleurs :

$$\tilde{A}^{\alpha\beta}(\rho^\gamma) = \frac{\partial \tau_c^\alpha}{\partial \rho^\beta} = \mu \left( \frac{1}{2 \sqrt{\sum_\gamma a^{\alpha\gamma} \rho^\gamma}} \right) a^{\alpha\beta}. \quad (2.72)$$

Par construction  $\tilde{A}^{\alpha\beta} \tilde{B}^\beta = H_{\alpha\beta}$  défini par la relation (2.21).

Le système d'équations d'évolution d'une perturbation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{C} : (\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \sum_\alpha \delta \dot{\gamma}^\alpha \tilde{\mathbf{P}}^\alpha), \\ \tilde{\mathbf{P}}^\alpha : \delta \boldsymbol{\sigma} &= \left( \frac{\dot{\gamma}_{10}^\alpha}{\dot{\gamma}_0} \right)^m \sum_\beta \tilde{A}^{\alpha\beta} \delta \rho^\beta + \frac{m}{\dot{\gamma}_0} \left( \frac{\dot{\gamma}_{10}^\alpha}{\dot{\gamma}_0} \right)^{m-1} \tau_c^\alpha \delta \dot{\gamma}^\alpha, \\ \delta \dot{\rho}^\alpha &= \delta \dot{\gamma}^\alpha \tilde{B}^\alpha. \end{aligned} \quad (2.73)$$

On recherche des modes instables à croissance exponentielle (sous la forme donnée par les relations (1.20)-(1.21) et (1.99)) :

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= i \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} e^{ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + \eta t} = ik \delta \tilde{u} \{ \mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \}_S e^{ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + \eta t}, \quad \delta \boldsymbol{\sigma} = i \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}} e^{ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + \eta t}, \\ \delta \dot{\gamma}^\alpha &= i \delta \tilde{\gamma}^\alpha e^{ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + \eta t}, \quad \delta \rho^\alpha = i \delta \tilde{\rho}^\alpha e^{ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + \eta t}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

On déduit des relations (2.73) des relations entre les perturbations  $\delta \tilde{\gamma}^\alpha$  et la perturbation  $\delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  :

$$\mathfrak{N}_{\alpha\beta} \delta \tilde{\gamma}^\beta = \tilde{\mathbf{P}}^\alpha : \mathbb{C} : \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.75)$$

La matrice  $\mathfrak{N}$  de coefficients  $\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(\rho_{10}^\gamma, \dot{\gamma}_{10}^\gamma, \eta)$  est telle que ( $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker) :

$$\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(\rho_{10}^\gamma, \dot{\gamma}_{10}^\gamma, \eta) = \left( \frac{\dot{\gamma}_{10}^\alpha}{\dot{\gamma}_0} \right)^m H_{\alpha\beta} + \eta \frac{m}{\dot{\gamma}_0} \left( \frac{\dot{\gamma}_{10}^\alpha}{\dot{\gamma}_0} \right)^{m-1} \tau_c^\alpha \delta_{\alpha\beta} + \tilde{\mathbf{P}}^\alpha : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}^\beta. \quad (2.76)$$

<sup>32</sup> Dans ce cas,  $\tilde{\mathbf{P}}^\alpha$  est indépendant de l'état de contrainte (cf. paragraphe 1.3).



En inversant le système (2.75), on relie la perturbation en contrainte à la perturbation en déformation par une relation de la forme (1.101) :

$$\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbb{L}} : \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.77)$$

Le tenseur  $\hat{\mathbb{L}}$  s'écrit pour la loi de comportement cristalline (la matrice  $\boldsymbol{\kappa}^{-1}$  est la matrice inverse de la matrice  $\boldsymbol{\kappa}$ ) :

$$\hat{\mathbb{L}}(\rho_{10}^\gamma, \dot{\gamma}_{10}^\gamma, \eta) = \mathbb{C} - \sum_{\alpha, \beta} (\boldsymbol{\kappa}^{-1})_{\alpha\beta} (\mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}^\alpha) \otimes (\tilde{\mathbf{P}}^\beta : \mathbb{C}). \quad (2.78)$$

Pour chacune des deux orientations **1** et **3**, on mène une analyse de stabilité aux instants  $t = 0,2$  ms et  $t = 3$  ms pour lesquels les simulations avec conditions de bord périodiques font apparaître un début de formation de bandes (cf. figure 2.8). Les composantes du tenseur  $\hat{\mathbb{L}}$  sont obtenues en relevant les caractéristiques  $\rho_{10}^\gamma$ ,  $\tau_c^\alpha$  et  $\dot{\gamma}_{10}^\gamma$  de l'écoulement moyen dans la première simulation en déformation homogène.

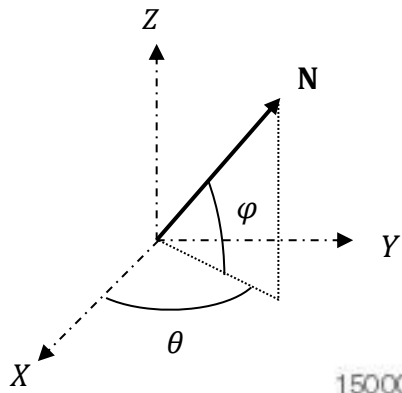
Plus précisément, pour chaque orientation de bandes  $\mathbf{N}$ , repérée par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  dans le repère  $(X, Y, Z)$  (figure 2.9), on cherche le taux de croissance  $\eta(\theta, \varphi)$  qui permet de satisfaire la relation (1.102) ; on trace la nappe  $\eta(\theta, \varphi)$  sur la figure 2.9. On repère les orientations donnant les taux de croissance maximaux (modes de perturbation dominants) et on identifie pour celles-ci l'orientation du glissement et les composantes de la perturbation sur chacun des systèmes actifs (reportées dans les tableaux 2.7 et 2.8).

Pour l'orientation **1**, il existe des modes instables pour un large domaine d'orientations  $(\theta, \varphi)$ <sup>33</sup> ; ce domaine est plus restreint pour l'orientation **3**. Pour chacune des orientations **1** et **3**, il existe deux maxima indicés I et Ib qui correspondent à des paires de modes satisfaisant  $\mathbf{N}_{Ib} \approx \mathbf{M}_I$  et  $\mathbf{M}_{Ib} \approx \mathbf{N}_I$ . A ces modes sont associées des perturbations  $\delta\tilde{\gamma}^\alpha$  très proches<sup>34</sup>.

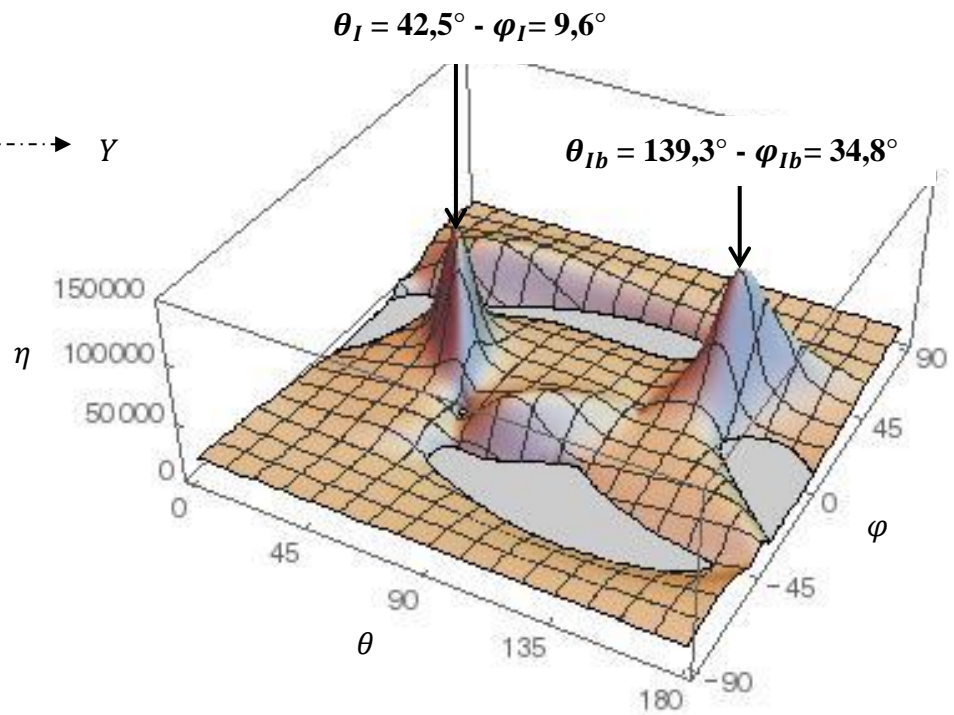
Les orientations de bandes données par la simulation sont bien prédites par le mode I pour l'orientation **1** et par le mode Ib pour l'orientation **3** (comme on peut le visualiser sur la figure 2.6). Pour l'orientation **1**, l'analyse de stabilité donne des perturbations de signes opposés pour les glissements sur les systèmes B5 et C5 et d'amplitudes beaucoup plus faibles pour les autres systèmes, en accord avec les profils donnés sur la figure 2.8. Pour l'orientation **3**, les amplitudes et signes des perturbations sur les glissements sont également cohérents avec les profils de la figure 2.8.

<sup>33</sup> Pour le cas avec une matrice d'interaction homogène (coefficients tous égaux à 0,122) non détaillé ici, on montrerait qu'il n'existe pas de modes instables.

<sup>34</sup> Lorsque le tenseur  $\hat{\mathbb{L}}$  est symétrique, la relation (1.102)  $(\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbb{L}} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{M} = 0$  est équivalente à la relation  $(\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbb{L}} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{N} = 0$  et on obtient des modes instables de même taux de croissance en permutant normale aux bandes et direction de glissement. Rappelons toutefois que cette propriété n'est pas rigoureusement vérifiée ici du fait de la non-symétrie de la matrice d'écrouissage  $H_{\alpha\beta}$ .



Orientation ❶ :



Orientation ❸ :

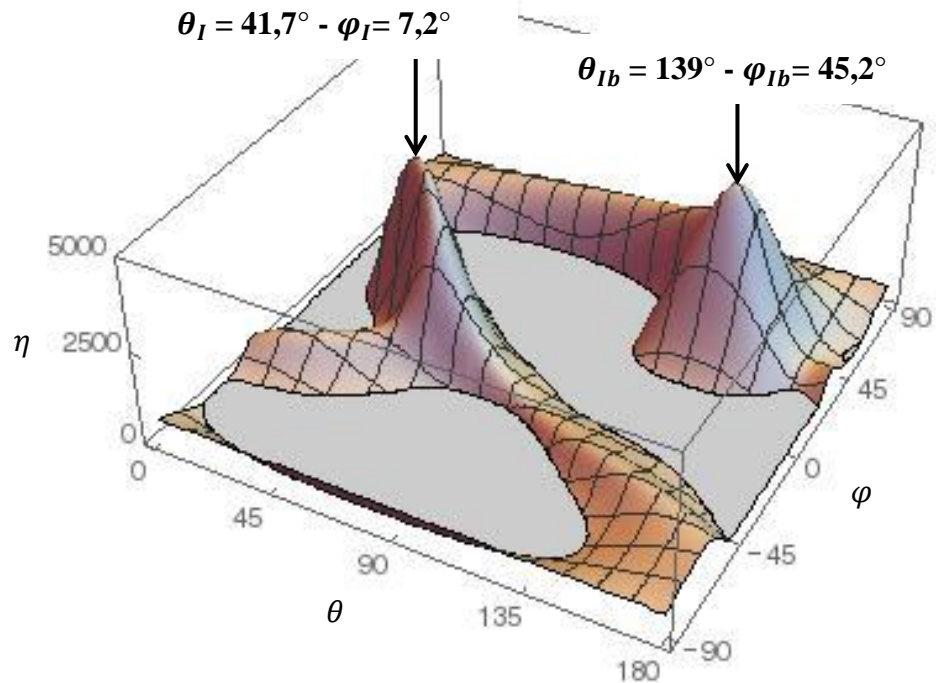


Figure 2.9 : Taux de croissance des perturbations en fonction de l'orientation des bandes et modes de perturbation dominants pour les orientations cristallines ❶ et ❸ ; on ne trace que les taux de croissance positifs (modes instables).

**Tableau 2.7** : Modes de perturbation dominants pour l'orientation cristalline ❶ et glissements associées. Les glissements  $\delta\tilde{\gamma}^\alpha$  sont calculés en faisant l'hypothèse que  $k\delta\tilde{u} = 1$ .

Mode	$\theta$ (°)	$\varphi$ (°)	$\eta$ (s <sup>-1</sup> )	$\delta\tilde{\gamma}^{A3}$	$\delta\tilde{\gamma}^{B4}$	$\delta\tilde{\gamma}^{B5}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C3}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C5}$
I	42,5	9,6	1,12 10 <sup>5</sup>	0	0,02	0,58	0,01	-0,64
Ib	139,3	34,8	1,12 10 <sup>5</sup>	0	0,01	0,57	0,01	-0,65

**Tableau 2.8** : Modes de perturbation dominants pour l'orientation cristalline ❷ et glissements associées.

Mode	$\theta$ (°)	$\varphi$ (°)	$\eta$ (s <sup>-1</sup> )	$\delta\tilde{\gamma}^{A2}$	$\delta\tilde{\gamma}^{A3}$	$\delta\tilde{\gamma}^{B4}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C1}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C5}$	$\delta\tilde{\gamma}^{D6}$
I	41,7	7,2	4,36 10 <sup>3</sup>	0,45	-0,53	-0,49	0,51	0,01	0
Ib	139	45,2	4,35 10 <sup>3</sup>	0,43	-0,55	-0,48	0,51	0,01	0

#### 2.2.4. Incidence d'effets non-locaux dans le cas de modèles de plasticité à gradient

On introduit maintenant des effets non-locaux dans l'analyse de manière à essayer de justifier une taille caractéristique au processus de ségrégation. Un formalisme tel que présenté au paragraphe 2.1.3 est retenu, en supposant que l'énergie de défauts  $\Psi$  est bilinéaire en fonction du tenseur densité de dislocations  $\mathbf{G}$ . La relation (2.70) se réécrit sous la forme :

$$\dot{\gamma}^\alpha = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{f^\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad}(\bar{\gamma}^\beta))}{\gamma^\alpha(\rho^\beta)} \right)^{1/m},$$

avec, en vertu de la relation (2.57) :

$$f^\alpha(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad}(\bar{\gamma}^\beta)) = |\pi^\alpha| = (\boldsymbol{\sigma} - \mu L^2 \text{rot}(\mathbf{G})) : (\bar{\mathbf{m}}_0^\alpha \otimes \mathbf{n}_0^\alpha),$$

tel que 
$$\bar{\mathbf{m}}_0^\alpha = \frac{\pi^\alpha}{|\pi^\alpha|} \mathbf{m}_0^\alpha = \frac{\dot{\gamma}^\alpha}{\bar{\gamma}^\alpha} \mathbf{m}_0^\alpha = \frac{\gamma^\alpha}{\bar{\gamma}^\alpha} \mathbf{m}_0^\alpha \quad (2.79)$$

Dans le cas de systèmes de glissement orientés, le tenseur  $\mathbf{G}$  se réécrit sous la forme :

$$\mathbf{G} = \sum_\beta \bar{\mathbf{m}}_0^\beta \otimes (\text{grad}(\bar{\gamma}^\beta) \times \mathbf{n}_0^\beta). \quad (2.80)$$

En ajoutant les termes de gradient, le système (2.73) sur les perturbations devient :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : (\delta\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{\alpha} \delta\dot{\gamma}^{\alpha} \tilde{\mathbf{P}}^{\alpha}),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\alpha} : (\delta\boldsymbol{\sigma} - \mu L^2 \text{rot}(\delta\mathbf{G})) = \left(\frac{\dot{\gamma}_{10}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0}\right)^m \tilde{A}^{\alpha\beta} \delta\rho^{\beta} + \frac{m}{\dot{\gamma}_0} \left(\frac{\dot{\gamma}_{10}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0}\right)^{m-1} \tau_c^{\alpha} \delta\dot{\gamma}^{\alpha},$$

$$\delta\rho^{\alpha} = \delta\dot{\gamma}^{\alpha} \tilde{B}^{\alpha}(\rho_{10}^{\gamma}),$$

$$\delta\mathbf{G} = \sum_{\beta} \tilde{\mathbf{m}}_0^{\beta} \otimes \left( \text{grad}(\delta\tilde{\gamma}^{\beta}) \times \mathbf{n}_0^{\beta} \right). \quad (2.81)$$

En recherchant des modes sous la forme donnée par les équations (2.74) et en posant :

$$\delta\mathbf{G} = -k \delta\tilde{\mathbf{G}} e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}+\eta t}. \quad (2.82)$$

On déduit que :

$$\delta\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{N} \times \delta\tilde{\mathbf{U}}^p = \sum_{\beta} \delta\tilde{\gamma}^{\beta} \tilde{\mathbf{m}}_0^{\beta} \otimes \left( \mathbf{N} \times \mathbf{n}_0^{\beta} \right). \quad (2.83)$$

Par ailleurs :

$$\text{rot}(\delta\mathbf{G}) = -ik^2 (\mathbf{N} \times \delta\tilde{\mathbf{G}}) e^{ik\mathbf{x}\cdot\mathbf{N}+\eta t}. \quad (2.84)$$

La relation (2.81)<sub>2</sub> se réécrit donc sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\alpha} : \left( \delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mu k^2 L^2 \sum_{\beta} \delta\tilde{\gamma}^{\beta} \tilde{\mathbf{m}}_0^{\beta} \otimes \left( \mathbf{N} \times \left( \mathbf{N} \times \mathbf{n}_0^{\beta} \right) \right) \right) = \left(\frac{\dot{\gamma}_{10}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0}\right)^m \tilde{A}^{\alpha\beta} \delta\tilde{\rho}^{\beta} + \eta \frac{m}{\dot{\gamma}_0} \left(\frac{\dot{\gamma}_{10}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0}\right)^{m-1} \tau_c^{\alpha} \delta\tilde{\gamma}^{\alpha}. \quad (2.85)$$

On peut alors relier les perturbations  $\delta\tilde{\gamma}^{\alpha}$  et la perturbation  $\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  par :

$$\boldsymbol{\aleph}^{\alpha\beta}(\rho_{10}^{\gamma}, \dot{\gamma}_{10}^{\gamma}, \eta, k, \mathbf{N}) \delta\tilde{\gamma}^{\beta} = \tilde{\mathbf{P}}^{\alpha} : \mathbb{C} : \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.86)$$

avec :

$$\boldsymbol{\aleph}^{\alpha\beta}(\rho_{10}^{\gamma}, \dot{\gamma}_{10}^{\gamma}, \eta, k, \mathbf{N}) = \left(\frac{\dot{\gamma}_{10}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0}\right)^m H_{\alpha\beta} + \eta \frac{m}{\dot{\gamma}_0} \left(\frac{\dot{\gamma}_{10}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0}\right)^{m-1} \tau_c^{\alpha} \delta_{\alpha\beta} + \tilde{\mathbf{P}}^{\alpha} : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{P}}^{\beta} + \mu k^2 L^2 \left( \tilde{\mathbf{m}}_0^{\alpha} \cdot \tilde{\mathbf{m}}_0^{\beta} \right) \left( (\mathbf{N} \times \mathbf{n}_0^{\alpha}) \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{n}_0^{\beta}) \right). \quad (2.87)$$

Les perturbations  $\delta\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  et  $\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sont reliées par une relation de la forme (2.77) dans laquelle le tenseur  $\hat{\mathbb{L}}$  s'écrit sous la forme (2.78) avec la matrice  $\boldsymbol{\aleph}^{-1}$  qui fait maintenant intervenir le nombre d'onde  $k$  et la normale aux bandes  $\mathbf{N}$ . Dans le cas limite des nombres d'onde  $k \rightarrow 0$  (ou des très grandes longueurs d'onde), le critère d'existence d'un mode instable est équivalent à ce qu'il est en l'absence d'effets de gradient.

La nappe  $\eta(\theta, \varphi)$  est donnée sur la figure 2.10 pour l'orientation **1** pour un nombre d'onde  $k$  tel que  $kL = 0,1$ . Elle fait apparaître un domaine instable plus réduit que dans le cas sans effet de gradient.

Les orientations des modes dominants et les perturbations associées relatives aux glissements sont données dans les tableaux 2.9 et 2.10 pour les orientations **1** et **3** respectivement (les modes associés au cas sans effets de gradients sont rappelés).

Concernant l'orientation **1**, l'orientation des modes et les perturbations relatives aux glissements sont quasiment inchangés par rapport au cas sans effet de gradient ; en revanche, le taux de croissance du mode I est identique tandis que le taux de croissance du mode Ib est fortement réduit. Si l'on augmentait encore le nombre d'onde relatif  $kL$ , on verrait disparaître le mode Ib. Ce phénomène peut être interprété d'une manière similaire à la compétition entre bandes de glissement et « bandes en genou » dans le cas d'un glissement simple (cf. Forest, 1998). Plus précisément, si on néglige les perturbations sur les autres systèmes, la dissociation des systèmes B5 et C5, donne, pour chacun des deux modes I et Ib, une perturbation sur le gradient de transformation plastique (avec les systèmes de glissement orientés :  $\bar{\mathbf{m}}_0^{C5} = -\bar{\mathbf{m}}_0^{B5}$ ) :

$$\delta \mathbf{U}^p \approx \bar{\mathbf{m}}_0^{B5} \otimes (\delta \bar{\gamma}^{B5} \mathbf{n}_0^{B5} - \delta \bar{\gamma}^{C5} \mathbf{n}_0^{C5}). \quad (2.88)$$

Pour le mode I, l'analyse de stabilité montre que :  $\mathbf{M}_I \approx \bar{\mathbf{m}}_0^{B5}$  et  $\mathbf{N}_I \approx (\delta \bar{\gamma}^{B5} \mathbf{n}_0^{B5} - \delta \bar{\gamma}^{C5} \mathbf{n}_0^{C5})$  (cf. Tableau 2.9) ; en conséquence, en vertu de (2.74) :

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{U}} &= \mathbf{M}_I \otimes \mathbf{N}_I \approx \delta \tilde{\mathbf{U}}^p, \\ \delta \tilde{\mathbf{G}} &\approx \mathbf{N}_I \times (\mathbf{M}_I \otimes \mathbf{N}_I) = \mathbf{M}_I \otimes (\mathbf{N}_I \times \mathbf{N}_I) = 0, \end{aligned} \quad (2.89)$$

ce qui explique que les effets de gradients soient inopérants.

A l'inverse pour le mode Ib :  $\mathbf{N}_{Ib} \approx \bar{\mathbf{m}}_0^{B5}$  et  $\mathbf{M}_{Ib} \approx (\delta \bar{\gamma}^{B5} \mathbf{n}_0^{B5} - \delta \bar{\gamma}^{C5} \mathbf{n}_0^{C5})$  ; en conséquence :

$$\delta \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{M}_{Ib} \otimes \mathbf{N}_{Ib} \approx (\delta \tilde{\mathbf{U}}^p)^T$$

d'où :

$$\delta \tilde{\mathbf{U}}^e \approx \delta \tilde{\mathbf{U}} - (\delta \tilde{\mathbf{U}})^T = \mathbf{M}_{Ib} \otimes \mathbf{N}_{Ib} - \mathbf{N}_{Ib} \otimes \mathbf{M}_{Ib} \quad (2.90)$$

La perturbation comprend une composante de rotation élastique (i.e. de rotation du réseau cristallin) et en conséquence :

$$\delta \tilde{\mathbf{G}} \approx \mathbf{N}_{Ib} \times (\mathbf{N}_{Ib} \otimes \mathbf{M}_{Ib}) = \mathbf{N}_{Ib} \otimes (\mathbf{M}_{Ib} \times \mathbf{N}_{Ib}) \neq 0. \quad (2.91)$$

Concernant l'orientation **3**, les effets de gradients affectent les taux de croissance des deux modes mais dans des proportions différentes (davantage le mode Ib que le mode I). Ils affectent

également les amplitudes des perturbations  $\delta\tilde{\gamma}^\alpha$  sur les différents systèmes même si ce sont toujours les mêmes systèmes qui sont impliqués dans la ségrégation.

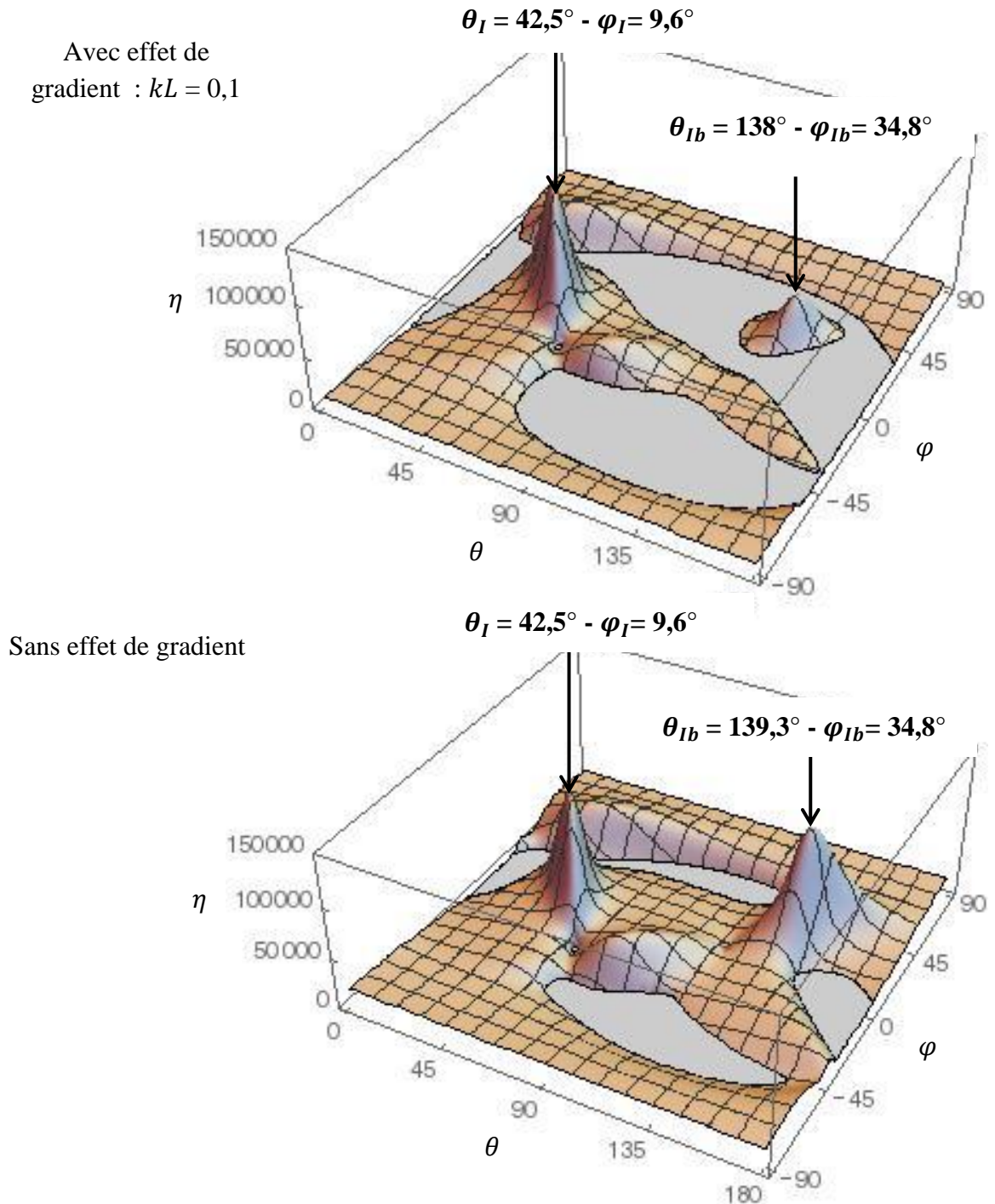


Figure 2.10 : Taux de croissance des perturbations en fonction de l'orientation des bandes pour l'orientation cristalline  $\bullet$  et modes de perturbation dominants avec des effets de gradient tels que  $kL = 0,1$ . Comparaison avec le cas sans effet de gradient.

**Tableau 2.9** : Modes de perturbation dominants pour l'orientation cristalline **1** et glissements associées avec des effets de gradient tels que  $kL = 0,1$ . Les modes identifiés sans effet de gradient (tableau 2.7) sont rappelés en italique.

Mode	$\theta$ (°)	$\varphi$ (°)	$\eta$ (s <sup>-1</sup> )	$\delta\tilde{\gamma}^{A3}$	$\delta\tilde{\gamma}^{B4}$	$\delta\tilde{\gamma}^{B5}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C3}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C5}$
I	42,5	9,6	1,12 10 <sup>5</sup>	0	0,02	0,58	0,01	-0,64
<i>I</i>	<i>42,5</i>	<i>9,6</i>	<i>1,12 10<sup>5</sup></i>	<i>0</i>	<i>0,02</i>	<i>0,58</i>	<i>0,01</i>	<i>-0,64</i>
Ib	138	34,8	0,40 10 <sup>5</sup>	0,03	-0,04	0,59	0,01	-0,64
<i>Ib</i>	<i>139,3</i>	<i>34,8</i>	<i>1,12 10<sup>5</sup></i>	<i>0</i>	<i>0,01</i>	<i>0,57</i>	<i>0,01</i>	<i>-0,65</i>

**Tableau 2.10** : Modes de perturbation dominants pour l'orientation cristalline **3** et glissements associées avec des effets de gradient tels que  $kL = 0,1$ . Les modes identifiés sans effet de gradient (tableau 2.8) sont rappelés en italique.

Mode	$\theta$ (°)	$\varphi$ (°)	$\eta$ (s <sup>-1</sup> )	$\delta\tilde{\gamma}^{A2}$	$\delta\tilde{\gamma}^{A3}$	$\delta\tilde{\gamma}^{B4}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C1}$	$\delta\tilde{\gamma}^{C5}$	$\delta\tilde{\gamma}^{D6}$
I	45,7	1,8	2,74 10 <sup>3</sup>	0,38	-0,45	-0,58	0,60	0,02	-0,09
<i>I</i>	<i>41,7</i>	<i>7,2</i>	<i>4,36 10<sup>3</sup></i>	<i>0,45</i>	<i>-0,53</i>	<i>-0,49</i>	<i>0,51</i>	<i>0,01</i>	<i>0</i>
Ib	139,7	54,4	0,82 10 <sup>3</sup>	0,65	-0,85	-0,21	0,23	0,05	0
<i>Ib</i>	<i>139</i>	<i>45,2</i>	<i>4,35 10<sup>3</sup></i>	<i>0,43</i>	<i>-0,55</i>	<i>-0,48</i>	<i>0,51</i>	<i>0,01</i>	<i>0</i>

### 2.2.5. Bilan de l'étude

En plasticité cristalline, l'analyse linéaire de stabilité est un outil pertinent pour prédire l'apparition d'hétérogénéités de la déformation à l'échelle intragranulaire. Une des origines du phénomène est liée à l'interaction entre les systèmes de glissement qui peut pénaliser leur coexistence. Les paires de systèmes colinéaires, dont les dislocations forment des jonctions très stables pour toutes les structures cristallines (ce qui se traduit par un fort coefficient d'interaction), semblent jouer un rôle déterminant dans le processus.

L'introduction d'effet de gradient dans la modélisation permet de prendre en compte un effet de taille caractéristique des structures qui se mettent en place. Toutefois, les modèles basés sur les densités de GND ne pénalisent les gradients de glissement que dans les directions tangentes au plan de glissement ; de même, les modèles basés sur le tenseur densité de dislocations sont sans

effet sur les champs de déformation plastique irrotationnels. Ces modèles conduisent donc encore à la prédiction de modes de localisation dont la longueur d'onde peut être infiniment petite.

L'étalement des bandes de glissement par effet du glissement dévié, qui permet aux dislocations de rejoindre des plans de glissement parallèles, est une explication possible à l'impossibilité d'obtenir des gradients de glissement infinis dans la direction normale au plan de glissement (ou, dit d'une manière différente, à l'existence d'une échelle de longueur caractéristique du glissement plastique dans cette direction) ; il conviendra à l'avenir de se demander comment introduire simplement cet effet dans une modélisation continue de la plasticité cristalline. Certains modèles (cf. par exemple Wulfinghoff et Böhlke, 2012, ou Ling et al., 2018) adoptent une formulation non-locale qui consisterait, dans le cas d'un glissement simple, à remplacer  $\text{grad}^\alpha(\dot{\gamma}^\alpha)$  par  $\text{grad}(\dot{\gamma}^\alpha)$  dans la formule (2.64) : toutefois, la limite de ce type de modèle est qu'ils retiennent une seule échelle de longueur alors que la limitation des gradients dans le plan de glissement et dans la direction normale est vraisemblablement régie par une physique un peu différente (cf. Ling et al., 2018).

### 2.3. Localisation à l'échelle d'une structure : cas d'une plaque plane

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'échelle de l'agrégat polycristallin constituant une structure. Laisant de côté la notion de critère d'instabilité, on se propose d'évaluer de quelle manière la microstructure et l'organisation de la déformation à l'échelle mésoscopique peuvent influencer sur la localisation à l'échelle macroscopique.

Le lien entre les caractéristiques microstructurales des enveloppes en expansion et leur propension plus ou moins importante à développer de la localisation plastique mérite d'être analysé de manière plus précise. Ces caractéristiques dépendent d'une part de l'état du matériau livré et d'autre part de la gamme d'élaboration des enveloppes, succession d'opérations de mise en forme et de traitements thermiques. Le procédé d'élaboration induit en effet des distributions de formes et de tailles de grains, une texture et des densités de dislocations résiduelles dépendant de l'intensité des déformations en jeu lors du formage et des processus de restauration et de recristallisation à l'œuvre lors des traitements thermiques. Notons enfin que texture et densités de dislocations évoluent au cours du chargement ce qui peut atténuer l'effet des caractéristiques initiales de la pièce mise en forme.

D'une façon plus générale, à l'échelle de l'agrégat, la déformation plastique est intrinsèquement hétérogène dès le début du chargement. Cette hétérogénéité est liée à la variation de l'orientation cristalline d'un grain à l'autre. Du fait de l'anisotropie élastique, un champ de contrainte hétérogène se met en place avant même l'entrée en plasticité. En outre, pour un état de contrainte donné, la réponse plastique diffère d'un grain à l'autre du fait des orientations différentes des



systèmes de glissement<sup>35</sup>. On parlerait en revanche de localisation macroscopique, ou du moins d'apparition de précurseurs, lorsque se développent des fluctuations de la déformation d'une échelle plus grande que celle des hétérogénéités de la matière<sup>36</sup>.

Il existerait a priori deux manières différentes d'interpréter la transition entre les deux phénomènes. Une première manière est de considérer que la déformation se concentre dès le début du chargement dans les grains ou ensembles de grains offrant la résistance mécanique la plus faible et que la localisation macroscopique se met en place par des processus d'interaction entre ces points faibles tels que décrit au paragraphe 1.1.2 (décharge élastique, inhibition de certains points...). Une deuxième manière est de considérer que les hétérogénéités initiales jouent le rôle d'une petite perturbation à même d'activer à l'échelle macroscopique des modes d'instabilité propres de la structure (tels qu'exhibés par les analyses de stabilité à cette échelle par exemple).

Il n'est évidemment pas possible d'arbitrer de manière catégorique entre ces deux explications, les deux types d'effets pouvant bien sûr intervenir. Dans ce qui suit, on se propose simplement de donner quelques éléments d'analyse en présentant des résultats de simulations de plaques de tantale (de structure cristalline CC) en extension dont on représente la microstructure (ces simulations ont fait l'objet de la publication de Dequiedt et Denoual, 2021 ; on en présente ici les résultats principaux). On s'intéresse en priorité à la traction equi-biaxiale, souvent rencontrée dans les applications, mais quelques simulations en déformation plane sont également présentées. Les conditions de simulation sont précisées au paragraphe 2.3.1. Le paragraphe 2.3.2 est consacré à une plaque de texture isotrope en traction equi-biaxiale ; on analyse notamment l'incidence de la taille de grain (ou plus précisément du nombre de grains dans l'épaisseur de la plaque). Le paragraphe 2.3.3 s'attache au cas d'une plaque texturée : on considère une texture de compression uniaxiale qui serait, par exemple, représentative d'une opération d'emboutissage ou de laminage croisé. Le paragraphe 2.3.4 considère une plaque de texture isotrope dont la densité de dislocations est hétérogène d'un grain à l'autre (qui pourrait être la conséquence d'une recristallisation partielle). Le paragraphe 2.3.5 présente des simulations en déformation plane et analyse l'incidence de la vitesse de déformation moyenne.

---

<sup>35</sup> Le rôle de l'anisotropie élastique seule dans la répartition initiale des déformations dans la plaque n'est pas analysé dans ce qui suit. L'influence de cet effet sur la limite élastique d'un polycristal est par exemple étudiée dans Brenner et al., 2009.

<sup>36</sup> Une définition mathématique de ce type de propriété a été proposée dans le cas de microstructures périodiques dont le comportement dérive d'une énergie potentielle. Une perte de stabilité de la réponse moyenne de tels matériaux peut être précédée par l'apparition de solutions stables dont le motif de base couvre plusieurs cellules élémentaires. Cette question n'est pas le sujet du présent paragraphe mais le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à Michel et al. (2007).

### 2.3.1. Conditions de simulation et outils d'analyse

On assimile, comme le font classiquement les approches macroscopiques, un élément d'enveloppe en expansion à une plaque en traction dans son plan<sup>37</sup>. La géométrie des plaques simulées dans ce qui suit est reproduite sur la figure 2.11 ; les dimensions dans les directions  $X$  et  $Y$  sont dix fois supérieures à l'épaisseur (direction  $Z$ ).

Des microstructures de 4000 grains et 50000 grains sont construites à l'aide de pavages de Voronoï dont les graines sont distribuées aléatoirement dans le volume de la plaque<sup>38</sup>. Des nombres moyens respectifs de 3 et 7 grains dans l'épaisseur de la plaque peuvent être estimés pour ces microstructures par le rapport entre l'épaisseur et le diamètre qu'auraient les grains s'ils étaient sphériques. Notons que les enveloppes dans lesquelles on cherche à étudier la localisation ont en général d'un à quelques millimètres d'épaisseur ; le cas à 4000 grains reproduirait donc une microstructure de très gros grains. Le cas à 50000 grains se rapproche davantage de microstructures plus usuelles, c'est pourquoi les deux cas présentent un intérêt au regard des applications.

100 orientations cristallines sont tirées aléatoirement dans toutes les directions de l'espace (numérotées de 0 à 99) et distribuées sur l'ensemble des grains de manière à générer, dans un premier temps, une texture isotrope. La procédure adoptée pour simuler une texture de compression sera détaillée au paragraphe 2.3.3.

Pour chaque nombre de grains, la simulation d'un seul tirage de graines de Voronoï et d'orientations cristallines est présentée dans ce qui suit. Un deuxième tirage de graines a également été testé qui a donné pour chaque cas des résultats très similaires en termes de chronologie et de temps caractéristiques du processus, même si les zones de localisation ne sont pas situées aux mêmes endroits.

On a utilisé la formulation locale (sans effet de gradients) de la loi de plasticité cristalline. La loi d'écrouissage retenue pour le tantale est celle tenant compte de la correction logarithmique pour les longueurs de segments de dislocation (relation (2.17) du paragraphe 2.1.1). Le modèle de stockage-restauration est donné par la relation (2.18) avec des libres parcours moyens dépendant du nombre de systèmes de glissement actifs (relations (2.19)). Les coefficients de la matrice d'interaction du tantale sont ceux fournis par Madec et Kubin (2017) ; ils sont rappelés dans Dequiedt et Denoual (2021). Les autres coefficients du modèle d'écrouissage sont donnés dans le tableau 2.11. Les vitesses de glissement sont gouvernées par la loi d'activation thermique (relations (2.22) et (2.23)) dont les paramètres sont donnés dans le tableau 2.12. Sauf mention

---

<sup>37</sup> Il a été montré par Mercier et Molinari (2004) que cette approximation était licite, du point de vue de l'analyse de la localisation, tant que l'épaisseur de l'enveloppe était faible devant ses rayons de courbure.

<sup>38</sup> On rappelle que le pavage de Voronoï consiste, à partir d'un ensemble de points (« graines »), à délimiter les zones de l'espace dans lesquelles on se trouve plus proches d'une des graines que de toutes les autres.

contraire au paragraphe 2.3.4, une densité de dislocations initiale  $\rho_0 = 10^{12} \text{ m}^{-2}$ , identique dans tous les grains, a été retenue dans cette étude (c'est un ordre de grandeur pertinent pour un polycristal non déformé).

**Tableau 2.11 :** Paramètres du modèle de la forêt (la contrainte  $\tau_0$  est supposée faible et prise arbitrairement à 1 MPa,  $\rho_{ref}$  est tirée de Devincere et al., 2006) et de la loi de stockage-restauration (Devincere et al., 2008).

$\gamma_c$	$\tau_0$ (MPa)	$b$ (m)	$\rho_{ref}$ ( $\text{m}^{-2}$ )	$k_{nc}$	$\kappa$	$p_0$	$k_0$
10 $b$	1	$2.86 \cdot 10^{-10}$	$10^{12}$	180	0.29	0.117	1.08

**Tableau 2.12 :** Paramètres de la loi d'activation thermique pour le tantale (Kothari and Anand, 1998).

$\dot{\gamma}_0$ ( $\text{s}^{-1}$ )	$\Delta F$ (J)	$s$ (MPa)	$p$	$q$
$1.73 \cdot 10^7$	$2.77 \cdot 10^{-19}$	400	0.28	1.34

Le chargement de la plaque est défini de la façon suivante. Un gradient de transformation  $\mathbf{F}_{plan}(t)$  évoluant linéairement en temps est imposé comme gradient de transformation moyen aux composantes du champ de déplacement dans le plan (cf. figure 2.11). Des conditions de périodicité sont imposées dans les directions  $X$  et  $Y$  de telle sorte que :

Pour  $\mathbf{X} = (-L_X/2, Y, Z)$  et  $\mathbf{X}^\# = (L_X/2, Y, Z)$  :

$$u_X(\mathbf{X}) - u_X(\mathbf{X}^\#) = \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{F}_{plan} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^\#) = L_X F_{XX}$$

$$u_Y(\mathbf{X}) - u_Y(\mathbf{X}^\#) = \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{F}_{plan} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^\#) = L_X F_{YX} = 0$$

$$u_Z(\mathbf{X}) - u_Z(\mathbf{X}^\#) = 0.$$

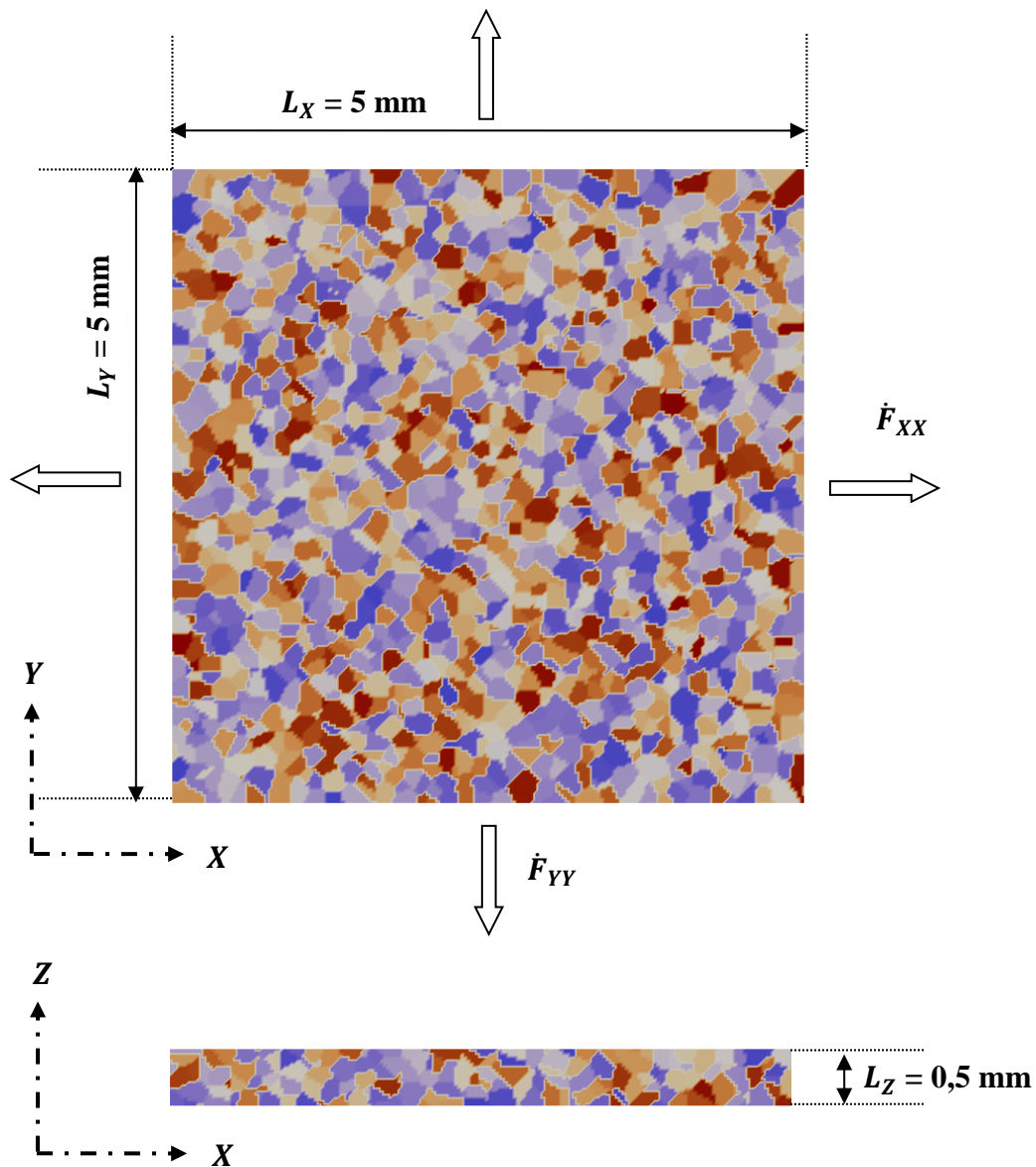
De même, pour  $\mathbf{Y} = (X, -L_Y/2, Z)$  et  $\mathbf{Y}^\# = (X, L_Y/2, Z)$  :

$$u_X(\mathbf{Y}) - u_X(\mathbf{Y}^\#) = \mathbf{e}_X \cdot \mathbf{F}_{plan} \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^\#) = L_Y F_{XY} = 0$$

$$u_Y(\mathbf{Y}) - u_Y(\mathbf{Y}^\#) = \mathbf{e}_Y \cdot \mathbf{F}_{plan} \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^\#) = L_Y F_{YY}$$

$$u_Z(\mathbf{Y}) - u_Z(\mathbf{Y}^\#) = 0. \tag{2.92}$$

Les faces supérieure et inférieure de la plaque sont libres de contraintes.



**Figure 2.11 :** Géométrie des plaques simulées et microstructure (un agrégat de 4000 grains est représenté ici) (a) plan médian ( $Z = 0$ ) et (b) section dans l'épaisseur ( $Y = 0$ ). La carte de couleurs représente les orientations cristallines.

Dans le cas de la traction equi-biaxiale :

$$\mathbf{F}_{plan}(t) = \begin{pmatrix} F_{XX}(t) \\ F_{YY}(t) = F_{XX}(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad F_{XX}(t) = 1 + \frac{t}{t_{max}} (\exp(\varepsilon_{max}^{biax}) - 1). \quad (2.93)$$

On se donne  $\varepsilon_{max}^{biax} = 0,5$  et  $t_{max} = 200 \mu s$  de telle sorte que  $\dot{F}_{XX} = \dot{F}_{YY}(t) = 3240 s^{-1}$  et  $F_{XX}(t_{max}) = F_{YY}(t_{max}) = 1,65$ .

Dans le cas de la déformation plane :

$$\mathbf{F}_{plane}(t) = \begin{pmatrix} F_{XX}(t) \\ F_{YY}(t) = 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad F_{XX}(t) = 1 + \frac{t}{t_{max}} (\exp(\varepsilon_{max}^{ps}) - 1). \quad (2.94)$$

On se donne  $\varepsilon_{max}^{ps} = 0.693$  de telle sorte que  $F_{XX}(t_{max}) = 2$ . Deux temps caractéristiques  $t_{max} = 200 \mu s$  et  $t_{max} = 40 \mu s$  ont été retenus de manière à simuler les deux vitesses d'extension  $\dot{F}_{XX}(t) = 5000 s^{-1}$  and  $\dot{F}_{XX}(t) = 25000 s^{-1}$ .

La répartition des déformations dans la structure au cours du temps est quantifiée au moyen de la norme de la composante déviatoire de la déformation logarithmique (dite déformation de Hencky) définie par :

$$\varepsilon^{dev} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^d = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \log(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}). \quad (2.95)$$

N.B. : le logarithme du tenseur de dilatations de Cauchy  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  se définit comme le tenseur formé par les logarithmes de ses valeurs propres ;  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  admettant une décomposition multiplicative entre une variation de volume et un tenseur de dilatations isochore,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  admet une décomposition additive entre une partie isostatique et une partie déviatoire.

A l'échelle d'un grain, les points faibles de l'agrégat, c'est-à-dire les points pour lesquels la déformation plastique est a priori la plus facile pour une contrainte appliquée donnée, sont ceux tels que :

- les cissions critiques des différents systèmes de glissement sont les plus faibles, autrement dit les densités de dislocations sont également les plus faibles,
- les cissions résolues sont les plus fortes, i.e. les systèmes de glissement sont les plus favorablement orientés par rapport à l'état de contrainte (directions et rapport des contraintes principales).

Une mesure de l'orientation plus ou moins favorable d'un système de glissement soumis à une contrainte uniaxiale  $\sigma$  est fournie par le facteur de Schmid qui est le rapport entre la cission résolue et la contrainte :

$$\eta^\alpha = \frac{|\tau^\alpha|}{\sigma}. \quad (2.96)$$

Une extension de la définition à une contrainte triaxiale consisterait à adopter le rapport entre la cission résolue et la contrainte de von Mises (qui jouerait alors le rôle de norme du tenseur de contrainte et qui est égale à la contrainte scalaire en contrainte uniaxiale) ; le glissement plastique s'exprimant sur la configuration relâchée, c'est à la contrainte  $\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \cdot \boldsymbol{\pi}_*$  qu'il faut appliquer la définition (cf. relation (2.12) du paragraphe 2.1.1) :

$$\eta^\alpha = \frac{|\tau^\alpha|}{\|\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \cdot \boldsymbol{\pi}_*\|_\sigma} \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{A}\|_\sigma = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{A}^d : \mathbf{A}^d} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^d = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{A}) \mathbf{1}. \quad (2.97)$$

On s'intéresse dans ce paragraphe à des chargements en déformation de grande amplitude (contrairement au cas des monocristaux qui est développé dans le paragraphe 2.2) pour lesquels on peut vérifier que les déformations élastiques sont inférieures d'un ordre de grandeur aux déformations plastiques ; en conséquence, on peut faire les approximations suivantes :

$$\mathbf{F}^e \approx \mathbf{R}^e, \quad \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \cdot \boldsymbol{\pi}_* \approx \boldsymbol{\pi}_* \quad \text{et} \quad \eta^\alpha \approx \frac{|\tau^\alpha|}{\|\boldsymbol{\pi}_*\|_\sigma}. \quad (2.98)$$

Si on prend maintenant en compte l'ensemble des systèmes de glissement actifs, on évalue le facteur de Schmid maximal défini par :

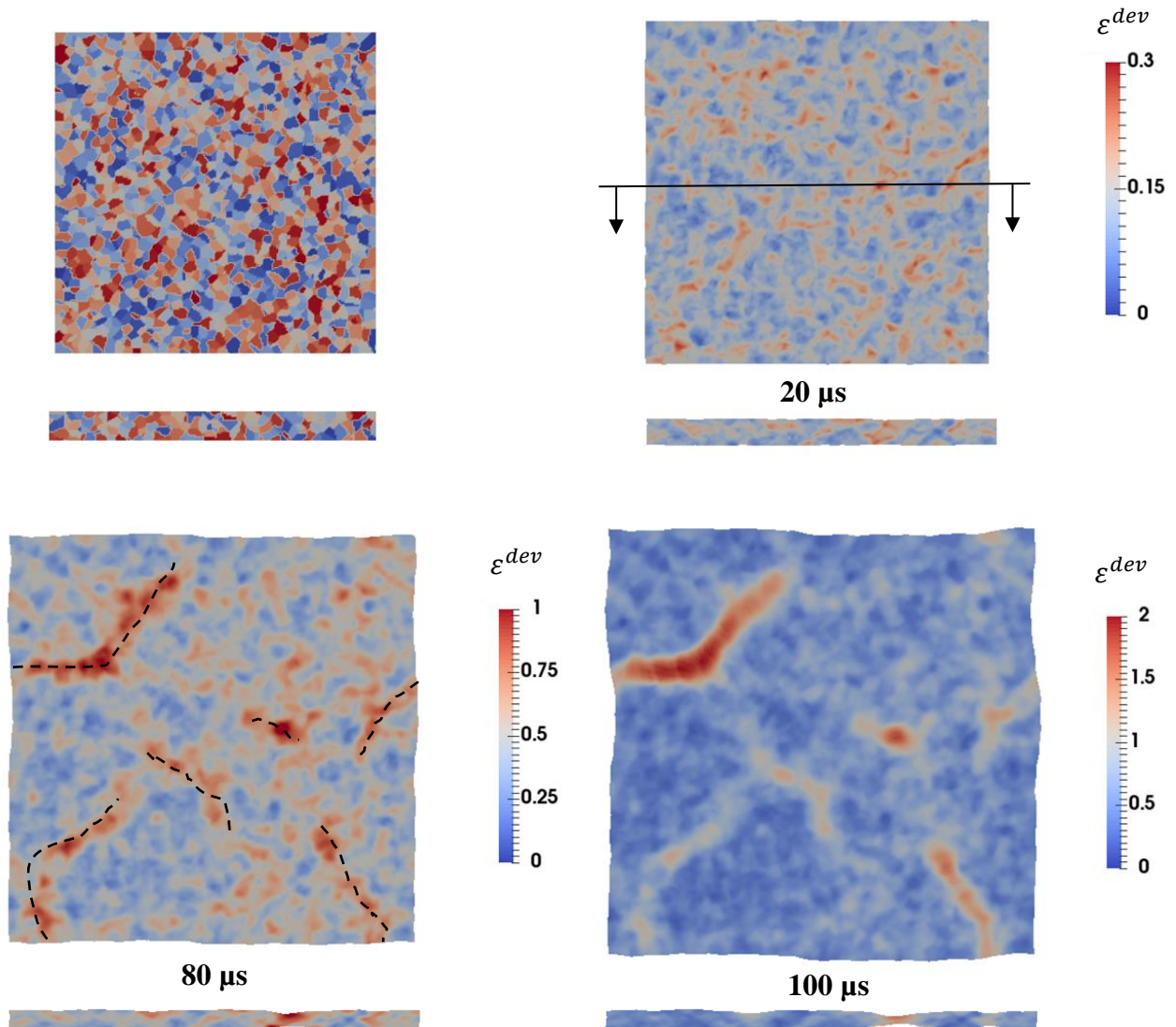
$$\eta_{max} = \max_\alpha (\eta^\alpha). \quad (2.99)$$

C'est cet indicateur qui est retenu dans la suite de ce paragraphe pour évaluer l'orientation favorable des grains par rapport au chargement.

### 2.3.2. Cas d'une plaque de texture isotrope en traction equi-biaxiale

La distribution des déformations à différents instants du chargement pour la plaque de 4000 grains montre une évolution progressive d'une organisation à l'échelle de la microstructure ( $t = 20 \mu\text{s}$ ) vers la formation de zones de concentration plus espacées ( $t = 80 \mu\text{s}$ ) dont quelques-unes accommodent in fine toute la déformation plastique ( $t = 100 \mu\text{s}$ ), celle-ci n'évoluant pour ainsi dire plus dans le reste de la plaque. Dans l'épaisseur, la déformation s'organise tout d'abord à 45 degrés environ de la fibre moyenne puis apparaissent des strictions aux lieux de concentration de la déformation repérés dans le plan médian (figure 2.12). Il semble donc que tout se passe comme si les points faibles de la microstructure constituaient des sites potentiels de localisation qui interagissaient ensuite par des phénomènes d'écrantage conduisant au

développement ultime de seuls quelques-uns d'entre eux ; la striction qui provoque, par réduction de l'épaisseur, une relaxation des forces tangentielles à résistance du matériau constante, est à même de générer des ondes de décharge dans la structure.



**Figure 2.12 :** Microstructure et cartes de la déformation déviatoire (déformation de Hencky)  $\varepsilon^{dev}$  pour la plaque de 4000 grains aux temps  $t = 20 \mu s$ ,  $80 \mu s$  et  $100 \mu s$  dans le plan médian et dans l'épaisseur (la position du plan de coupe est rappelée par la ligne continue avec les flèches). Les zones de concentration au temps  $t = 80 \mu s$  sont marquées par des lignes en tirets.

Le cas de la plaque de 50000 grains (figure 2.13) met en évidence une plus faible hétérogénéité du champ de déformations aux temps courts (à  $t = 20 \mu\text{s}$ ) et une localisation nettement plus tardive ( $t \approx 200 \mu\text{s}$ ). Il apparaît également une étape intermédiaire dans le processus avec l'émergence de fluctuations (visibles à  $t = 180 \mu\text{s}$ ) d'une longueur caractéristique de l'ordre de la dizaine de grains (donc de l'épaisseur de la plaque) précédant l'apparition de zones de concentration : cette longueur est proche de celle de la taille de motifs mis en évidence par des simulations à l'échelle macroscopique (présentés dans Dequiedt, 2010, par exemple) et renvoie à la notion de modes instables caractérisés par l'analyse linéaire de stabilité.

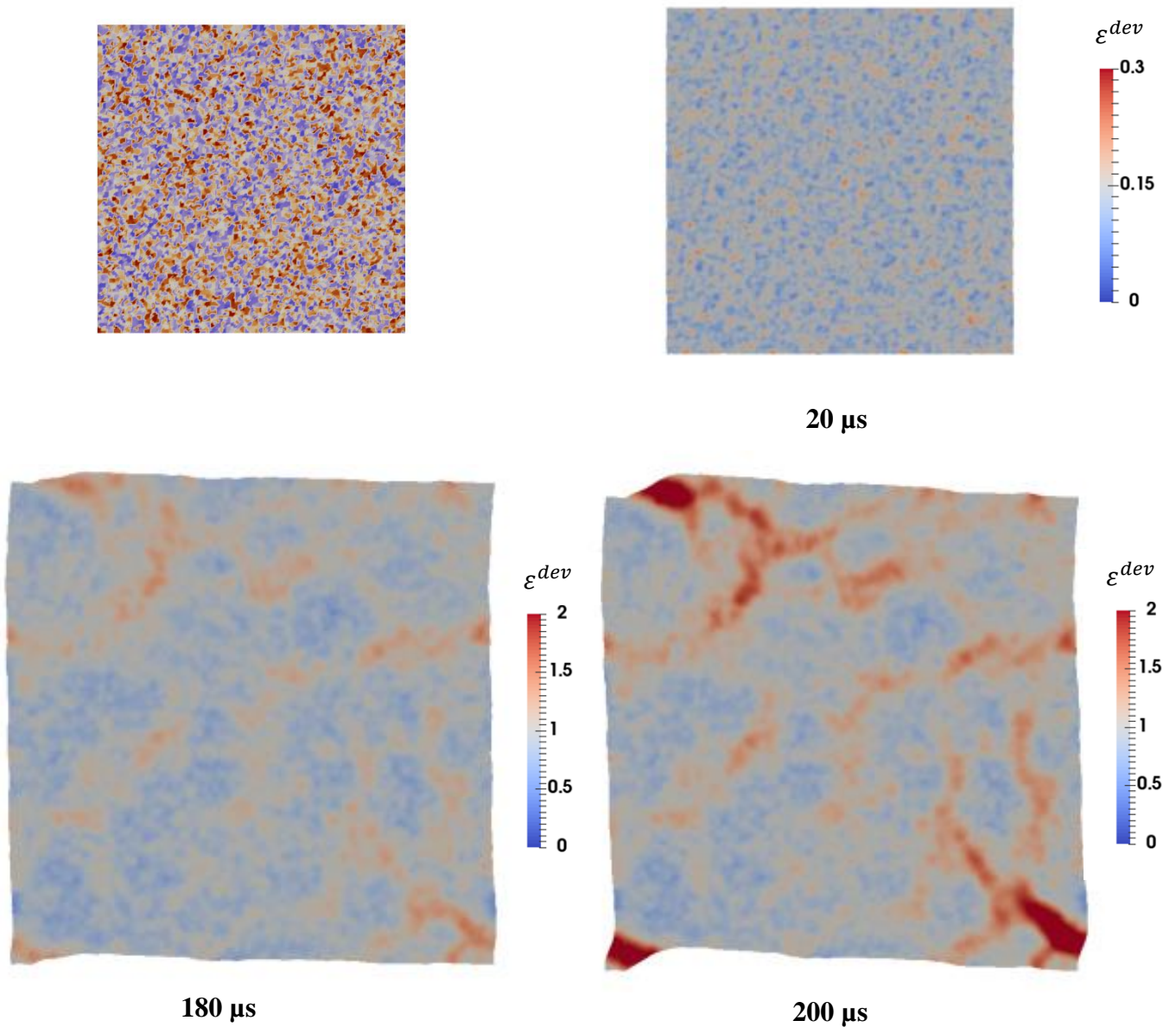


Figure 2.13 : Microstructure et cartes de déformation déviatoire  $\varepsilon^{dev}$  pour la plaque de 50000 grains aux temps  $t = 20 \mu\text{s}$ ,  $180 \mu\text{s}$  et  $200 \mu\text{s}$  dans le plan médian.



Le lien entre localisation et points faibles peut être précisé en mettant en évidence la corrélation entre facteur de Schmid maximal  $\eta_{max}$  et déformation  $\varepsilon^{dev}$  dans la plaque à l'aide de cartes de densité dans un plan  $(\varepsilon^{dev}, \eta_{max})$  à différents instants (la densité de dislocations initiale étant uniforme, les niveaux des cissions critiques n'entrent pas en ligne de compte au moins aux premiers instants du chargement). Ces graphes sont reportés sur les figures 2.14 et 2.15 pour les plaques de 4000 grains et 50000 grains.

Dans le cas de la plaque de 4000 grains, dès les temps courts ( $t = 20 \mu s$  sur la figure 2.14), le facteur de Schmid  $\eta_{max}$  tend à se concentrer autour de deux valeurs ; l'une autour de 0,3 et l'autre autour de 0,5, ce qui indique un début de texturation de la plaque. Il existe une corrélation partielle entre facteur de Schmid et déformation même si on trouve des déformations élevées y compris dans des grains de faible facteur de Schmid. Aux instants plus tardifs ( $t = 80 \mu s$  sur la figure 2.14), la texturation est encore un peu plus marquée mais la corrélation entre facteur de Schmid et déformation est légèrement plus faible. Cela est cohérent avec le fait que la distribution des déformations est affectée par la striction qui concentre la déformation sur une bande d'une largeur de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque (englobant donc nécessairement des grains de forts et de faibles facteurs de Schmid).

Les cartes de densité relatives à la plaque de 50000 grains présentent les mêmes caractéristiques avec une texturation forte dès  $t = 100 \mu s$ , autrement dit bien avant que n'apparaisse de la localisation marquée. Une analyse plus précise des orientations cristallines associées à cet instant (sur une droite de coupe) met en évidence une texture telle que celle obtenue après un laminage croisé (cf. Bhattacharyya et al., 2015, par exemple). Cette texture est principalement constituée de deux « fibres » (familles d'orientations cristallines) : une fibre  $\theta$  minoritaire pour laquelle un des axes de la maille cristalline est presque aligné avec la direction  $Z$  (notée en abrégé ND  $\parallel$  {001}, ND valant pour « normal direction », i.e. direction normale au plan de laminage), une fibre  $\gamma$  majoritaire pour laquelle la diagonale de la maille cristalline est presque alignée avec la direction  $Z$  (notée en abrégé ND  $\parallel$  {111}).

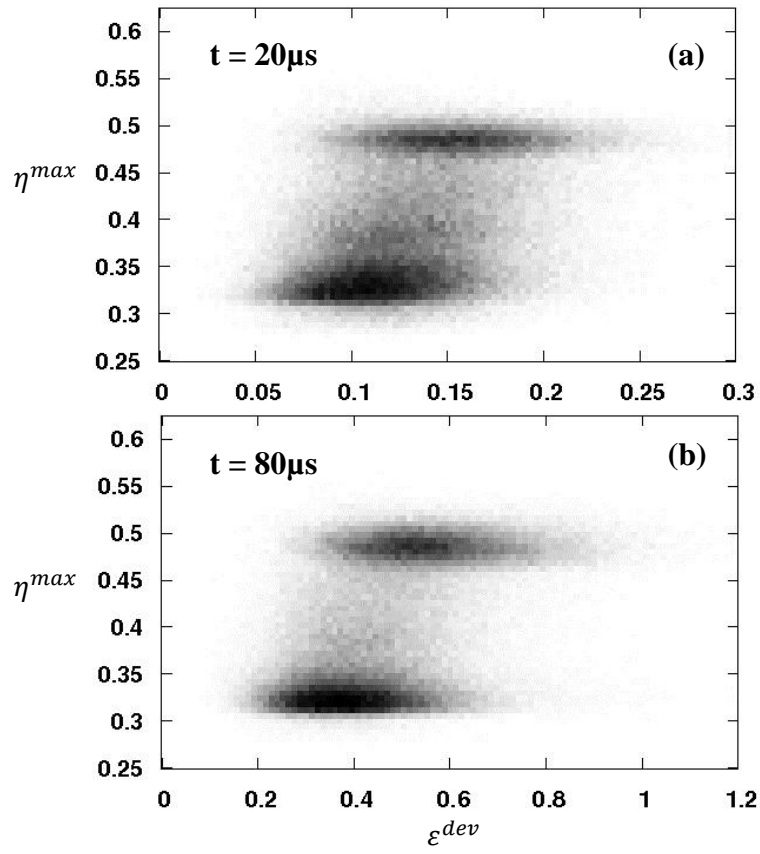


Figure 2.14 : Cartes de densité pour la plaque de 4000 grains dans un plan  $(\epsilon^{dev}, \eta_{max})$  aux instants (a)  $t = 20 \mu s$  et (b)  $t = 80 \mu s$ .

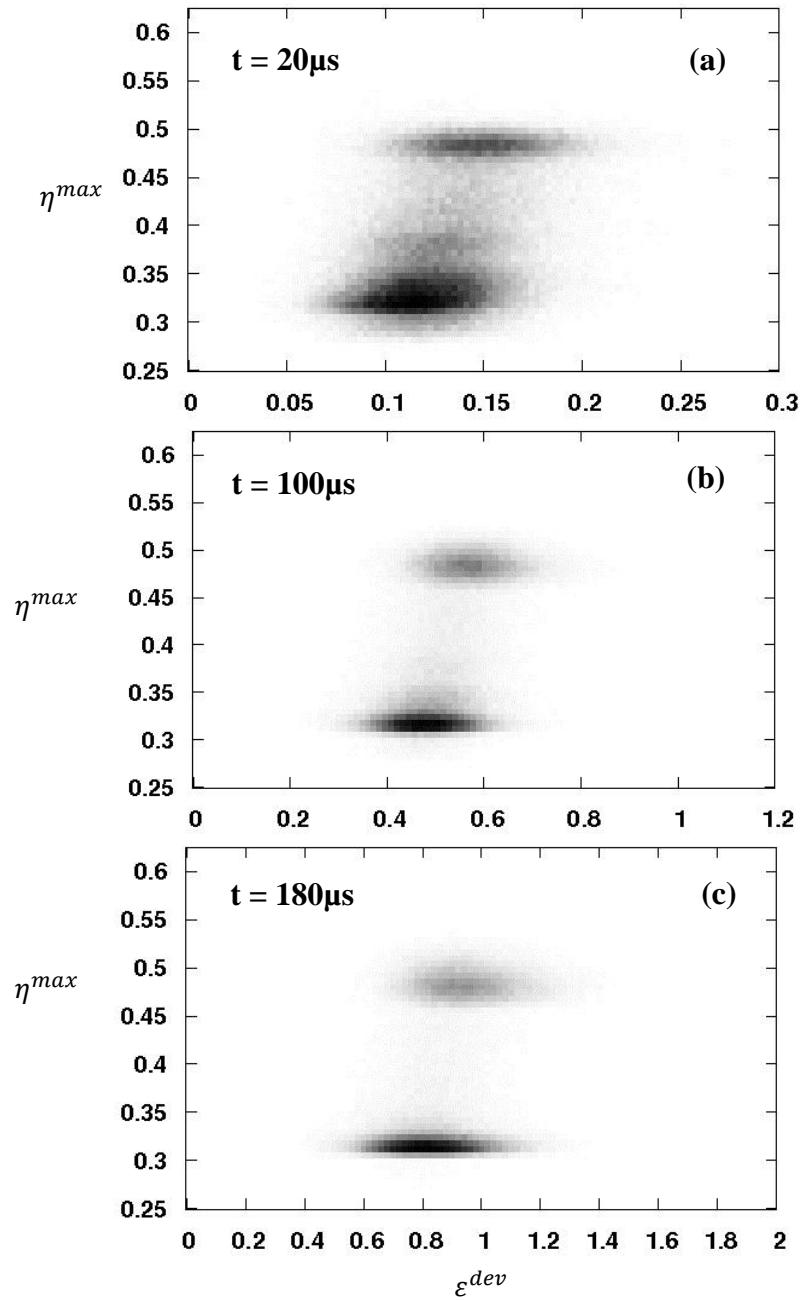


Figure 2.15 : Cartes de densité pour la plaque de 50000 grains dans un plan  $(\varepsilon^{dev}, \eta_{max})$  aux instants (a)  $t = 20 \mu s$ , (b)  $t = 100 \mu s$  and (c)  $t = 180 \mu s$ .

### 2.3.3. Cas d'une plaque pré-texturée

On vient de voir qu'une plaque sollicitée en traction équi-biaxiale développait une texture de type texture de laminage croisé. On s'intéresse maintenant à une plaque pour laquelle une telle texture préexiste, résultant par exemple des opérations de mise en forme. La reproduction de cette texture initiale se fait en simulant l'effet d'un laminage croisé, que l'on suppose équivalent à une compression uniaxiale dans la direction  $Z$ <sup>39</sup>, et en déduisant une rotation élastique pour chaque orientation cristalline. On obtient alors une nouvelle orientation pour chacun des grains de la plaque. Ce calcul préalable est réalisé en imposant une même pré-déformation  $\mathbf{F}_{predef}$ , à tous les grains (hypothèse de Taylor) qui vérifie :

$$\mathbf{F}_{predef} = \begin{pmatrix} \exp(\varepsilon_{predef}/2) & & \\ & \exp(\varepsilon_{predef}/2) & \\ & & \exp(-\varepsilon_{predef}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{predef} = 1,1. \quad (2.100)$$

Le chargement en traction équi-biaxiale de la plaque de 4000 grains texturée comparé à celui de la plaque isotrope met en évidence une hétérogénéité plus forte des déformations aux temps courts et une localisation qui apparaît plus tôt (cf. figure 2.16 (a) ; N.B. : le calcul diverge avant l'instant  $t = 100 \mu\text{s}$ ). Dans l'épaisseur de la plaque (non représentée ici), de la striction se développe comme dans le cas de la plaque isotrope.

On peut tenter d'expliquer cette forte hétérogénéité initiale de la manière suivante. Si on faisait l'approximation que la contrainte est équi-biaxiale dans tous les grains, aux grains appartenant aux fibres  $\theta$  et  $\gamma$  seraient associés des facteurs de Schmid moyens valant environ 0,47 et 0,32 respectivement. En d'autres termes, les grains de la fibre  $\theta$  sont beaucoup plus favorablement orientés et ce sont eux qui concentrent la déformation aux temps courts comme le montre la figure de pole de la figure 2.16(b) (à  $t = 20 \mu\text{s}$ ) : de cette coexistence entre facteurs de Schmid forts et faibles, il résulte des fluctuations de  $\varepsilon^{dev}$  de plus grande amplitude. Si on traçait les cartes de densités, on montrerait que les facteurs de Schmid évoluent peu au cours du chargement et on pourrait relier cette propriété à la stabilité des deux fibres  $\theta$  et  $\gamma$  en traction biaxiale.

---

<sup>39</sup> du moins en première approximation, les études précises montrant que l'effet d'un laminage croisé sur la texture dépendent en réalité de l'ordre des différentes passes, de leur amplitude et de leur orientation (cf. Deng et al., 2014)

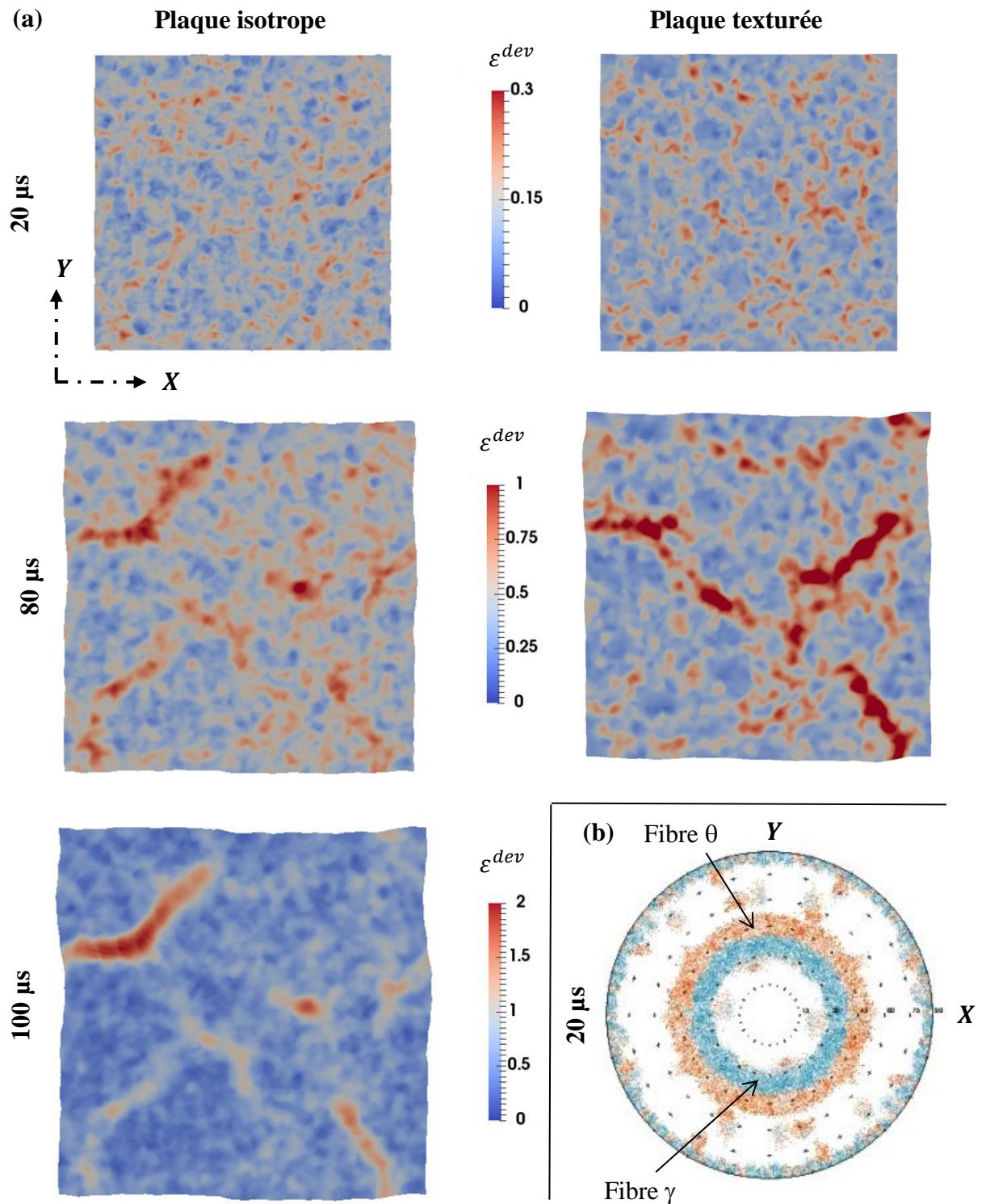


Figure 2.16 : (a) Cartes de la déformation déviatoire  $\varepsilon^{dev}$  dans le plan médian pour la plaque de 4000 grains texturée aux temps  $t = 20 \mu\text{s}$  et  $80 \mu\text{s}$  et comparaison avec le cas de la plaque isotrope. (b) carte de la déformation déviatoire  $\varepsilon^{dev}$  en projection stéréographique pour la plaque texturée a  $t = 20 \mu\text{s}$ .

#### 2.3.4. Cas d'une densité de dislocations hétérogène

Dans ce paragraphe, on reprend le cas de la plaque isotrope de 4000 grains mais on suppose maintenant que la densité initiale de dislocations est inhomogène dans l'agrégat. Plus précisément, on affecte à la moitié des orientations cristallines une densité  $\rho_0 = 10^8 \text{ m}^{-2}$  qui serait celles de grains complètement recristallisés ; on conserve dans les autres grains une densité  $\rho_0 = 10^{12} \text{ m}^{-2}$ .

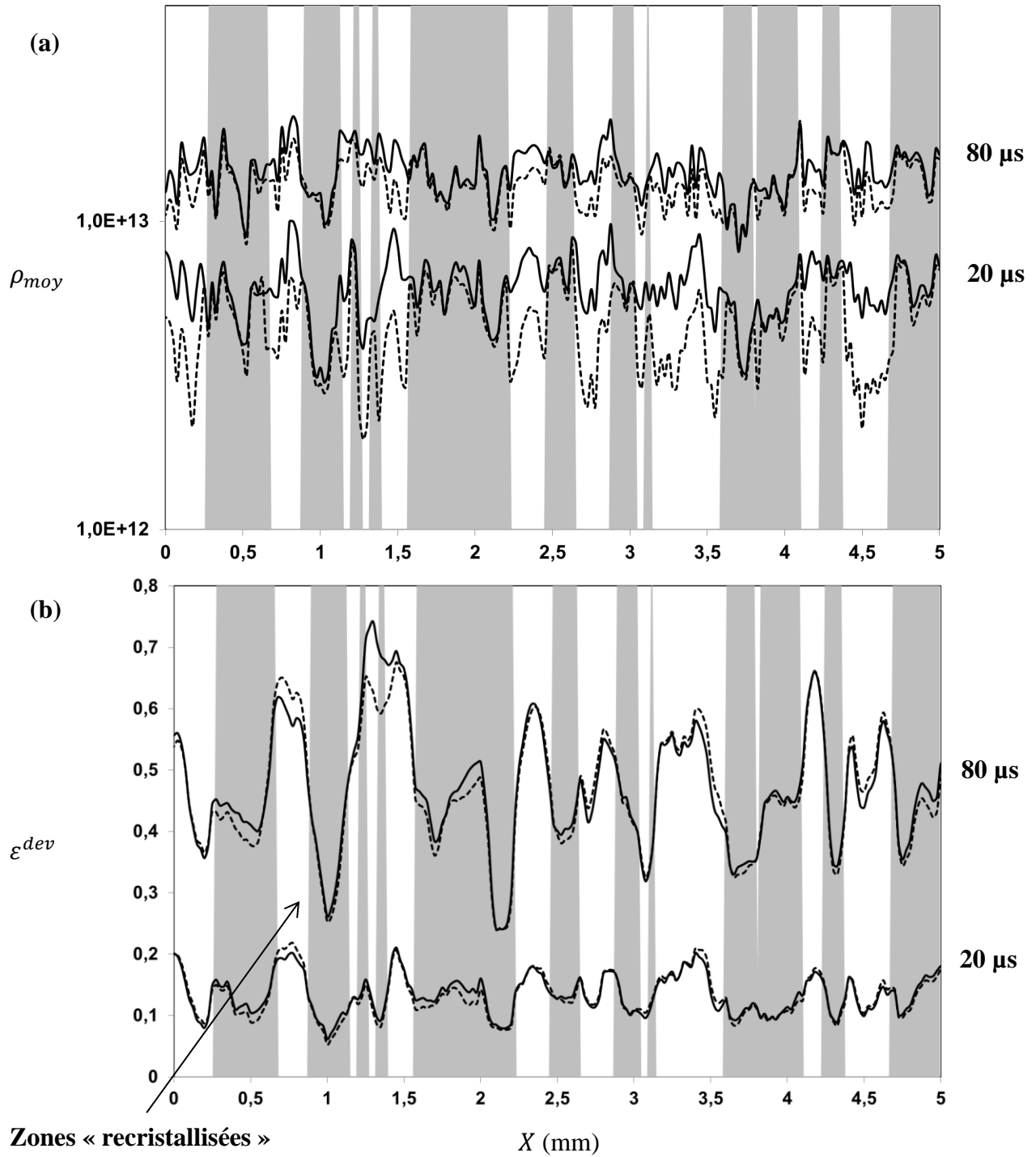
Les cartes de déformations à différents instants (non reportées ici) sont très semblables à celles obtenues pour le cas de référence avec une densité initiale de dislocations homogène, comme si la réponse de la structure était peu affectée par celle-ci.

Dans le cas présent, la notion de point faible est associée à la fois au facteur de Schmid moyen mais aussi à la densité de dislocations. De manière à préciser l'incidence de ce dernier paramètre sur la position des points concentrant la déformation, on trace sur la droite  $Y = L_Y/4, Z = 0$  les profils de  $\varepsilon^{dev}$  et de la densité moyenne de dislocations par système  $\rho_{moy}$ .

Ces courbes sont reportées sur la figure 2.17 pour les instants  $t = 20 \mu\text{s}$  et  $80 \mu\text{s}$ . A l'instant  $t = 20 \mu\text{s}$ , les grains « recristallisés » se distinguent par une densité  $\rho_{moy}$  encore sensiblement plus faible que celle relevée dans le cas de référence. A l'instant  $t = 80 \mu\text{s}$ , la différence entre les deux profils de densité est toutefois bien moindre ; autrement dit, la multiplication des dislocations avec la déformation plastique a fait en partie perdre mémoire de l'hétérogénéité de la densité initiale.

Les profils de  $\varepsilon^{dev}$  sont très proches entre les deux cas et pour les deux instants ; par ailleurs, il n'y a pas de corrélation systématique entre déformation plus forte et grains recristallisés. Cela indique que la densité de dislocation initiale n'est pas le paramètre qui contrôle la répartition des déformations dans la structure, même aux temps courts.

Contrairement au facteur de Schmid, la densité de dislocations est un paramètre qui tend à s'homogénéiser dans l'agrégat avec la déformation plastique ; sa valeur initiale affecte donc faiblement un processus qui se développe pour des quantités de déformations importantes.



**Figure 2.17 :** Profils (a) de densité moyenne de dislocations  $\rho_{moy}$  et (b) de déformation  $\epsilon^{dev}$  aux temps  $t = 20 \mu s$  et  $80 \mu s$  (lignes continues) le long de la droite  $Y = L_Y/4$ ,  $Z = 0$  pour la plaque de 4000 grains partiellement recrystallisée ; les zones correspondant aux grains non recrystallisés sont grisés sur le graphe. Les profils sont comparés à ceux obtenus pour le cas de référence (tirets).

### 2.3.5. Cas de la déformation plane et effet de la vitesse de déformation

Une sollicitation en déformation plane au taux de déformation  $\dot{F}_{XX}(t) = 5000 \text{ s}^{-1}$  met en évidence une hétérogénéité initialement tridimensionnelle des déformations qui évolue progressivement vers une ou deux zones de localisation avec une orientation privilégiée perpendiculairement à la direction de traction principale. Le phénomène est observé pour les deux tailles de grains (figures 2.18 et 2.19) : pour la plaque de 50000 grains, une seule zone quasiment alignée avec la direction  $Y$  perpendiculaire à la direction de traction est identifiée. Comme pour un chargement en traction équibi-axiale, la localisation apparaît plus tardivement pour la plaque de 50000 grains.

Lorsque l'on augmente la vitesse de déformation, la localisation apparaît pour des déformations plus importantes pour un nombre de grains donné. Les motifs de déformation au début du chargement sont très similaires. En revanche, plusieurs zones de localisation se développent jusqu'aux phases ultimes du processus ; si ces zones semblent plus régulières et alignées avec l'axe  $Y$  dans le cas de la plaque de 50000 grains, leur nombre semble peut dépendre du nombre de grains.

On peut analyser le phénomène de localisation de manière plus fine en traçant les profils de déformation à différents instants du chargement le long d'une droite de coupe : ces profils sont reportés sur la figure 2.20 pour la plaque de 50000 grains et les deux taux de déformation retenus. Au plus faible taux de déformation, jusqu'à un instant  $t = 60 \mu\text{s}$ , le profil initial s'amplifie en conservant sa forme générale. Il est toutefois affecté par une modulation de faible amplitude et de longueur d'onde sensiblement plus grande que la taille de grain qui pourrait s'apparenter à un mode d'instabilité de la plaque. Les instants ultérieurs du chargement sont caractérisés par le développement très rapide d'une seule zone de localisation couvrant plusieurs maxima locaux du profil initial. La déformation n'évolue en revanche quasiment plus dans le reste de la structure accréditant l'hypothèse selon laquelle cette dernière phase serait gouvernée par un processus d'écrantage qui inhibe le développement d'autres zones. Au plus fort taux de déformation, le développement de la modulation est beaucoup plus important et ce sont plusieurs de ses maxima qui continuent de se développer jusqu'à la phase de localisation finale. Tout se passe comme si les effets d'inertie favorisaient le développement d'un mode d'instabilité de structure ; par ailleurs, les ondes de relaxation de contrainte ayant moins de temps pour se propager, l'écrantage s'opère sur des distances plus courtes, ce qui permet vraisemblablement de conserver plusieurs zones de striction.



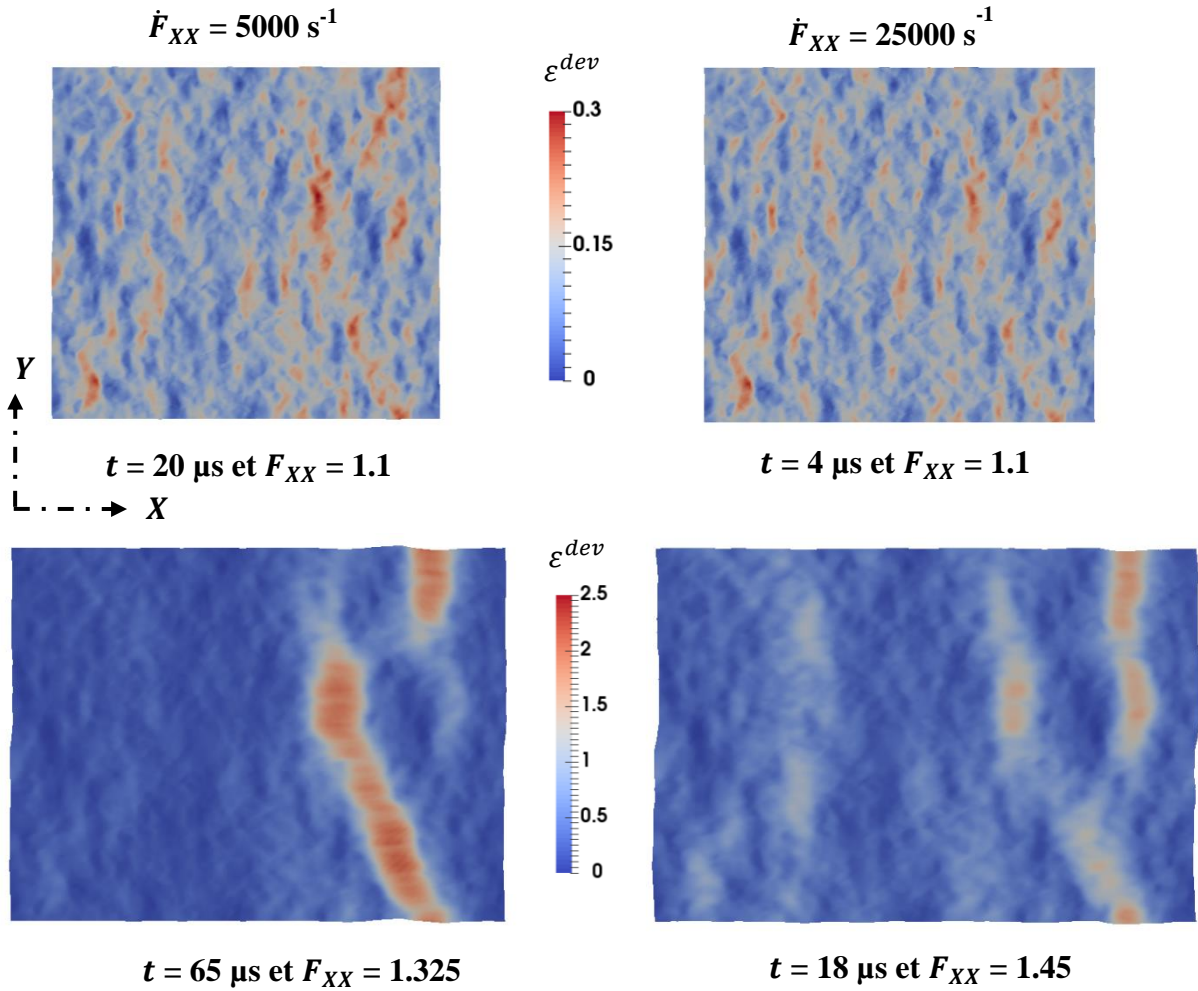


Figure 2.18 : Cartes de déformation déviatoire  $\varepsilon^{dev}$  dans le plan médian à différents instants pour la plaque de 4000 grains sollicitée en traction plane aux taux de déformation  $\dot{F}_{XX} = 5000 \text{ s}^{-1}$  et  $\dot{F}_{XX} = 25000 \text{ s}^{-1}$ .

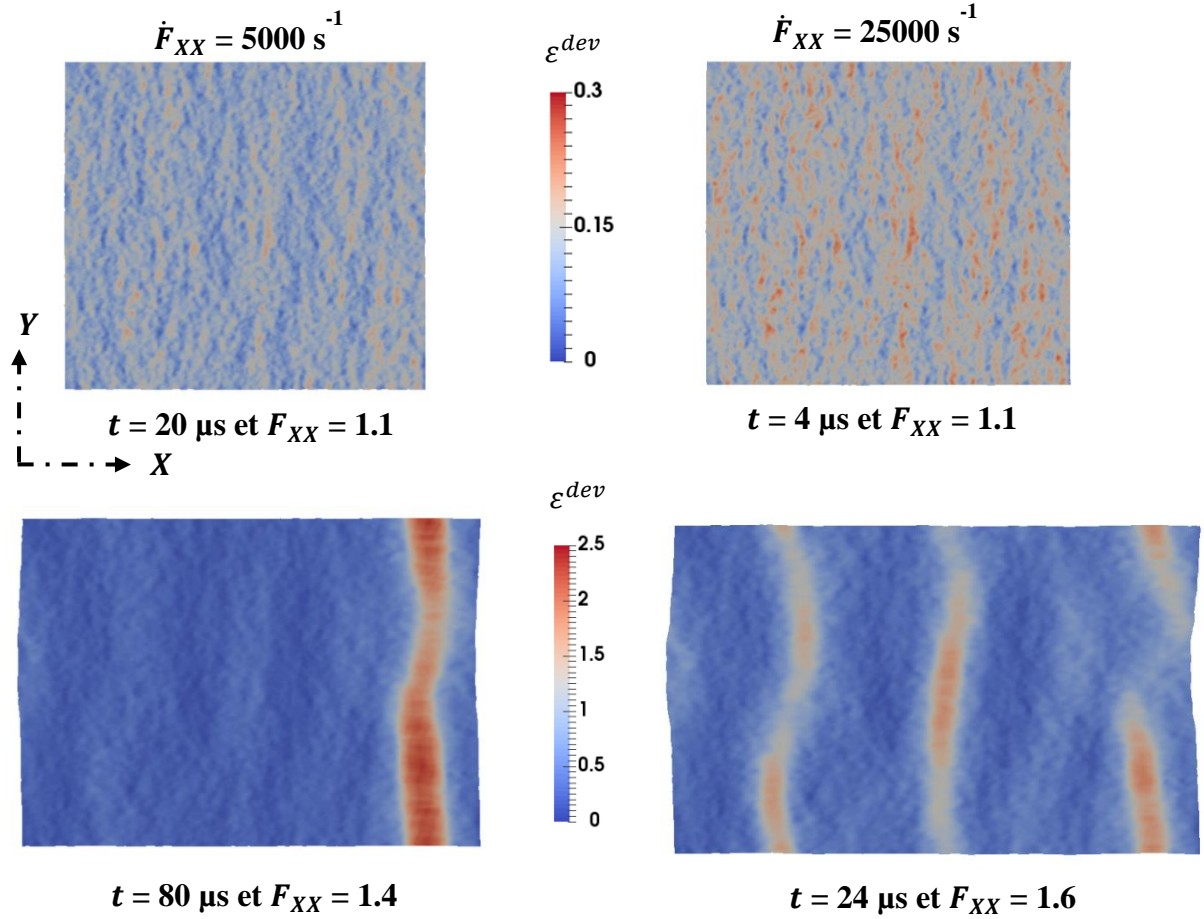


Figure 2.19 : Cartes de déformation déviatoire  $\varepsilon^{dev}$  dans le plan médian à différents instants pour la plaque de 50000 grains sollicitée en traction plane aux taux de déformation  $\dot{F}_{XX} = 5000 \text{ s}^{-1}$  et  $\dot{F}_{XX} = 25000 \text{ s}^{-1}$ .

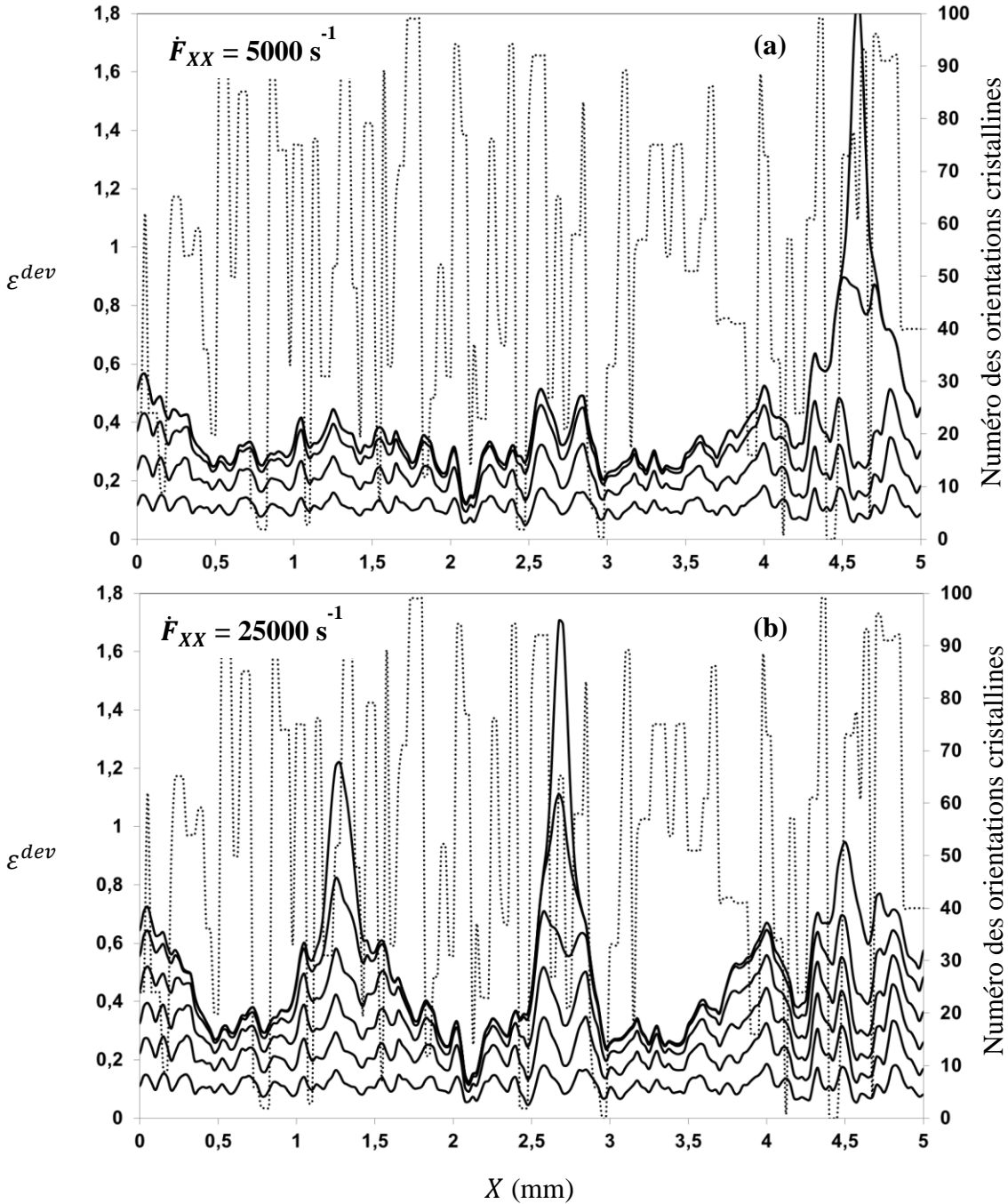


Figure 2.20 : Profils de déformation pour la plaque de 50000 grains le long de la droite de coupe  $Y = Z = 0$  et corrélation avec la microstructure (numéro de l'orientation cristalline tracé en pointillés pour visualiser les limites des grains) (a) aux temps  $t = 20 \mu\text{s}$ ,  $40 \mu\text{s}$ ,  $60 \mu\text{s}$ ,  $80 \mu\text{s}$  et  $90 \mu\text{s}$  pour le taux de déformation  $\dot{F}_{XX} = 5000 \text{ s}^{-1}$  et (b) aux temps  $t = 4 \mu\text{s}$ ,  $8 \mu\text{s}$ ,  $12 \mu\text{s}$ ,  $16 \mu\text{s}$ ,  $20 \mu\text{s}$  et  $24 \mu\text{s}$  pour le taux de déformation  $\dot{F}_{XX} = 25000 \text{ s}^{-1}$ .

### 2.3.6. Bilan de l'étude

La prise en compte de la microstructure dans la simulation de la localisation dans une plaque en traction met en évidence des effets qui ne sont pas accessibles à une approche purement macroscopique. L'hétérogénéité de la déformation à l'échelle des grains, qui est présente dès les premiers instants du fait de leurs orientations différentes et éventuellement de propriétés physiques locales, impacte l'organisation de la localisation aux instants plus tardifs. Toutefois, cet effet est moins net lorsque la séparation d'échelle entre le diamètre des grains est la taille de la structure est importante. On pourrait dire de manière très schématique que, dans le processus, entrent en compétition un effet de « maillon le plus faible » combiné à un effet d'interaction entre défauts de type « onde de Mott », dominant lorsqu'il y a très peu de grains dans l'épaisseur et que la vitesse de chargement est modérée, et un effet d'instabilité de structure dominant lorsque les grains sont plus petits et la vitesse de chargement plus élevée.

Parmi les caractéristiques microstructurales héritées du procédé d'élaboration de la pièce, la texture semble jouer un rôle important dans l'organisation de la déformation aux temps courts comme aux temps longs. Par ailleurs, la texturation de la plaque au cours de la sollicitation s'opère pour des déformations comparables à celles donnant naissance à de la localisation marquée, ce qui indique un probable couplage entre les deux phénomènes.

## 3. Perspectives

Dans ce chapitre sont proposés divers compléments aux thématiques de recherche présentées dans les chapitres précédents et que je souhaiterais développer. Ces différentes perspectives ont fait l'objet de réflexions préliminaires dont l'état d'avancement est plus ou moins grand : c'est pourquoi les paragraphes associés sont de tailles inégales.

### 3.1. Déformation des grains : ségrégation des systèmes dans les structures CC et HCP

A l'avenir, je me propose d'étendre l'analyse du phénomène de ségrégation des systèmes de glissement, menée pour la structure cubique à faces centrées (CFC), aux structures cristallines cubiques centrées (CC) et hexagonale compacte (HCP).

Comme on l'a vu au paragraphe 2.1.1, l'écroissage des monocristaux CC fait intervenir 17 types d'interactions entre les dislocations des différents systèmes de glissement (si l'on suppose que les systèmes mobile et forêt jouent des rôles symétriques). Les forces de ces interactions sont très diverses (cf. Madec et Kubin, 2017) : les coefficients associés aux interactions colinéaires sont d'un ordre de grandeur supérieur à ceux associés aux jonctions comme pour la structure CFC. Les coefficients associés aux jonctions encadrent le coefficient d'auto-écroissage. De ce fait, dans la structure CC, les conditions sont réunies pour que puissent se développer de la ségrégation pour certaines combinaisons de systèmes actifs. Une étude similaire à celle mise en œuvre au paragraphe 2.2, alliant simulation et analyse de stabilité est envisageable afin d'analyser cette question. En particulier :

- Lorsque les deux familles de systèmes  $\{110\}$  et  $\{112\}$  sont actives, il y a une redondance très forte ; en d'autres termes, il existe de nombreuses combinaisons de systèmes à même d'accommoder une déformation donnée. Parmi celles-ci, il est possible que le monocristal sous chargement en sélectionne une qui évite toutes les interactions fortes (qu'une approche telle que celle développée par Petryk et Kurasa (2013) justifierait comme une solution homogène d'énergie potentielle minimale) ; dans ce cas, on peut imaginer que l'on se trouve dans un cas de figure défavorable à la ségrégation.
- Une mobilité des dislocations plus difficile que dans le cas de la structure CFC induit une plus forte sensibilité du comportement aux vitesses de glissement (qui est traduite par la loi d'activation thermique (2.22)) ; Comme cela est mis en évidence à l'échelle macroscopique, celle-ci peut pénaliser la croissance rapide de modes de perturbation hétérogènes instables.

Le cas de la structure hexagonale compacte (HCP) est encore différent. Elle possède un nombre important de familles de systèmes mais parmi celles-ci, seules quelques-unes s'activent facilement. Le glissement basal est le mode de déformation dominant ; vient ensuite généralement le glissement prismatique ou, pour certains matériaux, le glissement pyramidal. L'accommodation d'une déformation imposée quelconque nécessite donc la combinaison de systèmes de glissement faciles et de systèmes dont l'activation est plus difficile. Enfin, le maillage s'active de manière plus fréquente que pour les structures cristallines CFC et CC. Par ailleurs, des coefficients d'interaction sont en cours d'évaluation par DD au CEA/DAM mais, de premières confrontations du modèle de Teodosiu à des essais de caractérisation de la littérature (parmi les travaux expérimentaux, on peut citer par exemple Akhtar et Teghtsoonian (1975) ou Wielke (1976)) montrent que la plasticité des monocristaux HCP n'est pas encore complètement comprise (stage de J. Plantefève). L'analyse de l'apparition de modes de déformation hétérogène nécessitera au préalable de clarifier ces différents points.

### 3.2. Texture et anisotropie

On a donné, au paragraphe 1.2, une illustration de l'incidence de l'anisotropie sur le développement de la localisation. De manière à pousser cette analyse plus loin, un travail a été engagé avec un collègue, Dominique Jouve, visant à prédire la localisation dans des plaques en mettant en œuvre une A.L.S. tridimensionnelle appliquée à un comportement à anisotropie évolutive s'appuyant sur des bases physiques. Comme on l'a vu au paragraphe 2.3, dans le cas d'un matériau métallique polycristallin, l'anisotropie initiale peut être due à l'existence d'une texture générée par le processus de mise en forme de la plaque considérée. L'anisotropie apparaissant au cours de la déformation résulte de l'émergence d'une texture induite par la rotation des grains, de l'anisotropie de l'écroutissage et éventuellement de l'allongement des grains dans les directions de chargement.

La mise en place d'une modélisation du comportement macroscopique prenant en compte ces effets s'appuie généralement sur la plasticité cristalline et les méthodes d'homogénéisation. La littérature sur le sujet est abondante. Sans prétendre à une bibliographie exhaustive, on peut identifier différents types d'études auxquelles il conviendra de se référer :

- Certaines études modélisent la réponse mécanique de polycristaux en mettant en œuvre à chaque pas de temps une procédure de localisation et d'homogénéisation. On relie ainsi le taux de contrainte moyen au taux de déformation moyen et on identifie, pour chaque orientation de grain, l'évolution de l'écroutissage et la rotation du réseau cristallin. Le modèle de Taylor (1938), qui fait l'hypothèse que le gradient de déformation est uniforme entre tous les grains et égal au gradient de déformation macroscopique, est mis en œuvre par de nombreux auteurs (Kalidindi et al., 1992, par exemple) ; Le modèle auto-cohérent de Berveiller et Zaoui (1979), qui fait l'hypothèse que chaque grain se comporte comme une inclusion dans un milieu infini dont la réponse mécanique est celle du polycristal moyen, est également largement utilisé : Molinari et al. (1997) comparent les résultats obtenus avec différentes variantes de ce modèle sur des matériaux CFC pour différents types de chargement. Notons qu'au moyen de ce type d'approche, il est possible d'identifier des conditions de bifurcation sur le module tangent macroscopique ainsi explicité (cf. par exemple Kuroda et Tvergaard, 2007 pour le modèle de Taylor et Franz et al., 2009, pour le modèle auto-cohérent).
- D'autres études proposent des méthodes d'identification de comportements relatifs à des textures fixes données, textures limites obtenues à l'issue d'opérations de mise en forme par exemple ; Arminjon et Bacroix (1990) construisent, par une approche de type « théorie des charges limites », une enveloppe extérieure de la surface de charge pour une fonction de distribution des orientations cristallines donnée et interpolent cette enveloppe par une surface de Hill orthotrope (Hill, 1948). Toth et al. (1996) calculent le potentiel

viscoplastique d'un polycristal en fonction de la distribution des orientations cristallines pour différentes textures caractéristiques.

- Divers études cherchent à caractériser la rotation des directions d'orthotropie pour un polycristal texturé sollicité hors de ces mêmes directions. Une première manière de faire est de construire une règle d'écoulement macroscopique qui fournisse, en plus de la vitesse de déformation plastique, une vitesse de rotation plastique, qui, soustraite à la vitesse de rotation totale, donne la vitesse de rotation élastique, i.e. celle des directions d'orthotropie. Une telle approche est proposée par exemple par Tong et al. (2004) qui assimile la rotation plastique du polycristal à celle d'un monocristal dont les systèmes de glissements actifs seraient définis en fonction des directions principales du chargement. Une autre manière consiste à appliquer une procédure de localisation à un agrégat polycristallin afin de calculer une rotation élastique par grain et d'assimiler la rotation élastique de l'agrégat à la rotation moyenne des grains en suivant une hypothèse de Mandel (1982) ; ce type d'approche, couplée à une démarche de ré-identification complète de la surface de charge à quelques instants du chargement, a été mise en œuvre par Peeters et al. (2001).

La mise en œuvre d'une approche de type A.L.S. nécessitera d'explicitier une loi de comportement macroscopique à anisotropie évolutive qui, à défaut d'être valable pour tout type de chargement, s'applique pour des chargements moyens à directions principales fixes et pour des chargement perturbés évoluant au voisinage de ces chargements moyens. La simulation d'agrégats bien choisis à l'aide du code de plasticité cristalline pourra fournir des éléments d'identification.

### 3.3. Extension de l'approche non locale aux transformations finies

L'introduction d'effets non-locaux dans le modèle de plasticité cristalline utilisé dans le code Coddex de la DAM, envisagée à terme, suppose d'étendre la formulation proposée dans le paragraphe 2.1.3 aux grandes transformations. Cette extension soulève quelques questions que l'on se propose d'aborder dans ce paragraphe.

La définition d'un tenseur densité de dislocations est reliée à l'expression du vecteur de Burgers associé au pourtour d'une surface élémentaire : si on note  $S_0$  cette surface définie sur la configuration initiale,  $\mathbf{e}_0$  sa normale et  $\partial S_0$  son pourtour, le vecteur de Burgers vérifie :

$$\mathbf{b}^p = \int_{\partial S_0} \mathbf{F}^p \cdot d\mathbf{X} = \text{Rot}(\mathbf{F}^p) \cdot \mathbf{e}_0 S_0 . \quad (3.1)$$

On peut également exprimer le vecteur de Burgers en considérant cette même surface sur la configuration finale :

$$\mathbf{b}^p = \int_{\partial S} \mathbf{F}^{e-1} \cdot d\mathbf{x} = \text{rot}(\mathbf{F}^{e-1}) \cdot \mathbf{e} S. \quad (3.2)$$

On obtient donc deux définitions possibles pour le tenseur  $\mathbf{G}$  associées respectivement à la configuration initiale et la configuration finale :

$$\mathbf{G}_0 = \text{Rot}(\mathbf{F}^p) \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \text{rot}(\mathbf{F}^{e-1}). \quad (3.3)$$

Dans la littérature, la première hypothèse est par exemple retenue par Dai (1997) et la seconde par Acharya et Bassani (2000).

Si l'on considère cette même surface sur la configuration relâchée :

$$\mathbf{e}_* S_* = \mathbf{F}^{p-T} \cdot \mathbf{e}_0 S_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_* S_* = \frac{1}{\text{Det}(\mathbf{F}^e)} \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{e} S. \quad (3.4)$$

On en déduit une définition de  $\mathbf{G}$  associée à la configuration relâchée, celle retenue par Cermelli et Gurtin (2001) :

$$\mathbf{G}_* = \text{Rot}(\mathbf{F}^p) \cdot \mathbf{F}^{pT} = \text{Det}(\mathbf{F}^e) \text{rot}(\mathbf{F}^{e-1}) \cdot \mathbf{F}^{e-T}. \quad (3.5)$$

Dans les relations précédentes, on a tenu compte du fait que la transformation plastique est isochore ( $\text{Det}(\mathbf{F}^p) = 1$ ). Dans le cas où les déformations élastiques sont négligeables ( $\mathbf{S}^e \approx \mathbf{1}$ , cf. équation (2.2)),  $\mathbf{G}_*$  s'exprime en fonction de la rotation du réseau :

$$\mathbf{G}_* = \text{rot}(\mathbf{R}^{e-1}) \cdot \mathbf{R}^e. \quad (3.6)$$

Une manière de justifier le choix de  $\mathbf{G}_*$  est d'exprimer le tenseur densité de dislocations en fonction de vecteurs densité  $\boldsymbol{\kappa}^\alpha$  sur chacun des systèmes. Les dislocations n'ont d'existence physique (en tant que fautes d'empilement) que sur la configuration finale et associent, à une surface élémentaire qu'elles percent sur cette même configuration, un vecteur de Burgers (i.e. une non-fermeture) sur la configuration relâchée. On peut donc écrire le tenseur défini par la relation (3.3)<sub>2</sub> sous la forme :

$$\mathbf{G} = \sum_\alpha b \mathbf{m}_0^\alpha \otimes \boldsymbol{\kappa}^\alpha, \quad (3.7)$$

dans laquelle le vecteur densité  $\boldsymbol{\kappa}^\alpha$  est porté par des vecteurs matériels du réseau cristallin déformé. Par ailleurs, d'après (3.5), le tenseur  $\mathbf{G}_*$  s'écrit :

$$\mathbf{G}_* = \sum_\alpha b \mathbf{m}_0^\alpha \otimes \boldsymbol{\kappa}_*^\alpha \quad \text{tel que} \quad \boldsymbol{\kappa}_*^\alpha = \text{Det}(\mathbf{F}^e) \mathbf{F}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\kappa}^\alpha. \quad (3.8)$$

$\boldsymbol{\kappa}_*^\alpha$  est un vecteur densité écrit sur la configuration relâchée donc porté par des vecteurs matériels du réseau non-déformé.



Comme on va le voir plus loin, il est composé de densités polaires coin  $\kappa_c^\alpha$  et vis  $\kappa_v^\alpha$  dans le plan de glissement mais peut également comporter une composante  $\kappa_n^\alpha$  hors plan (introduite par Arsenlis et al., 2004 ou Ma et al., 2006) :

$$\mathbf{\kappa}_*^\alpha = \kappa_c^\alpha \mathbf{p}_0^\alpha + \kappa_v^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha + \kappa_n^\alpha \mathbf{n}_0^\alpha. \quad (3.9)$$

En conséquence, l'évolution de  $\mathbf{G}_*$  dépend exclusivement de l'évolution des densités polaires les vecteurs  $\mathbf{m}_0^\alpha$ ,  $\mathbf{n}_0^\alpha$  et  $\mathbf{p}_0^\alpha$  étant invariants avec la déformation, ce qui justifie de se donner une énergie libre  $\Psi$  fonction de cette grandeur.

L'évolution de  $\mathbf{G}_*$  s'écrit en fonction de celle de  $\mathbf{F}^p$  sous la forme :

$$\dot{\mathbf{G}}_* = \text{Rot}(\dot{\mathbf{F}}^p) \cdot \mathbf{F}^{pT} + \text{Rot}(\mathbf{F}^p) \cdot \dot{\mathbf{F}}^{pT} = \text{Rot}(\mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^p) \cdot \mathbf{F}^{pT} + \mathbf{G}_* \cdot \mathbf{L}^{pT}. \quad (3.10)$$

On peut reformuler la relation (3.10) en utilisant les dérivées spatiales sur la configuration relâchée que l'on indice (\*). On peut montrer en effet que :

$$\text{Rot}(\mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^p) \cdot \mathbf{F}^{pT} = \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p) + \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{G}_*, \quad (3.11)$$

d'où :

$$\dot{\mathbf{G}}_* = \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p) + \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{G}_* + \mathbf{G}_* \cdot \mathbf{L}^{pT}. \quad (3.12)$$

Le premier terme de cette relation, qui peut s'exprimer comme un terme de flux sur la configuration relâchée, est fonction des gradients de glissement sur cette même configuration :

$$\begin{aligned} \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p) &= -\text{Div}_*(\mathbf{L}^p \times) = \sum_\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \otimes (\text{Grad}_*(\dot{\gamma}^\alpha) \times \mathbf{n}_0^\alpha) \\ &= \sum_\alpha -(\text{Grad}_*(\dot{\gamma}^\alpha) \cdot \mathbf{m}_0^\alpha) \mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{p}_0^\alpha + (\text{Grad}_*(\dot{\gamma}^\alpha) \cdot \mathbf{p}_0^\alpha) \mathbf{m}_0^\alpha \otimes \mathbf{m}_0^\alpha. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le flux sortant de  $\mathbf{G}_*$  à travers une surface unitaire de normale  $\mathbf{n}_*$  (sur la configuration relâchée) peut être défini par  $\mathbf{L}^p \times \mathbf{n}_*$ .

Les deux autres termes de la relation (3.12) sont des termes de sources qui ont pour conséquence que, en grandes transformations, le tenseur densité de dislocations peut évoluer même dans un champ de vitesses de glissement uniforme. Le second terme est lié à l'apparition de densités polaires lorsque les dislocations mobiles assurant le glissement sur un système évoluent dans un élément de matière dans lequel le tenseur de Burgers est non-nul (des illustrations sur des cas de figure simples sont donnés dans Arsenlis et al., 2004) :

$$\mathbf{L}^p \cdot \mathbf{G}_* = \sum_\alpha \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{m}_0^\alpha \otimes (\mathbf{n}_0^\alpha \cdot \mathbf{G}_*). \quad (3.14)$$

Le troisième terme peut s'interpréter assez facilement comme provenant de la déformation des lignes de dislocations (contribuant à la densité polaire) dans le champ de vitesses de déformation plastique :

$$\mathbf{G}_* \cdot \mathbf{L}^{pT} = \sum_{\alpha} b \mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes (\mathbf{L}^p \cdot \boldsymbol{\kappa}_*^{\alpha}). \quad (3.15)$$

N.B. : On pourrait relier, comme on l'a fait en établissant les relations (2.58), l'évolution des densités polaires aux glissements et gradients de glissement. Cela reviendrait à identifier terme à terme les deux membres de l'égalité (3.12) ; cette opération, développée par Arsenlis et al. (2004), justifie l'existence de la densité hors plan  $\kappa_n^{\alpha}$ .

Comme en petites déformations, l'écriture des relations de comportement non-locales nécessite d'une part de définir des microforces (au moyen du principe des puissances virtuelles étendu) puis de les dériver de l'expression d'une énergie libre (si on suppose que la partie non locale du comportement est non-dissipative).

De manière à rester cohérent avec les relations (2.4) et (2.5) du paragraphe 2.1.1, il convient d'écrire le principe des puissances virtuelles étendu de Gurtin et co-auteurs sur la configuration initiale<sup>40</sup>. Dans le cas où l'énergie libre est fonction de  $\mathbf{G}_*$ , les microforces volumiques qui s'opposent aux gradients de glissement développent une puissance mécanique sur  $\text{Rot}_*(\mathbf{L}^p)$  ; il faut en revanche « rapatrier » cette grandeur sur la configuration initiale, ce qui donne  $\mathbf{F}^{p-1} \cdot \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p) \cdot \mathbf{F}^{p-T}$ <sup>41</sup>. Les microforces surfaciques s'opposent aux flux sortants de  $\mathbf{G}_*$  c'est-à-dire à  $(\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^p) \times \mathbf{N}$  une fois ce flux rapatrié sur la configuration initiale. La puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit alors :

$$W_{int}(\hat{\mathbf{V}}) = - \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{P} : (\hat{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^p) + \sum_{\alpha} \pi^{\alpha} \hat{\gamma}^{\alpha} + \mathbf{T} : (\mathbf{F}^{p-1} \cdot \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p) \cdot \mathbf{F}^{p-T}) \right) d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\Xi} : ((\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^p) \times \mathbf{N}) da_0 \quad (3.16)$$

Les deux grandeurs définies plus haut s'expriment en fonction des gradients de glissement sur la configuration initiale, des glissements en surface et des directions de glissement et normales aux plans de glissement rapatriées sur la configuration initiale. En effet :

$$\text{Grad}(\dot{\gamma}^{\alpha}) = \mathbf{F}^{pT} \cdot \text{Grad}_*(\dot{\gamma}^{\alpha}), \quad (3.17)$$

<sup>40</sup> Précisons que l'on peut définir des grandeurs locales et leurs dérivées spatiales sur la configuration relâchée mais que cela n'a en revanche pas de sens d'y écrire des intégrales de volume puisque la matière n'est pas continue.

<sup>41</sup> Si on voulait présenter les choses de façon tout à fait complète, il faudrait dire qu'un tenseur densité de dislocations (ou sa dérivée en temps) est une application linéaire qui associe à un élément de surface un vecteur de Burgers qui est un vecteur matériel ; un tel tenseur est donc deux fois covariant. On mènerait un raisonnement analogue pour le tenseur  $\mathbf{L}^p$  qui est, lui, covariant-contravariant.

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{p-1} \cdot \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p) \cdot \mathbf{F}^{p-T} &= \sum_{\alpha} (\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{m}_0^{\alpha}) \otimes (\text{Grad}(\dot{\gamma}^{\alpha}) \times (\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{n}_0^{\alpha})), \\ \mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{L}^p \cdot \mathbf{F}^p &= \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} (\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{m}_0^{\alpha}) \otimes (\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{n}_0^{\alpha}).\end{aligned}\quad (3.18)$$

La règle d'écoulement et les conditions de bords sur les microforces, qui se déduisent de l'intégration du principe des puissances virtuelles, prennent la forme suivante (la cission résolue  $\tau^{\alpha}$  est définie par la relation (2.12)<sub>2</sub>) :

$$\begin{aligned}\tau^{\alpha} &= \pi^{\alpha} + \text{Div} \left( ((\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{m}_0^{\alpha}) \cdot \mathbf{T}) \times (\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{n}_0^{\alpha}) \right) \quad \text{sur } \Omega_0, \\ (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) &: ((\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{m}_0^{\alpha}) \otimes (\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{n}_0^{\alpha})) = (\mathbf{\Xi} \times \mathbf{N}) : ((\mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{m}_0^{\alpha}) \otimes (\mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{n}_0^{\alpha})) \\ &\quad \text{sur } \partial\Omega_0.\end{aligned}\quad (3.19)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (2.50) donne, en tenant compte de la réversibilité du comportement élastique :

$$\mathcal{D} = \sum_{\alpha} \pi^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} + \mathbf{T} : (\mathbf{F}^{p-1} \cdot \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p) \cdot \mathbf{F}^{p-T}) - \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}_*} : \dot{\mathbf{G}}_* \geq 0. \quad (3.20)$$

En vertu des relations (3.12) et (3.13), la dissipation s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \sum_{\alpha} \left( \pi^{\alpha} - \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}_*} : (\mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes (\mathbf{n}_0^{\alpha} \cdot \mathbf{G}_*) + (\mathbf{G}_* \cdot \mathbf{n}_0^{\alpha}) \otimes \mathbf{m}_0^{\alpha}) \right) \dot{\gamma}^{\alpha} \\ &+ \left( \mathbf{F}^{p-T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{p-1} - \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}_*} \right) : \text{Rot}_*(\mathbf{L}^p).\end{aligned}\quad (3.21)$$

Si on fait l'hypothèse que la dissipation n'est fonction que de l'état d'érouissage et de la vitesse de glissement (i.e. indépendante de tout ce qui est lié aux effets non-locaux) :

$$\begin{aligned}\pi^{\alpha} - \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}_*} : (\mathbf{m}_0^{\alpha} \otimes (\mathbf{n}_0^{\alpha} \cdot \mathbf{G}_*) + (\mathbf{G}_* \cdot \mathbf{n}_0^{\alpha}) \otimes \mathbf{m}_0^{\alpha}) &= \tau_c^{\alpha} \left( \frac{|\dot{\gamma}^{\alpha}|}{\dot{\gamma}_0} \right)^m \text{sgn}(\dot{\gamma}^{\alpha}), \\ \mathbf{T} &= \mathbf{F}^{pT} \cdot \frac{d\Psi}{d\mathbf{G}_*} \cdot \mathbf{F}^p.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Il ressort notamment de ces relations un couplage entre les effets locaux et non-locaux en grandes transformations : la composante locale  $\pi^{\alpha}$  de la contrainte d'écoulement dépend de l'état d'érouissage local mais également des densités polaires à travers le tenseur  $\mathbf{G}_*$ .

### 3.4. Modèles non-locaux et joints de grains

Sauf mention contraire en fin de paragraphe, on se place dans le cadre des petites déformations. Si on néglige leur épaisseur, les joints de grains constituent des interfaces sur lesquelles il convient, pour les formulations non-locales, d'écrire des conditions de bord faisant intervenir les microforces et les flux de dislocations de part et d'autre. On note  $\Sigma$  une telle interface, A et B les deux grains qu'elle sépare et  $\mathbf{n}_\Sigma$  sa normale en adoptant la convention de l'orienter de A vers B.

Une première hypothèse possible est de considérer que le joint se comporte comme une surface microscopiquement rigide vis-à-vis de chacun des deux grains. Dans ce cas, une condition de flux nul est satisfaite de part et d'autre et s'exprime sous la forme suivante si l'on retient une formulation non-locale faisant intervenir le tenseur  $\mathbf{G}$  (on indice par A et B les grandeurs relatives à chacun des grains dans tout ce qui suit) :

$$\dot{\mathbf{U}}_A^p \times \mathbf{n}_\Sigma = \dot{\mathbf{U}}_B^p \times \mathbf{n}_\Sigma = 0. \quad (3.23)$$

Une deuxième manière de procéder, développée par Gurtin (2008a), est de définir un tenseur densité de dislocations surfacique  $\mathbf{G}_\Sigma$  sur le joint de grain dont l'évolution est associée aux flux de part et d'autre<sup>42</sup>. A ce tenseur, on associe une énergie libre de laquelle on dérive des microforces surfaciques.

Plus précisément, considérons une boucle  $\partial S$  enjambant le joint de grain, de normale  $\mathbf{e}_\Sigma$  tangente au joint, de largeur infinitésimale dans la direction  $\mathbf{n}_\Sigma$  et d'extension  $\ell$  dans la direction perpendiculaire (figure 3.1).

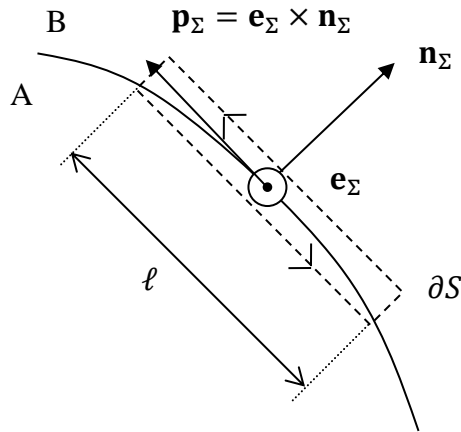


Figure 3.1 : Boucle  $\partial S$  à cheval sur un joint de grain et définition du tenseur densité de dislocations surfacique  $\mathbf{G}_\Sigma$ .

<sup>42</sup> Définir des densités polaires par système sur le joint n'est possible qu'à condition d'associer au joint une orientation du réseau cristallin (qui n'a pas plus de raison d'être celle du grain A que celle du grain B).

On définit  $\mathbf{G}_\Sigma$  de telle sorte que le vecteur de Burgers associé à cette boucle s'écrive  $(\mathbf{G}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_\Sigma \ell)$ . Puisque ce vecteur vérifie :

$$(\mathbf{G}_\Sigma \cdot \mathbf{e}_\Sigma \ell) = \ell(\mathbf{U}_B^p \cdot \mathbf{p}_\Sigma - \mathbf{U}_A^p \cdot \mathbf{p}_\Sigma) = \ell(\mathbf{U}_B^p - \mathbf{U}_A^p) \cdot (\mathbf{e}_\Sigma \times \mathbf{n}_\Sigma) = \ell \left( (\mathbf{U}_A^p - \mathbf{U}_B^p) \times \mathbf{n}_\Sigma \right) \cdot \mathbf{e}_\Sigma, \quad (3.24)$$

le tenseur  $\mathbf{G}_\Sigma$  peut se définir par :

$$\mathbf{G}_\Sigma = (\mathbf{U}_A^p - \mathbf{U}_B^p) \times \mathbf{n}_\Sigma, \quad (3.25)$$

La continuité du champ de déplacement au joint implique que  $(\mathbf{U}_A - \mathbf{U}_B) \times \mathbf{n}_\Sigma = 0$  et on peut également exprimer  $\mathbf{G}_\Sigma$  en fonction des transformations élastiques :

$$\mathbf{G}_\Sigma = -(\mathbf{U}_A^e - \mathbf{U}_B^e) \times \mathbf{n}_\Sigma. \quad (3.26)$$

On suppose qu'il existe dans le joint des microforces surfaciques qui s'opposent à l'augmentation de  $\mathbf{G}_\Sigma$  et on définit la puissance virtuelle associée par :

$$W_{int_\Sigma}(\hat{\gamma}_A^\alpha, \hat{\gamma}_B^\alpha) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{\Xi}_\Sigma : \left( (\hat{\mathbf{U}}_A^p - \hat{\mathbf{U}}_B^p) \times \mathbf{n}_\Sigma \right) da = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{\Xi}_\Sigma \times \mathbf{n}_\Sigma) : \left( \hat{\mathbf{U}}_A^p - \hat{\mathbf{U}}_B^p \right) da. \quad (3.27)$$

L'application du principe des puissances virtuelles à un volume de matière englobant les deux grains A et B et le joint  $\Sigma$  fournit, en plus de l'équilibre des efforts et de la règle d'écoulement non-locale (2.47)<sub>1</sub> dans chacun des grains, des relations supplémentaires sur le joint. Plus précisément, on exprime la puissance des efforts intérieurs dans chacun des grains sous la forme de la partie volumique de la relation (2.44)<sup>43</sup> et on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de saut de déplacement possible au joint, i.e. que le champ de vitesse y est continu,  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$ . Dans ce cas, on établit les relations :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \mathbf{n}_\Sigma &= \boldsymbol{\sigma}_B \cdot \mathbf{n}_\Sigma, \\ (\mathbf{T}_A \times \mathbf{n}_\Sigma) : (\mathbf{m}_{0A}^\alpha \otimes \mathbf{n}_{0A}^\alpha) &= (\mathbf{\Xi}_\Sigma \times \mathbf{n}_\Sigma) : (\mathbf{m}_{0A}^\alpha \otimes \mathbf{n}_{0A}^\alpha) \quad \text{et} \\ (\mathbf{T}_B \times \mathbf{n}_\Sigma) : (\mathbf{m}_{0B}^\alpha \otimes \mathbf{n}_{0B}^\alpha) &= (\mathbf{\Xi}_\Sigma \times \mathbf{n}_\Sigma) : (\mathbf{m}_{0B}^\alpha \otimes \mathbf{n}_{0B}^\alpha) \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

On associe par ailleurs au joint une énergie libre par unité de surface  $\Psi_\Sigma(\mathbf{G}_\Sigma)$ . L'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit :

$$\mathcal{D}_\Sigma = \mathbf{\Xi}_\Sigma : \left( (\dot{\mathbf{U}}_A^p - \dot{\mathbf{U}}_B^p) \times \mathbf{n}_\Sigma \right) - \dot{\Psi}_\Sigma \geq 0. \quad (3.29)$$

On suppose que  $\Psi_\Sigma$  est une forme quadratique de  $\mathbf{G}_\Sigma$  ; la forme la plus simple est proportionnelle à la norme au carré de  $\mathbf{G}_\Sigma$  et fait intervenir une deuxième longueur caractéristique  $L_\Sigma$  en plus de la

<sup>43</sup> Observons que, sur  $\Sigma$ , les normales sortantes relatives aux grains A et B sont respectivement  $\mathbf{n}_\Sigma$  et  $-\mathbf{n}_\Sigma$ .

longueur  $L$  relative à l'énergie volumique. Dans le cas où la microforce est supposée non-dissipative, on obtient :

$$\Psi_{\Sigma}(\mathbf{G}_{\Sigma}) = \frac{1}{2}\mu L_{\Sigma}(\mathbf{G}_{\Sigma} : \mathbf{G}_{\Sigma}) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{E}}_{\Sigma} = \mu L_{\Sigma} \mathbf{G}_{\Sigma}. \quad (3.30)$$

Le cas limite  $L_{\Sigma} = 0$  donne une microforce  $\bar{\mathbf{E}}_{\Sigma}$  nulle et, en vertu de (3.28), est équivalent à des conditions de bords microscopiquement libres (cf. relation (2.48)) de part et d'autre :

$$(\mathbf{T}_A \times \mathbf{n}_{\Sigma}) : (\mathbf{m}_{0A}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{0A}^{\alpha}) = (\mathbf{T}_B \times \mathbf{n}_{\Sigma}) : (\mathbf{m}_{0B}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{0B}^{\alpha}) = 0. \quad (3.31)$$

Le cas limite  $L_{\Sigma}$  infini impose  $\mathbf{G}_{\Sigma} = 0$  (pour conserver une énergie libre finie), et par conséquent, une égalité entre les flux de dislocations entrant et sortant du joint :

$$\dot{\mathbf{U}}_A^p \times \mathbf{n}_{\Sigma} = \dot{\mathbf{U}}_B^p \times \mathbf{n}_{\Sigma}. \quad (3.32)$$

Toutefois, contrairement à l'énergie volumique  $\Psi$  qui peut être considérée comme une donnée matériau, il y a tout lieu de supposer que  $\Psi_{\Sigma}$ , qui caractérise l'énergie stockée par les dislocations polaires s'accumulant sur le joint, dépend des caractéristiques du joint considéré, à tout le moins la désorientation entre les deux grains et l'orientation du joint par rapport aux plans cristallins des deux grains.

En outre, une manière de représenter les joints de grains, du moins dans les cas où la désorientation entre les deux grains est modérée, est de supposer qu'ils sont constitués de réseaux réguliers de dislocations accommodant cette désorientation<sup>44</sup>. Plus précisément, on associe au joint une grandeur s'apparentant à un tenseur densité de dislocations intrinsèque que l'on définit en considérant une transformation fictive conduisant à la formation du bi-cristal à partir d'une configuration dans laquelle les deux réseaux auraient même orientation (figure 3.2).

A supposer que cette transformation fictive puisse être modélisée en petites transformations, autrement dit que la désorientation soit faible, notons  ${}_{int}\boldsymbol{\omega}_{A \rightarrow B}$  la rotation permettant de passer de l'orientation du grain A à celle du grain B. Tout se passe donc comme si, dans la transformation fictive, le grain B avait subi une transformation élastique  ${}_{int}\mathbf{U}_B^e = {}_{int}\boldsymbol{\omega}_{A \rightarrow B}$ . En vertu de la relation (3.26), le tenseur densité de dislocations intrinsèque se définirait alors par :

$${}_{int}\mathbf{G}_{\Sigma} = {}_{int}\boldsymbol{\omega}_{A \rightarrow B} \times \mathbf{n}_{\Sigma}. \quad (3.33)$$

Notons que la configuration relâchée associée à cette transformation fictive est définie à une rotation des deux grains près (on a choisi dans ce qui précède de lui donner l'orientation cristalline du grain A). Dans le cadre des petites transformations ce choix n'affecte pas la

---

<sup>44</sup> Ce type d'approche est étendu à tout type d'interface homogène (entre deux grains d'une même phase) ou hétérogène (entre deux phases différentes) ; dans ce dernier cas, les dislocations accommodent également les pas différents des deux réseaux cristallins. Le sujet dépasse très largement le cadre de ce document mais le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à Hirth et al. (2013) ou Vattré et Demkowicz (2013).

définition de  ${}_{int}\mathbf{G}_\Sigma$  qui s'exprimerait dans un cas plus général en fonction de la différence des rotations appliquées aux grains A et B pour aboutir à la configuration du bi-cristal formé à partir d'une configuration dans laquelle ils ont même orientation.

Une manière possible de modéliser l'énergie libre du joint serait d'additionner les tenseurs densités de dislocations intrinsèque et associé à la déformation en posant :

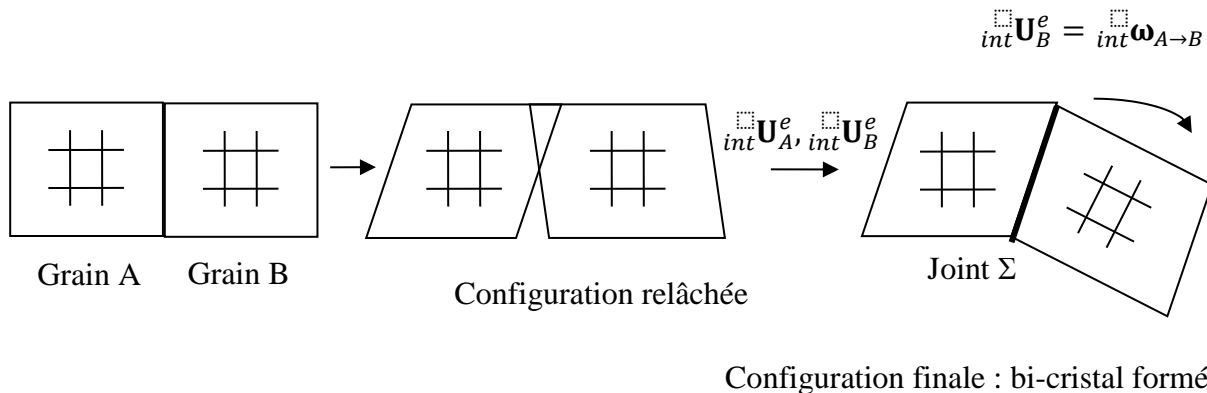
$$\Psi_\Sigma(\mathbf{G}_\Sigma) = \frac{1}{2}\mu L_\Sigma({}_{tot}\mathbf{G}_\Sigma : {}_{tot}\mathbf{G}_\Sigma) \quad \text{avec : } {}_{tot}\mathbf{G}_\Sigma = \mathbf{G}_\Sigma + {}_{int}\mathbf{G}_\Sigma \quad . \quad (3.34)$$

Cette hypothèse présuppose toutefois que les dislocations polaires associées à la déformation et celles constituant le joint de grain jouent des rôles identiques et sont en mesure de s'y recombinaison pour former une seule et même structure. Ce point est sans doute sujet à caution sur le plan physique.

Remarquons que, dans le cas où les déformations élastiques sont négligeables, le raisonnement précédent revient à s'intéresser à l'évolution, sous l'effet de la déformation, de la désorientation entre les deux grains. En effet, dans ce cas :

$$\mathbf{G}_\Sigma + {}_{int}\mathbf{G}_\Sigma = ({}_{int}\boldsymbol{\omega}_{A \rightarrow B} + \boldsymbol{\omega}_B^e - \boldsymbol{\omega}_A^e) \times \mathbf{n}_\Sigma \quad . \quad (3.35)$$

En d'autres termes, lorsque la rotation des grains avec la déformation tend à réduire la désorientation, l'énergie diminue et la déformation est favorisée au joint de grain. Dans le cas contraire, l'énergie augmente et la déformation est pénalisée.



**Figure 3.2 :** Transformation fictive permettant de définir, pour le bi-cristal, un tenseur densité de dislocations intrinsèque.

L'extension de la modélisation précédente aux transformations finies pose un certain nombre de difficultés qui sont abordées en détails dans les articles traitant de la modélisation des joints de grains (cf. Vattré et Demkowicz, 2013). On ne prétend pas développer cette question dans le présent paragraphe ; elle méritera d'être analysée soigneusement à l'avenir.

### 3.5. Localisation dans une plaque et microstructures de mise en forme

La prise en compte de la microstructure dans la simulation de la localisation constitue un axe de travail qu'il est utile de poursuivre en lien avec les analyses microscopiques et les études traitant de la mise en forme et de la recristallisation.

Cette démarche doit cependant intégrer la physique au juste degré de raffinement du fait de la difficulté à décrire dans une même simulation à la fois l'échelle de l'enveloppe et celle des grains de l'agrégat. Il est sans doute raisonnable d'espérer restituer la réponse moyenne de chacun des grains mais à l'évidence illusoire de capturer des phénomènes très locaux tels que des concentrations d'efforts aux joints de grains, par exemple. Rappelons enfin que la microstructure à 50000 grains simulée au paragraphe 2.3, bien que s'approchant de microstructures réelles, constitue encore une limite basse en termes de nombre de grains dans l'épaisseur par rapport aux enveloppes de quelques millimètres qui intéressent les études de localisation (les progrès à venir concernant les performances du code de calcul Coddex permettront de savoir s'il est possible d'aller plus loin).

A plus court terme, on peut citer les quelques aspects suivants qui mériteraient d'être analysés :

- On s'est intéressé au paragraphe 2.3 à une texture de laminage croisé ; or, les géométries d'enveloppes cylindriques sont, dans certains cas, obtenues par des opérations qui s'apparentent localement à du laminage simple dans la direction des génératrices ; l'introduction d'une telle texture initiale dans la simulation présente donc un intérêt pour ce type de géométrie d'enveloppes, même si les fibres associées sont moins simples à identifier.
- Les textures des enveloppes réelles, dont le matériau a subi une recristallisation au moins partielle, sont vraisemblablement intermédiaires entre une texture isotrope et une texture de mise en forme à fibres très marquées ; on pourrait reprendre les simulations avec des textures issues de la caractérisation des matériaux mis en forme (figures de pôles obtenues par EBSD par exemple).
- Les observations microscopiques d'enveloppes mises en forme semblent montrer des grains de forme allongée dans les directions du plan de l'enveloppe ; l'incidence de cette anisotropie de forme sur la localisation mérite d'être analysée (une manière frustrée de générer des grains allongés est de pondérer les directions du plan dans l'algorithme de Voronoï).



- Un gradient de propriétés dans l'épaisseur de l'enveloppe est parfois mis en évidence qui peut également être pris en compte dans la simulation.

### 3.6. Modélisation de la fragmentation

Le couplage entre le développement de l'endommagement et de la rupture au niveau des strictions très développées et la propagation de fronts de relaxation de contrainte qui tend à inhiber le phénomène contrôle la fragmentation des enveloppes. Cette thématique, qui a donné lieu à deux thèses effectuées au CEA/Gramat concernant des structures unidimensionnelles (cf. paragraphe 1.1.2), doit être poursuivie dans le cadre d'un Laboratoire de Recherche Conventionné (L.R.C) associant le CEA, le LEM3 de l'Université de Lorraine, l'ISAE-Supaéro et l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, structure dont je suis partie prenante.

Il semble, entre autres, pertinent d'étudier les différents points suivants :

- Comment définit-on une distribution de zones de rupture potentielles et d'instantanés d'activation associés si l'on fait l'hypothèse qu'ils sont liés à une instabilité plastique ? on obtiendrait les caractéristiques d'une telle instabilité en appliquant, par exemple, une A.L.S. multimodale à une perturbation initiale dont on justifierait la distribution spectrale par des arguments physiques.
- Comment le phénomène précédent est-il impacté par l'existence de défauts ou d'hétérogénéités des caractéristiques mécaniques qui peuvent également influencer sur la position des zones de rupture ?
- Comment faut-il modéliser l'endommagement et la rupture de manière suffisamment simple mais permettant néanmoins de reproduire la propagation des fractures dans les zones de striction ?
- En considérant une fracture et en supposant que sa vitesse de propagation dans le plan de l'enveloppe est connue, quelle est la forme bidimensionnelle des ondes de relaxation de contrainte dans le cas d'une rupture brutale (hypothèse de Mott, 1947) ou d'une rupture progressive (hypothèse de Kipp et Grady, 1985) ?

Un code de dynamique des brins a été développé dans le cadre de la thèse de Don-Pierre Zappa, en complément des codes d'hydrodynamique tridimensionnelle. Son extension à la dynamique des nappes est envisagée afin de traiter les problématiques précédentes.

## 4. Conclusion

Dans le présent mémoire, je me suis efforcé de présenter une vue d'ensemble des travaux de recherche que j'ai été amené à développer au CEA/DAM depuis 2004. Les phénomènes de localisation de la déformation plastique en ont constitué le fil conducteur même si un certain nombre de ces travaux trouvent évidemment d'autres applications.

Les approches macroscopiques s'appuyant sur les notions d'instabilité et de bifurcation fournissent des éléments de compréhension indéniables du processus à l'échelle d'une structure ; elles sont loin d'avoir été explorées de façon exhaustive comme en témoignent les travaux récents sur le sujet. Elles se confrontent de façon satisfaisante aux résultats expérimentaux concernant le début du processus (en termes de longueur d'onde des phénomènes par exemple) malgré la difficulté à réaliser des essais qui génèrent des conditions de chargement suffisamment simples, notamment en chargement dynamique. Par ailleurs, un travail important reste à faire sur la compréhension de la fragmentation et de l'interaction entre zones de localisation marquée. C'est pourquoi, j'ai choisi de conserver une part d'activité sur les approches macroscopiques.

A l'opposé, des phénomènes de localisation de la déformation apparaissent à l'échelle de la microstructure. Il est connu depuis longtemps que la plasticité dans un monocristal se développe de manière hétérogène dans certaines conditions. Lorsque les motifs de déformation se mettent en place à une échelle où la matière peut être considérée comme continue, les outils d'analyse de stabilité mis en œuvre à l'échelle macroscopique sont applicables (en utilisant évidemment une modélisation du comportement adaptée et que l'on enrichit au besoin de la physique qui gouverne le processus précis que l'on cherche à identifier). Par ce type d'analyse, j'ai essayé de montrer que les hétérogénéités de déformation pouvaient être sensibles à des effets fins tels que l'interaction entre systèmes de glissement ; cela justifie la poursuite du travail de modélisation de la plasticité cristalline engagé par un certain nombre de mes collègues et auquel je m'efforce de prendre part (à travers l'encadrement de stages notamment).

L'échelle intermédiaire, celle de l'agrégat polycristallin, permet de faire le lien avec la localisation à l'échelle de la structure. Elle permet de comprendre l'influence respective du comportement à l'échelle locale et de modes d'instabilité de structure ; la combinaison des deux effets diffère suivant les cas de figure en fonction par exemple de la taille de grain ou de la vitesse de déformation moyenne.

Toutefois, comprendre le lien entre caractéristiques microstructurales et apparition de la localisation à l'échelle macroscopique nécessite d'identifier les phénomènes prépondérants, avec toute la difficulté que représente l'exercice. Pour cela on doit simuler un volume de matière suffisant tout en reproduisant l'échelle des grains de façon suffisamment fine. Il faut extraire des simulations des variables bien choisies et les représenter d'une manière qui fournisse les informations les plus pertinentes. C'est ce que je me suis efforcé de mettre en place pour la

simulation de plaques « polycristallines ». Une autre difficulté est d'ordre physique : la modélisation de la plasticité aux interfaces, autrement dit les joints de grains dans un agrégat.

L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire a fait l'objet de collaborations et d'échanges divers. L'analyse des instabilités à l'échelle macroscopique a été entamée par mes collègues France et Dominique et je me suis appuyé sur leurs premières études pour mener à bien ce que j'ai entrepris dans le domaine ; plus tard, les interactions nombreuses que j'ai eues avec Dominique puis Mathieu au cours de leurs thèses m'ont permis d'appréhender de manière plus fine les possibilités offertes par l'analyse linéaire de stabilité. J'ai également bénéficié des échanges et discussions avec leurs encadrants : Patrick Le Tallec pour la thèse de Dominique, Sébastien Mercier, Christophe Czarnota et Alain Molinari pour la thèse de Mathieu. L'analyse de la rupture d'enveloppes a fait l'objet de premières réflexions avec mon collègue Cyril. Dans le même temps, il m'a été demandé de donner un avis sur les études de fragmentation menées au Centre d'Etudes de Gramat, ce qui m'a donné l'opportunité d'échanger avec mes collègues Gilles, Romain, Skander, Gabriel et Don-Pierre.

La modélisation de la plasticité cristalline a fait l'objet de discussions nombreuses avec mes collègues Christophe et Ronan ; l'analyse de la ségrégation des systèmes de glissement, mise en évidence un peu par hasard lors de la prise en main du code Coddex, a également impliqué mes collègues Yves-Patrick, Aurélien et Laurianne qui m'ont fait bénéficier de leurs remarques utiles. Lorsque j'ai abordé le lien entre localisation et microstructure issue de la mise en forme, j'ai bénéficié des compétences et des résultats des études entreprises par mes collègues du CEA/Valduc, Sylvain, Christophe et Wilfried.

En dehors de mes thématiques de recherches propres, je me suis investi dans des Travaux Dirigés de Mécanique à l'Ecole des Mines ; j'ai également participé à des modules de formation en interne en essayant de montrer que les outils mathématiques propres à la mécanique pouvaient être utiles à la modélisation et la compréhension d'un certain nombre des problématiques du CEA/DAM.

Pour ces différentes raisons, je pense pouvoir postuler à l'obtention d'une Habilitation à Diriger des Recherches.

## **5. Notations, conventions et identités mathématiques utiles**

On rappelle la définition des opérations sur les vecteurs et tenseurs, et on précise les conventions adoptées, en donnant les relations sur les composantes écrites dans une base orthonormée quelconque (formulation indicielle). Dans ces relations, les minuscules en caractères gras

désignent des vecteurs et les majuscules des tenseurs d'ordre 2 ; en formulation indicielle, on somme les composantes sur les indices répétés.

Le déterminant d'un tenseur d'ordre 2 est noté  $\text{Det}(\mathbf{A})$  ; sa trace et son transposé sont définis par :

$$\text{Tr}(\mathbf{A}) = A_{ii} ,$$

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji} .$$

On note  $\{\mathbf{A}\}_S$  la partie symétrique du tenseur  $\mathbf{A}$  définie par :

$$\{\mathbf{A}\}_S = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) .$$

Le tenseur identité noté  $\mathbf{1}$  peut se définir par ses composantes  $\delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  étant le symbole de Kronecker). Les différents produits entre vecteurs et tenseurs sont définis par les relations qui suivent :

- le produit tensoriel de deux vecteurs :  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$  ;
- le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre 2 :  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$  ;
- le produit scalaire de deux vecteurs :  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$  ;
- le produit contracté de deux tenseurs :  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$  ;
- le produit doublement contracté de deux tenseurs :  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$  ;
- le produit doublement contracté entre un tenseur d'ordre 4 et un tenseur d'ordre 2 :  $(\mathbf{C} : \mathbf{B})_{ij} = C_{ijkl} B_{kl}$ .

L'identité sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétrique est le tenseur d'ordre 4 noté  $\mathbb{I}$  ; il est tel que, pour tout tenseur d'ordre 2 symétrique,  $\mathbb{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{45}$  et a pour composantes :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) .$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs et les produits vectoriels d'un vecteur et d'un tenseur sont définis par :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = e_{ikl} a_k b_l = -e_{ilk} b_l a_k = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})_i ,$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{b})_{ij} = e_{jkl} A_{ik} b_l ,$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{A})_{ij} = e_{jkl} b_k A_{il} = -e_{jlk} A_{il} b_k = -(\mathbf{A} \times \mathbf{b})_{ij} .$$

---

<sup>45</sup> Sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 quelconque,  $\mathbb{I}$  associe à tout tenseur sa partie symétrique.

Dans ces dernières relations, le tenseur d'ordre 3 de composantes  $e_{ijk}$  est le tenseur de permutation dit de « Levi-Civita ». Pour un vecteur  $\mathbf{a}$ , la notation  $(\mathbf{a} \times)$  désigne un tenseur d'ordre 2 de composantes  $(\mathbf{a} \times)_{ij} = e_{ilj}a_l$ . Pour un tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre 2, la notation  $(\mathbf{A} \times)$  désigne un tenseur d'ordre 3 de composantes  $(\mathbf{A} \times)_{ijk} = e_{jlk}A_{il}$  (cf. Gurtin et Needleman, 2005).

Les produits mixtes satisfont les identités suivantes :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_i e_{ikl} b_k c_l = b_k e_{kli} c_l a_i = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b},$$

$$(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i = A_{ij} e_{jkl} b_k c_l = b_k e_{klj} c_l A_{ij} = ((\mathbf{c} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{b})_i = -((\mathbf{A} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b})_i,$$

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} \times \mathbf{c}) = A_{ij} e_{jkl} B_{ik} c_l = B_{ik} e_{klj} c_l A_{ij} = \mathbf{B} : (\mathbf{c} \times \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \times \mathbf{c}) : \mathbf{B}.$$

Les différents opérateurs impliquant des dérivées spatiales se définissent de la façon suivante (en utilisant la notation indicielle  $a_{,r} = \partial a / \partial x_r$ ). L'opérateur  $\nabla$  désigne le « vecteur opérateur » de composantes  $\nabla_r = \partial / \partial x_r$  :

$$\text{div}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla = a_{i,i},$$

$$(\text{div}(\mathbf{A}))_i = \mathbf{A} \cdot \nabla = A_{ij,j},$$

$$(\text{grad}(\mathbf{a}))_{ij} = (\mathbf{a} \otimes \nabla)_{ij} = a_{i,j},$$

$$(\text{grad}(\mathbf{A}))_{ijk} = (\mathbf{A} \otimes \nabla)_{ijk} = A_{ij,k}.$$

Le rotationnel d'un vecteur et celui d'un tenseur se définissent par :

$$(\text{rot}(\mathbf{a}))_i = (\nabla \times \mathbf{a})_i = e_{ikl} a_{l,k},$$

$$(\text{rot}(\mathbf{A}))_{ij} = (\nabla \times \mathbf{A})_{ij} = e_{jkl} A_{il,k}.$$

Concernant l'ensemble des opérateurs précédents, ils sont notés avec une majuscule (par exemple Rot) lorsque l'on dérive par rapport aux coordonnées dans la configuration initiale et avec une minuscule (par exemple rot) lorsque l'on dérive par rapport aux coordonnées dans la configuration déformée.

# Références bibliographiques

---

Abu Al-Rub, R.K., Voyiadjis, G.Z., 2004. Analytical and experimental determination of the material intrinsic length scale of strain gradient plasticity theory from micro- and nano-indentation experiments. *Int. J. Plast.*, 20, 1139-1182.

Acharya, A., Bassani, J.L., 2000. Lattice incompatibility and a gradient theory of crystal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 48, 1565-1595.

Akhtar A., Teghtsoonian, E., 1976. Prismatic slip in  $\alpha$ -Titanium single crystals, *Metall. Trans. A*, 6, 2201-2207.

Arminjon, M., Bacroix, B., 1990. On plastic potentials for anisotropic metals and their derivation from the texture function. *Acta Mech.*, 88, 219-243.

Arsenlis, A., Parks, D.M., 1999. Crystallographic aspects of geometrically-necessary and statistically-stored dislocation density. *Acta Mater.*, 47 (5), 1597-1611.

Arsenlis, A., Parks, D.M., Becker, R., Bulatov, V.V., 2004. On the evolution of crystallographic dislocation density in non-homogeneously deforming crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 52, 1213-1246.

Asaro, R.J., Rice, J.R., 1977. Strain localization in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 25, 309-338.

Audoly, B., Hutchinson, J.W., 2016. Analysis of necking based on a one-dimensional model. *J. Mech. Phys. Solids*, 97, 68-91.

Bai, Y.L., 1982. Thermo-plastic instability in simple shear. *J. Mech. Phys. Solids*, 30 (4), 195-207.

Barata da Rocha, A., Barlat F., Jalinier, J.M., 1984-1985. Prediction of the forming limit diagrams of anisotropic sheets in linear and non-linear loading. *Mat. Sci. Eng.*, 68, 151-164.

Barbier, G., Benallal, A., Cano, V., 1998. Relation théorique entre la méthode de perturbation linéaire et l'analyse de bifurcation pour la prédiction de la localisation des déformations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.326, Série IIb, 153-158.

Barlat, F., 1987. Crystallographic texture, anisotropic yield surfaces and forming limits of sheet metals. *Mat. Sci. Eng.*, 91, 55-72.

- Berveiller, M., Zaoui, A., 1979. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 26, 325-344.
- Besnard, G., Lagrange, J.M., Hild, F., Roux, S., Voltz C., 2010. Characterization of necking phenomena in high-speed experiments by using a single camera. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, doi:10.1155/2010/215956.
- Bhattacharyya, A., Knezevic, M., Abouaf, M., 2015. Characterization of crystallographic texture and intra-grain morphology in cross-rolled tantalum. *Metall. Mat. Trans.*, 46A, 1085-1096.
- Bigoni, D., Hueckel, T., 1991. Uniqueness and localization – associative and non-associative elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 28, 197-213.
- Boudeau, N., Gelin, J.C., 2000. Necking in sheet metal forming. Influence of macroscopic and microscopic properties of materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 42, 2209-2232.
- Bourdin, B., Francfort, G., Marigo, J.J., 2008. The variational approach to fracture, *J. Elast.* 91, 5-148.
- Brenner, R., Lebensohn, R., Castelnau, O., 2009. Elastic anisotropy and yield surface estimates of polycrystals. *Int. J. Solids Struct.*, 46, 3018-3026.
- Bridgman, P.W., 1952. *Studies in large plastic flow and fracture, with special emphasis on the effect of hydrostatic pressure.* McGraw Hill Book Comp. Inc., New-York, pp. 9-37.
- Cazacu, O., Rodriguez-Martinez, J.A., 2019. Effect of plastic anisotropy on localization in orthotropic materials: New explicit expressions for the orientation of localization bands in flat specimens subjected to uniaxial tension. *J. Mech. Phys. Solids*, 126, 272-284.
- Cermelli, P., Gurtin M.E., 2001. On the characterization of geometrically necessary dislocations in finite plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 49, 1539-1568.
- Cuitino, A.M., Ortiz, M., 1993. Constitutive modelling of L12 intermetallic crystals. *Mat. Sci. Eng.*, A170, 111-123.
- Dai, H, 1997. Geometrically-necessary dislocation density in continuum plasticity theory – FEM implementation and applications. Thèse de Doctorat du M.I.T.
- Dalle, F., 2006. Simulations of necking during plane strain tension tests. *J. Phys. IV France*, 134, 429-434.
- Damamme, G., Vermunt, J., Zappa, D.P., Klöcker, H., 2019. Stress release waves in plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 128, 21-31.
- Deng, C., Liu, S.F., Ji, J.L., Hao, X.B., Zhang, Z.Q., Liu, Q., 2014. Texture evolution of high purity tantalum under different rolling paths. *J. Mat. Process. Tech.*, 214, 462-469.

Denoual, C., Madec, R., Pellegrini, Y.P., Troadec, H., 2006. Modélisation multi-échelle de la déformation rapide d'un métal. Chocs – Revue Scientifique et Technique de la Direction des Applications Militaires, 33, 70-78.

Dequiedt, J.L., 2010. Localization in elasto-plastic materials: influence of the plasticity yield surface in biaxial loading conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 47, 2937-2951.

Dequiedt, J.L., 2011. Localization in elasto-plastic materials: influence of an evolving yield surface in biaxial loading conditions. *Int. J. Solids Struct.*, 48, 2324-2332.

Dequiedt, J.L., 2015. Statistics of dynamic fragmentation for a necking instability. *Int. J. Solids Struct.*, 75-76, 32-44.

Dequiedt, J.L., 2018. The incidence of slip system interactions on the deformation of FCC single crystals: system selection and segregation for local and non-local constitutive behavior. *Int. J. Solids Struct.*, 141-142, 1-14.

Dequiedt, J.L., 2019. Selection of slip systems in confined single crystal gradient plasticity: coupled effects of slip system orientations, latent hardening, and grain boundaries. *Archives of Mechanics*, 71(3), 207-238.

Dequiedt, J.L., Denoual, C., 2021. Localization of plastic deformation in stretching sheets: a crystal plasticity approach. *Int. J. Solids Struct.*, 210-211, 183-202.

Dequiedt, J.L., Denoual, C., Madec, R., 2015. Heterogeneous deformation in ductile FCC single crystals in biaxial stretching: the influence of slip system interactions. *J. Mech. Phys. Solids*, 83, 301-318.

Devincre, B., Kubin, L., Hoc, T., 2006. Physical analyses of crystal plasticity by DD simulation, *Scripta Mater.*, 54 (5), 741-746.

Devincre, B., Hoc, T., Kubin, L., 2008. Dislocation mean free paths and strain hardening of crystals. *Science*, 320, 1745-1748.

Dezerald, L., Rodney, D., Clouet, E., Ventelon L., Willaime, F., 2016. Plastic anisotropy and dislocation trajectory in BCC metals. *Nat. Comm.*, 7, 11695.

Dmitrieva, O., Dondl, P.W., Müller, S., Raabe, D., 2009. Lamination microstructure in shear deformed copper single crystals. *Acta Mater.*, 57, 3439-3449.

Doghri, I., Billardon, R., 1995. Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials. *Mech. Mat.*, 19, 129-149.

Drucker, D.C., 1959. A definition of stable inelastic material. *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 101-106.



- Dudzinski, D., Molinari, A., 1991. Perturbation analysis of thermoviscoplastic instabilities in biaxial loading. *Int. J. Solids Struct.*, 27 (5), 601-628.
- El Maï, S., Mercier, S., Petit, J., Molinari, A., 2014. An extension of linear stability analysis for the prediction of multiple necking during dynamic extension of round bar. *Int. J. Solids Struct.*, 51, 3491-3507.
- Evers, L.P., Brekelmans, W.A.M., Geers, M.G.D, 2004. Non-local crystal plasticity model with intrinsic SSD and GND effects. *J. Mech. Phys. Solids*, 52, 2379-2401.
- Forest, S., 1998. Modeling slip, kink and shear banding in classical and generalized single crystal plasticity. *Acta Mater.*, 46 (9), 3265-3281.
- Forest, S., Guéinichault, N., 2013. Inspection of free energy functions in gradient crystal plasticity. *Acta Mech. Sinica*, 29 (6), 763-772.
- Franciosi, P., Berveiller, M., Zaoui, A., 1980. Latent hardening in copper and aluminium single crystals. *Acta Metall.*, 28, 273-283.
- Franz, G., Abed-Meraïm, F., Lorrain, J.P., Ben Zineb T., Lemoine, X., Berveiller, M., 2009. Ellipticity loss analysis for tangent moduli deduced from a large strain elastic-plastic self-consistent model. *Int. J. Plast.*, 25, 205-238.
- Fressengeas, C., Molinari, A., 1994. Fragmentation of rapidly stretching sheets. *Eur. J. Mech. Series A Solids*, 13, 251-268.
- Frugier, P.A., 2015. Quantification 3D d'une surface dynamique par lumière structurée en impulsion nanoseconde. Application à la physique des chocs, du millimètre au décimètre. Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Sud, Palaiseau, France.
- Grady, D.E., Benson, D.A., 2003. Fragmentation of metal rings by electromagnetic loading. *Exp. Mech.* 12, 393-400.
- Gröger, R., Vitek, V., 2019. Impact of non-Schmid stress components present in the yield criterion for bcc metals on the activity of  $\{110\}\langle 111\rangle$  slip systems, *Comp. Mat. Sci.*, 159, 297-305.
- Groma, I., Csikor, F.F., Zaiser, M., 2003. Spatial correlations and higher-order gradient terms in a continuum description of dislocation dynamics. *Acta Mater.*, 51, 1271-1281.
- Guduru, P.R., Freund, L.B., 2002. The dynamics of multiple neck formation and fragmentation in high rate extension of ductile materials. *Int. J. Solids Struct.*, 39, 5615-5632.
- Gurtin, M.E., 2002. A gradient theory of single crystal viscoplasticity that accounts for geometrically necessary dislocations. *J. Mech. Phys. Solids*, 50, 5-32.

- Gurtin, M.E., 2008a. A theory of grain boundaries that accounts automatically for grain misorientation and grain boundary orientation. *J. Mech. Phys. Solids*, 56, 640-662.
- Gurtin, M.E., 2008b. A finite-deformation, gradient theory of single-crystal plasticity with free energy dependent on densities of geometrically necessary dislocations. *Int. J. Plast.*, 24, 702-725.
- Gurtin, M.E., Anand, L., Lele, S.P., 2007. Gradient single-crystal plasticity with free energy dependent on dislocation densities. *J. Mech. Phys. Solids*, 55, 1853-1878.
- Gurtin, M.E., Needleman, A., 2005. Boundary conditions in small-deformation, single-crystal plasticity that account for the Burgers vector. *J. Mech. Phys. Solids*, 53, 1-31.
- Haddag, B., Abed-Meraim, F., Balan, T., 2009. Strain localization analysis using a large deformation anisotropic elastic-plastic model coupled with damage. *Int. J. Plast.*, 25, 1970-1996.
- Harireche, O., Loret, B., 1992. 3-D dynamic strain-localization: shear-band pattern transition in solids, *Eur. J. Mech., A/ Solids*, 6, 733-751.
- Hill, R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc., London*, 193A, 281-297.
- Hill, R., 1952. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, 1, 19-30.
- Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 236-249.
- Hill, R., 1979. Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 179-191.
- Hill, R., Hutchinson, J.W., 1975. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 239-264.
- Hirth, J.P., Pond, R.C., Hoagland, R.G., Liu, X.Y., Wang, J., 2013. Interface defects, reference spaces and the Frank-Bilby equation, *Prog. Mat. Sci.*, 58, 749-823.
- Hochrainer, T., Sanfeld S., Zaiser, M., Gumbsch, P., 2014. Continuum dislocation dynamics: towards a physical theory of crystal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 63, 167-178.
- Hutchinson, J.W., Neale, K.W., 1978. Sheet necking – II: Time independent behavior. In: Koistinen, D.P., Wang, N.M. (Eds.), *Mechanics of Sheet Metal Forming*, Plenum, New York, pp. 127-150.
- Hutchinson, J.W., Obrecht, H, 1977. Tensile instabilities in strain-rate dependent materials. *Fracture*, 1, ICF4, Waterloo, Canada, pp. 101-116.

Jacques, N., 2020. An analytical model for necking strains in stretched plates under dynamic biaxial loading. *Int. J. Solids Struct.*, 200-201, 198-212.

Jouve D., 2010. Etude analytique de l'instabilité plastique de striction pour une plaque sollicitée en traction biaxiale. Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

Jouve, D., 2013. Analytic study of plastic necking instabilities during plane tension tests. *Eur. J. Mech. A/ Solids*, 39, 180-196.

Jouve, D., 2015. Analytic study of the onset of plastic necking instabilities during biaxial tension tests on metallic plates. *Eur. J. Mech. A/ Solids*, 50, 59-69.

Kalidindi, S.R., Anand, L., 1993. Large deformation simple compression of a copper single crystal. *Metall. Trans. A*, 24A, 989-992.

Kalidindi, S.R., Bronkhorst, C.A., Anand, L., 1992. Crystallographic texture evolution in bulk deformation processing of FCC metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 (3), 537-569.

Kerisit, C., 2012. Analyse des mécanismes de recristallisation statique du tantale déformé à froid pour une modélisation en champ moyen. Thèse de Doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, Paris, France.

Kipp, M.E., Grady, D.E., 1985. Dynamic fracture growth and interaction in one dimension. *J. Mech. Phys. Solids*, 33(4), 399-415.

Kothari, M., Anand, L., 1998. Elasto-viscoplastic constitutive equations for polycrystalline metals: application to tantalum. *J. Mech. Phys. Solids*, 46 (1), 51-83.

Kratochvil, J., Kruzik, M., 2015. A crystal plasticity model of a formation of a deformation band structure. *Phil. Mag.*, 95 (32), 3621-3639.

Kratochvil, J., Kruzik, M., Sedlacek, R., 2010. Instability origin of subgrain formation in plastically deformed materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 48, 1401-1412.

Kubin, L.P., 2013. Dislocations, mesoscale simulations and plastic flow. In: Sutton, A.P., Rudd, R.E. (Eds.), *Oxford Series on Material Modelling*, Oxford University Press, Oxford.

Kubin, L., Devincere, B., Hoc, T., 2008. Modeling dislocation storage rates and mean free paths in face-centered cubic crystals. *Acta Mater.*, 56, 6040-6049.

Kubin, L., Hoc, T., Devincere, B., 2009. Dynamic recovery and its orientation dependence in face-centered cubic crystals. *Acta Mater.*, 57, 2567-2575.

Kuroda, M., Tvergaard, V., 2000. Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria. *Int. J. Solids Struct.*, 37, 5037-5059.

- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2006. Studies of scale dependent crystal viscoplasticity models. *J. Mech. Phys. Solids*, 54, 1789-1810.
- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2007. Effects of texture on shear band formation in plane strain tension/compression and bending. *Int. J. Plast.*, 23, 244-272.
- Kuroda, M., Tvergaard, V., 2008. On the formulations of higher-order strain gradient crystal plasticity models. *J. Mech. Phys. Solids*, 56, 1591-1608.
- Lancioni, G, Yalcinkaya, T, Cocks, A., 2015. Energy-based non-local plasticity models for deformation patterning, localization and fracture. *Proc. Roy. Soc. A*471, 20150275.
- Lee, D., Zaverl, F., 1982. Neck growth and forming limits in sheet metals. *Int. J. Mech. Sci.*, 24(3), 157-173.
- Lee, E.H., 1969. Elastic-plastic deformation at finite strains. *J. Appl. Mech.*, 36, 1-6.
- Lian, J., Barlat, F., Baudelet, B., 1989. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part II: Effect of yield surface shape on sheet forming limit. *Int. J. Plast.*, 5, 131-147.
- Ling, C., Forest, S., Besson, J., Tanguy, B., Latourte, F., 2018. A reduced micromorphic single crystal plasticity model at finite deformations. Application to strain localization and void growth in ductile metals. *Int. J. Solids Struct.*, 134, 43-69.
- Longère, P., Dragon, A., 2008. Evaluation of the inelastic heat fraction in the context of microstructure-supported dynamic plasticity modelling. *Int. J. Impact Eng.*, 35, 992-999.
- Ma, A., Roters, F., Raabe, D., 2006. A dislocation density based constitutive model for crystal plasticity FEM including geometrically necessary dislocations. *Acta Mater.*, 54, 2169-2179.
- Madec, R., 2011. Calibration d'une loi de comportement pour l'écroutissement des monocristaux cubiques centrés. Rapport Technique, CEA/DAM/DIF.
- Madec, R., Kubin, L., 2017. Dislocation strengthening in FCC metals and in BCC metals at high temperatures. *Acta Mater.*, 126, 166-173.
- Madec R., Troadec, H., 2005, Détermination des coefficients d'interaction entre systèmes de glissement des cubiques centrés dans le régime haute température par dynamique des dislocations. Rapport Technique, CEA/DAM/DIF.
- Mandel, J., 1974. Thermodynamics and plasticity. In: Delgado Domingos, J.J., Nina, M.N.R., Whitelaw, J.H. (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Foundations of Continuum Thermodynamics*, Bussaco, Portugal, pp. 283-311.
- Mandel, J., 1982. Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal. *J. Méc. Théor. Appl.*, 1, 7-23.

- Marciniak, Z., Kuczynski, K., 1967. Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. *Int. J. Mech. Sci.*, 9 (9), 613-620.
- Mercier, S., Granier, N., Molinari, A., Llorca, F., Buy, F., 2010. Multiple necking during the dynamic expansion of hemispherical metallic shells, from experiment to modelling. *J. Mech. Phys. Solids*, 58 (7), 955-982.
- Mercier, S., Molinari, A., 2003. Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension. *Int. J. Solids Struct.*, 40, 1995-2016.
- Mercier, S., Molinari, A., 2004. Analysis of multiple necking in rings under rapid radial expansion. *Int. J. Impact Eng.*, 30, 403-419.
- Mesarovic, S.D., Forest, S., Jaric, J.P., 2015. Size-dependent energy in crystal plasticity and continuum dislocation models. *Proc. Roy. Soc. A*, 471, 1-19.
- Michel, J.C., Lopez-Pamies, O., Ponte-Castaneda, P., Triantafyllidis, N., 2007. Microscopic and macroscopic instabilities in finitely strained porous elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*, 55, 900-938.
- Molinari, A., 1988. Shear band analysis. *Solid State Phenomena*, 3-4, 447-468.
- Molinari, A., Ahzi, S., Kouddane, R., 1997. On the self-consistent modeling of elastic-plastic behavior of polycrystals. *Mech. Mat.*, 26, 43-62.
- Mott, N.F., 1947. Fragmentation in shell cases. *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 300-308.
- Moussa, C., Bernacki, M., Besnard, R., Bozzolo, N., 2015. About quantitative EBSD analysis of deformation and recovery substructures in pure tantalum. *IOP Conf. Series, Mat. Sc. Eng.*, 89, doi:10.1088/1757-899X/89/1/012038.
- Mura, T., 1965. Continuous distribution of dislocations and the mathematical theory of plasticity. *Phys. Stat. Sol.*, 10, 447-453.
- Neilsen, M.K., Schreyer, H.L., 1993. Bifurcations in elastic-plastic materials. *Int. J. Solids Struct.*, 30 (4), 521-544.
- Nguyen, Q.S., 2000. *Stabilité et Mécanique non-linéaire*, Hermès Sciences Publications.
- Nicola, L., Van der Giessen, E., Gurtin, M.E., 2005. Effect of defect energy on strain-gradient predictions of confined single-crystal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 53, 1280-1294.
- Nix, W.D., Gao, H., 1998. Indentation size effects in crystalline materials: a law for strain gradient plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 46, 411-425.
- Nye, J.F., 1953. Some geometrical relations in dislocated solids. *Acta Metall.*, 1, 153-162.

- Ohno, N., Okumura, D., 2007. Higher-order stress and grain size effects due to self-energy of geometrically necessary dislocations, *J. Mech. Phys. Solids*, 55, 1879-1898.
- Olive, F., Nicaud, A., Marilleau, J., Loichot, R., 1979. Rupture behaviour of metals in explosive expansion. *Inst. Phys. Conf. Ser.* 47, 242-251.
- Ortiz, M., Repetto, E.A., 1999. Nonconvex energy minimization and dislocation structures in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 47, 397-462.
- Pan, J., Saje, M., Needleman, A., 1983. Localization of deformation in rate sensitive porous plastic solids, *Int. J. Fract.*, 21, 261-278.
- Parmar, A., Mellor, P.B., 1978. Predictions of limit strains in sheet metal using a more general yield criterion. *Int. J. Mech. Sci.*, 20, 385-391.
- Peeters, B., Hoferlin, E., Van Houtte, P., Aernoudt, E., 2001. Assessment of crystal plasticity based calculation of the lattice spin of polycrystalline metals for FE implementation. *Int. J. Plast.*, 17, 819-836.
- Peirce, D., Asaro, R.J., Needleman, A., 1982. An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals. *Acta Metall.*, 30, 1087-1119.
- Petit, J., Jeanclaude, V., Fressengeas, C., 2005. Breakup of copper shaped-charge jets: experiments, numerical simulation and analytical modelling, *J. Appl. Phys.*, 98, 123521.
- Petryk, H., 2005. Thermodynamic conditions for stability in materials with rate-independent dissipation. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 363, 2479-2515.
- Petryk, H., Kurasa, M., 2011. Selective symmetrization of the slip-system interaction matrix in crystal plasticity. *Arch. Mech.*, 63 (3), 287-310.
- Petryk, H., Kurasa, M., 2013. The energy criterion for deformation banding in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 61, 1854-1875.
- Piercy, G.R., Cahn, R.W., Cottrell, A.H., 1955. A study of primary and conjugate slip in crystals of alpha-brass. *Acta Metall.*, 3, 331-338.
- Rice, J.R., 1976. The localization of plastic deformation. In: Koiter, W.T. (Ed.), *Proceedings of the 14<sup>th</sup> International Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. 207-220.
- Rice, J.R., Rudnicki, J.W., 1980. A note on some features of the theory of localization of deformation. *Int. J. Solids Struct.*, 16, 597-605.
- Riffet, V., Amadon, B., Bruzy, N., Denoual, C., 2020. Role of dislocations in the bcc-hcp transition under a pressure: a first-principles approach in beryllium. *Phys. Rev. B*, 4, 063609.

- Rodriguez-Martinez, J.A., Vadillo, G., Fernandez-Saez, J., Molinari, A., 2013. Identification of the critical wavelength responsible for the fragmentation of ductile rings expanding at very high strain rates. *J. Mech. Phys. Solids*, 61, 1357-1376.
- Rousselier, G., 1995. Localisation de la déformation dans des matériaux plastiques et viscoplastiques, dilatables, soumis à des sollicitations thermomécaniques et dynamiques tridimensionnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t.320, Série Iib, 265-270.
- Rudnicki, J.W., Rice, J.R., 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 371-394.
- Saimoto, S., 1963. Low temperature tensile deformation of copper single crystals oriented for multislip. Ph. D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA.
- Shenoy, V.B., Freund, L.B., 1999. Necking bifurcations during high strain rate extension. *J. Mech. Phys. Solids*, 47, 2209-2233.
- Schmid, E., Boas, W., 1935. *Kristallplastizität*, Berlin, Springer Verlag.
- Sowerby, R., Duncan, J.L., 1971. Failure in sheet metal in biaxial tension. *Int. J. Mech. Sci.*, 13, 217-229.
- Storen, S., Rice, J.R., 1975. Localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 421-441.
- Taylor, G.I., 1938. Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*, 62, 307-324.
- Teodosiu, C., Raphanel, J.L., Tabourot, L., 1991. Finite element simulation of the large elastoplastic deformation of multicrystals. In: Teodosiu C., Raphanel J.L., Sidoroff F. (Eds.), *Large Plastic Deformations*, A.A. Balkema, Rotterdam, pp. 153-168.
- Tong, W., Tao, H., Jiang, X., 2004. Modeling the rotation of orthotropic axes of sheet metals subjected to off-axis uniaxial tension. *J. Appl. Mech.*, 71, 521-531.
- Toth, L.S., Dudzinski, D., Molinari, A., 1996. Forming limit predictions with the perturbation method using stress potential functions of polycrystal viscoplasticity. *Int. J. Mech. Sci.*, 38 (8-9), 805-824.
- Vattré, A.J., Demkowicz, M.J., 2013. Determining the Burgers vectors and elastic strain energies of interface dislocation arrays using anisotropic elasticity theory. *Acta Mater.*, 61, 5172-5187.
- Vattré, A., Denoual, C., 2016. Polymorphism of iron at high pressure: A 3D phase-field model for displacive transitions with finite elastoplastic deformations. *J. Mech. Phys. Solids*, 92, 1-27.
- Wang, D., Diehl, M., Roters, F., Raabe, D., 2018. On the role of the collinear dislocation interaction in deformation patterning and laminate formation in single crystal plasticity. *Mech. Mat.*, 125, 70-79.

- Wesenberg, D.L., Sagartz, M.J., 1977. Dynamic fracture of 6061-T6 aluminum cylinders. *J. Appl. Mech.*, 44, 643-646.
- Wielke, B., 1976. Easy glide hardening of Zn and Cd between 4.2 and 400 K. *Phys. Stat. Sol. (a)*, 33, 241-246.
- Wulfinghoff, S., Böhlke, T., 2012. Equivalent plastic strain gradient enhancement of single crystal plasticity: theory and numerics. *Proc. R. Soc. A*, 468, 2682-2703.
- Xavier, M., 2019. Etude analytique et numérique du développement de la striction multiple pour des cylindres métalliques en expansion dynamique. Thèse de doctorat de l'Université de Lorraine, Metz, France.
- Xavier, M., Czarnota, C., Jouve, D., Mercier, S., Dequiedt, J.L., Molinari, A., 2020. Extension of linear stability analysis for the dynamic stretching of plates: spatio-temporal evolution of the perturbation, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 79, 103860.
- Yalcinkaya, T., Brekelmans, W.A.M., Geers, M.G.D., 2012. Non-convex rate dependent strain gradient crystal plasticity and deformation patterning. *Int. J. Solids Struct.*, 49, 2625-2636.
- Yamamoto, H., 1978. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. *Int. J. Fract.*, 14 (4), 347-365.
- Yefimov, S., Groma, I., Van der Giessen, E., 2004. A comparison of a statistical-mechanics based plasticity model with discrete dislocation plasticity calculations. *J. Mech. Phys. Solids*, 52, 279-300.
- Yefimov, S., Van der Giessen, E., 2005. Multiple slip in a strain-gradient plasticity model motivated by a statistical-mechanics description of dislocations. *Int. J. Solids Struct.*, 42, 3375-3394.
- Zhang, H., Ravi-Chandar, K., 2006. On the dynamics of necking and fragmentation – I. Real-time and post-mortem observations in Al6061-O. *Int. J. Fract.*, 142, 183-217.