



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique du comportement statique et vibratoire des poutres sandwich viscoélastiques à gradient de propriétés

Kouami Koutoati

► **To cite this version:**

Kouami Koutoati. Modélisation numérique du comportement statique et vibratoire des poutres sandwich viscoélastiques à gradient de propriétés. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université de Lorraine, 2020. Français. NNT : 2020LORR0290 . tel-03285140

**HAL Id: tel-03285140**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03285140>**

Submitted on 13 Jul 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Modélisation numérique du comportement statique et vibratoire des poutres sandwich viscoélastiques à gradient de propriétés

## THESE

Présentée et soutenue publiquement le 11 décembre 2020

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université de Lorraine**

Spécialité : Sciences des matériaux

Par

**Kouami KOUTOATI**

### Composition du jury:

Président :	Pr. Noureddine BOUHADDI	Université de Franche-Comté (FEMTO-ST) UBFC-France
Rapporteur :	Pr. Marco MONTEMURRO	Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (IM2), France
	HDr. Yao KOUTSAWA	LIST Luxembourg
Examineur :	Pr. Noureddine BOUHADDI	Université de Franche-Comté (FEMTO-ST) UBFC-France
	MCF Laetitia DUIGOU	Université de Bretagne Sud (IUT de Lorient), France
Directeurs :	MCFHC. Foudil MOHRI	Université de Lorraine (LEM3), France
	Pr. El Mostafa DAYA	Université de Lorraine (LEM3), France



## Remerciements

Cette thèse présente les résultats de recherches réalisées d'octobre 2017 à décembre 2020 au sein du Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3) de L'université de Lorraine. Au terme de ce travail, je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance envers tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de ce projet.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, les professeurs Foudil Mohri et El-Mostafa Daya pour m'avoir fait confiance en me confiant ce sujet de recherche passionnant et riche de connaissances scientifiques. Leurs directives, leurs nombreux conseils et leur rigueur scientifique m'ont permis d'approfondir et de parfaire mes connaissances en mécanique d'une façon générale et dans le contrôle des vibrations des structures en particulier. Je tiens à les remercier surtout, pour la patience dont ils ont su faire preuve pendant les périodes difficiles et de perdition au cours de ce travail.

Je tiens également à adresser mes sincères remerciements aux Dr Claude Atiezo et Fabrice Simlissi pour m'avoir soutenu dans mes projets d'étude en France.

Je remercie vivement Messieurs Marco Montemurro et Yao Koutsawa pour avoir accepté la lourde charge de rapporter mes travaux de thèse. Je tiens ici à leur exprimer ma profonde reconnaissance. Je n'oublie pas le professeur Nouredine Bouhaddi et Mme Laetitia Duigou pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury et d'examiner ainsi mon travail.

Mes remerciements vont également aux collègues du LEM3 et plus particulièrement à Komlan ATOESSI pour tous ces moments passés ensemble et son soutien tant professionnel que personnel.

Enfin mes remerciements vont à ma famille notamment à ma femme à mon fils Junior, à mes parents, à mes frères et sœurs pour leurs soutiens indéfectibles.

Une fois encore merci à tous !!!



*Je dédie cette thèse à mon fils Junior, à ma femme,  
à mes parents et à mes frères et sœurs*

# Table des matières

Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux.....	xii
Introduction générale.....	1
Chapitre 1: Etude bibliographique et positionnement du sujet de thèse .....	6
1.1 Introduction .....	7
1.2 Généralités sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement passif .....	8
1.2.1 Rappels sur les lois de comportements viscoélastiques .....	8
1.2.2 Notion d'amortissement .....	10
1.2.3 Facteurs environnementaux et comportement viscoélastique .....	12
1.2.4 Représentation des constantes d'élasticité .....	17
1.3 Modélisation des structures sandwichs pour l'amortissement passif .....	23
1.3.1 Champs cinématiques pour les structures sandwich .....	23
1.3.2 Méthodes de résolutions des problèmes de vibrations .....	28
1.4 Matériaux composites avancés et amortissement passif.....	40
1.4.1 Généralités sur les matériaux composites .....	40
1.4.2 Avantages et limites des matériaux composites .....	42
1.4.3 Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) .....	44
1.4.4 Matériaux composites FGM et modèles d'amortissement .....	50
1.5 Bilan et positionnement du sujet .....	54
Chapitre 2 : Un modèle élément fini pour le comportement statique et dynamique des poutres sandwich FGM avec couplage flexion-membrane.....	56
2.1 Introduction .....	57
2.2 Formulation élément fini du problème .....	57
2.2.1 Les théories de base du modèle .....	58
2.2.2 Formulation variationnelle du problème dynamique et d'équilibre statique. ....	64
2.2.3 Approche élément fini du problème statique et de vibration .....	70



2.3	Résultats numériques et discussions.....	72
2.3.1	Etudes statiques.....	74
2.3.2	Analyse des vibrations libres de poutres sandwichs FGM.....	92
2.4	Conclusion.....	100
Chapitre 3: Un modèle élément fini de poutre FGM viscoélastique pour l'amortissement passif des vibrations. ....		
3.1	Introduction.....	102
3.2	Formulation élément fini du problème d'amortissement passif des poutres FGM.....	102
3.2.1	Les théories de base du modèle viscoélastique.....	103
3.2.2	Variations des propriétés de la section de poutre FGM viscoélastique.....	106
3.2.3	Formulation variationnelle du problème de vibration et d'équilibre.....	108
3.2.4	Approche élément fini du problème d'amortissement des poutres FGM.....	114
3.2.5	Dépendance en fréquence du comportement viscoélastique.....	115
3.2.6	Lois de comportement viscoélastique.....	116
3.2.7	Résolution d'équations non linéaires par Diamant.....	118
3.3	Tests de validations numériques et discussions.....	122
3.3.1	Analyse statique.....	124
3.3.2	Analyse des vibrations libres.....	133
3.4	Conclusion.....	144
Chapitre 4: Analyse de la vibration forcée.....		
4.1	Introduction.....	147
4.2	Formulation du problème de vibration forcée.....	147
4.3	Les lois viscoélastiques et résolution du problème.....	150
4.4	Courbes de réponses.....	152
4.4.1	Modèle de poutre sandwich FGM/MCC/FGM.....	153
4.4.2	Modèle de poutre sandwich FGM/3M ISD112/FGM.....	159
4.4.3	Modèle de poutre sandwich FGM/PVB/FGM.....	164
4.5	Conclusion.....	169

Conclusion générale et perspectives.....	171
Annexe A : Fonctions de forme et matrice de fonction de forme et leurs gradients.....	175
Annexe A : Formulation variationnelle de l'énergie cinétique.....	178
Références bibliographiques.....	180

## Liste des figures

Figure 1. 1: Mécanisme de dégradation d'une structure composite (Ladevèze, 2006 [5]).....	5
Figure 1. 2: Microstructure des matériaux à gradient de propriétés FGM.....	5
Figure 1. 3: Variations du module de stockage $E$ et du facteur de perte $\eta$ à fréquence constante en fonction de la température ([9]).....	14
Figure 1. 4: Modèles rhéologiques standards classiques.....	18
Figure 1. 5: Modèles rhéologiques fractionnaires de base.....	19
Figure 1.6: Modèles cinématiques.....	25
Figure 1.7: Section droite symétrique d'une poutre sandwich.....	26
Figure 1. 8: Les éléments finis.....	32
Figure 1. 9: Caractéristiques de la bande passante.....	34
Figure 1. 10: Microstructure d'un matériau à gradient de propriétés FGM [69].....	44
Figure 1. 11: Variations de la microstructure d'un FGM.....	46
Figure 1. 12: Modèle de distribution matérielle dans une couche de FGM.....	48
Figure 1. 13: Variations de la fraction volumique d'un FGM suivant différent modèle de gradient.....	49
Figure 2. 1 Poutre FGM 2D avec une section multicouche.....	58
Figure 2. 2: Les différents types de sections droites étudiées.....	62
Figure 2. 3: Variations de la fraction volumique $V_c$ de la céramique dans l'épaisseur de : la section A (a), la section B (b) et la section C (c).....	63
Figure 2. 4: Conditions aux limites appliquées à la poutre.....	73
Figure 2. 5: (a) Poutre FGM en appui SP sous chargement réparti ; (b) propriétés géométriques de la section droite.....	75
Figure 2. 6: Déplacement en flexion (a) et en rotation (b) de la poutre en fonction du nombre d'éléments du maillage.....	75
Figure 2. 7: Variations des déplacements de la poutre SP en FGM (section de type A, $k=0$ ). ....	77
Figure 2. 8: Variations des déplacements de la poutre SP en FGM (section de type A, $k=10$ ). ...	77
Figure 2. 9: Variations du déplacement axial dans la section droite selon différentes théories de poutres.....	79
Figure 2. 10: Poutre SS et SP sous chargement réparti.....	80

Figure 2. 11: Variations du déplacement axial, vertical et de la rotation de la poutre SS et SP en matériau isotrope ( $k=0$ , section symétrique).....	81
Figure 2. 12: Variations du déplacement axial, vertical et de la rotation de la poutre SS et SP en matériau FGM ( $k=10$ , section non-symétrique).....	81
Figure 2. 13: Poutre FGM encastée-libre sous chargement réparti et sections droites.....	82
Figure 2. 14: Variations de la déformation et de la contrainte axiale dans la section FGM pour $k=0$ et $k=10$ .....	84
Figure 2. 15: Variations de la déformation et de la contrainte axiale dans la section multicouche (3-4-3) et (1-4-5).....	86
Figure 2. 16: Poutre en appui simple (SP, SS), poutre bi-encastée (CC) sous chargement réparti et poutre console (CF) sous chargement concentré.....	87
Figure 3.1: Poutre sandwich FGM viscoélastique 2D et section multicouche.....	103
Figure 3.2: Variations de la fraction volumique $V_m$ dans l'épaisseur de la section pour différentes valeurs de l'indices de puissance $k$ .....	107
Figure 3. 3: Poutre bi-encastée et Section multicouche viscoélastique .....	125
Figure 3. 4: Déflexion de la poutre console FGM/MCC/FGM avec $\eta_c = 0$ et $k=0;1;5$ et $10$ .....	126
Figure 3. 5: Variations de la déformation axial dans la section droite au bord encasté de la poutre console (FGM/MCC/FGM) pour $\eta_c = 0$ et $k=0,1,5,10$ . .....	128
Figure 3. 6: Variations de la contrainte axial dans la section droite au bord encasté de la poutre console (FGM/MCC/FGM) pour $\eta_c = 0$ et $k=0,1,5,10$ .....	129
Figure 3. 7: Variations de la contrainte axiale dans l'épaisseur de la poutre console FGM/MCC/FGM avec $\eta_c = 0$ et $k= 0; 1;5$ et $10$ . Comparaisons avec Abaqus .....	130
Figure 3. 8: Déflexion de la poutre console FGM/MCC/FGM pour $\eta_c = 0.1, 0.6, 1.0$ et $1.5$ avec $k=1$ .....	132
Figure 3. 9: Poutre sandwich encasté-libre et propriétés géométriques de la section.....	134
Figure 3. 10: Poutre bi-encastée et propriétés géométriques de la section .....	135
Figure 3.11: Poutres FGM/MCC/FGM en appui CF et CC. Propriétés de la section droite.....	137
Figure 3. 12: Les trois premiers modes de vibration de la poutre encastée-libre FGM/MCC/FGM pour $\eta_c = 1.5$ et $k=0$ .....	139
Figure 3. 13: Les trois premiers modes de vibration de la poutre encastée-libre FGM/MCC/FGM pour $\eta_c = 1.5$ et $k=1$ .....	140

Figure 3. 14: Les trois premiers modes de vibration de la poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM pour $\eta_c=1.5$ et $k=0$ .....	140
Figure 3. 15: Les trois premiers modes de vibration de la poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM pour $\eta_c=1.5$ et $k=1$ .....	141
Figure 3. 16: Variations du facteur de perte en fonction de l'indice de puissance $k$ pour une poutre CF et CC du modèle FGM/MCC/FGM avec $\eta_c=1.5$ .....	142
Figure 3. 17: Variations du facteur de perte en fonction de l'indice de puissance $k$ pour une poutre CF et CC du modèle FGM/3M ISD112/FGM.....	142
Figure 3. 18: Variations du facteur de perte en fonction de l'indice de puissance $k$ pour une poutre CF et CC du modèle FGM/PVB/FGM .....	143
Figure 4. 1: Poutre sandwich FGM viscoélastique 2D et section sandwich.....	148
Figure 4. 2 Poutres sandwichs et section multicouche viscoélastique .....	152
Figure 4. 3: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z1}$ en $x=L/2$ pour $\eta_c=1.5$ .....	155
Figure 4. 4 : Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM soumise au moment de flexion $M_y$ en $x=L/2$ pour $\eta_c=1.5$ .....	155
Figure 4. 5: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM pour $\eta_c=1.5$ sous l'action de la force $F_{z1}$ et du moment $M_y$ en $x=L/2$ .....	156
Figure 4. 6: Courbes de réponses du modèle de poutre console FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z2}$ en $x=L$ pour $\eta_c=1.5$ .....	156
Figure 4. 7: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre console FGM/MCC/FGM pour $\eta_c=1.5$ sous l'action de la force $F_{z2}$ en $x=L$ .....	157
Figure 4. 8: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-articulée FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z1}$ en $x=L/2$ pour $\eta_c=1.5$ .....	158
Figure 4. 9: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-articulée FGM/MCC/FGM soumise au moment exciteur $M_y$ en $x=L/2$ pour $\eta_c=1.5$ .....	158
Figure 4. 10: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-articulée FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z1}$ et au moment $M_y$ pour $\eta_c=1.5$ .....	159
Figure 4. 11: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastree FGM/3M ISD112/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z1}$ en $x=L/2$ .....	160

Figure 4. 12: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastree FGM/3M ISD112/FGM soumise au moment excitateur $M_y$ en $x=L/2$ .....	160
Figure 4. 13: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-encastree FGM/3M ISD112/FGM sous l'action de la force $F_{z1}$ et du moment $M_y$ en $x=L/2$ .....	161
Figure 4. 14: Courbes de réponses du modèle de poutre console FGM/3M ISD112/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z2}$ en $x=L$ .....	161
Figure 4. 15: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre console FGM/3M ISD112/FGM sous l'action de la force $F_{z2}$ en $x=L$ .....	162
Figure 4. 16: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/3M ISD112/FGM sous l'action de la force $F_{z1}$ en $x=L/2$ .....	162
Figure 4. 17: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/3M ISD112/FGM sous l'action du moment de flexion excitateur $M_y$ en $x=L/2$ .....	163
Figure 4. 18: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/3M ISD112/FGM sous l'action des excitations $F_{z1}$ et $M_y$ en $x=L/2$ .....	163
Figure 4. 19: Courbes de réponses du modèle poutre bi-encastree FGM/PVB/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z1}$ en $x=L/2$ .....	164
Figure 4. 20: Courbes de réponses du modèle poutre bi-encastree FGM/PVB/FGM soumise au moment excitateur $M_y$ en $x=L/2$ .....	165
Figure 4. 21: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-encastree FGM/PVB/FGM sous l'action de la force $F_{z1}$ et du moment $M_y$ en $x=L/2$ .....	165
Figure 4. 22: Courbes de réponses du modèle de poutre console FGM/PVB/FGM soumise à la force excitateur $F_{z2}$ en $x=L$ .....	166
Figure 4. 23: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre console FGM/PVB/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z2}$ en $x=L$ .....	166
Figure 4. 24: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/PVB/FGM soumise à la force excitatrice $F_{z1}$ en $x=L/2$ .....	167
Figure 4. 25: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/PVB/FGM soumise au moment excitateur $M_y$ en $x=L/2$ .....	168
Figure 4. 26: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/PVB/FGM soumise à la force $F_{z1}$ et au moment $M_y$ en $x=L/2$ .....	168

..

## Liste des tableaux

Tableau 1.1: Lois de comportement et modules opérationnels de modèles standards classiques	20
Tableau 1.2: Fonctions de cisaillement	27
Tableau 2.1: Propriétés des différents matériaux constitutifs du composite FGM	73
Tableau 2.2: Comparaison de la déflexion des poutres SS et SP pour différentes valeurs de l'indice $k$ selon différentes théories de poutre (valeurs en mm)	89
Tableau 2.3: Comparaison des théories de poutre à travers la déflexion d'une poutre bi-encastree en $L/2$ pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ (valeurs en mm)	90
Tableau 2.4: Comparaison des théories de poutre par l'étude de la déflexion au bord libre d'une poutre console pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ (valeurs en mm)	91
Tableau 2.5: Poutre FGM de section A: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différents élancements $\lambda$ et différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ , (--- non étudié)	94
Tableau 2.6: Poutre FGM de section B: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ et pour un élancement $\lambda=5$ (--- non étudié)	96
Tableau 2.7: Poutre FGM de section B: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ et pour un élancement $\lambda=20$ (--- non étudié)	97
Tableau 2.8: Poutre FGM de section C: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ et pour un élancement $\lambda=5$ (--- non étudié)	98
Tableau 2.9: Poutre FGM de section C: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance $k$ et pour un élancement $\lambda=20$ (--- non étudié)	99
Tableau 3.1 Paramètres du modèle viscoélastique 3M ISD112	117
Tableau 3.2: Propriétés matériaux de la poutre sandwich FGM /MCC/ FGM	123
Tableau 3.3: Propriétés matériaux de la poutre sandwich FGM /3M ISD112/ FGM	123
Tableau 3.4: Propriétés matériaux de la poutre sandwich FGM /PVB/ FGM	123
Tableau 3.5: Poutre FGM/MCC/FGM encastree-libre: 5 premiers fréquences propres et facteurs de pertes ( $k=0$ )	134
Tableau 3.6: Poutre FGM/3M ISD112/FGM encastree-libre: 5 premières fréquences propres et facteurs de perte ( $k=0$ )	135
Tableau 3.7: Poutre bi-encastree FGM/PVB/FGM: 5 premières fréquences propres et facteurs de perte ( $k=0$ )	136



Tableau 3.8: Poutre encastrée-libre FGM/MCC/FGM: fréquence propre et facteur de perte des trois premiers modes suivant les valeurs de l'indice $k$ pour $\eta_c = 1.5$ .....	137
Tableau 3. 9: Poutre bi-encastrée FGM/MCC/FGM: fréquence propre et facteur de perte des trois premiers modes suivant les valeurs de l'indice $k$ pour $\eta_c = 1.5$ .....	138

# Introduction générale

La préservation des édifices et des structures contre les phénomènes de fatigue et de rupture est un sujet qui préoccupe tant bien les industries que les centres de recherches. Ces phénomènes sont les causes principales de la ruine des édifices et des structures (effondrement des ponts, des bâtiments). L'ampleur des dégâts provoqués engendre des pertes économiques et malheureusement des fois des pertes en vies humaines. Au-delà des erreurs de dimensionnement, la qualité des matériaux utilisés dans la conception peut aussi être mise en cause. Dans la recherche de meilleures conditions de fonctionnement des infrastructures, l'analyse du comportement et des vibrations des structures retrouve un regain d'intérêt dans les bureaux d'études. L'objectif est de proposer des structures répondant au mieux aux défis en terme de sécurité, d'économie, d'esthétique et d'isolation acoustique. Malgré les avancées enregistrées en calcul de structures et en dimensionnement, les structures issues des bureaux d'études ne sont pas systématiquement à l'abri d'une ruine par rupture que ce soit à partir d'une fissure préexistante à la mise en service ou créée en service par fatigue (catastrophe ferroviaire de Meudon en 1842). La propagation des microfissures jusqu'à la rupture est l'une des conséquences de l'ampleur des amplitudes de vibrations en réponses à des sollicitations. De ce fait, la recherche de matériaux à haute performance minimisant la présence de microfissures est alors devenue un enjeu majeur dans les industries de métallurgie. Pour des besoins économiques et techniques (facilité de transport), les matériaux les plus recherchés aujourd'hui sont ceux qui sont capables de coupler la légèreté et la rigidité. Face à ces exigences, les matériaux composites représentent, une solution idéale de par leur multifonctionnalité intégrée. De nombreux secteurs d'ingénierie tels que l'aérospatial, l'automobile et le génie civil s'y intéressent fortement. La diversité de leurs domaines d'utilisation est surtout favorisée par le bon rapport poids /résistance qu'ils offrent. Parallèlement à ce succès dans les applications industrielles, le développement des procédés de fabrication pour l'amélioration continue des qualités de ces matériaux continue par nourrir leur attractivité et plus d'intérêt au niveau recherche. Les procédés de fabrication des structures en matériaux composites sont nombreux. On peut citer entre autres, le moulage au contact, moulage par projection, moulage sous vide, enroulement filamentaire, l'infusion, compression à chaud, enroulement par drapage etc. Parmi ces procédés certains demandent de fortes variations de températures. Or les différents matériaux constitutifs du composite n'ont pas forcément des propriétés thermiques et mécaniques (Module d'Young, densité, coefficient de Poisson, etc.) identiques. La dilation différentielle engendrée provoque l'apparition de défauts de fabrications qui se traduisent par la présence de contraintes résiduelles aux interfaces des différents composants du composite.

Ces défauts fragilisent la tenue mécanique du matériau et par conséquent favorisent le délaminage et la rupture par fatigue à long terme de ce dernier (Figure 1. 1). De plus, pour la protection thermique, une couche isolante est souvent ajoutée sur les faces des structures composites. La contribution de ces couches au comportement mécanique est souvent négligée. Les avancées enregistrées ces dernières années dans les procédés de fabrication, notamment la fabrication additive, ont permis la synthèse de nouveaux types de matériaux composites plus performants dans lesquels les surfaces de contact entre les différents constituants sont pratiquement inexistantes. Ce sont des matériaux à gradient de propriétés communément appelés en Anglais « Functionally Graded Material (FGM) ». Ces nouveaux types de composites sont de plus en plus perçus comme des matériaux pouvant se substituer très efficacement aux composites classiques. Cependant le concept de matériaux à gradient de propriétés ne date pas d'aujourd'hui. L'invention de ce matériau est attribuée aux chercheurs Japonais [1] dans le cadre de leurs travaux sur les barrières thermiques dans les années quatre-vingt. Les FGMs appartiennent à une classe de matériaux composites, présentant une microstructure très hétérogène (Figure 1. 2), avec des propriétés mécaniques et thermiques variant de façon graduelle à l'échelle microscopique suivant une ou plusieurs directions dans la structure. Ils sont constitués généralement de deux ou plusieurs matériaux selon les domaines d'application visés et les propriétés attendues. Pour une protection thermique on utilise souvent un mélange de la céramique (qui a une très bonne résistance contre les fortes températures et la corrosion) et de métal (qui est un matériau ductile utilisé pour éviter les ruptures brutes). Notons que dans les FGMs, la contribution de toutes les composantes est prise en compte aussi bien dans le comportement mécanique que thermique. Au début de leurs utilisations, les FGMs servaient de barrières de température puis très rapidement, les avancées dans les procédés, ont permis de les doter d'autres atouts : multifonctionnalité, habilité à contrôler les déformations, résistance à la corrosion, faible contrainte résiduelle, résistance à l'oxydation et une bonne résistance thermique. Ainsi, ces matériaux ont trouvé leurs applications dans plusieurs domaines d'ingénierie : les biomatériaux (par exemple le Ti-Co pour les implants dentaires), le nucléaire (W-Cu, composants face plasma des machines thermonucléaires), l'optique (matériaux à indice de réfraction graduel), la balistique (matériaux anti-impact).

La sensibilité de certains domaines d'application de ces nouveaux types de matériaux composites, exige au préalable, une bonne maîtrise de leur comportement vis-à-vis des instabilités statiques et vibratoires. Les recherches sur les matériaux à gradient de propriétés sont regroupées autour d'un certain nombre de thématiques : le calcul de contraintes résiduelles, l'analyse et l'étude de l'évolution de la température dans le matériau, la modélisation des contraintes et des déformations dans le matériau soumis à des phénomènes vibratoires et aussi, le problème d'amortissement des amplitudes de vibrations.

Il existe dans la littérature beaucoup de références sur les problèmes dynamiques et statiques des poutres FGM. D'ailleurs l'article de Chauhan et.al [2] présente de façon non exhaustive quelques travaux sur l'analyse du comportement dynamique des poutres FGM sous divers types de chargements (mécaniques et thermiques) et soumises à différentes conditions d'appui. Ces travaux ont certainement contribué à une meilleure compréhension du comportement de ces matériaux, cependant les modèles d'amortissement passif des poutres FGM, destinés aux contrôles des instabilités, restent quasi inexistantes dans la littérature. Pour réduire et contrôler l'amplitude des vibrations des structures, il existe dans la littérature trois types de solutions. Une première solution consiste à l'annulation du bruit provoqué par les vibrations, par la création d'une source opposée à la source excitatrice. Cette technique élimine le bruit sans la source de vibration elle-même. Une deuxième technique consiste à créer une barrière à la transmission du bruit d'une structure à une autre par isolation sans toutefois supprimer la source des vibrations. Enfin la troisième solution qui reste la plus répandue, consiste à intégrer au système depuis la conception une couche amortissante afin d'atténuer l'amplitude des vibrations. Cette dernière technique est basée sur l'utilisation des matériaux possédant des propriétés amortissantes qui sont incorporés au système. Elle ne nécessite donc pas l'intervention d'un système extérieur, d'où le nom d'amortissement passif. Le principe de cette technique, dans la pratique, réside dans l'utilisation d'une mince couche de matériaux viscoélastiques, contraindre entre deux couches métalliques. Cette configuration permet de doter les structures d'un fort pouvoir amortissant tout en conservant leur résistance et leur rigidité. Dans ce travail, nous allons nous intéresser uniquement aux modèles passifs pour le contrôle des instabilités statiques et vibratoires des poutres FGM.

Il est vrai que les matériaux viscoélastiques sont une des meilleures solutions pour contrôler l'amplitude des vibrations, mais l'une des difficultés de la modélisation des structures sandwichs à cœur viscoélastique est la résolution d'équations aux valeurs propres non-linéaires complexes. Cette non linéarité est de type matérielle et est induite par la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. Des solutions existent pour contourner cette difficulté, mais essentiellement pour des structures à matériaux isotropes. En ce qui concerne les composites, d'autres paramètres matériels sont à prendre en compte dans l'étude de l'amortissement de la structure. Des travaux ont été menés en ce sens notamment, pour des composites classiques où les effets de positionnement du composite lui-même ou l'orientation des fibres (dans le cas des composites fibreux) sur l'amortissement ont été étudiés (thèse de Akoussan [3]). Quoique des modèles d'amortissement passif de structures composites existent, l'étude des structures sandwichs FGM viscoélastiques implique, en plus du caractère anisotrope du matériau, un nouveau paramètre qui modélise la variation continue des propriétés.

En effet, le comportement des structures FGM (poutres, plaques, coques) de par leurs propriétés variables dans l'épaisseur et/ou dans la longueur, présente des lois complexes. Ceci rend leurs modélisations très difficiles. Les solutions analytiques sont rares. Dans les calculs numériques par éléments finis, des modèles complets en 3D sont souvent nécessaires. Les FGMs à lois de comportement élastiques ou viscoélastiques ne sont pas intégrés dans les codes de calcul. Un maillage fin dans les couches est souvent nécessaire pour la convergence des calculs. Ce qui rend le temps de préparation des calculs et de traitement assez long. D'où l'intérêt de ce travail, de proposer des modèles réduits pour l'étude des poutres FGM comme alternative aux modèles complets 3D.

Les modèles numériques que nous proposons dans ce travail, sont basés sur la méthode des éléments finis et dédiés à l'analyse du comportement et des vibrations des poutres sandwich FGM à cœur viscoélastique présentant un comportement non linéaire. Le problème aux valeurs propres non-linéaire dépendant de la fréquence des vibrations, est résolu par la technique d'homotopie couplée à la méthode asymptotique numérique et à la différentiation automatique, développées dans notre équipe de recherche. Les matériaux à gradient de propriétés présentent une répartition matérielle particulière définissant le caractère non-symétrique de leurs sections droites. Cette configuration rend certainement les structures en FGM très sensibles aux effets de couplages spatiaux. Ce phénomène, très souvent négligé dans la littérature, est pris en compte dans les modèles proposés dans ce travail. Aussi, son effet sur l'amortissement, peut être bénéfique pour des besoins d'optimisation. De plus l'utilisation des FGM comme matériaux de substitution des composites classiques, offre de nouvelles pistes dans la recherche du contrôle efficace des amplitudes de vibrations, y compris celles des modes de basses fréquences, pour lesquels les solutions offertes par les composites classiques restent insuffisantes (thèse de Akoussan [3]).

Afin de présenter clairement les différentes étapes suivies pour atteindre nos objectifs, ce rapport de thèse est structuré en quatre grands chapitres :

Le [chapitre 1](#) est consacré à l'état de l'art sur l'étude des matériaux viscoélastiques et le calcul des propriétés modales dans le cas des structures sandwich à cœur viscoélastique. Ensuite, des généralités sur les matériaux composites, et en particulier les matériaux à gradient de propriétés, sont présentées.

Dans le [chapitre 2](#) nous proposons une formulation élément fini pour l'étude statique et des vibrations libres des poutres sandwich FGM à comportement purement élastique. Pour ce modèle on adopte une cinématique unique pour toutes les couches. Le modèle classique de poutre et des modèles de cisaillement de premier ordre et d'ordre élevé sont intégrés. Des applications en comportement statique et en vibrations libres sont étudiées.

Les différentes théories de poutre sont comparées en tenant compte de l'effet de couplage flexion/membrane et rotation/membrane. Le calcul des propriétés modales se fait par des méthodes classiques de résolution de problèmes aux valeurs propres et aux vecteurs propres comme la méthode de Lanczos [4].

Un modèle de poutre sandwich FGM viscoélastique est présenté dans le [chapitre 3](#). Pour ce modèle basé sur la méthode des éléments finis, on adoptera la cinématique zig-zag pour la bonne prise en compte du cisaillement important que subit la couche viscoélastique. La résolution du système non-linéaire qui découle du problème de vibration, est possible en adoptant la technique d'homotopie couplée à la méthode asymptotique numérique et à la différentiation automatique. Ici également, des applications en comportement statique et vibratoire sont possibles.

Au [chapitre 4](#), le problème de vibration forcée est abordé. Il s'agira surtout d'étudier l'apport des matériaux FGM sur le pouvoir amortissant des structures par analyse des courbes de réponses.

Une conclusion générale et les perspectives à donner à ce travail, clôtureront le mémoire.

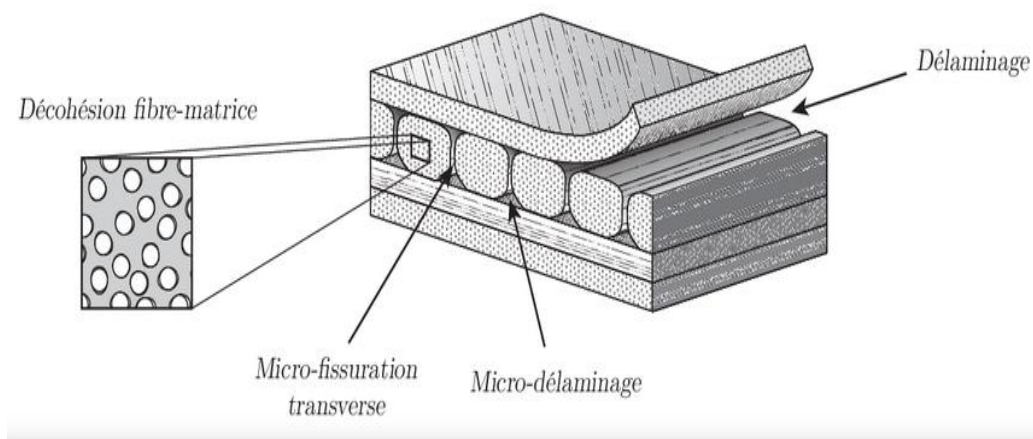


Figure 1. 1: Mécanisme de dégradation d'une structure composite (Ladevèze, 2006 [5])

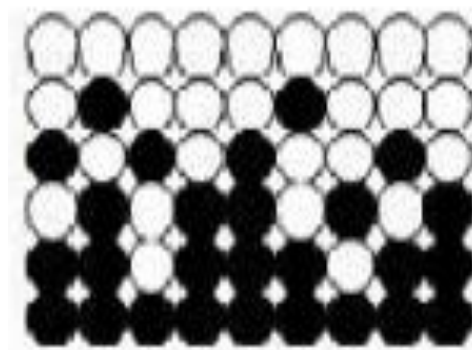


Figure 1. 2: Microstructure des matériaux à gradient de propriétés FGM

# Chapitre 1: Etude bibliographique et positionnement du sujet de thèse

## Sommaire

---

1.1	Introduction .....	7
1.2	Généralités sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement passif .....	8
1.2.1	Rappels sur les lois de comportements viscoélastiques .....	8
1.2.2	Notion d'amortissement .....	10
1.2.3	Facteurs environnementaux et comportement viscoélastique .....	12
1.2.4	Représentation des constantes d'élasticité .....	17
1.3	Modélisation des structures sandwichs pour l'amortissement passif .....	23
1.3.1	Champs cinématiques pour les structures sandwich .....	23
1.3.2	Méthodes de résolutions des problèmes de vibrations .....	28
1.4	Matériaux composites avancés et amortissement passif.....	40
1.4.1	Généralités sur les matériaux composites .....	40
1.4.2	Avantages et limites des matériaux composites .....	42
1.4.3	Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) .....	44
1.4.4	Matériaux composites FGM et modèles d'amortissement .....	50
1.5	Bilan et positionnement du sujet.....	54

---

## 1.1 Introduction

Assurer la longévité des structures pour un coût de fabrication raisonnable est la préoccupation majeure des constructeurs. Elle peut passer par le contrôle passif des amplitudes de vibrations, qui reste un moyen efficace pour dissiper l'énergie de déformation et l'énergie sonore, sous forme d'énergie thermique afin d'éviter la ruine précoce des structures par fatigue. L'amortissement passif des vibrations apporte aux usagers, le confort (élimination du bruit) et la sécurité (atténuation des déplacements et contraintes au niveau des résonances) tout en assurant une durée de vie satisfaisante de la structure. D'un point de vue pratique, la technique d'amortissement passif se résume à l'utilisation des structures sandwich de type poutre, plaque ou coque constituées d'une couche viscoélastique insérée entre deux couches élastiques. Soucieux des effets de nuisance occasionnés par les vibrations, nombreux sont les domaines d'application de cette technique dans l'ingénierie : aérospatial, automobile, aéronautique, génie civil, etc. Dans ces applications, les sandwich étaient au début de leurs utilisations, constitués de couches isotropes. Avec le souci d'incorporer davantage de propriétés dans les infrastructures tout en assurant leur légèreté, les matériaux composites sont devenus incontournables pour améliorer et optimiser les propriétés requises. L'avantage de l'utilisation de ces matériaux composites réside dans le bon rapport poids/rigidité qu'ils offrent en plus de leur multifonctionnalité intégrée. En ce sens, les composites à fibre, au-delà de leur légèreté et leur bonne rigidité, offrent la possibilité de jouer sur l'orientation de leurs fibres, pour améliorer la résistance et les propriétés amortissantes des structures.

Les structures composites sont conçues et adaptées aux domaines spécifiques et aux sollicitations auxquelles elles doivent faire face en service. Pour des domaines demandant de fortes variations de températures, comme les réacteurs de fusion thermonucléaires, les matériaux isotropes et les composites classiques montrent leurs limites. En effet la forte variation de température et le chargement cyclique altèrent leurs propriétés mécaniques et diminuent considérablement leur durée de vie. Dans ce cas, pour garantir la sécurité de la structure, des moyens financiers supplémentaires sont à prévoir pour des interventions régulières de maintenance. Face à cette problématique, les matériaux composites à gradient de propriétés constituent une solution potentielle, pour satisfaire le cahier de charge. En effet, grâce à leurs propriétés matériaux graduellement continues et la présence de la céramique comme composant, les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials, FGM) sont d'excellentes barrières thermiques. Pour rappel, ces matériaux FGM ont été proposés pour la première fois par des chercheurs Japonais en 1996 [1] comme matériaux à haut pouvoir thermique. Mais aujourd'hui ce concept de matériaux à gradient de propriétés retrouve un regain d'intérêt dans l'ingénierie grâce à la flexibilité qu'il offre dans le contrôle de la microstructure et de la texture des composites. Avec ce nouveau concept, il est devenu plus simple d'adapter les propriétés du matériau aux sollicitations.



Par ailleurs, de par leurs microstructures et leurs propriétés graduelles (Figure 1. 2), les FGM constituent, de nouvelles pistes de solutions, dans les efforts d'amélioration du pouvoir amortissant des structures surtout pour les modes de vibrations de basses fréquences, difficiles à amortir avec les composites classiques [3]. Les domaines de recherche sur les structures à gradient de propriétés sont nombreux, allant des techniques de conception à la modélisation du comportement. L'étude de leur comportement face aux instabilités statiques et vibratoires, qui constitue d'ailleurs le but de ce travail, contribue d'un point de vue objectif, à améliorer leur efficacité et leur durée de vie. Cependant, la modélisation du comportement statique et dynamique des structures sandwich viscoélastiques se heurte souvent à certaines difficultés. Ces dernières sont dues, d'une part, au choix du champs cinématique qui approxime le mieux les champs de déformations de la structure et, d'autre part, à la résolution du problème non-linéaire qui régit le mouvement de vibration.

Dans ce chapitre, nous ferons un rappel sur les matériaux viscoélastiques et la notion d'amortissement. Ensuite, nous présenterons les différentes théories cinématiques souvent adoptées pour modéliser les poutres sandwich viscoélastiques puis, les différentes méthodes de résolutions proposées dans la littérature pour la recherche de solutions du problème aux valeurs propres non-linéaire. Dans la suite une étude de généralité sur les matériaux composites, en occurrence les matériaux à gradient de propriétés, sera exposée suivie de quelques travaux déjà effectués en statique et en dynamique sur les poutres sandwich FGM.

## **1.2 Généralités sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement passif**

### **1.2.1 Rappels sur les lois de comportements viscoélastiques**

Le comportement viscoélastique est un comportement intermédiaire à celui d'un solide idéal dit "Hookéen" et celui d'un liquide parfait dit "Newtonien". La réponse d'un matériau viscoélastique soumis à une sollicitation (contrainte ou déformation) est alors un couplage entre la réponse d'un solide élastique et celle d'un fluide visqueux. En d'autres termes, la partie élastique de cette réponse vient de sa capacité à restituer intégralement l'énergie de déformation (contrainte proportionnelle à la déformation) et sa partie visqueuse est due à son pouvoir dissipateur d'énergie de déformation (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation). Notons que, le comportement viscoélastique est modélisé par une loi variant dans le temps, puisque, la réponse à une sollicitation dépend de l'histoire des sollicitations. Cette loi peut être considérée comme linéaire, s'il existe une correspondance linéaire entre l'histoire des sollicitations et des réponses.

Ainsi, pour un échelon de contrainte  $\sigma_{kl}^0$  ou de déformation  $\varepsilon_{kl}^0$  appliqué à l'instant  $t_0$ , la réponse en viscoélasticité linéaire à un instant  $t$ , est obtenue à partir des fonctions de fluage et de relaxation dans l'espace temporel :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathfrak{F}_{ijkl}(t, t_0) \sigma_{kl}^0, \\ \sigma_{ij}(t) = \mathfrak{R}_{ijkl}(t, t_0) \varepsilon_{kl}^0, \end{cases} \quad (1.1a-b)$$

où  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{R}$  représentent, respectivement, la fonction de fluage et de relaxation.  $\varepsilon_{ij}(t)$  et  $\sigma_{ij}(t)$  sont, respectivement, les composantes des tenseurs de déformation et de contrainte dépendantes du temps. Il est donc possible, d'exprimer la réponse du matériau à toute histoire de sollicitations à partir de la connaissance de la fonction de fluage et de relaxation. Par l'application du principe de superposition Boltzmann, il est donné de constater que la réponse en élasticité linéaire, est la somme d'une élasticité instantanée et d'un effet de mémoire tenant compte de l'histoire des sollicitations. Les études ont montré que, pour un matériau viscoélastique homogène, linéaire et non vieillissant (propriétés non évolutives dans le temps), la loi de comportement viscoélastique traduisant l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation (et vice-versa), peut-être exprimée dans l'espace temporel ou dans l'espace fréquentiel. Ainsi, en utilisant l'algèbre de convolution de Riemann, le calcul des lois de comportements viscoélastiques peut s'effectuer dans le temps comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathfrak{F}_{ijkl}(t) * \dot{\sigma}_{kl}(t), \\ \sigma_{ij}(t) = \mathfrak{R}_{ijkl}(t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(t), \end{cases} \quad (1.2a-b)$$

où  $\dot{\sigma}(t)$  est la dérivée par rapport au temps de  $\sigma(t)$ , et  $\dot{\varepsilon}(t)$  la dérivée par rapport au temps de  $\varepsilon(t)$ . Cette loi écrite dans l'espace temporel (Equation 1.2), peut être ramenée dans l'espace fréquentiel en utilisant la transformé de Laplace et de Carson sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(s) = \mathfrak{F}_{ijkl}^*(s) \sigma_{kl}(s), \quad s \in \mathbb{C}, \\ \sigma_{ij}(s) = \mathfrak{R}_{ijkl}^*(s) \varepsilon_{kl}(s), \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $\mathfrak{R}_{ijkl}$ ,  $\mathfrak{R}_{ijkl}^*$  et  $\mathfrak{F}_{ijkl}$ ,  $\mathfrak{F}_{ijkl}^*$  sont respectivement, les tenseurs d'ordre quatre des modules opérationnels et des complaisances opérationnelles. Une relation fondamentale existe entre ces deux tenseurs, elle s'exprime comme suit.

$$\mathfrak{R}_{ijkl}^*(s) = \left[ \mathfrak{I}_{ijkl}^*(s) \right]^{-1}. \quad (1.4)$$

D'après le principe de correspondance élastique-viscoélastique, la résolution d'un problème de viscoélasticité peut se ramener à la résolution d'un problème élastique équivalent. Ainsi, en s'appuyant sur les hypothèses de linéarité et de non vieillissement du comportement viscoélastique, la loi reliant la contrainte à la déformation peut être exprimée sous une forme analogue à la loi de Hooke généralisée en élasticité linéaire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.5)$$

où  $C_{ijkl}$  est le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques.

Plus de détails sur la modélisation mathématique de la loi de comportement viscoélastique, peuvent être trouvés dans la thèse de Bilasse [6].

## 1.2.2 Notion d'amortissement

La réponse d'un matériau viscoélastique à une sollicitation, dépend de la nature de cette dernière. Dans ce chapitre, on supposera que le matériau est soumis à des sollicitations harmoniques.

Le phénomène d'amortissement est induit par un retard entre la réponse et la sollicitation et se traduit par la dissipation de l'énergie de déformation par des frottements internes.

### - Amortissement et retard de réponse.

Considérons un matériau viscoélastique non vieillissant soumis à une sollicitation harmonique en contrainte de la forme :

$$\sigma_{kl}(t) = \text{Re} \left[ \sigma_{kl}^0 e^{i\omega t} \right] = \sigma_{kl}^0 \cos(\omega t), \quad (1.6)$$

où  $\text{Re}$  désigne la partie réelle,  $\omega$  la pulsation et  $i$  le nombre complexe défini par  $i^2 = -1$ . La réponse en déformation du matériau peut être exprimée sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \text{Re} \left[ \mathfrak{I}_{ijkl}^*(i\omega) e^{i\omega t} \right], \\ \mathfrak{I}_{ijkl}^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathfrak{I}_{ijkl}(t) e^{-i\omega t} dt. \end{cases} \quad (1.7a-b)$$

De même pour une sollicitation harmonique en déformation  $\varepsilon_{kl}(t) = \text{Re}[\varepsilon_{kl}^0 e^{i\omega t}] = \varepsilon_{kl}^0 \cos(\omega t)$ , la réponse du matériau en contrainte peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}^0 \text{Re} \left[ \mathfrak{R}_{ijkl}^*(i\omega) e^{i\omega t} \right], \\ \mathfrak{R}_{ijkl}^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathfrak{R}_{ijkl}(t) e^{-i\omega t} dt. \end{cases} \quad (1.8a-b)$$

Les tenseurs impliqués dans la réponse du matériau peuvent se décomposer en leur partie réelle et imaginaire comme donnée dans les relations suivantes.

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{ijkl}^*(i\omega) = \mathfrak{S}'_{ijkl}(\omega) + i\mathfrak{S}''_{ijkl}(\omega), \\ \mathfrak{R}_{ijkl}^*(i\omega) = \mathfrak{R}'_{ijkl}(\omega) + i\mathfrak{R}''_{ijkl}(\omega). \end{cases} \quad (1.9)$$

Les tenseurs  $\mathfrak{S}'_{ijkl}$  et  $\mathfrak{S}''_{ijkl}$  représentent respectivement, la complaisance de stockage et la complaisance de perte. De même, les tenseurs  $\mathfrak{R}'_{ijkl}$  et  $\mathfrak{R}''_{ijkl}$  définissent respectivement, le module de stockage et de perte. En adoptant la notation complexe de ces tenseurs (un module et une phase), les réponses en déformation et en contrainte aux sollicitations harmoniques, peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{kl}(t) = \sigma_{kl}^0 \cos(\omega t), \\ \varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 \left| \mathfrak{S}_{ijkl}^*(i\omega) \right| \cos(\omega t + \phi(\omega)), \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{kl}(t) = \varepsilon_{kl}^0 \cos(\omega t), \\ \sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}^0 \left| \mathfrak{R}_{ijkl}^*(i\omega) \right| \cos(\omega t + \phi(\omega)). \end{cases} \quad (1.11)$$

On peut remarquer dans les deux expressions de la réponse viscoélastique, l'apparition d'un déphasage  $\phi(\omega)$  entre la sollicitation et la réponse. Ce retard de réponse est à l'origine de l'amortissement du matériau viscoélastique. Généralement, on définit cet amortissement comme la tangente de l'angle de déphasage :

$$\eta(\omega) = \tan(\phi(\omega)). \quad (1.12)$$

L'amortissement  $\eta$ , aussi dit le coefficient de perte, caractérise la capacité du matériau à dissiper sous forme de chaleur l'énergie de déformation reçue.

Des études ont montré que plus ce facteur est grand plus importante est l'énergie dissipée. Ainsi, plusieurs travaux de recherche se focalisent sur le calcul de ce facteur de perte dans l'évaluation du pouvoir amortissant des matériaux viscoélastiques.

### 1.2.3 Facteurs environnementaux et comportement viscoélastique.

Plusieurs études, basées sur des essais expérimentaux, ont montré que les propriétés mécaniques (module d'Young, densité, ...) des matériaux viscoélastiques, varient fortement en fonction de certains facteurs appelés facteurs environnementaux. Parmi ces facteurs, on peut citer l'humidité, la prédéformation statique, la précontrainte statique, la température  $T$  et la pulsation de vibration  $\omega$ .

Dans les sections suivantes, on discutera de la dépendance des constantes élastiques en fréquence et en température. Ces derniers représentent entre autres, les facteurs environnementaux les plus influents.

#### 1.2.3.1 Effets de la fréquence de vibration sur le comportement viscoélastique.

On considère un matériau viscoélastique linéaire, homogène, isotrope et non vieillissant, soumis à une sollicitation harmonique uniaxiale.

Pour ce type de sollicitation, il est admis que le module opérationnel dans l'espace fréquentiel  $\mathfrak{R}^*(i\omega)$  correspond tout simplement au module d'Young complexe  $E^*(i\omega)$ , s'il s'agit d'une traction (compression) et au module de cisaillement complexe  $G^*(i\omega)$ , dans le cas d'une sollicitation en cisaillement pur. Ces constantes élastiques, en présence de matériaux viscoélastiques, sont dépendantes de la fréquence de vibration  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(i\omega) = E^*(i\omega) &= E'(\omega) + iE''(\omega) && \text{en traction,} \\ \mathfrak{R}(i\omega) = G^*(i\omega) &= G'(\omega) + iG''(\omega) && \text{en cisaillement.}\end{aligned}\tag{1.13}$$

Dans ces conditions, le facteur de perte est le rapport entre la partie réelle et la partie imaginaire du module d'Young ou du module de cisaillement complexe :

$$\eta(\omega) = E''(\omega) / E'(\omega) = G''(\omega) / G'(\omega).\tag{1.14}$$

On rappelle que, la relation fondamentale liant le module de cisaillement et le module d'Young intervenant dans l'équation (1.14) est donnée par :

$$G^*(i\omega) = \frac{E^*(i\omega)}{2(1 + \nu(\omega))}, \quad (1.15)$$

où  $\nu(\omega)$  est le coefficient de Poisson dépendant de la fréquence de vibration [7]. La détermination de ce coefficient est souvent confrontée à des problèmes d'ordre expérimental [8]. Aussi, pour des raisons de simplicité des modèles mathématiques, le coefficient de Poisson est généralement supposé constant dans la pratique.

### 1.2.3.2 Effets de la température sur le comportement viscoélastique.

Par l'analyse des résultats de tests expérimentaux, la température est identifiée comme le facteur d'environnement ayant le plus d'influence sur le comportement des matériaux viscoélastiques [8].

Sous son effet, les matériaux viscoélastiques se présentent sous quatre états physiques (

Figure 1. 3) : l'état vitreux (*a*), l'état de transition (*b*), l'état caoutchouteux (*c*) et l'état fluide (*d*). Chacun de ces états correspond à une zone de température donnée.

La première zone (*a*) correspond aux domaines de températures relativement faibles. Le matériau viscoélastique se trouve dans un état vitreux. Cet état est caractérisé par un module de stockage maximal et variant très peu avec la température. Le facteur de perte part d'une valeur faible et croît très rapidement avec la température. Dans cette zone le matériau se déforme très peu.

Dans la zone de transition (*b*), le module de stockage est décroissant avec un facteur de perte atteignant sa valeur maximale au milieu de la zone. La température de changement d'état vitreuse  $T_g$ , est obtenue dans cette zone et est dépendante de la fréquence de vibrations.

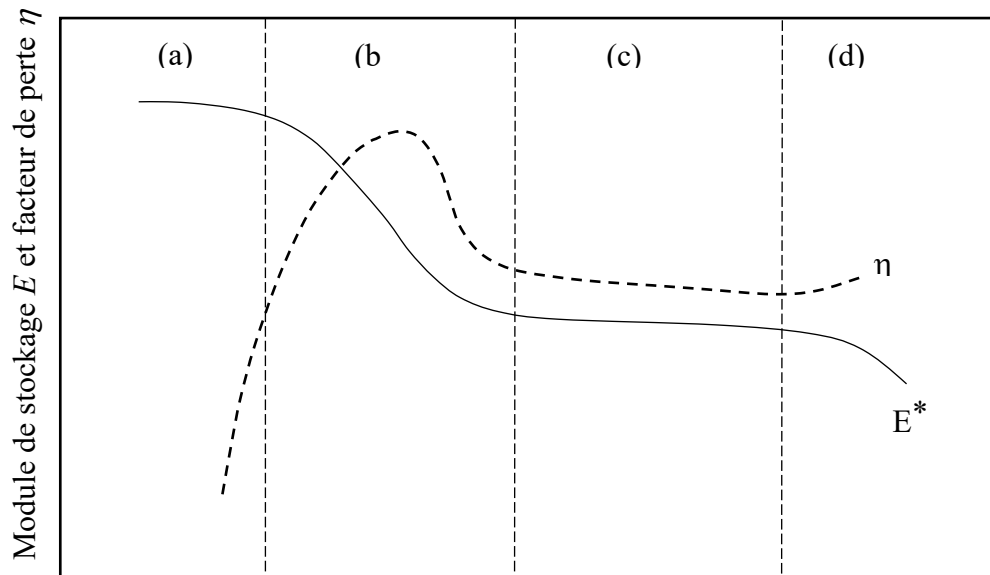


Figure 1. 3: Variations du module de stockage  $E$  et du facteur de perte  $\eta$  à fréquence constante en fonction de la température ([9])

La zone (c) est caractérisée par un module de stockage et un facteur de perte relativement faibles et variant très peu avec la température.

La dernière zone (d) correspond à un état fluide de la matière. Dans cette plage de température, l'état du matériau est très instable. Ce qui rend complexe sa prise en compte dans les études de conception. Aussi, pour beaucoup de matériaux viscoélastiques, cette zone n'est pas définie.

A partir de ces analyses, on se rend compte de la complexité d'une modélisation du comportement des composites en polymères. En effet, pour une fréquence donnée, ces polymères peuvent se retrouver dans des zones de températures différentes et donc dans des états différents. D'où les difficultés rencontrées dans la modélisation.

Quel que soit la nature du matériau viscoélastique, l'objectif premier de son utilisation reste son apport en amortissement à la structure. En observant la

Figure 1. 3, il convient de solliciter ces matériaux dans la zone (b) puisque dans cette zone l'amortissement atteint sa valeur maximale. Toutefois, la température n'influence pas que l'état physique du matériau viscoélastique. Dans le cas d'un chargement thermique sévère, on note l'apparition d'une déformation  $\mathcal{E}$  due à la contrainte  $\sigma$  induit par la variation de température. Selon Schapery [10], la relation constitutive dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathfrak{F}(\xi - \xi') \frac{d\sigma}{d\xi'} d\xi', \quad (1.16)$$

où  $\mathfrak{F}(\xi - \xi')$  est la fonction de fluage dépendante de la température et du temps, et  $\xi$  un paramètre dépendant du temps appelé en Anglais “ reduced time parameter ” et défini par :

$$\begin{cases} \xi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha_T}, \\ \xi'(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha_T}, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec  $\tau = \xi - \xi'$  l'incrément de temps et  $\alpha_T$  le facteur de décalage en température fonction de la température absolue  $T(\tau)$ . Dans l'équation constitutive (1.16), il est admis que  $\sigma = \varepsilon = 0$  pour  $t \leq 0$ .

### 1.2.3.3 Couplage entre la fréquence et la température

L'étude expérimentale des constantes élastiques des matériaux viscoélastiques, dans le domaine fréquence/température, a montré que les courbes de variations du module de stockage et du facteur de perte en fonction de la fréquence, à une température fixée, gardaient les mêmes allures que si on les considérait à une fréquence constante en faisant varier la température. Cette similitude amène à supposer une relation d'équivalence entre la fréquence et la température. Par un décalage en température, il est donc possible de superposer ces courbes sur des courbes maîtresses choisies comme référence [11]. De là, la loi d'équivalence fréquence/température est posée par introduction d'un paramètre décrivant le couplage entre la température et la fréquence appelé « fréquence réduite » et noté  $\alpha_T \omega$ . Ce paramètre n'est autre que le produit du paramètre de décalage en température  $\alpha_T$  et de la fréquence de vibration  $\omega$ . Rappelons que ce paramètre de décalage est fonction de la température ( $T$ ) et permet le passage de l'échelle de fréquence réelle à l'échelle de fréquence réduite. Ainsi, par interpolation des courbes maîtresses, les variations du module élastique et du facteur de perte peuvent être traduites par des fonctions analytiques :

$$E^*(\omega, T) = E'(\omega, T) [1 + i\eta(\omega, T)] = E'(\alpha_T \omega) [1 + i\eta(\alpha_T \omega)]. \quad (1.18)$$

Le principe de superposition fréquence/température est un principe général qui permet de décrire le comportement de beaucoup de matériaux viscoélastiques. Cependant, dans le cas d'un mélange de polymères, on peut se retrouver avec des matériaux présentant différents états physiques, pour une température donnée. Dans ce cas, l'application de l'hypothèse de fréquence réduite devient complexe d'où sa limite.



En résumé, la détermination du paramètre de décalage en température et du module de stockage rend possible la représentation des modules en fonction de la température et de la fréquence. Dans la pratique, le facteur de décalage en température est déterminé par des formules empiriques existantes, dont les plus utilisées sont :

- La loi de Williams, Landel et Ferry [12]. Connue aussi sous le nom de WLF, cette loi est applicable dans la zone de transition ( $b$ ) plus précisément dans la zone de températures supérieures à la température vitreuse  $T_g$ . Dans la pratique, une plage de température de 50°C est admise à partir de la température  $T_g$ . La formulation analytique de cette loi est donnée par la relation :

$$\log(\alpha_T) = \frac{-C_1(T - T_g)}{C_2 + T - T_g}, \quad (1.19)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des coefficients caractéristiques du matériau ( $C_1$  est sans unité et  $C_2$  est une température)

- La loi de Landel. Cette loi implique des températures caractéristiques du matériau  $T_a$  et  $T_b$  et est donnée par :

$$\log(\alpha_T) = \frac{T_a}{T} - \frac{T_a}{T_b}. \quad (1.20)$$

- La loi d'Arrhenius [13]. Elle a l'avantage d'être valable dans toute la zone de transition, que ce soit dans la région de basse température ( $T < T_g$ ) ou dans la région d'écoulement ( $T > T_g$ ). Elle exprime le paramètre de décalage sous la forme :

$$\log(\alpha_T) = \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right). \quad (1.21)$$

Dans cette formule,  $T_0$  est la température de référence,  $E_a$  représente l'énergie d'activation de la réaction en  $J.mol^{-1}$  et  $R = 8.314 J.mol^{-1}K^{-1}$  est la constante des gaz parfaits.

- La loi de puissance. Il s'agit d'une loi empirique donnant le paramètre de décalage en fonction des paramètres caractéristiques du matériau  $A$ ,  $T_p$  et  $n$ . Pour cette loi, le paramètre de décalage est donné par la relation :

$$\alpha_T = \left( 1 + \frac{T - T_p}{A} \right)^n. \quad (1.22)$$

Dans cette relation  $T$ ,  $T_p$  et  $A$  sont des températures et  $n$  un paramètre réel.

## 1.2.4 Représentation des constantes d'élasticité

Le comportement des matériaux viscoélastiques est parfaitement décrit par la connaissance des lois donnant les variations de leurs propriétés en fonction des facteurs environnementaux. Pour des études dynamiques, une représentation dans l'espace fréquentiel est nécessaire. Pour cela, on a souvent recours à des représentations en fonction de la fréquence de vibration des modules complexes à savoir le module d'Young et le module de cisaillement. Cette représentation peut se faire par tabulation ou par des formules analytiques impliquant des paramètres matériaux.

### 1.2.4.1 Formes tabulées

A partir des résultats des études expérimentales, on représente par tabulation et en fonction de la fréquence réduite  $\alpha T \omega$ , les valeurs du module de stockage, du facteur de perte et du facteur de décalage en température, en différents points définis par le couple fréquence-température  $(\omega, T)$ . Ainsi, pour connaître la valeur du module de stockage et du facteur de perte en un point quelconque  $(\omega_k, T_k)$ , on interpole ou extrapole, les valeurs expérimentales du facteur de décalage pour trouver d'abord la fréquence réduite puis, on extrapole ou interpole le module de stockage et le facteur de perte en cette valeur de la fréquence réduite. La loi tabulée permet une bonne représentation du comportement viscoélastique dépendant fortement de la fréquence et de la température sur de larges domaines de variations. En plus, elle permet de contourner les étapes de choix de représentation et d'identification de paramètres. Cependant pour des besoins de calculs numériques, la loi tabulée paraît peu adaptée puisque, l'interpolation numérique, implique pour chaque point de calcul  $(\omega_k, T_k)$ , la lecture dans la table, des valeurs du module et du facteur de perte correspondantes. Ce qui nécessite un temps de calcul considérable.

Pour ces cas de considérations, les lois paramétriques sont les plus indiquées et elles peuvent être appliquées sous divers types d'approches dont les plus utilisées sont l'approche rhéologique et l'approche à variables internes. Ces deux approches sont exposées dans la section suivante.

### 1.2.4.2 Représentation paramétrique

La représentation paramétrique permet d'approcher le comportement viscoélastique par des modèles analytiques simples utilisant peu de paramètres.

Pour cela on a souvent recours à des modèles rhéologiques ou d'autres modèles proposés dans la littérature qui permettent de reproduire fidèlement l'évolution des propriétés viscoélastiques.

- **Modèles rhéologiques :**

Les modèles rhéologiques sont des combinaisons analogiques de systèmes discrets qui sont, les ressorts (systèmes élastiques) et les amortisseurs (systèmes visqueux et dissipatifs). L'approche du comportement viscoélastique par des modèles rhéologiques peut être faite aussi bien dans le domaine des fréquences réelles que dans le domaine des fréquences réduites. On rencontre généralement deux familles de représentations : les modèles standards linéaires et les modèles fractionnaires. Les modèles standards sont des combinaisons de ressorts et d'amortisseurs en série, en parallèle ou suivant des assemblages mixtes (Figure 1. 4) [3].

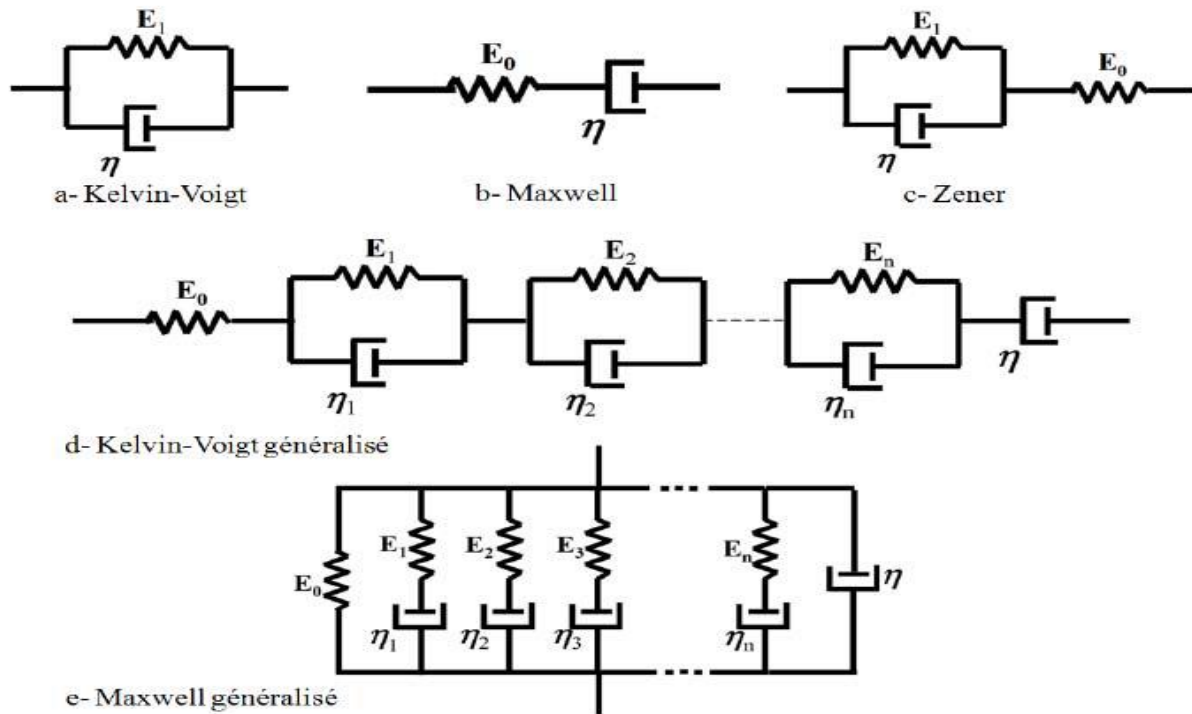


Figure 1. 4: Modèles rhéologiques standards classiques

Les modèles fractionnaires (Figure 1. 5), quant à eux, sont des combinaisons de modèles standards linéaires et d'un élément mécanique analogue à mémoire appelé spring-pot défini par un comportement intermédiaire à celui d'un ressort élastique (spring) et celui d'un amortisseur visqueux (dashpot).

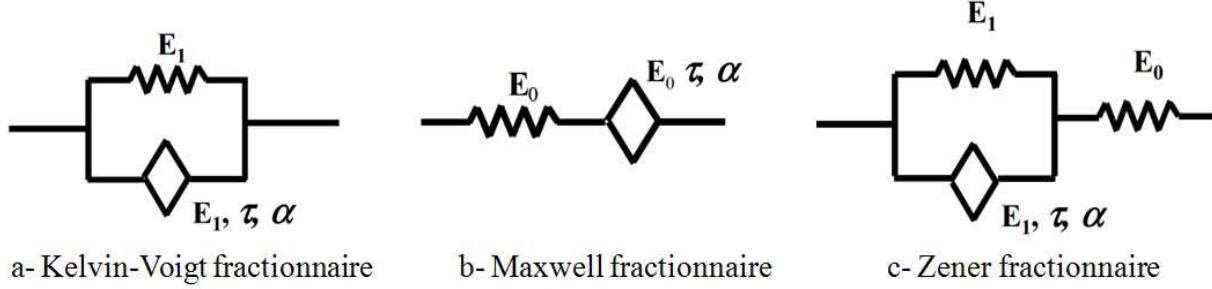


Figure 1. 5: Modèles rhéologiques fractionnaires de base

Pour un matériau viscoélastique linéaire, la loi de comportement et le module opérationnel s'écrivent généralement de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) + \sum_{k=1}^{n_1} a_k \frac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = b_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{n_2} b_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k}, \\ \mathfrak{R}^*(i\omega) = \frac{b_0 + \sum_{k=1}^n b_k (i\omega)^k}{1 + \sum_{k=1}^n a_k (i\omega)^k}, \end{array} \right. \quad (1.23)$$

où  $n_1$  et  $n_2$  sont des entiers et les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  des paramètres du matériau. Dans le cas des modèles standards linéaires, ces lois de comportement, reliant la contrainte et la déformation ainsi que les modules opérationnels, sont données dans le Tableau 1.1 pour des représentations classiques.

Modèles rhéologiques	Lois de comportements	Modules opérationnels
Kelvin-Voigt	$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$	$E_1 + i\omega\eta$
Maxwell	$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$	$\frac{i\omega\eta E_0}{E_0 + i\omega\eta}$
Zéner	$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$	$\frac{E_0(E_1 + i\omega\eta)}{E_0 + E_1 + i\omega\eta}$
Kelvin-Voigt généralisé	Loi 1.23	$\left[ \frac{E_0 + i\omega\eta}{i\omega E_0 \eta} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_k + i\omega\eta_k} \right]^{-1}$
Maxwell généralisé	Loi 1.23	$E_0 + i\omega\eta + \sum_{k=1}^n \frac{i\omega\eta_k E_k}{E_k + i\omega\eta_k}$

Tableau 1.1: Lois de comportement et modules opérationnels de modèles standards classiques  
Pour la représentation fractionnaire du comportement viscoélastique, la loi de comportement et le module complexe du spring-pot utilisés, sont modélisés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t), & 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \mathfrak{R}^*(i\omega) = E(i\omega\tau)^\alpha, \end{cases} \quad (1.24a-b)$$

où  $D^\alpha$  est l'opérateur de dérivation non entière d'ordre  $\alpha$  et défini pour une variable  $\varepsilon(t)$  par la relation :

$$D^\alpha \varepsilon(t) = \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (1.25)$$

Avec  $\tau$  le temps de relaxation et  $\Gamma$  une fonction de  $z$  définie pour  $z > 0$  par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx. \quad (1.26)$$

Les modèles rhéologiques fractionnaires représentés sur la Figure 1. 5 sont les formes les plus simples et constituent les bases de modèles plus complexes. Les modules de quelques exemples de modèles fractionnaires complexes sont donnés par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{R}^*(i\omega) = E_1 [1 + (i\omega\tau)^\alpha] & \text{Kelvin-Voigt fractionnaire,} \\ \mathfrak{R}^*(i\omega) = \frac{E_0 (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} & \text{Maxwell fractionnaire,} \\ \mathfrak{R}^*(i\omega) = \frac{E [1 + (i\omega\tau)^\alpha]}{1 + \frac{E}{E_0} (i\omega\tau)^\alpha}, E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} & \text{Zener fractionnaire.} \end{array} \right. \quad (1.27a-c)$$

Les paramètres impliqués dans la formulation de ces lois de comportement sont déterminés expérimentalement. On peut trouver un exemple traité dans la thèse de J. Landier [14], où une méthode de détermination des paramètres intervenant dans le modèle de Maxwell généralisé d'un polymère industriel, a été proposée.

#### - Modèles basés sur l'approche à variable interne

Cette approche s'appuie sur les lois de la thermodynamique des systèmes irréversibles comme la viscoélasticité. Elle permet d'exprimer les modules opérationnels dans l'espace de Laplace et de Carson.

On présente dans ce qui suit la représentation analytique du module de cisaillement complexe de quelques modèles basés sur cette approche :

- le Modèle de Lesieutre [15].

Ce modèle utilise, la théorie des champs de déplacements anélastiques connue sous le nom de Anelastic Displacement Field (ADF) et propose un module de cisaillement défini par :

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \sum_j \frac{\Delta_{js}}{s + \Omega_j}. \quad (1.28)$$

- Le modèle MacTavish et Hughes [16].

Dans ce modèle, connu sous le nom de Golla Hughes MacTavish (GHM), le module de cisaillement est défini par des termes mini-oxillateurs :

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \sum_j \frac{\alpha_{js^2} + \beta_{js}}{s^2 + \beta_{js} + \delta_j}. \quad (1.29)$$

- Modèle de Bagley et Torvik [17]

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \sum_j \frac{E_1 s^\alpha - E_0 b s^\beta}{1 + b s^\alpha}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1. \quad (1.30)$$

- Modèle de Biot [18]

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \sum_j \frac{a_j s}{s + b_j}. \quad (1.31)$$

- Modèle de Yiu [19]

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \left( \tau_0 s + \sum_j \frac{\alpha_j \tau_j s}{\tau_j s + 1} \right). \quad (1.32)$$

Dans ces formules,  $G_0$  représente le module de cisaillement en élasticité statique. Tous les coefficients apparaissant dans la représentation mathématique de ces modèles excepté la variable complexe ‘ $s$ ’, sont des paramètres du matériau. Beaucoup de travaux basés sur ces modèles ont permis de décrire le comportement de matériaux viscoélastiques souvent rencontrés dans les domaines industriels. Les auteurs [20]–[22] ont utilisé le modèle ADF et GHM pour caractériser le comportement des polymères ISD112 et DYAD606 à l’aide d’une série à trois et à cinq termes. En utilisant l’approche de Bagley et Torvik [17], Galucio et al. [23] identifient le comportement du polymère ISD112 avec seulement quatre paramètres. Pritz [24] a proposé un grand nombre de travaux dédiés à l’identification du comportement de matériaux viscoélastiques en utilisant des modèles à dérivée fractionnaire à quatre et à cinq paramètres. Une méthode d’identification inverse des propriétés viscoélastiques par détermination des paramètres d’un modèle rhéologique, caractérisant le matériau viscoélastique donné, à partir de la réponse fréquentielle de la structure qui l’abrite, est proposée par [26]. On clôture, cette liste non exhaustive, par l’approche d’identification des propriétés viscoélastiques à différentes échelles du problème, proposée par les auteurs [26].

### **1.3 Modélisation des structures sandwichs pour l'amortissement passif**

Les structures sandwich à cœur viscoélastique sont, dans la pratique, constituées le plus souvent d'une mince couche viscoélastique insérée entre deux couches élastiques plus épaisses. Ces structures sont utilisées pour l'amortissement passif des vibrations. Dans cette configuration le pouvoir amortissant de la structure est induit par le cisaillement important que subit la couche viscoélastique lorsque la structure est en mouvement. La déformation en cisaillement est le résultat de la différence de déplacements longitudinaux, des couches élastiques externes en mouvement. Une modélisation adéquate des structures sandwich viscoélastiques, passe par une bonne prise en compte de ce phénomène de cisaillement en adoptant une cinématique adaptée. En outre, le comportement viscoélastique est dépendant de la fréquence de vibration, par conséquent les équations du mouvement sont non-linéaires et donc difficiles à résoudre pour déterminer les propriétés amortissantes de la structure. Dans ce qui suit, nous rappelons les différentes approches cinématiques existantes dans la littérature pour la modélisation des structures sandwich viscoélastiques.

#### **1.3.1 Champs cinématiques pour les structures sandwich**

D'après les archives, l'étude des phénomènes de vibration aurait connu ses débuts au XVII<sup>e</sup> siècle après J.C. passant par l'étude de l'oscillation d'un pendule par Galileo Galilei (1638) à la proposition de la loi fondamentale de l'élasticité par Hooke (1676). Au début de l'analyse de la vibration des systèmes continus, la principale difficulté rencontrée par les chercheurs de l'époque était la définition correcte de la rigidité et de la masse ainsi que les conditions aux limites en flexion. Ce fut le cas de la mathématicienne physicienne Française Sophie Germain [27], l'un des premiers à étudier la théorie des plaques (en 1800). En supposant que la déformation dans le plan de la surface médiane est négligeable, elle obtient une équation différentielle relative à la flèche, généralement admise pour certaines conditions aux limites. Toutefois son travail a servi de base à d'autres chercheurs qui y ont apporté des corrections et contributions aboutissant à la formulation exacte de la théorie des plaques. La définition correcte de la rigidité a été trouvée par Poisson [28] en 1829 alors que les conditions aux limites n'ont pu être correctement définies qu'un peu plus tard en 1850 par Kirchhoff [29]. En se basant sur les travaux de Sophie Germain et de Poisson, Love [30] propose une équation simplifiée pour l'étude de la vibration et de la flexion des plaques minces en 1888. Ces travaux ont permis d'introduire les bases générales de la théorie de vibrations des structures continues.

Pour modéliser les structures multicouches ou sandwich viscoélastiques, les théories proposées s'appuient sur divers schémas cinématiques.



Une liste non exhaustive des différentes approches cinématiques pour l'étude des structures sandwich peut être retrouvée dans [31]. Les premiers modèles de structures sandwich reposaient sur des théories cinématiques classiques utilisant l'approximation de Kirchhoff-Love [32] pour l'étude des plaques et la théorie classique d'Euler-Bernoulli [33] pour l'étude des poutres. L'utilisation de ces modèles supposait que la déformation en cisaillement dans l'épaisseur de la structure était suffisamment faible pour être négligée devant les autres déformations. Dans l'application de ces modèles dites classiques, on suppose que toute section droite et perpendiculaire au plan moyen de la structure au repos reste droite et perpendiculaire après déformation. Ces hypothèses, impliquant un champ de déplacement linéaire monocouche n'ont pas d'inconvénient à prédire le comportement des stratifiés classiques et des poutres élancées. En revanche elles montrent leurs limites dans l'étude des structures courtes et des structures sandwich à âme viscoélastique molle dans lesquelles, la déformation en cisaillement est importante et ne peut pas être négligée. Ainsi, pour une étude générale et précise des structures sandwich, divers modèles de cisaillement de premiers ordre ou d'ordre élevé ont été proposés. En améliorant les modèles existants, Mindlin [34] propose une nouvelle théorie cinématique permettant de décrire une variation linéaire du cisaillement dans l'épaisseur de la structure. Cette théorie encore appelée, théorie de Timoshenko (First Order Shear Theory : FOST) dans le cas des poutres, suppose que la section droite et perpendiculaire au plan moyen de la structure avant déformation reste droite mais pas forcément perpendiculaire après déformation. Dans ce modèle, la distribution de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur de la structure est constante. Cette théorie est précise dans la description du comportement d'un bon nombre de structures. Cependant son utilisation implique la définition d'un facteur de correction pour contourner les problèmes de convergence appelés « shear locking ». Ainsi, certains auteurs ont proposé des modèles de cisaillement d'ordre élevé ne nécessitant pas l'utilisation du facteur de correction. Parmi ces théories, on peut citer la théorie de cisaillement de second ordre. Cette approche apporte une certaine relaxation à l'hypothèse cinématique en supposant que la section droite et perpendiculaire au plan moyen de la structure dans la configuration initiale ne conserve plus sa forme droite mais se déforme suivant une courbure cubique. Avec cette hypothèse, la distribution de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur de la structure est linéaire. Reddy [35] apporte des améliorations à cette théorie en proposant le modèle de cisaillement de troisième ordre (Third Order Shear Theory : TOST) qui suppose une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur de la structure. Pour ce modèle, la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les faces supérieures et inférieures de la structure est satisfaite sans correction.

On peut continuer cette liste, en citant les travaux de Touratier [36], qui propose un modèle de cisaillement décrivant une variation sinusoïdale du champ de déplacement.

Ces théories de cisaillement dites d'ordre élevé, sont largement utilisées dans la littérature et ont permis de résoudre des problèmes de calculs de structures complexes par estimation des propriétés associées (masse, rigidité, flèche, fréquences propres, amortissement, etc.). On adopte également ces théories cinématiques dans la modélisation des structures multicouches ou sandwichs viscoélastiques. Dans ce cas, leur application peut se faire suivant deux approches : l'approche monocouche et l'approche par couche. Pour apporter certaines simplifications dans l'analyse des structures sandwich, certains auteurs traitent les structures sandwichs comme étant une seule couche. Cette approche monocouche connue sous le nom de modèle non zig-zag et aussi appelé Equivalent Single Layer (ESL), consiste à affecter simultanément une seule description cinématique aux trois couches du sandwich, décrivant ainsi un champ de déplacement continu aux interfaces cœur-peaux (Figure 1.6a). Les simplifications apportées par cette approche, permettent un gain de temps significatif dans la formulation et dans les calculs; cependant, les résultats obtenus sont assez approximatifs et ne permettent pas de rendre compte du cisaillement important que subit le cœur mou de la structure. Ainsi, concernant les sandwich viscoélastiques, seule l'approche par couche permet de prendre en compte le comportement réel de la structure. Dans ce cas on considère le sandwich comme un ensemble de sous-structures dans lequel chaque sous-structure représente une couche (Figure 1.6b). Le principe de cette approche consiste à affecter une cinématique appropriée à chaque couche du sandwich, ceci dans le but de bien décrire les contraintes hors plan et les effets d'interfaces. Cette approche par couche appelée modèle zig-zag, peut être appliquée en assurant la continuité des contraintes de cisaillement aux interfaces. Dans ce cas on parle de modèle zig-zag de type IC-ZZT et dans le cas où la continuité des contraintes de cisaillement n'est pas imposée on parle de modèle zig-zag de type ID-ZZT. Les modèles zig-zag peuvent être linéaires ou non linéaires suivant l'approximation du champ de déplacement adopté.

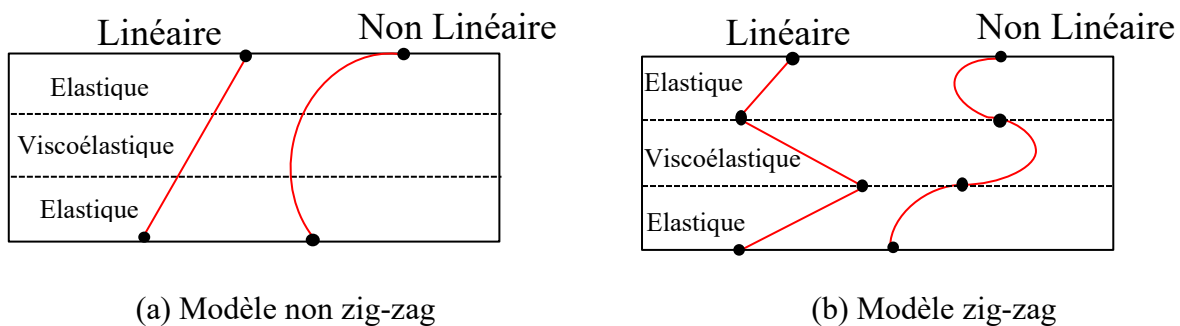


Figure 1.6: Modèles cinématiques

### - Modèles non zig-zag

On considère une section sandwich symétrique à trois couches de hauteur totale  $h$ . On note  $h_v$  la hauteur de la couche centrale et  $h_f$  celui des faces (Figure 1.7).

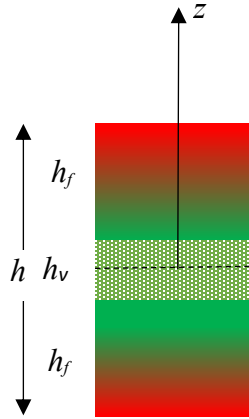


Figure 1.7: Section droite symétrique d'une poutre sandwich

Dans l'approche monocouche dite non zig-zag, le champ de déplacement d'un point  $M(x, z)$  d'une section quelconque de la poutre peut être exprimé de façon générale sous la forme suivante :

$$U(x, z, t) = u(x, t) - zw'(x, t) + f(z)\phi(x, t), \quad (1.33)$$

où  $U$  représente le déplacement longitudinal du point  $M$ ,  $u$  déplacement longitudinal de la surface médiane,  $\phi$  la rotation de la normale à la surface médiane et  $f$  la fonction de cisaillement dépendante de la coordonnée suivant ( $oz$ ). Suivant les différents modèles de cisaillement, cette fonction peut être linéaire, non linéaire exponentielle ou sinusoïdale (Voir Tableau 1. 2).

Modèle	Fonction de cisaillement $f(z)$
Euler-Bernoulli (CBT) [37]	$f(z) = 0$
Timoshenko (FOBT) [37]	$f(z) = z$
Reddy (HOST) [38]	$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$
Afaq (ESDT) [37]	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Touratier (SSDT) [36]	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Aydogdu [39]	$f(z) = z\alpha^{-2(z/h)^2/\ln\alpha} \quad \alpha > 0$
Mantari et al. [40]	$f(z) = z\alpha^{-2(z/h)^2}$

Tableau 1. 2: Fonctions de cisaillement

### - Modèles zig-zag

Dans le cas des modèles zig-zag, chaque couche du sandwich est considérée comme une structure entière à laquelle on affecte un champ de déplacement adapté pouvant faire ressortir son comportement réel avec ou sans conditions de continuité imposées aux interfaces. Classiquement on adopte dans le cas des poutres, le modèle d'Euler Bernoulli pour les faces et des modèles de cisaillement de premier ordre ou d'ordre élevé pour le cœur :

$$\begin{cases} U_1(x, z, t) = u(x, t) - \left(z - \frac{h_f + h_v}{2}\right)w'(x, t), & h_v/2 < z \leq h/2, \\ U_v(x, z, t) = u(x, t) - zw'(x, t) + f(z)\phi(x, t), & -h_v/2 \leq z \leq h_v/2, \\ U_3(x, z, t) = u(x, t) - \left(z + \frac{h_f + h_v}{2}\right)w'(x, t), & -h/2 \leq z < -h_v/2. \end{cases} \quad (1.34a-c)$$

L'utilisation du modèle zig-zag pour l'analyse des structures sandwich à cœur viscoélastique, reste un moyen très efficace pour une bonne approximation des champs de déplacement, afin de décrire de façon très précise le cisaillement induit par le comportement visqueux. Cependant, l'application de cette approche dans les codes de calcul, augmente considérablement le temps de calcul puisque les inconnues sont définies par couches. Dans ce cas, des solutions pour réduire le nombre d'inconnues du problème sont proposées.

Par exemple, la définition des équations de continuité aux interfaces, permet de réduire le nombre de variables aux seules variables du cœur.

Au vue de cette étude cinématique il convient de noter que le modèle zig-zag est le modèle le plus adapté à l'étude des structures sandwich viscoélastiques. Le problème du choix du modèle cinématique étant résolu, il convient ici, de s'intéresser à la problématique de résolution du problème non linéaire qui découle de l'étude des structures sandwich viscoélastiques.

### **1.3.2 Méthodes de résolutions des problèmes de vibrations**

L'utilisation des structures sandwich à cœur viscoélastique a pour but principal d'apporter de l'amortissement dans les constructions mécaniques afin de réduire les amplitudes des vibrations. Ainsi, pour choisir ce type de moyen d'amortissement il faut être capable, d'un point de vue de l'ingénieur, d'estimer les propriétés modales de la structure, à savoir la fréquence propre  $\omega$  et le facteur de perte  $\eta$ . Le calcul de ces paramètres passe par la résolution du problème de vibrations libres ou du problème de vibrations forcées harmoniques. Les méthodes de résolution disponibles dans la littérature peuvent être classées selon deux types d'approches : les approches analytiques, applicables à des problèmes à géométrie et aux conditions aux limites relativement simples et les approches numériques qui sont sollicitées pour des problèmes plus complexes.

#### **1.3.2.1 Approches analytiques**

Les premières études analytiques dédiées à la vibration des structures sandwich ne datent pas d'aujourd'hui. Le model de Ross-Ungar-Kerwin [41- 43] fut l'une des premières théories développées pour l'étude des structures amortissantes. Dans les études initiales de Kerwin [43], une analyse de l'amortissement et de la propagation d'onde de flexion a été proposée dans le cas d'une poutre sandwich à trois couches et en appui simple. Son étude souffrait de certaines incohérences dont l'une était liée au fait que la rigidité en flexion de la couche supérieure était supposée plus faible que celle de la couche inférieure.

Ces travaux ont été généralisés par Ross et Kerwin [42] toujours en considérant une poutre sandwich viscoélastique en appui simple. Dans leurs études, la théorie de poutre de type Euler Bernoulli a été appliquée pour les faces et une théorie de cisaillement pour le cœur. Ces auteurs aboutissent à une équation régissant le mouvement de flexion et donnée sous la forme :

$$\hat{B} \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} = \hat{f}(x, t), \quad (1.35)$$

où  $\hat{B} = B(1 + i\eta)$  est la rigidité complexe équivalente fonction du facteur de perte  $\eta$ , et  $m$  la masse linéique. Par la suite, Ungar [44] généralise les travaux précédents dans le cas des structures composites viscoélastiques linéaires uniaxiales et obtient une expression analytique du facteur de perte dépendant des paramètres structuraux et du cisaillement. De nombreuses analyses ont été ensuite menées pour trouver les valeurs des paramètres permettant un amortissant optimal de la structure. Afin d'étendre le modèle de Kerwin et Ross [42] aux plaques sandwich, Yu [45] reformule le problème de façon générale dans le cas bidimensionnel puis en utilisant la théorie des plaques, il établit une équation d'ordre 4 du déplacement transversal de la structure sandwich. L'avantage de son modèle de plaque est la prise en compte des effets d'inertie et de cisaillement dans chacune des couches sans aucune restriction dans la considération des propriétés géométriques et matériaux.

En se basant sur les travaux précédents, DiTaranto [46] a étudié l'effet des conditions aux limites arbitraires sur les propriétés amortissantes de la structure sandwich viscoélastique. Dans son travail, il utilise une équation auxiliaire prenant en compte les effets du comportement viscoélastique en conjonction avec les équations de flexions classiques. Il aboutit, par la suite, à une équation de degré 6 du déplacement membranaire du plan moyen des couches élastiques externes lui permettant d'obtenir l'expression de la pulsation complexe sous la forme :

$$\omega^2 = \Omega^2 (1 + i\eta). \quad (1.36)$$

De ses analyses, il arrive à la conclusion selon laquelle le facteur de perte et la fréquence amortie sont bien dépendants des propriétés géométriques de la structure mais pas des conditions aux limites. Une affirmation qui fut plus tard démontrée inexacte par Mead et Markus [47]. Partant des mêmes hypothèses que DiTaranto, ces derniers établissent l'expression mathématique relative à la flèche pour différentes conditions d'appui et arrivent à montrer que l'affirmation de Di-Taranto n'est vérifiée que pour une forme particulière de vibration forcée pour laquelle l'excitation doit être harmonique et satisfaire les conditions de parallélisme vis-à-vis des modes normaux de la structure. Ils vont plus loin dans la suite de leurs travaux [48] en établissant une équation différentielle de la flèche avec les conditions aux limites appropriées pour la détermination des caractéristiques de résonance de la poutre. Pour la résolution du problème, ils proposent une méthode itérative de type Newton-Raphson. Les propriétés amortissantes (facteur de perte et fréquence amortie) sont cherchées avec une méthode exacte pour la poutre en appui simple et une méthode approchée pour la poutre bi-encastée.

La comparaison de ses résultats lui permet d'affirmer qu'effectivement, les propriétés amortissantes varient non seulement suivant la géométrie de la structure mais aussi suivant le type de conditions aux limites appliquées. Ce qui contredit les affirmations de DiTaranto.

L'analyse des poutres et plaques sandwich asymétriques, soumises à diverses conditions aux limites, a également suscité les efforts de recherche de Yan et Dowell [49]. Ces auteurs ont considéré l'hypothèse des contraintes planes et la continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement aux interfaces. En supposant que la rigidité du cœur de la structure est faible par rapport à celui des faces, ils obtiennent une équation d'ordre 4 relative à la flèche. Des travaux similaires ont été effectués par Rao et Nakra [50] qui ont amélioré les modèles existant en intégrant les effets d'inertie transversale, longitudinale et rotationnelle dans le cas d'une excitation harmonique. He et Ma [51] proposent un modèle de plaque sandwich viscoélastique asymétrique en partant d'un ensemble d'équations de vibrations simplifiées avec différentes conditions aux limites. Pour aboutir à ce modèle simplifié, ils partent des théories classiques des plaques en supposant que l'effet du cisaillement n'est valable que dans le cœur de la structure et que le coefficient de Poisson des matériaux des différentes couches du sandwich sont approximativement égaux. Aussi, ils supposent qu'en flexion, l'inertie dans le plan est négligeable et que seule l'inertie transversale est valable. Ainsi, leur formulation débouche sur des équations complexes qui nécessitent l'utilisation de méthodes de résolution numériques, notamment, la méthode asymptotique pour le calcul du facteur de perte et de la pulsation propre. De ces calculs, ils remarquent que la précision des résultats était étroitement liée à l'ordre de développement de la solution asymptotique. En d'autres termes, l'augmentation de l'ordre des séries améliore la précision de la solution. Pour aller plus loin dans cette étude bibliographique, une liste non exhaustive des méthodes analytiques pour l'étude des structures sandwich viscoélastiques est accessible dans les thèses ([3], [6], [52]) D'après la présente étude bibliographique, on remarque que la plupart des modèles analytiques sont formulés sur les hypothèses suivantes :

- Les matériaux constitutifs du sandwich sont homogènes, linéaires et isotropes
- Le cisaillement est absent dans les matériaux élastiques constituant les faces du sandwich alors que le cœur viscoélastique de la structure se déforme principalement en cisaillement.
- Le comportement viscoélastique est indépendant de la fréquence de vibration.
- Les analyses sont faites dans les hypothèses de petites perturbations (champ de déformation linéaire)
- Les études sont basées sur les théories classiques des poutres et des plaques
- La continuité des champs de déplacements et des contraintes sont admises aux interfaces, le contact est donc supposé parfait.

Ces hypothèses simplificatrices, ont permis de trouver des solutions analytiques pour des cas de conditions aux limites simples. Malgré que ces solutions analytiques soient fiables et considérées comme des solutions de références, elles ne permettent pas de prédire la réponse des structures à géométrie complexe et soumises à des conditions aux limites complexes avec une prise en compte du comportement viscoélastique dépendant de la fréquence de vibration. En effet, la modélisation des cas réels du problème de vibration des structures sandwich viscoélastiques, auxquels sont confrontés les industriels, aboutit à des équations fortement non linéaires auxquelles il est difficile, voire impossible, de trouver des solutions analytiques. Ainsi, les méthodes numériques, notamment la méthode des éléments finis, constituent un moyen efficace pour prédire le comportement réel des structures viscoélastiques.

### **1.3.2.2 Approches numériques**

L'une des méthodes numériques, les plus utilisées dans les codes de calculs développés récemment, est la méthode des éléments finis. Le but de cette méthode, est de chercher la solution la plus approchée du modèle théorique, qui n'est autre qu'une représentation mathématique (ou idéalisée) du problème réel possédant un contenu mécanique. Le principe de la méthode des éléments finis réside dans la transformation du problème continu en un problème discret par un processus de maillage. Dans ce processus, la structure étudiée est subdivisée en de sous structures appelées éléments finis. Chaque élément issu du maillage est lié à son voisin par l'intermédiaire des nœuds. Classiquement, à ces nœuds, certains déplacements sont permis. Ces déplacements, appelés degrés de liberté, constituent les nouvelles inconnues du problème. Par cette méthode, une formulation simplifiée du problème sur chaque élément est possible. Ainsi, les systèmes d'équations qui étaient quelconques au départ, sont transformés en des systèmes d'équations linéaires. Sur chaque élément, ces équations linéaires produisent des matrices dont l'assemblage sur tous les éléments, permet d'obtenir, de grandes matrices de dimensions fixées par le nombre d'éléments finis accouchés dans le processus de discrétisation. Ensuite, le système d'équation obtenu est résolu pour trouver les solutions approchées du problème. En fonction de la géométrie du problème, l'efficacité de la méthode des éléments finis passe par le choix du type d'élément fini utilisé dans la discrétisation. On distingue des éléments 1D linéiques utilisés pour des problèmes ne nécessitant qu'une seule variable pour les décrire (les barres), des éléments 2D (coques et plaques) et des éléments 3D (éléments volumiques). Ces différents types d'éléments finis sont présentés sur la Figure 1. 8.



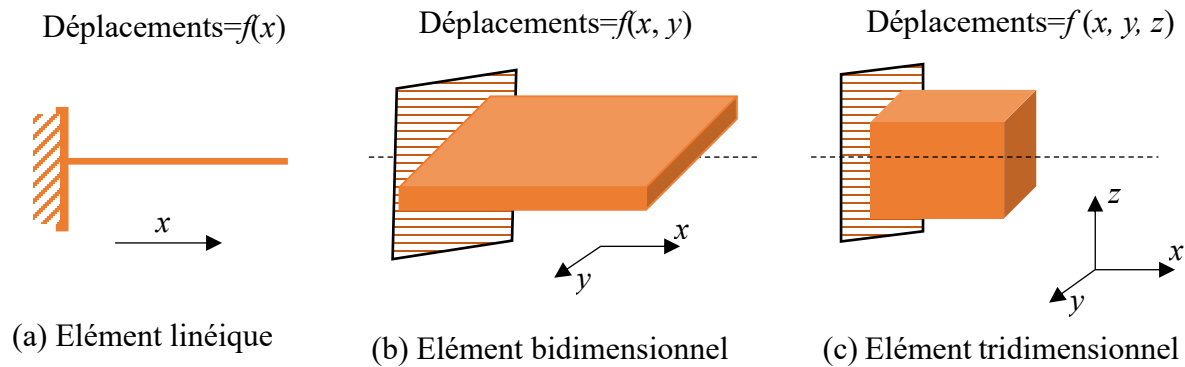


Figure 1. 8: Élément linéique, bidimensionnel et tridimensionnel.

Les structures sandwich viscoélastiques sont des structures volumiques et donc leur modélisation par la méthode des éléments finis consistera, à discrétiser chacune des couches par des éléments 3D. Ce modèle est celui qui épouse le mieux la réalité et donc serait très riche en information. Cependant l'utilisation de l'élément volumique reviendrait chère en temps de calcul et en espace mémoire à cause du nombre de degrés de liberté que cela engendre. Alors, pour introduire des simplifications dans les analyses, diverses configurations de discrétisation élément fini sont proposées dans la littérature. Ainsi, certains auteurs ont proposé des modèles de discrétisation de type coque/volume/coque ou plaque/volume/plaque. Les faces sont le plus souvent représentées par des éléments 2D ramenant leur comportement à l'état plan de leur surface moyenne. L'utilisation de l'élément volume pour discrétiser le cœur s'explique par la nécessité de prendre en compte son comportement en cisaillement responsable du phénomène d'amortissement. Parmi les modèles proposés, nous pouvons citer les travaux de Lu et al. [53] qui ont discrétisé les faces du sandwich dans leur plan moyen avec des éléments plaques quadrilatères à 4 nœuds et le cœur avec des éléments volumiques linéaires isoparamétriques à 8 nœuds. Johnson et al. [54] proposent de discrétiser les faces élastiques avec des éléments coques quadrilatéraux à 4 nœuds dans leur plan interfacial et la couche viscoélastique avec des éléments volumiques hexaédriques à 8 nœuds. On peut également citer les travaux de Soni [55], qui définit les couches élastiques par des éléments coques à 8 nœuds et la couche centrale par des éléments volumiques à 16 nœuds. Daya et Potier-Ferry [56], en se basant sur des hypothèses de continuité des champs de déplacements aux interfaces cœur-peaux, ont développé un élément coque/volume/coque. Ils définissent pour les faces élastiques des éléments coques triangulaires à trois nœuds DKT. A partir des hypothèses de continuité, ils réduisent les inconnues du problème aux seuls degrés de libertés du cœur.

Dans le but de mieux intégrer les effets membranaires dans le comportement des faces élastiques, Duigou et al.[57] remplacent les éléments coques DKT du modèle de Daya et Potier-Ferry par des éléments coques quadrilatères à 8 nœuds.

Dans la méthode des éléments finis la liaison entre deux différents types d'éléments pose des problèmes d'incompatibilité du champ de déplacement aux interfaces. Pour contourner ces problèmes, certains auteurs ont proposé de définir les trois couches avec les mêmes types d'élément plaque/plaque/plaque, coque/coque/coque ou poutre/poutre/poutre. Cependant la discrétisation uniforme des différentes couches du sandwich n'est fiable que dans la modélisation des structures sandwichs en flexion avec un déplacement transversal commun à toutes les couches et une rotation identique des faces élastiques. Aussi, on note beaucoup d'approches basées sur l'utilisation de la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux permettant de réduire considérablement le nombre d'inconnues du problèmes en les exprimant uniquement en fonction des inconnues de l'une des couches ([58], [59]).

Au vue du développement précédent, la méthode des éléments finis permet à partir du choix du type d'élément à utiliser dans le processus de discrétisation, de trouver une solution approchée du modèle mathématique. Outre la problématique de discrétisation, la recherche de solution du problème de vibration passe par la résolution d'un système matricielle se trouvant sous la forme générale suivante :

$$([K(\omega)] - \omega^2 [M])\{d\} = \{F\}, \quad (1.37)$$

où  $[K(\omega)]$  est la matrice de rigidité dépendante de la fréquence de vibration,  $[M]$  la matrice de masse et  $\{F\}$  le vecteur force nodal représentant les chargements extérieurs. Les inconnues du problème sont la pulsation  $\omega$  et le vecteur nodal  $\{d\}$ .

En en absence de chargement extérieurs ( $F=0$ ) on retrouve le système aux valeurs propres suivant :

$$([K(\omega)] - \omega^2 [M])\{d\} = \{0\}. \quad (1.38)$$

Comme on peut le remarquer, ce problème est fortement non linéaire à cause de la dépendance en fréquence de la matrice de comportement par conséquent, sa résolution nécessite de puissants moyens numériques. La recherche des méthodes de résolution du problème en vibration libre ( $F=0$ ) ou en vibration forcée ( $F \neq 0$ ) a fait l'objet de plusieurs publications. Les approches proposées peuvent être classées en trois types d'analyses détaillées ci-après.

#### - Analyse de la réponse fréquentielle

Cette méthode de résolution consiste à chercher la réponse de la structure en la soumettant à un chargement harmonique. Ce processus peut être mené expérimentalement ou numériquement.

D'un point de vue numérique, on cherche la courbe de réponse en déplacement de la structure  $\{d(\omega)\}$  en faisant varier la pulsation  $\omega$  du signal excitateur. Cette courbe est la représentation point par point du déplacement maximal obtenu en inversant la matrice dynamique  $[K(\omega)-\omega^2M]$  pour chaque pulsation appliquée. A partir de la courbe de réponse obtenue, on détermine la pulsation amortie au pic de la résonance et ensuite par la méthode des bandes passantes on cherche la valeur du facteur de perte correspondant à partir de la relation [55]:  $\eta = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Omega}$ ,

avec  $\omega_i$  et  $\omega_f$  les limites de la bande passante (Figure 1. 9).

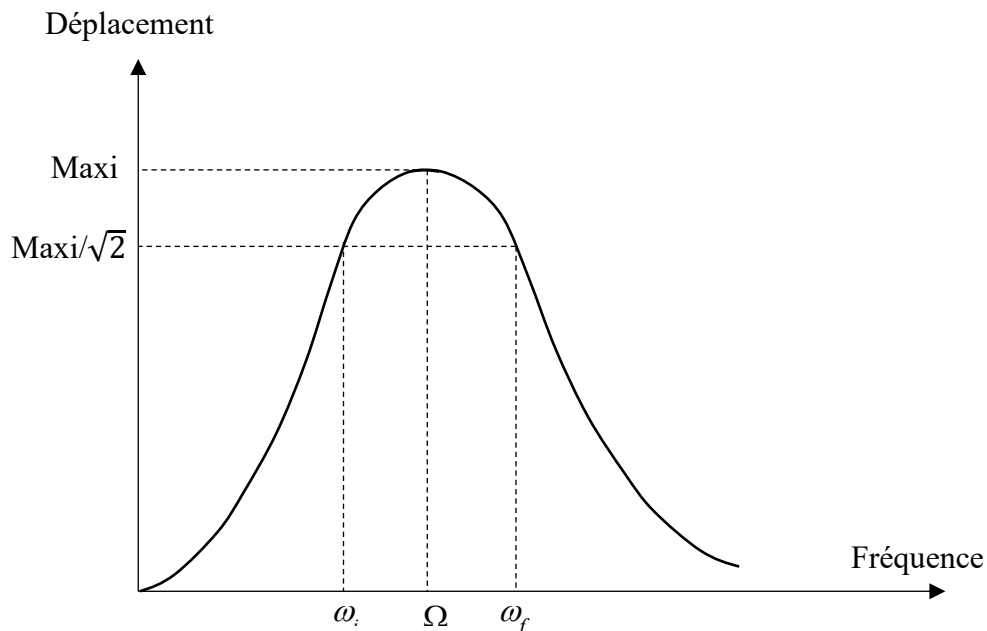


Figure 1. 9: Caractéristiques de la bande passante

Pour cette méthode, la précision des calculs est d'autant plus satisfaisante que l'incrément de pulsation appliqué est petit. Or, pour chaque pulsation la réponse en déplacement correspondante est obtenue par inversion de la matrice dynamique, ce qui peut coûter chère en temps de calcul lorsqu'on cherche des fréquences de résonances très peu séparées pour lesquelles l'incrément de pulsation doit être très faible et aussi lorsqu'on étudie des systèmes de grandes tailles. Pour la méthode expérimentale, la courbe de réponse est obtenue par excitation des modes d'intérêts en faisant varier expérimentalement la pulsation. Bien que le procédé expérimental soit simple à mettre en œuvre et donne des résultats assez précis il est très limité car ne s'appliquant qu'aux structures peu amortissantes avec des fréquences de résonance assez séparées. Contrairement à la méthode expérimentale, la méthode numérique peut s'appliquer à tout système quelle que soit la loi de dépendance en fréquence du comportement viscoélastique.

Pour corriger le problème de coût de calcul de cette méthode, Abdoun et al.[60] ont proposé la méthode asymptotique numérique pour la résolution de l' équation (1.37). En appliquant cette méthode le problème de vibration forcée devient :

$$\left( [K(0)] + E(\omega)[K_v] - \omega^2 [M] \right) \{d\} = \{F\}, \quad (1.39)$$

où  $K(0)$  et  $K_v$  sont des matrices purement constantes issues de la décomposition de la matrice de rigidité  $K(\omega)$ .  $E(\omega)$  est le module d'Young de la couche viscoélastique fonction de la fréquence de vibration  $\omega$ . Dans le déroulement de cette méthode, les inconnues  $\{d, \omega\}$  et la fonction  $E(\omega)$  sont développées en série de Taylor puis réinjectées dans le système (1.39). On obtient alors une suite récurrente de systèmes linéaires dont la résolution permet de déterminer directement la courbe de réponse  $\{d(\omega)\}$ . Par cette méthode on observe un gain de temps de calcul considérable.

#### - Analyse modale

L'analyse modale est une méthode de résolution des problèmes de vibrations libres ( $F=0$ ) qui permet d'estimer directement les fréquences de résonance des structures en vibration ainsi que les modes correspondants (déformations géométriques). En présence de la loi de comportement viscoélastique, cette méthode peut être appliquée dans le cas d'un module complexe constant comme dans le cas d'un module dépendant non linéairement de la fréquence de vibration.

En présence d'une loi viscoélastique complexe constante, le problème de vibration libre correspondant peut se mettre sous la forme matricielle suivante.

$$\left( [K] - \omega^2 [M] \right) \{d\} = \{F\}. \quad (1.40)$$

Dans ce système d'équations, on peut remarquer que la matrice de rigidité et de masse sont constantes. La résolution du problème peut alors s'effectuer avec des méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres classiques comme la méthode de Lanczos[4], la méthode QR [61], la méthode itérative des sous espaces [62] et la méthode de Krylov-Arnoldi [63]. Ces approches classiques peuvent être trouvées dans l'environnement de certains codes de calcul comme Matlab dans lequel la méthode QR est implémentée sous la dénomination de la fonction " eig " et la méthode d'Arnoldi sous la dénomination de la fonction " eigs ". Ces méthodes sont des méthodes exactes et permettent une détermination directe de la pulsation complexe  $\omega$  et ensuite par utilisation de la formule de DiTaranto [46] on obtient le facteur de perte correspondant.

L'inconvénient avec ces méthodes est qu'elles sont limitées au cas des modules ne dépendant pas de la fréquence de vibration. Dans le cas réel, le comportement viscoélastique est dépendant de la fréquence de vibration. Le problème de vibration libre présente dans ce cas, une non linéarité matérielle qui rend difficile la détermination de la réponse modale de la structure. Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à ce problème et proposent des méthodes de résolutions donnant des solutions approchées pour certaines et des solutions quasi-exactes pour d'autres.

#### - Méthodes approchées

La méthode la plus citée parmi les méthodes approchées est la méthode d'énergie de déformation modale (Modal Strain Energy method, MSE), développée par Johnson et al. [54]. Le principe de cette méthode, consiste à subdiviser la structure en des sous-structures constitutives ( $k$ ), pondérées par leur énergie de déformation  $U_k$  et leur facteur de perte  $\eta_k$ , et à définir le facteur de perte global de la structure comme somme des facteurs de pertes des sous-structures pondérés de leur énergie de déformation :

$$\eta = \sum_k \eta_k \frac{U_k}{\sum_k U_k}. \quad (1.41)$$

Dans les applications, cette méthode peut être utilisée de deux manières en considérant soit les modes réels (MSER) ou soit les modes complexes (MSEC). La méthode MSER pose le problème de vibrations libres sous la forme suivante :

$$\left( [K(0)] - \omega_0^2 [M] \right) \{d_r\} = \{0\}, \quad (1.42)$$

où  $[K(0)]$  est la matrice rigidité de la structure en considérant son élasticité retardée. La résolution de ce problème est simple et peut s'effectuer avec les algorithmes classiques pour la détermination de la réponse modale ( $\omega$ ,  $d_r$ ) de la structure. Après cette étape, le problème de base est réécrit sous la forme approchée suivante :

$$\left( [K(\omega_0)] - \omega^2 [M] \right) \{d_r\} = \{0\}. \quad (1.43)$$

A partir de cette relation, la réponse modale de la structure peut être approximée par les formules suivantes.

$$\omega^2 = \Omega^2 (1 + i\eta) = \frac{{}^t \{d_r\} [K(\omega_0)] \{d_r\}}{{}^t \{d_r\} [M] \{d_r\}}. \quad (1.44)$$

L'approximation du mode de vibration de la structure par le mode réel permet un gain de temps considérable. Cependant l'utilisation de la méthode MSER est limitée aux structures à faible amortissement.

Pour améliorer la précision de cette méthode en présence des structures à amortissement élevé, la méthode MSEC propose une approximation du mode de vibration par le mode complexe. On résout dans ce cas une équation de vibration forcée relative au mode complexe :

$$([K(\omega_0)] - \omega^2 [M]) \{d_c\} = \{F\}, \quad (1.45)$$

où  $\{F\}$  est le vecteur force représentant les chargements harmoniques appliqués à la structure. Une fois cette équation résolue, les propriétés modales sont alors approchées par les relations suivantes :

$$\omega^2 = \Omega^2 (1 + i\eta) = \frac{{}^t \{\bar{d}_c\} [K(\omega_0)] \{d_c\}}{{}^t \{\bar{d}_c\} [M] \{d_c\}}. \quad (1.46)$$

#### - Méthodes quasi-exactes

Plusieurs approches numériques permettant, la recherche de solutions quasi-exactes aux problèmes de vibrations libres en présence de non linéarité matérielle, ont été proposées dans la littérature. Parmi ces méthodes on distingue :

*La méthode asymptotique de Ma et He [58].*

Ces auteurs proposent de remplacer dans l'équation des vibrations libres (1.38) la pulsation  $\omega^2$  par l'expression  $\Omega^2(1+i\eta)$ . Ainsi, le problème à résoudre devient :

$$([K(\Omega^2, \eta)] - \Omega^2 (1 + i\eta) [M]) \{d\} = \{0\}. \quad (1.47)$$

Pour résoudre ce système, les inconnues  $\{\Omega^2, \eta, d\}$  sont d'abord développées en séries entières d'un paramètre choisi de façon adéquate et ensuite ces développements sont réinjectés dans l'équation (1.47). On obtient alors une suite récurrente de problèmes linéaires à qui on ajoute une équation supplémentaire traduisant la condition d'orthogonalité des modes. Cette méthode donne des résultats satisfaisants en présence d'une loi viscoélastique complexe constante à amortissement faible, mais dans le cas d'un module dépendant de la fréquence de vibrations, elle ne converge généralement pas. Elle nécessite dans ce cas l'utilisation d'une méthode de continuation pour atteindre la convergence.

*La méthode d'Arnoldi non linéaire [64].*

Cette méthode permet de résoudre des problèmes aux valeurs propres non linéaires creux et de grandes tailles. Le principe de cette méthode consiste à projeter le problème aux valeurs propres dans des sous-espaces de Krylov afin d'obtenir un problème réduit et linéaire de la forme :

$$T(\omega^2)u = \{0\}, \quad T(\omega^2) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad u \in \mathbb{C}^n. \quad (1.48)$$

*Méthode d'itération-réduction de Chen et al.[65]*

Pour cette méthode, les auteurs proposent d'exprimer le module de cisaillement complexe dépendant de la fréquence sous la forme  $G^*(\lambda) = G(\lambda)(1+i\beta(\lambda))$  avec  $\lambda = \omega^2$ . Ceci permet, de décomposer la matrice rigidité en sa partie élastique et sa partie viscoélastique ramenant ainsi le problème initial (1.38), sous la forme suivante :

$$\left( [K_0(G(\lambda))] + i\beta(\lambda)[K_v(G(\lambda))] - \lambda[M] \right) \{d\} = \{0\}. \quad (1.49)$$

Une méthode d'itération réduction est ensuite adoptée pour la résolution du problème (1.49). Dans le déroulement de cette méthode, on note deux étapes principales. La première étape consiste à supposer un amortissement nul ( $\beta=0$ ) et à chercher la solution asymptotique  $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{d}_r)$  du problème résultant à l'ordre 1 correspondant au mode  $r$

$$\left( [K_0(G(\lambda))] - \lambda[M] \right) \{d\} = \{0\}. \quad (1.50)$$

Dans la recherche de solutions, les inconnues  $(\lambda, d)$  ainsi que la fonction  $[K_0(G(\lambda))]$  sont développées en série de Taylor tronquée au premier ordre :

$$\begin{cases} K_0(G(\lambda)) = K_0(G_0) + \frac{\partial K_0}{\partial G} \Big|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0), \\ \lambda = \lambda_r + \frac{\partial \lambda_r}{\partial G} \Big|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0), \\ d = d_r + \frac{\partial d_r}{\partial G} \Big|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0), \end{cases} \quad (1.51)$$

où  $G_0$  est une valeur fixée de  $G$ . Le couple de solution à l'ordre 0 est obtenu par résolution directe du problème

$$\left( [K_0(G_0)] - \lambda_r[M] \right) \{d_r\} = \{0\}. \quad (1.52)$$

En appliquant la condition d'orthogonalité des modes, la solution asymptotique à l'ordre 1 s'écrit :

$$\tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \left. \frac{\partial \lambda_r}{\partial G} \right|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0) = \lambda_r + {}^t d_r \left[ \left. \frac{\partial K_0}{\partial G} \right|_{G=G_0} \right] d_r (G(\lambda_r) - G_0). \quad (1.53)$$

La deuxième étape de la résolution consiste à résoudre le problème (1.49) en remplaçant  $\lambda$  par  $\tilde{\lambda}_r$  dans les matrices  $[K_0]$ ,  $[K_v]$  et dans la fonction  $\beta$ . Ainsi, le système au début non linéaire, devient alors un système aux valeurs propres complexes linéaire et donc résolvable par des méthodes numériques classiques comme l'algorithme itératif de Lanczos couplé à une base réduite. Pour des systèmes de grande taille cette méthode nécessite beaucoup d'itérations pour converger, ce qui peut entraîner des coûts considérables en temps de calcul.

*Méthode Asymptotique Numérique MAN (Daya et Potier-Ferry [66])*

Cette méthode de résolution est basée sur la technique de perturbation et d'homotopie couplées avec une procédure de continuation. Ces auteurs proposent une décomposition du module d'Young complexe sous la forme  $E^*(\lambda) = E(0) + E(\lambda)$  avec  $\lambda = \omega^2$  puis en introduisant un paramètre d'homotopie  $p$ , ils réécrivent le système à résoudre (1.38) sous la forme :

$$\left( [K(0)] - pE(\lambda)K_v - \lambda[M] \right) \{d\} = \{0\}. \quad (1.54)$$

Les matrices  $K(0)$  et  $K_v$  correspondent respectivement à la partie élastique et viscoélastique de la matrice de rigidité. La technique utilisée dans cette approche consiste à trouver une solution du problème (1.54) pour  $p=1$  en partant d'une solution initiale  $p=0$  correspondant au comportement de la structure dans un domaine élastique pur. Pour ce faire, les inconnues  $(\lambda, d)$  sont développées en séries entières de paramètre  $p$  puis on injecte les expressions obtenues dans l'équation (1.54). On obtient alors une suite récurrente de problèmes linéaires dont la résolution s'effectue à chaque ordre en considérant la condition d'orthogonalité des modes. Une procédure de continuation est associée à cette méthode pour piloter le paramètre d'homotopie  $p$  entre les valeurs 0 et 1. Afin de calculer les dérivées d'ordres élevés constituant les coefficients des séries de Taylor, Koutsawa et al. [67] proposent un outil de différentiation automatique. Bilasse et al. [6] associent la MAN et la différentiation automatique pour résoudre le problème aux valeurs propres non linéaire quelle que soit la loi de dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. Duigou et al. [57] ont proposé deux méthodes itératives couplant la MAN et les approximations de Padé avec un apport considérable dans l'amélioration de la convergence des séries. Afin d'améliorer le temps de calcul, Boumediene et al. [68] ont proposé une méthode de résolution basée sur les modèles réduits couplés à la méthode de Newton.



De par tous ces travaux, la modélisation des structures sandwich composites à cœur viscoélastique peut être considérée comme maîtrisée que ce soit la formulation du modèle mathématique ou la résolution du problème dynamique qui en découle. Cependant très peu de travaux sont réalisés sur l'amortissement passif des structures composites à gradient de propriétés FGM. Nous présentons dans ce qui suit quelques généralités sur les matériaux composites, en occurrence les matériaux à gradient de propriétés et les travaux existants sur leur modélisation.

## **1.4 Matériaux composites avancés et amortissement passif**

### **1.4.1 Généralités sur les matériaux composites**

Au sens large du terme, un matériau composite est un matériau hétérogène anisotrope formé à partir d'au moins deux constituants non miscibles disposés l'un par rapport à l'autre dans une configuration donnée selon les performances attendues. Les constituants du composite sont sélectionnés pour une contribution spécifique en matière de propriétés physiques. De ce fait, le résultat du mélange est un matériau présentant une meilleure performance que chacun des constituants pris séparément. D'un point de vue historique, l'utilisation des matériaux composites ne date pas d'aujourd'hui. En effet, sous leurs formes naturelles, les matériaux composites ont accompagné l'homme depuis l'antiquité dans son envie de dompter la nature.

Le bois et les torchis sont quelques-uns des exemples de matériaux composites naturels, qui ont longtemps été utilisés dans les constructions et dans la fabrication des outils du quotidien des hommes. Les matériaux composites classiques sont généralement constitués d'une matrice dans laquelle est noyé un renfort. La matrice assure la cohésion du matériau et également la transmission des chargements aux renforts. De ce fait, les propriétés de ces matériaux découlent essentiellement des propriétés matériaux et géométriques du renfort (forme, élancement), de sa distribution (répartition, orientation) et de sa concentration (volumique ou massique). Aussi, les propriétés mécaniques à l'interface des différents constituants du composite sont d'une importance capitale pour une bonne tenue en rupture du matériau. Pour de meilleurs performances du composite, il faut une tolérance nulle aux glissements et séparations entre les différents constituants. Selon la nature de la matrice les matériaux composites peuvent être classés en 3 catégories :

**Matériaux composites à matrice polymérique.** Ils sont élaborés à base de polymères caractérisés par une faible densité et une importante déformation à la rupture. Ces matériaux trouvent leurs applications dans des domaines où la réduction de la masse est fondamentale comme dans le secteur aéronautique.

**Matériaux composites à matrice métallique.** Dans ce type de composite, la matrice est métallique et les renforts utilisés sont le plus souvent non-métalliques comme par exemple des renforts en céramique. Cette gamme de composites est plus adaptée aux applications à fort chargement demandant une bonne résistance mécanique comme les moteurs d'automobile.

**Matériaux composites à matrice céramique.** Ces matériaux composites ont une matrice de type céramique avec des renforts métalliques ou en carbone. Ces composites ont la spécificité d'être très résistants aux chocs thermiques. Ils sont sollicités dans des environnements à chargement thermique sévère comme le cœur des réacteurs nucléaires.

Les matériaux composites peuvent également être classés suivant le type de renfort utilisé. En se basant sur cette considération, on peut regrouper les matériaux composites en 4 catégories :

**Matériaux composites fibreux :** Pour ces types de matériaux les renforts sont des fibres dont les formes géométriques (continues ou courtes) varient suivant le type d'application. L'anisotropie est très prononcée dans ce cas puisque toutes les fibres sont orientées dans la même direction. Les renforts en fibre sont de nature variée et le choix de leur utilisation dans les applications dépend de leur performance et du coût de leur fabrication. Les fibres les plus rencontrées dans les composites sont les fibres de verre qui ont un prix compétitif, une disponibilité et une résistance élevées. Ensuite, vient les fibres en carbone qui sont plus utilisées dans les matériaux à haute performance mais leurs prix restent relativement excessifs.

On peut citer également les fibres d'aramides qui sont de la catégorie des fibres polyamides aromatiques avec une bonne résistance et une rigidité supérieure à celle des fibres en verre. Comparées aux fibres de carbone, elles ont une résistance en compression et une cohésion fibre-matrice plus faible.

**Matériaux composites stratifiés :** La technique de stratification consiste à assembler des matériaux par couches afin d'obtenir un matériau composite de meilleures performances. Les matériaux constitutifs des stratifiés peuvent être différents de nature comme on les retrouve souvent dans les métaux plaqués, ou de même nature mais disposés suivant différentes orientations comme dans le cas des composites stratifiés à renforts de fibres longues.

**Matériaux composites à renfort de particules :** Pour ces composites, les renforts sont de dimensions petites devant les autres dimensions du matériau et approximativement égales. Dans la plupart des cas, les particules sont plus rigides que la matrice et leur distribution au sein de cette dernière est aléatoire.

**Matériaux composites à renfort de paillettes :** Les renforts sont des paillettes minces et de faibles dimensions par rapport aux autres dimensions du matériau.

La disposition de ces paillettes dans la matrice est généralement quelconque mais peut avoir une orientation précise pour obtenir une homogénéité des propriétés dans le plan.

## **1.4.2 Avantages et limites des matériaux composites**

Pour un bon rapport poids/rigidité, de nombreux domaines d'ingénieries adoptent l'utilisation des matériaux composites dans la conception des structures. Quoique ces matériaux constituent un gage de qualité et d'assurance en matière de sécurité, ils ne peuvent pas être considérés comme des solutions miracles face aux nombreux défis du domaine. Les avantages et les inconvénients principaux des matériaux composites sont les suivants :

### **1.4.2.1 Les avantages des matériaux composites :**

- *Propriétés matériaux adaptables*

Les techniques de production des composites offrent une flexibilité quant à l'optimisation des propriétés du matériau et son adaptation aux diverses sollicitations. C'est le cas des composites à fibres où on a la possibilité de choisir l'orientation des fibres pour répondre à une demande précise. De même avec les stratifiés, on peut orienter les plis élémentaires de façon à augmenter la résistance du matériau dans le sens du chargement prévu.

- *La légèreté*

L'allègement des structures soumises à des chargements importants, est un enjeu auquel l'avènement des matériaux composites a apporté une solution très appréciable. Le gain en masse tout en conservant une bonne résistance et une bonne rigidité a permis au concepteur de laisser libre cours à leur imagination dans le design des structures. Ainsi, la réduction de la masse permet de réduire la taille des réservoirs des engins dans l'industrie aérospace et d'automobile tout en conservant un même cahier de charge. La légèreté des composites facilite aussi leur transport du site de production à leur lieu d'utilisation.

- *Réduction du nombre de pièces dans les structures et facilité de maintenance*

De par leur multifonctionnalité intégrée, l'utilisation des composites permet de simplifier les assemblages dans les structures en diminuant le nombre de pièces comparé aux matériaux ordinaires.

Aussi, les composites nécessitent moins d'intervention en matière de maintenance que les alliages métalliques du fait qu'il ne sont pas sensibles à la corrosion et que leur tenue en fatigue est relativement très bonne.

### **1.4.2.2 Les inconvénients des matériaux composites :**

- *Prix de revient élevé*

Certains domaines d'utilisation des composites sont très sensibles d'un point de vue sécuritaire à une défaillance du matériau face aux multiples sollicitations. Pour cela les procédés de fabrication de ces matériaux sont assez exigeants entraînant ainsi des coûts de fabrications élevés qui ne facilitent pas l'utilisations de ces composites dans des applications grand public.

- *Conception et analyse complexe*

Le caractère hétérogène et anisotrope de la plupart des composites rendent leurs conceptions et leurs analyses assez difficiles. Pour une analyse approfondie, il est donc indispensable d'adopter une considération multi-échelle du matériau. Dans le cas des stratifiés la rupture s'amorce de plusieurs façons. Il est donc compliqué d'adopter une théorie de la rupture tenant compte de tous les modes possibles et leurs interactions.

- *Risque de phénomène de délaminage*

Les matériaux composites stratifiés à renfort de fibres longues offrent une liberté d'orientation des fibres de chacun des plis afin d'optimiser les propriétés de résistance et de rigidité dans le sens du chargement. Malgré ces caractéristiques exceptionnelles, ces composites présentent un problème propre à leurs techniques de conception.

Il s'agit du phénomène de la rupture inter-laminaire encore appelée délaminage se caractérisant par un décollement entre les couches du stratifié. En effet l'assemblage des pièces en matériaux composites pose toujours des problèmes de faible résistance cohésive dus à la concentration des contraintes aux interfaces des couches le plus souvent de nature différentes. En service ou lors des interventions de maintenance, la présence des contraintes résiduelles favorise la propagation des microfissures dans matrice pour atteindre ensuite les fibres fragilisant ainsi la résistance du matériau en compression et en traction et dans les cas sévères on assiste au délaminage des couches du stratifié. Si ce phénomène n'est pas contrôlé il peut provoquer la rupture de la structure.

### 1.4.3 Les matériaux à gradient de propriétés (FGM)

L'intérêt que porte les secteurs d'ingénierie comme l'aéronautique, l'automobile et autres, à l'utilisation des matériaux composites, réside essentiellement dans la réduction de la masse tout en assurant un bon apport de résistance et de rigidité. Cependant, le matériau composite classique ne peut pas répondre efficacement dans certains environnements où la température est relativement élevée. En effet, les constituants du composite réagissent différemment aux chargements thermiques laissant de ce fait apparaître des contraintes résiduelles internes. Contrairement aux métaux, la céramique a d'excellentes propriétés thermiques, mais son utilisation dans les applications est très limitée à cause de sa fragilité mécanique. La recherche de matériaux couplant les propriétés mécaniques et thermiques a longtemps suscité la réflexion des chercheurs jusqu'au milieu des années quatre-vingt, où dans le cadre de sa recherche sur les composites à haut pouvoir thermique, le chercheur Japonais Koizumi (1993) [1] propose le concept de matériaux à gradient de propriétés. Les matériaux à gradient de propriétés (en Anglais : Functionally Graded Material, FGM) appartiennent à une classe de matériaux composites fabriqués à partir de différents matériaux (souvent de la céramique et du métal) et présentant une microstructure très hétérogène avec un effet considérable de couplage flexion-membrane d'un point de vue comportement mécanique. Dans ce cas de figure, la céramique assure la protection thermique, tandis que le métal de par ses propriétés ductiles, protège la structure contre des ruptures brusques qui occasionnent la ruine des structures. La Figure 1. 10 illustre la microstructure d'un matériau FGM présentant deux phases A et B dans le cas d'un gradient de composition.

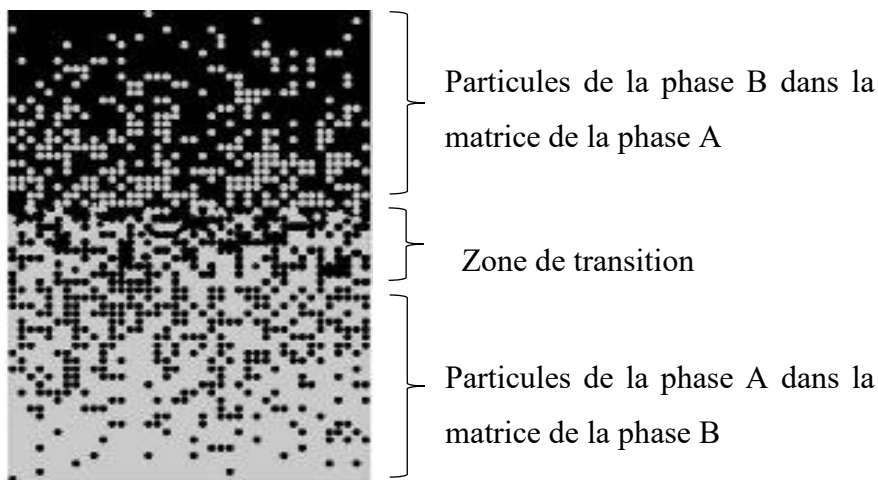


Figure 1. 10: Microstructure d'un matériau à gradient de propriétés FGM [69]

On peut y observer l'intégration de particules de différentes formes (généralement sphériques) dans une matrice isotrope. La particularité des FGMs est la variation graduelle et continue de la fraction volumique de chacun de ses constituants. Cette propriété permet à ces matériaux d'éliminer les problèmes d'interfaces (la surface de contact entre les différents constituants est quasi nulle). Par cette microstructure, la présence des contraintes résiduelles est considérablement réduite, évitant ainsi les problèmes de délaminage tout en améliorant la durée de vie en service de la structure. Aussi, on peut remarquer que les faces du matériau FGM sont constituées de matériaux purs. Dans l'exemple du mélange de céramique et du métal, la variation graduelle des constituants débute de la surface en céramique pure pour atteindre la surface en métal pur. Avec ces propriétés matériaux particulières, les FGMs trouvent leurs applications dans diverses domaines d'ingénierie ([70]–[74]). Au début de leurs utilisations, les FGMs servaient de barrières thermiques pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion [75]–[77]. Ils sont aussi utilisés dans certaines applications comme composants structuraux dans des environnements de haute température (thèse de Autissier [78]). Aujourd'hui leurs domaines d'utilisations se sont beaucoup diversifiés : dans le domaine médical, on peut les retrouver comme implants, en optique, ils sont utilisés sous forme de verres à indice de réfraction graduelle etc.

#### **1.4.3.1 Notion sur le concept de gradient des FGMs**

Les matériaux à gradient de propriétés sont généralement composés de deux phases. La variation de la fraction volumique de chacune des phases permet de changer les propriétés du matériau. Par ailleurs, ces propriétés changent en fonction de la connectivité du réseau interne de la structure. L'exemple de la Figure 1. 11 illustre bien ce caractère microstructurale des FGMs. Au début de la transformation (a), la phase A se trouvait sous forme de grains isolés et éparpillés dans la phase B. L'augmentation de la fraction volumique de la phase A amorce un regroupe des particules de cette phase en tas dont le volume accroît progressivement (b, c, d et e). Ce bouleversement de la microstructure du composite FGM s'accompagne d'un changement profond des propriétés mécaniques, thermiques et électriques du matériau [79]. Il faut donc souligner que, le gradient de distribution du matériau FGM, est la principale source de variations de ses propriétés. Notons aussi que ce gradient n'existe pas que sous forme de distribution de phase ou de texture mais également sous forme de composition et de porosité.

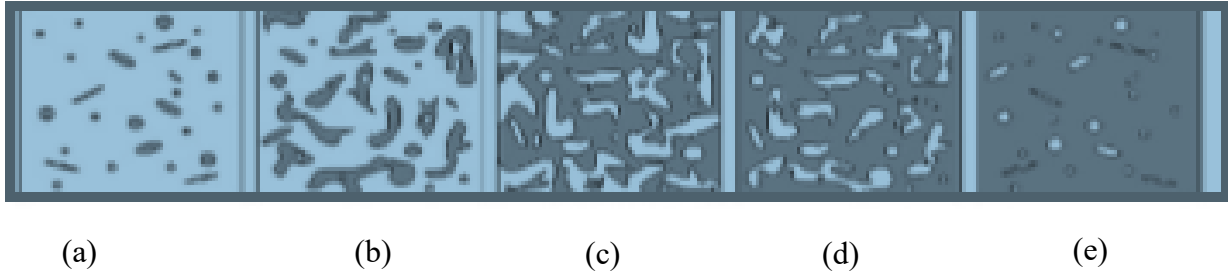


Figure 1. 11: Variations de la microstructure d'un FGM

### 1.4.3.2 Techniques de conception et de caractérisation des matériaux FGM

Au vu de la diversification des applications des matériaux à gradient de propriétés, il est nécessaire de trouver des techniques de conception adéquates pour élaborer des matériaux conformes aux exigences et répondant aux normes de qualité et de sécurité. Ainsi, les procédés de fabrication des FGMs sont nombreux et diversifiés. Les méthodes les plus connues sont : les dépôts physiques et chimiques en phase de vapeur, la synthèse par auto-combustion, le couplage en bande, l'implantation ionique. Toutes ces méthodes de fabrications se rivalisent sur des aspects techniques comme, par exemple, la simplicité du contrôle de la microstructure au cours de la fabrication et la limitation de la présence de contraintes résiduelles. Ces techniques ont beaucoup évolué au cours des années et ont permis d'élaborer les différents types de gradient existant avec des précisions appréciables. Beaucoup de FGMs sont élaborés par la technique de métallurgie des poudres suivie d'une consolidation par frittage qui assure une meilleure adhésion entre les différentes couches de poudre comparée à la technique de soudage-diffusion. Le frittage est une technique qui permet la densification du matériau en minimisant l'énergie du système grâce à un apport d'énergie d'origine thermique, mécanique ou autre sans fusion des constituants. L'une des procédés de frittage les plus récentes est la technologie SPS (Spark Plasma Sintering). Dans ce procédé, le chauffage de la poudre est assuré par effet joule après le passage d'un courant électrique. Cette méthode a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre et aussi les cycles de frittages y sont beaucoup plus courts avec des températures de frittage plus basses comparées aux procédés classiques. Ceci réduit la diffusion entre les matériaux constitutifs éliminant ainsi le risque de formation de phases fragiles. Avec ces nouvelles techniques de frittage, tous les types de matériaux peuvent être assemblés (métaux, céramiques, polymères...). La technologie SPS peut être aussi utilisée, pour le cofrittage de matériaux dont les températures de fusion sont très éloignées les unes des autres [80].

Une fois les matériaux FGM fabriqués, il faut s'assurer de leur qualité conformément au cahier des charges en passant par des méthodes de caractérisation non destructives.

Ceci permet d'évaluer les propriétés réelles du matériau et de s'assurer de la satisfaction des exigences de la demande. Cependant, il faut noter que, la microstructure des FGMs varie dans l'espace et donc, les méthodes de caractérisations classiques de la mécanique ne sont plus les mieux indiquées pour quantifier les propriétés matériaux. A cet effet, Il a été proposé dans la littérature, la technique de la résonance forcée qui consiste à estimer la propriété du matériau par mesure de la fréquence de résonance en flexion d'une éprouvette rectangulaire. Cette technique utilise l'analyse de la propagation des champs d'ondes élastiques dans la structure suivie des procédures de calculs inverses. Avec l'appui de puissants solveurs dont disposent les chercheurs aujourd'hui, les résultats obtenus avec la méthode de résonance dans la caractérisation des FGMs sont assez précis.

### **1.4.3.3 Modélisation des propriétés des FGMs**

La plupart des FGMs utilisés dans les applications sont constitués de deux types de matériaux présentant des propriétés distinctes. Les variations de la fraction volumique des différentes phases dans l'espace impliquent des variations graduelles et continues des propriétés du matériau suivant une ou plusieurs directions de la structure. Des modèles mathématiques représentant ce comportement existent dans la littérature et peuvent être regroupés suivant deux approches : l'approche discontinue et l'approche continue. La première considère le matériau FGM comme un empilement de couches quasi-cohérentes (Figure 1. 12a). La fraction volumique de chaque constituant est constante dans la couche mais peut varier entre deux couches distinctes. Cette approche donne une représentation grossière des propriétés du FGM. La deuxième approche suppose une variation continue dans l'espace de la distribution volumique des constituants l'un à l'inverse de l'autre (Figure 1. 12b). Les fractions volumiques dans ce cas sont modélisées par une fonction continue dépendante de la coordonnée suivant laquelle varient les propriétés du matériau (souvent dans la direction de l'épaisseur  $z$ ). Dans la littérature, différentes fonctions modélisant les variations dans l'espace de la fraction volumique des FGMs sont proposées. On peut citer entre autres, la fonction de loi de puissance (P-FGM) et la fonction sigmoïde (S-FGM) ([81], [82]).



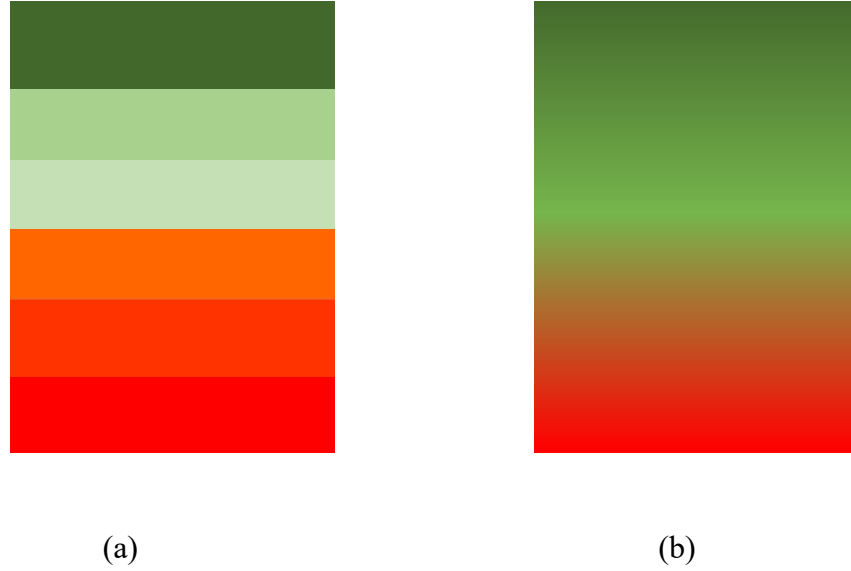


Figure 1. 12: Modèle de distribution matérielle dans une couche de FGM

Pour un matériau FGM de hauteur  $h$  avec un gradient orienté suivant la direction  $z$ , la fraction volumique de la phase métallique  $V_m$  et celle de la phase céramique  $V_c$  sont données par les relations suivantes :

**Suivant le Modèle P-FGM :**

$$V_c = \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^k \quad \text{pour } -h/2 \leq z \leq h/2. \quad (1.55)$$

**Suivant le Modèle S-FGM**

$$\begin{cases} V_c(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k & \text{pour } -h/2 \leq z < 0, \\ V_c(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k & \text{pour } 0 \leq z \leq h/2. \end{cases} \quad (1.56)$$

Pour ces deux modèles, la fraction volumique de la deuxième phase est  $V_m(z) = 1 - V_c(z)$ . L'indice de puissance  $k$  ( $0 \leq k < \infty$ ) de la fraction volumique est un paramètre qui pilote le profil de variabilité des propriétés du matériau le long de la direction  $z$ . En faisant varier ce paramètre on obtient plusieurs profils de variations de la fraction volumique  $V_c$  représentés sur la Figure 1. 13.

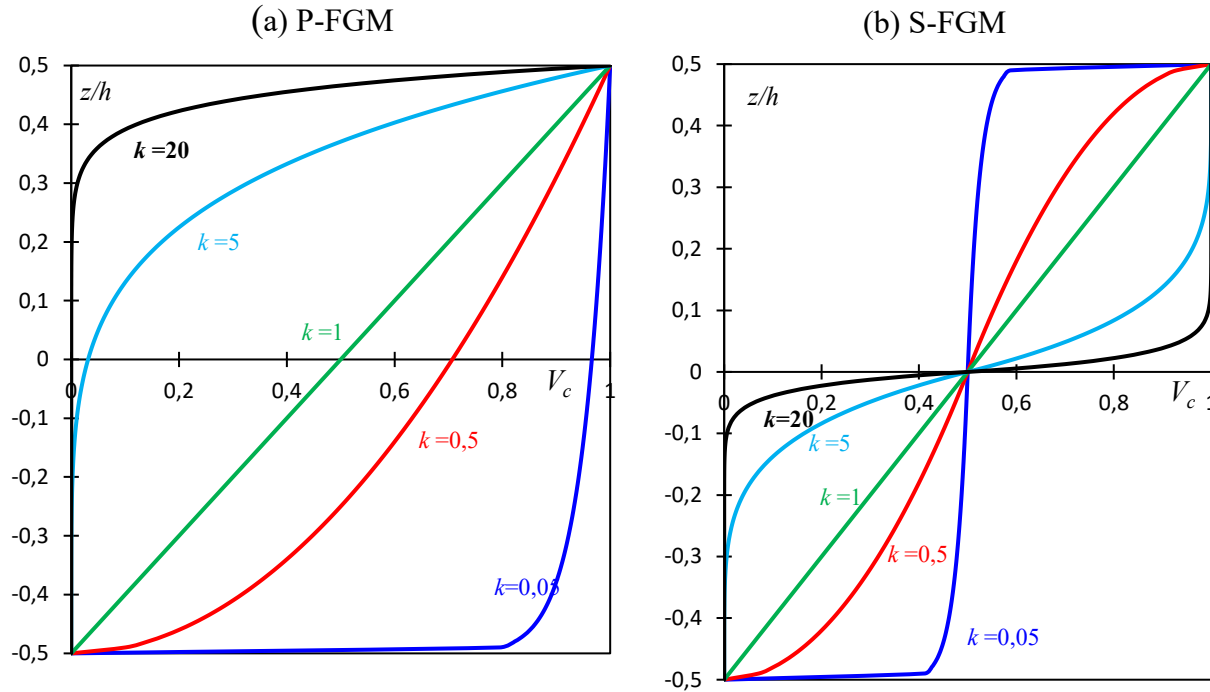


Figure 1. 13: Variations de la fraction volumique d'un FGM suivant différent modèle de gradient

#### 1.4.3.4 Propriétés effectives des FGMs

Pour des analyses exactes, la représentation des propriétés effectives des FGMs doit être précise afin de rendre compte du comportement réel du matériau. Pour cela plusieurs théories d'homogénéisation ont été proposées dans la littérature. Le modèle de Voigt, largement utilisé dans les travaux, estime les propriétés effectives  $P$  sous la forme suivante :

$$P = \sum_i P_i V_i, \quad (1.57)$$

où  $P_i$  et  $V_i$  désignent, respectivement, les propriétés matériaux et la fraction volumique du constituant  $i$ .

En chaque point de variation, la somme de la fraction volumique de chacun des constituants est égale à l'unité.

$$\sum_i V_i = 1. \quad (1.58)$$

La propriété effective  $P$  peut représenter : le module d'Young  $E$ , la densité  $\rho$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ , la conductivité thermique  $\kappa$  etc. Dans un bon nombre d'applications, les matériaux FGM sont utilisés dans des environnements de forte température qui ne permettent pas une conservation des propriétés mécaniques et thermiques.

Pour une prédiction précise de la réponse du matériau il est donc important d'intégrer aux modèles l'effet de la dépendance des propriétés en température. De ce fait les propriétés effectives peuvent être décrites comme fonction de la température et des coordonnées spatiales. Dans le cas des modèles P-FGM et S-FGM, la loi de Voigt permet de les exprimer comme suit :

$$P(z, T) = [P_c(T) - P_m(T)]V_c(z) + P_m(T). \quad (1.59)$$

Il existe aussi un modèle de matériau FGM dit **Modèle exponentielles E-FGM** qui définit les propriétés effectives  $P(z)$  du matériau sous forme d'une fonction exponentielle:

$$P(z) = P_m e^{\beta(z+h/2)}, \text{ pour } -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (1.60)$$

où  $\beta$  est un paramètre matériau défini par :

$$\beta = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{P_c}{P_m} \right). \quad (1.61)$$

$P_m$  et  $P_c$  sont des propriétés matériaux respectivement de la phase métallique ( $m$ ) et de la phase céramique ( $c$ ) du matériau FGM.

Dans ce travail nous adopterons le modèle de la loi de puissance P-FGM pour estimer les propriétés du matériau FGM. Cette représentation est largement utilisée dans la littérature avec une précision efficace des prédictions. Néanmoins, des modèles micromécaniques basés sur la théorie d'homogénéisation de Mori-Tanaka et sur l'approche auto-consistante existent et sont utilisés pour rendre compte des interactions entre les différentes phases du matériau FGM.

#### 1.4.4 Matériaux composites FGM et modèles d'amortissement

L'accroissement rapide de l'utilisation des matériaux composites dans la conception des structures pour répondre aux demandes de qualité, de confort, de sécurité et d'esthétique, s'accompagne d'un besoin de contrôler et de prédire leurs comportements face aux instabilités statiques et aux vibrations. Au début de leurs utilisations, les modèles amortissants étaient sous forme de structures sandwich avec des faces élastiques isotropes et une couche centrale viscoélastique. Dans cette configuration le pouvoir dissipatif est induit par la déformation importante en cisaillement du cœur viscoélastique. Ainsi, pour plus de rigidité et de résistance mécanique, il faut augmenter l'épaisseur de la couche élastique, et pour améliorer le pouvoir amortissant, il faut augmenter l'épaisseur du cœur.

Cependant, cette façon de procéder augmente le poids de la structure et limite, par conséquent, leurs utilisations dans des secteurs où la réduction de masse constitue un enjeu majeur, comme le domaine de l'aérospatial et de l'automobile. Ainsi, dans le souci d'alléger les structures tout en assurant une meilleure résistance, les industries se sont peu à peu orientées vers l'utilisation des composites et optent généralement pour l'amortissement passif dans le contrôle des instabilités et des vibrations. Dans ce cas, au pouvoir dissipatif des composites, s'ajoute celui du cœur viscoélastique. En effet, tout comme les matériaux viscoélastiques mais un peu moins, les matériaux composites sont aussi capables de dissiper de l'énergie de déformation sous forme thermique. Leur pouvoir dissipatif est induit soit par le comportement viscoélastique de la matrice soit par la friction aux interfaces matrice-fibre ou soit par un endommagement.

La modélisation des structures sandwich viscoélastiques à faces composites a fait l'objet de beaucoup de publications. Certains chercheurs se basant sur l'une des théories cinématiques citées précédemment, ont proposé des approches analytiques [83]–[86] et d'autres ont proposé des méthodes de résolution numériques [87]–[90]. Dans les travaux analytiques de [84], une méthode pour la prédiction des propriétés dynamiques de poutres composites laminées a été développée. En s'appuyant sur les travaux d'Adams et Bacon [83], ces auteurs utilisent la théorie classique des composites stratifiés pour prédire le module de Young effectif en flexion et l'amortissement global des structures de poutres composites laminées. L'amélioration de la prédiction du pouvoir dissipatif de la structure a été effective grâce à la prise en compte du couplage flexion-torsion en accord avec les résultats expérimentaux. Un modèle élément fini est proposé par [91] pour l'analyse des plaques sandwich laminées avec un cœur viscoélastique. Dans les travaux de cet auteur, le calcul des matrices de masse et de rigidité, est rendu possible grâce à l'utilisation de la théorie de Carrera (CUF) [92], et les propriétés amortissantes de la structure sont calculées dans le domaine fréquentiel avec une comparaison aux résultats de la littérature ainsi qu'aux résultats de tests expérimentaux. Ces différents modèles proposés dans la littérature, pour étudier le comportement et la vibration des structures composites viscoélastiques, sont basés sur différentes théories cinématiques. D'ailleurs, beaucoup de publications ont été dédiées à la réflexion sur les théories cinématiques les mieux adaptées à l'étude des structures sandwich viscoélastiques. Zhen et Wanji [93] ont comparé plusieurs théories cinématiques pour étudier les vibrations et le comportement au flambage des poutres sandwich laminées à âme souple. Ils ont indiqué que le modèle monocouche dans le cas où le cisaillement est important, en général, surestime considérablement les fréquences naturelles et les charges critiques de flambage. Des comparaisons détaillées des théories des composites sandwich, telles que, la théorie des laminés classiques, ainsi que les théories du cisaillement et du zig-zag, ont été examinées dans la remarquable revue bibliographique de Hu et al. [31].

Yasin et S. Kapuria [94] ont proposé un modèle élément fini basé sur la théorie zig-zag et ont comparé leurs simulations à celles obtenues par l'approche non zig-zag. Les limites du modèle monocouche en présence d'un coque sandwich sont ainsi analysées. De ces études, on retient que, pour une bonne prise en compte du cisaillement important que subit la couche viscoélastique au cœur de la structure sandwich, les modèles zig-zag sont les plus adaptés. Ainsi, plusieurs auteurs ont adopté la théorie cinématique zig-zag dans l'analyse dynamique, statique et de flambage des structures sandwich viscoélastiques [32]. Basés sur ces théories cinématiques, Hyer et al. [95, 96] et Kovac [97] ont analysé théoriquement et expérimentalement, les réponses forcées non linéaires des poutres sandwich viscoélastiques. Les auteurs Iu et al [98] ont présenté un modèle d'éléments finis pour la vibration libre non linéaire de poutres sandwich multicouches à âme souple où la méthode d'équilibre harmonique incrémental est utilisée dans la procédure de recherche de solutions. Bilasse et al [6] ont proposé un modèle numérique pour l'analyse dynamique linéaire et non linéaire des structures sandwich viscoélastiques. Dans la recherche de solutions, ils utilisent la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) couplée à la technique d'homotopie, dans laquelle, le calcul des termes de la série de Taylor est effectué selon la technique de différentiation automatique [67, 99]. Un travail remarquable sur la modélisation de l'amortissement passif des structures sandwichs composites classiques a été proposé dans la thèse de Akoussan [3]. Dans ce travail, la théorie cinématique zig-zag est adoptée, les effets de positionnement des couches de matériaux composites et de la variation de leur épaisseur sur le pouvoir dissipatif sont étudiés. Dans le but d'incorporer aux modèles existants des propriétés thermiques, les matériaux FGM sont proposés pour remplacer les composites classiques. Les travaux dédiés à la prédiction du comportement des structures FGM sont nombreux. Parmi ces auteurs, certains se sont intéressés à l'étude de poutres FGM à parois minces [100-101] où des différents types de sections ouvertes sont étudiées. Aussi, plusieurs théories cinématiques sont adoptées, dans les différents travaux proposés dans la littérature. On rencontre des modèles basés sur la théorie classique de poutre (CBT) dans un contexte 2D [102–104], pour l'étude statique et dynamique des structures en FGM. Dans ces modèles, le cisaillement est négligé. D'autres travaux prennent en compte l'effet de cisaillement en utilisant la théorie de poutre de Timochenko (FOST), la théorie du cisaillement de troisième ordre (TOST) et d'autres théories du cisaillement d'ordre élevé. Dans ces modèles, la rotation de cisaillement est prise en compte par des fonctions de cisaillement linéaires et non linéaires en plus des rotations de flexion [102, 105–107]. Se basant sur les modèles précédents, plusieurs travaux de recherches sur l'analyse dynamique et statique de poutres FGM multicouches (poutres sandwich) élastiques ont été proposés [108–113]. Dans ces travaux, les effets du positionnement et de l'épaisseurs des couches FGM sur la réponse statique et dynamique de la structure ont été étudiés.

En ce qui concerne l'amortissement passif des structures sandwich FGM par utilisation de matériaux viscoélastiques, jusqu'à présent, peu d'études sont disponibles dans la littérature. Bhangale et Ganesan [112] ont présenté, une formulation par élément fini, basée sur la théorie des plaques stratifiées, pour l'étude des vibrations et de l'amortissement des plaques sandwich FGM viscoélastiques. Dans leurs travaux, la méthode d'énergie de déformation modale a été utilisée pour évaluer l'amortissement au lieu de résoudre un problème complexe de valeur propre. L'étude a été réalisée sur des plaques encadrées. Liu et al. [113] étudient analytiquement la vibration libre des plaques sandwich FGM, en utilisant le modèle de cisaillement de Timoshenko pour les faces et une solution d'élasticité 3D pour le cœur plus mou. D'autres auteurs [114], ont proposé des modèles de coques sandwich et coques composites laminés FGM en se basant sur des théories de cisaillement zig-zag et la méthode différentielle d'éléments finis au carré. Yang et al.[115] ont étudié des plaques sandwich FGM amorties. Plus récemment, Moita et al [116] ont développé un modèle d'éléments finis pour l'analyse des vibrations des plaques sandwich FGM à âme viscoélastique.

## 1.5 Bilan et positionnement du sujet

L'utilisation des structures sandwich viscoélastiques amortissantes est un moyen efficace et moins chère pour contrôler les vibrations et protéger les infrastructures contre les phénomènes de rupture. Le pouvoir amortissant de ces structures est quantifié par des analyses numériques ou par des essais expérimentaux permettant d'évaluer la fréquence propre et le facteur de perte de la structure. On rencontre de plus en plus dans les applications, des structures sandwich viscoélastiques en matériaux composites alors qu'auparavant elles étaient essentiellement en matériaux isotropes. En effet les composites offrent davantage de souplesse dans l'amélioration du pouvoir dissipatif et de la résistance des structures sans augmentation de masse contrairement aux matériaux isotropes. On envisage aujourd'hui d'utiliser cette technique d'amortissement dans des domaines à haut chargement thermique (les réacteurs nucléaires), où des matériaux à gradient de propriétés FGM trouvent tout leur intérêt. L'avantage de l'utilisation de ces matériaux FGM est lié, d'une part, à leur capacité de résistance thermomécanique et, d'autre part, à leur microstructure particulière leur permettant de limiter la présence de contraintes résiduelles responsables des phénomènes de délaminage dans les structures. De façon générale, la modélisation des structures sandwich composites viscoélastiques est difficile et complexe à cause de la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique et aussi à cause du comportement anisotrope du composite. Des travaux existants à ce sujet, on note la difficulté d'une prise en compte réelle du comportement viscoélastique dans la recherche de solutions. Pour répondre à cette insuffisance, des travaux récents ont proposé des modèles génériques basés sur des méthodes numériques, pour prendre en compte le comportement viscoélastique réel, dans la recherche des propriétés modales de la structure.

Dans le cas des composites FGM, les rares travaux existants n'étudient que le cas des matériaux viscoélastiques peu amortissants dont le module élastique est complexe constant. Or dans les applications industrielles, les matériaux viscoélastiques utilisés, sont en grande majorité, des matériaux à haut pouvoir amortissant avec un comportement dépendant non linéairement de la fréquence. Par ailleurs, ces auteurs adoptent dans la plupart de leurs travaux des hypothèses simplificatrices et n'étudient que le cas des sections symétriques. Ces considérations leur permettent, de ne pas considérer le couplage flexion membrane et rotation-membrane dans leurs études. Or les matériaux FGM présentent des sections quelconques à cause d'une distribution arbitraire de la matière dans l'épaisseur. Ceci les rend très sensible aux effets de couplage spatial. Plus encore, les modèles amortissants de matériaux composites classiques existants, présentent dans la plupart des cas un très faible pouvoir amortissant pour les modes de basses fréquences [117]. En ce sens l'utilisation des matériaux FGM peut être bénéfique pour l'amélioration du pouvoir dissipatif des structures.

Aussi, la modélisation du comportement des structures FGM viscoélastiques dans les codes commerciaux est complexe et peu développée. Dans les dernières versions d'Abaqus (Abaqus CAE 2018 et 2019), le comportement dynamique des structures FGM viscoélastiques est implémenté dans le cas d'éléments volumiques 3D et exclusivement pour les matériaux viscoélastiques à module complexe constant. La modélisation des matériaux FGM dans ces codes génère, de ce fait, beaucoup de degrés de liberté et nécessite un temps de préparation considérable. Il est donc nécessaire de trouver des modèles réduits pour l'étude des structures FGM viscoélastiques.

Face à ce besoin, nous proposons dans ce travail un modèle numérique 2D pour l'étude statique et des vibrations de structures sandwich viscoélastiques FGM sans aucune restriction dans la prise en compte du couplage spatial et de la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. Dans ce code, basé sur l'approche élément fini, le problème aux valeurs propres non linéaire sera résolu de manière quasi-exacte par la technique d'homotopie couplée à la méthode Asymptotique, avec l'utilisation de l'outil de différentiation automatique (le code Diamant). L'effet d'utilisation des FGMs sur le pouvoir dissipatif des structures sandwich viscoélastiques sera abordé avec, éventuellement, une attention particulière à l'amortissement des modes de faibles fréquences. Des comparaisons seront effectuées avec les travaux de la littérature et des simulations numériques par Abaqus pour validation.



# **Chapitre 2: Un modèle élément fini pour le comportement statique et dynamique des poutres sandwich FGM avec couplage flexion-membrane.**

## Sommaire

---

2.1	Introduction.....	57
2.2	Formulation élément fini du problème .....	57
2.2.1	Les théories de base du modèle.....	58
2.2.2	Formulation variationnelle du problème dynamique et d'équilibre statique. ....	64
2.2.3	Approche élément fini du problème statique et de vibration .....	70
2.3	Résultats numériques et discussions.....	72
2.3.1	Etudes statiques .....	74
2.3.2	Analyse des vibrations libres de poutres sandwichs FGM.....	92
2.4	Conclusion .....	100

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse par la méthode des éléments finis des poutres multicouches en matériaux à gradient de propriétés. Pour ce modèle, les différentes couches de matériaux constituant la poutre sandwich sont de propriétés voisines. De ce fait, le champ cinématique de type non zig-zag est adopté pour modéliser le déplacement en tout point de la structure. Pour les matériaux FGM, les propriétés varient suivant la loi de puissance P-FGM. Le caractère non-symétrique de leurs sections droites n'est pas sans effet sur leur comportement, et pour en tenir compte, l'effet du couplage membre-flexion et membrane-rotation est intégré dans le modèle. Basé sur différentes théories de poutre (la théorie classique et les théories de cisaillement), le modèle proposé dans ce travail est écrit sous un code numérique générique permettant de faire des calculs statiques et aussi de chercher les modes et les fréquences propres de vibrations de manière directe.

## 2.2 Formulation élément fini du problème

Dans ce travail, on propose un modèle élément fini, pour l'étude du comportement et des vibrations libres d'une poutre sandwich constituée de matériaux isotropes et de matériaux à gradient de propriétés. La disposition des différentes couches de la poutre sandwich étant arbitraire, en plus du caractère non symétrique de la section droite des matériaux FGM, il est évident que l'axe neutre ne soit pas forcément confondu à la ligne moyenne de la poutre. La position de l'axe neutre peut être déterminée en annulant la résultante des forces axiales agissant sur la section droite de la poutre :  $\int_A \sigma dA = 0$ .

La formulation du problème de vibration libre de la poutre sandwich FGM aboutit à un système linéaire aux valeurs propres dont la résolution est possible avec des méthodes classiques comme la méthode de Lanczos [4].

## 2.2.1 Les théories de base du modèle

### 2.2.1.1 Modèles cinématiques et relations constitutives

On considère une poutre sandwich de longueur  $L$  et de section rectangulaire de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  dans le système de coordonnées direct  $(o, x, y, z)$  (Figure 2. 1). La structure est composée de plusieurs couches numérotées de bas en haut. La hauteur d'une couche  $i$  est représentée par  $h_i = z_{i+1} - z_i$  avec  $z_i$  et  $z_{i+1}$  les coordonnées suivant l'axe vertical ( $oz$ ) des faces limitrophes. Le modèle développé dans cette section est basé sur l'hypothèse d'un comportement plan de la poutre. Dans ces conditions seules les réponses axiales et verticales peuvent être investiguées.

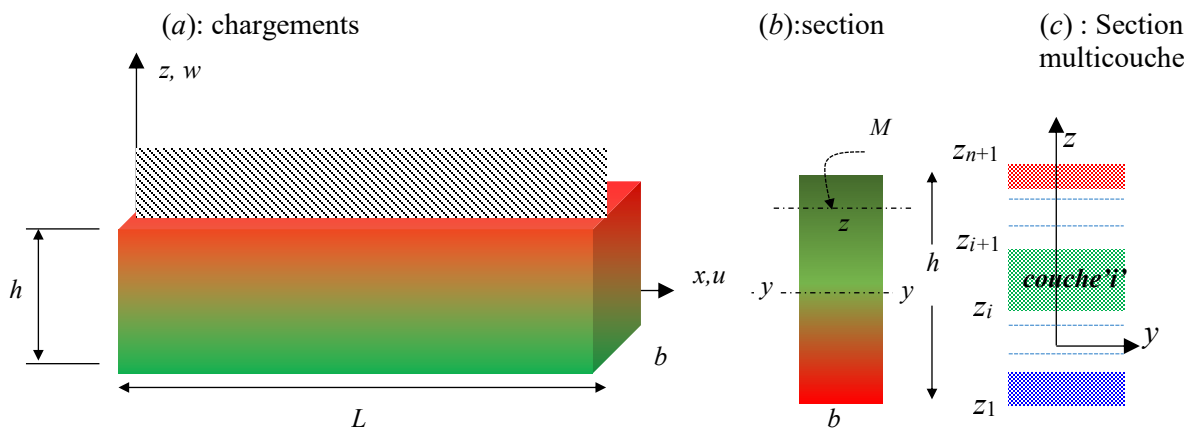


Figure 2. 1 Poutre FGM 2D avec une section multicouche

Les modèles proposés dans ce chapitre sont basés sur une formulation mathématique dans laquelle, le cisaillement est pris en compte dans toutes les couches. On rappelle que la présence du cisaillement implique que toute section droite et perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre avant déformation reste perpendiculaire à la ligne moyenne mais pas forcément droite après déformation de la poutre. Pour le présent modèle la théorie de poutre est adoptée. Ainsi, tous les points situés sur une même normale à la ligne moyenne de la poutre sont supposés avoir le même déplacement vertical.

En se basant sur ces hypothèses, le déplacement d'un point quelconque  $M$  de coordonnées  $(x, z)$  appartenant à une section droite de la poutre est donné par le champ cinématique suivant :

$$\begin{cases} U_M(x, z, t) = u(x, t) - zw'(x, t) + f(z)\phi(x, t), \\ W_M(x, z, t) = w(x, t), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec  $u(x, t)$  et  $w(x, t)$  le déplacement axial et vertical d'un point de l'axe de référence et  $\phi$  la rotation de cisaillement.  $(.)'$  représente l'opérateur de dérivation suivant  $x$ . La déformation en cisaillement est décrite par la fonction  $f(z)$  dont l'expression varie suivant différentes théories de cisaillement comme indiqué dans le Tableau 1. 2. Ces hypothèses sont communes à plusieurs auteurs [13,14, 16]. Les composantes du tenseur déformation relative aux champs cinématiques (2.1) sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_M}{\partial x} = u' - zw'' + f(z)\phi', \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial U_M}{\partial z} + \frac{\partial W_M}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz}\phi. \end{cases} \quad (2.2)$$

La relation constitutive considérée dans cette formulation respecte la loi d'élasticité de Hooke et est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(z) = E(z)\varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{xz}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xz} = G(z)\varepsilon_{xz}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans cette relation,  $E$  et  $G$  représentent, respectivement, le module d'Young et le module de cisaillement du matériau considéré. Pour les matériaux FGM, ces modules élastiques sont dépendants des coordonnées spatiales et dans notre exemple, ils varient dans la hauteur ( $oz$ ). De même, la densité du matériau FGM sera considérée comme variant continuellement dans la hauteur. En se basant sur une méthode énergétique, Ziou et al. [118] et Guenfoud et al. [119], ont prouvé que la variation du coefficient de Poisson n'avait pas d'effet significatif sur le comportement du matériau FGM. Par conséquent nous allons considérer un coefficient de Poisson constant pour le matériau FGM.

Dans les applications, les modèles de poutre développés seront testés en considérant différentes types de sections sandwich. La partie suivante du travail décrit ces sections et donne un aperçu des variations des propriétés effectives du matériau FGM à travers chacune d'elles.

### 2.2.1.2 Variations des propriétés effectives de la section droite.

Les sections de poutre considérées dans ce travail, sont constituées de couches en matériaux isotropes et de couches en matériaux FGM. Le matériau à gradient de propriétés est constitué de la céramique (c) et de métal (m) et est modélisé par la loi P-FGM avec une fraction volumique des constituants dépendante de la coordonnée  $z$ . Trois types de sections sont considérés dans les exemples : une section pure en FGM appelée section de type A et deux sections sandwich appelées section de type B et de type C. Les détails sur leurs caractéristiques sont les suivants :

#### Section de Type A (Figure 2. 2a) :

Cette section est purement en matériau FGM. La fraction volumique de la céramique est donnée par l'expression suivante.

$$V_c(z) = \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right)^k. \quad (2.4)$$

Comme précisé précédemment, l'exposant  $k$  est nommé *indice de puissance* et est toujours positif ( $k \geq 0$ ). Dans le cas de la section de type A, pour une valeur de  $k=0$ , la section obtenue est une section en céramique pure avec des propriétés matériaux constantes et lorsque les valeurs de l'indice de puissance augmentent, la nature de la section se rapproche de celle d'un métal pur.

#### Section de Type B (Figure 2. 2b) :

Une poutre de section de type B est composée d'une couche centrale en céramique insérée entre deux couches en FGM pur. Dans les trois couches de cette section, la fraction volumique de la céramique obéit aux relations suivantes.

$$\begin{aligned}
 \text{- Couche inférieure en FGM :} \quad & V_c(z) = \left( \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^k, \quad z_1 \leq z \leq z_2, \\
 \text{- couche centrale en céramique:} \quad & V_c(z) = 1, \quad z_2 \leq z \leq z_3, \\
 \text{- couche supérieure en FGM:} \quad & V_c(z) = \left( \frac{z - z_4}{z_3 - z_4} \right)^k, \quad z_3 \leq z \leq z_4,
 \end{aligned} \tag{2.5a-c}$$

où  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  sont les coordonnées suivant l'axe ( $oz$ ) des surfaces des couches respectivement de la surface inférieure à la surface supérieure. En présence de cette section, le cas particulier d'une valeur de  $k=0$  correspond à une section multicouche en céramique pure et lorsque cet indice augmente la section FGM/céramique/FGM tend vers la section métal/céramique/métal.

### Section de Type C (Figure 2. 2c)

La section de type C est aussi une section sandwich constituée d'une couche FGM centrale disposée entre une couche métallique et une couche en céramique. Pour ce type de section la fraction volumique de la céramique dans chacune des trois couches varie suivant les relations :

$$\begin{aligned}
 \text{-couche inférieure en céramique:} \quad & V_c(z) = 1, \quad z_1 \leq z \leq z_2, \\
 \text{-couche centrale en FGM :} \quad & V_c(z) = \left( \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \right)^k, \quad z_2 \leq z \leq z_3, \\
 \text{-couche supérieure en métal:} \quad & V_c(z) = 0, \quad z_3 \leq z \leq z_4.
 \end{aligned} \tag{2.6a-c}$$

Dans ce cas, pour une valeur de  $k=0$ , on obtient une section céramique/céramique/métal et lorsque la valeur de  $k$  augmente, la section céramique/FGM/métal évolue progressivement vers la section céramique/métal/métal.

Il faut aussi noter que, dans les sections sandwich traitées dans ce chapitre, la disposition des différentes couches est faite en assurant une continuité matérielle aux interfaces. De ce fait la face du FGM en céramique est en contact avec la couche en céramique et la face du FGM en métal en contact avec la couche métallique. Ceci permet d'éviter des discontinuités matérielles, sièges des contraintes résiduelles.

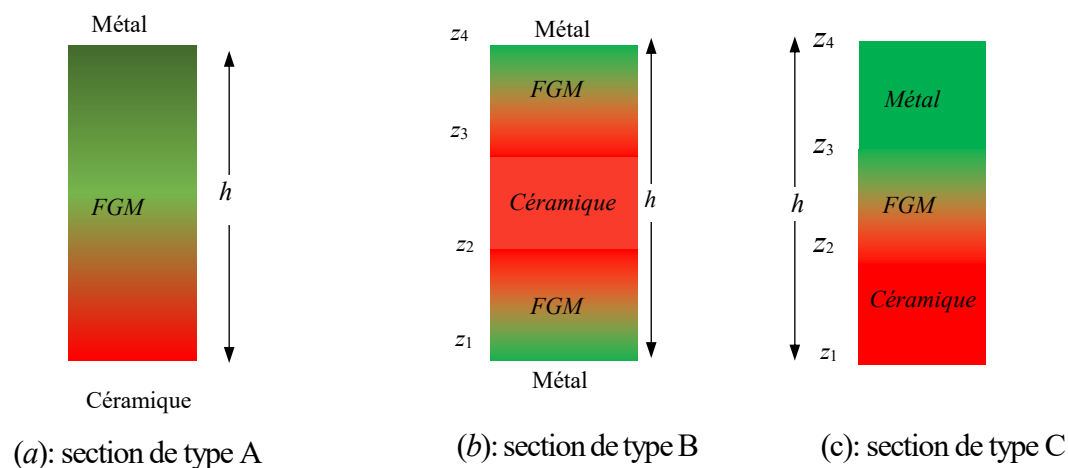


Figure 2. 2: Les différents types de sections droites étudiées

Les variations de la fraction volumique dans la hauteur de chacune des sections sont représentées sur la Figure 2.3 pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Les variations correspondantes à la section de type A sont représentées sur la Figure 2.3a et celles correspondantes aux sections de type B et C sont présentées respectivement sur les Figure 2.3b et c. Sur ces figures, l'approche continue adoptée dans ce travail pour modéliser le comportement des matériaux à gradient de propriétés, est perceptible à travers les courbes continues représentant les variations de la fraction volumique dans l'épaisseur de la structure. Aussi, avec cette approche, les propriétés effectives du matériau FGM varient continuellement dans l'épaisseur de la structure. Dans la section suivante, l'équation de vibration libre et l'équation d'équilibre statique de la poutre sandwich FGM seront présentées dans le cas d'un comportement 2D. En premier lieu, une formulation mathématique en milieu continu sera considérée. Puis dans le processus de résolution du problème, l'approche élément fini sera adoptée.

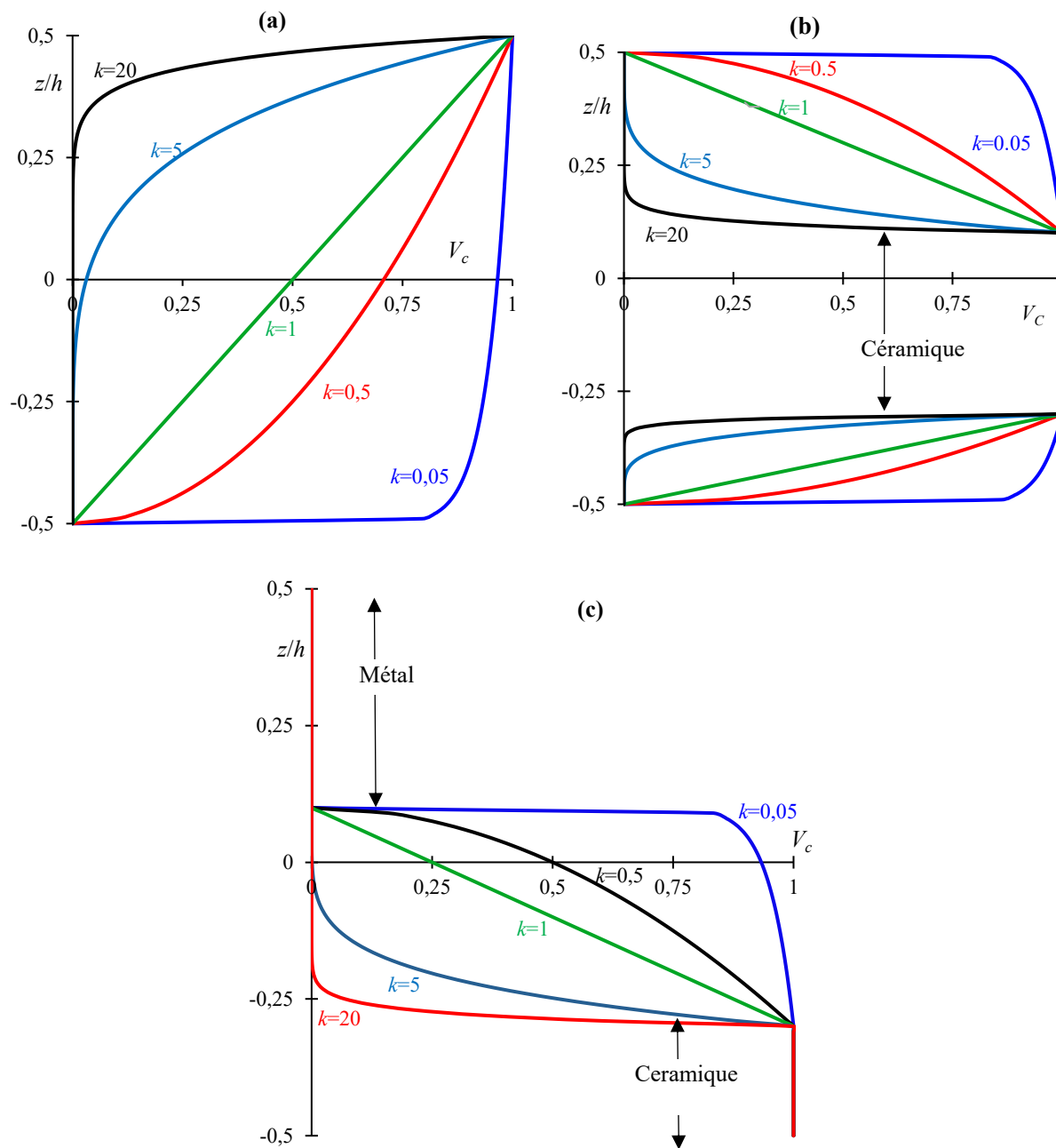


Figure 2. 3: Variations de la fraction volumique  $V_c$  de la céramique dans l'épaisseur de : la section A (a), la section B (b) et la section C (c)



## 2.2.2 Formulation variationnelle du problème dynamique et d'équilibre statique.

L'équation du mouvement de vibration de la poutre sandwich FGM considérée, dérive du principe d'Hamilton. L'application de ce principe permet de faire une sommation de la contribution en énergie et en travail de chacune des couches. Ainsi, le problème de vibration de la poutre FGM se traduit par la relation :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt = 0, \quad (2.7)$$

où  $U$ ,  $T$  et  $W$  représentent respectivement, l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et le travail des forces extérieures appliquées à la poutre.  $\delta$  est la quantité variationnelle.

En statique, l'énergie cinétique est nulle, l'équation d'équilibre dérive de la condition de stationnarité du potentiel. Elle se traduit par la relation suivante.

$$\delta(U - W) = 0. \quad (2.8)$$

Dans ce travail l'approche élément fini est adoptée. Pour cela les équations d'équilibre et de mouvement de vibration seront écrites sous une forme matricielle. Dans cet objectif, on définit les vecteurs de travail suivants.

$$\begin{aligned} \{q\}^t &= \{u \quad w \quad \phi\}, \quad \{\eta\}^t = \{u' \quad -w'' \quad \phi' \quad \phi\}, \quad \{\psi\}^t = \{u' \quad w' \quad \phi'\} \\ \{\gamma\}^t &= \{u' \quad w' \quad \phi' \quad w'' \quad \phi\}, \quad \{e\}^t = \{u \quad w \quad w'\}. \end{aligned} \quad (2.9a-e)$$

La variation de l'énergie de déformation  $U$  de la poutre multicouche FGM peut être exprimée comme somme des contributions énergétiques de toutes les couches. Vu sous cet angle, cette quantité peut s'exprimer comme suit.

$$\delta U = b \int_L \left( \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dz \right) dx, \quad (2.10)$$

où  $n$  et  $b$  désignent respectivement le nombre total de couches et la largeur de la section transversale.

Selon la définition de la déformation dans l'équation 2.2, la variation de l'énergie de déformation peut s'écrire en fonction des composantes du vecteur déplacement sous la forme :

$$\delta U = b \int_L \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left\{ \sigma_{xx} (\delta u' - z \delta w'' + f(z) \delta \phi') + \sigma_{xz} \frac{df(z)}{dz} \delta \phi \right\} dz dx. \quad (2.11)$$

Par l'intégration sur la section transversale, la fonctionnelle de l'énergie de déformation est exprimée en termes de forces de contrainte s'appliquant sur la section :

$$\delta U = \int_L (N \delta u' - M_w \delta w'' + M_f \delta \phi' + V \delta \phi) dx, \quad (2.12)$$

où  $N$ ,  $M_w$ ,  $M_f$  et  $V$  sont, respectivement, la force axiale, le moment de flexion, le moment de cisaillement et la force de cisaillement. Ces différentes grandeurs sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} N &= b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma_{xx} dz, & M_w &= b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} z \sigma_{xx} dz, \\ M_f &= b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma_{xx} f(z) dz, & V &= b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma_{xz} \frac{df(z)}{dz} dz. \end{aligned} \quad (2.13a-d)$$

En tenant compte des composantes du tenseur de déformation (2.2) et de la relation constitutive du matériau (2.3), les forces de contrainte peuvent être dérivées en termes de gradients de déplacements suivant la relation:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_w \\ M_f \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_f & 0 \\ a_1 & a_2 & a_{zf} & 0 \\ a_f & a_{zf} & a_{f^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ -w'' \\ \phi' \\ \phi \end{Bmatrix} = [D] \{\eta\}, \quad (2.14)$$

où  $[D]$  est la matrice de comportement du matériau.  $\{S\}$  est la résultante des forces généralisées agissantes sur la section et  $\{\eta\}$  le vecteur de gradient de déplacement défini en (2.9). Les coefficients de la matrice  $[D]$  sont calculés par intégration sur la section transversale :

$$\begin{aligned}
 (a_0, a_1, a_2, a_f, a_{zf}, a_{f^2}) &= b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} E(z) (1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)) dz, \\
 a_\tau &= b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} G(z) \left( \frac{df(z)}{dz} \right)^2 dz.
 \end{aligned}
 \tag{2.15a-b}$$

Dans l'approche élément fini, l'intégration numérique est adoptée dans les procédures de calculs des coefficients de la matrice de comportement. Afin d'éviter le problème de convergence bien connu sous le nom de verrouillage numérique, la variation de l'énergie de déformation sera exprimée en deux termes : un terme de flexion pure et un terme de cisaillement :

$$\delta U = \int_L \{ \delta \eta \}^t [D_b] \{ \eta \} dx + \int_L \{ \delta \eta \}^t [D_s] \{ \eta \} dx,
 \tag{2.16}$$

où  $[D_b]$  et  $[D_s]$  sont des matrices carrées d'ordre 4 représentant respectivement la partie de flexion pure et la partie de cisaillement de la matrice de comportement  $[D]$ . Les termes de la matrice  $[D_b]$  sont donnés par :

$$[D_b] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_f & 0 \\ a_1 & a_2 & a_{zf} & 0 \\ a_f & a_{zf} & a_{f^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \tag{2.17}$$

Dans la matrice de cisaillement  $[D_s]$ , la seule composante non nulle est  $D_s(4,4) = a_\tau$  (défini dans 2.15). Rappelons que dans le présent travail aucune hypothèse n'est faite sur le caractère symétrique ou non de la répartition matérielle autour de l'axe de référence de la poutre. En présence des couches à matériaux FGM, la matrice de flexion  $[D_b]$  est pleine. Des couplages membranes-flexions et membranes-rotations sont à prévoir dans ce cas. Dans les structures composites classiques, le couplage flexion-membrane est souvent négligé, pour cela les termes de couplage sont nuls et par conséquent la matrice  $[D_b]$  se présente sous forme d'une matrice diagonale. Dans le présent travail, la formulation est beaucoup plus généralisée et tient compte des effets de couplages spatiaux caractérisant le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

Pour des raisons de simplicité, le vecteur  $\{ \eta \}$  peut être exprimé en fonction du vecteur  $\{ \gamma \}$  par la relation :

$$\{\eta\} = [H]\{\gamma\}, \quad (2.18)$$

avec  $[H]$  une matrice constante de taille (4, 5) dont les termes non nuls sont : ( $H(1,1) = H(3,3) = H(4,5) = -H(2,4) = 1$ ). On peut alors écrire la fonctionnelle de l'énergie de déformation  $\delta U$  sous une forme beaucoup plus simple en utilisant les vecteurs  $\{\gamma\}$  et  $\{\delta\gamma\}$  :

$$\delta U = \int_L \{\delta\gamma\}' [H]' [D_b] [H] \{\gamma\} dx + \int_L \{\delta\gamma\}' [H]' [D_s] [H] \{\gamma\} dx. \quad (2.19)$$

De même que le module d'Young et le module de cisaillement, on rappelle que la densité  $\rho(z)$  du matériaux FGM varie aussi en fonction des coordonnées spatiales. En tenant compte de ce comportement, l'énergie cinétique  $T$  de la poutre sandwich FGM peut s'exprimer comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \int_L b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho(z) (\dot{U}_M^2 + \dot{W}_M^2) dz dx, \quad (2.20)$$

où  $(\dot{\phantom{x}})$  est l'opérateur dérivée par rapport au temps  $t$ . En utilisant les relations cinématiques (2.1), la variation de l'énergie cinétique devient après intégration sur la section :

$$\begin{aligned} \delta T = \int_L & b_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) + b_2 \dot{w}' \delta \dot{w}' + b_{f^2} \dot{\phi} \delta \dot{\phi} - b_1 (\dot{u} \delta \dot{w}' + \dot{w}' \delta \dot{u}) \\ & + b_f (\dot{u} \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{u}) - b_{zf} (\dot{w}' \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{w}') \} dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les coefficients  $B_i$  intervenant dans l'équation (2.21) sont calculés par une intégration de la densité massique sur la section droite de la poutre:

$$(b_0, b_1, b_2, b_f, b_{zf}, b_{f^2}) = b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho(z) (1, z, z^2, f(z), zf'(z), f^2(z)) dz. \quad (2.22)$$

En introduisant les vecteurs de travail définis dans 2.9, la variation de l'énergie cinétique s'obtient sous la formulation matricielle suivante.

$$\delta T = \int_L (\{\delta \dot{q}\}' [M_1] \{\dot{q}\} + \{\delta \dot{\psi}\}' [M_2] \{\dot{\psi}\} + \{\delta \dot{\psi}\}' [M_3] \{\dot{q}\} + \{\delta \dot{q}\}' [M_4] \{\dot{\psi}\}) dx, \quad (2.23)$$

où les matrices  $[M_i]$  ( $i=1, 2, 3$  et 4) sont des matrices de masse élémentaires constituées par les coefficients  $B_i$  calculés dans la relation (2.22) :

$$\begin{aligned}
 [M_1] &= \begin{bmatrix} b_0 & 0 & b_f \\ 0 & b_0 & 0 \\ b_f & 0 & b_{f^2} \end{bmatrix}, & [M_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 [M_3] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & -b_{zf} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & [M_4] &= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{zf} & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.24a-d}$$

De même que dans le cas de la matrice de comportement, on adopte l'intégration numérique pour le calcul des coefficients des matrices de masse. Afin d'obtenir les variations virtuelles  $\{\delta q\}$  et  $\{\delta \psi\}$ , une intégration par partie dans l'espace temporel est nécessaire. On obtient après calcul, l'expression suivante de la fonctionnelle de l'énergie cinétique:

$$\delta T = - \int_L (\{\delta q\}' ([M_1]\{\ddot{q}\} + [M_4]\{\ddot{\psi}\}) + \{\delta \psi\}' ([M_2]\{\ddot{\psi}\} + [M_3]\{\ddot{q}\})) dx. \tag{2.25}$$

En statique, les chargements extérieurs appliqués à la poutre sont de type mécaniques et peuvent être concentrés en un point de la structure ou répartis suivant la ligne moyenne de la poutre. Dans la formulation présente, les chargements sont pris en compte par le calcul du travail virtuel qu'ils effectuent au cours du mouvement de la structure. La fonctionnelle de ce travail est notée  $\delta W$  et son expression en fonction des déplacements est donnée par :

$$\delta W = \int_L (f_{xe}(x)\delta u + f_{ze}(x)\delta w + m_{ye}(x)\delta w') dx = \int_L \{\delta e\}' \{f(x)\} dx. \tag{2.26}$$

$\{f(x)\}$  est le vecteur de chargement défini par ses composantes axiales, verticales et de flexion :

$$\{f(x)\}' = \{f_{xe}(x) \quad f_{ze}(x) \quad m_{ye}(x)\}. \tag{2.27}$$

Sur la base des équations (2.19), (2.25) et (2.26), on obtient la formulation matricielle suivante des équations gouvernant le mouvement des vibrations :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_L \{\delta \gamma\}' [H]' [D_b] [H] \{\delta \gamma\} dx + \int_L \{\delta \gamma\}' [H]' [D_s] [H] \{\delta \gamma\} dx \right. \\
 & + \int_L (\{\delta q\}' ([M_1]\{\ddot{q}\} + [M_4]\{\ddot{\psi}\}) + \{\delta \psi\}' ([M_2]\{\ddot{\psi}\} + [M_3]\{\ddot{q}\})) dx \\
 & \left. - \int_L \{\delta e\}' \{f(x)\} dx \right) dt = 0.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ce système est obtenu dans un cadre général de chargements statiques et dynamiques. Sous des charges statiques, les termes cinétiques regroupés à la deuxième ligne de l'équation (2.28) sont ignorés, le système d'équation d'équilibre est alors déduit sous la forme :

$$\int_L \{\delta\gamma\}^t [H]^t [D_b][H] \{\delta\gamma\} dx + \int_L \{\delta\gamma\}^t [H]^t [D_s][H] \{\delta\gamma\} dx - \int_L \{\delta e\}^t \{f(x)\} dx = 0. \quad (2.29)$$

Cette équation nous permet de calculer les déplacements, la répartition des contraintes et des déformations de la poutre sandwich FGM soumise à un chargement extérieur.

Dans l'analyse des vibrations libres, les modes des vibrations sont obtenus sans chargement extérieur. Dans ce cas l'équation du mouvement peut être exprimée sous la forme :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_L \{\delta\gamma\}^t [H]^t [D_b][H] \{\delta\gamma\} dx + \int_L \{\delta\gamma\}^t [H]^t [D_s][H] \{\delta\gamma\} dx \right. \\ \left. + \int_L (\{\delta q\}^t ([M_1]\{\ddot{q}\} + [M_4]\{\ddot{\psi}\}) + \{\delta\psi\}^t ([M_2]\{\ddot{\psi}\} + [M_3]\{\ddot{q}\})) dx \right) dt = 0. \quad (2.30)$$

On adopte l'analyse modale dans la recherche de solutions à cette équation. Ces solutions sont alors cherchées sous des formes harmoniques obéissant aux relations suivantes :

$$u(x,t) = u(x)e^{i\omega t}, \quad w(x,t) = w(x)e^{i\omega t}, \quad \phi(x,t) = \phi(x)e^{i\omega t}, \quad (2.31a-c)$$

où  $\omega$  est la fréquence propre de vibration. En remplaçant les déplacements  $u$ ,  $w$  et rotation  $\phi$  dans l'équation (2.30) par leurs expressions du (2.31), on obtient le système différentiel suivant :

$$\int_L \{\delta\gamma\}^t [H]^t [D_b][H] \{\delta\gamma\} dx + \int_L \{\delta\gamma\}^t [H]^t [D_s][H] \{\delta\gamma\} dx \\ - \omega^2 \int_L (\{\delta q\}^t ([M_1]\{q\} + [M_4]\{\psi\}) + \{\delta\psi\}^t ([M_2]\{\psi\} + [M_3]\{q\})) dx = 0, \quad (2.32) \\ \forall \{\delta q\}, \{\delta\gamma\}, \{\delta\psi\}.$$

Ainsi, l'équation de mouvement de vibration libre et l'équation d'équilibre statique de la poutre sandwich FGM sont obtenues sous forme de systèmes matriciels. Ces systèmes décrivent un couplage entre le mouvement membranaire et le mouvement de flexion et de rotation.

La structure étudiée ayant une symétrie matérielle arbitraire, aucune restriction sur le phénomène de couplage spatial n'est tolérée pour une prédiction juste et complète. Des solutions à ces problèmes sont possibles à l'aide de l'approche élément fini décrite ci-dessous.

### 2.2.3 Approche élément fini du problème statique et de vibration

La poutre de longueur  $L$  est subdivisée en des éléments finis de longueur  $l$ . Chaque élément est modélisé avec des éléments poutre 2D à deux nœuds. Dans le processus de maillage, la discrétisation des déplacements axiaux et verticaux combinés à des rotations de flexion et de cisaillement sont possibles. Le nombre de degrés de liberté par nœud varie suivant que le modèle néglige ou non le cisaillement. Dans le modèle de poutre classique (CBT), le cisaillement est négligé. Dans ce cas, des éléments de poutre 2D à deux nœuds et à 3 degrés de liberté (DOF) par nœud sont considérés. Dans les modèles de cisaillement de premier ordre et d'ordre élevé, la rotation de cisaillement est considérée comme un degré de liberté additionnel. Pour ces modèles, un élément de poutre 2D à deux nœuds et à 4 DOF par nœud est adopté. Les vecteurs regroupant l'ensemble des degrés de liberté des éléments de poutre considérés sont les suivants.

Pour le modèle sans cisaillement CBT :

$$\{r\}_e^t = \{u_1 \quad w_1 \quad w_1' \quad u_2 \quad w_2 \quad w_2'\}. \quad (2.33)$$

Pour les modèles avec cisaillement :

$$\{r\}_e^t = \{u_1 \quad w_1 \quad w_1' \quad \phi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad w_2' \quad \phi_2\}. \quad (2.34)$$

Les fonctions de forme linéaires sont adoptées pour le déplacement axial et la rotation (c'est-à-dire  $u$ ,  $\phi$ ) et les fonctions cubiques d'Hermite sont utilisées pour l'interpolation du déplacement transversal ( $w$ ). Le vecteur de déplacement, le vecteur de gradient de déplacement et leurs variations peuvent alors s'exprimer en fonction du vecteur nodal par :

$$\{q\} = [N(\xi)]\{r\}, \quad \{\gamma\} = [g(\xi)]\{r\}, \quad \{\psi\} = [P(\xi)]\{r\}, \quad \{e\} = [V(\xi)]\{r\}, \quad (2.35a-d)$$

où  $[N(\xi)]$  est une matrice de fonctions de forme et  $[V(\xi)]$  une matrice de fonctions de forme et de gradient de fonctions de forme. Les matrices  $[g(\xi)]$  et  $[P(\xi)]$  sont des matrices de dérivées de fonctions de forme. L'expression de ces différentes matrices peuvent être retrouvée à l'annexe A.  $\xi$  est la coordonnée locale de l'élément ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ). En remplaçant dans l'équation d'équilibre statique (2.29) les vecteurs  $\{q\}$ ,  $\{\gamma\}$ ,  $\{\psi\}$  et  $\{e\}$  par leur expression en fonction du vecteur nodal  $\{r\}$  (équation 2.35), on obtient le système suivant :

$$\sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [g]^t [H]^t ([D_b] + [D_s]) [H] [g] \right) \{r\} d\xi - \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [V]^t \{f\} \right) d\xi = 0. \quad (2.36)$$

De même l'équation de vibration libre (2.32) peut être réécrite sous la forme suivante en termes du vecteur nodal  $\{r\}$  et des matrices de fonctions de forme et leurs dérivées.

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [g]^t [H]^t ([D_b] + [D_s]) [H] [g] \right) \{r\} d\xi \\ & - \omega^2 \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [N]^t [M_0] [N] + [P]^t [M_1] [P] + [P]^t [M_2] [N] + [N]^t [M_3] [P] \right) \{r\} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dans ces systèmes d'équations,  $\sum_e$  représente le processus d'assemblage sur les éléments de base. Après l'intégration et assemblage, on obtient les systèmes suivants.

En statique :

$$([K_b] + [K_s]) \{r\} = \{F\}. \quad (2.38)$$

En vibration libre :

$$([K_b] + [K_s] - \omega^2 [M]) \{r\} = \{0\}, \quad (2.39)$$

avec  $[K_b]$  et  $[K_s]$  les matrices de rigidité en flexion et en cisaillement.  $[M]$  représente la matrice de masse et  $\{F\}$  le vecteur force. Ces grandeurs mathématiques sont définies par les relations suivantes.



$$\begin{aligned}
 [K_b] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([g]^t [H]^t [D_b][H][g]) d\xi, \\
 [K_s] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([g]^t [H]^t [D_s][H][g]) d\xi, \\
 [M] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([N]^t [M_0][N] + [P]^t [M_1][P] + [P]^t [M_2][N] + [N]^t [M_3][P]) d\xi, \\
 \{F\} &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([V]^t \{f\}) d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.40a-d}$$

On rappelle que dans la présente analyse, toutes les matrices des systèmes (2.38) et (2.39) sont calculées par intégration numérique. La méthode d'intégration numérique de Gauss est adoptée à cet effet. De plus, afin d'éviter le problème de verrouillage numérique, une intégration complète est appliquée pour les termes axiaux et de flexion et une intégration réduite est appliquée pour calculer les composantes de cisaillement.

Le présent modèle est validé dans la section suivante, en statique et en vibration libre, par des comparaisons aux modèles de la littérature.

## 2.3 Résultats numériques et discussions

Un modèle élément fini pour l'analyse du problème d'équilibre statique et de vibration libre des structures de poutres sandwich FGM a été présenté précédemment. Dans le processus de discrétisation deux types d'éléments finis de poutre 2D sont adoptés. L'un est basé sur la théorie classique de poutre CBT où le cisaillement est négligé et l'autre est basé sur des modèles intégrant le cisaillement.

A cet effet, la théorie de cisaillement de premier ordre (FOST) encore appelée théorie de Timoshenko et des théories de cisaillement d'ordre élevé (HOST, SSDT, ESDT) sont adoptées. On rappelle que ces modèles de cisaillement sont présentés dans le Tableau 1.2 du chapitre 1, où des fonctions de cisaillement linéaires et non linéaires sont considérées. En présence de ces différents modèles, l'effet du couplage flexion-membrane et rotation-membrane est prise en compte. Dans les applications, on s'intéresse à des modèles de poutres soumises à différentes combinaisons de conditions aux limites : L'encastrement (C), bord libre (F), appui simple avec le déplacement axial libre (P) et l'appui simple avec un déplacement axial bloqué (S). La Figure 2.4 présente les différentes poutres étudiées avec les différentes conditions aux limites.

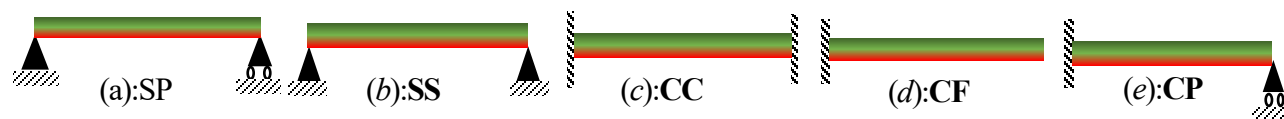


Figure 2. 4: Conditions aux limites appliquées à la poutre

Le code élément fini proposé dans ce travail pour la prédiction de la réponse des poutres sandwichs FGM en statique et en vibration libre a été implémenté dans l'interface Matlab. Pour des fins de validation du modèle numérique, différentes sections transversales sont considérées dans les applications. Ces sections ont été présentées précédemment sur la Figure 2. 2. Dans les exemples qui seront étudiés dans cette section, le composite FGM considéré présente une phase métallique (Al,  $m$ ) et une phase céramique ( $Al_2O_3$ ,  $c$ ), dont les différentes propriétés sont présentées dans le Tableau 2.

	Aluminium	Céramique
Module d'Young (GPa)	$E_m = 70$	$E_c = 380$
Densité ( $kg/m^3$ )	$\rho_m = 2702$	$\rho_c = 3960$
Coefficient de Poisson	$\nu_m = 0,3$	$\nu_c = 0,3$

Tableau 2. 1: Propriétés des différents matériaux constitutifs du composite FGM

L'indice de puissance  $k$  de la fraction volumique de la céramique peut varier de 0, valeur pour laquelle le matériau de synthèse est isotrope (céramique pure) pour atteindre une valeur plus élevée pour laquelle on obtient un métal isotrope pur (Aluminium). Les valeurs intermédiaires conduisent à un matériau FGM. Dans ce qui suit, l'effet de l'élanement de la poutre ( $\lambda = L / h$ ) et des conditions aux limites sur le comportement de la poutre est étudié. Ces investigations seront menées en statique puis en dynamique où la vibration libre de la structure sera analysée.

## 2.3.1 Etudes statiques

### 2.3.1.1 Problème de maillage et de convergence

Dans l'approche élément fini, la convergence de la solution dépend fortement du maillage. En comportement statique, on peut affirmer que les solutions obtenues sont convergentes lorsqu'elles deviennent indépendantes du maillage. Dans l'étude de la flexion d'une poutre, le comportement est caractérisé non seulement par la flèche mais aussi par la rotation, la courbure et la distribution des contraintes. Pour cette raison, considérons le comportement d'une poutre simplement appuyée sous un chargement uniformément réparti à sa surface dans la direction verticale (Figure 2. 5). La section transversale de type A (FGM pur) est adoptée pour cette analyse. La géométrie de la section considérée est détaillée sur la même figure. Dans la recherche du maillage optimisé, on étudie les variations de la flèche et de la rotation en fonction du nombre d'éléments utilisés dans le processus de discrétisation. On fait varier le nombre d'éléments de 2 à 40. On considère pour cette étude de maillage un indice de puissance  $k$  nul ( $k = 0$ ). On rappelle que pour cette valeur, la section est en céramique pure. Dans cette étude de convergence, la théorie classique de poutre est adoptée. Ces hypothèses nous permettent d'utiliser les solutions analytiques classiques disponibles dans la littérature comme solutions de référence. Les variations de la déflexion et de la rotation de la poutre le long de l'axe longitudinal sont représentées sur la Figure 2. 6 pour un nombre d'éléments variant de 2 à 40 (noté  $el$ ). On peut remarquer que 2 éléments suffisent pour atteindre la flèche maximale à  $x = L/2$  de même que la rotation maximale aux supports. Avec 2 éléments, la variation du déplacement vertical de la poutre est bilinéaire alors que celle de la rotation est linéaire. Dans ces conditions on remarque aussi que la poutre ne présente pas de courbure. Les solutions obtenues pour deux éléments ne sont donc pas assez riches en informations.

Plus d'éléments sont donc nécessaires pour obtenir la déformation réelle de la poutre. En augmentant le nombre d'éléments de maillage, on constate que la convergence est atteinte avec 20 éléments. Avec plus de 20 éléments (40 maximum), les résultats numériques et analytiques coïncident. Dans ce qui suit, nous admettons que la convergence du maillage a été étudiée et nous fixons le nombre optimal d'éléments à 40 pour toute étude spécifique.

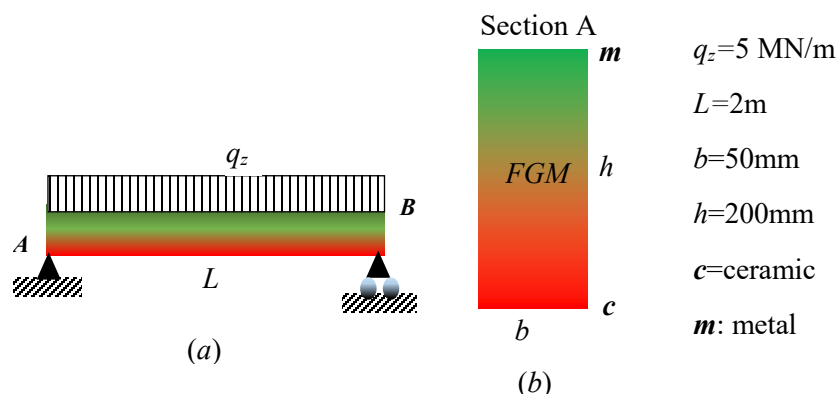


Figure 2. 5: (a) Poutre FGM en appui SP sous chargement réparti ; (b) propriétés géométriques de la section droite

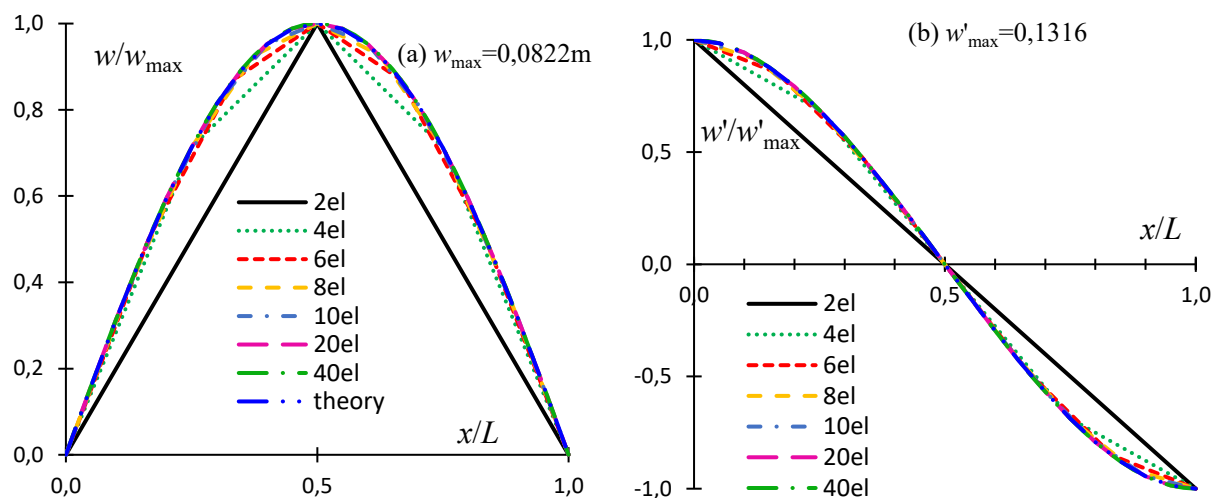


Figure 2. 6: Déplacement en flexion (a) et en rotation (b) de la poutre en fonction du nombre d'éléments du maillage

### 2.3.1.2 Phénomène de couplage flexion membrane

Dans cette partie du travail nous présentons une étude portant sur l'effet de l'indice de puissance  $k$  et des conditions aux limites sur le comportement de la poutre en considérant la théorie classique des poutres CBT et la théorie de cisaillement de troisième ordre (HOST). Pour cet objectif, la poutre étudiée précédemment (Figure 2. 5) est considérée dans cette partie.

#### *Effets de l'indice de puissance $k$*

Rappelons que selon la loi d'homogénéisation adoptée pour décrire les variations dans l'espace des propriétés des matériaux FGM, les constantes élastiques de la section transversale obéissent à la relation (modèle P-FGM) :

$$E(z) = (E_c - E_m)V_c(z) - E_m, \text{ avec } V_c(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{h}\right)^k. \quad (2.41a-b)$$

Dans cette application, deux valeurs de l'indice de puissance sont retenues en exemple ( $k = 0, 10$ ). Selon la relation (2.41), lorsque  $k = 0$ , on obtient une fraction volumique  $V_c(z)=1$  et dans ce cas le module d'Young de du matériau FGM est celui de la céramique pure  $E(z) = E_c$ . Mais dans le cas où l'indice de puissance  $k = 10$  la poutre est en FGM pur avec une variation continue des propriétés matériaux. Le comportement de la poutre FGM pour  $k=0$  est illustré sur la Figure 2. 7, et sur la Figure 2. 8 on présente celui de la poutre pour  $k=10$ . La réponse de la poutre lorsqu'elle est soumise au chargement réparti  $q_z$  est représentée par la variation suivant l'axe longitudinal de la poutre, du déplacement axial ( $u$ ), du déplacement transversal ( $w$ ) et de la rotation ( $\theta$ ). Les résultats obtenus en considérant les modèles CBT et de l'HOST sont présentés à titre de comparaison. Après analyse des différentes courbes obtenues, les commentaires suivants peuvent être faits :

- Considérant la poutre en céramique pure ( $k = 0$ , Figure 2. 7), on remarque qu'aucun déplacement axial n'est induit dans la structure, seuls les déplacements verticaux et les rotations sont permis. Le couplage membrane-flexion est alors absent. Les courbes obtenues avec les deux modèles de poutres (CBT et HOST) sont quasi-confondues. La flèche maximale est de 82,84 mm pour le modèle classique CBT et de 84,29 mm pour le modèle de cisaillement HOST. Cela signifie que l'effet de cisaillement n'est pas très important. Ces valeurs sont également rapportées par Li [106].

- Pour la poutre FGM ( $k = 10$ , Figure 2. 8), on remarque un déplacement axial important qui atteint une valeur de 21 mm au support droit B (Figure 2. 5) ainsi qu'un déplacement transversal et une rotation.

Le couplage membrane-flexion est alors important. Contrairement au cas précédent, les courbes de comportement obtenues avec les deux modèles de poutre affichent une différence beaucoup plus prononcée. Les flèches maximales sont respectivement de 274 mm pour le CBT et de 284 mm pour l'HOST. De même dans ce cas, ces valeurs sont également rapportées par Li [106]. On en déduit que le modèle classique de poutre (CBT) sous-estime la déflexion de la poutre. D'après ces résultats, on peut noter que le comportement de la poutre à section transversale non symétrique (section de type A avec  $k=10$ ) dépend fortement des effets axiaux et de cisaillement.

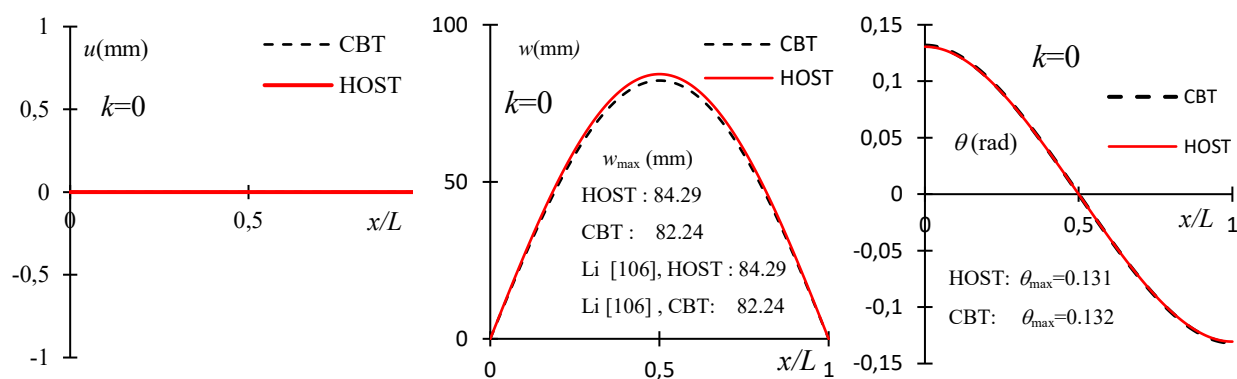


Figure 2. 7: Variations des déplacements de la poutre SP en FGM (section de type A,  $k=0$ ).

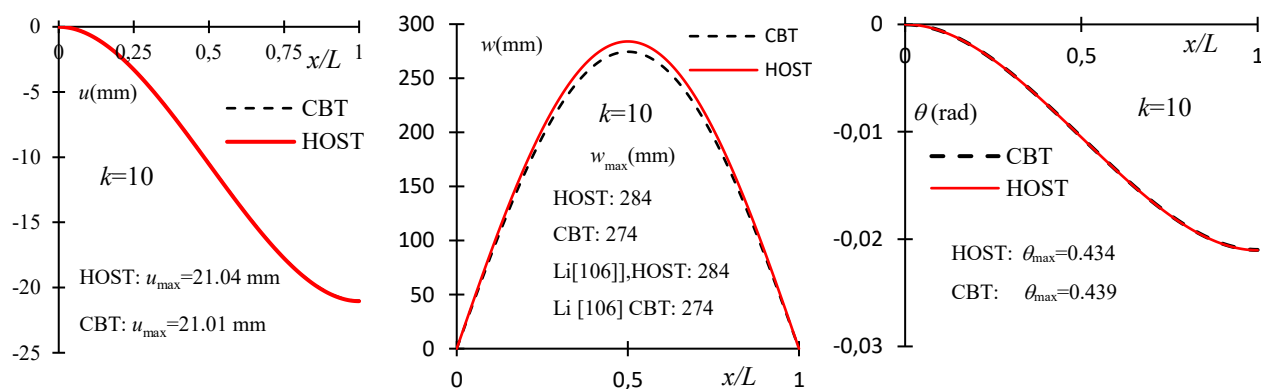


Figure 2. 8: Variations des déplacements de la poutre SP en FGM (section de type A,  $k=10$ ).

Selon le modèle cinématique adopté dans ce travail (Equation 2.1), le déplacement axial d'un point de la section transversale est fonction des composantes du vecteur déplacement de la ligne de référence de la poutre, de la coordonnée  $z$  et de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Se basant sur ces équations, le déplacement axial au support droit B est calculé dans la section verticale ( $z/h$ ). En présence de la section isotrope ( $k=0$ ), on présente ce déplacement sur la Figure 2. 9a et dans le cas de la poutre en FGM pur ( $k=10$ ), il est présenté sur la Figure 2. 9b. Dans les deux exemples, les calculs sont effectués en considérant le modèle classique de poutre CBT et différents modèles de cisaillement (HOST, SSDT, ESDT). On remarque que le modèle CBT conduit à une variation linéaire du déplacement axial dans la section alors qu'en présence des modèles de cisaillement, ce déplacement est linéaire près de la ligne de référence et non linéaire dans les zones proches des surfaces supérieures et inférieures de la poutre. En présence du cisaillement les déplacements sont donc hors plan par endroit (phénomène de gauchissement). Aussi, on remarque que dans le cas de la poutre en céramique pure (Figure 2. 9a), le déplacement axial est nul sur la ligne de référence. La section symétrique du point de vue de la réparation matérielle induit donc un comportement symétrique de la poutre. Dans le cas de la poutre en FGM pur (Figure 2. 9b), la section droite présente une répartition matérielle non symétrique. On remarque dans ce cas que le déplacement axial ne s'annule pas sur la ligne de référence de la poutre mais plutôt en un point situé à  $z=55\text{mm}$  de cette ligne. Ces résultats confirment que la répartition non symétrique de la matière dans la section droite des poutres FGM provoque des phénomènes de couplage spatiaux qui influencent de façon significative le comportement de ces dernières.

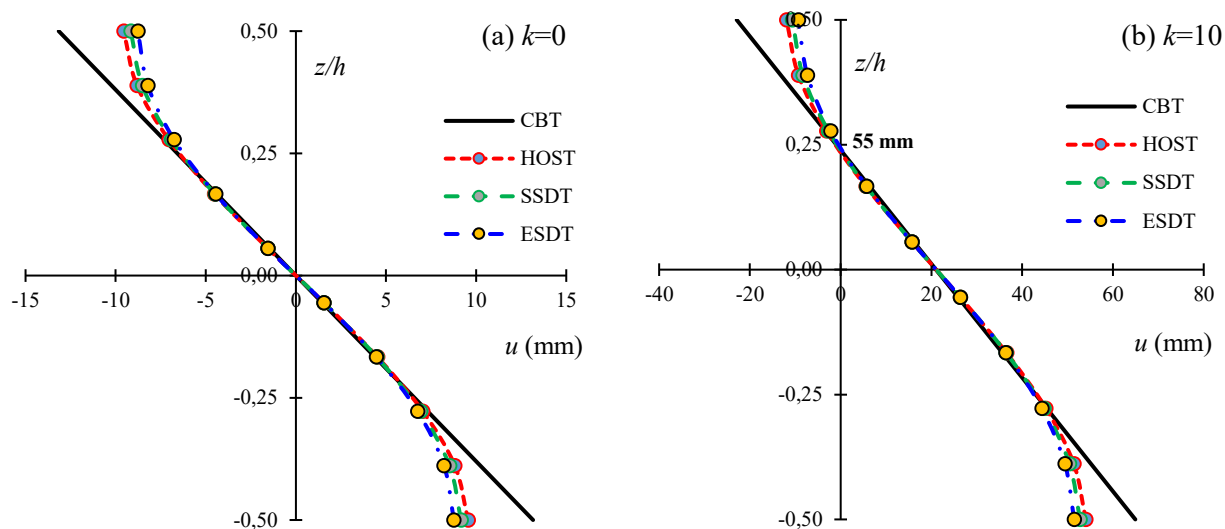


Figure 2. 9: Variations du déplacement axial dans la section droite selon différentes théories de poutres.

### *Effets des conditions aux limites.*

Le but de cette partie est d'étudier l'influence des conditions aux limites sur le comportement des poutres FGM et plus précisément l'effet du déplacement axial sur le comportement. Pour ce faire, des poutres FGM en appui simple SS et SP avec une section de type A sont considérées (Figure 2. 10). On applique un chargement uniformément réparti  $q_z$  sur chacune d'elles dans la direction de flexion. On rappelle qu'en présence de l'appui SS le déplacement axial et vertical sont bloqués sur les deux bords de la poutre à la différence de la poutre SP où le déplacement vertical est bloqué sur les deux bords alors que le déplacement axial est libre sur un bord et bloqué sur l'autre. Par ces exemples nous allons étudier l'implication du déplacement axial dans la réponse en flexion des poutres FGM sous chargements. Dans la littérature, ce problème est peu abordé. En effet, dans la plupart des travaux les phénomènes de couplages spatiaux sont absents ce qui ne permet pas de distinguer l'appuis SS de l'appuis SP. Or en présence des matériaux FGM les phénomènes de couplages contrôlent la réponse de la structure. Pour cet objectif, le comportement de la poutre sera distingué selon les variations du déplacement axial, du déplacement transversal et de la rotation pour chacun des appuis SS et SP.



Les calculs sont effectués en considérant le modèle de cisaillement d'ordre élevé HOST et les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 2. 11 pour  $k=0$  et sur la Figure 2. 12 pour  $k=10$ .

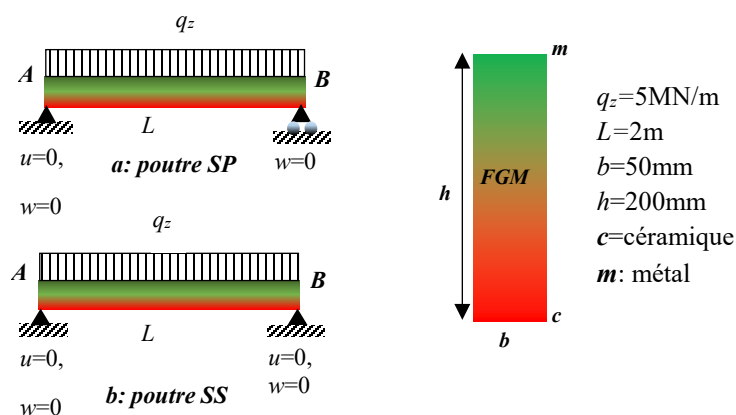


Figure 2. 10: Poutre SS et SP sous chargement réparti

Par analyse des résultats, on remarque que les poutres SP et SS présentent un même comportement en présence de matériaux isotropes ( $k = 0$ , Figure 2. 11). Aucun couplage flexion-membrane n'est observé. Mais dans le cas d'une poutre FGM ( $k= 10$ , Figure 2. 12), le comportement de la poutre SP diffère de celui de la poutre SS. Dans ce cas, la poutre en appui simple avec le déplacement axial libre sur un bord (SP) a une flèche plus importante que celle en appui simple avec le déplacement axial bloqué sur les deux bords (SS). La flèche maximale de la poutre SP est de 284 mm alors que celle de la poutre SS est de 255 mm. On note une différence moyenne de 10%. Ces deux poutres présentent également différents déplacements axiaux et rotations en présence d'une section non-symétrique ( $k=10$ ). Par ces résultats, il est démontré que l'effet du déplacement axial sur le comportement en flexion d'une poutre est important si la poutre présente une section à répartition matérielle non symétrique comme c'est le cas des poutres FGM avec un indice de puissance différent de zéros. Mais en présence des poutres isotropes, la section droite est symétrique et dans ce cas, le comportement de la poutre en appui SS et celui de la poutre en appui SP sont similaires.

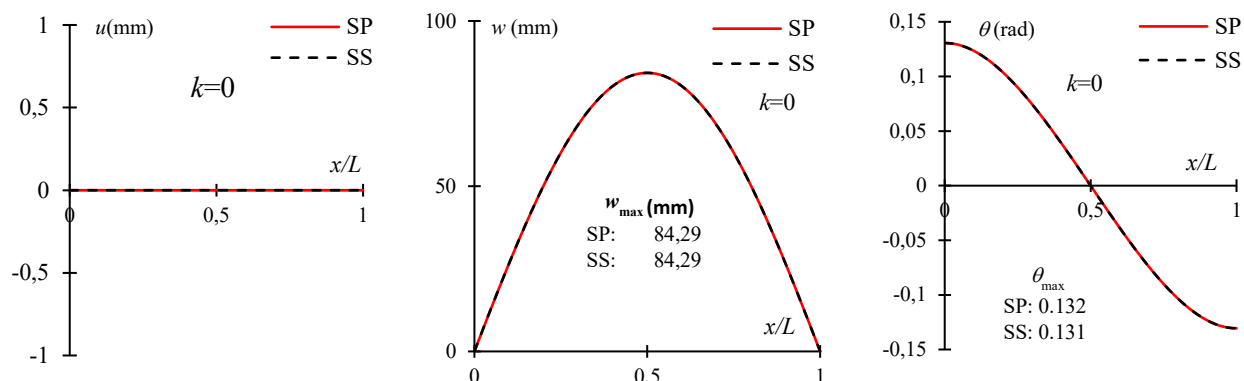


Figure 2. 11: Variations du déplacement axial, vertical et de la rotation de la poutre SS et SP en matériau isotrope ( $k=0$ ,section symétrique).

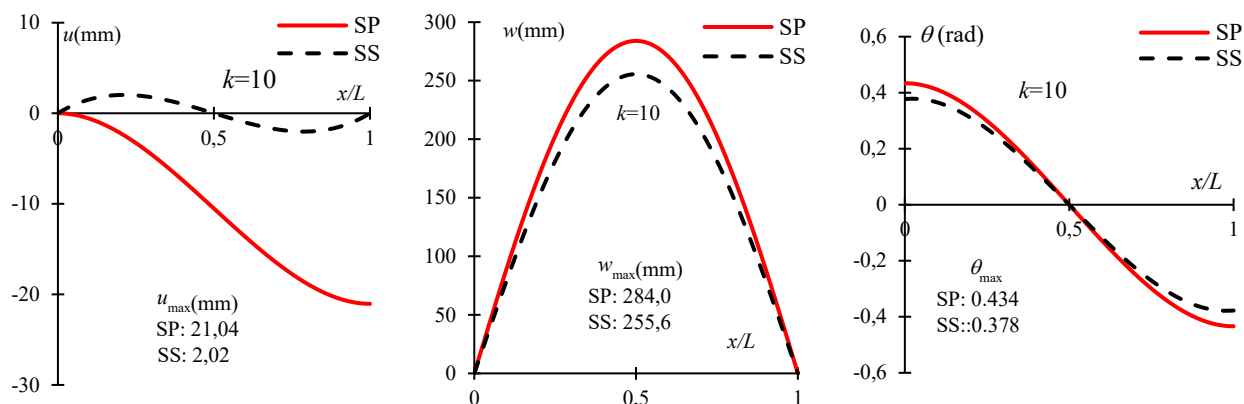


Figure 2. 12: Variations du déplacement axial, vertical et de la rotation de la poutre SS et SP en matériau FGM ( $k=10$ ,section non-symétrique).

### 2.3.1.3 Analyse du champ de variations des déformations et des contraintes.

Dans la section précédente, le comportement de la poutre FGM a été étudié en terme de déplacements. Dans les applications d'ingénierie de conception, en plus de la réponse en déplacement, la connaissance des champs de variations des déformations et des contraintes à travers la structure est nécessaire pour une bonne prédiction du comportement mécanique.

Dans cette partie, la répartition des déformations et des contraintes dans la section transversale est étudiée suivant le caractère symétrique et non-symétrique de la section droite. La poutre encastree libre sous chargement de flexion uniformément réparti est considérée ainsi que deux différentes types de sections. Les détails sur les propriétés géométriques de la poutre et sur les chargements appliqués sont rapportés sur la Figure 2. 13. Une des sections est de type A avec un indice de puissance  $k$  prenant les valeurs 0 et 10. L'autre section est une section sandwich isotrope constituée d'une couche d'aluminium insérée entre deux couches de céramique (céramique/Aluminium/céramique). Pour cette section on va considérer une distribution symétrique de la matière (3-4-3) qui conduit à des hauteurs de couches égales à (60, 80, 60 mm) et une distribution non symétrique (1-4-5) représentée par des hauteurs de couches égales à (20, 80, 100 mm). Ces deux sections sandwichs ont la même densité massique de matériaux. Il est bien connu que, pour une poutre encastree-libre, la déformation et la contrainte sont maximales au niveau du bord encastree (A). Pour cela les variations de la déformation axiale  $\epsilon_{xx}$  et de la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  dans l'épaisseur de la poutre sont cherchées au bord encastree de la poutre console et représentées sur la Figure 2. 14 en présence de la section de type A et sur la Figure 2. 15 dans le cas de section sandwich isotrope. On considère à cet effet le modèle classique de poutre CBT et le modèle de cisaillement de troisième ordre HOST pour comparaison.

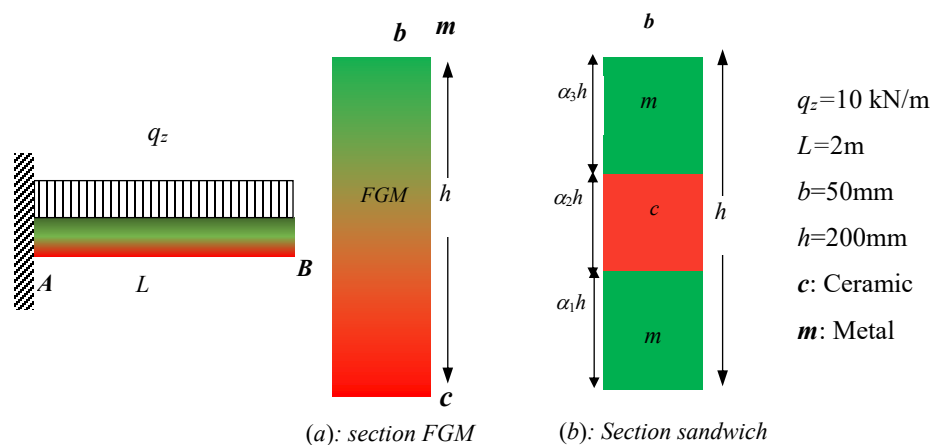


Figure 2. 13: Poutre FGM encastree-libre sous chargement réparti et sections droites.

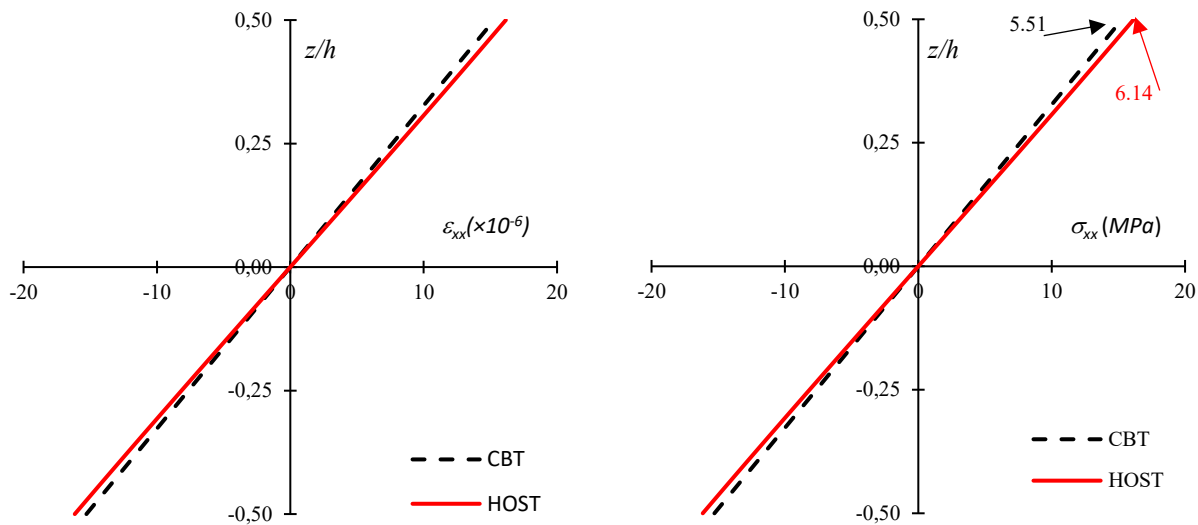
### ***Cas de la poutre à sections FGM de type A***

Dans le cas de la section de type A isotrope ( $k = 0$ , Figure 2. 14a), les distributions des déformations et des contraintes dans la section droite de la poutre sont linéaires et continues. Les résultats obtenus avec les deux modèles de poutres (CBT et HOST) sont très proches. La contrainte maximale est proche de 6 MPa et est obtenue sur la face supérieure de la poutre. La section étant symétrique, les courbes de variations de la contrainte et de la déformation s'annulent à mi-hauteur. Dans le cas de la section FGM pure ( $k = 10$ , Figure 2. 14b), les déformations axiales sont continues et linéaires tandis que les contraintes sont continues mais non linéaires. Les résultats obtenus avec les deux modèles de poutre (CBT et HOST) affichent une légère différence. Sur la face supérieure de la poutre, la valeur des contraintes obtenues avec le modèle HOST est de 17,29 MPa alors que dans le cas du modèle CBT elle vaut 14,76 MPa, soit une erreur de 17% entre les deux. Contrairement au cas de la section symétrique  $k=0$  où les courbes des déformations et des contraintes s'annulent sur la ligne de référence ( $z=0$ ), dans le cas d'une section FGM non symétrique ( $k=10$ ), ces deux courbes s'annulent bien au-delà de la ligne de référence à une distante  $z=0.13h$ . Ces résultats prouvent qu'en présence des poutres FGM avec  $k>0$  l'axe neutre n'est pas confondu à l'axe de référence ce qui favorise les phénomènes de couplage flexion-membrane et rotation-membrane.

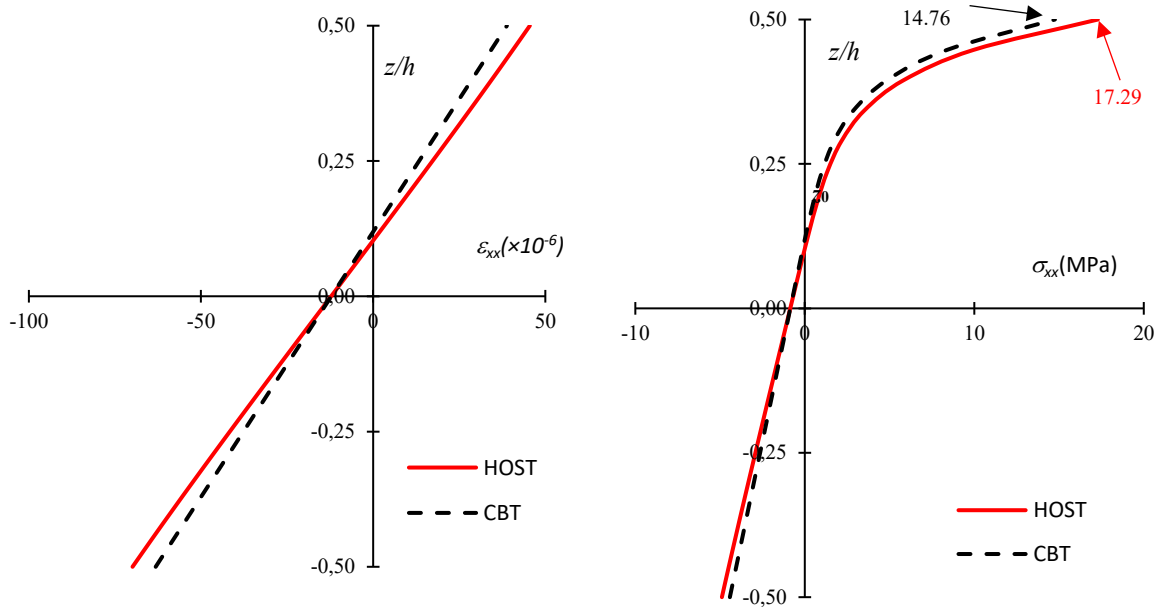
### ***Cas de la poutre à sections sandwich isotropes***

Dans l'étude de la poutre sandwich isotrope (Figure 2. 13b) on s'intéresse également à la distribution des déformations et des contraintes dans la section droite de la poutre. Ainsi, les courbes décrivant les variations de ces gradeurs sont cherchées et représentées sur la Figure 2. 15 . Ici également, les calculs sont effectués en considérant les modèles de poutres CBT et HOST.

En présence de la poutre sandwich à section symétrique (3-4-3), les variations des déformations dans l'épaisseur de la structure sont continues, symétriques et linéaires alors que celles des contraintes sont symétriques mais non-linéaires et présentent une discontinuité aux interfaces des couches (Figure 2. 15a).



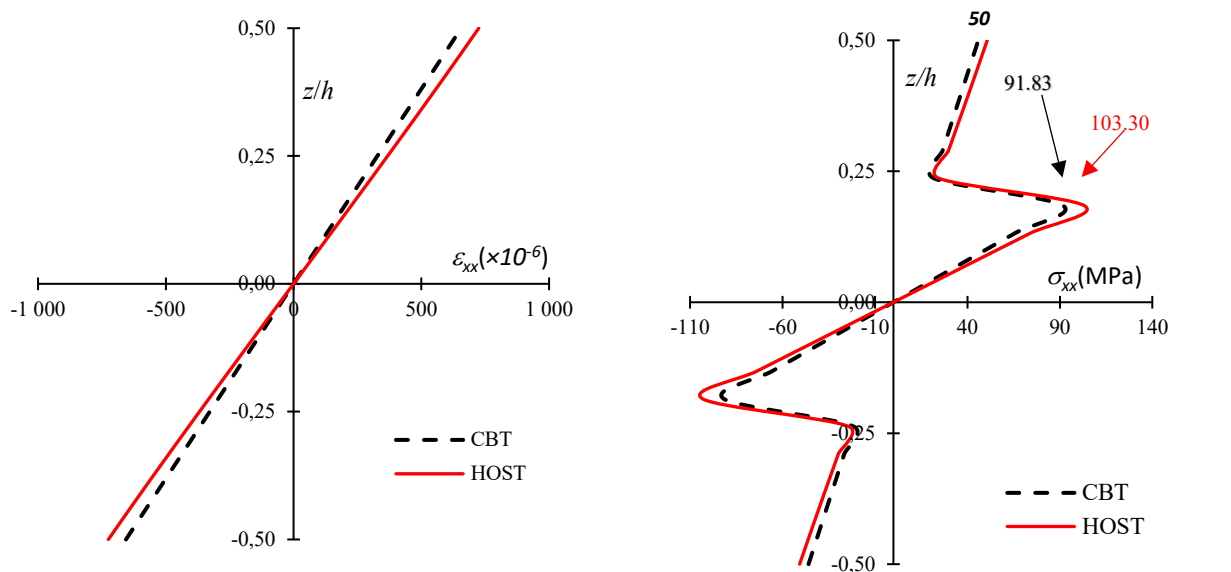
(a): section FGM ( $k=0$ )



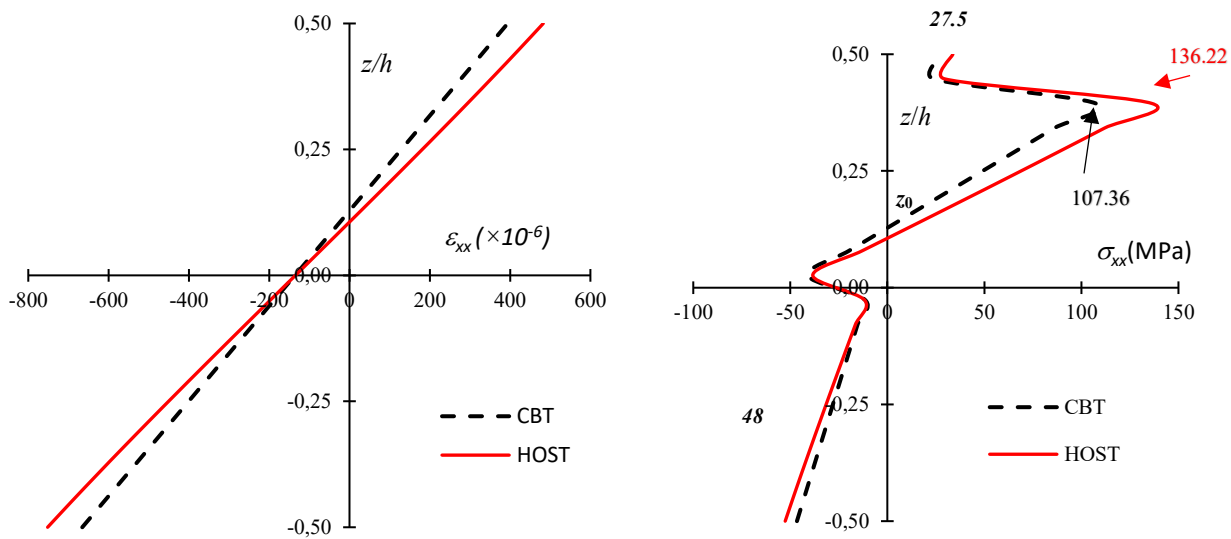
(b): section FGM ( $k=10$ )

Figure 2. 14: Variations de la déformation et de la contrainte axiale dans la section FGM pour  $k=0$  et  $k=10$

On remarque également que les contraintes maximales ne sont pas obtenues sur les faces supérieures comme ce fut le cas dans l'exemple précédent où la section de type A a été considérée, mais plutôt au niveau des interfaces des couches. Le modèle de cisaillement HOST conduit à une contrainte maximale de 103 MPa alors qu'avec le modèle sans cisaillement CBT on obtient 93 MPa soit une erreur 11%. Les contraintes sont alors sous-estimées lorsque le cisaillement est négligé. Dans le cas d'une section non symétrique (1-4-5), la déformation axiale est toujours linéaire mais les contraintes axiales restent non linéaires et discontinues (Figure 2. 15 b). Les résultats obtenus avec les deux modèles de poutre CBT et HOST sont très différents et les valeurs maximales sont également atteintes aux interfaces des couches. A l'interface supérieure, la valeur de la contrainte maximale dans le cas HOST est de 136,22 MPa et dans le cas CBT, une valeur plus faible est obtenue (107,36 MPa), soit une erreur de 27%. Pour cette section non symétrique, la distribution des déformations et des contraintes est non symétrique et s'annule à la position  $z_0 = 0,10h$ . Pour cette raison, les contraintes obtenues sur les faces inférieures et supérieures sont distinctes et sont respectivement égales à 48 MPa et 27,5 MPa pour CBT, 53 MPa et 34 MPa pour HOST. A partir de ces exemples, on note une différence importante entre le comportement des structures FGM et des structures sandwichs composites multicouches classiques. En effet on remarque que la distribution des contraintes dans l'épaisseur des composites FGM est continue alors qu'en présence des composites multicouches classiques elle est discontinue aux interfaces des couches. Ceci est la cause principale de la concentration de contraintes, qui conduit aux problèmes de délaminage et de rupture des structures. Ces problèmes sont minimisés dans les structures composites à matériaux FGM.



(a): Section multicouche (3-4-3)



(b): Section multicouche (1-4-5)

Figure 2. 15: Variations de la déformation et de la contrainte axiale dans les sections multicouches (3-4-3) et (1-4-5)

### 2.3.1.4 Validation des modèles statiques avec les résultats de la littérature

Dans cette section, l'efficacité et la précision du modèle élément fini développé en statique sont prouvées par comparaison à des solutions de référence disponibles dans la littérature. Le comportement des poutres FGM a été étudié dans les travaux de Li [11]. Dans ses études, cet auteur considère une poutre en appui simple, une poutre bi-encastée et une poutre encastée-libre sous chargement uniformément réparti  $q_z$  ou concentré  $F_z$ . En solution, la flèche maximale a été cherchée en fonction de la valeur de l'indice de puissance  $k$ . Rappelons que dans la littérature, les conditions aux limites d'une poutre en appui simple ne sont pas assez précises. On ne peut pas dire clairement si les déplacements axiaux sont bloqués ou s'ils étaient considérés comme libre sur les deux bords. Pour cette raison, dans la présente étude, nous allons considérer les appui SS et SP tout en rappelant qu'en présence de l'appui SP, le déplacement axial est libre sur un support alors qu'avec l'appui SS il est bloqué sur les deux supports. Sur la Figure 2. 16 sont présentées les poutres étudiées ainsi que leurs propriétés géométriques et les différents chargements.

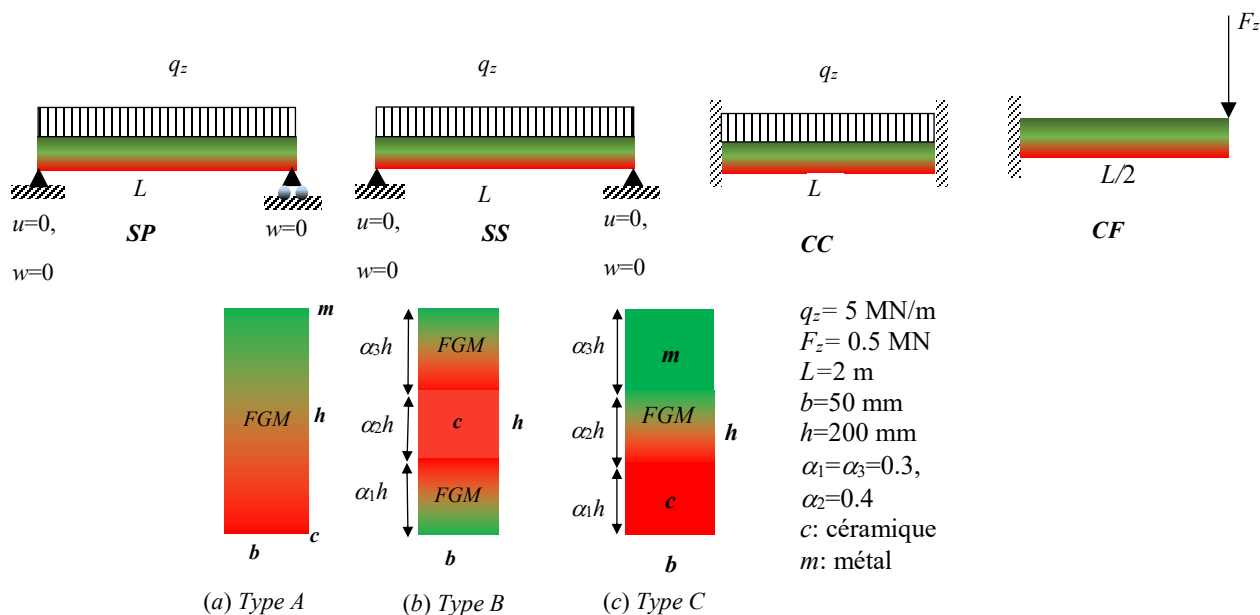



Figure 2. 16: Poutre en appui simple (SP, SS), poutre bi-encastée (CC) sous chargement réparti et poutre console (CF) sous chargement concentré.



Dans les applications, on considère trois types de sections transversales. La première est une section de type A (FGM pur), la seconde et la troisième sont des sections sandwich FGM (type B et C). A partir du code élément fini proposé dans ce travail et implémenté sous Matlab, on calcule la flèche maximale à mi-longueur ( $x=L/2$ ) pour un indice de puissance  $k$  variant de 0 à 10. Les résultats sont rapportés dans le Tableau 2. 3 dans les cas des poutres SP et SS. Ces simulations sont effectuées en considérant le modèle sans cisaillement CBT et le modèle avec cisaillement HOST. Les solutions de référence de Li [106] sont données dans le même tableau à titre de comparaison. On remarque que les flèches obtenues en considérant la poutre en appui SP sont en bon accord avec les résultats de Li [106]. Mais dans le cas de la poutre en appui SS, nos résultats ne coïncident avec ceux de la littérature qu'en présence d'une section présentant une distribution matérielle symétrique par rapport à l'axe de référence de la poutre (section de type A avec  $k=0$  et section B (3-4-3)). En présence des sections non symétriques comme le cas de la section de type A ( $k \neq 0$ ) et de la section sandwich C (3-4-3), une différence importante est observée entre le comportement des deux types de poutres étudiées. Les erreurs entre les résultats obtenus avec les poutres SP et SS sont rapportées et peuvent atteindre 30% en considérant le modèle CBT et 29% en présence du cisaillement (HOST). Par ces analyses, il est confirmé que le couplage flexion-membrane est très important en présence des poutres à sections non symétriques et absent dans le cas des poutres à sections symétriques. Le déplacement maximal de la poutre sous chargement réparti en flexion est également cherché dans les conditions d'une poutre bi-encastree CC. Les résultats obtenus en considérant un modèle sans cisaillement CBT et le modèle de cisaillement de troisième ordre HOST sont reportés dans le Tableau 2. 3. Les calculs sont effectués en considérant différents types de sections et différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Les résultats de ces calculs sont comparés aux résultats de Li [106]. On note également un très bon accord entre notre approche et la solution de référence. Aussi, on remarque que le modèle sans cisaillement CBT sous-estime la déflexion de la poutre. L'effet du cisaillement est important dans le cas de la section FGM de type A où l'erreur entre les deux théories de poutre peut atteindre 20% et également dans le cas de la section C où l'erreur est en moyenne de 10%. Pour la poutre console avec un chargement concentré à l'extrémité libre, les résultats des calculs effectués avec notre code élément fini sont présentés dans le Tableau 2. 4 et comparés à la même référence. Les simulations sont également menées en considérant les trois sections et pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . On observe également dans ce cas que nos résultats s'alignent bien avec les résultats de référence.

Cependant on remarque que les deux modèles de poutre (CBT et HOST) donnent des résultats similaires contrairement au cas précédent où l'appui CC a été considéré. Ces résultats témoignent que l'effet du cisaillement sur le comportement de la poutre FGM est lié non seulement au caractère non symétrique de la section mais aussi aux chargements et aux types de conditions aux limites appliquées.

Type	$k$	CBT Li [106]	CBT (Présent)		Erreur (%)	HOST Li [106]	HOST (Présent)		Erreur (%)
			SP	SS			SP	SS	
A	0.0	82.24	82.24	82.24	0.0	84.29	84.29	84,29	0.0
	0.5	126.86	126.86	119.76	5,60	129.63	129.64	122.53	5.48
	1.0	164.99	164.99	114.11	30,84	168.45	168.45	147.57	12.40
	5.0	250.02	250.02	207.66	16,94	257.73	257.72	215.36	16.44
	10.0	274.49	274.49	246.17	10,32	284.01	284.01	255,62	10.00
B (3-4-3)	0.0	82.24	82.24	82.24	0.0	84.29	84.29	84.29	0.0
	0.5	124.30	124.31	124.31		126.59	126.60	126.60	
	1.0	159.55	159.55	159.55		162.00	162,00	162,00	
	5.0	278.29	278.29	278.29		281.12	281,12	281,12	
	10.0	311.82	311.82	311.82		314.74	314.74	314.74	
C (3-4-3)	0.0	163.94	163.94	139.20	15,09	166.35	166.35	141.61	14.87
	0.5	189.68	189.68	147.80	22,08	192.63	192.63	150.80	21.72
	1.0	203.94	203.94	151.89	25,52	207.31	207.30	155.36	25.06
	5.0	225.80	225.79	158.40	29,85	230.69	230.68	163.48	29.13
	10.0	227.53	227.52	159.67	29,82	232.98	232.98	165.29	29.05



Poutre SP      Poutre SS

Tableau 2. 2: Comparaison de la déflexion des poutres SS et SP pour différentes valeur de l'indice  $k$  selon différentes théories de poutre (valeurs en mm)

Type	$k$	CBT		HOST	
		Li [106]	Présent	Li[106]	Présent
A	0.0	16.45	16.45	18.45	18.45
	0.5	25.37	25.37	28.09	28.09
	1.0	33.00	33.00	36.39	36.39
	5.0	50.00	50.00	57.50	57.50
	10.0	54.90	54.90	64.16	64.16
B (3-4-3)	0.0	16.45	16.45	18.45	18.45
	0.5	24.86	24.86	27.11	27.11
	1.0	31.91	31.91	34.32	34.32
	5.0	55.66	55.66	58.44	58.44
	10.0	62.36	62.36	65.24	65.24
C (3-4-3)	0.0	32.79	32.79	35.15	35.15
	0.5	37.94	37.93	40.82	40.82
	1.0	40.79	40.78	44.08	44.08
	5.0	45.16	45.15	49.93	49.92
	10.0	45.51	45.50	50.82	50.81

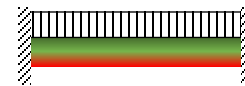


Tableau 2. 3: Comparaison des théories de poutre à travers la déflexion d'une poutre bi-encastée en  $L/2$  pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  (valeurs en mm)

Type	$k$	CBT		HOST	
		Li[106]	(Présent)	Li[106]	(Présent)
A	0.0	13.16	13.16	13.56	13.56
	0.5	20.30	20.30	20.85	20.84
	1.0	26.40	26.40	27.08	27.08
	5.0	40.00	40.00	41.52	41.52
	10.0	43.92	43.92	45.80	45.80
B (3-4-3)	0.0	13.158	13.158	13.564	13.564
	0.5	19.888	19.889	20.342	20.343
	1.0	25.528	25.528	26.014	26.015
	5.0	44.527	44.526	45.088	45.088
	10.0	49.891	49.890	50.471	50.470
C (3-4-3)	0.0	26.230	26.230	26.707	26.707
	0.5	30.349	30.348	30.933	30.933
	1.0	32.630	32.629	33.296	33.296
	5.0	36.127	36.126	37.094	37.093
	10.0	36.405	36.403	37.481	37.481

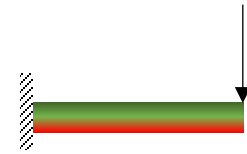


Tableau 2. 4: Comparaison des théories de poutre par l'étude de la déflexion au bord libre d'une poutre console pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  (valeurs en mm)

### 2.3.2 Analyse des vibrations libres de poutres sandwich FGM

Dans la section précédente, les modèles de poutres sandwich FGM proposés ont été validés sous des charges statiques. Les solutions obtenues avec le modèle classique de poutre (CBT) et le modèle de cisaillement d'ordre supérieur (HOST) ont été comparées avec succès à des solutions de référence. Dans la présente partie du travail, les analyses des vibrations libres des poutres sandwich FGM sont investiguées. Dans cette analyse, les modes de vibrations et les fréquences propres sont obtenus par résolution numérique du problème aux valeurs propres (2.39). Avec le code générique basé sur la méthode des éléments finis, la recherche des modes de faibles fréquences ainsi que les modes de fréquences élevées est possible. Mais pour cette étude de comparaison, seule la première fréquence propre est disponible dans la littérature. Ainsi, le premier mode de vibration de la poutre sandwich FGM est déterminé et comparé aux solutions de la littérature (Lee [102], Trinh [108]). Dans cette analyse, la fréquence propre est normalisée à partir des propriétés du matériaux FGM. La fréquence adimensionnelle ( $\omega_d$ ) est alors déduite de la fréquence propre  $\omega$  par la relation suivante :

$$\omega_d = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}. \quad (2.42)$$

Les résultats sont présentés pour différents élancements de la poutre ( $\lambda=5$ ,  $\lambda=20$ ) et aussi pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  ( $k=0, 1, 10$ ). Aussi, les conditions aux limites précédemment étudiées (Figure 2. 4) sont reconduites ici (SP, SS, CC, CF, CP).

#### 2.3.2.1 Analyse adimensionnelle de la première fréquence

Le modèle élément fini proposé dans ce travail pour l'étude des vibrations des poutres sandwich FGM s'applique aussi bien aux poutres à sections symétriques qu'aux poutres à sections non symétriques. Pour le tester nous allons étudier les différents types de sections décrites précédemment (Sections de type A, B et C). L'effet du cisaillement sur le comportement vibratoire de la structure sera étudié pour différents élancements  $\lambda=L/h$ . Les propriétés du matériau à gradient de propriétés considéré dans cette section, sont les mêmes que celles considérées dans la section précédente (Tableau 2. 1).

### **Cas de la section pure FGM : Section de type A**

La première fréquence propre adimensionnelle de la poutre de section A est présentée dans le Tableau 2. 5 pour différentes conditions aux limites et différents élancements. Les simulations sont effectuées en considérant le modèle de poutre sans cisaillement CBT et le modèle avec cisaillement HOST. Les résultats obtenus avec notre approche élément fini sont alors comparés aux résultats de Lee [102] qui, dans ses études, a adopté le modèle classique de poutre et la méthode de matrice de transfert pour la recherche des solutions du problème de vibrations libres de la poutre FGM. Les résultats obtenus avec le CBT du présent modèle, coïncident parfaitement avec les résultats de Lee [102] pour toutes les valeurs considérées de l'élancement  $\lambda$  et de l'indice puissance  $k$  en présence des conditions aux limites SS CC, CF et CP. La poutre SP n'a pas été étudiée par cet auteur cependant dans ce travail, les résultats obtenus avec cette poutre seront comparés avec les fréquences de vibrations de la poutre SS de Lee. Comme dans le cas des chargements statiques, on remarque que le modèle de cet auteur s'aligne avec notre modèle dans le cas la section symétrique ( $k=0$ ). Pour les autres valeurs de l'indice de puissance ( $k = 1, k = 10$ ), la section FGM n'est pas symétrique et par conséquent, les fréquences de vibrations des poutres SP et SS sont très différentes. Ceci confirme que le caractère non-symétrique de la section droite de la poutre FGM induit un couplage flexion-membrane qui affecte le comportement vibratoire de la poutre. Aussi, dans cet exemple, une comparaison des résultats obtenus par simulations des modèles CBT et HOST est également présentée. On peut remarquer que ces modèles ne sont pas en accord entre eux en présence d'une poutre courte ( $\lambda= 5$ ). Le désaccord est plus prononcé dans le cas de la poutre bi-encastree CC où l'erreur peut atteindre 32% pour un indice de puissance  $k=10$ . Ceci souligne la présence importante du cisaillement dans les poutres courtes. Pour les poutres élancées ( $\lambda= 20$ ), les résultats obtenus avec les deux modèles CBT et HOST sont très proches. Par analyse de ces résultats on peut conclure que le modèle classique de poutre est largement suffisant pour étudier les poutres élancées mais dans le cas des poutres courtes l'effet du cisaillement doit être pris en compte pour une bonne prédiction.

$\lambda$	$k$	Modèles	SS	SP	CC	CF	CP
5	0	HOST(EF)	5,153	5,153	10,067	1,895	7,487
		CBT (EF)	5,395	5,395	12,182	1,939	8,406
		Lee [102]	5,395	....	12,182	1,939	....
		Erreur (%)	4,696	4,696	21,009	2,322	12,275
	1	HOST(EF)	4,255	3,971	7,948	1,463	5,855
		CBT (EF)	4,449	4,125	9,365	1,491	6,462
		Lee [102]	4,449	....	9,364	1,491	....
		Erreur (%)	4,559	3,878	17,828	1,914	10,367
	10	HOST(EF)	3,451	3,265	6,164	1,218	4,669
		CBT (EF)	3,698	3,469	7,88	1,257	5,438
		Lee[102]	3,698	....	7,88	1,257	....
		Erreur (%)	7,157	6,248	27,839	3,202	16,470
20	0	HOST(EF)	5,460	5,460	12,222	1,949	8,482
		CBT (EF)	5,478	5,478	12,414	1,953	8,556
		Lee [102]	5,478	....	12,414	1,953	....
		Erreur (%)	0,330	0,330	1,571	0,205	0,872
	1	HOST(EF)	4,502	4,204	9,431	1,501	6,538
		CBT (EF)	4,516	4,215	9,556	1,503	6,586
		Lee [102]	4,516	....	9,555	1,503	....
		Erreur (%)	0,311	0,262	1,325	0,133	0,734
	10	HOST(EF)	3,739	3,538	7,884	1,265	5,485
		CBT (EF)	3,757	3,553	8,056	1,267	5,552
		Lee [102]	3,757	....	8,056	1,267	....
		Erreur (%)	0,481	0,424	2,182	0,158	1,222

Tableau 2. 5: Poutre FGM de section A: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différents élancements  $\lambda$  et différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ , (--- non étudié).

**Cas des sections sandwich FGM : Section de type B (FGM/céramique/FGM) et de type C (Métal/FGM/Céramique)**

Le code élément fini proposé dans ce travail permet de faire varier facilement les propriétés géométriques, matériaux et aussi les conditions aux limites de la poutre afin d'étudier les différents cas qui peuvent se présenter dans les applications réelles. Ainsi, à titre d'exemple, on se propose dans cette partie d'étudier les poutres FGM à sections sandwich. Le comportement vibratoire est étudié par calcul des modes et les fréquences propres de vibration en considérant différentes épaisseurs des couches et également différents élancements de la poutre. Dans le cas de la section sandwich de type B, les fréquences propres adimensionnelles sont données dans le Tableau 2. 6 en considérant une poutre courte ( $\lambda=5$ ) et dans le Tableau 2. 7 en présence d'une poutre élancée ( $\lambda=20$ ). Dans les Tableau 2. 8 et Tableau 2. 9 sont représentées, les fréquences propres adimensionnelles respectives de la poutre courte ( $\lambda=5$ ) et de la poutre élancée ( $\lambda=20$ ) en présence de la section de type C. Pour ces simulations, on considère différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  (0, 1 et 10). Les résultats obtenus avec notre modèle basées sur une approche élément fini utilisant les modèles CBT et HOST de poutre, sont comparés aux résultats de Trinh [108] où la fréquence adimensionnelle ( $\omega_{\lambda}$ ) a été obtenue par une méthode basée sur l'approche de l'espace d'état. On remarque que les résultats du présent modèle sont en bon accord avec les résultats de cet auteur que ce soit en présence ou non du cisaillement. Cet accord est observé dans le cas des poutres CC, CP et CF. Pour information cet auteur n'a pas traité l'appui SP où le déplacement axial est libre sur un bord et bloqué sur l'autre bord de la poutre. Les résultats de la poutre en appui simple SS sont similaires aux résultats obtenus avec la poutre en appui SP dans le cas de la section transversale symétrique B (1-2-1). Cette section n'est pas sensible au couplage flexion-membrane ou rotation-membrane tout simplement parce qu'elle est symétrique du point de vue de la répartition matérielle par rapport à sa ligne de référence de la poutre. On remarque une fois de plus que, dans le cas des sections transversales non symétriques (B (2-2-1) et C), les résultats obtenus avec les appui SS et SP sont différents. Le caractère non-symétrique de la section des poutre FGM a également un effet non négligeable sur les fréquences de vibrations. Aussi, les comparaisons des modèles de poutres montrent que, dans l'analyse vibratoire, le modèle CBT et le modèle HOST ne sont proches qu'en présence de poutres élancées.



Sections	$k$	Modèles		SS	SP	CC	CF	CP
1-2-1	0	CBT	Présent (FE)	5,395	Même résultats que la poutre SS	12,183	1,938	12,183
			Trinh [108]	5,396		12,183	1,939	12,183
		HOST	Présent (FE)	5,153		10,066	1,895	10,066
			Trinh [108]	5,153		10,067	1,895	10,067
	1	CBT	Présent (FE)	4,239		9,576	1,522	9,576
			Trinh [108]	4,240		9,576	1,522	9,576
		HOST	Présent (FE)	4,110		8,369	1,499	8,369
			Trinh [108]	4,111		8,370	1,499	8,370
	10	CBT	Présent (FE)	3,302		7,459	1,185	7,459
			Trinh [108]	3,302		7,460	1,185	7,460
		HOST	Présent (FE)	3,236		6,808	1,173	6,808
			Trinh [108]	3,236		6,808	1,174	6,808
2-2-1	0	CBT	Présent (FE)	5,395	5,395	12,183	1,938	12,183
			Trinh [108]	5,396	...	12,183	1,939	12,183
		HOST	Présent (FE)	5,153	5,191	10,066	1,895	10,066
			Trinh [108]	5,153	...	10,067	1,853	10,067
	1	CBT	Présent (FE)	4,110	4,142	9,287	1,476	9,287
			Trinh [108]	4,112	...	9,287	1,476	9,287
		HOST	Présent (FE)	4,019	3,990	8,154	1,455	8,154
			Trinh [108]	4,019	...	8,154	1,455	8,154
	10	CBT	Présent (FE)	3,118	3,231	7,054	1,121	7,054
			Trinh [108]	3,123	...	7,054	1,121	7,054
		HOST	Présent (FE)	3,164	3,059	6,463	1,111	6,463
			Trinh [108]	3,164	...	6,463	1,111	6,463

Tableau 2. 6: Poutre FGM de section B: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  et pour un élancement  $\lambda = 5$  (--- non étudié).

sections	$k$	Modèles		SS	SP	CC	CF	CP
1-2-1	0	CBT	Présent (FE)	5,478	Même résultats que la poutre SS	12,414	1,953	8,558
			Trinh [108]	5,478		12,415	1,953	8,556
		HOST	Présent (FE)	5,460		12,222	1,950	8,482
			Trinh [108]	5,461		12,223	1,950	8,482
	1	CBT	Présent (FE)	4,298		9,741	1,532	6,713
			Trinh [108]	4,298		9,741	1,532	6,714
		HOST	Présent (FE)	4,289		9,641	1,530	6,675
			Trinh [108]	4,289		9,641	1,531	6,675
	10	CBT	Présent (FE)	3,345		7,581	1,192	5,225
			Trinh [108]	3,346		7,582	1,193	5,225
		HOST	Présent (FE)	3,341		7,531	1,192	5,206
			Trinh [108]	3,341		7,531	1,192	5,206
2-2-1	0	CBT	Présent (FE)	5,478	5,478	12,414	1,953	8,556
			Trinh [108]	5,478		12,415	1,953	8,556
		HOST	Présent (FE)	5,460	5,460	12,222	1,950	8,482
			Trinh [108]	5,461		12,223	1,950	8,482
	1	CBT	Présent (FE)	4,169	4,199	9,448	1,486	6,519
			Trinh [108]	4,169		9,448	1,486	6,5200
		HOST	Présent (FE)	4,191	4,160	9,355	1,484	6,484
			Trinh [108]	4,191		9,355	1,485	6,484
	10	CBT	Présent (FE)	3,165	3,274	7,175	1,128	4,974
			Trinh [108]	3,166		7,175	1,129	4,974
		HOST	Présent (FE)	3,269	3,161	7,129	1,128	4,956
			Trinh [108]	3,270		7,129	1,128	4,956

Tableau 2. 7: Poutre FGM de section B: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  et pour un élancement  $\lambda = 20$  (--- non étudié).

sections	$k$	Modèles		SS	SP	CC	CF	CP
1-2-1	0	CBT	Présent (FE)	4,191	4.174	9,465	1,505	6,595
			Trinh [108]	4,191	...	9,464	1,506	6,595
		HOST	Présent (FE)	4,304	4.055	8,324	1,484	6,109
			Trinh [108]	4,304	...	8,323	1,484	6,109
	1	CBT	Présent (FE)	3,782	3.742	8,537	1,360	6,043
			Trinh [108]	3,782	...	8,534	1,360	6,042
		HOST	Présent (FE)	4,174	3.630	7,447	1,339	5,563
			Trinh [108]	4,173	...	7,445	1,340	5,562
	10	CBT	Présent (FE)	3,660	3.598	8,256	1,319	5,886
			Trinh [108]	3,660	...	8,252	1,319	5,885
		HOST	Présent (FE)	4,064	3.436	6,755	1,287	5,193
			Trinh [108]	4,064	...	6,754	1,287	5,192
2-2-1	0	CBT	Présent (FE)	3,759	3.726	8,489	1,351	5,886
			Trinh [108]	3,759	...	8,486	1,352	6,000
		HOST	Présent (FE)	4,152	3.633	7,567	1,334	5,600
			Trinh [108]	4,152	...	7,566	1,334	5,600
	1	CBT	Présent (FE)	3,658	3.607	8,256	1,317	5,880
			Trinh [108]	3,658	...	8,252	1,317	5,879
		HOST	Présent (FE)	4,117	3.487	7,090	1,294	5,356
			Trinh [108]	4,117		7,088	1,294	5,355
	10	CBT	Présent (FE)	3,695	3.634	8,334	1,331	5,915
			Trinh [108]	3,695	...	8,330	1,332	5,914
		HOST	Présent (FE)	3,987	3.439	6,599	1,293	5,108
			Trinh [108]	3,987	...	6,598	1,293	5,108

Tableau 2. 8: Poutre FGM de section C: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  et pour un élancement  $\lambda = 5$  (--- non étudié).

sections	$k$	Modèles		SS	SP	CC	CF	CP
1-2-1	0	CBT	Présent (FE)	4,253	4.252	9,641	1,516	6,714
			Trinh [108]	4,254	...	9,639	1,516	6,714
		HOST	Présent (FE)	4,501	4.244	9,546	1,515	6,677
			Trinh [108]	4,502	...	9,544	1,515	6,677
	1	CBT	Présent (FE)	3,847	3.845	8,722	1,371	6,175
			Trinh [108]	3,848	...	8,719	1,372	6,174
		HOST	Présent (FE)	4,408	3.836	8,629	1,370	6,137
			Trinh [108]	4,408	..	8,626	1,370	6,136
	10	CBT	Présent (FE)	3,735	3.731	8,466	1,331	6,038
			Trinh [108]	3,735	...	8,463	1,332	6,037
		HOST	Présent (FE)	4,408	3.718	8,323	1,329	5,979
			Trinh [108]	4,408	...	8,320	1,330	5,978
2-2-1	0	CBT	Présent (FE)	3,821	3.818	8,661	1,362	6,123
			Trinh [108]	3,821	...	8,659	1,362	6,122
		HOST	Présent (FE)	4,351	3.812	8,585	1,361	6,092
			Trinh [108]	4,351	...	8,583	1,361	6,091
	1	CBT	Présent (FE)	3,727	3.724	8,450	1,329	6,020
			Trinh [108]	3,727	...	8,446	1,329	6,019
		HOST	Présent (FE)	4,386	3.715	8,347	1,327	5,977
			Trinh [108]	4,386	...	8,344	1,328	5,976
	10	CBT	Présent (FE)	3,771	3.768	8,549	1,345	6,069
			Trinh [108]	3,772	...	8,546	1,345	6,068
		HOST	Présent (FE)	4,363	3.752	8,376	1,342	5,999
			Trinh [108]	4,363	...	8,373	1,342	5,998

Tableau 2. 9: Poutre FGM de section C: Fréquences de vibration adimensionnelles pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  et pour un élanement  $\lambda=20$  (--- non étudié).

## **2.4 Conclusion**

Dans le présent travail, des modèles éléments finis de poutres 2D ont été proposés pour l'étude du comportement et des vibrations libres des poutres sandwich à matériaux FGM. Dans la formulation mathématique, ces modèles sont dérivés selon la théorie classique de poutre et les théories de cisaillement de premier ordre ou d'ordre élevé. L'équation gouvernant le mouvement de vibration libre, dérive du principe d'Hamilton alors que l'équation d'équilibre statique est basée sur les conditions de stationnarités du potentiel. Dans les modèles développés, le couplage flexion-membrane est pris en compte. Les matrices de rigidité et de masse sont calculées par intégration numérique en utilisant la méthode de Gauss. En présence de cisaillement, l'intégration réduite est adoptée afin de contourner le problème de verrouillage numérique. En statique, les chargements sont arbitraires. Et en vibration libre, des modes de vibrations à fréquences élevées peuvent être trouvés à l'aide d'un sous-programme efficace adapté pour la recherche de solutions du problème des valeurs propres mais nous n'avons présenté que le premier mode dans cette section pour validation. L'efficacité et la précision des modèles éléments finis proposés, sont prouvées par comparaison avec certaines solutions de référence disponibles dans la littérature. L'effet du couplage membrane-flexion, des conditions aux limites, de l'élanement et de l'indice de puissance ont été détaillés à la fois en statique et en vibration libre. Le couplage flexion-membrane contrôle le comportement des poutres FGM à cause de la distribution arbitraire de leurs matériaux constitutifs qui donne un caractère non-symétrique à la section droite de la poutre par rapport à sa ligne de référence. Aussi, les théories de poutres ont été comparées et discutées. Il a été souligné que, le cisaillement a des effets non négligeables sur le comportement des poutres courtes et peut être négligé en présence des poutres élancées. Dans les sections FGM, les distributions de contraintes sont continues mais peuvent être symétriques ou non symétriques selon la nature de la section. Dans les poutres composites sandwich multicouches, les contraintes ne sont pas continues à l'interface des couches. Ce qui provoque une concentration de contraintes résiduelles à ces positions, fragilisant ainsi, la tenue mécanique de ces structures. De ce fait, on assiste dans certains cas au délaminage et à la rupture de la structure. Ce phénomène est absent en présence des matériaux à gradient de propriétés FGM puisque dans ces matériaux les interfaces sont quasi inexistante.

# Chapitre 3: Un modèle élément fini de poutre FGM viscoélastique pour l'amortissement passif des vibrations.

## Sommaire

---

3.1	Introduction.....	102
3.2	Formulation élément fini du problème d'amortissement passif des poutres FGM .....	102
3.2.1	Les théories de base du modèle viscoélastique.....	103
3.2.2	Variations des propriétés de la section de poutre FGM viscoélastique.....	106
3.2.3	Formulation variationnelle du problème de vibration et d'équilibre .....	108
3.2.4	Approche élément fini du problème d'amortissement des poutres FGM .....	114
3.2.5	Dépendance en fréquence du comportement viscoélastique.....	115
3.2.6	Lois de comportement viscoélastique .....	116
3.2.7	Résolution d'équations non linéaires par Diamant .....	118
3.3	Tests de validations numériques et discussions.....	122
3.3.1	Analyse statique .....	124
3.3.2	Analyse des vibrations libres.....	133
3.4	Conclusion.....	144

---

### **3.1 Introduction**

Nous proposons dans ce chapitre un modèle élément fini pour l'analyse statique et des vibrations libres de poutres sandwich FGM à cœur viscoélastique. Le matériau viscoélastique considéré présente un comportement non linéaire induisant de ce fait une rigidité dépendante de la fréquence de vibration. Les propriétés des matériaux FGM constituant les couches externes de la poutre sandwich sont supposées varier suivant la loi de puissance P-FGM. Basé sur la théorie zig-zag avec une continuité des champs cinématiques aux interfaces, le modèle développé dans ce travail résout le problème d'amortissement des vibrations des poutres FGM quelle que soit la loi de dépendance en fréquence induite par le comportement viscoélastique du cœur. Le pouvoir amortissant de la structure résulte de la déformation en cisaillement de la couche viscoélastique et de sa faible rigidité. Pour bien prendre en compte ce comportement, des modèles de cisaillement de premier ordre de Timoshenko et des modèles de cisaillement d'ordre élevé de Reddy sont adoptés. En vibration libre, les équations gouvernant le mouvement sont dérivées du principe d'Hamilton et en statique on considère la condition de stationnarité du potentiel. La résolution du problème aux valeurs propres non linéaire complexe qui découle de la formulation mathématique du problème de vibration des poutres FGM viscoélastiques, est possible avec les méthodes itératives de type Newton Raphson. Dans ce travail un code générique basé sur la technique d'homotopie couplée à la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) et à la Différentiation Automatique (DA) [67] est proposé pour la recherche de solutions aux problèmes.

Les travaux sur l'amortissement passif des poutres FGM étant rares dans la littérature, notre modèle sera validé par des simulations numériques réalisées avec l'élément solide du logiciel Abaqus.

### **3.2 Formulation élément fini du problème d'amortissement passif des poutres FGM**

La problématique discutée dans ce chapitre porte sur le calcul des propriétés amortissantes d'une poutre sandwich FGM avec un cœur mou dont le comportement dépend de la fréquence de vibration. Le comportement du matériau FGM constituant les couches externes de la poutre est supposé purement élastique alors que le cœur viscoélastique de la structure se déforme principalement en cisaillement. Pour modéliser le comportement réel d'une telle structure, le modèle cinématique zig-zag est nécessaire.

Sur ce schéma, on adopte le modèle classique de poutre pour les faces élastiques et des modèles de cisaillement pour le cœur mou. Dans les études précédentes (chapitre 2), les constantes élastiques des matériaux constitutifs de la poutre ont des valeurs très voisines avec un rapport d'environ 5 en présence de la céramique et de l'aluminium. Le pouvoir amortissant est alors négligeable dans ces structures. Mais avec le modèle proposé dans le présent chapitre, le rapport des constantes élastiques est de l'ordre de 100 en présence du matériau FGM et des matériaux viscoélastiques. Dans ce cas l'amortissement est important et doit être pris en compte pour une bonne prédiction.

### 3.2.1 Les théories de base du modèle viscoélastique

#### 3.2.1.1 Champs cinématiques

On considère une poutre sandwich constituée d'une couche viscoélastique insérée entre deux couches FGM (Figure 3.1). Pour le présent modèle, les chargements sont appliqués dans le plan  $(x, z)$ . Etant donné que l'on ne s'intéresse qu'au comportement plan de la poutre, seule la réponse axiale et la réponse verticale sont cherchées. On désigne par  $z_1, z_v$  et  $z_3$  les coordonnées du plan médian respectivement de la couche inférieure (1), du cœur (v) et de la couche supérieure (3). La section considérée est symétrique ( $z_v = 0$ ). L'épaisseur des couches externes et de l'âme viscoélastique de la poutre sont respectivement désignées par  $h_f$  et  $h_v$  avec une hauteur totale de section notée  $h$ .

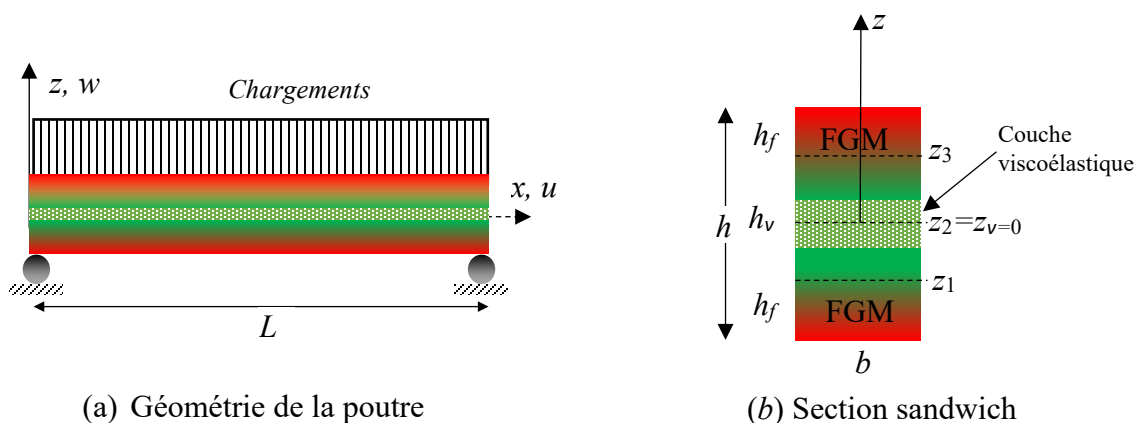


Figure 3.1: Poutre sandwich FGM viscoélastique 2D et section multicouche



Pour la formulation du modèle de poutre FGM viscoélastique proposé dans ce travail, le champ cinématique de type zig-zag est adopté. Dans les couches FGM la déformation en cisaillement est supposée nulle. De ce fait la théorie classique de poutre est adoptée pour modéliser leur comportement. Ainsi, le déplacement d'un point  $M(x, z)$  d'une section quelconque de la couche FGM obéit à la relation suivante :

$$\begin{cases} U_i(x, z, t) = u_i(x, t) - (z - z_i)w_i'(x, t), \\ W_i(x, z, t) = w_i(x, t), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $u_i(x, t)$  et  $w_i(x, t)$  sont respectivement le déplacement axial et transversal d'un point situé sur l'axe de référence de la couche  $i$ .  $(.)'$  désigne l'opérateur dérivée par rapport à  $x$ .

Dans la couche viscoélastique le cisaillement est important. De ce fait pour modéliser son comportement, la théorie de Timoshenko et d'autres théories de cisaillement d'ordre élevé sont adoptées. En se basant sur ces hypothèses, le déplacement d'un point quelconque  $M(x, z)$  d'une section de la couche viscoélastique est donné par les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_v(x, z, t) = u(x, t) - zw'(x, t) + f(z)\phi(x, t), \\ W_v(x, z, t) = w(x, t), \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $u(x, t)$  et  $w(x, t)$  sont respectivement le déplacement axial et vertical de l'axe de référence de la couche centrale.  $\phi(x, t)$  est la rotation de cisaillement et  $f(z)$  la fonction de cisaillement. Les relations adoptées dans la littérature pour définir la fonction de cisaillement varient d'une théorie à une autre. Une liste non exhaustive de ces fonctions de cisaillement est donnée dans le Tableau 1.2. Dans la théorie des poutres, le déplacement transversal de la section droite est constant ( $w_i(x, t) = w(x, t)$ ). En adoptant l'hypothèse de continuité du champ de déplacement aux interfaces des couches, le déplacement de tout point peut être exprimé en termes des déplacements de la couche centrale ( $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  et  $\phi(x, t)$ ). Par conséquent, tous les degrés de liberté de la structure sont réduits aux seuls degrés de liberté du cœur. De là, les relations de continuité suivantes peuvent être déduites :

$$\begin{aligned} \text{à l'interface } z = -\frac{h_v}{2} : U_1(x, \frac{-h_v}{2}, t) &= U_v(x, \frac{-h_v}{2}, t), \\ \text{à l'interface } z = +\frac{h_v}{2} : U_v(x, \frac{+h_v}{2}, t) &= U_3(x, \frac{+h_v}{2}, t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

En introduisant ces conditions dans l'équation (3.1), le champ de déplacement dans les couches FGM peut être déduit en fonction des déplacements du cœur :

$$\begin{cases} U_i(x, z, t) = u(x, t) - zw'(x, t) + c_i\phi(x, t), \\ W_i(x, z, t) = w(x, t), \end{cases} \quad i=1,3 \quad (3.4)$$

où  $c_i$  est un coefficient constant relatif à la couche  $i$ :  $c_1=f(-h_v/2)$  et  $c_3=f(+h_v/2)$ . Les inconnues du problème en termes de déplacements sont alors réduites à 4, à savoir  $u$ ,  $w$ ,  $w'$  et  $\phi$ . En supposant donc une continuité des champs de déplacements aux interfaces âme-peaux de notre modèle de poutre sandwich, on est passé d'un problème à 6 inconnues ( $u_1, u_3, u, w, w'$  et  $\phi$ ) à un problème à 4 inconnues ( $u, w, w'$  et  $\phi$ ).

La composante axiale du tenseur de déformation relatif aux champs de déplacements des couches élastiques externes (Equation 3.4) peut être exprimée comme suit.

$$(\varepsilon_{xx})_i(x, z, t) = u'(x, t) - zw''(x, t) + c_i\phi'(x, t). \quad (3.5)$$

Dans le cœur viscoélastique, le cisaillement est important. Ainsi, le tenseur de déformation résultant des champs de déplacements (Equation 3.2) est exprimé en termes de sa composante axiale et de cisaillement :

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx})_v(x, z, t) = u'(x, t) - zw''(x, t) + f(z)\phi'(x, t), \\ (\varepsilon_{xz})_v(x, z, t) = \frac{df(z)}{dz}\phi(x, t). \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.2.1.2 Relations constitutives

Pour les couches FGM, la loi de comportement adoptée est une loi élastique respectant la relation de Hooke:

$$(\sigma_{xx})_i(z) = E_i(z)(\varepsilon_{xx})_i, \quad i=1,3 \quad (3.7)$$

où  $E_i(z)$  est le module élastique dépendant de  $z$  et correspondant à la couche  $i$  en matériau FGM. Pour le cœur viscoélastique, le comportement du matériau dépend non linéairement de la fréquence. L'équation constitutive adoptée est écrite en considérant le comportement axial et le comportement en cisaillement, avec des modules élastiques et de cisaillement dépendants de la fréquence de vibration :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_v = \begin{bmatrix} E^*(\omega) & 0 \\ 0 & G^*(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}_v. \quad (3.8)$$

Dans cette relation  $E^*$  et  $G^*$  représentent respectivement le module d'Young et le module de cisaillement dépendants de la fréquence de vibration. Ces deux grandeurs sont liées entre elles par la relation suivante.

$$G^*(\omega) = \frac{E^*(\omega)}{2(1+\nu_v)}. \quad (3.9)$$

Dans cette relation  $\omega$  est la fréquence propre de vibration de la poutre et  $\nu_v$  est le coefficient de Poisson du cœur. Pour le modèle proposé dans ce travail, le coefficient de Poisson sera supposé constant aussi bien dans les couches FGM que dans la couche viscoélastique. La section de poutre considérée est une section sandwich avec au cœur le matériau viscoélastique et sur les faces les matériaux FGM. Les variations des propriétés matériaux de cette section sont détaillées dans la partie suivante.

### 3.2.2 Variations des propriétés de la section de poutre FGM viscoélastique

Dans les applications du présent modèle de poutre amortissante, deux types de matériaux FGM seront considérés. L'un est un mélange de verre et de céramique et l'autre est fabriqué à partir d'un mélange d'aluminium et de céramique. Dans chacun de ces matériaux FGM, la fraction volumique des constituants est supposée varier dans la section suivant la direction verticale ( $z$ ). Les propriétés effectives  $P(z)$  du matériau, que sont, les constantes élastiques ( $E(z)$ ,  $G(z)$ ) et la densité ( $\rho(z)$ ), sont supposées obéir à la loi de puissance P-FGM donnée par:

$$P(z) = (P_m - P_c)V_m(z) + P_c, \quad (3.10)$$

où  $P(z)$  est la propriété homogénéisée obtenue à partir des propriétés des constituants de base :  $P_c$  pour la céramique et  $P_m$  pour le métal ou le verre.  $V_m$  représente la fraction volumique du métal ou du verre ( $0 \leq V_m \leq 1$ ). Les variations suivant la direction ( $z$ ) de  $V_m$  sont données dans chacune des couches du sandwich par les relations suivantes:

$$\begin{cases} -h/2 \leq z \leq -h_v/2 & V_m(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z-z_1}{h_f} \right)^k, \\ -h_v/2 \leq z \leq h_v/2 & \text{couche viscoélastique,} \\ h_v/2 \leq z \leq h/2 & V_m(z) = \left( \frac{1}{2} - \frac{z-z_3}{h_f} \right)^k, \end{cases} \quad (3.11)$$

Rappelons qu'en fixant  $k=0$ , on obtient un matériau isotrope sur les faces du sandwich avec des propriétés matériaux constantes  $P(z) = P_m = \text{cte}$  (aluminium ou verre pur). Pour une idée plus précise de l'évolution des propriétés matériaux de notre modèle, dans l'épaisseur de la poutre, les variations de la fraction volumique  $V_m$  dans la section droite sont représentées sur la Figure 3.2 pour un rapport  $h_v/h = 2\%$  et pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ .

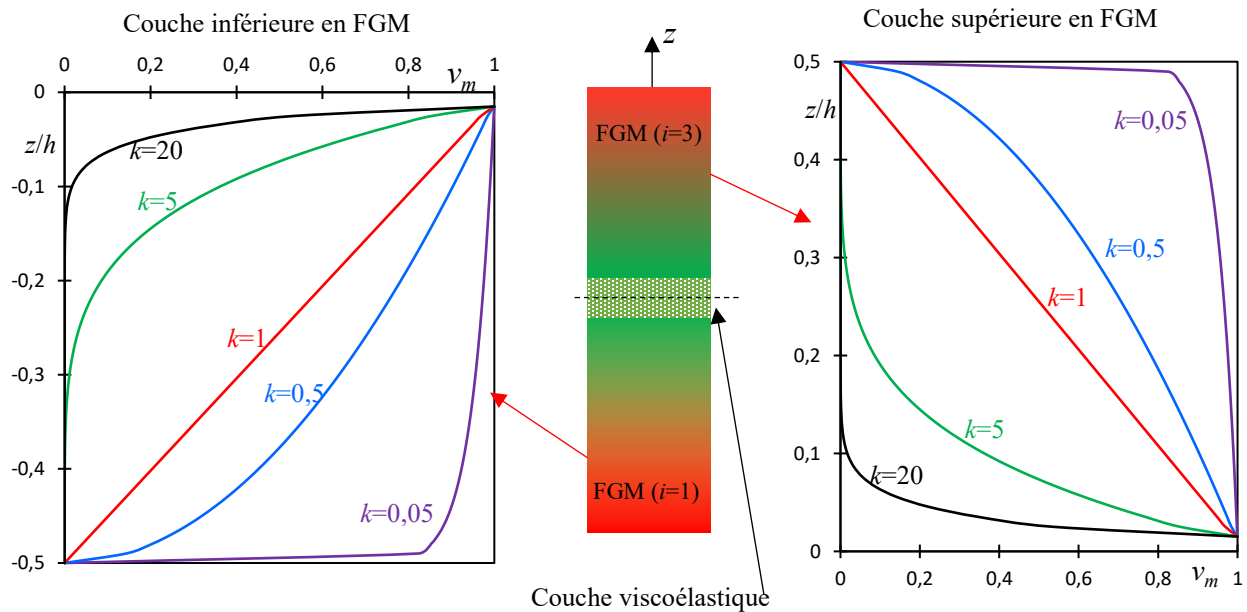


Figure 3.2: Variations de la fraction volumique  $V_m$  dans l'épaisseur de la section pour différentes valeurs de l'indices de puissance  $k$

On observe sur cette figure, une variation linéaire de la fraction volumique dans la direction ( $z$ ) en présence du matériau FGM avec un indice de puissance  $k=1$ , mais pour les autres valeurs de  $k$ , la fraction volumique varie non linéairement dans l'épaisseur de la structure. Par ailleurs on note que cette variation de la fraction volumique est continue, ce qui implique une continuité des propriétés effectives du matériau FGM dans son épaisseur.

Aussi, on peut remarquer que sur les faces des couches FGM, la fraction volumique est nulle ou égale à 1 quelle que soit la valeur de l'indice de puissance  $k$ . Ceci traduit la présence de matériaux purs à ces endroits. Dans ce qui suit, les équations de mouvements dynamiques et les équations d'équilibre statique de la poutre sandwich FGM à cœur viscoélastique sont dérivées dans le cas d'un comportement 2D. D'abord une formulation mathématique du problème est obtenue dans un contexte de la mécanique des milieux continus et ensuite une approche élément fini est adoptée pour la recherche de solutions.

### 3.2.3 Formulation variationnelle du problème de vibration et d'équilibre

L'équation dynamique gouvernant le mouvement de vibration de la poutre sandwich FGM à cœur viscoélastique dérive du principe d'Hamilton et est donnée par :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt = 0, \quad (3.12)$$

où  $U$ ,  $T$  et  $W$  désignent respectivement l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et le travail de forces extérieures. Sous des charges statiques, les équations d'équilibre sont dérivées de la condition de stationnarité du potentiel:

$$\delta(U - W) = 0. \quad (3.13)$$

De même que dans le chapitre 2, nous proposons dans le cas présent, une formulation matricielle pour dériver les équations d'équilibre et de mouvement. Dans cette perspective, les vecteurs de travail suivants sont définis et seront utilisés dans cette section :

$$\begin{aligned} \{\gamma\}^t &= \{u' \quad w'' \quad \phi' \quad \phi\}, \quad \{e\}^t = \{u \quad w \quad w'\}, \\ \{q\}^t &= \{u \quad w \quad w' \quad \phi\}, \quad \{S\}^t = \{N \quad M_y \quad M_\phi \quad V_z\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'énergie de déformation  $U$  est calculée à partir de la définition cinématique de chaque couche. En considérant la couche FGM, cette énergie est obtenue en utilisant la relation constitutive élastique (Equation 3.7) et pour le cœur viscoélastique, les équations constitutives dépendantes de la fréquence de vibration (Equation 3.8) sont considérées. La fonctionnelle de l'énergie de déformation est obtenue par sommation des contributions de chacune des couches et est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \delta U = & b \int_L \left( \int_{-h/2}^{-h_v/2} (\sigma_{xx})_1 \{ \delta u' - z \delta w'' + c_1 \delta \phi' \} dz \right) dx + \\
 & b \int_L \left( \int_{-h_v/2}^{h_v/2} \left\{ (\sigma_{xx})_v \{ \delta u' - z \delta w'' + f(z) \delta \phi' \} + (\sigma_{xz})_v \frac{df(z)}{dz} \phi \right\} dz \right) dx + \\
 & b \int_L \left( \int_{h_v/2}^{h/2} (\sigma_{xx})_3 \{ \delta u' - z \delta w'' + c_3 \delta \phi' \} dz \right) dx.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Après des procédures d'intégration dans la section transversale, la fonctionnelle de l'énergie de déformation est obtenue sous la forme suivante.

$$\delta U = \int_L \left( (N_1 + N_v + N_3) \delta u' - (M_1 + M_v + M_3) \delta w'' + (c_1 N_1 + c_3 N_3 + M_f) \delta \phi' + V_z \phi \right) dx. \tag{3.16}$$

où  $N_1, N_v, N_3$  sont des forces axiales ;  $M_1, M_v, M_3$  des moments de flexion ;  $M_f$  le moment de cisaillement et  $V_z$  la force de cisaillement. Ces grandeurs sont calculées numériquement à partir des équations constitutives :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= b \int_{-h/2}^{-h_v/2} (\sigma_{xx})_1 dz, & M_1 &= b \int_{-h/2}^{-h_v/2} (\sigma_{xx})_1 z dz, \\
 N_3 &= b \int_{h_v/2}^{h/2} (\sigma_{xx})_3 dz, & M_3 &= b \int_{h_v/2}^{h/2} (\sigma_{xx})_3 z dz, \\
 N_v &= b \int_{-h_v/2}^{h_v/2} (\sigma_{xx})_v dz, & M_v &= b \int_{-h_v/2}^{h_v/2} z (\sigma_{xx})_v dz, \\
 M_f &= b \int_{-h_v/2}^{h_v/2} (\sigma_{xx})_v f(z) dz, & V_z &= b \int_{-h_v/2}^{h_v/2} (\sigma_{xz})_v \frac{df(z)}{dz} dz.
 \end{aligned} \tag{3.17a-h}$$

De là, l'expression de la fonctionnelle de l'énergie de déformation est déduite sous une forme plus contractée :

$$\delta U = \int_L \{ \delta \gamma \}^t \{ S \} dx, \tag{3.18}$$

où  $\{ \gamma \}$  et  $\{ S \}$  sont respectivement le vecteur gradient de déplacements et le vecteur regroupant les forces de contrainte s'exerçant sur la section droite de la poutre (donnés en Equation. 3.14).

En tenant compte des équations constitutives (Equations 3.7 et 3.8), les composantes du vecteur  $\{ S \}$  obtenu dans (3.18) peuvent être dérivées en terme de gradient de déplacements :

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} (a_0^{(1)} + E^*(\omega)a_0^{(2)} + a_0^{(3)})u' - (a_1^{(3)} + a_1^{(1)} + E^*(\omega)a_1^{(2)})w'' + (c_1a_0^{(1)} + c_3a_0^{(3)} + E^*(\omega)a_f^{(2)})\phi' \\ (a_1^{(1)} + E^*(\omega)a_1^{(2)} + a_1^{(3)})u' - (a_2^{(1)} + a_2^{(3)} + E^*(\omega)a_2^{(2)})w'' + (c_1a_1^{(1)} + c_3a_1^{(3)} + E^*(\omega)a_{zf}^{(2)})\phi' \\ (c_1a_0^{(1)} + c_3a_0^{(3)} + E^*(\omega)a_f^{(2)})u' - (c_1a_1^{(1)} + c_3a_1^{(3)} + E^*(\omega)a_{zf}^{(2)})w'' + (c_1^2a_0^{(1)} + c_3^2a_0^{(3)} + E^*(\omega)a_{f^2}^{(2)})\phi' \\ E^*(\omega)a_v^{(2)}\phi \end{Bmatrix} = [D(\omega)]\{\gamma\}, \quad (3.19)$$

où  $[D(\omega)]$  est la matrice de comportement de la poutre dépendante de la fréquence de vibration, en raison de la non linéarité matérielle induite par le comportement viscoélastique de la couche centrale du sandwich. Les coefficients de cette matrice sont calculés par intégration sur la section transversale :

$$\begin{aligned} (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}) &= b \int_{-h/2}^{-h_v/2} E_1(z) (1, z, z^2) dz, \\ (a_0^{(3)}, a_1^{(3)}, a_2^{(3)}) &= b \int_{h_v/2}^{h/2} E_3(z) (1, z, z^2) dz, \end{aligned} \quad (3.20a.c)$$

$$(a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_f^{(2)}, a_{zf}^{(2)}, a_{f^2}^{(2)}, a_v^{(2)}) = b \int_{-h_v/2}^{h_v/2} \left( 1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z), \frac{1}{2(1+\nu_c)} \left( \frac{df(z)}{dx} \right)^2 \right) dz.$$

Dans le calcul des coefficients de la matrice de comportement  $[D(\omega)]$ , une intégration numérique sera adoptée. Afin de prendre en compte la non linéarité du matériau, la matrice  $[D(\omega)]$  est décomposée en une partie constante représentant l'élasticité retardée du matériau et en une partie dépendante de la fréquence comme écrit ci-dessous :

$$[D(\omega)] = [D_0] + E^*(\omega)[D_v], \quad (3.21)$$

où  $[D_0]$  et  $[D_v]$  sont des matrices constantes définies par :

$$[D_0] = \begin{bmatrix} a_0^{(1)} + a_0^{(3)} & -(a_1^{(3)} + a_1^{(1)}) & c_1 a_0^{(1)} + c_3 a_0^{(3)} & 0 \\ a_1^{(1)} + a_1^{(3)} & -(a_2^{(1)} + a_2^{(3)}) & c_1 a_1^{(1)} + c_3 a_1^{(3)} & 0 \\ c_1 a_0^{(1)} + c_3 a_0^{(3)} & -(c_1 a_1^{(1)} + c_3 a_1^{(3)}) & c_1^2 a_0^{(1)} + c_3^2 a_0^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$[D_v] = \begin{bmatrix} a_0^{(2)} & a_1^{(2)} & a_f^{(2)} & 0 \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_{zf}^{(2)} & 0 \\ a_f^{(2)} & a_{zf}^{(2)} & a_{f^2}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_v^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Avec cette décomposition, la fonctionnelle de l'énergie de déformation est obtenue sous la forme suivante :

$$\delta U = \int_L \{\delta \gamma\}^t ([D_0] + E^*(\omega)[D_v]) \{\gamma\} dx, \quad (3.23)$$

L'énergie cinétique  $T$  de la poutre sandwich amortissante est obtenue par l'intégration de la masse volumique sur la section transversale.

Dans la couche viscoélastique, la densité de masse ( $\rho_v$ ) est constante alors que dans les couches FGM elle dépend de la coordonnée  $z$  ( $\rho_i(z)$ ). Après les procédures d'intégration, la fonctionnelle de l'énergie cinétique peut être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$\delta T = \int_L \{\delta \dot{q}\}^t [M_e] \{\dot{q}\} dx. \quad (3.24)$$

où  $\{q\}$  représente le vecteur gradient de déplacement défini dans l'Equation 3.14 , et comme défini précédemment, l'opérateur  $(\dot{\phantom{x}})$  désigne la dérivée par rapport au temps  $t$ .  $[M_e]$  est la matrice de masse élémentaire constante définie par :

$$[M_e] = \begin{bmatrix} (b_0^{(1)} + b_0^{(2)} + b_0^{(3)}) & 0 & -(b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + b_1^{(3)}) & (c_1 b_0^{(1)} + b_f^{(2)} + c_3 b_0^{(3)}) \\ 0 & (b_0^{(1)} + b_0^{(3)} + b_0^{(2)}) & 0 & 0 \\ -(b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + b_1^{(3)}) & 0 & (b_2^{(1)} + b_2^{(2)} + b_2^{(3)}) & -(b_1^{(1)} c_1 + b_{zf}^{(2)} + b_1^{(3)} c_3) \\ (c_1 b_0^{(1)} + b_f^{(2)} + c_3 b_0^{(3)}) & 0 & -(b_1^{(1)} c_1 + b_{zf}^{(2)} + b_1^{(3)} c_3) & (c_1^2 b_0^{(1)} + b_{f^2}^{(2)} + c_3^2 b_0^{(3)}) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$



Les coefficients de la matrice  $[M_e]$  sont obtenus par une intégration sur la section, de la masse volumique de chaque couche:

$$\begin{aligned} (b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}) &= b \int_{-h_v/2}^{-h_v/2} \rho_1(z) (1, z, z^2) dz, \\ (b_0^{(3)}, b_1^{(3)}, b_2^{(3)}) &= b \int_{h_v/2}^{h_v/2} \rho_3(z) (1, z, z^2) dz, \\ (b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_f^{(2)}, b_{f^2}^{(2)}, b_{zf}^{(2)}) &= b \rho_v \int_{-h_v/2}^{h_v/2} (1, z, z^2, f(z), f^2(z), zf(z)) dz. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Par une intégration par partie dans le temps, on obtient la variation virtuelle  $\{\delta q\}$  du vecteur déplacement. Ainsi, la fonctionnelle de l'énergie cinétique devient :

$$\delta T = - \int_L \{\delta q\}^t [M_e] \{\ddot{q}\} dx. \quad (3.27)$$

Une formulations plus détaillée de l'énergie cinétique est à retrouver à l'annexe B.

Dans l'analyse statique, des chargements externes sont appliqués. Le travail virtuel correspondant  $\delta W$  est donné par :

$$\delta W = \int_L (f_{xe}(x) \delta u + f_{ze}(x) \delta w + m_{ye}(x) \delta w') dx = \int_L \{\delta e\}^t \{f(x, t)\} dx, \quad (3.28)$$

avec  $\{e\}$  le vecteur déplacement et de gradient de déplacement défini dans 3.14 et  $f(x, t)$  le vecteur force défini par ses trois composantes :

$$\{f(x, t)\}^t = \{f_{xe}(x, t) \quad f_{ze}(x, t) \quad m_{ye}(x, t)\}. \quad (3.29)$$

Basé sur les équations 3.23, 3.27 et 3.29, le système gouvernant le mouvement de la poutre sandwich FGM viscoélastique est obtenu sous la forme matricielle suivante :

$$\int_0^t \left( \int_L \{\delta \gamma\}^t ([D_0] + E^*(\omega)[D_v]) \{\gamma\} dx + \int_L \{\delta q\}^t [M_e] \{\ddot{q}\} dx - \int_L \{\delta e\}^t \{f(x, t)\} dx \right) dt = 0, \quad (3.30)$$

$$\forall \{\delta q\}, \{\delta \gamma\} \text{ and } \{\delta e\}.$$

Ce système traduit à la fois les chargements statiques et les chargements dynamiques. Sous des charges statiques, les termes d'inertie ne sont pas pris en compte.

La partie de la matrice de rigidité dépendante de la fréquence s'annule. Dans ces conditions, le système traduisant l'équilibre statique peut être exprimé sous la forme :

$$\int_L \{\delta\gamma\}^t ([D_0] + E^*(0)[D_v])\{\gamma\} dx - \int_L \{\delta e\}^t \{f(x)\} dx = 0 \quad \forall \{\delta\gamma\} \text{ et } \{\delta e\}. \quad (3.31)$$

Seule une loi viscoélastique constante peut être appliquée dans ce cas. Un exemple de cette loi sera traité dans les applications.

En vibration libre la structure n'est soumise à aucun chargement. Ainsi, le système correspondant est obtenu en annulant le troisième terme de l'équation 3.30 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_L \{\delta\gamma\}^t ([D_0] + E^*(\omega)[D_v])\{\gamma\} dx + \int_L \{\delta q\}^t [M_e]\{\ddot{q}\} dx \right) dt = 0, \quad \forall \{\delta q\}, \{\delta\gamma\}. \quad (3.32)$$

Les solutions de ce système sont supposées harmoniques et obéissent aux relations suivantes :

$$u(x, t) = u(x)e^{i\omega t}, \quad w(x, t) = w(x)e^{i\omega t} \text{ et } \phi(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t}, \quad (3.33)$$

où  $\omega$  représente la fréquence propre de vibration de la poutre. En introduisant ces formes harmoniques de solutions dans l'équation 3.32, le système suivant est obtenu :

$$\int_L \left( \{\delta\gamma\}^t ([D_0] + E^*(\omega)[D_v])\{\gamma\} - \omega^2 \{\delta q\}^t [M_e]\{q\} \right) dx = 0 \quad \forall \{\delta q\}, \{\delta\gamma\}. \quad (3.34)$$

Par cette formulation, l'équation de mouvement de la poutre sandwich FGM viscoélastique en milieu continu est dérivée en statique et en vibration libre. Le système obtenu en vibration libre présente une non linéarité matériaux due à la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. Des solutions à ce problème sont possibles à l'aide de l'approche élément fini et du sous-programme itératif "Diamant" décrits ci-dessous.

### 3.2.4 Approche élément fini du problème d'amortissement des poutres FGM

Dans ce travail, pour discrétiser les problèmes (3.31) et (3.34), la méthode des éléments finis est adoptée. Un élément de poutre à deux nœuds est utilisé à cet effet. Dans le processus de maillage, chaque nœud a quatre degrés de liberté (DOF) à partir desquels il est possible d'obtenir un déplacement dans la direction axiale et verticale combinée à une rotation de flexion et de cisaillement. Ainsi, pour chaque élément de poutre on définit un vecteur nodal regroupant les déplacements aux nœuds sous la forme suivante :

$$\{r\}_e^t = \{u_1 \quad w_1 \quad w_1' \quad \phi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad w_2' \quad \phi_2\}. \quad (3.35)$$

Dans le processus de discrétisation, les fonctions de forme linéaires sont adoptées pour le déplacement axial et la rotation ( $u$  et  $\phi$ ), et les fonctions cubiques d'Hermite sont adoptées pour le déplacement transversal. Les vecteurs de déplacements et de gradient de déplacements et leurs variations intervenant dans l'équation du mouvement sont exprimés en terme du vecteur nodal par :

$$\{q\} = [P(\xi)]\{r\}, \quad \{e\} = [V(\xi)]\{r\}, \quad \{\gamma\} = [g(\xi)]\{r\}, \quad (3.36)$$

où  $[P(\xi)]$ ,  $[V(\xi)]$  et  $[g(\xi)]$  représentent des matrices de fonctions de forme et de gradient de fonctions de forme avec  $\xi$  la coordonnée locale ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ). Les expressions de ces matrices sont données à l'Annexe A. En insérant l'équation 3.36 dans les systèmes 3.31 et 3.34, on obtient les systèmes suivants :

**en statique :**

$$\sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( \{\delta r\}' [g(\xi)]' ([D_0] + E_0^* [D_v]) [g(\xi)] \{r\} \right) d\xi - \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \{\delta r\}' [V(\xi)]' \{f(\xi)\} = 0 \quad \forall \{\delta r\}, \quad (3.37)$$

**en vibration libre :**

$$\sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( \{\delta r\}' [g(\xi)]' ([D_0] + E^*(\omega) [D_v]) [g(\xi)] \{r\} \right) d\xi - \omega^2 \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \{\delta r\}' [P(\xi)]' [M_e] [P(\xi)] \{r\} d\xi = 0, \quad \forall \{\delta r\}, \quad (3.38)$$

où  $\sum_e$  représente le processus d'assemblage des éléments finis de poutres pour reconstituer la structure entièrement maillée. Dans ce travail, le comportement viscoélastique dépend de la fréquence. Cela induit une matrice de rigidité non linéaire. Dans ce qui suit, une description détaillée de la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique est donnée.

### 3.2.5 Dépendance en fréquence du comportement viscoélastique

Dans le processus d'intégration numérique, le module complexe non linéaire s'exprime en deux termes :  $E^*(\omega) = E_0 + E(\omega)$ , où  $E_0$  et  $E(\omega)$  sont, respectivement, le module d'élasticité retardée et le module élastique dépendant de la fréquence. Cette décomposition nous permet d'écrire les systèmes statiques et de vibrations libres sous la forme :

*en statique :*

$$([K_0] + E(0)[K_v])\{d\} = \{F\}, \quad (3.39)$$

*en vibration libre :*

$$([K_0] + E(\omega)[K_v] - \omega^2[M])\{d\} = 0, \quad (3.40)$$

où  $\{d\}$  et  $\{F\}$  sont respectivement les vecteurs de déplacements et de chargements.  $[K_0]$  représente la rigidité d'élasticité retardée et  $[K_v]$  est la rigidité viscoélastique.  $E(0)$  le module élastique constant complexe.  $[M]$  est la matrice de masse. Ces différentes grandeurs sont définies par :

$$\begin{aligned} [K_0] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([g(\xi)]' ([D_0] + E_0[D_v]) [g(\xi)]) d\xi, \\ [K_v] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([g(\xi)]' [D_v] [g(\xi)]) d\xi, \\ [M] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([p(\xi)]' [M_e] [p(\xi)]) d\xi = 0, \\ \{F\} &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} ([V(\xi)]' \{f(\xi)\}) d\xi. \end{aligned} \quad (3.41a.d)$$

Dans la présente analyse, toutes les matrices du système (3.41) sont calculées par intégration numérique. La méthode de Gauss est appliquée à cet effet. Aussi, pour obtenir une solution précise des problèmes, des méthodes numériques efficaces sont nécessaires notamment pour la prise en compte des lois viscoélastiques non constantes. Les différentes lois considérées dans ce travail et les méthodes numériques utilisées pour obtenir les solutions sont détaillées dans la section suivante.

### 3.2.6 Lois de comportement viscoélastique

La couche viscoélastique a un module élastique non constant. Il est composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Dans la littérature, deux types de modèles viscoélastiques sont étudiés. Dans le premier appelé 'Modèle complexe constant' (MCC), les parties réelles et imaginaires des modules élastiques sont des constantes (Rao[120]). Le deuxième regroupe des modèles viscoélastiques non linéaires. Dans ce travail, deux modèles dépendants de la fréquence sont considérés. Naturellement, les méthodes de résolution varient d'un modèle viscoélastique à un autre en fonction de la non-linéarité induite.

- **Modèle Complexe Constant (MCC)**

Pour le modèle MCC, les propriétés viscoélastiques sont constantes et sont définies par un module élastique complexe constant défini par :

$$E^* = E_0 (1 + i\eta_c), \quad (3.42)$$

où  $E_0$  désigne le module d'Young correspondant à l'élasticité retardée du matériau et  $\eta_c$  le facteur de perte du matériau viscoélastique. Ce modèle est un modèle classique utilisé dans la littérature pour modéliser des matériaux polymères ([6], [116], [120]). En considérant cette loi, les relations 3.39 et 3.40 peuvent être réécrites sous les formes suivantes:

*en statique:*

$$([K_0] + iE_0\eta_c [K_v])\{d\} = \{F\}, \quad (3.43)$$

*et en vibration libre :*

$$([K_0] + iE_0\eta_c [K_v] - \omega^2 [M])\{d\} = 0. \quad (3.44)$$

En vibration libre, le système équivalent est linéaire complexe et peut être résolu par des méthodes classiques utilisées pour des problèmes de valeurs propres et de vecteurs propres linéaires comme la méthode de Lanczos [4]. Par ailleurs, dans la littérature, l'effet du facteur de perte viscoélastique sur le comportement des structures est souvent négligé. Or dans l'équation d'équilibre (3.43), on peut remarquer la présence du facteur de perte  $\eta_c$  du cœur. A partir de ce constat, il est possible que le comportement viscoélastique ait une incidence non négligeable sur la réponse statique de la structure. Avec le présent modèle, l'étude des effets du facteur de perte sur le comportement de la structure peut être menée en considérant différentes propriétés géométriques et différentes conditions aux limites.

• **Modèles viscoélastiques dépendant non linéairement de la fréquence de vibration**

Le modèle précédent est le plus étudié dans la littérature à cause de la simplicité qu'il offre dans la recherche de solutions au problème statique et de vibration. Mais il n'est valable que dans le cas des matériaux viscoélastiques à amortissement faible. Dans le milieu industriel, le pouvoir amortissant des structures est très prisé. De ce fait, les matériaux viscoélastiques utilisés pour accroître la dissipation sous forme thermique de l'énergie de déformation dans les structures, sont des matériaux à haut pouvoir amortissant. Le module complexe constant n'est pas adapté pour simuler le comportement de tels matériaux. Il faut alors faire appel à des modèles non linéaires. Dans ce travail on va considérer les modèles 3M ISD112 et le poly-vinyle-butyril (PVB) pour modéliser le comportement de la couche centrale du sandwich dépendant de la fréquence de vibration.

Par analyse des résultats expérimentaux, le module de cisaillement du modèle 3M ISD112 est donné en fonction de la fréquence de vibration sous forme de modèle de Maxwell généralisé ([20], [22]):

$$G(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j \omega}{\omega - i\Omega_j} \right), \quad (3.45)$$

où  $G_0$  représente le module de cisaillement correspondant à l'élasticité retardée du matériau et  $(\Delta_j, \Omega_j)$  sont des paramètres expérimentaux obtenus par lissage des courbes maitresses. Les valeurs de ces paramètres largement utilisés dans la littérature sont données dans Tableau 3. 1 pour deux températures et pour un nombre de termes  $n=3$  :

$j$	20°C			27°C		
	$G_0$ (MPa)	$\Delta_j$	$\Omega_j$ (rad/s)	$G_0$ (MPa)	$\Delta_j$	$\Omega_j$
1	0.50	0.746	468.7	0,05	2.8164	31.1176
2		3.265	4742.4		13.1162	446.4542
3		43.284	71532.5		45.4655	5502.5318

Tableau 3. 1 Paramètres du modèle viscoélastique 3M ISD112

Le modèle PVB est représenté à 20°C par un modèle à dérivée fractionnaire dont la loi d'évolution du module de cisaillement est une loi de puissance utilisée dans les travaux de ([52], [67], [121]) et donnée par :

$$G(\omega) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)[1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}]^{-\beta} \quad (3.46)$$

Dans ce modèle  $G_0$  représente également le module de cisaillement correspondant à l'élasticité retardée du matériau. Les coefficients  $G_\infty$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $\chi$  sont des paramètres matériaux ( $G_0=479 \times 10^3$  Pa ;  $G_\infty=2.35 \times 10^8$  Pa ;  $\tau=0.3979$  ;  $\alpha=0.46$  ;  $\chi=0.1946$ ). Ce modèle est souvent utilisé pour représenter le comportement viscoélastique des parebrises de voiture.

Pour l'analyse des vibrations non-linéaires, différentes approches de résolutions sont proposées dans la littérature. Le chapitre 1 consacré à la bibliographie, présente quelques méthodes analytiques et numériques utilisées pour la recherche de solutions du problème non linéaire. Dans ce travail nous allons adopter l'approche Diamant [67] pour résoudre le problème de vibration libre dépendant non linéairement de la fréquence de vibration.

### 3.2.7 Résolution d'équations non linéaires par Diamant

Nous rappelons que la résolution du problème aux valeurs propres obtenu dans la modélisation de la vibration des poutres sandwich FGM à âme viscoélastique est difficile et complexe à cause de la non linéarité matérielle induite par le comportement viscoélastique du cœur. Les méthodes classiques sont peu adaptées. Pour cela nous avons utilisé dans ce travail le code Diamant pour la recherche de solutions du problème. Ce code est le couplage de la technique d'homotopie, de la Méthode Asymptotique Numérique MAN et de la différentiation automatique AD. Nous allons donner dans ce qui suit une représentation généralisée de ces différentes techniques par des exemples simples.

#### 3.2.7.1 Principe de la technique d'homotopie

La technique d'homotopie est une méthode itérative qui permet de résoudre des problèmes complexes en partant d'un problème relativement simple par introduction d'un paramètre de chemin. Pour élucider cette méthode nous allons donner en exemple le problème suivant :

Soit à résoudre le système suivant :

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x) = 0 \quad (3.47)$$

L'inconnue de ce problème est  $x$  et on suppose qu'on connaît la solution du problème simple :

$$g_1(x) = 0, \quad (3.48)$$

où du moins que sa résolution est plus simple.

Alors, à partir de ce moment on introduit un paramètre “ $a$ ” dit d’homotopie dans le système d’origine 3.47 de manière à le réécrire sous la forme :

$$f_r(x, a) = g_1(x) + ag_2(x) = 0. \quad (3.49)$$

Le paramètre d’homotopie est supposé décrire l’intervalle  $[0, 1]$ . On peut remarquer que pour les valeurs extrêmes de cet intervalle on obtient des formes particulières du problème :

$$\text{pour } a = 0, f_r(x, 0) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = 0, \quad (\text{solution connue})$$

$$\text{et pour } a = 1, f_r(x, 1) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g_1(x) + g_2(x) = 0. \quad (\text{Problème initial})$$

Il suffit alors d’imposer un incrément de variation du paramètre «  $a$  » pour passer de la solution connue à la solution cherchée de façon itérative en utilisant à chaque pas la solution précédente comme point de départ pour résoudre le nouveau problème.

Dans l’approche Diamant cette technique est associée à la méthode asymptotique numérique la *MAN* pour la résolution de l’équation (3.49) et le pilotage du paramètre d’homotopie qui est déterminé par la donnée des rayons de convergence des séries entières.

### 3.2.7.2 Méthode Asymptotique numérique pour la résolution d’équation résiduelles

La *MAN* est une technique de résolution des équations non linéaires. Elle a été développée au début des années 90 pour résoudre des problèmes de flambement des structures. Très rapidement de nombreux aménagements et améliorations ont été proposés, permettant à la *MAN* d’être étendue à d’autres problèmes de mécanique et de physique. Elle est généralement utilisée pour des procédures de continuation des branches solutions d’un problème. Son principe réside dans la différentiation du problème résiduel dont on cherche les solutions, pour obtenir des séries de Taylor tronquées à un ordre donné permettant de ramener le problème qui était au départ non linéaire à un système d’équations linéaires. Dans le code Diamant, cette lourde tâche de calcul des dérivées d’ordre élevé constituant les coefficients de Taylor sont assurée par la *technique de différentiation automatique AD*. Par la *MAN*, le problème de vibrations libres à résoudre dans ce travail peut être réécrite sous forme d’un problème résiduel:



$$\mathfrak{R}(d, \lambda) = 0, \quad (3.50)$$

où  $\mathfrak{R}(d, \lambda) \in \mathbb{C}^p$  est le vecteur résidu fonction du vecteur inconnu  $\{d\} \in \mathbb{C}^p$  et du paramètre de fréquence  $\lambda = \omega^2$ . Avec la MAN les solutions sont cherchées par branche à partir d'une solution d'initiale donnée  $(d_0, \lambda_0)$ . Pour construire la branche solution d'origine  $(d_0, \lambda_0)$ , on utilise le développement en série de Taylor tronqué, des inconnues  $d$  et  $\lambda$  à un ordre élevé  $N$ :

$$\begin{cases} d(a + \delta a) = \sum_{m=0}^N (\delta a)^m d_m(a), \\ \lambda(a + \delta a) = \sum_{m=0}^N (\delta a)^m \lambda_m(a), \end{cases} \quad (3.51 \text{ a.b})$$

où  $a$  est un paramètre de chemin et  $\delta a$  son incrément.  $d_m$  et  $\lambda_m$  sont les coefficients de Taylor à l'ordre  $m$  évalués au point  $a$  et définis par :

$$d_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m d}{\partial a^m}(a), \quad \lambda_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \lambda}{\partial a^m}(a). \quad (3.52)$$

Il en résulte de la différentiation du problème résiduel (3.50) une série de  $N$  équation à  $N+1$  inconnues. Pour résoudre ce système il est généralement proposé de le compléter par l'équation définissant le paramètre de chemin  $a$  par la pseudo longueur d'arc [122] :

$$a = [d(a) - d(0)] \frac{\partial d}{\partial a}(0) + [\lambda(a) - \lambda(0)] \frac{\partial \lambda}{\partial a}(0), \quad (3.53)$$

Le système linéaire obtenu par différentiation du problème résiduel peut être écrit sous la forme générique suivante :

$$L_t(d_m, \lambda_m) = F_m, \quad (3.54)$$

où  $L_t$  est l'opérateur tangent qui à priori est linéaire dans le cas de la MAN, et  $F_m$  le second membre regroupant les coefficients de Taylor obtenus par le développement en séries des inconnues  $d$  et  $\lambda$  aux ordres inférieurs à  $m$ . Dans le cas d'une différentiation classique généralement il manque des termes pour construire la matrice tangente  $L_t$ . Afin que la différentiation produise suffisamment de termes pour construire les deux membres du système (3.54), l'approche Diamant utilise la formulation de récurrence de Fàa di Bruno [123] pour la procédure de différentiation.

Selon cet auteur pour une fonction analytique  $f(a) = \phi \circ x(a)$ , les coefficients de Taylor sont donnés par la relation :

$$f_n = (\phi \circ x)_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^m \phi}{\partial x^m}(x_0) B_{n,m}(x^{(1)}, \dots, x^{(n-m+1)}), \quad (3.55)$$

où  $x_0 = x(0)$  et les coefficients  $B_{n,m}$  sont les polynômes de Bell [124]. Plus de détails sur cette formulation peuvent être trouvés dans [3].

### 3.2.7.3 Outil Diamant

Dans le code Diamant, le calcul des séries de Taylor est fait par un sous-programme nommé *boîte à outil Diamant*. Ce sous-programme permet d'exécuter des différentiations de haut degré par des formules de récurrence et la technique de surcharge d'opérateurs.

La technique de surcharge d'opérateurs utilisée dans le code Diamant consiste à effectuer le calcul des dérivées par les opérateurs arithmétiques (+, -, ×, /, <, >, o, ...) et par des fonctions mathématiques propres au langage de programmation. Quant aux formules de récurrences, elles sont programmées pour propager le calcul des séries de Taylor. Ainsi, pour une fonction composée  $Y=g(u,v)$ , les séries de Taylor sont calculées par propagation des coefficients de Taylor des séries de  $u$  et  $v$  [125]:

$$\begin{cases} Y = u + v, & Y_n = u_n + v_n, \\ Y = u \times v, & Y_n = \sum_{j=0}^n u_j v_{n-j}, \\ Y = u / v, & Y_n = \frac{1}{v_0} \left[ u_n - \sum_{j=0}^{n-1} Y_j v_{n-j} \right], \quad v_0 \neq 0, \\ Y = \sqrt{u}, & Y_n = \frac{1}{2u_0} \left[ u_n - \sum_{j=1}^{n-1} Y_j Y_{n-j} \right], \quad u_0 \neq 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Dans le système (3.56),  $Y_n$ ,  $u_n$  et  $v_n$  représentent des coefficients de Taylor respectivement des fonctions  $Y$ ,  $u$  et  $v$  à l'ordre  $n$ . Dans la boîte à outil *Diamant* programmée dans l'interface Matlab, le calcul de ces coefficients de Taylor se fait à partir d'une classe d'objet intégrée au programme et nommée "TaylorSeries" [52], [67].

Les objets appartenant à cette classe sont définis suivant trois propriétés. Ainsi, à un élément  $Y$  appartenant à cette classe d'objet on lui attribue la propriété de "value" définie par " $Y.value$ " et définissant les coefficients de Taylor de  $Y$  à l'ordre 0, la propriété "coef" définie " $Y.coef$ " regroupant les coefficients de Taylor aux ordres  $n = 1, 2, \dots, N$  et la troisième propriété "order" définie par " $Y.order$ " donnant l'ordre de troncature  $N$  des séries.

### 3.3 Tests de validations numériques et discussions

Une approche élément fini pour l'analyse statique et de vibration des poutres sandwich FGM à âme viscoélastique 2D a été proposée ci-dessus. Le cisaillement est pris en compte dans la modélisation du comportement viscoélastique. A cet effet, différentes théories de cisaillement ont été considérées : la théorie de cisaillement du premier ordre de Timoshenko (FOST), la théorie du cisaillement d'ordre supérieur de Reddy (HOST) et d'autres théorie de cisaillement d'ordre élevé (SSDT, ESDT). Ces modèles peuvent être retrouvés dans le Tableau 1.2. Pour l'exécution des calculs, le code élément fini développé a été implémenté dans l'interface Matlab. Afin de tester les modèles proposés dans ce travail, différentes lois viscoélastiques sont considérées dans les simulations. A cet effet, la loi complexe constante (MCC) et des lois dépendantes de la fréquence de vibration (le modèle PVB et le modèle 3M ISD112) sont adoptées. Comme dans le cas des modèles proposés au Chapitre 2, plusieurs combinaisons de conditions aux limites sont possibles dans les analyses. L'encastrement ( $C$ ), bord libre ( $F$ ), l'appui simple avec le déplacement axial libre ( $P$ ) et l'appui simple avec un déplacement axial bloqué ( $S$ ). Les différentes poutres considérées dans cette section sont présentées sur la Figure 2. 4. Dans cette étude, trois modèles de poutres sandwich FGM à âme viscoélastique sont considérés. Il s'agit des modèles FGM/MCC/FGM, FGM/3M ISD112/FGM et FGM/PVB/FGM. Dans le premier et le deuxième modèle de poutre viscoélastique, le matériau FGM est composé de la céramique et d'aluminium. Pour le cœur, le modèle MCC est adopté pour le premier et le modèle 3M ISD112 pour le deuxième. Les propriétés des matériaux impliqués dans ces modèles de poutres sandwich, sont données dans le Tableau 3.2 pour le modèle FGM/MCC/FGM et dans le Tableau 3. 3 pour le modèle FGM/3M ISD112/FGM. En affectant la valeur 0 à l'indice de puissance  $k$  ( $k = 0$ ), on obtient des modèles de poutres isotropes sandwich avec des couches externes en aluminium pur et une couche centrale viscoélastique. Ces modèles isotropes sont largement étudiés dans la littérature ([3], [6]).

Propriétés	Couches FGM		Couche
	Aluminium	Céramique	Viscoélastique
Module d'Young (GPa)	$E_m=69$	$E_c=380$	$E_0=1.794 \times 10^{-3}$
Coefficient de Poisson	$\nu_m=0,3$	$\nu_c=0,3$	$\nu_v=0,3$
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_r=2766$	$\rho_b=3960$	$\rho_v=968.1$

Tableau 3. 2: Propriétés matériaux de la poutre sandwich FGM /MCC/ FGM

Propriétés	Couches FGM		Couche
	Aluminium	Céramique	Viscoélastique
Module d'Young (GPa)	$E_m= 69$	$E_c= 380$	$E_0=1.5 \times 10^{-3}$
Coefficient de Poisson	$\nu_r=0.3$	$\nu_m=0.3$	$\nu_v=0.5$
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_m=2766$	$\rho_c=3960$	$\rho_v=1600$

Tableau 3. 3: Propriétés matériaux de la poutre sandwich FGM /3M ISD112/ FGM

Pour le troisième modèle FGM/PVB/FGM, le matériau FGM utilisé est composé de la céramique et du verre. Le modèle viscoélastique PVB est adopté pour le cœur de la structure. Dans ce cas, en fixant la valeur de l'indice de puissance  $k$  à 0, on obtient le modèle isotrope Verre/PVB/Verre largement adopté en ingénierie pour la modélisation des parebrises de voiture [6]. Les propriétés des matériaux impliqués dans ce modèle de poutre sandwich, sont détaillées dans le Tableau 3. 4.

Propriétés	Couches FGM		Couche viscoélastique
	Verre	Céramique	
Module d'Young (GPa)	$E_m= 64.5$	$E_c= 380$	$E_0=1.34 \times 10^{-3}$
Coefficient de Poisson	$\nu_m=0.22$	$\nu_c=0.3$	$\nu_c=0.4$
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho_m=2737$	$\rho_c=3960$	$\rho_c=999$

Tableau 3. 4: Propriétés matériaux de la poutre sandwich FGM /PVB/ FGM

Dans la littérature, peu de recherches sont consacrées à l'amortissement passif des poutres FGM. Les travaux existants se concentrent essentiellement sur des structures de plaques FGM. De plus ces modèles sont limités à des lois viscoélastiques complexes constantes. En effet, la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique induit une non linéarité de type matériau, difficile à prendre en compte dans la résolution du problème de vibrations, et donc, pour simplifier les calculs, la plupart des travaux ne considère que des modèles viscoélastiques constants.

Basé sur une approche élément fini, le modèle proposé dans ce travail pour l'analyse statique et de vibrations des poutres sandwich FGM viscoélastiques, est adapté aussi bien en présence de lois viscoélastiques complexes constantes qu'en présence de lois dépendantes de la fréquence de vibration. Pour résoudre le problème non linéaire, dans le cas d'un matériau viscoélastique à haut pouvoir amortissant avec une loi de comportement non linéaire, l'approche Diamant sera adoptée. Dans le processus de validation du modèle, des comparaisons seront effectuées, avec des solutions de référence et des résultats de simulations numériques obtenus avec le logiciel Abaqus.

### 3.3.1 Analyse statique

Dans l'étude statique, l'effet de l'indice de puissance  $k$  et du facteur de perte structurelle  $\eta_c$  sur le comportement de la poutre est étudié. Pour atteindre cet objectif, on considère une poutre encastree-libre soumise à une charge uniformément répartie ( $q_z = 5$  kN/m). Le modèle de poutre sandwich FGM/MCC/FGM décrit ci-dessus est adopté dans un premier temps en considérant un facteur de perte du cœur viscoélastique nul ( $\eta_c=0$ ). Dans cette étude, la déflexion de la poutre le long de son axe longitudinal ainsi que les variations de la déformation et de la contrainte axiale dans l'épaisseur de la structure sont cherchées pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  ( $k = 0, 1, 5$  et  $10$ ). Les propriétés géométriques de la poutre considérée pour cette étude statique sont représentées sur la Figure 3.3.

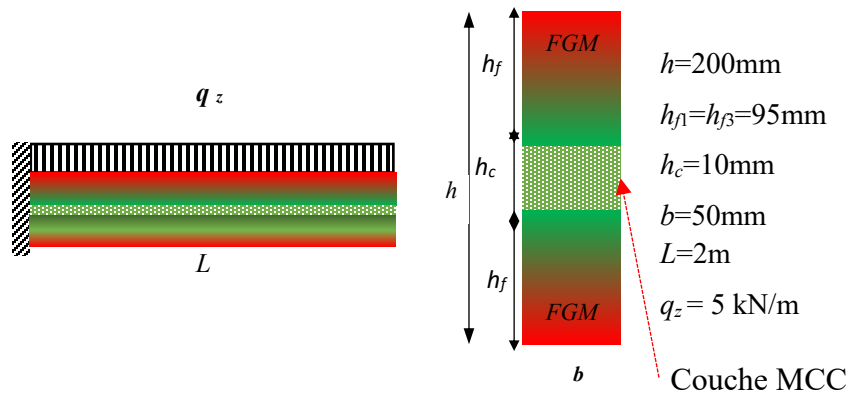


Figure 3. 3: Poutre bi-encastée et Section multicouche viscoélastique

A notre connaissance le modèle de poutre étudié dans ce travail n'a pas encore été traité dans la littérature. Pour cela les résultats obtenus sont comparés aux résultats des simulations numériques obtenus avec le logiciel Abaqus. La modélisation des matériaux FGM dans ce logiciel est possible grâce aux nouveaux modules introduits dans les versions récentes du logiciel (Abaqus / CAE, version 6.18 ou 6.19). Cependant dans ce logiciel, seule une représentation des matériaux FGM en trois dimensions est possible. Les éléments 1D et 2D ne sont pas adaptés. Par ailleurs l'introduction des propriétés des FGMs dans ce logiciel nécessite en amont un calcul du module d'élasticité en des points sélectionnés dans la direction de variations des propriétés. Ce n'est qu'après ce calcul que les propriétés obtenues peuvent être rentrées dans le logiciel sous forme tabulée. La précision des résultats dépend du nombre de points de calcul choisis dans la direction de variations des propriétés recherchées. Pour nos simulations numériques, nous considérons l'élément volume C3D20R avec un maillage de 25200 éléments et à peu près 700000 DOF. Dans un premier temps, nous cherchons le déplacement en flexion le long de l'axe longitudinal de la poutre. Les courbes obtenues avec notre modèle élément fini et le modèle volume d'Abaqus sont présentées sur la Figure 3. 4. Avec le logiciel Abaqus on a représenté la déformation de la ligne moyenne de la poutre ainsi que le profil de déformation de la poutre en 3D. Une très bonne corrélation entre les deux approches est observée pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Aussi, on peut remarquer que la flèche à l'extrémité libre de la poutre diminue lorsque les valeurs de l'indice de puissance  $k$  augmentent.

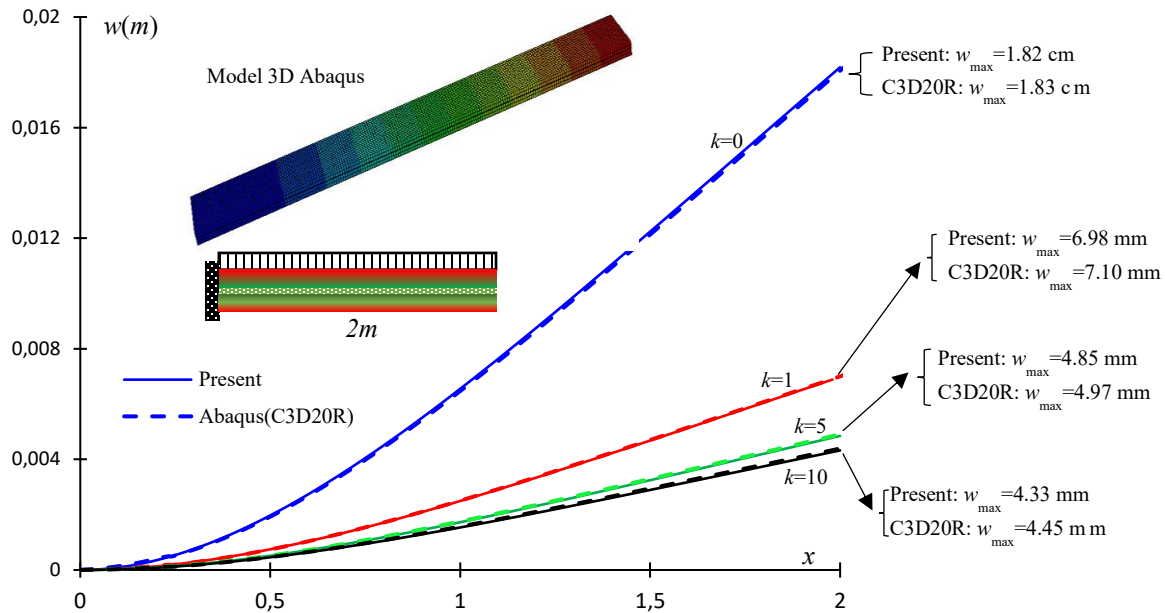


Figure 3. 4: Déflexion de la poutre console FGM/MCC/FGM avec  $\eta_c=0$  et  $k=0;1;5$  et 10.

On déduit de ces observations que pour le modèle étudié, la rigidité de la poutre FGM augmente avec l'indice de puissance  $k$ . Ceci peut s'expliquer par le fait que dans le présent modèle de poutre FGM, lorsque le paramètre  $k$  augmente, le module d'Young varie du plus faible (Aluminium) au plus élevé (céramique). Dans le processus de maillage, très peu d'éléments sont nécessaires pour atteindre la convergence avec notre modèle élément fini (45 éléments). Par ailleurs, on note un gain de temps de calculs considérable en comparant notre modèle à l'élément volume d'Abaqus. En effet la modélisation des matériaux FGM par des éléments 3D engendre un nombre important de degré de liberté ce qui rend les simulations trop chères en temps de calculs en plus du temps consacré aux calculs des propriétés matériaux dans l'épaisseur de la structure.

Dans les bureaux d'étude, l'analyse des déplacements de la poutre sous chargements statiques est nécessaire mais pas suffisante pour optimiser le dimensionnement. Il faut en plus de ces informations connaître la distribution des contraintes dans la structure. En effet, la ruine des infrastructures par des phénomènes de ruptures est dans la plupart des cas liée aux problèmes de concentrations de contraintes résiduelles qui sont souvent localisées au niveau des surfaces de contact entre deux constituants de nature différente. Dans ce travail, les variations de la déformation et de la contrainte axiale dans l'épaisseur de la poutre sont recherchées pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Dans le cas de la poutre console, ces grandeurs sont recherchées au bord encastré.

La Figure 3. 5 et la Figure 3. 6 présentent respectivement les variations de la déformation et de la contrainte axiale suivant les valeurs de l'indice de puissance  $k$ . On rappelle que selon l'hypothèse cinématique adoptée pour ce modèle, la contrainte de cisaillement est nulle dans les couches externes en FGM et varie linéairement ou non linéairement dans le cœur selon le modèle de cisaillement considéré. Sur la Figure 3. 5, les courbes de déformations sont linéaires dans chacune des couches du sandwich et discontinues au niveau des interfaces. Les valeurs des déformations enregistrées sur les faces de la poutre varient suivant les valeurs de l'indice de puissance  $k$ . En s'intéressant à la comparaison de ces valeurs, on remarque qu'au niveau des faces supérieures et inférieures de la poutre, les déformations obtenues en terme de l'indice de puissance  $k$ , décroissent avec cette dernière ( $k = 0 > k=1 > k=5 > k = 10$ ). De même au niveau des interfaces des couches, les déformations obtenues pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  ne sont pas constantes. A cet endroit, l'ordre de classement observé de ces grandeurs suivant les valeurs de  $k$  est exactement le même que sur les faces. D'après la loi de comportement considérée dans la formulation mathématique du problème, la détermination de la contrainte à partir de la déformation fait intervenir les modules élastiques qui sont le module d'Young et le module de cisaillement. Or dans le cas des matériaux FGM, ces modules élastiques sont fonctions de la coordonnée  $z$ . De ce fait, les variations de la contrainte axiale dans la section de la poutre ne présentent pas les mêmes allures que celles des déformations. Ceci se vérifie lorsqu'on analyse les courbes de la Figure 3. 6. Sur cette figure on peut tout d'abord remarquer que les variations des contraintes dans la section de la poutre sont non linéaires.



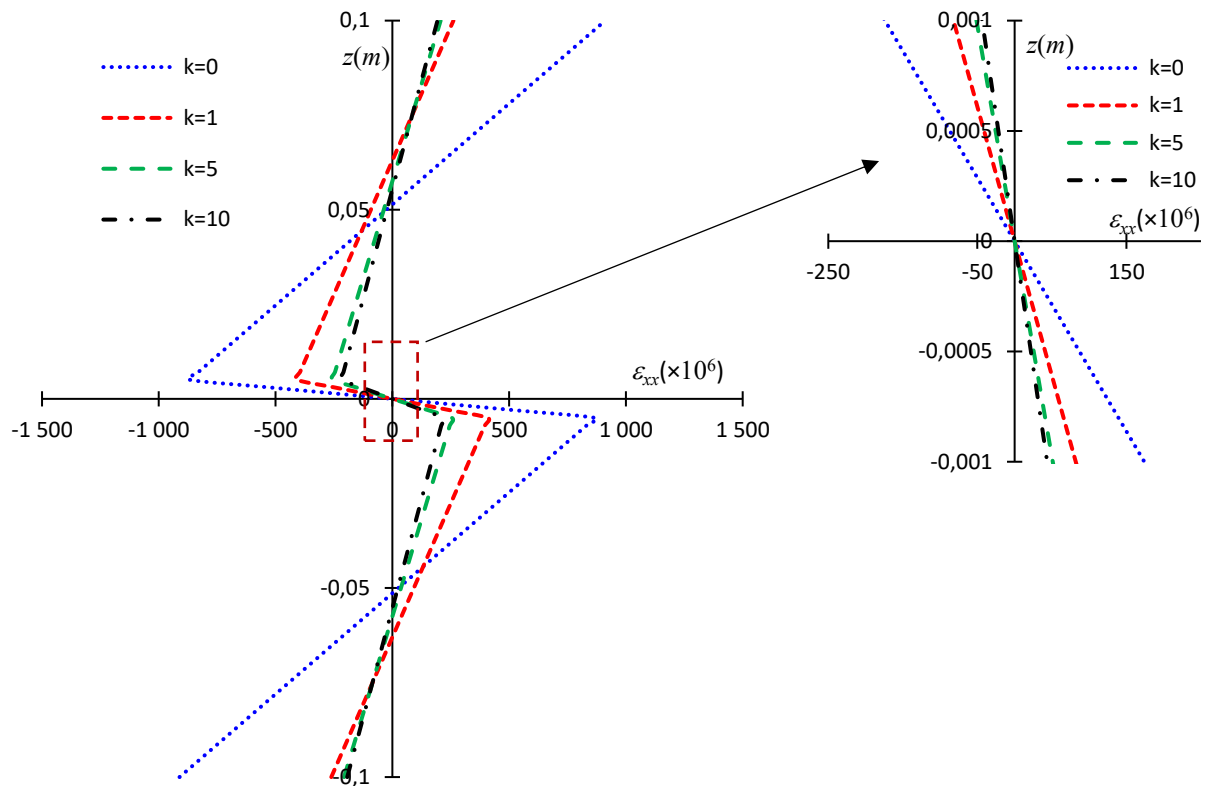


Figure 3. 5: Variations de la déformation axiale dans la section droite au bord encastré de la poutre console (FGM/MCC/FGM) pour  $\eta_c=0$  et  $k=0,1,5,10$ .

Seul le cas isotrope ( $k=0$ ) présente une variation linéaire des contraintes dans les différentes couches de la poutre sandwich. D'autre part, on remarque aussi que contrairement au cas des déformations, l'ordre de classement des contraintes axiales sur les faces n'est pas le même au niveau des interfaces. Sur les faces des poutres, l'ordre croissant des contraintes axiales est:  $k = 0 < k = 10 < k = 5 < k = 1$  alors qu'au niveau des interfaces l'ordre croissant des contraintes observées est :  $k = 10 < k = 5 < k = 1 < k = 0$ . En analysant ces résultats, on observe un changement de comportement assez particulier de la poutre sandwich lorsqu'on est en présence de matériaux isotropes sur les faces. En effet, pour une valeur nulle de l'indice puissance, la contrainte axiale de la poutre occupe la plus petite place du classement sur les faces alors qu'au niveau des interfaces elle devient la plus grande. Ceci apporte la preuve qu'au niveau des interfaces la présence de contraintes est considérablement réduite en présence des matériaux FGM comparé au cas des matériaux composites stratifiés classiques. Par ce constat l'avantage d'utiliser les matériaux FGM à la place des matériaux composites multicouches pour minimiser la présence des contraintes résiduelles est prouvé.

Aussi, l'une des remarques importantes à souligner dans cette étude est la continuité des contraintes dans toute la structure en présence des matériaux FGM. Par contre dans le cas isotrope ( $k=0$ ), on observe un changement brusque de la courbe de variations des contraintes au niveau des interfaces (Figure 3. 6). Ce caractère particulier des matériaux FGM est mis en avant dans ce travail car il répond aux problématiques de délaminage rencontrées dans les domaines d'ingénierie où la chaleur est un facteur important. En effet la continuité des contraintes dans la section de la poutre permet d'éviter l'apparition des points de fortes concentrations de contraintes dans la structure lors des cycles de chargements thermiques. Le modèle de poutre sandwich proposé dans ce travail peut être utilisé comme barrière thermique (présence de la céramique dans le matériaux FGM) avec un apport en pouvoir dissipatif (présence de matériaux viscoélastiques).

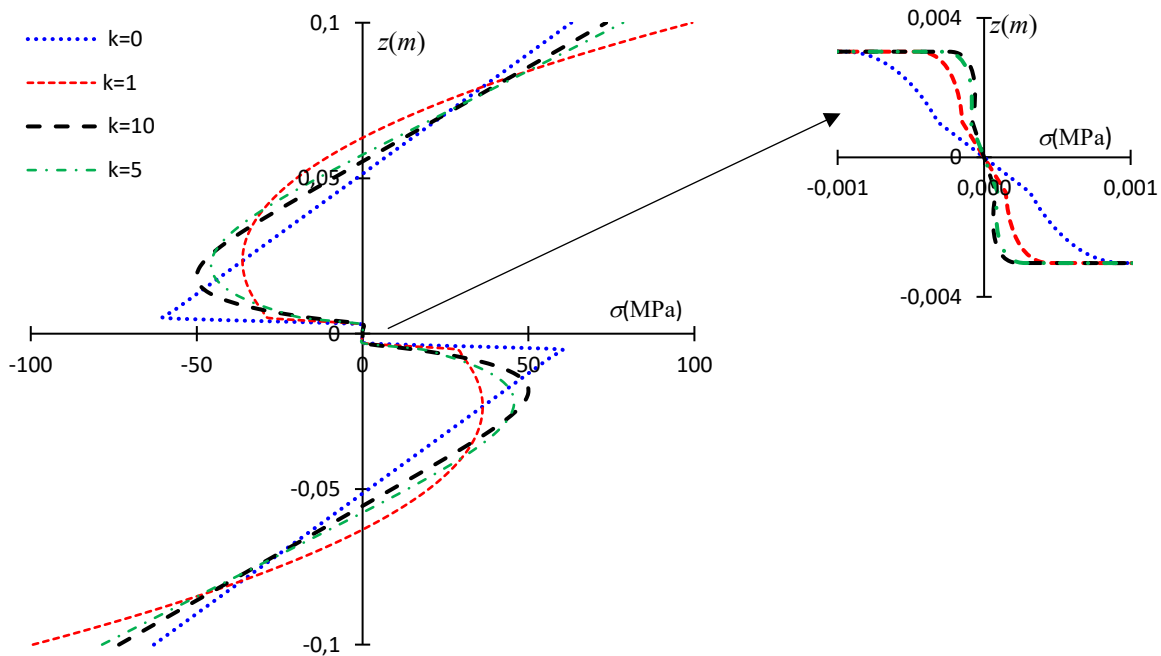


Figure 3. 6: Variations de la contrainte axiale dans la section droite au bord encastré de la poutre console (FGM/MCC/FGM) pour  $\eta_c=0$  et  $k=0,1,5,10$

Pour la validation du modèle élément fini de poutre sandwich développé dans ce travail, nous proposons en plus de la déflexion de la poutre, une comparaison des variations des contraintes axiales dans l'épaisseur de la structure avec les résultats des simulations obtenus avec l'élément volume d'Abaqus.

Afin de représenter la courbe de contrainte axiale dans la section de l'élément C3D20R, on s'est placé sur la ligne moyenne d'une section proche de l'encastrement. Les résultats obtenus avec les deux approches sont représentés sur la Figure 3. 7.

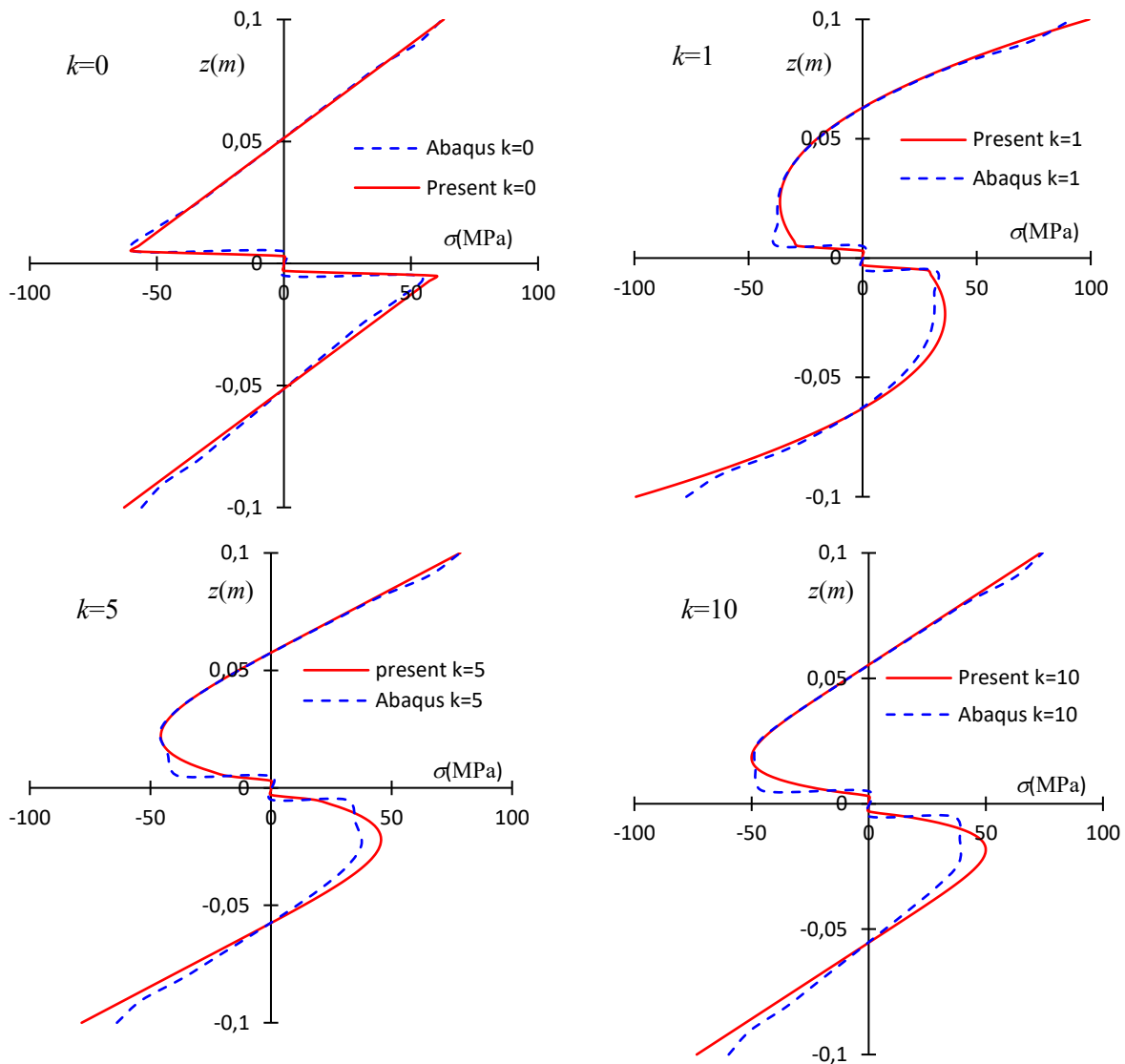


Figure 3. 7: Variations de la contrainte axiale dans l'épaisseur de la poutre console FGM/MCC/FGM avec  $\eta_c=0$  et  $k=0; 1;5$  et 10. Comparaisons avec Abaqus

Par analyse de ces courbes, on peut dire que notre modèle élément fini s'accorde bien avec l'élément volume du logiciel Abaqus. Sur les faces et également au niveau des interfaces, les deux approches décrivent un comportement similaire de la poutre. A notre connaissance, les travaux consacrés à l'étude des effets du facteur de perte sur le comportement des structures viscoélastiques sont rares. Dans les modèles viscoélastiques de type MCC, le facteur de perte est un paramètre indicatif du pouvoir amortissant du matériau. Dans la plupart des travaux de la littérature portant sur ce modèle amortissant, l'influence de ce paramètre sur le comportement de la structure abritant le matériau viscoélastique est négligée. Elle n'est prise en compte qu'en présence de chargements dynamiques. Or dans l'équation (3.43) on peut remarquer que le comportement dépend du facteur de perte. De plus, cette dépendance peut être sensible aux propriétés géométriques de la poutre. Le modèle proposé dans ce travail permet de mener de telles investigations. Pour cet objectif, le même modèle de poutre sandwich (FGM/MCC/FGM) représenté sur la Figure 3.3 est considéré. La poutre est soumise aux mêmes chargements et aux mêmes conditions aux limites que dans l'étude précédente pour un indice de puissance  $k=1$ . Cependant, le rapport des hauteurs de couches  $h_v/h$  donné sur cette figure n'est pas reconduit dans la présente étude. Nous avons effectué les calculs de la déflexion de la poutre avec plusieurs valeurs  $h_v/h$  afin d'identifier celle qui est la plus adaptée pour atteindre notre objectif. Les résultats ne sont pas présentés dans ce travail mais toute fois il est à noter que, l'effet du facteur de perte sur le comportement est étroitement lié aux propriétés géométriques de la structure. Après plusieurs calculs avec différentes valeurs du rapport  $h_v/h$ , nous avons retenu la valeur 0,5% pour ce paramètre. Pour cette valeur géométrique, le comportement en flexion de la poutre sous chargement réparti est cherché en résolvant numériquement l'équation d'équilibre (3.43) toujours avec un maillage de 40 éléments. A cet effet, plusieurs valeurs du facteur de perte structurelle  $\eta_c$  sont considérées pour le cœur viscoélastique ( $\eta_c=0,1 ; 0,6 ; 1$  et  $1,5$ ). La réponse de la poutre est décrite par le déplacement maximal obtenu à l'extrémité libre de la poutre. Les courbes correspondantes à la réponse en déplacement obtenue au cours de cette étude sont représentées sur la Figure 3.8.

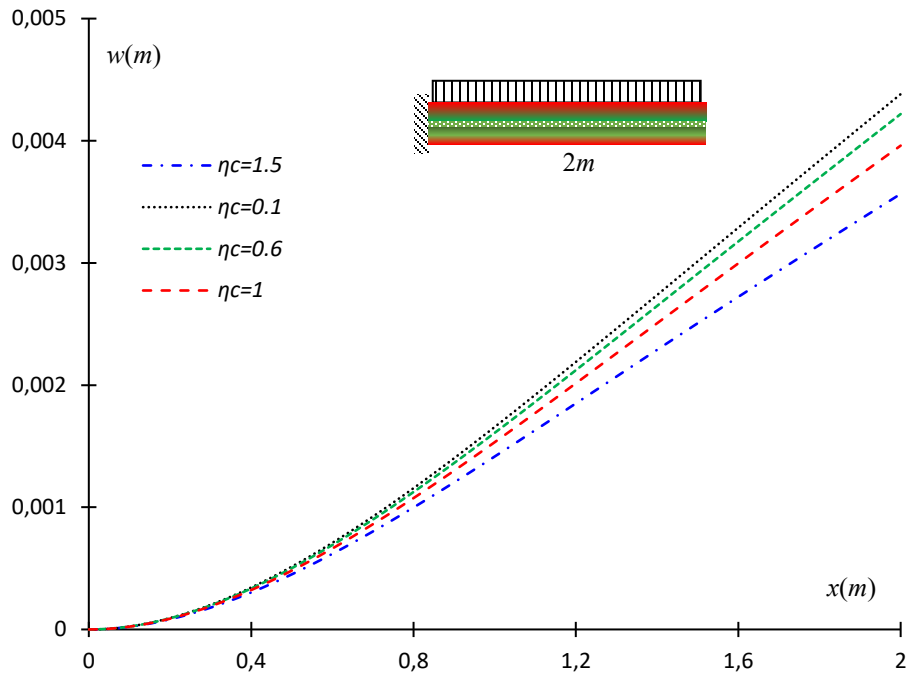


Figure 3. 8: Déflexion de la poutre console FGM/MCC/FGM pour  $\eta_c = 0.1, 0.6, 1.0$  et  $1.5$  avec  $k=1$

En analysant ces courbes, on peut noter tout d'abord que, les flèches obtenues avec les différentes valeurs du facteur de perte ne sont pas confondues. Tout se passe comme si le pouvoir dissipatif du matériau contrôlait le comportement de la structure. On remarque que le déplacement maximal en bout de console diminue avec les valeurs du facteur de perte. On note là, une perte de rigidité de la structure lorsque le pouvoir amortissant du matériau viscoélastique augmente.

A partir de ces analyses, il est montré que le facteur de perte structurelle a une incidence sur le comportement statique des poutres sandwich FGM viscoélastiques en présence d'une loi viscoélastique de type MCC.

### 3.3.2 Analyse des vibrations libres

#### 3.3.2.1 Validation du modèle avec des solutions de références

Dans les études précédentes, le comportement de la poutre viscoélastique sandwich FGM a été abordé sous des charges statiques. Les variations des déplacements, des déformations et des contraintes ont été obtenues en présence de différentes conditions aux limites. L'effet du facteur de perte structurelle sur le comportement a aussi été étudié. A présent, notre étude va porter sur le pouvoir amortissant des poutres sandwich FGM viscoélastiques à travers l'analyse des vibrations libres. Ainsi, les modes de vibration, le facteur de perte et les fréquences propres sont cherchés par résolution du problème aux valeurs propres non linéaire (3.40). Pour l'étude de validation, seuls les modèles de poutres isotropes viscoélastiques sont disponibles dans la littérature. Les modèles de poutres sandwich en FGM pur avec âme viscoélastique sont pratiquement inexistantes. Pour cette raison, les résultats de la présente approche sont comparés à la littérature [6], dans le cas isotropes ( $k=0$ ) et dans le cas des modèles de poutre en FGM pur ( $k > 0$ ) nos résultats sont comparés à ceux obtenus par des simulations avec le logiciel commercial Abaqus. Dans cette étude, l'effet de l'indice de puissance  $k$  sur les propriétés amortissantes de la poutre FGM est étudié dans un exemple pratique. Dans l'analyse du modèle de poutre viscoélastique isotrope, les trois lois viscoélastiques présentées précédemment sont considérées. Dans un premier temps les poutres encastree-libres FGM/MCC/FGM et FGM/3MSD112/FGM sont étudiées. Les propriétés géométriques de ces poutres sont présentées sur la Figure 3. 9. En présence de la loi viscoélastique MMC, différentes valeurs du facteur de perte structurelle sont considérées ( $\eta_c = 0,1; 0,6; 1; 1,5$ ). Dans le cas d'une poutre isotrope ( $k = 0$ ), les propriétés amortissantes, à savoir la fréquence propre et le facteur de perte des cinq premiers modes sont calculées et regroupées dans le Tableau 3. 5 et dans le Tableau 3. 6 pour respectivement le modèle MMC et le modèle 3M ISD112. Les résultats obtenus dans les travaux de Bilasse [6] qui n'a étudié que le cas des poutres isotropes, sont rapportés pour comparaisons. Étant donné que les solutions de référence sont basées sur le modèle de Timoshenko, un très bon accord est trouvé avec notre modèle FOST. Nous avons proposé en plus des solutions obtenues avec le modèle de cisaillement du premier ordre, des simulations en considérant le modèle de cisaillement d'ordre élevé (HOST). Pour ce modèle on note des fréquences plus élevées avec en général de meilleurs facteurs de perte.

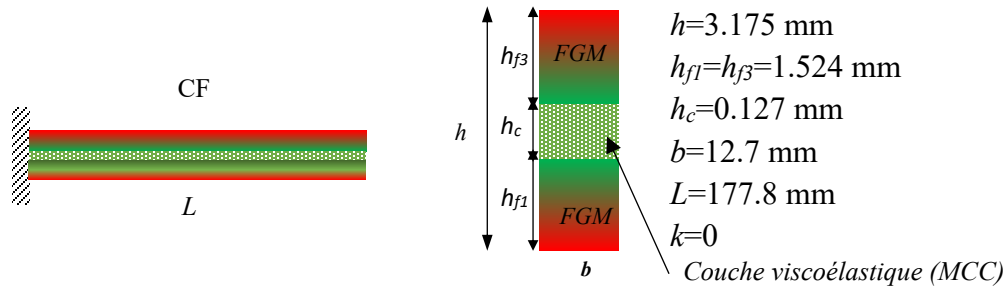


Figure 3. 9: Poutre sandwich encastree-libre et propriétés géométriques de la section

$\eta_c$	Présent (HOST)		Présent (FOST)		[6]	
	$f(\text{Hz})$	$\eta/\eta_c$	$f(\text{Hz})$	$\eta/\eta_c$	$f(\text{Hz})$	$\eta/\eta_c$
0.1	65.8	0.27	64,1	0,28	64,1	0,28
	303.5	0.26	296,7	0,24	296,7	0,24
	755.5	0.17	744,3	0,15	744,5	0,15
	1407.3	0.10	1395,0	0,09	1395,7	0,09
	2275.8	0.07	2262,9	0,06	2265,2	0,06
0.6	67.2	0.23	65.5	0.25	65.5	0.25
	306.3	0.25	299.1	0.23	299.2	0.23
	757.8	0.17	746.1	0.15	746.3	0.15
	1408.5	0.10	1396.0	0.09	1396.6	0.09
	2276.6	0.07	2263.6	0.06	2265.2	0,06
1	69.1	0.187	67.5	0.202	67.5	0.202
	310.7	0.229	303.0	0.218	303.1	0.218
	761.9	0.168	749.2	0.150	749.4	0.150
	1410.8	0.102	1397.7	0.088	1398.3	0.088
	2278.2	0.067	2264.7	0.057	2266.3	0.057
1.5	71.5	0.140	69.9	0.153	69.9	0.153
	317.6	0.206	309.1	0.197	309.1	0.198
	769.4	0.162	755.1	0.146	755.2	0.146
	1415	0.101	1400.8	0.087	1401.4	0.087
	2281.1	0.066	2266.9	0.057	2268.5	0.057

Tableau 3. 5: Poutre FGM/MCC/FGM encastree-libre: 5 premiers fréquences propres et facteurs de pertes

( $k=0$ )

Mode	Présent HOST		Présent FOST		[6]	
	$f(\text{Hz})$	$\eta$	$f(\text{Hz})$	$\eta$	$f(\text{Hz})$	$\eta$
1	67.00	0.16	65.23	0.17	65.23	0.17
2	333.99	0.32	323.24	0.30	323.30	0.30
3	875.73	0.35	846.58	0.33	846.82	0.33
4	1598.91	0.35	1554.49	0.32	1555.29	0.32
5	2548.99	0.34	2488.35	0.30	2490.27	0.30

Tableau 3. 6: Poutre FGM/3M ISD112/FGM encastée-libre: 5 premières fréquences propres et facteurs de perte ( $k=0$ )

Les fréquences propres et les facteurs de perte des 5 premiers modes sont également étudiés dans le cas du modèle de poutre bi-encastée FGM /PVB/FGM toujours en présence de matériaux isotropes sur les faces ( $k = 0$ ). Les propriétés géométriques de ce modèle de poutre sont présentées sur la Figure 3. 10. Les calculs sont effectués en considérant des modèles de cisaillement FOST et HOST. Les résultats obtenus avec notre modèle sont présentés dans le Tableau 3. 7. Pour ce modèle de poutre, les résultats de [6] sont également rapportés pour comparaison. On remarque que les propriétés amortissantes calculer avec notre code élément fini s'alignent parfaitement avec les résultats de la littérature en présence d'un modèle de cisaillement de premier ordre (FOST). De même que précédemment, le modèle HOST semble améliorer le comportement vibratoire de la structure avec des fréquences un peu plus élevées. Mais dans ce cas les facteurs de perte sont similaires pour les deux modèles de cisaillement. Cette étude valide bien le présent modèle en présence de matériaux isotropes sur la face de la poutre sandwich. Dans ce qui suit nous allons montrer l'efficacité de la présente approche pour le calcul des propriétés amortissantes de la poutre sandwich viscoélastique en présence de matériaux FGM purs.

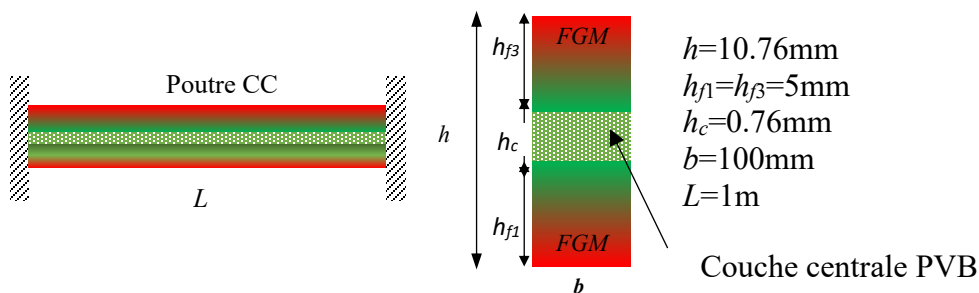


Figure 3. 10: Poutre bi-encastée et propriétés géométriques de la section



Modes	Présent (HOST)		Présent (FOST)		[6]	
	$f(\text{Hz})$	$\eta$	$f(\text{Hz})$	$\eta$	$f(\text{Hz})$	$\eta$
1	53.93	0.01	53.74	0.01	53.74	0.01
2	146.18	0.01	145.24	0.01	145.25	0.01
3	281.01	0.02	278.30	0.02	278.33	0.02
4	454.26	0.02	448.36	0.02	448.56	0.02
5	662.27	0.02	651.47	0.03	652.85	0.03

Tableau 3. 7: Poutre bi-encastée FGM/PVB/FGM: 5 premières fréquences propres et facteurs de perte ( $k=0$ )

### 3.3.2.2 Validation du modèle par des simulations numériques avec Abaqus

Pour la validation de l'approche actuelle dans le cas de couches FGM pures, nous avons considéré le modèle de poutre FGM/MCC/FGM pour  $\eta_c = 1,5$ . Les propriétés géométriques adoptées pour ce modèle de poutre sandwich sont présentées sur la Figure 3.11 . Dans la présente démarche de validation, deux conditions aux limites sont adoptées (CF et CC). L'analyse des vibrations libres se fait par le calcul des fréquences propres et des facteurs de perte des trois premiers modes pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Les résultats obtenus sont comparés aux résultats des simulations avec l'élément volumique d'Abaqus C3D20R. On rappelle que la modélisation quasi-exacte des matériaux FGM dans ce logiciel est possible avec les versions récentes (Abaqus 6.18 et 6.19). Mais cela nécessite au préalable un calcul des propriétés matériaux en différents points dans l'épaisseur de la structure avant leur introduction dans le logiciel par tabulation. La précision des résultats dépend du nombre de points de calculs considérés. En tout cette simulation avec le logiciel Abaqus nécessite un temps considérable. Avec ce logiciel, 25200 éléments, 117833 nœuds et 706998 DOF sont nécessaires pour la convergence de la solution alors que pour le modèle proposé, 360 DOF sont suffisants pour atteindre la convergence. Les résultats des simulations sont présentés dans le Tableau 3.8 dans le cas de la poutre console et dans le Tableau 3. 9 en présence de la poutre bi-encastée.

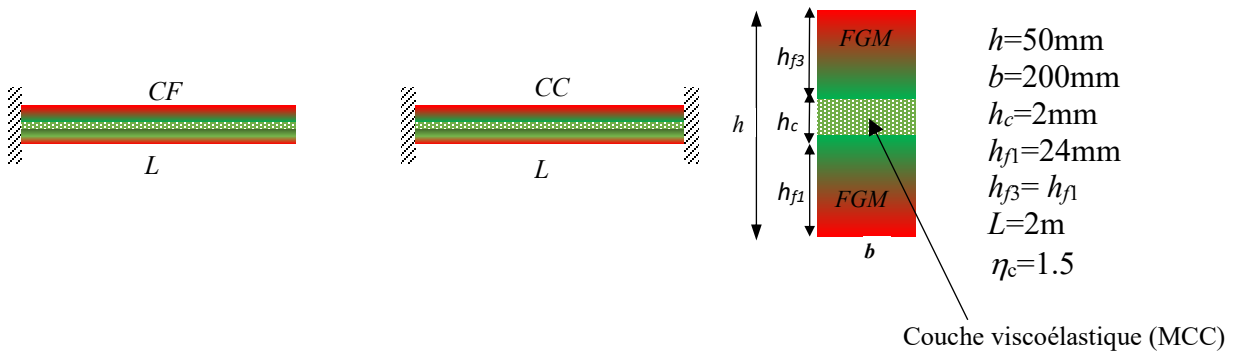


Figure 3.11: Poutres FGM/MCC/FGM en appui CF et CC. Propriétés de la section droite

$k$	Mode	$\eta_c = 1.5$ Présent (FOST)		C3D20R	
		$f(\text{Hz})$	$\eta/\eta_c$	$f(\text{Hz})$	$\eta/\eta_c$
0	1	7,872	0,201	7,450	0,302
	2	35,301	0,159	34,920	0,179
	3	89,355	0,092	89,530	0,093
1	1	10,747	0,301	10,610	0,343
	2	50,006	0,137	50,170	0,142
	3	130,667	0,057	131,890	0,057
2	1	10,793	0,293	10,670	0,321
	2	52,170	0,116	52,270	0,118
	3	138,207	0,046	139,160	0,045
3	1	10,807	0,281	10,690	0,304
	2	53,461	0,104	53,540	0,105
	3	142,640	0,040	143,470	0,039
4	1	10,828	0,272	10,710	0,291
	2	54,406	0,096	54,520	0,096
	3	145,798	0,036	146,730	0,035
5	1	10,854	0,264	10,740	0,281
	2	55,143	0,090	55,340	0,090
	3	148,218	0,033	149,360	0,033

Tableau 3.8: Poutre encastree-libre FGM/MCC/FGM: fréquence propre et facteur de perte des trois premiers modes suivant les valeurs de l'indice  $k$  pour  $\eta_c = 1.5$ .

$k$	Mode	Présent		C3D20R	
		$f(\text{Hz})$	$\eta/\eta_c$	$f(\text{Hz})$	$\eta/\eta_c$
0	1	32,81	0,11	33,07	0,11
	2	87,33	0,06	87,99	0,06
	3	168,56	0,04	169,83	0,04
1	1	47,69	0,07	48,42	0,07
	2	129,00	0,04	130,8	0,04
	3	250,76	0,02	254,1	0,02
2	1	50,38	0,06	51,01	0,05
	2	136,82	0,03	138,39	0,03
	3	266,45	0,02	269,37	0,02
3	1	51,96	0,05	52,56	0,05
	2	141,40	0,02	142,87	0,02
	3	275,62	0,01	278,35	0,01
4	1	53,09	0,04	53,72	0,04
	2	144,65	0,02	146,24	0,02
	3	282,11	0,01	285,06	0,01
5	1	53,96	0,04	54,67	0,04
	2	147,13	0,02	148,94	0,02
	3	287,06	0,01	290,44	0,01

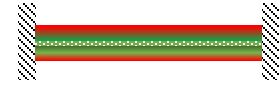


Tableau 3. 9: Poutre bi-encastée FGM/MCC/FGM: fréquence propre et facteur de perte des trois premiers modes suivant les valeurs de l'indice  $k$  pour  $\eta_c=1.5$ .

Par analyse de ces résultats, on note une augmentation de la fréquence de vibration avec les valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Ceci témoigne du gain en rigidité de la structure lorsque l'indice de puissance croît. Aussi, on remarque que nos résultats s'alignent bien avec les propriétés modales obtenues par simulations Abaqus. Afin d'avoir une connaissance plus générale du comportement vibratoire des poutres FGM viscoélastiques, les modes de vibration sont également cherchés et comparés aux modes de vibration obtenus par simulations Abaqus pour  $k=0$  et  $k=1$ . Dans le cas d'une poutre isotrope ( $k=0$ ), ces modes sont représentés sur la Figure 3. 12 et la Figure 3. 14 respectivement en présence d'une poutre console (CF) et d'une poutre bi-encastée (CC). En considérant des matériaux FGM purs sur les faces du sandwich ( $k=1$ ), des résultats similaires sont obtenus avec les poutres CF et CC (Figure 3. 13 et Figure 3. 15). Sur ces figures  $w_m$  désigne la déflexion maximale obtenue suivant l'axe longitudinal de la poutre.

On peut remarquer que nos résultats sont en bon accord avec les résultats des simulations Abaqus aussi bien dans le cas de la poutre console CF que dans le cas de la poutre bi-encastree CC. Par ces résultats le modèle proposé dans ce travail pour l'amortissement passif des poutres FGM est validé et son efficacité prouvée. Aussi, il est important de noter qu'avec le code élément fini proposé dans ce travail, la modélisation des matériaux FGM est simple et pratique comparée à l'utilisation du logiciel Abaqus pour les mêmes motifs. Par ailleurs, un important gain en temps de calcul est observé lorsqu'on compare les deux approches.

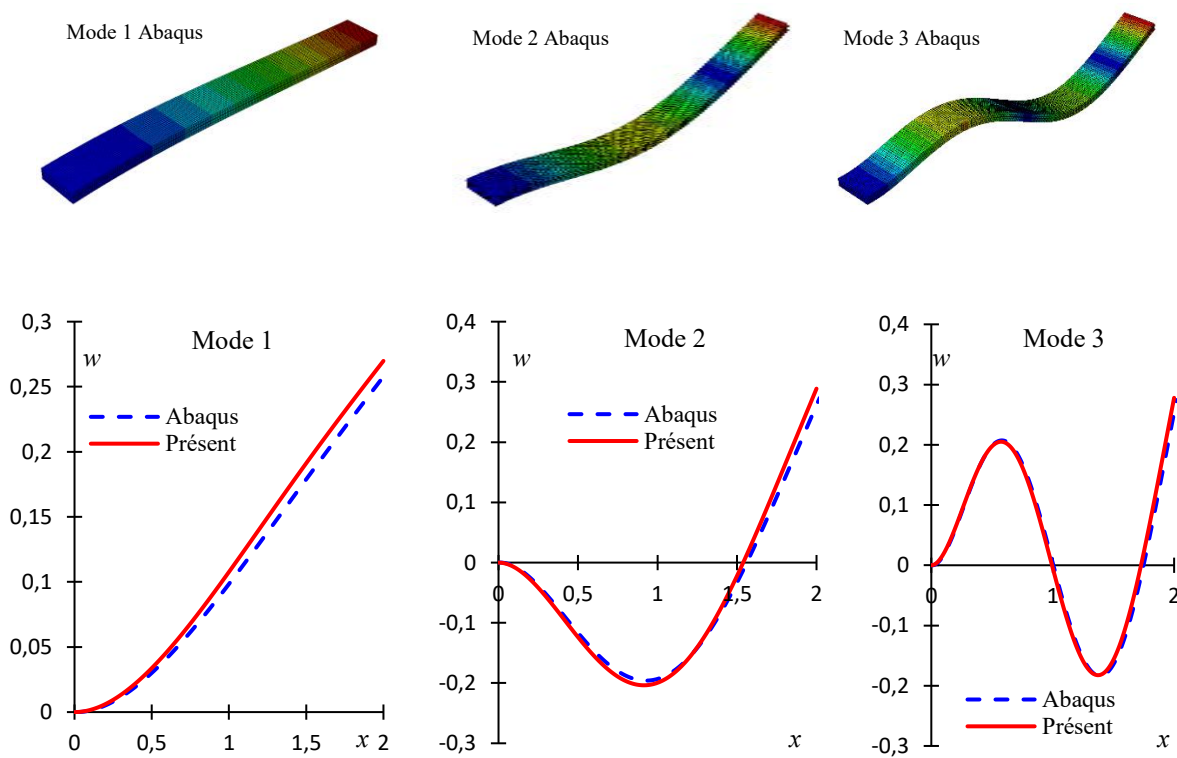


Figure 3. 12: Les trois premiers modes de vibration de la poutre encastree-libre FGM/MCC/FGM pour  $\eta_c=1.5$  et  $k=0$

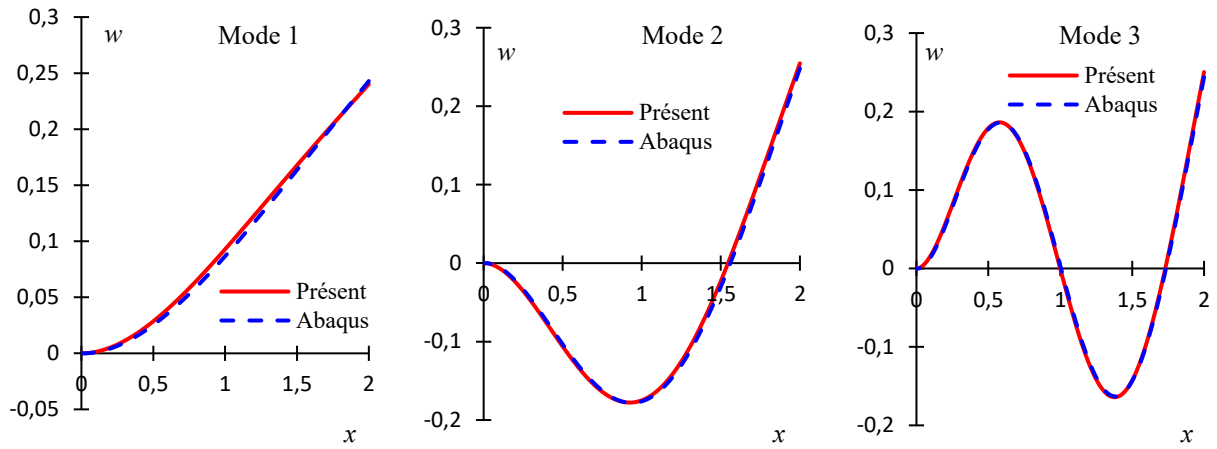


Figure 3. 13: Les trois premiers modes de vibration de la poutre encastree-libre FGM/MCC/FGM pour  $\eta_c=1.5$  et  $k=1$

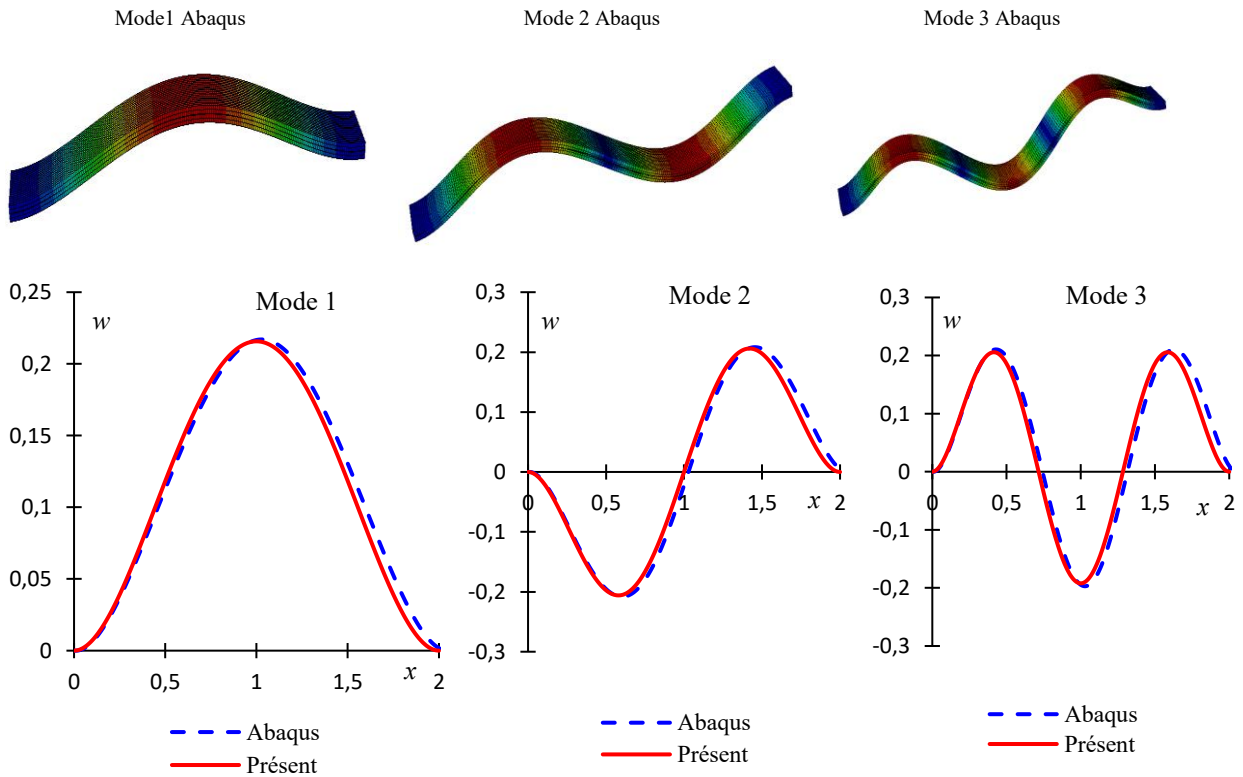


Figure 3. 14: Les trois premiers modes de vibration de la poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM pour  $\eta_c=1.5$  et  $k=0$

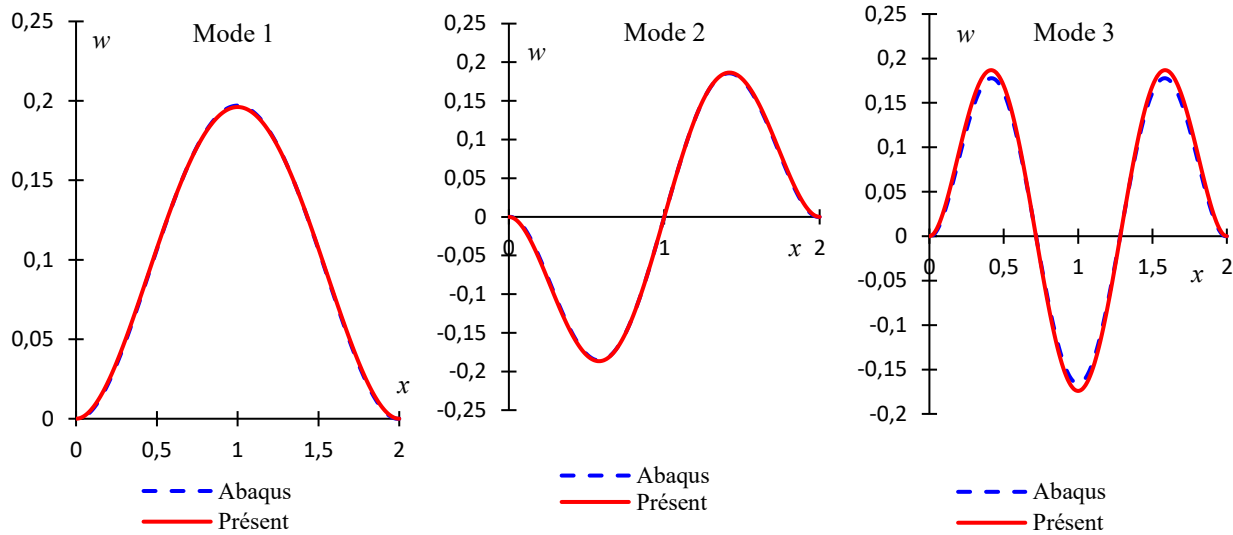


Figure 3. 15: Les trois premiers modes de vibration de la poutre bi-encastée FGM/MCC/FGM pour  $\eta_c=1.5$  et  $k=1$

L'effet de l'indice de puissance  $k$  sur les propriétés amortissantes est également étudié dans cette section. Les variations du facteur de perte suivant les valeurs de l'indice de puissance  $k$  sont cherchées dans le cas d'une poutre console et d'une poutre bi-encastée. Les résultats obtenus avec le modèle FGM/MCC/FGM, FGM/3MISD112/FGM et FGM/PVB/FGM sont représentés respectivement sur la Figure 3. 16, Figure 3. 17 et Figure 3. 18. En présence de la loi viscoélastique complexe constante MCC, une comparaison avec Abaqus est possible (Figure 3. 16). On note un bon accord entre les deux approches. En analysant ces figures, on peut affirmer que le facteur de perte varie non linéairement en fonction de l'indice de puissance  $k$ . Un cas particulier est observé avec le modèle de poutre console FGM/MCC/FGM en considérant le premier mode (Figure 3. 16). Sur cette figure on remarque que la courbe de variation du facteur de perte présente un maximum atteint pour une valeur de l'indice  $k$  proche de "1". Ce comportement particulier de la poutre est confirmé par les simulations avec l'élément C3D20R d'Abaqus. La recherche de cette valeur pour laquelle le pouvoir amortissant est maximal peut être bénéfique pour des besoins d'optimisation du pouvoir dissipatif des poutres en matériaux composites dans les applications industrielles. Sur ce point, les matériaux à gradient de propriétés offrent donc de meilleures solutions que les matériaux composites classiques. On peut également remarquer de par ces résultats que, l'amortissement des modes de basses fréquences qui est très limité avec les matériaux composites classiques semble possible en présence des matériaux à gradient de propriétés.

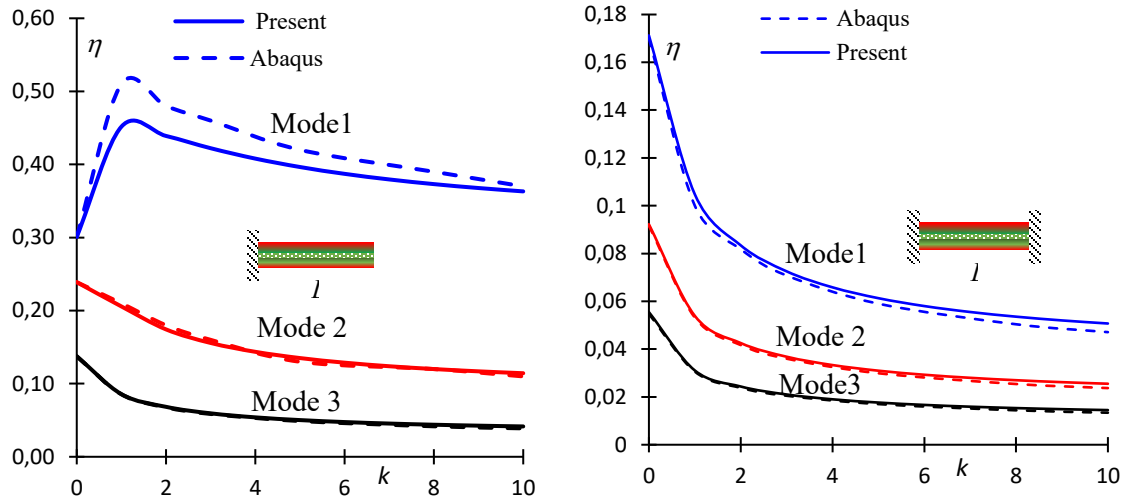


Figure 3. 16: Variations du facteur de perte en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour une poutre CF et CC du modèle FGM/MCC/FGM avec  $\eta_c=1.5$

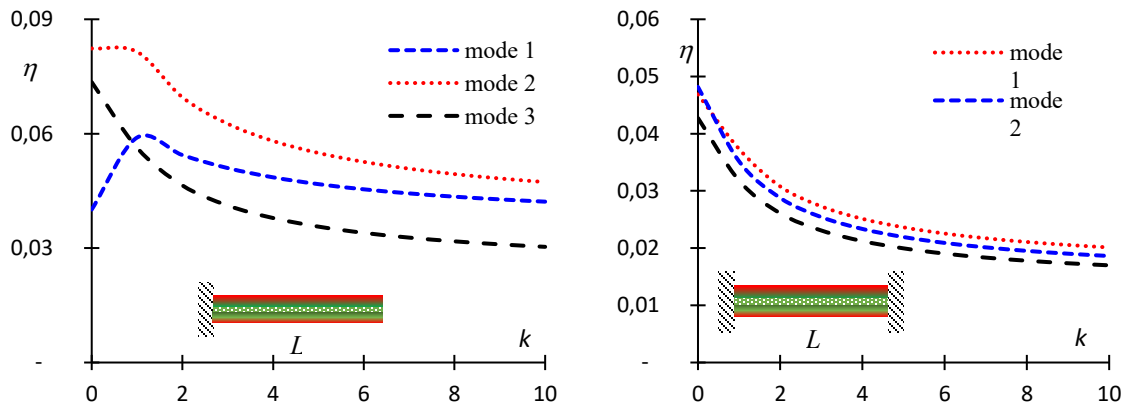


Figure 3. 17: Variations du facteur de perte en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour une poutre CF et CC du modèle FGM/3M ISD112/FGM

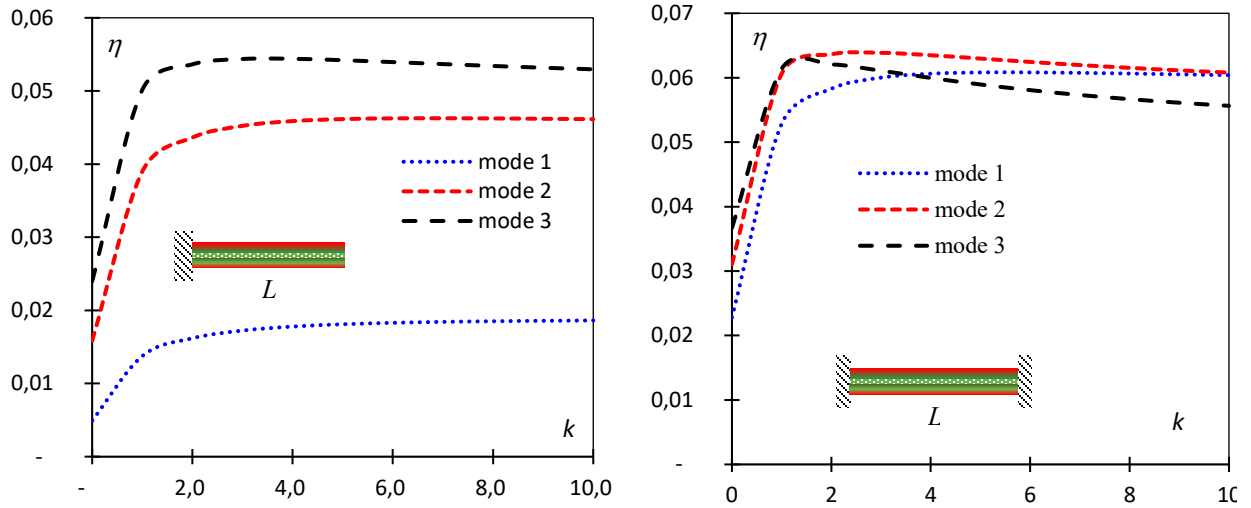


Figure 3. 18: Variations du facteur de perte en fonction de l'indice de puissance  $k$  pour une poutre CF et CC du modèle FGM/PVB/FGM



### **3.4 Conclusion**

Dans le présent travail, des modèles éléments finis de poutres 2D ont été proposés pour étudier le comportement et la vibration libre des poutres sandwichs FGM à âme viscoélastique. Dans la formulation mathématique, le cisaillement est négligé dans les couches extérieures du sandwich et pris en compte dans le cœur viscoélastique. De ce fait, la théorie classique de poutre est adoptée pour modéliser le déplacement dans les couches FGM alors que dans le cœur viscoélastique, le modèle de Timoshenko (FOST), de Reddy (HOST) et d'autres modèles de cisaillement d'ordre élevé sont considérés. L'équation gouvernant le mouvement de vibration dérive du principe d'Hamilton alors que celle relative à l'équilibre de la poutre est basée sur les conditions de stationnarité du potentiel. Pour modéliser le comportement viscoélastique du cœur, trois lois de comportement sont étudiées: une loi complexe constante et deux lois dépendantes de la fréquence de vibration. En présence de la loi constante, le problème obtenu est linéaire et peut être résolu par des méthodes de résolutions classiques utilisées pour des problèmes de valeurs propres et de vecteurs propres. En présence du comportement viscoélastique dépendant de la fréquence, le problème des valeurs propres obtenu est non linéaire et nécessite une méthode numérique rigoureuse et robuste dans la recherche de solutions. Avec l'approche proposée dans ce travail, des solutions au problème sont possibles à l'aide de la technique d'homotopie couplée à la méthode asymptotique numérique (MAN) [66] et à la technique de différenciation automatique [67].

Les propriétés amortissantes de la poutre sont investiguées à travers le calcul de la fréquence propre et du facteur de perte associés aux modes de vibrations. L'efficacité et la précision des modèles proposés sont prouvées par des comparaisons à des solutions de référence disponibles dans la littérature en présence de matériaux isotropes. Peu de travaux sont réalisés dans le cadre des poutres sandwich FGM viscoélastiques. Dans les travaux existants sur le sujet, la dépendance en fréquence des propriétés viscoélastiques n'est pas prise en compte dans les applications. Le modèle complexe constant est de ce fait le plus utilisé dans les exemples pour des raisons de simplicité. Or ce modèle n'est valable que dans le cas des structures à amortissement faible. Notons que dans le domaine industriel l'amélioration de la capacité d'amortissement des structures est nécessaire pour contrôler les instabilités vibratoires et réduire les bruits. De ce fait, les matériaux viscoélastiques souvent utilisés dans la pratique sont à haut pouvoir amortissant et donc ne pouvant être modélisés que par des modèles incluant la dépendance en fréquence dans le comportement viscoélastique.

Le modèle proposé dans ce travail permet de traiter des cas réels de comportement viscoélastique et les résultats obtenus sont validés par des simulations avec le logiciel Abaqus. La modélisation des matériaux FGM avec ce logiciel est complexe et très coûteuse en temps de calcul comparée à l'approche actuelle. Dans les applications, plusieurs conditions aux limites sont possibles. En vibration libre, il est prouvé que les propriétés amortissantes de la poutre FGM dépendent non linéairement de l'indice de puissance qui n'est autre que le facteur modélisant la variation continue des propriétés matériaux. Par ailleurs, il est démontré que le facteur de perte structurelle a un impact non seulement sur le comportement dynamique mais aussi sur le comportement statique. On rappelle que dans la littérature l'effet de ce paramètre sur le comportement est souvent négligé. Aussi, par l'étude des contraintes et déformations on a souligné l'avantage d'utiliser les FGMs pour minimiser la présence de contraintes résiduelles dans les composites. Ainsi, les infrastructures sont protégées contre les problèmes de délaminage et de rupture brusque, ce qui améliore par conséquent leur durée de vie et garantit la sécurité des usagers.

# Chapitre 4: Analyse de la vibration forcée

## Sommaire

---

4.1	Introduction .....	147
4.2	Formulation du problème de vibration forcée .....	147
4.3	Les lois viscoélastiques et résolution du problème .....	150
4.4	Courbes de réponses. ....	152
4.4.1	Modèle de poutre sandwich FGM/MCC/FGM .....	153
4.4.2	Modèle de poutre sandwich FGM/3M ISD112/FGM.....	159
4.4.3	Modèle de poutre sandwich FGM/PVB/FGM .....	164
4.5	Conclusion.....	169

---

## 4.1 Introduction

Dans les études précédentes, l'analyse des vibrations est investiguée par la recherche des modes de vibrations et des propriétés amortissantes de la structure étudiée. Mais il faut savoir aussi qu'en plus de ces informations, l'ingénieur en calcul des structures s'intéresse également aux déplacements de la structure lorsqu'elle est soumise à des chargements extérieurs. Pendant le mouvement de vibrations de la structure, l'amplitude des déplacements peut atteindre une valeur critique du point de vue de la stabilité de la structure. Ceci se produit lorsque la fréquence des vibrations atteint la fréquence propre de la structure. Pour cette valeur de l'amplitude des vibrations, le risque d'un effondrement de la structure ou d'une rupture brusque devient imminent. En connaissance de ces différentes informations, les ingénieurs dimensionnent la structure de telle sorte qu'en service, ses fréquences de vibrations sous l'effet des chargements extérieurs n'atteignent jamais ses fréquences propres. Généralement, le dimensionnement proposé est tel que les fréquences propres de la structure se retrouvent plus grandes que ses fréquences de vibrations prédictives sous l'action des forces extérieures. Cette analyse nous amène, dans cette partie du travail, à nous intéresser à l'étude de la vibration forcée de la poutre sandwich FGM. Dans cette étude, le déplacement vertical de la poutre sandwich FGM viscoélastique, sous chargements extérieurs, sera cherché en considérant différentes lois viscoélastiques. Basé sur une formulation élément fini, le modèle proposé dans ce travail est implémenté sous un code Matlab et est capable de calculer les déplacements des structures sous différents types de chargements et différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus par simulations numériques permettront de mettre en évidence l'influence de l'indice de puissance des FGMs et des conditions aux limites sur les propriétés modales et sur le pouvoir dissipatif des structures sandwich FGM viscoélastiques.

## 4.2 Formulation du problème de vibration forcée

On considère dans cette étude, la poutre sandwich FGM à âme viscoélastique de la Figure 4. 1. La formulation du problème de vibration forcée abordée dans cette partie, s'appuie sur celle proposée dans le chapitre 3. Le modèle cinématique est toujours de type zig-zag avec la théorie de Euler Bernoulli adoptée pour modéliser le mouvement des couches externes du sandwich et les théories de cisaillement considérées pour la couche viscoélastique située au cœur de la poutre sandwich.

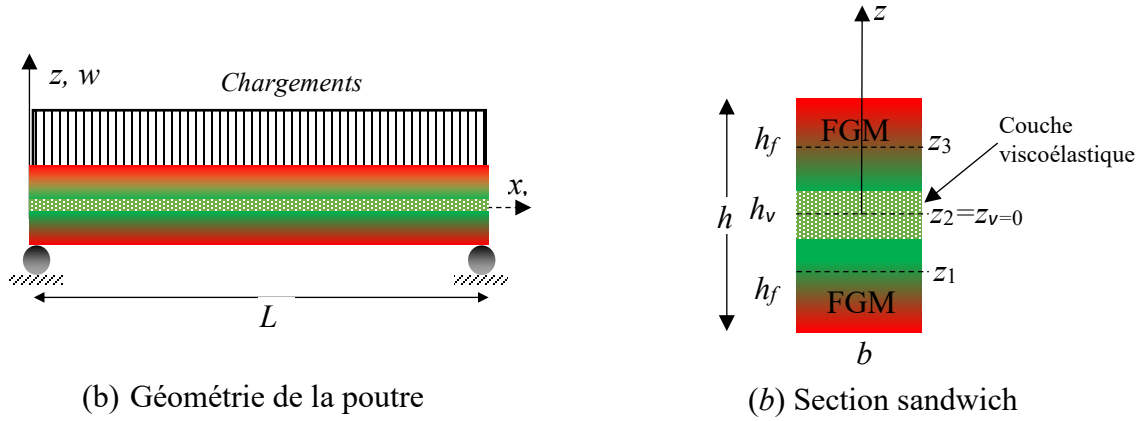


Figure 4. 1: Poutre sandwich FGM viscoélastique 2D et section sandwich

La formulation mathématique du problème de vibration forcée de la poutre sandwich FGM viscoélastique dérive du principe d'Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T - W) dt = 0, \quad (4.1)$$

où  $U$ ,  $T$  et  $W$  représentent respectivement l'énergie de déformation, l'énergie cinétique et le travail des forces extérieures. Les solutions de ce problème ainsi que les chargements appliqués sont supposés harmoniques. Après des processus d'intégration, la formulation du problème de vibration forcée de la poutre sandwich à gradient de propriétés et à cœur viscoélastique aboutit à un problème de la forme :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_L \left( \{\delta\gamma\}^t ([D_0] + E^*(\omega)[D_v]) \{\gamma\} - \omega^2 \{\delta q\}^t [M_e] \{q\} \right) dx - \int_L \{\delta e\}^t \{f(x,t)\} dx \right) dt = 0, \quad (4.2)$$

$$\forall \{\delta q\}, \{\delta\gamma\}, \{\delta e\}.$$

Les matrices de comportement  $[D_0]$  et  $[D_v]$  ainsi que la matrice de masse élémentaire  $[M_e]$  sont définies dans le chapitre précédent.  $E^*(\omega)$  représente le module d'Young complexe fonction de la fréquence de vibration. Les vecteurs de déplacement et de gradient de déplacement  $\{q\}$ ,  $\{e\}$  et  $\{\gamma\}$  sont donnés dans l'équation (3.14). Le vecteur force harmonique  $\{f(x, t)\}$  est représenté par trois composantes : une composante axiale  $f_{xe}(x, t)$  une composante verticale  $f_{ze}(x, t)$  et un moment de flexion  $m_{ye}$ . Son expression vectorielle est donnée par :

$$\{f(x,t)\}^t = \{f_{xe}(x,t) \quad f_{ze}(x,t) \quad m_{ye}(x,t)\}. \quad (4.3)$$

Ainsi, l'équation de vibration forcée de la poutre sandwich FGM viscoélastique est dérivée en milieu continu en s'appuyant sur le principe d'Hamilton. Pour modéliser le comportement du cœur viscoélastique, plusieurs théories de cisaillement peuvent être adoptées. Comme proposer dans le modèle développé au chapitre 3, la déformation en cisaillement de la couche viscoélastique est prise en compte par introduction d'une fonction analytique  $f(z)$  dont l'expression varie suivant différentes théories de cisaillement (Tableau 1.1). Le système obtenu (4.2) présente une non linéarité matérielle due à la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. La prise en compte de cette non linéarité dans la résolution du problème est souvent difficile. Dans ce travail l'approche élément fini est adoptée pour la recherche de solutions au problème. On considère à cet effet un élément fini bidimensionnel à deux nœuds. Chaque nœud de cet élément possède 4 degrés de liberté correspondant à deux déplacements de translations ( déplacement axial  $u$  et vertical  $w$  ) et à deux rotations (rotation de flexion  $w'$  et de cisaillement  $\phi$ ). Dans le processus de discrétisation, la mobilité permise à chaque élément de poutre s'identifie au vecteur déplacement nodal défini par le vecteur  $\{r\}_e$  dont l'expression est la suivante.

$$\{r\}_e^t = \{u_1 \quad w_1 \quad w_1' \quad \phi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad w_2' \quad \phi_2\}, \quad (4.4a)$$

où ( $'$ ) désigne la dérivée suivant  $x$  et les indices 1 et 2, les deux nœuds de l'élément fini.

Par l'utilisation des fonctions de forme linéaires et cubiques de type Hermite, les différents vecteurs de déplacements et de gradient de déplacement intervenant dans le système d'équations (4.2) sont exprimés en fonction du vecteur nodal élémentaire  $\{r\}_e$  :

$$\{q\} = [P(\xi)]\{r\}, \quad \{e\} = [V(\xi)]\{r\}, \quad \{\gamma\} = [g(\xi)]\{r\}, \quad (4.4b)$$

Les expressions des matrices  $P(\xi)$ ,  $V(\xi)$  et  $g(\xi)$  à partir des fonctions de forme et de leurs gradients sont données à l'annexe A. Après intégration, l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme réduite suivante :

$$([K_0] + E(\omega)[K_v] - \omega^2 [M])\{d\} = \{F\}, \quad (4.5)$$

Les matrices et vecteurs intervenant dans ce système sont exprimés en fonction des matrices de comportement et des matrices de fonctions de forme et de gradients de fonctions de forme par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 [K_0] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [g(\xi)]' ([D_0] + E_0 [D_v]) [g(\xi)] \right) d\xi, \\
 [K_v] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [g(\xi)]' [D_v] [g(\xi)] \right) d\xi, \\
 [M] &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [p(\xi)]' [M_e] [p(\xi)] \right) d\xi = 0, \\
 \{F\} &= \sum_e \int_{-1}^1 \frac{l}{2} \left( [V(\xi)]' \{f(\xi)\} \right) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{4.6a-d}$$

Dans ces équations,  $[K_0]$  représente la matrice de rigidité correspondant à l'élasticité retardée du matériau,  $[K_v]$  la partie visqueuse de la matrice de rigidité globale,  $[M]$  la matrice de masse et  $\{F\}$  le vecteur force. Le vecteur  $\{d\}$  est le vecteur déplacement regroupant l'ensemble des degrés de liberté aux nœuds. Les expressions des différentes matrices et vecteurs intervenant dans les équations (4.6) peuvent être retrouvées dans le chapitre précédent. On rappelle que ces différentes grandeurs mathématiques sont calculées numériquement. A cet effet l'intégration de Gauss est adoptée. Afin de contourner le problème de convergence appelé verrouillage numérique, une intégration totale est adoptée pour calculer la matrice de rigidité de flexion pure  $[K_0]$  alors que, pour le calcul de la matrice de rigidité viscoélastique  $[K_v]$  une intégration réduite est adoptée.

Comme on peut le remarquer dans l'équation du mouvement (4.5), le module d'Young  $E(\omega)$  est fonction de la fréquence de vibration  $\omega$ . Dans ce travail sa définition est proposée suivant trois différentes lois viscoélastiques.

### 4.3 Les lois viscoélastiques et résolution du problème

Pour l'étude proposée dans ce chapitre, le calcul des amplitudes de vibration est effectué en considérant les trois différentes lois viscoélastiques présentées dans le chapitre 3. On rappelle que ces lois décrivent non seulement le comportement des matériaux viscoélastiques à faible amortissement mais aussi celui des matériaux viscoélastiques à haut pouvoir amortissant. Aussi, elles ont fait déjà l'objet de plusieurs études ([3], [6]) dans lesquelles elles sont sollicitées pour modéliser le comportement viscoélastique des structures de poutres et plaques pour un contrôle des vibrations par amortissement passif.

En considérant le modèle complexe constant MCC avec un facteur de perte structural  $\eta_c$ , le comportement viscoélastique est indépendant de la fréquence de vibration et le système d'équations de vibrations forcées obtenu dans ce cas peut se mettre sous la forme :

$$\left( [K_0] + iE_0\eta_c [K_v] - \omega^2 [M] \right) \{d\} = \{F\}, \quad (4.7)$$

En présence des modèles viscoélastiques dépendants de la fréquence de vibrations (modèles 3M ISD112 et PVB), le système d'équations à résoudre peut s'écrire comme suit:

$$\left( [K_0] + E(\omega)[K_v] - \omega^2 [M] \right) \{d\} = \{F\}, \quad (4.8)$$

Dans les deux cas, le problème de vibration forcée est un problème de valeurs propres avec second membre. On peut aussi remarquer que contrairement au cas du modèle MCC, l'équation (4.8) présente une matrice de rigidité globale dépendante de la fréquence de vibration. Pour le modèle proposé dans ce chapitre la recherche des solutions aux problèmes de vibrations forcées est possible en adoptant la méthode des bandes passantes. Cette méthode de résolution décrite dans le chapitre 1 consiste à chercher la réponse fréquentielle de la structure par excitation des modes de vibrations dans une plage de fréquences donnée. Pour chaque fréquence  $\omega$  imposée, le problème à résoudre se retrouve sous la forme :

$$[K] \{d\} = \{F\}, \quad (4.9)$$

Avec  $[K]$  la matrice de rigidité globale correspondant à  $[K] = [K_0] + iE_0\eta_c[K_v]$  dans le cas du modèle complexe constant et à  $[K] = [K_0] + E(\omega)[K_v]$  en présence des modèles non linéaires 3M ISD112 et PVB.

Par la suite, la recherche des solutions du problème (4.9) peut se faire par inversion de la matrice de rigidité en s'aidant des fonctions spécifiques intégrées dans les langages de programmations. La réponse de la structure à l'excitation harmonique est alors obtenue et représentée par les couples de points  $(\omega, \{d\})$ . L'ensemble de ces points dans le plan représente ce que l'on appelle communément la courbe de réponse de la structure. Cette courbe traduit effectivement le comportement de la structure en réponse aux excitations appliquées. Une fois la courbe de réponse obtenue, on peut déduire les propriétés modales (fréquence propre et facteur de perte) correspondant au mode de vibration excité, par simple lecture graphique. La fréquence propre de vibrations de la structure est la fréquence correspondante sur la courbe à la valeur maximale du déplacement.



De là, on peut déterminer le facteur de perte de la structure en cherchant les limites de la bande passante qui ne sont autres que les fréquences imposées pour obtenir un déplacement égale au quotient du déplacement maximal par  $\sqrt{2}$ . Dans les applications, différentes conditions aux limites et différentes propriétés géométriques sont possibles. Les résultats obtenus en appliquant cette méthode de résolutions sont présentés dans la section suivante pour les différentes lois viscoélastiques présentées précédemment.

#### 4.4 Courbes de réponses.

On considère dans les applications les trois modèles de poutres sandwich FGM à âme viscoélastique étudiés dans le chapitre 3 à savoir : les modèles FGM/MCC/FGM, FGM/3M ISD112/FGM et FGM/PVB/FGM. Les propriétés matériaux de ses modèles sont les mêmes que celles représentées dans les tableaux 3.2, 3.3 et 3.4 du précédent chapitre. Pour cette étude, différentes conditions aux limites sont possibles et plusieurs types de chargements peuvent être appliqués. Dans les exemples proposés, on traite le cas d'une poutre console, d'une poutre bi-encastée et d'une poutre bi-articulée. Les propriétés géométriques de ces différentes poutres et de leurs sections droites sont présentées sur la Figure 4. 2. Pour les simulations numériques avec le modèle 2D que nous proposons dans ce travail, 40 éléments (soit 164ddl) ont suffi pour atteindre la convergence. On rappelle que la modélisation des matériaux à gradient de propriétés avec les logiciels commerciaux CAO n'est possible qu'avec l'élément volume. Or l'utilisation du modèle 3D engendre beaucoup de degré de liberté ce qui le rend plus couteux en temps de calculs sans compter le temps nécessaire pour générer les propriétés matériaux du FGM sous forme tabulée. Ceci souligne l'intérêt du présent modèle réduit 2 D pour la recherche des amplitudes de vibrations des structures sandwich FGM viscoélastiques.

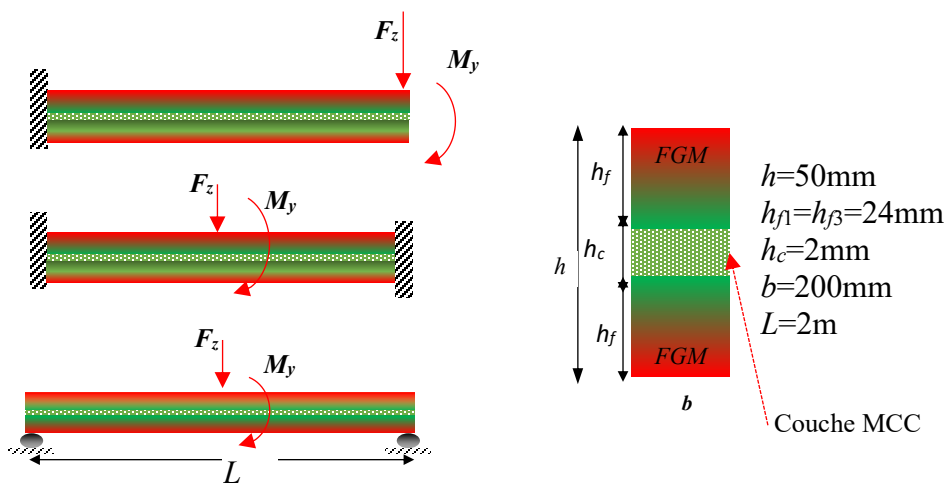


Figure 4. 2 Poutres sandwichs et section multicouche viscoélastique

Dans les applications les réponses de la structure en vibration forcée sont cherchées en termes de déplacements verticaux de la poutre ( $w$  en mm) sous l'effet d'excitations extérieures. Ces réponses dépendent du mode d'intérêt excité. En effet, pour exciter un mode particulier correspondant à la réponse de la structure, il suffit d'identifier la composante de la force excitatrice à laquelle doit être affectée une valeur non nulle. Dans le cas d'étude présent, trois différents chargements sont appliqués: deux forces verticales  $F_{z1}$  et  $F_{z2}$  telles que  $F_{z1}=10 \times F_{z2}=10\text{kN}$  et un moment de flexion  $M_y=10\text{kN.m}$  (Figure 4. 2). Le code élément fini développé pour calculer les réponses de la structure est adapté aussi bien pour la recherche des modes de faibles fréquences que pour la recherche des modes de fréquences élevées. Dans les exemples suivants, seuls les trois premiers modes sont cherchés et le modèle de cisaillement considéré dans la modélisation du cœur de la poutre sandwich est celui du premier ordre (FOST).

#### 4.4.1 Modèle de poutre sandwich FGM/MCC/FGM

Dans cette application, on considère le modèle complexe constant FGM/MCC/FGM pour un facteur de perte du cœur viscoélastique  $\eta_c=1.5$ . On applique dans un premier temps la force excitatrice ponctuelle  $F_{z1}$  au milieu de la poutre bi-encastée à l'abscisse  $x=L/2$ . La réponse de la poutre sous l'effet de cette excitation extérieure, est cherchée pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  (0, 0.05, 0.1, 1, 5) et est présentée sur la Figure 4. 3. Le calcul des fréquences propres nous permet de constater que seul le premier mode et le troisième mode de vibrations sont visibles sur ces courbes de réponses. On rappelle que sur ces dernières, les fréquences propres de la poutre sont celles qui correspondent aux maximums de déplacements ( $w_{\max}$ ).

Pour la recherche du deuxième mode de vibrations, on soumet la poutre au moment de flexion exciteur  $M_y$  appliqué à mi-longueur de la poutre. Les réponses de la structure dans ce cas sont présentées sur la Figure 4. 4. Les trois premiers modes obtenus sont ensuite regroupés sur la Figure 4. 5 pour des raisons de comparaisons. Pour ces calculs, les fréquences d'excitations varient dans l'intervalle [0 300Hz]. On peut remarquer que l'amplitude de la réponse de la structure pour une même force excitatrice varie suivant les valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Aussi, on note que cette variation n'est pas monotone. En effet pour les trois premiers modes excités, le modèle le moins amortissant (amplitude de réponse la plus grande) est le modèle isotrope ( $k=0$ ) et en présence des matériaux FGM ( $k > 0$ ) l'amplitude des vibrations diminue mais pas de façon décroissante suivant les valeurs de l'indice  $k$  comme on pourrait s'y attendre.

Plutôt on remarque que parmi les réponses obtenues en considérant les valeurs de l'indice de puissance  $k=0.05$ ,  $0.1$ ,  $1$  et  $5$ , la plus faible amplitude est observée pour  $k=1$ . On rappelle que cette particularité était déjà soulignée dans le chapitre 3 où le pouvoir amortissant de la structure a été étudié suivant les valeurs de l'indice de puissance  $k$  par calcul des facteurs de perte pour chaque mode de vibrations. Dans cette étude, on avait remarqué que la structure présentait une meilleure capacité d'amortissement pour une valeur de l'indice de puissance  $k$  voisine de  $1$ . La présente étude dédiée aux calculs des amplitudes de vibrations de la poutre FGM viscoélastique vient une fois encore prouver qu'il existe des valeurs de l'indice de puissance  $k$  pour lesquelles la structure devient hautement amortissante.

Dans le cas de la poutre console, l'application de la force  $F_{z2}$  à l'extrémité libre de la poutre ( $x=L$ ) permet de faire ressortir simultanément les trois premiers modes de vibrations contrairement au cas précédent où il a été nécessaire d'appliquer un moment de flexion pour exciter le deuxième mode de vibrations. Les courbes de réponses obtenues dans ce cas sont représentées sur la Figure 4. 6. Des courbes présentant les trois premiers modes sont alors déduites et représentées sur Figure 4. 7. Ces réponses sont également cherchées pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  données précédemment. Les mêmes remarques sont valables dans ce cas et notamment celles des amplitudes extrêmes obtenues en présence du modèle isotrope  $k=0$  (la plus grande amplitude) et du modèle FGM pour  $k=1$  (la plus faible amplitude).

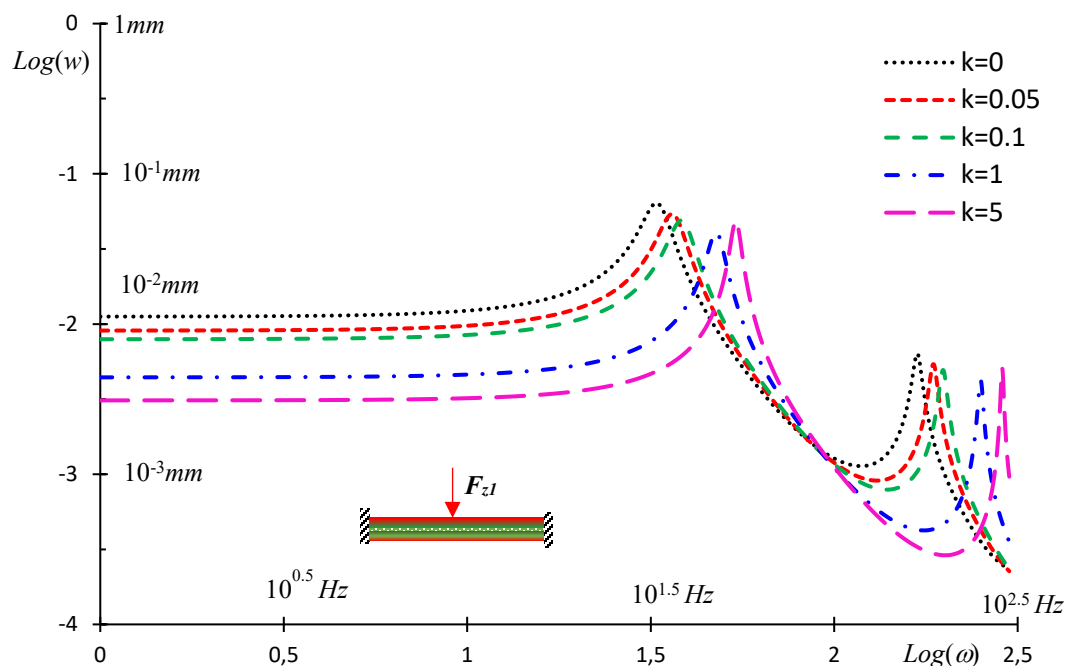


Figure 4. 3: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z1}$  en  $x=L/2$  pour  $\eta_c=1.5$

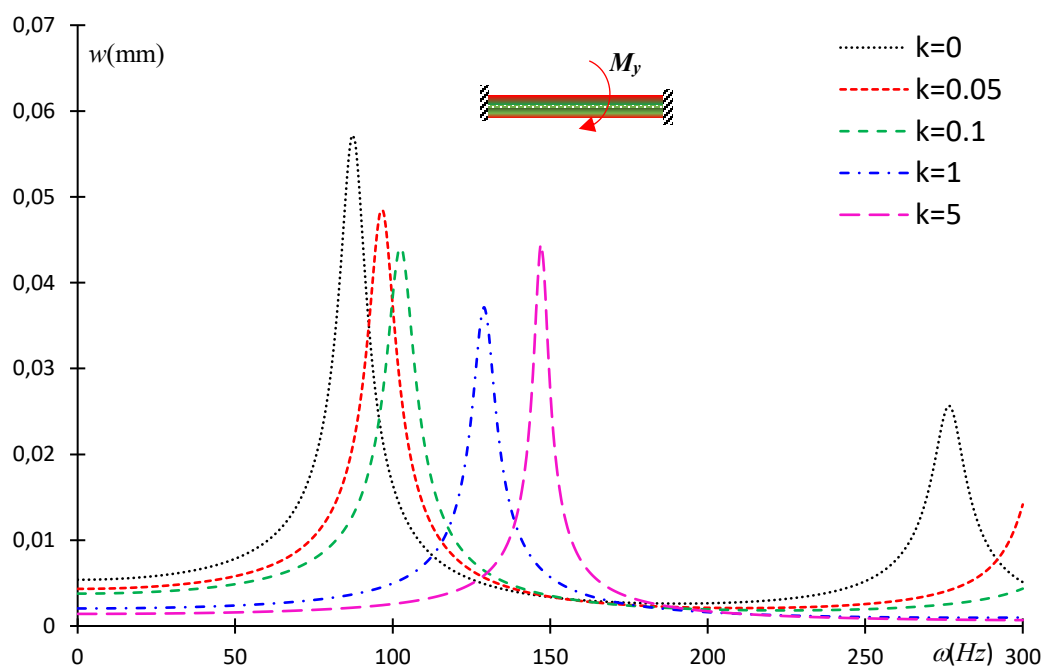


Figure 4. 4 : Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastree FGM/MCC/FGM soumise au moment de flexion  $M_y$  en  $x=L/2$  pour  $\eta_c=1.5$

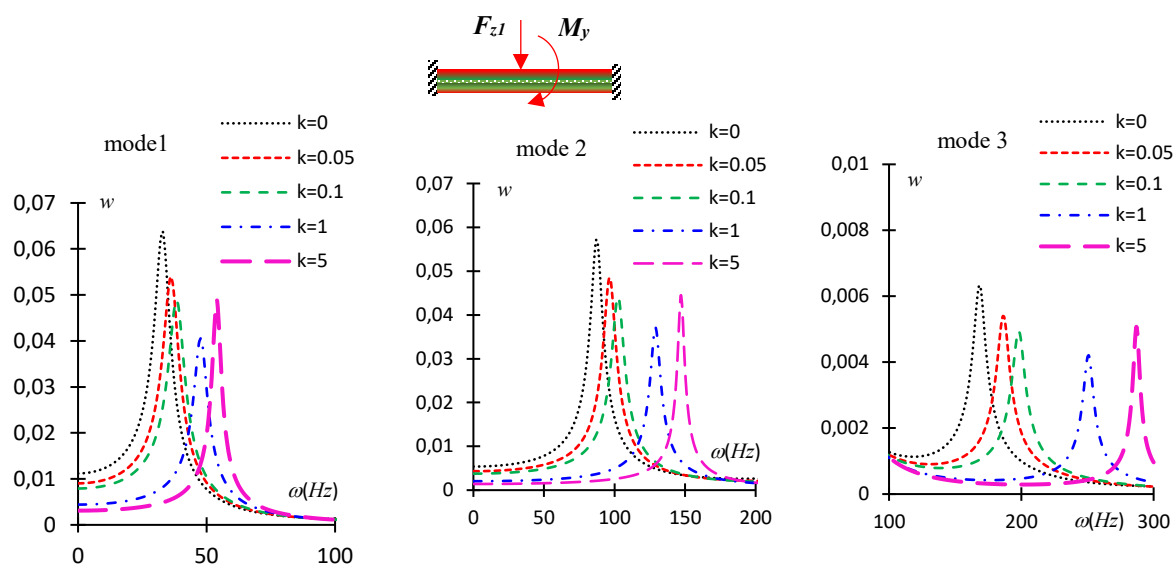


Figure 4. 5: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-encastée FGM/MCC/FGM pour  $\eta c = 1.5$  sous l'action de la force  $F_{z1}$  et du moment  $M_y$  en  $x=L/2$

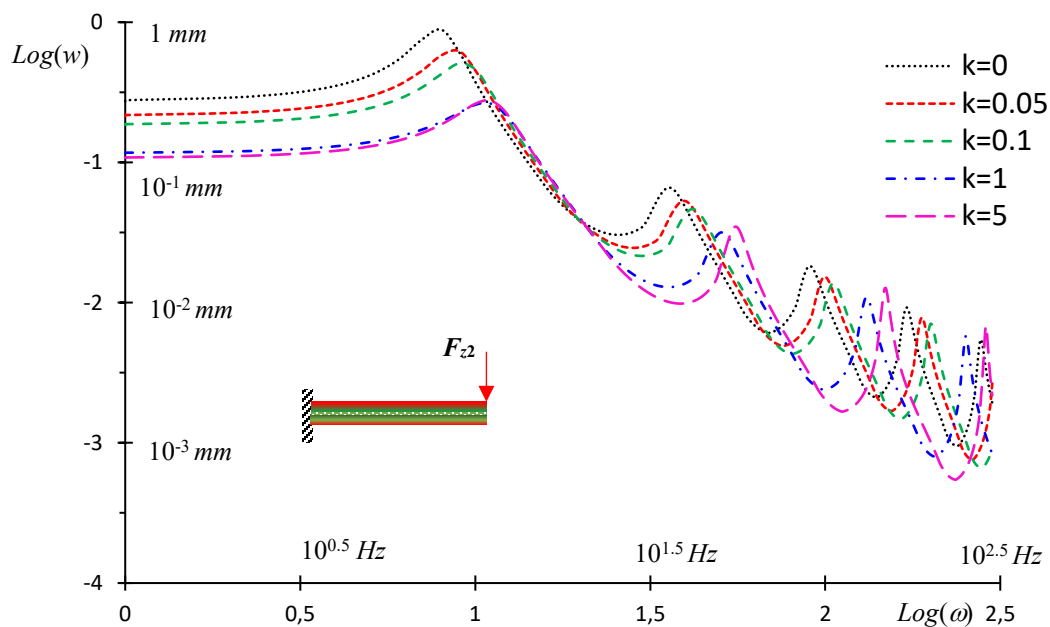


Figure 4. 6: Courbes de réponses du modèle de poutre console FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z2}$  en  $x=L$  pour  $\eta c = 1.5$

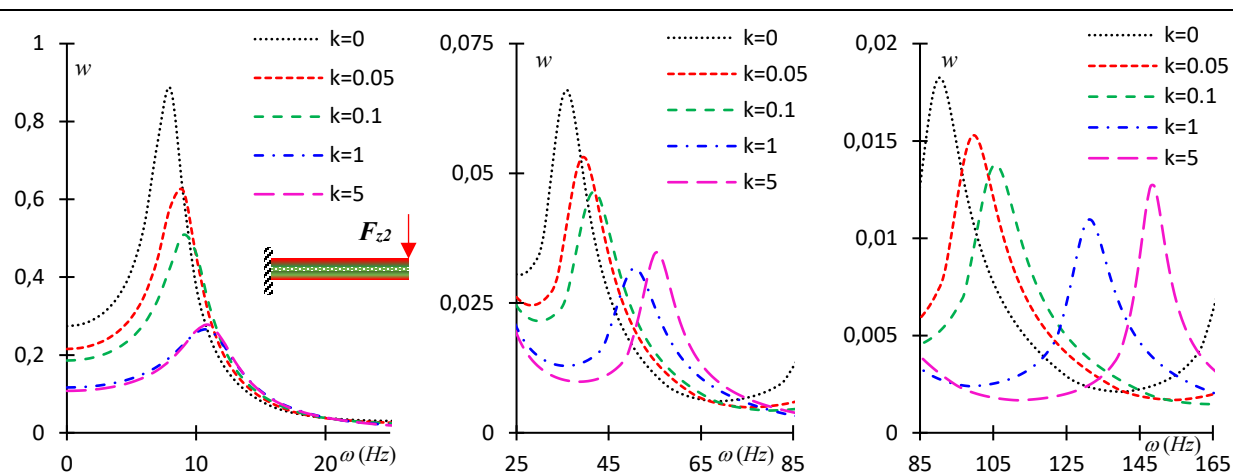


Figure 4. 7: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre console FGM/MCC/FGM pour  $\eta c= 1.5$  sous l'action de la force  $F_{z2}$  en  $x=L$

Enfin, pour le modèle FGM/MCC/FGM, l'appui bi-articulé est aussi considéré dans les applications. Pour ce cas, on applique d'abord la force concentrée  $F_{z1}$  à l'abscisse  $x=L/2$  pour exciter les trois premiers modes. Ces calculs sont effectués pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  considérées dans cette section. La réponse de la structure soumise à cette excitation est représentée sur la Figure 4. 8. On y observe la présence du premier mode et du troisième mode. Le deuxième mode est absent. Pour l'exciter on applique le moment de flexion  $M_y$ . La réponse de la structure est dans ce cas représentée sur la Figure 4. 9. Ensuite, on représente séparément les trois premiers modes de vibration obtenus sous l'excitation de la forces  $F_{z1}$  et du moment  $M_y$  sur Figure 4. 10. En ce qui concerne les amplitudes de vibrations extrêmes, comme dans le cas de la poutre bi-encastée et de la poutre console, l'amplitude maximale est obtenue en présence de la poutre isotrope ( $k=0$ ) et la minimale est obtenue en présence d'une poutre FGM avec  $k=1$ .

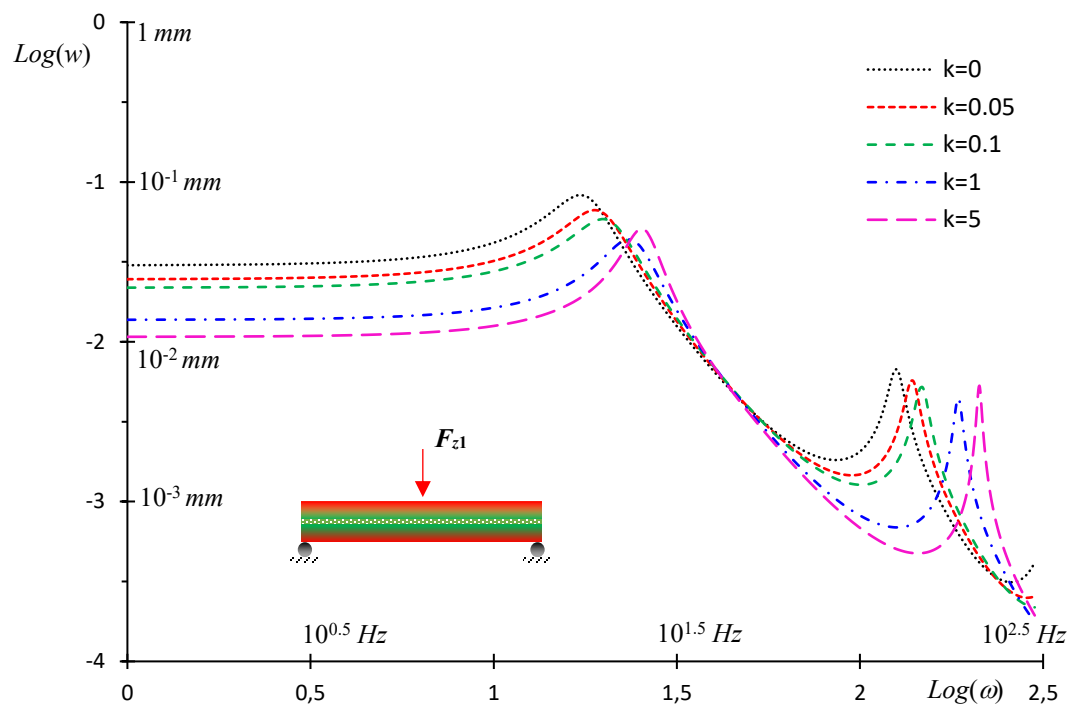


Figure 4. 8: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-articulée FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z1}$  en  $x=L/2$  pour  $\eta_c = 1.5$

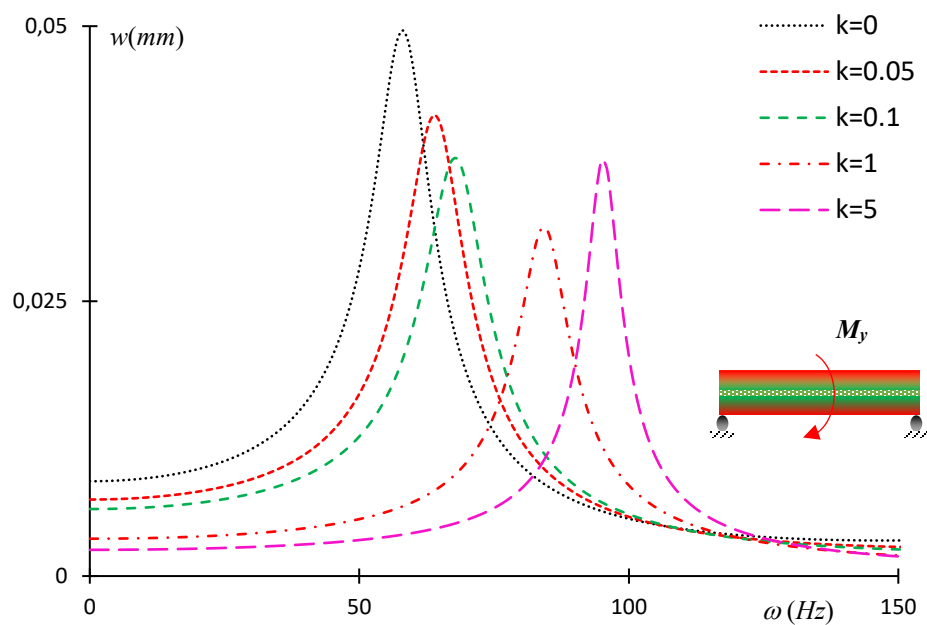


Figure 4. 9: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-articulée FGM/MCC/FGM soumise au moment exciteur  $M_y$  en  $x=L/2$  pour  $\eta_c = 1.5$

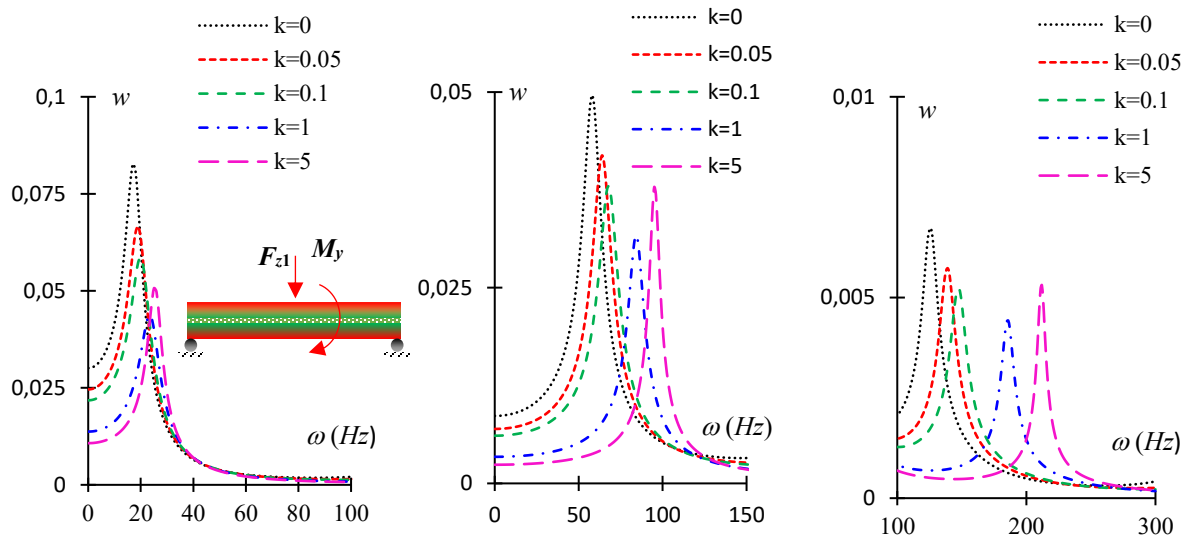


Figure 4. 10: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-articulée FGM/MCC/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z1}$  et au moment  $M_y$  pour  $\eta_c = 1.5$

#### 4.4.2 Modèle de poutre sandwich FGM/3M ISD112/FGM

Les études menées dans le cas du modèle de poutre sandwich FGM à comportement viscoélastique complexe constant sont reconduites ici en considérant toujours la poutre de la Figure 4. 2 mais avec un matériau viscoélastique de type 3M ISD112 placé au cœur de la structure. Dans un premier temps la force  $F_{z1}$  est appliquée à mi- longueur ( $x=L/2$ ) de la poutre bi-encastée. Les réponses de la structure en terme de déplacements transversaux  $w$  (en mm) pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  sont présentées sur la Figure 4. 11. Comme dans le cas du modèle complexe constant, le deuxième mode de vibration est absent sur ces courbes de réponses. Pour exciter ce mode il est nécessaire d'appliquer un moment de force ( $M_y$ ) toujours en  $x=L/2$ . Les résultats obtenus dans ce cas sont présentés sur la Figure 4. 12. A partir de ces figures on représente les trois premiers modes de vibrations de la poutre sur la Figure 4. 13. Par analyse de ces résultats, les mêmes comportements observés dans le cas du modèle complexe constant étudié précédemment sont aussi notés dans ce cas, à savoir la variation des amplitudes des réponses en fonction de l'indice de puissance  $k$  et l'obtention des amplitudes maximales et minimales de vibration respectivement en présence de matériau isotrope  $k=0$  et du matériau FGM pour  $k=1$ .



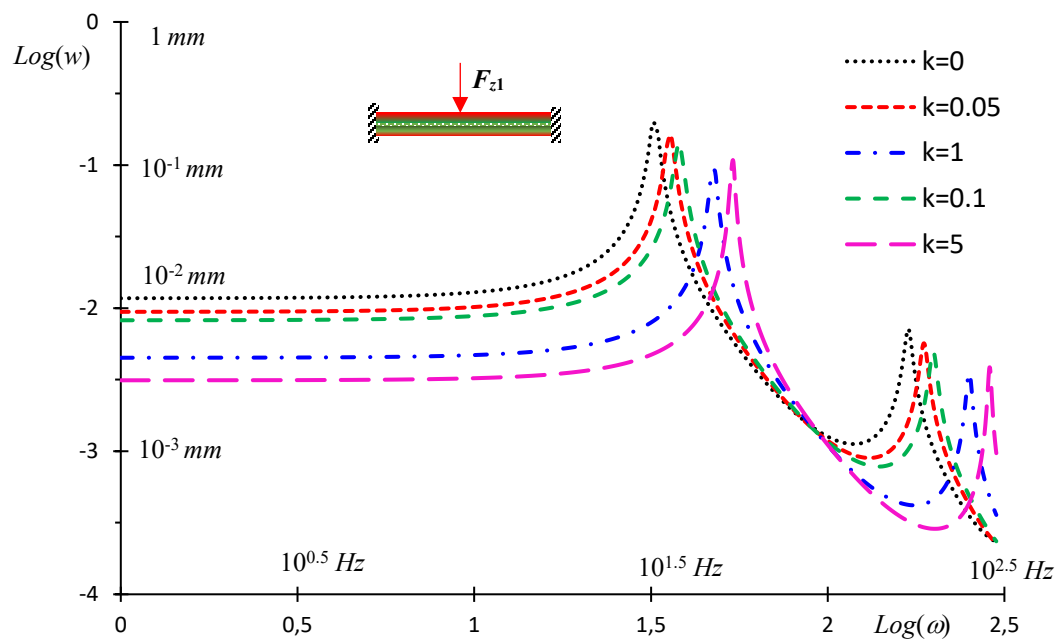


Figure 4. 11: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastée FGM/3M ISD112/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z1}$  en  $x=L/2$

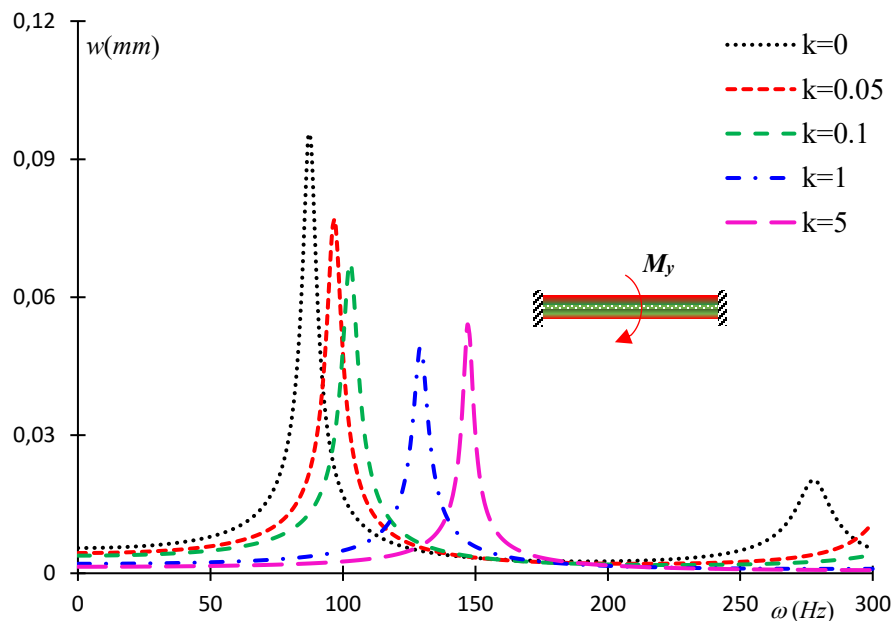


Figure 4. 12: Courbes de réponses du modèle de poutre bi-encastée FGM/3M ISD112/FGM soumise au moment excitateur  $M_y$  en  $x=L/2$

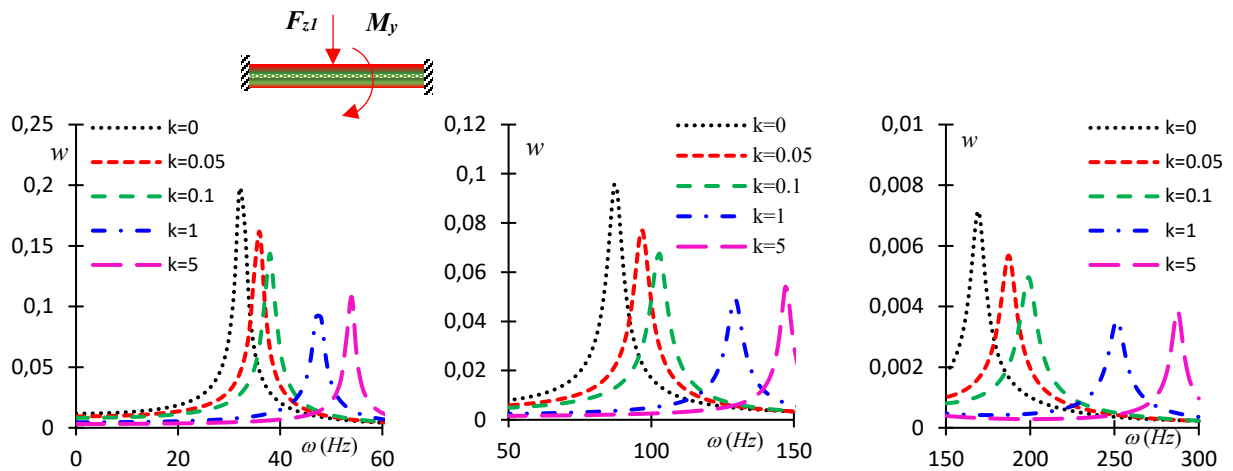


Figure 4. 13: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-encastée FGM/3M ISD112/FGM sous l'action de la force  $F_{z1}$  et du moment  $M_y$  en  $x=L/2$

Dans le cas de la poutre console, la force  $F_{z2}$  est appliquée à l'extrémité libre de la poutre ( $x=L$ ). Les résultats présentés sur la Figure 4. 14 montrent la présence des trois premiers modes pour les différentes valeurs considérées de l'indice de puissance  $k$ . Afin de bien les distinguer, ces modes sont présentés séparément sur la Figure 4. 15 .

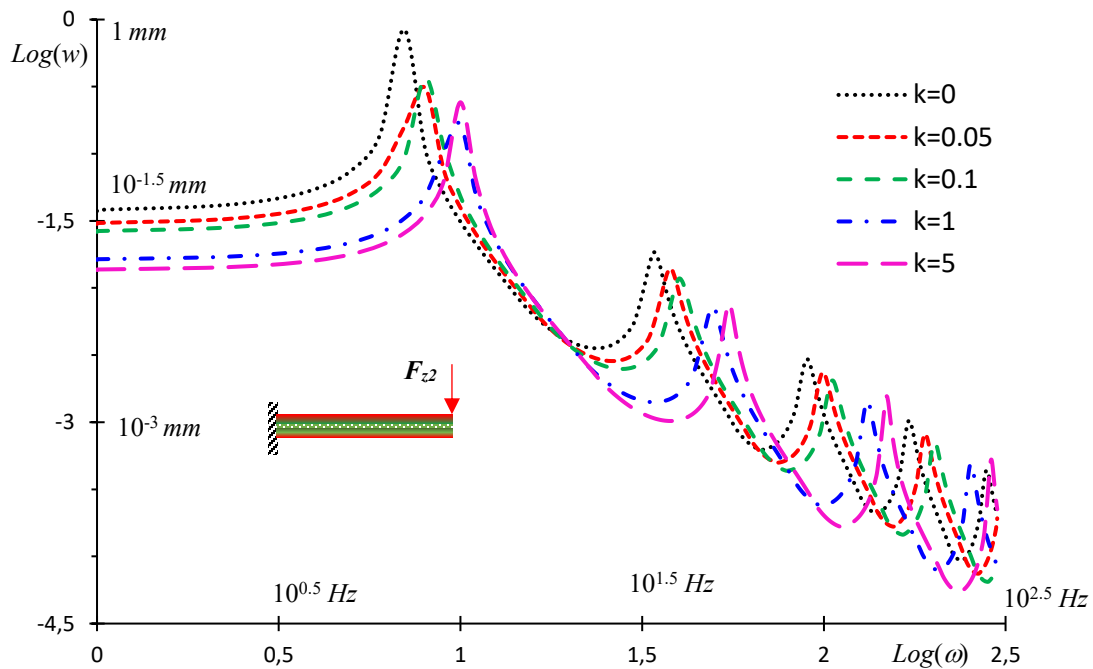


Figure 4. 14: Courbes de réponses du modèle de poutre console FGM/3M ISD112/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z2}$  en  $x=L$

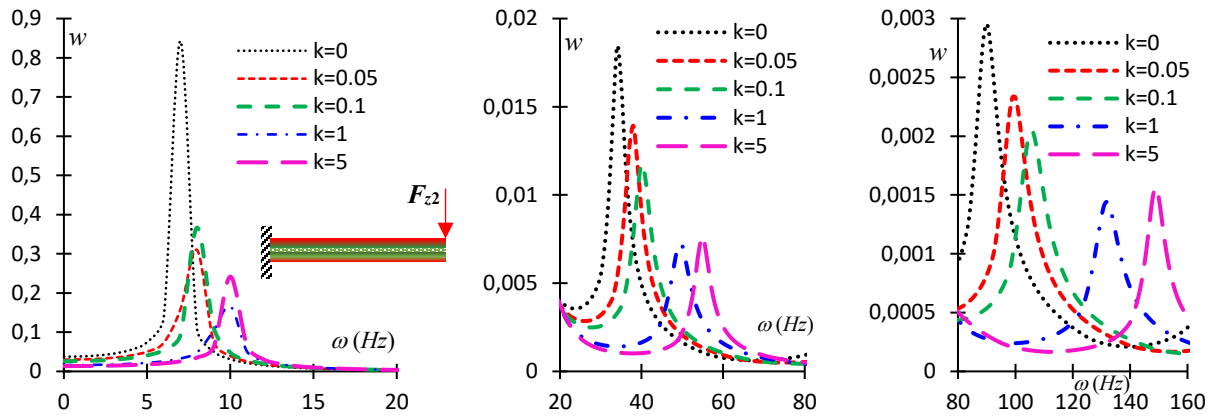


Figure 4. 15: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre console FGM/3M ISD112/FGM sous l'action de la force  $F_{z2}$  en  $x=L$

En analysant ces figures on peut remarquer que le comportement observé est identique à celui observé dans le cas de la poutre bi-encastée. Le déplacement maximal de la poutre est atteint pour  $k=0$  et le minimum pour  $k=1$ . On considère également pour ce modèle de poutre sandwich FGM viscoélastique, une poutre bi-articulée sur laquelle est appliquée la force concentrée  $F_{z1}$  puis le moment de flexion  $M_y$ . Dans le premier cas de chargement, on obtient le premier et le troisième mode qui sont représentés sur la Figure 4. 16. Dans le deuxième cas de chargement le deuxième mode de vibration est excité et représenté sur la Figure 4. 17. On présente les trois premiers modes de vibrations pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$  sur la Figure 4. 18. Les observations faites dans le cas de la poutre bi-encastée sont aussi valables dans ce cas.

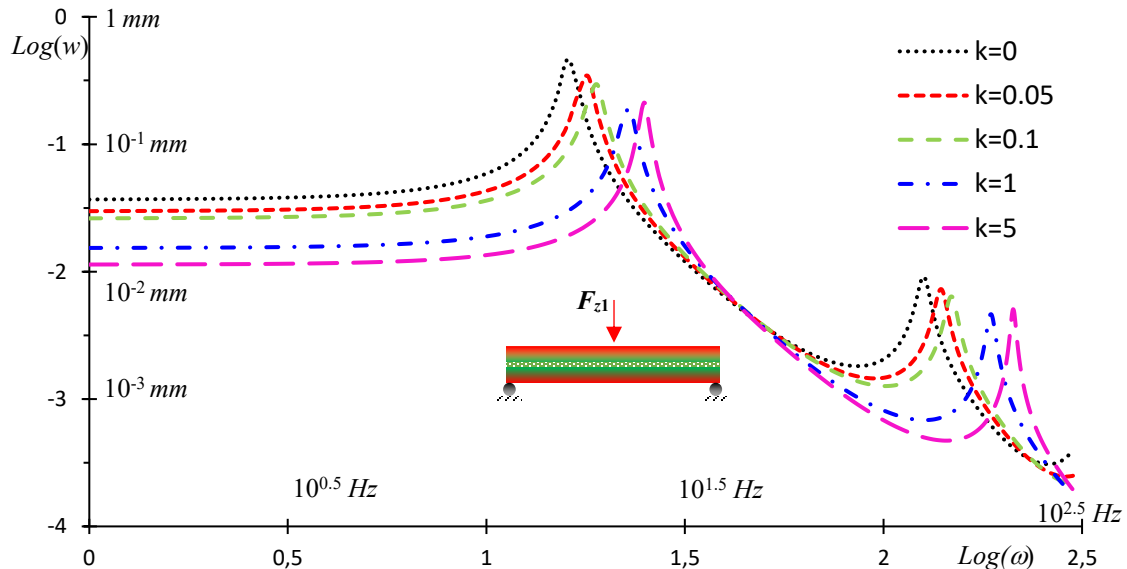


Figure 4. 16: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/3M ISD112/FGM sous l'action de la force  $F_{z1}$  en  $x=L/2$

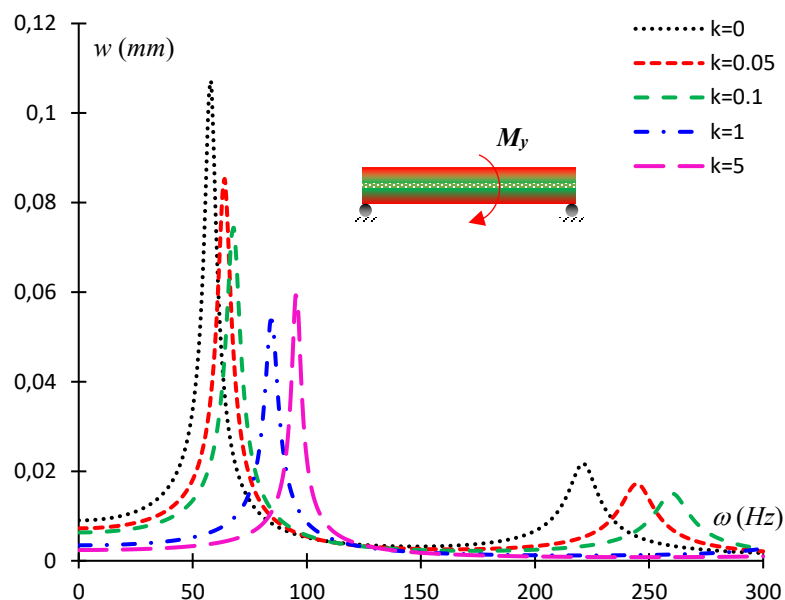


Figure 4. 17: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/3M ISD112/FGM sous l'action du moment de flexion exciteur  $M_y$  en  $x=L/2$

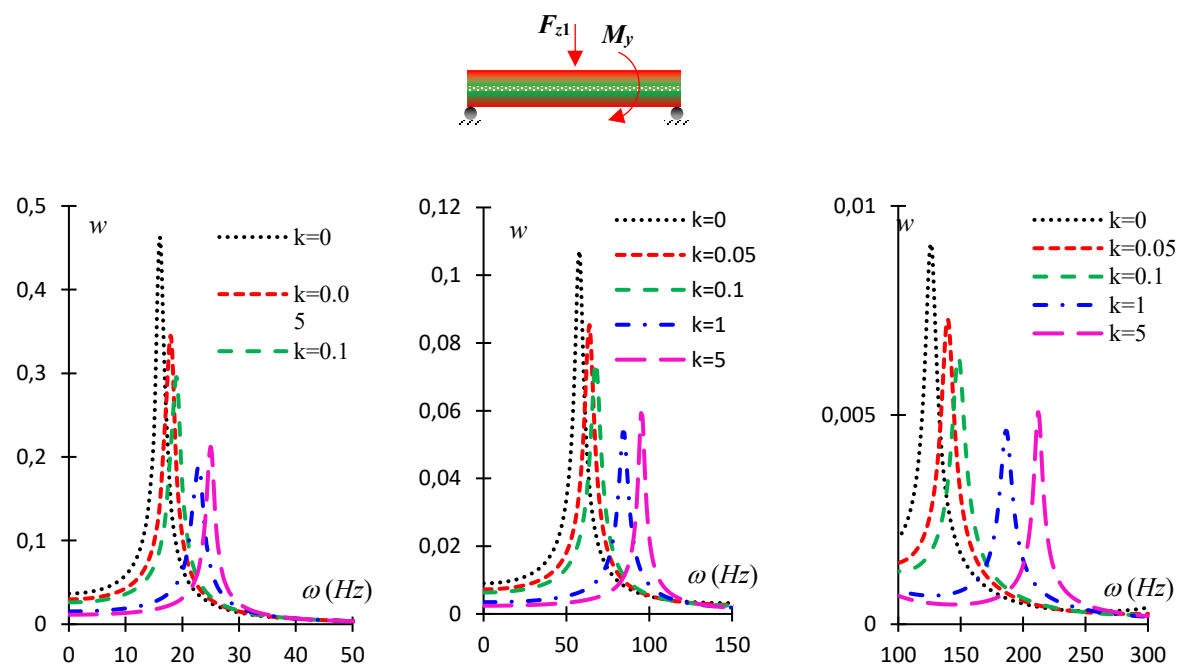


Figure 4. 18: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/3M ISD112/FGM sous l'action des excitations  $F_{z1}$  et  $M_y$  en  $x=L/2$

### 4.4.3 Modèle de poutre sandwich FGM/PVB/FGM

Le troisième modèle de poutre viscoélastique étudié dans ce chapitre est le modèle FGM/PVB/FGM. Les fréquences vibrations obtenues avec ce modèle sont beaucoup plus hautes que celles obtenues avec les précédents modèles. Pour cette raison, la recherche des trois premiers modes de vibrations nécessite des fréquences excitatrices choisies dans un intervalle plus large ([0 500Hz]). Dans cette étude, les courbes de réponses sont d'abord cherchées par application de la force excitatrice verticale  $F_{z1}$  à mi-longueur ( $x=L/2$ ) de la poutre bi-encastree comme dans les cas précédents. Les résultats obtenus en terme de réponse en déplacement vertical de la structure sous l'action de cette force excitatrice sont présentés sur la Figure 4. 19.

Comme dans les cas précédents, le deuxième mode n'apparaît pas sur cette figure. Pour exciter ce mode on applique le moment de flexion ( $M_y$ ). La réponse de la structure dans ce cas est représentée sur la Figure 4. 20 où on voit apparaître clairement le mode 2 pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . A partir de ces résultats on représente séparément les trois premiers modes de vibrations de la poutre sur la Figure 4. 21.

Dans le cas de la poutre console, la force excitatrice  $F_{z2}$  est appliquée à l'extrémité libre de la poutre ( $x=L$ ). La réponse de la structure à cette excitation harmonique est représentée sur la Figure 4. 22 et les courbes représentant les différents modes de vibrations sont présentées à la Figure 4. 23. Par analyse de ces courbes on peut tout d'abord remarquer que les amplitudes des vibrations varient en fonction des valeurs de  $k$  comme dans les cas précédents.

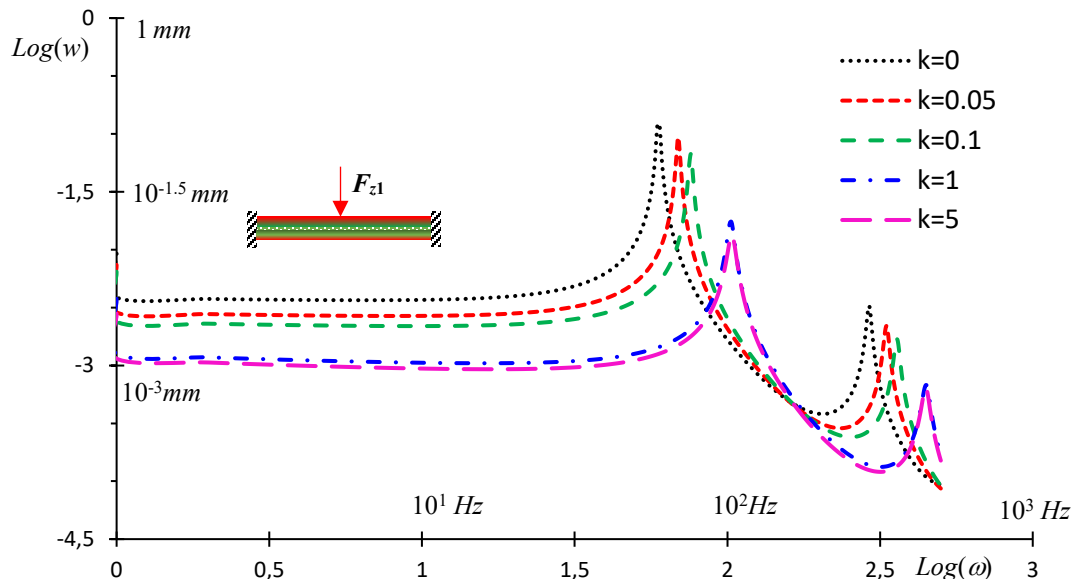


Figure 4. 19: Courbes de réponses du modèle poutre bi-encastree FGM/PVB/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z1}$  en  $x=L/2$

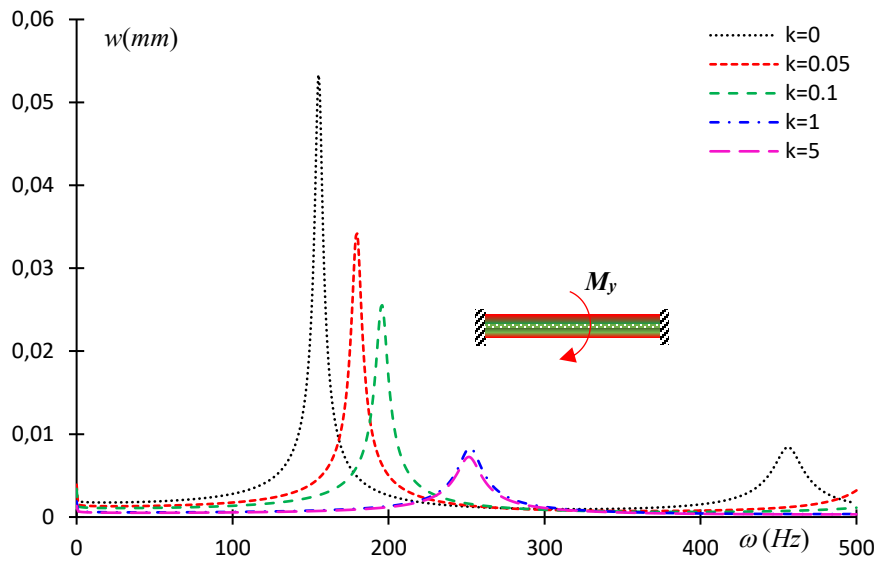


Figure 4. 20: Courbes de réponses du modèle poutre bi-encastree FGM/PVB/FGM soumise au moment exciteur  $M_y$  en  $x=L/2$

Par ailleurs, contrairement aux modèles FGM/MCC/FGM et FGM/ 3M ISD112/FGM, le présent modèle assure une décroissance de l'amplitude des vibrations suivant les valeurs de l'indice de puissance  $k$  aussi bien dans le cas de la poutre bi-encastree que dans le cas de la poutre console.

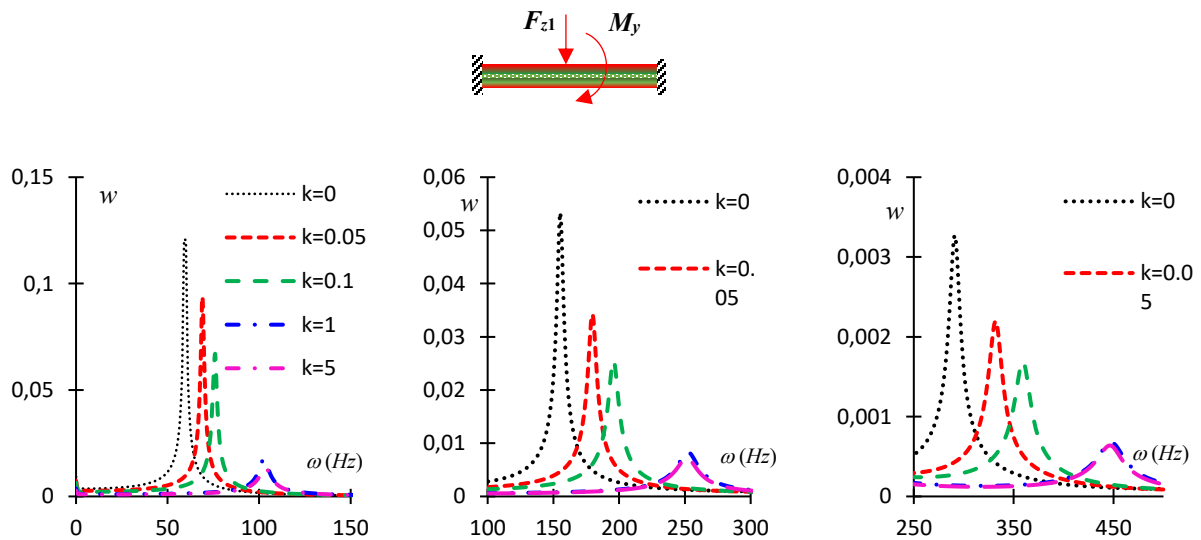


Figure 4. 21: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-encastree FGM/PVB/FGM sous l'action de la force  $F_{z1}$  et du moment  $M_y$  en  $x=L/2$

Ainsi, pour les deux types de conditions aux limites considérées pour ce modèle de poutre FGM amortissante, le modèle le moins amortissant est obtenu pour  $k=0$  et le plus amortissant pour  $k=5$ . Cette remarque est valable pour tous les trois modes de vibrations étudiés.

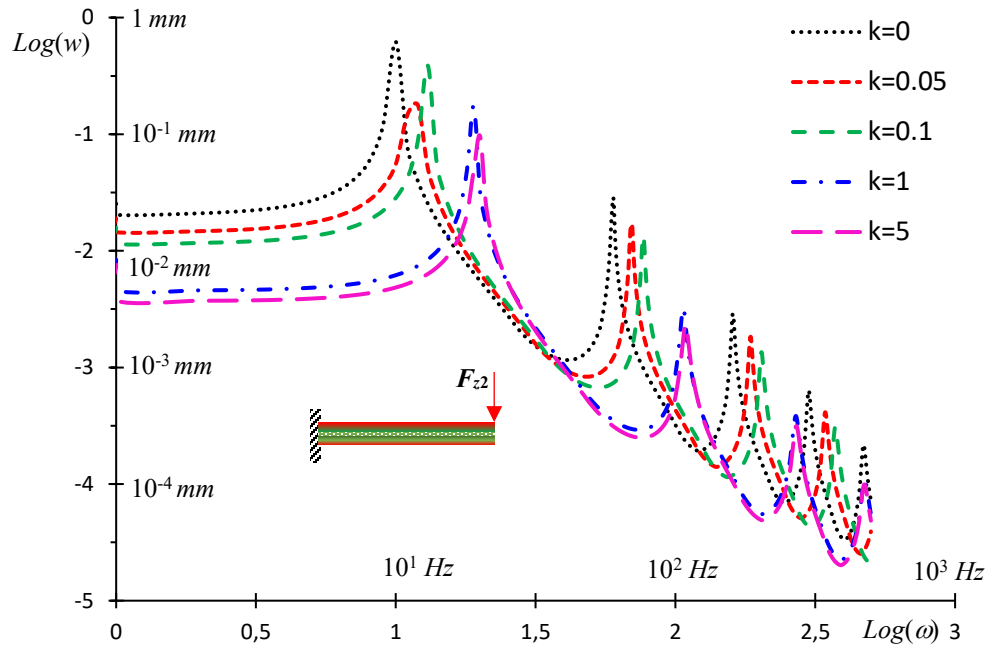


Figure 4. 22: Courbes de réponses du modèle de poutre console FGM/PVB/FGM soumise à la force excitateur  $F_{z2}$  en  $x=L$

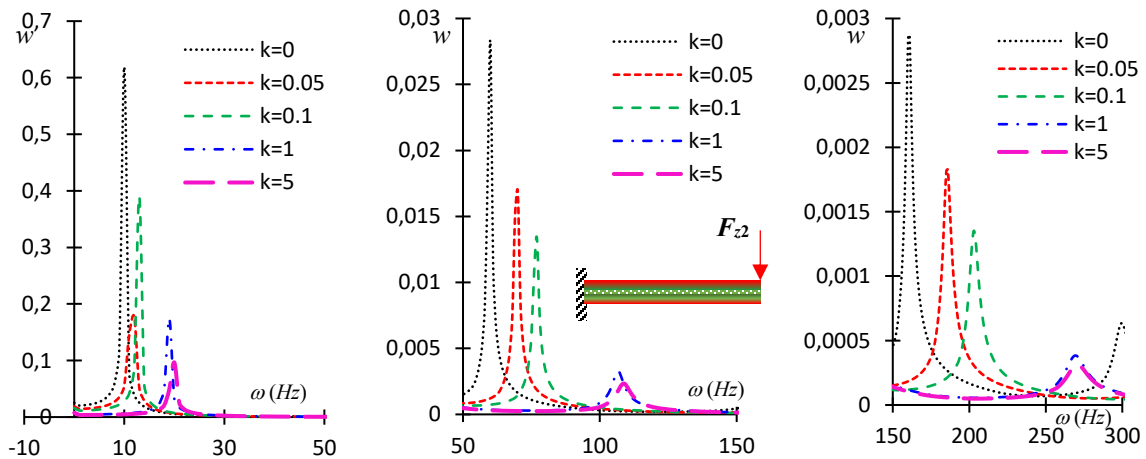


Figure 4. 23: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre console FGM/PVB/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z2}$  en  $x=L$

Dans le cas de la poutre bi-articulée, la force  $F_{z1}$  est appliquée au milieu de la poutre à l'abscisse  $x=L/2$ . Les réponses de la structure soumise à cette excitation sont représentées sur la Figure 4. 24 pour les différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Dans ce cas également, on peut remarquer que seuls les deux premiers modes sont visibles sur cette figure. Ici également, pour exciter le deuxième mode, on applique le moment de flexion  $M_y$  à l'abscisse  $x=L/2$ . Les réponses de la poutres sandwich sous cette excitation sont représentées sur la Figure 4. 25. Les trois premiers modes sont en suites représentés séparément sur la Figure 4. 26.

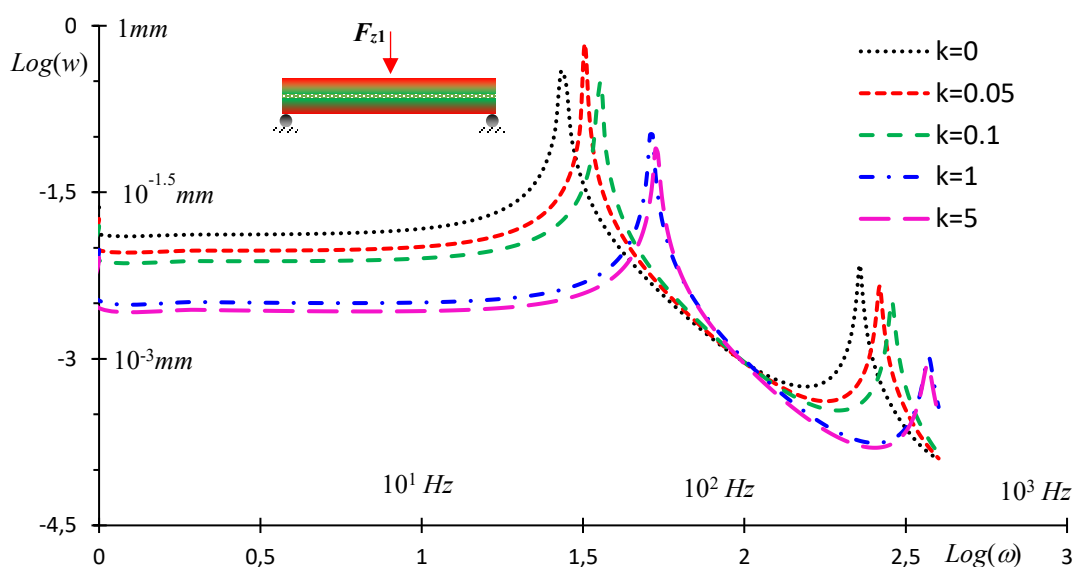


Figure 4. 24: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/PVB/FGM soumise à la force excitatrice  $F_{z1}$  en  $x=L/2$

Par analyse de ces courbes de réponses, on remarque que le comportement de la structure au deuxième et troisième mode de vibrations reste le même que celui observé dans le cas de la poutre bi-encastée. En effet, pour ces modes, on note une décroissance de la flèche suivant les valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Dans ces conditions, la structure isotrope ( $k=0$ ) est la moins amortissante et la structure au pouvoir dissipatif le plus élevé est obtenue pour la plus grande valeur de l'indice de puissance ( $k=5$ ). Mais au premier mode de vibration ces remarques ne sont plus valables.



La poutre la plus amortissante reste toujours celle correspondant à la plus grande valeur de l'indice de puissance  $k=5$  mais pour obtenir la structure au pouvoir dissipatif le plus faible il a fallu plutôt une valeur de l'indice de puissance  $k=0.05$ .

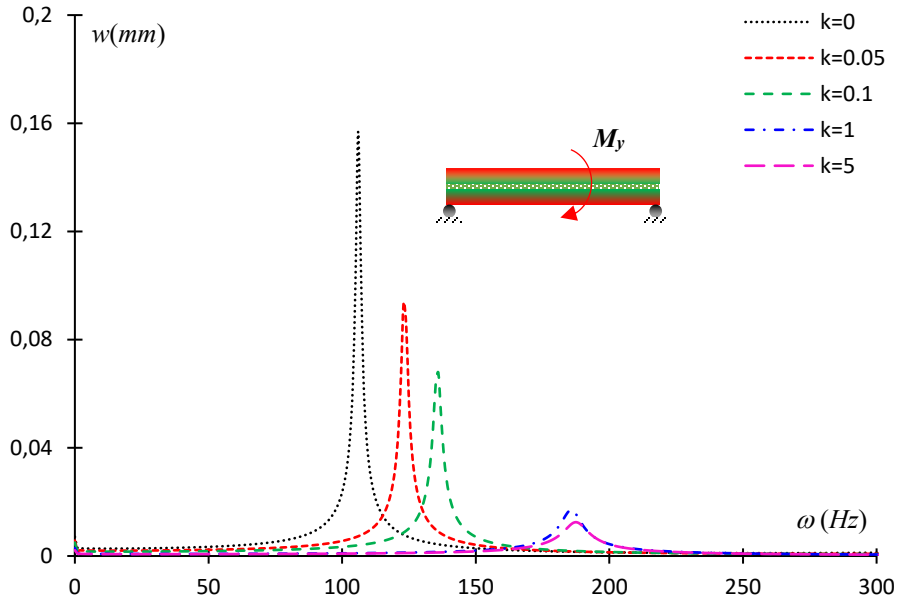


Figure 4. 25: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/PVB/FGM soumise au moment exciteur  $M_y$  en  $x=L/2$

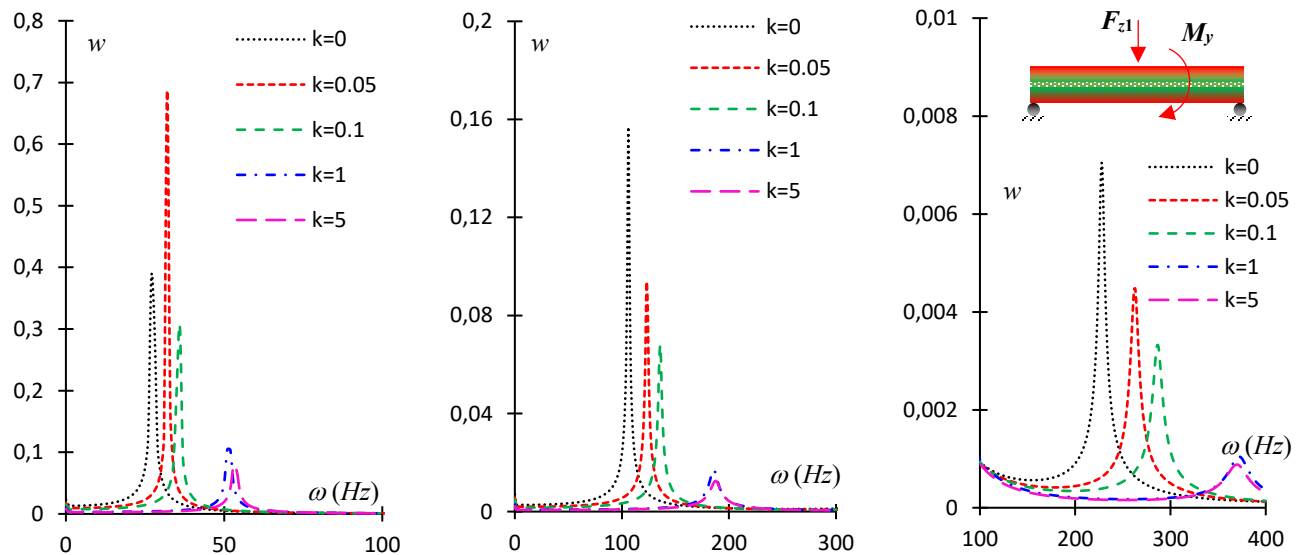


Figure 4. 26: Courbes de réponses des trois premiers modes de vibrations du modèle de poutre bi-articulée FGM/PVB/FGM soumise à la force  $F_{z1}$  et au moment  $M_y$  en  $x=L/2$

## 4.5 Conclusion

Dans ce travail nous avons proposé un modèle élément fini pour étudier les déplacements réels des poutres sandwich FGM à âme viscoélastique à travers l'analyse des amplitudes des vibrations. L'objectif de cette étude est de souligner l'influence de l'indice de puissance, des conditions aux limites et des lois de comportements viscoélastiques sur le pouvoir dissipatif des structures composites FGM par une analyse de leurs courbes de réponses lorsqu'elles sont soumises à des excitations harmoniques. Dans la modélisation du problème, le modèle cinématique zig-zag est appliqué. Dans la formulation du modèle, on adopte une théorie de cisaillement pour le cœur et la théorie classique de poutre de type Euler Bernoulli pour les couches extérieures en FGM. Plusieurs théories de cisaillement sont possibles allant du modèle de cisaillement de premier ordre de Timoshenko aux modèles de cisaillement d'ordre élevé grâce à l'introduction d'une fonction de cisaillement. Aussi, différentes combinaisons de conditions aux limites peuvent être adoptées. Dans les applications trois modèles de poutres sandwichs FGM viscoélastiques sont considérés. Il s'agit des modèles FGM/MCC/FGM, FGM/3M ISD112/FGM et FGM/PVB/FGM étudiés dans le chapitre précédent. La résolution de l'équation de vibration forcée est possible par utilisation de la méthode des bandes passantes. Par cette méthode on excite les modes d'intérêt de la structure par application d'une force harmonique. Pour chacune des fréquences ( $\omega$ ) imposées, on calcule le déplacement vertical ( $d$ ) de la poutre correspondant par inversion de la matrice de rigidité globale. La courbe de réponse de la structure est alors obtenue en représentant dans un plan l'ensemble des points ( $\omega, d$ ) obtenus. Par analyse des résultats des simulations numériques, on a montré que l'amplitude des vibrations de la poutre FGM varie en fonction de l'indice de puissance  $k$  du matériau FGM, et ce quelle que soit la loi viscoélastique considérée et le type de conditions aux limites appliquées. Le code élément fini développé dans ce chapitre permet d'étudier non seulement les modes de basses fréquences mais aussi les modes de fréquences élevées pour différentes valeurs de l'indice de puissance  $k$ . Dans les applications, 5 valeurs de l'indice  $k$  sont considérées ( $k=0, 0.05, 0.1, 1, 5$ ) et les études ont porté sur les 3 premiers modes de vibrations.

Par analyse des résultats il en ressort que, pour les modèles FGM/MCC/FGM et FGM/3M ISD112/FGM le pouvoir amortissant de la structure atteint son maximum pour un indice de puissance  $k=1$  et dans le cas où les couches extérieures du sandwich sont isotropes ( $k=0$ ), il est minimal. Mais en présence du troisième modèle de poutre étudié dans ce travail, on ne peut en dire autant.

En effet dans le cas du modèle FGM/PVB/FGM, les amplitudes de vibrations observées pour les trois modes décroissent en fonction de l'indice de puissance  $k$  en considérant la poutre bi-encastée et la poutre console contrairement au modèle FGM/MCC/FGM et FGM/3M ISD112/FGM où l'on note l'existence d'un extrémum. Ainsi, dans ce cas, l'amortissement le plus élevé est obtenu pour la valeur la plus grande de l'indice de puissance ( $k=5$ ) et l'amortissement le plus faible est atteint pour la valeur la plus faible de cet indice ( $k=0$ ). En étudiant la poutre bi-articulée toujours dans le cas du modèle FGM/PVB/FGM, le deuxième et le troisième mode vérifient les observations faites dans le cas de la poutre bi-encastée et de la poutre console, mais pour le premier mode de vibration, le maximum du déplacement est plutôt atteint pour  $k=0.005$  et le minimum pour  $k=5$ .

Au vu de cette étude, il apparaît que la réponse en déplacement de la poutre sandwich FGM viscoélastique sous une excitation extérieure dépend non seulement de la loi viscoélastique considérée mais aussi du mode de vibration excité et des conditions aux limites appliquées. Aussi, il a été montré dans nos analyses que les propriétés amortissantes, des matériaux composites de type FGM, peuvent être améliorées depuis la conception en jouant sur le gradient de composition du matériau FGM représenté dans notre modèle par l'indice de puissance  $k$ .

# Conclusion générale et perspectives

Ce travail de thèse a pour objectif de proposer un modèle élément fini pour l'analyse statique et de vibrations des structures de poutres sandwich à gradient de propriétés (FGM) et à cœur viscoélastique. Le modèle proposé est adapté aux applications demandant une réduction de la masse tout en conservant une bonne résistance mécanique et thermique et un pouvoir amortissant assez élevé pour contrôler les instabilités vibratoires (l'aérospatiale, l'aéronautique, le nucléaire...). Au sein des machines thermonucléaires, les structures à matériaux FGM sont utilisées comme des composantes faces aux plasmas des réacteurs. Dans un cadre général, les matériaux FGM, de par la présence de constituants à forte résistance thermique comme la céramique, sont sollicités comme des barrières thermiques.

Pour atteindre l'objectif fixé dans ce travail, des modèles de poutres sandwich à faces FGM et à cœur viscoélastique sont proposés. Dans la formulation mathématique de ces modèles, le caractère anisotrope des matériaux FGM est pris en compte en plus de la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique du cœur. Les structures FGM présentent une répartition matérielle non symétrique par rapport à leur ligne de référence. Ce caractère non symétrique de leurs sections droites les rend très sensibles aux effets de couplages membrane-flexion et membrane-rotation. Pour une prédiction correcte du comportement de ces structures, il est nécessaire de prendre en compte ce phénomène de couplage spatial. Par ailleurs, la modélisation des structures sandwich viscoélastiques est souvent contrainte à certaines difficultés liées d'une part au choix du champs cinématique fiable pour représenter fidèlement le comportement réel de la structure et d'autre part à la résolution du problème aux valeurs propres non linéaire complexe pour la recherche de solutions. Rappelons que la non linéarité du problème de vibrations est due à la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique du cœur de la structure sandwich. Pour mieux présenter les différentes étapes de notre travail, ce mémoire a été subdivisé en quatre chapitres.

Le Chapitre 1 a été consacré à l'état de l'art sur les structures sandwich viscoélastiques, les différentes approches et les difficultés rencontrées dans la modélisation du problème de vibrations libres de ces structures. L'étude bibliographique a également porté sur les solutions proposées pour contourner ces difficultés ainsi que des généralités sur les matériaux composites en occurrence les matériaux à gradient de propriétés et les travaux déjà existant sur l'étude de leurs modèles d'amortissement passif. Dans cette étude, l'absence des modèles de poutres FGM viscoélastiques prenant en compte le phénomène de couplage spatial et la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique a été soulignée.

De plus à notre connaissance, dans les logiciels de simulations comme Abaqus, seul le modèle 3D est permis pour la modélisation des structures FGM et la loi viscoélastique implémentée est une loi complexe constante. De ce fait, la proposition d'un modèle réduit 2D pour l'étude statique et de vibrations libres des poutres FGM viscoélastiques est donc nécessaire. Pour répondre à cette problématique, nous avons effectué les différents travaux suivants :

1. dans le Chapitre 2, nous avons développé un modèle élément fini de type poutre pour l'étude statique et de vibrations libres des structures sandwich FGM à sections symétriques ou non.

Pour ce modèle, une cinématique de type non zig-zag a été adoptée étant donné que les propriétés des différentes couches du sandwich sont voisines. A cet effet, le modèle d'Euler Bernoulli ainsi que plusieurs modèles de cisaillement sont introduits. A partir de cette formulation mathématique, un outil générique est développé et implémenté sous le logiciel Matlab. Avec de ce code élément fini, l'étude de l'effet des propriétés géométriques, des conditions aux limites et du paramètre de conception des FGM appelé indice de puissance, sur le comportement de la poutre devient possible. L'effet du couplage membrane-flexion et membrane-rotation sur le comportement de la poutre en présence d'une section non symétrique est étudié. Aussi, l'efficacité du présent code est démontrée à travers des comparaisons avec des travaux proposés dans littérature et les limites de ces derniers sont également soulignées.

2. dans le Chapitre 3, il a été proposé un modèle élément fini de poutre pour étudier le problème statique et de vibrations libres des structures sandwich FGM à âme viscoélastique. Ce modèle permet de calculer de manière directe les propriétés modales des structures sandwich FGM viscoélastiques, et ce quelle que soit la non linéarité induite par la dépendance en fréquence du comportement de la couche molle. Les différentes couches de la poutre sandwich considérée ont des propriétés matériaux très différentes. En effet, la couche viscoélastique située au cœur du sandwich se déforme essentiellement en cisaillement alors que dans les couches externes en FGM plus rigide, le cisaillement est absent. Pour modéliser un tel comportement, un champ cinématique de type zig-zag a été adopté. Dans l'application de cette théorie cinématique, le modèle classique de poutre est adopté pour les faces alors que pour le cœur, des modèles de cisaillement sont considérés avec une continuité du champs cinématique imposée aux interfaces des différentes couches. La formulation théorique a abouti à la mise en place d'un code générique implémenté sous le logiciel Matlab. Dans ce code, la résolution du problème aux valeurs propres non linéaire est possible grâce à la méthode de résolution directe et exacte développée dans les travaux de Bilasse [6]. Cette méthode est un couplage de la méthode asymptotique numérique (la *MAN*), de la technique d'homotopie et de la différentiation automatique (AD).

Une campagne de simulations numériques avec le logiciel Abaqus est menée pour valider les modèles développés étant donné que ces modèles sont inexistant dans la littérature. A partir des analyses menées dans ce travail, l'efficacité du modèle pour des besoins d'optimisation du pouvoir amortissant des structures de poutres sandwich FGM par calibration des paramètres intrinsèques à la conception (indice de puissance  $k$ ) est prouvée.

3. dans le Chapitre 4, nous avons proposé un modèle élément fini pour l'étude des amplitudes de vibrations d'une poutre sandwich FGM viscoélastique par le calcul des déplacements de la structure lorsque qu'elle est sous l'action d'excitations extérieures.

L'équation de vibration forcée obtenue dans la formulation est résolue grâce à la méthode des bandes passantes. Pour chaque fréquence imposée, le déplacement de la structure est obtenu par inversion de la matrice de rigidité correspondante. La force harmonique appliquée permet d'exciter des modes propres de vibrations et la réponse de la structure est obtenue sous forme d'une courbe fréquence-déplacement. Le modèle proposé dans cette partie du travail permet de confirmer l'effet de l'indice de puissance sur le pouvoir dissipatif de la poutre FGM. En effet, par cette étude il est démontré qu'il existe des valeurs de cet indice pour lesquelles les propriétés amortissantes de la structure FGM atteignent des valeurs maximales. Cette spécificité des composites FGM peut être bénéfique pour des recherches d'optimisation du pouvoir dissipatif des structures.

## Perspectives

Les modèles de poutres éléments finis développés dans ce travail ont certainement contribuer à une bonne compréhension du comportement des structures de poutres sandwich FGM à âme viscoélastique, néanmoins des améliorations restent nécessaires.

### **D'un point de vue théorique**

Les pistes d'améliorations suivantes sont envisageables :

#### *Modèle élément fini*

Le modèle proposé dans le chapitre 3 est basé sur une théorie cinématique de type zig-zag pour laquelle la théorie classique de poutre d'Euler Bernoulli est adoptée pour les faces en FGM et des théories de cisaillement sont considérées pour le cœur viscoélastique avec une continuité du champ de déplacement imposée aux interfaces. Les matériaux FGM constituant les faces du sandwich présentent une microstructure très hétérogène ce qui contribue probablement à leur anisotropie.

**Pour cela**, il serait plus intéressant d'utiliser des théories de déformations d'ordre élevé afin de mieux prendre en compte cette anisotropie et le cisaillement dans la structure. Par ailleurs, les analyses sont menées dans ce manuscrit dans l'hypothèse des petites déformations, il serait souhaitable d'étendre notre modèle élément fini aux grands déplacements et grandes déformations. Dans cette perspective, le modèle devra inclure non seulement des non linéarités matérielles mais aussi des non linéarités géométriques. Aussi, les modèles éléments finis considérés dans nos travaux sont de type poutre. Il serait souhaitable de développer des modèles de type coque tenant compte des courbures afin de modéliser des structures sandwich à géométrie plus complexe.

### **Dépendance en fréquence et en température**

Le modèle développé dans ce manuscrit ne considère pas la variation de la température dans la structure, la température étant considérée comme constante. Or dans la réalité les matériaux viscoélastiques ont un comportement dépendant de la température et de la fréquence. Aussi, les matériaux à gradient de propriétés sont souvent utilisés comme barrière thermique dans la pratique. Dans ces environnements, leurs propriétés matériaux ne vont certainement pas rester constantes. Il serait donc envisageable de prendre en compte le couplage fréquence-température dans la formulation du problème.

### **D'un point de vue expérimentale**

Les modèles viscoélastiques considérés dans ce travail sont de deux sortes. Un modèle complexe constant et deux modèles dépendants de la fréquence de vibrations. Pour ces trois modèles, les travaux de la littérature n'abordent que les cas isotropes. En présence des matériaux FGM les modèles proposés sont rares et ne considèrent que le cas du modèle complexe constant. Pour cela nous avons eu recours à l'utilisation du logiciel Abaqus pour validation du modèle, mais à notre connaissance seul le modèle complexe constant est représentable dans ce logiciel. Il serait donc intéressant de faire des tests expérimentaux en considérant des lois viscoélastiques non linéaires afin de corroborer l'efficacité et la précision du présent modèle.

## Annexe A : Fonctions de forme et matrice de fonctions de forme et leurs gradients

On désigne par  $l^e$  la longueur d'un élément fini et on définit par  $\xi$  la coordonnée locale ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ) donnée par l'expression :

$$\xi = \frac{2x}{l^e} - 1, \quad (\text{A.1})$$

avec ( $0 \leq x \leq l^e$ ). Les fonctions de forme utilisées, pour discrétiser les déplacements, dans les formulations proposées dans ce travail sont des fonctions de forme polynomiales linéaires et de type Hermite et sont données par :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{2}, \\ N_2(\xi) &= \frac{1+\xi}{2}, \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \\ N_4(\xi) &= \frac{l^e}{8}(1-\xi^2)(1+\xi), \\ N_5(\xi) &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \\ N_6(\xi) &= -\frac{l^e}{8}(1+\xi)^2(1-\xi). \end{aligned} \quad (\text{A.2a-f})$$

- Les matrices d'interpolations utilisées dans la formulation mathématique du modèle proposé dans le chapitre 2 sont données par :

$$N(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$



$$V(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l^e} N'_3 & \frac{2}{l^e} N'_4 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_5 & \frac{2}{l^e} N'_6 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{2}{l^e} N'_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l^e} N'_3 & \frac{2}{l^e} N'_4 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_5 & \frac{2}{l^e} N'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$g(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{2}{l^e} N'_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l^e} N'_3 & \frac{2}{l^e} N'_4 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_5 & \frac{2}{l^e} N'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_2 \\ 0 & \frac{4}{l^{e2}} N''_3 & \frac{4}{l^{e2}} N''_4 & 0 & 0 & \frac{4}{l^{e2}} N''_5 & \frac{4}{l^{e2}} N''_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

- Dans le chapitre 3 et 4 les matrices de fonction de forme et matrice de gradient de fonction de forme  $P(\xi)$ ,  $V(\xi)$  et  $g(\xi)$  intervenant dans la formulation du modèle proposé sont données par les expressions suivantes.

$$P(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l^e} N'_3 & \frac{2}{l^e} N'_4 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N'_5 & \frac{2}{l^e} N'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$V(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & \frac{2}{l^e} N_3' & \frac{2}{l^e} N_4' & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N_5' & \frac{2}{l^e} N_6' & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$g(\xi) = \frac{2}{l^e} \begin{bmatrix} \frac{2}{l^e} N_1' & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{l^{e2}} N_3'' & \frac{4}{l^{e2}} N_4'' & 0 & 0 & \frac{4}{l^{e2}} N_5'' & \frac{4}{l^{e2}} N_6'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N_1' & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{l^e} N_2' \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

## Annexe B : Formulation variationnelle de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique de la structure est obtenue par sommation de la contribution de chacune des couches du sandwich :

$$2T = \frac{1}{2} \int_L b \sum_{i=1}^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \rho(z) (\dot{U}_M^2 + \dot{W}_M^2) dz dx, \quad i=1,3. \quad (\text{B.1})$$

En introduisant la définition du champ cinématique adopté dans ce travail dans l'équation (B1) on obtient l'expression suivante.

$$\begin{aligned} 2T = & b \int_L \int_{-h_v/2}^{-h_v/2} \rho_1(z) \left( \dot{w}^2 + (\dot{u} - z\dot{w}_{,x} + c_1\dot{\phi})^2 \right) dz dx \\ & + b\rho_v \int_L \int_{-h_v/2}^{+h_v/2} \left( \dot{w}^2 + (\dot{u} - z\dot{w}_{,x} + f(z)\dot{\phi})^2 \right) dz dx \\ & + b \int_L \int_{+h_v/2}^{+h_v/2} \rho_1(z) \left( \dot{w}^2 + (\dot{u} - z\dot{w}_{,x} + c_3\dot{\phi})^2 \right) dz dx. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Par un développement des termes quadratiques on a :

$$\begin{aligned} 2T = & b \int_L \int_{-h_v/2}^{-h_v/2} \rho_1(z) \left( \dot{w}^2 + \dot{u}^2 + z^2\dot{w}_{,x}^2 + c_1^2\dot{\phi}^2 - 2zi\dot{w}_{,x} + 2c_1\dot{u}\dot{\phi} - 2c_1z\dot{w}_{,x}\dot{\phi} \right) dz dx \\ & + b\rho_v \int_L \int_{-h_v/2}^{+h_v/2} \left( \dot{w}^2 + \dot{u}^2 + z^2\dot{w}_{,x}^2 + f(z)^2\dot{\phi}^2 - 2zi\dot{w}_{,x} + 2f(z)\dot{u}\dot{\phi} - 2zf(z)\dot{w}_{,x}\dot{\phi} \right) dz dx \\ & + b \int_L \int_{+h_v/2}^{+h_v/2} \rho_3(z) \left( \dot{w}^2 + \dot{u}^2 + z^2\dot{w}_{,x}^2 + c_3^2\dot{\phi}^2 - 2zi\dot{w}_{,x} + 2c_3\dot{u}\dot{\phi} - 2zc_3\dot{w}_{,x}\dot{\phi} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

L'intégration sur la section nous permet d'obtenir la formulation suivante de l'énergie cinétique.

$$\begin{aligned} 2T = & \int_L \left( b_0^{(1)}\dot{w}^2 + b_0^{(1)}\dot{u}^2 + b_2^{(1)}\dot{w}_{,x}^2 + c_1^2b_0^{(1)}\dot{\phi}^2 - 2b_1^{(1)}\dot{u}\dot{w}_{,x} + 2c_1b_0^{(1)}\dot{u}\dot{\phi} - 2b_1^{(1)}c_1\dot{w}_{,x}\dot{\phi} \right) dx \\ & + \int_L \left( b_0^{(2)}\dot{w}^2 + b_0^{(2)}\dot{u}^2 + b_2^{(2)}\dot{w}_{,x}^2 + b_{f^2}^{(2)}\dot{\phi}^2 - 2b_1^{(2)}\dot{u}\dot{w}_{,x} + 2b_f^{(2)}\dot{u}\dot{\phi} - 2b_{zf}^{(2)}\dot{w}_{,x}\dot{\phi} \right) dx \\ & + \int_L \left( b_0^{(3)}\dot{w}^2 + b_0^{(3)}\dot{u}^2 + b_2^{(3)}\dot{w}_{,x}^2 + c_3^2b_0^{(3)}\dot{\phi}^2 - 2b_1^{(3)}\dot{u}\dot{w}_{,x} + 2c_3b_0^{(3)}\dot{u}\dot{\phi} - 2b_1^{(3)}c_3\dot{w}_{,x}\dot{\phi} \right) dx, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où les coefficients  $b_k^{(1)}$ ,  $b_k^{(2)}$  et  $b_k^{(3)}$  relatifs aux couches (1), (2) et (3) du sandwich sont calculés à partir des densités massiques:

$$(b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}) = b \int_{-h/2}^{-h_v/2} \rho_1(z) (1, z, z^2) dz,$$

$$(b_0^{(3)}, b_1^{(3)}, b_2^{(3)}) = b \int_{h_v/2}^{h/2} \rho_3(z) (1, z, z^2) dz, \quad (\text{B5a-c})$$

$$(b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_{f'}^{(2)}, b_{f^2}^{(2)}, b_{zf}^{(2)}) = b \rho_v \int_{-h_v/2}^{h_v/2} (1, z, z^2, f(z), f^2(z), zf(z)) dz.$$

En regroupant ces coefficients par termes, l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$2T = \int_L \left\{ (b_0^{(1)} + b_0^{(2)} + b_0^{(3)}) \dot{w}^2 + (b_0^{(1)} + b_0^{(3)} + b_0^{(2)}) \dot{u}^2 + (b_2^{(1)} + b_2^{(2)} + b_2^{(3)}) \dot{w}_{,x}^2 + (c_1^2 b_0^{(1)} + b_{f'}^{(2)} + c_3^2 b_0^{(3)}) \dot{\phi}^2 \right\} dx$$

$$- \int_L \left\{ 2(b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + b_1^{(3)}) \dot{u} \dot{w}_{,x} - 2(c_1 b_0^{(1)} + b_{f'}^{(2)} + c_3 b_0^{(3)}) \dot{u} \dot{\phi} + 2(b_1^{(1)} c_1 + b_{zf}^{(2)} + b_1^{(3)} c_3) \dot{w}_{,x} \dot{\phi} \right\} dx. \quad (\text{B6})$$

La fonctionnelle de l'énergie cinétique est alors obtenue sous la forme :

$$\delta T = \int_L \left\{ (b_0^{(1)} + b_0^{(2)} + b_0^{(3)}) \dot{w} \delta \dot{w} + (b_0^{(1)} + b_0^{(3)} + b_0^{(2)}) \dot{u} \delta \dot{u} + (b_2^{(1)} + b_2^{(2)} + b_2^{(3)}) \dot{w}_{,x} \delta \dot{w}_{,x} + (c_1^2 b_0^{(1)} + b_{f'}^{(2)} + c_3^2 b_0^{(3)}) \dot{\phi} \delta \dot{\phi} \right\} dx$$

$$- \int_L \left\{ (b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + b_1^{(3)}) (\dot{u} \delta \dot{w}_{,x} + \dot{w}_{,x} \delta \dot{u}) - (c_1 b_0^{(1)} + b_{f'}^{(2)} + c_3 b_0^{(3)}) (\dot{u} \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{u}) + (b_1^{(1)} c_1 + b_{zf}^{(2)} + b_1^{(3)} c_3) (\dot{w}_{,x} \delta \dot{\phi} + \dot{\phi} \delta \dot{w}_{,x}) \right\} dx. \quad (\text{B7})$$

On déduit de cette relation la forme matricielle de la fonctionnelle de l'énergie cinétique :

$$\delta T = \int_L \{ \delta \dot{q} \}^t [M_e] \{ \dot{q} \} dx, \quad (\text{B8})$$

où le vecteur  $\{q\}$  est un vecteur regroupant les déplacements et leurs gradients, et  $M_e$  la matrice de masse élémentaire définis par :

$$\{q\}^t = \{u \quad w \quad w' \quad \phi\}, \quad (\text{B9})$$

$$[M_e] = \begin{bmatrix} (b_0^{(1)} + b_0^{(2)} + b_0^{(3)}) & 0 & -(b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + b_1^{(3)}) & (c_1 b_0^{(1)} + b_{f'}^{(2)} + c_3 b_0^{(3)}) \\ 0 & (b_0^{(1)} + b_0^{(3)} + b_0^{(2)}) & 0 & 0 \\ -(b_1^{(1)} + b_1^{(2)} + b_1^{(3)}) & 0 & (b_2^{(1)} + b_2^{(2)} + b_2^{(3)}) & -(b_1^{(1)} c_1 + b_{zf}^{(2)} + b_1^{(3)} c_3) \\ (c_1 b_0^{(1)} + b_{f'}^{(2)} + c_3 b_0^{(3)}) & 0 & -(b_1^{(1)} c_1 + b_{zf}^{(2)} + b_1^{(3)} c_3) & (c_1^2 b_0^{(1)} + b_{f'}^{(2)} + c_3^2 b_0^{(3)}) \end{bmatrix}. \quad (\text{B10})$$

## Références bibliographiques

- [1] M. KOIZUMI, “*FGM activities in Japan.*” *Composites Part B: Engineering*, 1997, vol. 28, no 1-2, p. 1-4.
- [2] CHAUHAN, K. Pankaj et I. A. KHAN, “*Review on analysis of functionally graded material beam type structure.*” *International Journal of Advanced Mechanical Engineering*, 2014, vol. 4, no 3, p. 299-306.
- [3] K. AKOUSSAN, “*Modélisation et conception de structures composites viscoélastiques à haut pouvoir amortissant,*” 2015. Thèse de doctorat. Université de Lorraine.
- [4] C. Lanczos, “An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators.” *United States Governm. Press Office Los Angeles, CA, 1950.*
- [5] P. Ladevèze, G. Lubineau, and D. Marsal, “*Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites.*” *Composites Science and Technology*, vol. 66, no. 6, pp. 698–712, May 2006, doi: 10.1016/j.compscitech.2004.12.026.
- [6] M. Bilasse, “*Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique,*” 2010. Thèse de doctorat. Université de Lorraine.
- [7] T. Pritz, “*Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson’s ratio of real solid materials.*” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 214, no. 1, pp. 83–104, Jul. 1998, doi: 10.1006/jsvi.1998.1534.
- [8] G.KERGOURLAY, E. BALMÈS, et G. LEGAL, “*A characterization of frequency–temperature–prestress effects in viscoelastic films.*” *Journal of sound and vibration*, 2006, vol. 297, no 1-2, p. 391-407.
- [9] G. Kergourlay, “*Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques- Application à une enceinte acoustique,*” 2004. Thèse de doctorat. Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris.
- [10] R. A. Schapery, “*Viscoelastic behavior and analysis of composite materials,*” *Mechanics of composite materials*, 1974.
- [11] D. J. Mead, AD Nashif, DIG Jones, JP Henderson, “*Vibration Damping,*” John Wiley, Chichester (1985), ISBN 0 471 86 7721. Price:£ 59.50. Academic Press, 1986.
- [12] M. L. Williams, R. F. Landel, and J. D. Ferry, “*The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids.*” *J. Am. Chem. Soc.*, vol. 77, no. 14, pp. 3701–3707, Jul. 1955, doi: 10.1021/ja01619a008.
- [13] C. G’sell and J.M. Haudin. 1995, “*Introduction à la mécanique des polymères.*” *Institut National Polytechnique de Lorraine*, 345–393, ISBN 2-905267-22-4.
- [14] J. Landier, “*Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich.*” 1993. Thèse de doctorat. *Université Paul Verlaine-Metz.*
- [15] G. A. Lesieutre, “*Finite elements for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties,*” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, no. 12, pp. 1567–1579, 1992.
- [16] D. J. McTavish and P. C. Hughes, “*Modeling of linear viscoelastic space structures.*” *Transaction of ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 115, pp. 103–110.
- [17] R. L. Bagley and P. J. Torvik, “On the fractional calculus model of viscoelastic behavior,” *Journal of Rheology*, vol. 30, no. 1, pp. 133–155, 1986.

- [18] M. A. Biot, “Variational Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to Viscoelasticity,” *Phys. Rev.*, vol. 97, no. 6, pp. 1463–1469, Mar. 1955, doi: 10.1103/PhysRev.97.1463.
- [19] Y. Yiu, “*Finite element analysis of structures with classical viscoelastic materials*,” in 34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, La Jolla, CA, pp. 2110–2119, 1993.
- [20] M. A. Trindade, A. Benjeddou, and R. Ohayon, “*Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping*.” *J. Vib. Acoust.*, vol. 122, no. 2, pp. 169–174, 2000.
- [21] M. A. Trindade, “*Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques: poutres sandwich/multicouches intelligentes*,” 2000. Thèse de doctorat, CNAM.
- [22] M. A. Trindade, “*Reduced-order finite element models of viscoelastically damped beams through internal variables projection*,” *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 128, pp. 501–508, 2006, DOI: 10.1115/1.2202155.
- [23] A. C. Galucio, J.-F. Deü, and R. Ohayon, “Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators,” *Computational Mechanics*, vol. 33, no. 4, pp. 282–291, 2004.
- [24] T. Pritz, “Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 265, no. 5, pp. 935–952, 2003.
- [25] S.-Y. Kim and D.-H. Lee, “Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured FRFs,” *Journal of sound and vibration*, vol. 324, no. 3–5, pp. 570–586, 2009.
- [25] L. Cappelli, M. Montemurro, F. Dau, L. Guillaumat. Multi-scale identification of the viscoelastic behaviour of composite materials through a non-destructive test. *Mechanics of Materials*, URL :<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103137>, 2019 (in press).
- [27] A. Dahan-Dalmédico, “*Mécanique et théorie des surfaces: les travaux de Sophie Germain*,” *Historia mathematica*, vol. 14, no. 4, pp. 347–365, 1987.
- [28] F. Focé, “*The theory of elasticity between molecular and continuum approach in the six century*,” in *Entre Mécanique et Architecture/Between Mechanics and Architecture*, Springer, 1995, pp. 301–316.
- [29] G. Kirchhoff, “*Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1850, no. 40, pp. 51–88, 1850.
- [30] A. E. H. Love, “*XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell*,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)*, no. 179, pp. 491–546, 1888.
- [31] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, and E. M. Daya, “*Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites*,” *Composite Structures*, vol. 84, no. 3, pp. 282–292, Jul. 2008, doi: 10.1016/j.compstruct.2007.08.007.
- [32] E. Carrera, “*Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells*,” *Applied Mechanics Reviews*, vol. 56, no. 3, pp. 287–308, May 2003, doi: 10.1115/1.1557614.
- [33] Y. M. Ghugal and R. P. Shimpi, “*A Review of Refined Shear Deformation Theories for Isotropic and Anisotropic Laminated Beams*,” *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 20, no. 3, pp. 255–272, Feb. 2001, doi: 10.1177/073168401772678283.
- [34] R. D. Mindlin, “*Influence of rotatory inertia and shear flexural motions of isotropic elastic plates*.” *J. appl. Mech.*, 1951, vol. 18, p. 31–38.

- [35] J. N. Reddy, “A simple higher-order theory for laminated composite plates.” *Journal of Applied Mechanics*, 1984, pp. 745-752.
- [36] M. Touratier, “An efficient standard plate theory,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 29, no. 8, pp. 901–916, Jan. 1991, doi: 10.1016/0020-7225(91)90165-Y.
- [37] M. Şimşek, “Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 240, no. 4, pp. 697–705, Apr. 2010, doi: 10.1016/j.nucengdes.2009.12.013.
- [38] J. N. Reddy, “A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 25, no. 6, pp. 677–686, Jan. 1990, doi: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
- [39] M. Aydogdu, “A new shear deformation theory for laminated composite plates,” *Composite structures*, vol. 89, no. 1, pp. 94–101, 2009.
- [40] J. L. Mantari, A. S. Oktem, and C. G. Soares, “Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory,” *Composite structures*, vol. 94, no. 1, pp. 37–49, 2011.
- [41] D. Ross and E. Ungar, “EM Kerwin Damping of Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminate,” *Structural damping* (1959): 49-97.
- [42] D. Ross and E. Kerwin, “Damping of flexural vibration in plates by free and constrained viscoelastic layers,” *BBN Report*, vol. 623, 1959.
- [43] E. M. Kerwin Jr, “Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer,” *The Journal of the Acoustical society of America*, vol. 31, no. 7, pp. 952–962, 1959.
- [44] E. E. Ungar, “Loss factors of viscoelastically damped beam structures.” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 34, no. 8, pp. 1082–1089, 1962.
- [45] Y.-Y. Yu, “Damping of flexural vibrations of sandwich plates,” *Journal of the Aerospace Sciences*, vol. 29, no. 7, pp. 790–803, 1962.
- [46] R. A. DiTaranto, “Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams.” *Journal of applied Mech* (1965): 881-886.
- [47] D. J. Mead and S. Markus, “The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions,” *Journal of sound and vibration*, vol. 10, no. 2, pp. 163–175, 1969.
- [48] D. J. Mead and S. Markus, “Loss factors and resonant frequencies of encastre damped sandwich beams,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 12, no. 1, pp. 99–112, 1970.
- [49] M.-J. Yan and E. H. Dowell, “Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams.” *Journal of applied Mech*, Vol.39 (1972).
- [50] Y. S. Rao and B. C. Nakra, “Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 34, no. 3, pp. 309–326, 1974.
- [51] J.-F. He and B.-A. Ma, “Analysis of flexural vibration of viscoelastically damped sandwich plates,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126, no. 1, pp. 37–47, 1988.
- [52] Y. Koutsawa, “Modélisation et conception multi-échelles des matériaux: de la description atomique discrète aux modèles du continu. Application aux propriétés amortissantes des pare-brises,” 2008. Thèse de doctorat. Université Paul Verlaine-Metz.
- [53] Y. P. Lu, J. W. Killian, and G. C. Everstine, “Vibrations of three layered damped sandwich plate composites.” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 64, no. 1, pp. 63–71, 1979.
- [54] C. D. Johnson and D. A. Kienholz, “Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers,” *AIAA journal*, vol. 20, no. 9, pp. 1284–1290, 1982.

- [55] M. L. Soni, “*Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures*,” Shock and Vibration Information Center The Shock and Vibration Bull, Pt. 1 p 97-109(SEE N 83-10216 01-31), 1981.
- [56] E. mostafa Daya and M. Potier-Ferry, “*A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures*,” Revue Européenne des Eléments, vol. 11, no. 1, pp. 39–56, 2002.
- [57] L. Duigou and M. Potier-Ferry, “*Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells*,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 192, no. 11–12, pp. 1323–1335, 2003.
- [58] B.-A. Ma and J.-F. He, “*A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates*,” Journal of Sound and Vibration, vol. 152, no. 1, pp. 107–123, 1992.
- [59] E. Ioannides and P. Grootenhuis, “*A finite element analysis of the harmonic response of damped three-layer plates*,” Journal of Sound and Vibration, vol. 67, no. 2, pp. 203–218, 1979.
- [60] F. Abdoun, L. Azrar, E. M. Daya, and M. Potier-Ferry, “*Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method*,” Computers & Structures, vol. 87, no. 1–2, pp. 91–100, Jan. 2009, doi: 10.1016/j.compstruc.2008.08.006.
- [61] K.-J. Bathe, “*Finite element procedures. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 1996*,” in rev. de: Finite element procedures in engineering analysis, 1982.
- [62] A. Y. Leung, “*Subspace iteration for complex symmetric eigenproblems*,” Journal of Sound and Vibration, vol. 184, no. 4, pp. 627–637, 1995.
- [63] W. E. Arnoldi, “*The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem*,” Quarterly of applied mathematics, vol. 9, no. 1, pp. 17–29, 1951.
- [64] H. Voss, “*An Arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems*,” BIT numerical mathematics, vol. 44, no. 2, pp. 387–401, 2004.
- [65] X. Chen, H. L. Chen, and X. L. Hu, “*Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach*,” Journal of Sound and Vibration, vol. 222, no. 5, pp. 803–812, 1999.
- [66] E. M. Daya and M. Potier-Ferry, “*A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures*,” Computers & Structures, vol. 79, no. 5, pp. 533–541, Feb. 2001, doi: 10.1016/S0045-7949(00)00151-6.
- [67] Y. Koutsawa, I. Charpentier, E. M. Daya and M. Cherkaoui, “*A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part I: The Diamant toolbox*,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, no. 3–4, pp. 572–577, 2008.
- [68] F. Boumediene, J.-M. Cadou, and L. Duigou, “*A reduction model for eigensolutions of damped viscoelastic sandwich structures*,” Mechanics Research Communications, vol. 57, pp. 74–81, 2014.
- [69] H. . Yin, L. . Sun, and G. . Paulino, “*Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions*,” Acta Materialia, vol. 52, no. 12, pp. 3535–3543, Jul. 2004, doi: 10.1016/j.actamat.2004.04.007.
- [70] L. S. Liu, Q. J. Zhang, and P. C. Zhai, “*The optimization design on metal/ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method*,” Materials Science Forum. Vol. 423. Trans Tech Publications Ltd, 2003.
- [71] E. Mueller, Č. Drašar, J. Schilz, and W. Kaysser, “*Functionally graded materials for sensor and energy applications*,” Materials Science and Engineering: A, vol. 362, no. 1–2, pp. 17–39, 2003.



- [72] J. Qiu, J. Tani, T. Ueno, T. Morita, H. Takahashi, and H. Du, “*Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators,*” *Smart materials and Structures*, vol. 12, no. 1, p. 115, 2003.
- [73] F. Watari *et al.*, “*Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application,*” *Composites Science and Technology*, vol. 64, no. 6, pp. 893–908, 2004.
- [74] B. Paszkiewicz *et al.*, “*Functionally graded semiconductor layers for devices application,*” *Vacuum*, vol. 82, no. 4, pp. 389–394, 2007.
- [75] S. Uemura, “*The activities of FGM on new application,*” 2003, In *Materials Science Forum* (Vol. 423, pp. 1-10). Trans Tech Publications Ltd.
- [76] S. H. Chan, “*Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine,*” *International journal of thermal sciences*, vol. 40, no. 3, pp. 255–261, 200.
- [77] T. Hirai and L. Chen, “*Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan.*” *Materials science Forum*, 1999, vol. 308, pp. 509–514.
- [78] E. Autissier, “*Elaboration de matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles pour les composants face au plasma des machines de fusion thermonucléaires,*” 2014. Thèse de doctorat. Dijon.
- [79] J. Chu, H. ISHIBASHI, K. HAYASHI, H. TAKEBE, and K. MORINAGA, “*Slip casting of continuous functionally gradient material,*” *Journal of the Ceramic Society of Japan*, vol. 101, no. 1175, pp. 841–844, 1993.
- [80] M. Tokita, “*Development of large-size ceramic/metal bulk FGM fabricated by spark plasma sintering.*” *Materials science Forum*, 1999, vol. 308, pp. 83–88.
- [81] M. S. A. HOUARI, A. BESSAIM, A. MEGUENI, A. TOUNSI, and B. E. A. ADDA, “*Analyse statique de la flexion des poutres ZrO<sub>2</sub>/Ti-6Al-4V en P-FGM,*” 2015.
- [82] A. Bessaim, M. S. A. Houari, A. Megueni, A. Tounsi, and B. E. A. Adda, “*Analyse statique de la flexion des poutres ZrO<sub>2</sub>/ Ti-6Al-4V en P-FGM,*”. *Nature et Technologie*, no. 9, p. 28-36, 2013.
- [83] R. Adams and D. Bacon, “*Effect of fibre orientation and laminate geometry on the dynamic properties of CFRP,*” *Journal of Composite Materials*, vol. 7, no. 4, pp. 402–428, 1973.
- [84] R. Ni and R. Adams, “*The damping and dynamic moduli of symmetric laminated composite beams—theoretical and experimental results,*” *Journal of Composite Materials*, vol. 18, no. 2, pp. 104–121, 1984.
- [85] R. Ni, D. Lin, and R. Adams, “*The dynamic properties of carbon-glass fibre sandwich-laminated composites: theoretical, experimental and economic considerations,*” *Composites*, vol. 15, no. 4, pp. 297–304, 1984.
- [86] J. H. Yim, S. Y. Cho, Y. J. Seo, and B. Z. Jang, “*A study on material damping of 0 laminated composite sandwich cantilever beams with a viscoelastic layer,*” *Composite structures*, vol. 60, no. 4, pp. 367–374, 2003.
- [87] R. Rikards, “*Finite element analysis of vibration and damping of laminated composites,*” *Composite structures*, vol. 24, no. 3, pp. 193–204, 1993.
- [88] R. Rikards, A. Chate, and E. Barkanov, “*Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites,*” *Computers & structures*, vol. 47, no. 6, pp. 1005–1015, 1993.
- [89] S. H. Zhang and H. L. Chen, “*A study on the damping characteristics of laminated composites with integral viscoelastic layers,*” *Composite Structures*, vol. 74, no. 1, pp. 63–69, 2006.

- [90] H. Arvin, M. Sadighi, and A. R. Ohadi, “A numerical study of free and forced vibration of composite sandwich beam with viscoelastic core,” *Composite Structures*, vol. 92, no. 4, pp. 996–1008, 2010.
- [91] A. J. M. Ferreira *et al.*, “A finite element model using a unified formulation for the analysis of viscoelastic sandwich laminates,” *Composites Part B: Engineering*, vol. 45, no. 1, pp. 1258–1264, 2013.
- [92] E. Carrera, M. Filippi, and E. Zappino, “Free vibration analysis of rotating composite blades via Carrera Unified Formulation,” *Composite Structures*, vol. 106, pp. 317–325, 2013.
- [93] W. Zhen and C. Wanji, “An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams,” *Composite Structures*, vol. 84, no. 4, pp. 337–349, 2008.
- [94] M. Y. Yasin and S. Kapuria, “An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells,” *Composite Structures*, vol. 98, pp. 202–214, 2013.
- [95] M. Hyer, W. J. Anderson, and R. Scott, “Non-linear vibrations of three-layer beams with viscoelastic cores I. Theory,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 46, no. 1, pp. 121–136, 1976.
- [96] M. W. Hyer, W. J. Anderson, and R. A. Scott, “Non-linear vibrations of three-layer beams with viscoelastic cores, II: Experiment,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 61, no. 1, pp. 25–30, Nov. 1978, doi: 10.1016/0022-460X(78)90038-X.
- [97] E. J. Kovac Jr, W. J. Anderson, and R. A. Scott, “Forced non-linear vibrations of a damped sandwich beam,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 17, no. 1, pp. 25–39, 1971.
- [98] V. P. Iu, Y. K. Cheung, and S. L. Lau, “Non-linear vibration analysis of multilayer beams by incremental finite elements, Part I: Theory and numerical formulation.” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 100, no. 3, pp. 359–372, 1985.
- [99] C. Bischof, Ed., “Advances in automatic differentiation.” *Lecture Notes in Computational Science and Engineering Series*, vol. 64. Springer, Berlin.
- [100] Tan-Tien Nguyen, Nam-Il Kim, and Jaehong Lee, “Analysis of thin-walled open-section beams with functionally graded materials.” *Compos. Struct.* 138, (March 2016), 75–83. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.052>
- [101] Noureddine Ziane, Sid Ahmed Meftah, Hichem Abdesselem Belhadj, Abdelouahed Tounsi, and El Abbas Adda Bedia, “Free vibration analysis of thin and thick-walled FGM box beams.” *Int.J. Mech. Sci.* 66, (January2013), 273–282. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.12.001>
- [102] J. W. Lee and J. Y. Lee, “Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 122, pp. 1–17, Mar. 2017, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011.
- [103] K. K. Pradhan and S. Chakraverty, “Effects of different shear deformation theories on free vibration of functionally graded beams,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 82, pp. 149–160, May 2014, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.03.014.
- [104] H. Su and J. R. Banerjee, “Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams,” *Computers & Structures*, vol. 147, pp. 107–116, Jan. 2015, doi: 10.1016/j.compstruc.2014.10.001.
- [105] H.-T. Thai and T. P. Vo, “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 62, no. 1, pp. 57–66, Sep. 2012, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014.

- [106] W. Li, H. Ma, and W. Gao, “A higher-order shear deformable mixed beam element model for accurate analysis of functionally graded sandwich beams,” *Composite Structures*, vol. 221, p. 110830, Aug. 2019, doi: 10.1016/j.compstruct.2019.04.002.
- [107] T.-K. Nguyen, T. Truong-Phong Nguyen, T. P. Vo, and H.-T. Thai, “Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory,” *Composites Part B: Engineering*, vol. 76, pp. 273–285, Jul. 2015, doi: 10.1016/j.compositesb.2015.02.032.
- [108] L. C. Trinh, T. P. Vo, A. I. Osofero, and J. Lee, “Fundamental frequency analysis of functionally graded sandwich beams based on the state space approach,” *Composite Structures*, vol. 156, pp. 263–275, Nov. 2016, doi: 10.1016/j.compstruct.2015.11.010.
- [109] T. Q. Bui, A. Khosravifard, C. Zhang, M. R. Hematiyan, and M. V. Golub, “Dynamic analysis of sandwich beams with functionally graded core using a truly meshfree radial point interpolation method,” *Engineering Structures*, vol. 47, pp. 90–104, Feb. 2013, doi: 10.1016/j.engstruct.2012.03.041.
- [110] M. Chehel Amirani, S. M. R. Khalili, and N. Nemati, “Free vibration analysis of sandwich beam with FG core using the element free Galerkin method,” *Composite Structures*, vol. 90, no. 3, pp. 373–379, Oct. 2009, doi: 10.1016/j.compstruct.2009.03.023.
- [111] T. P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, A. Maheri, and J. Lee, “Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory,” *Engineering Structures*, vol. 64, pp. 12–22, Apr. 2014, doi: 10.1016/j.engstruct.2014.01.029.
- [112] R. K. Bhangale and N. Ganesan, “Vibration and damping behavior of a viscoelastic functionally graded sandwich plate,” *Adv Vib Eng*, vol. 6, no. 4, pp. 333–341, 2007.
- [113] M. Liu, Y. Cheng, and J. Liu, “High-order free vibration analysis of sandwich plates with both functionally graded face sheets and functionally graded flexible core,” *Composites Part B: Engineering*, vol. 72, pp. 97–107, Apr. 2015, doi: 10.1016/j.compositesb.2014.11.037.
- [114] B. Liu, A. J. M. Ferreira, Y. F. Xing, and A. M. A. Neves, “Analysis of functionally graded sandwich and laminated shells using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method,” *Composite Structures*, vol. 136, pp. 546–553, 2016.
- [115] C. Yang, G. Jin, X. Ye, and Z. Liu, “A modified Fourier–Ritz solution for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic and functionally graded materials,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 106, pp. 1–18, Feb. 2016, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.11.031.
- [116] J. S. Moita, A. L. Araújo, V. F. Correia, C. M. Mota Soares, and J. Herskovits, “Active-passive damping in functionally graded sandwich plate/shell structures,” *Composite Structures*, vol. 202, pp. 324–332, Oct. 2018, doi: 10.1016/j.compstruct.2018.01.089.
- [117] K. Akoussan, H. Boudaoud, E. M. Daya, & E. Carrera, “Vibration modeling of multilayer composite structures with viscoelastic layers.” *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 22.1-2 (2015): 136-149.
- [118] H. Ziou, H. Guenfoud, and M. Guenfoud, “Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method,” *IJSTRUCTE*, vol. 7, no. 3, p. 239, 2016, doi: 10.1504/IJSTRUCTE.2016.077719.
- [119] H. Guenfoud, H. Ziou, M. Himeur, and M. Guenfoud, “Analyses of a composite functionally graded material beam with a new transverse shear deformation function,” *Journal of Applied Engineering Science & Technology*, vol. 2, no. 2, pp. 105–113, 2016.

- [120] V. S. Rao, “*Finite element analysis of viscoelastically damped composite structures*,” 1991. Ph.D., Department of Aerospace Engineering, Mechanics and Engineering Science, University of Florida, Gainesville.
- [121] M. Z. Aşık and S. Tezcan, “*A mathematical model for the behavior of laminated glass beams*,” *Computers & Structures*, vol. 83, no. 21–22, pp. 1742–1753, 2005.
- [122] B. Cochelin, “*A path-following technique via an asymptotic-numerical method*,” *Computers & structures*, vol. 53, no. 5, pp. 1181–1192, 1994.
- [123] W. P. Johnson, “*The curious history of Faà di Bruno’s formula*,” *The American mathematical monthly*, vol. 109, no. 3, pp. 217–234, 2002.
- [124] E. T. Bell, “*Exponential polynomials*.” *Annals of Mathematics*, pp. 258–277, 1934.
- [125] A. Griewank and A. Walther, “*Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*.” SIAM, 2008.



## Résumé

On propose par le biais de cette thèse un outil numérique pour l'étude statique et dynamique des structures viscoélastiques constituées de matériaux à gradient de propriétés (FGM) pour le contrôle des vibrations par amortissement passif. L'objectif est de mettre à la disposition des ingénieurs un code générique basé sur l'approche élément fini pour des calculs de dimensionnements sur des poutres sandwich FGM à âme viscoélastique destinées aux applications exigeant la légèreté et une bonne résistance thermique et mécanique comme le domaine de l'aérospatial, de l'automobile et du nucléaire. Pour atteindre cet objectif nous avons d'abord proposé un modèle numérique pour l'étude statique et des vibrations libres des poutres sandwich FGM à comportement élastique. Ce modèle élément fini est implémenté dans l'environnement du code Matlab. A l'aide de ce code nous comparons les différentes théories de poutre pour différentes configurations géométriques et différentes conditions aux limites. Ainsi, la limite de la théorie classique de poutre dans l'étude des structures courtes est soulignée. Aussi, avec ce modèle numérique, l'étude du couplage flexion membrane et rotation membrane est possible. De là, il est montré que les structures FGM sont très sensibles aux effets de couplages spatiaux et du gauchissement à cause de la répartition non symétrique de la matière dans leurs sections droites. Dans le code proposé, la résolution du problème de vibrations est possible grâce à des méthodes classiques de résolution des problèmes aux valeurs propres et vecteurs propres. Pour introduire de l'amortissement passif dans la structure sandwich FGM, nous avons proposé un modèle de poutre sandwich dont les faces sont en matériaux FGM et le cœur en matériaux viscoélastiques. Ce modèle est également implémenté dans le langage de programmation Matlab et proposé sous forme d'un outil générique. L'intérêt de cet outil numérique réside dans sa capacité à calculer les propriétés modales ainsi que le comportement de la structure sandwich FGM viscoélastique tout en prenant en compte la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique, les conditions aux limites et le couplage membrane-flexion et membrane-rotation propres aux matériaux FGM. Le problème de vibrations libres est fortement non linéaire dans ce cas à cause de la non linéarité matériaux induite par la couche molle. Dans le code proposé, la résolution de ce problème est possible grâce au couplage de la technique d'homotopie, de la méthode asymptotique numérique et de la différentiation automatique. Par ce travail, l'apport des matériaux FGM dans l'amélioration du pouvoir amortissant des structures est démontré. Dans la suite du travail, nous proposons une formulation élément fini pour calculer l'amplitude des vibrations forcées des structures sandwich FGM viscoélastiques. La résolution du problème de vibration forcée est possible par utilisation de la méthode des bandes passantes. Une étude sur la contribution des matériaux FGM dans la réduction des amplitudes de vibrations est menée pour différentes lois viscoélastiques. Il est prouvé dans cette étude que par un contrôle direct du gradient de composition des matériaux FGM, il est possible d'optimiser le pouvoir amortissant des structures même pour les modes de basses fréquences pour lesquels les matériaux composites classiques présentent un pouvoir amortissant nécessitant des améliorations.

**Mots-clés:** Poutre, FGM, sandwich, viscoélastique, non linéarité matérielle, élément fini, couplage flexion membrane, gauchissement, vibration, méthode asymptotique numérique, technique d'homotopie, différentiation automatique.

## Abstract

This thesis proposes a numerical tool for the static and dynamic study of viscoelastic structures made of Functionally Graded Materials (FGM) for vibration control by passive damping. The objective is to make available to engineers a generic code based on the finite element approach for sizing calculations on FGM sandwich beam with viscoelastic core for applications requiring lightness and good thermal and mechanical resistance such as aerospace, automotive and nuclear. To reach this objective we first proposed a numerical model for the static and free vibration study of FGM sandwich beams with elastic behavior. This finite element model is implemented in the Matlab code environment. Using this code, we compare different beam theories for different geometric properties and boundary conditions. Thus, the limit of the classical beam theory in the study of short structures is highlighted. Also with this numerical model, the study of axial-bending and axial-rotation coupling is possible. From this, it is shown that FGM structures are very sensitive to spatial coupling and warping effects because of the non-symmetrical distribution of the material in their cross sections. In the proposed code, the resolution of the vibration problem is possible using classical eigenvalue and eigenvector problem solving methods. Then to introduce passive damping in the FGM sandwich structure, we proposed a sandwich beam model with FGM materials faces and viscoelastic materials core. This model is also implemented in the Matlab language and proposed as a generic tool. The interest of this numerical tool lies in its ability to compute the modal properties as well as the behavior of the viscoelastic FGM sandwich beam while taking into account the frequency dependence of the viscoelastic behavior, the boundary conditions and the axial-bending and axial-rotation coupling specific to FGM materials. The free vibration problem is non-linear in this case due to the material non-linearity induced by the soft layer. In the proposed code, the resolution of this problem is possible thanks to the coupling of the homotopy technical, the asymptotic numerical method and the automatic differentiation. Through this work, the contribution of FGM materials in the improvement of the damping power of structures is highlighted. In the continuation of the work, we propose a finite element formulation to compute the amplitude of forced vibrations of viscoelastic FGM sandwich structures. The resolution of the forced vibration problem is possible by using the bandwidths method. A study on the contribution of FGM materials in the reduction of vibration amplitudes is carried out for different viscoelastic laws. It is proved in this study that by a direct control of the composition gradient of FGM materials it is possible to optimize the damping power of structures even for low frequency modes for which classical composite materials have a damping power requiring improvement.

**Keywords:** beam, FGM, sandwich, viscoelastic, material non-linearity, Finite element, Axial-bending coupling, warping, vibration, asymptotic numerical method, homotopy technical, automatic differentiation.