



HAL
open science

Étude des modèles de Richardson-Gaudin de spin- $\frac{1}{2}$ avec champ magnétique arbitraire

Claude Dimo Panjio

► **To cite this version:**

Claude Dimo Panjio. Étude des modèles de Richardson-Gaudin de spin- $\frac{1}{2}$ avec champ magnétique arbitraire. Physique mathématique [math-ph]. Université de Lorraine, 2021. Français. NNT : 2021LORR0154 . tel-03418876

HAL Id: tel-03418876

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03418876>

Submitted on 29 Apr 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Étude des modèles de Richardson-Gaudin de $\text{spin-}\frac{1}{2}$ avec champ magnétique arbitraire.

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 27 septembre 2021

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Mention Physique)

par

DIMO PANJIO Claude Alain

Composition du jury

- Président :* Daniel MALTERRE, *Professeur des Universités CNU 28,*
Institut Jean Lamour, Université de Lorraine.
- Rapporteurs :* Guiliano ORSO, *Maître de Conférence CNU 28 - HDR,*
Laboratoire des MatéR-Griaux et Phénomènes Quantiques,
Université Paris-Diderot-Paris.
Thomas SCHMIDT, *Professeur,*
Groupe Théorique des Systèmes Quantiques Mésoscopiques,
Université du Luxembourg.
- Examineur :* Nicolas CRAMPÉ, *Chargé de Recherche CNRS section,*
Institut Denis-Poisson, Université de Tours.
- Directeur de thèse :* Dragi KAREVSKI, *Professeur des Universités CNU 28,*
Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques de Nancy,
Université de Lorraine.
- Co-directeur de thèse :* Alexandre FARIBAULT, *Maître de Conférences CNU 28,*
Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques de Nancy,
Université de Lorraine.

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Avant toute chose, je tiens à rappeler que ce travail de thèse s'inscrit dans la suite de mon stage de Master qui avait été dirigé par Alexandre FARIBAULT, qui est aussi mon co-directeur de thèse et à qui je dois beaucoup, d'un point de vue de la recherche scientifique.

Mes remerciements vont donc d'abord à Alexandre FARIBAULT, un homme simple qui a toujours su bien me traiter depuis mon stage de Master. En effet, il m'a toujours donné espoir, tout en m'encourageant à aller de l'avant lorsque les choses se compliquaient, ceci en me suggérant des idées constructives. Il est un bon pédagogue! Je me rappelle encore qu'au début de ce projet doctoral, je considérais les calculs mathématiques comme la finalité du projet et non comme un outil qui me permettrait de mieux comprendre la physique liée aux modèles sur lesquels j'ai travaillé pendant les trois années de ma thèse. Dans sa simplicité et surtout sa patience, il a su me faire comprendre après plusieurs tentatives, à quel point je me trompais dans cette manière que j'avais de penser que la physique se réduisait juste aux calculs mathématiques. Depuis lors, je suis encore plus heureux de faire de la physique chaque jour, puisque j'arrive à mieux la comprendre grâce à cette nouvelle vision que j'ai d'elle, même si je sais que le chemin est encore long, et c'est grâce à lui. Mon co-directeur de thèse est toujours à l'écoute et disposé à m'enseigner des astuces qui m'aideront à poursuivre mon projet professionnel qui consiste à devenir enseignant-chercheur. J'ai été très heureux de partager ces quelques années de ma vie avec lui.

Dans un second temps, je remercie mon directeur de thèse, Dragi KAREVSKI, pour ses multiples conseils, ses enseignements et surtout pour la confiance qu'il a eu en moi en acceptant de diriger mon projet de thèse.

Pour continuer, je voudrais remercier les Professeurs Daniel MALTERRE de l'Université de Lorraine France et Lukong FAI de l'Université de Dschang Cameroun, et toutes personnes ayant de loin ou près participé à la mise en place du partenariat inter-universitaire grâce auquel j'ai pu poursuivre mes études en France. C'est en quelque sorte grâce à cette convention que j'ai eu la chance de faire une thèse de physique à l'université de Lorraine.

Je tiens également à remercier tous mes professeurs au Cameroun et en France, qui m'ont transmis des connaissances, lesquelles m'ont considérablement été utiles dans la réalisation de ce projet doctoral.

En suite, je rends un grand hommage à mon papa, Monsieur DIMO Jean Claude et à ma maman NINGOUO Déborah, deux personnes braves et fortes qui ont contribué de manière très significative à l'être que je suis devenu aujourd'hui. Ils m'ont toujours soutenu et veillé à ce que je ne manque de rien et ce, de toutes les manières possibles.

En fin, je remercie vivement tout le reste de ma grande famille, ma femme et mes fils pour leur présence permanente dans ma vie, mes amis, camarades de classe et collègues au Cameroun et en France pour leur inévitable soutien. Je remercie aussi toutes autres personnes ayant contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail de thèse.

*Je dédie ce manuscrit à mon papa chéri Monsieur,
DIMO Jean Claude, un homme brillant et fort qui a
toujours su nous montrer que le travail et la sociabilité
sont deux leviers importants de la réussite.*

Sommaire

Introduction générale	1
1 Exposé détaillé du sujet de thèse	1
2 Approche méthodologique	2
3 Plan détaillé	3

Partie I Études statiques

Chapitre 1	
Relations quadratiques entre opérateurs de spin-$\frac{1}{2}$	13
1.1 Ansatz de Bethe Algébrique dans les modèles de Gaudin de type XXX. . . .	14
1.1.1 Relations de commutation	14
1.1.2 Équation de Yang-Baxter classique	16
1.1.3 Équations de Bethe	16
1.1.4 Équations quadratiques de Bethe	18
1.2 Relations quadratiques entre charges conservées de spin- $\frac{1}{2}$ de R-G et équations quadratiques de Bethe	20
1.2.1 Équations quadratiques de Bethe selon une autre approche	20
1.3 Modèles et leur intégrabilité	20
1.4 Relations quadratiques entre opérateurs	22
1.5 Utilisation de l'intégrabilité dans la construction des formes quadratiques entre charges conservées	24
1.6 Quelques cas connus	26
1.6.1 Modèles de R-G de type XXX	26
1.6.2 Modèles anisotropes de R-G de type XXZ	28
1.7 Conclusion	29

Chapitre 2**Classification, paramétrisation et états génériques dans les modèles de spin-** $\frac{1}{2}$ **31**

2.1	Classification des modèles	33
2.1.1	Modèles de Gaudin	33
2.1.2	Modèles de Richardson-Gaudin	33
2.2	Paramétrisation des modèles elliptiques non-antisymétriques	36
2.3	Solutions	37
2.3.1	Valeurs propres des charges conservées	37
2.3.2	Observables locales	38
2.3.3	Resultats numériques	39
2.4	États propres	39
2.5	Preuve de la représentation du projecteur	42
2.5.1	Résolution "off-shell" de l'identité et du produit d'opérateurs	44
2.6	Développement explicite de projecteurs	45
2.7	Conclusion	48

Chapitre 3**Formes quadratiques entre operateurs de R-G avec couplages bidirectionnels**

3.1	Modèles et leur intégrabilité	51
3.2	Relations quadratiques entre opérateurs	53
3.3	Intégrabilité et relations quadratiques	56
3.4	Carré des charges conservées des modèles de Gaudin de type XXZ avec bordures triangulaires	58
3.5	Conclusion	60

Chapitre 4**Fonctions de corrélation à deux points**

4.1	Modèles rationnels de R-G	62
4.2	Facteur de forme selon \hat{z} obtenu à partir des dérivées des valeurs propres	63
4.3	Considerations mathématiques	64
4.4	Facteur de forme selon \hat{z} par une autre approche	68
4.5	Facteurs de forme à deux points suivant \hat{z}	74
4.6	Facteurs de forme à deux $S_i^+ S_j^-$	79
4.6.1	Relations entre déterminants	83
4.7	Conclusion	84

Chapitre 5**Modèles de Richardson-Gaudin de type XX et états sombres**

5.1	Modèles et leur intégrabilité	88
5.2	Grandeurs physiques calculées	90
5.2.1	Valeurs moyennes de spins	90
5.2.2	Facteur de pureté	91
5.3	Résultats	92
5.3.1	Existence des états sombres	92
5.3.2	Mécanisme de formation des états sombres	93
5.3.3	États clairs	95
5.3.4	États sombres et différents choix de couplages	96
5.3.5	Comportement des états sombres avec le nombre de spins du bain	99
5.3.6	Stabilité des états sombres suivant une orientation donnée du champ magnétique	100
5.4	Conclusion	102

Chapitre 6**États sombres dans les modèles de R-G de type XXX, avec champ arbitraire**

6.1	Modèles	104
6.2	Existence des états sombres	104
6.3	Formation des états sombres	106
6.3.1	Configurations génériques menant à des clusters de type A	110
6.3.2	Configurations génériques menant à des clusters de type B	110
6.3.3	États sombres dans des modèles de tailles importantes	111
6.4	Impact des couplages sur la formation des états sombres	114
6.5	Nombre d'états sombres dans un bain de N-1 particules	116
6.5.1	Nombre d'états sombres issus des clusters de type A	117
6.6	Conclusion	118

Chapitre 7**Dynamique des modèles de spin central****121**

7.1	Modèles	122
-----	-------------------	-----

7.1.1	Modèles instantanément intégrables	122
7.1.2	Modèles instantanément non intégrables	123
7.2	Changement de bases	124
7.3	Application du changement de bases aux modèles	125
7.3.1	Modèles instantanément intégrables	125
7.3.2	Modèles instantanément non intégrables	126
7.4	Perturbation stationnaire	127
7.5	Calcul de quelques grandeurs physiques	130
7.5.1	Energie moyenne du système	130
7.5.2	Valeurs moyennes du spin central	131
7.6	Différents choix du champ magnétique agissant sur l'ensemble des particules du système	132
7.7	Conclusion	133

Conclusions et Perspectives **135**

Annexes

Annexe A
Relations quadratiques entre opérateurs et équations de Bethe pour les modèles de R-G de spin- $\frac{1}{2}$

A.1	Identités de Jacobi dans l'algèbre de Gaudin	139
A.2	Action des opérateurs de $S^2(u)$ sur les états de Bethe	140
A.3	Obtention des équations quadratiques de Bethe à partir des résultats de l'ansatz de Bethe	141
A.4	Carré des charges conservées génériques dans les modèles de R-G	142

Annexe B
Formes quadratiques entre opérateurs de R-G avec couplages bidirectionnels

B.1	Calcul générique du carré des charges conservées contenant des couplages bidirectionnels	145
B.2	Calcul explicite du carré de chaque charge conservée avec bords triangulaire comme combinaison linéaire des autres charges conservées du même type	147

Annexe C
États sombres dans les modèles XX de R-G avec champ arbitraire

C.1	Modèle et charges conservées	151
C.2	Calcul des valeurs moyennes	152

Annexe D

Etats sombres dans les modèles XXX de R-G avec champ arbitraire

D.1 Fonctions de corrélation à deux points 155

Bibliographie **157**

Introduction générale

"L'imagination est plus importante que le savoir." Albert Einstein

"Je ne pense jamais au futur. Il vient bien assez tôt." Albert Einstein

La plupart des systèmes physiques sont dits à N-corps et sont constitués de plusieurs particules qui interagissent entre elles. Or, le comportement des systèmes contenant de nombreuses particules en interaction peut être infiniment plus riche et intéressant que celui des systèmes contenant peu de particules. Même si l'on sait exactement de quelle manière les particules interagissent, leurs propriétés macroscopiques sont rarement le reflet direct de leurs propriétés microscopiques. Le système entier est plus grand que la somme de ses parties ou, selon les mots de Phil Anderson, "*More is different*" [1].

Ce travail de thèse est essentiellement axé sur des modèles composés de plusieurs spins ; les thèmes abordés vont de la suite de récents développements théoriques sur les modèles quantiques intégrables de Richardson-Gaudin (R-G) [2, 3] à des considérations sur la dynamique de modèles non-intégrables construits sur la base de ceux-ci [4]. Ces modèles non-intégrables pourraient être considérés comme des modèles intégrables de R-G plongés dans un champ magnétique agissant sur tous les spins et orienté suivant l'axe \hat{z} .

1 Exposé détaillé du sujet de thèse

Une des représentations typiques de cette classe de systèmes est le hamiltonien de spin central. Dans cette représentation, un spin particulier est couplé d'abord à un champ magnétique local, puis, à une collection d'autres spins constituant le bain. Ce modèle reste intégrable tant que les diverses constantes de couplage décrivant l'interaction du spin central avec chacun des spins du bain obéissent à des contraintes que nous appellerons relations d'intégrabilité.

Ce modèle est d'un intérêt particulier car il offre une description adéquate des phénomènes de décohérence dans les bits quantiques de spin [5]. En effet, en utilisant le spin d'un électron piégé dans un puit quantique comme implémentation d'un qubit, il est possible de contrôler ce dernier par l'utilisation d'un champ magnétique externe s'y couplant. Par contre, la présence, dans le substrat, de spins nucléaires crée un environnement avec lequel le qubit d'intérêt pourrait interagir. En préparant le spin central dans un état quantique précis, les processus d'interaction avec les spins nucléaires constituant le bain peuvent mener, à la « destruction » progressive de cet état préparé. Une compréhension complète et détaillée de l'évolution temporelle de ce type de système devient ainsi, essentielle au développement d'approches permettant de limiter certaines pertes d'informations.

Par contre il a été récemment démontré que dans certains modèles de R-G bien précis, il existe des états propres dans lesquels le spin central peut être dans un état pur complètement décorrélé du bain constitué des spins environnants [6, 7, 8]. Auquel cas, le système se retrouve dans un état appelé **état sombre** qui peut être écrit comme le produit tensoriel de deux états à

savoir l'état du spin central et l'état constitué par le bain. De par leur structure particulière, les états sombres peuvent certainement permettre de réduire la décohérence d'un qubit en l'isolant effectivement de son environnement. L'étude approfondie de ces états particuliers révèle donc une indéniable importance pour la possible amélioration des implémentations réelles de qubits de spins.

Parallèlement, d'un point de vue plus fondamental, la dynamique hors-équilibre des systèmes quantiques intégrables demeure une question qui intéresse particulièrement la physique théorique depuis maintenant plusieurs années. D'une part, pour certains systèmes dynamiques et intégrables, on pourrait à tout temps être en mesure de contrôler leur évolution lorsque les constantes de couplage et les champs magnétiques obéissent aux relations d'intégrabilité. Et pour d'autres, on pourrait, à temps long, s'attendre à ce qu'ils évoluent vers des états stationnaires thermalisés pouvant être décrits par la physique statistique traditionnelle. En effet, les processus d'interaction devraient mener à une redistribution de l'énergie entre les divers degrés de liberté, qui, sans autres contraintes que la conservation de l'énergie totale, devrait reproduire les conditions d'ergodicité menant à grand temps à un état décrit par l'équilibre thermodynamique indépendant des conditions initiales. D'autre part, la dynamique des systèmes quantiques intégrables peut donc garder, même dans son état stationnaire, la signature de l'état initial duquel le système a évolué. La description de ces états stationnaires et toute la dynamique hors de l'équilibre demeure une question activement explorée en physique quantique théorique [9, 10].

2 Approche méthodologique

Les approches numériques traditionnellement utilisées pour la résolution des modèles de R-G sont basées sur l'Ansatz de Bethe algébrique, qui permet d'obtenir une construction relativement simple de leurs états propres. En effet, pour un système intégrable de N spins (incluant le bain), les états propres peuvent être individuellement et entièrement caractérisés par seulement M ($< N$) nombres complexes plutôt que les 2^N nécessaires pour décrire un état propre général d'un système non-intégrable. Ces paramètres doivent être solutions d'un ensemble de M équations algébriques couplées. La recherche des solutions d'un tel système de M équations demeure extrêmement rapide par rapport à la diagonalisation complète d'une matrice de dimension 2^N par 2^N [27]. Cependant, l'application de cette méthode aux modèles traités dans ce manuscrit n'est habituellement possible que lorsque l'on suppose que le champ magnétique est orienté suivant l'axe \hat{z} . Dans un système où les couplages sont isotropes, il est donc toujours possible de trouver des états pour n'importe quelle orientation du champ magnétique. Par contre, pour des couplages anisotropes, le résultat sera exprimé dans des bases différentes ; ce qui rend le passage d'une orientation à l'autre hautement non-trivial. Par conséquent, toute réorientation du champ magnétique nécessite une reconstruction complète des états propres spécifiques à chaque orientation.

Afin de traiter des problèmes pour lesquels le champ magnétique dépend explicitement du temps et varie en norme, il est nécessaire de trouver les états propres de ce système pour toutes les orientations et normes du champ magnétique. Ceci rend évidemment le problème extraordinairement plus complexe numériquement.

Dans le cas du modèle de spin central, il a été récemment constaté, qu'une approche unifiée permet de construire une représentation commune des états propres de ces hamiltoniens et ce, pour toutes les orientations possibles du champ magnétique externe [11]. Ce formalisme s'inscrit dans une vague récente de progrès mathématiques : Ansatz de Bethe modifié [12], Off-diagonal Bethe Ansatz [13], séparation de variables [14] etc. ; permettant de construire les états propres

des systèmes intégrables en l'absence de symétrie $U(1)$, tels que les chaînes de spins d'Heisenberg avec conditions aux bords par exemple. D'autres avancées ont aussi été faites dans des modèles anisotropes de R-G avec champ magnétique polarisé suivant \hat{z} , notamment dans le calcul des facteurs de forme [14, 15, 16, 17], détermination des points de Read-Green [18, 19], le calcul de la trempe quantique [4, 20], la détermination des fonctions d'ondes [21] et l'étude des modèles avec bords [22, 23].

Ce projet vise donc à utiliser au maximum les simplifications possibles afin de développer des approches numériques et/ou analytiques tant pour l'étude des propriétés statiques (particulièrement pour les états sombres) que pour permettre d'obtenir des résultats exacts sur l'évolution temporelle des systèmes de spin central en présence d'un champ magnétique dépendant du temps pour les protocoles où le champ magnétique est modifié par sa réorientation autour d'un axe et par sa norme.

Fort de ces objectifs, nous avons développé une approche permettant d'exprimer le carré du hamiltonien d'un spin central comme combinaison linéaire des opérateurs associés aux autres spins du bain et avec lesquels il commute. Cette relation nous a permis de déterminer de manière efficace les valeurs propres du système considéré, lesquelles ont été réutilisées, en plus du théorème de Hellmann-Feynman lors du calcul de certaines quantités physiques telles que les valeurs moyennes de spin suivant chacune des directions de l'espace tridimensionnel. Nous avons également construit grâce aux valeurs propres obtenues, des facteurs de forme et des fonctions de corrélation à deux points. Cette approche permet donc de s'affranchir de l'Ansatz de Bethe, même dans les cas où elle permettrait la détermination du spectre en énergie d'un système considéré.

Il est important de noter que l'approche développée ici pourrait être utilisée pour n'importe quel système de spin central intégrable pour n'importe quelle réalisation de $SU(2)$. Cependant, nos travaux ont surtout été axés sur des modèles de spins $\frac{1}{2}$.

3 Plan détaillé

À la suite de cette introduction générale, dans la partie I de ce document, nous construirons, au chapitre I, les relations d'intégrabilité et des formes quadratiques génériques liant les valeurs propres d'un ensemble d'opérateurs constitué du Hamiltonien du système étudié et d'opérateurs qui commutent à la fois entre eux et avec lui. Nous mettrons aussi en évidence, dans le cas de certaines classes de modèles de R-G, le lien entre les énergies propres du système courant et les rapidités issues des équations de Bethe. Bien que le système d'équations quadratiques construit dans ce chapitre ne nous donne pas d'informations sur la forme explicite des fonctions d'ondes du modèle considéré, il nous permet tout de même à grâce d'accéder au spectre énergétique de tous les modèles intégrables issus de la classe étudiée dans cette thèse. Par conséquent, en plus de reproduire des cas déjà existants [18, 35, 36], nous serons en capacité d'accéder au spectre en énergie de modèles complètement anisotropes [58].

Toujours dans la première partie de ce manuscrit, au chapitre II, après avoir fourni une classification détaillée des modèles de R-G sur lesquels nous avons travaillé tout au long de ce projet doctoral, nous construirons une paramétrisation explicite des modèles génériques intégrables en présence d'un champ magnétique d'orientation arbitraire. En se servant du théorème de Hellman-Feynman, nous démontrerons et calculerons explicitement des grandeurs physiques, telles que les valeurs moyennes du spin central suivant toutes les directions de l'espace. Enfin, nous y proposerons une construction, en fonction des énergies (valeurs propres) du système, des états propres des modèles d'intérêt.

Dans les deux premiers chapitres de ce projet, les modèles considérés sont ceux dans lesquels

les couplages entre le spin central et chaque spin nucléaire sont unidirectionnels ($\hat{x}\hat{x}, \hat{y}\hat{y}, \hat{z}\hat{z}$). Par contre, le chapitre suivant est, lui, consacré à l'établissement des conditions d'intégrabilité et au calcul des valeurs propres des modèles contenant à la fois des couplages unidirectionnels ($\hat{x}\hat{x}, \hat{y}\hat{y}, \hat{z}\hat{z}$) et bidirectionnels ($\hat{x}\hat{y}, \hat{y}\hat{x}$ couplages pouvant par exemple résulter de l'interaction spin-orbite entre le spin-central et les spins environnants).

Dans le cadre d'un travail collaboratif avec Paul Johnson, un scientifique travaillant en chimie quantique qui utilise les vecteurs de R-G comme substitut variationnel pour les systèmes électroniques hautement corrélés en chimie [24], nous avons établi des nouvelles expressions pour les fonctions de corrélations à un ou deux points. Nous avons pu construire, pour ces dernières des expressions en déterminant, écrits directement en termes des valeurs propres discutées aux premiers chapitres. Les résultats de ces travaux constitueront le chapitre IV de cette thèse.

Des résultats tirés des deux premiers chapitres de cette thèse émergent des possibilités d'applications à des problèmes spécifiques. La principale traitée ici étant une étude approfondie des états sombres dans les modèles de R-G. En effet, il a récemment été démontré que des systèmes appartenant aux modèles sur lesquels nous travaillons dans ce projet de thèse contiennent des états propres dans lesquels le spin central est complètement décorrélé des spins environnants; ces états ont été appelés états sombres [6, 7, 8]. Dans ces travaux, nous observerons d'abord la présence d'états sombres dans divers modèles de R-G dans lesquels leur existence n'avaient pas été démontrée. De plus, nous constaterons que la physique qui explique la formation de ces états varie selon le type de modèles considérés. Les deux chapitres de la deuxième partie de ce travail présentent les états sombres et expliquent leur formation selon que nous soyons dans un modèle ayant des couplages contenus uniquement dans le plan XY et donc une direction privilégiée perpendiculaire au plan XY (Chapitre I, partie II), ou des couplages isotropes définis suivant chacune des directions de l'espace tridimensionnel (Chapitre II, partie II).

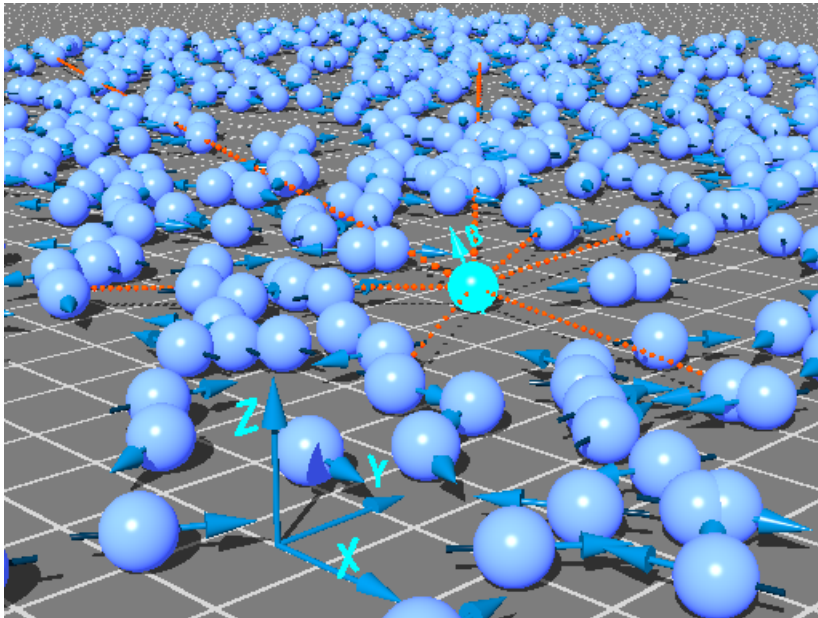


FIGURE 1 – Exemple de modèle de spin central. Les flèches bleues représentent les valeurs moyennes de chaque spin suivant une direction quelconque de l'espace. Les pointillés de couleur orange matérialisent les couplages entre le spin central et chaque spin du bain (en violet). Le spin central est polarisé dans la direction du champ (en vert).

Les déterminations du spectre en énergie et de certaines quantités (valeurs moyennes du spin, facteurs de forme, fonction de corrélation, ...) forment la base des éléments requis pour le calcul de l'évolution temporelle des modèles que nous étudions. Dans la dernière partie de cette thèse nous étudierons donc comment il pourrait être possible de comprendre le comportement de ces modèles en présence d'un champ magnétique dépendant du temps. Qu'il s'agisse de processus de rotation périodique ou non du champ magnétique dans les modèles intégrables ou dans certains modèles non-intégrables s'en rapprochant, nous construirons dans cette partie une base mobile dans laquelle, à chaque instant de l'évolution du système considéré, peut se réduire à la résolution d'un hamiltonien statique. Nous calculerons aussi mathématiquement la dynamique de la valeur moyenne du spin central suivant chaque direction lorsque le système sera initialement préparé dans un de ses états sombres et pourrons constater si cet état est détruit ou non par l'évolution temporelle.

Un dernier chapitre sera, naturellement consacré aux conclusions générales et à la description de perspectives de recherche que cette thèse rend imaginables.

Première partie
Études statiques

Table des figures

1	Exemple de modèle de spin central. Les flèches bleues représentent les valeurs moyennes de chaque spin suivant une direction quelconque de l'espace. Les pointillés de couleur orange matérialisent les couplages entre le spin central et chaque spin du bain (en violet). Le spin central est polarisé dans la direction du champ (en vert).	4
2.1	Valeurs propres r_j des charges conservées R_j et valeurs moyennes $\left\{ \langle S_j^x \rangle, \langle S_j^y \rangle, \langle S_j^z \rangle \right\}_{\forall j}$ resultants de la déformation en absence de couplages, de l'état fondamental d'un système de $N = 10$ particules, en fonction du paramètre g fixant les normes des couplages. Le système est choisi tel que $\epsilon_j = (j + 1)^2$, $\alpha_x = \alpha_y = 1$, $\lambda = \gamma = 0.5$. Le cas $\beta_x = \beta_y = 0$ retourne un modèle de type XXZ.	40
5.1	Représentations possibles d'un spin plongé dans un bain de spins	91
5.2	Valeurs moyennes des $N + 1 = 30$ spins dans l'état sombre résultant de la déformation de l'état $ - - + - - + \dots \rangle$ à $g = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de l'angle $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.	92
5.3	Facteur de pureté et champ ressenti par le spin central dans un système de $N + 1 = 30$ spins, lorsque l'état considéré est sombre et résulte de la déformation de l'état $ - - + - - + \dots \rangle$ à $g = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de l'angle $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.	93
5.4	Facteurs de pureté 5.4a et champs magnétiques effectifs du spin central 5.4b dans 4 états sombres dont les états parents à $\tilde{g} = 0$ donnés par : $C_1 = - - + - - + - - + \dots \rangle$, $C_2 = - - - + + - - + + \dots \rangle$, $C_3 = - - - - + + + - - - - + + + \dots \rangle$ et $C_4 = - - - - - + + + + - - - - - + + + + \dots \rangle$. Le système est toujours constitué de $N + 1 = 30$ particules, les constantes de couplage valent toujours $\Gamma_j = 1,979(N - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.	95
5.5	Valeurs moyennes des spins 5.5a et 5.5b. Facteur de pureté γ_0 5.5c et le champ magnétique effectif du spin central dans un état clair d'un système de $N + 1 = 30$ particules. Cet état résulte de la déformation de l'état parent C_1 obtenu à $\tilde{g} = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N + 1 - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.	96
5.6	Différents choix de couplages entre le spin central et chaque spin du bain	97

5.7	Evolution du facteur de pureté et du champ effectif ressenti par le spin central en fonction des différents choix de couplages dans un état dont la configuration à $g = 0$ vaut $ --+-+ \dots\rangle$, dans un système de 30 particules. Le champ magnétique est orienté selon $\pi/4$ par rapport à l'azimut.	98
5.8	Evolution des valeurs moyennes en fonction des différents choix de couplages dans l'état dont la configuration à $g = 0$ vaut $ --+-+ \dots\rangle$, dans un système de 30 particules. Le champ magnétique est orienté selon $\pi/4$ par rapport à l'azimut.	98
5.9	Evolution du facteur de pureté et de la composante plane du champ magnétique effectif du spin central en fonction du nombre de particules dans le système. Ici, la configuration déformée est donnée par $ --+-+ \dots\rangle$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j \sim 1, 979(N+1-0.5j)$, pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.	99
5.10	Valeurs moyennes du spin central en fonction du nombre de particules dans le système. Ici, la configuration déformée est donnée par $ --+-+ \dots\rangle$, les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j \sim 1, 979(N+1-0.5j)$, pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.	100
5.11	Evolution du facteur de pureté et de la composante plane du champ magnétique effectif du spin central en fonction de différentes orientations du champ magnétique extérieur. Nous considérons un état donné dans un système de $N + 1 = 30$ particules. L'orientation du champ magnétique évolue dans $]\pi, 12, \pi[$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1, 979(N + 1 - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et la configuration déformée est donnée par $ --+-+ \dots\rangle$	101
5.12	Valeurs moyennes du spin central en fonction de différentes orientations du champ magnétique extérieur. Nous considérons un état donné dans un système de $N + 1 = 30$ particules. L'orientation du champ magnétique évolue dans $]\pi, 12, \pi[$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1, 979(N+1-0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et la configuration déformée est donnée par $ --+-+ \dots\rangle$	101
6.1	Valeurs moyennes et facteurs de pureté dans un système de spin central constitué de $N = 31$ spins, lorsque l'état considéré est sombre et résulte de la déformation de l'état $C = -+-+ \dots - +\rangle$ du bain à $\tilde{g} = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$	105
6.2	Facteurs de pureté γ_0 6.2a et valeurs moyennes du spin central 6.2b dans 4 états sombres (états parents du bain à $\tilde{g} = 0$ donnés par : $C_1 = -+-+ \dots - +\rangle$, $C_2 = -+-+ \dots - + +\rangle$, $C_3 = -+-+ \dots - + + +\rangle$, et $C_4 = -+-+ \dots - + + + +\rangle$). Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$, pour $k = 1 \dots 30$	106
6.3	La figure 6.3a représente des clusters de type A issus de la déformation à forts couplages de $C_4 = + - + - + - +\rangle$. La figure 6.3b met en évidence des clusters de type B issu des de la déformation de $C_5 = + - - + - + - +\rangle$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$, pour $k = 1 \dots 8$	107
6.4	Formation des singulets à deux et à quatre particules dans deux états sombres donnés d'un système de 9 spins. Ces états sont chacun issus des clusters de type A et des clusters de type B. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$, pour $k = 1 \dots 8$. Les configurations à $g = 0$ valent respectivement $C_6 = + - + - + - +\rangle$ et $C_7 = + - - + - + +\rangle$	108

6.5	Formation des singulets à deux et à six particules dans deux états sombres donnés d'un système de 9 spins. Ces états sont chacun issus des clusters de types A et des clusters de type B. L'ensemble des constantes de couplage est donné par $\Gamma_k = 12.620(N - 0.1k)$, pour $k = 1 \dots 8$ et les configurations à $g = 0$ valent respectivement $C_8 = +-+--++\rangle$ et $C_9 = +---+-++\rangle$	109
6.6	Evolution du facteur de pureté γ_0 du spin central en fonction du paramètre \tilde{g} fixant la norme es couplages. Les tracés ci-dessus sont obtenus pour plusieurs valeurs du nombre de particules dans le système. L'ensemble des constantes de couplage est donné par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$ pour $k = 1 \dots N - 1$. Les états considérés sont sombres et résultent de la déformation de des confiurations $C_{T_A}^1$ et $C_{T_B}^1$ du bain à $\tilde{g} = 0$	111
6.7	Dans le premier système, l'état représenté est celui issu de la déformation de $C_{T_A}^1$. Dans le second système l'état représenté est issu de $C_{T_A}^1$. L'ensemble des constantes de couplage est donné par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$ pour $k = 1 \dots N - 1$	112
6.8	Différentes manières de coupler le spin central au bain, dans les modèles de R-G de type XXX avec champ magnétique orienté selon une direction quelconque. . .	114
6.9	Evolution du facteur de pureté et des valeurs moyennes du spin central en fonction des différents choix de couplages. Le système considéré est constitué de 41 particules et la configuration du bain à $g = 0$ est C_{bain}	115
6.10	Fonctions de corrélations à deux points, issues de la déformation de C_{Bain} , pour différentes formes de couplages. Le système cnsidéré contient 41 spins.	115
7.1	Illustration d'un processus de rotation à fréquence constante dans un modèle de spin central	123
7.2	Illustration d'un processus de rotation à fréquence variable dans un modèle de spin central	124

Chapitre 1

Relations quadratiques entre opérateurs de spin- $\frac{1}{2}$

"La vérité scientifique sera toujours plus belle que les créations de notre imagination et que les illusions de notre ignorance." Claude Bernard

"L'imagination est plus importante que le savoir." Albert Einstein

Depuis les travaux de Babelon sur le modèle quantique de Jaynes-Cummings-Gaudin [25], il a été constaté que de plusieurs modèles de Gaudin découlent des expressions sous forme d'équations quadratiques dont la résolution aboutit à la détermination des différents niveaux d'énergie du système considéré. En effet, pour un modèle donné, il existe un ensemble d'opérateurs qui commutent avec son hamiltonien. Ces opérateurs et le hamiltonien dudit système constituent l'ensemble des charges conservées d'un modèle qui est alors intégrable. Les équations quadratiques, évoquées plus haut, relient les différentes valeurs propres associées aux différentes charges conservées et leur résolution numérique est relativement simple [4, 18, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. En effet, alors que les équations de Bethe traditionnelles, définies en termes d'un ensemble de racines de Bethe sont, dans les modèles de R-G, en proie à des divergences, l'approche basée sur les valeurs propres évite complètement ces complications numériques. L'émergence récente de représentations en déterminants, exprimées directement en termes de valeurs propres, pour les normes, les produits scalaires et les facteurs de forme des opérateurs locaux [11, 15, 16, 17, 32, 33, 34] a également constitué une avancée majeure dans l'utilisation numérique de l'intégrabilité pour l'étude des propriétés physiques statiques et dynamiques de ces systèmes.

Il a été récemment souligné que l'existence d'équations quadratiques basées sur les valeurs propres pour les modèles construits à partir de spins-1/2, se traduit par des relations quadratiques entre les opérateurs conservés eux-mêmes [18, 35, 36]. Une résultat analogue pour un modèle spécifique de spins-1 menant à des relations cubiques entre opérateurs conservés est également apparue [37]. Alors que ces relations ont, jusqu'à présent, été construites au cas par cas, ce travail vise à fournir un cadre générique pour l'existence de telles relations quadratiques dans les modèles de R-G de spins-1/2.

En travaillant au niveau opératoire, nous montrons dans ce chapitre que l'on peut, pour tous les cas d'une vaste classe de modèles R-G, définir un ensemble de N "équations de Bethe quadratiques" pour les valeurs propres des charges conservées. Leur résolution permet d'accéder au spectre du problème considéré, sans qu'il soit nécessaire de construire un Ansatz de Bethe explicite. En effet, on montrera que l'intégrabilité elle-même est suffisante pour prouver que les N opérateurs commutant sont liés par un ensemble fermé de relations d'opérateurs quadratiques

et pour le construire explicitement.

Le fait que l'approche présentée dans ce travail définit des "équations de Bethe" sans faire référence à leur solvabilité par l'Ansatz de Bethe (c'est-à-dire sans aucun besoin de construire les états propres) présente un avantage clair pour les modèles sans symétrie $U(1)$. Un tel exemple est celui des modèles complètement anisotropes (de type XYZ) reliés aux modèles à 8 vertex de la physique statistique. Effectivement, une symétrie $U(1)$ due à l'invariance sous rotation dans le plan XY peut exister dans les modèles R-G partiellement anisotropes (de type XXZ) ou isotropes (de type XXX), reliés au modèles à 6 vertex. Par contre, dès lors que les couplages du modèle sont complètement anisotropes, une telle invariance n'est plus possible. Dans un tel cas, le pseudo-vide (état de référence) nécessaire à l'Ansatz de Bethe algébrique, habituellement défini comme l'état propre de poids le plus élevé, n'est plus simplement défini [21]. Un problème similaire survient aussi dans les cas pour lesquels la symétrie $U(1)$ est explicitement brisée par une composante, dans le plan, du champ magnétique [18]. Diverses techniques ont donc été développées au fil des ans pour traiter les modèles dépourvus d'un tel état de référence explicitement connu : Séparation des variables [38, 39, 40, 41, 42, 43], Off-Diagonal Bethe Ansatz [22, 44, 45, 46, 47] ou l'Ansatz de Bethe modifié [11, 18, 48, 12, 49, 50, 51, 52, 53]. Cependant, en contournant la construction des états propres, l'approche proposée dans ce travail rend tous ces cas aussi simples à traiter, du moins lorsque l'on recherche exclusivement les énergies propres.

1.1 Ansatz de Bethe Algébrique dans les modèles de Gaudin de type XXX.

Dans cette partie de notre travail, nous rappellerons les résultats connus sur l'algèbre de Gaudin à partir desquels nous calculons l'action de la "matrice de transfert" sur la classe générique des états de l'Ansatz de Bethe qui sera définie plus tard à l'équation (1.15). Nous montrerons comment l'Ansatz de Bethe Algébrique (ABA) traditionnel est mis en œuvre pour dériver les équations de Bethe dont les solutions définissent les états propres et les valeurs propres des modèles de Gaudin. La transformation qui nous permet de construire des équations de Bethe quadratiques à partir de ces résultats sera ensuite présentée.

1.1.1 Relations de commutation

L'algèbre de Gaudin est définie par les opérateurs $S^\psi(u) \forall u \in \mathbb{C}$, où $\psi \in \{x, y, z\}$ est une direction spatiale. Soit $\Psi(u, v), \Phi(u, v), \Theta(u, v) \in \{X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)\}$ trois fonctions de deux variables complexes u et v . L'algèbre est alors définie par des relations de commutation entre opérateurs S^ψ, S^ϕ et S^θ , pour un $\psi \in \{x, y, z\}$ donné, avec ϕ et θ les deux autres directions choisies de telle sorte que le triplet (ψ, ϕ, θ) corresponde à l'ordre trigonométrique. Le triplet (ψ, θ, ϕ) obtenu en changeant ϕ en θ et θ en ϕ dans (ψ, ϕ, θ) implique l'ordre anti-trigonométrique. Les relations de commutation entre opérateurs sont explicitement données par :

$$\left[S^\psi(u), S^\phi(v) \right] = i \left\{ S^\theta(u) \Phi(u, v) - \Psi(u, v) S^\theta(v) \right\} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

pour l'ordre trigonométrique $\{(\psi, \phi, \theta), (\phi, \theta, \psi), (\theta, \psi, \phi), (\psi \neq \phi \neq \theta)\}$ et

$$\begin{aligned} \left[S^\phi(u), S^\psi(v) \right] &= - \left[S^\psi(v), S^\phi(u) \right] = -i \left\{ S^\theta(v) \Phi(v, u) - \Psi(v, u) S^\theta(u) \right\} \\ &= i \left\{ \Psi(v, u) S^\theta(u) - S^\theta(v) \Phi(v, u) \right\} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

pour l'ordre anti-trigonométrique $\{(\phi, \psi, \theta), (\psi, \theta, \phi), (\theta, \phi, \psi), (\psi \neq \phi \neq \theta)\}$. Nous devons également ajouter les relations de commutation suivantes entre les opérateurs liés à la même orientation spatiale :

$$[S^\psi(u), S^\psi(v)] = 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{C} \text{ et } \psi \in \{x, y, z\}. \quad (1.3)$$

Grâce aux identités de Jacobi, la cohérence de l'algèbre imposera des restrictions sur les fonctions possibles $\Psi(u, v), \Phi(u, v), \Theta(u, v)$ qui seront explicitées dans la sous-section suivante.

Centrons maintenant la discussion sur les modèles rationnels de R-G de type XXX pour lesquels les fonctions $\Psi(u, v), \Phi(u, v), \Theta(u, v)$ sont toutes identiques et égales à une fonction spécifique $X(u, v)$. Introduisons ensuite, pour un nombre complexe arbitraire u les opérateurs d'échelle $S^+(u)$ et $S^-(u)$ dont le rôle consiste à créer ou à annihiler une excitation dans un état quantique. Pour les modèles considérés, $S^+(u)$ et $S^-(u)$ sont liés à $S^x(u)$ et $S^y(u)$ par

$$S^+(u) = S^x(u) + iS^y(u) \quad \text{et} \quad S^-(u) = S^x(u) - iS^y(u), \quad (1.4)$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} S^2(u) &= (S^x(u))^2 + (S^y(u))^2 + (S^z(u))^2 \\ &= \frac{1}{4} (S^+(u) + S^-(u)) (S^+(u) + S^-(u)) \\ &\quad - \frac{1}{4} (S^+(u) - S^-(u)) (S^+(u) - S^-(u)) + S^z(u)S^z(u) \\ &= \frac{1}{2} (S^-(u)S^+(u) + S^+(u)S^-(u)) + S^z(u)S^z(u). \end{aligned} \quad (1.5)$$

En termes de ces opérateurs, les relations de commutation des modèles XXX peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} [S^\pm(u), S^\pm(v)] &= 0, \\ [S^+(u), S^-(v)] &= 2X(u, v) (S^z(u) - S^z(v)), \\ [S^z(u), S^\pm(v)] &= \pm X(u, v) (S^\pm(u) - S^\pm(v)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

et on peut aussi montrer que :

$$\begin{aligned} [S^2(u), S^\pm(v)] &= \pm [X(u, v) (S^\pm(u)S^z(v) + S^z(v)S^\pm(u) - S^\pm(v)S^z(u) - S^z(u)S^\pm(v))] \\ &= \pm 2 [X(u, v) (S^\pm(u)S^z(v) - S^\pm(v)S^z(u))], \\ [S^2(u), S^z(v)] &= X(u, v) (S^+(u)S^-(v) - S^-(u)S^+(v)), \end{aligned} \quad (1.7)$$

pour tous les complexes arbitraires u et v . En utilisant les équations (1.5), (1.6) et (1.7), on arrive à montrer que:

$$[S^2(u), S^2(v)] = 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{C}. \quad (1.8)$$

Cette dernière relation de commutation (1.8), montre que nous avons une infinité d'opérateurs $S^2(u)$ qui commutent tous entre eux. Par conséquent, ces opérateurs partagent tous une base commune d'états propres que l'Ansatz Algébrique de Bethe va nous permettre de trouver.

1.1.2 Équation de Yang-Baxter classique

Comme nous l'avons mentionné, les identités de Jacobi imposent des restrictions sur les fonctions possibles $\Psi(u, v)$, $\Phi(u, v)$, $\Theta(u, v)$ qui rendent l'algèbre de Gaudin cohérente. Pour trois opérateurs quelconques A , B et C , l'identité de Jacobi qui résulte de la définition du commutateur, est donnée par

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (1.9)$$

En prenant $A = S^\psi(u)$, $B = S^\phi(v)$ et $C = S^\theta(w)$ où $\psi \neq \phi \neq \theta$ et $u, v, w \in \mathbb{C}$, la relation (1.9) telle que montrée en annexe (A.1) devient

$$0 = -\{\Psi(w, v)\Theta(v, u) - \Theta(w, u)\Phi(w, v) - \Psi(u, w)\Phi(u, v)\}S^\phi(u) + \{\Psi(w, v)\Psi(v, u) - \Psi(u, v)\Psi(v, w)\}S^\phi(v) - \{\Psi(w, u)\Phi(w, v) + \Theta(u, w)\Phi(u, v) - \Psi(u, v)\Theta(v, w)\}S^\phi(w). \quad (1.10)$$

Puisque les opérateurs $S^\phi(u)$, $S^\phi(v)$ et $S^\phi(w)$ sont indépendants les uns des autres, la relation numéro (1.10) fournit un système de trois équations :

$$\begin{cases} \Psi(w, v)\Theta(v, u) - \Theta(w, u)\Phi(w, v) - \Psi(u, w)\Phi(u, v) = 0 \\ \Psi(w, v)\Psi(v, u) - \Psi(u, v)\Psi(v, w) = 0 \\ \Psi(w, u)\Phi(w, v) + \Theta(u, w)\Phi(u, v) - \Psi(u, v)\Theta(v, w) = 0 \end{cases}, \quad (1.11)$$

qui doivent être satisfaites par les fonctions définissant l'algèbre.

Il est fréquent, mais pas nécessaire, d'imposer que les fonctions à deux variables soient antisymétriques sous échange des variables complexes u et v :

$$\Theta(w, u) = -\Theta(u, w), \quad \Psi(u, w) = -\Psi(w, u) \text{ et } \Phi(w, v) = -\Phi(v, w). \quad (1.12)$$

Ensuite, en utilisant les équations (1.12), le système de trois équations (1.11) est réduit à une contrainte qui est donnée par :

$$\Psi(w, v)\Theta(v, u) + \Theta(u, w)\Phi(w, v) + \Psi(w, u)\Phi(u, v) = 0 \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}. \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) est appelée équation classique de Yang-Baxter. Il est nécessaire de définir une algèbre de Gaudin cohérente qui, comme nous l'avons vu, conduit à un ensemble d'opérateurs commutant les uns avec les autres ($[S^2(u), S^2(v)] = 0$). L'existence de ces opérateurs commutants définit finalement l'intégrabilité d'un modèle de Gaudin antisymétrique donné.

Dans le cas des modèles de R-G de type XXX pour lesquels $X(u, v) = \Psi(u, v)$ et $\Psi(u, v) = \Phi(u, v) = \Theta(u, v)$, l'équation classique de Yang Baxter (1.13) devient

$$X(w, v)X(v, u) + X(u, w)X(w, v) + X(w, u)X(u, v) = 0 \quad \forall u, v, w \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

1.1.3 Équations de Bethe

Dans cette sous-section, nous supposons que notre système est composé d'un nombre donné N de spins- $\frac{1}{2}$. Dans les modèles rationnels de R-G, les états propres ont tous une aimantation totale fixe et sont donc définis par un nombre donné $M \leq N$ d'excitations de spin au-dessus de l'état ferromagnétique. L'Ansatz Algébrique de Bethe et la méthode de diffusion inverse

quantique [10] pour les modèles quantiques de type XXX nous permettront d'écrire les états propres de $S^2(u)$ sous la forme suivante:

$$|\lambda_1 \dots \lambda_M\rangle = \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) |\Omega\rangle, \quad M \leq N, \quad (1.15)$$

où $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ sont des paramètres nommés racines de Bethe ou rapidités. $S^+(\lambda_i)$ est l'opérateur qui crée la quasi-particule d'indice i et $|\Omega\rangle$ est l'état pseudo-vide quantique défini par

$$\begin{aligned} S^-(u) |\Omega\rangle &= 0 \quad \forall u \in \mathbb{C}, \\ S^2(u) |\Omega\rangle &= F(u) |\Omega\rangle \\ S^z(u) |\Omega\rangle &= F_z(u) |\Omega\rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Le pseudo-vide doit être annihilé par chaque $S^-(u)$. Il doit aussi être état propre de $S^2(u)$ et $S^z(u)$ avec les valeurs propres correspondantes : $F(u)$ et $F_z(u)$.

Ainsi, en agissant avec $S^2(u)$ sur les états de Bethe donnés par l'équation (1.15), on obtient (voir annexe (A.2)) le résultat suivant :

$$\begin{aligned} S^2(u) |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\rangle &= \sum_{i=1}^M F_i(\{\lambda\}, u) |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i \rightarrow u, \dots, \lambda_M\rangle \\ &\quad + E(\{\lambda\}, u) |\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\rangle, \end{aligned} \quad (1.17)$$

où

$$E(\{\lambda\}, u) = F(u) + \sum_{i=1}^M \left(2F_z(u)X(u, \lambda_i) + \sum_{l \neq i}^M X(u, \lambda_i)X(u, \lambda_l) \right) \quad (1.18)$$

et

$$F_i(\{\lambda\}, u) = 2X(u, \lambda_i) \left[F_z(\lambda_i) + \sum_{l \neq i} X(\lambda_l, \lambda_i) \right]. \quad (1.19)$$

Comme on le voit, l'action de $S^2(u)$ sur l'état générique (1.15) conduit à une combinaison linéaire de $M + 1$ d'états parmi lesquels un seul est identique à l'état sur lequel $S^2(u)$ a agi. Pour que l'état générique (1.15) soit un état propre de $S^2(u)$, les M coefficients devant les états qui sont différents de l'état initial, doivent tous être égaux à 0. Pour ce faire, nous exigeons que les M rapidités λ_i soient donc une solution de l'ensemble suivant de M équations algébriques :

$$F_i(\{\lambda\}, u) = 0 \Rightarrow 2X(u, \lambda_i) \left[F_z(\lambda_i) + \sum_{l \neq i} X(\lambda_l, \lambda_i) \right] = 0 \Rightarrow F_z(\lambda_i) = \sum_{l \neq i} X(\lambda_i, \lambda_l). \quad (1.20)$$

En se rappelant que, dans cette partie de notre travail, nous nous intéressons aux modèles de type XXX pour lesquels les fonctions $X(u, v)$ données par $X(u, v) = \frac{g}{u-v}$ ($\forall u, v \in \mathbb{C}$ et $g \in \mathbb{R}$) sont celles qui satisfont l'équation classique de Yang-Baxter, nous obtenons alors

$$F_z(\lambda_i) = \sum_{l=1(\neq i)}^M \frac{g}{\lambda_i - \lambda_l} \quad \forall \lambda_{l \neq i} \in \mathbb{C} \quad \text{and} \quad g \in \mathbb{R}, \quad (1.21)$$

où $X(\lambda_i, \lambda_l) = \frac{g}{\lambda_i - \lambda_l}$; $F_z(\lambda_l)$ est la valeur propre de $S^z(\lambda_l)$ définie par la troisième équation de (1.16) et évaluée à la rapidité λ_l . Les équations (1.21) sont appelées équations de Bethe et leurs solutions fournissent les ensembles de rapidités qui définissent complètement les états propres (et leurs valeurs propres) des opérateurs $S^2(u)$, $\forall u \in \mathbb{C}$.

En examinant ces équations, on peut facilement voir que si dans la série des rapidités $(\lambda_i, i \in \{1, 2, \dots, M\})$ deux d'entre elles deviennent identiques, nous rencontrerons des divergences du système d'équation rendant difficile leur résolution numérique. Ces problèmes peuvent toutefois être contournés par un changement de variables qui conduit alors à des "équations de Bethe quadratiques" beaucoup plus simples : [26, 27].

1.1.4 Équations quadratiques de Bethe

Afin d'obtenir cette forme quadratique des équations de Bethe, on commence par une fonction Λ définie telle que :

$$\Lambda(\epsilon_i) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\epsilon_i - \lambda_j}, \quad (1.22)$$

où les ϵ_i sont des paramètres réels du système considéré. On calcule

$$\begin{aligned} \Lambda^2(\epsilon_i) + \Lambda'(\epsilon_i) &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{1}{(\epsilon_i - \lambda_k)(\epsilon_i - \lambda_j)} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{(\epsilon_i - \lambda_j)^2} = \sum_{k=1}^M \sum_{j \neq k}^M \frac{1}{(\epsilon_i - \lambda_k)(\epsilon_i - \lambda_j)} \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{k \neq j}^M \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_k)} \left(\frac{1}{\epsilon_i - \lambda_j} - \frac{1}{\epsilon_i - \lambda_k} \right) = \sum_{j=1}^M \sum_{k \neq j}^M \frac{2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\epsilon_i - \lambda_j)} \\ \Rightarrow \Lambda^2(\epsilon_i) + \Lambda'(\epsilon_i) &= \sum_{j=1}^M \frac{2F_z(\lambda_j)}{\epsilon_i - \lambda_j}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

Les rapidités $\lambda_j, j \in \{1, 2, \dots, M\}$ (aussi appelées racines de Bethe) sont des solutions des équations de Bethe (1.21), permettant cette dernière substitution.

Notons que l'équation (1.23), montre la relation entre la valeur propre $F_z(\lambda_j)$ définie dans l'équation (1.16) et $\Lambda^2(\epsilon_i)$ (avec $\Lambda(\epsilon_i)$ défini par (1.22)). D'autre part, la forme générale de $F_z(u), u \in \mathbb{C}$ [33] dans les modèles rationnels de R-G est donnée par

$$F_z(u) = - \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\epsilon_i - u} + \frac{B}{2g}u + \frac{C}{2g}. \quad (1.24)$$

où les quantités A_i, B, C et g sont toutes des constantes.

En évaluant la forme générale de $F_z(u)$ donnée par (1.24) à $u = \lambda_j$ et en la mettant en relation avec (1.23), on obtient

$$\begin{aligned}
\Lambda^2(\epsilon_i) &= -\Lambda'(\epsilon_i) + \sum_{j=1}^M \frac{2}{\epsilon_i - \lambda_j} \left(-\sum_{k=1}^N \frac{A_i}{\epsilon_k - \lambda_j} + \frac{B}{2g} \lambda_j + \frac{C}{2g} \right) \\
&= -\Lambda'(\epsilon_i) - 2A_i \left(\sum_{j=1}^M \frac{2}{(\epsilon_i - \lambda_j)^2} + \sum_{j=1}^M \sum_{k \neq i}^N \frac{1}{(\epsilon_i - \lambda_j)(\epsilon_k - \lambda_j)} \right) \\
&\quad + \frac{B}{g} \sum_{j=1}^M \left(1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_i - \lambda_j} \right) + \frac{C}{g} \Lambda(\epsilon_i) \\
&= (2A_i - 1)\Lambda'(\epsilon_i) - 2A_i \sum_{j=1}^M \sum_{k \neq i}^N \frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_i} \left(\frac{1}{\epsilon_i - \lambda_j} - \frac{1}{\epsilon_k - \lambda_j} \right) + \frac{B\epsilon_i + C}{g} \Lambda(\epsilon_i) + \frac{BM}{g} \\
&= (2A_i - 1)\Lambda'(\epsilon_i) - 2A_i \sum_{k \neq i}^N \frac{\Lambda(\epsilon_i) - \Lambda(\epsilon_k)}{\epsilon_k - \epsilon_i} + \frac{B\epsilon_i + C}{g} \Lambda(\epsilon_i) - \frac{B}{g} M. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Or, dans le cas des spins- $\frac{1}{2}$, on a que $A_i = \frac{1}{2}$. Par conséquent, les termes qui feraient intervenir $\Lambda'(\epsilon_i)$ deviennent nuls, et cette dernière équation se réduit à une forme quadratique en $\Lambda(\epsilon_i)$ donnée par :

$$\Lambda^2(\epsilon_i) + \frac{B}{g} M - \frac{B\epsilon_i + C}{g} \Lambda(\epsilon_i) - \sum_{j \neq i}^N \frac{\Lambda(\epsilon_j) - \Lambda(\epsilon_i)}{\epsilon_j - \epsilon_i} = 0. \tag{1.26}$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, c'est à dire celui dans lequel le système ne contiendrait que des degrés de liberté de spin ($B = 0$), les équations ci-dessus deviennent

$$\Lambda^2(\epsilon_i) - \frac{C}{g} \Lambda(\epsilon_i) - \sum_{j \neq i}^N \frac{\Lambda(\epsilon_j) - \Lambda(\epsilon_i)}{\epsilon_j - \epsilon_i} = 0. \tag{1.27}$$

Remarquons que les équations de Bethe quadratiques (1.27) conservent les mêmes informations que les équations traditionnelles (1.21) puisqu'elles sont simplement obtenues à partir du changement de variable (1.22).

Malgré le fait qu'elles soient dérivées de l'Ansatz de Bethe algébrique, ces relations de Bethe quadratiques sont beaucoup plus faciles à résoudre numériquement que les relations traditionnelles qui sont hautement non linéaires.

En résolvant ces équations (1.27), on peut calculer le spectre d'énergie d'un modèle de type XXX R-G donné. L'obtention des états propres correspondants nécessiterait alors, dans un deuxième temps soit de calculer l'ensemble des M racines de Bethe correspondant aux valeurs propres trouvées ou alors de faire appel à une façon de les construire directement à partir de la spécification des valeurs propres.

Bien que l'Ansatz de Bethe algébrique conduise au spectre d'énergie et aux états propres correspondants d'un système quantique intégrable, nous avons vu qu'il n'est pas simple à mettre en œuvre et que la résolution numérique des équations de Bethe traditionnelles (en termes de λ_i) peut être difficile en raison de l'annulation des dénominateurs de la forme $\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}$ [55, 56]. La transformation en équations de Bethe quadratiques simplifie grandement les approches numériques [30, 57]. Cependant, elle repose toujours sur l'application préalable de l'Ansatz Algébrique de Bethe afin de transformer les équations de Bethe en forme quadratique. L'Ansatz de Bethe

algébrique, tel qu'il est présenté ici, ne se généralise pas facilement à certains cas XYZ, sans symétrie $U(1)$, c'est pourquoi une approche qui pourrait fournir ces équations quadratiques, sans nécessairement prendre en considération la symétrie $U(1)$, et ne reposant pas sur l'ABA serait hautement souhaitable [58].

1.2 Relations quadratiques entre charges conservées de spin- $\frac{1}{2}$ de R-G et équations quadratiques de Bethe

1.2.1 Équations quadratiques de Bethe selon une autre approche

En se référant au traitement fait aussi par l'Ansatz Bethe algébrique dans [33], on sait que les valeurs propres $r(\epsilon_i)$ des charges conservées $R(\epsilon_i)$ sont liées aux variables $\Lambda(\epsilon_i) = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\epsilon_i - \lambda_j}$ par la relation suivante :

$$r(\epsilon_i) = -\frac{1}{2}\Lambda(\epsilon_i) - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j}. \quad (1.28)$$

En prenant le carré de $r(\epsilon_i)$, on trouve que

$$\begin{aligned} r^2(\epsilon_i) &= \frac{1}{4}\Lambda^2(\epsilon_i) - \Lambda(\epsilon_i) \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \right) + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\Lambda^2(\epsilon_i) + \frac{\alpha}{2}\Lambda(\epsilon_i) - \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \frac{\Lambda(\epsilon_i)}{\epsilon_i - \epsilon_j} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \\ &\quad + \frac{1}{16} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_k)} \end{aligned} \quad (1.29)$$

et par conséquent, l'équation correspondante démontrée dans les annexes (A.3), (A.4) et (A.5) pour les variables $\Lambda(\epsilon_i)$ est donnée par :

$$\Lambda^2(\epsilon_i) + 2\alpha\Lambda(\epsilon_i) - \sum_{j \neq i} \frac{\Lambda(\epsilon_j) - \Lambda(\epsilon_i)}{\epsilon_j - \epsilon_i} = 0, \quad (1.30)$$

qui est exactement le même résultat obtenu dans l'équation (1.27) en prenant $\alpha = -\frac{C}{2g}$.

1.3 Modèles et leur intégrabilité

Dans cette section, nous nous intéresserons aux modèles de spin-1/2 définis par les charges conservées commutantes suivantes, quadratiques en termes de matrices de spin :

$$R_j = \vec{B}_j \cdot \vec{S}_j + \sum_{k \neq j} \sum_{\alpha=x,y,z} \Gamma_{jk}^\alpha S_j^\alpha S_k^\alpha. \quad (1.31)$$

Bien qu'ils excluent les modèles intégrables plus génériques pouvant par exemple contenir des termes de type Dzyaloshinskii-Moriya couplant S_i^α et S_j^β , ils forment malgré tout une très

vaste classe de modèles intégrables de R-G. Nous serons en capacité de traiter de façon générale l'ensemble de ces modèles et de construire explicitement des équations quadratiques similaires à celles présentées dans le cas spécifique discuté précédemment.

Notons que les exposants grecs seront utilisés pour désigner les orientations, prenant trois valeurs x, y, z , tandis que les exposants latins seront utilisés pour désigner l'indice de chaque spin, prenant les valeurs $0, 1, 2, 3 \dots N$.

Le fait d'exiger que les charges conservées (1.31) commutent pour tous les j, k impose un ensemble de contraintes, que nous appelons relations d'intégrabilité car elles appliquent simplement les règles de commutation requises pour définir un modèle intégrable quantique de R-G. Ce type d'approche est apparu dans de nombreux travaux concernant les modèles de Gaudin [59, 60] en commençant par Gaudin lui-même [2, 61, 61]. Dans le cas qui nous occupe, les relations d'intégrabilité sont trouvées en calculant explicitement les commutateurs entre charges conservées et en s'assurant qu'ils soient nuls. Les expressions explicites pour les commutateurs

$$[R_j, R_k] = 0, \quad (1.32)$$

sont relativement simples à calculer en utilisant les règles de commutation des matrices de spin.

$$[S_j^\alpha, S_k^\beta] = i \delta_{jk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_k^\gamma, \quad (1.33)$$

où ϵ est le symbole antisymétrique de Levi-Civita.

Les quantités $\vec{B}_j \cdot \vec{S}_j$ et $\vec{B}_k \cdot \vec{S}_k$ sont linéaires en matrices de spin et commutent, puisqu'ils impliquent des spins distincts. Le commutateur peut alors être développé comme suit

$$\begin{aligned} [R_j, R_k] &= \sum_{\beta, \gamma} B_j^\gamma \Gamma_{kj}^\beta [S_j^\gamma, S_j^\beta] S_k^\beta + \sum_{\alpha, \gamma} B_k^\gamma \Gamma_{jk}^\alpha S_j^\alpha [S_k^\alpha, S_k^\gamma] \\ &+ \sum_{l \neq j, k}^N \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{kl}^\beta S_j^\alpha S_k^\beta [S_l^\alpha, S_l^\beta] + \sum_{l \neq j, k}^N \sum_{\beta, \gamma} \Gamma_{jl}^\gamma \Gamma_{kj}^\beta [S_j^\gamma, S_j^\beta] S_k^\beta S_l^\gamma \\ &+ \sum_{l \neq k, j}^N \sum_{\alpha, \gamma} \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{kl}^\gamma S_j^\alpha [S_k^\alpha, S_k^\gamma] S_l^\gamma, \end{aligned} \quad (1.34)$$

en utilisant le fait que $[S_j^\alpha S_k^\alpha, S_k^\beta S_j^\beta] = 0$. On trouve des termes quadratiques ou cubiques en matrices de spin, et chacun des coefficients devant eux doit s'annuler explicitement pour que le modèle soit intégrable. Cela conduit à une série de relations algébriques quadratiques entre les couplages Γ et les différents "champs magnétiques" B . À partir des termes quadratiques, on trouve pour toute permutation des ensembles $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{x, y, z\}$:

$$B_j^\gamma \Gamma_{kj}^\beta + B_k^\gamma \Gamma_{jk}^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta \neq \gamma, \quad (1.35)$$

tandis que les termes cubiques en matrices de spin conduisent, pour chaque permutation, à une équation de Gaudin imposée aux couplages :

$$\Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{kl}^\beta - \Gamma_{jl}^\gamma \Gamma_{kj}^\beta - \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{kl}^\gamma = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta \neq \gamma. \quad (1.36)$$

Ces deux restrictions, définissant l'intégrabilité, sont les seules exigences que nous imposerons aux modèles. En effet, aucune symétrie $U(1)$ ni l'existence d'un pseudo-vide adéquat ne seront exigées. On peut également remarquer que l'antisymétrie $\Gamma_{ij}^\alpha = -\Gamma_{ji}^\alpha$ n'est **PAS** imposée ici comme c'est fréquemment le cas, suite aux trois solutions antisymétriques proposées par Gaudin à savoir : la solution rationnelle ou de type XXX, la solution trigonométrique ou de type XXZ et la solution elliptique ou de type XYZ [2], définissant également la classification Belavin-Drinfel'd des solutions [62]. Bien que Gaudin ait mentionné explicitement que l'antisymétrie n'a pas explicitement à être imposée [2], les modèles pour lesquels elle ne l'est pas ont été principalement étudiés ces dernières années. Par exemple, Balantekin et al. [63] ont défini de tels modèles intégrables non explicitement antisymétriques pour lesquels $\Gamma_{ij}^\alpha = -\Gamma_{ji}^\alpha - 2q$ avec q toute constante réelle. Un grand nombre de travaux de Skrypnik [64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71] ainsi qu'un article récent de Links [72] ont également défini et étudié des modèles qui ne font pas partie des classes antisymétriques habituelles de solutions à l'équation de Gaudin. Dans ce travail, l'antisymétrie n'est jamais imposée, de sorte que tous les modèles intégrables non symétriques possibles et définis par des charges conservées de la forme (1.31), sont aussi naturellement inclus dans notre approche.

1.4 Relations quadratiques entre opérateurs

Il a été montré explicitement, dans quelques cas spécifiques [18, 11, 35, 36, 37], que les valeurs propres r_j des charges conservées peuvent être reliées par des équations quadratiques reliant chaque r_j^2 à une combinaison linéaire de toutes les autres valeurs propres r_k . En considérant que ces relations sont valables pour les valeurs propres associées à chacun des états propres et que, dans la base commune de ces états propres, les charges conservées R_j sont toutes des opérateurs diagonaux, on peut immédiatement conclure que les relations quadratiques entre les valeurs propres doivent également être valables pour les opérateurs eux-mêmes.

Nous cherchons donc à voir si certains (ou tous) des modèles intégrables étudiés ici peuvent obéir, au niveau des opérateurs, à la relation suivante :

$$R_j^2 = \sum_{k \neq j} C_{jk} R_k + K_j, \quad (1.37)$$

avec K_j et C_{jk} un ensemble de constantes à déterminer.

Pour qu'une telle relation soit valide, il faut donc que les charges conservées obéissent à un ensemble de contraintes que l'on peut trouver en élevant au carré une charge conservée R_j donnée. La façon la plus simple de le faire est de calculer l'anticommutateur de R_j avec lui-même :

$$R_j^2 = \frac{1}{2} [R_j, R_j]_+ \quad (1.38)$$

puisque l'anticommutateur des matrices de spin est donné par :

$$\frac{1}{2} [S_j^\alpha, S_j^\beta]_+ = \frac{1}{2} S_j^\alpha S_j^\beta + \frac{1}{2} S_j^\beta S_j^\alpha = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{4} \mathbb{1}. \quad (1.39)$$

En nommant les termes linéaires et quadratiques (dans les matrices de spin) de la charge conservée R_j comme suit :

$$R_i^l = \sum_{\alpha} B_j^\alpha S_j^\alpha \quad R_i^q = \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^\alpha S_j^\alpha S_k^\alpha \quad (1.40)$$

on écrira alors que :

$$R_j^2 = \frac{1}{2} [R_j^l, R_j^l]_+ + [R_j^l, R_j^q]_+ + \frac{1}{2} [R_j^q, R_j^q]_+. \quad (1.41)$$

Le calcul du premier anticommutateur dans l'éq. (1.41), conduit à une constante donnée par :

$$\frac{1}{2} [R_j^l, R_j^l]_+ = \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha} (B_j^{\alpha})^2 \right) \mathbb{1}, \quad (1.42)$$

tandis que le second anticommutateur vaut explicitement :

$$[R_j^l, R_j^q]_+ = \sum_{k \neq j} \sum_{\alpha} 4B_j^{\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} S_k^{\alpha}, \quad (1.43)$$

contribuant, dans R_j^2 , un terme linéaire en matrices de spin qui implique exclusivement les spins d'indice $k \neq i$. L'anticommutateur restant conduit au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [R_j^q, R_j^q]_+ &= \sum_{\alpha, \gamma} \sum_{k \neq j} \sum_{k' \neq j} \Gamma_{jk}^{\alpha} \Gamma_{jk'}^{\gamma} [S_j^{\alpha} S_k^{\alpha}, S_j^{\gamma} S_{k'}^{\gamma}]_+ \\ &= \sum_{\alpha, \gamma} \sum_{k \neq j} \sum_{k' \neq j, k} \frac{\Gamma_{jk}^{\alpha} \Gamma_{jk'}^{\gamma}}{2} [S_j^{\alpha} S_k^{\alpha}, S_j^{\gamma} S_{k'}^{\gamma}]_+ + \sum_{\alpha, \gamma} \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_{jk}^{\alpha} \Gamma_{jk}^{\gamma}}{2} [S_j^{\alpha} S_k^{\alpha}, S_j^{\gamma} S_k^{\gamma}]_+ \end{aligned} \quad (1.44)$$

en le divisant en ses termes $k \neq k'$ et $k = k'$. Le premier terme a $k' \neq k \neq j$ et donc, puisque les matrices de spin associées à des spins distincts commutent toutes entre elles, donne :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \gamma} \sum_{k \neq i} \sum_{k' \neq i, k} \frac{\Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{ik'}^{\gamma}}{2} [S_i^{\alpha} S_k^{\alpha}, S_i^{\gamma} S_{k'}^{\gamma}]_+ &= \sum_{\alpha, \gamma} \sum_{k \neq i} \sum_{k' \neq i, k} \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{ik'}^{\gamma} \delta_{\alpha, \gamma} S_k^{\alpha} S_{k'}^{\gamma} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{k \neq i} \sum_{k' \neq i, k} \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{ik'}^{\alpha} S_k^{\alpha} S_{k'}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Le terme restant $k' = k$ peut être, en utilisant les commutateurs, anticommutateurs et les produits connus :

$$S_j^{\alpha} S_j^{\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{4} \mathbb{1} + \frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_j^{\gamma}, \quad (1.46)$$

écrit comme :

$$\begin{aligned} [S_j^{\alpha} S_k^{\alpha}, S_j^{\gamma} S_k^{\gamma}]_+ &= S_j^{\alpha} S_k^{\alpha} S_j^{\gamma} S_k^{\gamma} + S_j^{\gamma} S_k^{\gamma} S_j^{\alpha} S_k^{\alpha} \\ &= S_j^{\alpha} S_j^{\gamma} S_k^{\alpha} S_k^{\gamma} + S_j^{\gamma} S_j^{\alpha} S_k^{\alpha} S_k^{\gamma} + S_j^{\gamma} S_j^{\alpha} [S_k^{\gamma}, S_k^{\alpha}] \\ &= [S_j^{\alpha}, S_j^{\gamma}]_+ S_k^{\alpha} S_k^{\gamma} + S_j^{\gamma} S_j^{\alpha} [S_k^{\gamma}, S_k^{\alpha}] \\ &= \frac{1}{2} \delta_{\alpha\gamma} S_k^{\alpha} S_k^{\gamma} + i \epsilon_{\gamma, \alpha, \beta} S_j^{\gamma} S_j^{\alpha} S_k^{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \delta_{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{4} \delta_{\alpha\gamma} \mathbb{1} + \frac{i}{2} \epsilon_{\alpha, \gamma, \beta} S_k^{\beta} \right) + i \epsilon_{\gamma, \alpha, \beta} \left(\frac{1}{4} \delta_{\gamma\alpha} \mathbb{1} + \frac{i}{2} \epsilon_{\gamma, \alpha, \beta} S_j^{\beta} \right) S_k^{\beta} \\ &= \frac{1}{8} \delta_{\alpha, \gamma} \mathbb{1} - \frac{1}{2} S_j^{\beta} S_k^{\beta} (\epsilon_{\alpha\gamma\beta})^2. \end{aligned} \quad (1.47)$$

L'expression ci-dessus conduit à un terme constant pour $\alpha = \gamma$ et à un terme quadratique couplant le spin d'indice j et le spin d'indice k le long de la direction $\beta \neq (\alpha, \gamma)$.

On trouve donc :

$$\sum_{\alpha, \gamma} \sum_{k \neq j}^N \frac{\Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma}{2} [S_j^\alpha S_k^\alpha, S_j^\gamma S_k^\gamma]_+ = \sum_{\alpha, \gamma} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma \left(\frac{\delta_{\alpha, \gamma}}{16} \mathbb{1} - \frac{1}{4} S_j^\beta S_k^\beta (\epsilon_{\alpha\gamma\beta})^2 \right). \quad (1.48)$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned} R_j^2 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha} (B_j^\alpha)^2 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^\alpha)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{2} B_j^\alpha \Gamma_{jk}^\alpha S_k^\alpha \\ &+ \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j}^N \sum_{k' \neq j, k}^N \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk'}^\alpha S_k^\alpha S_{k'}^\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^\beta \Gamma_{jk}^\gamma) S_j^\alpha S_k^\alpha, \end{aligned} \quad (1.49)$$

où, dans le dernier terme, β et γ sont les deux directions perpendiculaires à α .

Il reste à voir dans quelles conditions le carré de la charge conservée qui en résulte peut-être réécrit comme une combinaison linéaire des autres charges conservées. Une telle combinaison linéaire générique peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} C_{jk} R_k + K_j \cdot \mathbb{1} &= \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j} C_{jk} B_k^\alpha S_k^\alpha + \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j} \sum_{k' \neq k}^N C_{jk} \Gamma_{kk'}^\alpha S_k^\alpha S_{k'}^\alpha + K_j \cdot \mathbb{1} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j} C_{jk} B_k^\alpha S_k^\alpha + \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j} \sum_{k' \neq j, k}^N C_{jk} \Gamma_{kk'}^\alpha S_k^\alpha S_{k'}^\alpha + \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j} C_{jk} \Gamma_{kj}^\alpha S_j^\alpha S_k^\alpha + K_j \cdot \mathbb{1} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Démontrer qu'une telle combinaison linéaire existe revient à montrer que les constantes C_{jk} peuvent être définies de manière à être cohérentes, terme par terme, avec l'expression de R_j^2 . En d'autres termes, il faut que les relations suivantes soient vérifiées :

$$K_j = \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha} (B_j^\alpha)^2 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^\alpha)^2 \right) \quad (1.51)$$

$$C_{jk} B_k^\alpha = \frac{1}{2} B_j^\alpha \Gamma_{jk}^\alpha \quad (1.52)$$

$$C_{jk} \Gamma_{kj}^\alpha = -\frac{1}{2} \Gamma_{jk}^\beta \Gamma_{jk}^\gamma \quad (1.53)$$

$$C_{jk} \Gamma_{kk'}^\alpha + C_{jk'} \Gamma_{k'k}^\alpha = \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk'}^\alpha \quad \forall k' > k \quad (k, k' \neq j), \quad (1.54)$$

où la dernière équation couvre chaque paire d'indices **distincts** k, k' .

1.5 Utilisation de l'intégrabilité dans la construction des formes quadratiques entre charges conservées

La première condition d'intégrabilité (1.35) trouvée précédemment :

$$B_j^\gamma \Gamma_{kj}^\beta + B_k^\gamma \Gamma_{jk}^\alpha = 0 \rightarrow B_j^\gamma \Gamma_{kj}^\beta = -B_k^\gamma \Gamma_{jk}^\alpha \quad \forall \alpha \neq \beta \neq \gamma \quad (1.55)$$

peut être utilisée pour prouver que, si elle est respectée, l'intégrabilité garantit que les trois équations (1.52) (selon $\alpha = x, y, z$) :

$$C_{jk} B_k^\alpha = \frac{1}{2} B_j^\alpha \Gamma_{jk}^\alpha \quad (1.56)$$

sont toutes cohérentes, c'est-à-dire que

$$\frac{B_j^\alpha}{B_k^\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha = \frac{B_j^\beta}{B_k^\beta} \Gamma_{jk}^\beta \rightarrow B_j^\alpha B_k^\beta \Gamma_{jk}^\alpha = B_j^\beta B_k^\alpha \Gamma_{jk}^\beta. \quad (1.57)$$

Cet ensemble d'équations de cohérence est en effet respecté si la condition d'intégrabilité est satisfaite puisqu'il peut alors être réécrit en utilisant la condition (1.55) comme :

$$B_j^\alpha \left(-B_j^\beta \Gamma_{kj}^\gamma \right) = B_j^\beta \left(-B_j^\alpha \Gamma_{kj}^\gamma \right). \quad (1.58)$$

Nous devons également prouver que (1.53) et (1.54) sont aussi compatibles avec cet ensemble de constantes $C_{jk} = \frac{1}{2} \frac{B_j^\alpha}{B_k^\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha$ (dont on a montré qu'elles étaient égales pour chacune des trois directions possibles α).

Le terme de droite dans l'éq. (1.54) peut, en utilisant la relation d'intégrabilité (1.55), être réécrit comme suit :

$$\Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk'}^\alpha = -\frac{1}{2} \frac{B_j^\gamma}{B_k^\gamma} \Gamma_{kj}^\beta \Gamma_{jk'}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{B_j^\gamma}{B_k^\gamma} \left(-\Gamma_{kk'}^\beta \Gamma_{jk'}^\gamma + \Gamma_{kk'}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma \right), \quad (1.59)$$

qu'on peut de nouveau réécrire en utilisant la deuxième condition d'intégrabilité (1.36) et la relation :

$$\Gamma_{kj}^\beta \Gamma_{jk'}^\alpha = -\Gamma_{kk'}^\beta \Gamma_{ik'}^\gamma + \Gamma_{kk'}^\alpha \Gamma_{ik}^\gamma \quad (1.60)$$

comme

$$\Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk'}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{B_j^\gamma}{B_k^\gamma} \left(\frac{B_k^\gamma}{B_{k'}^\gamma} \Gamma_{k'k}^\alpha \Gamma_{jk'}^\gamma + \Gamma_{kk'}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{B_j^\gamma}{B_{k'}^\gamma} \Gamma_{k'k}^\alpha \Gamma_{jk'}^\gamma + \frac{B_j^\gamma}{B_k^\gamma} \Gamma_{kk'}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma \right) \quad (1.61)$$

En tenant compte de la forme des constantes C_{jk} telles qu'elles ont été définies dans (1.52), cette dernière égalité se réduit à

$$\Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk'}^\alpha = C_{jk'} \Gamma_{kk'}^\alpha + C_{jk} \Gamma_{kk'}^\alpha \quad (1.62)$$

prouvant ainsi que les conditions d'intégrabilité sont suffisantes pour assurer que la condition (1.54) est satisfaite. Il reste à vérifier que la dernière condition (1.53) est également vérifiée. En effet, pour les constantes C_{jk} définies en (1.52), on trouve que :

$$C_{jk}\Gamma_{kj}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{B_j^\gamma}{B_k^\gamma} \Gamma_{jk}^\gamma \Gamma_{kj}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{B_j^\gamma}{B_k^\gamma} \Gamma_{kj}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma = -\frac{1}{2} \Gamma_{jk}^\beta \Gamma_{jk}^\gamma, \quad (1.63)$$

où la condition d'intégrabilité (1.55) a été utilisée. Cette dernière égalité confirme que l'intégrabilité elle-même est également suffisante pour que la dernière condition restante (1.53) soit respectée. Il a donc été prouvé que, pour tout modèle de R-G intégrable et défini par des charges conservées (1.31) qui commutent toutes entre elles, le carré des charges conservées peut être écrit comme la combinaison linéaire suivante des autres charges conservées :

$$R_j^2 = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{\Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma}{\Gamma_{kj}^\beta} R_k + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} (B_j^\alpha)^2 + \frac{1}{16} \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j} (\Gamma_{jk}^\alpha)^2. \quad (1.64)$$

Ici, nous avons choisi d'utiliser (1.53) pour écrire les constantes $C_{jk} = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma}{\Gamma_{kj}^\beta}$, mais

elles peuvent aussi être écrites de manière équivalente sous la forme $C_{jk} = \frac{1}{2} \frac{B_j^\alpha \Gamma_{jk}^\alpha}{B_k^\alpha}$. Puisque la relation quadratique est valable au niveau de l'opérateur, elle est aussi trivialement valable pour l'ensemble des valeurs propres r_j qui définissent l'un quelconque des états propres du système considéré, ce qui fournit l'ensemble suivant d'équations de Bethe quadratiques :

$$r_j^2 = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \frac{\Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma}{\Gamma_{kj}^\beta} r_k + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} (B_j^\alpha)^2 + \frac{1}{16} \sum_{\alpha} \sum_{k \neq j} (\Gamma_{jk}^\alpha)^2, \quad (1.65)$$

dont l'ensemble des solutions définira le spectre énergétique complet du modèle.

1.6 Quelques cas connus

Bien que le résultat principal obtenu dans ce travail s'applique à un ensemble beaucoup plus large de modèles, nous montrons explicitement dans cette section comment il permet de reproduire les cas spécifiques connus pour lesquels des relations d'opérateurs quadratiques ont été publiées précédemment.

1.6.1 Modèles de R-G de type XXX

Links dans [35] a su démontré que les charges conservées

$$T_i = B\sigma_i^z + \sum_{j \neq i} \frac{\mathcal{P}_{ij} - 1}{\epsilon_i - \epsilon_j} = \alpha\sigma_i^z + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j - 1}{\epsilon_i - \epsilon_j}, \quad (1.66)$$

obtenues grâce à une représentation d'opérateurs de permutation dans des modèles de R-G de type XXX, obéissent à des équations quadratiques données par

$$T_i^2 = B^2 - \sum_{j \neq i} \frac{T_i - T_j}{\epsilon_i - \epsilon_j}. \quad (1.67)$$

Cet exemple spécifique correspond, dans notre forme générique (1.64), au cas défini par des couplages isotropes et asymétriques donnés par :

$$\Gamma_{ij}^\alpha = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \quad \forall \quad i \neq j \quad \forall \quad \alpha = x, y, z. \quad (1.68)$$

Les composantes du champ magnétique sont données par

$$B_i^\alpha = B \delta_{\alpha z}. \quad (1.69)$$

En utilisant l'antisymétrie entre couplages par permutation d'indices de spin ($\Gamma_{ji}^\beta = -\Gamma_{ij}^\beta$), l'équation générale (1.64) peut être réécrite comme :

$$R_i^2 = \sum_{j \neq i} \frac{R_j}{\epsilon_i - \epsilon_j} + B^2 + \frac{3}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} \quad (1.70)$$

En choisissant $R_i = T_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j}$, l'éq. (1.70) devient finalement équivalente à l'éq. (1.67).

En effet, on aura

$$\begin{aligned} & T_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{T_i}{\epsilon_i - \epsilon_j} + \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} \\ &= B^2 + \sum_{j \neq i} \frac{T_j}{\epsilon_i - \epsilon_j} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} + \frac{3}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} \\ & T_i^2 = B^2 - \sum_{j \neq i} \frac{T_i - T_j}{\epsilon_i - \epsilon_j}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

puisque

$$-\frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} + \frac{3}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} = 0. \quad (1.72)$$

Cette dernière affirmation est facilement prouvée puisque :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} + \frac{3}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \left[\frac{2}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \left[\frac{2}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} - \left(\frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} - \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} \right) \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \left[\frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} + \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_k} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.73)$$

puisque le second terme, sous l'échange des indices de sommation k, j , est bien égal au premier au signe moins (-) près.

1.6.2 Modèles anisotropes de R-G de type XXZ

Un deuxième ensemble d'équations quadratiques similaires a également été publié par Claeys et *al.* [18] dans un cas des modèle de R-G de type XXZ décrivant un supraconducteur intégrable $p + ip$ couplé à un bain de particules, où les charges conservées sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_k &= \frac{1}{2}\sigma_k^z + \frac{\gamma}{\epsilon_k}\sigma_k^x - \frac{G}{2}\sum_{k' \neq k}^N \left[\frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\sigma_k^z\sigma_{k'}^z + \frac{\epsilon_k\epsilon_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}(\sigma_k^x\sigma_{k'}^x + \sigma_k^y\sigma_{k'}^y) \right] \\ &+ \frac{1}{2}\left(1 + G\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right) \end{aligned} \quad (1.74)$$

et obéissent aux relations quadratiques

$$\tilde{R}_k^2 = \tilde{R}_k + \left(\frac{\gamma}{\epsilon_k}\right)^2 + G\sum_{k' \neq k} \epsilon_{k'}^2 \frac{\tilde{R}_k - \tilde{R}_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}. \quad (1.75)$$

En définissant de nouvelles charges conservées $R_k = \tilde{R}_k - \frac{1}{2}\left(1 + G\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right)$ et en utilisant les relations $\Gamma_{kk'}^x = \Gamma_{kk'}^y = -\frac{G}{2}\frac{\epsilon_k\epsilon_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}$, $\Gamma_{kk'}^z = -\frac{G}{2}\frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}$ et $B_k^z = \frac{1}{2}$, $B_k^x = \frac{\gamma}{\epsilon_k}$, $B_k^y = 0$, l'éq. générale (1.64) fait intervenir les constantes $-2\Gamma_{kk'}^x\Gamma_{kk'}^y/\Gamma_{kk'}^z = -G\frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}$ et conduit à :

$$\begin{aligned} &\tilde{R}_k^2 - \tilde{R}_k \left(1 + G\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + G\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right) \left(1 + G\sum_{k'' \neq k} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k''}^2}\right) \\ &= -G\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\tilde{R}_{k'} + \frac{G}{2}\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \left(1 + G\sum_{k'' \neq k'} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2}\right) + \frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{\epsilon_k}\right)^2 \\ &+ \sum_{k' \neq k} \left[2\left(-\frac{G}{2}\frac{\epsilon_k\epsilon_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right)^2 + \left(-\frac{G}{2}\frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right)^2\right] \\ &\tilde{R}_k^2 - \tilde{R}_k - G\sum_{k' \neq k} \epsilon_{k'}^2 \frac{\tilde{R}_k - \tilde{R}_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} - \left(\frac{\gamma}{\epsilon_k}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(1 + G\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right) \left(1 + G\sum_{k'' \neq k} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k''}^2}\right) \\ &+ \frac{G}{2}\sum_{k' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \left(1 + G\sum_{k'' \neq k'} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2}\right) + \frac{1}{4} + \sum_{k' \neq k} \left[\frac{G^2}{2}\left(\frac{\epsilon_k\epsilon_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right)^2 + \frac{G^2}{4}\left(\frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right)^2\right] \\ &\tilde{R}_k^2 - \tilde{R}_k - G\sum_{k' \neq k} \epsilon_{k'}^2 \frac{\tilde{R}_k - \tilde{R}_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} - \left(\frac{\gamma}{\epsilon_k}\right)^2 = -\frac{G^2}{4}\sum_{k' \neq k} \sum_{k'' \neq k} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k''}^2} \\ &+ \frac{G^2}{2}\sum_{k' \neq k} \sum_{k'' \neq k'} \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2} + \sum_{k' \neq k} \left[\frac{G^2}{2}\left(\frac{\epsilon_k\epsilon_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right)^2 + \frac{G^2}{4}\left(\frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (1.76)$$

À droite, les termes $k'' = k'$ de la première somme double et $k'' = k$ dans la seconde annulent respectivement les quatrième et troisième termes (sommés simples), de sorte qu'elle se réduit à :

$$\begin{aligned}
& -\frac{G^2}{4} \sum_{k' \neq k} \sum_{k'' \neq k, k'} \left[\frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k''}^2} - 2 \frac{\epsilon_{k'}^2}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{\epsilon_{k''}^2}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2} \right] \\
&= -\frac{G^2}{4} \sum_{k' \neq k} \sum_{k'' \neq k, k'} \epsilon_{k'}^2 \epsilon_{k''}^2 \left[\left(\frac{1}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} - \frac{1}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k''}^2} \right) \frac{1}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2} - 2 \frac{1}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{1}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2} \right] \\
&= -\frac{G^2}{4} \sum_{k' \neq k} \sum_{k'' \neq k, k'} \epsilon_{k'}^2 \epsilon_{k''}^2 \left[-\frac{1}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k''}^2} \frac{1}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2} - \frac{1}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{1}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2} \right] \\
&= -\frac{G^2}{4} \sum_{k' \neq k} \sum_{k'' \neq k, k'} \epsilon_{k'}^2 \epsilon_{k''}^2 \left[-\frac{1}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{1}{\epsilon_{k''}^2 - \epsilon_{k'}^2} - \frac{1}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} \frac{1}{\epsilon_{k'}^2 - \epsilon_{k''}^2} \right] = 0 \tag{1.77}
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'éq. (1.76) se réduit à :

$$\tilde{R}_k - \tilde{R}_k = G \sum_{k' \neq k} \epsilon_{k'}^2 \frac{\tilde{R}_k - \tilde{R}_{k'}}{\epsilon_k^2 - \epsilon_{k'}^2} + \left(\frac{\gamma}{\epsilon_k} \right)^2, \tag{1.78}$$

confirmant le résultat de Claeys *et al.* donné dans l'éq. (1.75).

1.7 Conclusion

Dans ce travail, nous avons démontré comment contourner complètement la procédure de l'ansatz de Bethe lors de la détermination du spectre des modèles intégrables de R-G de spin-1/2. Indépendamment des symétries des modèles choisis, qu'ils soient du type XXX, XXZ ou XYZ, qu'ils soient antisymétriques ou non, les relations d'intégrabilité auxquelles les couplages doivent satisfaire pour définir l'ensemble des charges conservées sont suffisantes pour assurer l'existence d'un ensemble fermé de relations quadratiques entre les opérateurs qui commutent les uns avec les autres. Leur spectre complet de valeurs propres peut alors être trouvé comme les diverses solutions d'un ensemble d'équations quadratiques les reliant également.

L'approche utilisée ici ne requiert rien de plus que l'intégrabilité, définie comme l'existence de charges conservées. Cette approche s'applique donc à tout membre de la classe étudiée sans aucune exigence de symétrie $U(1)$, d'existence d'un état de pseudo-vide correctement défini, ou d'une approche de l'Ansatz de Bethe utilisable. En ce sens, les difficultés qui rendent les modèles de type XYZ beaucoup plus compliqués que les modèles XXZ ou XXX sont complètement levées puisque la construction quadratique fournit, de manière identique, un ensemble d'équations de Bethe quadratiques pour les valeurs propres des charges conservées.

La spécification des valeurs propres ne fournit pas, en soi, une représentation explicite de l'état propre correspondant. Cependant, dans certains modèles où une solution explicite de l'Ansatz de Bethe a également été construite, une représentation en déterminant, dépendant seulement des valeurs propres, du produit scalaire de l'état propre avec un produit tensoriel arbitraire des états propres de $S_i^z : \prod_{j=1}^M S_{i_j}^+ |\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle$ ont été effectivement construits [11, 15, 17, 32] et peuvent finalement fournir une approche pour reconstruire explicitement les états propres.

À présent que nous disposons de relations quadratiques entre les différentes valeurs propres des charges conservées, dans le chapitre suivant, nous classifions les modèles de R-G et démontrons une représentation paramétrique des modèles complètement anisotropes. Finalement nous utiliserons les équations quadratiques trouvées précédemment afin de calculer des valeurs moyennes de spin, dans un état donné, démontrant que la simple connaissance des valeurs propres associées à un état peut suffire à calculer certaines de ses propriétés physiques.

Chapitre 2

Classification, paramétrisation et états génériques dans les modèles de spin- $\frac{1}{2}$

"La plupart des gens disent que c'est l'intellect qui fait un grand scientifique. Ils ont tort : c'est le caractère." Albert Einstein

"La seule voie qui offre quelque espoir d'un avenir meilleur pour toute l'humanité est celle de la coopération et du partenariat." Kofi Annan

Tels que décrits dans le chapitre précédent, les modèles de Gaudin sont une classe spécifique de modèles intégrables quantiques, caractérisés par un large ensemble de charges conservées qui commutent mutuellement entre elles [2, 3, 73, 74]. Typiquement, chaque charge conservée contient des termes d'interaction entre un seul spin (central) et l'ensemble des autres spins (le bain) du système et ces interactions peuvent être soit totalement isotropes comme dans les modèles de type XXX, soit totalement anisotropes comme dans les modèles de type XYZ ou encore partiellement anisotropes ou de type XXZ. De manière remarquable, les modèles de types XXX et XXZ peuvent aussi être étendus en ajoutant un champ magnétique le long de la direction \hat{z} , ce qui conduit aux modèles de Richardson-Gaudin (R-G) [73, 74].

Dans ce chapitre, nous abordons la question du modèle le plus général de R-G de spin $1/2$ avec couplages unidirectionnels qui demeure intégrable en présence d'un champ magnétique externe arbitraire. De manière cruciale, l'hypothèse que les interactions sont totalement antisymétriques peut être supprimée pour ces modèles de spin $1/2$, ce qui permet d'obtenir des modèles intégrables non antisymétriques dont l'intégrabilité supporte un champ magnétique externe d'orientation quelconque. Cette étude s'appuie sur la constatation récente que les modèles de type XXZ peuvent également être étendus à des modèles avec champ magnétique arbitraire (brisant la symétrie $U(1)$ commune des modèles XXZ) par la restriction aux modèles de spin $1/2$ [11, 18, 72, 75, 76].

Ici, nous présentons une paramétrisation générale des modèles intégrables de spin- $1/2$ XYZ dans un champ externe. Bien que leur définition suppose initialement que le champ est non nul, les composantes du champ peuvent toutes être individuellement mises à zéro grâce à des limites adéquates. Le fait qu'un champ magnétique externe ne rompt pas l'intégrabilité de ces modèles pourrait permettre de fournir une description plus réaliste de la décohérence d'un spin central, dans un champ, couplé à un bain de spins nucléaire. Lorsque le couplage quadripolaire, par exemple, est inclus, les interactions d'échange appropriées deviennent totalement anisotropes (ou de type XYZ) [77].

L'approche utilisée dans ce travail permet de construire de manière explicite des charges conservées définissant une classe de modèles intégrables de type XYZ. De façon équivalente,

dans une série d'articles, T. Skrypnik a étudié les conséquences d'une matrice r classique non-antisymétrique, satisfaisant l'équation classique de Yang-Baxter afin de construire des modèles de R-G plus étendus [65, 67, 68, 70, 78, 79, 80, 81, 82, 83]. Les résultats obtenus ici sont équivalents à cette construction de Skrypnik, mais ne repose que sur la demande qu'un ensemble d'opérateurs commutent. Elle nous mènera aussi à une paramétrisation différente, bien qu'équivalente, des modèles en question.

Ces modèles font partie de la classe générale des modèles de R-G pour lesquels les relations quadratiques du précédent chapitre permettent de calculer directement et efficacement les énergies propres du système considéré. C'est seulement lorsque le système conserve une symétrie $U(1)$ associée à son invariance sous rotation dans un plan donné, que nous appellerons le plan XY, que l'utilisation de l'Ansatz algébrique de Bethe (ABA) permet de simplement construire leurs états propres sous la forme $\prod_{i=1}^M B(\lambda_i) |\Omega\rangle$, où l'état spécifique $|\Omega\rangle$ peut être appelé le pseudo-vide.

L'ensemble de racines de Bethe $\{\lambda_1 \dots \lambda_M\}$, on le rappelle, définissent un état propre lorsqu'elles sont "on-shell", c'est-à-dire solutions d'un système de $M < N$ équations algébriques non linéaires couplées, appelées équations de Bethe [10, 74, 86, 87].

Certains modèles qui brisent la symétrie $U(1)$ soit par un champ magnétique externe [11, 18, 76], soit par d'autres "conditions aux bords" intégrables [12, 75] qui peuvent conduire à des termes supplémentaires dans les charges conservées, ont également été démontrés solubles d'une manière similaire et ce malgré l'absence d'un pseudo-vide "propre". En effet, une construction similaire à l'ABA conduit à des états propres de la forme $\prod_{i=1}^M B(\lambda_i) |\Omega\rangle$ (contenant maintenant un nombre de racines de Bethe égal à N , la taille du système). Cet Ansatz de Bethe algébrique modifié (MABA) [12, 49, 51, 52, 53] fournit donc également une représentation compacte des états propres de ces modèles. Cependant, pour les modèles de type XYZ, qui brisent la symétrie $U(1)$ en étant complètement anisotropes dans leurs couplages, seul le modèle de Gaudin elliptique antisymétrique a, à notre connaissance, une construction explicite de ses états propres. Ce dernier nécessite d'ailleurs un ABA beaucoup plus complexe [21]. Les modèles de type XYZ de R-G dans un champ magnétique externe qui sont discutés dans ce chapitre ne donnent donc pas naturellement accès à une approche ABA ou MABA pour la construction de leurs états propres. Néanmoins, dans ce chapitre, des expressions explicites pour les états propres seront construites, uniquement en exploitant les relations quadratiques entre les charges conservées de spin-1/2 et, par conséquent, sans avoir à définir une quelconque procédure d'Ansatz de Bethe. Puisque l'approche contourne complètement toute référence aux points de Bethe, à la nécessité de spécifier un état de pseudo-vide ou à la nécessité de définir des opérateurs $B(u)$ propres, elle fournit ce que l'on peut appeler une solution "sans Ansatz de Bethe" des modèles intégrables génériques de R-G de spin 1/2 dans un champ magnétique arbitraire.

La construction qui en résulte donne une expression explicite des projecteurs sur tout état propre en termes des charges conservées du modèle et de l'ensemble des valeurs propres définissant l'état propre en question. Puisque la recherche de ces valeurs propres a été réduite à la recherche de solutions d'un système d'équations quadratiques, la définition formelle des états propres qui en résulte pourrait devenir d'une grande utilité numérique, puisqu'elle ne nécessite que ces valeurs propres, faciles à calculer (par rapport aux racines de Bethe).

Ce chapitre est divisé en sections dans lesquelles nous récapitulons d'abord les différentes classes de modèles de R-G antisymétriques, y compris les modèles elliptiques (de type XYZ) dans la Section 2.1 puis continuons dans la Section 2.2 avec la paramétrisation générale des modèles de type XYZ de spin-1/2 dans des champs magnétiques arbitraires. La section 2.3 détaille ensuite les relations quadratiques entre les charges conservées et l'utilisation du théorème

de Hellmann-Feynman dans le calcul des quantités physiques, présentant aussi des résultats numériques. Finalement dans les sections 2.4, 2.5 et 2.6, nous aborderons la construction des états propres les plus génériques issus des modèles de R-G et la section 2.7 est réservée aux conclusions.

2.1 Classification des modèles

2.1.1 Modèles de Gaudin

Gaudin présupposait à l'origine un ensemble d'opérateurs agissant comme des charges conservées de la forme [2, 3]

$$R_j = \sum_{k \neq j}^N \left[\Gamma_{jk}^x S_j^x S_k^x + \Gamma_{ij}^y S_j^y S_k^y + \Gamma_{jk}^z S_j^z S_k^z \right], \quad j = 1 \dots N, \quad (2.1)$$

où les $S_j^\alpha, \forall j = 1, 2, \dots, N$ sont N réalisations distinctes de l'algèbre de spin $su(2)$ satisfaisant $[S_j^\alpha, S_k^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{jk} S_k^\gamma$. Pour que ces opérateurs se comportent comme des charges conservées, ils doivent commuter mutuellement $[R_j, R_k] = 0, \forall j, k = 1 \dots N$. Cette exigence conduit à ce qu'on appelle les *équations de Gaudin*

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^\alpha &= -\Gamma_{kj}^\alpha, & \forall j \neq k, \\ \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{kl}^\beta + \Gamma_{lj}^\beta \Gamma_{jk}^\gamma + \Gamma_{kl}^\gamma \Gamma_{lj}^\alpha &= 0, & \forall j \neq k \neq l, \end{aligned} \quad (2.2)$$

pour toute permutation (α, β, γ) de (x, y, z) . Différentes solutions à ces équations sont connues, et elles définissent toutes des classes distinctes de modèles de Gaudin intégrables [2, 3]. Toutes ces solutions expriment les couplages Γ_{jk}^α comme des fonctions antisymétriques d'un ensemble de variables réelles (appelées inhomogénéités) $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_L\}$.

À l'exception des modèles de Gaudin antisymétriques et elliptiques (avec une structure de type XYZ dans laquelle les couplages sont complètement anisotropes), les charges conservées issues des autres modèles peuvent être étendues par l'ajout d'un champ magnétique soit orienté uniquement suivant une direction privilégiée [59, 60] soit, pour certains couplages, avec champ magnétique orienté de façon quelconque [58, 89].

2.1.2 Modèles de Richardson-Gaudin

Contrairement aux modèles de Gaudin, ceux de R-G incluent donc, tout en préservant l'intégrabilité, un champ magnétique pouvant être arbitraire ou polarisé suivant une seule direction. Ces modèles ont été appelés *modèles de R-G*, car les opérateurs résultants correspondent aux charges conservées du modèle réduit de Bardeen-Cooper-Schrieffer résolu par Richardson [90, 91, 92]. La solution exacte de ces modèles par l'Ansatz de Bethe a été obtenue indépendamment par Richardson et Gaudin, où le résultat principal est que la restriction aux modèles de type XXZ permet d'obtenir des opérateurs généralisés de création et de destruction de spin qui peuvent être utilisés pour construire des états propres exacts [74].

Ces modèles sont définis de la manière suivante :

$$R_j = \vec{B}_j \cdot \vec{S}_j + \sum_{k \neq j}^N \sum_{\alpha=x,y,z} \Gamma_{jk}^\alpha S_j^\alpha S_k^\alpha, \quad (2.3)$$

où B_j est le champ magnétique appliqué au spin central. Ces modèles peuvent être scindés en plusieurs classes [88, 89].

Classe rationnelle décalée

Dans cette classe, les constantes de couplages sont données par

$$\Gamma_{jk}^x = \Gamma_{jk}^y = \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k}, \quad \Gamma_{jk}^z = C_0 + \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k}, \quad C_0 \in \mathbb{C} \quad (2.4)$$

Afin de conserver l'intégrabilité dans cette classe de modèles, les choix possibles du champ magnétique dépend de la valeur spécifique de la constante arbitraire C_0 , responsable de l'anisotropie de ladite classe. Ainsi, lorsque C_0 vaudra zéro ($C_0 = 0$), les modèles obtenus seront complètement isotropes et antisymétriques (XXX antisymétriques) ; auquel cas, ils seront toujours $U(1)$ -symétriques et le champ magnétique extérieur pourra naturellement être orienté dans une direction arbitraire. Il peut donc avoir trois composantes constantes non-nulles suivant chacune des directions $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ de l'espace ; soit

$$B_j^x = C_1 \quad B_j^y = C_2 \quad B_j^z = C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Dans le cas contraire, c'est à dire celui correspondant à une situation où la constante C_0 serait non nulle, les modèles ne seront plus complètement isotropes puisque leurs couplages seront égaux dans le plan XY tout en étant différentes des couplages portés par l'axe \hat{z} ($\Gamma_{jk}^x = \Gamma_{jk}^y \neq \Gamma_{jk}^z$). Dans ce cas de figure, la seule façon d'ajouter un champ magnétique de manière à maintenir l'intégrabilité du système considéré est de choisir ses composantes comme suit :

$$B^x = B^y = 0, \quad B^z(\epsilon_j) = C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

ce qui, encore une fois, permet aux modèles de rester $U(1)$ -symétriques bien qu'ils ne soient plus antisymétriques selon \hat{z} : ($\Gamma_{jk}^z \neq -\Gamma_{kj}^z$).

La particularité de cette classe est donc qu'elle conserve toujours une symétrie $U(1)$. Les relations quadratiques de ces modèles et plus de détails à leur propos sont aussi donnés dans [89]. Dans l'optique de conserver l'hermiticité des charges conservées, la constante C_0 devra être prise dans l'ensemble \mathbb{R} ($C_0 \in \mathbb{R}$). Dans le cas particulier $C_0 = 0$, il existe déjà une représentation en déterminants, dépendant seulement des valeurs propres, pour ce type de modèles [11, 32], permettant d'accéder aux facteurs de forme (éléments de matrice des opérateurs dans la base des états propres) utiles au calcul de la dynamique de ces modèles.

Classe trigonométrique décalée

Cette deuxième classe est, quant à elle, définie par des couplages paramétrés de la façon suivante :

$$\Gamma_{jk}^x = \Gamma_{jk}^y = \frac{\epsilon_j \epsilon_k}{\epsilon_j^2 - \epsilon_k^2}, \quad C_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma_{jk}^z = C_0 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_j^2 + \epsilon_k^2}{\epsilon_j^2 - \epsilon_k^2} = \frac{\epsilon_k^2}{\epsilon_j^2 - \epsilon_k^2} + \left(C_0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\epsilon_j^2}{\epsilon_j^2 - \epsilon_k^2} + \left(C_0 - \frac{1}{2} \right). \quad (2.7)$$

Contrairement à la constante C_0 qui ne fixait que l'anisotropie dans la classe précédente, ici la valeur de C_0 a un impact sur la capacité du système à rester intégrable en présence d'un champ magnétique d'orientation quelconque et donc d'une brisure de la symétrie $U(1)$. En effet, lorsque cette constante vaut $\pm \frac{1}{2}$, ces modèles, non antisymétriques, restent intégrable

lorsque le champ magnétique agissant sur le spin central a trois composantes non nulles. Les "champs magnétiques" apparaissant alors dans les autres charges conservées dépendront des inhomogénéités ϵ_j du système considéré et ces champs seront tous définis, de manière à conserver l'intégrabilité dudit système ; comme :

$$B_j^x = b^x \epsilon_j^{-1}, \quad B_j^y = b^y \epsilon_j^{-1}, \quad B_j^z = 1, \quad b^x, b^y \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

En présence de composantes B^x et B^y on sera alors face à une brisure de la symétrie $U(1)$ sous rotation dans le plan XY . Il convient de noter que les paramètres b^x et b^y sont arbitraires ; donc si on les prend à zéro, on peut tout à fait restorer la symétrie $U(1)$ du système avec $C_0 = \pm \frac{1}{2}$. Il faut également souligner que, par le changement de variables $\epsilon_j \rightarrow \epsilon_j^{-1}$, $\epsilon_k \rightarrow \epsilon_k^{-1}$, les deux modèles trigonométriques $C_0 = \pm 1/2$ sont équivalents [89].

Par contre, le choix de toute autre valeur $C_0 \neq \pm \frac{1}{2}$ implique inévitablement, pour que le modèle soit intégrable, que les composantes dans le plan du champ magnétique soit zéro [89]. On aura alors

$$B_j^x = B_j^y = 0, \quad B_j^z = 1 \quad (2.9)$$

Le cas $C_0 = 0$ est le seul qui concourt à des modèles intégrables $U(1)$ antisymétriques. Le calcul de leurs facteurs de forme est déjà connu [15]

Classe elliptique non-antisymétrique

Les modèles de R-G discutés dans les sous sections précédentes (2.1.2 et 2.1.2) sont à géométrie cylindrique, c'est à dire que, de manière générique, ils sont définis tels que leurs couplages contenus dans le plan XY soient égaux et différents de ceux orientés suivant \hat{z} ($\Gamma_{jk}^x = \Gamma_{jk}^y \neq \Gamma_{jk}^z$). Outre ces modèles, il existe des modèles dits de Gaudin elliptiques antisymétriques qui n'admettent pas du tout de terme contenant un champ magnétique. Dans cette section, nous présentons encore un autre classe de modèles dits de R-G elliptiques non-antisymétriques, permettant, elle, l'ajout avec champ magnétique arbitraire. Ceux-ci peuvent paramétrés comme suit

$$B_j^x = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha_x \epsilon_j + \beta_x}}, \quad \Gamma_{jk}^x = g \frac{\sqrt{(\alpha_x \epsilon_j + \beta_x)(\alpha_y \epsilon_k + \beta_y)}}{\epsilon_j - \epsilon_k} \quad (2.10)$$

$$B_j^y = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_y \epsilon_j + \beta_y}}, \quad \Gamma_{jk}^y = g \frac{\sqrt{(\alpha_y \epsilon_j + \beta_y)(\alpha_x \epsilon_k + \beta_x)}}{\epsilon_j - \epsilon_k} \quad (2.11)$$

$$B_j^z = 1, \quad \Gamma_{jk}^z = g \frac{\sqrt{(\alpha_x \epsilon_j + \beta_x)(\alpha_y \epsilon_j + \beta_y)}}{\epsilon_j - \epsilon_k} \quad (2.12)$$

où les paramètres $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x$ et β_y définissent l'anisotrope du système. Le paramètre g fixe la norme de chaque couplage et les coefficients γ et λ déterminent la norme du champ magnétique appliqué au spin central. Ils sont tous pris dans l'ensemble des nombres réels afin de garder les énergies réelles.

Sous certaines conditions ($\alpha_x = \alpha_y \neq 0$ et $\beta_x = \beta_y$) les modèles elliptiques non symétriques correspondent aux modèles trigonométriques décalés $C_0 = \pm \frac{1}{2}$. La situation $\alpha_x = \alpha_y = 0$ conduit aux modèles isotropes rationnels décalés $C_0 = 0$ (modèles de R-G de type XXX). Par conséquent, la liste complète des modèles partiellement isotropes de type XXZ qui sont inclus dans les modèles de cette sous-section sont respectivement les modèles rationnels à $C_0 = 0$ et les trigonométriques à $C_0 = \pm \frac{1}{2}$, lesquels restaient intégrables en présence d'un champ magnétique extérieur arbitrairement orienté. La paramétrisation donnée ci-haut sera maintenant démontrée dans la section qui suit.

2.2 Paramétrisation des modèles elliptiques non-antisymétriques

Comme dans le cas de l'établissement des relations quadratiques entre charges conservées issues de cette catégorie de modèles [88, 89], la construction de leur paramétrisation (2.10,2.11,2.12) requiert aussi l'utilisation des relations d'intégrabilités déterminées au chapitre 1 de la partie I, que nous rappelons ici :

$$\Gamma_{kj}^\beta B_j^\gamma + \Gamma_{jk}^\alpha B_k^\gamma = 0 \quad \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{kl}^\beta - \Gamma_{jl}^\gamma \Gamma_{kj}^\beta - \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{kl}^\gamma = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta \neq \gamma. \quad (2.13)$$

De façon cruciale, le fait que la condition d'antisymétrie des couplages n'est pas nécessaire, du moins dans le cas des modèles de $spin-1/2$, permet une solution non nulle aux contraintes supplémentaires sur le champ magnétique dictée par la première des équations précédentes. Nous faisons maintenant l'hypothèse qu'une composante de champ magnétique non nul est présente dans le modèle (plus spécifiquement, nous supposons que le champ magnétique a une composante non nulle le long de l'axe appelé \hat{z} afin de faire le lien avec les travaux précédents). Etant donné que les relations de commutation ne seront pas affectées par un changement d'échelle des opérateurs R_j , nous nous contenterons d'un modèle à deux paramètres libres pour le champ magnétique en fixant $B_j = 1, \forall j$ sans perte de généralité.

Ceci étant, en choisissant $\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}$, la première ligne de 2.13 peut être scindée en trois équations écrites comme

$$\Gamma_{kj}^x + \Gamma_{jk}^y = 0, \quad \Gamma_{kj}^y B_j^x + \Gamma_{jk}^z B_k^x = 0, \quad \Gamma_{kj}^x B_j^y + \Gamma_{jk}^z B_k^y = 0. \quad (2.14)$$

Les deux dernières des équations ci-dessus peuvent être combinées de manière à ce que $B_j^x \Gamma_{jk}^x B_k^y = -B_k^x \Gamma_{kj}^x B_j^y \equiv \Gamma_{jk}$. Ici, nous avons défini une fonction Γ_{jk} qui est antisymétrique par construction ($\Gamma_{jk} = -\Gamma_{kj}$). En réutilisant ces Γ_{jk} dans le premier ensemble d'équations de 2.14, on obtient

$$\Gamma_{jk}^x = \frac{\Gamma_{jk}}{B_j^x B_k^y}, \quad \Gamma_{jk}^y = \frac{\Gamma_{jk}}{B_j^y B_k^x}, \quad \Gamma_{jk}^z = \frac{\Gamma_{jk}}{B_k^y B_k^x}. \quad (2.15)$$

Ceux-ci satisfont la première ligne de l'Eq. 2.13 par construction ; la deuxième ligne quant à elle devient

$$\begin{aligned} \Gamma_{kj} \Gamma_{jl} + \Gamma_{jk} \Gamma_{kl} + \Gamma_{jl} \Gamma_{lk} &= 0 \\ \Gamma_{kj} (B_j^x)^{-2} \Gamma_{jl} + \Gamma_{jk} (B_k^x)^{-2} \Gamma_{kl} + \Gamma_{jl} (B_l^x)^{-2} \Gamma_{lk} &= 0 \\ \Gamma_{kj} (B_j^y)^{-2} \Gamma_{jl} + \Gamma_{jk} (B_k^y)^{-2} \Gamma_{kl} + \Gamma_{jl} (B_l^y)^{-2} \Gamma_{lk} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La première équation est purement équivalente à un modèle de Gaudin isotrope, dont la solution générale est donnée, à une constante multiplicative (sans importance) près, par la solution rationnelle de Gaudin $\Gamma_{jk} \propto \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k}$. Ceci permet alors d'écrire les deux conditions restantes comme suit

$$\begin{aligned} \frac{(B_j^x)^{-2} - (B_k^x)^{-2}}{\epsilon_j - \epsilon_k} &= \frac{(B_j^x)^{-2} - (B_l^x)^{-2}}{\epsilon_j - \epsilon_l}, \quad \forall k, l \neq j, \\ \frac{(B_j^y)^{-2} - (B_k^y)^{-2}}{\epsilon_j - \epsilon_k} &= \frac{(B_j^y)^{-2} - (B_l^y)^{-2}}{\epsilon_j - \epsilon_l}, \quad \forall k, l \neq j, \end{aligned} \quad (2.17)$$

En notant que cela implique que ces expressions sont indépendantes des indices $k, l \neq j$ et ne peuvent donc dépendre que de j , on trouve la solution générale

$$1/(B_j^x)^2 \propto \alpha_x \epsilon_j + \beta_x, \quad 1/(B_j^y)^2 \propto \alpha_y \epsilon_j + \beta_y, \quad (2.18)$$

pour des constantes arbitraires $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y$ et des facteurs de proportionnalité qui peuvent être choisis comme γ^{-2} et λ^{-2} respectivement afin d'aboutir à la paramétrisation des constantes de couplages et des composantes du champ magnétique définis en 2.10, 2.11 et 2.12.

Il faut noter que le fait de garder un B_j^z général au début de la dérivation aurait conduit à une expression similaires pour tous les termes, qui ne différeraient alors que par les remise à l'échelle des charges conservées et donc par une simple multiplication de chacun d'entre eux par la constante appropriée B_j^z .

Connexion aux matrices non antisymétriques – En général, les modèles antisymétriques présentés dans les équations (2.4 et 2.7) lorsque $C_0 = 0, \pm \frac{1}{2}$ peuvent être dérivés à partir d'une matrice r antisymétrique obéissant aux équations classiques de Yang-Baxter. Tel que nous l'avons mentionné, une série de travaux de T. Skrypnik sur les matrices r non-antisymétriques, ont aussi permis de mettre en évidence ces modèles aux couplages non-antisymétriques permettant la présence d'un champ magnétique de direction arbitraire [65, 67, 68, 70, 78, 79, 80, 81, 82, 83]. Il est à noter que des modèles similaires peuvent être construits pour des spins plus grand que 1/2 [80] mais, pour un spin arbitraire, ces modèles nécessitent des termes supplémentaires $S_j^\alpha S_j^\alpha$ et sortent donc de la paramétrisation proposée dans l'Eq. (2.3).

Limites spécifiques et symétries – Notons que le cas spécifique $\beta_x = \beta_y = 0$ redonne le modèle de type XXZ de spin-1/2 introduit par Lukyanenko et al étudié dans [76], alors que pour $\alpha_x = \alpha_y = 0$ on retrouve alors un modèle de type XXX dans un champ magnétique arbitraire. Dans ces cas, lorsque $\lambda = \gamma = 0$, on retrouve donc les modèles à symétrie U(1) (rotation autour de l'axe \hat{z}). Dans le cas XXZ ($\beta_x = \beta_y = 0$) avec $\lambda = \gamma = 0$, obtient des modèles de R-G déjà traités [93, 94, 95]. En général, si $\beta_x/\alpha_x = \beta_y/\alpha_y$ et $\lambda = \gamma$, nous avons une symétrie de réflexion le long de la ligne $x=y$ (l'échange de x et y laisse toutes les charges conservées invariantes). Pour des valeurs arbitraires de $\alpha_x, \alpha_y, \beta_x, \beta_y$ avec $\lambda = \gamma = 0$, les modèles de R-G de type XYZ définis en (2.10, 2.11 et 2.12) sont décomposés en une symétrie de parité discrète, où le spectre peut être divisé en secteurs de parité paire et impaire, comme dans les modèles elliptiques de type XYZ [84]. Il convient également de mentionner que, si l'hypothèse initiale était qu'une composante de champ non nulle était présente, cette contrainte peut être supprimée du modèle final en redimensionnant les charges conservées avec g^{-1} et en prenant la limite $g \rightarrow \infty$. Ainsi, lorsqu'aucun champ magnétique n'est présent et que $\alpha_x = \alpha_y = 0$, ces systèmes présentent la symétrie SU(2) du spin total des modèles de type XXX [3].

2.3 Solutions

2.3.1 Valeurs propres des charges conservées

La construction décrite dans les sections précédentes donne lieu à un ensemble générique de charges conservées de la forme

$$\begin{aligned} R_j &= \left(S_j^z + \frac{1}{2} \right) + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha_x \epsilon_j + \beta_x}} S_j^x + \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_y \epsilon_j + \beta_y}} S_j^y \\ &+ g \sum_{k \neq j}^L \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k} \left[\sqrt{\alpha_x \epsilon_j + \beta_x} \sqrt{\alpha_y \epsilon_k + \beta_y} S_j^x S_k^x + \sqrt{\alpha_y \epsilon_j + \beta_y} \sqrt{\alpha_x \epsilon_k + \beta_x} S_j^y S_k^y \right] \\ &+ g \sum_{k \neq j}^N \frac{\sqrt{\alpha_x \epsilon_k + \beta_x} \sqrt{\alpha_y \epsilon_k + \beta_y}}{\epsilon_j - \epsilon_k} \left(S_j^z S_k^z - \frac{1s}{4} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

où une constante a été ajoutée afin de rendre les équations suivantes plus claires. Dans le premier chapitre de cette thèse (et la publication [58]), il a été montré qu'un ensemble d'équations quadratiques peut être établi pour les charges conservées des ce modèles R-G de $spin-\frac{1}{2}$ ¹. Pour les modèles présentés, ce résultat prend la forme suivante :

$$R_j^2 = R_j + \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma^2}{\alpha_x \epsilon_j + \beta_x} + \frac{\lambda^2}{\alpha_y \epsilon_j + \beta_y} \right) - \frac{g}{2} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sqrt{\alpha_x \epsilon_k + \beta_x} \sqrt{\alpha_y \epsilon_k + \beta_y}}{\epsilon_j - \epsilon_k} \frac{R_j - R_k}{\epsilon_j - \epsilon_k} + \frac{g^2}{16} \sum_{k \neq j}^N \left[\frac{\sqrt{\alpha_x \epsilon_j + \beta_x} \sqrt{\alpha_y \epsilon_k + \beta_y} - \sqrt{\alpha_y \epsilon_j + \beta_y} \sqrt{\alpha_x \epsilon_k + \beta_x}}{\epsilon_j - \epsilon_k} \right]^2. \quad (2.20)$$

Tel que discuté au chapitre précédent, puisque toutes ces charges conservées commutent et partagent donc une base propre commune, l'ensemble des valeurs propres $\{r_1, \dots, r_N\}$ correspondant à un état propre donné satisfont aussi le même ensemble d'équations quadratiques. La résolution numérique devient alors possible et simple en ciblant les états individuels un à un. En prenant une solution (un ensemble donné de valeurs propres) dans la limite triviale sans interaction ($g = 0$), cette dernière peut être déformée continument en accroissant le couplage par petit pas jusqu'à la valeur d'interaction que nous voulons étudier. Le détail de ce type de calculs ayant déjà fait l'objet de plusieurs publications [15, 26, 27], nous y référons le lecteur pour des plus amples détails. Ces méthodes se sont déjà révélées extrêmement puissantes dans l'étude des modèles de R-G (voir par exemple [20, 29, 30, 96, 97, 98]), et ont été rendues particulièrement simples après qu'il ait été démontré que des produits scalaires avec les états propres exacts peuvent être exprimés efficacement, sous forme de déterminants, directement en fonction de ces valeurs propres [11, 15, 16, 17, 32, 33]. Cependant, pour les modèles de type XYZ généraux discutés dans ce travail, la question de savoir si de telles représentations en déterminants peuvent être construites reste encore ouverte. Enfin, remarquons que dans la limite thermodynamique des systèmes de taille infinie, ces équations se réduisent à une équation intégrale qui pourrait possiblement rester traitable en utilisant les méthodes présentées dans [99] pour les modèles de R-G de type XXZ.

2.3.2 Observables locales

Même sans les états propres exacts de Bethe, les valeurs moyennes des observables locales du spin peuvent être calculées à partir du théorème de Hellman-Feynman qui relie les moyennes des dérivées d'un hamiltonien aux dérivées de ses valeurs propres. Ici, le fait que les modèles restent intégrables pour des champs magnétiques arbitraires nous permet justement d'utiliser la théorème en dérivant par rapport aux trois composantes du champ. Étant donné l'ensemble des valeurs propres $\{r_1, \dots, r_N\}$ définissant un état propre, on trouve alors simplement que les valeurs moyennes des spins, dans cet état propre, sont données par :

$$\langle S_j^x \rangle = \sqrt{\alpha_x \epsilon_j + \beta_x} \frac{\partial r_j}{\partial \gamma}, \quad \langle S_j^y \rangle = \sqrt{\alpha_y \epsilon_j + \beta_y} \frac{\partial r_j}{\partial \lambda},$$

$$\langle S_j^z \rangle = r_j - g \frac{\partial r_j}{\partial g} - \gamma \frac{\partial r_j}{\partial \gamma} - \lambda \frac{\partial r_j}{\partial \lambda}. \quad (2.21)$$

Ces dérivées partielles peuvent être calculées numériquement grâce à la méthode de différences finies, ou en résolvant un ensemble d'équations linéaires. Comme les valeurs propres obéissent à

1. Bien que cela n'ait pas été explicitement mentionné dans [58], la validité de ce résultat nécessite des composantes de champ non nulles (dont les limites peuvent ensuite être ramenées à zéro si nécessaire) et ne s'applique donc pas aux modèles XYZ elliptiques traditionnels

un ensemble d'équations quadratiques, leurs dérivées obéiront à un système linéaire simple qui peut facilement être résolu numériquement pour un ensemble de $\{r_1, \dots, r_N\}$ connu.

2.3.3 Resultats numériques

Nous présentons des résultats numériques pour $r_j = \langle R_j \rangle$ et $\langle S_j^\alpha \rangle$ à la figure 2.1, où nous étudions les propriétés d'un seul état propre correspondant à la déformation continue, en variant g (l'intensité du couplage), de l'état qui, en l'absence de Bx, By , correspondrait à $|\downarrow \downarrow \dots \downarrow \downarrow\rangle$ dans la limite de non-interaction $g = 0$. Comme on peut le voir, à $g = 0$, l'état correspond à la plus basse projection-1/2 de chaque spin individuel le long de l'orientation locale de chaque \vec{B}_j , ce qui diffère de l'état complètement polarisé le long de l'axe \hat{z} en raison des γ et λ finis. Les paramètres du système ont été choisis de telle sorte que $\beta_x \neq \beta_y$ correspond à un modèle complètement anisotrope tandis que $\beta_x = \beta_y = 0$ donne plutôt un modèle de type XXZ. Cette dernière limite renvoie donc à un comportement connu pour la composante \hat{z} du spin et satisfait la condition $\langle S_j^x \rangle = \langle S_j^y \rangle$ en raison de l'isotropie dans le plan XY. L'introduction d'une anisotropie finie (ici incluse en choisissant $\beta_x = -\beta_y \neq 0$) brise cette symétrie, comme on peut l'observer dans les deuxième et troisième colonnes. Bien qu'une analyse détaillée soit réservée à des travaux ultérieurs, cette figure montre clairement que pour $\beta_x > 0$ et $\beta_y < 0$, les valeurs attendues de S_j^z restent largement inchangées, tandis que S_j^y se rapproche de sa valeur extrême de $-0,5$ et S_j^x subit une inversion. Les niveaux ayant les plus grandes valeurs de $\langle S_j^x \rangle$ à faible couplage ont les plus petites valeurs de $\langle S_j^x \rangle$ pour g grand gvice versa. Bien que ces résultats aient été présentés pour un petit système avec $N = 10$, il est tout à fait possible de passer à des tailles de système de quelques centaines compte tenu de l'efficacité de la méthode numérique de solution.

A présent que nous savons classifier, paramétrer et calculer aisément les énergies dans les modèles de R-G de spin 1/2 qui nous intéressent dans ce travail, nous construirons, dans les sections à venir, une forme générique permettant de construire, de façon formelle du moins, leurs états propres.

2.4 États propres

Comme mentionné déjà plusieurs fois, du fait de l'intégrabilité, toutes les charges conservées (incluant celle associée au spin central constituant le système) partagent la même base des états propres dans laquelle elles sont toutes diagonales. Les valeurs propres (r_1, \dots, r_N) obéissent donc aux équations quadratiques et chaque solution de ces dernières spécifie un état donné [58]. Si $|\psi_n\rangle$ est l'état numéro n du système, il sera alors défini par

$$R_j = r_j^n |\psi_n\rangle, \forall j \in \{1, 2, \dots, N-1, N\} \quad (2.22)$$

et entièrement caractérisé par la donnée de l'ensemble $(r_1^n, r_2^n, \dots, r_{N-1}^n, r_N^n)$ des N valeurs propres qui lui sont associées.

Dans la sous-section suivante, nous démontrons que le projecteur $P_n \equiv |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$, sur tout état propre $|\psi_n\rangle$ peut être défini de manière compacte, exclusivement en termes de charges conservées R_j et de l'ensemble correspondant de valeurs propres de cet état propre particulier. La représentation résultante des états propres peut alors être obtenue exclusivement et directement à partir des solutions des équations quadratiques de Bethe pour les valeurs propres, dont la simplicité offre, on le sait, un avantage numérique important en termes de stabilité et de vitesse

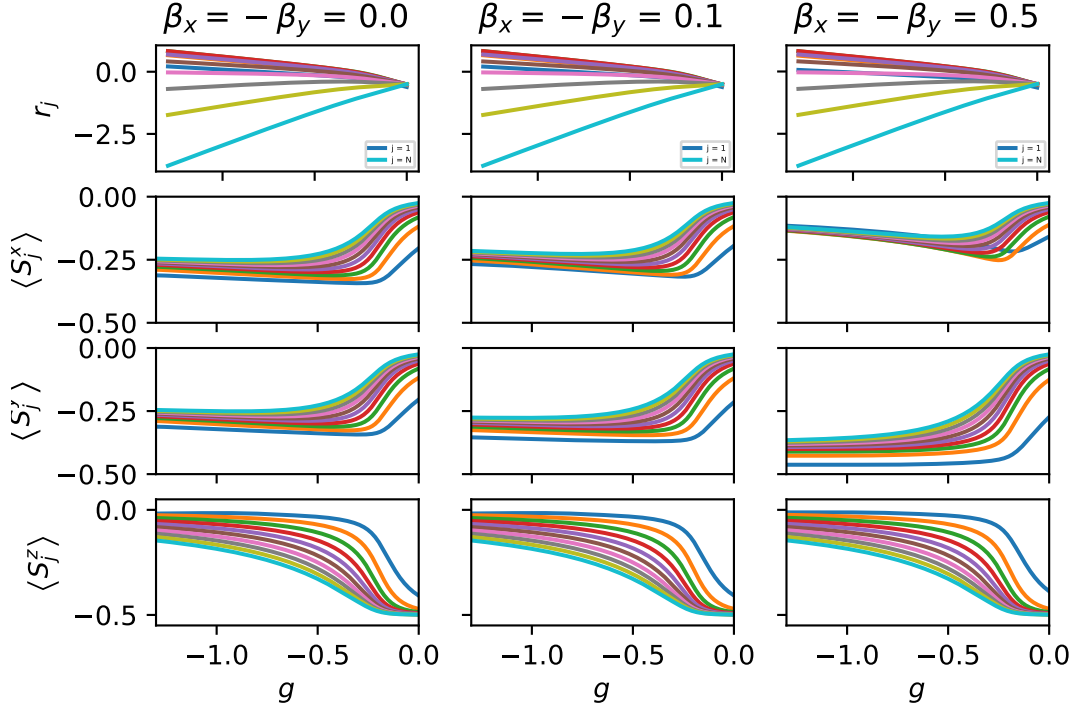


FIGURE 2.1 – Valeurs propres r_j des charges conservées R_j et valeurs moyennes $\{\langle S_j^x \rangle, \langle S_j^y \rangle, \langle S_j^z \rangle\}_{\forall j}$ résultants de la déformation en absence de couplages, de l'état fondamental d'un système de $N = 10$ particules, en fonction du paramètre g fixant les normes des couplages. Le système est choisi tel que $\epsilon_j = (j + 1)^2$, $\alpha_x = \alpha_y = 1$, $\lambda = \gamma = 0.5$. Le cas $\beta_x = \beta_y = 0$ retourne un modèle de type XXZ.

de calcul [15, 26, 27, 29, 30] par rapport aux approches (M) ABA basées sur les racines de Bethe. Même dans les cas XXZ (y compris ceux sans symétrie $U(1)$), pour lesquels les états propres peuvent être écrits en termes de racines de Bethe, la représentation proposée ici pourrait possiblement conduire à une simplification majeure dans l'approche numérique de la physique de ces systèmes.

Une conséquence directe des relations quadratiques obtenues dans cette thèse ([58]) est qu'un polynôme arbitraire (ou une série de puissance formelle) dans ces charges conservées :

$$\hat{Q}(\hat{R}_1 \dots \hat{R}_N) \equiv \sum_{n_1=0, \dots, n_N=0}^{\infty} C_{n_1 \dots n_N} \hat{R}_1^{n_1} \hat{R}_2^{n_2} \dots \hat{R}_N^{n_N}, \quad (2.23)$$

peut toujours être réduit à :

$$\hat{Q}(\hat{R}_1 \dots \hat{R}_N) = \sum_{n_1=0, \dots, n_N=0}^1 B_{n_1 \dots n_N} \hat{R}_1^{n_1} \hat{R}_2^{n_2} \dots \hat{R}_N^{n_N}; \quad (2.24)$$

un polynôme qui est au plus linéaire dans chacune des charges conservées. Comme exemple simple pour $N = 2$, on a $\hat{R}_1^3 \hat{R}_2 = \hat{R}_1(\Gamma_{12} \hat{R}_2 + K_1) \hat{R}_2 = \Gamma_{12} \hat{R}_1 \hat{R}_2^2 + K_1 \hat{R}_1 \hat{R}_2 = \Gamma_{12} \hat{R}_1(\Gamma_{21} \hat{R}_2 + K_2) + K_1 \hat{R}_1 \hat{R}_2 = (\Gamma_{12} \Gamma_{21} + K_1) \hat{R}_1 \hat{R}_2 + K_2 \Gamma_{12} \hat{R}_1$, par ces réductions successives des termes quadratiques

en termes linéaires. La même procédure peut être effectuée pour des ordres arbitraires et pour un nombre arbitraire de charges conservées N , conduisant à un polynôme en \hat{R}_j qui est au plus linéaire en chacune des charges conservées. Un tel polynôme linéaire générique est, en définitive, défini par un ensemble de 2^N coefficients qui correspond à la dimension de l'espace de Hilbert complet.

Dans cette grande classe d'opérateurs génériques paramétrés par les 2^N valeurs de $B_{n_1 \dots n_N}$, nous définissons une sous-classe de ces opérateurs qui sont paramétrés de manière compacte par seulement N variables réelles ($r_1 \dots r_N$) comme le déterminant suivant d'une matrice N par N dont les éléments sont des opérateurs (ce qui fait du déterminant un polynôme en ces opérateurs) :

$$\hat{P}(r_1 \dots r_N) \equiv \det \hat{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \hat{J}_{ii} = r_i + \hat{R}_i \\ \hat{J}_{ij} = \Gamma_{ij} \quad \forall i \neq j. \end{cases} \quad (2.25)$$

ainsi que le polynôme à valeurs scalaires :

$$N(r_1 \dots r_N) \equiv \det N \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_{ii} = 2r_i \\ N_{ij} = \Gamma_{ij} \quad \forall i \neq j. \end{cases} \quad (2.26)$$

Dans la suite de cette section, nous prouverons notre résultat principal, à savoir que le projecteur sur l'état propre $|\psi_n\rangle$ défini tel que $\hat{R}_i |\psi_n\rangle = r_i^n |\psi_n\rangle$, est donné par :

$$|\psi_n\rangle \langle \psi_n| \propto \hat{P}(r_1^n \dots r_N^n) = \det \begin{pmatrix} (r_1^n + \hat{R}_1) & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & (r_2^n + \hat{R}_2) & \Gamma_{23} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & (r_3^n + \hat{R}_3) & \dots & \Gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \Gamma_{N3} & \dots & (r_N^n + \hat{R}_N) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

et peut être normalisé comme suit :

$$|\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \frac{\hat{P}(r_1^n \dots r_N^n)}{N(r_1^n \dots r_N^n)} = \frac{\det \begin{pmatrix} (r_1^n + \hat{R}_1) & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & (r_2^n + \hat{R}_2) & \Gamma_{23} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & (r_3^n + \hat{R}_3) & \dots & \Gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \Gamma_{N3} & \dots & (r_N^n + \hat{R}_N) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2r_1^n & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & 2r_2^n & \Gamma_{23} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & 2r_3^n & \dots & \Gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \Gamma_{N3} & \dots & 2r_N^n \end{pmatrix}} \quad (2.28)$$

En gardant à l'esprit que toutes les charges conservées commutent entre elles, la représentation du déterminant de \hat{P} , bien qu'ayant des entrées d'opérateurs, ne présente aucune ambiguïté quant à l'ordre des produits impliqués. Par conséquent, une représentation (non normalisée) de l'état propre peut être obtenue à partir de l'action du projecteur sur un état "vide" arbitraire $|\Omega\rangle$ comme :

$$|\psi_n\rangle \propto \hat{P}(r_1^n \dots r_N^n) |\Omega\rangle, \quad (2.29)$$

avec la seule condition que $|\Omega\rangle$ ait un recouvrement non nul avec l'état propre cible $|\psi_n\rangle$. Il ne s'agit pas d'une condition particulièrement limitative puisque, dans un modèle générique, les états propres auront une projection non-nulle sur tout état de spin canonique $\prod_{i=1}^r S_{i_r}^+ \cdot |\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle$. La seule exception concerne les modèles qui contiennent exclusivement une composante selon la direction \hat{z} du champ magnétique. Dans ces cas, les modèles de types XXZ et XXX, ont une symétrie $U(1)$ et donc une magnétisation total fixe selon l'axe \hat{z} . Cela nécessiterait alors que le vide $|\Omega\rangle$ ait une composante dans le secteur d'aimantation approprié (tout $|\Omega\rangle$ qui est réparti sur chaque secteur fournirait donc un "vide" approprié pour tout état propre). Pour les modèles de type XYZ dans un champ magnétique orienté suivant \hat{z} uniquement, les états propres ont en fait une parité d'aimantation fixe, ce qui signifie qu'ils appartiennent soit au sous-espace de Hilbert qui ne contient qu'un nombre impair **O**U pair de spins orientés vers le haut. Par conséquent, tout $|\Omega\rangle$ qui contient au moins un terme d'aimantation impair et un terme d'aimantation pair (comme $|\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle + |\uparrow \downarrow \dots \downarrow\rangle$ par exemple) permettrait de construire n'importe quel état propre. Alors que les projecteurs eux-mêmes (2.28) sont effectivement ceux construits en utilisant l'état propre normalisé, le vecteur résultant (2.29) aurait, cependant, une normalisation qui dépend du choix particulier de $|\Omega\rangle$.

2.5 Preuve de la représentation du projecteur

Considérant que la famille d'opérateurs $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$ telle que définie par l'éq. (2.27) est construite exclusivement à partir des charges conservées et de paramètres scalaires, nous dirons que ces opérateurs sont diagonaux dans la base propre orthonormée construite à partir des états $|\psi_n\rangle$. Chacune de leurs entrées est, dans cette base, une matrice diagonale. L'orthogonalité des états de base conduit par conséquent à l'expansion explicite suivante du déterminant dans cette base :

$$\hat{P}(r_1 \dots r_N) = \sum_{n=1}^{2^N} C_n(r_1 \dots r_N) |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2.30)$$

avec

$$C_n(r_1 \dots r_N) = \det \begin{pmatrix} (r_1 + r_1^n) & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & (r_2 + r_2^n) & \Gamma_{23} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & (r_3 + r_3^n) & \dots & \Gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \Gamma_{N3} & \dots & (r_N + r_N^n) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Afin de prouver qu'un opérateur $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$ donné est proportionnel au projecteur désiré lorsqu'il est évalué à $(r_1^n \dots r_N^n)$, il devient donc suffisant de prouver que, à ce point, tout coefficient $C_{m \neq n}(r_1 \dots r_N)$ s'annule.

Nous pouvons travailler en faisant l'hypothèse, remarquablement générique, que le spectre des charges conservées est simple, c'est-à-dire non dégénéré. Ceci est vrai sauf à champ nul $\vec{B} = 0$ ou pour un certain nombre de valeurs spécifiques de couplages particuliers (de mesure nulle dans l'espace des modèles possibles). Dans tous ces cas, une déformation infinitésimale $g \rightarrow g + \Delta$ ou

$B \rightarrow \Delta$ des paramètres lèverait les dégénérescences et devrait permettre de définir une limite appropriée $\Delta \rightarrow 0$.

Les valeurs propres $(r_1^n \dots r_N^n)$ et $(r_1^m \dots r_N^m)$, définissant deux états propres d'indice n et m , étant "on-shell", c'est-à-dire qu'elles constituent une solution aux équations quadratiques de Bethe [58, 89], on a :

$$(r_j^n)^2 - (r_j^m)^2 = \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk} (r_k^n - r_k^m), \quad (2.32)$$

et il devient alors facile de voir que, lorsque la matrice \mathcal{J} donnée dans l'éq. (2.31) est évaluée à $(r_1 \dots r_N) = (r_1^n \dots r_N^n)$, ses colonnes ne sont pas indépendantes puisque la combinaison linéaire suivante :

$$\sum_{k=1}^N \mathcal{J}_{jk} (r_k^n - r_k^m) = (r_j^n + r_j^m) (r_j^n - r_j^m) - \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk} (r_k^n - r_k^m) = 0. \quad (2.33)$$

Par conséquent, le déterminant, et donc $C_m(r_1^n \dots r_N^n) = 0$ pour tout $n \neq m$. La seule exception est trouvée lorsque $n = m$, puisque chaque coefficient dans la combinaison linéaire est alors explicitement $(r_k^n - r_k^n) = 0$. Dans ce cas, la valeur non nulle de $C_m(r_1^n \dots r_N^n)$ est évidemment donnée par le polynôme déterminant $N(r_1^n \dots r_N^n)$ défini dans (2.26).

Ainsi, l'opérateur $\hat{P}(r_1^n \dots r_N^n)$ introduit dans l'éq. (2.25), lorsqu'il est évalué en un point $C_m(r_1 \dots r_N)$ qui correspond à une solution des équations de Bethe quadratiques, devient le projecteur sur l'état propre normalisé correspondant à ces valeurs propres :

$$\frac{\hat{P}(r_1^m \dots r_N^m)}{N(r_1^m \dots r_N^m)} = |\psi_m\rangle \langle \psi_m|. \quad (2.34)$$

Ceci mène donc à un concept d'opérateur "on-shell" et "off-shell", où un opérateur générique dépendant de N paramètres $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$, devient le projecteur sur un état propre du modèle intégrable chaque fois que ses N paramètres libres sont on-shell, c'est-à-dire choisis pour être une solution des équations quadratiques entre valeurs propres. Ceci est en complète analogie avec l'ABA habituel pour lequel un état de Bethe générique $\prod_{i=1}^M B(\lambda_i) |\Omega\rangle$ devient un état propre chaque fois que les racines de Bethe λ_i sont des solutions (on-shell) aux équations de Bethe. Cependant, la construction proposée dans ce travail évite d'avoir à définir la relation entre les racines de Bethe et les valeurs propres des charges conservées, d'avoir à définir les opérateurs $B(u)$ et la nécessité de trouver un pseudo-vide $|\Omega\rangle$ approprié sur lequel créer les excitations. En ce sens, elle se débarrasse complètement des difficultés possibles de l'application d'un Ansatz de Bethe et fournit, néanmoins, la solution exacte du problème propre des systèmes intégrables de R-G de spin-1/2, même dans les cas où les approches basées sur les racines de Bethe ne peuvent généralement pas être utilisées.

Dans les cas où l'on sait qu'une telle représentation des racines de Bethe des états propres est donnée en termes de racines de Bethe de M $\{\lambda_1^n \dots \lambda_M^n\}$, nous pouvons donc calculer l'objet suivant :

$$\hat{P}(r_1^n \dots r_N^n) = \left(\prod_{i=1}^M B(\lambda_i^n) \right) |\Omega\rangle \langle \Omega| \left(\prod_{i=1}^M B(\lambda_i^n) \right), \quad (2.35)$$

sans avoir à passer par la procédure de l' Ansatz de Bethe. La solution proposée reste valide dans tous les cas sans symétrie $U(1)$ (à l'exception du modèle elliptique à champ nul qui n'appartient

pas à la classe des modèles pour lesquels les équations quadratiques proposées sont respectées). Parmi ceux-ci, les systèmes de types XXZ et XXX dans un champ externe arbitraire peuvent également être abordés en utilisant la (M) ABA, mais le cas XYZ dans un champ arbitraire n'a pas encore, à notre connaissance, de solutions explicites pour ses états propres.

2.5.1 Résolution "off-shell" de l'identité et du produit d'opérateurs

En plus de fournir, lorsqu'elle est "on-shell", une représentation pour les projecteurs d'états propres, la famille générique ("off-shell") d'opérateurs $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$ permet aussi de construire des résolutions simples de l'identité. En effet, tel qu'il a été défini dans (2.25), $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$ est non seulement un polynôme dans les charges conservées R_j , mais aussi un polynôme, d'ordre maximal 1, dans chacune des variables scalaires r_j . De plus, le coefficient (opérateur) devant le terme $\left(\prod_{i=1}^N r_i\right)$ est donné par 1 puisque ce terme, comme on le voit en développant le déterminant, provient exclusivement du produit des éléments diagonaux N . Par conséquent, l'intégration de $\Psi(r_1 \dots r_N) \hat{P}(r_1 \dots r_N)$ sur un hypercube à N dimensions centré sur l'origine fournira, pour toute fonction $\Psi(r_1 \dots r_N)$ antisymétrique en chacune des variables, une résolution de l'identité. Un exemple simple serait de choisir $\Psi(r_1 \dots r_N) = \prod_{i=1}^N r_i$ et d'intégrer sur l'axe réel, sur les intervalles symétriques $r_j \in [-a, a]$. Ceci conduit à

$$\int_{-a}^a dr_1 \dots \int_{-a}^a dr_N \left(\prod_{i=1}^N r_i\right) \hat{P}(r_1 \dots r_N) = \left(\frac{2a^3}{3}\right)^N \mathbb{1}, \quad (2.36)$$

puisque dans chaque terme du développement de $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$, à l'exception du terme principal $\left(\prod_i r_i\right)$, il manque au moins une des variables r_i . À l'exception du premier terme, chaque terme de $\Psi(r_1 \dots r_N) \hat{P}(r_1 \dots r_N)$ étant donc impair dans les variables manquantes, son intégrale s'annulera sur les intervalles symétriques. Ceci est également confirmé à l'identique en intégrant de la même manière chaque coefficient $C_{m \neq n}(r_1 \dots r_N)$ qui, multiplié par $Psi(r_1 \dots r_N)$ donnera 1 de sorte que l'intégrale soit égale à $\sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$, c'est-à-dire égale à la matrice identité dans l'espace de Hilbert associé aux modèles considérés.

Une autre quantité importante qui est simple à évaluer est le produit de deux opérateurs dont l'un est "on-shell" et l'autre "off-shell". Cette quantité est analogue aux déterminants de Slavnov [17, 86, 87, 100]. En fait, considérant que nous avons une décomposition explicite de l'opérateur "off-shell" $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$ donné dans (2.30), nous savons directement que son produit avec un projecteur "on-shell" est donné par le coefficient correspondant (2.31), à savoir :

$$\hat{P}(r_1 \dots r_N) \hat{P}(r_1^n \dots r_N^n) = \det \begin{pmatrix} (r_1 + r_1^n) & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \dots & \Gamma_{1N} \\ \Gamma_{21} & (r_2 + r_2^n) & \Gamma_{23} & \dots & \Gamma_{2N} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & (r_3 + r_3^n) & \dots & \Gamma_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{N1} & \Gamma_{N2} & \Gamma_{N3} & \dots & (r_N + r_N^n) \end{pmatrix} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (2.37)$$

Ce résultat nous rappelle fortement les déterminants basés sur les valeurs propres connues dans les modèles de types XXX [11, 32] et XXZ [15, 17], étant à nouveau définis simplement comme des déterminants dans lesquels les valeurs propres et leur équivalent "off-shell" r_j n'apparaissent que sous la forme de leur somme ($r_j + r_j^n$) et exclusivement dans les éléments diagonaux d'une matrice N par N .

2.6 Développement explicite de projecteurs

Dans cette dernière section, nous étudions le développement explicite de la famille (2.25) d'opérateurs $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$ d'une manière qui permet de mieux comprendre leur structure sous-jacente. Ceci en considérant l'expression générale d'un déterminant définie comme une somme sur toutes les permutations possibles,

$$\hat{P}(r_1 \dots r_N) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \hat{J}_{i, \sigma_i}. \quad (2.38)$$

Le premier terme présent est donné par la permutation "correctement" ordonnée $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2 \dots \sigma_N = N$ et conduit au terme $\prod_{i=1}^N (r_i + R_i)$. Les permutations qui échangent deux de leurs indices (k, k') conduiraient alors au remplacement de deux éléments diagonaux par les éléments hors-diagonaux correspondants, tout en changeant le signe de la permutation. Cela conduit alors

à la série de termes $-\sum_{k \neq k'} \left[\Gamma_{kk'} \Gamma_{k'k} \prod_{i \neq \{k, k'\}}^N (r_i + R_i) \right]$. Le déterminant étant une somme sur

des produits de N éléments de matrice \hat{J}_{ij} où les indices i doivent couvrir chaque ligne et les indices j doivent couvrir chaque colonne, on peut poursuivre cette procédure et classer les termes résultants selon le nombre d'éléments de matrice diagonaux qui sont utilisés pour construire chaque terme. On peut alors écrire le déterminant comme une somme sur les sous-ensembles π de chaque cardinalité possible $r = 0, 1, \dots, N$, que l'on peut construire à partir de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$. Un ensemble donné $\pi = \{\pi_1, \pi_2 \dots \pi_r\}$ définit les éléments de matrice diagonaux \hat{J}_{π_k, π_k} présents et le complément $\bar{\pi} = \{\bar{\pi}_1 \dots \bar{\pi}_{N-r}\}$ (tel que $\pi \cup \bar{\pi} = \{1, 2, 3 \dots N\}$) définit les indices qui seront utilisés pour les éléments hors-diagonaux. Dans cette représentation où Π est l'ensemble puissance de $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ qui contient chacun des sous-ensembles π , on a :

$$\hat{P}(r_1 \dots r_N) = \sum_{\pi \in \Pi} K_\pi \prod_{k=1}^r (r_{\pi_k} + R_{\pi_k}), \quad (2.39)$$

avec la quantité K_π donnée comme suit par le déterminant d'une matrice de taille $N - r$ par $N - r$:

$$K_\pi = \det \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2} & \Gamma_{\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_3} & \dots & \Gamma_{\bar{\pi}_1 \bar{\pi}_{N-r}} \\ \Gamma_{\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_1} & 0 & \Gamma_{\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_3} & \dots & \Gamma_{\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_{N-r}} \\ \Gamma_{\bar{\pi}_3 \bar{\pi}_1} & \Gamma_{\bar{\pi}_3 \bar{\pi}_2} & 0 & \dots & \Gamma_{\bar{\pi}_3 \bar{\pi}_{N-r}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{\bar{\pi}_{N-r} \bar{\pi}_1} & \Gamma_{\bar{\pi}_{N-r} \bar{\pi}_2} & \Gamma_{\bar{\pi}_{N-r} \bar{\pi}_3} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

et construite à partir des indices du complément $\{\bar{\pi}_1 \dots \bar{\pi}_{N-r}\}$. De manière remarquable, la structure de Γ_{jk} imposée par l'intégrabilité est telle que, pour $N - r$ impair, le coefficient résultant

est strictement nul. En effet, en utilisant les paramétrisations générales (2.10, 2.11, 2.12) et le fait que $\Gamma_{jk} = 2Z(\epsilon_j, \epsilon_k)$, on peut écrire le déterminant comme :

$$K_\pi = \left(\prod_{k=1}^{N-r} 2F_x(\epsilon_{\bar{\pi}_k}) F_y(\epsilon_{\bar{\pi}_k}) \right) \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_1} - \epsilon_{\bar{\pi}_2}} & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_1} - \epsilon_{\bar{\pi}_3}} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_1} - \epsilon_{\bar{\pi}_{N-r}}} \\ \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_2} - \epsilon_{\bar{\pi}_1}} & 0 & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_2} - \epsilon_{\bar{\pi}_3}} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_2} - \epsilon_{\bar{\pi}_{N-r}}} \\ \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_3} - \epsilon_{\bar{\pi}_1}} & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_3} - \epsilon_{\bar{\pi}_2}} & 0 & \cdots & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_3} - \epsilon_{\bar{\pi}_{N-r}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_{N-r}} - \epsilon_{\bar{\pi}_1}} & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_{N-r}} - \epsilon_{\bar{\pi}_2}} & \frac{1}{\epsilon_{\bar{\pi}_{N-r}} - \epsilon_{\bar{\pi}_3}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

montrant qu'il est proportionnel à celui d'une matrice carrée réelle antisymétrique A de dimension $N - r$. D'après le théorème de Jacobi, nous savons alors que le déterminant résultant est nul pour toute dimension impaire $N - r$. Pour les dimensions paires, le "théorème de Cayley pour les pfaffiens" stipule que le déterminant d'une matrice symétrique est donné par le carré de son pfaffien. Cependant, dans le cas qui nous occupe ici, l'intégrabilité des modèles, et les contraintes qu'elle impose sur les éléments de la matrice Γ_{jk} , les déterminants non nuls trouvés pour les dimensions paires $N - r$ peuvent être encore simplifiés en une seule somme sur les partitions en paires. En redéfinissant, pour des raisons de compacité, et sans perte de généralité, les indices $\bar{\pi}_j \rightarrow j$, on s'intéresse au déterminant de la matrice $A_{jk} = \frac{1 - \delta_{jk}}{\epsilon_j - \epsilon_k}$.

Par la définition même d'un déterminant, on doit rencontrer deux fois l'indice 1 dans chaque terme de son développement, un élément de la matrice devant provenir de la première ligne et un de la première colonne. Si l'on considère une paire spécifique donnée, disons (ϵ_1, ϵ_2) , le développement du déterminant peut donc contenir :

- un terme quadratique en $\frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ provenant de $A_{12}A_{21}$,
- des termes linéaires en $\frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ qui provient soit de A_{12} , soit de A_{21} , tandis que l'autre instance d'indice 1 provient d'une ligne ou d'une colonne différente de 2,
- des termes qui ne contiennent pas $\frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$, c'est-à-dire des termes qui ne contiennent pas A_{12} ou A_{21} .

Une telle classification des termes permet d'étudier la structure analytique du déterminant en regardant $\epsilon_1 = \epsilon_2 + \Delta$ dans la limite $\Delta \rightarrow 0$ afin de prouver que le déterminant n'a pas de pôle simple à $\epsilon_1 = \epsilon_2$ et donc que les termes linéaires en $\frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ se réduisent tous à zéro. En développant le déterminant dans ses deux premiers rangs, on peut l'écrire comme :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_M} \\ \frac{1}{\Delta} & 0 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_M} \\ \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & 0 & \cdots & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_M - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_M - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_M - \epsilon_3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & 0 \end{pmatrix} \det A_{1\hat{2}}^{\hat{1}\hat{2}} + \sum_{k=3}^{N-r} \epsilon^{1k} \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \end{pmatrix} \det A_{1\hat{k}}^{\hat{1}\hat{2}} \\ &+ \sum_{k=3}^{N-r} \epsilon^{2k} \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \end{pmatrix} \det A_{1\hat{k}}^{\hat{1}\hat{2}} + \sum_{j=3}^{N-r} \sum_{k>j}^{N-r} \epsilon^{jk} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_j} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_j} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \end{pmatrix} \det A_{j\hat{k}}^{\hat{1}\hat{2}}, \quad (2.42) \end{aligned}$$

où $\det A_{j\hat{k}}^{\hat{1}\hat{2}}$ est la matrice A dont on a supprimé les lignes 1 et 2 ainsi que les colonnes j et k , tandis que ϵ^{jk} est le signe de la partition correspondante des indices. Tout d'abord, on voit facilement

que les déterminants deux par deux $\left(\det \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_j} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_j} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \end{array} \right) \right)$ sont tous nuls. De plus, comme une permutation de lignes et le signe moins qui en résultent, font que $\det \left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_k} \end{array} \right)$. Le changement de signe de la partition $\epsilon^{1k} = -\epsilon^{2k}$, fait que les deux sommes simples sur j s'annulent aussi trivialement terme à terme. En somme, on a simplement :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \det A = \frac{\det A_{\hat{1}\hat{2}}^{\hat{1}\hat{2}}}{\Delta^2}. \quad (2.43)$$

Par conséquent, le déterminant n'a pas de pôle simple en $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$; seulement un pôle double $\frac{1}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}$. Comme on peut effectuer exactement le même raisonnement pour tout $\frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_k}$ ($k = 2, 3, 4, \dots, N$), le déterminant résultant ne peut dépendre de ϵ_1 que par des pôles doubles dans tous ses appariements possibles. Il peut donc s'écrire comme suit

$$\det A = \det \sum_{k>1} \frac{\det A_{\hat{1}\hat{k}}^{\hat{1}\hat{k}}}{(\epsilon_1 - \epsilon_k)^2}, \quad (2.44)$$

puisque ϵ_1 ne doit apparaître que deux fois dans chaque terme du déterminant (éléments matriciels provenant de la ligne et de la colonne 1), et que les termes possibles $\frac{1}{(\epsilon_1 - \epsilon_k)^2}$ épuisent ces deux apparitions de ϵ_1 .

Ceci conduit à une construction récursive du déterminant, puisque $A_{\hat{1}\hat{k}}^{\hat{1}\hat{k}}$ a exactement la même structure que la matrice originale, malgré une dimension diminuée de deux et l'absence des indices 1 et k . Le même raisonnement pourrait alors être appliqué aux paires possibles de l'indice non apparié suivant et la procédure peut être poursuivie jusqu'à ce que $(N - r)/2$ paires d'indices aient été faites. Le déterminant résultant est alors donné par la somme (sans alternance de signes) de tous les appariements possibles. Puisque $(-1)^N - r = 1$, on a donc :

$$K_\pi = \left(\prod_{k=1}^{N-r} 2gF_x(\epsilon_{\bar{\pi}_k})F_y(\epsilon_{\bar{\pi}_k}) \right) \sum_{\sigma \in \Sigma_\pi} \prod_{k=1}^{(N-r)/2} \frac{1}{(\epsilon_{i_k} - \epsilon_{j_k})^2}, \quad (2.45)$$

avec la somme portée sur Σ_π , c'est-à-dire l'ensemble des partitions possibles en paires $\sigma = \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\} \dots \{i_{(N-r)/2}, j_{(N-r)/2}\}\}$ des indices contenus dans $\bar{\pi}$.

On a donc montré que l'opérateur générique $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$, qui devient un projecteur lorsqu'il est on-shell, a un développement explicite en termes de produits seulement impairs (pour N impair) ou pairs (pour N pair) de $(r_j + \hat{R}_j)$. De plus, le coefficient devant chacun de ces produits est donné par la somme, sur les paires possibles des indices complémentaires, des produits des facteurs $\frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k}$, de sorte que :

$$\hat{P}(r_1 \dots r_N) = \sum_{\pi \in \bar{\Pi}} K_\pi \prod_{k=1}^r (r_{\pi_k} + R_{\pi_k}), \quad (2.46)$$

où, pour N impair (pair), $\bar{\Pi}$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, N\}$ ayant exclusivement une cardinalité impaire (paire), tandis que K_π est donné par l'eq. (2.45). Ce résultat

est à mettre en contraste avec le carré du Pfaffien que l'on obtiendrait à partir du déterminant d'une matrice symétrique générique qui contiendrait alors une double somme sur ces partitions en paires.

L'opérateur générique $\hat{P}(r_1 \dots r_N)$, qui devient un projecteur lorsqu'il est on-shell, peut donc être développé en termes de produits seulement pairs ou impairs (selon la parité de N) de $(r_i + \hat{R}_i)$ et le coefficient devant chacun de ces produits peut être calculé comme la somme, uniquement sur les paires possibles d'indices complémentaires, des produits des facteurs $\frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2}$.

À titre d'exemple simple et explicite pour $N = 4$ spins, l'expansion de $\hat{P}(r_1, r_2, r_3, r_4)$ ne contient que des termes en $r = 4$, $r = 2$ et $r = 0$ et est explicitement donnée par :

$$\begin{aligned}
 \hat{P}(r_1 \dots r_N) = & (r_1 + \hat{R}_1)(r_2 + \hat{R}_2)(r_3 + \hat{R}_3)(r_4 + \hat{R}_4) \\
 & + \frac{4F_x(\epsilon_3)F_y(\epsilon_3)F_x(\epsilon_4)F_y(\epsilon_4)}{(\epsilon_3 - \epsilon_4)^2} (r_1 + \hat{R}_1)(r_2 + \hat{R}_2) \\
 & + \frac{4F_x(\epsilon_2)F_y(\epsilon_2)F_x(\epsilon_4)F_y(\epsilon_4)}{(\epsilon_2 - \epsilon_4)^2} (r_1 + \hat{R}_1)(r_3 + \hat{R}_3) \\
 & + \frac{4F_x(\epsilon_2)F_y(\epsilon_2)F_x(\epsilon_3)F_y(\epsilon_3)}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2} (r_1 + \hat{R}_1)(r_4 + \hat{R}_4) \\
 & + \frac{4F_x(\epsilon_1)F_y(\epsilon_1)F_x(\epsilon_4)F_y(\epsilon_4)}{(\epsilon_1 - \epsilon_4)^2} (r_2 + \hat{R}_2)(r_3 + \hat{R}_3) \\
 & + \frac{4F_x(\epsilon_1)F_y(\epsilon_1)F_x(\epsilon_2)F_y(\epsilon_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2} (r_3 + \hat{R}_3)(r_4 + \hat{R}_4) \\
 & + \left(\prod_{i=1}^4 2F_x(\epsilon_i)F_y(\epsilon_i) \right) \left[\frac{1}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2(\epsilon_3 - \epsilon_4)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(\epsilon_1 - \epsilon_3)^2(\epsilon_2 - \epsilon_4)^2} + \frac{1}{(\epsilon_1 - \epsilon_4)^2(\epsilon_2 - \epsilon_3)^2} \right]. \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Bien que ces représentations étendues soient certainement moins compactes que la représentation en déterminants (2.25), elles révèlent explicitement comment l'intégrabilité du système, et les relations qui en résultent entre les couplages Γ_s , entrent en jeu pour définir une partie de la structure fondamentale sous-jacente des états (propres) construits dans ce travail.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment pour des modèles de R-G de spin 1/2 en supprimant la condition habituelle d'antisymétrie des constantes de couplage, ces derniers permettent une solution explicite aux contraintes d'intégrabilité de type XYZ et ce, en présence d'un champ magnétique externe arbitrairement orienté. Après avoir fourni une paramétrisation complète de ces modèles, nous exploitons le fait que l'ensemble des charges conservées satisfait un ensemble d'équations quadratiques tel que démontré au chapitre 1. L'efficacité numérique de leur résolution permet d'obtenir facilement les valeurs propres définissant individuellement les états propres. Elle donne aussi accès, par l'utilisation du théorème de Hellman-Feynman aux valeurs moyennes d'observables locales calculés ici pour un modèle XYZ complètement anisotrope. Il est à noter, encore une fois, que en l'absence d'ansatz de Bethe pour la solution de ces modèles les méthodes développées dans ces travaux restent les seules permettant à l'heure actuelle d'accéder à la physique de ces modèles XYZ non-antisymétriques.

Par la suite, nous avons démontré qu'il est possible de construire formellement les états propres des modèles de R-G de spin-1/2 dans un champ magnétique en spécifiant seulement l'ensemble des charges conservées et les valeurs propres associées à l'état propre donné. Pour ce faire, nous avons défini une classe d'opérateurs paramétrés par N variables $(r_1 \dots r_N)$, qui, lorsqu'ils sont évalués "on-shell", c'est-à-dire à la solution $(r_1 \dots r_N)$ des équations quadratiques de Bethe, se réduisent explicitement au projecteur sur l'état propre normalisé correspondant. Ce résultat complète l'approche de ces modèles basée sur les valeurs propres en fournissant des expressions génériques pour les états propres sans avoir à définir un Ansatz de Bethe. On peut espérer que cette construction puisse être utilisée pour trouver des expressions, écrites directement en termes de valeurs propres, pour les facteurs de forme des opérateurs locaux qui forment les blocs de construction de base nécessaires pour accéder aux propriétés dynamiques de ces systèmes.

Chapitre 3

Formes quadratiques entre operateurs de R-G avec couplages bidirectionnels

"Le progrès n'est que l'accomplissement des utopies." Oscar Wilde

"Sachez vous éloigner car, lorsque vous reviendrez à votre travail, votre jugement sera plus sûr." Léonard De Vinci

Au premier chapitre, nous avons montré de manière générique qu'il est possible dans le cas des modèles de R-G de spin 1/2 avec couplages unidirectionnels, de calculer le spectre d'un système considéré en résolvant un système d'équations quadratiques comme ceci a été fait pour quelques cas spécifiques [18, 35]. Nous avons aussi vu que cette méthode de résolution utilise l'intégrabilité du modèle reste la même indépendamment des symétries de ce dernier [58].

Bien que couvrant une vaste classe de modèles, les systèmes considérés au premier chapitre de ce mémoire ne contenaient pas de termes de couplages que nous appelons ici bidirectionnels, lesquels couplent une composante du spin central à une composante d'un spin du bain mais suivant deux directions distinctes. Ainsi les couplages Γ^{xy} , Γ^{yx} , Γ^{xz} , Γ^{zx} , Γ^{yz} et Γ^{zy} , encore appelés couplages de type Dzyaloshinskii-Moriya qui résultent de l'effet spin-orbite [101, 102] n'apparaissent pas dans ces modèles.

Ce chapitre s'inscrit donc dans la suite des développements récemment opérés sur les modèles de R-G de spin 1/2 en tentant, justement, d'inclure ce type de terme d'interaction.

3.1 Modèles et leur intégrabilité

À la différence des modèles du chapitre précédent, les modèles abordés dans celui-ci contiennent donc ces termes de type Dzyaloshinskii-Moriya couplant S_i^α et S_j^β avec $\beta \neq \alpha$. Cependant ils ne couvriront toujours pas l'ensemble des classes de modèles intégrables de type R-G, puisqu'ils ne prendront uniquement en compte que les situations dans lesquelles le champ magnétique appliqué au spin central est orienté suivant une direction précise de l'espace tridimensionnel, considérée comme privilégiée. Les modèles de spin-1/2 que nous considérons ici sont, comme dans le cas de ceux étudiés aux chapitres précédents, définis par des charges conservées quadratiques en opérateur de spin et commutant entre elles. Ils ont la forme explicite suivante :

$$T_j = B_j^\gamma \cdot S_j^\gamma + \sum_{k \neq i}^N \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \Gamma_{jk}^{\alpha\beta} S_j^\alpha S_k^\beta.$$

Sans nuire à leur généralité, ces charges conservées peuvent être redéfinies comme

$$R_j = \frac{T_j}{B_j^\gamma} = S_j^\gamma + \sum_{k \neq i} \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \Gamma_{jk}^\alpha S_j^\alpha S_k^\beta. \quad (3.1)$$

Comme au premier chapitre, ici, les exposants grecs seront utilisés pour désigner les orientations, prenant trois valeurs x, y, z , tandis que les indices latins seront utilisés pour désigner les spins individuels, prenant les valeurs $1, 2, 3 \dots N$. Les relations d'intégrabilité sont également trouvées en calculant explicitement et en mettant à zéro tous les commutateurs entre différents opérateurs; c'est à dire imposant que

$$[R_j, R_k] = 0. \quad (3.2)$$

Ces relations bien qu'étant plus complexes que ceux obtenues dans le cas des couplages exclusivement unidirectionnels restent relativement simples à construire à partir des relations de commutation entre matrices de spin que nous rappelons ici.

$$[S_j^\alpha, S_k^\beta] = i \delta_{jk} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_k^\gamma, \quad (3.3)$$

où ϵ est le symbole antisymétrique de Levi-Civita.

Par un raisonnement analogue à celui utilisé au premier chapitre, nous dirons que les termes linéaires dans les matrices de spin : $B_j^\gamma \cdot S_j^\gamma$ et $B_k^\gamma \cdot S_k^\gamma$ commutent, puisqu'ils impliquent des spins distincts. Le commutateur peut alors être développé comme suit

$$\begin{aligned} [R_j, R_k] &= \sum_{\mu, \eta} B_j^\gamma \Gamma_{kj}^{\mu\eta} [S_j^\gamma, S_j^\eta] S_k^\mu + \sum_{\mu, \eta} B_k^\gamma \Gamma_{jk}^{\mu\eta} S_j^\mu [S_k^\eta, S_k^\gamma] \\ &+ \sum_{m \neq k} \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{km}^{\lambda\nu} S_j^\mu [S_k^\eta, S_k^\lambda] S_m^\nu + \sum_{m \neq j, k} \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \Gamma_{jm}^{\mu\eta} \Gamma_{km}^{\lambda\nu} S_j^\mu S_k^\lambda [S_m^\eta, S_m^\nu] \\ &+ \sum_{m \neq j} \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \Gamma_{jm}^{\mu\eta} \Gamma_{kj}^{\lambda\nu} S_k^\lambda [S_j^\mu, S_j^\nu] S_m^\eta \end{aligned} \quad (3.4)$$

en utilisant aussi le fait que $[S_i^\alpha S_j^\alpha, S_j^\beta S_i^\beta] = 0$. Comme au premier chapitre, on trouve aussi des termes soit quadratiques, soit cubiques dans les matrices de spin. Cela nous conduit pour toute permutation des ensembles $\{\mu, \eta, \gamma\} = \{x, y, z\}$ aux relations d'intégrabilité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \Gamma_{jk}^{\gamma\eta} = 0 & \Gamma_{jk}^{\gamma\mu} = 0 & \Gamma_{jk}^{\mu\gamma} = 0 & \Gamma_{jk}^{\eta\gamma} = 0 \\ \Gamma_{jk}^{\eta\mu} = \Gamma_{kj}^{\eta\mu} & \Gamma_{jk}^{\eta\eta} = -\Gamma_{kj}^{\mu\mu} & \Gamma_{jk}^{\mu\mu} = -\Gamma_{kj}^{\eta\eta} & \Gamma_{jk}^{\mu\eta} = \Gamma_{kj}^{\mu\eta} \end{array} \right., \quad (3.5)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\mu} - \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\eta} + \Gamma_{kj}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\mu} - \Gamma_{kj}^{\eta\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} = 0 \\ \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\eta} - \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\mu} + \Gamma_{kj}^{\mu\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\eta} - \Gamma_{kj}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\eta} = 0 \\ -\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\mu} - \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} + \Gamma_{kj}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\mu} - \Gamma_{kj}^{\mu\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} = 0 \\ -\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} - \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\mu} + \Gamma_{kj}^{\eta\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\eta} - \Gamma_{kj}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\eta} = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Les relations d'intégrabilité (3.5 et 3.6) sont celles obtenues dans le cas des modèles étudiés dans ce chapitre. En effet, comme au chapitre précédent, aucune symétrie $U(1)$ ni existence d'un pseudo-vide adéquat ne seront exigées.

En plus de l'antisymétrie $\Gamma_{jk}^{\eta\eta} = -\Gamma_{kj}^{\mu\mu}$ qui n'est pas aussi imposée ici, on peut également remarquer une symétrie $\Gamma_{jk}^{\mu\eta} = \Gamma_{kj}^{\mu\eta}$ par permutation d'indices de sites entre les couplages bidirectionnels. Les permutations d'indices de direction pouvant générer de l'antisymétrie ou de la symétrie. Si ces couplages sont antisymétriques $\Gamma_{jk}^{\mu\eta} = -\Gamma_{kj}^{\eta\mu}$ par permutation de direction, nous dirons alors qu'ils constituent des termes de Dzyaloshinskii-Moriya tels qu'ils apparaissent en raison de l'effet spin-orbite des fermions [101]. Dans le cas contraire, c'est à dire celui dans lequel les couplages bidirectionnels restent symétriques $\Gamma_{jk}^{\mu\eta} = \Gamma_{kj}^{\eta\mu}$, on pourrait imaginer un équivalent d'effet spin-orbite dans des systèmes où les échanges se font de manière symétrique.

On remarque aussi que le fait de remettre les couplages bidirectionnels à zéro ramène les conditions d'intégrabilité ci-dessus à celles trouvées au chapitre précédent et qu'on retrouve d'ailleurs dans [58].

3.2 Relations quadratiques entre opérateurs

Comme précédemment, dans cette section, nous cherchons à construire des relations quadratiques entre les charges conservées définies en 3.1. Pour y arriver, nous utiliserons encore simplement les relations d'intégrabilité définies dans la section précédente et un raisonnement analogue à celui utilisé au premier chapitre de ce manuscrit. Si ces relations quadratiques quadratiques existent entre les opérateurs, alors, elles seront encore une fois aussi valables pour leurs différentes valeurs propres. Nous cherchons donc à voir si les modèles intégrables étudiés ici peuvent obéir, au niveau opératoire, aux relations suivantes :

$$R_j^2 = \sum_{k \neq j} C_{jk} R_k + K_j \quad (3.7)$$

avec K_j et C_{jk} un ensemble de constantes à déterminer. On calcule

$$R_j^2 = \frac{1}{2} [R_j, R_j]_+ \quad (3.8)$$

en rappelant que l'anticommutateur des matrices de spin 1/2 est donné par :

$$\frac{1}{2} [S_j^\alpha, S_j^\beta]_+ = \frac{1}{2} S_j^\alpha S_j^\beta + \frac{1}{2} S_j^\beta S_j^\alpha = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{4} \mathbb{1}, \quad (3.9)$$

et, en désignant par R_j^l les termes linéaires en matrices de spin et par R_j^q les termes quadratiques en matrices de spin contenus dans les charges conservées R_j , on a :

$$R_j^l = S_j^\gamma \quad R_j^q = \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} S_j^\mu S_k^\eta \quad (3.10)$$

De cette façon, nous aurons alors

$$R_j^2 = \frac{1}{2} [R_j^l, R_j^l]_+ + [R_j^l, R_j^q]_+ + \frac{1}{2} [R_j^q, R_j^q]_+. \quad (3.11)$$

Le premier anticommutateur dans l'éq. (3.11), conduit facilement une constante simple à obtenir :

$$\frac{1}{2} [R_j^l, R_j^l]_+ = \frac{\mathbb{1}}{4}, \quad (3.12)$$

tandis que le second est directement donné par :

$$[R_j^l, R_j^q]_+ = \sum_{k \neq j}^N \sum_{\eta} \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\eta} S_k^\eta = \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma, \quad (3.13)$$

et contribue dans la construction des R_j^2 , sous la forme d'un terme linéaire dépendant des matrices de spin, excluant les spins d'indice $k \neq j$. L'anticommutateur restant vaut alors

$$\begin{aligned} [R_j^q, R_j^q]_+ &= \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\lambda\nu} [S_j^\mu S_k^\eta, S_j^\lambda S_l^\nu]_+ \\ &= \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\lambda\nu} [S_j^\mu S_k^\eta, S_j^\lambda S_l^\nu]_+ + \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\nu} [S_j^\mu S_k^\eta, S_j^\lambda S_k^\nu]_+, \end{aligned} \quad (3.14)$$

après l'avoir scindé en des termes dépendant de $k \neq l$ et ceux dépendant de $k = l$. Le premier terme est défini pour $l \neq k \neq j$. D'autre part, sachant que les matrices de spin associées à des spins distincts commutent toutes entre elles, ce terme se réécrit alors comme

$$\begin{aligned} \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\lambda\nu} [S_j^\mu S_k^\eta, S_j^\lambda S_l^\nu]_+ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\lambda\nu} \delta_{\mu\lambda} S_l^\nu S_k^\eta \\ &= \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \end{aligned} \quad (3.15)$$

En tenant compte de fait que le terme restant, c'est à dire celui en $l = k$ peut être, en utilisant les commutateurs, anticommutateurs et produit connus réécrit comme :

$$[S_j^\mu S_k^\eta, S_j^\lambda S_k^\nu]_+ = \frac{1}{8} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\eta\nu} \mathbb{1} + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \tau} \epsilon_{\eta, \nu, \tau} \epsilon_{\lambda, \mu, \beta} S_j^\beta S_k^\tau. \quad (3.16)$$

L'expression ci-dessus nous conduit enfin à un terme constant pour $\eta = \mu$ et à un terme quadratique couplant le spin j et le spin k le long des directions $\beta \neq (\lambda, \mu)$ et $\tau \neq (\eta, \nu)$.

On trouve donc :

$$\sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\nu} [S_j^\mu S_k^\eta, S_j^\lambda S_k^\nu]_+ = \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\nu} \left(\frac{1}{8} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\eta\nu} \mathbb{1} + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \tau} \epsilon_{\eta, \nu, \tau} \epsilon_{\lambda, \mu, \beta} S_j^\beta S_k^\tau \right). \quad (3.17)$$

A partir de la décomposition du produit $\epsilon_{\eta, \nu, \tau} \epsilon_{\lambda, \mu, \beta}$ en δ de Kronecker données par

$$\epsilon_{\eta, \nu, \tau} \epsilon_{\lambda, \mu, \beta} = \delta_{\eta\lambda} \delta_{\nu\mu} \delta_{\tau\beta} + \delta_{\eta\mu} \delta_{\nu\beta} \delta_{\tau\lambda} + \delta_{\eta\beta} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\tau\mu} - \delta_{\eta\lambda} \delta_{\nu\beta} \delta_{\tau\mu} - \delta_{\eta\beta} \delta_{\nu\mu} \delta_{\tau\lambda} - \delta_{\eta\mu} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\tau\beta}, \quad (3.18)$$

nous avons au final

$$\begin{aligned}
 R_i^2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \left(\sum_{\alpha} (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 + (\Gamma_{jk}^{\mu\eta})^2 + (\Gamma_{jk}^{\eta\mu})^2 \right) \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^{\gamma} \\
 &+ \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, l > k}^N \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\alpha} \right) S_k^{\alpha} S_l^{\alpha} + \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, l > k}^N \left(\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\eta} \Gamma_{jl}^{\beta\mu} \right) S_k^{\eta} S_l^{\mu} \\
 &+ \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, l > k}^N \left(\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\mu} \Gamma_{jl}^{\beta\eta} \right) S_k^{\mu} S_l^{\eta} - \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} - \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} \right) S_j^{\gamma} S_k^{\gamma} \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} S_j^{\eta} S_k^{\eta} - \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_j^{\mu} S_k^{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} S_j^{\eta} S_k^{\mu} + \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} S_j^{\mu} S_k^{\eta} \right)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

où, μ et η sont les deux directions perpendiculaires à γ , la direction du champ magnétique. Dans l'expression obtenue ci-dessus, on voit bien l'apparition des couplages bidirectionnels. Notez que les détails supplémentaires relatifs à ce calcul, sont données à l'annexe B.1

Comme au premier chapitre, Il reste à voir dans quelles conditions le carré de la charge conservée peut-être réécrite comme une combinaison linéaire des autres charges conservées. Une telle combinaison linéaire générique peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \neq j} C_{jk} R_k + K_j \cdot \mathbb{1} &= \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, l > k}^N [(C_{jk} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\eta\mu}) S_k^{\mu} S_l^{\eta} + (C_{jk} \Gamma_{kl}^{\eta\mu} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\mu\eta}) S_k^{\eta} S_l^{\mu}] \\
 &+ \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, l > k}^N \sum_{\alpha} (C_{jk} \Gamma_{kl}^{\alpha\alpha} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\alpha\alpha}) S_k^{\alpha} S_l^{\alpha} + \sum_{k=1, k \neq j}^N \left(C_{jk} \Gamma_{kj}^{\eta\mu} S_j^{\mu} S_k^{\eta} + C_{jk} \Gamma_{kj}^{\mu\eta} S_j^{\eta} S_k^{\mu} \right) \\
 &+ \sum_{k=1, k \neq j}^N C_{jk} \left(\Gamma_{kj}^{\gamma\gamma} S_j^{\gamma} S_k^{\gamma} + \Gamma_{kj}^{\eta\eta} S_j^{\eta} S_k^{\eta} + \Gamma_{kj}^{\mu\mu} S_j^{\mu} S_k^{\mu} \right) + \sum_{k=1, k \neq j}^N C_{jk} S_k^{\gamma} + K_j \cdot \mathbb{1},
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Démontrer qu'une telle combinaison linéaire existe revient encore une fois à montrer que les constantes C_{jk} peuvent être définies de manière à être cohérentes, terme par terme, avec l'expression de R_j^2 . En d'autres termes, il faut que :

$$K_j = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \left(\sum_{\alpha} (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 + (\Gamma_{jk}^{\mu\eta})^2 + (\Gamma_{jk}^{\eta\mu})^2 \right) \right) \tag{3.21}$$

$$C_{jk} = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \quad C_{jk} \Gamma_{kj}^{\gamma\gamma} = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \right) \tag{3.22}$$

$$C_{jk} \Gamma_{kj}^{\eta\eta} = -\frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \quad C_{jk} \Gamma_{kj}^{\mu\mu} = -\frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \tag{3.23}$$

$$C_{jk} \Gamma_{kj}^{\eta\mu} = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} \quad C_{jk} \Gamma_{kj}^{\mu\eta} = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \tag{3.24}$$

$$C_{jk} \Gamma_{kl}^{\alpha\alpha} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\alpha} \quad \forall l > k \quad (k, l \neq j), \tag{3.25}$$

$$C_{jk} \Gamma_{kl}^{\eta\mu} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\mu\eta} = \frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\eta} \Gamma_{jl}^{\beta\mu} \quad C_{jk} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\eta\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\mu} \Gamma_{jl}^{\beta\eta} \tag{3.26}$$

où les équations 3.25 et 3.26 couvrent chaque paire d'indices **distincts** k, l .

3.3 Intégrabilité et relations quadratiques

Le premier ensemble de conditions d'intégrabilité (3.5) trouvé précédemment nous permet de voir que toutes les constantes de couplages bidirectionnels contenus dans les plans contenant la direction γ sont nécessairement nulles. Les seuls couplages bidirectionnels pouvant être non-nuls sont ceux contenus dans le plan perpendiculaire à cette direction dans lequel pointe le champ magnétique. Notons que l'imposition que les champs magnétiques présents dans chacune des charges conservées pointent dans cette même direction est une contrainte que l'on choisit d'imposer car elle permet de trouver aisément une solution. Elle n'en demeure pas moins restrictives puisque des modèles intégrables plus génériques pourraient certainement être construits. On remarque aussi, au vu de ces conditions, que les couplages bidirectionnels sont symétriques par permutation d'indices liés aux sites. Au regard des expressions quadratiques 3.19 et 3.20 entre charges conservées, nous pouvons affirmer par identification que

$$C_{jk} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \quad \text{et} \quad \Gamma_{jk}^{\eta\mu}\Gamma_{jk}^{\mu\eta} = \Gamma_{jk}^{\mu\mu}\Gamma_{jk}^{\eta\eta} + \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{kj}^{\gamma\gamma} \quad \forall \mu \neq \eta \neq \gamma. \quad (3.27)$$

La première équation de 3.27 donne la forme des constantes C_{jk} à partir desquelles on arrive à construire le carré d'une charge conservée donnée comme combinaison linéaire des autres charges conservées. Comme on peut le remarquer, ces constantes sont directement reliées aux couplages unidirectionnels orientés suivant l'axe γ suivant lequel est polarisé le champ magnétique appliqué au spin central. Cette forme est la même que celle obtenue dans [58] et dans le premier chapitre de cette thèse, lorsqu'on tient compte de la relation $(\Gamma_{jk}^{\mu\mu} = -\Gamma_{kj}^{\eta\eta})$; cependant, c'est la paramétrisation des couplages qui sera différente. La deuxième équation de 3.27 quant à elle, met en évidence la relation entre les couplages bidirectionnels et les couplages unidirectionnels. Elle montre bien, lorsqu'on considère les couplages issus des modèles traités dans le chapitre précédent que les couplages bidirectionnels y nécessairement sont nuls.

Cette dernière équation met aussi en évidence le fait que les modèles isotropes (XXX) considérés dans ce projet de thèse ne pourront pas avoir de couplages bidirectionnels lorsque les champs magnétiques sont tous restreint à une même direction γ .

Les relations 3.23 sont facilement démontrables. En effet, on remarque à partir des conditions d'intégrabilité 3.27 que les couplages unidirectionnels contenus dans le plan perpendiculaire à γ sont antisymétriques par permutation d'indices liés aux sites et par changement de direction $(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} = -\Gamma_{kj}^{\mu\mu})$. Ce qui nous conduit à

$$C_{jk}\Gamma_{kj}^{\eta\eta} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{kj}^{\eta\eta} = -\frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{jk}^{\mu\mu} \quad C_{jk}\Gamma_{kj}^{\mu\mu} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{kj}^{\mu\mu} = -\frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \quad (3.28)$$

Toujours en tenant compte de la symétrie par permutation d'indices de sites des couplages bidirectionnels $(\Gamma_{kj}^{\eta\mu} = \Gamma_{jk}^{\mu\eta})$ établie par l'éq. 3.27, on en vient, à partir d'un raisonnement analogue au précédent, au fait que

$$C_{jk}\Gamma_{kj}^{\eta\mu} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{kj}^{\eta\mu} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{jk}^{\eta\mu} \quad C_{jk}\Gamma_{kj}^{\mu\eta} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{kj}^{\mu\eta} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}\Gamma_{jk}^{\mu\eta}, \quad (3.29)$$

ce qui nous permet d'attester la véracité de l'éq. 3.24.

Nous devons également prouver que les éqs. 3.25 et 3.26 sont compatibles avec l'ensemble des constantes $C_{jk} = \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}$. Le terme de droite dans l'éq. 3.25 peut, en utilisant la relation d'intégrabilité (3.6), être écrit comme

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\alpha} \Gamma_{jl}^{\mu\alpha} + \Gamma_{jk}^{\eta\alpha} \Gamma_{jl}^{\eta\alpha} + \Gamma_{jk}^{\gamma\alpha} \Gamma_{jl}^{\gamma\alpha} \right), \quad (3.30)$$

Lorsque $\alpha = \gamma$, la relation ci-dessus se réduit à $\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma}$, puisque $\Gamma_{jk}^{\mu\gamma} = \Gamma_{jk}^{\eta\gamma} = 0$. D'autre part, les couplages bidirectionnels n'agissent en aucun moment selon γ , avec pour conséquence que les couplages dans cette direction conserveront des paramétrisations identiques à celles des couplages trouvés dans le chapitre précédent. Ainsi la relation

$$C_{jk} \Gamma_{kl}^{\gamma\gamma} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\gamma\gamma} = \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma}, \quad (3.31)$$

telle que démontrée dans l'article [58], est aussi valable ici mais uniquement suivant l'angle d'orientation γ du champ magnétique.

Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque $\alpha \neq \gamma$, on aura alors plutôt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\alpha} &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\mu} \Gamma_{jl}^{\mu\mu} + \Gamma_{jk}^{\eta\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\eta} + \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\eta\eta} \right) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(-\Gamma_{kj}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\mu} + \Gamma_{jk}^{\eta\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\eta} - \Gamma_{kj}^{\mu\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\eta} \right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\mu} - \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\eta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\eta} - \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\mu} \right) \end{cases} = \begin{cases} C_{jk} \Gamma_{kl}^{\mu\mu} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\mu\mu} & \text{si } \alpha = \mu \\ C_{jk} \Gamma_{kl}^{\eta\eta} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\eta\eta} & \text{si } \alpha = \eta \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

En combinant les relations 3.31 et 3.32, on aboutit à

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\alpha} = C_{jk} \Gamma_{kl}^{\alpha\alpha} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\alpha\alpha} \quad \forall \alpha \in \{\mu, \eta, \gamma\}, \quad (3.33)$$

prouvant les relations 3.25.

Finalement, la preuve des relations 3.26 se fait de manière analogue à celle des relations 3.25, ceci à la différence qu'on utilise plutôt les troisièmes et quatrièmes équations de 3.6 pour y arriver. En considérant par exemple le terme de droite de la première relation de 3.26 et la troisième équation de 3.6, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\eta} \Gamma_{jl}^{\beta\mu} &= \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} + \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} + \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\mu} + \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} \right. \\ &\left. + \Gamma_{kj}^{\mu\mu} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} + \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\eta\mu} + \Gamma_{jl}^{\gamma\gamma} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jl}^{\eta\mu} \right) = C_{jk} \Gamma_{lk}^{\eta\mu} + C_{jl} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} \end{aligned} \quad (3.34)$$

En permutant les indices de direction μ et η , on retrouve la relation

$$\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\mu} \Gamma_{jl}^{\beta\eta} = C_{jk} \Gamma_{lk}^{\mu\eta} + C_{jl} \Gamma_{kl}^{\eta\mu} = C_{jk} \Gamma_{kl}^{\mu\eta} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\eta\mu}, \quad (3.35)$$

prouvant que les conditions d'intégrabilité sont suffisantes pour assurer que la condition (3.26) est elle aussi satisfaite.

Il a donc été prouvé que, pour tout modèle R-G intégrable défini par des charges conservées (3.1) qui commutent toutes entre elles, le carré des charges conservées peut être écrit comme la combinaison linéaire suivante des autres charges conservées :

$$R_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} R_k + \frac{1}{16} \sum_{k \neq j} \left[\sum_{\alpha} (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 + (\Gamma_{jk}^{\eta\mu})^2 + (\Gamma_{jk}^{\mu\eta})^2 \right] + \frac{1}{4}, \quad (3.36)$$

où les constantes C_{jk} valent $\frac{1}{2}\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma}$.

Encore une fois, les charges conservées commutant entre elles, leurs valeurs propres r_j obéiront aussi au même ensemble d'équations quadratiques. On aura alors

$$r_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} r_k + \frac{1}{16} \sum_{k \neq j} \left[\sum_{\alpha} (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 + (\Gamma_{jk}^{\eta\mu})^2 + (\Gamma_{jk}^{\mu\eta})^2 \right] + \frac{1}{4}, \quad (3.37)$$

dont l'ensemble des solutions définira le spectre énergétique complet du modèle.

Comme on a donc pu le constater, il existe une classe de modèles beaucoup plus vaste que ceux traités dans les chapitres précédents, pour lesquels le carré d'une charge conservée donnée est une combinaison linéaire des autres charges conservées. Dans la section suivante de ce chapitre, nous considérerons encore un autre modèle, n'appartenant pas aux classes étudiés jusqu'ici, et verrons comment ceux-ci obéissent aussi à des relations quadratiques entre charges conservées.

3.4 Carré des charges conservées des modèles de Gaudin de type XXZ avec bordures triangulaires

Nous traitons donc dans cette section d'un cas de modèle dit avec avec bords triangulaires et démontrons que les relations quadratiques obtenues jusqu'ici peuvent être encore généralisées à ce cas. Commençons par considérer les charges conservées $H(\alpha_m, \psi, \kappa, \xi)$ données en annexe (3.38) telles que calculées par N. Manojlovic et I. Salom dans [23] où ils étudient les modèles de Gaudin dérivés de la limite quasi-classique de la chaîne de Heisenberg XXZ avec des conditions aux bords triangulaires. Dans cette étude, les charges conservées $H(\alpha_m, \psi, \kappa, \xi)$ sont obtenues à partir des résidus aux pôles $\pm\alpha_m$ ($\alpha_m \in \mathbb{R}$) de la fonction génératrice XXZ des hamiltoniens de Gaudin et sont explicitement donnés par

$$\begin{aligned} H(\alpha_m, \psi, \kappa, \xi) = & \sum_{n \neq m}^N \left[\coth(\alpha_m - \alpha_n) S_m^3 S_n^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{S_m^+ S_n^- + S_m^- S_n^+}{\sinh(\alpha_m - \alpha_n)} \right) \right] \\ & + \sum_{n=1}^N \coth(\alpha_m + \alpha_n) \frac{S_m^3 S_n^3 + S_n^3 S_m^3}{2} + \frac{\psi}{\kappa} \frac{\sinh(2\alpha_m)}{\sinh(\xi + \alpha_m)} \sum_{n=1}^N \frac{S_m^3 S_n^+ + S_n^+ S_m^3}{2 \sinh(\alpha_m + \alpha_n)} \\ & + \frac{\sinh(\xi - \alpha_m)}{2 \sinh(\xi + \alpha_m)} \sum_{n=1}^N \frac{S_m^- S_n^+ + S_n^+ S_m^-}{2 \sinh(\alpha_m + \alpha_n)} + \frac{\sinh(\xi + \alpha_m)}{2 \sinh(\xi - \alpha_m)} \sum_{n=1}^N \frac{S_m^+ S_n^- + S_n^- S_m^+}{2 \sinh(\alpha_m + \alpha_n)} \\ & - \frac{\psi}{\kappa} \frac{\sinh(2\alpha_m)}{\sinh(\xi + \alpha_m)} \sum_{n=1}^N \coth(\alpha_m + \alpha_n) \frac{S_m^+ S_n^3 + S_n^3 S_m^+}{2} \\ & - \frac{\psi^2}{\kappa^2} \frac{\sinh^2(2\alpha_m)}{2 \sinh(\xi - \alpha_m) \sinh(\xi + \alpha_m)} \sum_{n=1}^N \frac{S_m^+ S_n^+ + S_n^+ S_m^+}{2 \sinh(\alpha_m + \alpha_n)} \quad \forall \alpha_m, \psi, \kappa, \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

où les α_m sont des paramètres réels d'inhomogénéité. ψ, κ et ξ quant à eux sont les paramètres réels des matrices de réflexion appliquées aux bords du modèle d'Heisenberg dont dérive les modèles de Gaudin traités ici. S^+, S^- et S^3 sont les matrices de spin- $\frac{1}{2}$. La notation S^3 étant utilisé ici plutôt que S^z . On constate donc l'existence de modèles intégrables dont les charges conservées contiennent des termes supplémentaires de la forme $S_j^3 S_k^+, S_j^3 S_k^-, S_j^+ S_k^+, S_j^- S_k^-$, correspondant à des couplages bidirectionnels impliquant toutes les directions [23].

Afin de simplifier le problème, nous choisissons d'abord de prendre la limite des charges conservées 3.38 lorsque α_m and ξ tendent vers zéro. Les $H(\alpha_m, \psi, \kappa, \alpha_m, \xi)$ résultant seront alors plus compacts mais en conserveront les termes de couplages additionnels. En définissant de nouveaux paramètres réels arbitraires ϵ_m, γ et de nouvelles charges conservées $R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}$ de telle sorte que

$$\epsilon_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \alpha_m, \quad \gamma = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \xi \quad \text{and} \quad R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) = \lim_{t \rightarrow 0} t H\left(\frac{\epsilon_m}{t}, \psi, \kappa, \frac{\gamma}{t}, t\right) \quad (3.39)$$

où t est un paramètre réel sans dimension. Dans la limite $t \rightarrow 0$ ($|\alpha_m|$ and $|\xi| \ll 1$) nous obtenons les transformations suivantes :

$$\coth(\alpha_m + \eta \alpha_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{1}{\epsilon_m + \eta \epsilon_n} \quad \text{et} \quad \sinh(\alpha_m + \eta \alpha_n) = \lim_{t \rightarrow 0} (\epsilon_m + \eta \epsilon_n) t, \quad (3.40)$$

avec $\eta = \pm 1$. En utilisant les relations (3.39) et (3.40) dans l'équation (3.38) et en remarquant que les termes en $n = m$ sont proportionnels à l'identité, les nouvelles charges conservées $R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma)$ peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned} R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) &= \sum_{n \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_n}{\epsilon_m - \epsilon_n} + \sum_{n \neq m}^N \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_n} \left(S_m^3 S_n^3 - 2 \frac{\psi^2}{\kappa^2} \frac{\epsilon_m^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} S_m^+ S_n^+ \right) \\ &+ 2 \frac{\psi}{\kappa} \frac{\epsilon_m}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{n \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m) S_m^3 S_n^+}{\epsilon_m + \epsilon_n} - \frac{(\gamma + \epsilon_m) S_m^+ S_n^3}{\epsilon_m + \epsilon_n} \right] + \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{8\epsilon_m} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{n \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m)^2 S_m^- S_n^+}{\epsilon_m + \epsilon_n} + \frac{(\gamma + \epsilon_m)^2 S_m^+ S_n^-}{\epsilon_m + \epsilon_n} \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

où $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ est la matrice identité dans l'espace de Hilbert considéré de dimension \mathcal{D} .

Il est clair que le modèle traité ici est différent de ceux traités dans la section (1.3) car les conditions aux limites, qui sont dans ce cas caractérisées par la forme triangulaire des matrices de réflexion, génèrent ces termes de couplages de la forme $S_j^3 S_k^+, S_j^3 S_k^-, S_j^+ S_k^+$ absents des modèles traités jusque là. Malgré tout l'approche suivi sera toujours similaire et nous calculerons donc d'abord le carré de ces opérateurs en fonction de l'ensemble des paramètres $\{\psi, \kappa, \gamma, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \dots, \epsilon_k, \dots, \epsilon_N; \epsilon_m \neq \epsilon_k\}$. Rappelons encore les relations suivantes entre les opérateurs S_m^3, S_m^+ et S_m^- dans le cas des spins $\frac{1}{2}$.

$$S_m^3 S_m^3 = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{4}, \quad [S_m^3, S_m^\pm] = \pm S_m^\pm, \quad [S_m^+, S_m^-] = 2S_m^3 \quad \text{et} \quad [S_m^\alpha, S_m^\alpha] = 0 \quad \forall \alpha \in \{-, +, 3\}, \quad (3.42)$$

qui permettent de calculer le carré des $R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma)$ et, tel que détaillé en annexe (B.2), de prouver l'existence de relations quadratiques entre ces opérateurs .

$$\begin{aligned}
 R^2(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} + \frac{2}{\epsilon_k} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right) R(\epsilon_k, \psi, \kappa, \gamma) \\
 &+ \frac{1}{4\epsilon_m} \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) + \frac{3}{8} \sum_{k \neq m}^N \frac{\epsilon_m^2 + \epsilon_k^2}{(\epsilon_m^2 - \epsilon_k^2)^2} - \left(\frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right)^2 \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{64\epsilon_m} \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} - \frac{1}{4\epsilon_k} \frac{3\gamma^2 + \epsilon_k^2}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} \right) \mathbb{1}_{\mathcal{D}}. \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

Une fois encore, ces relations quadratiques entre opérateurs qui partagent une base propre commune implique que leurs valeurs propres $r(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma)$ suivent les mêmes lois. On a donc que

$$\begin{aligned}
 r^2(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} + \frac{2}{\epsilon_k} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right) r(\epsilon_k, \psi, \kappa, \gamma) \\
 &+ \frac{1}{4\epsilon_m} \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} r(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) + \frac{3}{8} \sum_{k \neq m}^N \frac{\epsilon_m^2 + \epsilon_k^2}{(\epsilon_m^2 - \epsilon_k^2)^2} - \frac{1}{64\epsilon_m} \left(\frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right)^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} - \frac{1}{4\epsilon_k} \frac{3\gamma^2 + \epsilon_k^2}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} \right). \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Résoudre ces équations pour un ensemble donné de paramètres $\{\psi, \kappa, \gamma, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \dots, \epsilon_k, \dots, \epsilon_N; \epsilon_m \neq \epsilon_k\}$ avec $\psi, \kappa, \gamma, \epsilon_m, \epsilon_k \in \mathbb{R}$, permet donc la détermination du spectre d'énergie du système correspondant.

Bien que cette classe spécifique de modèles intégrables de Gaudin n'appartienne pas aux modèles génériques XYZ de R-G traités précédemment, le carré de chacune de ses charges conservées peut tout de même s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

3.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir des équations quadratiques pour une classe de modèles R-G encore plus large exactement comme dans les chapitres précédents. Deux cas y ont été traités.

D'abord, en imposant la colinéarité des termes de champs magnétiques apparaissant dans chacune des charges conservées, nous avons pu obtenir ces équations pour une ensemble de modèles contenant des couplages bidirectionnels de type Dzyaloshinskii-Moriya. Cette restriction sur les champs magnétique a par contre pour conséquence de ne permettre, des modèles intégrables, n'ayant de couplages bidirectionnels que dans le plan perpendiculaire au champ magnétique.

Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, nous avons considéré les charges conservées de spin- $\frac{1}{2}$ (3.38) étudiées par N. Manojlovic et I. Salom dans les modèles de Gaudin trigonométriques ou de type XXZ avec frontières triangulaires dans une limite particulière. Nous avons démontré, dans ce cas, que l'approche proposée reste valide malgré la présence de nouveaux termes de couplages.

Ce résultat devient particulièrement intéressant dans la mesure où il permet certainement de penser que tous les modèles intégrables incluant tous les termes quadratiques en spin entre toutes les paries de directions différentes pourraient probablement, en général, obéir à des relations quadratiques similaires. Une telle preuve, valable dans un cas complètement général sans aucune restriction reste, pour l'instant, une question ouverte.

Chapitre 4

Fonctions de corrélation à deux points

"Tout obstacle renforce la détermination. Celui qui s'est fixé un but n'en change pas."
Léonard De Vinci

"Choisis toujours le chemin qui semble le meilleur même s'il paraît plus difficile : l'habitude le rendra bientôt agréable." **Pythagore**

Comme déjà plusieurs fois évoquées dans les chapitres précédents, ces dernières années ont vu des développements importants dans l'approche basée sur les valeurs propres des modèles intégrables de R-G. L'idée, apparue dans les travaux de Babelon et Talalaev [25] dans le contexte des modèles de Tavis-Cummings a ensuite été revisitée dans les modèles R-G isotropes [33] de spin-1/2, ainsi que dans les modèles de spin supérieur [26] et les modèles anisotropes de spin-1/2 [17]. L'approche reposait initialement sur le fait que, comme mentionné au premier chapitre, les équations de Bethe, dont les solutions fournissent les différents ensembles de racines de Bethe qui définissent les états propres du système, peuvent, après un changement de variables approprié, être reformulées en un ensemble beaucoup plus simple d'équations quadratiques. Par contre, tel que démontré dans cette thèse il est tout à fait possible de prouver ces relations sans faire appel aux racines de Bethe permettant de démontrer que ces relations sont une caractéristique générique des modèles intégrables de R-G [58, 89].

La simplicité relative de la résolution des équations quadratiques, comparée aux habituelles équations de Bethe hautement non linéaires, rend souhaitable la recherche d'expressions exprimées directement en termes des valeurs propres, pour les quantités physiquement pertinentes. En effet, les éventuelles difficultés numériques liées à l'extraction des racines de Bethe à partir de valeurs propres connues, un fait qui a été explicitement signalé comme une source possible de problèmes dans [103] par exemple, peuvent être totalement évitées si des expressions basées sur les valeurs propres sont disponibles.

En guise de rappel, des expressions en déterminant des produits scalaires et des facteurs de forme à un point ont été publiées récemment pour les modèles isotropes [11] et anisotropes XXZ [15]. Pas contre, de telles constructions n'étaient pas encore disponibles pour les facteurs de forme à deux points (éléments de matrice pour le produit de deux opérateurs de spin locaux) jusqu'aux travaux présentés dans ce chapitre.

Après une brève revue des modèles d'intérêt et des résultats connus dans les sections 4.1 et 4.2, la section 4.3 énonce deux lemmes centraux qui sont ensuite utilisés dans les sections restantes pour construire de nouveaux déterminants basés sur les valeurs propres pour les facteurs de forme à un et deux points dans les modèles isotropes (XXX).

4.1 Modèles rationnels de R-G

Tel que paramétrés au chapitre II de manuscrit, les modèles quantiques intégrables de R-G de type XXX construits à partir de N spin-1/2, sont définis par l'ensemble des charges conservées (avec $([R_i, R_j] = 0)$) :

$$R_i = B_z S_i^z + \sum_{j \neq i} \frac{\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j}{\epsilon_i - \epsilon_j}, \quad (4.1)$$

et les états propres communs sont tous définis comme des états de Bethe génériques données par

$$|\{\lambda\}\rangle \equiv \prod_{k=1}^M S^+(\lambda_k) |\downarrow \downarrow \dots \downarrow\rangle, \quad (4.2)$$

avec les opérateurs $S^+(\lambda_k)$ définis par :

$$S^+(\lambda_k) \equiv \sum_{i=1}^N \frac{S_i^+}{\lambda_k - \epsilon_i}. \quad (4.3)$$

Ici S_i^+ est toujours simplement la réalisation en spin-1/2 de l'opérateur de création de spin associé au spin d'indice $i \in [1, N]$, et le nombre d'excitations M est un entier quelconque $\leq N$ dont la valeur définit l'aimantation totale de l'état. Lorsque l'on travaille avec des spins-1/2, on a aussi que $(S_i^+)^2 = 0$.

Comme déjà mentionné au chapitre I, pour que l'un de ces états de Bethe génériques définisse un état propre du système, l'ensemble des racines de Bethe $\{\lambda_1^n \dots \lambda_M^n\}$ doit être la solution de l'ensemble des M équations de Bethe non linéaires couplées :

$$B_z + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\epsilon_j - \lambda_a} = \sum_{b=1(\neq a)}^M \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \quad (4.4)$$

Il est aussi possible de définir les états duals de Bethe :

$$\langle\{\mu\}| \equiv \langle \uparrow \uparrow \dots \uparrow | \prod_{k=1}^{N-M} S^+(\mu_k) \quad (4.5)$$

qui, une fois encore, deviennent l'un des états propres lorsque les racines de Bethe duales sont une solution à un ensemble similaire d'équations de Bethe duales. Nous cherchons donc à aborder le problème directement en terme des valeurs propres r_i^n des charges conservées définies par $R_i |\{\lambda^n\}\rangle = r_i^n |\{\lambda^n\}\rangle$. Or, la relation entre les valeurs propres et l'ensemble des racines de Bethe correspondantes est telle que :

$$r_i^n = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k^n - \epsilon_i} + C_i, \quad (4.6)$$

avec C_i une constante définie en fonction des paramètres du modèle. La partie des valeurs propres dépendant de l'état peut alors être définie comme :

$$\begin{aligned}\Lambda_i^\lambda &\equiv \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_i} \\ \Lambda_i^\mu &\equiv \sum_{k=1}^{N-M} \frac{1}{\mu_k - \epsilon_i},\end{aligned}\tag{4.7}$$

une définition qui peut également être utilisée pour les états de Bethe génériques "off-shell" construits selon (4.2) avec un ensemble arbitraire de racines $\{\lambda_1 \dots \lambda_M\}$ ou les états duaux génériques construits selon (4.4) avec tout ensemble de racines duales $\{\mu_1 \dots \mu_{N-M}\}$. Ces variables Λ étant celles qui apparaissent dans les premiers chapitres.

Dans le cas d'un état propre donné du système, ses diverses valeurs propres obéissent aux équations quadratiques obtenues au chapitre I, que nous rappelons ici :

$$(r_i^n)^2 = \sum_{j=1 \ (\neq i)}^N \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} r_j^n + \sum_{j=1 \ (\neq i)}^N \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} + (B_z)^2.\tag{4.8}$$

et qui, en raison de leur relative simplicité, rendent souhaitable un accès à des expressions de quantités physiques directement en termes de ces valeurs.

4.2 Facteur de forme selon \hat{z} obtenu à partir des dérivées des valeurs propres

Dans [33], il a été montré que les facteurs de forme pour les opérateurs de spin locaux S_i^z peuvent être écrits comme :

$$\langle \mu^m | S_i^z | \lambda^n \rangle = (r_i^n - r_i^m) \langle \mu^m | \frac{\partial | \lambda^n \rangle}{\partial B_z},\tag{4.9}$$

où r_i^n est la valeur propre de R_i pour l'état propre $| \lambda^n \rangle$.

La forme spécifique n'est définissable que pour les états on-shell (états propres), puisque cette représentation nécessite les dérivées, par rapport au champ magnétique, des valeurs propres définissant l'état propre en question. Cela conduit à une représentation en termes de dérivée du déterminant du produit scalaire. En effet, il a été démontré que [32, 33, 34] :

$$\langle \mu | \lambda \rangle = \det J \equiv \det \begin{pmatrix} J_{11} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} & J_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_3} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & J_{33} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \cdots & J_{NN} \end{pmatrix}\tag{4.10}$$

avec $J_{aa} = \Lambda_a^\mu + \Lambda_a^\lambda - \sum_{c \neq a} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_a}$. Comme ledit déterminant ne dépend des valeurs propres que par ses N éléments diagonaux, le calcul de sa dérivée peut alors s'écrire comme la somme sur N autres déterminants :

$$\langle \mu^m | \frac{\partial | \lambda^n \rangle}{\partial B_z} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial r_i^n}{\partial B_z} \det J_i,\tag{4.11}$$

où J_i est la matrice obtenue après avoir retiré la colonne i et la ligne i de J ; J étant la matrice dont le déterminant donne le produit scalaire $\langle \mu^m | \lambda^n \rangle$. Rappelons que les dérivées $\frac{\partial r_i^n}{\partial B_z}$ sont facilement obtenues, une fois connues les valeurs propres $(r_1^n, r_2^n, \dots, r_N^n)$ définissant l'état $|n\rangle$, en résolvant un système linéaire de N équations trouvées par la dérivée du système quadratique auquel les valeurs propres sont connues d'obéir (éq. 5.9). C'est d'ailleurs exactement de cette façon que les valeurs moyennes des spins ont pu être calculées, au chapitre II, par le théorème d'Hellman-Feynman.

Un aspect intéressant de l'éq. (4.9) est qu'il montre que, pour toute paire d'états propres $|\lambda^n\rangle, |\mu^m\rangle$, les N facteurs de forme pour chaque spin local S_j^z sont tous facilement accessibles après le calcul du premier facteur de forme. En effet, connaissant la valeur de $\langle \mu^m | S_i^z | \lambda^n \rangle$, on peut facilement accéder à tous les $\langle \mu^m | S_j^z | \lambda^n \rangle$ en calculant :

$$\langle \mu^m | S_j^z | \lambda^n \rangle = \frac{(r_j^n - r_j^m)}{(r_i^n - r_i^m)} \langle \mu^m | S_i^z | \lambda^n \rangle. \quad (4.12)$$

4.3 Considerations mathématiques

Puisque les preuves qui seront contenues dans la suite de ce chapitre feront principalement appel aux deux lemmes simples, nous choisissons de d'abord les énoncer et les démontrer dans cette section avant de nous intéresser à la construction des facteurs de forme.

Lemme 1

Étant donné une matrice générique inversible $N \times N$, un ensemble de M coefficients arbitraires A_j , M vecteurs (colonne) arbitraires \mathbf{u}_j et un vecteur (ligne) arbitraire \mathbf{v}^T , la somme pondérée (par A_j) des déterminants des matrices $J - \mathbf{u}_j \mathbf{v}^T$ (ajouts d'une matrice de rang 1 à la matrice J), peut être écrite comme un déterminant unique d'une matrice $(N+1) \times (N+1)$ de la forme :

$$\sum_{j=1}^M A_j \det [J - \mathbf{u}_j \mathbf{v}^T] = \det \begin{bmatrix} \Gamma & v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ \tilde{u}_1 & & & & \\ \vdots & & J & & \\ \tilde{u}_N & & & & \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

où \tilde{u}_a est simplement la a ième composante du vecteur $\tilde{\mathbf{u}} \equiv \sum_{j=1}^M A_j \mathbf{u}_j$, v_a sont les composantes de

\mathbf{v}^T et finalement $\Gamma = \sum_{j=1}^M A_j$.

Preuve La preuve repose simplement sur le lemme du déterminant de la matrice qui stipule que le déterminant de la somme d'une matrice inversible et du produit dyadique $\mathbf{u} \mathbf{v}^T$ est donné par :

$$\det [J - \mathbf{u} \mathbf{v}^T] = \det[J] - \det[J] (\mathbf{v}^T J^{-1} \mathbf{u}). \quad (4.14)$$

Par conséquent, on calcule

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^M A_j \det [J - \mathbf{u}_j \mathbf{v}^T] &= \sum_{j=1}^M A_j (\det[J] - \det[J] (\mathbf{v}^T J^{-1} \mathbf{u}_j)) \\
 &= \left(\sum_{j=1}^M A_j \right) \det[J] - \sum_{j=1}^M A_j \det[J] (\mathbf{v}^T J^{-1} \mathbf{u}_j) \\
 &= \left(\sum_{j=1}^M A_j \right) \det[J] - \det[J] (\mathbf{v}^T J^{-1} \tilde{\mathbf{u}}), \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathbf{u}} \equiv \sum_{j=1}^M A_j \mathbf{u}_j$. En considérant à nouveau le lemme du déterminant de la matrice, le deuxième terme peut facilement être écrit comme :

$$-\det[J] (\mathbf{v}^T J^{-1} \tilde{\mathbf{u}}) = \det [J - \mathbf{u} \mathbf{v}^T] - \det[J], \tag{4.16}$$

menant à :

$$\sum_{j=1}^M A_j \det [J - \mathbf{u}_j \mathbf{v}^T] = \left(\sum_{j=1}^M A_j - 1 \right) \det[J] + \det [J - \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}^T]. \tag{4.17}$$

Afin d'additionner ces deux déterminants pour écrire le résultat comme un déterminant unique d'une matrice de $N + 1$ par $N + 1$, on peut simplement compléter les deux déterminants avec une première ligne supplémentaire donnée par $(1, 0, 0, 0, \dots, 0)$. De cette manière, les déterminants restent inchangés tout en permettant des éléments arbitraires dans la première colonne. En mettant ces éléments à zéro dans le premier déterminant et à \tilde{u}_a dans le second, nous pouvons écrire :

$$\tilde{\Gamma} \det J + \det [J - \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}^T] = \tilde{\Gamma} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\begin{array}{c} \\ J \\ \end{array} \right) \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{u}_1 & \left(\begin{array}{c} \\ J - \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}^T \\ \end{array} \right) \\ \vdots & & & & \\ \tilde{u}_N & & & & \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

L'ajout de v_j fois la première colonne à chaque autre colonne j laisse le premier déterminant inchangé et conduit à

$$\tilde{\Gamma} \det J + \det [J - \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v}^T] = \tilde{\Gamma} \det \begin{bmatrix} 1 & v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ 0 & \left(\begin{array}{c} \\ J \\ \end{array} \right) \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ u_1 & \left(\begin{array}{c} \\ J \\ \end{array} \right) \\ \vdots & & & & \\ u_N & & & & \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Après avoir amené la constante $\tilde{\Gamma}$ dans la matrice en multipliant sa première colonne par $\tilde{\Gamma}$, on trouve simplement la somme de deux déterminants qui diffèrent par une seule colonne, dont la somme est trivialement donnée par :

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma} & v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ 0 & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & J & \\ & & \end{array} \right) \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ u_1 & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & J & \\ & & \end{array} \right) \\ \vdots & \\ u_N & \end{bmatrix} \\
 &= \det \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma} + 1 & v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ u_1 & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & J & \\ & & \end{array} \right) \\ \vdots & \\ u_N & \end{bmatrix}. \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'éq. (4.17) peut en effet être écrite comme :

$$\sum_{j=1}^M A_j \det [J - \mathbf{u}_j \mathbf{v}^T] = \det \begin{bmatrix} \Gamma & v_1 & v_2 & \dots & v_N \\ \tilde{u}_1 & \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & J & \\ & & \end{array} \right) \\ \vdots & \\ \tilde{u}_N & \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

avec le vecteur $\tilde{\mathbf{u}} \equiv \sum_{j=1}^M A_j \mathbf{u}_j$ et $\Gamma = \sum_{j=1}^M A_j$, avec \tilde{u}_a, v_a les $a^{\text{ièmes}}$ composantes des vecteurs correspondants.

Lemme 2

Pour une matrice J de taille $N \times N$, dont les éléments hors-diagonaux sont donnés par $J_{i,j} = \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_i}$, le déterminant de cette matrice ($\frac{1}{u - \epsilon_j}$) est égal au déterminant de la matrice actualisée par l'ajout d'une matrice de rang un :

$$\det \left[J - D \left(\frac{1}{u - \epsilon_a} \right) \right] = \det [J - \mathbf{u} \mathbf{v}^T], \tag{4.22}$$

avec les vecteurs $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u - \epsilon_1} \\ \frac{1}{u - \epsilon_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{u - \epsilon_N} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}^T = (1, 1, 1 \dots 1)$. Sous forme de matrice explicite, on a :

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} J_{11} - \frac{1}{u - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} & J_{22} - \frac{1}{u - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \dots & J_{NN} - \frac{1}{u - \epsilon_N} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} J_{11} - \frac{1}{u - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} - \frac{1}{u - \epsilon_1} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} - \frac{1}{u - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} - \frac{1}{u - \epsilon_2} & J_{22} - \frac{1}{u - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} - \frac{1}{u - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_N} - \frac{1}{u - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} - \frac{1}{u - \epsilon_N} & \dots & J_{NN} - \frac{1}{u - \epsilon_N} \end{pmatrix}. \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Preuve

La preuve du lemme 2 est relativement simple et implique simplement le fait que, pour des valeurs arbitraires de a, b, u , on a :

$$\frac{1}{a-b} \frac{u-a}{u-b} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{u-b}, \quad (4.24)$$

comme on le voit facilement en mettant le côté droit sur un dénominateur commun.

Pour une matrice J de taille $N \times N$ dont les éléments hors-diagonaux sont donnés par $J_{i,j} = \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_i}$, on a :

$$\det \left[J - D \left(\frac{1}{u - \epsilon_a} \right) \right] = \det \begin{pmatrix} J_{11} - \frac{1}{u - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} & J_{22} - \frac{1}{u - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \cdots & J_{NN} - \frac{1}{u - \epsilon_N} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

En multipliant chaque ligne $i = 1, \dots, N$ par $\frac{1}{u - \epsilon_i}$ et chaque colonne $j = 1, \dots, N$ par $(u - \epsilon_j)$, le déterminant reste invariant et peut alors s'écrire comme étant égal à

$$\det \begin{pmatrix} J_{11} - \frac{1}{u - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{u - \epsilon_2}{u - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \frac{u - \epsilon_N}{u - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \frac{u - \epsilon_1}{u - \epsilon_2} & J_{22} - \frac{1}{u - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \frac{u - \epsilon_N}{u - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_N} \frac{u - \epsilon_1}{u - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} \frac{u - \epsilon_2}{u - \epsilon_N} & \cdots & J_{NN} - \frac{1}{u - \epsilon_N} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

En utilisant la relation (4.24) pour chaque élément hors-diagonal, on obtient :

$$\det \left[J - D \left(\frac{1}{u - \epsilon_a} \right) \right] = \det \begin{pmatrix} J_{11} - \frac{1}{u - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} - \frac{1}{u - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} - \frac{1}{u - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} - \frac{1}{u - \epsilon_2} & J_{22} - \frac{1}{u - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} - \frac{1}{u - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_N} - \frac{1}{u - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} - \frac{1}{u - \epsilon_N} & \cdots & J_{NN} - \frac{1}{u - \epsilon_N} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

prouvant le lemme 2, à savoir que :

$$\det \left[J - D \left(\frac{1}{u - \epsilon_a} \right) \right] = \det [J - \mathbf{u}\mathbf{v}^T], \quad (4.28)$$

avec les vecteurs $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u - \epsilon_1} \\ \frac{1}{u - \epsilon_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{u - \epsilon_N} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}^T = (1, 1, 1, \dots, 1)$.

4.4 Facteur de forme selon \hat{z} par une autre approche

La forme originale proposée, discutée dans la section 4.2, nécessite la connaissance des dérivées des valeurs propres. L'expression n'est donc utilisable que pour les états propres puisque ces dérivées ne peuvent pas être définies pour des états de Bethe off-shell arbitraires.

Cette section propose donc une nouvelle représentation en déterminants pour les facteurs de forme des opérateurs $S_i^z + \frac{1}{2}$, qui est basée exclusivement sur les variables Λ (basées sur les valeurs propres) définies dans l'éq. (4.7). Les expressions seront donc également valables pour les états génériques off-shell. Pour simplifier les calculs, nous choisissons ici de travailler avec $S_i^z + \frac{1}{2}$ (dont les valeurs propres sont respectivement 0 et 1) au lieu de S_i^z lui-même (valeurs propres $\pm \frac{1}{2}$). En effet, l'action de $S_i^z + \frac{1}{2}$ sur un état pour lequel le spin i est dans son état \downarrow_i est de l'annihiler simplement en donnant 0.

La commutation répétée d'un opérateur B avec un produit de M opérateurs $\prod_{i=1}^M A_i$, conduit à :

$$B \left(\prod_{i=1}^M A_i \right) = \left(\prod_{i=1}^M A_i \right) B + \sum_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^{j-1} A_i \right) [B, A_j] \left(\prod_{i=j+1}^M A_i \right) \quad (4.29)$$

L'opérateur $S^+(\lambda_k)$ défini à l'équation 4.3 mène à :

$$\left[\left(S_i^z + \frac{1}{2} \right), S^+(\lambda_k) \right] = \frac{S_i^+}{\lambda_k - \epsilon_i}. \quad (4.30)$$

Compte tenu de la structure des états (eq. 4.2), le facteur de forme souhaité peut être écrit comme :

$$\langle \mu | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \sum_{\ell=1}^M \langle \uparrow \dots \uparrow | \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_i} \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) | \downarrow \dots \downarrow \rangle, \quad (4.31)$$

puisque $(S_i^z + \frac{1}{2}) | \downarrow \dots \downarrow \rangle = 0$ et que S_i^+ commute avec chaque $S^+(\lambda_k)$.

En développant explicitement les opérateurs $S^+(\lambda)$ et $S^+(\mu)$ et en gardant à l'esprit que pour les spins-1/2 nous avons $S_j^+ S_j^+ = 0$, un développement explicite du facteur de forme est donc donné par :

$$\langle \mu | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \sum_{\sigma \in P_i} \left(\prod_{k=1}^{N-M} \frac{1}{\mu_k - \epsilon_{\sigma_{k+M}}} \prod_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_{\sigma_k}} \right), \quad (4.32)$$

où P_i est l'ensemble de tous les arrangements ordonnés des indices $\{1, 2, \dots, N\}$ pour lesquels i **doit être** dans l'une des M premières positions. En effet, chacun des N spins doit être retourné vers le haut par l'un des opérateurs $S^+(\mu_k)$ ou $S^+(\lambda_k)$ de sorte que toutes les manières possibles d'associer chaque λ_k et chaque μ_k à un ϵ particulier doivent être additionnées. Cependant, on ne peut avoir qu'une seule racine de Bethe λ_k associée au spin i en raison du terme $\frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_i}$.

Tout comme la correspondance du produit scalaire au permanent de la matrice de Cauchy construite à partir des deux ensembles $\{\mu_1 \dots \mu_{N-M}, \lambda_1 \dots \lambda_M\}$ et $\{\epsilon_1 \dots \epsilon_N\}$ [33, 17] :

$$\begin{aligned} \langle \mu | \lambda \rangle &= \sum_{\sigma \in P} \left(\prod_{k=1}^{N-M} \frac{1}{\mu_k - \epsilon_{\sigma_{k+M}}} \prod_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_{\sigma_k}} \right) \\ &= \text{Perm} \left(\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_1} & \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\mu_{N-M} - \epsilon_1} & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_M - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_2} & \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\mu_{N-M} - \epsilon_2} & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_2} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_M - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_N} & \cdots & \frac{1}{\mu_{N-M} - \epsilon_N} & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_N} & \cdots & \frac{1}{\lambda_M - \epsilon_N} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

avec P est l'ensemble de tous les arrangements ordonnés des indices $\{1, 2 \dots N\}$, l'expression explicite du facteur de forme peut donc également être écrite comme un permanent :

$$\langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \text{Perm} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_M - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_2} & \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\mu_{N-M} - \epsilon_2} & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_2} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_M - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_N} & \cdots & \frac{1}{\mu_{N-M} - \epsilon_N} & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_N} & \cdots & \frac{1}{\lambda_M - \epsilon_N} \end{array} \right), \quad (4.34)$$

correspondant à la représentation en permanent du produit scalaire à partir duquel les éléments de la matrice associant une racine μ (de l'état dual) à l'indice i du spin pour lequel on calcule le facteur de forme (choisi ci-dessus comme $i = 1$), ont été mis à zéro.

À titre d'exemple simple, pour des spins $N = 4$ dans le secteur de magnétisation défini par $M = 2$ racines de Bethe : λ_1, λ_2 et donc $N - M = 2$ racines de Bethe duales : μ_1, μ_2 nous avons, pour le facteur de forme du spin $i = 1$:

$$\begin{aligned} \langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle &= \left(\frac{\mathbf{1}}{\lambda_1 - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_2} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_3} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_4} \right) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\lambda_1 - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_2} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_4} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_3} \right) \\ &+ \left(\frac{\mathbf{1}}{\lambda_1 - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_3} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_2} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_4} \right) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\lambda_1 - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_3} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_4} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_2} \right) \\ &+ \left(\frac{\mathbf{1}}{\lambda_1 - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_4} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_2} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_3} \right) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\lambda_1 - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_4} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_3} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_2} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_2} \frac{\mathbf{1}}{\lambda_2 - \epsilon_1} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_3} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_4} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_2} \frac{\mathbf{1}}{\lambda_2 - \epsilon_1} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_4} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_3} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_3} \frac{\mathbf{1}}{\lambda_2 - \epsilon_1} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_2} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_4} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_3} \frac{\mathbf{1}}{\lambda_2 - \epsilon_1} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_4} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_2} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_4} \frac{\mathbf{1}}{\lambda_2 - \epsilon_1} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_2} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_3} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_4} \frac{\mathbf{1}}{\lambda_2 - \epsilon_1} \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_3} \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_2} \right), \end{aligned} \quad (4.35)$$

où les caractères gras sont utilisés pour souligner le fait que seules les racines λ_i sont appariées avec ϵ_1 .

Puisque le facteur de forme désiré (pour le spin i) peut être trouvé en partant du produit scalaire $\langle \mu | \lambda \rangle$ mais en ne gardant que les termes dans lesquels une des racines λ_j est appariée avec ϵ_i , on peut donc l'écrire explicitement comme la somme de tous les termes possibles ayant un pôle à $\lambda_j = \epsilon_i$. En choisissant $i = 1$, sans perte de généralité, le facteur de forme est donc donné par :

$$\langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \sum_{j=1}^M \frac{\text{Res}_{\lambda_j, \epsilon_1} \langle \mu | \lambda \rangle}{\lambda_j - \epsilon_1}. \quad (4.36)$$

D'après la représentation en déterminants du produit scalaire (déjà donnée à l'équation 4.10) :

$$\langle \mu | \lambda \rangle = \det \begin{pmatrix} J_{11} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} & J_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_3} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & J_{33} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \cdots & J_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

avec $J_{aa} = \Lambda_a^\mu + \Lambda_a^\lambda - \sum_{c \neq a} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_a}$, on peut facilement évaluer le résidu à $\lambda_j = \epsilon_1$ puisque seuls les éléments diagonaux dépendent de λ_j . Les pôles en ϵ_1 n'apparaissent donc que dans l'élément diagonal J_{11} et on a :

$$\text{Res}_{\lambda_j, \epsilon_1} \langle \mu | \lambda \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lim_{\lambda_j \rightarrow \epsilon_1} J_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \lim_{\lambda_j \rightarrow \epsilon_1} J_{33} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \cdots & \lim_{\lambda_j \rightarrow \epsilon_1} J_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Les limites sont également simples à évaluer puisque, dans J_{aa} , cela conduit simplement à l'annulation du terme $\frac{1}{\lambda_j - \epsilon_a}$ (présent dans Λ_a^λ) et du terme $\frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_a}$, présent dans la somme sur ϵ_c :

$$\lim_{\lambda_j \rightarrow \epsilon_1} J_{aa} = \Lambda_a^\mu + \Lambda_a^\lambda - \sum_{c \neq (a,1)} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_a} - \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_a} \equiv \tilde{J}_{aa} - \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_a}, \quad (4.39)$$

où $\tilde{J}_{aa} = J_{aa} + \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_a}$. Le facteur de forme peut donc s'écrire comme suit :

$$\langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_1} \begin{pmatrix} \tilde{J}_{22} - \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} - \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} - \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_N} \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

où

$$\tilde{J} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{J}_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(\lambda_j) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_N} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Le lemme 2, donné dans l'eq. (4.22), nous permet alors de l'écrire comme :

$$\langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_1} \det \left[\tilde{J} - \mathbf{u}_j \mathbf{v}^T \right], \quad (4.42)$$

avec les vecteurs $u_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_3} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_N} \end{pmatrix}$ et $v^T = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$. Le lemme 1, tel qu'énoncé dans l'éq. (4.21), conduit alors à :

$$\langle \mu | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \det \begin{pmatrix} \Gamma & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{u}_2 & \tilde{J}_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \tilde{u}_3 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{u}_4 & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

avec $\Gamma \equiv \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_1} = \Lambda_1^\lambda$ et $\tilde{u}_a = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_a}$.

Pour l'écrire comme un déterminant qui dépend exclusivement des variables basées sur les valeurs propres, il suffit de voir que :

$$\tilde{u}_a = \sum_{j=1}^M \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_a} = \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{\lambda_j - \epsilon_a} - \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_1} \right) \frac{1}{\epsilon_a - \epsilon_1} = \frac{\Lambda_a^\lambda - \Lambda_1^\lambda}{\epsilon - a - \epsilon_1}, \quad (4.44)$$

et donc

$$\langle \mu | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \det \begin{pmatrix} \Lambda_1^\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\Lambda_2^\lambda - \Lambda_1^\lambda}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \tilde{J}_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda - \Lambda_1^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda - \Lambda_1^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

qui fournit explicitement une représentation sous forme d'un déterminant unique dont les entrées ne dépendent bien que des valeurs propres des charges conservées. On peut en fournir une représentation plus simple en additionnant $\frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_1}$ fois la première ligne à chacune des autres lignes $j > 1$ de la matrice.

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_1^\lambda}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\Lambda_2^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \tilde{J}_{22} + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \tilde{J}_{33} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \cdots & \tilde{J}_{NN} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_1^\lambda}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\Lambda_2^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & J_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & J_{33} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \cdots & J_{NN} \end{pmatrix}, \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

puisque $\tilde{J}_{aa} = J_{aa} - \frac{1}{\epsilon_a - \epsilon_1}$. En considérant que $\frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_{k'}} + \frac{1}{\epsilon_{k'} - \epsilon_1} = \frac{(\epsilon_k - \epsilon_1)}{(\epsilon_k - \epsilon_{k'}) (\epsilon_{k'} - \epsilon_1)}$, on a :

$$\langle \mu | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \det \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_1^\lambda}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\Lambda_2^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & J_{22} & \frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{(\epsilon_3 - \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1)} & \cdots & \frac{\epsilon_N - \epsilon_1}{(\epsilon_N - \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_3 - \epsilon_1)} & J_{33} & \cdots & \frac{\epsilon_N - \epsilon_1}{(\epsilon_N - \epsilon_3)(\epsilon_3 - \epsilon_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(\epsilon_2 - \epsilon_N)(\epsilon_N - \epsilon_1)} & \frac{\epsilon_3 - \epsilon_1}{(\epsilon_3 - \epsilon_N)(\epsilon_N - \epsilon_1)} & \cdots & J_{NN} \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

qui, après avoir multiplié les lignes $i = 2, \dots, N$ par $\epsilon_i - \epsilon_1$ et les colonnes $j = 2, \dots, N$ par $\frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_1}$ laissant le déterminant invariant, donne finalement la forme simple :

$$\langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \det \begin{pmatrix} \frac{\Lambda_1^\lambda}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \\ \frac{\Lambda_2^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & J_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & J_{33} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \cdots & J_{NN} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

à savoir l'expression en déterminant du produit scalaire $\langle \mu | \lambda \rangle$, avec $J_{aa} = \Lambda_a^\mu + \Lambda_a^\lambda - \sum_{c \neq a} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_a}$,

mais dont la première colonne a été remplacée par $\begin{pmatrix} \Lambda_1^\lambda \\ \Lambda_2^\lambda \\ \Lambda_3^\lambda \\ \vdots \\ \Lambda_N^\lambda \end{pmatrix}$. L'ordre dans lequel les spins sont indexés étant sans importance, le fait de calculer S_1^z a été fait sans perte de généralité, et donc :

$$\langle \mu | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \det J_i \quad (4.49)$$

où J_i est simplement la matrice J (éq. 4.37) dont le déterminant donne le produit scalaire (4.37), avec la colonne i remplacée par $J_{ji} \rightarrow \Lambda_j^\lambda$. Contrairement aux déterminants de Slavnov qui sont exprimés en termes de racines de Bethe, l'expression proposée est valable pour des ensembles arbitraires $\{\mu_1 \dots \mu_{N-M}\}$ et $\{\lambda_1 \dots \lambda_M\}$. Il n'est pas nécessaire que l'un de ces ensembles soit on-shell, c'est-à-dire qu'il définisse un état propre du système.

Comme indiqué dans la section 4.2, l'éq. (4.12), pour les états on-shell tels que Λ_i^λ et Λ_i^μ définissent deux états propres distincts ($n \neq m$), les différents facteurs de forme sont liés de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \langle \phi_m | S_i^z - S_j^z | \phi_n \rangle &= \left(\frac{r_i^n - r_i^m}{r_j^n - r_j^m} - 1 \right) \langle \phi_m | S_j^z | \phi_n \rangle. \\ \langle \phi_m | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) - \left(S_j^z + \frac{1}{2} \right) | \phi_n \rangle &= \left(1 - \frac{r_i^n - r_i^m}{r_j^n - r_j^m} \right) \langle \phi_m | \left(S_j^z + \frac{1}{2} \right) | \phi_n \rangle, \\ \det J_i - \det J_j &= \left(1 - \frac{r_i^n - r_i^m}{r_j^n - r_j^m} \right) \det J_j, \\ \det J_i &= \left(2 - \frac{r_i^n - r_i^m}{r_j^n - r_j^m} \right) \det J_j. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Par conséquent, lorsqu'on traite des états propres du système, le calcul d'un seul facteur de forme local (un seul déterminant) devient suffisant pour accéder à tous les facteurs de forme entre ces deux états propres.

Pour être complet, précisons que les facteurs de forme S_i^+ , qui sont non-nuls uniquement entre des états μ et λ qui diffèrent par une excitation de spin, peuvent tous être calculés directement à l'aide des déterminants du produit scalaire, comme indiqué explicitement dans [11, 33, 34, 104].

D'autre part, les facteurs de forme S_i^- sont également calculables sous forme de produits scalaires, mais seulement pour les états propres du système. En effet, il est garanti qu'un état propre $|\lambda\rangle$ a également une représentation duale $|\mu\rangle \propto |\lambda\rangle$ qui permettrait le calcul des facteurs de forme pertinents comme $\langle \downarrow \dots \downarrow | \left(\prod_{k=1}^{M+1} S^-(\lambda_k) \right) S_i^- \left(\prod_{k=1}^{N-M} S^-(\mu_k) \right) | \uparrow \dots \uparrow \rangle$. Cependant, un état de Bethe off-shell construit avec des paramètres arbitraires λ n'a généralement pas de représentation duale. Néanmoins, pour les états de Bethe génériques, on peut remarquer d'emblée que

$$\begin{aligned} &\langle \uparrow \dots \uparrow | \left(\prod_{k=1}^{N-M} S^+(\mu_k) \right) S_i^- \prod_{k=1}^{M+1} S^+(\lambda_k) | \downarrow \dots \downarrow \rangle \\ &= \langle \uparrow \dots \uparrow \uparrow_{N+1} | \left(\prod_{k=1}^{N-M} S^+(\mu_k) \right) S_{N+1}^+ S_i^- \prod_{k=1}^{M+1} S^+(\lambda_k) | \downarrow \dots \downarrow \downarrow_{N+1} \rangle, \end{aligned} \quad (4.51)$$

lorsqu'on introduit un spin auxiliaire d'indice $N+1$. Par conséquent, lorsqu'ils seront dérivés dans la section 4.6, les facteurs de forme à deux points $S_i^+ S_j^-$ fourniront directement une représentation pour le facteur de forme à un point S_j^- même pour les états off-shell.

4.5 Facteurs de forme à deux points suivant \hat{z}

En utilisant des idées similaires à celles de la section 4.4, on peut maintenant trouver l'expression du déterminant basés sur les valeurs propres, des facteurs de forme ou fonctions de corrélation à deux points :

$$\langle \tilde{\phi}_m | \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_j^z + \frac{1}{2} \right) | \phi_n \rangle, \quad (4.52)$$

comme nous allons le montrer dans cette section.

Une fois encore, sans perte de généralité, nous choisissons d'examiner le facteur de forme $\{i, j\} = \{1, 2\}$, qui sera immédiatement généralisable à toute paire $\{i, j\}$ en réorganisant simplement l'ordre des différents spins en échangeant $\epsilon_i \leftrightarrow \epsilon_1$ et $\epsilon_j \leftrightarrow \epsilon_2$. La commutation des deux opérateurs vers la droite conduit à l'expression explicite suivante pour le facteur de forme souhaité.

$$\begin{aligned} & \langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^M \sum_{\ell'=1(\neq \ell)}^M \langle \uparrow \dots \uparrow | \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_1^+}{\lambda_\ell - \epsilon_1} \frac{S_2^+}{\lambda_{\ell'} - \epsilon_2} \left(\prod_{k=1(\neq \ell, \ell')}^M S^+(\lambda_k) \right) | \downarrow \dots \downarrow \rangle, \end{aligned} \quad (4.53)$$

Une fois de plus, il existe une représentation simple sous forme de permanent, définie en mettant à zéro les éléments de la matrice de Cauchy dans laquelle une racine duale (μ) est appariée avec soit ϵ_1 soit ϵ_2 :

$$\begin{aligned} & \langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle \\ &= \text{Perm} \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_1} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_1} & \dots & \frac{1}{\lambda_{M-1} - \epsilon_1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_2} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\lambda_{M-1} - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_3} & \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\mu_{N-M} - \epsilon_3} & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_3} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\lambda_{M-1} - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\mu_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\mu_2 - \epsilon_N} & \dots & \frac{1}{\mu_{N-M} - \epsilon_N} & \frac{1}{\lambda_1 - \epsilon_N} & \frac{1}{\lambda_2 - \epsilon_N} & \dots & \frac{1}{\lambda_{M-1} - \epsilon_N} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (4.54)$$

Le facteur de forme à deux points, tel qu'il est donné dans (4.53), correspond donc au facteur de forme à un point ($S_i^z + \frac{1}{2}$) dont nous ne retenons que les termes dans lesquels une racine de Bethe λ est appariée au ϵ_j supplémentaire. On peut donc l'écrire comme une somme sur chaque pôle à $\lambda_k = \epsilon_j$ de l'expression précédente. Par conséquent, en choisissant que $i = 2$ et $j = 1$, nous avons

$$\langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \sum_{k=1}^M \frac{\text{Res}_{\lambda_k = \epsilon_1} [\langle \mu | \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle]}{\lambda_k - \epsilon_1}. \quad (4.55)$$

En raison de la structure simple des pôles de la fonction à un point, cette expression se résume à la somme proposée qui prend en compte toutes les possibilités pour l'un des $\{\lambda_1 \dots \lambda_M\}$ d'être apparié avec ϵ_1 . En prenant le résidu de $\langle \mu | \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle$, on s'assure qu'aucune racine de Bethe duale μ n'est également appariée à ϵ_2 . Évidemment, une expression équivalente pourrait être obtenue à partir des résidus à $\lambda_k = \epsilon_2$ du facteur de forme ($S_1^z + \frac{1}{2}$). A partir des déterminants à

un point obtenus à l'éq. (4.48), on peut facilement calculer le résidu puisque les pôles à $\lambda_k = \epsilon_1$ apparaissent exclusivement sur la première ligne de la matrice :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda_k=\epsilon_1} \left[\langle \mu | \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle \right] &= \text{Res}_{\lambda_k=\epsilon_1} \det \begin{pmatrix} J_{11} & \Lambda_1^\lambda & \frac{1}{\epsilon_3-\epsilon_1} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N-\epsilon_1} \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_2} & \Lambda_2^\lambda & \frac{1}{\epsilon_3-\epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N-\epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_3} & \Lambda_3^\lambda & J_{33} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N-\epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_N} & \Lambda_N^\lambda & \frac{1}{\epsilon_3-\epsilon_N} & \cdots & J_{NN} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_2} & \Lambda_2^\lambda - \frac{1}{\lambda_k-\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3-\epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N-\epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_3} & \Lambda_3^\lambda - \frac{1}{\lambda_k-\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_3} & \tilde{J}_{33} - \frac{1}{\lambda_k-\epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N-\epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_N} & \Lambda_N^\lambda - \frac{1}{\lambda_k-\epsilon_N} + \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3-\epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} - \frac{1}{\lambda_k-\epsilon_N} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

puisque le pôle à $\lambda_k = \epsilon_1$ n'apparaît que dans les éléments de matrice J_{11} et Λ_1^λ , et en utilisant le fait que $\lim_{\lambda_k \rightarrow \epsilon_1} J_{aa} = J_{aa} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} + \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_a} = \tilde{J}_{aa} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a}$ tandis que $\lim_{\lambda_k \rightarrow \epsilon_1} \Lambda_a^\lambda = \Lambda_a^\lambda - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} + \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_a}$.

En soustrayant une colonne sur deux $j = 1, 3, 4, 5 \dots N$ de la seconde, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda_k=\epsilon_1} \left[\langle \mu | \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle \right] &= \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_2} & \Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3-\epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N-\epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_3} & -\Lambda_3^\mu + \frac{1}{\epsilon_2-\epsilon_3} & \tilde{J}_{33} - \frac{1}{\lambda_k-\epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N-\epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_1-\epsilon_N} & -\Lambda_N^\mu + \frac{1}{\epsilon_2-\epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3-\epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} - \frac{1}{\lambda_k-\epsilon_N} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

puisque $\Lambda_a^\lambda - \tilde{J}_{aa} - \sum_{c \neq (1,a)} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_1} = -\Lambda_a^\mu$. En raison des zéros sur la première ligne, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 & \text{Res}_{\lambda_k=\epsilon_1} \left[\langle \mu | \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle \right] \\
 &= \det \begin{pmatrix} \Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ -\Lambda_3^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Lambda_N^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_N} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} \frac{\lambda_k - \epsilon_3}{\lambda_k - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \frac{\lambda_k - \epsilon_N}{\lambda_k - \epsilon_2} \\ \left(-\Lambda_3^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} \right) \frac{\lambda_k - \epsilon_2}{\lambda_k - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \frac{\lambda_k - \epsilon_N}{\lambda_k - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\Lambda_N^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} \right) \frac{\lambda_k - \epsilon_2}{\lambda_k - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} \frac{\lambda_k - \epsilon_3}{\lambda_k - \epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_N} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \\ \left(-\Lambda_3^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} \right) \frac{\lambda_k - \epsilon_2}{\lambda_k - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\Lambda_N^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} \right) \frac{\lambda_k - \epsilon_2}{\lambda_k - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_N} \end{pmatrix}. \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

ceci, après avoir multiplié les colonnes par $\lambda_k - \epsilon_i$ et les lignes par $\frac{1}{\lambda_k - \epsilon_i}$ comme dans les sections précédentes et 4.47. Enfin, l'expression peut être développée le long de la première colonne comme une somme sur les $N - 1$ déterminants des matrices M_i^k construites après avoir retiré la première colonne et la i^{ieme} ligne (étiquetées ici de 2 à N) :

$$\begin{aligned}
 \text{Res}_{\lambda_k=\epsilon_1} \left[\langle \mu | \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle \right] &= \left(\Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \right) \det M_2^k \\
 &+ \sum_{\ell=3}^N (-1)^\ell \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \frac{\lambda_k - \epsilon_2}{\lambda_k - \epsilon_\ell} \det M_\ell^k. \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

Toutes les matrices résultantes (pour n'importe quelle λ_k donnée) seront, ici encore, une simple mise à jour de rang un d'une matrice commune permettant d'effectuer explicitement la somme sur k . On appelle M_ℓ la matrice $N - 2 \times N - 2$ obtenue après avoir retiré la ligne ℓ (numérotée de 2 à N) de la matrice $N - 1 \times N - 2$:

$$M \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \tilde{J}_{33} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} & \cdots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} & \cdots & \tilde{J}_{NN} \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

on calcule :

$$\begin{aligned} \langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle &= \sum_{k=1}^M \left(\Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \right) \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \det [M_2 - \mathbf{u}_2(\lambda_k) \mathbf{v}^T] \\ &+ \sum_{\ell=3}^N (-1)^\ell \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \sum_{k=1}^M \frac{(\lambda_k - \epsilon_2)}{(\lambda_k - \epsilon_\ell)(\lambda_k - \epsilon_1)} \det [M_\ell - \mathbf{u}_\ell(\lambda_k) \mathbf{v}^T], \end{aligned} \quad (4.61)$$

avec les vecteurs $\mathbf{u}_2(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_3} \\ \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_4} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_N} \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_\ell(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_{k-1}} \\ \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_{k+1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda_j - \epsilon_N} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}^T = (1, 1, 1 \dots 1)$.

Les deux sommes sur k peuvent maintenant être effectuées en utilisant le lemme 1 (eq. (4.21)) pour donner :

$$\langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \sum_{\ell=2}^N (-1)^\ell \det \left[\begin{array}{c} \Gamma_\ell \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \\ \left(\mathbf{u}_\ell(\lambda_j) \right) \quad \left(\begin{array}{c} M_\ell \end{array} \right) \end{array} \right], \quad (4.62)$$

à savoir, une somme de $N - 1$ déterminants de matrices carrées à $(N - 1)$ dimensions. En échangeant la ligne numéro 2 (la première) pour qu'elle devienne la ligne ℓ , on peut réabsorber les signes et écrire chacune des matrices comme :

$$\begin{aligned} \langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_2^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle &= \det \left[\begin{array}{ccccc} \Gamma_2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (\tilde{u}_2)_3 & \tilde{J}_{33} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ (\tilde{u}_2)_4 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_4} & \tilde{J}_{44} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{u}_2)_N & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{array} \right] \\ &+ \sum_{\ell=3}^N \det \left[\begin{array}{ccccc} (\tilde{u}_\ell)_2 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ (\tilde{u}_\ell)_3 & \tilde{J}_{33} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ (\tilde{u}_\ell)_4 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_4} & \tilde{J}_{44} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{u}_\ell)_{\ell-1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_{\ell-1}} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_{\ell-1}} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_{\ell-1}} \\ \Gamma_\ell & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (\tilde{u}_\ell)_{\ell+1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_{\ell+1}} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_{\ell+1}} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_{\ell+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{u}_\ell)_N & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

Les expressions explicites pour chaque Γ_a et chaque $(\tilde{u}_a)_b$ seront données ci-dessous et on montrera qu'elles peuvent toutes être écrites exclusivement en termes de variables basées sur les valeurs propres.

On a d'abord

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2 &= \sum_{k=1}^M \left(\Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \right) \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \\
 &= \Lambda_2^\lambda \Lambda_1^\lambda - \Lambda_1^\lambda \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \\
 &= \Lambda_2^\lambda \Lambda_1^\lambda - \Lambda_1^\lambda \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) - \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \right) \\
 &= \Lambda_2^\lambda \Lambda_1^\lambda - \Lambda_1^\lambda \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) - \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} (\Lambda_2^\lambda - \Lambda_1^\lambda); \tag{4.64}
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\ell &= \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \sum_{k=1}^M \frac{(\lambda_k - \epsilon_2)}{(\lambda_k - \epsilon_\ell)(\lambda_k - \epsilon_1)} \\
 &= \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \sum_{k=1}^M \left(\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_\ell)(\lambda_k - \epsilon_1)} + \frac{(\epsilon_\ell - \epsilon_2)}{(\lambda_k - \epsilon_\ell)(\epsilon_\ell - \epsilon_1)} \right) \\
 &= \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_\ell} \Lambda_1^\lambda + \frac{\epsilon_\ell - \epsilon_2}{\epsilon_\ell - \epsilon_1} \Lambda_\ell^\lambda \right). \tag{4.65}
 \end{aligned}$$

De plus, les différentes composantes de \tilde{u} sont données par

$$\begin{aligned}
 (\tilde{u}_2)_a &= \sum_{k=1}^M \left(\Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \right) \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \\
 &= \left[\Lambda_2^\lambda - \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \\
 &= \left[\Lambda_2^\lambda - \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) \right] \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \right) \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_a} \\
 &\quad - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_a} + \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_2} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_1} \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_a} + \frac{1}{\epsilon_a - \epsilon_2} \frac{1}{\epsilon_a - \epsilon_1} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \right) \\
 &= \left[\Lambda_2^\lambda - \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) \right] \frac{\Lambda_1^\lambda - \Lambda_a^\lambda}{\epsilon_1 - \epsilon_a} \\
 &\quad - \left(\frac{\Lambda_2^\lambda}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_a)} + \frac{\Lambda_1^\lambda}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_a)} + \frac{\Lambda_a^\lambda}{(\epsilon_a - \epsilon_2)(\epsilon_a - \epsilon_1)} \right) \tag{4.66}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (\tilde{u}_\ell)_a &= \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \sum_{k=1}^M \frac{(\lambda_k - \epsilon_2)}{(\lambda_k - \epsilon_\ell)(\lambda_k - \epsilon_1)} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \\
 &= \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \sum_{k=1}^M \left(\frac{(\epsilon_\ell - \epsilon_2)}{(\lambda_k - \epsilon_\ell)(\epsilon_\ell - \epsilon_1)(\epsilon_\ell - \epsilon_a)} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_\ell)(\lambda_k - \epsilon_1)(\epsilon_1 - \epsilon_a)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\epsilon_a - \epsilon_2)}{(\epsilon_a - \epsilon_\ell)(\epsilon_a - \epsilon_1)(\lambda_k - \epsilon_a)} \right) \\
 &= \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \left(\frac{\Lambda_\ell^\lambda (\epsilon_\ell - \epsilon_2)}{(\epsilon_\ell - \epsilon_1)(\epsilon_\ell - \epsilon_a)} + \frac{\Lambda_1^\lambda (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(\epsilon_1 - \epsilon_\ell)(\epsilon_1 - \epsilon_a)} + \frac{\Lambda_a^\lambda (\epsilon_a - \epsilon_2)}{(\epsilon_a - \epsilon_\ell)(\epsilon_a - \epsilon_1)} \right)
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Puisque tous les éléments de la matrice M (et donc des matrices \tilde{M}_a) sont tous donnés également en termes de variables basées sur les valeurs propres, l'éq. (4.67) fournit une représentation en déterminants basée sur les valeurs propres, des facteurs de forme de deux points $S^z + \frac{1}{2}$.

Étant donné qu'elle est explicitement donnée pour le facteur de forme $\{i, j\} = \{1, 2\}$, le calcul d'un facteur de forme générique $\{i, j\}$ est facilement réalisable en réordonnant simplement les paramètres d'inhomogénéité, donc en remplaçant ϵ_1 et ϵ_2 par ϵ_i et ϵ_j (et vice-versa) et en utilisant exactement la même expression.

4.6 Facteurs de forme à deux $S_i^+ S_j^-$

Le calcul des facteurs de forme $S_i^+ S_j^-$ se font de façon analogue, d'abord en commutant S_j^- à droite, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \mu | S_i^+ S_j^- | \lambda \rangle &= \sum_{\ell=1}^M \langle \mu | S_i^+ \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} S^+(\lambda_k) \right) [S_j^-, S^+(\lambda_\ell)] \left(\prod_{k=\ell+1}^M S^+(\lambda_k) \right) | \downarrow \dots \downarrow \rangle \\
 &= \sum_{\ell=1}^M \langle \mu | S_i^+ \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} S^+(\lambda_k) \right) \frac{-2S_j^z}{\lambda_\ell - \epsilon_j} \left(\prod_{k=\ell+1}^M S^+(\lambda_k) \right) | \downarrow \dots \downarrow \rangle,
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

ce qui, après avoir commuté tous les opérateurs S^z à droite, conduit à nouveau à :

$$\begin{aligned}
 \langle \mu | S_i^+ S_j^- | \lambda \rangle &= -2 \sum_{\ell=1}^M \sum_{\ell' > \ell}^M \langle \mu | \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_j} \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} S^+(\lambda_k) \right) \\
 &\quad \cdot \left(\prod_{k=\ell+1}^{\ell'-1} S^+(\lambda_k) \right) [S_j^z, S^+(\lambda_{\ell'})] \left(\prod_{k=\ell'+1}^M S^+(\lambda_k) \right) | \downarrow \dots \downarrow \rangle \\
 &\quad - 2 \sum_{\ell=1}^M \langle \uparrow \dots \uparrow | \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_j} \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) S_j^z | \downarrow \dots \downarrow \rangle
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \sum_{\ell=1}^M \sum_{\ell'>\ell}^M \langle \mu | \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_j} \left(\prod_{k=1}^{\ell-1} S^+(\lambda_k) \right) \\
 &\quad \cdot \left(\prod_{k=\ell+1}^{\ell'-1} S^+(\lambda_k) \right) \frac{S_j^+}{\lambda_{\ell'} - \epsilon_j} \left(\prod_{k=\ell'+1}^M S^+(\lambda_k) \right) |\downarrow \dots \downarrow \rangle \\
 &\quad + \sum_{\ell=1}^M \langle \mu | \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_j} \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) |\downarrow \dots \downarrow \rangle
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \mu | S_i^+ S_j^- | \lambda \rangle &= \sum_{\ell=1}^M \langle \uparrow \dots \uparrow | \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_j} \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) |\downarrow \dots \downarrow \rangle \\
 &- \sum_{\ell=1}^M \sum_{\ell'=1(\neq \ell)}^M \langle \uparrow \dots \uparrow | \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_j} \frac{S_j^+}{\lambda_{\ell'} - \epsilon_j} \left(\prod_{k=1(\neq \ell, \ell')}^M S^+(\lambda_k) \right) |\downarrow \dots \downarrow \rangle.
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Le second terme donne une expression similaire à celle du facteur de forme S^z à deux points (4.53), mais avec les racines $\lambda_\ell, \lambda_{\ell'}$ ayant toutes deux un pôle à ϵ_j (au lieu d'en avoir un à ϵ_j et un à ϵ_i). Le premier terme, en revanche, est équivalent au facteur de forme S^z (4.31) avec le pôle à $\lambda_\ell = \epsilon_j$ (au lieu de ϵ_i).

Les deux termes peuvent donc être obtenus comme des limites de $\epsilon_i \rightarrow \epsilon_j$ des expressions en déterminants trouvées dans les sections précédentes, respectivement $(S_i^z + \frac{1}{2}) (S_j^z + \frac{1}{2})$ pour le premier terme et $(S_i^z + \frac{1}{2})$ pour le second. Bien qu'il puisse sembler à première vue que cette limite affecte les opérateurs $S^+(\lambda)$ et $S^+(\mu)$, la présence explicite de l'opérateur S^+i dans les deux termes signifie que la partie $\frac{S_i^+}{u-\epsilon_i}$ de tout $S^+(u)$ n'a aucun impact sur l'expression puisque $(S_i^+)^2 = 0$ pour les spins-1/2.

En choisissant à nouveau, sans perte de généralité, $i = 1, j = 2$, le premier terme de l'équation précédente est facilement évalué en prenant la limite $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ de :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\ell=1}^M \langle \uparrow \dots \uparrow | \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_i^+}{\lambda_\ell - \epsilon_i} \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) |\downarrow \dots \downarrow \rangle \\
 &= \langle \mu | \left(S_1^z + \frac{1}{2} \right) | \lambda \rangle = \det \begin{pmatrix} \Lambda_1^\lambda & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_1} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_1} \\ \Lambda_2^\lambda & J_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \Lambda_3^\lambda & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & J_{33} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_N^\lambda & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \dots & J_{NN} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

En choisissant à nouveau $i = 1, j = 2$, l'expression précédente pour le facteur à deux points (4.63) est facilement évaluée dans la limite $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ puisque seuls les éléments de la première colonne dépendent en fait de ϵ_1 .

$$\begin{aligned}
 \langle \mu | S_1^+ S_2^- | \lambda \rangle &= -\det \begin{bmatrix} \gamma_2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (\tilde{w}_2)_3 & \tilde{J}_{33} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ (\tilde{w}_2)_4 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_4} & \tilde{J}_{44} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{w}_2)_N & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{bmatrix} \\
 &- \sum_{\ell=3}^N \det \begin{bmatrix} (\tilde{w}_\ell)_2 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ (\tilde{w}_\ell)_3 & \tilde{J}_{33} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ (\tilde{w}_\ell)_4 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_4} & \tilde{J}_{44} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{w}_\ell)_{\ell-1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_{\ell-1}} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_{\ell-1}} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_{\ell-1}} \\ \gamma_\ell & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (\tilde{w}_\ell)_{\ell+1} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_{\ell+1}} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_{\ell+1}} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_{\ell+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{w}_\ell)_N & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{bmatrix} \\
 &+ \sum_{\ell=1}^M \langle \uparrow \dots \uparrow \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_1^+}{\lambda_\ell - \epsilon_2} \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) \downarrow \dots \downarrow \rangle,
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

avec $\gamma_a = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2} \Gamma_a$ et $(\tilde{w}_a)_b = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2} (\tilde{u}_a)_b$. Ils sont donc explicitement donnés par :

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \sum_{k=1, M} \left(\Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1, 2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \right) \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \\
 &= (\Lambda_2^\lambda)^2 - \Lambda_2^\lambda \sum_{c \neq 1, 2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{(\lambda_k - \epsilon_2)^2} \\
 &= (\Lambda_2^\lambda)^2 - \Lambda_2^\lambda \left(\sum_{c \neq 1, 2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) - \frac{\partial \Lambda_2^\lambda}{\partial \epsilon_2}.
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

aussi bien que

$$\gamma_\ell = \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_\ell} = -(\Lambda_\ell^\mu)^2 + \frac{\Lambda_\ell^\mu}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell}. \tag{4.75}$$

Dans la même limite, les différentes composantes de \tilde{w} deviennent :

$$\begin{aligned}
 (\tilde{w}_2)_a &= \sum_{k=1}^M \left(\Lambda_2^\lambda - \sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \right) \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \\
 &= \left[\Lambda_2^\lambda - \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) \right] \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \\
 &= \left[\Lambda_2^\lambda - \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) \right] \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \right) \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_a} \\
 &\quad - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} \left(\frac{1}{\lambda_k - \epsilon_2} - \frac{1}{\lambda_k - \epsilon_a} \right) \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_a} \right) \\
 &= \left[\Lambda_2^\lambda - \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) \right] \frac{\Lambda_2^\lambda - \Lambda_a^\lambda}{\epsilon_2 - \epsilon_a} \\
 &\quad - \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_a} \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{(\lambda_k - \epsilon_2)^2} - \frac{1}{(\epsilon_a - \epsilon_2)(\lambda_k - \epsilon_a)} - \frac{1}{(\lambda_k - \epsilon_2)(\epsilon_2 - \epsilon_a)} \right) \\
 &= \left[\Lambda_2^\lambda - \left(\sum_{c \neq 1,2} \frac{1}{\epsilon_c - \epsilon_2} \right) \right] \frac{\Lambda_2^\lambda - \Lambda_a^\lambda}{\epsilon_2 - \epsilon_a} + \left(-\frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_a} \frac{\partial \Lambda_2^\lambda}{\partial \epsilon_2} + \frac{\Lambda_2^\lambda - \Lambda_a^\lambda}{(\epsilon_2 - \epsilon_a)^2} \right) \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

et

$$(\tilde{w}_\ell)_a = \left(-\Lambda_\ell^\mu + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_\ell} \right) \left(\frac{\Lambda_\ell^\lambda}{\epsilon_\ell - \epsilon_a} + \frac{\Lambda_2^\lambda}{\epsilon_a - \epsilon_\ell} \right). \quad (4.77)$$

Finalement, le dernier terme restant est alors facilement évalué en réalisant qu'il peut être écrit comme :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\ell=1}^M \langle \uparrow \dots \uparrow \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \frac{S_1^+}{\lambda_\ell - \epsilon_2} \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) \downarrow \dots \downarrow \rangle \\
 &= \sum_{\ell=1}^M \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_2} \langle \uparrow \dots \uparrow \left(\prod_{k'=1}^{N-M} S^+(\mu_{k'}) \right) \left(\prod_{k=1(\neq \ell)}^M S^+(\lambda_k) \right) | \uparrow \downarrow \dots \downarrow \rangle \\
 &= \sum_{\ell=1}^M \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_2} \det \begin{pmatrix} \tilde{J}_{22} - \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} - \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} - \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_N} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{\ell=1}^M \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_2} \det \left[\begin{pmatrix} \tilde{J}_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_\ell - \epsilon_N} \end{pmatrix} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \Lambda_2^\lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \Lambda_2^\lambda}{\partial \epsilon_2} & \tilde{J}_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda - \Lambda_2^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \tilde{J}_{33} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \frac{\Lambda_4^\lambda - \Lambda_2^\lambda}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_4} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_4} & \tilde{J}_{44} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda - \Lambda_2^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

en utilisant les lemmes 1 et 2 pour effectuer la somme. En additionnant $\frac{1}{\epsilon_a - \epsilon_2}$ fois la première ligne à chaque ligne $a > 2$, on trouve alors :

$$= \det \begin{pmatrix} \Lambda_2^\lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \Lambda_2^\lambda}{\partial \epsilon_2} & \tilde{J}_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & 0 & \tilde{J}_{33} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} \\ \frac{\Lambda_4^\lambda}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & 0 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_4} + \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \tilde{J}_{44} + \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_4} + \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_2} & 0 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} & \dots & \tilde{J}_{NN} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \Lambda_2^\lambda & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \Lambda_2^\lambda}{\partial \epsilon_2} & \tilde{J}_{22} & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{\Lambda_3^\lambda}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & 0 & \tilde{J}_{33} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{\epsilon_4 - \epsilon_2}{(\epsilon_4 - \epsilon_3)(\epsilon_3 - \epsilon_2)} & \dots & \frac{\epsilon_N - \epsilon_2}{(\epsilon_N - \epsilon_3)(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \\ \frac{\Lambda_4^\lambda}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & 0 & \frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{(\epsilon_3 - \epsilon_4)(\epsilon_4 - \epsilon_2)} & \tilde{J}_{44} + \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{\epsilon_N - \epsilon_2}{(\epsilon_N - \epsilon_4)(\epsilon_4 - \epsilon_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Lambda_N^\lambda}{\epsilon_N - \epsilon_2} & 0 & \frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{(\epsilon_3 - \epsilon_N)(\epsilon_N - \epsilon_2)} & \frac{\epsilon_4 - \epsilon_2}{(\epsilon_4 - \epsilon_N)(\epsilon_N - \epsilon_2)} & \dots & \tilde{J}_{NN} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \Lambda_2^\lambda & 1 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \\ \frac{\partial \Lambda_2^\lambda}{\partial \epsilon_2} & \tilde{J}_{22} & \frac{1}{(\epsilon_3 - \epsilon_2)^2} & \frac{1}{(\epsilon_4 - \epsilon_2)^2} & \dots & \frac{1}{(\epsilon_N - \epsilon_2)^2} \\ \Lambda_3^\lambda & 0 & \tilde{J}_{33} + \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_2} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_3} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_3} \\ \Lambda_4^\lambda & 0 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_4} & \tilde{J}_{44} + \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_2} & \dots & \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_N^\lambda & 0 & \frac{1}{\epsilon_3 - \epsilon_N} & \frac{1}{\epsilon_4 - \epsilon_N} & \dots & \tilde{J}_{NN} + \frac{1}{\epsilon_N - \epsilon_2} \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

après avoir multiplié les lignes et les colonnes $a > 2$ respectivement par $\frac{1}{\epsilon_a - \epsilon_2}$ et $\epsilon_a - \epsilon_2$.

4.6.1 Relations entre déterminants

Lorsque les états impliqués dans les facteurs de forme sont on-shell (états propres des charges conservées), on a alors :

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_i |\lambda\rangle &= r_i |\lambda\rangle \\
 \frac{\partial \hat{R}_i}{\partial \epsilon_j} |\lambda\rangle + \hat{R}_i \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_j} &= \frac{\partial r_i^\lambda}{\partial \epsilon_j} |\lambda\rangle + r_i^\lambda \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_j} \\
 \langle \mu | \frac{\partial \hat{R}_i}{\partial \epsilon_j} |\lambda\rangle + \langle \mu | \hat{R}_i \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_j} &= \frac{\partial r_i^\lambda}{\partial \epsilon_j} \langle \mu | \lambda\rangle + r_i^\lambda \langle \mu | \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_j} \\
 \langle \mu | \frac{\partial \hat{R}_i}{\partial \epsilon_j} |\lambda\rangle &= (r_i^\lambda - r_i^\mu) \langle \mu | \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_j} \\
 \frac{g}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} \langle \mu | S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ |\lambda\rangle &= (r_i^\lambda - r_i^\mu) \langle \mu | \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_j} \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\langle \mu | S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ |\lambda\rangle = \frac{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2 (r_i^\lambda - r_i^\mu)}{(\epsilon_k - \epsilon_j)^2 (r_k^\lambda - r_k^\mu)} \langle \mu | S_k^z S_j^z + \frac{1}{2} S_k^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_k^- S_j^+ |\lambda\rangle \quad (4.81)$$

En même temps, on a aussi :

$$\frac{g}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} \langle \mu | S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ |\lambda\rangle = (r_j^\lambda - r_j^\mu) \langle \mu | \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_i} \quad (4.82)$$

et donc :

$$\langle \mu | \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_j} = \frac{(r_j^\lambda - r_j^\mu)}{(r_i^\lambda - r_i^\mu)} \langle \mu | \frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_i} \quad (4.83)$$

L'ensemble de ces relations peut, comme discuté précédemment pour les facteurs à un point, permettre de simplifier l'accès numérique à l'ensemble des facteurs de forme, puisque la détermination d'une partie d'entre eux suffit à reconstruire, trivialement, les autres. Dans le cas des facteurs de forme à deux points, une fois qu'une paire donnée de facteurs de forme $\langle \mu | S_i^z S_j^z |\lambda\rangle$, $\langle \mu | S_i^+ S_j^- |\lambda\rangle$ a été calculée, elle donne un accès direct à chaque $\frac{\partial |\lambda\rangle}{\partial \epsilon_k}$, donc à $\langle \mu | \vec{S}_k \cdot \vec{S}_{k'} |\lambda\rangle$ pour chaque paire de spins. De plus, afin d'accéder individuellement à chaque fonction de corrélation à deux points ($\langle \mu | S_k^z S_{k'}^z |\lambda\rangle$, $\langle \mu | S_k^+ S_{k'}^- |\lambda\rangle$), il ne suffit que calculer une seule des sommes de déterminants proposées ; ce qui nous conduit à un total de $2 + N(N-1)/2$ sommes de déterminants au lieu de $N(N-1)$ pour accéder à chaque facteur de forme à deux points. Pour les grands N , cela réduit de moitié les exigences de calcul.

4.7 Conclusion

Tel que démontré dans ce chapitre, l'ensemble complet des facteurs de forme à un et deux points dans les modèles intégrables de R-G isotropes peut être calculé en utilisant directement les valeurs propres définissant les états propres du système. Les facteurs à deux points sont donnés sous la forme d'une somme de déterminants, mais puisque ces expressions permettent de faire ces calculs numériques sans avoir à retrouver les racines de Bethe elle pourraient malgré tout contribuer à une amélioration des performances numériques. De plus, comme elles peuvent toutes aussi être calculées explicitement entre les états de Bethe off-shell contrairement aux déterminants de type Slavnov, ils pourraient également ouvrir la possibilité, dans des approches variationnelles par exemple, de calculer les propriétés des états de Bethe génériques off-shell au lieu d'être limités à des états on-shell, permettant ainsi une plus grande flexibilité.

Deuxième partie

Quelques applications

Chapitre 5

Modèles de Richardson-Gaudin de type XX et états sombres

"La vérité scientifique a pour signe la cohérence et l'efficacité. La vérité poétique a pour signe la beauté." Aimé Césaire

"Le scientifique n'étudie pas la nature car elle est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir." Henri Poincaré

Dans des systèmes quantiques à plusieurs corps fortement corrélés et plus précisément dans ceux de spin central, on s'attendrait de manière intuitive à ce que le spin central considéré reste corrélé au bain pour n'importe quelles valeurs non nulles de couplages. Or, en 2020 Villazon et al. [6], ont établi l'intégrabilité dans les modèles isotropes de Richardson-Gaudin (R-G) de spin $1/2$, dans lesquels le spin central, en plus d'être soumis à l'action d'un champ magnétique orienté uniquement selon la direction \hat{z} , est couplé uniquement dans le plan XY à chaque spin du bain. Ils ont donc pu, par la suite, établir, que dans ce modèle spécifique on trouve un sous-espace d'états propres défini tel que, pour n'importe quelles valeurs non nulles de couplages entre le spin central et chaque spin environant, les états propres sont de la forme :

$$|\Psi_S\rangle = (|\uparrow\rangle \text{ ou } |\downarrow\rangle) \otimes |\psi_n^{\text{bath}}\rangle. \quad (5.1)$$

Dans ce sous-espace, le spin central se retrouve dans un état pur ($|\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$) complètement décorrélé du bain et polarisé selon la direction \hat{z} du champ magnétique qui lui a été appliqué. $|\psi_n^{\text{bath}}\rangle$ est l'état du bain. Même si ce résultat semble étonnant à première vue, il peut finalement apparaître totalement raisonnable puisque la direction \hat{z} , perpendiculaire au plan XY, est une direction privilégiée selon laquelle le spin central n'est pas couplé à un quelconque spin du bain. Ainsi une fois polarisé dans cette direction, le spin central n'interagit plus avec l'ensemble des spins environants. Les états $|\Psi_S\rangle$ ont été appelés états sombres par analogie aux états sombres observés dans le domaine de l'interaction rayonnement matière, et qui caractérisent la situation d'un atome ou d'une molécule ne pouvant ni absorber, ni émettre des photons. Les états n'appartenant pas au sous-espace des états sombres sont, par opposition, appelés états clairs, et sont donc ceux dans lesquels le spin central reste dans un état intriqué avec le bain. L'existence des états sombres dans ces modèles a, par la suite, été mathématiquement mise en évidence à partir des solutions issues de l'Ansatz de Bethe Algébrique (ABA) [7]. Il a également été démontré que les états sombres issus de ces modèles sont robustes face à l'ajout de certaines perturbations brisant l'intégrabilité du modèle considéré [8].

Tel que nous l'avons souvent mentionné, dans les qubits de spin, basés sur des spins électroniques piégés dans des boîtes quantiques [5], le couplage du spin central (encore appelé qubit) au bain de spins environnants est nuisible en ce qu'il conduit fatalement à la décohérence du spin central, donc à la perte de l'information quantique qu'il devrait stocker [105, 106, 107]. L'existence des états sombres devient donc remarquablement souhaitable, puisque ces derniers pourraient offrir une protection contre ces effets négatifs induits par le bain, permettant à l'état quantique du qubit de subsister sur de longues durées [108, 109].

Ces états n'ont été observés qu'en présence d'un champ magnétique orienté perpendiculairement au plan dans lequel le couplage existe. Il devient donc légitime de se poser la question de savoir si des états sombres peuvent aussi exister en présence d'un champ magnétique orienté selon une direction quelconque de l'espace et chercher à comprendre leur mécanisme de formation. Puisque le champ magnétique est arbitrairement orienté dans les modèles que nous considérerons par la suite, il devient possible que, dans la mesure où des états sombres existent, le spin central y soit polarisé dans une direction quelconque. De façon générale, nous pouvons donc définir un état sombre comme un état où le spin central se trouve dans un état pur (sur la sphère de Bloch) pouvant être orienté dans n'importe quelle direction. Ces états peuvent donc génériquement s'écrire de la manière suivante :

$$|\Psi_S\rangle = (\alpha_1 |\uparrow\rangle + \alpha_2 |\downarrow\rangle) \otimes |\psi_n^{\text{bath}}\rangle, \quad (5.2)$$

les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ étant toujours les deux états de base polarisés suivant la direction \hat{z} perpendiculaire au plan dans lequel on trouve des couplages non-nuls.

Ainsi, dans ce chapitre, après avoir démontré que les modèles de R-G, de type XX avec champ arbitraire sont eux aussi intégrables, nous montrerons que les états sombres existent et persistent bien suivant n'importe quelle orientation du champ magnétique considéré. En présence d'un champ orienté seulement selon l'axe \hat{z} , le système était invariant sous rotation autour de cet axe. Ici, puisque le champ magnétique possède maintenant une composante transverse (dans le plan XY), il brise donc la symétrie $U(1)$ du modèle. En d'autres termes, nous verrons donc dans ce chapitre que dans les modèles de type XX, l'existence des états sombres n'est pas conditionnée à l'invariance sous rotation du modèle ou à la symétrie $U(1)$ qui y est associée.

5.1 Modèles et leur intégrabilité

Comme nous venons de le mentionner, les composantes du champ magnétique dans le plan XY brisent la symétrie rotationnelle $U(1)$ du modèle. Une conséquence directe de cette brisure de symétrie est que l'aimantation totale selon \hat{z} du système n'est plus conservée ; les états propres n'ont alors plus une aimantation totale fixe et donnée. Néanmoins, les modèles étudiés ici restent intégrables, comme nous le démontrons dans cette section, en prenant une limite appropriée des modèles intégrables complètement anisotropes et non antisymétriques de R-G tels que décrits au deuxième chapitre de cette thèse. Nous travaillerons ici sur des modèles de $N + 1$ spins-1/2 et donc un spin central et N spins dans le bain. Ces modèles intégrables sont donc définis, nous le rappelons, par un ensemble de $N + 1$ opérateurs [89, 88] :

$$\hat{R}_j = g \sum_{k=0(\neq j)}^N \left(\Gamma_{jk}^x \hat{S}_j^x \hat{S}_k^x + \Gamma_{jk}^y \hat{S}_j^y \hat{S}_k^y + \Gamma_{jk}^z \hat{S}_j^z \hat{S}_k^z \right) + B_j^x \hat{S}_j^x + B_j^y \hat{S}_j^y + B_j^z \hat{S}_j^z, \quad (5.3)$$

où, dans toute direction donnée $\alpha \in \{x, y, z\}$, les constantes de couplage sont données par :

$$\Gamma_{jk}^\alpha = \frac{\sqrt{(\epsilon_j + J_\alpha)(\epsilon_k + J_\beta)(\epsilon_k + J_\gamma)}}{\epsilon_k - \epsilon_j} \quad B_j^\alpha = \frac{B^\alpha}{\sqrt{\epsilon_j + J_\alpha}}, \quad (5.4)$$

avec β et γ les deux autres directions ($\neq \alpha$). Les paramètres $\epsilon_1 \dots \epsilon_N$, J_x, J_y, J_z et B_x, B_y, B_z sont libres. Notons que nous utilisons ici la paramétrisation proposée dans [89] plutôt que celle, équivalente, dérivée dans cette thèse. En choisissant d'abord $J_y = J_x = J_\perp$, on obtient un modèle de type XXZ, puisque les couplages le long des deux directions \hat{x} et \hat{y} deviennent égaux. En prenant ensuite la valeur spécifique $\epsilon_0 \rightarrow -J_z + \Delta$, en choisissant $B^z \equiv B_0^z \sqrt{\Delta}$, et enfin en prenant la limite $\Delta \rightarrow 0$, on démontre donc que les modèles de type XX, dans un champ magnétique arbitrairement orienté :

$$\hat{H}_0 \equiv \hat{R}_0 = B_0^z \hat{S}_0^z + B_0^x \hat{S}_0^x + B_0^y \hat{S}_0^y + g \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\hat{S}_0^x \hat{S}_k^x + \hat{S}_0^y \hat{S}_k^y \right) \quad (5.5)$$

sont bien intégrables. Ils le restent pour des composantes arbitraires du champ magnétique, puisque les limites conduisent à

$$B_0^z \quad B_0^x \equiv \frac{B^x}{\sqrt{J_\perp - J_z}} \quad B_0^y \equiv \frac{B^y}{\sqrt{J_\perp - J_z}}, \quad (5.6)$$

qui peuvent tous être choisis librement et indépendamment les uns des autres. En même temps, les N valeurs des couplages résultants sont données par

$$\Gamma_{0k} \equiv g \sqrt{\frac{(J_\perp - J_z)(\epsilon_k + J_\perp)}{\epsilon_k + J_z}} \quad (5.7)$$

et peuvent donc également toutes être choisies arbitrairement tout en maintenant l'intégrabilité, grâce à la liberté offerte par les N paramètres libres ϵ_k . En prenant la même limite pour les autres opérateurs $\hat{R}_{j>0}$, on montre directement que l'hamiltonien (5.5) commute avec les N charges conservées suivantes :

$$\hat{R}_j = \frac{B^x}{\sqrt{\epsilon_j + J_\perp}} \hat{S}_j^x + \frac{B^y}{\sqrt{\epsilon_j + J_\perp}} \hat{S}_j^y + g \sum_{\alpha} \sum_{k \neq 0, j}^{x, y, z} \Gamma_{jk}^\alpha \hat{S}_j^\alpha \hat{S}_k^\alpha - g \sqrt{\frac{(J_\perp - J_z)(J_\perp - J_z)}{\epsilon_j + J_z}} \hat{S}_0^z \hat{S}_j^z \quad (5.8)$$

avec les valeurs de Γ_{jk}^α données par l'éq. (5.4) et $J_y = J_x = J_\perp$.

Comme déjà plusieurs fois évoqué tout au long des chapitres précédents, afin d'accéder au spectre et aux valeurs moyennes des opérateurs de spin locaux pour chaque état propre du système, nous nous appuyons sur le fait que les charges conservées de R-G (5.3) obéissent à des relations quadratiques simples. Pour un état propre étiqueté $|\psi_n\rangle$, on peut donc trouver l'ensemble des $N + 1$ valeurs propres r_j^n telles que : $\hat{R}_j |\psi_n\rangle = r_j^n |\psi_n\rangle$, en résolvant simplement ces équations quadratiques [58, 89]. Chaque ensemble de valeurs propres ($r_0^n \dots r_N^n$) définissant l'état propre n , correspond toujours à l'une des solutions du système :

$$[r_j^n]^2 = -\frac{g}{2} \sum_{k \neq j} C_{jk} r_k^n + g^2 \sum_{\alpha} \sum_{j \neq k} \left[\frac{\Gamma_{jk}^\alpha}{4} \right]^2 + \sum_{\alpha} \left[\frac{B_j^\alpha}{2} \right]^2, \quad (5.9)$$

avec maintenant

$$C_{0k} = -\sqrt{\frac{(\epsilon_k + J_\perp)(\epsilon_k + J_\perp)}{\epsilon_k + J_z}}, \quad C_{jk} = -\frac{\sqrt{(\epsilon_k + J_\perp)(\epsilon_k + J_\perp)(\epsilon_k + J_z)}}{\epsilon_k - \epsilon_j}, \quad C_{k0} = 0 \quad \forall j, k \neq 0.$$

Comme mentionné au chapitre I de ce manuscrit, l'obtention de solutions spécifiques à ce système peut se faire en augmentant graduellement le paramètre de couplage g de manière à déformer lentement une solution donnée à $g = 0$. On constate facilement que ces solutions en l'absence de couplage sont simplement les produits tensoriels de $\bigotimes_{i=0}^N |\pm_i\rangle$, où $|\pm_i\rangle$ sont les deux états propres de $R_i(g = 0) = \vec{B}_i \cdot \vec{S}_i$ ayant respectivement des valeurs propres $\pm \frac{1}{2}$. Ceci nous permet de construire les états propres individuels à partir d'un état parent (à $g = 0$) déformé continuellement jusqu'aux valeurs de couplages désirées. Ces états parents seront donc désignés par la séquence des valeurs propres à $g = 0$, ordonnée par l'indice de spin de gauche à droite. Par exemple, $|+ - - + \dots\rangle$ signifie que le spin central S_0 est dans l'état propre de $\vec{B}_0 \cdot \vec{S}_0$ qui a une valeur propre $+\frac{1}{2}$, le spin S_1 dans l'état propre de $\vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1$ avec la valeur propre $-\frac{1}{2}$, et ainsi de suite ...

5.2 Grandeurs physiques calculées

Comme pour les résultats numérique sur les modèles XYZ présentés à la figure 2.1 de la partie précédente, les quantités physiques qui nous intéressent ici pourront être obtenues à partir du théorème de Hellmann-Feynman. Elles seront donc, calculables numériquement grâce à la résolution de simples systèmes d'équations linéaires [88].

5.2.1 Valeurs moyennes des spins

En effet, puisque les modèles de R-G restent intégrables pour des valeurs arbitraires de leurs différents paramètres, le théorème de Hellmann-Feynman permet ici aussi d'exprimer chaque valeur moyenne de spin $\langle \psi_n | \hat{S}_j^\alpha | \psi_n \rangle$ dans un état donné du système, en termes des différentes dérivées des valeurs propres par rapport aux paramètres du l'hamiltonien du système en question. Dans les problèmes spécifiques qui nous intéressent ici, on démontre que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle S_0^x \rangle = \sqrt{J_\perp - J_z} \left(\frac{\partial h_0^n}{\partial B^x} \right), & \langle S_j^x \rangle_{j \neq 0} = \sqrt{\epsilon_j + J_\perp} \left(\frac{\partial r_j^n}{\partial B^x} \right) \\ \langle S_0^y \rangle = \sqrt{J_\perp - J_z} \left(\frac{\partial h_0^n}{\partial B^y} \right), & \langle S_j^y \rangle_{j \neq 0} = \sqrt{\epsilon_j + J_\perp} \left(\frac{\partial r_j^n}{\partial B^y} \right) \\ \langle S_0^z \rangle = \frac{\partial h_0^n}{\partial B^z}, & \langle S_j^z \rangle_{j \neq 0} = \sqrt{\epsilon_j + J_z} \frac{\partial}{\partial B^z} \left(\frac{r_j^n}{\sqrt{\Delta}} \right)_{\Delta \rightarrow 0} \end{array} \right. , \quad (5.10)$$

Une fois que l'ensemble des valeurs de r_j^n définissant un état propre a été trouvé, ces dérivées par rapport aux paramètres du hamiltonien deviennent directement accessibles en résolvant le système linéaire d'équations obtenus en dérivant les équations quadratiques par rapport à chaque paramètre d'intérêt. Notons que Δ est un paramètre libre tendant vers zéro, mais que la limite donnant les valeurs moyennes des spins du bain selon \hat{z} , reste parfaitement définie et accessible numériquement. Les détails des calculs sont présentés à l'annexe C.2.

Ces valeurs moyennes nous permettront d'étudier l'orientation, principalement celle du spin central, après la déformation d'un état parent (à $g = 0$) par l'augmentation du paramètre g et donc de l'intensité du couplage.

5.2.2 Facteur de pureté

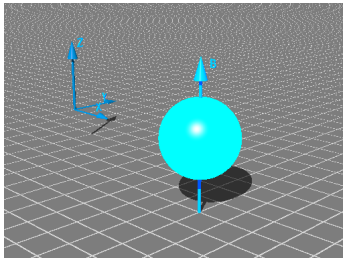
Comme mentionné dans l'introduction, on sait que des états sombres existent dans le modèle de spin central de type XX soumis à un champ magnétique orienté uniquement suivant \hat{z} , c'est-à-dire perpendiculaire au plan contenant les couplages [6]. Ces états sombres sont alors caractérisés par le fait que le spin central se trouve exactement dans l'un des deux états propres de l'opérateur $B_z S_0^z$. Pour la moitié d'entre eux, le spin central pointe vers le haut (l'autre moitié, vers le bas) et peut donc en général, s'écrire comme le produit tensoriel $|\uparrow_0\rangle \otimes |\psi_n^{\text{bath}}\rangle$ (ou $|\downarrow_0\rangle \otimes |\psi_m^{\text{bath}}\rangle$) où les différents états possibles des spins du bain peuvent être trouvés comme solution à un ensemble d'équations de Bethe réduites [6, 7, 8].

Or, si cette "dissociation" du spin central et du bain peut être maintenue en présence de composantes dans le plan XY du champ magnétique, il est tout à fait possible qu'elle conduise à un état sombre dans lequel le spin central pointerait dans une autre direction en étant par exemple dans un état propre bien défini de $\vec{B}_0 \cdot \vec{S}_0$. Parallèlement, si le mécanisme par lequel les états sombres apparaissent nécessite fondamentalement que le champ magnétique soit perpendiculaire au plan XY dans lequel le couplage existe, on s'attendrait alors à ce que l'existence d'une composante du champ magnétique dans le plan XY soit suffisante pour faire complètement disparaître les états sombres.

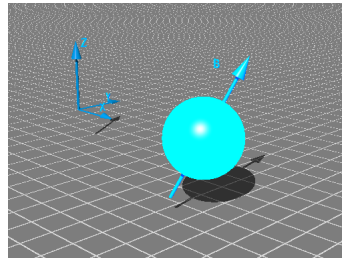
À la lumière de ces possibilités, il convient d'utiliser la définition plus générale d'un état sombre (éq. 5.2), valable pour un spin central orienté arbitrairement, et qui exige simplement la structure en produit tensoriel telle que la matrice de densité réduite du spin central est celle d'un état pur (d'orientation arbitraire). Un état propre générique (clair) de ce système couplé conduirait, en revanche, typiquement à une matrice de densité réduite pour laquelle le spin central est dans un état statistiquement mixte. Il devient alors possible de différencier les états sombres des états clairs en calculant simplement la quantité

$$\gamma_0 = \langle \hat{S}_0^x \rangle^2 + \langle \hat{S}_0^y \rangle^2 + \langle \hat{S}_0^z \rangle^2, \quad (5.11)$$

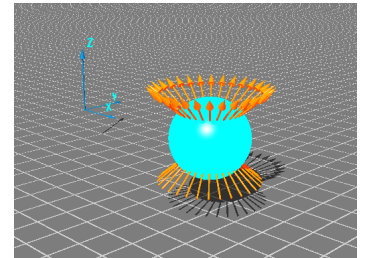
que nous appellerons le facteur de pureté. En effet, γ_0 vaut $\frac{1}{4}$ (puisque nous travaillons avec des matrices de spins et non celles de Pauli) pour tout état pur du spin central (c'est-à-dire état sombre du système étudié) : $\alpha_1 |\uparrow_0\rangle + \alpha_2 |\downarrow_0\rangle$ et se réduit systématiquement ($\gamma_0 < \frac{1}{4}$) lorsque le spin central est enchevêtré avec le bain (i.e. : état clair du système considéré) et ne peut être décrit que par un état mixte. Cela généralise la définition simple $\langle S_0^z \rangle = \pm \frac{1}{2}$ utilisée, par exemple, dans [6] et fournit une alternative, plus simple dans le calcul de l'entropie d'intrication.



(a) Etat pur polarisé selon la direction \hat{z}



(b) Etat pur polarisé selon une direction quelconque



(c) Mélange statistique d'états purs

FIGURE 5.1 – Représentations possibles d'un spin plongé dans un bain de spins

5.3 Résultats

5.3.1 Existence des états sombres

Dans la figure 5.2, nous présentons les valeurs moyennes des $N + 1$ spins suivant les directions \hat{z} , \hat{y} et \hat{x} . Les deux dernières directions sont identiques par symétrie puisque le champ externe est choisi tel que $B_x = B_y$. L'état propre tracé est celui dont l'état parent à $g = 0$ est donné, en suivant l'ordre des indice de spin (le spin central d'indice 0 étant le premier), par une alternance de deux valeurs propres négatives et d'une positive : $|- - + - - + - - + \dots\rangle$. Elles sont présentées comme une fonction du couplage rééchelonné $\tilde{g} = \frac{g}{|B|} \sum_{j=1}^N \Gamma_j$ qui caractérise le rapport entre le terme de couplage total et le terme de champ magnétique local du hamiltonien de type XX (5.5).

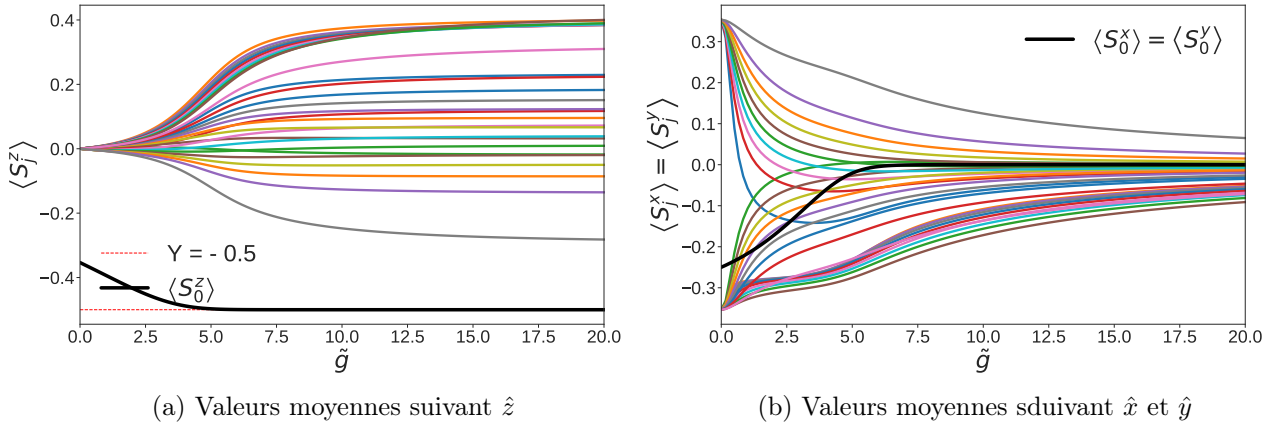


FIGURE 5.2 – Valeurs moyennes des $N + 1 = 30$ spins dans l'état sombre résultant de la déformation de l'état $|- - + - - + \dots\rangle$ à $g = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de l'angle $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.

Pour ce choix spécifique de paramètres, on remarque qu'à des couplages caractérisés par $\tilde{g} \approx 5$, le spin central a atteint un état où il est parfaitement polarisé vers le bas. Or, pour ces valeurs, le couplage total du spin central au bain n'est évidemment pas négligeable devant les composantes du champ magnétique B_0^x, B_0^y responsables de la brisure de symétrie $U(1)$. En effet, ces deux termes sont alors du même ordre de grandeur. Par conséquent, nous sommes encore loin d'un régime à très fort couplage où le champ magnétique, et donc ses composantes B_0^x, B_0^y , seraient négligeables et pour lequel on s'attendrait donc à retrouver les comportements observés en l'absence de ces composante du champ. Il n'en demeure pas moins qu'à ces valeurs de couplages, le spin central y semble déjà, étonnamment, être dans un état pur polarisé selon \hat{z} , reproduisant alors le comportement de l'état sombre attendu en l'absence de champ transverse.

Afin de mieux cerner le comportement et de tenter de comprendre les mécanismes en jeu, nous étudierons justement le facteur de pureté à la prochaine sous-section. Cela permettra aussi de comprendre si pour les couplages tels que $\tilde{g} < 5$, l'état du spin central est aussi pur ou s'il s'agit plutôt d'un mélange statistique. L'étude du champ d'Overhauser, tel qu'il sera défini aussi à la prochaine section, permettra finalement de construire un image claire de la physique impliquée

dans la formation des états sombres en présence d'un champ transverse.

5.3.2 Mécanisme de formation des états sombres

La figure 5.3a présente en fonction de l'intensité du couplage, l'évolution du facteur de pureté de l'état propre discuté précédemment et qui, à couplage suffisamment élevé menait à un état sombre polarisé selon \hat{z} . Alors qu'à couplage nul ce facteur de pureté est inévitablement $1/4$, on remarque qu'en présence de composantes transverses du champ magnétique, le couplage a pour effet de diminuer ce facteur de pureté et donc de créer une intrication quantique entre le spin central et le bain. Ceci est radicalement différent du modèle à symétrie $U(1)$ (avec champ uniquement selon \hat{z}) dans lequel le spin central reste dans un état pur pour toute valeur du couplage [6, 7]. Malgré tout, en augmentant suffisamment le couplage entre le spin central et chaque spin du bain, sans pour autant que les contributions magnétiques ne deviennent négligeables, nous constatons que, le système réorganise l'état propre de façon à recréer un état sombre et donc un spin central décorrélé du bain.

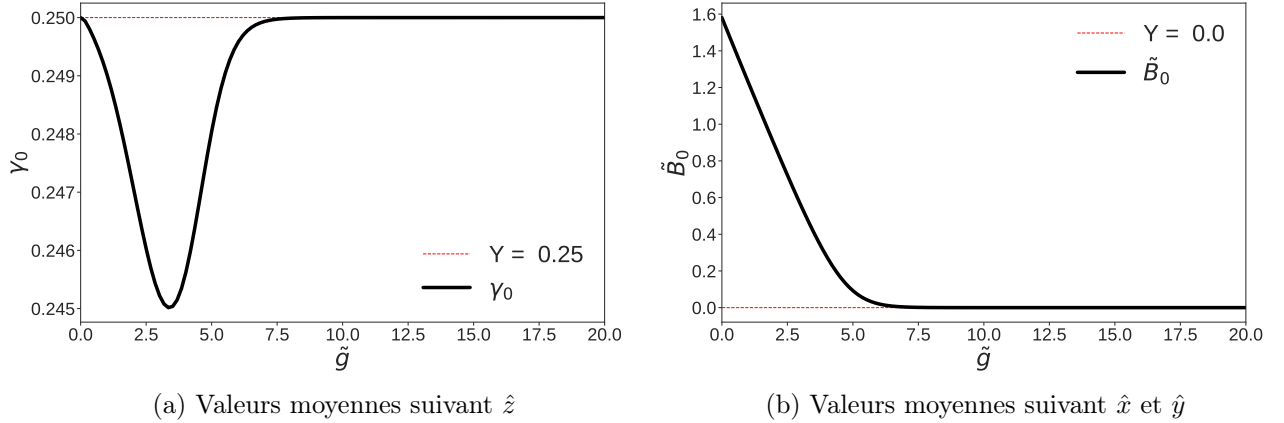


FIGURE 5.3 – Facteur de pureté et champ ressenti par le spin central dans un système de $N + 1 = 30$ spins, lorsque l'état considéré est sombre et résulte de la déformation de l'état $| - - + - - + \dots \rangle$ à $g = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de l'angle $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.

Afin de cerner le mécanisme par lequel les états sombres peuvent réémerger, le graphique 5.3b représente le champ magnétique moyen effectif dans le plan ressenti par le spin central lorsque l'on considère une contribution du champ d'Overhauser due aux spins du bain. Ce dernier représente simplement le champ magnétique effectif créé par le spins du bain calculé en remplaçant, dans une approche typique de champ moyen, les opérateurs de spin par leurs valeurs moyennes. Ça faisant, on construit alors un hamiltonien effectif pour le spin central :

$$H_{\text{eff}} = B_0^z \cdot \hat{S}_0^z + \left(B_0^x + g \sum_{k=1}^N \Gamma_k \langle \hat{S}_k^x \rangle \right) \hat{S}_0^x + \left(B_0^y + g \sum_{k=1}^N \Gamma_k \langle \hat{S}_k^y \rangle \right) \hat{S}_0^y = \vec{B} \cdot \vec{S}_0, \quad (5.12)$$

où les différentes composantes du champ magnétique effectif sont données par :

$$\tilde{B}^x = B_0^x + g \sum_{k=1}^N \Gamma_k \langle \hat{S}_k^x \rangle \quad \tilde{B}^y = B_0^y + g \sum_{k=1}^N \Gamma_k \langle \hat{S}_k^y \rangle \quad \tilde{B}^z = B_0^z. \quad (5.13)$$

La figure 5.3b présente donc l'évolution en fonction du couplage des composantes transverses du champ magnétique effectif ressenti par le spin central : $\tilde{B}_0 = \tilde{B}^x = \tilde{B}^y$ (les directions \hat{x} et \hat{y} étant identiques par symétrie). On constate donc que la symétrie sous rotation U(1) autour de l'axe \hat{z} devient effectivement restaurée lorsque, l'alignement des spins du bain est tel que $\tilde{B}_0 = \tilde{B}_x = \tilde{B}_y = 0$. En effet, le retour à un état pur ($\gamma_0 = 0, 25$) survient précisément à la valeur du couplage pour laquelle les composantes dans le plan XY du champ effectif atteignent 0. Comme on l'a vu sur la figure 5.2, en continuant d'augmenter la force du couplage du spin central au bain, on atteint d'ailleurs un régime où la valeur moyenne des composantes dans le plan des spins du bain devient linéaire en g , c'est à dire en \tilde{g} . Cette annulation du champ transverse effectif est alors maintenue et ce pour des couplages arbitrairement grands.

Le diminution de la pureté, autrement dit l'intrication du spin central et du bain, à faibles couplages devient donc inévitable. Elle est une conséquence du fait que, une condition nécessaire pour l'annulation effective du champ transverse est d'avoir un g suffisamment grand pour que :

$$\left| \sqrt{(B_0^x)^2 + (B_0^y)^2} \right| \leq \frac{1}{2}g \left| \sum_{k=1}^N \Gamma_k \right|, \quad (5.14)$$

Cette limite est tout simplement imposée par le fait que la norme de la valeur moyenne d'un spin dans une direction donnée doit nécessairement être $\leq \frac{1}{2}$. Les résultats obtenus ici (figure 5.3b) montrent bien que lorsque l'état du système est sombre, c'est parce que le champ transverse ressenti par le spin central est nul. Or à trop faibles couplages, le bain de spin ne peut pas compenser les composantes du champ appliqué et l'état ne pourra alors pas être sombre.

On constate bien sur la figure 5.2 que, pour que se forme un état sombre, les spins du bain subissent une réorganisation avec l'augmentation du couplage. À $g=0$, il sont tous un des états propres de $\vec{B}_j \cdot \vec{S}_j$ (puisque le champ magnétique \vec{B}_j a $B_j^z = 0$) et sont orientés de manière à avoir $B_j^x = B_j^y$, ce qui conduit aux valeurs moyennes de spins du bain, en absence de couplages données par

$$\langle S_j^x \rangle = \langle S_j^y \rangle = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \langle S_j^z \rangle = 0. \quad (5.15)$$

Au fur et à mesure que le couplage augmente, les spins s'inclinent hors du plan XY et gagnent une importante valeur moyenne suivant \hat{z} . Lorsque l'annulation effective du champ transverse ressenti par le spin central est atteint, son état est alors polarisé selon \hat{z} à forts couplages (approximativement à $\tilde{g} \approx 5$) et les spins du bain continuent d'évoluer avec l'augmentation du couplage : leur composante dans le plan XY diminuant linéairement avec \tilde{g} afin de maintenir l'annulation effective du champ transverse.

Au vu de ces résultats, on comprend que la formation d'un état sombre en présence d'un champ magnétique transverse est fondamentalement similaire à ce qui se produit en l'absence de ce champ transverse [6, 7]. En effet, la présence d'états sombres est conditionnée par une organisation des spins du bain permettant de générer des champs Overhauser suivant \hat{x} et \hat{y} qui, lorsque le couplage devient assez fort permettent d'annuler cette composante transverse du champ magnétique appliquée au spin central. On retrouve alors un spin central pur et polarisé selon \hat{z} exactement comme dans le cas à symétrie U(1) caractérisé par l'absence de champ magnétique appliqué dans le plan XY.

Il est à noter que, bien que jusqu'à présent nous n'avons présenté qu'un seul des ces états propres sombres, en parcourant l'espace de Hilbert, nous pouvons constater qu'il existe un grand nombre d'états propres sombres, et que, dans tous ceux-ci, le spin central se retrouve toujours dans un état pur polarisé suivant \hat{z} .

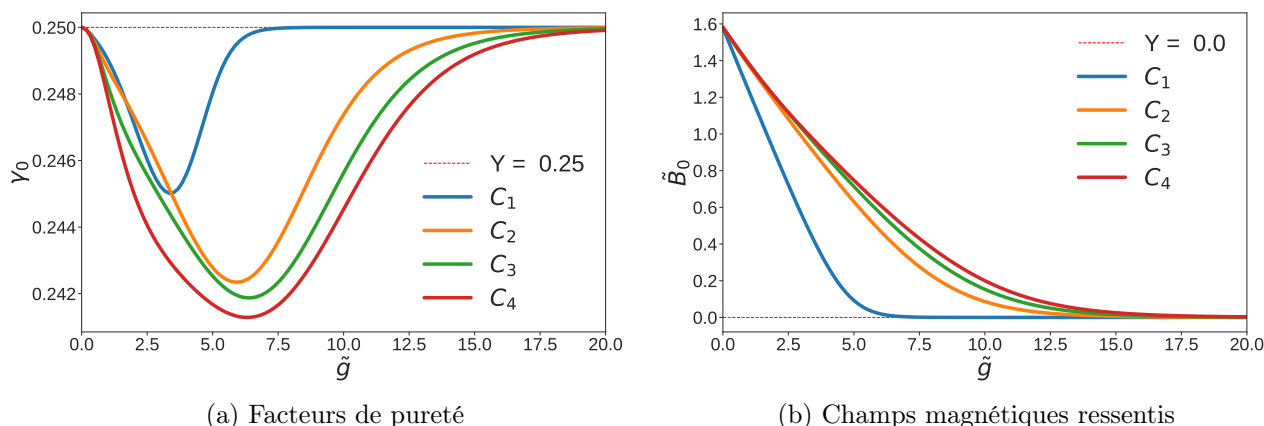


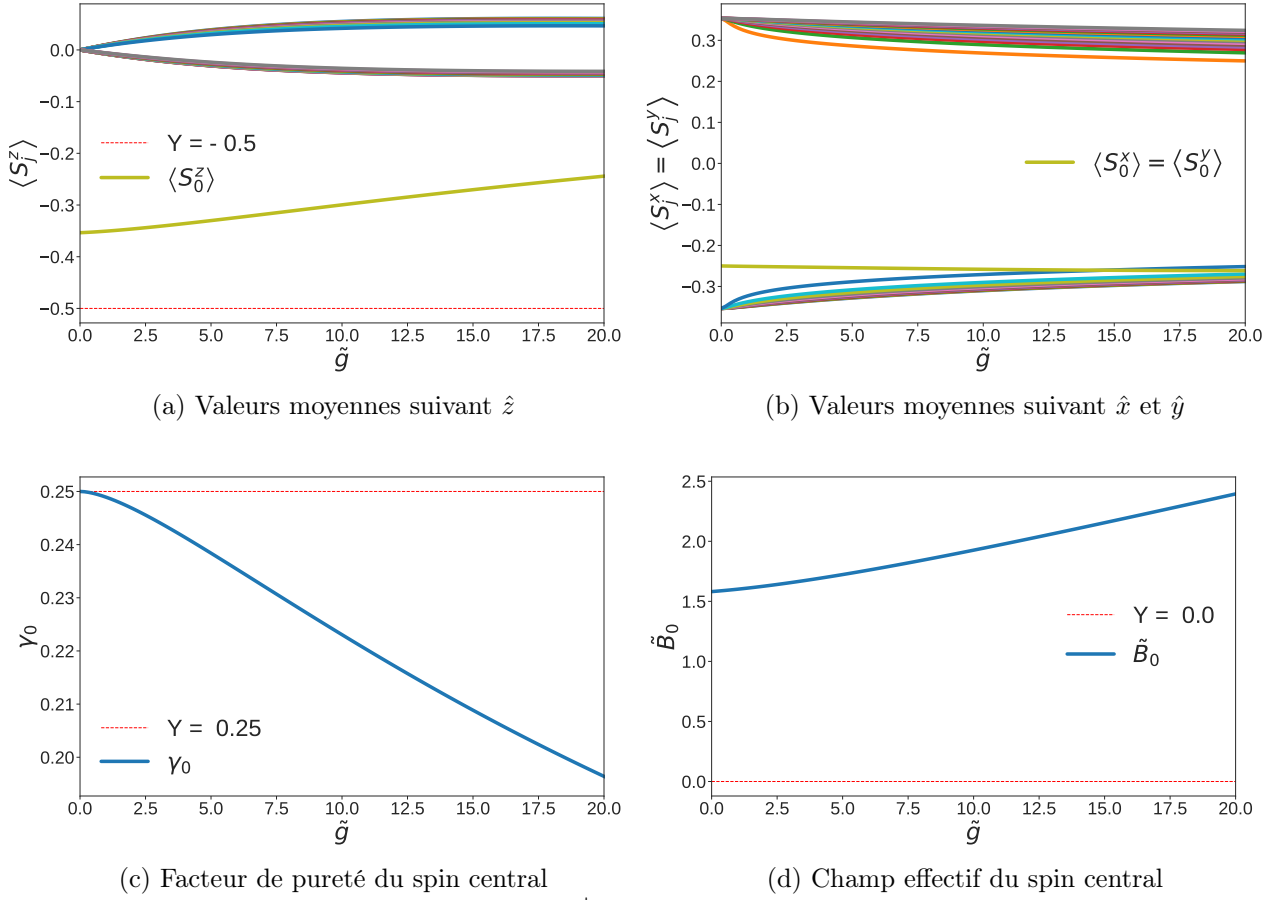
FIGURE 5.4 – Facteurs de pureté 5.4a et champs magnétiques effectifs du spin central 5.4b dans 4 états sombres dont les états parents à $\tilde{g} = 0$ donnés par : $C_1 = |---+---+---+\dots\rangle$, $C_2 = |----+----+----+\dots\rangle$, $C_3 = |-----+-----+-----+\dots\rangle$ et $C_4 = |-----+-----+-----+\dots\rangle$. Le système est toujours constitué de $N + 1 = 30$ particules, les constantes de couplage valent toujours $\Gamma_j = 1,979(N - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.

La figure 5.4 présente justement quatre de ces états sombres. On y constate clairement que le mécanisme décrit est exactement le même pour chacun d'entre eux. Même si la valeur précise de couplage à laquelle le champ d'Overhauser compense les composantes transverses peut varier d'un état à l'autre, c'est toujours lorsque cette annulation effective survient que le spin central retrouve un état pur sans intrication au bain. Dans tous les cas ce dernier reste systématiquement polarisé selon \hat{z} exactement comme en l'absence de champ magnétique transverse.

5.3.3 Etats clairs

Tel que déjà mentionné dans ce chapitre, en plus du sous-espace des états sombres, l'espace de Hilbert associé aux modèles étudiés ici contient aussi des états clairs dans lesquels le spin central reste bien corrélé aux spins environnants. Dans ces états, le bain ne permet pas la réorientation du spin central suivant \hat{z} , comme il le ferait dans le cas des états sombres 5.2. Le champ Overhauser produit par le bain n'annule pas la composante transverse du champ magnétique appliqué au système étudié. Le spin central continue donc de ressentir l'effet du bain et se retrouve dans un état statistique (mixte), puisque, son champ transverse effectif (ressenti) est non nul. Son facteur de pureté dans les états clairs décroît alors progressivement avec l'augmentation des normes de couplages 5.5c. L'existence de la composante transverse du champ effectif maintient la brisure de symétrie dans le système considéré et permet d'obtenir un spin central dont la valeur moyenne reste orientée suivant une direction quelconque de l'espace tridimensionnel 5.5a et 5.5b.

Alors que la présence d'états clairs et d'intrication quantique entre le spin central et le bain est tout à fait naturelle et attendue de façon générale, il est légitime de se demander si l'émergence des états sombres observés précédemment est, elle aussi, universelle dans ces modèles où s'il s'agirait d'une conséquence du choix spécifique de la distribution des couplages Γ_k fait précédemment. Dans la prochaine section nous chercherons donc à valider le mécanisme proposé pour la réémergence des états sombres et à s'assurer de son universalité.



$$\text{Etat parent : } C_1 = \left| \underbrace{- \dots -}_{13} \underbrace{+ \dots +}_{17} \right\rangle \quad (5.16)$$

FIGURE 5.5 – Valeurs moyennes des spins 5.5a et 5.5b. Facteur de pureté γ_0 5.5c et le champ magnétique effectif du spin central dans un état clair d'un système de $N + 1 = 30$ particules. Cet état résulte de la déformation de l'état parent C_1 obtenu à $\tilde{g} = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N + 1 - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.

5.3.4 États sombres et différents choix de couplages

Rappelons nous donc que, jusqu'ici, les états sombres ont été observés pour un choix bien spécifique des couplages ($\Gamma_k = N + 1 - 0.5k$), pour lesquels le spin central reste d'ailleurs couplé de façon importante à chaque spin de son environnement (aucun des Γ_k ne s'approche de zéro). L'universalité des états sombres se traduirait dans le fait de les observer pour n'importe qu'elle autre distribution ou choix de couplages, allant des situations dans lesquelles pour un nombre N de spins constituant le bain du système étudié, le spin central n'interagit fortement qu'avec une petite portion du bain, aux situations où il interagit fortement avec l'ensemble du bain pour le même nombre $N + 1$ de particules dudit système.

Persistence des états sombres pour différents choix de couplages

La figure ci-dessous (5.6) illustre les divers choix de distribution de constantes de couplage que nous avons choisi d'étudier, toujours pour 29 spins dans le bain. On y trace la valeur du couplage Γ_k du spin central à chaque spin du bain en fonction de l'indice k du spin en question, pour chacune de ces distributions (numérotées simplement par $q=1,2,\dots,6$). La courbe $q = 6$ est celle pour laquelle les couplages décroissent le plus rapidement, soit en $1/k^2$. Sur cette courbe, on voit bien que le spin central ne reste fortement couplé qu'à environ 10 spins du bain, même si en termes de couplages, ces spins sont très espacés les uns des autres. À l'opposé, la courbe $q = 1$ montre des couplages décroissants en $N + 1 - 0.5k$ et met clairement en évidence un modèle dans lequel le spin central reste fortement couplé à tous l'ensemble du bain. On étudiera aussi des distributions de couplages intermédiaires, c'est à dire ceux pour lesquels $1 < q < 5$.

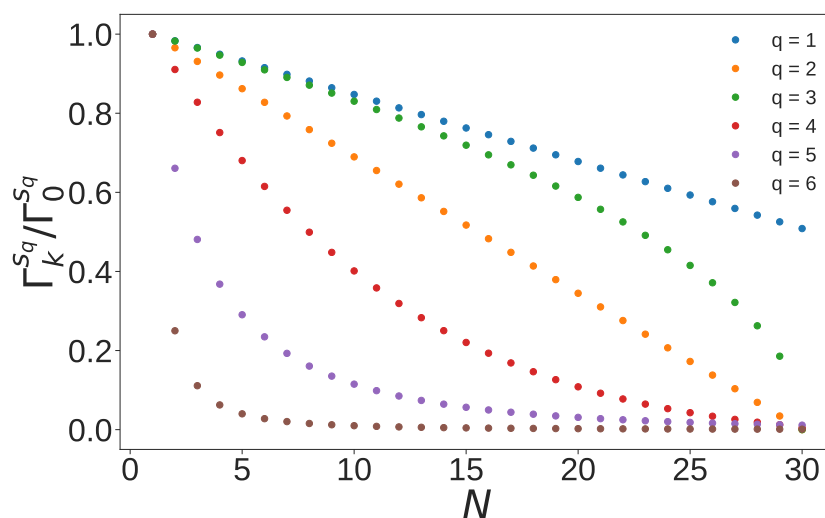


FIGURE 5.6 – Différents choix de couplages entre le spin central et chaque spin du bain

L'ensemble de ces distributions de couplages est par la suite normalisé afin que la somme de tous les couplages soit la même dans les 6 cas. Les figures 5.7a, 5.7b, 5.8a et 5.8b présentent les facteurs de pureté, les champs effectifs transverses ainsi que les 3 valeurs moyennes du spin central (selon x, y et z) pour chacune des 6 distributions ci-dessus.

Ces figures démontrent d'abord que la réémergence des états sombres à un couplage suffisant est bien une caractéristique universelle des modèles de type XX en champ arbitraire, en ce sens qu'elle ne dépend pas des détails particuliers de la distribution. Dans tous les cas, le mécanisme par lequel le champ d'Overhauser arrive à annuler les composantes transverse du champ appliqué est aussi confirmé. Il n'en demeure pas moins que la distribution des couplages a un impact sur l'importance de la déviation de la pureté du spin central et sur la gamme de couplage sur laquelle elle se produit. Alors que tous les cas sont tels que le couplage total au bain est le même, on remarque clairement malgré tout que, plus la distribution de couplages décroît rapidement, plus la plage sur laquelle l'état n'est pas sombre est importante.

Il est à noter que ces résultats rappellent fortement l'étude en taille finie qui sera présentée dans la section suivante et qui permettra d'appuyer l'analyse faite ici. En fait, on comprend ici que, pour une distribution de couplage décroissant trop rapidement, il existe un ensemble de spins (ceux d'indice k élevés) qui ne sont que très faiblement couplés au spin central. Ces derniers

ne sont donc pas, au final, impliqués de façon notable dans le processus de reconstruction des états sombres. Pour que la réémergence soit efficace il faut donc avoir accès un nombre important de spins qui soient suffisamment couplés au spin central.

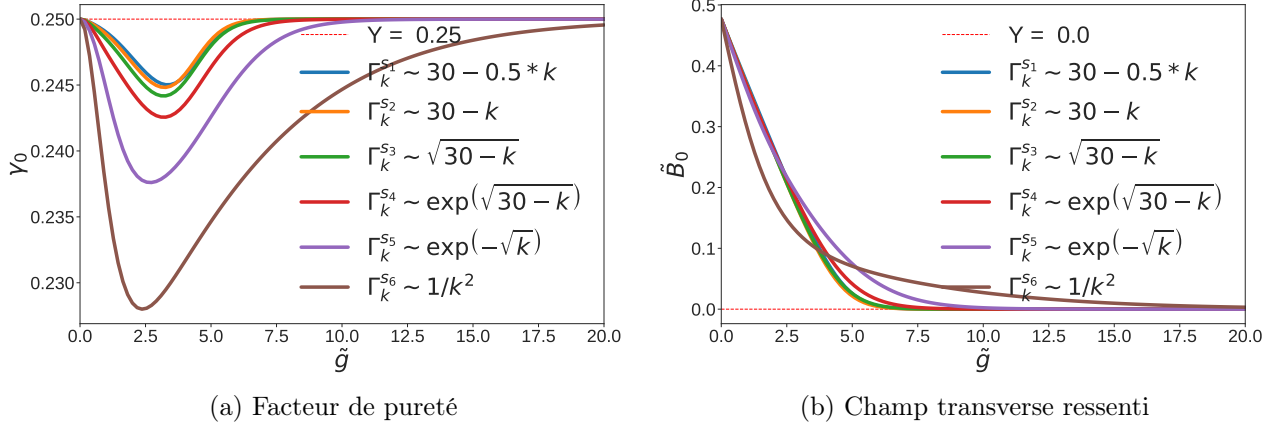


FIGURE 5.7 – Evolution du facteur de pureté et du champ effectif ressenti par le spin central en fonction des différents choix de couplages dans un état dont la configuration à $g = 0$ vaut $| - - + - - + \dots \rangle$, dans un système de 30 particules. Le champ magnétique est orienté selon $\pi/4$ par rapport à l'azimut.

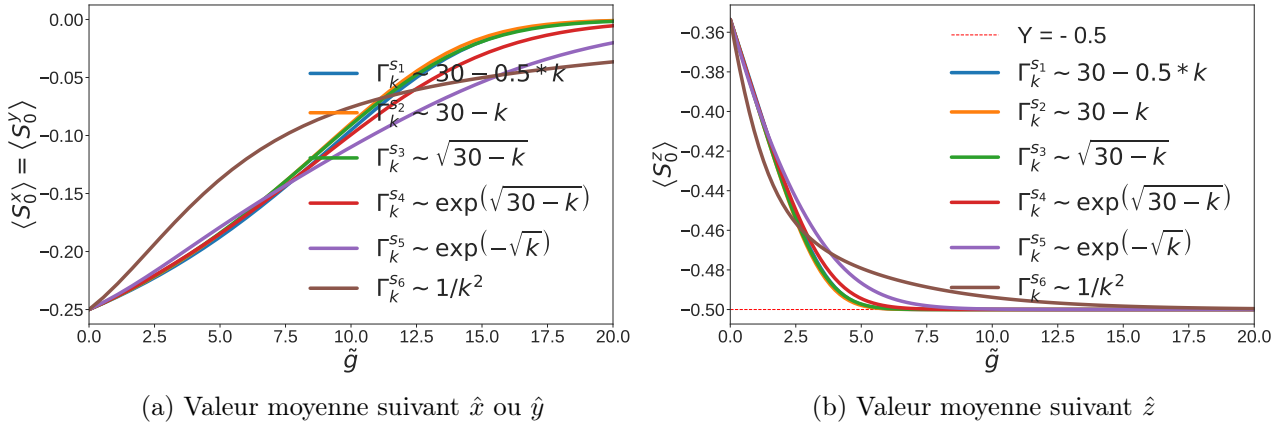


FIGURE 5.8 – Evolution des valeurs moyennes en fonction des différents choix de couplages dans l'état dont la configuration à $g = 0$ vaut $| - - + - - + \dots \rangle$, dans un système de 30 particules. Le champ magnétique est orienté selon $\pi/4$ par rapport à l'azimut.

On arrive donc déjà à comprendre que dans la limite thermodynamique à $N \rightarrow \infty$, on trouvera toujours, dans la mesure où le couplage total au bain reste fini, un régime à faible couplage où des déviations à un état pur du spin central pur seront présentes. Si, par contre, la limite était prise de façon telle que le couplage total devienne infini à $N \rightarrow \infty$, cette plage se fermerait et on trouverait alors des états sombres pour toute valeur de g . Dans ce cas, l'accès à un très grand nombre de spins, tous en capacité de contribuer au champ d'Overhauser, permet pour tout couplage l'annulation des composantes transverses du champ. Par contre, pour un distribution

de couplage décroissant rapidement, l'ajout de spins supplémentaires qui sont très faiblement couplés ne permet pas de contribuer de façon appréciable au champ d'Overhauser. Seuls les quelques spins les plus fortement couplés contribueront et la plage "claire" restera ouvert comme elle l'est pour un système de taille finie.

Les résultats semblent donc indiquer que des états sombres parfaitement formés pour toute intensité du couplage ne seraient possibles, en présence d'un champ transverse, que dans la limite thermodynamique pour des couplages diminuant plus lentement que $1/k$. S'ils décroissent plus rapidement que $1/k$, il restera systématiquement une gamme de couplages faibles où des déviations de l'état sombre sont à prévoir.

5.3.5 Comportement des états sombres avec le nombre de spins du bain

Tel qu'on l'a mentionné dans la section précédente, nous abordons ici, pour une forme spécifique de la distribution des couplages, l'effet de l'augmentation du nombre de spins sur la formation des états sombres. Comme pour les tracés de la sous-section précédente, ceux de cette partie du manuscrit ont été faits pour plusieurs valeurs du nombre de spins, mais en s'assurant de toujours garder le même couplage total : la même somme sur les couplages.

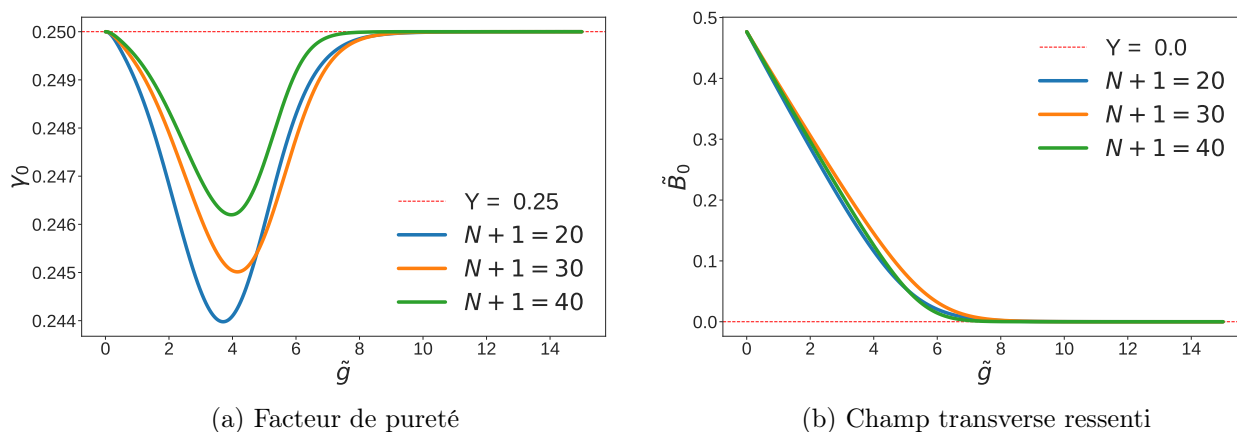


FIGURE 5.9 – Evolution du facteur de pureté et de la composante plane du champ magnétique effectif du spin central en fonction du nombre de particules dans le système. Ici, la configuration déformée est donnée par $|- - + - - + \dots\rangle$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j \sim 1,979(N+1-0.5j)$, pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.

Dans les figure 5.9a et 5.9b, le même état propre sombre utilisant les mêmes paramètres que dans la figure 5.2 est présenté pour une variété de tailles de bain. Les tracés étant faits en terme du paramètre g renormalisé par le couplage total de sorte que même si celui-ci changeait nous comparerions des échelles équivalentes. On remarque bien que la chute de la pureté du spin central est systématiquement limitée à une gamme plutôt similaire de couplages mais que la profondeur de cette chute est réduite lorsqu'on augmente le nombre de spins du bain. On confirme donc que ce n'est pas le couplage total qui contrôle cette déviation, puisque pour un couplage total identique, il est possible de réduire cette plage où l'état n'est pas parfaitement sombre en répartissant ce couplage total sur plus de spins. En conjonction avec les résultats de la sous-section précédente, on comprend bien que dans la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$, la structure de l'état sombre devrait être maintenue pour n'importe quelle valeur de g (comme c'est le cas en l'absence de champ magnétique dans le plan XY), à condition qu'un grand nombre de

spins du bain soient couplés de façon importante : à condition que les couplages Γ_k diminuent suffisamment lentement pour que la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ diverge.

On constate aussi sur la figure 5.10 que dans tous les cas, les états sombres sont polarisés selon \hat{z} et que l'augmentation du nombre de spins réduit la valeur du couplage renormalisé à laquelle l'état sombre est parfaitement formé ($\gamma_0 = \frac{1}{4}$).

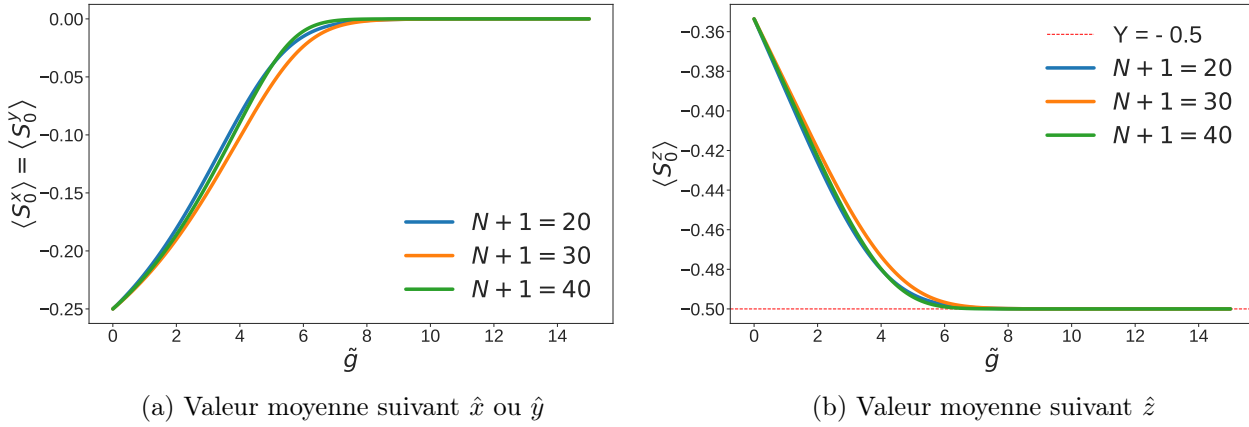


FIGURE 5.10 – Valeurs moyennes du spin central en fonction du nombre de particules dans le système. Ici, la configuration déformée est donnée par $| - - + - - + \dots \rangle$, les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j \sim 1,979(N+1-0.5j)$, pour $j = 1 \dots 29$ et le champ magnétique est orienté de $\theta \approx \frac{\pi}{4}$ selon l'azimut.

Tous les résultats des deux dernières sous-sections semblent donc indiquer que le comportement précis est au final contrôlé par un nombre effectif de spins, de sorte qu'un petit nombre de spins tous couplés de façon importante ait à un comportement analogue à un grand nombre de spins dont seul une partie est couplé de façon importante.

5.3.6 Stabilité des états sombres suivant une orientation donnée du champ magnétique

Il avait été initialement considéré comme envisageable la possibilité de trouver, en présence d'un champ magnétique d'orientation quelconque, des états sombres dans lesquels le spin central peut aussi s'orienter dans un direction quelconque. Par contre, ayant, dans ce chapitre, vérifié l'existence et l'universalité (à couplage suffisant) des états sombres, nous avons aussi clairement observé qu'ils sont systématiquement tels que le spin central formera un état pur ($|\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$) polarisé uniquement suivant \hat{z} .

Cette dernière section présente tout de même des résultats comparant diverses orientations du champ magnétique appliqué, toujours pour une même amplitude du champ mais un angle azimutal qui varie. Les courbes de la figure 5.11a montrent que plus le terme $|\cos \theta|$ est petit et donc plus le champ appliqué a une forte composante dans le plan XY, plus le spin central se retrouve corrélé au bain.

Puisque le champ magnétique total a la même magnitude pour chacune des courbes, on comprend clairement que la réémergence des états sombres à fort couplage est bien contrôlée exclusivement par l'importance des composantes dans le plan xy du champ magnétique appliqué au spin central (figure 5.11b) ; composantes responsable de la brisure de symétrie $U(1)$ du système

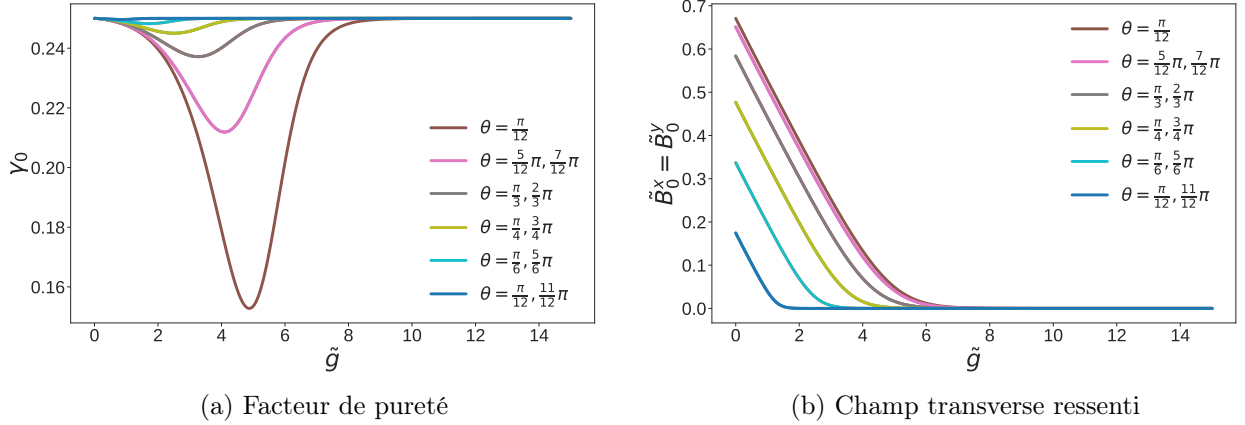


FIGURE 5.11 – Evolution du facteur de pureté et de la composante plane du champ magnétique effectif du spin central en fonction de différentes orientations du champ magnétique extérieur. Nous considérons un état donné dans un système de $N+1 = 30$ particules. L'orientation du champ magnétique évolue dans $]\pi, 12, \pi[$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N+1 - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et la configuration déformée est donnée par $|- - + - - + \dots\rangle$.

considéré. Ces résultats restent donc totalement cohérents avec le mécanisme Overhauser proposé comme en témoigne encore la corrélation parfaite entre l'annulation du champ transverse ressenti et la retour d'un état pur du spin central. Naturellement, plus la composante transverse du champ est importante et plus un couplage élevé devient nécessaire pour permettre la création d'un champ d'Overhauser suffisant pour l'annuler, rétablissant de manière effective un modèle de type XX en champ orienté selon \hat{z} qui permet ces états sombres.

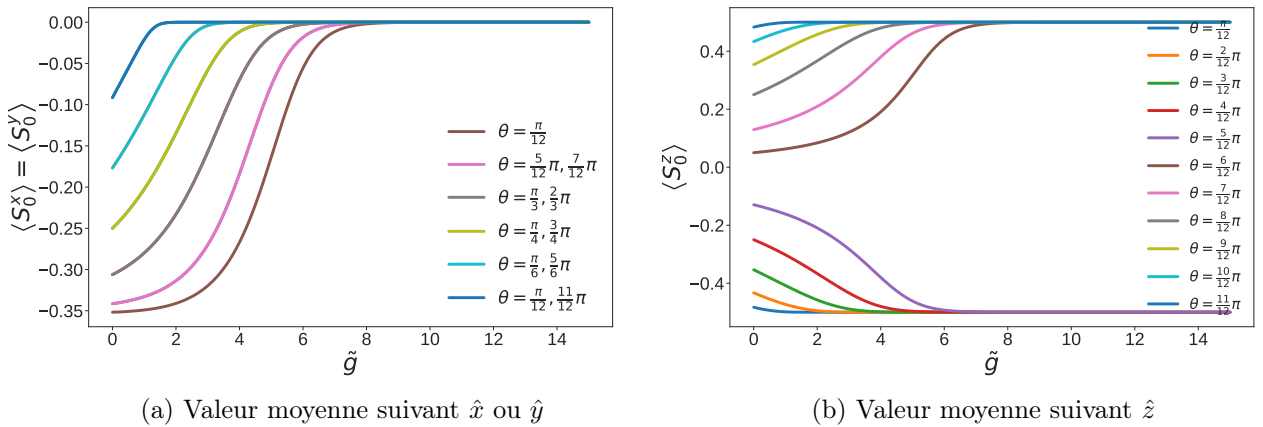


FIGURE 5.12 – Valeurs moyennes du spin central en fonction de différentes orientations du champ magnétique extérieur. Nous considérons un état donné dans un système de $N+1 = 30$ particules. L'orientation du champ magnétique évolue dans $]\pi, 12, \pi[$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_j = 1,979(N+1 - 0.5j)$ pour $j = 1 \dots 29$ et la configuration déformée est donnée par $|- - + - - + \dots\rangle$.

Sur les figures 5.12a et 5.12b présentant les valeurs moyennes du spin central, pour ces

différentes orientations du champ magnétique, on voit bien aussi que la valeur du spin suivant \hat{x} s'annule moins efficacement lorsque le champ s'éloigne de l'axe \hat{z} . La valeur de la projection suivant \hat{z} du moment magnétique tend, identiquement, plus vite vers ± 0.5 lorsqu'on se rapproche de \hat{z} figure 5.12b. Notons aussi le changement de signe du moment magnétique suivant \hat{z} vient du $\cos \theta$ selon que $\theta \in [0, \pi/2[$ ou $\theta \in]\pi/2, \pi]$.

5.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre nous avons su d'abord démontrer l'intégrabilité des modèles XX avec champ magnétique arbitraire et donc en présence de composantes dans le plan XY brisant la symétrie $U(1)$. Nous avons aussi pu vérifier que ces modèles permettent des états sombres, formant un sous-espace de Hilbert du modèle considéré, mais aussi qu'ils sont indépendants du choix spécifique des couplages (universels) et qu'ils restent, peu importe l'orientation du champ magnétique dans le système.

Par contre, dans ce qui pourrait sembler être une conclusion paradoxale, ces résultats montrent que : dans un modèle de spin central de type XX avec une composante transverse de champ magnétique, le spin central doit être fortement couplé au bain pour former un état pur dans lequel il arrive à se décorréler de celui-ci. Afin d'y parvenir, le bain de spins s'organise toujours de manière à compenser le champ transverse appliqué au spin central. On ramène ainsi, de manière effective, le système au problème en champ orienté selon \hat{z} dans lequel les états sombres sont tels que le spin central reste polarisé suivant \hat{z} . Selon le détail des couplages du spin central à son environnement, les états sombres peuvent nécessiter des couplages plus ou moins importants pour arriver à se former.

Au vu de ces résultats, l'argument selon lequel les états sombres se forment grâce à l'existence d'une direction privilégiée (perpendiculaire au plan XY) selon laquelle le spin central, une fois polarisé, sera complètement découplé (et donc décorrélé) du bain, il devient difficile d'envisager l'existence d'états sombres dans des modèles n'ayant pas cette direction privilégiée sans couplage.

Dans le chapitre suivant nous étudierons tout de même les états propres des modèles R-G de type XXX avec champ magnétique arbitraire, à la recherche d'états sombres. Dans ce cas, l'isotropie des couplages implique que peu importe l'orientation du spin central, celui-ci sera toujours explicitement couplé aux spins du bain. On comprendra donc dès maintenant que, si des états sombres peuvent être trouvés, dans les modèles XXX le mécanisme expliquant leur présence sera nécessairement différent.

Chapitre 6

Etats sombres dans les modèles de R-G de type XXX, avec champ arbitraire

"Tout grand progrès scientifique est né d'une nouvelle audace de l'imagination." John Dewey

"L'imprévisible est dans la nature même de l'entreprise scientifique. Si ce qu'on va trouver est vraiment nouveau, alors c'est par définition quelque chose d'inconnu à l'avance." Francois Jacob

Au chapitre précédent, nous avons étudié l'impact sur la formation des états sombres dans les modèles de type XX de R-G, de l'ajout d'un champ magnétique orienté suivant une direction quelconque de l'espace. Il a été constaté que les états sombres continuent d'exister mais seulement à couplage suffisamment fort. Le résultat s'expliquait bien par le fait que le bain de spins environnants s'organise de manière à générer un champ magnétique qui vient compenser la composante dans le plan XY du champ magnétique appliqué au système. Ainsi le spin central se retrouve, exactement comme en l'absence de composante transverse du champ [6, 7], à être polarisé suivant la direction \hat{z} perpendiculaire au plan XY. L'absence de couplage selon \hat{z} rend alors intuitif le fait qu'un spin central, polarisé selon cet axe, puisse demeurer complètement décorrélé du bain.

L'ajout des couplages entre le spin central et chaque spin du bain selon la direction \hat{z} modifie radicalement le modèle en ce sens qu'il n'y a alors plus de direction privilégiée et que, peu importe son orientation, le spin central resterait alors couplé au bain. Par conséquent, si pour les couplages isotropes (modèles de type XXX) étudiés dans ce chapitre, des états sombres existent, ce sera nécessairement par un mécanisme différent de ce qui a été observé dans les modèles de R-G, de type XX.

De plus, grâce à la symétrie complète du modèle isotrope sous réorientation du champ magnétique, on sait que dans un état sombre nécessairement caractérisé par l'alignement du spin central dans une direction donnée (un état pur ; sur la sphère de Bloch), il deviendra possible de contrôler le qubit d'intérêt. En effet, par rotation du champ magnétique externe, l'état sombre sera aussi réorienté spatialement et, par conséquent, l'état du spin central pourra être déplacé sur la sphère de Bloch. Cette capacité d'explorer la sphère de Bloch est nécessaire pour qu'un système à deux niveaux soit un qubit utilisable. En plus d'être contrôlables, ces états sombres seraient aussi résistants à la décohérence, puisque le qubit y est alors décorrélé des spins environnementaux réunissant donc deux des éléments clés à la réalisation d'un qubit idéal. Il devient donc, particulièrement intéressant, d'étudier ce système de type XXX dans l'espoir d'y trouver

aussi, du moins dans certaines circonstances, un sous-espace d'états sombres.

6.1 Modèles

Ce chapitre s'intéresse aux modèles complètement isotropes en présence d'un champ magnétique arbitrairement orienté. Sa paramétrisation est donc celle donnée à l'éq. 2.4 pour la classe rationnelle, avec $C_0 = 0$ afin d'assurer l'isotropie complète. Alternativement, ils correspondent aussi, tel que déjà mentionné dans cette thèse, à la limite isotrope des modèles non-antisymétriques (de type XYZ) décrits par [89] ; limite obtenue quand les paramètres d'anisotropie J_x , J_y et J_z sont identiques, tous trois égaux à J .

Pour rappel, le modèle d'intérêt s'écrit comme :

$$H_0 = g \sum_{k=1}^{N-1} \Gamma_k (S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + S_0^z S_k^z) + \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \tilde{B}_0^\alpha S_0^\alpha, \quad (6.1)$$

et toutes les constantes de couplage Γ_k , de même que les trois composantes \tilde{B}_0^α du champ magnétique peuvent être choisies arbitrairement. Notons qu'ici N est le nombre total de spin du système : 1 spin central et $N - 1$ spins dans le bain. Ce modèle de type XXX est celui pour lequel l'approche des équations quadratiques [27] et les premiers facteurs de forme basés sur les valeurs propres [29, 30, 33] ont été développés et on sait donc par expérience qu'elles y fonctionnent de façon très efficace.

Pour un électron piégé dans une boîte quantique formée sur un gaz électronique 2D, la fonction d'onde de ce dernier sera étendue ayant, par exemple une enveloppe Gaussienne. C'est par l'interaction hyperfine de contact (de Fermi) que le spin de l'électron se couple aux spins nucléaires du substrat. Pour un spin nucléaire donné, son interaction avec le spin central sera proportionnelle au carré de la fonction d'onde électronique au point où se trouve le spin nucléaire. Compte tenu de ce que nous avons la pleine liberté sur le choix des constantes de couplage, nous les choisirons typiquement comme :

$$\Gamma_{0k} \approx \exp\left(-\frac{k}{N}\right). \quad (6.2)$$

une distribution exponentielle étant caractéristique des fonctions d'onde électroniques gaussiennes [29, 113, 114]. D'autres distributions de couplage seront tout de même étudiées dans l'une des sections à venir.

Ces couplages sont définis de manière à ce que le spin d'indice $k = N - 1$, le plus faiblement couplé au spin central, demeure malgré tout couplé de façon importante. Pour une fonction d'onde réelle, il existerait aussi naturellement plus de spins très faiblement couplés au spin central. On peut, tout de même, raisonnablement supposer que le comportement du système est principalement dominé par les spins environnementaux fortement couplés et que l'ajout d'un ensemble de spins plus faiblement couplés n'aurait pas d'impact sur les résultats génériques trouvés ici.

6.2 Existence des états sombres

Compte tenu de l'isotropie du système, toutes les orientations du champ magnétique mènent à des résultats identiques. Par conséquent, nous choisissons les composantes du champ magnétique identiques suivant chacune des directions de sorte que, grâce à l'isotropie du système étudié, les

valeurs moyennes des spins soient donc identiques suivant les trois directions \hat{x} , \hat{y} ou \hat{z} et nous n'en tracerons donc qu'une seule.

Comme pour les états sombres issus des modèles de type XX étudiés dans le chapitre précédent, les divers tracés obtenus ici résultent de la déformation continue, en fonction du paramètre g fixant la norme de couplages, d'une des configurations possibles à $g = 0$. Ces configurations à $g = 0$ étant les diverses séquences constituée d'un ou l'autre des deux états propres possibles de chaque spin en l'absence de couplages dans le système étudié (représentés par \pm).

Afin de mettre en évidence la présence d'états sombres, nous regardons d'abord la déformation de l'état à $g = 0$ dans lequel le spin central est dans son état de valeur propre maximale, $|+\rangle$ tandis que les spins du bain sont dans la configuration $C = |-\ +\ -\ +\ -\ +\ \cdots\ -\ +\ \rangle$ où, comme précédemment, les spins sont ordonnés par indice croissant et donc par couplage au spin central décroissant. À la figure 6.1a nous présentons d'abord les valeurs moyennes des spins (spin central en noir) tandis que la figure 6.1b présente les facteurs de pureté du spin central (en noir) mais aussi de chacun des spins du bain :

$$\gamma_j = \langle S_j^x \rangle^2 + \langle S_j^y \rangle^2 + \langle S_j^z \rangle^2, \quad (6.3)$$

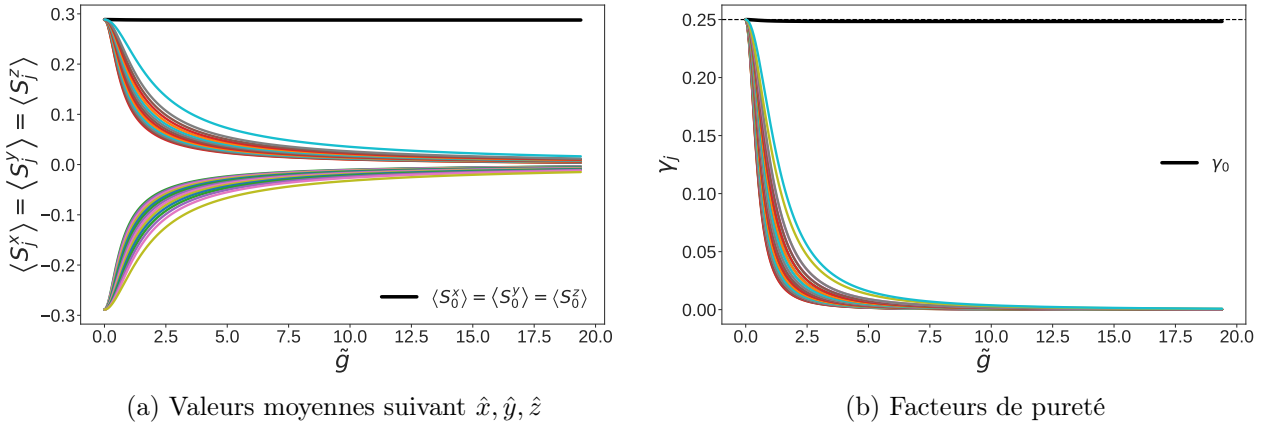


FIGURE 6.1 – Valeurs moyennes et facteurs de pureté dans un système de spin central constitué de $N = 31$ spins, lorsque l'état considéré est sombre et résulte de la déformation de l'état $C = |-\ +\ -\ +\ -\ +\ \cdots\ -\ +\ \rangle$ du bain à $\tilde{g} = 0$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$.

Alors que le facteur de pureté de chacun des spin du bain décroît rapidement à zéro, démontrant qu'ils sont tous fortement intriqués les uns aux autres, le spin central quant à lui maintient un facteur de pureté $\approx \frac{1}{4}$ pour toute valeur du couplage. Sa valeur est très légèrement inférieure à $\frac{1}{4}$, ce qui témoigne d'une intrication quantique minimale entre le spin central et le bain. Il est donc totalement légitime d'affirmer que des états sombres peuvent bel et bien exister dans les modèles de R-G XXX de spin $\frac{1}{2}$. Les valeurs moyennes du spin central, présentées à la figure 6.1a, montrent, quant à elles, que l'état du spin central ne change pas et qu'il reste donc, pour toute valeur du couplage, orienté dans la direction du champ appliqué. On note aussi que l'alternance des états des spins du bain est maintenue pour tout couplage de sorte que, en valeur moyenne chaque spin du bain semble avoir plus ou moins la même valeur moyenne, mais de signe opposé, que celui d'indice suivant.

Comme mentionné dans l'introduction, puisque le spin central est orienté dans la direction du champ magnétique appliqué, il devient donc possible, dans cet état sombre, de contrôler l'orientation du spin central. En effet, une rotation du champ appliquée, suffisamment lente pour rester adiabatique, permettra assurément au spin central d'être réorienté à notre guise, tout en le maintenant dans un état sombre sans intrication avec le bain.

En déformant un grand nombre d'autres configurations, nous pouvons aussi facilement constater l'existence d'un grand nombre d'états sombres dans l'espace de Hilbert associé aux modèles XXX de R-G à champ arbitraire. Ci-dessous, nous présentons par exemple, trois états, tous sombres, pour ce même système de 31 spins.

Notons que, compte tenu de l'échelle de la figure 6.2a, la déviation à un état parfaitement pur ($\gamma_0 = \frac{1}{4}$) est minimale (≈ 0.2484) pour tous ces états.

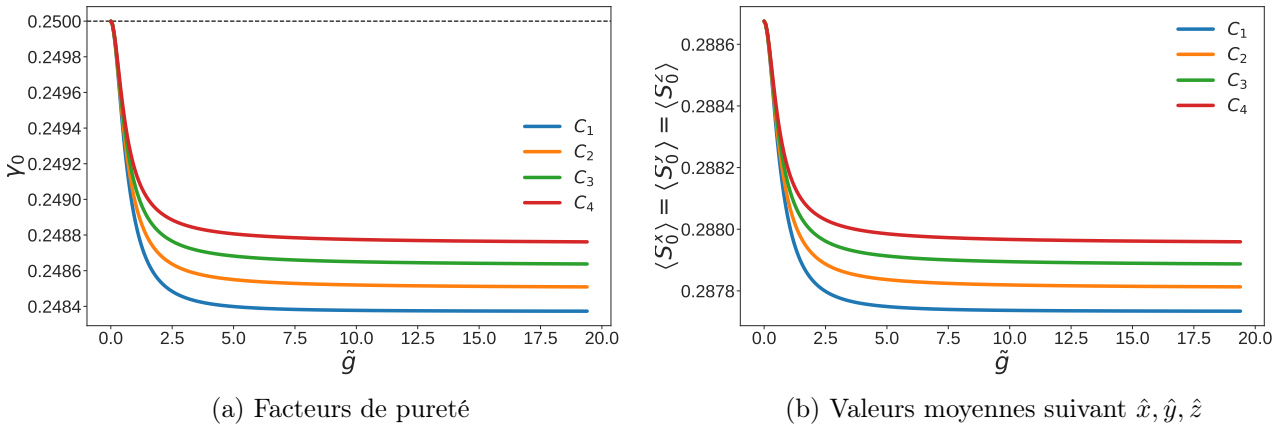


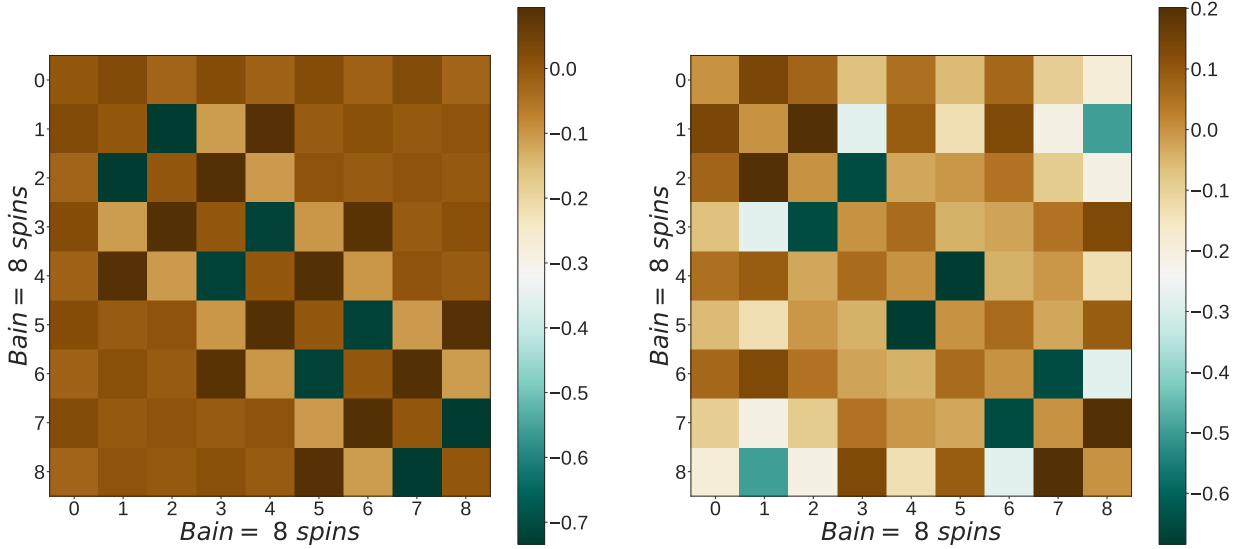
FIGURE 6.2 – Facteurs de pureté γ_0 6.2a et valeurs moyennes du spin central 6.2b dans 4 états sombres (états parents du bain à $\tilde{g} = 0$ donnés par : $C_1 = |-+-+--+\dots-+>$, $C_2 = |-+-+--+\dots-++++>$, $C_3 = |-+-+--+\dots-++++>$, et $C_4 = |-+-+--+\dots-++++>$). Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp(-\frac{k}{N})$, pour $k = 1 \dots 30$.

6.3 Formation des états sombres

Nous savons à présent que les états sombres existent aussi dans les modèles de R-G de type XXX mais que leur mécanisme de formation ne tient pas à l'existence d'une direction privilégiée selon laquelle le couplage s'annule. En effet, dans ces modèles, le spin central, indépendamment de son orientation, reste toujours couplé aux spins du bain. Il nous faut donc envisager un mécanisme différent qui expliquerait l'émergence des états sombres de type XXX. Pour ce faire, nous nous intéresserons dans un premier temps à l'organisation du bain de spins environnants dans un système de petite taille (9 spins au total).

Par le théorème d'Hellmann-Feynman, nous avons accès aux fonctions de corrélations à deux points $\langle \psi_n | \vec{S}_j \cdot \vec{S}_k | \psi_n \rangle$. En effet, la dérivée du hamiltonien 6.1 par rapport à Γ_k est simplement proportionnelle à $\langle \psi_n | \vec{S}_0 \cdot \vec{S}_k | \psi_n \rangle$. Il en est de même pour les dérivées des autres charges conservées et on arrive facilement à calculer l'ensemble des fonctions à deux points, puisqu'elles sont proportionnelles à $\frac{dr_j^n}{d\epsilon_k}$ (avec les couplages $\Gamma_{jk} \equiv \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k}$).

Les figures ci-dessous (6.3a et 6.3b) représentent ces fonctions de corrélation à deux points dans deux états sombres à forts couplages, issus respectivement de la déformation des configurations $C_4 = |+-+ - + - + - +\rangle$ et $C_5 = |+- - + - + - + +\rangle$ à $g = 0$. Sur chacune de ces figures, l'abscisse et l'ordonnée sont simplement les indices des spins, allant de 0 à 8 (puisque système de 9 spins), la valeur de la fonction de corrélation entre spin i et j étant évidemment visible à la position (i, j) de la figure. Le spin central porte l'indice 0 et son couplage aux spins du bain k décroît lorsque l'indice k augmente. Ainsi, le spin d'indice 1 est le plus fortement couplé au spin central alors que le spin d'indice 8 est le plus faiblement couplé audit spin central. L'échelle de couleur est telle que plus on tend vers le bas (vers la couleur verte), plus les corrélations entre les spins nous rapprochent du cas extrême $\langle \psi_n | \vec{S}_j \cdot \vec{S}_k | \psi_n \rangle = -\frac{3}{4}$ caractéristique de l'état singulet $\frac{|\uparrow_j \downarrow_k\rangle - |\downarrow_j \uparrow_k\rangle}{\sqrt{2}}$.



(a) Clusters de type A

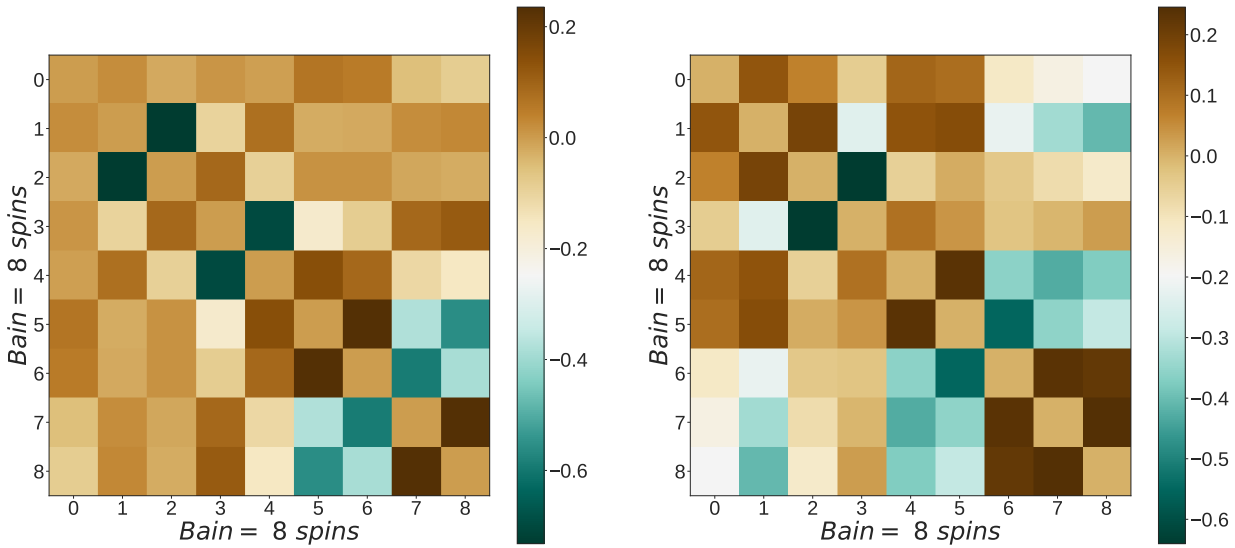
(b) Clusters de type B

FIGURE 6.3 – La figure 6.3a représente des clusters de type A issus de la déformation à forts couplages de $C_4 = |+-+ - + - + - +\rangle$. La figure 6.3b met en évidence des clusters de type B issu des de la déformation de $C_5 = |+- - + - + - + +\rangle$. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$, pour $k = 1 \dots 8$.

Dans la figure 6.3a, on remarque que le point de coordonnées $(1, 2)$ indique, de par sa couleur verte, une très forte corrélation négative entre les spins 1 et 2. En effet, on constate bien qu'ils forment un singulet presque parfait ($\langle \psi_n | \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 | \psi_n \rangle \approx -\frac{3}{4}$) et qu'ils sont donc aussi très faiblement couplés aux autres spins du bain. De la même façon, on remarque la formation de singulets entre les spins 3 et 4, 5 et 6 et 7 et 8. Puisque les états singulets sont, on le sait, des états de spin total nul, nous comprenons à présent la raison derrière le découplage du spin central caractérisant les états sombres. Le bain est en effet configuré de façon telle qu'il ne contient que des objets composites de spin (presque) nul avec lesquels le spin central n'interagit

pas. Puisque tous les spins du bain sont ainsi appariés en singulets, la présence d'un état sombre devient alors complètement explicable. Naturellement, dans cette configuration caractérisée par l'absence effective de couplage au bain, le spin central restera dans état pur (ou presque pur) orienté dans la direction du champ magnétique qui lui aura été appliqué.

En considérant les indices de spins comme des indices de position sur une chaîne, la configuration du bain dans la figure 6.3a, peut être vue comme l'organisation en états singulets des plus proches voisins d'une chaîne ouverte. Ce type de configuration rappelant un chaîne ouverte est ce que nous appellerons **clusters de type A**. En étudiant la figure 6.3b, on constate que l'état sombre qui y est présenté est dû au même phénomène, soit l'appariement de tous les spins du bain en singulets. Par contre, on y remarque une différence fondamentale en ce sens que des corrélations de type singulet se forment entre les spins d'indice 2 et 3, 4 et 5, 6 et 7 ainsi qu'entre les spins d'indices respectifs 1 et 8. Ce ne sont donc plus exclusivement les spins dont les couplages (indices k) sont les plus rapprochés qui forment des paires singulets. Ce type de construction rappelle une chaîne fermée, aux conditions périodiques, compte tenu de l'existence de ce singulet entre les spins "extrêmes". Pour distinguer ces deux scénarios, on parlera alors de **cluster de type B** quand s'établissent ces corrélations de type singulet entre spins dont les valeurs de couplage sont éloignées.



(a) Clusters de type A

(b) Clusters de type B

FIGURE 6.4 – Formation des singulets à deux et à quatre particules dans deux états sombres donnés d'un système de 9 spins. Ces états sont chacun issus des clusters de type A et des clusters de type B. Les constantes de couplage sont données par $\Gamma_k = 52.872 \exp(-\frac{k}{N})$, pour $k = 1 \dots 8$. Les configurations à $g = 0$ valent respectivement $C_6 = |+-+--++\rangle$ et $C_7 = |+---++\rangle$.

Notons que, selon nos observations, des clusters de type A peuvent se former dès que le bain contient deux spins, tandis que ceux de type B nécessitent au moins six spins pour être créés.

Alors que les figures 6.3a et 6.3b présentent des singulets formés exclusivement de deux spins, il est tout à fait possible de créer des singulets contenant plus de deux spins. En effet, l'addition des moments cinétiques de tout nombre pair de spins $1/2$ permet de créer des sous-espaces singulets, de spin total nul.

Les états sombres, à fort couplage, résultant de la déformation des configurations $C_6 = |+-+--++\rangle$, $C_7 = |+--+-++\rangle$, $C_8 = |+-+---++\rangle$ et $C_9 = |+---+-++\rangle$ sont présentés respectivement aux figures 6.4a, 6.4b, 6.5a et 6.5b. On y constate explicitement en 6.4a la formation de deux singulets à deux spins, ainsi que d'un singulet impliquant les quatre spins d'indices respectifs 5, 6, 7 et 8. La figure 6.5a quant à elle montre clairement une configuration de type A avec un singulet à deux spins (indice 1 et 2) et un deuxième singulet composé des 6 spins restants. Ce type de singulets composés de plus de deux spins est aussi clairement observable dans les clusters de type B tel que le montrent les deux autres figures.

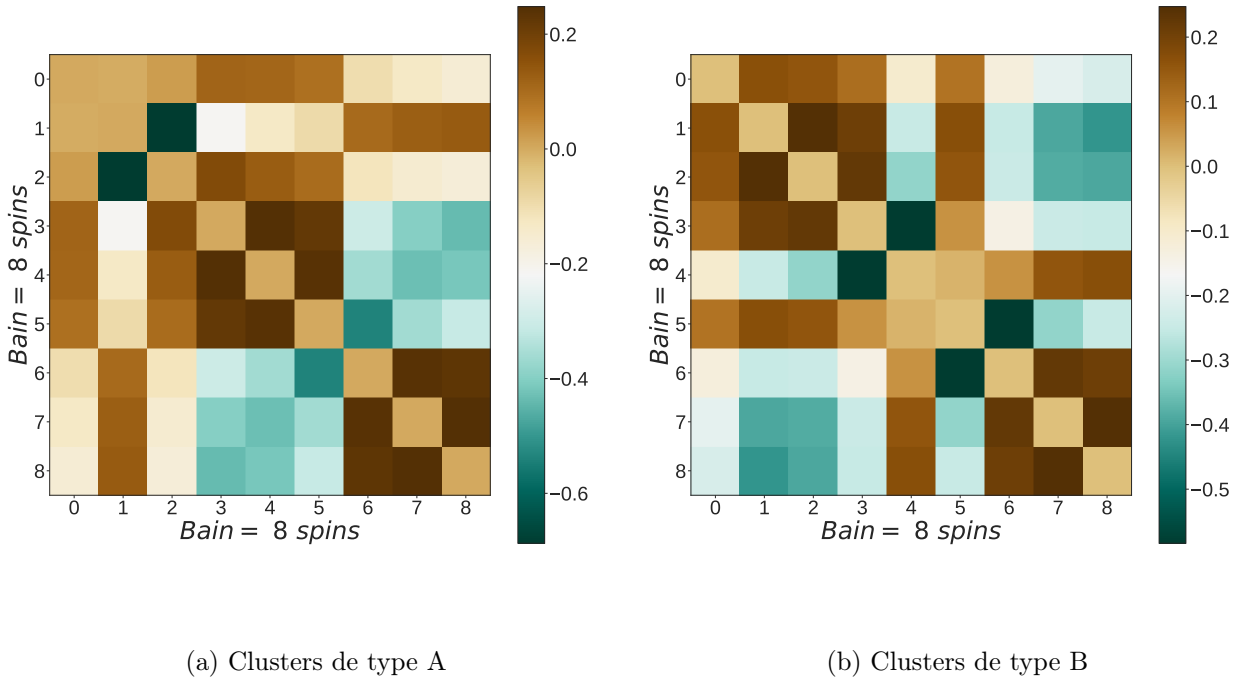


FIGURE 6.5 – Formation des singulets à deux et à six particules dans deux états sombres donnés d'un système de 9 spins. Ces états sont chacun issus des clusters de types A et des clusters de type B. L'ensemble des constantes de couplage est donné par $\Gamma_k = 12.620(N - 0.1k)$, pour $k = 1 \dots 8$ et les configurations à $g = 0$ valent respectivement $C_8 = |+-+---++\rangle$ et $C_9 = |+---+-++\rangle$.

Selon la taille du système, il est tout à fait possible d'obtenir un état sombre pour lequel le bain contiendrait à la fois des clusters de types A et B. Notons qu'il est aussi possible de trouver ce qu'on appellera des "**clusters à une particule**". Ces derniers étant caractérisés par des agrégats de spins du bain qui sont tous polarisés dans la même direction que le spin central. Comme vu dans les dernières figures, il est aussi possible de trouver des états sombres dans lesquels le bain contiendrait une variété de singulets à 4, 6, ... spins.

Afin de mieux saisir la restructuration du bain nous chercherons, dans la sous-section suivante,

à voir comment les différents clusters évoqués ci-dessus se forment et surtout à comprendre quel état parent (en absence de couplage) mène à une configuration donnée du bain à fort couplage.

6.3.1 Configurations génériques menant à des clusters de type A

Les approches numériques utilisées ici sont telles que, étant basées sur la déformation continue par augmentation progressive du couplage, on peut relier les états sombres à fort couplage à la configuration spécifique à $g = 0$ dont ils sont issus. L'ensemble des études numériques qui ont été faites permettent donc d'établir une liste complète des états parents (à $g = 0$) dont la déformation mène à des états sombres. Nous décrivons donc ici, dans un premier temps, les configurations qui se déforment en clusters de type A. Pour un spins central dans son état propre $+$ ou $-$, toute configuration des spin dans le bain à $g = 0$ qui est composée de N^i spins $-$ suivi du même nombre de spins $+$:

$$T_{T_A}^{i>0} = \left\{ \underbrace{-\cdots-}_{N^i} \underbrace{+\cdots+}_{N^i} \right\}, \quad (6.4)$$

sera déformée, à fort couplage, en un cluster de type A, plus précisément en un singulet formé des $2N^i$ spins en question. On trouvera donc un état sombre, contenant exclusivement des clusters de type A, en déformant n'importe configuration, à $g = 0$, dans laquelle l'état du bain est construit comme un succession de ces séquences $T_{T_A}^i$. Sont aussi permis la présence de "clusters à un spin" : $T_{T_A}^0 = \pm$ constitués d'un seul spin isolé devant être polarisé dans la même direction que le spin central.

Par exemple, pour un spin central $+$, une configuration à $g = 0$ du bain donnée par :

$$\left\{ \underbrace{- - ++}_{T_{T_A}^2} \underbrace{- +}_{T_{T_A}^1} \underbrace{+}_{T_{T_A}^0} \underbrace{- - - + ++}_{T_{T_A}^3} \underbrace{+}_{T_{T_A}^0} \right\}, \quad (6.5)$$

mènerait à un état sombre dans lequel les spins 1 à 4 formeraient un singulet à 4 spins, les spins 5 et 6 un singulet à 2 spins, le spin 7 resterait polarisé $+$, les spins 8 à 13 formeraient un sigulet à 6 spins et finalement le spin 14, resterait comme le spin 7 polarisé $+$ comme le spin central. On définit M_i comme étant le nombre de configurations $T_{T_A}^i$ présente à $g = 0$ et par conséquent, M_0 doit avoir la même parité que la taille du bain. Un bain de taille impaire nécessitera au moins un de ces clusters à un spin pour rester sombre à fort couplage

6.3.2 Configurations génériques menant à des clusters de type B

Les clusters de type B étaient caractérisés par l'existence d'un appariement en singulets de spins non-consécutifs. Les configurations à $g = 0$ qui sont déformées vers ce type d'états sombres sont génériquement de la forme :

$$T_{T_B}^{A_i, r} = \left\{ \underbrace{-\cdots-}_r A_i \underbrace{+\cdots+}_r \right\}. \quad (6.6)$$

A_i est ici n'importe quelle configuration issue d'une succession de plusieurs clusters de type A, c'est-à-dire n'importe quelle configuration telle qu'elles ont été construites à la section précédente. La taille de A_i peut être variable, mais elle doit être constituée d'une séquence de $T_{T_A}^i$. Ces spins

doivent ensuite être entourés par une série de r spins $-$ à gauche (indice k plus petits) et r spins $+$ à droite (indice k plus élevés).

Les configurations les plus génériques, en absence de couplages, dont la déformation mène à des états sombres peuvent maintenant être construite par n'importe quelle séquence des configurations menant au type B ou A, de toute tailles, et ordonnées de n'importe quelle façon. Le problème d'analyse combinatoire permettant donc de compter ce nombre d'états sombres sera d'ailleurs étudié dans une section subséquente, mais exclusivement pour le nombre d'états sombres de type A.

Toute autre configuration sera déformée à fort couplage vers un état clair. C'est le cas par exemple, en présence d'une séquence qui débiterait par par un spin $+$. Par exemple, alors que $T_{T_A}^1$ est déformée vers un état singulet de spin nul, la configuration inverse $\bar{T}_{T_A}^1$ serait elle plutôt déformée vers le triplet de spin 1 qui lui reste couplé et corrélé au spin central et mène donc à un état clair.

Le chiffre deux représente le nombre d'états possibles du spin central et $\delta_{N, M_0 + \sum 2iM_i}$ permet de s'assurer que le nombre de clusters est choisi de manière à ce que la somme des particules impliquées dans leur formation reste égale au nombre total de spins dans le bain.

Il est aussi certainement possible de dénombrer exactement le nombre d'états sombres possibles contenant des clusters de type B. Leur dénombrement serait par contre plus complexe en raison de la variabilité des configurations possibles. Malgré tout, à la lumière du résultat précédent comptant exclusivement une sous-classe spécifique d'états sombres, on peut affirmer sans risque qu'un nombre important d'états sombres existent dans les modèles de R-G XXX.

6.3.3 États sombres dans des modèles de tailles importantes

Afin de mieux mettre en évidence les propos tenus dans cette partie du chapitre, considérons maintenant les deux configurations suivantes du bain à $g = 0$

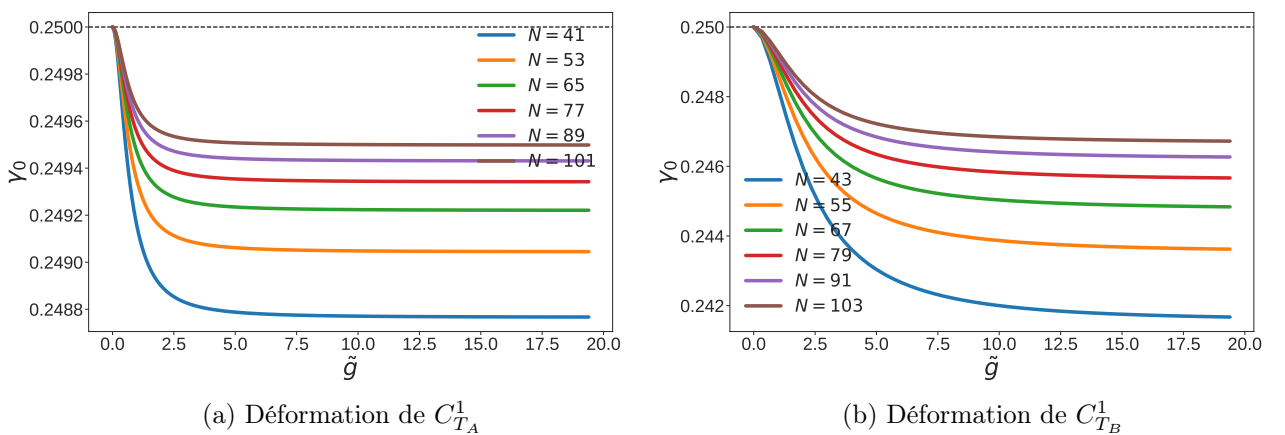
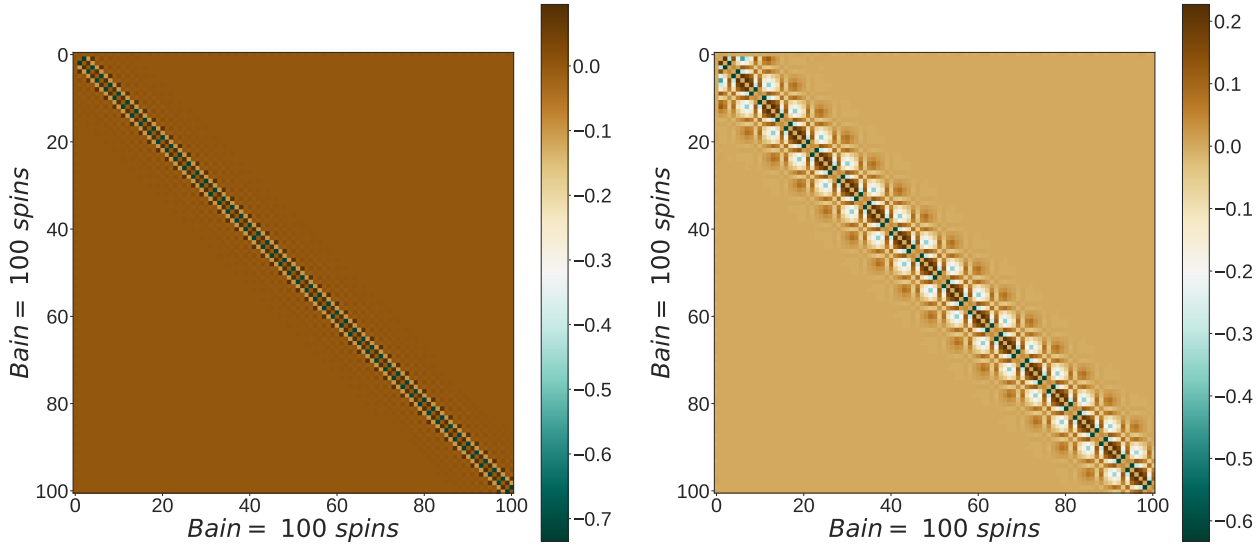
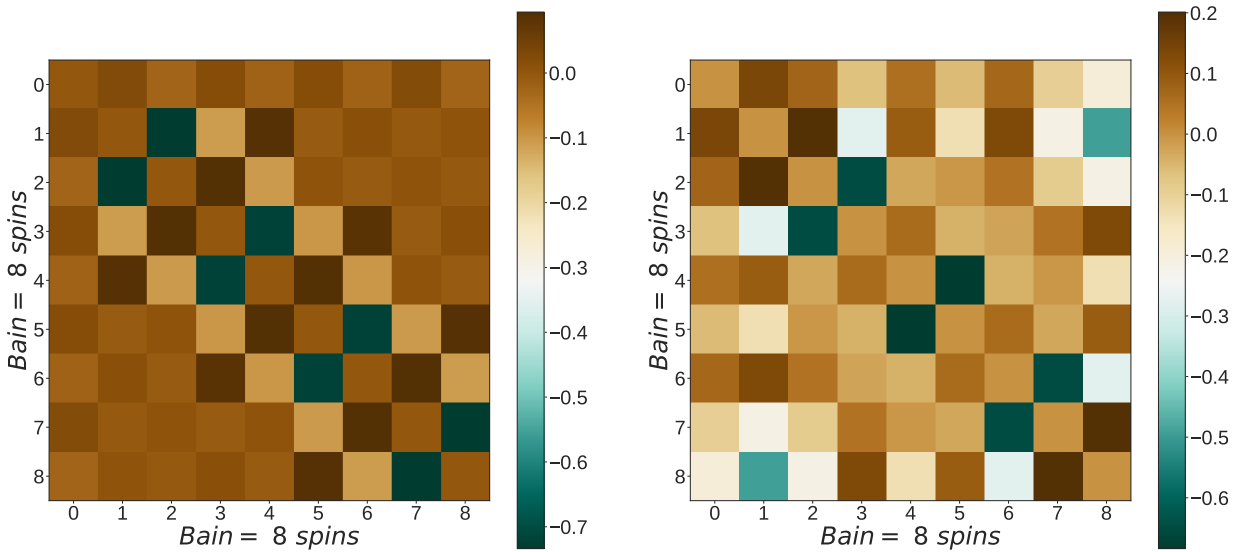


FIGURE 6.6 – Evolution du facteur de pureté γ_0 du spin central en fonction du paramètre \tilde{g} fixant la norme des couplages. Les tracés ci-dessus sont obtenus pour plusieurs valeurs du nombre de particules dans le système. L'ensemble des constantes de couplage est donné par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$ pour $k = 1 \dots N - 1$. Les états considérés sont sombres et résultent de la déformation de des configurations $C_{T_A}^1$ et $C_{T_B}^1$ du bain à $\tilde{g} = 0$.



(a) Déformation de $C_{T_A}^1$

(b) Déformation de $C_{T_B}^1$



(c) Zoom de la déformation de $C_{T_A}^1$ sur les six spins du bain les plus fortement couplés au spin central

(d) Zoom de la déformation de $C_{T_B}^1$ sur les six spins du bain les plus fortement couplés au spin central

FIGURE 6.7 – Dans le premier système, l'état représenté est celui issu de la déformation de $C_{T_A}^1$. Dans le second système l'état représenté est issu de $C_{T_B}^1$. L'ensemble des constantes de couplage est donné par $\Gamma_k = 52.872 \exp\left(-\frac{k}{N}\right)$ pour $k = 1 \dots N - 1$.

$$C_{T_A}^1 = \{T_{T_A}^1 T_{T_A}^1 T_{T_A}^1 \dots\} \quad \text{et} \quad C_{T_B}^1 = \left\{ T_{T_B}^{-+-+,1} T_{T_B}^{-+-+,1} T_{T_B}^{-+-+,1} \dots \right\}, \quad (6.7)$$

où $T_{T_A}^1 = \{-+\}$ et $T_{T_B}^{-+-+,1} = \{-T_{T_A}^1 T_{T_A}^1 +\} = \{- - + - ++\}$.

Dans chacune des configurations ci-dessus, le facteur de pureté γ_0 du spin central est calculé en déformant de manière continue le paramètre de couplage

$$\tilde{g} = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} / |B|. \quad (6.8)$$

La figure 6.6a ci-dessous présente ce facteur de pureté pour des bains de différentes tailles contenant de 40 à 102 spins soit $N = 41$ à $N = 103$ en comptant le spin central.

D'abord, on constate bien que la structuration des spins du bain est bien, dans tous ces cas, telle que le spin central reste, en bonne approximation, découplé de celui-ci. En effet, les facteurs de pureté observés restent systématiquement proches de $\frac{1}{4}$. On constate par contre que, pour les choix spécifiques de distribution de couplage faite ici, l'augmentation du nombre de spins dans le bain mène, dans les deux cas, à un état plus pur du spin central, un état "plus sombre".

De plus, pour un même nombre de particules dans le bain, on remarque que les courbes du facteur de pureté issues de $C_{T_A}^1$ (Fig 6.6a) sont plus proches de 0.25, que celles provenant de $C_{T_B}^1$ (figure 6.6b). Cette constatation est directement reliée au nombre de particules constituant chaque cluster des différentes configurations en absence de couplages. Ce résultat semble indiquer que la formation de singulets entre spins de couplages plus différents se fait de façon moins efficace, menant par conséquent à un spin résiduel du bain qui réduira la pureté du spin central en menant à un faible couplage au bain. En effet, pour que des états singulets parfaits puissent être états propres du système, il serait nécessaire que tous les spins impliqués dans la formation de ce singulet soient sur un pied d'égalité : qu'ils soient donc tous couplés identiquement au spin central. Or, puisqu'ici les couplages sont différents, la façon de se rapprocher au mieux de singulets parfaits est d'impliquer dans leur formation les spins seulement les plus proches en couplage. Or, par définition, le cluster de Type B implique la formation de singulets entre spins dont les couplages sont plus différents et mènera par conséquent à une réduction du facteur de pureté. Cette analyse sera d'ailleurs appuyée par l'étude de différentes distributions de couplage qui sera faite à la section suivante.

Afin de compléter l'étude de ces cas spécifiques pour des bains de grande taille, nous traçons à la figure 6.7 les fonctions de corrélation à deux points $\langle \psi_n | \vec{S}_j \cdot \vec{S}_k | \psi_n \rangle$ entre toutes les paires de spins existant dans les deux systèmes pour respectivement 100 et 102 spins dans le bain. On y observe que le bain se structure, et ce sur toutes les échelles d'énergie disponibles, en formant une simple répétition de clusters identiques. Comme dit précédemment, le type B implique des "singulets imparfaits", compte tenu qu'il résulte de l'appariement entre des spins à couplages plus différents.

Nous avons aussi observé que la pureté du spin central augmentait avec le nombre de particules dans le système (Fig 6.6). Ainsi, dans la limite thermodynamique ($N \rightarrow +\infty$), on peut penser que tout état sombre résultant de la déformation d'une quelconque configuration à $g = 0$ issue de $C_{T_A}^1$ ou de $C_{T_B}^1$ en fonction de la norme des couplages conduira toujours à des états sombres presque parfaits. Compte tenu du choix de distribution des couplages $\Gamma_k \propto \exp(-\frac{k}{N})$ dont le support est fini, l'augmentation du nombre de spins dans le bain a pour effet de rapprocher les couplages les uns des autres. Par conséquent, la formation des singulets à 2 spins dans le cas de type A mais aussi dans le cas de type B sera favorisée puisque tous les singulets seront formés à partir d'un ensemble de spins dont les couplages sont plus similaires. On favorise,

ainsi la formation d'un singulet parfait et donc d'un état sombre parfait, caractérisé par un spin central dans un état pur.

6.4 Impact des couplages sur la formation des états sombres

Alors que dans les modèles XX de spin central avec champ quelconque étudiés dans le chapitre précédent, les états sombres, lorsqu'ils existent, restaient présents indépendamment de la distribution des couplages de chaque spin au spin central. Ici, pour les états sombres de type XXX, dont le mécanisme de formation est différent, nous semblons déjà avoir une indication claire du fait que la distribution spécifique des couplages aura un impact selon que ces derniers soit proches ou éloignés les uns des autres.

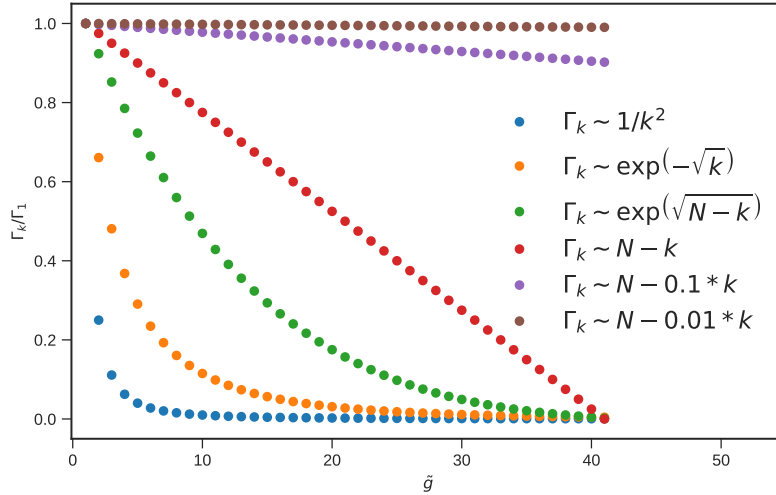


FIGURE 6.8 – Différentes manières de coupler le spin central au bain, dans les modèles de R-G de type XXX avec champ magnétique orienté selon une direction quelconque.

Nous considérerons donc six distributions de couplage différents, allant des couplages tous proches les uns des autres ($\Gamma_k \equiv N - 0.001k$) à des couplages décroissant rapidement ($\Gamma_k \equiv \frac{1}{k^2}$) et donc tels que les deux spins les plus fortement couplés par exemple auront des valeurs bien différentes de Γ .

Contrairement à la forme de couplages exponentielle utilisée au début de ce chapitre ou tous les couplages présents étaient relativement importants, les couplages utilisés ici peuvent maintenant aussi inclure des spins environnants très faiblement ressentis par le spin central.

$$C_{Bain} = \{- + - + - + - + - + - + - + - + - + \dots\}, \quad (6.9)$$

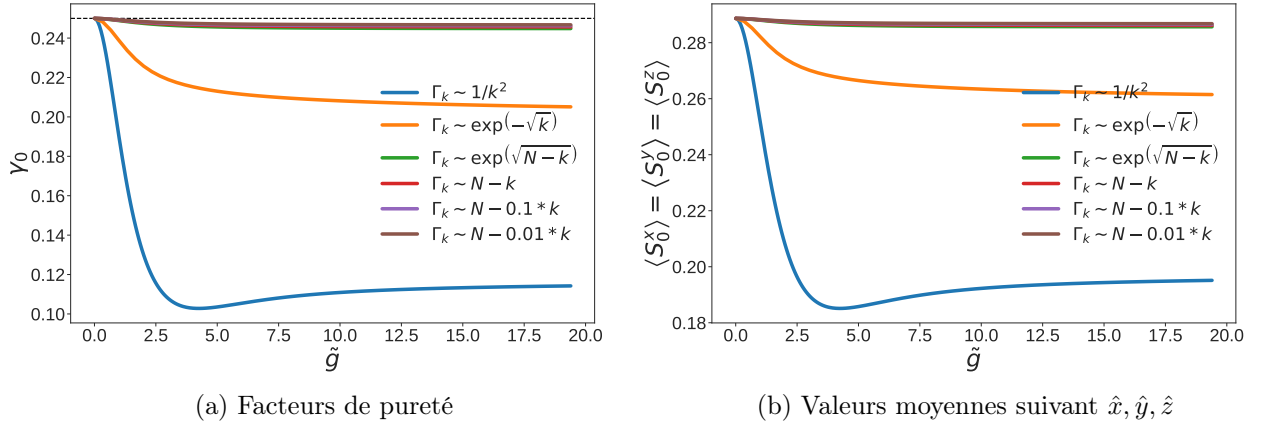


FIGURE 6.9 – Evolution du facteur de pureté et des valeurs moyennes du spin central en fonction des différents choix de couplages. Le système considéré est constitué de 41 particules et la configuration du bain à $g = 0$ est C_{bain} .

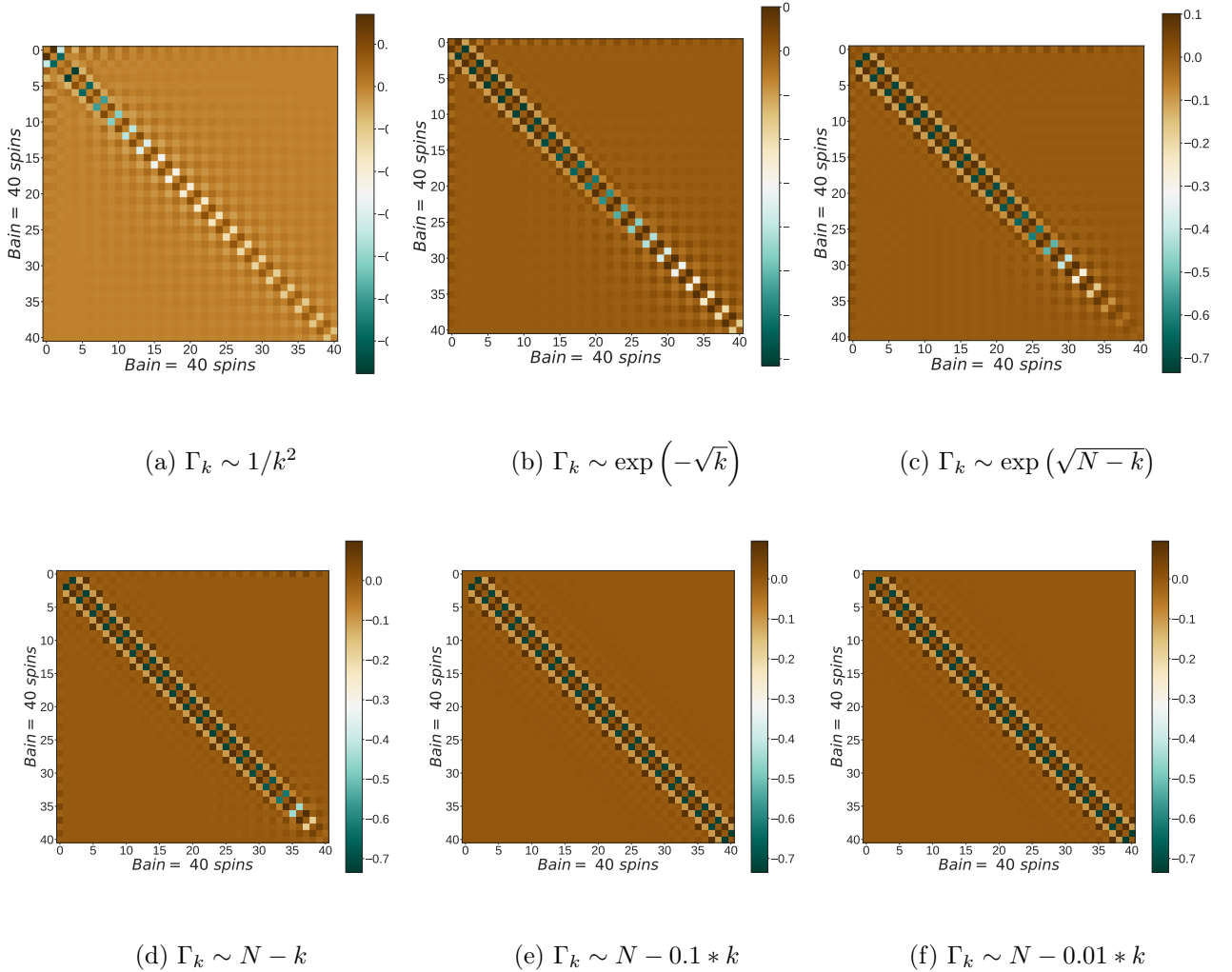


FIGURE 6.10 – Fonctions de corrélations à deux points, issues de la déformation de C_{Bain} , pour différentes formes de couplages. Le système considéré contient 41 spins.

Dans ce contexte, la limite N grand sera différente de celle considérée dans le cas des couplages définis en 6.2, en ce sens que ici l'ajout de spins peut simplement mener à l'ajout d'un ensemble de spins très faiblement couplés. En considérant par exemple les couplages définis en $\frac{1}{k^2}$ (figure 6.8), nous constatons numériquement que à partir d'un certain nombre N_0 ($N \sim 10$) de spins dans le bain, le système se comportera de la même façon, et ce peu importe la taille de ce bain. En effet, au-delà de 10 spins, les couplages entre le spin central et les spins nucléaires qui suivront seront presque nuls et ils n'auront aucun impact sur l'état du spin central.

Nous étudions donc spécifiquement, pour 40 spins nucléaires dans le bain, l'état sombre obtenu par la déformation de la configuration :
menant normalement à la formation d'une série de singulets à deux spins impliquant les deux spins d'indice k et $k + 1$ et donc de valeurs de couplage les plus proches possible.

Les figures ci-dessus montrent que lorsque, dans les modèles de type XXX avec champ magnétique arbitraire, les couplages sont très espacés les uns des autres (voir Fig 6.8), le spin central reste fortement corrélé au bain (figures 6.9 et 6.10). C'est le cas notamment de la courbe bleue $\Gamma_k \propto 1/k^2$ pour laquelle le facteur de pureté $\gamma_0 \approx 0.11$ ne peut certainement pas être vue comme définissant un état pur (un état sombre). Tel que mentionné précédemment, l'ajout de spins additionnels faiblement couplés n'y changerait rien. Dans la figure 6.10 ci-dessous, on présente pour ces six cas, les fonctions de corrélation spin-spin.

Lorsque le spin central est couplé presque identiquement à chaque spin du bain (graphe marron Fig 6.8), ceux-ci s'organisent de manière à former des singulets de plus en plus parfaits et donc de spin tendant de plus en plus vers 0. L'ensemble de ces singulets permettent donc au bain de rester découplé du spin central (figure 6.9a et 6.9b). On remarque que, dans les cas où certains spins sont faiblement couplés, sur les figures 6.10a, 6.10b et 6.10c par exemple, ces spins faiblement couplés restent peu corrélés entre eux ne formant pas explicitement de singulet. Par contre, ce n'est pas pour cette raison que le spin central reste explicitement corrélé au bain puisqu'en fait ces spins lui sont faiblement couplés. En fait, c'est véritablement parce que les spins fortement couplés ne forment pas de singulets parfaits que l'état sombre ne peut se former. Alors que le spin 1 et deux formeraient un singulet décorrélé du spin central si les couplages Γ_1 et Γ_2 étaient (presque) égaux, on remarque en haut à gauche de la figure 6.10a que la grande différence entre ces deux couplages empêche cette formation d'un singulet. Les points (1, 2) et (2, 1) restent en effet loin de la valeur $-\frac{3}{4}$ et on remarque aussi la présence de forts corrélations entre le spin central et le spin d'indice 2.

À la lumière de ces résultats, on comprend aussi que la formation de grands clusters et donc de singulets impliquant un grand nombre de spins ne pourra se faire de façon aussi efficace que pour les plus petits clusters. En présence d'une distribution de couplage non-uniformes, les états sombres les plus parfaits seront donc ceux où le bain est organisé par singulets formés de seulement deux spins consécutifs $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$, toutes les autres configurations (comme le sigulet à quatre spins : $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$) impliquant des spins dont les constantes de couplage seront plus différentes.

6.5 Nombre d'états sombres dans un bain de N-1 particules

Les états sombres peuvent être comptés dans le sous espace de Hilbert qui leur est associé [6]. En effet, pour un nombre donné de particules dans le bain, la formation d'un état sombre issu de la déformation d'une configuration C $g = 0$ donnée est assurée lorsque

- Le spin le plus faiblement couplé au spin central de manière non négligeable est polarisé dans le même sens que celui-ci en absence de couplages.

- En absence de couplages dans le système, des séquences N^i de particules polarisées dans le sens inverse du spin central forment des clusters de type A ou de type B de spin presque nul avec des séquences N^i de particules polarisées suivant le sens du spin central. i fixe le nombre de particules dans la séquence considérée, avec $1 \leq i \leq \frac{N-\eta}{2}$. η est la quantité qui permet de maintenir i entier. $\eta = 0$ si N est paire et $\eta = 1$ si N impaire.
- Les spins ne formant pas de clusters en absence de couplages sont parallèles au spin central, nous les avons appelé clusters à un spin ou à une particule.

6.5.1 Nombre d'états sombres issus des clusters de type A

Pour un ensemble de M_i donné, caractérisant le nombre de clusters de taille $2i$ qui se sont formés, il nous suffit ici de compter le nombre de façons que l'on a de les ordonner. En sommant ce résultat sur les différents ensembles de M_i possibles, on trouvera le nombre total de configurations à $g = 0$ menant à des états sombres en cluster de type A.

Notons d'abord qu'il faut impérativement que

$$N = M_0 + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N-M_0}{2}} i * M_i, \quad (6.10)$$

où M_0 est le nombre de "clusters à un spin" polarisés de manière parallèle au spin central. Afin d'assurer la formation des autres clusters, M_0 doit être de même parité que le nombre de spins dans le bain. Pour un ensemble donnée de nombre M_i , on a donc en tout :

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^{\frac{N-M_0}{2}} M_i. \quad (6.11)$$

objets, pour lesquels on doit maintenant simplement dénombrer les différentes façons de les ordonner.

Tous les clusters d'une même taille sont indiscernable, mais chaque type de cluster (taille $2i$) est différent des autres types et sont donc discernables les uns des autres . Ainsi, pour un bain de 8 spins par exemple, les configurations issues de quatre clusters à un spin ($M_0 = 4$) et deux clusters à deux spins ($M_1 = 2$) vérifient la relation 6.10 (tous les spins font partie d'un cluster) et conduisent donc à des états sombres lorsqu'on les déforme à couplage fort. Pour ce choix de configuration de clusters, on a donc six objets à ordonner (six sites sur lesquels les poser) et le comptage du nombre d'états sombres se réduit à un problème de dénombrement. En effet, dans ce cas de figure, les configurations en absence de couplages sont obtenues à partir de deux types de clusters à savoir, ceux à un spin et ceux à deux spins. Ainsi obtenir le nombre d'états sombres revient à trouver le nombre de façons de placer les 4 clusters à un spin dans quatre sites choisis parmi les six sites, ensuite de placer les deux clusters à deux spins dans les deux sites restants; On aura alors $2C_6^4 C_2^2 = 30$ configurations conduisant à la formation des états sombres pour ce choix spécifique de clusters. Le facteur deux tenant compte du fait que les deux états possibles du spin central \pm mènent tous deux à un état sombre. Outre les configurations $\{M_0 = 4, M_1 = 2\}$, il existe d'autres configurations d'un bain à huit spins satisfaisant la condition 6.10. Parmi celles-ci, nous avons les configurations $\{M_2 = 2\}$, $\{M_1 = 1, M_3 = 1\}$ et $\{M_4 = 1\}$. Ainsi obtenir tous les états sombres issus des clusters de type A revient à sommer le nombre d'états sombres trouvés dans chaque configuration. De manière générique, le nombre total d'états sombres issus des clusters de type A vaudra alors

$$N_{TA} = 2 \sum_{M_0} \sum_{M_1=0}^{\frac{N-M_0}{2}} \cdots \sum_{M_{\frac{N-M_0}{2}}=0}^{\frac{N-M_0}{2}} \left(\frac{M!}{\prod_{i=1}^{\frac{N-M_0}{2}} M_i!} \right) \delta_{N, M_0 + \sum 2i M_i}. \quad (6.12)$$

Le chiffre deux représente le nombre d'états possibles du spin central et $\delta_{N, M_0 + \sum 2i M_i}$ permet de s'assurer que le nombre de clusters est choisi de manière à ce que la somme des particules impliquées dans leur formation reste égale au nombre total de spins dans le bain.

6.6 Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous avons pu conclure que des états sombres existent bel et bien lorsqu'on passe des modèles de type XX dans lesquels il n'y a pas de couplage suivant \hat{z} aux modèles de type XXX où ils existent.

De par l'absence de direction privilégiée permettant un découplage effectif, le mécanisme de formation de ces états sombres est complètement différent. En effet, c'est par l'organisation du bain en un ensemble de singulets (de spin 0), que s'opère le découplage du spin central. Ce mécanisme est radicalement différent de l'annulation des composantes transverses par le champ d'Overhauser qui a été mis en lumière dans les modèles de type XX avec champ transverse.

Les facteurs de pureté du spin central obtenus ici dépendent fortement de la distribution des couplages appliquée au système étudié. En effet, plus le spin central est couplé de façon presque identique à chaque spin du bain, plus le facteur de pureté se rapproche de 0.25. Pour finir, nous avons aussi dans la dernière section, établi des règles de comptage des états appartenant au sous espace des états sombres de l'espace de Hilbert du système considéré.

L'observation d'états sombres dans les modèles de R-G de type XXX avec champ quelconque laisse évidemment émerger une série de questions encore ouvertes. Naturellement, on peut se poser la question de savoir s'ils sont encore présents dans des modèles de type XXZ de R-G en champ arbitraire. En effet, alors que le modèle XXX isotrope maintient toujours une symétrie U(1) de rotation autour de l'axe du champ magnétique, ce n'est plus le cas pour un modèle de type XXZ dans un champ génériquement orienté. Toutes les questions liées à la dynamique des états sombres dans ces modèles de R-G peuvent aussi être posées. En imaginant un système préparé initialement dans un état sombre et dont l'évolution est régie par un des modèles traités dans cette thèse, il serait intéressant de voir si oui ou non il est possible que le spin central reste dans un état pur ou si inévitablement l'évolution temporelle mènerait de nouveau à une intrication au bain de spins environnants.

Troisième partie
Études dynamiques

Chapitre 7

Dynamique des modèles de spin central

"Il est plus aisé, et éminemment plus scientifique, de traquer le passé que d'esquisser l'avenir."

Jean Dion

"Qu'est-ce qu'un scientifique après tout ? C'est un homme curieux qui regarde à travers un trou de serrure, le trou de serrure de la nature, essayant de savoir ce qui se passe." **Jacques-Yves Cousteau**

En mécanique quantique, l'évolution temporelle d'un système physique est caractérisée par l'opérateur hamiltonien qui peut dépendre ou non du temps. La dynamique de certains systèmes intégrables peut présenter des caractéristiques remarquables, telles que l'absence d'une limite adiabatique bien définie [115, 116] et le fait de fournir à chaque instant de l'énergie au système permet de le chauffer, produisant ainsi des températures infinies lorsque le spectre dudit système est fini [117, 118, 119, 120, 121]. De plus, en présence d'une variation périodique des paramètres du système, il est possible que des états se "croisent" pour certaines valeurs précises de périodes, induisant une dégénérescence entre des états qui seraient, dans le cas statique, éloignés en énergie [31].

Un des nombreux problèmes intéressants et fréquemment étudiés de la dynamique consiste à préparer le système considéré dans l'état fondamental d'un hamiltonien initial ($t=0$) puis de le laisser évoluer librement et unitairement avec un hamiltonien différent de celui initialement considéré : c'est ce qu'on appelle trempe (quench) [122, 123, 124]. L'intégrabilité, par le biais de l'Ansatz de Bethe, a désormais trouvé son importance dans le domaine de la trempe quantique [122, 124, 125, 126]. En effet, l'accessibilité d'un point de vue numérique aux énergies du système [58, 89], aux fonctions d'onde de Bethe et aux facteurs de forme [15, 16, 17, 32, 34] représentables en déterminants font des modèles intégrables des candidats potentiels pour l'étude exacte d'une trempe quantique, puisqu'on peut calculer l'ensemble des quantités requises pour décrire une évolution temporelle. Les études de la dynamique des modèles de R-G présentent donc une des possibles applications de l'intégrabilité dans les trempes quantiques [127, 128, 129]. Le calcul de la dynamique suivant une trempe quantique requiert d'abord la spécification de l'état initial du système considéré mais aussi de la nouvelle base complète des états propres du Hamiltonien subséquent qui contrôle l'évolution temporelle. Il faut être en capacité de calculer les différentes projections de l'état initial sur chacun des états propres constituant la base finale ; puisque, en principe, l'état initial peut avoir une projection non-nulle sur tout l'espace de Hilbert associé au système. En pratique, grâce l'intégrabilité on sait être en capacité d'aller chercher de manière numériquement exacte et individuelle chaque état du système considéré, ce qui allège la complexité des calculs par rapport à la méthode de diagonalisation exacte lorsque la taille du système considéré devient très grande. Dans certains scénarios, la projection de l'état initial ne couvre pas

la totalité de l'espace de Hilbert et les méthodes liées à l'intégrabilité peuvent alors permettre de ne calculer que les états propres qui contribuent de manière significative à l'évolution dudit système. Cette troncature de l'espace d'hilbert ouvre alors l'accès à des approches conduisant à des solutions presque exactes et ce, à de temps arbitrairement grands [31, 123].

Lorsque le hamiltonien du système étudié est une fonction explicite du temps qui ne commute pas avec elle-même entre deux instants différents, la complexité du problème augmente de manière extraordinaire en ce sens qu'à chaque instant, la base de ses états propres change aussi. Certaines méthodes de résolution telles que T-DMRG [130, 131] qui reste limitée à des temps courts peuvent être utilisées pour résoudre ces types d'hamiltoniens. Autrement, dans certains cas bien spécifiques, la théorie de Floquet, lorsque le hamiltonien est périodique [132, 133, 134] peut aussi permettre de résoudre ce type de problème. Dans cette dernière partie, nous allons justement considérer un hamiltonien de type R-G dépendant explicitement du temps. Nous choisissons d'étudier un protocole dynamique dans lequel le champ magnétique extérieur agissant sur le spin central sera mis en rotation autour de \hat{z} . Dans ce type de protocole, un spin isolé subirait des oscillations de Rabi. Une question intéressante qui se pose est celle de savoir ce qui changerait alors dans le comportement d'un spin central soumis à ce protocole en présence d'un couplage à un bain de spin. Afin de réduire la difficulté du calcul de la dynamique d'un hamiltonien dépendant explicitement du temps à celle d'une trempe (et donc d'une simple évolution unitaire), il suffirait de trouver une base dans laquelle le hamiltonien du système étudié ne dépendrait plus du temps.

Lorsque le hamiltonien considéré est périodique, la théorie de Floquet [135, 136, 137, 138], dit qu'il est en effet possible de construire un hamiltonien, dit de Floquet, qui sera indépendant du temps et qui permettra de décrire l'évolution du système courant. Plus encore, même s'il est généralement impossible d'obtenir une expression exacte pour cet hamiltonien, pour les modèles concernés par ce travail, nous arrivons à lever cette complexité. Une fois le hamiltonien de Floquet obtenu, le problème de dynamique a été réduit à celui d'un hamiltonien statique. Par contre, même pour des systèmes intégrables ayant une dépendance temporelle, il y a pas de garantie que le hamiltonien de Floquet sera lui aussi intégrable [139, 140, 141]. S'il l'est, alors les techniques utilisées pour le traitement de la trempe seraient potentiellement aussi applicables.

On s'intéressera aussi à un second cas spécifique dans lequel le hamiltonien du système considéré sera non intégrable et apériodique; la théorie de Floquet ne sera plus applicable. Malgré la non périodicité du système, un changement de base bien choisi nous permettra dans le même esprit que la théorie de Floquet, de décrire la dynamique du système en termes d'un hamiltonien statique.

7.1 Modèles

7.1.1 Modèles instantanément intégrables

Dans un premier temps, nous pouvons nous intéresser à un processus dynamique caractérisé par un hamiltonien 2π -périodique dans lequel le champ magnétique traverse tourne à une fréquence ω constante et ce, autour de \hat{z} . Ici nous nous intéressons spécifiquement à un hamiltonien aux couplages XXZ :

$$H_0(t) = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^z S_k^z \right) + B_0^x(t) S_0^x + B_0^y(t) S_0^y + B_0^z S_0^z, \quad (7.1)$$

où les couplages Γ_{jk}^α et les composantes $B_j^\alpha(t)$ du champ magnétique externe sont donnés par

$$\begin{aligned} \Gamma_{0k} &= \frac{\sqrt{(J_{\perp} + \epsilon_0)(\epsilon_k + J_{\perp})(\epsilon_k + J_z)}}{\epsilon_k - \epsilon_0} & B_{\perp} &= \frac{B_{\perp}^0}{\sqrt{J_{\perp} + \epsilon_0}} & B_0^x(t) &= B_{\perp} \cos \omega t \\ \Gamma_{0k}^z &= \frac{\sqrt{(\epsilon_k + J_{\perp})(\epsilon_k + J_{\perp})(\epsilon_0 + J_z)}}{\epsilon_k - \epsilon_0} & B_0^y(t) &= B_{\perp} \sin \omega t & B_0^z &= \frac{B^z}{\sqrt{J_z + \epsilon_0}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Le système tel que défini est intégrable à chaque instant. On pourrait en principe y étudier les résonances de Floquet mises en évidence dans [31], et chercher à contrôler les taux transitions entre différents états propres. En effet, selon la valeur de la fréquence ω ou encore de la norme du champ extérieur $B_{\perp} = \frac{B_{\perp}^0}{\sqrt{J_{\perp} + \epsilon_0}}$, on peut envisager des processus dynamiques similaires à Landau-Zener [31].

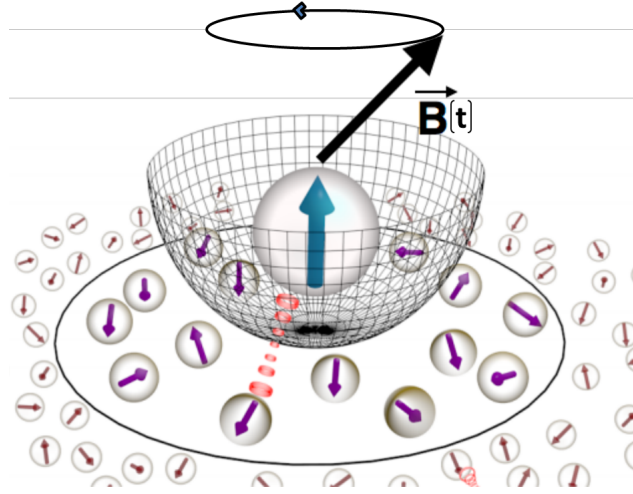


FIGURE 7.1 – Illustration d'un processus de rotation à fréquence constante dans un modèle de spin central

7.1.2 Modèles instantanément non intégrables

Un deuxième type d'hamiltonien, qui cette fois ne sont pas onstatnément intégrable sera aussi considéré dans ce travail. Cest dernier sont définis comme dans la sous-section 7.1.1 mais sont en plus plongés dans un champ magnétique externe $\vec{B}^z(t)$ orienté suivant \hat{z} , dépendant du temps et qui, lui, agit sur tous les spins du système. Le hamiltonien de ces modèles non-intégrables est alors défini comme suit

$$\begin{aligned} H_0(t) &= g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^z S_k^z \right) + \sum_{k=1}^N B^z(t) S_k^z + B_0^x(t) S_0^x \\ &\quad + B_0^y(t) S_0^y + (B^z(t) + B_0^z) S_0^z, \end{aligned} \quad (7.3)$$

où les couplages Γ_{jk}^{α} sont définis en sous-section 7.1.1. Le champ magnétique $B^z(t)$ est, pour l'instant, une fonction arbitraire. De façon générale, on ne considérera pas nécessairement le processus de rotation comme étant périodique. La phase, donnant l'orientation du champ dans le plan XY, n'aura donc pas forcément une dépendance linéaire (ωt) en temps. Les composantes transverses du champ magnétique associé au spin central sont donc définies de la manière suivante

$$B_0^x(t) = \frac{B_{\perp}}{\sqrt{J_{\perp} + \epsilon_0}} \cos \left(\int_{t_0}^t f(s) ds \right) \quad B_0^y(t) = \frac{B_{\perp}}{\sqrt{J_{\perp} + \epsilon_0}} \sin \left(\int_{t_0}^t f(s) ds \right) \quad (7.4)$$

Dans ce protocole, notons que le champ magnétique appliqué sur le spin central variera à la fois en norme et en direction n'impliquant plus une simple variation dans le plan XY, mais dans tout l'espace tridimensionnel.

Le système, tel que défini, est non-intégrable à chaque instant, y compris à $t = t_0$. La phase XY du champ magnétique n'agissant que sur le spin central $L \left(\int_{t_0}^t f(s) ds \right)$, reste complètement arbitraire puisque sa dérivée $f(s)$ est choisie arbitrairement. Il est à noter que ce type de modèle est ici choisi car, sous certaines conditions, nous serons en capacité, par un simple changement de base lié à une rotation selon \hat{z} , de les ramener à un problème statique traitable par les méthodes liées à l'intégrabilité.

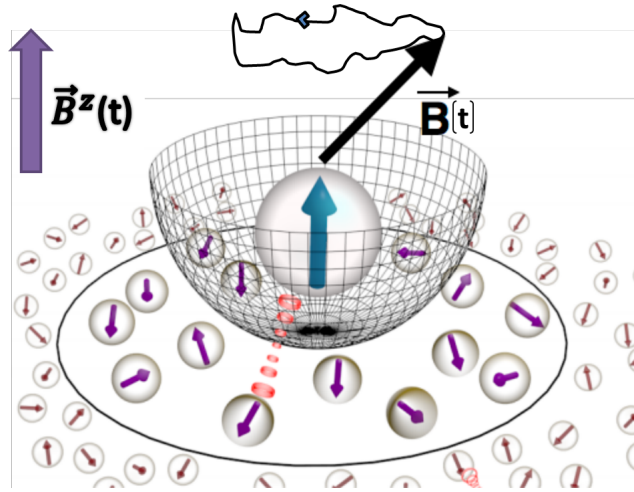


FIGURE 7.2 – Illustration d'un processus de rotation à fréquence variable dans un modèle de spin central

Il est important de noter que les modèles instantanément intégrables présentés à la sous-section précédente forment une limite des modèles non intégrables introduits dans cette sous-section. En effet, on les retrouve dans le cas où la phase est une fonction linéaire du temps et où le champ magnétique agissant sur tous les spins est mis à zéro $\left(\int_{t_0}^t f(s) ds = \omega t \text{ et } B^z(t) = 0 \right)$.

7.2 Changement de bases

Dans les problèmes de dynamique auxquels on s'intéresse ici, nous sommes à la recherche d'un changement de base permettant de partir d'une base fixe (celle du laboratoire) dans laquelle le Hamiltonien du système considéré dépend du temps vers une base, en mouvement, dans laquelle ledit hamiltonien deviendrait indépendant du temps. La théorie de Floquet nous assure que cette transformation existe pour un système périodique. Évidemment, lorsqu'une telle transformation nous a permis de ramener le problème à un problème statique, le système est évidemment beaucoup plus simple à résoudre, puisque seule la base des états propres de ce hamiltonien indépendant du temps doit être trouvée. Évidemment, la transformation inverse devrait ensuite lui être appliquée.

Soit $H(t)$ le hamiltonien d'un système physique donné dans un espace d'états défini par les fonctions d'onde $|\psi_k(t)\rangle$. Soit $P(t)$ l'opérateur unitaire de passage de la base des états $|\psi_k(t)\rangle$ à celle des états $|\phi_k(t)\rangle$. Cet opérateur est construit de telle sorte que

$$|\psi_k(t)\rangle = P(t) |\phi_k(t)\rangle, \quad (7.5)$$

l'idée étant de trouver l'équivalent de $H(t)$ dans la base des états $|\phi_k(t)\rangle$. Il vient, d'après l'équation de Schrödinger, que

$$H_P(t) = P^\dagger(t)H(t)P(t) - iP^\dagger(t)\frac{\partial P}{\partial t}(t) \quad (7.6)$$

où H_P est l'équivalent de H dans la base des états $|\phi_k(t)\rangle$ et P^\dagger est le conjugué hermitien de P .

Lorsque $H(t)$ est T-périodique et que H_P est indépendant du temps, alors $H_P \equiv H_F$ où H_F est aussi appelé hamiltonien de Floquet [31, 142]. Dans une telle situation, $P(t) = P(T + t)$, les $|\phi_k(t)\rangle$ deviennent états stationnaires de H_F et prennent la forme

$$|\phi_k(t)\rangle = e^{-iH_F t} |\phi_k\rangle \quad (7.7)$$

où $e^{-iH_F t}$ est l'opérateur d'évolution dans la base des états propres $|\phi_k\rangle$ de H_F . Ainsi, la base des états d'un hamiltonien périodique, mappé vers une base dans laquelle il ne dépendrait plus du temps, seront données par

$$|\psi_k(t)\rangle = P(t)e^{-iH_F t} |\phi_k\rangle = U(t) |\phi_k\rangle = e^{-ih_F^k t} P(t) |\phi_k\rangle = e^{-ih_F^k t} |u_k(t)\rangle \quad (7.8)$$

où $U(t) = P(t)e^{-iH_F t}$ est l'opérateur d'évolution du système. Les modes $|u_k(t)\rangle = |u_k(t + T)\rangle = P(t) |\phi_k\rangle$ héritent de la périodicité du modèle et les quantités h_F^k sont appelées quasi-énergies de Floquet. L'état du système à chaque instant t sera alors donné par

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k \in \mathcal{H}} C_k |\psi_k(t)\rangle = \sum_{k \in \mathcal{H}} e^{-ih_F^k t} C_k |u_k(t)\rangle \quad (7.9)$$

où k couvre donc une base complète de l'espace de Hilbert associé au modèle et les C_k sont des constantes définissant l'état du système à l'instant initial.

7.3 Application du changement de bases aux modèles

Nous cherchons donc ici à contruire explicitement un opérateur unitaire permettant de passer de la base du laboratoire vers une base où on espère trouver un problème indépendant du temps. Il serait d'autant plus souhaitable que, pour certains choix de paramètres du système, on trouve une base dans laquelle le hamiltonien, en plus d'être indépendant du temps, est intégrable. Ce type d'hamiltonien aura alors une base d'états propres connus et donnant accès à toutes les techniques permettant le calcul exact des facteurs de forme nécessaires au calcul des grandeurs physiques d'intérêt.

7.3.1 Modèles instantanément intégrables

Pour y arriver, nous définissons, comme à la section 7.2, un opérateur unitaire de passage $P(t)$, choisi ici comme un simple opérateur de rotation autour de \hat{z} , à fréquence ω , du système dans sa globalité. Cet opérateur prend la forme explicite :

$$P(t) = e^{-i\omega t \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1})}, \quad (7.10)$$

où N est le nombre de spins du bain et $\mathbb{1}$ est l'opérateur identité. L'opérateur $P(t)$ tel que construit est évidemment périodique comme le modèle étudié puisque $P(t) = P(t + 2\pi/\omega)$ et $P(0) = P(2\pi/\omega) = \mathbb{1}$.

En appliquant la transformation définie en 7.6 sur nos modèles, on trouve alors que

$$H_P(t) = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + \omega_1 \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1}) + B_0^z S_0^z + B_0^x(0) S_0^x. \quad (7.11)$$

Comme on peut clairement le constater, le hamiltonien $H_P(t)$ est bien indépendant du temps ; c'est donc le hamiltonien de Floquet $H_P(t) = H_P = H_F$, puisque le système est périodique. La symétrie XXZ du problème avec une rotation du champ magnétique limitée au plan XY permet donc de résoudre le problème de Floquet, par un simple rotation vers une base tournante suivant l'orientation du champ dans le plan. Cependant, alors que le hamiltonien étant instantanément intégrable, le hamiltonien H_F dans la base mobile n'est plus intégrable. Le calcul de ses énergies et ses état propres devrait donc, pour tirer profit des méthodes liés à l'intégrabilité, être traité en théorie des perturbations indépendante du temps. Une fois l'ensemble complet des valeurs propres $\{h_F^k\}$ et vecteurs propres de base $\{|\phi_k\rangle\}$ de H_F calculés, sur la base de l'équation 7.9, l'état du système à tout temps ultérieur sera donné par

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k \in \mathcal{H}} e^{-ih_F^k t} C_k |u_k(t)\rangle, \quad (7.12)$$

où les modes de Floquet sont donc définis comme

$$|u_k(t)\rangle = P(t) |\phi_k\rangle = e^{-i\omega t \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1})} |\phi_k\rangle \quad (7.13)$$

.

7.3.2 Modèles instantanément non intégrables

Ici aussi, l'opérateur unitaire de passage $P(t)$ sera simplement défini comme la rotation autour de \hat{z} suivant la phase du champ dans le plan. Tel que mentionné, cette rotation n'est pas ici forcément périodique. L'opérateur de passage $P(t)$ prend alors la forme

$$P(t) = e^{-i \int_{t_0}^t f(s) ds \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1})}. \quad (7.14)$$

En appliquant la transformation définie en 7.6 sur nos modèles, on obtient

$$\begin{aligned} H_P(t) &= g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + B_0^z S_0^z + B_0^x(0) S_0^x \\ &+ (B^z(t) - f(t)) \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1}) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Dans ce scénario, on constate que le hamiltonien $H_P(t)$ reste, de façon générale, dépendant du temps. Selon que la différence $B^z(t) - f(t)$ est nulle, indépendante ou dépendante du temps, les méthodes de calcul qui pourraient être utilisées pour possiblement résoudre le système seront radicalement différentes. Soit

$$Di(t) = B^z(t) - f(t), \quad (7.16)$$

la dépendance temporelle de $H_P(t)$, on pourrait alors faire face aux situations suivantes :

- **Lorsque $Di(t)$ est nul ($Di(t) = 0$)** : On obtient un hamiltonien $H_P(t) \equiv H_P$ indépendant du temps (Eq. 7.15). Notons qu'on ne peut pas parler ici forcément d'un hamiltonien du Floquet, puisque cette condition peut être satisfaite pour un système apériodique. Dans ce cas, les états propres exacts ; le calcul des énergies et des facteurs de forme se ferait de manière relativement simple. En effet, pour $Di(t) = 0$, le hamiltonien statique obtenu est intégrable. Le résultat est donc une dynamique intégrable pour un hamiltonien dépendant du temps, non-intégrables à chaque instant et potentiellement apériodique.
- **Lorsque $Di(t)$ est non-nul mais indépendant du temps ($Di(t) = h$)** : Dans cette situation, on retrouve un hamiltonien $H_P(t) \equiv H_P$ (Eq. 7.15) indépendant du temps. Par contre, il n'est pas intégrable. L'utilisation des techniques liées à l'intégrabilité nécessiterait alors qu'on puisse le traiter comme une perturbation statique d'un hamiltonien intégrable. Auquel cas, les énergies et les états propres deviendraient accessibles par le calcul perturbatif indépendant du temps. Le problème statique trouvé dans ce cas, correspond exactement au hamiltonien non-intégrable trouvé précédemment en 7.11 et permettant possiblement d'étudier l'impact du couplage à un bain de spins sur les oscillations de Rabi. Ici, H_P correspondrait au hamiltonien de Floquet ($H_P \equiv H_F$) lorsque le système est périodique : $f(t) = \omega$ et $B^z(t) = \omega + h$.
- **Lorsque $Di(t)$ dépend toujours du temps ($Di(t) = h(t)$)** : le changement de base effectué mène toujours à un hamiltonien $H_P(t)$ qui garde une dépendance temporelle. Dans cette situation, le seul cas possiblement accessible serait pour un $Di(t)$ suffisamment petit pour possiblement permettre une résolution en théorie des perturbations dépendantes du temps.

Seuls les deux premiers cas peuvent raisonnablement être considérés comme accessibles, soit directement par la résolution d'un modèles intégrable ou alternativement quand les paramètres sont adéquatement choisis, par l'application d'une théorie des perturbations statique sur un modèle intégrable. Une fois les valeurs propres $\{h_F^k\}$ et la base $\{|\phi_k\rangle\}$ des états propres de H_P calculées, sur la base de l'équation 7.9 l'état du système à chaque temps sera donné par

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k \in \mathcal{H}} e^{-ih_F^k t} C_k |u_k(t)\rangle, \quad (7.17)$$

où les modes du système valent

$$|u_k(t)\rangle = P(t) |\phi_k\rangle = e^{-i \int_{t_0}^t f(s) ds \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1})} |\phi_k\rangle \quad (7.18)$$

7.4 Perturbation stationnaire

Dans cette section, nous chercherons à voir dans quelles situations le hamiltonien statique obtenu pourrait être décrit par une perturbation stationnaire d'un hamiltonien intégrable. Dans le cas des modèles instantanément non-intégrables, on s'intéresse donc au cas où $Di(t) = h$ où H_P est indépendant du temps. Dans le cas des modèles instantanément intégrables que l'on a défini ici comme périodiques on retrouve un H_P statique ; le hamiltonien de Floquet H_F de ce processus périodique (Eq. 7.11). La possibilité d'utiliser une approche en théorie des perturbations stationnaires repose évidemment sur la possibilité d'écrire le hamiltonien H_P du système comme

$$H_P = H_P^0 + V, \quad (7.19)$$

avec H_P^0 un hamiltonien non perturbé que l'on souhaite intégrable et V une perturbation devant être faible ($V \ll H_P^0$).

En guise de rappel, le hamiltonien instantanément intégrable devient, après transformation, donné par :

$$H_P(t) \equiv H_P = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + \omega_1 \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1}) + B_0^z S_0^z + B_0^x(0) S_0^x. \quad (7.20)$$

Le cas instantanément non-intégrable quant à lui, nous menait à la forme :

$$H_P(t) = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + B_0^z S_0^z + B_0^x(0) S_0^x + h \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1}) \quad (7.21)$$

dans le cas où l'on a choisi les champs de façon à s'assurer que $(B^z(t) - f(t)) = h$ soit une constante. Cela implique que le champ global, celui appliqué à tous les spins, soit ajusté précisément en fonction du champ appliqué au spin central de façon à compenser la complexité que ferait apparaître le champ $\vec{B}_0(t)$ dépendant du temps. Dans les deux cas, le hamiltonien résultant a exactement la même forme. On peut donc distinguer deux cas possibles dans lesquels une théorie des perturbations est envisageable.

La première situation est celle dans laquelle le champ magnétique extérieur a une composante traverse qui est perturbativement faible. Dans ce cas, le paramètre $B_0^x(0)$ étant petit, le terme

$$V = B_0^x(0) S_0^x, \quad (7.22)$$

de H_P pourrait être traité comme une perturbation du hamiltonien :

$$H_P^0 = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + C \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1}) + B_0^z S_0^z. \quad (7.23)$$

Or ce dernier est bel et bien un hamiltonien intégrable pour des couplages du type XXZ. En effet, on sait que, le modèle $g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + B_0^z S_0^z$ possède la symétrie $U(1)$ menant à la conservation de la magnétisation totale selon \hat{z} , puisque le champ magnétique pointe selon l'axe \hat{z} . Or, le terme $C \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1})$ est justement, à une constante près, cette magnétisation totale selon \hat{z} . Elle commute avec toutes les charges conservées XXZ et son ajout à H_P^0 ne change donc pas son intégrabilité.

Ce type de traitement perturbatif serait donc approprié pour le traitement des oscillations de Rabi du spin central en présence d'un couplage à un bain de spin. Or on sait que les oscillations de Rabi joue un rôle central en ptique quantique [125, 143, 144] permettant l'intrication des atomes et des champs [145, 146] et qu'il s'agit donc d'un problème particulièrement intéressant à généraliser à des systèmes en contact avec un environnement.

Il y a une deuxième situation où un traitement du système comme une perturbation d'un hamiltonien intégrable devient envisageable. En effet, il est possible que

$$H_P^0 = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + B_0^z S_0^z + B_0^x(0) S_0^x \quad (7.24)$$

soit un modèle intégrable, lorsque les couplages sont soit du type rationnel avec $C_0 = 0$ ou trigonométriques avec $C_0 = \pm 1/2$ (voir partie 1). En effet, en présence d'un champ magnétique ayant une composante perpendiculaire à \hat{z} , seul ces cas précis de couplages mènent à modèle intégrable. En supposant ces couplages spécifiques, il devient alors possible de considérer

$$V = C \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1}), \quad (7.25)$$

comme une perturbation d'un Hamiltonien intégrable. Évidemment, il faut pour cela que la constante $C = \omega_1$ (dans le premier cas) ou $C = h$ (dans le second) soit perturbativement faible. Dans le premier cas du modèle périodique instantanément intégrable, il s'agirait donc dans la situation où le champ transverse appliqué peut être arbitrairement grand, mais tourne à une fréquence ω_1 très faible. Cette rotation lente pourrait possiblement nous rapprocher de la limite adiabatique, mais la présence possible de dégénérescences dans les modèles intégrables peut certainement avoir pour conséquence que cette limite adiabatique n'existe tout simplement pas, rendant encore un fois, le problème digne d'intérêt.

Selon que l'on soit dans le cas :

$$H_P^0 = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + C \sum_{k=0}^N (S_k^z + \mathbb{1}) + B_0^z S_0^z. \quad (7.26)$$

ou

$$H_P^0 = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} \left(S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y + \frac{\Gamma_{0k}^z}{\Gamma_{0k}} S_0^y S_k^z \right) + B_0^z S_0^z + B_0^x(0) S_0^x \quad (7.27)$$

les états propres exacts de H_P^0 utilisés pour la théorie de perturbation seront toujours des fonctions d'ondes de Bethe. Dans le premier cas, le hamiltonien ayant une symétrie $U(1)$ les états propres seront données par

$$|\xi\rangle = \prod_{l=1}^M \left(\sum_{k=1}^N \Gamma(\epsilon_k, \lambda_l) S_k^\dagger \right) |\downarrow \cdots \downarrow\rangle, \quad (7.28)$$

puisque le système conserve l'aimantation totale selon \hat{z} . Par contre, dans le deuxième cas, la symétrie $U(1)$ étant brisée par l'ajout d'un champ transverse les fonctions d'ondes seront alors données par

$$|\xi\rangle = \prod_{l=1}^M \left(\sum_{k=1}^N \Gamma(\epsilon_k, \lambda_l) S_k^\dagger + B_0^x(0) \right) |\downarrow \cdots \downarrow\rangle \quad (7.29)$$

et l'aimantation du système n'est plus conservée selon \hat{z} .

La théorie de perturbations nous permet donc d'écrire au premier ordre les énergies et fonctions d'ondes de H_F comme suit :

$$h_F^k = \langle \xi_k | H_F^0 | \xi_k \rangle + \langle \xi_k | V | \xi_k \rangle \quad (7.30)$$

$$|\phi_k\rangle = |\xi_k\rangle + \sum_{j \neq k} \frac{\langle \xi_j | V | \xi_k \rangle}{\langle \xi_k | H_F^0 | \xi_k \rangle - \langle \xi_j | H_F^0 | \xi_j \rangle} |\xi_j\rangle \quad (7.31)$$

Notons que dans tous ces cas, les approches développées dans cette thèse : les équations quadratiques et les expressions en déterminant dépendant des valeurs propres, seraient définitivement utilisables et remplaceraient avantageusement les constructions en ABA utilisant les racines de Bethe.

7.5 Calcul de quelques grandeurs physiques

Indépendamment du choix du protocole, les grandeurs physiques qui nous intéressent ici, à savoir l'énergie du système et les valeurs moyennes du spin central suivant chacune des directions de l'espace peuvent être calculées de manière relativement simple.

7.5.1 Energie moyenne du système

Même si le hamiltonien du système est une fonction explicitement dépendante du temps, il n'en demeure pas moins que l'équation de Schrödinger régit l'évolution temporelle du système considéré et que cet hamiltonien peut s'écrire comme

$$H = i \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.32)$$

Ainsi, de manière générique, l'action de cet opérateur sur l'état du système sera donnée par

$$H |\psi(t)\rangle = \sum_{k \in \mathcal{H}} C_k \left(h_F^k + f(t) \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1}) \right) e^{-ih_F^k t} |u_k(t)\rangle \quad (7.33)$$

en dérivant explicitement l'éq. 7.17. En projetant à nouveau sur l'état au temps t , la valeur moyenne de cette énergie est alors donnée par :

$$\langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle = \sum_{l, k \in \mathcal{H}} C_l^* C_k e^{-i(h_F^k - h_F^l)t} \left(h_F^k \delta_{lk} + f(t) \langle \phi_l | \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1}) | \phi_k \rangle \right) \quad (7.34)$$

L'énergie moyenne a donc une dépendance temporelle non-triviale contrôlée par la "fréquence de rotation" $f(t)$. A l'instant initial, même si le système se trouve, par exemple, initialement dans un état propre $|\phi_n\rangle$ du hamiltonien indépendant du temps, l'énergie ci-dessus reste dépendante du temps prenant la forme suivante :

$$\langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle = h_F^n + (N + 1)f(t) + f(t) \sum_{j=0}^N \langle \phi_n | S_j^z | \phi_n \rangle \quad (7.35)$$

Lorsque le champ transverse appliqué au système tourne avec une fréquence constante $f(t) = f_0 = \omega$ autour de \hat{z} , l'énergie moyenne du système reste alors conservée. Il apparaît, dans cette situation, que les états stationnaires de $H(t)$ sont aussi les états stationnaires de H_P auxquels on a simplement ajouté une phase supplémentaire.

7.5.2 Valeurs moyennes du spin central

L'accès aux valeurs moyennes de spins permet non seulement d'observer l'évolution de ce dernier au cours du temps, mais permet aussi de calculer le facteur de pureté dont nous avons abondamment parlé comme permettant de caractériser un état pur du spin central. L'étude de la décohérence dans ces systèmes peut donc clairement être approchée de façon générale par cet intermédiaire et donc simplement par l'accès à la dynamique des différentes valeurs moyennes du spin central. Or, dans les modèles discutés ici, ces dernières sont simplement données par :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | S_0^x | \psi(t) \rangle &= \sum_{j,k \in \mathcal{H}} e^{-i(h_F^k - h_F^j)t} C_j^* C_k \cos \left(\int_0^t f(s) ds \right) \langle \phi_j | S_0^x | \phi_k \rangle \\ &\quad - \sum_{j,k \in \mathcal{H}} e^{-i(h_F^k - h_F^j)t} C_j^* C_k \sin \left(\int_0^t f(s) ds \right) \langle \phi_j | S_0^y | \phi_k \rangle \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | S_0^y | \psi(t) \rangle &= \sum_{j,k \in \mathcal{H}} e^{-i(h_F^k - h_F^j)t} C_j^* C_k \sin \left(\int_0^t f(s) ds \right) \langle \phi_j | S_0^x | \phi_k \rangle \\ &\quad + \sum_{j,k \in \mathcal{H}} e^{-i(h_F^k - h_F^j)t} C_j^* C_k \cos \left(\int_0^t f(s) ds \right) \langle \phi_j | S_0^y | \phi_k \rangle \end{aligned} \quad (7.37)$$

et

$$\langle \psi(t) | S_0^z | \psi(t) \rangle = \sum_{j,k \in \mathcal{H}} e^{-i(h_F^k - h_F^j)t} C_j^* C_k \langle \phi_j | S_0^z | \phi_k \rangle \quad (7.38)$$

Évidemment, la double somme sur l'espace d'Hilbert peut être rapidement très lourdes, mais pour des systèmes de petite taille, elle demeure possible grâce aux méthodes numériques efficaces basées sur les équation quadratiques entre valeurs propres. Pour des systèmes plus grands soit une troncation de l'espace d'Hilbert, soit une exploration Monte Carlo basée sur l'intégrabilité du système [29, 30] peut permettre de l'évaluer efficacement.

Lorsque le système se trouve initialement dans un état propre $|\phi_n\rangle$ de H_P , ces valeurs moyennes s'évaluent alors trivialement pour donner :

$$\langle \psi(t) | S_0^x | \psi(t) \rangle = \cos \left(\int_0^t f(s) ds \right) \langle \phi_n | S_0^x | \phi_n \rangle \quad (7.39)$$

$$\langle \psi(t) | S_0^y | \psi(t) \rangle = \sin \left(\int_0^t f(s) ds \right) \langle \phi_n | S_0^x | \phi_n \rangle \quad (7.40)$$

et

$$\langle \psi(t) | S_0^z | \psi(t) \rangle = \langle \phi_n | S_0^z | \phi_n \rangle \quad (7.41)$$

La dynamique de la valeur moyenne du spin central est donc triviale lorsque le système est préparé dans un état propre de H_P . En fait, ce dernier ne fait que tourner autour de l'axe \hat{z} , en suivant, instantanément l'orientation du champ transverse appliqué dans le plan XY. Dans le cas générique des modèles instantanément non-intégrables, on comprend que l'ajustement précis du champ magnétique global s'appliquant à tous les spins, permet cette réaction du spin central

qui suit alors, de manière instantanée le champ transverse qu'on lui applique. Cette réaction ressemble à un comportement adiabatique, mais serait en principe observée pour un protocole où $f(s)$ est quelconque et le champ n'a donc pas à évoluer lentement.

Cette constatation est certainement intéressante lorsque l'état initial du système est un état propre de H^P ayant la propriété d'être aussi un état sombre. Il devient alors clair que l'évolution temporelle sera telle que le spin central, initialement décorrélé du bain le restera en tout temps ultérieur tout en étant totalement contrôlable par la réorientation du champ appliqué. Le qubit résultant serait alors complètement orientable et entièrement protégé contre la décohérence du au bain.

7.6 Différents choix du champ magnétique agissant sur l'ensemble des particules du système

Dans cette section, nous nous focaliserons sur certains cas spécifiques des modèles instantanément non-intégrables, pour lesquels la différence $Di(t)$ est nulle à chaque instant de l'évolution du système. Ce sont donc les systèmes pour lesquels H_P est intégrable et donc ceux pour lesquels l'accès à es calculs numériques serait le plus simple. Ce sont donc les cas spécifique où, le champ magnétique extérieur $B^z(t)$ s'appliquant à tous les spins vaut exactement la dérivée, par rapport au temps, de la phase identifiant l'orientation de la composante dans le plan XY du champ magnétique autour de \hat{z} ($B^z(t) = f(t)$).

Il convient de noter que $B^z(t)$ (ou alternativement $f(t)$) sont des fonctions complètement libres pouvant donc être périodiques ou non. Si cette fonction est indépendante du temps, alors nous aurons une rotation à fréquence constante $f(t) = \omega$ et le champ magnétique agissant sur le spin central conserve alors sa norme tout en changeant sa position au tour de \hat{z} . Alternativement, on aura alors un processus de rotation à "fréquence variable" dans lequel la norme du champ magnétique appliqué au spin central variera à la fois en norme et en direction.

Trois choix typiques qui pourraient former un base intéressante à des simulations numériques de la dynamique de ces modèles seraient par exemple les suivants :

a) Pour $B^z(t) = f(t) = \omega$ choisi comme une constante, on parle alors d'un processus ou la champ appliqué au spin central tourne simplement à fréquence constante. La présence d'un champ magnétique selon \hat{z} ajusté à cette fréquence de rotation permet exactement de faire de la dynamique de ce système un processus descriptible par un modèle intégrable indépendant du temps. L'énergie moyenne dans ce système sera alors constante et vaudra

$$\langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle = \sum_{l,k \in \mathcal{H}} C_l^* C_k e^{-i(h_F^k - h_F^l)t} \left(h_F^k \delta_{lk} + B^z \langle \phi_l | \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1}) | \phi_k \rangle \right) \quad (7.42)$$

b) Un second protocole digne d'intérêt serait celui dans lequel le champ magnétique externe suit une rampe linéaire tandis que la fréquence de rotation du champ transverse est elle aussi identiquement accélérée linéairement :

$$B^z(t) = f(t) = \alpha t \quad (7.43)$$

Cette rampe linéaire peut rappeler les processus de type Landau-Zener et l'existence de dégénérescences dans ces modèles pourrait effectivement mener à des processus de transition similaires à ceux des processus Landau-Zener. On a alors que l'énergie du système, dans ce contexte, sera alors aussi une fonction croissante linéaire du temps donnée par

$$\langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle = \sum_{l,k \in \mathcal{H}} C_l^* C_k e^{-i(h_F^k - h_F^l)t} \left(h_F^k \delta_{lk} + \alpha t \langle \phi_l | \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1}) | \phi_k \rangle \right). \quad (7.44)$$

Évidemment l'accélération de la fréquence de rotation combinée à l'augmentation du champ magnétique permet certainement de fournir cette énergie infinie au système. Une situation plus réaliste pourrait être obtenue en arrêtant la rampe à une valeur maximale terminale.

c) Enfin, on pourrait imaginer étudier une donnée par

$$B^z(t) = f(t) = \alpha \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (7.45)$$

avec $B^z(t)$ qui est donc une fonction harmonique oscillant à une fréquence ω constante. α ici représente l'amplitude de $B^z(t)$ et α_0 est sa phase initiale. Comme dans le deuxième choix de $B^z(t)$, la phase de rotation de la composante transverse du champ magnétique extérieur a une dépendance non linéaire du temps. Ici elle faudra alors

$$F(t) = \alpha \int_0^t ds \sin(\omega s + \alpha_0) = -\frac{\alpha}{\omega} \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (7.46)$$

et le hamiltonien du système restera périodique de période

$$T = \frac{2}{\omega} \left[\arccos\left(-\frac{\omega}{\alpha}\pi\right) - \alpha_0 \right]. \quad (7.47)$$

L'énergie moyenne dans ce protocole serait alors une fonction harmonique donnée par

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle &= \sum_{l,k \in \mathcal{H}} C_l^* C_k e^{-i(h_F^k - h_F^l)t} \left(h_F^k \delta_{lk} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \sin(\omega t + \alpha_0) \langle \phi_l | \sum_{j=0}^N (S_j^z + \mathbb{1}) | \phi_k \rangle \right), \end{aligned} \quad (7.48)$$

et oscillant avec la période du champ global appliqué à tout le système et non pas celle du champ local appliqué au spin central.

En principe du moment que $B^z(t) = f(t)$, l'ensemble des protocoles imaginable possèdent le même niveau de complexité numérique puisqu'ils ne nécessitent comme point de départ que la connaissance de la base des états propres d'un unique hamiltonien intégrable.

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre dont l'objectif était d'étudier la dynamique des modèles de spin central en présence d'un champ magnétique explicitement dépendant du temps. Les cas que nous avons évoqués ont été traités par un simple changement de base qui, en passant dans un référentiel tournant permet dans les cas les plus intéressants de ramener le problème à un problème statique.

Alors que les modèles instantanément intégrables nous ramenaient à un problème statique non-intégrable, mais pouvant dans des cas intéressants être traité comme une perturbation d'un modèle intégrable, nous avons aussi pu constater qu'un modèle instantanément non-intégrable pouvait lui, nous ramener à une dynamique descriptible par un simple hamiltonien intégrable. Ces cas

deviennent donc les plus accessibles numériquement puisqu'ils se prêtent directement à l'utilisation de toutes les méthodes basées sur l'intégrabilité qui ont été développées et présentées dans cette thèse.

Même si le travail numériques qui permettra de réaliser ces études peut encore demander temps et efforts, il n'en demeure pas moins que les propositions faites dans ce dernier chapitre permettent certainement de confirmer leur faisabilité.

Conclusions et Perspectives

" Je ne crois pas non plus que l'esprit d'aventure risque de disparaître dans notre monde. Si je vois quelque chose de vital autour de moi, c'est précisément cet esprit d'aventure, qui me paraît indéracinable et s'apparente à la curiosité. " **Marie Curie**

Dans cette thèse, après avoir défini une classe générique de modèles de spin $1/2$, non intégrables pour un choix arbitraire des couplages, nous avons montré comment assurer l'intégrabilité du système, en imposant qu'un ensemble de charges conservées commutent à la fois entre elles et avec les modèles considérés. Un calcul explicite des différents commutateurs entre les charges conservées et le modèle considéré nous a conduit à un ensemble d'équations que nous avons appelées relations d'intégrabilité (Éqs. 1.35 et 1.36 pour les modèles de R-G avec couplages unidirectionnels, et eqs. 3.5 et 3.6 pour certains modèles de R-G pouvant contenir des couplages entre directions spatiales différentes, $\Gamma^{xy}, \Gamma^{yx}, \dots$). Ces dernières nous ont permis, grâce à quelques transformations mathématiques, de démontrer les relations permettant d'exprimer le carré d'une charge conservée comme une combinaison linéaire des autres charges conservées donnant ainsi accès, grâce à l'utilisation du numérique, au spectre en énergie de tous les types de modèles contenus dans les modèles intégrables définis en 1.31 y compris les modèles complètement anisotropes [58]. L'ensemble des approches développées sont particulièrement intéressantes dans ces modèles complètement anisotropes, car en l'absence d'un ansatz de Bethe pouvant donner accès à une solution de ces modèles complètement anisotrope, ces techniques restent les seules à offrir un accès à la physique de ces systèmes. Ces résultats ont aussi permis de reproduire ceux obtenus dans la littérature [18, 11, 35, 36, 37]. Une fois les différentes valeurs propres déterminées numériquement, nous avons montré comment elles peuvent être utilisées avec le théorème de Hellmann-Feynman, pour déterminer dans un état donné, les valeurs moyennes suivant les directions \hat{x} , \hat{y} et \hat{z} , des différents spins du système [88].

Par la suite, après avoir construit une forme générique des fonctions d'ondes en fonction des valeurs propres des modèles d'intérêt [147], nous avons su trouver, dans le cas des modèles isotropes, des expressions en déterminants pour les fonctions de corrélation à deux points exprimées seulement en terme des valeurs propres (voir le chapitre 4 de la partie I).

Suite aux récents travaux effectués sur les états sombres dans les modèles de R-G isotropes avec couplages uniquement dans le plan XY (de type XX) et un champ magnétique orienté uniquement selon la direction \hat{z} [7, 6, 8], nous nous sommes intéressés à la version de ces modèles avec champ magnétique orienté selon une direction quelconque de l'espace cartésien. Ainsi, après avoir montré que ces modèles sont intégrables, puisqu'ils représentent une limite des modèles intégrables que nous traitons dans ce manuscrit, nous y avons aussi observé des états sombres mais seulement lorsque les couplages deviennent suffisamment forts. Comme dans le cas des états sombres de type XX avec champ magnétique suivant \hat{z} , le spin central dans les modèles de type XX avec champ magnétique arbitraire s'oriente selon la direction \hat{z} . En effet, le bain s'organise de manière à créer un champ magnétique effectif qui, à partir d'un seuil de couplage, annule

complètement le champ magnétique appliqué au spin central dans le plan XY. Ainsi, le système reproduit les résultats connus en présence d'un champ orienté selon \hat{z} , menant à l'alignement du spin central suivant la direction privilégiée \hat{z} selon laquelle il n'existe aucun couplage entre ledit spin central et un quelconque spin du bain. En présence de ce champ magnétique arbitraire, les états sombres lorsqu'ils existent, persistent et ce, peu importe le choix de couplages et la direction qu'on donne au champ magnétique agissant sur le spin central. Pour un même couplage total au bain, en augmentant le nombre de particules constituant le bain, la plage de couplage sur laquelle les états sombres ne sont pas parfaitement formés devient typiquement de plus en plus petite. Nous pouvons donc inférer que, dans la limite thermodynamique, les états sombres devraient exister pour n'importe quelles valeurs de couplages en nombre identique à celui trouvé dans [6] (Voir le chapitre 5 de la partie II).

Par la suite, d'autres états sombres ont pu être observés dans les modèles intégrables de R-G de type XXX avec champ orienté selon une direction quelconque. Dans ces états, que l'on a aussi su dénombrer dans certains cas, le spin central est dans un état pur orienté dans la direction du champ magnétique qui lui a été appliqué. Les états sombres de type XXX existent dans tous les régimes de couplages et découlent du fait que dans le bain, par l'intermédiaire du spin central, les spins couplés de façon suffisamment proche peuvent former des états singulets. Grâce à l'isotropie des modèles considérés ici qui rend les directions équivalentes les unes aux autres, on sait pour sûr que les états sombres issus des modèles de type XXX persisteront pour n'importe quelle orientation du champ magnétique appliqué au spin central.

Pour une même somme des couplages dans le système, plus on augmente le nombre de particules, plus le spin central dans ces états sombres s'approche d'un état parfaitement pur. Ces états peuvent devenir particulièrement intéressants pour dans la réalisation et l'utilisation de qubits de spin en informatique quantique. En effet, en plus de permettre au spin central (le qubit) d'être décorrélé du bain et donc protégé de la décohérence, le qubit y demeurerait complètement contrôlable puisque le spin central s'y aligne dans la direction du champ magnétique appliqué, lui-même expérimentalement orientable dans une direction quelconque (voir le chapitre 6 de la partie II).

Alors que dans les modèles de type XX, il existe une direction privilégiée selon laquelle le spin central, une fois polarisé, ne sera plus couplé aux spins du bain, l'absence d'une telle direction sans couplage, fait de l'existence de ces états sombres de type XXX un résultat encore plus étonnant.

La troisième partie de ce travail a été consacrée à l'étude de la dynamique des modèles de spin central en présence d'un champ magnétique dépendant du temps et pouvant varier à la fois en norme et en direction et ce de façon qui n'est pas nécessairement périodique. Le choix du modèle étudié a principalement été guidé par la recherche d'une dynamique quantique intégrable dans laquelle les approches mathématiques développées dans ce manuscrit pourraient devenir utiles pour le calcul de l'évolution temporelle des quantités physiques. Par une simple rotation, permettant de passer du repère du laboratoire vers une base tournante, nous avons été en capacité de démontrer qu'un choix approprié des dépendances temporelles permet de construire une dynamique intégrable en tout temps. Notons aussi que la dynamique du processus de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) d'un spin, en présence d'un couplage à un bain de spins, y a été démontrée comme pouvant se réduire à un problème statique correspondant à une faible perturbation d'un modèle intégrable. Bien que les outils mathématiques et numériques nécessaires au calcul de la dynamique de ces modèles ont été développés, ils n'en demeurent pas moins que ces simulations numériques demeurent lourdes numériquement et n'ont pas encore été implémentés. Le comportement explicite de ces systèmes dynamiques reste donc, pour l'instant, une question ouverte.

D'ailleurs, un grand nombre de généralisations de ces travaux ou de questions ouvertes restent encore à explorer tant du point de vue mathématique que physique.

Il est, par exemple, légitime de se poser la question du possible lien mathématique entre les relations quadratiques entre opérateurs établies dans ces travaux et un ensemble de techniques mathématiques, devenues particulièrement populaires récemment en intégrabilité quantique, telles que les équations TQ de Baxter, la séparation de variables ou l'Ansatz de Bethe modifié ou hors-diagonal. Ces possibles liens ou similitudes restent, aujourd'hui, complètement inexplorés.

Parallèlement, il faut garder en tête que les modèles de R-G principalement étudiés dans cette thèse sont ceux pour lesquels le spin central et les spins du bain ne sont couplés que par des couplages que nous avons appelés unidirectionnels : xx , yy ou zz . Des formes quadratiques entre valeurs propres ont bien pu être construites dans des modèles auxquels on a ajouté des couplages bidirectionnels (tenant compte de deux directions, $\Gamma^{xy}, \Gamma^{yx}, \dots$) mais seulement quand ces derniers sont contenus dans le plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique agissant sur le spin central. Pour l'instant, la question de savoir s'il est possible d'écrire des équations quadratiques similaires pour la classe la plus générale d'hamiltoniens avec couplages bidirectionnels n'est donc toujours pas résolue. Le traitement des interactions de type Dzyaloshinskii–Moriya rendent d'ailleurs cette question particulièrement intéressante pour la compréhension des impacts du couplage spin-orbite sur la physique de ces systèmes.

Il est aussi important de rappeler que nos travaux ont été réalisés exclusivement dans le cas spécifique des modèles de spin $1/2$, menant alors à des relations quadratiques entre opérateurs et valeur propres. Dans la même logique, des travaux similaires pourraient certainement aussi être réalisés dans le cadre de spins plus élevés, notamment ceux de spin 1 ou $3/2$. Au vu des connaissances actuelles on sait que, lorsque ces généralisations existent, elles correspondront respectivement à des relations d'ordre 3 et 4 entre les opérateurs et donc aussi leurs valeurs propres. Le seul cas discuté, à notre connaissance, étant celui des spins- 1 avec couplage isotrope qui a été discuté, en conférence, par J. Links [37]. La possibilité d'étudier aussi des systèmes mélangeant plusieurs représentations serait aussi particulièrement intéressante par exemple pour décrire par exemple un spin $1/2$ couplé à un bain de spin $3/2$, modèle particulièrement adapté à la description d'un qubit de spin $(1/2)$ couplé à bain de spins nucléaires $(3/2)$ présents au sein d'un substrat semiconducteur comme le GaAs.

Enfin, alors que l'Ansatz de Bethe ne permet pas de construire les états propres des modèles complètement anisotropes, il est possible d'espérer que la représentation proposée dans ces travaux pourrait donner accès à des représentations en déterminant de quantités utiles. En effet, la construction explicite des états que nous avons fait ici pourrait, mais cela reste à faire, mener à des représentations en déterminant pour les facteurs de forme, les fonctions de corrélation à deux points, ou les produits scalaires, rendant alors possible un accès numérique au calcul de leur dynamique.

En plus des ces résultats à saveur plus mathématiques, ces travaux ont mis en lumière l'existence d'états sombres dans de nouveaux modèles de R-G. La découverte et l'étude de ce type de phénomène dans les modèles de R-G étant particulièrement récente, il y a encore plusieurs possibilités à explorer dans ces modèles. La généralisation des résultats obtenus dans les modèles XX en champ quelconque à des couplage XY (couplages limités au plan mais anisotropes) devrait être simple et directe. On peut raisonnablement s'attendre à des résultats analogues à ceux obtenus dans les modèles XX.

Bien qu'ils n'aient pas été explicitement présentés dans cette thèse, des résultats préliminaires ont mis en évidence, dans les modèles de type XX avec champ arbitraire, des comportements analogues à ceux observés dans les modèles de type XXX. En effet, nous y avons observé des états

sombres dans lesquels le spin central est aligné non pas selon \hat{z} mais dans la direction du champ magnétique. Étonnamment, ces derniers n'ont été observés numériquement que pour des valeurs paires du nombre de particules dans le bain. Il devient raisonnable de penser que l'organisation du bain en singulets, responsable de ce type d'état sombre, peut donc montrer d'important effets de parité. L'ensemble des approches développées dans cette thèse permettent aussi de s'intéresser aux états sombres dans les modèles de R-G de type XXZ dont l'anisotropie partielle peut offrir une liberté permettant de les approcher de la réalité expérimentale.

Ce travail ayant aussi posé les bases de possibles études dynamiques, la question de savoir si ces états sombres peuvent maintenant être préparés, contrôlés et maintenus dans des situations réalistes devient alors plus accessible qu'elle ne l'a jamais été.

Annexe A

Relations quadratiques entre opérateurs et équations de Bethe pour les modèles de R-G de spin- $\frac{1}{2}$

A.1 Identités de Jacobi dans l'algèbre de Gaudin

En choisissant $A = S^\psi(u)$, $B = S^\phi(v)$ et $C = S^\psi(w)$ où $S^\psi(u)$, $S^\phi(v)$ and $S^\psi(w)$ sont des opérateurs indépendants de Gaudin avec $\psi, \phi, \theta \in \{x, y, z\}$, $\psi \neq \phi \neq \theta$ et $u, v, w \in \mathbb{C}$, l'identité de Jacobi donnée dans l'équation (1.9) devient

$$\begin{aligned}
0 &= [S^\psi(u), [S^\phi(v), S^\psi(w)]] + [S^\phi(v), [S^\psi(w), S^\psi(u)]] + [S^\psi(w), [S^\psi(u), S^\phi(v)]] \\
&= [S^\psi(u), [S^\phi(v), S^\psi(w)]] + [S^\psi(w), [S^\psi(u), S^\phi(v)]] \text{ voir (1.3)} \\
&= [S^\psi(u), i \{ \Psi(w, v) S^\theta(v) - S^\theta(w) \Phi(w, v) \}] \\
&\quad + [S^\psi(w), i \{ S^\theta(u) \Phi(u, v) - \Psi(u, v) S^\theta(v) \}] \text{ voir (1.2) et (1.1)} \\
&= i \Psi(w, v) [S^\psi(u), S^\theta(v)] - i [S^\psi(u), S^\theta(w)] \Phi(w, v) \\
&\quad + i [S^\psi(w), S^\theta(u)] \Phi(u, v) - i \Psi(u, v) [S^\psi(w), S^\theta(v)] \\
&= -\Psi(w, v) \{ \Theta(v, u) S^\phi(u) - S^\phi(v) \Psi(v, u) \} + \{ \Theta(w, u) S^\phi(u) - S^\phi(w) \Psi(w, u) \} \Phi(w, v) \\
&\quad - \{ \Theta(u, w) S^\phi(w) - S^\phi(u) \Psi(u, w) \} \Phi(u, v) + \Psi(u, v) \{ \Theta(v, w) S^\phi(w) - S^\phi(v) \Psi(v, w) \} \\
\Rightarrow 0 &= -\{ \Psi(w, v) \Theta(v, u) - \Theta(w, u) \Phi(w, v) - \Psi(u, w) \Phi(u, v) \} S^\phi(u) \\
&\quad + \{ \Psi(w, v) \Psi(v, u) - \Psi(u, v) \Psi(v, w) \} S^\phi(v) \\
&\quad - \{ \Psi(w, u) \Phi(w, v) + \Theta(u, w) \Phi(u, v) - \Psi(u, v) \Theta(v, w) \} S^\phi(w), \tag{A.1}
\end{aligned}$$

où $\Psi(u, v)$, $\Phi(u, v)$ et $\Theta(u, v) \in \{X(u, v), Y(u, v), Z(u, v); u, v \in \mathbb{C}\}$ sont trois fonctions de deux variables complexes.

En considérant le fait que $S^\phi(u)$, $S^\phi(v)$ et $S^\phi(w)$ sont indépendants, on déduit de (A.1) un système de trois équations dont on déduit l'équation classique de Yang-Baxter dans le cas exceptionnel où $\Psi(u, v)$, $\Phi(u, v)$ et $\Theta(u, v)$ sont toutes antisymétriques.

A.2 Action des opérateurs de $S^2(u)$ sur les états de Bethe

En se rappelant que, pour ce cas, nous avons affaire à des modèles de Gaudin rationnels (XXX) de spin- $\frac{1}{2}$ et en faisant agir les opérateurs de Gaudin $S^2(u)$ sur les états de Bethe (1.15), on obtient

$$\begin{aligned}
S^2(u) |\lambda_1 \dots \lambda_M\rangle &= \left[S^2(u), \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) \right] |\Omega\rangle + \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) S^2(u) |\Omega\rangle \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^{i-1} S^+(\lambda_j) \right) [S^2(u), S^+(\lambda_i)] \left(\prod_{k=i}^{M-1} S^+(\lambda_{k+1}) \right) |\Omega\rangle + \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) S^2(u) |\Omega\rangle \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^{i-1} S^+(\lambda_j) \right) \left(\prod_{k=i+1}^M S^+(\lambda_k) \right) [S^2(u), S^+(\lambda_i)] |\Omega\rangle + \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) S^2(u) |\Omega\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^{i-1} S^+(\lambda_j) \right) \left[[S^2(u), S^+(\lambda_i)], \left(\prod_{k=i+1}^M S^+(\lambda_k) \right) \right] |\Omega\rangle \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^{i-1} S^+(\lambda_j) \right) \left(\prod_{k=i+1}^M S^+(\lambda_k) \right) [S^2(u), S^+(\lambda_i)] |\Omega\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^{i-1} S^+(\lambda_j) \right) \sum_{k=i+1}^M \left(\prod_{m=i+1}^{k-1} S^+(\lambda_m) \right) [[S^2(u), S^+(\lambda_i)], S^+(\lambda_k)] \\
&\quad \times \left(\prod_{n=k+1}^M S^+(\lambda_n) \right) |\Omega\rangle + \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) S^2(u) |\Omega\rangle \\
&= \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1, j \neq i}^M S^+(\lambda_j) \right) [S^2(u), S^+(\lambda_i)] |\Omega\rangle + \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) S^2(u) |\Omega\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{k \neq i}^M \left(\prod_{j \neq i, k}^M S^+(\lambda_j) \right) [[S^2(u), S^+(\lambda_i)], S^+(\lambda_k)] |\Omega\rangle \\
&= 2 \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1, j \neq i}^M S^+(\lambda_j) \right) X(u, \lambda_i) (S^+(u) S^z(\lambda_i) - S^+(\lambda_i) S^z(u)) |\Omega\rangle \\
&\quad + \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) S^2(u) |\Omega\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{k \neq i}^M \left(\prod_{j \neq i, k}^M S^+(\lambda_j) \right) 2X(u, \lambda_i) \\
&\quad \times [(S^+(u) S^z(\lambda_i) - S^+(\lambda_i) S^z(u)), S^+(\lambda_k)] |\Omega\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1, j \neq i}^M S^+(\lambda_j) \right) X(u, \lambda_i) (F_z(\lambda_i) S^+(u) - F_z(u) S^+(\lambda_i)) |\Omega\rangle \\
&+ F(u) \prod_{i=1}^M S^+(\lambda_i) |\Omega\rangle + \sum_{i=1}^M \sum_{k \neq i}^M \left(\prod_{j \neq i, k}^M S^+(\lambda_j) \right) X(u, \lambda_i) \times \{ \\
&(X(\lambda_i, \lambda_k) (S^+(\lambda_i) - S^+(\lambda_k)) - X(u, \lambda_k) S^+(\lambda_i)) S^+(u) + X(u, \lambda_k) \times \\
&S^+(\lambda_i) S^+(\lambda_k) \} |\Omega\rangle \\
&= \left\{ F(u) + 2 \sum_{i=1}^M X(\lambda_i, u) F_z(u) + \sum_{i=1}^M \sum_{k \neq i}^M X(u, \lambda_i) X(u, \lambda_k) \right\} \prod_{j=1}^M S^+(\lambda_j) |\Omega\rangle \\
&+ 2 \sum_{i=1}^M X(u, \lambda_i) \left\{ F_z(\lambda_i) + \sum_{k \neq i}^M X(\lambda_k, \lambda_i) \right\} \prod_{j=1}^M S^+(\lambda_j; \lambda_{j=i} \rightarrow u) |\Omega\rangle \\
&= E(\{\lambda\}, u) |\lambda_1 \dots \lambda_M\rangle + \sum_{i=1}^M F_i(\{\lambda\}, u) |\lambda_1 \dots, \lambda_i \rightarrow u, \dots \lambda_M\rangle, \tag{A.2}
\end{aligned}$$

où M est le nombre total d'excitations de spin- $\frac{1}{2}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ sont des paramètres appelés rapidités (ou racines de Bethe), $S^+(\lambda_i)$ est l'opérateur qui crée le nombre i de quasi-particules et $E(\{\lambda\}, u) \forall u \in \mathbb{C}$ est une fonction de u et de l'ensemble des λ . $|\Omega\rangle$ et $F_i(\lambda)$ sont respectivement l'état pseudo-vacuum quantique des particules et les valeurs propres de $S_i^z(\lambda)$ définies par les équations (1.16).

A.3 Obtention des équations quadratiques de Bethe à partir des résultats de l'ansatz de Bethe

En écrivant la valeur propre $r(\epsilon_i)$ d'une charge conservée donnée $R(\epsilon_i)$ en fonction de $\Lambda(\epsilon_i)$, définie par l'équation (1.22), et en prenant son carré, on trouve, pour un ensemble donné $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_j, \dots, \epsilon_N; \epsilon_j \neq \epsilon_i \text{ and } \epsilon_i, \epsilon_j \in \mathbb{R}\}$, tel que :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \Lambda(\epsilon_i)^2 + \frac{\alpha}{2} \Lambda(\epsilon_i) - \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \frac{\Lambda(\epsilon_i)}{\epsilon_i - \epsilon_j} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{\epsilon_i - \epsilon_j} \\
&+ \frac{1}{16} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_k)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{-\frac{1}{2} \Lambda(\epsilon_j) - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \frac{1}{\epsilon_j - \epsilon_k}}{\epsilon_i - \epsilon_j} + \frac{3}{16} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} + \frac{\alpha^2}{4} \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Lambda^2(\epsilon_i) + 2\alpha \Lambda(\epsilon_i) - \sum_{j \neq i} \frac{\Lambda(\epsilon_j) - \Lambda(\epsilon_i)}{\epsilon_j - \epsilon_i} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j} \frac{1}{(\epsilon_j - \epsilon_k)(\epsilon_i - \epsilon_j)} - \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_k)} + \frac{3}{4} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

On peut maintenant montrer que le côté droit de cette équation est strictement égal à 0 en l'écrivant comme suit :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j, i} \frac{1}{(\epsilon_j - \epsilon_k)(\epsilon_i - \epsilon_j)} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{(\epsilon_j - \epsilon_i)(\epsilon_i - \epsilon_j)} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_k)} - \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_j)} + \frac{3}{4} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)^2} \\
& = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j, i} \frac{1}{(\epsilon_j - \epsilon_k)(\epsilon_i - \epsilon_j)} - \frac{1}{4} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i, j} \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_k)} \\
& = \frac{1}{4} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j, i} \left(\frac{2}{(\epsilon_j - \epsilon_k)(\epsilon_i - \epsilon_j)} - \frac{1}{(\epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_k)} \right) \\
& = \frac{1}{4} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j, i} \left(\frac{2}{(\epsilon_j - \epsilon_k)(\epsilon_i - \epsilon_j)} - \frac{1}{(\epsilon_j - \epsilon_k)(\epsilon_i - \epsilon_j)} \right) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{j \neq i}^N \sum_{k \neq j, i} \frac{1}{(\epsilon_j - \epsilon_k)(\epsilon_i - \epsilon_k)} \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

k et j couvrent simplement l'ensemble des paires d'indices (à l'exclusion de i pour les deux), la dernière somme peut également être écrite en échangeant les indices k et j .

A.4 Carré des charges conservées génériques dans les modèles de R-G

→ R_j^2 en fonction des matrices de spin- $\frac{1}{2}$.

Pour construire le carré des charges conservées R_j défini par (1.31) en utilisant les matrices de spin- $\frac{1}{2}$, rappelons les relations $[S_j^\alpha, S_j^\beta]_+ = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \forall \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ où S_j^α et S_j^β sont des matrices de spin $\frac{1}{2}$ suivant les directions α et β . Ensuite, en exprimant le carré de R_j comme la moitié de son anticommutateur avec lui-même, on voit que

$$\begin{aligned}
R_j^2 &= \frac{1}{2} [R_j, R_j]_+ \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^3 \left\{ \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} S_j^\alpha S_k^\alpha + B_j^\alpha S_j^\alpha \right\}, \sum_{\beta=1}^3 \left\{ \sum_{l \neq j}^N \Gamma_{jl}^{\beta\beta} S_j^\beta S_l^\beta + B_j^\beta S_j^\beta \right\} \right]_+ \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\beta} [S_j^\alpha S_k^\alpha, S_j^\beta S_l^\beta]_+ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 B_j^\alpha B_j^\beta [S_j^\alpha, S_j^\beta]_+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \sum_{k \neq j}^N B_j^\beta \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} [S_j^\alpha S_k^\alpha, S_j^\beta]_+ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \sum_{l \neq j}^N B_j^\alpha \Gamma_{jl}^{\beta\beta} [S_j^\alpha, S_j^\beta S_l^\beta]_+ \\
 = & \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j,k}^N \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\beta} \delta_{\beta\alpha} S_k^\alpha S_l^\beta + \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 B_j^\alpha B_j^\beta \delta_{\beta\alpha} \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} \Gamma_{jk}^{\beta\beta} \delta_{\beta\alpha} S_j^\alpha S_j^\beta - \sum_{\psi,\tau=1}^3 \Gamma_{jk}^{\psi\psi} \Gamma_{jk}^{\tau\tau} \epsilon_{\tau\psi\alpha} \epsilon_{\tau\psi\beta} S_j^\alpha S_k^\beta \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \delta_{\alpha\beta} B_j^\beta \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha \\
 = & \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j,k}^N \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} \Gamma_{jl}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha S_l^\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\psi\psi} \Gamma_{jk}^{\tau\tau} \right) S_j^\alpha S_k^\alpha \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N B_j^\alpha \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 (B_j^\alpha)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, l > k}^N \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} \Gamma_{jl}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha S_l^\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 S_j^\alpha S_k^\alpha \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N B_j^\alpha \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 (B_j^\alpha)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}},
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

où $\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}$, $\Gamma_{jl}^{\alpha\alpha}$ et B_j^α sont des paramètres de couplage le long de α . $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ est la matrice identité de l'espace de Hilbert associé de dimension $\mathcal{D} = 2^N$ avec N le nombre total de spin- $\frac{1}{2}$.

→ R_j^2 comme fonction de $R_{k \neq j}$

En utilisant la forme de R_j^2 donnée par l'équation (A.6) et les contraintes génériques imposées par l'intégrabilité pour les modèles de R-G dans les équations (1.35) et (1.36), on obtient

$$\begin{aligned}
 R_j^2 & = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, l > k}^N \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} \Gamma_{jl}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha S_l^\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 S_j^\alpha S_k^\alpha \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N B_j^\alpha \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 (B_j^\alpha)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 = & \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, l > k}^N (C_{jk} \Gamma_{kl}^{\alpha\alpha} + C_{jl} \Gamma_{lk}^{\alpha\alpha}) S_k^\alpha S_l^\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N C_{jk} \Gamma_{kj}^{\alpha\alpha} S_j^\alpha S_k^\alpha \\
 & + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N C_{jk} B_k^\alpha S_k^\alpha + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 (B_j^\alpha)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 = & \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N C_{jk} \Gamma_{kl}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha S_l^\alpha + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N C_{jk} \Gamma_{kj}^{\alpha\alpha} S_j^\alpha S_k^\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N C_{jk} B_k^\alpha S_k^\alpha + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 (B_j^\alpha)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
= & \sum_{k \neq j}^N C_{jk} \sum_{\alpha=1}^3 \left[\sum_{l \neq k}^N \Gamma_{kl}^{\alpha\alpha} S_k^\alpha S_l^\alpha + B_k^\alpha S_k^\alpha \right] + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
& + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 (B_j^\alpha)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
= & \sum_{k \neq j}^N C_{jk} R_k + \frac{1}{16} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{k \neq j}^N (\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha})^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^3 (B_j^\alpha)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}}, \tag{A.7}
\end{aligned}$$

où nous avons $C_{jk} = \frac{B_j^\alpha}{2B_k^\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha\alpha}$, les paramètres réels établissant la relation entre R_j^2 et les autres R_k .

Annexe B

Formes quadratiques entre operateurs de R-G avec couplages bidirectionnels

B.1 Calcul générique du carré des charges conservées contenant des couplages bidirectionnels

Ci-dessous, nous avons les étapes à suivre pour aboutir au carré des charges conservées traitées dans la première partie de ce chapitre. En effet, en servant des relations allant de 3.8 à 3.17, nous aboutissons à

$$\begin{aligned}
R_i^2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma + \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda, \nu} \sum_{\beta, \tau} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\nu} (\delta_{\eta\lambda} \delta_{\nu\mu} \delta_{\tau\beta} + \delta_{\eta\mu} \delta_{\nu\beta} \delta_{\tau\lambda} + \delta_{\eta\beta} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\tau\mu} - \delta_{\eta\lambda} \delta_{\nu\beta} \delta_{\tau\mu} \\
&\quad - \delta_{\eta\beta} \delta_{\nu\mu} \delta_{\tau\lambda} - \delta_{\eta\mu} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\tau\beta},) S_j^\beta S_k^\tau \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma + \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\mu, \eta, \tau} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} S_j^\tau S_k^\tau + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\eta} \sum_{\lambda, \nu} \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\nu} S_j^\nu S_k^\lambda + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\lambda} S_j^\eta S_k^\mu \\
&\quad - \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\mu, \eta} \sum_{\nu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\nu} S_j^\nu S_k^\mu - \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\mu, \eta} \sum_{\lambda} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\mu} S_j^\eta S_k^\lambda - \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\eta, \lambda, \tau} \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\lambda} S_j^\tau S_k^\tau \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j}^N \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma + \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, k}^N \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\mu, \eta, \tau} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} S_j^\tau S_k^\tau + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\eta \neq \nu} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\nu} S_j^\nu S_k^\mu + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j}^N \sum_{\mu \neq \lambda} \sum_{\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\lambda} S_j^\eta S_k^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\eta \neq \nu} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\nu} S_j^\nu S_k^\mu - \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu \neq \lambda} \sum_{\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\lambda} S_j^\eta S_k^\mu - \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\eta, \lambda, \tau} \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\lambda} S_j^\tau S_k^\tau \\
= & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma + \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, k} \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \\
+ & \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu, \eta, \tau} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \right) S_j^\tau S_k^\tau + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\eta \neq \nu} \sum_{\mu} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\nu} - \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\nu} \right) S_j^\nu S_k^\mu \\
& + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu \neq \lambda} \sum_{\eta} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\lambda\lambda} - \Gamma_{jk}^{\lambda\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\lambda} \right) S_j^\eta S_k^\mu \\
= & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma + \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, k} \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \\
+ & \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu, \eta, \tau} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \right) S_j^\tau S_k^\tau + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\nu, \mu} \sum_{\eta \neq \nu, \mu} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\nu} - \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\nu} \right) S_j^\nu S_k^\mu \\
& + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\nu, \mu} \sum_{\eta \neq \nu, \mu} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\nu} \Gamma_{jk}^{\eta\eta} - \Gamma_{jk}^{\eta\nu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right) S_j^\nu S_k^\mu \\
= & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma + \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, k} \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \\
+ & \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu, \eta, \tau} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \right) S_j^\tau S_k^\tau + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \sum_{\nu, \mu} \sum_{\eta \neq \nu, \mu} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\nu} - \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\nu} \right) S_j^\nu S_k^\mu \\
= & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{\mu, \eta} \sum_{k \neq j} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma + \sum_{\eta, \nu} \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, k} \left(\frac{1}{4} \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jl}^{\mu\nu} \right) S_k^\eta S_l^\nu \\
+ & \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\eta} \sum_{\mu \neq \eta} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \right) S_j^\eta S_k^\mu + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu} \sum_{\eta \neq \mu} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \right) S_j^\mu S_k^\mu \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu, \eta \neq \mu} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} - \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} \right) S_j^\mu S_k^\mu + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \sum_{\mu, \eta \neq \mu} \sum_{\tau \neq \eta, \mu} \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} - \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} \right) S_j^\tau S_k^\tau \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \sum_{\nu, \mu \neq \nu} \sum_{\eta \neq \nu, \mu} \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\nu} - \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\nu} \right) S_j^\nu S_k^\mu \\
= & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} \sum_{k \neq j} \left(\sum_{\alpha} \left(\Gamma_{jk}^{\alpha\alpha} \right)^2 + \left(\Gamma_{jk}^{\mu\eta} \right)^2 + \left(\Gamma_{jk}^{\eta\mu} \right)^2 \right) \right) \mathbb{1} + \sum_{k \neq j} \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_k^\gamma \\
& + \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, l > k} \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\alpha} \Gamma_{jl}^{\beta\alpha} \right) S_k^\alpha S_l^\alpha + \sum_{k \neq j} \sum_{l \neq j, l > k} \left(\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\eta} \Gamma_{jl}^{\beta\mu} \right) S_k^\eta S_l^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k \neq j}^N \sum_{l \neq j, l > k}^N \left(\frac{1}{2} \sum_{\beta} \Gamma_{jk}^{\beta\mu} \Gamma_{jl}^{\beta\eta} \right) S_k^{\mu} S_l^{\eta} - \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} - \Gamma_{jk}^{\mu\eta} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} \right) S_j^{\eta} S_k^{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\mu\mu} S_j^{\eta} S_k^{\eta} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk}^{\eta\eta} \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} S_j^{\mu} S_k^{\mu} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\mu\eta} S_j^{\eta} S_k^{\mu} + \Gamma_{jk}^{\gamma\gamma} \Gamma_{jk}^{\eta\mu} S_j^{\mu} S_k^{\eta} \right) \tag{B.1}
\end{aligned}$$

B.2 Calcul explicite du carré de chaque charge conservée avec bords triangulaire comme combinaison linéaire des autres charges conservées du même type

A partir des relations (3.42), on construit explicitement le carré de chaque charge conservée $R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma)$, donné en (3.41) comme suit :

$$\begin{aligned}
R^2(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) &= \left\{ \sum_{n \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_n}{\epsilon_m - \epsilon_n} + \sum_{n \neq m}^N \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_n} \left(S_m^3 S_n^3 - 2 \frac{\psi^2}{\kappa^2} \frac{\epsilon_m^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} S_m^+ S_n^+ \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\psi}{\kappa} \frac{\epsilon_m}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{n \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m) S_m^3 S_n^+}{\epsilon_m + \epsilon_n} - \frac{(\gamma + \epsilon_m) S_m^+ S_n^3}{\epsilon_m + \epsilon_n} \right] \right\} \times \\
&\times \left\{ \sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m - \epsilon_k} + \sum_{k \neq m}^N \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} \left(S_m^3 S_k^3 - 2 \frac{\psi^2}{\kappa^2} \frac{\epsilon_m^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} S_m^+ S_k^+ \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\psi}{\kappa} \frac{\epsilon_m}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m) S_m^3 S_k^+}{\epsilon_m + \epsilon_k} - \frac{(\gamma + \epsilon_m) S_m^+ S_k^3}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right] \right\} \\
&+ \left\{ \sum_{n \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_n}{\epsilon_m - \epsilon_n} + \sum_{n \neq m}^N \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_n} \left(S_m^3 S_n^3 - 2 \frac{\psi^2}{\kappa^2} \frac{\epsilon_m^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} S_m^+ S_n^+ \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{\psi}{\kappa} \frac{\epsilon_m}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{n \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m) S_m^3 S_n^+}{\epsilon_m + \epsilon_n} - \frac{(\gamma + \epsilon_m) S_m^+ S_n^3}{\epsilon_m + \epsilon_n} \right] \right\} \times \\
&\times \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m)^2 S_m^- S_k^+}{\epsilon_m + \epsilon_k} + \frac{(\gamma + \epsilon_m)^2 S_m^+ S_k^-}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right] + \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{1_{\mathcal{D}}}{8\epsilon_m} \right\} \\
&+ \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{n \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m)^2 S_m^- S_n^+}{\epsilon_m + \epsilon_n} + \frac{(\gamma + \epsilon_m)^2 S_m^+ S_n^-}{\epsilon_m + \epsilon_n} \right] + \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{1_{\mathcal{D}}}{8\epsilon_m} \right\} \\
&\times \left\{ \sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m - \epsilon_k} + \sum_{k \neq m}^N \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} \left(S_m^3 S_k^3 - 2 \frac{\psi^2}{\kappa^2} \frac{\epsilon_m^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} S_m^+ S_k^+ \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \frac{\psi}{\kappa} \frac{\epsilon_m}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m) S_m^3 S_k^+}{\epsilon_m + \epsilon_k} - \frac{(\gamma + \epsilon_m) S_m^+ S_k^3}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right] \Bigg\} \\
 & + \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{n \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m)^2 S_m^- S_n^+}{\epsilon_m + \epsilon_n} + \frac{(\gamma + \epsilon_m)^2 S_m^+ S_n^-}{\epsilon_m + \epsilon_n} \right] + \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{8\epsilon_m} \right\} \\
 & \times \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left[\frac{(\gamma - \epsilon_m)^2 S_m^- S_k^+}{\epsilon_m + \epsilon_k} + \frac{(\gamma + \epsilon_m)^2 S_m^+ S_k^-}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right] + \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{8\epsilon_m} \right\}. \\
 & = - \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{4\epsilon_m} \left(\sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m - \epsilon_k} + \sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right) + \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{2\epsilon_m} \right\} R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) \\
 & + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n=1}^N \frac{1}{\epsilon_k + \epsilon_n} \left\{ \frac{S_k^+ S_n^- + S_n^- S_k^+}{2(\gamma - \epsilon_k)} - \frac{S_k^- S_n^+ + S_n^+ S_k^-}{2(\gamma + \epsilon_k)} - \frac{2\epsilon_k}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} \frac{\psi^2}{\kappa^2} S_k^+ S_n^+ \right. \\
 & \left. + \frac{\psi}{\kappa} \cdot \frac{S_k^3 S_n^+ + S_n^+ S_k^3}{\gamma + \epsilon_k} - \frac{\psi}{\kappa} \cdot \frac{S_k^+ S_n^3 + S_n^3 S_k^+}{\gamma - \epsilon_k} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n \neq k}^N \frac{\vec{S}_k \cdot \vec{S}_n}{(\epsilon_k - \epsilon_n)(\epsilon_k + \epsilon_m)} \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n \neq k, m}^N \frac{S_k^+ S_n^- + S_k^3 S_n^3}{(\epsilon_m + \epsilon_k)(\epsilon_m + \epsilon_n)} + \frac{3}{16} \sum_{k \neq m}^N \left[\frac{1}{(\epsilon_m - \epsilon_k)^2} + \frac{1}{(\epsilon_m + \epsilon_k)^2} \right] \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 & - \frac{1}{64\epsilon_m} \left(\frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right)^2 \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 & = - \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{4\epsilon_m} \left(\sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m - \epsilon_k} + \sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right) R(\epsilon_k, \psi, \kappa, \gamma) + \frac{1}{4\epsilon_m} \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) \\
 & + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \frac{1}{\epsilon_k} \left\{ - \frac{2\epsilon_k^2}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} \frac{\psi^2}{\kappa^2} \sum_{n \neq k}^N \frac{S_k^+ S_n^+}{\epsilon_k + \epsilon_n} + \frac{\gamma + \epsilon_k}{2(\gamma - \epsilon_k)} \sum_{n \neq k}^N \frac{S_k^+ S_n^-}{\epsilon_k + \epsilon_n} \right. \\
 & + \frac{\gamma - \epsilon_k}{2(\gamma + \epsilon_k)} \sum_{n \neq k}^N \frac{S_k^- S_n^+}{\epsilon_k + \epsilon_n} + \frac{\psi}{\kappa} \cdot \frac{2\epsilon_k}{\gamma + \epsilon_k} \sum_{n \neq k}^N \frac{S_k^3 S_n^+}{\epsilon_k + \epsilon_n} - \frac{\psi}{\kappa} \cdot \frac{2\epsilon_k}{\gamma - \epsilon_k} \sum_{n \neq k}^N \frac{S_k^+ S_n^3}{\epsilon_k + \epsilon_n} \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sum_{n \neq k}^N \frac{S_k^+ S_n^-}{\epsilon_k + \epsilon_n} - \frac{1}{2} \sum_{n \neq k}^N \frac{S_k^- S_n^+}{\epsilon_k + \epsilon_n} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n \neq k}^N \frac{\vec{S}_k \cdot \vec{S}_n}{(\epsilon_k - \epsilon_n)(\epsilon_k + \epsilon_m)} \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n \neq k, m}^N \frac{S_k^+ S_n^- + S_k^3 S_n^3}{(\epsilon_m + \epsilon_k)(\epsilon_m + \epsilon_n)} + \frac{3}{16} \sum_{k \neq m}^N \left[\frac{1}{(\epsilon_m - \epsilon_k)^2} + \frac{1}{(\epsilon_m + \epsilon_k)^2} \right] \mathbb{1}_{\mathcal{D}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \frac{1}{(\gamma^2 - \epsilon_k^2)} - \frac{1}{64\epsilon_m} \left(\frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right)^2 \right\} \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} + \frac{2}{\epsilon_k} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right) R(\epsilon_k, \psi, \kappa, \gamma) \\
 &+ \frac{1}{4\epsilon_m} \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) - \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{4\epsilon_m} \left(\sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m - \epsilon_k} + \sum_{k \neq m}^N \frac{\vec{S}_m \cdot \vec{S}_k}{\epsilon_m + \epsilon_k} \right) \\
 &- \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \frac{1}{\epsilon_k} \left(\sum_{n \neq k}^N \frac{\vec{S}_k \cdot \vec{S}_n}{\epsilon_k + \epsilon_n} + \sum_{n \neq k}^N \frac{\vec{S}_k \cdot \vec{S}_n}{\epsilon_k - \epsilon_n} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n \neq k}^N \frac{\vec{S}_k \cdot \vec{S}_n}{(\epsilon_k - \epsilon_n)(\epsilon_k + \epsilon_n)} \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n \neq k, m}^N \frac{S_k^+ S_n^- + S_k^3 S_n^3}{(\epsilon_m + \epsilon_k)(\epsilon_m + \epsilon_n)} + \frac{3}{16} \sum_{k \neq m}^N \left[\frac{1}{(\epsilon_m - \epsilon_k)^2} + \frac{1}{(\epsilon_m + \epsilon_k)^2} \right] \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 & \left\{ \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} - \frac{1}{4\epsilon_k} \frac{3\gamma^2 + \epsilon_k^2}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} \right) - \frac{1}{64\epsilon_m} \left(\frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right)^2 \right\} \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} + \frac{2}{\epsilon_k} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right) R(\epsilon_k, \psi, \kappa, \gamma) \\
 &+ \frac{1}{4\epsilon_m} \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \sum_{n \neq k, m}^N \frac{\vec{S}_k \cdot \vec{S}_n}{(\epsilon_k + \epsilon_m)} \left[\frac{\epsilon_m + \epsilon_k + \epsilon_m + \epsilon_n}{2(\epsilon_m + \epsilon_n)(\epsilon_k - \epsilon_n)} \right] \\
 &+ \frac{3}{8} \sum_{k \neq m}^N \frac{\epsilon_m^2 + \epsilon_k^2}{(\epsilon_m^2 - \epsilon_k^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} - \frac{1}{4\epsilon_k} \frac{3\gamma^2 + \epsilon_k^2}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} \right) \mathbb{1}_{\mathcal{D}} \\
 & \quad - \left(\frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right)^2 \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{64\epsilon_m} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_m + \epsilon_k} + \frac{2}{\epsilon_k} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right) R(\epsilon_k, \psi, \kappa, \gamma) \\
 &+ \frac{1}{4\epsilon_m} \frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} R(\epsilon_m, \psi, \kappa, \gamma) + \frac{3}{8} \sum_{k \neq m}^N \frac{\epsilon_m^2 + \epsilon_k^2}{(\epsilon_m^2 - \epsilon_k^2)^2} - \left(\frac{(3\gamma^2 + \epsilon_m^2)}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \right)^2 \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}}{64\epsilon_m} \\
 & \quad + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \epsilon_m^2} \sum_{k \neq m}^N \left(\frac{1}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} - \frac{1}{4\epsilon_k} \frac{3\gamma^2 + \epsilon_k^2}{\gamma^2 - \epsilon_k^2} \right) \mathbb{1}_{\mathcal{D}}, \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

ceci pour un ensemble donné $\{\psi, \kappa, \gamma, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \dots, \epsilon_k, \dots, \epsilon_N; \epsilon_m \neq \epsilon_k \text{ and } \psi, \kappa, \gamma, \epsilon_m, \epsilon_k \in \mathbb{R}\}$ de paramètres.

Annexe C

Etats sombres dans les modèles XX de R-G avec champ arbitraire

C.1 Modèle et charges conservées

Une de fois de plus les modèles physiques utilisés dans ce travail sont ceux dans lesquels il existe un spin couplé à un champ magnétique externe et à un bain de spins environnants. Il sont définis comme suit :

$$H_j = g \sum_{k=0, k \neq j}^N \left(\Gamma_{jk}^x S_j^x S_k^x + \Gamma_{0k}^y S_j^y S_k^y + \Gamma_{0k}^z S_j^z S_k^z \right) + B_j^x S_j^x + B_j^y S_j^y + B_j^z S_j^z, \quad (\text{C.1})$$

où α est une direction quelconque de l'espace à trois dimensions, les couplages Γ_{jk}^α et les composantes B_j^α du champ magnétique externe étant donnés par

$$\Gamma_{0k} = \sqrt{\frac{(J_\perp - J_z)(\epsilon_k + J_\perp)}{\epsilon_k + J_z}} \quad B_0^x = \frac{B^x}{\sqrt{J_\perp - J_z}} \quad B_0^y = \frac{B^y}{\sqrt{J_\perp - J_z}} \quad B_0^z = B^z. \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^x &= \frac{\sqrt{(J_x + \epsilon_j)(\epsilon_k + J_y)(\epsilon_k + J_z)}}{\epsilon_k - \epsilon_j} & B_j^x &= \frac{B^x}{\sqrt{J_x + \epsilon_0}} \\ \Gamma_{jk}^y &= \frac{\sqrt{(\epsilon_k + J_x)(J_y + \epsilon_j)(\epsilon_k + J_z)}}{\epsilon_k - \epsilon_j} & B_j^y &= \frac{B^y}{\sqrt{J_y + \epsilon_j}} \\ \Gamma_{jk}^z &= \frac{\sqrt{(\epsilon_k + J_x)(\epsilon_k + J_y)(\epsilon_j + J_z)}}{\epsilon_k - \epsilon_j} & B_j^z &= \frac{B^z}{\sqrt{J_z + \epsilon_j}}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où j est l'indice du spin considéré comme central, N est le nombre de spins du bain,

$$\left\{ \{ \epsilon_k \}_{k=0}^N, g, J_x, J_y, J_z, B^x, B^y, B^z \right\} \quad (\text{C.4})$$

est un ensemble de $N + 8$ paramètres caractérisant le système considéré dans sa globalité.

Le système sur lequel nous nous apesentirons ici, est celui pour lequel le spin central sera d'indice 0, ceci afin d'obtenir des couplages de mêmes signe et surtout de se rapprocher au mieux des systèmes physiques réalistes.

Ainsi notre hamiltonien sera défini par H_0 et commutera avec les $\{H_j\}_{j=1}^N$ opérateurs, ceci dans l'optique de facilité sa résolution.

Les modèles traités dans ce chapitre sont ceux dans lesquels le spin central n'est pas couplé au bain dans la direction \hat{z} ; ils constituent donc une limite des modèles génériques ci-dessus. Dans cette section nous verrons comment prendre cette limite afin d'obtenir les modèles de spin central que nous traitons ici.

Pour y arriver, commençons par choisir $J_x = J_y = J_\perp$, puisque les modèles qui intéressent sont isotropes. Par la suite en posant $\epsilon_0 = \Delta - J_z$ où Δ est un paramètre libre, les couplages et le champ définis ci-dessus deviennent des fonctions de Δ et s'écrivent de nouveau comme

$$\begin{aligned} \Gamma_{0k}^x(\Delta) &= \frac{\sqrt{(J_\perp - J_z + \Delta)(\epsilon_k + J_\perp)(\epsilon_k + J_z)}}{\epsilon_k + J_z - \Delta} & B_0^x(\Delta) &= \frac{B^x}{\sqrt{J_\perp - J_z + \Delta}} \\ \Gamma_{0k}^z(\Delta) &= \frac{\sqrt{(\epsilon_k + J_\perp)(\epsilon_k + J_\perp)\Delta}}{\epsilon_k + J_z - \Delta} & B_0^z(\Delta) &= \frac{B^z}{\sqrt{\Delta}}, \end{aligned} \quad (C.5)$$

puisque $\Gamma_{0k}^x = \Gamma_{0k}^y$. En fin, pour annuler l'effet du couplage suivant \hat{z} et retrouver les modèles traités dans ce chapitre, il nous suffira alors de prendre la limite Δ tendant vers 0. une fois cette limite prise, on obtient H_0 , avec

$$H_0 = g \sum_{k=1}^N \Gamma_{0k} (S_0^x S_k^x + S_0^y S_k^y) + B_0^x S_0^x + B_0^y S_0^y + B_0^z S_0^z, \quad (C.6)$$

où

$$\Gamma_{0k} = \sqrt{\frac{(J_\perp - J_z)(\epsilon_k + J_\perp)}{\epsilon_k + J_z}} \quad B_0^x = \frac{B^x}{\sqrt{J_\perp - J_z}} \quad B_0^y = \frac{B^y}{\sqrt{J_\perp - J_z}} \quad B_0^z, \quad (C.7)$$

$$\text{où } B_0^z = \left. \frac{B^z}{\sqrt{\Delta}} \right|_{\Delta \rightarrow 0} \equiv B^z.$$

C.2 Calcul des valeurs moyennes

La détermination du spectre en énergie des modèles de la section précédente ne tient en aucun cas compte de la symétrie du système étudié. Plus encore, elle ne tient qu'à la résolution d'un système d'équations quadratiques [58, 89] qu'on sait résoudre numériquement à partir des algorithmes de Newton-Raphson. De manière plus précise les valeurs propres des modèles construits en C.1 obéissent aux équations quadratiques suivantes

$$h_j^2 = -\frac{g}{2} \sum_{k \neq j} C_{jk} h_k(\Delta) + g^2 \sum_{\alpha} \sum_{j \neq k} \left[\frac{\Gamma_{jk}^{\alpha}}{4} \right]^2 + \sum_{\alpha} \left[\frac{B_j^{\alpha}}{2} \right]^2 \quad (C.8)$$

où les C_{jk} sont des constantes et les $\{h_j\}_{j=0}^{j=N}$ sont les énergies du système courant.

Une fois les énergies calculées, on se sert du théorème de Hellmann-Feynman pour déterminer les valeurs moyennes de spins selon \hat{x} , \hat{y} et \hat{z} , lesquelles seront utiles pour le calcul du facteur de pureté γ_0 et du champ ressenti par le spin central.

Les résultats obtenus sont donnés comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle S_0^x \rangle = \sqrt{J_\perp - J_z} \left(\frac{\partial h_0}{\partial B^x} \right) \\ \langle S_0^y \rangle = \sqrt{J_\perp - J_z} \left(\frac{\partial h_0}{\partial B^y} \right) \\ \langle S_0^z \rangle = \frac{\partial h_0}{\partial B_0^z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle S_{j \neq 0}^x \rangle = \sqrt{\epsilon_j + J_\perp} \left(\frac{\partial h_j}{\partial B^x} \right) \\ \langle S_{j \neq 0}^y \rangle = \sqrt{\epsilon_j + J_\perp} \left(\frac{\partial h_j}{\partial B^y} \right) \\ \langle S_{j \neq 0}^z \rangle = \sqrt{\epsilon_j + J_z} \left(\frac{\partial^2}{\partial \sqrt{\Delta}} \frac{h_j}{\partial B_0^z} \right)_{\sqrt{\Delta} \rightarrow 0} \end{array} \right.$$

où les dérivées s'obtiennent en résolvant les équations linéaires suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} h_j \left(\frac{\partial h_j}{\partial B^x} \right) = -\frac{g}{4} \sum_{k \neq j} C_{jk} \left(\frac{\partial h_k}{\partial B^x} \right) + \left[\frac{B_j^x}{2\sqrt{B^x}} \right]^2 \\ h_j \left(\frac{\partial h_j}{\partial B^y} \right) = -\frac{g}{4} \sum_{k \neq j} C_{jk} \left(\frac{\partial h_k}{\partial B^y} \right) + \left[\frac{B_j^y}{2\sqrt{B^y}} \right]^2 \\ \frac{\partial h_0}{\partial B_0^z} = \frac{1}{4} \frac{B_0^z}{h_0} \\ h_j X_j = \frac{g}{16} \frac{B_0^z}{h_l} \frac{\sqrt{(J_\perp - J_z)(J_\perp - J_z)}}{\epsilon_j + J_z} - \frac{g}{4} \sum_{k=1, k \neq j}^N C_{jk} X_k, \quad j \neq 0 \end{array} \right. , \quad (C.9)$$

$$\text{où } X_j = \frac{\partial}{\partial \sqrt{\Delta}} \left(\frac{\partial h_j}{\partial B_0^z} \right)_{\sqrt{\Delta} \rightarrow 0}.$$

Annexe D

Etats sombres dans les modèles XXX de R-G avec champ arbitraire

D.1 Fonctions de corrélation à deux points

Comme mentionné plus haut, les modèles traités dans ce chapitre sont une limites particulière de ceux résolus au chapitre II de ce manuscrit. Il sont définis par les charges conservées suivantes

$$R_j = g \sum_{k \neq j}^N \Gamma_{jk} S_j S_k + \sum_{\alpha} B^{\alpha} S_j, \quad (\text{D.1})$$

où le champ magnétique est constant et égale pour n'importe quelle valeur de j . Les couplages Γ_{jk} quant à eux sont des fonctions des inhomogénéités ϵ_j et ϵ_k . En appliquant le théorème de Helmann-Feynman à l'ensemble des charges conservées selon les inhomogénéités $\epsilon_{l, l \in \{0, \dots, N\}}$, on obtient le système d'équations donné par

$$\begin{cases} \frac{1}{g} \frac{\partial r_j}{\partial \epsilon_l} = -\frac{\langle S_j S_l \rangle}{(\epsilon_l - \epsilon_j)^2} \text{ si } l \neq j \\ \frac{1}{g} \frac{\partial r_j}{\partial \epsilon_l} = -\sum_{k \neq j} \frac{\partial r_j}{\partial \epsilon_k} \text{ si } l = j \end{cases}. \quad (\text{D.2})$$

Comme déjà évoquer dans les valeurs propres r_j des charges conservées R_j sont obtenues grâce à la résolution numérique du système d'équations

$$\left(\frac{r_j}{g}\right)^2 = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq j} C_{jk} \frac{r_k}{g} + \sum_{k \neq j} \sum_{\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha} \left[\frac{B^{\alpha}}{g}\right]^2, \quad (\text{D.3})$$

duquel on déduit le système linéaire suivant :

$$2 \frac{r_j}{g} \frac{\partial}{\partial \epsilon_l} \left(\frac{r_j}{g}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial C_{jl}}{\partial \epsilon_l} \frac{r_l}{g} + \sum_{k \neq j} C_{jk} \frac{\partial}{\partial \epsilon_l} \frac{r_k}{g} \right) + 2 \Gamma_{jl}^{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{jl}^{\alpha}}{\partial \epsilon_l} \text{ si } l \neq j \\ -\frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \left(\frac{\partial C_{lk}}{\partial \epsilon_l} \frac{r_k}{g} + C_{lk} \frac{\partial}{\partial \epsilon_l} \frac{r_k}{g} \right) + 2 \sum_{k \neq l} \sum_{\alpha} \Gamma_{lk}^{\alpha} \frac{\partial \Gamma_{lk}^{\alpha}}{\partial \epsilon_l} \text{ si } l = j \end{cases},$$

dont les solutions permettent à partir de D.2, de trouver les fonctions de corrélation à points que nous utilisons dans ce chapitre.

Bibliographie

- [1] P. W. Anderson 1972 *Science* **177** 4047
- [2] M. Gaudin, 1976 *J. Phys.* **37**, 1087-1098
- [3] M. Gaudin, The Bethe Wavefunction, 2014 Cambridge University Press
- [4] P. W. Claeys, J-S Caux, D. Van Neck, and S. De Baerdemacker 2017 *Phys. Rev. B* **96** 155149
- [5] D. Loss and D. P. DiVincenzo 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120
- [6] T. Villazon, A. Chandran and P W. Claeys 2020 *Phys. Rev. Research* **2** 032052
- [7] N. Wu, X. Guan and J. Links 2020 *Phys. Rev. B* **101** 155145
- [8] T. Villazon, P. W. Claeys, M. Pandey, A. Polkovnikov and A. Chandran 2020 *Sci Rep* **10** 16080
- [9] J-S. Caux 2016 *J. Stat. Mech.* 064006
- [10] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov and A. G. Izergin, Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions 1993 *Cambridge : Cambridge University Press*
- [11] A. Faribault and H. Tschirhart 2017 *SciPost Phys.* **3** 009
- [12] N. Crampé 2017 *SIGMA* **13** 094
- [13] Y. Wang, W.-L. Yang, J Cao and K. Shi, Off-Diagonal Bethe Ansatz for Exactly Solvable Models 2015 *Berlin Heidelberg : Springer-Verlag*
- [14] G. Magnano and T. Skrypnyk, 2020 *SIGMA* **16** 047
- [15] P. W. Claeys, S. De Baerdemacker, M. V. Raemdonck and D. V. Neck 2015 *Phys. Rev. B* **91** 155102
- [16] P. W. Claeys, S. De Baerdemacker, M. V. Raemdonck and D. V. Neck 2015 *J. Phys. A : Math. Theor.* **48** 425201
- [17] P. W. Claeys, D. V. Neck and S. De Baerdemacker 2017 *SciPost Phys.* **3** 028
- [18] P. W. Claeys, S. De Baerdemacker and D. V. Neck 2016 *Phys. Rev. B* **93** 220503(R)
- [19] A. Faribault, H. Koussir, and M. Houssein, 2019 *Phys. Rev. B* **100**, 205420
- [20] P. W. Claeys, S. De Baerdemacker, O. El Araby, J.-S. Caux, 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121**, 080401
- [21] E. K. Sklyanin and T. Takebe, 1996 *Phys. Lett.A* **219**, 217
- [22] K. Hao, J. Cao, T. Yang and W-L. Yang 2015 *Annals of Physics* **354** 401
- [23] N. Manojlovic and I. Salom 2017 *Nuclear Physics B* **923** 73-106
- [24] P. A. Johnson et al. 2020 *url : <https://arxiv.org/pdf/2007.10705.pdf>*
- [25] O. Babelon and D. Talalaev 2007 *J. Stat. Mech.* P06013

- [26] O. El Araby, V. Gritsev and A. Faribault 2012 *Phys. Rev. B* **85** 115130
- [27] A. Faribault, O. El Araby, C. Sträter and V. Gritsev 2011 *Phys. Rev. B* **83** 235124
- [28] C. Sträter, O. Tsypliyatyev and A. Faribault 2012 *Phys. Rev. B* **86** 195101
- [29] A. Faribault and D. Schuricht 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 040405
- [30] A. Faribault and D. Schuricht 2013 *Phys. Rev. B* **88** 085323
- [31] P. W. Claeys, S. De Baerdemacker, O. El Araby and J-S. Caux 2017 arXiv :1712.03117
- [32] A. Faribault and D. Schuricht, 2012 *J. Phys. A : Math. Theor.* **45**, 485202
- [33] H. Tschirhart and A. Faribault 2014 *J. Phys. A : Math. Theor.* **47** 405204
- [34] A. Faribault, H. Tschirhart and N. Muller 2016 *J. Phys. A : Math. Theor.* **49** 185202
- [35] J. Links 2017 SciPost Phys. **3**, 007
- [36] J. Links 2017 In : Duarte S., Gazeau JP., Faci S., Micklitz T., Scherer R., Toppan F. (eds) *Physical and Mathematical Aspects of Symmetries, Proceedings of the 31st International Colloquium in Group Theoretical Methods in Physics (Rio de Janeiro, Brazil)* (Cham Springer) p 239
- [37] J. Links 2017 Talk given at : *Integrability in low-dimensional quantum systems, Creswick, Australia* **Online** : www.matrix-inst.org.au/wp_Matrix2016/wp-content/uploads/2016/04/LinksTalk.pdf
- [38] E. K. Sklyanin 1989 *J. Sov. Math.* **47** 2473
- [39] E. K. Sklyanin and T. Takebe 1999 *Comm. Math. Phys.* **204** 17
- [40] K. Hikami 1995 *J. Phys. A : Math. Gen.* **28** 4053
- [41] E. K. Sklyanin 1995 *Prog. Theor. Phys.* **118** 35
- [42] G. Niccoli 2013 *J. Math. Phys.* **54** 053516
- [43] G. Niccoli and V. Terras 2015 *Lett. Math. Phys.* **105** 989
- [44] Y. Wang, W-L. Yang, J. Cao and K. Shi 2015 *Off-Diagonal Bethe Ansatz for Exactly Solvable Models* (Berlin Heidelberg : Springer-Verlag)
- [45] J. Cao, W-L. Yang, K. Shi and Y. Wang 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 137201
- [46] Y-Y. Lie, J. Cao, W-L. Yang, K. Shi and Y. Wang 2014, *Nucl. Phys. B* **884**, 17
- [47] F. Wen, T. Yang, Z. Yang, J. Cao, K. Hao and W-L. Yang 2017, *Nucl. Phys. B* **915**, 119
- [48] S Belliard and R. A. Pimenta 2015 *SIGMA* **11** 099
- [49] S. Belliard and N. Crampé 2013 *SIGMA* **9** 072
- [50] S. Belliard, N. Slavnov and B. Vallet 2018 arXiv :1804.00597
- [51] S. Belliard 2015 *Nucl. Phys. B* **892** 1
- [52] S. Belliard and R. A. Pimenta 2015 *Nucl. Phys. B* **belliard2** 527
- [53] J. Avan, S. Belliard, N. Grosjean, R. A. Pimenta 2015 *Nucl. Phys. B* **899** 229
- [54] A. Hegedüs *arXiv* : 1805.0289v1
- [55] J. M. Roman, G. Sierra and J. Dukelsky 2002 *Nucl. Phys. B* **634** 483
- [56] M. Sambataro 2007 *Nucl. Phys. C* **75** 054314
- [57] O. El Araby and D. Baeriswyl 2014 *Phys. Rev. B* **89** 134521

-
- [58] C. Dimo and A. Faribault 2018 *J. Phys. A : Math. Theor.* **51** 325202
- [59] L. Amico, A. Di Lorenzo and A. Osterloh 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5759
- [60] J. Dukelsky, C. Esebbag and P. Schuck 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 066403
- [61] M. Gaudin 1983 *La fonction d'onde de Bethe* (Paris : Masson)
- [62] A. A. Belavin and V. G. Drinfel'd 1982 *Funct Anal Its Appl* **16** 159
- [63] A. B. Balantekin, T. Dereli and Y. Pehlivanet 2005 *J. Phys. A : Math. Gen.* **38** 5697
- [64] Skrypnyk T 2006 *J. Math. Phys.* **47** 033511
- [65] T. Skrypnyk 2006 *J. Geom. Phys.* **57** 5367
- [66] T. Skrypnyk 2007 *J. Math. Phys.* **48** 023506
- [67] T. Skrypnyk 2007 *J. Math. Phys.* **48** 113521
- [68] T. Skrypnyk 2009 *J. Phys. A : Math. Gen.* **42** 472004
- [69] T. Skrypnyk 2010 *J. Geom. Phys.* **60** 491
- [70] T. Skrypnyk 2014 *J. Geom. Phys.* **80** 7187
- [71] T. Skrypnyk 2015 *J. Geom. Phys.* **97** 133
- [72] J. Links 2017 *Nucl. Phys. B* **916** 117
- [73] J. Dukelsky, S. Pittel, and G. Sierra 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76**, 643–662
- [74] G. Ortiz, R. Somma, J. Dukelsky, and S. Rombouts 2005 *Nucl. Phys. B* **707**, 421–457
- [75] I. Lukyanenko, P. S. Isaac, and J. Links 2014 *Nucl. Phys.* **B886**, 364–398
- [76] I. Lukyanenko, P. S. Isaac, and J. Links 2016 *J. Phys. A : Math. Theor.* **49**, 084001
- [77] N. A. Sinitsyn, Yan Li, S. A. Crooker, A. Saxena, and D. L. Smith 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109**, 166605
- [78] T. Skrypnyk 2007 *J. Phys. A : Math. Theor.* **40**, 13337–13352
- [79] T. Skrypnyk 2009 *J. Math. Phys.* **50**, 033504
- [80] T. Skrypnyk 2012 *Nucl. Phys. B* **856**, 552–576
- [81] T. V. Skrypnyk 2016 *Theor. Math. Phys.* **189**, 1509–1527
- [82] T. Skrypnyk 2016 *J. Phys. A : Math. Theor.* **49**, 365201
- [83] T. Skrypnyk 2017 *J. Phys. A : Math. Theor.* **50**, 325206
- [84] C. Esebbag and J. Dukelsky 2015 *J. Phys. A : Math. Theor.* **48**, 475303
- [85] A. Relano, C. Esebbag, and J. Dukelsky 2016 *Phys. Rev.* **E94**, 052110
- [86] H-Q. Zhou, J. Links, R.H. McKenzie, M.D. Gould 2002 *Phys. Rev.* **B56**, 060502(R)
- [87] J. Links, H.-Q. Zhou, R.H. McKenzie and M.D. Gould 2003 *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, R63
- [88] P. W. Claeys et al. 2019 *J. Phys. A : Math. Theor.* **52** 08LT01
- [89] T. Skrypnyk 2019 *Nucl. Phys. B* **941**, 225
- [90] R. W. Richardson 1963 *Phys. Lett.* **3**, 277–279
- [91] R. W. Richardson and N. Sherman 1964 *Nucl. Phys.* **52**, 221–238
- [92] M. C. Cambiaggio, A. M. F. Rivas, and M. Saraceno 1997 *Nucl. Phys.* **A624**, 157–167
- [93] M. Ibanez, J. Links, G. Sierra, and S.-Y. Zhao 2009 *Phys. Rev.* **B79**, 180501

- [94] S. M. A. Rombouts, J. Dukelsky, and G. Ortiz 2010 *Phys. Rev.* **B82**, 224510
- [95] J. Links, I. Marquette, and A. Moghaddam 2015 *J. Phys. A : Math. Theor.* **48**, 374001
- [96] R. Van den Berg, G. P. Brandino, O. El Araby, R. M. Konik, V. Gritsev, and J.-S. Caux 2014 *Phys.Rev.* **B90**, 155117
- [97] H. Tschirhart, T. Platini and A. Faribault 2018 *J. Stat. Mech.* 083102
- [98] A. Rubio-García, D. R. Alcoba, P. Capuzzi and J. Dukelsky 2018 *J. Chem. Theory Comput.* **14**, 41834192
- [99] Y. Shen, P. S. Isaac, and J. Links 2018 *Nucl. Phys. B*, doi :10.1016/j.nuclphysb.2018.08.015
- [100] N. A. Slavnov 1989 *J. Theor Math Phys.* **79**, 502
- [101] I. Bovenster, H. T. Simensen, A. Anane, M. Kläui, A. Brataas, and R. Lebrun 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126**, 187201
- [102] Mazurenko, V.V., Kvashnin, Y.O., Lichtenstein, A.I. et al. 2021 *J. Exp. Theor. Phys.* **132**, 506–516
- [103] C.-É. Fecteau, H. Fortin, S. Cloutier, P. A. Johnson, arXiv :2008.12713
- [104] N Kitanine et al. 2018 *J. Phys. A : Math. Theor.* **51** 485201
- [105] C. P. Koch 2016 *J. Phys. : Condens. Matter* **28**, 213001
- [106] W. Zhang, N. Konstantinidis, K. Al-Hassanieh, and V. Dobrovitski 2007 *J. Phys. : Condens. Matter* **19**, 083202
- [107] D. A. Lidar 2014 *Adv. Chem. Phys* **154**, 295
- [108] J. M. Taylor, A. Imamoglu, and M. D. Lukin 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91**, 246802
- [109] Z. Kurucz, M. W. Sørensen, J. M. Taylor, M. D. Lukin, and M. Fleischhauer 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103**, 010502
- [110] R. J. Baxter 1971 *Phys. Rev. Lett.* **26** 832
- [111] R.J. Baxter 2002 *Journal of Statistical Physics* **108** 1–48
- [112] R. W. Richardson 1966 *Phys. Rev.* **141** 949
- [113] M. Bortz, S. Eggert, C. Schneider, R. Stübner and J. Stolze 2010 *Phys. Rev. B* **82**, 161308(R)
- [114] W. A. Coish and D. 2004 *Phys. Rev. B* **70**, 195340
- [115] D. W. Hone, R. Ketzmerick and W. Kohn 1997 *Phys. Rev. A* **56**, 4045
- [116] P. Weinberg, M. Bukov, L. D’Alessio, A. Polkovnikov, S. Vajna and M. Kolodrubetz 2017 *Phys. Rep.* **688**, 1
- [117] L. D’Alessio and M. Rigol 2014 *Phys. Rev. X* **4**, 041048
- [118] A. Lazarides, A. Das and R. Moessner 2014 *Phys. Rev. E* **90**, 012110
- [119] P. Ponte, A. Chandran, Z. Papi c, and D. A. Abanin 2015 *Ann. Phys.* **353**, 196
- [120] D. V. Else, B. Bauer and C. Nayak 2017 *Phys. Rev. X* **7**, 011026
- [121] R. Moessner and S. L. Sondhi 2017 *Nat. Phys.* **13**, 424
- [122] A. Faribault, P. Calabrese and J-S. Caux 2009 *Journal of Mathematical Physics* **50**, 095212
- [123] A. Faribault, P. Calabrese and J-S. Caux 2009 *Journal of Statistical Physics* **03**, P03018

-
- [124] S. E. T. Arze, P. W. Claeys, I. P. Castillo, J-S Caux 2020 *url* : <https://arxiv.org/pdf/1804.10226.pdf>
- [125] K. K. Kozlowski and B. Pozsgay 2012 *J. Stat. Mech.* **2012**, P05021.
- [126] A. Faribault, P. Calabrese and J-S Caux 2010 *Phys. Rev. B* **81**, 174507
- [127] M. S. Foster, M. Dzero, V. Gurarie and E. A. Yuzbashyan 2013 *Phys. Rev. B* **88**, 104511.
- [128] F. Buccheri, A. De Luca and A. Scardicchio 2011 *Phys. Rev. B* **84**, 094203.
- [129] P. Barmettler, D. Fioretto, and V. Gritsev, 2013 *Europhys. Lett.* **104**, 10004.
- [130] N. Nakatani 2018 *Elsevier* 978-0-12-409547-2
- [131] A. Branschädel, E. Boulat, H. Saleur, and P. Schmitteckert 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105**, 146805
- [132] V. Gritsev, A. Polkovnikov 2017 *SciPost Phys.* **2**, 021
- [133] T. Shirai et al. 2016 *New J. Phys.* **18** 053008
- [134] T. Kuwahara and T. Mori and K. Saito 2016 *Annals of Physics* **367** 0003-4916
- [135] J. H. Shirley 1965 *Phys. Rev.* **138**, B979.
- [136] H. Sambe 1973 *Phys. Rev. A* **7**, 2203.
- [137] N. Goldman and J. Dalibard 2014 *Phys. Rev. X* **4**, 031027.
- [138] M. Bukov, L. D'Alessio, and A. Polkovnikov 2015 *Adv. Phys.* **64**, 139.
- [139] T. Prosen 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1808
- [140] P. W. Claeys and J-S. Caux 2017 *arXiv :1708.07324 [cond-mat, physics :quant-ph]*
- [141] K. Seetharam, P. Titum, M. Kolodrubetz and G. Refael 2018 *Phys. Rev. B* **97**, 014311
- [142] S. Fazzini, P. Chudzinski, C. Dauer, I. Schneider and S. Eggert 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126**, 243401
- [143] N. Bachelard, R. Carminati, P. Sebbah and C. Vanneste 2015 *Phys. Rev. A* **91**, 043810
- [144] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314
- [145] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565
- [146] A. Auffeves, P. Maioli, T. Meunier, S. Gleyzes, G. Nogues, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91**, 230405
- [147] A. Faribault and C. Dima 2018 <https://arxiv.org/pdf/1812.06428.pdf> [math-ph]

Résumé

Ce manuscrit de thèse porte sur l'étude des modèles intégrables de Richardson-Gaudin (R-G), en champ magnétique arbitraire. La représentation de ces modèles sur laquelle nous nous sommes focalisés tout au long de ce projet de doctorat est celle du spin central, dans lequel il existe un spin $1/2$ qui en plus d'être couplé à un ensemble de spins $1/2$ (le bain), est soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur orienté dans une direction quelconque de l'espace cartésien. Ces modèles sont une limite quasi-classique de la chaîne de spins de Heisenberg.

Cette thèse est divisée en trois grandes parties et s'étend sur sept chapitres hormis l'introduction et les conclusions générales. En effet, la première partie, constituée de quatre chapitres est surtout axée sur une étude statique des modèles de R-G du spin $1/2$ avec champ magnétique arbitraire incluant la possibilité d'un couplage de type XYZ totalement anisotrope défini tel que les termes $S_j^x S_k^x$, $S_j^y S_k^y$ et $S_j^z S_k^z$ ont tous des forces de couplage distinctes. Les S sont les matrices de spin et les indices j, k représentent les différents sites où sont logés les spins.

Dans cette première partie, grâce à l'intégrabilité qui joue un rôle important dans l'étude des modèles de R-G, on détermine de manière générique le spectre en énergie, les valeurs moyennes du spin central, les états propres par une approche différente et les fonctions de corrélation à deux points du modèle considéré; lesquels seront utiles pour une analyse dynamique poussée de ces modèles. Ce calcul requiert la résolution d'un système contenant autant d'équations quadratiques relativement simple à résoudre numériquement, qu'il y a de particules dans le système considéré. L'idée étant d'utiliser l'algorithme de Newton-Raphson à chaque étape du calcul.

La seconde partie quant à elle présente des exemples d'applications issus des résultats des modèles que nous avons obtenus dans la partie I. En effet, il a récemment été démontré que les modèles isotropes de R-G avec couplages uniquement dans le plan XY (ou de type XX) et champ polarisé selon la direction z sont intégrables. De cette constatation, un sous-espace d'états aux propriétés intéressantes a été observé dans ces modèles; ce sous-espace a été appelé sous-espace des états sombres. Dans chaque état de cet ensemble, le spin central orienté selon l'axe z , est complètement décorrélé du bain de spins environnants et ce, pour n'importe quelle valeurs de couplages. La formation de ces états peut s'expliquer par la présence de la direction z perpendiculaire au plan XY, selon laquelle le spin central, une fois orienté n'interagit plus avec un quelconque spin du bain. La direction z est donc une direction privilégiée.

Par la suite, après avoir démontré que les modèles de type XX sont aussi intégrables en présence d'un champ magnétique orienté arbitrairement, nous avons montré qu'à couplages forts, dans ces nouveaux modèles, il existe des états sombres dans lesquels le spin central se comporte exactement comme il le fait dans les modèles de type XX avec champ uniquement suivant \hat{z} , c'est à dire qu'il se décorrèle du bain et se retrouve dans un état pur orienté selon z . Une fois formés, ces états persistent, ceci peu importe la nouvelle orientation du champ magnétique, le choix des couplages et le nombre de particules associés aux modèles. Leur formation à forts couplages résulte du fait que dans le bain, les atomes s'organisent de manière à créer un champ magnétique effectif qui vient compensé les composantes dans le plan XY du champ magnétique appliqué au spin central, le forçant ainsi à ne ressentir qu'un champ orienté dans la direction z et s'y orienté. Le comportement du système nous a permis de conclure que dans une certaine limite thermodynamique, les états sombres issus de ces modèles existeraient pour n'importe quelles valeurs de couplages du spin central aux différents spins du bain. A régime intermédiaire, c'est

à dire pour des valeurs de couplages n'annulant pas la composante plane du champ magnétique extérieur, le spin central est dans un état mixte.

Un autre exemple d'application qui clôture cette deuxième partie est celui des états sombres de type XXX avec champ magnétique arbitraire. Ces états résultent du fait que dans le bain, les particules s'organisent de manière à former des états singulets. Le spin central n'interagit donc avec aucun spin du bain et reste polarisé dans la direction du champ magnétique. Ces états existent dans tous les régimes de couplages et pour n'importe quelle orientation du champ magnétique, puisque les modèles sont isotropes. Ces états sombres, en plus d'être manipulables grâce à un champ magnétique quelconque, sont aussi robustes face à la décohérence et sont donc très intéressants pour la modélisation des qubits en informatique quantique. La raison étant que, dans les états sombres, le spin central (ou tout simplement le qubit) est aussi décorrélé du bain.

La troisième partie de ce projet quant à lui est dédié à une étude dynamique des modèles non intégrables se rapprochant de ceux étudiés dans la première partie de ce manuscrit. En effet, ces modèles sont juste la représentation des modèles de R-G plongés dans un champ magnétique dépendant du temps, dont la norme et la direction varient de manière non nécessairement périodique. Ces modèles ont surtout été choisis parce qu'on recherchait à calculer une dynamique quantique intégrable dans laquelle les résultats obtenus dans ce mémoire pourraient devenir utiles par exemple pour le calcul des quantités physiques dépendant du temps. En effet, grâce à une simple rotation, nous avons été en mesure de passer du repère du laboratoire vers une base tournante où nous avons été en capacité de prouver qu'un choix spécifique des dépendances temporelles donne accès à une dynamique intégrable en tout temps.

Mots-clés: Modèles de spin central, Spin 1/2, Constantes de couplage, Champ magnétique arbitraire, Intégrabilité, Spectre en énergie, Quantités physiques, États sombres, Hamiltonien dépendant explicitement du temps, Dynamique.

Abstract

This doctoral thesis deals with the study of integrable Richardson-Gaudin (R-G) models in arbitrary magnetic fields. The representation of these models on which we have focused throughout this project is the of central spin, in which there is a 1/2 spin which in addition to being coupled to a set of 1/2 spins (the bath), is subject to the action of an external magnetic field oriented in any arbitrary direction of the space. These models are a quasi-classical limit of the Heisenberg spin chain.

This work is divided into three main parts and extends over seven chapters apart from the introduction and general conclusions. Indeed, the first part, consisting of four chapters, is mainly focused on a static study of of 1/2 spin R-G models in an arbitrary magnetic field, including the possibility of a fully anisotropic XYZ coupling defined such that the terms $S_j^x S_k^x$, $S_j^y S_k^y$ and $S_j^z S_k^z$ all have distinct coupling strengths. The S's represent the spin matrices and j, k are indices of different sites of spins.

In this first part, with the integrability which plays an important role in the study of R-G models, energy spectrum, expectation values of the central spin, the eigenstates and two-point correlation functions of the model are determined in a generic way; these will be useful for dynamical analysis of these models. This calculation requires the solution of a system containing as many relatively simple quadratic equations to be solved numerically, as there are particles in the considered system. The idea is to use the Newton-Raphson algorithm at each step of the calculation.

The second part of this thesis presents examples of applications resulting from the results of the models we obtained in part I. Indeed, it has recently been shown that isotropic R-G models with couplings only in the XY plane and field polarized along the \hat{z} direction are integrable. From this observation, a subspace of states with interesting properties has been observed in these models; this subspace has been called dark states subspace. In each state of this set, the central spin is fully oriented with respect to the z-axis, and uncoupled from the surrounding spin bath for any coupling value. The existence of these states can be explained by the presence of the z-direction perpendicular to the XY-plane, according to which the central spin once oriented do not interact with any spin of the bath. The z-direction is therefore a privileged direction.

Therefore, after demonstrating that the XX-type models are also integrable in the presence of an arbitrarily polarised magnetic field, we also showed that at strong couplings, in these new models, there are dark states in which the central spin behaves exactly as it does in the XX-type models with field only along \hat{z} , i.e. it decorrelates from the bath and finds itself in a pure z-directed state. Once formed, these states persist, regardless of the new magnetic field orientation, the choice of couplings and the number of particles applied to the models. Their formation at strong couplings results from the fact that in the bath, the atoms organise themselves in such a way to create an effective magnetic field that compensates by the components in the XY plane of the magnetic field applied to the central spin, forcing it to become polarised in the \hat{z} direction. The behaviour of the system allowed us to conclude that in a certain thermodynamic limit, the dark states resulting from these models would exist for any value of coupling of the central spin to the different spins of the bath. In the intermediate regime, i.e. for coupling values that do not cancel the XY plane component of the external magnetic field, the central spin is in a mixed state.

Another example of application which closes this second part is that of the dark states of type XXX with arbitrary magnetic field. These states result from the fact that in the bath, the particles organise themselves in a way to form singlet states. Therefore, the central spin does not interact with any spin in the bath and remains polarised in the direction of the magnetic field. These states exist in all coupling regimes and for any orientation of the magnetic field, since the models are isotropic. These dark states, in addition to being controllable by any magnetic field, are also robust against decoherence and are therefore very interesting for modelling qubits in quantum computing. The reason being that, in dark states, the central spin (or simply the qubit) is also decorrelated from the bath.

The third part of this project is dedicated to a dynamic study of non-integrable models similar to the ones studied in the first part of this manuscript. Indeed, these models are the representation of R-G models immersed in a time-dependent magnetic field, whose norm and direction change in a non-periodic way. These models were mainly chosen because one was looking to calculate an integrable quantum dynamics in which the results obtained in this thesis could become useful for the calculation of time-dependent physical quantities. Indeed, applying a simple rotation, we were able to move from the laboratory frame to a rotating basis in which we were able to prove that a specific choice of time dependencies gives access to a dynamics that can be integrable at any time.

Keywords: Central spin models, Spin 1/2, Coupling constants, Arbitrary magnetic field, Integrability, Energy spectrum, Physical quantities, Dark states, Explicitly time-dependent hamiltonians, Dynamics.

