



**HAL**  
open science

# Adhérences de certaines orbites dans la variété de drapeaux, résolution et normalité dans les types classiques A, B, D

Simon Jacques

► **To cite this version:**

Simon Jacques. Adhérences de certaines orbites dans la variété de drapeaux, résolution et normalité dans les types classiques A, B, D. Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2021. Français. NNT : 2021LORR0299 . tel-03598443

**HAL Id: tel-03598443**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03598443>**

Submitted on 5 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE



THÈSE DE DOCTORAT  
*Discipline : Mathématiques*

---

Adhérences de certaines orbites dans la variété de drapeaux,  
résolution et normalité dans les types classiques A, B, D

---

*présentée par*

Simon JACQUES

*dirigée par*

Pierre-Emmanuel CHAPUT et Lucas FRESSE

*Soutenue le 17 décembre 2021 devant un jury composé de :*

Stéphanie CUPIT-FOUTOU <i>Ruhr-Universität, Bochum</i>	<b>Examinatrice</b>
Anne MOREAU <i>Université Paris-Saclay</i>	<b>Examinatrice</b>
Kęstutis ČESNAVIČIUS <i>Université Paris-Saclay</i>	<b>Rapporteur</b>
Pierre-Emmanuel CHAPUT <i>Université de Lorraine</i>	<b>Directeur</b>
Lucas FRESSE <i>Université de Lorraine</i>	<b>Co-directeur</b>
Alain GENESTIER <i>Université de Lorraine</i>	<b>Examineur</b>
Matthieu ROMAGNY <i>Université de Rennes I</i>	<b>Président du jury</b>
Evgeny Yurievich SMIRNOV <i>HSE University, Moscow</i>	<b>Rapporteur</b>



Université de Lorraine  
4 Cours Léopold,  
54000 Nancy

École doctorale IAEM  
Bâtiment Recherche BP 14234  
54042 Nancy Cedex

Institut Élie Cartan de Lorraine  
UMR 7502  
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy

## *Remerciements*

Je souhaiterais tout d'abord remercier Pierre-Emmanuel et Lucas qui ont encadré ce doctorat, ils sont tout simplement extraordinaires.

Je souhaiterais ensuite remercier Stéphanie Cupit-Foutou, Anne Moreau, Kęstutis Česnavičius, Alain Genestier, Matthieu Romagny, Evgeny Smirnov qui ont accepté d'être membres du jury. Je les remercie pour l'honneur qu'ils m'ont ainsi fait, pour leur bienveillance ainsi que pour leurs questions et toutes leurs pistes de réflexion. Merci à Evgeny pour son accueil à l'occasion d'un séminaire sur Moscou ; merci à lui et Kęstutis Česnavičius pour leur rapport, et à Anne et Alain pour avoir accepté de suivre ma thèse en comité ; pour les conseils bienveillants et les idées qu'ils m'y ont donnés.

Alain et Christophe Eckes des Archives Poincaré ont renouvelé mon regard sur la beauté des mathématiques. À cause d'eux, je ne peux m'empêcher de regarder vers l'océan de la géométrie algébrique, même si je ne sais pas si je saurai un jour y nager. Matthieu Romagny en est aussi responsable, puisque je découvre sous son enseignement le langage des schémas à Rennes. Tous les trois m'ont encore apporté leur soutien ou même leurs initiatives dans des candidatures de thèse, et je les en remercie vivement.

Je profite de l'occasion pour adresser tous mes remerciements à Charles Vix ; il fut pour moi un maître inégalé de pédagogie et de rigueur, et son enseignement sera toujours pour moi une référence. Dans une autre discipline, je voudrais remercier Hélène Bouchilloux et Thomas Bénatouil dont l'enseignement et les efforts pour aider leurs étudiants m'ont beaucoup marqué.

Je voudrais remercier Élodie Cunat que j'ai si souvent dérangée en son bureau, ainsi que de nombreuses personnes de la faculté dont j'ai pu profiter du travail inestimable.

Toujours à la faculté, j'ai eu la chance de croiser le chemin de Phuong, de Félix, David, Jérémy et de partager le bureau de Sadek et Ibtissem ; ils sont pour moi des modèles et je les remercie pour leurs multiples soutiens.

Il y a bien sûr beaucoup de remerciements que j'espère pouvoir exprimer plus convenablement et personnellement. Merci à ma famille, à mes amis ; merci aux Ponpons et à tous les amis du samedi matin ; merci à ma fiancée qui transforme le travail en joie.

Merci à mon Créateur et Sauveur, de qui tout provient et à qui tout revient.

Merci à toutes ces personnes qui ont prié pour moi ces cinq années, et tout particulièrement à celle dont l'intercession ne connaît pas d'obstacle, par l'Amour qu'elle tient de son Fils.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Notations et définitions</b>	<b>17</b>
1.1 Conventions	17
1.2 Définitions	18
1.3 Remarques	19
<b>2 Géométrie algébrique générale</b>	<b>21</b>
2.1 Quotients, produits fibrés et contractés	21
2.1.1 Remarques générales, topologies et quotients	24
2.1.2 Quotient d'un groupe par un sous-groupe	29
2.1.3 Produit contracté	30
2.1.4 Produits contractés et produits fibrés	34
2.2 Birationalité et rationalité	36
2.2.1 Cohomologie et changements de base	36
2.2.2 Stabilité de la birationalité et rationalité	37
2.2.3 Normalité et comorphismes	42
2.3 Conséquences et compléments pour les variétés	43
2.3.1 Birationalité et rationalité pour les variétés	43
2.3.2 Orbites, quotients et produits contractés pour les variétés	44
<b>3 Réalisations et réduction modulo <math>p</math></b>	<b>49</b>
3.1 Réalisation, notions et rappels	50
3.2 Image schématique	53
3.3 Réalisation et image schématique	54
3.4 Quelques réalisations dans la variété des drapeaux	57
<b>4 Sous-groupes symétriques et induction parabolique</b>	<b>61</b>
4.1 Propriétés de sous-groupes symétriques	62
4.2 Étude d'orbites et paramétrisations	66
4.3 Induction parabolique et sous-groupes symétriques	72
4.4 Formules de dimension	74
<b>5 Modèles et paramétrisations, groupes classiques</b>	<b>77</b>
5.1 Conventions, notations et rappels	77
5.1.1 Conventions et notations	77
5.2 Type A	78
5.2.1 Modèle matriciel $\mathcal{M}(n, r)$	78
5.2.2 Racines et sous-groupe parabolique particulier	80
5.2.3 Un caractère dominant	80
5.3 Types B, C, D	81
5.3.1 Modèle matriciel $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$	81
5.3.2 Racines et groupes de Weyl types B, C, D	84

5.3.3	Quelques résultats sur les longueurs	85
5.3.4	Un caractère dominant	87
5.4	Paires adaptées, sous-groupe associé	88
5.4.1	Involution associée	88
5.4.2	Paires adaptées	93
5.4.3	Identification avec le modèle matriciel	93
5.5	Paramétrisation Z-orbites types classiques	95
5.5.1	Paramétrisations préliminaires	96
5.5.2	Le théorème	100
<b>6</b>	<b>Une équivalence birationnelle</b>	<b>103</b>
6.1	Cas général	103
6.2	Équivalence birationnelle, application 1	104
6.3	Équivalence birationnelle : application 2	107
6.3.1	Le(s) théorème(s)	107
6.3.2	Type A	108
6.3.3	Types B, C, D	110
6.3.4	Conclusion	115
<b>7</b>	<b>Normalité et rationalité</b>	<b>117</b>
7.1	Cas général	117
7.1.1	Normalité, rationalité, birationalité par récurrence	117
7.1.2	Scindage de Frobenius et conséquences	123
7.1.3	Le théorème	126
7.2	Normalité et rationalité, application 1	129
7.3	Normalité et rationalité : application 2	129
<b>8</b>	<b>Annexes</b>	<b>131</b>
8.1	Annexe A : Formules de dimension	131
8.1.1	Résultats intermédiaires	133
8.1.2	Le théorème	135
8.2	Annexe B : Cas des fibres de Springer, type A	136
8.2.1	Description du morphisme birationnel	137
8.2.2	Étude de singularité	141
8.2.3	Autre expression de l'équivalence birationnelle	143

# Introduction

1. L'étude géométrique des représentations des groupes de Weyl et des algèbres de Hecke a connu un essor dans les années 1980, à la suite de résultats importants dus à T.A.Springer [Spr76], D.Kazhdan et G.Lusztig [KL79], A.Joseph [Jos89], D.Vogan [Vog80]. Une approche originale fut développée par A.Joseph ([Jos89], [HJ05]). Il propose une construction des représentations irréductibles du groupe de Weyl au moyen de sous-familles de polynômes, appelés polynômes caractéristiques. Définis dans [Jos84] (section 2.2), ils se forment à partir des variétés orbitales qui sont des sous-variétés du cône nilpotent de l'algèbre de Lie du groupe considéré. Les variétés orbitales possèdent leur intérêt propre, elles sont directement reliées aux variétés de Schubert et interviennent en théorie des  $(\mathcal{D}, K)$ -modules algébriques où la réunion de leurs adhérences permet de retrouver la variété associée à un certain module de Verma ([BB85], §4). Par ailleurs, les travaux de W.Rossmann [Ros91b], puis plus récemment V.Hinich et Joseph [HJ05], ont mis à jour le rôle primordial joué dans l'expression des polynômes caractéristiques par la géométrie d'une autre variété, portant le nom de son concepteur, R.Steinberg. Initialement introduite pour répondre à une conjecture de A.Grothendieck, elle apparaît notamment dans des approches alternatives des correspondances de Springer et pour une démonstration par Kazhdan et Lusztig d'une conjecture sur les algèbres de Hecke (voir [DR09] pour un large panorama sur le sujet). Dans la situation qui nous intéresse, l'étude de la variété de Steinberg permet de retrouver les coefficients des polynômes caractéristiques, au moyen de son homologie de Borel-Moore et du nombre d'Euler de ses composantes irréductibles. La compréhension des singularités de ces dernières présente donc un intérêt majeur. Elle forme la motivation première de notre travail. Nous considérons plus particulièrement la régularité de certaines adhérences d'orbites dans la variété de drapeaux dont les composantes irréductibles des fibres de Springer ([Spr76]) sont des exemplaires. Or dans son article initial [Ste76], Steinberg établit une correspondance entre ces dernières composantes et celles de sa variété. Par cet intermédiaire, nous pouvons donc espérer proposer des éléments de réponse à la problématique susmentionnée. Signalons d'autre part que N.Spaltenstein établit une correspondance plus élémentaire des composantes de Springer avec les variétés orbitales ([Spa82]). Notre travail aurait donc aussi quelques conséquences pour l'étude des singularités de ces dernières.

2. Donnons quelques précisions sur les objets évoqués. Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif,  $B$  un sous-groupe de Borel,  $T$  un tore maximal et  $W$  le groupe de Weyl. Soit encore  $\mathcal{O}$  une orbite nilpotente et  $Z$  le stabilisateur de l'un de ses éléments  $e$ . On note  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{n}$  les algèbres de Lie respectives de  $G$ ,  $B$ , et du radical unipotent de  $B$ . On note encore  $\mathcal{B} := G/B$  la variété de drapeaux de  $G$  et  $\mathcal{N}$  le cône nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . Les composantes irréductibles d'une variété seront désignées par  $Irr$ . On définit la variété de Steinberg par :

$$S_{\mathcal{O}} := \{ (x, gB, \gamma B) \in \mathcal{O} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid x \in {}^g\mathfrak{b} \cap {}^\gamma\mathfrak{b} \}.$$

Signalons que ce nom désigne parfois la variété suivante, décomposée suivant les  $S_{\mathcal{O}}$ , pour  $\mathcal{O}$  parcourant les orbites nilpotentes :

$$S := \bigsqcup_{\mathcal{O}} S_{\mathcal{O}} = \{ (x, gB, \gamma B) \in \mathcal{N} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mid x \in {}^g\mathfrak{b} \cap {}^\gamma\mathfrak{b} \}.$$

La fibre de Springer :

$$\mathcal{B}_e := \{ gB \in \mathcal{B} \mid e \in {}^g\mathfrak{b} \},$$

est une sous-variété fermée de  $\mathcal{B}$  et apparaît déjà dans la conjecture de Grothendieck ayant motivé l'introduction de  $S_{\mathcal{O}}$  :

$$\dim Z = \text{rang } G + 2 \cdot \dim \mathcal{B}_e. \quad (1)$$

L'égalité est donc démontrée par Steinberg, mais également par Spaltenstein ([Spa82]) qui établit en outre l'équidimensionalité de  $\mathcal{B}_e$ . Le stabilisateur  $Z$  agit naturellement sur  $\mathcal{B}_e$  et Steinberg ([Ste76]) n'a pas de difficultés pour montrer que sa variété est fermée dans  $\mathcal{O} \times \mathcal{B} \times \mathcal{B}$  et s'identifie à un produit contracté :

$$S_{\mathcal{O}} \simeq G \times^Z (\mathcal{B}_e \times \mathcal{B}_e).$$

Les résultats précédents assurent alors qu'elle est équidimensionnelle, de même que  $S$ , avec :

$$\dim S = \dim S_{\mathcal{O}} = \dim G - \text{rang } G.$$

Les variétés orbitales relatives à  $\mathcal{O}$  sont définies comme les composantes irréductibles de  $\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}$ . Les morphismes  $G \rightarrow \mathcal{O}$ ,  $g \mapsto g^{-1} \cdot e$  et  $G \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $g \mapsto gB$  permettent à Spaltenstein ([Spa82] II-2) d'établir une correspondance bijective :

$$Z/Z^0 \backslash \text{Irr } \mathcal{B}_e \xrightarrow{\sim} \text{Irr } \mathcal{O} \cap \mathfrak{n},$$

assurant grâce à ce qui précède que  $\mathcal{O} \cap \mathfrak{n}$  est équidimensionnelle avec :

$$\dim \mathcal{O} \cap \mathfrak{n} = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}.$$

Qui plus est, cette bijection préserve plusieurs propriétés géométriques dont la lissité. Par ailleurs, on peut voir que les variétés orbitales relatives à  $\mathcal{O}$  sont exactement de la forme  $\overline{B \cdot \mathfrak{n} \cap^w \mathfrak{n}} \cap \mathcal{O}$  pour  $w$  dans le sous ensemble  $W_{\mathcal{O}}$  du groupe de Weyl  $W$  défini par :

$$W_{\mathcal{O}} := \{w \in W \mid \mathcal{O} \cap \mathfrak{n} \cap^w \mathfrak{n} \text{ est dense dans } \mathfrak{n} \cap^w \mathfrak{n}\}.$$

On a donc une surjection  $W_{\mathcal{O}} \twoheadrightarrow \text{Irr } \mathcal{O} \cap \mathfrak{n}$  qui n'est cependant pas toujours injective. Signalons que l'ensemble  $W_{\mathcal{O}}$  est parfois appelé cellule bilatère de Steinberg et partage des propriétés communes aux cellules de Kazhdan et Lusztig introduites dans [KL79], §1.

La correspondance établie par Steinberg entre les composantes irréductibles de  $S_{\mathcal{O}}$  et celles de  $\mathcal{B}_e$  (proposition 3.1 [Ste76]) implique également  $W_{\mathcal{O}}$ . Elle peut s'exprimer au moyen du diagramme commutatif de bijections suivant :

$$\begin{array}{ccc} Z/Z^0 \backslash \text{Irr } \mathcal{B}_e \times \text{Irr } \mathcal{B}_e & \xrightarrow{(X,Y) \mapsto S_{XY}} & \text{Irr } S_{\mathcal{O}}, \\ \downarrow (X,Y) \mapsto alt_{XY} & \nearrow w \mapsto \overline{S_{\mathcal{O}}(w)} & \\ W_{\mathcal{O}} & & \end{array} \quad (2)$$

avec :

- $alt_{XY}$ , l'"altitude" entre  $X$  et  $Y$  désigne l'élément  $w \in W$  tel que  $G \cdot (B, wB)$  est l'unique  $G$ -orbite qui intersecte  $X \times Y$  suivant un ouvert dense.
- $S_{XY} := G \cdot (\{e\} \times X \times Y) \simeq G \times^Z Z \cdot (X \times Y)$ .
- $S_{\mathcal{O}}(w) := p^{-1}(G \cdot (B, wB)) \simeq G \times^{B \cap^w B} \mathcal{O} \cap \mathfrak{n} \cap^w \mathfrak{n}$  où  $p$  est la projection sur les deux dernières coordonnées :  $S_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ .

La définition de  $W_{\mathcal{O}}$  assure pour chacun de ses éléments  $w$  que le localement fermé  $\mathcal{O} \cap \mathfrak{n} \cap^w \mathfrak{n}$  est ouvert dans  $\mathfrak{n} \cap^w \mathfrak{n}$  et donc lisse, de sorte que  $S_{\mathcal{O}}(w)$  est aussi lisse. Ce ne sera pas nécessairement le cas de la composante irréductible formée par son adhérence  $\overline{S_{\mathcal{O}}(w)}$  et une étude de singularités s'impose. Le diagramme (2) montre donc que celle-ci peut se reporter sur un couple de composantes irréductibles  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{B}_e$  en altitude relative  $w$ .

Enfin, évoquons le polynôme caractéristique introduit par Joseph dans [Jos84]. Il s'agit d'un élément de l'algèbre symétrique de  $\mathfrak{t}^*$ . Nous ne saurions donner ici sa définition initiale, mais simplement une expression conjecturée par Joseph lui même ([Jos84], 9.8) et démontrée par plusieurs auteurs, dont Rossmann ([Ros91b]). Elle est liée à l'homologie de Borel-Moore de la façon suivante. La variété  $S$  est équidimensionnelle et ses composantes irréductibles sont décrites par les adhérences des composantes irréductibles des  $S_{\mathcal{O}}$ ,  $\mathcal{O}$  parcourant les orbites nilpotentes. Par conséquent, les classes correspondantes décomposent son homologie de Borel-Moore :

$$H_{2n}(S) = \bigoplus_{\mathcal{O}} \left( \bigoplus_{w \in W_{\mathcal{O}}} \mathbb{Q}[\overline{S_{\mathcal{O}}(w)}] \right),$$

où  $n = \dim S$ . Un résultat de V.Ginsburg ([Gin86], [CG10], 3.4) fournit un isomorphisme vectoriel avec l'algèbre de groupe de  $W$  :

$$\mathbb{Q}W \simeq H_{2n}(S).$$

On dispose ainsi de deux bases  $\{v \mid v \in W\}$ ,  $\{\overline{S_{\mathcal{O}}(w)} \mid w \in W_{\mathcal{O}}, \mathcal{O} \text{ nilpotente}\}$  et Joseph conjecture que les coefficients du polynôme caractéristique sont ceux de la matrice de changement de base  $(A(w, v))_{w, v}$ . Rossmann établit ce fait, en plus de clarifier la nature de ces coefficients. Pour  $v \in W$ ,  $w \in W_{\mathcal{O}}$  :

$$A(w, v) = (-1)^{\ell(w) - \ell(v)} Eu_v(S_{\mathcal{O}}(w)),$$

où  $Eu_v(S_{\mathcal{O}}(w))$  désigne le nombre d'Euler local de  $\overline{S_{\mathcal{O}}(w)}$  au point  $(e, B, vB)$  (introduit par MacPherson [Mac74] §3, voir aussi [Ros91a], §5). Il est strictement positif si  $v \leq w$ , nul sinon et vaut 1 si le point est lisse. Maintenant, si  $w \in W_{\mathcal{O}}$ , le polynôme caractéristique  $p_{\mathcal{V}_w}$  associé à la variété orbitale  $\mathcal{V}_w := \overline{B \cdot \mathfrak{n} \cap^w \mathfrak{n}} \cap \mathcal{O}$  est alors de la forme suivante, relativement à  $x \in \mathfrak{t}$  régulier (voir [Ros91b], théorème 8.2, §8 et équation (12), §11) :

$$p_{\mathcal{V}_w}(x) = cste \cdot \sum_{\substack{v \leq w \\ v \in W_{\mathcal{O}}}} (-1)^{\ell(w) - \ell(v)} Eu_v(S_{\mathcal{O}}(w)) (v \cdot x)^m,$$

où  $m$  est l'entier  $(\dim G - \text{rang } G - \dim \mathcal{O})/2$  et la constante dépend uniquement de l'orbite  $\mathcal{O}$ .

**3.** Notre travail se focalise sur les  $Z$ -orbites de  $\mathcal{B}$  et leurs adhérences dans les types classiques A, B, D, en caractéristique nulle et dans le cas dit "des deux colonnes", soit lorsque l'endomorphisme nilpotent  $e$  est d'ordre 2. Dans cette situation, le nombre d'orbites est fini de sorte que toute sous-variété de  $\mathcal{B}$  qui est irréductible et  $Z$ -stable est réalisée comme l'adhérence d'une  $Z$ -orbite. C'est donc notamment le cas des composantes irréductibles de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_e$ .

Les fibres de Springer et leur composantes irréductibles ont déjà fait l'objet de nombreuses études. Elles trouvent une paramétrisation au moyen de tableaux de Young, en type A d'abord avec le travail de Spaltenstein ([Spa82]) puis pour les autres types classiques en caractéristique  $\neq 2$  avec la thèse de M.A.A von Leeuwen ([Lee89]). Peu de choses sont cependant connues concernant leur régularité. Un article de F.Fung ([Fun03]) établit que toutes les composantes sont lisses dans le cas dit des deux lignes ou le cas crochet. Une condition nécessaire et suffisante pour cette lissité globale est donnée par A.Melnikov et L.Fresse dans [FM10], pour le type A et sur  $\mathbb{C}$ . Les composantes singulières apparaissent dès le cas des deux colonnes. Celui-ci s'avère aussi plus favorable pour l'étude des propriétés fines de  $\mathcal{B}_e$ . C'est sous cette hypothèse, toujours en type A sur  $\mathbb{C}$ , que Fresse et Melnikov donnent une condition nécessaire et suffisante pour la lissité de chaque composante ([Fre09], [FM10]). Enfin, sous cette hypothèse encore, dans l'article [PS12] qui inspira l'essentiel de notre travail, N.Perrin et E.Smirnov proposent des résolutions des composantes pour les types

A et D en caractéristique  $\neq 2$ . Ils montrent de plus qu'elles sont normales, Cohen-Macaulay et à singularités rationnelles.

En envisageant plus généralement des adhérences de  $Z$ -orbites dans la variété des drapeaux, notre travail s'inscrit également dans les recherches sur les variétés sphériques. La situation d'une action de groupe sur la variété des drapeaux avec un nombre fini d'orbites est en effet particulièrement féconde et de nombreux résultats généraux à ce sujet existent déjà (voir notamment l'article fondateur de D.Luna [Lun01], ainsi que le travail de F.Knop [Kno14]). Un cas particulier est la théorie des sous-groupes symétriques, ou sous-groupes des points fixes d'une involution. Il nous est particulièrement proche puisque nos groupes  $Z$  sont obtenus à partir de tels sous-groupes. Les orbites correspondantes dans la variété de drapeaux sont étudiées de manière générale par R-W Richardson et T-A Springer qui en proposent notamment des paramétrisations ([RS90]). Ils y introduisent aussi une relation d'ordre analogue à celle de Bruhat pour les  $B$ -orbites. Ajoutons que nos groupes  $Z$  sont également obtenus par induction parabolique, selon une méthode désormais bien connue en théorie de Lie. Par ailleurs, soulignons que la sphéricité que nous constatons ici pour les  $Z$ -orbites n'est pas fortuit. Dans [Pan94], D.I Panyushev démontre en effet qu'elle est équivalente avec un majoration de l'ordre d'ad-nilpotence de  $e$  par 3, ce qui comprend notamment le cas des deux colonnes.

Enfin, suivant N.Perrin et E.Smirnov, nous utilisons le "scindage de Frobenius", outil dont la puissance est par exemple présentée dans le livre [BK05] de M.Brion et S.Kumar. Les scindages s'opérant en caractéristique positive, nous employons alors également la méthode de "réduction modulo  $p$ ". Elle permet de passer de la caractéristique positive à celle de départ, en réalisant les variétés sur des bases adéquates. La littérature existante fournit déjà plusieurs exemples de telles réalisations. Citons celle des variétés de Schubert, avec l'article [MR85] de V.Mehta et A.Ramanathan (voir lemme 3). Cependant, les variétés qui nous intéressent nous ont imposé d'effectuer nos propres réductions modulo  $p$ .

Notre travail se situe donc à l'intersection de trois thématiques, chacune d'elle ayant son propre intérêt et des résultats déjà acquis. Il se propose de généraliser dans une direction le résultat de Perrin et Smirnov, en étendant leurs résultats de régularité en type B, mais aussi à toute adhérence de  $Z$ -orbite dans les types A,B,D. Ceci, au moyen d'une méthode plus générale et peut-être plus maniable, laissant espérer une étude plus fine des singularités en jeu et fournissant quelques résultats généraux pour des réductions modulo  $p$ . Cependant, nous nous restreindrons à la caractéristique nulle.

4. Énonçons maintenant les deux résultats principaux de notre thèse. On suppose la caractéristique nulle et on se place dans le cas particulier où  $G$  est le groupe  $Gl(V)$  ou  $SO(V)$ , et l'élément nilpotent  $e$  correspondant à un endomorphisme d'ordre 2. Un sous-groupe de Borel  $B$  ayant été choisi, on rappelle la notation  $\mathcal{B} := G/B$  ainsi que  $Z := Z_G(e)$ .

**Théorème 0.0.1** (Types A, B, D, Théorème 7.3.1). *Toute adhérence  $Y$  d'une  $Z$ -orbite dans  $\mathcal{B}$  est Cohen Macaulay, normale, à singularités rationnelles.*

Ce théorème se fonde sur une équivalence birationnelle que nous avons construite explicitement au sein de modèles matriciels. Nous pouvons lui donner une forme plus générale au moyen de la notion de "paire adaptée" (définition 5.4.3). L'équivalence fait intervenir de manière essentielle les variétés de Schubert.

**Théorème 0.0.2** (Types A, B, D, Théorème 6.3.1). *On suppose la paire  $(T, B)$  adaptée à  $e$ . Alors il existe un sous-groupe  $H \subset G$  réductif connexe possédant  $B_H := H \cap B$  comme sous-groupe de Borel, muni d'une rétraction  $\pi : Z \rightarrow H$  et tel que pour toute adhérence  $Y$  d'une  $Z$ -orbite dans  $\mathcal{B}$ , il existe  $w \in W$  tel que le morphisme suivant soit birationnel projectif  $Z$ -équivariant :*

$$\begin{aligned} H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} &\rightarrow Y \\ [h, gB] &\mapsto hgB, \end{aligned} \tag{3}$$

l'action de  $Z$  sur  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB}$  étant définie par  $z \cdot [h, gB] = [\pi(z)h, h^{-1}\pi(z)^{-1}zhgB]$ .

Complétons ces énoncés par plusieurs remarques.

**Remarque 0.0.3.** - *Le second théorème reste valide pour le type  $C$ , à condition de renforcer plusieurs hypothèses (théorème 6.3.3). Il s'agit notamment d'imposer le rang de  $e$  impair et de restreindre les  $Z$ -orbites pouvant être considérées. La raison essentielle étant que celles-ci, contrairement aux types  $A, B, D$ , ne possèdent pas nécessairement de point fixe par le tore maximal en jeu (voir discussion qui précède le théorème 6.3.3); nous disons qu'elles ne sont pas adaptées (définition 5.4.5).*

- *En revanche, nous ne sommes parvenus à obtenir le premier théorème de régularité pour ce type, même en considérant les  $Z$ -orbites adaptées. La raison étant cette fois-ci la non dominance d'un caractère (remarque 5.3.9) nous empêchant d'appliquer le résultat de X.He et J-F. Thomsen (théorème 7.1.7) sur lequel repose notre preuve.*

**Remarque 0.0.4.** - *Dans le cadre matriciel, nous avons une description explicite des groupes  $H, B$  et nous en déduisons notamment  $H \simeq Gl_r$  (Type  $A$ ),  $H \simeq Sp_r$  (Types  $B, D$ ),  $H \simeq SO_r$  (Type  $C$ ). Nous avons encore des critères concrets et suffisants sur l'élément  $w$  pour que les morphismes  $H \times^{B_H} B \cdot wB \rightarrow Z \cdot wB$  soient birationnels projectifs  $Z$ -équivariants (théorème 6.3.4).*

- *Qui plus est, dans le type  $A$  et lorsque  $Y$  est une composante irréductible de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_e$ , nous disposons d'une expression exacte pour  $w$  (définition 8.2.3, théorème 8.2.6) et d'une description plus vectorielle de (3) (corollaire 8.2.15).*

- *Dans ce dernier contexte, nous observons le fait remarquable suivant : l'équivalence birationnelle fait perdre en régularité au sens où la lissité de la variété de Schubert en jeu implique strictement celle de la composante  $Y$  (proposition 8.2.10).*

Plusieurs pistes de réflexions s'ouvrent naturellement.

Tout d'abord, il serait intéressant de parvenir à une caractérisation plus précise et intrinsèque du groupe  $H$  intervenant dans (3). Nous compléterions ainsi la notion de paire adaptée qui cherchait à traduire de manière naturelle la spécificité de la configuration du couple  $(T, B)$  trouvé dans les modèles matriciels.

Par ailleurs, il s'agirait de savoir si, au moyen d'une adaptation plus fine de nos techniques ou selon d'autres méthodes, le type  $C$  ne se prêterait tout de même pas aux deux résultats précédents. D'une part en effet, d'autres constructions permettraient peut-être de lever les restrictions du théorème 6.3.3 et d'obtenir comme pour les autres types une équivalence birationnelle vers toute adhérence  $Y$  de  $Z$ -orbite. D'autre part, en usant d'arguments différents, de telles équivalences pourraient peut-être encore s'employer pour établir les propriétés géométriques désirées de leur cible : nous ne connaissons personnellement pas de contre-exemples à la normalité, rationalité ou propriété de Cohen Macaulay des adhérences  $Y$  dans le type  $C$ .

Cette double problématique concernerait bien sûr également les types exceptionnels; la difficulté étant ici sans doute bien plus considérable, dans la mesure où nous ne pourrions recourir à des modèles matriciels.

Ensuite, nous pouvons naturellement nous interroger sur des conditions nécessaires sur l'élément  $w$  de  $W$  intervenant dans (6.2), ou plus généralement (3) (théorèmes 6.3.4 et 6.3.1), qui puissent compléter les conditions suffisantes que nous avons pu établir et en former ainsi une véritable caractérisation. Ce travail serait à mener à un niveau général, pour toute adhérence  $Y$  de  $Z$ -orbites, mais également à un niveau plus restreint, lorsque  $Y$  réalise une composante irréductible de la fibre de Springer  $\mathcal{B}_e$ . Considérant les conditions plus restrictives qui s'attachent à ce dernier cas, il serait d'ailleurs sans doute plus aisément mené (voir la liste qui précède la définition 8.2.3).

Il deviendrait alors intéressant d'observer, dans le sous-ensemble de tels  $w$  qui leur correspondraient, la spécificité de ces composantes parmi toutes les adhérences de  $Z$ -orbites possibles.

Ce travail de caractérisation technique serait aussi le premier pas pour une description plus géométrique de ces éléments  $w$ , nous rendant plus à même de les lier naturellement avec les objets et les problématiques profondes de notre sujet.

Par exemple, étant données deux composantes irréductibles  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{B}_e$ , nous pourrions ainsi espérer mettre en relation les éléments  $v$  et  $w$  de  $W$  qui apparaissent dans leur équivalence birationnelle et l'altitude relative  $u \in W_{\mathcal{O}}$  du couple  $(X, Y)$ , paramétrant la composante  $S_{\mathcal{O}}(u) \in \text{Irr } S_{\mathcal{O}}$  selon (2). À partir de cette correspondance (2), il deviendrait alors plus naturel de transporter nos résolutions à celles des composantes irréductibles de la variété de Steinberg. Nous répondrions ainsi à un enjeu majeur de notre recherche.

**5.** Pour l'essentiel, notre travail adapte et généralise des raisonnements trouvés dans l'article [PS12] de N.Perrin et E.Smirnov. Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux de R-W.Richardson et T-A.Springer en théorie des sous-groupes symétriques ([RS90]) ainsi que sur un résultat de scindage dû à X.He et J-F. Thomsen ([HT12]) exploité au moyen d'une réduction modulo  $p$ . Notre travail procède en deux étapes.

La première étape consiste à établir le théorème 0.0.2 (théorème 6.3.1 sans l'assertion sur les caractères dominants). Pour ce faire, nous commençons par prouver l'existence d'une équivalence birationnelle analogue à (3), dans un cadre général, mais en direction d'adhérences de  $Z$ -orbites  $Y$  de la forme  $\overline{Z \cdot wB}$  pour un certain  $w$  dans le groupe de Weyl  $W$  (théorème 6.1.1) :

$$\begin{aligned} H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} &\rightarrow \overline{Z \cdot wB} \\ [h, gB] &\mapsto hgB. \end{aligned} \quad (4)$$

Ici, le groupe ambiant  $G$  n'est pas restreint aux types classiques et  $Z$  et  $H$  sont simplement des sous-groupes fermés connexes munis d'une inclusion  $H \subset Z$  et d'une rétraction  $Z \rightarrow H$ , avec  $B_H := B \cap H$  appartenant aux sous-groupes de Borel de  $H$ . Des conditions techniques plus restrictives portent sur  $w$  et concernent la position relative de  $Z$  et  $wBw^{-1}$ .

Nous chercherons alors simplement à exploiter au mieux ce résultat pour parvenir au théorème 0.0.2 souhaité. À cet effet nous nous proposons deux tâches. La première consistera à déduire des équivalences birationnelles de la forme (4), mais sous des hypothèses plus concrètes et adaptées. La seconde montrera que toutes les adhérences  $Y$  désirées pourront être la cible de telles équivalences, c'est-à-dire prendre la forme  $\overline{Z \cdot wB}$  pour un bon élément  $w$  du groupe de Weyl.

En vue de la première tâche, nous employons la théorie des sous-groupes symétriques et le procédé d'induction parabolique. Nous plaçant dans un cadre plus concret, leur combinaison permet d'alléger les hypothèses sur  $w$  évoquées précédemment, les réduisant essentiellement à une condition de stabilité et de longueur. Le cadre exigé impose cependant la forme du groupe  $Z$  pouvant être considéré. Il doit s'obtenir comme le produit du radical unipotent  $U_P$  d'un sous-groupe parabolique  $P$  contenant  $B$ , avec le sous-groupe de points fixes  $(L^\theta)^0$  du sous-groupe de Lévi  $L$  de  $P$  contenant  $T$  :

$$Z = (L^\theta)^0 U_P. \quad (5)$$

Nous obtenons ainsi le théorème 6.2.1 et son équivalence birationnelle (4) comme une application intermédiaire.

Nous nous plaçons ensuite dans des modèles matriciels  $\mathcal{M}(n, r)$  et  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ , le premier couvrant le type  $A$ , le second les types  $B, C, D$  (voir chapitre 5). Nous y fixons la forme de l'élément nilpotent  $e$ , du tore maximal  $T$ , du sous-groupe de Borel  $B$ , d'un sous-groupe parabolique  $P$ , d'une involution  $\theta$  et d'un sous-groupe  $H$ . Nous voyons alors le centralisateur  $Z$  de  $e$  apparaître avec la décomposition (5) en plus d'être la source d'une rétraction  $Z \rightarrow H$ . Les éléments du groupe de Weyl identifiés à des permutations, des calculs de longueur donnent alors des conditions suffisantes sur  $w$  pour pouvoir appliquer le théorème 6.2.1 (propositions 6.3.6, 6.3.7, 6.3.10, 6.3.11). Nous disposons ainsi d'une équivalence birationnelle (4) très concrète et achevons la première tâche avec le théorème 6.3.4. Signalons que celui-ci est aussi valable en type  $C$ . Les arguments employés jusqu'ici ont en effet pu traiter indifféremment les types  $B, D, C$ , chacun tombant sous le modèle générique  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ .

Nous menons à bien la seconde tâche dans le cadre matriciel. Un premier pas est franchi avec un résultat de paramétrisation (théorème 5.5.4) dont les composantes essentielles se trouvent dans la littérature sous divers avatars. Il se base sur des paramétrisations préliminaires (lemmes 5.5.1 et 5.5.3), qui reviennent à celles des  $GL_r$ -orbites pour l'action diagonale dans le produit

$Gl_r/B_r \times Gl_r/B_r$  de deux copies de la variété de drapeaux de  $Gl_r$  (type  $A$ ), ou encore, à celles des  $SO_r$  ou  $Sp_r$ -orbites dans cette même variété de drapeaux (types  $B, C, D$ ). Le premier résultat est classique et suit le lemme de Bruhat. Pour le second, nos arguments suivent ceux employés par R-W.Richardson et T-A.Springer ([RS90], Exemples 10.1, 10.2), mais d'autres références existent, comme celle de T.Matsuki et T.Oshima ([MO90], Théorème 4.1), et, dans un cadre plus vectoriel, de R.Howe et H.Kraft ([HK98] Claim A2), L.Fresse et I.Penkov ([FP17], Proposition 4). La seconde partie de la preuve consiste à étendre ces premières paramétrisations aux  $Z$ -orbites dans la variété de drapeaux  $G/B$ . Une fois de plus, nous recourons alors à un résultat d'induction parabolique sur la base de la décomposition (5) qui permet d'associer ces orbites à celles de l'action de  $L \cap Z$  sur  $L/B \cap L$  (théorème 4.3.1). En cela, notre raisonnement est identique à celui mené par P-E.Chaput, L.Fresse et T.Gobet ([CFG20], Théorème 7.1). Le théorème de paramétrisation 5.5.4 ainsi établi, nous observons, en types  $A, B, D$ , que toute adhérence  $Y$  désirée possédera un point fixé par le tore maximal  $T$ . Chacune sera donc de la forme  $Z \cdot v\overline{B}$  pour certains éléments  $v \in W$ . Nous observons également que cela ne sera pas le cas du type  $C$ , et nous percevons déjà la spécificité qui sera attachée à ce dernier.

Il reste donc maintenant à prouver qu'il existe un élément  $v$  convenable parmi tous ceux possibles. Nous le faisons dans le chapitre 6 (Lemmes 6.3.5, 6.3.8). Nous sommes ainsi certains de pouvoir obtenir, dans le cadre matriciel et pour les types  $A, B, D$ , une équivalence birationnelle (3) vers toute adhérence  $Y$  de  $Z$ -orbite.

Par composition avec des isomorphismes et conjugaisons, nous serions par suite assurés de l'existence théorique d'une équivalence birationnelle hors cadre matriciel, qui suffirait à son tour pour poursuivre la seconde étape de notre travail. Mais nous perdriions alors la description naturelle et explicite de (3), qui n'est plus valable si le sous-groupe de Borel  $B$ , et relativement le tore maximal  $T$ , ne sont pas bien choisis. Aussi, nous identifions dans le modèle matriciel la naturalité de certaines données, comme le sous-groupe parabolique  $P$  et l'involution  $\theta$  que nous définissons intrinsèquement (définition 5.4.1). Nous pouvons alors poser le notion de paire adaptée (définition 5.4.3) portée sur les couples formés d'un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel. Des résultats issus des sous-groupes symétriques (théorème 4.1.2 de R-W Richardson et ses corollaires, ainsi que la proposition 4.1.6 et le lemme 5.4.6) assurent la conjugaison de telles paires sous le groupe  $Z$  et nous permettent de nous ramener aux modèles matriciels tout en préservant la structure de (3) (théorème 5.4.7). Nous obtenons donc le théorème 0.0.2 et achevons par là notre première étape.

Signalons que la notion de paire adaptée nous permet de poser celle d'orbite adaptée (définition 5.4.5) et de formuler ainsi un théorème semblable mais plus restrictif pour le type  $C$  (théorème 6.3.3).

La seconde étape consiste à établir le théorème 0.0.1 (théorème 7.3.1). De manière analogue à la première étape, nous établissons d'abord le résultat souhaité dans un cadre assez général pour ensuite l'appliquer aux types  $A, B, D$ . Il fait intervenir le caractère  $\rho_\Gamma$ , désignant, pour un groupe réductif  $\Gamma$  muni d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel, la demi-somme des racines positives. Nous avons :

**Théorème 0.0.5** (Théorème 7.1.13). *On suppose la caractéristique nulle. Soit  $H \subset G$  un sous-groupe connexe réductif tel que  $B_H := B \cap H$  et  $T_H := T \cap H$  soient respectivement un sous-groupe de Borel et un tore maximal de  $H$ . On note  $\rho := \rho_G$ . Soit  $w \in W$ . On suppose que :*

- (i) *Le morphisme naturel  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow G/B$  issu de l'action de  $H$  est birationnel vers son image  $\overline{HB \cdot wB}$ .*
- (ii) *Le caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  est dominant.*

Alors  $\overline{HB \cdot wB}$  est normale, Cohen-Macaulay et à singularités rationnelles.

Signalons tout de suite que notre démarche ne permettra pas de traiter le type  $C$ , qui ne satisfait pas à la condition (ii) (remarque 5.3.9). Mais l'application aux types  $A, B, D$  sera immédiate puisque la première étape nous donne de vérifier l'hypothèse (i) et un simple calcul

dans les modèles matriciels fournit (ii) (propositions 5.2.2 et 5.3.8). Notre effort ne portera donc pas sur la preuve du théorème 7.1.13.

Elle repose sur un raisonnement récursif déjà présent dans [PS12] que nous avons simplement présenté sous une forme plus générale pour en faire ressortir les aspects essentiels (théorème 7.1.1). Il s'applique à des familles de schémas et morphismes de schémas  $\{\tilde{X}_i \rightarrow X_i\}_{0 \leq i \leq n}$  définies par récurrence à partir de produits fibrés. Ses hypothèses essentielles portent sur la birationnalité du dernier morphisme  $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$  et sur la surjectivité d'une restriction de sections. Il permet de transporter directement les propriétés géométriques souhaitées (normalité, et en caractéristique nulle, la rationalité et la propriété d'être Cohen-Macaulay) de  $X_0$  à tous les  $X_i$ .

Nous l'appliquerons à une famille de morphismes obtenue grâce aux variétés de Bott-Samelson et à leur possible description par produits contractés (voir proposition 2.1.32 et son application dans la preuve du théorème 7.1.13). Plus précisément, pour  $w$  un élément du groupe de Weyl et  $w[i]$  un sous-mots obtenu par  $i$ -ième troncature de sa décomposition en  $n := \ell(w)$ -réflexions simples, on note  $Z_{\mathfrak{w}[i]}$  la variété de Bott-Samelson associée. On considère alors la composée naturelle  $f_i : H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[i]} \rightarrow H \times^{B_H} \overline{B \cdot w[i]B} \rightarrow G/B$  issue du produit contracté de l'équivalence birationnelle connue  $Z_{\mathfrak{w}[i]} \rightarrow \overline{B \cdot w[i]B}$  et du morphisme produit  $[h, gB] \mapsto hgB$  de  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot w[i]B}$  vers  $G/B$ . On pose maintenant pour tout  $1 \leq i \leq n$  :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_i &:= H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[i]}, \\ X_i &:= \text{Im } f_i = \overline{HB \cdot w[i]B},\end{aligned}$$

et le morphisme  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  comme restriction de  $f_i$ . La restriction de sections évoquée correspondra alors à :

$$H^0(\overline{HB \cdot w[i+1]B}, \mathcal{L}_{\overline{HB \cdot w[i+1]B}}) \rightarrow H^0(\overline{HB \cdot w[i]B}, \mathcal{L}_{\overline{HB \cdot w[i]B}}), \quad (6)$$

pour n'importe quel faisceau inversible semi-ample  $\mathcal{L}$  sur  $G/B$ .

La première étape nous donnera directement de satisfaire l'hypothèse de birationnalité de  $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$ . En effet, le produit contracté  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[n]} \rightarrow H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB}$  reste birationnel et  $f_n$  apparaît comme sa composée avec l'équivalence birationnelle (3) établie lors de cette première étape. Il ne reste donc plus qu'à satisfaire à la surjectivité de (6) pour transporter les propriétés géométriques de  $X_0 \simeq H/B_H$  à la variété  $X_n = \overline{HB \cdot wB}$  et prouver ainsi le théorème 7.1.13.

Pour établir cette surjectivité, nous exploitons un théorème de X.He et J-F. Thomsen [HT12] qui donne l'existence d'un scindage de Frobenius des sous-variétés  $X_i = \overline{HB \cdot w[i]B}$ , sous l'hypothèse (ii) et une caractéristique positive suffisamment grande (théorème 7.1.7). Par des propriétés classiques impliquées par les scindages (théorème 7.1.9) cette existence fournit la surjectivité de (6) mais en restant dans le cadre de la caractéristique positive.

Nous opérons alors une "réduction modulo  $p$ " pour être en mesure de transposer cette surjectivité aux variétés qui nous intéressent. Une variété  $X$  sur corps de base  $k$  étant fixée, la réduction consiste à produire des schémas de présentation finie sur des  $\mathbb{Z}$ -sous-algèbres de type fini de  $k$  qui "réalisent"  $X$  au sens suivant : l'extension de scalaire à  $k$  de leur fibre générique s'identifie à  $X$  (définition 3.1.1). Ainsi, les fibres spéciales géométriques de ces schémas seront comme autant de "versions" en caractéristique positive d'une même variété initiale (proposition 3.0.1).

La surjectivité de (6) pouvant passer des fibres spéciales géométrique à la fibre générique géométrique (corollaire 7.1.11), puis de la fibre générique géométrique à la variété de départ (lemme 7.1.8), il ne s'agit plus que d'établir des réalisations convenables pour nos variétés.

Des résultats classiques concernant les limites projectives de schémas nous permettent de le faire brutalement pour la plupart des données qui nous intéressent. Nous obtenons ainsi le théorème 3.4.1 grâce aux références EGAIV ([Gro66], §8, voir théorèmes 3.1.3, 3.1.4) et SGA3 (avec notamment l'équivalence de catégorie permettant de relever, sur n'importe quel schéma de base, toute donnée radicielle en un schéma en groupes réductif ([DGA11b], Exposé XXII Corollaire 5.8.3, voir théorème 2.1.26).

Cependant, une difficulté est de s'assurer que les différentes réalisations trouvées "commutent" de manière à pouvoir faire apparaître, dans la réduction de notre adhérence  $Y = \overline{HB \cdot wB}$ , la

réduction des groupes et des variétés qui la définissent. Autrement dit, il s'agira de voir que la réduction de  $Y$ , image schématique du morphisme

$$H \times \overline{B \cdot wB} \rightarrow G/B, (h, gB) \mapsto hgB,$$

correspondra à l'image schématique du morphisme analogue, où l'on substitue leur réduction au groupe  $H$  et à la variété  $\overline{B \cdot wB}$ . Le résultat de scindage ne s'applique en effet qu'à cette dernière construction. Nous résolvons cette difficulté par le théorème suivant, porté sur la formation de l'image schématique :

**Théorème 0.0.6** (Théorème 3.3.4). *Soit  $k$  un corps et  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de  $k$ -schémas de type fini. Soit  $(f_A : \mathcal{X}_A \rightarrow \mathcal{Y}_A)_A$  une réalisation de  $f$  (définition 3.1.1). On suppose que  $\mathcal{Y}$  est propre sur  $k$  et qu'il existe  $A$  telle que  $\mathcal{X}_A$  soit à fibres géométriques intègres. Alors, pour  $A$  assez grande et pour tout  $s \in \text{Spec } A$ , on a un isomorphisme de  $(\mathcal{Y}_A)_{\bar{s}}$ -schémas :*

$$\text{Im } (f_A)_{\bar{s}} \simeq (\text{Im } f_A)_{\bar{s}}.$$

En combinant ce dernier et les résultats d'existence, nous avons pour les variétés qui nous intéressent :

**Corollaire 0.0.7** (Théorème 3.4.1 et Corollaire 3.4.2). *Il existe des familles  $(G_A)_A$ ,  $(B_A)_A$ ,  $(T_A)_A$ ,  $(H_A)_A$ ,  $(W_A)_A$ ,  $(\mathcal{B}_A)_A$ ,  $(w_A : \text{Spec } A \rightarrow W_A)_A$  et  $(Y_A^w \hookrightarrow \mathcal{B}_A)_A$  réalisant respectivement les groupes  $G$ ,  $B$ ,  $T$ ,  $H$ ,  $W$ , la variété de drapeaux  $\mathcal{B}$ , l'élément  $w \in W$  et la sous-variété fermée  $\overline{HB \cdot wB} \hookrightarrow \mathcal{B}$  et telles que, pour toute  $A$  assez grande et tout  $s \in \text{Spec } A$ , on a un isomorphisme de  $\kappa(s)$ -variétés au dessus de  $G_{A\bar{s}}/B_{A\bar{s}}$  :*

$$(Y_A^w)_{\bar{s}} \simeq \overline{H_{A\bar{s}} B_{A\bar{s}} \cdot w_{A\bar{s}} B_{A\bar{s}}}.$$

Nous pouvons ainsi nous ramener sans risque en caractéristique positive et finaliser notre preuve. La seconde étape est achevée.

Si notre raisonnement suit de près celui employé par Perrin et Smirnov, signalons enfin sur quels points principaux il nous a semblé en différer. Pour établir leur résultat de régularité, ceux-ci plongent la variété qui les intéresse dans une variété plus grande sur laquelle ils font jouer l'argument récursif précédemment évoqué (théorème 7.1.1). C'est aussi au sein de celle-ci qu'ils détectent un scindage de Frobenius lié à des diviseurs, par un résultat du même article [HT12] de He et Thomsen. Un tel plongement ne nous a pas semblé possible dans le cadre plus général que nous nous proposons. Mais ce cadre nous permet justement d'exploiter le théorème principal de [HT12] qui nous a fourni à peu de frais l'existence d'un scindage convenable, quoiqu'il ne possède pas toutes les propriétés du précédent. Enfin, Perrin et Smirnov évoquent brièvement le passage de la caractéristique positive à celle de départ tandis que nous avons souhaité insister sur ce point. En effet, la problématique signalée d'une compatibilité de réalisations nous a paru exiger un travail supplémentaire.

**6** Nous commençons par un chapitre fixant quelques notations et définitions importantes de notre thèse. S'ensuivent quatre chapitres de résultats préliminaires. Nous y intégrons parfois sans preuves des rappels et propriétés classiques de géométrie algébrique générale, afin de faciliter la lecture. Ils contiennent cependant nos résultats sur les réalisations de variétés (théorème 3.3.4, corollaire 3.4.2 précédemment évoqués) et sont destinés à fournir le matériel nécessaire à l'élaboration des théorèmes des derniers chapitres (théorèmes 6.1.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.3.3, 7.1.13, 7.2.1, 7.3.1). Nous donnons enfin deux Annexes. Nous plaçons dans la première (Annexe A) un travail non complètement abouti sur une lecture graphique de dimensions d'orbites (théorème 8.1.9). Avec la seconde (Annexe B), nous appliquons plus concrètement notre résultat d'équivalence birationnelle en type  $A$ , lorsque l'adhérence de la  $Z$ -orbite considérée est une composante irréductible de la fibre de Springer. Nous donnons alors une forme plus explicite à (3) (théorème 8.2.6) et nous observons un phénomène de perte de régularité (proposition 8.2.10). Cette annexe nous donne aussi l'occasion de mieux faire entrevoir les similitudes de notre travail avec celui de Perrin et

Smirnov dans [PS12], qui fut une source d'inspiration continue. Ainsi, sous certaines hypothèses, nous voyons notre morphisme birationnel coïncider avec celui proposé par les auteurs (corollaire 8.2.15, proposition 8.2.16).

# Chapitre 1

## Notations et définitions

### 1.1 Conventions

Lorsque  $k$  sera un corps algébriquement clos, on appellera  $k$ -variété (ou simplement *variété*) un  $k$ -schéma de type fini réduit séparé et  $k$ -groupe algébrique (ou *groupe algébrique*) un schéma en groupes qui est une  $k$ -variété (alors nécessairement lisse par homogénéité, voir proposition 2.3.10). On appellera enfin *groupe algébrique linéaire*, un groupe algébrique affine.

Avec  $V$  sous-entendu comme un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , éventuellement muni d'une forme bilinéaire non dégénérée, on désignera par  $Gl(V)$ ,  $SO(V)$  et  $Sp(V)$  les groupes algébriques linéaires classiques. On appellera *variété de drapeaux vectoriels* la variété dont les points fermés sont les suites de sous-espaces vectoriels emboîtés  $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$  avec  $\dim V_i = i$  pour tout  $i$ . Pour  $G$  un groupe algébrique linéaire, et  $B$  un sous-groupe de Borel, on réservera la dénomination *variétés des drapeaux* (de  $G$ ), et on désignera le plus souvent par  $\mathcal{B}$ , la variété quotient  $G/B$  ou bien la variété qui lui est naturellement isomorphe et dont les points fermés consistent en les sous-groupes de Borel de  $G$ . Lorsque  $G$  est un groupe algébrique classique (i.e. linéaire réductif connexe en types  $A, B, C, D$ ), son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  s'identifie à une sous-algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel  $V$ , et on dira qu'un élément  $e \in \mathfrak{g}$  est *nilpotent d'ordre  $m$*  si lui correspond un tel endomorphisme dans  $End V$ .

Lorsque  $G$  sera un groupe algébrique linéaire réductif, muni d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel, on désignera par  $\rho_G$  le caractère consistant en la demi-somme des racines positives.

Lorsque  $S$  sera un schéma et  $X$  un  $S$ -schéma, on désignera encore par  $X$  son foncteur de points :  $T \mapsto Hom_S(T, X)$ .

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés, on notera par un indice  $(-)_T$  les différents objets : schémas, morphismes ou faisceaux de modules obtenus par un changement de base  $T \rightarrow Y$  à partir d'objets similaires définis au dessus de  $Y$ . Par exemple, si  $\phi$  est un morphisme de  $Y$ -modules,  $(\phi)_T = (T \rightarrow Y)^* \phi$ . Lorsque l'on regardera les objets relatifs à la fibre d'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  en  $y \in Y$ , soit au changement de base  $Spec \kappa(y) \rightarrow Y$ , on utilisera plus simplement la notation  $(-)_y$  et on ajoutera une barre  $(-)_y$  lorsque ce dernier sera composé avec  $Spec \overline{\kappa(y)} \rightarrow Spec \kappa(y)$  où l'on a choisi une clôture algébrique  $\overline{\kappa(y)}$  de  $\kappa(y)$ ; on parlera alors de fibre géométrique.

On notera indifféremment par un indice  $(-)_{red}$  l'unique sous-schéma fermé réduit associé à une partie fermée ou à un schéma (voir par exemple lemme 26.12.4 [Sta21] dont nous rappelons la formulation avec la définition 3.2.7). Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés, l'adhérence  $\overline{A}$  d'une partie  $A$  d'un schéma désignera le sous-schéma fermé  $\overline{A}_{red}$ . Ainsi, dans le cas d'une source  $X$  réduite, l'image schématique  $Im f$  s'identifiera à  $\overline{f(X)}_{red}$  (voir proposition 3.2.8) que l'on pourra aussi simplement noter  $\overline{f(X)}$ .

Dans le contexte des variétés et de manière usuelle, nous nous contenterons la plupart du temps de considérer seulement les points fermés ou de manière équivalente, les points à valeurs dans le corps de base. Nous identifierons donc parfois la  $k$ -variété  $X$  elle-même, l'ensemble  $\{x \in X \mid x \text{ fermé dans } X\}$  et les  $k$ -points  $X(k)$ . Lorsqu'il pourra y avoir des ambiguïtés, la nota-

tion  $X(k)$  sera employée pour désigner les deux derniers ensembles. Cette approche concernera aussi les morphismes et leurs propriétés, ainsi que la définition de certaines variétés. Par exemple, l'intersection de deux sous-variétés  $Z$  et  $Y$  de  $X$  sera entendue comme l'unique variété de points fermés  $Z(k) \cap Y(k)$ , soit encore la variété  $(Z \times_X Y)_{red}$ <sup>1</sup>. De même, l'*orbite* d'un point fermé  $x \in X$  d'une variété sous l'action d'un groupe algébrique  $G$  sera entendue comme l'unique variété de points fermés  $\{g \cdot x \mid g \in G(k)\}$ . Et le *stabilisateur* d'un tel point sera l'unique sous-groupe algébrique de  $G$  de points fermés  $\{g \in G(k) \mid g \cdot x = x\}$ . Nous les désignerons respectivement par  $G \cdot x$  et  $G_x$ . Lorsque le morphisme orbital  $G \rightarrow X$  sera séparable,  $G_x$  en sera exactement la fibre au dessus de  $x$ . De cette manière, nous nous permettrons d'utiliser les résultats classiques de [Hum81], [Spr09] ou [Bor91]. Nous renvoyons à [GW10], §3.3 pour différentes justifications de cette approche et évoquons simplement dans la partie dédiée la définition et l'existence de certains quotients d'une variété par un groupe algébrique (théorème 2.3.12, proposition 2.3.15).

Enfin, nous admettrons les définitions et propriétés de base concernant les schémas, faisceaux, quotients et topologies, et nous renvoyons à [Sta21] et aux références classiques les concernant (EGA [Gro60], [Gro61a] [Gro61b], [Gro63], [Gro67], [Gro64], [Gro65], [Gro66], SGA3 Exposés I à VIIB [DGA11a], SGA4 Exposés I à IV [GAV72]).

## 1.2 Définitions

Puisqu'elles sont partie intégrante des résultats de cette thèse, posons dès maintenant les notions de birationalité, rationalité et résolution rationnelle.

**Définition 1.2.1.** *Un morphisme localement de type fini  $b : X \rightarrow Y$  entre schémas intègres<sup>2</sup> sera dit **birationnel** s'il satisfait aux deux conditions équivalentes<sup>3</sup> suivantes :*

- $b$  induit un isomorphisme  $U \simeq V$  entre deux ouverts non vides  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$ ,
- $b$  induit un isomorphisme  $K(X) \simeq K(Y)$  entre les corps de fonctions de  $X$  et  $Y$ .

**Définition 1.2.2.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre de schémas localement noethériens. On dit que  $f$  est **rationnel** si  $\mathcal{O}_Y \simeq f_* \mathcal{O}_X$  et si  $R^i f_* \mathcal{O}_X = 0$  pour  $i > 0$ .*

**Définition 1.2.3.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de variétés irréductibles. On désigne par  $\omega_X$  le faisceau des formes différentielles de degré maximal sur  $X$ . On dit que  $f$  est une **résolution rationnelle** si  $f$  est birationnel, rationnel, avec  $X$  lisse et  $R^i f_* \omega_X = 0$  pour  $i > 0$ . Une variété sera alors dite à singularités rationnelles si elle est la cible d'une résolution rationnelle.*

Rappelons enfin quelques définitions et notions relatives aux faisceaux et aux schémas en groupes, basées sur celles de SGA3 [DGA11a], [DGA70], [DGA11b]. Ajoutons cependant que l'on choisit de remplacer la topologie fpqc utilisée dans cette référence par la topologie moins fine fppf, dont l'usage est plus naturel (en particulier, le faisceautisé d'un préfaisceau existe toujours, voir [BLR90], Chapitre 6, pour une discussion approfondie). Pour les énoncés qui nous intéressent, ce changement est inoffensif (voir [Con] Introduction et Appendice B). Nous renvoyons à SGA3 Exposé IV [DGA11a] ainsi que SGA4 Exposé II [GAV72], ou encore Section 34.7 [Sta21] pour des rappels sur la notion de topologie employée ici.

On fixe un schéma de base  $S$ , et on commence par des notions relatives aux faisceaux, qui donnent un cadre pour la notion de quotient.

1. Soulignons néanmoins que le produit de deux variétés reste une variété, voir par exemple proposition 5.49 [GW10] assurant que le produit de deux  $k$ -schémas géométriquement réduits est réduit.

2. En supposant simplement  $X$  et  $Y$  irréductibles et  $b$  localement de présentation finie, induire un isomorphisme entre deux ouverts reste équivalent au fait d'induire un isomorphisme entre les localisés en les points génériques (Lemme 29.50.5 [Sta21]). Cependant, on a souhaité se restreindre aux schémas réduits pour que les morphismes birationnels soient schématiquement dominants, voir la section sur l'image schématique et l'exemple 3.2.10 dû à Matthieu Romagny.

3. Nous donnons quelques arguments pour cette équivalence dans la section dédiée, voir proposition 2.2.9.

**Définition 1.2.4.** - Un  $S$ -**faisceau** sera un faisceau sur le grand site  $Sch/S$  pour la topologie fppf. Par identification avec le foncteur de points, un  $S$ -schéma sera donc aussi compris comme un faisceau<sup>4</sup>.

- Lorsque  $X$  sera un  $S$ -faisceau fppf et  $G$  un  $S$ -faisceau de groupes fppf agissant sur  $X$ , on appellera **faisceau quotient** de  $X$  par  $G$ , et on désignera par  $X/G$  le faisceau fppf faisceautisé du préfaisceau  $Sch/S \rightarrow Ens$ ,  $T \mapsto X(T)/G(T)$  (voir SGA3 Exposé VIB 9.1 [DGA11a] et définition 7.10.11, [Sta21] pour une définition générale de la faisceautisation).
- Si un sous-groupe  $H$  d'un  $S$ -schéma en groupes  $G$  agit sur un  $S$ -schéma  $X$ , on appelle **faisceau du produit contracté** de  $X$  par  $G$  relativement à  $H$ , le faisceau quotient  $(G \times_S X)/H$  où l'action de  $H$  est donnée (sur les  $T$ -points) par  $(g, x) \star h := (gh, h^{-1} \cdot x)$ . On le note  $G \times_S^H X$ . On appellera plus simplement **produit contracté** et on usera de la même notation pour désigner un  $S$ -schéma qui représente le faisceau précédent.

Viennent enfin quelques définitions qui étendent aux schémas en groupes des notions classiques relatives aux groupes algébriques.

**Définition 1.2.5.** - Un schéma en groupes sur  $S$  ou  $S$ -groupe est dit **réductif** (respectivement **semi-simple**) s'il est affine et lisse sur  $S$  à fibres géométriques connexes et réductives (respectivement semi-simples) (voir SGA3 Exposé XIX 2.7 [DGA11b]).

- Un sous-groupe d'un  $S$ -groupe est dit **de Borel** s'il est de présentation finie et lisse sur  $S$  et si ses fibres géométriques sont des sous-groupes de Borel des fibres correspondantes du groupe ambiant (voir SGA3 Exposé XXII 5.2.3 [DGA11b]).
- Un sous-groupe d'un  $S$ -groupe est un **tore maximal** s'il est localement isomorphe à  $\mathbb{G}_m^r$  pour la topologie fpqc et si ses fibres géométriques sont des tores maximaux des fibres correspondantes du groupe ambiant (voir SGA3 Exposé IX 1.3 et Exposé XII 1.3 [DGA70]).
- Le **groupe de Weyl** d'un  $S$ -groupe  $G$  muni d'un tore maximal  $T$  est le  $\mathbb{Z}$ -groupe étale fini représentant le quotient du préfaisceau normalisateur de  $\underline{G}$  par le préfaisceau centralisateur de  $\underline{T}$  (voir SGA3 Exposé XXII 3.1 [DGA11b]).
- Si  $E$  est un ensemble, le  $S$ -**objet constant** issu de  $E$  est le schéma  $E[S]$  représentant le foncteur  $Sch/S \rightarrow Ens$ ,  $X \mapsto Hom_{Ens}(E, Hom_S(S, X))$ . Il peut se construire comme la somme directe de  $E$  copies de  $S$  (voir SGA3 Exposé I 1.8 [DGA11a]).

## 1.3 Remarques

Pour mieux les éclairer, signalons de manière anticipée plusieurs propriétés concernant les précédentes définitions.

Dans la définition 1.2.3, la condition  $R^i f_* \omega_X = 0$  est automatiquement vérifiée dès que le corps est de caractéristique nulle et le morphisme projectif. C'est le théorème de Grauert-Riemenschneider (voir [GR70] et le théorème 2.3.7 où nous rappelons simplement un énoncé possible).

Par ailleurs, une variété normale à singularités rationnelles est nécessairement Cohen-Macaulay (voir [Kem+73] et la proposition 2.3.9 où nous donnons l'énoncé).

Aussi, pour établir nos résultats principaux, nous ne nous intéresserons pas directement à la propriété de Cohen-Macaulay non plus qu'au faisceau  $\omega_X$ , mais nous nous focaliserons sur les propriétés de normalité, rationalité et birationalité.

Concernant la notion de quotient, signalons que le "faisceau quotient" existe toujours, et il s'agit bien d'un "quotient", au sens où le morphisme naturel  $X \rightarrow X/G$  factorise de manière unique tout morphisme de faisceaux fppf  $X \rightarrow Z$  qui soit  $G$ -invariant (voir proposition 2.1.15 pour une justification et des précisions).

---

4. Un résultat fondamental (SGA3 Exposé IV 6.3.1 [DGA11a]) assure que tout schéma induit un faisceau pour la topologie fpqc, et donc pour toute topologie moins fine telle que celle fppf.

Enfin le (faisceau) produit contracté de  $X$  par  $G$  relativement à  $H$  étend naturellement l'action de  $H$  sur  $X$  à une action de  $G$  et peut être caractérisé en ce sens. Plus précisément, le foncteur  $X \mapsto G \times_S^H X$  est l'adjoint à gauche du foncteur de restriction de l'action, entre les catégories de faisceaux munis d'une action de  $G$  d'un côté, et de  $H$  de l'autre (voir proposition [2.1.27](#) pour les détails et une preuve).

# Chapitre 2

## Résultats préliminaires, géométrie algébrique générale

### 2.1 Quotients, produits fibrés et contractés

Nous présentons ici dans un cadre relativement <sup>1</sup> général les différentes constructions de quotients, de produits contractés et de produits fibrés qui interviennent dans les théorèmes des deux derniers chapitres. Signalons toutefois que ces objets seront essentiellement employés dans le cadre des variétés. Dans l'unique perspective d'une preuve des résultats finaux (théorèmes 0.0.1/7.3.1, 0.0.2/6.3.1), seuls les arguments de réduction  $p$  et de scindage (Chapitre 3, première section du chapitre 7) exigent l'introduction de schémas plus généraux. La motivation de cette section (et de la suivante) est donc avant tout esthétique : nous souhaitons présenter un point de vue unifié, et mettre en avant la généralité de certaines preuves, parfois plus éclairantes dans le contexte des schémas (voir théorèmes 2.1.31 et 7.1.1 notamment).

Nous rappelons que, si elle n'est pas précisée, la topologie employée dans toute cette thèse sera la topologie "fppf". Nous présenterons dans une section ultérieure les conséquences et compléments qui concerneront spécifiquement les variétés et nous nous contentons ici de donner quelques ingrédients essentiels.

Avant de nous intéresser plus particulièrement au quotient d'un groupe par un sous-groupe et aux produits contractés, nous commençons par donner quelques éléments généraux sur le sujet.

#### Limites, colimites et exactitude

Les quotients étant des cas particuliers de colimites, rappelons tout d'abord de manière purement catégorielle cette notion, ainsi que la notion duale de limite. Encore une fois, la plupart des preuves importantes seront omises et nous renvoyons le lecteur à la section 4.14 [Sta21] où elles peuvent se trouver.

Fixons  $\mathcal{C}$  une catégorie.

On appellera *diagramme* de  $\mathcal{C}$  tout foncteur  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  où  $\mathcal{I}$  est une petite catégorie <sup>2</sup>. On notera  $D_i$  l'image par  $D$  de l'objet  $i$  de  $\mathcal{I}$ .

**Définition 2.1.1.** La *limite* d'un diagramme  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  est la donnée, dans  $\mathcal{C}$ , d'un objet  $\lim D$  muni d'une famille de morphismes  $p_i : \lim D \rightarrow D_i$  ( $i$  variants dans les objets de  $\mathcal{I}$ ) telle que :

1. Pour tout morphisme  $\phi : i \rightarrow i'$  dans  $\mathcal{I}$ , on a  $p_{i'} = D(\phi) \circ p_i$ .

---

1. Pour toutes les questions de quotients, le cadre le plus approprié serait sans doute celui des espaces algébriques, ou sans doute mieux encore celui des champs algébriques, mais nous manquons de connaissances à ce sujet.

2. C'est-à-dire que les objets et tous les morphismes de  $\mathcal{I}$  forment un ensemble. Dans [Sta21], on n'impose pas cette restriction, mais elle assure plus facilement la bonne définition des objets et nos constructions pourront toutes s'effectuer dans ce cadre.

2. Pour tout objet  $X$  et toute famille de morphismes  $q_i : X \rightarrow D_i$  de  $\mathcal{C}$  ( $i$  variants dans les objets de  $\mathcal{I}$ ) vérifiant  $q_{i'} = D(\phi) \circ q_i$  quelque soit  $\phi : i \rightarrow i'$  dans  $\mathcal{I}$ , il existe un unique morphisme  $q : X \rightarrow \lim D$  dans  $\mathcal{C}$  tel que  $q_i = p_i \circ q$  pour tout  $i$ .

La notion duale de limite est celle de colimite :

**Définition 2.1.2.** La **colimite** d'un diagramme  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  est la donnée, dans  $\mathcal{C}$ , d'un objet colim  $D$  muni d'une famille de morphismes  $s_i : D_i \rightarrow \text{colim } D$  ( $i$  variants dans les objets de  $\mathcal{I}$ ) telle que :

1. Pour tout morphisme  $\phi : i \rightarrow i'$  de  $\mathcal{I}$ , on a  $s_i = s_{i'} \circ D(\phi)$ .
2. Pour tout objet  $X$  et toute famille de morphismes  $t_i : D_i \rightarrow X$  dans  $\mathcal{C}$  ( $i$  variants dans les objets de  $\mathcal{I}$ ) vérifiant  $t_i = t_{i'} \circ D(\phi)$  quelque soit  $\phi : i \rightarrow i'$  dans  $\mathcal{I}$ , il existe un unique morphisme  $t : \text{colim } D \rightarrow X$  dans  $\mathcal{C}$  tel que  $t_i = t \circ s_i$  pour tout  $i$ .

**Définition 2.1.3.** On dira d'un diagramme  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  qu'il est **fini** si  $\mathcal{I}$  comporte un nombre fini d'objets et de morphismes. On dira d'une limite ou colimite d'un diagramme  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  qu'elle est **finie** si  $D$  est lui-même fini.

**Remarque 2.1.4.** Les propriétés universelles définissant les limites et colimites les caractérisent respectivement à isomorphisme canonique près.

**Remarque 2.1.5.** Par l'identité d'objets entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}^0$  et la définition des morphismes de cette dernière catégorie, on voit facilement que la colimite d'un diagramme  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  est simplement la limite du diagramme dual  $D^0 : \mathcal{I}^0 \rightarrow \mathcal{C}^0$  dont la donnée est considérée dans  $\mathcal{C}$ .

**Remarque 2.1.6.** Lorsque  $\mathcal{C}$  est la catégorie des ensembles,  $\lim D$  est fourni par l'ensemble :

$$E := \left\{ (x_i)_i \in \prod_i D_i \mid \forall \phi : i \rightarrow i', x_{i'} = D(\phi)(x_i) \right\},$$

muni des projections  $E \rightarrow D_i$ .

**Remarque 2.1.7.** Au sein des catégories où ces notions ont un sens :

1. Les produits et noyaux sont des exemples de limites.
2. Les sommes directes et conoyaux sont des exemples de colimites.

### Produits fibrés, coégaliseurs et quotients

Complétons la dernière remarque par les exemples de limites et colimites que forment les produits fibrés (limites), coégaliseurs et "quotients"(colimites). Puisque ces objets nous intéresseront plus particulièrement dans notre travail, nous présentons (brièvement) la justification de ces assertions.

Soit toujours  $\mathcal{C}$  une catégorie.

#### Produits fibrés

Soit  $f : X \rightarrow S$  et  $g : Y \rightarrow S$  deux morphismes. Soit  $\mathcal{I}$  une catégorie comportant seulement trois objets 1, 2, 3 et deux flèches non triviales  $u : 1 \rightarrow 3$  et  $v : 2 \rightarrow 3$ . On pose  $D$  le foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  caractérisé par  $D(1) = X$ ,  $D(2) = Y$ ,  $D(3) = S$ ,  $D(u) = f$  et  $D(v) = g$ . On vérifie alors facilement :

**Proposition 2.1.8.** Le produit fibré  $X \times_S Y$  de  $f : X \rightarrow S$  et  $g : Y \rightarrow S$  est  $\lim D$ .

#### Coégaliseurs

Rappelons que le **coégaliseur** dans  $\mathcal{C}$  de la donnée de deux morphismes  $p, q : X \rightrightarrows Y$  est la donnée d'un morphisme  $Y \rightarrow Z$  dont les composées avec  $q$  et  $p$  sont égales et qui factorise de manière unique tout morphisme  $Y \rightarrow T$  vérifiant cette dernière propriété d'égalisation. Soit par ailleurs  $\mathcal{I}$  une catégorie comportant seulement deux objets 1, 2 et deux flèches non triviales  $u, v : 1 \rightarrow 2$ . On pose  $D$  le foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  caractérisé par  $D(1) = X$ ,  $D(2) = Y$ ,  $D(u) = p$ ,  $D(v) = q$ . On vérifie alors facilement :

**Proposition 2.1.9.** Le coégaliseur dans  $\mathcal{C}$  de  $p, q : X \rightrightarrows Y$  est  $\text{colim } D$ .

**Quotients** Soit maintenant  $G$  un  $\mathcal{C}$ -groupe agissant sur un objet  $X$ . Le *quotient* de  $X$  par  $G$  est un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  muni d'un morphisme  $X \rightarrow Y$   $G$ -invariant, factorisant de manière unique tout morphisme  $G$ -invariant  $X \rightarrow Z$ . Notons  $\alpha$  le morphisme d'action et  $p$  la projection  $G \times X \rightarrow X$ . Soit de plus  $\mathcal{I}$  la même catégorie que dans le paragraphe précédent. On pose  $D$  le foncteur  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  caractérisé par  $D(1) = G \times X$ ,  $D(2) = X$ ,  $D(u) = \alpha$ ,  $D(v) = p$ . Alors, on vérifie facilement :

**Proposition 2.1.10.** *Le quotient de  $X$  par  $G$  est  $\text{colim } D$ , soit encore le coégaliseur de  $\alpha, p : G \times X \rightrightarrows X$ .*

**Foncteur exact** Nous proposons ici une définition "générale" de l'exactitude pour un foncteur (définition 4.23.1 [Sta21]).

**Définition 2.1.11.** <sup>3</sup> *Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un foncteur.*

1. *On dit que  $F$  est **exact à gauche** si  $F$  commute à la formation des limites finies. Autrement dit, si pour tout diagramme fini  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ , on a  $F(\lim D) = \lim F \circ D$  dès que  $\lim D$  existe.*
2. *On dit que  $F$  est **exact à droite** si  $F$  commute à la formation des colimites finies. Autrement dit, si pour tout diagramme fini  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ , on a  $F(\text{colim } D) = \text{colim } F \circ D$  dès que  $\text{colim } D$  existe.*
3. *On dit que  $F$  est **exact** si  $F$  est à la fois exact à gauche et à droite.*

Nous avons déjà deux exemples importants.

**Proposition 2.1.12.** *Pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , les foncteurs  $h_X^{\mathcal{C}} := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$  et  $h_{\mathcal{C}}^X := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$  sont exacts à gauche.*

*Démonstration.* Puisque  $h_{\mathcal{C}}^X = h_X^{\mathcal{C}^0}$ , il suffit de montrer la proposition pour  $h_X^{\mathcal{C}}$ . Soit donc un diagramme  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ . Alors par la propriété universelle caractérisant  $\lim D$ , l'application  $u \mapsto (p_i \circ u)_i$  donne une bijection :

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim D) \simeq \left\{ (v_i)_i \in \prod_i \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D_i) \mid \forall \phi : i \rightarrow i', v_{i'} = D(\phi) \circ v_i \right\}.$$

Le terme de gauche de la bijection est  $h_X^{\mathcal{C}}$  tandis que celui de droite est  $\lim h_X^{\mathcal{C}} \circ D$  par la description des limites dans la catégorie des ensembles (voir remarque 2.1.6).  $\square$

**Remarque 2.1.13.** *Puisque les limites de  $\mathcal{C}^0$  correspondent aux colimites de  $\mathcal{C}$ , alors l'exactitude à gauche de  $h_{\mathcal{C}}^X$  correspond à une bijection :*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } D, X) \simeq \lim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D(-), X),$$

*donnée par  $u \mapsto (u \circ s_i)_i$ , pour tout diagramme  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  tel que  $\text{colim } D$  existe dans  $\mathcal{C}$  et soit munie de la famille de morphismes  $s_i : D_i \rightarrow \text{colim } D$ .*

Une propriété intéressante est que l'exactitude à droite ou à gauche peut se déduire de l'adjonction.

**Proposition 2.1.14.** *Soit  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  et  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  des foncteurs. On suppose une adjonction  $F \dashv G$ . Alors  $F$  est exact à droite et  $G$  est exact à gauche.*

3. Dans [Sta21], on demande à ce que les catégories en jeu possèdent toutes les limites ou colimites finies, mais nous ne ferons pas un usage trop étendu des notions d'exactitude de sorte que nous avons préféré simplement insister sur la capacité du foncteur à commuter avec la formation d'éventuelles limites/colimites.

*Démonstration.* Soit  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $E : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{B}$  deux diagrammes tels que  $\text{colim } D$  existe dans  $\mathcal{A}$  et  $\text{lim } E$  existe dans  $\mathcal{B}$ . L'adjonction et l'exactitude des foncteurs  $\text{Hom}$  donnent les deux séquences de bijections naturelles suivantes pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{B}$  et  $Y$  de  $\mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(\text{colim } D), Y) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{colim } D, G(Y)) \\ &\simeq \text{lim } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(D(-), G(Y)) \\ &\simeq \text{lim } \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F \circ D(-), Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G(\text{lim } E)) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), \text{lim } E) \\ &\simeq \text{lim } \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X), E(-)) \\ &\simeq \text{lim } \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, G \circ E(-)) \end{aligned}$$

Au vu des derniers termes de chacune de ces séquences, on voit que  $F(\text{colim } D)$  (respectivement  $G(\text{lim } E)$ ) vérifie la propriété universelle de la colimite de  $F \circ D$  (respectivement de la limite de  $G \circ E$ ). On a donc le résultat attendu.  $\square$

### 2.1.1 Remarques générales, topologies et quotients

Fixons encore une fois un schéma de base  $S$ , et commençons par justifier l'appellation de faisceau quotient fppf employée dans la définition 1.2.4. Comme vu dans la sous-section précédente, le quotient par un groupe au sein d'une catégorie est un cas particulier de coégaliseur, lui-même un cas particulier de colimite (définitions 2.1.2, propositions 2.1.9, 2.1.10).

**Proposition 2.1.15.** *Soit  $X$  un  $S$ -faisceau fppf et  $G$  un  $S$ -faisceau de groupes fppf agissant sur  $X$ . Alors le faisceau quotient fppf  $X/G$  existe. De plus, il fournit bien un quotient au sens où le morphisme naturel  $X \rightarrow X/G$  factorise tout morphisme  $G$ -invariant de  $S$ -faisceaux fppf  $X \rightarrow Z$ . Autrement dit encore,  $X \rightarrow X/G$  est le coégaliseur, dans la catégorie des  $S$ -faisceaux, du diagramme  $G \times_S X \rightrightarrows X$  formé de la projection et du morphisme d'action.*

*Démonstration.* Puisque le préfaisceau d'ensembles  $P : T \mapsto X(T)/G(T)$  existe clairement et qu'il est toujours possible de faisceautiser un préfaisceau en un faisceau fppf,  $X/G$  existe déjà comme faisceautisation de  $P$  (section 7.10, [Sta21]). Il s'agit donc simplement de montrer qu'il forme un quotient au sens voulu. Désignons par  $\mathcal{P}$  la catégorie des préfaisceaux sur  $\text{Sch}/S$  et par  $\mathcal{S}$  la catégorie des faisceaux fppf sur le grand site fppf  $\text{Sch}/S$ . On a alors une adjonction  $F \dashv G$  où  $F$  désigne le foncteur de faisceautisation et  $G$  le foncteur oubli (proposition 7.10.12 [Sta21]). Par la proposition 2.1.14,  $F$  est donc exact à droite, il commute à la formation des colimites et donc en particulier à celle des coégaliseurs. Mais  $P$  apparaît clairement comme le quotient dans  $\mathcal{P}$  de  $X$  par le groupe  $G$ , et donc comme le coégaliseur dans  $\mathcal{P}$  des flèches de l'énoncé  $G \times_S X \rightrightarrows X$ . Ainsi  $X/G := F(P)$  est le coégaliseur des images  $F(G) \times_S F(X) \rightrightarrows F(X)$  de ces flèches dans  $\mathcal{S}$ , soit encore de  $G \times_S X \rightrightarrows X$  puisque  $G$  et  $X$  sont déjà des faisceaux. Avec la compréhension du quotient comme coégaliseur, on a tout le résultat attendu.  $\square$

Les quotients qui nous intéressent sont issus de l'action d'un schéma en groupes sur un  $S$ -schéma. Comme annoncé dans le premier chapitre, on choisit ici de considérer ceux qui sont issus de la catégorie des faisceaux, mais on rappelle que plusieurs notions peuvent être employées :

**Définition 2.1.16.** *Soit  $G$  un  $S$ -groupe agissant sur un  $S$ -schéma  $X$ , et  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas. On considère le diagramme  $G \times_S X \rightrightarrows X$  formé de la projection et du morphisme d'action. Relativement à cette action, on dit que :*

1.  $q$  est un **quotient catégorique** si  $q$  est le coégaliseur de  $G \times_S X \rightrightarrows X$  dans  $\text{Sch}/S$ . Autrement dit,  $q$  factorise de manière unique tout morphisme  $G$ -équivariant de  $S$ -schémas  $X \rightarrow Z$  où l'action sur  $Z$  est triviale.

2.  $q$  est un **quotient géométrique**<sup>4</sup> si  $q$  est le coégaliseur de  $G \times_S X \rightrightarrows X$  dans la catégorie de tous les espaces localement annelés de base  $S$ . On peut le caractériser par  $|Y| \simeq |G| \backslash |X|$  et  $q_* \mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_X^G$ . Autrement dit,  $Y$  est muni de la topologie quotient et d'un faisceau d'anneaux correspondant aux sections  $G$ -invariantes de  $\mathcal{O}_X$ .
3.  $q$  est un **quotient fppf** si  $q$  est le coégaliseur de  $G \times_S X \rightrightarrows X$  dans la catégorie des faisceaux fppf sur  $Sch_S$ . Autrement dit,  $Y$  représente, via  $q$ , le faisceau quotient fppf  $X/G$  issu du préfaisceau  $T \mapsto X(T)/G(T)$ . Par abus de langage, on dira alors que  $X/G$  **existe**.

On dit enfin que  $q$  est un quotient (catégorique, géométrique ou fppf) **universel** si tous ses changements de bases restent des quotients (catégoriques, géométriques ou fppf).

Notre choix se justifie par la propriété suivante.

**Proposition 2.1.17.** *Un quotient fppf est universel, et c'est aussi un quotient géométrique universel et catégorique universel.*

*Démonstration.* Il est clair qu'un quotient géométrique est catégorique, puisque  $Sch_S$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés de base  $S$ . Pour établir qu'un quotient fppf est géométrique, on renvoie à [MGE], Chapitre 4, Théorème 4.35.

Montrons simplement ici qu'un quotient fppf est universel. Pour un schéma  $Z$ , désignons par  $\mathcal{S}_Z$  la catégorie des faisceaux fppf sur le grand site fppf  $Sch/Z$ . Soit alors  $u : S' \rightarrow S$  un morphisme de schémas. Par le lemme 34.7.12 [Sta21], il induit un foncteur naturel de changement de base  $b : \mathcal{S}_S \rightarrow \mathcal{S}_{S'}$ , donné par  $b(F)(T \rightarrow S') := F(T \rightarrow S' \rightarrow S)$  pour tout  $F$  dans  $\mathcal{S}_S$  et  $T \rightarrow S'$  un  $S'$ -schéma. Par la bijection fonctorielle  $Hom_{\mathcal{S}_{S'}}(T \rightarrow S', X \times_S S' \rightarrow S') \simeq Hom_{\mathcal{S}_S}(T \rightarrow S' \rightarrow S, X \rightarrow S)$ ,  $b$  correspond au produit fibré sur  $Sch_S \subset \mathcal{S}_S : b(X) = X_{S'} = X \times_S S'$  pour tout  $S$ -schéma  $X$ . Par ailleurs, la référence précédente assure que  $b$  possède un adjoint à droite<sup>5</sup>. Par la proposition 2.1.14,  $b$  est exact à droite.

Maintenant supposons que  $q : X \rightarrow Y$  fournit le quotient fppf  $X/G$  sur  $S$ . Il est donc le coégaliseur du morphisme d'action  $\alpha$  et de la projection  $p : G \times_S X \rightrightarrows X$  dans  $\mathcal{S}_S$ . Par exactitude à droite,  $b(Y)$  via  $b(q) : b(X) \rightarrow b(Y)$  est alors le coégaliseur de  $b(\alpha)$  et  $b(p) : b(G \times_S X) \rightrightarrows b(X)$  dans  $\mathcal{S}_{S'}$ . Considérant l'expression de  $b$  sur les  $S$ -schémas et les identifications naturelles  $(G \times_S X) \times_{S'} S' \simeq (G \times_S S') \times_{S'} (X \times_S S')$ , ceci signifie que  $Y_{S'}$ , via  $q_{S'}$ , est le coégaliseur du morphisme de l'action induite de  $G_{S'}$  sur  $X_{S'}$  et de la projection  $G_{S'} \times_{S'} X_{S'} \rightrightarrows X_{S'}$ . Autrement dit encore  $Y_{S'}$  fournit le  $S'$ -quotient fppf  $X_{S'}/G_{S'}$  via le changement de base  $q_{S'}$  de  $q$  au dessus de  $S'$ . On a le résultat attendu.  $\square$

Si l'on peut toujours former un coégaliseur dans la catégorie des faisceaux fppf<sup>6</sup>, la question est de savoir si l'on peut représenter ce dernier dans  $Sch_S$  et donc obtenir l'*existence* du quotient fppf au sens voulu.

Le résultat central de cette partie est ainsi, sous certaines hypothèses, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un schéma donné représente le quotient voulu (proposition 2.1.23). Il se base sur le résultat fondamental et classique suivant. Dans sa preuve, nous nous contentons d'en établir les implications plus aisées et nous renvoyons à SGA3, Exposé IV avec la Proposition 4.4.3 [DGA11a], pour les implications plus difficiles.

4. Pour retrouver la notion éponyme plus classique de [MFK94], Définition 0.6, il faut ajouter la condition que les fibres géométriques de  $q$  sont exactement les orbites des points géométriques de  $X$ , pour des points géométriques sur un corps algébriquement clos de degré de transcendance suffisant.

5. Cet adjoint est donné par  $d$  avec  $d(G)(T \rightarrow S) := G(T \times_S S' \rightarrow S')$  pour  $G$  dans  $\mathcal{S}_{S'}$  et  $T \rightarrow S$  un  $S$ -schéma.

6. C'est aussi le cas dans la catégorie des espaces localement annelés, également cocomplète.

**Lemme 2.1.18.** Soit  $X \xrightarrow{q} Y$  un morphisme de faisceaux sur un site  $\mathcal{C}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $Y$  est le faisceautisé du préfaisceau image  $T \mapsto q(T)(X(T)) \subset Y(T)$ .
2.  $X \xrightarrow{q} Y$  est localement surjectif (ie, toute section de  $Y$  provient localement de sections de  $X$ , voir encore définition 7.11.1 [Sta21]).
3.  $X \xrightarrow{q} Y$  est un épimorphisme dans la catégorie des faisceaux sur  $\mathcal{C}$ .
4.  $X \xrightarrow{q} Y$  est un épimorphisme effectif dans la catégorie des faisceaux sur  $\mathcal{C}$ , i.e.c'est un coégaliseur de  $X \times_Y X \rightrightarrows X$  dans cette catégorie.
5.  $X \xrightarrow{q} Y$  est un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des faisceaux sur  $\mathcal{C}$ , i.e.tous ses changements de base sont des épimorphismes effectifs.

Lorsque  $\mathcal{C}$  est un grand site sur  $Sch/S$  muni d'une topologie moins fine que la topologie canonique et que  $X$  et  $Y$  sont des schémas (que l'on peut donc considérer comme faisceaux sur  $\mathcal{C}$ ), alors les conditions précédentes sont encore équivalentes à :

6. Il existe une famille  $\{U_i \rightarrow X\}$  de morphisme de  $S$ -schémas telle que la famille  $\{U_i \rightarrow X \xrightarrow{q} Y\}$  soit un recouvrement.

*Démonstration.* Procédons par étapes.

1. Les équivalences entre (1), (3), (5) (et donc trivialement (4)) sont établies dans SGA3, Exposé IV, Proposition 4.4.3 [DGA11a].
2. Montrons (2)  $\Rightarrow$  (3). Il s'agit d'un raisonnement de recollement classique. Supposons (2) et soit  $u, v$  des morphismes de faisceaux  $Y \rightarrow Z$  tels que  $uq = vq$ . Soit  $U \in \mathcal{C}$ . et  $s \in Y(U)$ . Par (2), il existe un recouvrement  $\{U_i \rightarrow U\}$  et des sections  $t_i \in X(U_i)$  tels que  $s|_{U_i} = q(U_i)(t_i)$  pour tout  $i$ . Par conséquent, pour tout  $i$ ,

$$u(U)(s)|_{U_i} = u(U_i)(s|_{U_i}) = (uq)(U_i)(t_i) = (uq)(U_i)(t_i) = v(U_i)(s|_{U_i}) = v(U)(s)|_{U_i}.$$

Les conditions de recollement relatives au faisceau  $Z$  étant clairement vérifiées pour les familles  $\{u(U)(s)|_{U_i}\}$  et  $\{v(U)(s)|_{U_i}\}$ , on en déduit  $u(U)(s) = v(U)(s)$ . Il suit  $u = v$  puis (3), i.e.  $q$  est un épimorphisme de faisceaux.

3. Montrons (4)  $\Rightarrow$  (1). Supposons (4) et désignons par  $I$  le préfaisceau image de  $q$ . En considérant ce qui se passe au niveau des ensembles, on voit que le morphisme naturel  $X \rightarrow I$  est le coégaliseur de  $X \times_Y X \rightrightarrows X$  dans la catégorie des préfaisceaux sur  $\mathcal{C}$ . Mais on a vu que la faisceautisation  $F$  est exacte à droite (voir les arguments issus de l'adjonction employés dans la preuve de la proposition 2.1.15 ou encore une fois directement le Lemme 7.10.14 [Sta21]). Par conséquent  $X \rightarrow F(I)$  fournit comme  $q : X \rightarrow Y$  un coégaliseur de  $X \times_Y X \rightrightarrows X$  dans la catégorie des faisceaux sur  $\mathcal{C}$ . Ainsi  $Y$  s'identifie à  $F(I)$ , et on a bien (1).
4. Montrons (1)  $\Rightarrow$  (2). Supposons (1) c'est-à-dire que  $Y$  est le faisceautisé  $F(I)$  du préfaisceau image  $I$  de  $q$ . Notons qu'un préfaisceau image est toujours séparé (Définition 7.10.9 [Sta21]) puisqu'il est un sous-préfaisceau d'un faisceau  $Y$ . Par le théorème 7.10.10 point (2) et le lemme 7.10.8 de [Sta21], on en déduit alors que le morphisme naturel  $I \rightarrow F(I) = Y$  est localement surjectif. Mais comme  $q : X \rightarrow Y$  est la composée  $X \rightarrow I \rightarrow F(I) = Y$ , et que le morphisme  $X \rightarrow I$  est clairement surjectif, on en déduit (2) :  $q : X \rightarrow Y$  est localement surjectif.
5. Les équivalences des cinq premiers points du lemme sont ainsi établies. Supposons maintenant que  $\mathcal{C}$  est un grand site sur  $Sch/S$  muni d'une topologie moins fine que celle canonique et que  $q : X \rightarrow Y$  est un morphisme de schémas. Montrons alors l'équivalence (2)  $\Leftrightarrow$  (6).

(2)  $\Rightarrow$  (6) Supposons (2). On applique (2) à la section  $id_Y \in Y(Y)$ . Il existe donc un recouvrement  $\{u_i : U_i \rightarrow Y\}$  et des sections  $t_i \in X(U_i)$  tels que  $id_{Y|U_i} = q(U_i)(t_i)$  pour tout  $i$ . Mais ceci traduit exactement le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{t_i} & X \\ & \searrow u_i & \downarrow q \\ & & Y. \end{array}$$

On voit ainsi que la famille  $\{t_i : U_i \rightarrow X\}$  fournit l'existence souhaitée et on a bien (6).

(6)  $\Rightarrow$  (2) Supposons (6) et soit  $\{t_i : U_i \rightarrow X\}$  la famille dont l'existence est assertée. Soit  $U$  dans  $\mathcal{C}$  et  $s \in Y(U)$ . Les  $t_i$  et  $s$  sont des morphismes de schémas et par changement de base, on obtient pour tout  $i$  le diagramme commutatif suivant, cartésien et de carrés cartésiens, où  $p_i$  désigne la projection sur le premier facteur :

$$\begin{array}{ccccc} U_i \times_Y U & \xrightarrow{t_i U} & X \times_Y U & \xrightarrow{q_U} & U \\ \downarrow p_i & & \downarrow & & \downarrow s \\ U_i & \xrightarrow{t_i} & X & \xrightarrow{q} & Y. \end{array}$$

Mais comme la collection des composées  $qt_i$  forme un recouvrement, ce sera encore le cas de la collection de leur changement de base  $(qt_i)_U = q_U t_i U$ . Selon ce dernier recouvrement, les restrictions  $s|_{U_i \times_Y U}$  de  $s$  s'interprètent comme les composées  $s(qt_i)_U$ . Par le diagramme, il s'agit donc des composées  $qt_i p_i$ . Mais celles-ci s'interprètent comme les images par le morphisme de faisceaux  $q$  des sections  $t_i p_i \in X(U_i \times_Y U)$ . On satisfait ainsi la condition de surjectivité locale, i.e. (2) est vérifié.

□

Lorsque les cinq premières conditions sont vérifiées, on dira que le morphisme  $X \xrightarrow{q} Y$  est **couvrant**<sup>7</sup>.

Pour exploiter au mieux notre résultat de représentabilité et obtenir de bonnes propriétés sur le morphisme de passage au quotient, nous rappelons également la notion suivante.

**Définition 2.1.19.** Une propriété  $\mathbf{P}$  est locale au but pour une topologie  $\tau \in \{\text{fpqc}, \text{fppf}, \text{étale}, \text{lisse}, \text{Zariski}\}$  sur un grand site sur  $\text{Sch}_S$  si pour tout  $S$ -morphisme  $f : X \rightarrow Y$  et tout  $\tau$ -recouvrement  $\{Y_i \rightarrow Y\}$ ,  $f$  possède  $\mathbf{P}$  si et seulement si  $f_{Y_i}$  possède  $\mathbf{P}$  pour tout  $i$ .

**Remarque 2.1.20.** Lorsque  $\mathbf{P}$  est stable par changement de base, au vu de la précédente remarque, il revient au même de remplacer les recouvrements par de simples morphismes couvrants.

Les deux résultats suivants fournissent une liste conséquente de telles propriétés pour la topologie fppf.

**Proposition 2.1.21** (Lemme 35.19.4 [Sta21]). Soit  $\mathbf{P}$  une propriété de morphisme de schémas relatifs et  $\tau \in \{\text{fpqc}, \text{fppf}, \text{étale}, \text{syntomique}\}$ . On suppose que

1.  $\mathbf{P}$  est locale au but pour la topologie de Zariski.
2.  $\mathbf{P}$  est préservée par changement de base le long d'un morphisme plat, plat et localement de présentation finie, étale, syntomique (selon que  $\tau$  est "fpqc, fppf, étale, syntomique").
3. Pour tout morphisme surjectif de schémas affines  $S' \rightarrow S$  plat, plat et de présentation finie, étale, syntomique (selon que  $\tau$  est "fpqc, fppf, étale, syntomique") et pour tout morphisme  $f : X \rightarrow S$ , si  $f_{S'}$  a  $\mathbf{P}$  alors  $f$  a  $\mathbf{P}$ .

7. Voir [DGA11a] Exposé IV pour une définition générale du caractère couvrant au moyen de la notion de crible.

Alors  $\mathbf{P}$  est locale au but pour  $\tau$ .

**Corollaire 2.1.22.** *Les propriétés suivantes sont locales au but pour la topologie fppf : être injectif, surjectif, avec fibres finies, bijectif, radiciel, (universellement) ouvert, (universellement) fermé, (universellement) un homéomorphisme, quasi-compact, (quasi-)séparé, (localement) de type fini, (localement) de présentation finie, une immersion, ouverte, fermée, ou quasi-compacte, propre, un isomorphisme, (quasi-)affine, (quasi-)fini, intégral, plat, lisse, non ramifié, étale.*

*Démonstration.* Toutes les propriétés listées satisfont aux hypothèses de la proposition 2.1.21 précédente pour la topologie fppf. La vérification de la troisième hypothèse se trouve dans [Gro65], 2.6.1, 2.6.2, 2.6.4, 2.7.1, 17.7.3, entendu qu'un morphisme surjectif plat de présentation finie (ou simplement entre schémas affines) est fidèlement plat quasi-compact.  $\square$

On peut alors donner le résultat central de cette partie. Nous l'emploierons notamment pour établir l'existence d'un produit contracté (théorème 2.1.29). Il suppose la liberté d'action, comprise comme liberté d'action usuelle sur les  $T$ -points. Il se base comme annoncé sur des considérations d'effectivité de morphismes, rendues par notre lemme 2.1.18. Il est donc contenu dans SGA3, au long de l'Exposé IV [DGA11a] sous diverses propositions. Plus explicitement, l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) se déduit directement de la proposition 5.1.7 de cette même référence qui traite de catégories et de morphismes plus généraux (voir notion de  $(M)$ -morphisms, 4.6.3) que notre catégorie de schémas relatifs et de morphismes couvrant pour la topologie fppf. Nous nous proposons donc simplement de présenter ici dans une même preuve différents arguments appliqués à notre situation.

**Proposition 2.1.23.** *Soit  $G$  un  $S$ -groupe agissant librement sur un  $S$ -schéma  $X$ . Soit  $q: X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $q$  réalise  $Y$  comme le faisceau quotient fppf  $X/G$ .
- (ii)  $q$  est couvrant pour la topologie fppf, et le morphisme d'action induit un isomorphisme  $G \times_S X \simeq X \times_Y X$ , ou, de manière équivalente,  $q$  fait de  $X$  un  $G_Y$ -torseur au dessus de  $Y$  trivialisé par  $q$  lui-même.

De plus, si ces conditions sont réalisées, alors, pour toute propriété  $\mathbf{P}$  de morphismes stable par changement de base et locale au but pour la topologie fppf, on a :

$$q: X \rightarrow Y \underset{a \mathbf{P}}{\Leftrightarrow} p_2: G \times_S X \rightarrow X \underset{a \mathbf{P}}{\Leftarrow} G \rightarrow S \underset{a \mathbf{P}}{\Leftarrow}$$

la dernière implication étant une équivalence si  $X \rightarrow S$  est couvrant pour la topologie fppf.

En outre, si  $G \rightarrow S$  est fidèlement plat localement de présentation finie, alors si  $X \rightarrow S$  est lisse (respectivement simplement localement de type fini, localement de présentation finie, de type fini) il en est de même pour  $Y \rightarrow S$ . Si l'on suppose en outre  $G \rightarrow S$  quasi-compact, l'implication est encore vraie pour être de présentation finie.

Enfin,  $Y$  est séparé sur  $S$  si et seulement si le morphisme d'action  $G \times_S X \rightarrow X \times_S X$ , ou de manière équivalente  $X \times_Y X \rightarrow X \times_S X$ , est une immersion fermée.

*Démonstration.* Si  $q$  réalise  $Y$  comme le faisceau quotient, alors  $q$  est un coégaliseur dans la catégorie des faisceaux fppf et donc un épimorphisme de faisceaux. Par la proposition 2.1.18, c'est alors aussi un morphisme couvrant pour la topologie fppf. D'autre part, l'action libre de  $G$  induit un isomorphisme de préfaisceaux :

$$G \times_S X \simeq X \times_P X \tag{2.1}$$

où  $P$  est le préfaisceaux quotient  $T \mapsto X(T)/G(T)$ . En effet, on peut observer la bijectivité sur les  $T$ -points : par définition de la liberté d'action, l'application  $(G \times_S X)(T) \rightarrow (X \times_S X)(T)$ ,  $(g, x) \mapsto (x, g \cdot x)$  est injective. Mais par définition du quotient ensembliste  $X(T)/G(T) = P(T)$ , son image est exactement  $\{ (x, y) \in X(T) \times X(T) \mid \exists g \in G(T); y = g \cdot x \}$  soit  $X(T) \times_{X(T)/G(T)} X(T) = (X \times_P X)(T)$ . La faisceautisation fppf commutant aux limites finies ([Sta21] Lemme 7.10.14), et

les produits fibrés étant de telles limites, on déduit de l'isomorphisme (2.1) précédent un isomorphisme de faisceaux, puis de schémas  $G \times_S X \simeq X \times_Y X$  par le lemme de Yoneda.

Réciproquement, supposons que  $q$  est couvrant pour la topologie fppf et que l'action induit un isomorphisme  $G \times_S X \simeq X \times_Y X$ . Alors  $q$  est un épimorphisme effectif de faisceaux par le lemme 2.1.18 : il est le coégaliseur de  $X \times_Y X \rightrightarrows X$  dans la catégorie des faisceaux. Par l'isomorphisme précédent,  $q$  est aussi le coégaliseur  $G \times_S X \rightrightarrows X$  dans cette dernière catégorie, où les flèches correspondent à l'action et à la projection. Cela signifie exactement que  $Y$  correspond au faisceau quotient  $X/G$  via  $q$ .

Les assertions sur les propriétés locales au but  $\mathbf{P}$  résultent du diagramme suivant où les carrés sont cartésiens et le morphisme  $q$  couvrant.

$$\begin{array}{ccccc} G & \longleftarrow & G \times_S X \simeq X \times_Y X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow q \\ S & \longleftarrow & X & \xrightarrow{q} & Y. \end{array}$$

En outre, si  $G \rightarrow S$  est fidèlement plat localement de présentation finie, et éventuellement quasi-compact, par le corollaire 2.1.22 et ce qui précède, il en est de même pour  $q : X \rightarrow Y$ . On peut donc appliquer le lemme 17.7.5 et la propriété 17.7.7 de [Gro67] à  $X \rightarrow S$  qui se factorise sous la forme  $X \rightarrow Y \rightarrow S$ . Ainsi  $Y \rightarrow S$  hérite des propriétés voulues de  $X \rightarrow S$ .

Enfin, on considère le diagramme cartésien suivant où les deux flèches horizontales sont respectivement l'immersion naturelle et la diagonale.

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \longrightarrow & X \times_S X \\ \downarrow q \circ \text{pr}_1 & & \downarrow q \times q \\ Y & \longrightarrow & Y \times_S Y. \end{array}$$

L'équivalence de la dernière assertion se déduit alors par descente fidèlement plate et stabilité par changement de base pour la propriété : être une immersion fermée.  $\square$

Pour finir cette partie, évoquons un résultat fondamental et célèbre formulé dans le contexte des espaces algébriques (voir Chapitre 63 et Définition 63.6.1 [Sta21]). Grâce à lui, l'existence des quotients sous une action libre est simplement ramenée à celle de savoir si un espace algébrique est un schéma. Bien qu'il eût sans doute été préférable d'adopter ce point de vue, nous manquons de connaissances sur le sujet et nous nous contentons d'énoncer ce résultat. Le théorème est issu des travaux de M. Artin, mais nous renvoyons à [LM00], 10.4 pour une preuve.

**Théorème 2.1.24** (M. Artin). *Soit  $G \rightarrow S$  un espace algébrique en groupes, plat et localement de présentation finie, qui agit librement sur un espace algébrique  $X$ . Alors le faisceau quotient  $X/G$  est un espace algébrique.*

## 2.1.2 Quotient d'un groupe par un sous-groupe

Le quotient fppf d'un groupe par un sous-groupe est un cas particulièrement important pour nous. En effet, la variété des drapeaux, au cœur de nos résultats, en est un exemple. De plus, il nous permet de construire les produits contractés grâce auxquels nous obtenons des résolutions de singularités. Nous proposons ici des résultats qui dépassent le cadre des variétés afin d'avoir un point de vue unifié. La méthode de réduction modulo  $p$  exigera en effet de pouvoir produire de tels quotients lorsque les groupes et sous-groupes seront des schémas.

Nous rappellerons dans la partie dédiée que le quotient fppf d'un groupe algébrique par un sous-groupe fermé existe toujours (théorème 2.3.12), et nous énonçons simplement ici deux résultats d'existence sans leur preuve. Le premier peut se voir comme une généralisation du phénomène utilisé dans le cadre des variétés, à savoir la construction d'un quotient à partir d'une "orbite". Le second théorème sera crucial pour établir la réalisation de la variété des drapeaux par des schémas sur des spectres d'algèbres et ainsi aboutir à la réduction modulo  $p$ .

**Théorème 2.1.25** (SGA3 Exposé V Théorème 10.1.2 [DGA11a]). *Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes localement de présentation finie, opérant sur un  $S$ -schéma  $X$ . On suppose que  $X \rightarrow S$  possède une section  $\xi$  telle que le stabilisateur  $H$  de  $\xi$  dans  $G$  soit plat sur  $S$ . Si l'une des hypothèses ci-dessous est vérifiée :*

1.  $X$  est localement de type fini sur  $S$ ,
2.  $S$  est localement noethérien,

alors le faisceau fppf  $G/H$  est représentable par un  $S$ -schéma localement de présentation finie sur  $S$  et la projection canonique est fidèlement plate localement de présentation finie. De plus, le morphisme  $G \rightarrow X$  défini sur les  $T$ -points par  $g \mapsto g \cdot \xi$  se factorise à travers  $G \rightarrow G/H$  suivie d'un monomorphisme  $G/H \rightarrow X$ .

**Théorème 2.1.26** (SGA3 Exposé XXII, Corollaire 5.8.3 [DGA11b]). *Soit  $G$  un  $S$ -groupe réductif, et  $B$  un sous-groupe de Borel. Alors le quotient fppf  $G/B$  existe, il est lisse, de présentation finie, projectif sur  $S$ , à fibres géométriques intègres et il représente le foncteur :*

$$T \mapsto \{ \text{sous-groupes de Borel de } G_T \},$$

par passage au quotient du morphisme défini sur les  $T$ -points par  $g \mapsto \text{int}(T)(g)B_T$ <sup>8</sup>.

Dans la suite, lorsque le quotient  $G/H$  existe au dessus d'un schéma  $S$ , on désignera par  $\epsilon$  la section correspondant à la composition du neutre  $S \rightarrow G$  de  $G$  et du morphisme canonique  $G \rightarrow G/H$  :

$$\epsilon: S \rightarrow G \rightarrow G/H.$$

### 2.1.3 Produit contracté

Dans cette partie, on fixe  $S$  un schéma, et  $H$  un sous-groupe d'un  $S$ -schéma en groupes  $G$ . Lorsque  $X$  est un  $S$ -schéma, ou plus généralement, un faisceau muni d'une action de  $H$ , on dispose alors du *faisceau produit contracté*  $G \times_S^H X$  qui désigne le faisceau quotient fppf de  $G \times_S X$  sous une certaine action de  $H$  (voir définition 1.2.4).

Nous parlerons de *produit contracté* lorsque ce faisceau sera représentable (ibidem), ou autrement dit, lorsque le quotient fppf  $G \times_S X/H$  correspondant existera.

Commençons par une remarque générale non liée à cette question d'existence. En considérant les préfaisceaux et utilisant que la faisceautisation commute aux limites finies ([Sta21] Lemme 7.10.14), on a facilement le diagramme de faisceaux suivant, où les carrés sont cartésiens. Nous y définissons le morphisme  $i_X : X \rightarrow G \times_S^H X$  par composition :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \\ \downarrow e_G \times \text{id} & & \downarrow e_G \\ G \times_S X & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times_S^H X & \longrightarrow & G/H \end{array} \quad \begin{array}{l} \epsilon \\ \epsilon \end{array} \quad (2.2)$$

La proposition suivante montre que le faisceau produit contracté peut encore se caractériser par induction et éclaire la définition du produit contracté (voir définition 1.2.4).

**Proposition 2.1.27.** *Le faisceau produit contracté fournit un foncteur :*

$$\{ S\text{-faisceaux } H\text{-équivariants} \} \rightarrow \{ S\text{-faisceaux } G\text{-équivariants} \}$$

8.  $\text{int}$  étant le morphisme de préfaisceaux  $G \rightarrow \underline{\text{Aut}}_S(G)$  canoniquement associé à l'action par conjugaison  $G \times_S G \rightarrow G$ , avec  $\underline{\text{Aut}}_S(G)$  le préfaisceau  $T \mapsto \text{Aut}_T(G_T)$ . Autrement dit, pour  $g \in G(T)$ ,  $\text{int}(T)(g) : G_T \rightarrow G_T$  est défini sur les  $T'$ -points par  $G_T(T') \simeq G(S T') \rightarrow G_T(T') \simeq G(S T')$ ,  $\gamma \mapsto (g \circ (T' \rightarrow T)) \cdot \gamma \cdot (g \circ (T' \rightarrow T))^{-1}$ .

$$X \mapsto G \times_S^H X$$

qui est l'adjoint à gauche du foncteur naturel de restriction de l'action de  $G$  à celle de  $H$ .

*Démonstration.* Le quotient qui définit le faisceau produit contracté donne la propriété universelle suivante : pour tout  $X$  et  $Y$  des  $S$ -faisceaux respectivement  $H$  et  $G$ -équivariants et tout morphisme  $f: X \rightarrow Y$   $H$ -équivariant, il existe un unique morphisme  $G$ -équivariant  $G \times_S^H X \rightarrow Y$  factorisant  $f$  à travers  $i_X: X \rightarrow G \times_S^H X$ . En effet, un tel  $f$  et l'action  $\alpha$  de  $G$  sur  $Y$  induisent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G \times_S X & \longrightarrow & G \times_S Y \\
 \downarrow & \searrow g & \downarrow \alpha \\
 G \times_S^H X & \dashrightarrow & Y
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 i_X \text{ (gauche)} \\
 id \text{ (droite)}
 \end{array}$$

que l'on peut compléter avec un morphisme  $G$ -équivariant  $G \times_S^H X \rightarrow Y$  par simple passage au quotient de  $g$ , ce dernier étant  $H$ -invariant. Puisque le quotient  $G \times_S X \rightarrow G \times_S^H X$  est un épimorphisme, l'unicité est immédiate et on a la propriété universelle attendue. Par conséquent, le faisceau produit contracté fournit bien un foncteur. De plus, en notant  ${}_H Y$  le schéma  $Y$  muni de l'action de  $H$  par restriction, on voit que  $i_X$  induit une bijection  $Hom_G(G \times_S^H X, Y) \simeq Hom_H(X, {}_H Y)$  dont on vérifie facilement les bonnes propriétés de functorialité.  $\square$

Lorsque le produit contracté existe, la proposition 2.1.23 montre que le passage au quotient correspondant peut hériter de nombreuses propriétés du schéma en groupes. La proposition suivante montre qu'il en est de même pour le morphisme de produits contractés issu d'un morphisme équivariant.

**Proposition 2.1.28.** *Soit  $X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme  $H$ -équivariant possédant une propriété  $P$  stable par changement de base et locale au but pour la topologie fppf. On suppose que les produits contractés  $G \times_S^H X$  et  $G \times_S^H Y$  existent. Alors le morphisme induit  $G \times_S^H X \rightarrow G \times_S^H Y$  possède  $P$ .*

*Démonstration.* Le rectangle et le carré droit du diagramme suivant sont cartésiens (comme précédemment, on peut considérer les  $T$ -points puis faisceautiser)

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times_S X & \longrightarrow & G \times_S Y & \longrightarrow & G \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 G \times_S^H X & \longrightarrow & G \times_S^H Y & \longrightarrow & G/H.
 \end{array}$$

Le carré gauche est donc aussi cartésien. Mais par la proposition 2.1.23, le passage au quotient  $G \times_S Y \rightarrow G \times_S^H Y$  est couvrant pour la topologie fppf. Tout résulte alors par changement de base puis descente des deux carrés cartésiens :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longrightarrow & Y \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 G \times_S X & \longrightarrow & G \times_S Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G \times_S^H X & \longrightarrow & G \times_S^H Y.
 \end{array}$$

$\square$

L'existence du produit contracté en tant que schéma est liée à celle du quotient fppf  $G/H$  comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 2.1.29.** *Soit  $X$  un  $S$ -schéma muni d'une action de  $H$ . On suppose que le quotient fppf  $G/H$  existe comme schéma et que l'on se trouve dans l'un des cas suivants :*

1.  $X$  est de type fini sur  $S$  muni d'un faisceau inversible  $H$ -linéarisé et ample relativement à  $S$ ,  $G$  est localement de présentation finie et quasi-compact,  $H$  est plat et  $G/H$  quasi-projectif.
2.  $G \rightarrow G/H$  possède localement des sections pour la topologie de Zariski.

Alors le produit contracté  $G \times_S^H X$  existe comme schéma.

*Démonstration.* 1. Montrons l'existence dans le cas 1. On applique simplement la proposition 7.1 de [MFK94] de manière à fournir un fibré  $H$ -principal  $G \times_S X \rightarrow Y$  à partir du fibré  $H$ -principal  $G \rightarrow G/H$ . La notion de fibré principal employée est celle de cette même référence (Définition 0.10). Grâce à nos hypothèses et la proposition 2.1.23 on voit qu'elle est équivalente à celle de nos quotients fppf, et nous pouvons bien recourir à la proposition.

2. Montrons l'existence dans le cas 2. Par hypothèse, on peut considérer un recouvrement d'ouverts de Zariski  $G/H = \bigcup_i U_i$  avec des sections  $s_i : U_i \rightarrow G$  du passage au quotient  $G \rightarrow G/H$ . Les sections  $s_i$  et  $s_j$  fournissent un morphisme naturel  $U_i \cap U_j \simeq U_i \times_{G/H} U_j \rightarrow G \times_{G/H} G$ , que l'on peut composer avec l'isomorphisme  $G \times_{G/H} G \simeq H \times_S G$  issu du quotient  $G/H$  puis avec la projection  $H \times_S G \rightarrow H$ . On obtient ainsi un morphisme  $f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow H$  défini sur les  $T$ -points par  $a \mapsto s_j(a)^{-1} s_i(a)$ . En combinant avec le morphisme d'action  $H \times_S X \rightarrow X$ , on obtient un morphisme  $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \times_S X \rightarrow U_i \cap U_j \times_S X$  défini sur les  $T$ -points par  $(a, x) \mapsto (a, f_{ij}(a) \cdot x)$ . Les  $\phi_{ij}$  sont clairement des isomorphismes d'inverse respectif  $\phi_{ji}$  et ils vérifient les conditions de cocyclicités  $\phi_{ik} = \phi_{jk} \phi_{ij}$ .

On peut donc recoller les  $U_i$ -schémas  $U_i \times_S X$  le long des  $\phi_{ij}$  et on obtient alors un  $G/H$ -schéma  $Y \rightarrow G/H$  tel que pour tout  $i$ , sa restriction au dessus de  $U_i$  correspond à la projection  $U_i \times_S X \rightarrow U_i$ . On en déduit que le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & G/H. \end{array}$$

Par changement de base et considération de l'action de  $H$ , on trouve alors que  $G \times_S X \rightarrow Y$  est un recouvrement fppf  $H$ -équivariant. Qui plus est, en observant les  $T$ -points, ce même diagramme donne un isomorphisme issu de l'action  $H \times_S (G \times_S X) \simeq (G \times_S X) \times_Y (G \times_S X)$ . On en déduit par la proposition 2.1.23 que  $G \times_S X \rightarrow Y$  est le quotient fppf représentant le produit contracté  $G \times_S^H X$ . □

**Remarque 2.1.30.** 1. Soulignons que la proposition 7.1 ([MFK94]) repose essentiellement sur la propriété de descente effective pour les schémas relatifs quasi-compacts munis d'un faisceau ample relatif, le long des morphismes fidèlement plats quasi-compacts (SGAI Exposé VIII 7.8 [GR04]). Le morphisme de descente étant ici le passage au quotient  $G \rightarrow G/H$  et la donnée de descente étant fournie de manière naturelle par l'action de  $H$  sur le  $G$ -schéma  $G \times_S X$ .

2. Un même argument se retrouve implicitement dans la preuve du second point. En effet, le recollement usuel de schémas peut classiquement s'interpréter comme une descente effective le long du recouvrement de Zariski donné. La donnée de descente correspond alors aux morphismes de transitions, et ces derniers furent pour nous constitués naturellement par l'action précédente de  $H$ .

3. Plus généralement, le précédent théorème pourrait vraisemblablement s'inscrire comme cas particulier de descente le long d'un "torseur", et l'on peut sans doute envisager d'autres résultats d'existence, issus d'autres cas de descente effective, voir le théorème 4.46 de [Vis05].

Enfin, le produit contracté fournit une équivalence de catégories que nous utiliserons dans la partie suivante.

**Théorème 2.1.31.** *On suppose que le quotient fppf  $G/H$  existe et on pose  $\mathbf{P}$  une propriété de morphisme de schémas stable par changement de base et locale au but pour la topologie fppf. Alors on a une équivalence de catégories, avec les flèches et applications sur les flèches que l'on imagine :*

$$\left\{ \begin{array}{l} G/H\text{-schémas } G\text{-équivariants} \\ \text{et possédant } \mathbf{P} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S\text{-schémas munis d'une action de } H, \\ \text{tels que le produit contracté avec } G \text{ existe,} \\ \text{et possédant } \mathbf{P} \end{array} \right\}$$

$$E \mapsto E_S = E \times_{G/H, \epsilon} S$$

$$G \times_S^H X \leftarrow X$$

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  les deux catégories de part et d'autre de l'équivalence assertée. Notons encore  $u$  et  $v$  les foncteurs  $E \mapsto E_S$  et  $X \mapsto G \times_S^H X$  de l'énoncé et montrons qu'ils sont bien définis et sont quasi-inverses l'un de l'autre. Considérons tout d'abord  $E$  dans  $\mathcal{A}$ . Par définition du quotient  $G/H$ , on a une factorisation :

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ G & \longrightarrow & G/H, \end{array}$$

qui assure que  $E_S$  est  $H$ -invariant pour l'action induite de  $G$ . On a plus précisément un morphisme  $H \times_S E_S \simeq H \times_S (E \times_{G/H, \epsilon} S) \rightarrow E_S \simeq E \times_{G/H, \epsilon} S$  donné sur les  $T$ -points par  $(h, x, s) \mapsto (h.x, s)$ . Par ailleurs, le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} E_S & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ E & \longrightarrow & G/H, \end{array}$$

montre par stabilité par changement de base, que  $E_S$  a  $\mathbf{P}$  comme  $E$ . Montrons en outre que  $E$  fournit le produit contracté  $G \times_S^H E_S$ . On considère donc la  $S$ -action à droite de  $H$  sur  $G \times_S E_S$  donnée sur les  $T$ -points par  $(g, y) \star h \mapsto (gh, h^{-1} \cdot y)$ . La composée de l'immersion  $G \times_S E_S \hookrightarrow G \times_S E$  et du morphisme d'action de  $G$  sur  $E$  donne un morphisme  $q: G \times_S E_S \rightarrow E$ . Mais on a un isomorphisme  $G \times_S E_S \simeq G \times_{G/H} E$  donné sur les  $T$ -points par  $(g, x, s) \mapsto (g, g.x)$ . Aussi, le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} G \times_{G/H} E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G/H, \end{array}$$

assure par changement de base que  $q$  est un recouvrement fppf. En outre, l'action de  $H$  impliquée dans le produit contracté est libre et donne un isomorphisme  $H \times_S (G \times_S E_S) \simeq (G \times_S E_S) \times_E (G \times_S E_S)$  donné sur les  $T$ -points par  $(h, g, y) \mapsto ((gh, h^{-1} \cdot y), (g, y))$ . Par la proposition 2.1.23, on en déduit que  $q$  fournit le quotient correspondant au produit contracté et on a un isomorphisme  $G \times_S^H E_S \simeq E$  tel que :

$$\begin{array}{ccc} G \times_S E_S & \longrightarrow & G \times_S^H E_S \\ & \searrow q & \downarrow \wr \\ & & E. \end{array}$$

En factorisant au moyen de la propriété universelle du quotient la composée  $G \times_S E_S \rightarrow E \rightarrow G/H$ , on voit que cet isomorphisme est un morphisme de  $G/H$ -schémas.

Enfin, par considération des flèches au niveau des préfaisceaux et par le fait que la faisceautisation commute aux limites finies, les actions de  $G$  donnent naturellement le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G \times_S (G \times_S^H E_S) & \longrightarrow & G \times_S^H E_S \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ G \times_S E & \longrightarrow & E, \end{array}$$

duquel on déduit que l'isomorphisme est aussi  $G$ -équivariant. Ainsi  $G \times_S^H E_S \simeq E$  dans  $\mathcal{A}$ .

Si maintenant,  $X$  est dans  $\mathcal{B}$ , alors les hypothèses sur  $X$  donnent l'existence d'un produit contracté  $G \times_S^H X$ , qui est naturellement un  $G/H$ -schéma  $G$ -équivariant. On a de plus un diagramme dont les carrés sont cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \\ \uparrow & & \uparrow \\ G \times_S X & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times_S^H X & \longrightarrow & G/H. \end{array}$$

Le carré supérieur assure que  $G \times_S X \rightarrow G$  possède comme  $X \rightarrow S$  la propriété **P**, stable par changement de base. Cette propriété est encore locale au but pour la topologie fppf et, au moyen du morphisme couvrant (et même fppf)  $G \rightarrow G/H$ , on en déduit que  $G \times_S^H X$  la possède aussi au dessus de  $G/H$ . Enfin, le diagramme de carrés cartésiens (2.2) donne un isomorphisme de  $S$ -schémas  $(G \times_S^H X)_S \simeq X$ . En employant la même méthode que précédemment (considération sur les préfaisceaux et faisceautisation), on vérifie qu'il est  $H$ -équivariant.

Avec ces observations, il vient que  $u$  et  $v$  sont bien définis avec  $v \circ u \simeq id_{\mathcal{A}}$  ainsi que  $u \circ v \simeq id_{\mathcal{B}}$ . On a donc l'équivalence de catégories attendue.  $\square$

### 2.1.4 Produits contractés et produits fibrés

Comme annoncé, on utilise ici le produit contracté et l'équivalence du théorème 2.1.31 pour construire par récurrence avec le produit fibré, des schémas qui interviendront dans les théorèmes du dernier chapitre. On a ainsi une propriété et son corollaire.

**Proposition 2.1.32.** *Soit  $T$  un  $S$ -schéma muni d'une action de  $G$ , et  $X, Y$  des  $T$ -schémas respectivement  $H$  et  $G$ -équivariants. On suppose que le quotient fppf  $G/H$  existe ainsi que le produit contracté  $G \times_S^H X$ . On induit naturellement des actions sur les produits fibrés : celle de  $H$  sur  $X \times_T Y$  à partir de l'action de  $H$  sur  $X$  et  $Y$ , et celle de  $G$  sur  $(G \times_S^H X) \times_T Y$  à partir de l'action de  $G$  sur  $G \times_S^H X$  et  $Y$ . De plus, on voit  $G \times_S^H X$  comme un  $T$ -schéma par le passage au quotient de la composée  $G \times_S X \rightarrow G \times_S T \rightarrow T$  où le second morphisme est issu de l'action de  $G$  sur  $T$ . Alors le produit contracté  $G \times_S^H (X \times_T Y)$  existe et on a un isomorphisme de  $G/H$ -schémas  $G$ -équivariants qui est aussi un isomorphisme de  $Y$ -schémas :*

$$G \times_S^H (X \times_T Y) \simeq (G \times_S^H X) \times_T Y,$$

où

- $G \times_S^H (X \times_T Y)$  est vu comme  $G/H$ -schéma de façon naturelle et comme  $Y$ -schéma par le passage au quotient de la composée  $G \times_S (X \times_T Y) \rightarrow G \times_S Y \rightarrow Y$ , le second morphisme étant issu de l'action de  $G$  sur  $Y$ .
- $(G \times_S^H X) \times_T Y$  est vu comme  $G/H$ -schéma relativement à la composée  $(G \times_S^H X) \times_T Y \rightarrow G \times_S^H X \rightarrow G/H$  et comme  $Y$ -schéma par sa projection naturelle sur la seconde coordonnée.

*Démonstration.* Posons  $i$  le morphisme produit  $i_X \times id_Y : X \times_T Y \rightarrow (G \times_S^H X) \times_T Y$ . Le diagramme de carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc} X \times_T Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & S \\ \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ (G \times_S^H X) \times_T Y & \longrightarrow & G \times_S^H X & \longrightarrow & G/H \end{array} \quad (2.3)$$

montre que  $((G \times_S^H X) \times_T Y)_S$  correspond au  $S$ -schéma  $X \times_T Y$ , de sorte que l'équivalence de catégories du théorème 2.1.31 donne un isomorphisme  $G$ -équivariant de  $G/H$ -schémas :

$$G \times_S^H (X \times_T Y) \rightarrow (G \times_S^H X) \times_T Y, \quad (2.4)$$

caractérisé comme le passage au quotient  $G \times_S (X \times_T Y) \rightarrow G \times_S^H (X \times_T Y)$  de la composée

$$G \times_S (X \times_T Y) \xrightarrow{1 \times i} G \times \left( (G \times_S^H X) \times_T Y \right) \longrightarrow (G \times_S^H X) \times_T Y, \quad (2.5)$$

le second morphisme correspondant à l'action de  $G$  et  $(G \times_S^H X) \times_T Y$  étant vu comme  $G/H$ -schéma selon la description de l'énoncé, soit par les flèches horizontales inférieures de (2.3). Or la composée de 2.5 avec la projection  $(G \times_S^H X) \times_T Y \rightarrow Y$  correspond exactement à la composée  $H$ -invariante  $G \times_S (X \times_T Y) \rightarrow G \times_S Y \rightarrow Y$ . Aussi la propriété universelle de factorisation du quotient montre que (2.4) est un morphisme de  $Y$ -schémas.  $\square$

**Corollaire 2.1.33.** *Soit  $X, Y, T_i, i \geq 1$  des  $S$ -schémas munis d'une action de  $G$ . Soit  $Y \rightarrow T_i, i \geq 1$  des  $S$ -morphisms  $G$ -équivariants et  $X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme  $H$ -équivariant. On suppose que le quotient  $G/H$  et le produit contracté  $G \times_S^H X$  existent. On définit par récurrence les  $Y$ -schémas suivants, munis respectivement d'une action de  $H$  et de  $G$  :*

$(Z_i)_i$  *On pose  $Z_0 := X$ , muni de l'action de  $H$  et de sa structure de  $Y$ -schéma. Pour  $i \geq 0$ , on pose  $Z_{i+1} := Z_i \times_{T_{i+1}} Y$  muni de l'action de  $H$  induite sur le produit fibré et de sa projection sur  $Y$ .*

$(\tilde{X}_i)_i$  *On pose  $\tilde{X}_0 := G \times_S^H X$ , muni de l'action naturelle de  $G$  sur le produit contracté, et d'une structure de  $Y$ -schéma par le passage au quotient de la composée  $G \times_S X \rightarrow G \times_S Y \rightarrow Y$  où le second morphisme est issu de l'action de  $G$ . Pour  $n \geq 0$ , on pose  $\tilde{X}_{i+1} := \tilde{X}_i \times_{T_{i+1}} Y$  muni de l'action de  $G$  induite sur le produit fibré, et de sa projection sur  $Y$ .*

Alors pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , le produit contracté  $G \times_S^H Z_i$  existe et on a un isomorphisme de  $G/H$ -schémas  $G$ -équivariants qui est aussi un isomorphisme de  $Y$ -schémas :

$$\tilde{X}_i \simeq G \times_S^H Z_i,$$

où  $G \times_S^H Z_i \rightarrow S$  est vu comme  $Y$ -schéma par le passage au quotient de la composée  $G \times_S Z_i \rightarrow G \times_S Y \rightarrow Y$  où le second morphisme est issu de l'action de  $G$ .

*Démonstration.* On établit le résultat par récurrence. L'initialisation est évidente puisque  $\tilde{X}_0 = G \times_S^H Z_0$  et que les morphismes vers  $Y$  définis par l'énoncé sont identiques. Pour l'hérédité, supposons le résultat vrai pour  $i \geq 0$  et considérons  $\tilde{X}_{i+1}$ . Par construction, les schémas  $Z_i, Y$  et  $T_{i+1}$  peuvent respectivement jouer le rôle de  $X, Y$  et  $T$  dans la proposition 2.1.32. Avec l'hypothèse d'hérédité, on a alors l'existence des produit contractés et des isomorphismes de  $Y$ -schémas au sens voulu :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{i+1} &= \tilde{X}_i \times_{T_{i+1}} Y \\ &\simeq (G \times_S^H Z_i) \times_{T_{i+1}} Y \\ &\simeq G \times_S^H (Z_i \times_{T_{i+1}} Y) \\ &= G \times_S^H Z_{i+1}. \end{aligned}$$

$\square$

## 2.2 Birationalité, rationalité, normalité et comorphismes

Nous donnons ici quelques propriétés sur la birationalité et la rationalité ainsi que le fait pour un comorphisme d'être un isomorphisme. Certaines vont notamment nous intéresser par les liens qu'elles établissent avec la normalité. Nous proposons des preuves pour les résultats dont nous n'avons pas explicitement trouvé de référence.

Puisque ces notions font intervenir des faisceaux et, pour la rationalité, des foncteurs dérivés, nous rappelons au préalable les différents théorèmes classiques de cohomologie et changements de base, ainsi que la propriété de dégénérescence des suites spectrales.

### 2.2.1 Cohomologie et changements de base

Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas,  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules et  $y \in Y$ . Pour tout changement de base :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow v & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

il existe une flèche naturelle

$$\Phi_u^i := u^* R^i f_* \mathcal{F} \rightarrow R^i f'_* v^* \mathcal{F}.$$

Lorsque  $u$  correspond à  $\text{Spec } \kappa(y) \rightarrow Y$ , on note

$$\Phi_y^i := \Gamma(\text{Spec } \kappa(y), \Phi_u^i): R^i f_* \mathcal{F}(y) \rightarrow H^i(X_y, \mathcal{F}|_{X_y})$$

On a alors les trois théorèmes classiques suivants. Nous proposons à leur sujet la référence [Vak], version du 11 juin 2013.

**Théorème 2.2.1.** (*Cohomologie et changement de base plat*) Soit  $f: X \rightarrow Y$  et  $u: Z \rightarrow Y$  des morphismes de schémas et soit  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . Si  $f$  est quasicompact et séparé et si  $u$  est plat, alors  $\Psi_u^i$  est un isomorphisme pour tout  $i \geq 0$ .

**Théorème 2.2.2.** (*Semi-continuité*) Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme propre de schémas noethériens et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ , plat sur  $Y$ . Alors pour tout  $i \geq 0$ , la fonction :

$$\begin{array}{ccc} Y & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ y & \mapsto & \dim_{\kappa(y)} H^i(X_y, \mathcal{F}|_{X_y}) \end{array}$$

est semi-continue supérieurement.

**Théorème 2.2.3.** (*Cohomologie et changement de base*) Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas,  $\mathcal{F}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules et  $y \in Y$ . On suppose  $f$  propre,  $\mathcal{F}$  cohérent sur  $X$ , plat sur  $Y$  et  $\Phi_y^i$  surjectif. Alors :

- $\Phi_y^i$  est bijectif, et il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $y$  tel que pour tout  $u: Z \rightarrow U$ ,  $\Psi_u^i$  relatif à  $f_U$  est bijectif.
- $\Phi_y^{i-1}$  est surjectif si et seulement si  $R^i f_* \mathcal{F}$  est localement libre sur un voisinage de  $y$ .

Les suites exactes relatives aux foncteurs dérivés nous amèneront à employer ce résultat classique concernant les suites spectrales.

**Proposition 2.2.4.** *Soit une suite spectrale  $E_2^{p,q} \Rightarrow E^n$ . Si pour tout  $p \geq 0$  et  $q \geq 1$ , on a  $E_2^{p,q} = 0$ , alors, on a :*

1.  $E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q}$  pour tout  $p, q \geq 0$  (la suite spectrale dégénère en  $E_2$ ).
2.  $E^n = E_0^n = E_1^n = \dots = E_n^n$  pour tout  $n \geq 0$ .
3.  $E^p = E_2^{p,0}$  pour tout  $p \geq 0$ .

*Démonstration.* La troisième assertion se déduit directement des deux premières qui s'établissent par récurrence, à partir de l'hypothèse et des relations

$$E_{k+1}^{p,q} = \text{Ker}(E_k^{p,q} \rightarrow E_k^{p+k, q-k+1}) / \text{Im}(E_k^{p-k, q+k-1} \rightarrow E_k^{p,q}),$$

$$E_r^n / E_{r+1}^n = E_\infty^{r, n-r}.$$

□

### 2.2.2 Stabilité de la birationalité et rationalité

On donne ici quelques résultats de stabilité pour la propriété de birationalité et de rationalité.

#### Birationalité

Commençons par deux propriétés.

**Proposition 2.2.5.** *La propriété d'être un morphisme birationnel est stable par composition.*

*Démonstration.* C'est immédiat par restriction d'ouverts et avec les définitions. □

**Proposition 2.2.6.** *La propriété d'être un morphisme birationnel entre schémas localement noethériens est stable par changement de base fidèlement plat localement de type fini à fibres géométriquement intègres.*

*Démonstration.* Soit un diagramme cartésien de morphismes de schémas :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

On suppose  $X$  et  $Y$  localement noethériens,  $v$  fidèlement plat localement de type fini à fibres géométriquement intègres et  $f$  birationnel induisant un isomorphisme entre un ouvert non vide  $U$  de  $X$  et un ouvert non vide  $V$  de  $Y$ . Par restriction de la cible  $Y$ , on peut supposer que  $V = Y$ , et  $Y' = v^{-1}(V)$ . Puisque  $v$  est surjectif (ou bien ouvert et  $Y$  irréductible), on sera ainsi assuré que  $Y'$  est non vide. Par restriction de la source  $X$ , on peut encore supposer que  $U = X$ , et  $X' = u^{-1}(U) = f'^{-1}(Y')$ . On se ramène donc à supposer que  $f$  est un isomorphisme  $X \simeq Y$ . La propriété d'être un isomorphisme étant stable par tout changement de base, on en déduit  $X' \simeq Y'$ . Avec  $Y' \neq \emptyset$ , on trouve que  $f'$  induit bien un isomorphisme entre deux ouverts non vides<sup>9</sup>.

Comme par ailleurs être localement de type fini est stable par tout changement de base, il ne s'agit plus que de garantir l'intégrité de la source et du but du morphisme  $f'$ . Il suffit pour cela de montrer que si  $Z \rightarrow Y$  est un morphisme fidèlement plat localement de type fini à fibres géométriquement intègres avec  $Y$  localement noethérien, alors l'intégrité de  $Y$  entraîne celle de  $Z$ . Mais la préservation du caractère réduit est donnée par le corollaire 3.3.5 de [Gro65], l'hypothèse localement de type fini assurant que  $Z$  est aussi localement noethérien. Et la préservation du caractère irréductible découle du lemme ci-dessous. □

9. Ce raisonnement montre plus qu'induire un isomorphisme entre deux ouverts non vides est une propriété stable par tout changement de base qui atteint l'ouvert de la cible.

**Lemme 2.2.7.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme plat à fibre générique géométriquement irréductible. Si  $Y$  est irréductible, alors c'est aussi le cas de  $X$ .*

*Démonstration.* Soit  $\eta$  le point générique de  $Y$  et  $\zeta$  celui d'une composante irréductible de  $X$ . Montrons que  $\zeta \in f^{-1}(\eta)$ . Comme  $\eta$  est une générisation de  $f(\zeta)$ , par propriété des morphismes plats (Lemme 14.9 [GW10]), il existe  $\zeta' \in X$  qui est une générisation de  $\zeta$  avec  $f(\zeta') = \eta$ . Mais comme  $\overline{\{\zeta\}}$  est une composante irréductible, l'appartenance  $\zeta \in \overline{\{\zeta'\}}$  impose  $\zeta = \zeta'$ . Ainsi on a bien  $f(\zeta) = \eta$ . Par conséquent, toutes les composantes irréductibles de  $X$  et donc  $X$  lui-même sont contenus dans  $\overline{f^{-1}(\eta)}$ . Comme ce sous-ensemble est irréductible par hypothèse, on en déduit l'irréductibilité de  $X$ .  $\square$

Rappelons maintenant un lemme important dont la preuve est détaillée dans [Sta21].

**Lemme 2.2.8** (Lemme 29.50.3 [Sta21]). *Soit  $b : X \rightarrow Y$  un morphisme entre schémas irréductibles induisant un isomorphisme entre les localisés aux points génériques  $x \in X$  et  $y \in Y$ . Alors le changement de base  $X \times_Y \text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{Y,y}$  est un isomorphisme. On a donc en particulier  $b^{-1}(y) = \{x\}$ .*

En découle la proposition suivante, qui permet d'établir l'équivalence<sup>10</sup> dans notre définition de morphisme birationnel (définition 1.2.1).

**Proposition 2.2.9.** *Soit  $b : X \rightarrow Y$  un morphisme localement de type fini entre schémas intègres, induisant un isomorphisme entre les corps de fonctions de  $X$  et de  $Y$ . Alors  $b$  induit un isomorphisme entre deux ouverts non vides  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$ .*

*Démonstration.* Une preuve pour un résultat légèrement plus général se trouve dans [Sta21], Lemme 29.50.5. Nous reproduisons ici les arguments élémentaires qui correspondent à notre situation. Tout d'abord, on peut supposer  $X$  et  $Y$  affines, et même plus précisément grâce à nos hypothèses,  $X = \text{Spec } B$  et  $Y = \text{Spec } A$  avec  $A$  intègre et des éléments  $s_1, \dots, s_n$  de  $B$  tels que  $B = A[s_1, \dots, s_n]$ . Si l'on note  $K = \text{Frac}(A) = A_{(0)}$ , le lemme 2.2.8 fournit exactement un isomorphisme  $\text{Spec } K[s_1, \dots, s_n] \simeq \text{Spec } K$  duquel on peut considérer les  $s_i$  dans  $K$ . Il existe donc des éléments  $a_i, f_i \neq 0$  dans  $A$  tels que pour tout  $i$ ,  $s_i = a_i/f_i$ . En posant  $f = f_1 \dots f_n$ , on en déduit  $B = A[1/f]$  puis un isomorphisme de  $X$  avec l'ouvert élémentaire  $D(f) \subset Y$ .  $\square$

**Lemme 2.2.10.** *Soit  $b : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Si  $X$  est irréductible et si  $b$  est séparé et induit un isomorphisme entre un ouvert non vide  $U$  de  $X$  et un ouvert  $V$  de  $Y$ , alors  $b^{-1}(V) = U$ .*

*Démonstration.* L'isomorphisme  $U \simeq V$  fournit une section  $s : V \rightarrow b^{-1}(V)$  de la restriction  $b^{-1}(V) \rightarrow V$  de sorte qu'on a le diagramme suivant, où l'on introduit encore la diagonale  $\Delta$  et les projections  $pr_1$  et  $pr_2$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\quad} & b^{-1}(V) & \xrightarrow{\quad} & V & \xleftarrow{\quad} & U \\
 \downarrow & & \downarrow \Delta & & \downarrow s & \nearrow \sim & \\
 b^{-1}(V) & \xrightarrow{\Delta} & b^{-1}(V) \times_V b^{-1}(V) & \xrightarrow{pr_1} & b^{-1}(V) & & \\
 & & \downarrow pr_2 & & \downarrow & & \\
 & & b^{-1}(V) & \xrightarrow{\quad} & V & & 
 \end{array}$$

Par définition des morphismes en jeu, les compositions horizontales et verticales du milieu sont toutes l'identité et les deux rectangles apparaissent clairement cartésiens. C'est aussi le cas du carré inférieur par définition. On en déduit que le carré supérieur droit puis le carré supérieur gauche le sont également par associativité du produit fibré. Comme la restriction  $b^{-1}(V) \rightarrow V$  reste séparée par changement de base,  $\Delta$  est une immersion fermée. Par changement de base encore, on en

10. La proposition établit simplement une implication, mais la réciproque est immédiate.

déduit que l'inclusion  $U \subset b^{-1}(V)$  est aussi une immersion fermée. Aussi,  $U \neq \emptyset$  est ouvert et fermé dans  $b^{-1}(V)$  qui reste irréductible comme  $X$  et on a l'égalité souhaitée.  $\square$

**Proposition 2.2.11.** *Soit  $b: X \rightarrow Y$  un morphisme birationnel. Si  $b$  est quasi-compact ou séparé, alors il existe un ouvert non vide  $V$  de  $Y$  tel que  $b$  induit un isomorphisme  $b^{-1}(V) \simeq V$ .*

*Démonstration.* Le cas séparé étant déjà contenu dans le lemme 2.2.10, montrons le cas de quasi-compactité. Tout d'abord, l'assertion étant locale au but, on peut supposer  $Y$  affine. Considérons alors  $U \subset X$  un ouvert affine non vide. Il contient donc le point générique de  $X$  et par le second point du lemme 2.2.8, le point générique de  $Y$  n'est pas dans  $b(X \setminus U)$ . Or, la restriction  $X \setminus U \rightarrow Y$  de  $b$  restant quasi-compacte, elle est dominante si et seulement si elle atteint le point générique de sa cible (lemme 29.8.3 [Sta21]). Il existe donc un ouvert non vide  $V \subset Y$  tel que  $V \subset Y \setminus b(X \setminus U)$ , soit  $b^{-1}(V) \subset U$ . La composée  $b^{-1}(V) \rightarrow U \rightarrow X \rightarrow Y$  étant séparée puisque  $U \rightarrow X \rightarrow Y$  est affine, on déduit, par annulation de la propriété de séparation (Exercice II 4.8 [Har83]) que  $b^{-1}(V) \rightarrow V$  est séparé. On peut donc supposer  $b$  séparé et le lemme 2.2.10 donne le résultat voulu.  $\square$

**Lemme 2.2.12.** *Soit un diagramme cartésien de schémas irréductibles :*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{b'} & Y' \\ \downarrow v & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{b} & Y. \end{array}$$

*On suppose  $u$  plat, quasi-compact, localement de présentation finie. Si  $b'$  induit un isomorphisme au dessus d'un ouvert non vide de  $Y'$  alors c'est aussi le cas de  $b$ , au dessus d'un ouvert non vide de  $Y$ .*

*Démonstration.* L'énoncé donne l'existence de  $V \subset Y'$  ouvert non vide tel que  $b'$  induit un isomorphisme  $b'^{-1}(V) \simeq V$ . Quitte à remplacer  $Y'$  par  $V$  et  $X'$  par  $b'^{-1}(V)$ , on peut supposer que  $b'$  est un isomorphisme. Comme  $u$  est plat de présentation finie, ainsi que  $v$  par changement de base, ces deux morphismes sont ouverts (théorème 14.33 [GW10]). Mais par propriété du produit fibré, on a  $b^{-1}(u(Y')) = v(X')$  de façon ensembliste. On peut donc supposer  $u$  et  $v$  surjectifs, et donc  $u$  fidèlement plat quasi-compact. Par descente fidèlement plate quasi-compacte (proposition 14.51 [GW10]), on en déduit que  $b$  est aussi un isomorphisme.  $\square$

**Proposition 2.2.13.** *La propriété d'être un morphisme birationnel quasi-compact ou séparé descend le long de tout morphisme fidèlement plat, localement de présentation finie et quasi-compact.*

*Démonstration.* Tout d'abord, par descente fidèlement plate quasi-compacte, le morphisme descendu reste localement de type fini et quasi-compact ou séparé (Propositions 2.6.4 et 2.7.1 [Gro65]). En outre, sa source et son but restent réduits puisque cette propriété de schéma descend le long des morphismes fidèlement plats (Lemme 35.16.1 [Sta21]). Ils sont encore irréductibles par simple surjectivité. On utilise ensuite simplement le lemme 2.2.12 précédent. Les hypothèses sur le morphisme birationnel qui descend étant satisfaites par la proposition 2.2.11.  $\square$

Le résultat suivant complète la proposition 2.1.28 en montrant que la birationalité peut être préservée par le produit contracté.

**Proposition 2.2.14.** *Soit  $S$  un schéma. Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes,  $H$  un sous-groupe et  $X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme  $H$ -équivariant tels que le quotient fppf  $G/H$  existe de même que les produits contractés  $G \times_S^H X$  et  $G \times_S^H Y$ . On suppose en outre  $Y$  localement noethérien et  $G$  fidèlement plat, localement de type fini et à fibres géométriquement intègres, et  $H$  fidèlement plat, localement de présentation finie et quasi-compact. Alors si  $X \rightarrow Y$  est birationnel quasi-compact ou séparé, ce sera encore le cas des morphismes induits  $G \times_S X \rightarrow G \times_S Y$  et  $G \times_S^H X \rightarrow G \times_S^H Y$ .*

*Démonstration.* Soit les données de l'énoncé et supposons  $X \rightarrow Y$  birationnel quasi-compact ou séparé. Par changement de base, le morphisme  $G \times_S Y \rightarrow Y$  hérite des propriétés supposées de  $G \rightarrow S$ . De même, par la proposition 2.1.23,  $G \times_S Y \rightarrow G \times_S^H Y$  hérite de celles de  $H \rightarrow S$ . Aussi, la proposition 2.2.6 avec la stabilité de la quasi-compactité et de la séparation, puis la proposition 2.2.13, l'une et l'autre appliquées aux deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ G \times_S X & \longrightarrow & G \times_S Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times_S^H X & \longrightarrow & G \times_S^H Y, \end{array} \quad (2.6)$$

montrent successivement que  $G \times_S X \rightarrow G \times_S Y$  puis  $G \times_S^H X \rightarrow G \times_S^H Y$  auront les propriétés souhaitées de  $X \rightarrow Y$ .  $\square$

**Lemme 2.2.15.** *Soit  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  une composée avec  $X$  intègre,  $Z$  irréductible,  $g$  séparé,  $f$  schématiquement dominant et quasi-compact ( $Y$  est donc aussi intègre). Si  $gf$  induit un isomorphisme entre un ouvert non vide de sa source et un ouvert non vide de son but, alors  $g$  et  $f$  également.*

*Démonstration.* Quitte à se restreindre au dessus d'un ouvert de  $Z$  et à composer encore à gauche par une seconde inclusion ouverte, on peut supposer que  $\phi := gf$  est un isomorphisme. En effet, les hypothèses de dominance sont notamment préservées puisque la formation de l'image schématique commute à la restriction aux ouverts et que  $X$  étant intègre, l'inclusion d'un ouvert non vide  $U \rightarrow X$  est encore schématiquement dominante (la source étant réduite, l'image schématique sera  $\overline{U}_{red}$ , voir proposition 3.2.8). Ainsi,  $g(f\phi^{-1}) = id$  est notamment une immersion fermée. Comme  $g$  est séparé,  $f\phi^{-1}$  est encore une immersion fermée (voir Exercice II 4.8 [Har83]). Mais ce morphisme est schématiquement dominant puisque  $f$  et  $\phi^{-1}$  le sont. C'est donc un isomorphisme, de sorte que  $f$  puis  $g$  en sont un également.  $\square$

On en déduit immédiatement :

**Proposition 2.2.16.** *Soit  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  une composée avec  $g$  séparé localement de type fini et  $f$  schématiquement dominant et quasi-compact. Si  $gf$  est birationnel, alors  $g$  et  $f$  le sont également.*

## Rationalité

Donnons maintenant quelques propriétés de stabilité des morphismes rationnels.

**Proposition 2.2.17.** *La propriété pour un morphisme d'être rationnel est stable par composition et changement de base plat localement de type fini.*

*Démonstration.* Montrons la stabilité par changement de base. La propriété étant stable par tout changement de base et un morphisme localement de type fini de but localement noethérien ayant une source localement noethérienne (proposition 10.9 [GW10]), il suffit de montrer qu'un changement de base plat préserve les propriétés d'annulation et d'isomorphisme des foncteurs dérivés voulus. Mais cela est immédiat par changement de base plat avec le théorème 2.2.1 ("changement de base plat").

Montrons maintenant la stabilité par composition. Si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  est une composée de morphismes propres, alors il existe une suite spectrale de Leray (Théorème 1.18 b) [Mil80])

$$E_2^{p,q} := (R^p g_*)(R^q f_*) \mathcal{O}_X \Rightarrow R^n (gf)_* \mathcal{O}_X =: E^n.$$

Mais la rationalité de  $f$  entraîne  $E_2^{p,q} = 0$  pour tout  $p \geq 0$  et  $q \geq 1$ . Par un raisonnement classique sur les suites spectrales (proposition 2.2.4), on en déduit alors notamment  $E_2^{p,0} \simeq E^p$ , soit  $(R^p g_*)(f_* \mathcal{O}_X) \simeq R^p(gf)_* \mathcal{O}_X$  pour tout  $p \geq 0$ . Si  $g$  est également supposé rationnel, on a  $(R^p g_*)(f_* \mathcal{O}_X) \simeq R^p g_* \mathcal{O}_Y = 0$  pour tout  $p \geq 1$ , d'où l'annulation de  $R^i(gf)_*(\mathcal{O}_X)$  pour  $i > 0$ . Puisque la rationalité de  $f$  et  $g$  implique clairement que le comorphisme de  $gf$  est un isomorphisme, on a bien la stabilité souhaitée.  $\square$

**Proposition 2.2.18.** *La propriété pour un morphisme d'être rationnel descend le long des morphismes fidèlement plats quasi-compacts de but localement noethérien.*

*Démonstration.* Soit un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

où  $f'$  est rationnel,  $u$  fidèlement plat quasi-compact et  $Y$  localement noethérien. Par descente fidèlement plate quasi-compacte,  $f$  est propre ([GW10], proposition 14.51 (5)). Par changement de base plat (théorème 2.2.1), on a un isomorphisme, pour tout  $i \geq 0$  :

$$u^* R^i f_* \mathcal{O}_X \simeq R^i f'_* \mathcal{O}_{X'}.$$

Mais comme  $f'$  est supposé rationnel, le terme  $R^i f'_* \mathcal{O}_{X'}$  est nul pour  $i > 0$ , égal à  $\mathcal{O}_{Y'}$  si  $i = 0$ . Or le foncteur  $u^*$  est pleinement fidèle puisque  $u$  est fidèlement plat quasi-compact. On en déduit l'annulation de  $R^i f_* \mathcal{O}_X$  pour  $i > 0$  et l'identification  $f_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_Y$ . Le morphisme  $f$  est bien rationnel.  $\square$

De manière analogue au cas de la birationalité, on en déduit une propriété de stabilité de passage au produit contracté.

**Proposition 2.2.19.** *Soit  $S$  un schéma localement noethérien. Soit  $G$  un  $S$ -schéma en groupes,  $H$  un sous-groupe et  $X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme  $H$ -équivariant tels que le quotient fppf  $G/H$  existe de même que les produits contractés  $G \times_S^H X$  et  $G \times_S^H Y$ . On suppose en outre  $Y$  et  $G/H$  localement de type fini,  $G$  plat, localement de type fini et  $H$  fidèlement plat quasi-compact. Alors si  $X \rightarrow Y$  est rationnel, ce sera encore le cas des morphismes induits  $G \times_S X \rightarrow G \times_S Y$  et  $G \times_S^H X \rightarrow G \times_S^H Y$ .*

*Démonstration.* Soit les données de l'énoncé et supposons  $X \rightarrow Y$  rationnel. Par changement de base, le morphisme  $G \times_S Y \rightarrow Y$  hérite des propriétés supposées de  $G \rightarrow S$ . De même, par la proposition 2.1.23,  $G \times_S Y \rightarrow G \times_S^H Y$  hérite de celles de  $H \rightarrow S$ . Par la proposition 2.1.31,  $G \times_S^H Y \rightarrow G/H$  est localement de type fini, et puisque c'est aussi le cas de  $G/H \rightarrow S$ , on en déduit que  $G \times_S^H Y$  est localement noethérien comme  $S$ . De façon plus directe, ce sera aussi le cas de  $Y$  et  $G \times_S Y$ . Aussi, la proposition 2.2.17 avec la stabilité de la propriété, puis la proposition 2.2.18, l'une et l'autre appliquées aux deux carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ G \times_S X & \longrightarrow & G \times_S Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times_S^H X & \longrightarrow & G \times_S^H Y, \end{array} \tag{2.7}$$

montrent successivement que  $G \times_S X \rightarrow G \times_S Y$  puis  $G \times_S^H X \rightarrow G \times_S^H Y$  seront rationnels.  $\square$

### 2.2.3 Normalité et comorphismes

Après ces résultats de stabilité, observons que la birationalité permet de lier la normalité et la propriété pour un comorphisme d'être un isomorphisme. La première assertion de la proposition suivante est démontrée (pour un morphisme projectif de schémas noethériens) dans [Har83], corollaire 11.4, où elle sert d'ingrédient pour établir le théorème principal de Zariski à partir du théorème des fonctions formelles. Nous reproduisons simplement la preuve, adaptée ici au cas propre.

**Proposition 2.2.20.** *Soit  $X \xrightarrow{b} Y$  un morphisme propre et birationnel de schémas localement noethériens.*

1. *Si  $Y$  est normal alors le comorphisme  $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{b^\#} b_*\mathcal{O}_X$  est un isomorphisme.*
2. *Si  $X$  est normal et si le comorphisme  $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{b^\#} b_*\mathcal{O}_X$  est un isomorphisme, alors  $Y$  est normal.*

*Démonstration.* 1. L'assertion est locale en  $Y$  et on peut supposer  $Y = \text{Spec } A$  affine. Le comorphisme  $b^\#$  correspond donc à un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow \Gamma(Y, b_*\mathcal{O}_X) := B$ . Puisque  $b$  est birationnel, il induit un isomorphisme entre les corps de fonctions de  $X$  et de  $Y$ . Aussi, on a un diagramme d'injections

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ & \searrow & \downarrow \\ & & K, \end{array}$$

où  $K = \text{Frac}(A) \simeq \text{Frac}(B)$  et on peut se placer dans une situation d'inclusion :  $A \subset B \subset K$ . Comme  $b$  est propre,  $Y$  localement noethérien,  $b_*\mathcal{O}_X$  est cohérent (EGA III 3.2.1 [Gro61b]) et la  $A$ -algèbre  $B$  est aussi un  $A$ -module de type fini. Par conséquent (Proposition 5.1 de [AM16]),  $B$  est entier sur  $A$ . Mais comme  $Y$  est supposé normal,  $A$  est intégralement clos et ceci montre  $B \subset A$ . Ainsi  $A = B$ .

2. On renvoie vers [Sta21], Section 29.54 pour un rappel sur la normalisation<sup>11</sup>.  $Y$  étant localement noethérien, la normalisation  $\eta: \tilde{Y} \rightarrow Y$  existe avec  $\tilde{Y}$  normal et intègre, et c'est un morphisme entier, surjectif (Lemme 29.54.5 [Sta21]). Et comme  $Y$  est intègre,  $\eta$  est encore birationnel (Lemme 29.54.7 [Sta21]). Comme  $X$  est normal, on a une factorisation (Lemme 29.54.5 [Sta21]) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{b} & Y \\ & \searrow^{b'} & \uparrow \eta \\ & & \tilde{Y}. \end{array}$$

Ainsi  $b'$  est notamment dominant donc schématiquement dominant puisque de source et but intègres. Il est aussi propre puisque  $b$  l'est et que  $\eta$  est séparé (voir Exercice II 4.8 [Har83]). Comme en outre  $b$  est birationnel,  $Y$  irréductible, la proposition 2.2.16 entraîne que  $b'$  est aussi birationnel. Enfin, comme  $\eta$  est de type fini,  $\tilde{Y}$  est localement noethérien. On applique alors le premier point (1) avec la normalité de  $\tilde{Y}$  et on en déduit que le comorphisme de  $b'$  est, comme celui de  $b$  par hypothèse, un isomorphisme. Le comorphisme de  $\eta$  est donc un isomorphisme. Comme  $\eta$  est affine, c'est donc un isomorphisme et on en déduit la normalité de  $Y$ . □

<sup>11</sup> La définition de la normalisation repose sur une notion relative, plus générale, précisée avec les définitions 29.53.2 et 29.53.3. De manière équivalente, la normalisation absolue souhaitée est aussi construite plus concrètement dans [Har83], II Exercice 3.8.

Nous utiliserons encore la propriété suivante, démontrée par Michel Brion et Shrawan Kumar dans l'ouvrage [BK05] (Lemme 3.3.3) lorsque  $f$  est supposé projectif. Cette hypothèse ne servant ici qu'à assurer le caractère cohérent de  $f_*\mathcal{O}_X$ , nous proposons simplement un énoncé avec une hypothèse de propreté et locale noethérianité, suffisantes pour la cohérence voulue grâce à EGA III, 3.2.1 [Gro61b].

**Proposition 2.2.21.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre avec  $Y$  localement noethérien. Supposons l'existence d'un faisceau inversible ample  $\mathcal{L}$  sur  $Y$ . Si  $f$  est surjective et si la restriction  $H^0(Y, \mathcal{L}^n) \rightarrow H^0(X, f^*\mathcal{L}^n)$  est surjective pour tout  $n$  assez grand, alors le comorphisme de  $f$  est un isomorphisme :  $\mathcal{O}_Y \simeq f_*\mathcal{O}_X$ .*

*Démonstration.* La preuve est détaillée dans [BK05] et nous notons simplement que l'hypothèse de projectivité sur  $f$  peut être allégée par celle de propreté et locale noethérianité avec le résultat de EGA III, 3.2.1 [Gro61b], puisqu'elle intervient simplement ici pour assurer le caractère cohérent de  $f_*\mathcal{O}_X$ .  $\square$

## 2.3 Conséquences et compléments pour les variétés

Dans cette section, nous tirons quelques conséquences des résultats précédents pour les variétés, et nous y ajoutons aussi quelques résultats plus spécifiques à ce cadre.

Nous rappelons les notions relatives à la séparabilité, qui trouvent des applications importantes dans le cadre des variétés.

**Définition 2.3.1.** *Soit  $k \hookrightarrow K$  une extension de corps.*

- $k \hookrightarrow K$  est dite **séparable** si  $\text{car}(k) = 0$  ou bien si  $\text{car}(k) = p > 0$  et si elle satisfait à la condition suivante : si  $x_1, x_2, \dots, x_m \in K$  sont linéairement indépendants sur  $k$ , il en est de même pour  $x_1^p, x_2^p, \dots, x_m^p$ .
- $k \hookrightarrow K$  est dite **purement inséparable** si  $k$  ne possède pas de sous-extension  $k \hookrightarrow K' \hookrightarrow K$  séparable, algébrique et non triviale.

Une extension  $k \hookrightarrow K$  séparable et purement inséparable et algébrique est donc triviale.

Nous fixons maintenant un corps de base algébriquement clos  $k$ . Rappelons qu'un morphisme (topologiquement) dominant de variétés irréductibles  $X \rightarrow Y$  atteint le point générique de sa cible à partir de celui de sa source. Son comorphisme induit donc une extension  $K(Y) \hookrightarrow K(X)$ . On a alors la définition suivante.

**Définition 2.3.2.** *Un morphisme de variétés irréductibles  $X \rightarrow Y$  est dit **séparable** (respectivement **purement inséparable**) si l'extension induite  $K(Y) \hookrightarrow K(X)$  est séparable (respectivement **purement inséparable**).*

### 2.3.1 Birationalité et rationalité pour les variétés

Nous commençons par donner quelques résultats sur la birationnalité et la rationalité.

#### Birationnalité

Comme exprimé dans la définition, soulignons déjà qu'un morphisme de  $k$ -variétés irréductibles est birationnel si et seulement si il induit un isomorphisme de  $k$ -extensions entre le corps de fonctions de sa cible et celui de sa source. On a de plus le théorème suivant qui fournit un critère relativement simple.

**Théorème 2.3.3** (Humphreys, Théorème 4.6 [Hum81]). *Soit  $b : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant, injectif de variétés irréductibles. Alors l'extension  $K(Y) \hookrightarrow K(X)$  est finie et purement inséparable.*

On en déduit immédiatement le critère :

**Corollaire 2.3.4.** *Un morphisme dominant entre variétés irréductibles est birationnel si et seulement si il est génériquement injectif et séparable, et donc si et seulement si il est génériquement injectif lorsque la caractéristique de  $k$  est nulle.*

Cette situation favorable pour les variétés, associée au théorème principal de Zariski, permet de déduire facilement des isomorphismes à partir de la bijectivité.

**Proposition 2.3.5.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant séparable entre variétés irréductibles. On suppose que  $Y$  est normale et que  $f$  est bijectif. Alors  $f$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Par injectivité, le corollaire 2.3.4 précédent assure que  $f$  est birationnel. De plus, les fibres de  $f$  sont finies. Avec la normalité de  $Y$ , on déduit alors d’une version du théorème principal de Zariski (voir par exemple celle donnée par l’énoncé (1) dans III, §9 [Mum99]) que  $f$  induit un isomorphisme de  $X$  vers un ouvert de  $Y$ . Par surjectivité,  $f$  est bien un isomorphisme.  $\square$

Pour compléter ce résultat, ajoutons simplement un critère de séparabilité.

**Théorème 2.3.6** (Borel, Théorème AG 17.3 [Bor91]). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant entre variétés irréductibles. Alors  $f$  est séparable si et seulement si il existe un point  $x \in X$  lisse d’image  $f(x)$  lisse tel que la différentielle  $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  est surjective.*

### Rationalité

Comme remarqué avec les définitions initiales, le théorème de Grauert-Riemenschneider nous permet d’avoir une caractérisation plus simple des résolutions rationnelles en caractéristique nulle. Si le résultat est compris dans [GR70], nous empruntons la formulation du théorème 4.3.9 de [Laz04] et nous renvoyons à cette référence pour une preuve.

**Théorème 2.3.7** (Grauert–Riemenschneider). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme projectif, surjectif et génériquement fini de variétés où  $X$  est lisse et la caractéristique nulle. Alors  $R^i f_* \omega_X = 0$  pour  $i > 0$ .*

**Corollaire 2.3.8.** *En caractéristique nulle, pour qu’un morphisme rationnel de variétés irréductibles soit une résolution rationnelle, il suffit qu’il soit birationnel, projectif et de source lisse.*

*Démonstration.* On applique simplement le théorème précédent, entendu qu’un morphisme birationnel est génériquement fini (lemme 2.2.8); dominant, il est aussi surjectif dès qu’il est fermé.  $\square$

On donne enfin une référence justifiant l’implication de la propriété d’être Cohen-Macaulay à partir de la normalité et de l’existence d’une résolution rationnelle.

**Proposition 2.3.9** ([Kem+73] p50-51). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une résolution rationnelle où  $Y$  est normal. Alors  $Y$  est Cohen-Macaulay de faisceau dualisant  $f_* \omega_X$ .*

### 2.3.2 Orbites, quotients et produits contractés pour les variétés

On énonce ici quelques résultats sur certains quotients de variétés, à savoir celui d’un groupe algébrique par un sous-groupe et celui définissant le produit contracté. Nous ne reproduirons pas les preuves classiques que l’on peut trouver dans [Hum81], [Spr09] ou [Bor91] mais nous utiliserons plusieurs de leurs résultats et notre objectif sera simplement de montrer en quoi ils permettent d’obtenir les propriétés souhaitées, au sein du cadre que nous avons choisi (schémas et quotient fppf, etc.).

Au préalable, rappelons le résultat suivant. Il assurera facilement que le caractère réduit que nous souhaitons à nos variétés se préservera par changement de base (un  $k$ -schéma lisse étant réduit).

**Proposition 2.3.10.** *Un groupe algébrique est lisse.*

*Démonstration.* Puisqu’un groupe algébrique est une variété, son lieu lisse est un ouvert non vide (Théorème 6.19 et remarque 6.20 [GW10]). Par translation, on obtient un recouvrement du groupe entier par des ouverts lisses et ainsi le groupe lui-même est lisse.  $\square$

### Quotient d'un groupe par un sous-groupe

Nous commençons par considérer le cas bien connu du quotient d'un groupe algébrique par un sous-groupe fermé.

**Proposition 2.3.11.** *Soit  $G$  un groupe algébrique agissant sur une variété  $X$  et  $x \in X$  un point fermé. Alors l'orbite  $G \cdot x$  est lisse. De plus, si la restriction  $G \rightarrow G \cdot x$  du morphisme orbital  $\mu_x : G \rightarrow X$  est séparable, alors le stabilisateur  $G_x$  en est la fibre au dessus de  $x$  et  $G \cdot x$  est le quotient fppf  $G/G_x$ .*

*Démonstration.* Puisque  $G \cdot x$  est une variété, son lieu lisse est un ouvert non vide (théorème 6.19 et remarque 6.20 [GW10]). Par surjectivité du morphisme orbital et donc transitivité de l'action, toute la variété est lisse. Si  $G \rightarrow X$  et donc la restriction  $u : G \rightarrow G \cdot x$  est séparable, alors, par le théorème 2.3.6, il existe un point fermé  $g \in G$  lisse tel que  $g \cdot x$  est fermé et lisse et la différentielle  $d_g u : T_g G \rightarrow T_{g \cdot x} G \cdot x$  de  $u$  en  $g$  est surjective. Par homogénéité, la différentielle de  $u$  est surjective en tout point fermé de  $G$ . Les deux variétés  $G$  et  $G \cdot x$  étant lisses, on en déduit avec la proposition III 10.4 (iii) [Har83] que  $u$  est lisse. Sa fibre au dessus de  $x$  est alors également lisse, elle est donc réduite, c'est un groupe algébrique et ses points fermés montrent qu'il s'agit exactement du stabilisateur  $G_x$ . De plus, par changement de base, la projection  $G \times_{G \cdot x} G \rightarrow G$  est encore lisse et on en déduit que  $G \times_{G \cdot x} G$  est lisse, en particulier, réduit et c'est une variété. Aussi, on peut se restreindre à l'étude des points fermés. Celle-ci donne clairement un isomorphisme  $G \times_{G_x} \simeq G \times_{G \cdot x} G$  issu de la translation dans  $G$ . Par la proposition 2.1.23, l'action de  $G_x$  sur  $G$  étant bien libre,  $G \cdot x$  correspond comme souhaité au quotient fppf  $G/G_x$ .  $\square$

Au moyen d'un résultat fondamental qui permet de faire apparaître tout sous-groupe fermé comme le stabilisateur d'un point pour une action du groupe ambiant, on a le théorème ci-après.

**Théorème 2.3.12.** *Soit  $G$  un groupe algébrique et  $H$  un sous-groupe fermé. Alors le quotient fppf  $G/H$  existe. C'est une variété quasi-projective, lisse et le passage au quotient  $G \rightarrow G/H$  est lisse et surjectif.*

*Démonstration.* Soit  $k$  le corps de base. Par un théorème de Chevalley et ses conséquences, rappelées notamment dans [Hum81] (11.2, 11.3),  $H$  peut apparaître comme le stabilisateur d'un point fermé  $x$  d'un espace projectif  $X$  sous une action de  $G$  et tel que le morphisme orbital  $G \rightarrow G \cdot x$  soit séparable. Par la proposition 2.3.11,  $G \cdot x$  représente bien le quotient fppf  $G/H$  et ce dernier est bien une variété lisse. Comme  $G \cdot x$  est aussi localement fermé dans  $X$  projectif, ce quotient est aussi quasi-projectif.  $\square$

Notons simplement la spécificité du cas où le sous-groupe en jeu est un sous-groupe de Borel :

**Proposition 2.3.13.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif,  $B$  un sous-groupe de Borel. Alors le quotient fppf  $G/B$  existe comme variété projective, lisse, irréductible, dont les points fermés correspondent, par  $gB \mapsto gBg^{-1}$ , à l'ensemble des sous-groupes de Borel de  $G$ .*

*Démonstration.* On utilise simplement le théorème précédent 2.3.12 pour établir le quotient comme variété et quotient fppf, et les autres assertions se déduisent des résultats classiques de groupes algébriques (la preuve que nous avons trouvée du théorème 2.1.26 emploie ces résultats bien qu'il les généralise).  $\square$

La proposition 2.3.11 précédente permet aussi d'obtenir le critère utile suivant.

**Corollaire 2.3.14.** *Soit  $G$  un groupe algébrique et  $H$  un sous-groupe fermé. Pour qu'un morphisme  $G$ -équivariant  $G \rightarrow X$  corresponde au quotient fppf  $G \rightarrow G/H$ , il faut et il suffit qu'il soit surjectif, séparable et que les fibres du morphisme induit  $G(k) \rightarrow X(k)$  sur les points fermés soient des translatés de  $H(k)$  par des éléments de  $G(k)$ . Lorsque ces conditions sont réalisées,  $X$  et le morphisme  $G \rightarrow X$  sont lisses.*

*Démonstration.* Donnons-nous  $G \rightarrow X$  séparable, surjectif,  $G$ -équivariant, et satisfaisant à la propriété de fibres de l'énoncé. Par translation, on peut supposer que  $H(k)$  stabilise l'image du neutre  $\text{Spec } k \rightarrow G \rightarrow X$ , que l'on notera  $x$ . Ainsi  $H$  apparait comme le stabilisateur  $G_x$  et par surjectivité,  $X$  apparait comme l'orbite  $G \cdot x$ . Par la propriété 2.3.11,  $X$  est lisse et représente bien le quotient fppf  $G \rightarrow G/H$ .

Réciproquement, si  $G \rightarrow X$  représente ce quotient, alors il est lisse et surjectif par la propriété 2.1.23 puisque c'est le cas de  $H \rightarrow \text{Spec } k$ . Il est donc en particulier séparable et toutes ses fibres sont lisses. Par surjectivité de variétés, les points fermés de  $X$  se relèvent en points fermés de  $G$ . Aussi, en considérant l'isomorphisme  $G \times H \simeq G \times_X G$ , on voit que les fibres de  $G \rightarrow X$  au dessus de points fermés correspondent à des translatés de  $H$  par des points fermés de  $G$ . On en déduit en particulier la condition sur les fibres et on a l'implication voulue. Les arguments utilisés pour montrer cette équivalence établissent en même temps les assertions sur la lissité.  $\square$

### Produit contracté

**Proposition 2.3.15.** *Soit  $G$  un groupe algébrique et  $H$  un sous-groupe fermé tel que le passage au quotient  $G \rightarrow G/H$  admet une section au dessus d'un ouvert de  $G/H$ . Alors le produit contracté d'une variété existe toujours comme variété.*

*Soit de plus  $\mathbf{P}$  une propriété de morphisme de schémas locale au but pour la topologie fppf. On a alors plus généralement une équivalence de catégories, avec les flèches et applications sur les flèches que l'on imagine :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{morphismes de variétés } E \rightarrow G/H, \\ G\text{-équivariants et possédant } \mathbf{P} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{variétés } X \text{ munies d'une action de } H, \\ \text{telles que } X \rightarrow \text{Spec } k \text{ possède } \mathbf{P} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c} \pi: E \rightarrow G/H \mapsto \pi^{-1}(eH) \\ G \times^H X \rightarrow G/H \curvearrowright X \end{array}$$

*En particulier, si  $X$  est une variété quasi-projective (respectivement lisse), ce sera encore le cas de  $G \times^H X$ .*

*Démonstration.* Les hypothèses sur le quotient  $G/H$  permettent d'appliquer le théorème 2.1.29, 3), et le produit contracté de variétés existe toujours comme  $k$ -schéma. Il est aussi réduit. En effet, si  $X$  est une  $H$ -variété, comme  $H$  est fidèlement plat sur  $k$ , le quotient  $G \times X \rightarrow G \times^H X$  l'est aussi et par descente fidèlement plate, le caractère réduit de la variété  $G \times X$  entraîne celui de  $G \times^H X$ . Le théorème 2.1.31 et son équivalence de catégories entraîne toutes les autres propriétés souhaitées. En effet, il établit la correspondance pour les propriétés  $\mathbf{P}$  et notamment aussi que la propriété d'être séparé de type fini que possède  $X$  se transporte sur le morphisme  $G \times^H X \rightarrow G/H$  et donc sur  $G \times^H X \rightarrow \text{Spec } k$  puisque  $G/H \rightarrow \text{Spec } k$  la possède aussi (théorème 2.3.12). Le produit contracté de variétés est donc bien une variété. Enfin, on a de la même manière les dernières assertions sur la lissité et quasi-projectivité, puisque  $G \rightarrow G/H$  les vérifie encore (théorème 2.3.12).  $\square$

En lien avec la birationalité et la rationalité, on a :

**Proposition 2.3.16.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe et  $H$  un sous-groupe fermé tel que le passage au quotient  $G \rightarrow G/H$  admet une section au dessus d'un ouvert de  $G/H$ . Si  $X \rightarrow Y$  est un morphisme birationnel (respectivement rationnel, une résolution rationnelle en caractéristique nulle<sup>12</sup>)  $H$ -équivariant et possédant une propriété  $\mathbf{P}$  stable par changement de base et locale au but pour la topologie fppf, alors le morphisme induit  $G \times^H X \rightarrow G \times^H Y$  est birationnel (respectivement rationnel, une résolution rationnelle) et possède  $\mathbf{P}$ .*

*Démonstration.* L'existence des produits contractés de  $X$  et  $Y$  étant assurée, la stabilité des propriétés  $\mathbf{P}$  découle de la proposition 2.1.28. Pour celle de la birationalité, on applique la proposition

<sup>12</sup>. Des raisonnements analogues à ceux effectués pour la rationalité auraient sans doute pu aboutir à une forme de stabilité pour l'annulation des faisceaux  $R^i f_* \omega_X$ , mais pour plus de facilité, nous nous restreignons ici à la caractéristique nulle.

**2.2.14.** Pour celle de la rationalité, on applique la proposition 2.2.19. Enfin, lorsque  $X \rightarrow Y$  est une résolution rationnelle en caractéristique nulle, on suppose en plus de la rationalité,  $X$  et  $Y$  irréductibles et  $X$  lisse. Par la proposition 2.3.15,  $G \times^H X$  est encore lisse. Et comme  $G$  est connexe et  $G \times X \rightarrow G \times^H X$  surjectif, les produits contractés restent irréductibles. Par le théorème de Grauert-Riemenschneider 2.3.7, on a donc tous les éléments pour compléter la rationalité et avoir une résolution rationnelle entre les produits contractés.  $\square$

**Proposition 2.3.17.** *Soit  $G$  un groupe algébrique et  $H$  un sous-groupe fermé tel que le passage au quotient  $G \rightarrow G/H$  admet une section au dessus d'un ouvert de  $G/H$ . Si  $X \rightarrow Y$  est un morphisme birationnel  $H$ -équivariant et possédant une propriété  $\mathbf{P}$  stable par changement de base et locale au but pour la topologie fppf, alors le morphisme induit  $G \times^H X \rightarrow G \times^H Y$  est birationnel et possède  $\mathbf{P}$ .*

Lorsque le sous-groupe en jeu est un sous-groupe de Borel d'un groupe réductif, l'existence d'une section et le caractère projectif de la variété de drapeaux permet d'avoir plus spécifiquement :

**Proposition 2.3.18.** *Soit  $G$  un groupe algébrique réductif,  $B$  un sous-groupe de Borel et  $X$  une variété. Alors le produit contracté  $G \times^B X$  existe comme variété. De plus, si  $X$  projective ou propre, il en est de même pour  $G \times^B X$  et le morphisme  $G$ -équivariant  $G \times^B X \rightarrow G/B$ .*

*Démonstration.* On applique les propositions 2.3.15 et 2.3.13, entendu que le quotient  $G \rightarrow G/B$  possède classiquement une section au dessus d'un ouvert de Zariski. Les assertions sur la projectivité et la propreté se justifient de la même manière que dans la preuve de la proposition 2.3.15.  $\square$



## Chapitre 3

# Résultats préliminaires, réalisations et réduction modulo $p$

Dans tout ce chapitre, nous fixons encore un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle.

On présente de façon adaptée à notre situation, les ingrédients pour opérer une "réduction modulo  $p$ ". Il s'agit de "voir" en caractéristique positive des variétés définies sur un corps de caractéristique nulle pour leur transporter des propriétés dont les preuves peuvent se révéler plus aisées dans ce contexte modifié (grâce notamment à l'outil du scindage de Frobenius). Tout le matériel nécessaire à cet effet se trouve déjà dans EGAIV §8 [Gro66], où l'on réalise comme limites projectives, des schémas, des faisceaux de présentation finie.

Ici, on choisit de se spécialiser aux faisceaux cohérents et  $k$ -schémas de type fini. En effet, les résultats que nous visons (théorèmes 7.1.13 et 7.3.1) traiteront de variétés. De plus, remarquant que  $\text{Spec } k = \varprojlim \text{Spec } A$  où  $A$  parcourt toutes les  $\mathbb{Z}$  sous-algèbres de type fini de  $k$  assez grandes, on introduira des familles d'objets  $M_A$  définis relativement à  $A$ . La caractéristique positive, et même une infinité de caractéristiques positives, pourront alors apparaître en s'intéressant aux fibres au dessus des points fermés, comme le montre la proposition 3.0.1 ci-après. Mais soulignons néanmoins que les différents résultats de pure "réalisation" qui vont suivre (théorèmes 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, corollaire 3.1.7, théorème 3.3.4 et son corollaire 3.3.5) pourraient être établis ou formulés dans le cadre général de EGAIV §8 [Gro66], les seules hypothèses qu'il s'agirait d'ajouter, implicitement vérifiées dans notre situation, sont d'une part que notre schéma de base ( $S$  ou  $k$ ) est quasi-compact et quasi-séparé, et d'autre part que les morphismes  $\text{Spec } k = \varprojlim \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A$  sont plats.

**Proposition 3.0.1.** *Soit  $A$  une  $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini intègre de caractéristique nulle. L'ensemble  $\{ \text{car}(\kappa(x)) \mid x \text{ fermé dans } \text{Spec } A \}$  comprend tous les nombres premiers sauf un nombre fini d'entre eux.*

*Démonstration.* Considérons le morphisme  $f: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  issu de  $\mathbb{Z} \subset A$ . Comme  $f$  est de présentation finie (puisque de type fini de but noethérien), par le théorème de Chevalley (Théorème 1.8.4 EGAIV [Gro64]),  $f(\text{Spec } A)$  est constructible et contient donc un ouvert dense  $U$  de son adhérence. Mais celle-ci est  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  tout entier car,  $A$  étant intègre de caractéristique nulle,  $\mathbb{Z} \rightarrow A$  est injectif et  $f$  atteint clairement le point générique. Ainsi  $U$  est un ouvert non vide de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  et son complémentaire en est donc une partie finie. Par ailleurs, tout point fermé de  $f(\text{Spec } A)$  est atteint par un élément de  $\text{Spm } A$ . En effet<sup>1</sup>,  $A$  est un anneau de Jacobson puisque de type fini sur l'anneau de Jacobson  $\mathbb{Z}$  (proposition 10.34.19 [Sta21]), et donc  $\text{Spec } A$  est un espace de Jacobson (lemme 28.6.2 [Sta21]). Par conséquent, si  $x \in f(\text{Spec } A)$  est fermé, alors le fermé non

1. Rappelons qu'un anneau est de Jacobson si tout idéal premier est intersection des idéaux maximaux qui le contiennent. Un espace topologique est quand à lui de Jacobson si le sous-ensemble  $E$  de ses points fermés intersecte tout fermé en une partie dense de ce dernier, ou, de manière équivalente, si  $E$  rencontre tout sous-ensemble localement fermé et non vide.

vide  $f^{-1}(\{x\})$  contient un point fermé de  $\text{Spec } A$ , soit un élément de  $\text{Spm } A$ . Tous les points de  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  hors le point générique  $\eta$  étant fermés, on a donc notamment  $U - \{\eta\} \subset f(\text{Spm } A)$ . De plus, si  $f(m) = p\mathbb{Z}$  avec  $m \in \text{Spm } A$  et  $p\mathbb{Z} \in U - \{\eta\}$ , alors on a une injection,  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow A/m$  et  $\text{car}(A/m) = p$ . On en déduit l'inclusion :  $\{p \mid p \text{ premier}, p\mathbb{Z} \in U\} \subset \{\text{car}(A/m) \mid m \in \text{Spm } A\} = \{\text{car}(\kappa(x)) \mid x \text{ fermé dans } \text{Spec } A\}$ , ce qui donne le résultat voulu avec la description de  $U$ .  $\square$

**Remarque 3.0.2.** *On peut aussi montrer que pour tout  $x \in \text{Spec } A$  fermé,  $\kappa(x)$  est un corps fini (proposition 10.34.19 [Sta21]).*

### 3.1 Réalisation, notions et rappels

L'exemple typique de la réalisation d'une variété sur une  $\mathbb{Z}$ -algèbre de type fini est le suivant. Soit une  $k$ -variété affine  $X = \text{Spec } k[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$ . On pose  $B$  la  $\mathbb{Z}$ -sous-algèbre de type fini de  $k$  engendrée par les coefficients des  $f_1, \dots, f_r$ . Alors, pour toute  $A$  une  $\mathbb{Z}$ -sous-algèbre de type fini de  $k$  contenant  $B$ , le  $A$ -schéma de type fini  $X_A := \text{Spec } A[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_r)$  vérifie  $X_A \times_A k \simeq X$ . Une telle famille  $(X_A)_A$  est alors dite réalisation de  $X$ .

On introduit plus généralement les définitions suivantes qui font donc état de familles  $(M_A)_A$  pour  $A$  parcourant toutes les  $\mathbb{Z}$ -sous algèbres de type fini assez grande de  $k$ . Pour une plus légère rédaction, on omettra souvent de préciser ce domaine de variables.

**Définition 3.1.1.** *Soit  $k$  un corps,  $S$  un  $k$ -schéma de type fini,  $X$  et  $Y$  des  $S$ -schémas de présentation finie (ce qui équivaut ici à être de type fini),  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  des  $S$ -modules de présentation finie, ainsi que  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas (donc nécessairement de présentation finie) et  $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  un morphisme de faisceaux.*

(0) *On dit qu'une famille  $(S_A)_A$  réalise  $S$  sur  $k$  ou simplement réalise  $S$  si pour toutes  $\mathbb{Z}$ -sous-algèbres de type fini  $A$  et  $A'$  de  $k$  assez grandes avec  $A \subset A'$ ,  $S_A$  est un  $A$  schéma de présentation finie et :*

$$S_A \times_A k = S, \quad S_A \times_A A' = S_{A'}.$$

*On fixera pour les autres notions une telle réalisation  $(S_A)_A$  de  $S$ .*

(1) *On dit que  $(X_A)_A$  réalise  $X$  sur  $S$  ou simplement réalise  $X$  si cette famille réalise  $X$  sur  $k$  et si pour tout  $A$ ,  $X_A$  est un  $S_A$ -schéma (alors nécessairement de présentation finie) et  $X = X_A \times_A k = X_A \times_{S_A} S$ .*

(2) *On dit que  $(\mathcal{F}_A)_A$  réalise  $\mathcal{F}$  sur  $S$  ou simplement réalise  $\mathcal{F}$  si pour tout  $A$ ,  $\mathcal{F}_A$  est un  $S_A$ -module de présentation finie et  $\mathcal{F} = (S \rightarrow S_A)^* \mathcal{F}_A$ .*

(3) *On dit que  $(f_A : X_A \rightarrow Y_A)_A$  réalise  $f$  si  $(X_A)_A$  et  $(Y_A)_A$  réalisent respectivement  $X$  et  $Y$  sur  $S$  et si, pour tout  $A \subset A'$ ,  $f_A$  est un  $S_A$ -morphisme (donc nécessairement de présentation finie) avec  $f_{A'} = f_A \times_A A' = f_A \times_{S_A} S_{A'}$  et  $f = f_A \times_A k = f_A \times_{S_A} S$ .*

(4) *On dit que  $(\phi_A : X_A \rightarrow Y_A)_A$  réalise  $\phi$  si  $(\mathcal{F}_A)_A$  et  $(\mathcal{G}_A)_A$  réalisent respectivement  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  et si, pour tout  $A \subset A'$ ,  $\phi_A$  est un morphisme de  $S_A$ -modules avec  $\phi_{A'} = (S_{A'} \rightarrow S_A)^* \phi_A$  et  $\phi = (S \rightarrow S_A)^* \phi_A$ .*

(5) *Lorsqu'on spécifie  $X, \mathcal{F}, f : X \rightarrow Y$  ou encore  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  avoir une certaine propriété  $\mathbf{P}$ , on sous-entend que tous les termes à partir d'un certain rang d'une famille  $(X_A)_A, (\mathcal{F}_A)_A, (f_A : X_A \rightarrow Y_A)_A$  ou  $(\phi_A : X_A \rightarrow Y_A)_A$  la possèdent dès lors que l'on dira que ces familles sont des réalisations de  $X, \mathcal{F}, f$  ou  $\phi$  ayant  $\mathbf{P}$ . Dans le cas où  $\mathbf{P}$  est la propriété d'être un schéma en groupes, on suppose cependant en outre que les morphismes définissant la structure du  $k$ -groupe initial sont réalisés par ceux définissant les structures des  $A$ -groupes de la famille réalisante.*

Pour éclairer ces notions, donnons tout de suite plusieurs exemples.

**Exemple 3.1.2.** On fixe une réalisation  $(S_A)_A$  d'un  $k$ -schéma de type fini  $S$ .

- (i) Si  $i: Y \rightarrow X$  est un sous-schéma fermé d'un  $S$ -schéma, on dit que  $(i_A: X_A \rightarrow Y_A)_A$  réalise le **sous-schéma fermé**  $i$  si cette famille réalise le morphisme  $i$  et si pour toute  $A$  assez grande,  $i_A: X_A \rightarrow Y_A$  est un sous-schéma fermé, ou tout au moins une immersion fermée.
- (i) Si  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible ample sur  $S$ , on dit que  $(\mathcal{L}_A)_A$  réalise le **faisceau inversible ample**  $\mathcal{L}$  si cette famille réalise  $\mathcal{L}$  et si pour toute  $A$  assez grande,  $\mathcal{L}_A$  est inversible ample sur  $S_A$ .
- (ii) Si  $G$  est un  $S$ -groupe de type fini et  $H \subset G$  est un sous-schéma en groupes fermé, on dit que  $(u_A: H_A \rightarrow G_A)_A$  réalise le **sous-groupe fermé**  $H \subset G$  sur  $S$  si cette famille réalise le sous-schéma fermé  $H \hookrightarrow G$ , si  $(H_A)_A$  réalise le  $S$ -groupe  $H$ , si  $(G_A)_A$  réalise le  $S$ -groupe  $G$  et si pour toute  $A$  assez grande,  $u_A$  est un morphisme de  $S_A$ -groupes.
- (iii) Si  $G$  est un  $S$ -groupe agissant sur un  $S$ -schéma  $X$ , on dit que  $(\alpha_A: G_A \times_{S_A} X_A \rightarrow X_A)_A$  réalise cette **action** si cette famille réalise le  $S$ -morphisme d'action  $G \times_S X \rightarrow X$ , si  $(G_A)_A$  réalise le groupe  $G$  sur  $S$ , et si pour tout  $A$ ,  $\alpha_A: G_A \times_{S_A} X_A \rightarrow X_A$  définit une action de  $G_A$  sur  $X_A$ .

**Théorème 3.1.3.** (Grothendieck, Théorème 8.8.2 et 8.5.2 EGA IV [Gro66]) Soit  $S$  un  $k$ -schéma de type fini et  $(S_A)_A$  une réalisation de  $S$ .

- (i) Soit  $X$  un  $S$ -schéma de présentation finie. Alors, il existe une réalisation  $(X_A)_A$  de  $X$  sur  $S$ .
- (ii) Soit  $\mathcal{F}$  un  $S$ -module de présentation finie. Alors, il existe une réalisation  $(\mathcal{F}_A)_A$  de  $\mathcal{F}$ .
- (iii) Soit  $X$  et  $Y$  des  $S$ -schémas de présentation finie et  $(X_A)_A, (Y_A)_A$  des réalisations de  $X$  et  $Y$  sur  $S$ . On a une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_{S_A}(X_A, Y_A) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_S(X, Y) \\ \langle f_A \rangle & \mapsto & (f_A)_k = (f_A)_S \end{array} \quad (3.1)$$

- (iv) Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  des  $S$ -modules de présentation finie et  $(\mathcal{F}_A)_A, (\mathcal{G}_A)_A$  des réalisations de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ . On a une bijection :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\rightarrow} \text{Hom}_{S_A}(\mathcal{F}_A, \mathcal{G}_A) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_S(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \langle \phi_A \rangle & \mapsto & (\phi_A)_S \end{array}$$

**Théorème 3.1.4.** (Grothendieck, Théorème 8.10.5 EGAIV [Gro66]) La bijection (3.1) du précédent théorème se restreint en une bijection :

$$\lim_{\rightarrow} \text{Hom}_{S_A}^{\mathbf{P}}(X_A, Y_A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_S^{\mathbf{P}}(X, Y), \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{P}$  est la propriété pour un morphisme d'être : un isomorphisme, un monomorphisme, une immersion générale, ouverte ou fermée, séparé, surjectif, radiciel, affine, quasi-affine, fini, quasi-fini, propre, projectif ou encore quasi-projectif.

La preuve de EGAIV lorsque  $\mathbf{P}$  est cette dernière propriété de projectivité ou quasi-projectivité fait état du résultat plus précis suivant :

**Théorème 3.1.5.** (Grothendieck, Proposition 8.5.5 et Lemme 8.10.5.2 EGAIV [Gro66]) Soit  $(\mathcal{L}_A)_A$  réalisant le  $S$ -module  $\mathcal{L}$ . Alors  $\mathcal{L}$  est inversible ample si et seulement si pour toute  $A$  assez grande,  $\mathcal{L}_A$  est inversible ample.

Le théorème 3.1.3 donne facilement, avec (i) et la surjectivité de (3.1), l'existence brute de plusieurs réalisations de schémas ou morphismes. En outre, comme l'indique la scholie 8.8.3 de EGAIV ([Gro66]), l'injectivité de (3.1) permettra de préserver leurs éventuelles propriétés de commutation tandis que celle de sa restriction (3.2) permettra de préserver les différentes propriétés listées dans le théorème 3.1.4. Enfin, les propriétés en jeu étant toutes stables par changement de base, on pourra opérer des relèvements simultanés. On a ainsi la remarque suivante. On donne aussi un exemple de l'utilisation de ces arguments avec le corollaire 3.1.7 ci-après sur les schémas en groupes, dont nous ferons usage par la suite dans le théorème 3.4.1.

**Remarque 3.1.6.** Soit  $S$  un  $k$ -schéma de type fini et  $(S_A)_A$  un relèvement de  $S$ .

- (i) Un diagramme commutatif de morphismes de  $S$ -schémas de présentation finie peut être relevé en une famille de diagrammes commutatifs de morphismes de  $S_A$ -schémas de présentation finie. De même pour des morphismes de  $S$ -modules de présentation finie.
- (ii) Toute donnée finie comprenant des schémas, modules, morphismes de schémas et de faisceaux, diagrammes commutatifs de schémas ou de faisceaux avec d'éventuelles propriétés et combinaisons de propriétés de commutation, listées par le théorème 3.1.4 ou encore d'inversibilité et d'amplitude pour les faisceaux, peut être réalisée comme telle, dès lors que les différents objets qui y interviennent et qui peuvent recevoir cette notion sont de présentation finie sur  $S$ .
- (iii) Toute réalisation partielle d'une telle donnée finie (c'est-à-dire où l'on ne réalise que certains morphismes, certains schémas, certaines propriétés, etc) peut être complétée pour en fournir une réalisation complète.

Le corollaire suivant est ainsi un exemple d'application de ce dernier point (iii).

**Corollaire 3.1.7.** Soit  $G$  et  $G'$  des  $k$ -groupes algébriques et  $u:G \rightarrow G'$  un morphisme de  $k$ -schémas. Désignons par  $\mathbf{P}$  la propriété pour un morphisme d'être un morphisme de groupes, une immersion fermée de groupes, un isomorphisme de groupes ou encore l'une quelconque des propriétés évoquées dans le théorème 3.1.4. On suppose que  $u$  possède  $\mathbf{P}$ . Si  $(G_A)_A$  et  $(G'_A)_A$  sont des familles qui réalisent les  $k$ -groupes  $G$  et  $G'$ , alors il existe une famille de morphismes  $(u_A:G_A \rightarrow G'_A)_A$  qui, à partir de  $A$  assez grande, réalise  $u$  comme tel (avec  $\mathbf{P}$  pour les morphismes).

*Démonstration.* Soit  $(G_A)_A$  et  $(G'_A)_A$  comme dans l'énoncé et supposons  $u$  avoir  $\mathbf{P}$ . Par la surjectivité de (3.2), il existe une famille  $(u_A:G_A \rightarrow G'_A)_A$  qui réalise le morphisme de schémas  $u$  et dont les termes possèdent  $\mathbf{P}$ , hors éventuellement la propriété d'être un morphisme de groupes. Montrons que cette dernière propriété peut aussi être supposée. Pour  $A$  assez grande,  $G_A$  et  $G'_A$  sont des  $A$ -groupes et notons  $m_A$  et  $m'_A$  leur morphisme produit ainsi que  $e_A$  et  $e'_A$  leur morphisme unité. On considère alors pour toute  $A$  assez grande, les morphismes  $u_A m_A$  et  $m'_A(u_A, u_A):G_A \times_A G_A \rightarrow G'_A$ , ainsi que  $u_A e_A$  et  $e'_A:Spec A \rightarrow G'_A$ . Clairement, leur changement de base par  $Spec k \rightarrow Spec A$  fournit les morphismes  $um, m'(u, u):G \times_k G \rightarrow G'$  et  $ue, e':Spec k \rightarrow G'$  où  $m$  et  $m'$ ,  $e$  et  $e'$  sont les produits et les unités dans  $G$  et  $G'$ . Mais comme  $u$  est un morphisme de  $k$ -groupes, on a  $um = m'(u, u)$  ainsi que  $ue = e'$ . Aussi, par injectivité de (3.1), il existe  $B \supset A$  tel que  $(u_A m_A)_B = (m'_A(u_A, u_A))_B$  et  $(u_A e_A)_B = (e'_A)_B$  d'où  $u_B m_B = m'_B(u_B, u_B)$  et  $u_B e_B = e'_B$ . Cela signifie que  $u_B$  est un morphisme de groupes  $G_B \rightarrow G'_B$ . Tous ses changements de bases  $Spec B' \rightarrow Spec B$  seront encore des morphismes de groupes et on montre ainsi que la famille  $(u_A)_A$  (en considérant des  $A$ -termes pour  $A$  assez grand), réalise aussi  $u$  comme morphisme de  $k$ -groupes.  $\square$

## 3.2 Image schématique

En vue de la section suivante qui fournira une réalisation d'une image schématique (théorème 3.3.4), nous rappelons simplement ici la définition et quelques propriétés élémentaires attachées à cette notion.

Nous renvoyons à la section de 29.6 de [Sta21] pour les preuves et davantage de détails.

**Définition 3.2.1.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. Il existe un sous-schéma fermé  $Z \rightarrow Y$  vérifiant la propriété universelle suivante : si  $Z' \rightarrow Y$  est un sous-schéma fermé à travers lequel  $f$  se factorise, alors il existe un (unique) morphisme  $Z \rightarrow Z'$  tel que :

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Z' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Y. \end{array}$$

On note  $Im f$  ce sous-schéma fermé ainsi univoquement caractérisé et on l'appelle l'image schématique de  $f$ .

**Corollaire 3.2.2.** Si un morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , se factorise à travers un morphisme schématiquement dominant  $X \rightarrow Z$  suivi d'une immersion fermée  $Z \rightarrow Y$ , alors  $Z = Im f$ .

*Démonstration.* Si l'on suppose une telle factorisation, la propriété de caractérisation de  $Im f$  donne un morphisme de  $Y$ -schéma  $Im f \rightarrow Z$ . Celle de  $Z$ , image de  $X \rightarrow Z$ , en donne alors l'inverse.  $\square$

**Proposition 3.2.3.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact. Alors :

- (i)  $\mathcal{I} := Ker( O_Y \xrightarrow{f^\#} f_* \mathcal{O}_X )$  est quasi-cohérent et  $Im f$  est le sous-schéma fermé défini par  $\mathcal{I}$ .
- (ii)  $Im f = \overline{f(X)}$  topologiquement.

**Corollaire 3.2.4.** On a les assertions suivantes :

- (i) La formation de l'image schématique d'un morphisme quasi-compact commute aux changements de base plats : si  $f : X \rightarrow Y$  est quasi compact et  $T \rightarrow Y$  plat, on a  $(Im f)_T \simeq Im f_T$  comme  $Y_T$ -schémas.
- (ii) La composition à gauche par un morphisme quasi-compact schématiquement dominant ne change pas l'image schématique d'un morphisme quasi-compact : si  $f : X \rightarrow Y$  est quasi-compact et  $g : S \rightarrow X$  quasi-compact et schématiquement dominant, alors  $Im f = Im fg$ .

**Remarque 3.2.5.** Si  $f$  n'est pas quasi-compact, l'inclusion  $\overline{f(X)} \subset Im f$  n'est pas forcément une égalité, et la formation de l'image peut ne pas même commuter à la restriction d'ouvert (voir Exemple 29.3.4 de [Sta21]).

La formation de l'image schématique entretient un lien particulier avec la notion de schéma réduit. Nous rappelons quelques propriétés classiques, que l'on peut retrouver dans la section 26.12 de [Sta21].

**Proposition 3.2.6** (Lemme 26.12.7 [Sta21]). Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas avec  $X$  réduit. Pour que  $f$  se factorise à travers un sous-schéma fermé  $Z \rightarrow Y$ , il faut et il suffit que  $f(X) \subset Z$  ensemblistement.

**Définition 3.2.7** (Lemme 26.12.4 [Sta21]). *Soit  $X$  un schéma et  $A \subset X$  une partie fermée. Il existe un sous-schéma fermé  $Z \rightarrow X$  tel que  $Z$  est réduit et  $Z = A$  topologiquement. La proposition précédente montre qu'il vérifie la propriété universelle suivante : si  $Z' \rightarrow X$  est un sous-schéma fermé avec  $Z' = A$  topologiquement, alors il existe un unique morphisme  $Z \rightarrow Z'$  tel que :*

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Z' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X. \end{array}$$

$Z \rightarrow X$  est donc univoquement caractérisé et on l'appelle l'unique sous-schéma fermé réduit issu de  $A$  ; on le notera  $A_{red}$ .

On en déduit alors une forme explicite de l'image schématique dans le cas d'une source réduite.

**Proposition 3.2.8** (Lemme 29.6.7 [Sta21]). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas avec  $X$  réduit. Alors  $Im f = \overline{f(X)}_{red}$ .*

**Remarque 3.2.9.** (i) *Même si  $f$  est quasi-compact, la formation de l'image schématique ne commute pas forcément avec un changement de base non plat. On peut considérer l'exemple V.4 de [EH00]) avec, pour un corps  $k$ , la projection de la double droite dans le plan*

$$p : \text{Spec } k[x, y, z]/(x^2, y^2, xy, x + zy) \rightarrow \text{Spec } k[x, z],$$

*et du changement de base correspondant à l'inclusion de la droite  $\text{Spec } k[x]$  dans ce plan. L'image schématique du changement de base de  $p$  est alors le point fermé  $\text{Spec } k[x]/(x)$  tandis que le changement de base de l'image de  $p$  est le double point  $\text{Spec } k[x]/(x^2)$ .*

(ii) *De manière générale, la proposition 3.2.8 montre que tout changement de base qui rend la source réduite mais non pas l'image schématique d'origine ne pourra commuter avec la formation de l'image.*

Pour finir, signalons simplement que la notion d'image schématique permet de définir la notion appropriée de densité au sein des schémas généraux (voir Définition 11.10.2 [Gro66] et Section 29.7 [Sta21]). Dans un schéma non réduit en effet il peut exister des ouverts topologiquement denses mais sur lesquels des sections non triviales s'annulent comme on le voit avec l'exemple suivant, que nous devons à Matthieu Romagny.

**Exemple 3.2.10.** *Soit un corps  $k$  et  $X := \text{Spec } k[e, t]/(e^2, et)$ . C'est un schéma irréductible de support  $X_{red} \simeq \mathbb{A}_k^1$  et le  $k$ -morphisme naturel  $b : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow X$ , de type fini séparé, induit un isomorphisme  $\text{Spec } k[t, 1/t] \simeq D_X(t)$ . L'ouvert élémentaire  $D_X(t)$  est topologiquement dense, mais  $D_X(t) \subset X$  n'est pas schématiquement dominant, de même que  $b$ . La section non nulle  $\bar{e} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  s'annule sur  $D_X(t)$  et se trouve dans le noyau du comorphisme de  $b$ .*

### 3.3 Réalisation et image schématique

L'objet de cette sous-section est le théorème 3.3.4 sur le relèvement d'une image schématique. Avec les notions et résultats principaux rappelés ci-dessus, on utilisera les deux propositions suivantes 3.3.1 et 3.3.2 pour sa démonstration.

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $X \rightarrow S$  un morphisme plat et  $T \rightarrow S$  un morphisme quasi-compact schématiquement dominant. Si  $X_T$  est intègre, ce sera aussi le cas de  $X$ .*

*Démonstration.* Soit un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X_T & \longrightarrow & T \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{u} & S, \end{array}$$

avec  $f$  quasi-compact schématiquement dominant et  $u$  plat. Par changement de base plat  $g$  reste schématiquement dominant (le corollaire 3.2.4 (i) donne des isomorphismes de  $X$ -schémas  $X \simeq S_X = (Im f)_X \simeq Im g$ ). Et par caractérisation de l'image schématique dans le cas d'une source réduite (proposition 3.2.8), l'intégrité de  $X_T$  entraîne celle de  $X \simeq Im g \simeq \overline{g(X_T)}_{red}$ .  $\square$

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $S$  un schéma et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $S$ -schémas de présentation finie avec  $Im f \rightarrow S$  ouvert. Alors il existe  $U \subset S$  ouvert non vide tel que pour tout changement de base  $\emptyset \neq T \rightarrow U$ , on a :*

*Si  $(Im f)_T$  est intègre et  $X_T$  réduit, alors  $Im f_T \simeq (Im f)_T$  comme  $Y_T$ -schémas.*

*Démonstration.*  $f$  se décompose en un morphisme  $\tilde{f} : X \rightarrow Im f$  suivi de l'immersion fermée  $Im f \rightarrow Y$ . Une immersion fermée étant quasi-séparée et localement de type fini, on trouve que  $\tilde{f}$  est de présentation finie comme  $f$  (proposition 10.35 [GW10]). En outre,  $f$  étant quasi-compact,  $Im f$  s'identifie topologiquement à  $\overline{f(X)} = \overline{\tilde{f}(X)}$  et  $\tilde{f}$  est (topologiquement) dominant (proposition 3.2.3 (ii)). Avec enfin  $Im f \rightarrow S$  ouvert, on peut appliquer le lemme ci-après qui donne l'existence de  $U \subset S$  ouvert non vide tel que pour tout changement de base  $\emptyset \neq T \rightarrow U$ ,  $\tilde{f}_T(X_T)$  contient un ouvert non vide de  $(Im f)_T$ . Si donc ce dernier schéma est intègre, on a  $(\tilde{f}_T(X_T))_{red} \simeq (Im f)_T$ . Si en outre,  $X_T$  est réduit, la caractérisation de l'image schématique dans le cas d'une source réduite (proposition 3.2.8) donne alors  $Im \tilde{f}_T \simeq (\tilde{f}_T(X_T))_{red} \simeq (Im f)_T$  et  $\tilde{f}_T$  est schématiquement dominant. Par le corollaire 3.2.2, la factorisation de  $f_T$  à travers le morphisme schématiquement dominant  $\tilde{f}_T$  suivie de l'immersion fermée  $(Im f)_T \hookrightarrow Y_T$  donne finalement l'identification voulue de  $Y_T$ -schémas :  $Im f_T \simeq (Im f)_T$ .  $\square$

**Lemme 3.3.3.** *Soit  $S$  un schéma,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme (topologiquement) dominant de  $S$ -schémas, de présentation finie avec  $Y \rightarrow S$  ouvert. Alors, il existe  $U \subset S$  un ouvert non vide tel que pour tout changement de base  $\emptyset \neq T \rightarrow U$ ,  $f_T(X_T)$  contient un ouvert non vide de  $Y_T$ .*

*Démonstration.* Comme  $f$  est de présentation finie, par le théorème de Chevalley (Théorème 1.8.4 [Gro64]),  $\overline{f(X)}$  est une partie constructible de  $Y$ . Elle contient donc un ouvert dense  $V$  de son adhérence  $\overline{f(X)}$ , égale à  $Y$  par dominance. Comme  $Y \rightarrow S$  est ouvert, l'image de  $V$  dans  $S$  sera un ouvert non vide  $U$  de  $S$ . Par restriction à ce dernier, on a alors un diagramme où les deux flèches supérieures horizontales sont surjectives et  $V \rightarrow Y_U$  est une immersion ouverte :

$$\begin{array}{ccccc} f_U^{-1}(V) & \twoheadrightarrow & V & \twoheadrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ X_U & \xrightarrow{f_U} & Y_U & & \end{array}$$

Par conséquent, on préserve ces propriétés de surjectivité et d'immersion ouverte relativement à tout changement de base  $\emptyset \neq T \rightarrow U$  conduisant au diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} (f_U^{-1}(V))_T & \twoheadrightarrow & V_T & \twoheadrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ X_T & \xrightarrow{f_T} & Y_T & & \end{array}$$

On en déduit que  $V_T \neq \emptyset$  et que  $f_T(X_T)$  contient l'image, ouverte, de  $V_T$  dans  $Y_T$ .  $\square$

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $k$  un corps et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de  $k$ -schémas de type fini. Soit  $(f_A : X_A \rightarrow Y_A)_A$  une réalisation de  $f$ . On suppose que  $Y$  est propre sur  $k$  et qu'il existe  $A$  telle que  $X_A$  soit à fibres géométriques intègres (ce sera donc aussi le cas de  $X_{A'}$  pour  $A' \supset A$  et  $X \simeq ((X_A)_{\overline{k}})_k$  sera intègre). Alors, il existe  $A_0$  telle que :*

(i)  $(Im f_A)_{A_0 \subset A}$  est une famille qui relève  $Im f$ .

(ii) Pour  $A_0 \subset A$ ,

- (a)  $X_A$  est intègre et plat sur  $A$ ,
- (b)  $Im f_A$  est intègre, à fibres géométriques intègres, plat, propre et de présentation finie sur  $A$ .
- (c) La formation de l'image schématique de  $f_A$  commute à tout changement de base  $\emptyset \neq T \rightarrow Spec A$  rendant  $(Im f_A)_T$  et  $(X_A)_T$  intègres. En particulier, pour tout  $s \in Spec A$ , on a un isomorphisme de  $(Y_A)_{\bar{s}}$ -schémas :

$$Im (f_A)_{\bar{s}} \simeq (Im f_A)_{\bar{s}}.$$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que si  $A$  vérifie les propriétés de (ii), alors ce sera aussi le cas de  $B$  contenant  $A$ , et de plus,  $(Im f_B)_{A \subset B}$  relèvera  $Im f$ . Puisque  $Spec k \rightarrow Spec A$  est plat et  $f_A$  quasi-compact car de présentation finie, on a (proposition 3.2.3 (iii))  $(Im f_A)_k \simeq Im (f_A)_k \simeq Im f$  comme  $Y$ -schémas. Par changement de base,  $X_B$  et  $(Im f_A)_B$  gardent sur  $B$  les propriétés de  $X_A$  et  $Im f_A$  sur  $A$  :  $X_A$  est plat,  $Im f_A$  est plat, propre, de présentation finie et à fibres géométriquement intègres. De plus, un changement de base  $\emptyset \neq T \rightarrow Spec B$  conduit par composition à un changement de base  $\emptyset \neq T \rightarrow Spec A$  et on a les identifications :

$$(X_B)_T \simeq ((X_A)_B)_T \simeq (X_A)_T, ((Im f_A)_B)_T \simeq (Im f_A)_T, Im (f_B)_T \simeq Im (f_A)_T.$$

Par conséquent, il suffit d'établir l'intégrité de  $X_B$  et  $Im (f_A)_B$  et une identification  $(Im f_A)_B \simeq Im f_B$  de  $Y_B$ -schémas pour avoir toutes les propriétés désirées. Mais avec l'hypothèse (c) vérifiée par  $f_A$  et appliquée à  $\emptyset \neq Spec B \rightarrow Spec A$ , cette double intégrité est suffisante. Pour la montrer, on note que  $Spec k \rightarrow Spec B$  est schématiquement dominant, que  $X_B$  et  $(Im f_A)_B$  sont plats sur  $B$ , que  $X$  et donc (proposition 3.2.8)  $Im f$  sont intègres et on applique la proposition 3.3.1 aux diagrammes cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Spec k \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_B & \longrightarrow & Spec B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Im f & \longrightarrow & Spec k \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Im f_A)_B & \longrightarrow & Spec B. \end{array}$$

Montrons maintenant l'existence de  $A$  vérifiant les assertions de (ii). Tout d'abord, il existe  $A$  assez grande pour que  $X_A$  soit à fibres géométriquement intègres, et  $Im f_A$  propre et de présentation finie sur  $A$ . En effet, le fait d'être de présentation finie est même valable pour tout  $A$  puisque  $Im f_A \rightarrow Spec A$  est de type fini avec  $Spec A$  localement noethérien, étant la composée d'une immersion fermée et de  $Y_A \rightarrow Spec A$ . La propriété se déduit de cette composition à partir de la propriété du second membre pour toute  $A$  assez grande, en appliquant le théorème 8.10.5 de [Gro66] (voir théorème 3.1.4 ci-dessus) à la famille  $(Y_A \rightarrow Spec A)_A$  qui relève le morphisme propre  $Y \rightarrow Spec k$ . On entreprend alors d'établir les autres assertions par localisations successives de  $A$ . Comme la formation de l'image schématique commute à la restriction aux ouverts (proposition 3.2.3 (iii)) et que les propriétés en jeu sont stables par changement de base, on sera assuré de les préserver toutes à chaque étape.

(platitude) Comme  $Spec A$  est intègre et que  $Im f_A \rightarrow Spec A$  est de type fini, localement de présentation finie, par propriété générique de la platitude (proposition 8.9.4 [Gro66]), il existe un ouvert non vide  $U \subset Spec A$  tel que la restriction  $(Im f_A)_U \rightarrow U$  est plat. Un même raisonnement donne l'existence d'un ouvert  $V \subset Spec A$  non vide tel que  $X_{A|V} \rightarrow V$  est plat. Les assertions de platitude sont donc vérifiées au dessus de  $U \cap V \neq \emptyset$ . Quitte à remplacer  $A$  par une localisation en un élément, on peut donc supposer  $Im f_A$  et  $X_A$  plats sur  $A$ .

(intégrité fibres) Si l'on s'intéresse à la fibre au point générique  $\eta \in Spec A$ , alors la platitude de  $Spec \overline{\kappa(\eta)} \rightarrow Spec A$  donne (proposition 3.2.3 (iii)) l'isomorphisme de  $(Y_A)_{\overline{\eta}}$ -schémas

$$Im (f_A)_{\overline{\eta}} \simeq (Im f_A)_{\overline{\eta}}.$$

Or puisque  $(X_A)_{\bar{\eta}}$  est intègre, c'est aussi le cas de  $Im (f_A)_{\bar{\eta}}$  identifié à  $\overline{(f_A)_{\bar{\eta}}((X_A)_{\bar{\eta}})_{red}}$  (proposition 3.2.8). Ainsi,  $(Im f_A)_{\bar{\eta}}$  est intègre. Mais comme  $Im f_A \rightarrow Spec A$  est propre, plat, de présentation finie, par le théorème 12.2.4 [Gro66], l'ensemble des  $s \in Spec A$  tel que  $(Im f_A)_{\bar{s}}$  est intègre est un ouvert de  $Spec A$ . C'est donc un ouvert non vide et quitte à remplacer encore  $A$  par une localisation en un élément, on peut supposer  $(Im f_A)_{\bar{s}}$  intègre pour tout  $s \in Spec A$ .

(changement base) Ainsi  $f_A : X_A \rightarrow Y_A$  est un morphisme de  $A$ -schémas, de présentation finie, avec  $Im f_A \rightarrow Spec A$  ouvert puisque plat et localement de présentation finie (Théorème 14.33 [GW10]). On peut donc appliquer la proposition 3.3.2 et, quitte à remplacer une dernière fois  $A$  par une localisation en un élément, on peut supposer que l'assertion (c) sur la formation de l'image et le changement de base est vérifiée pour  $f_A$ .

(intégrité)  $Im f_A$  et  $X_A$  étant plats sur  $A$ , un raisonnement déjà effectué donne l'intégrité de ces deux schémas en appliquant la proposition 3.3.1 aux deux diagrammes cartésiens :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Spec k \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_A & \longrightarrow & Spec A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Im f & \longrightarrow & Spec k \\ \downarrow & & \downarrow \\ Im f_A & \longrightarrow & Spec A. \end{array}$$

□

**Corollaire 3.3.5.** *Soit  $k$  un corps,  $G$  un  $k$ -groupe agissant sur un  $k$ -schéma de type fini  $X$ . Soit  $Z$  un sous-schéma fermé de  $X$  et  $H_1, H_2, \dots, H_n$  des sous-groupes fermés de  $G$ . Soit des familles  $(G_A)_A, (X_A)_A, (G_A \times_A X_A \rightarrow X_A)_A, (Z_A \hookrightarrow X_A)_A, (H_{iA} \hookrightarrow G_A)_A, i = 1, \dots, n$  réalisant toutes ces données. On suppose que pour  $A$  assez grande  $Z_A$  et tous les  $H_{iA}$  sont à fibres géométriquement intègres et que  $X$  est propre sur  $k$ . Alors il existe une famille  $(Y_A \hookrightarrow X_A)_A$  réalisant le sous-schéma fermé  $\overline{(H_1 H_2 \dots H_n \cdot Z)}_{red} \hookrightarrow X$  et telle que, pour toute  $A$  assez grande :*

(i)  $Y_A$  est propre et plat sur  $A$ , à fibres géométriquement intègres.

(ii)  $(Y_A)_{\bar{s}} \simeq \overline{(H_{1A\bar{s}} H_{2A\bar{s}} \dots H_{nA\bar{s}} \cdot Z_{A\bar{s}})_{red}}$  comme  $X_{A\bar{s}}$ -schémas, pour tout  $s \in Spec A$ .

*Démonstration.* Par récurrence, il suffit de montrer le résultat pour un seul sous-groupe  $H = H_1$ , ( $n = 1$ ). Soit donc les données de l'énoncé dans ce cas et considérons pour  $A$  assez grande le morphisme  $f_A : H_A \times_A Z_A \rightarrow X_A$  défini comme la restriction à  $H_A \times_A Z_A \hookrightarrow G_A \times_A X_A$  du morphisme d'action  $G_A \times_A X_A \rightarrow X_A$ . La famille de tels morphismes est donc clairement une réalisation du morphisme de  $k$ -schémas de type fini  $f : H \times_k Z \rightarrow X$  défini de manière analogue par restriction puis action de  $G$  sur  $X$ . De plus, comme le produit de deux schémas au dessus d'un corps parfait reste intègre (proposition 5.51 [GW10]),  $H_A \times_A Z_A$  est à fibres géométriquement intègres pour  $A$  assez grande. On peut donc appliquer le théorème 3.3.4 précédent : il existe une famille de termes  $Y_A \hookrightarrow X_A$  réalisant le sous-schéma fermé  $Im f \hookrightarrow X$ , avec notamment, pour  $A$  assez grande,  $Y_A$  plat et propre sur  $A$  et des isomorphismes  $(Y_A)_{\bar{s}} \simeq Im (f_A)_{\bar{s}}$  de  $(X_A)_{\bar{s}}$ -schémas pour tout  $s \in Spec A$ . Pour conclure, il suffit alors de noter les identifications  $Im f \simeq \overline{(H \cdot Z)}_{red}$  et  $Im (f_A)_{\bar{s}} \simeq \overline{(H_{A\bar{s}} \cdot Z_{A\bar{s}})_{red}}$  pour tout  $s \in Spec A$ . Elles proviennent simplement de la nature réduite des sources  $H_A \times_A Z_A$  et  $H \times_k Z$  qui caractérise les images schématiques en jeu (proposition 3.2.8). □

### 3.4 Réalisation de certaines adhérences dans la variété des drapeaux

L'objet de cette section est le corollaire 3.4.2. Il permet, selon la proposition 3.0.1 et les remarques du début de ce chapitre, de "voir" en caractéristique positive, certaines variétés consistant en des adhérences d'orbites. On le déduit des résultats de réalisation généraux de la section

précédente, et des travaux sur la structure des groupes réductifs (SGA3, Exposés XIX à XXVI [DGA11b]) qui permettent d'obtenir des réalisations plus précises sur les groupes algébriques.

**Théorème 3.4.1.** *Soit  $k$  un corps. Soit  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire connexe semi-simple,  $T$  un tore maximal déployé inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ , et soit  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $H \subset G$  un sous-groupe fermé connexe réductif tel que  $B_H := B \cap H$  et  $T_H := T \cap H$  soient respectivement un sous-groupe de Borel et un tore maximal déployé de  $H$ . Soit encore  $w$  dans  $W$ .*

*Alors il existe des familles  $(G_A)_A, (B_A)_A, (T_A)_A, (H_A)_A, (W_A)_A, (\mathcal{B}_A)_A, (w_A : \text{Spec } A \rightarrow W_A)_A$  réalisant respectivement les  $k$ -groupes  $G, B, T, H, W$ , la variété de drapeaux  $G/B$  et l'élément (point fermé)  $w$  vu comme section  $\text{Spec } k \rightarrow W$ . De plus, pour toute  $A$  assez grande, on a :*

- $G_A$  est semi-simple.
- $H_A$  est un sous-groupe fermé de  $G_A$  réductif.
- $B_A$  est un sous-groupe de Borel de  $G_A$ . De plus,  $B_A \cap H_A = B_A \times_{G_A} H_A$  est un sous-groupe de Borel de  $H_A$ .
- $T_A$  est un tore maximal de  $G_A$ . De plus,  $T_A \cap H_A = T_A \times_{G_A} H_A$  est un tore maximal de  $H_A$ .
- $W_A$  représente le groupe de Weyl relatif à  $G_A$  et  $T_A$ . C'est aussi un sous-schéma en groupes ouvert de  $\underline{\text{Aut}}_A(T_A)$ <sup>2</sup>, canoniquement isomorphe au  $A$ -groupe constant  $W[A]$ . Il est donc en particulier étale sur  $A$  et fini.
- $\mathcal{B}_A$  est de présentation finie, lisse et projectif sur  $A$ , à fibres géométriques intègres. De plus, il représente le foncteur

$$\{ A\text{-schémas} \} \rightarrow \text{Ens}, S \mapsto \{ \text{Sous-groupes de Borel de } (G_A)_S \}$$

*et le  $A$ -faisceau quotient  $G_A/B_A$ . En particulier, ses fibres géométriques sont canoniquement isomorphes à la variété de drapeaux formée par le quotient des fibres correspondantes de  $G_A$  par celles de  $B_A$ .*

*Démonstration.* On commence par employer des résultats classiques sur les schémas en groupes (SGA3, Exposés XIX à XXVI [DGA11b]) qui assurent rapidement l'existence des schémas proposés et la plupart des assertions souhaitées.

Comme d'une part  $G$  est semi-simple ayant  $(T, B)$  comme couple de Killing (ie la donnée d'un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel) et  $W$  comme groupe de Weyl, et que d'autre part  $H$  est réductif ayant  $(T \cap H, B \cap H)$  comme couple de Killing, alors, par équivalence de catégories entres groupes réductifs épinglés et données radicielles épinglées (voir SGA3 Exposé XXV Théorème 1 et ses corollaires, [DGA11b]), il existe  $\underline{G}, \underline{B}, \underline{T}$ , et  $\underline{H}, \underline{T}_H, \underline{B}_H$ , des schémas en groupes sur  $\mathbb{Z}$ , tels que :

- $\underline{G}$  est semi-simple,  $(\underline{T}, \underline{B})$  est un couple de Killing de  $\underline{G}$ ,  $\underline{W}$  est le groupe de Weyl de  $\underline{G}$  relatif à  $\underline{T}$  et on a les identifications de  $k$ -groupes  $\underline{G}_k \simeq G, \underline{B}_k \simeq B, \underline{T}_k \simeq T, \underline{W}_k \simeq W$ .
- $\underline{H}$  est réductif,  $(\underline{T}_H, \underline{B}_H)$  est un couple de Killing de  $\underline{H}$  et on a les identifications de  $k$ -groupes  $\underline{H}_k \simeq H, \underline{B}_{H,k} \simeq B \cap H, \underline{T}_{H,k} \simeq T \cap H$ .

En outre, par SGA3 [DGA11b] Exposé XIX Proposition 6.3 et Exposé XXII, paragraphe 3, il existe encore un  $\mathbb{Z}$ -schéma en groupes  $\underline{W}$  tel que :

- $\underline{W}$  représente le groupe de Weyl de  $\underline{G}$  relativement à  $\underline{T}$ , c'est un sous-schéma ouvert de  $\underline{\text{Aut}}_{\mathbb{Z}}(\underline{T})$ , naturellement isomorphe au  $\mathbb{Z}$ -groupe constant  $W[\mathbb{Z}]$ .

2. Rappelons que pour  $G$  un  $S$ -schéma en groupes,  $\underline{\text{Aut}}_S(G)$  désigne le préfaisceau  $T \mapsto \text{Aut}_T(G_T)$ . Lorsque  $G$  est réductif, il est représentable par un  $S$ -schéma lisse et séparé (Exposé XXIV, Théorème 1.3 [DGA11b]).

On a alors également l'existence d'une section  $w$  telle que  $w_k$  est  $w$  vu comme section (point fermé)  $\text{Spec } k \rightarrow W$ . En effet, la caractérisation de l'objet constant  $W[\mathbb{Z}]$  et l'identification  $W[\mathbb{Z}] \simeq \underline{W}_{\mathbb{Z}}$  donnent pour tout schéma  $S$  des flèches naturelles  $e_S: W \rightarrow \text{Hom}_S(S, \underline{W}_S)$  liées par composition avec les changements de base  $S' \rightarrow S$  :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{e_S} & \text{Hom}_S(S, \underline{W}_S) \simeq \text{Hom}_S(S, W[\mathbb{Z}]_S) \\ & \searrow e_{S'} & \downarrow \\ & & \text{Hom}_{S'}(S', \underline{W}_{S'}) \simeq \text{Hom}_{S'}(S', W[\mathbb{Z}]_{S'}) \end{array}$$

En remarquant que  $e_{\text{Spec } k}$  rend bien compte des points fermés de  $W$ , le changement de base  $\text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$  donne la section désirée avec  $e_{\mathbb{Z}}(w)$ . Enfin, SGA3 [DGA11b] Exposé XXII, corollaire 5.8.3 donne l'existence d'un  $\mathbb{Z}$  schéma  $\underline{\mathcal{B}}$  tel que :

- $\underline{\mathcal{B}}$  est de présentation finie, lisse et projectif sur  $\mathbb{Z}$  satisfaisant aux propriétés de représentativité des ensembles de sous-groupes de Borel, de faisceau quotient et d'identification avec des variétés de drapeaux données dans l'énoncé.

L'ensemble des propriétés ainsi établies sur  $\mathbb{Z}$  étant stables par changement de base, on en déduit que les familles  $(\underline{G}_A)_A := (\underline{G} \times_{\mathbb{Z}} A)_A$ ,  $(\underline{B}_A)_A$ ,  $(\underline{T}_A)_A$ ,  $(\underline{H}_A)_A$ ,  $(\underline{W}_A)_A$ ,  $(\underline{\mathcal{B}}_A)_A$ ,  $(\underline{w}_A : \text{Spec } A \rightarrow \underline{W}_A)_A$ , satisfont à toutes les propriétés attendues à l'exception d'une identification, pour  $A$  assez grande, de  $\underline{H}_A$  avec un sous-groupe de  $\underline{G}_A$  et de  $(\underline{T}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A, \underline{B}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A)$  avec un couple de Killing de  $\underline{H}_A$ . Mais  $(\underline{G}_A)_A$ ,  $(\underline{H}_A)_A$  réalisent respectivement  $G$  et  $H$ . Aussi, par le corollaire 3.1.7 appliqué à l'immersion fermée de groupes  $i : H \rightarrow G$ , il existe une famille d'immersions fermées de groupes  $(\underline{H}_A \rightarrow \underline{G}_A)_A$  définies pour toute  $A$  assez grande, et réalisant  $i$ . Ainsi, pour de telles  $A$ ,  $\underline{H}_A$  s'identifie bien à un sous groupe fermé de  $\underline{G}_A$ . De même, par changement de base,  $(\underline{T}_{H_A})_A$  et  $(\underline{B}_{H_A})_A$  réalisent respectivement  $T \cap H$  et  $B \cap H$  tout comme le font  $(\underline{T}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A)_A = ((\underline{T} \times_{\underline{G}} \underline{H})_A)_A$  et  $(\underline{B}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A)_A = ((\underline{B} \times_{\underline{G}} \underline{H})_A)_A$ . En appliquant cette fois-ci le corollaire 3.1.7 aux morphismes identité  $id_T : T \rightarrow T$  et  $id_B : B \rightarrow B$ , il existe des familles d'isomorphismes  $(\underline{T}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A \rightarrow \underline{T}_{H_A})_A$  et  $(\underline{B}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A \rightarrow \underline{B}_{H_A})_A$  définis pour toute  $A$  assez grande et réalisant respectivement  $i_T$  et  $i_B$ . Par la remarque 3.1.6, on peut encore supposer que ces isomorphismes commutent aux immersions fermées de groupes naturelles  $\underline{T}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A$ ,  $\underline{T}_{H_A} \hookrightarrow \underline{H}_A$  et  $\underline{B}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A$ ,  $\underline{B}_{H_A} \hookrightarrow \underline{H}_A$ . Aussi, pour  $A$  assez grande,  $\underline{T}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A$  est donc bien, comme  $\underline{T}_{H_A}$ , un tore maximal de  $\underline{H}_A$ . Pareillement,  $\underline{B}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A$  est comme  $\underline{B}_{H_A}$  un sous-groupe de Borel de  $\underline{H}_A$ . Puisqu'on a encore clairement une immersion fermée  $\underline{T}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A \hookrightarrow \underline{B}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A$ , la paire  $(\underline{T}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A, \underline{B}_A \times_{\underline{G}_A} \underline{H}_A)$  s'identifie bien à un couple de Killing de  $\underline{H}_A$  et on a toutes les identifications souhaitées.  $\square$

Comme annoncée, on obtient la réalisation suivante en combinant ce dernier théorème et les résultats de la section précédente.

**Corollaire 3.4.2.** *Soit les hypothèses et les données dans le précédent théorème. Alors il existe une famille  $(Y_A^w \hookrightarrow \mathcal{B}_A)_A$  réalisant le sous-schéma fermé  $(\overline{HB} \cdot w\overline{B})_{red} \hookrightarrow G/B$  et telle que, pour toute  $A$  assez grande :*

- (i)  $Y_A^w$  est projectif et plat sur  $A$ ,
- (ii)  $(Y_A^w)_{\overline{s}} \simeq (\overline{H_{A\overline{s}} B_{A\overline{s}} \cdot w_{A\overline{s}} B_{A\overline{s}}})_{red}$  comme  $G_{A\overline{s}}/B_{A\overline{s}}$ -schémas, pour tout  $s \in \text{Spec } A$ .

*Démonstration.* Soit les données fournies par le précédent théorème 3.4.1 et  $A$  assez grande pour satisfaire à toutes les propriétés établies par ce dernier. Posons  $Z \hookrightarrow G/B$  le sous-schéma fermé correspondant au point fermé  $wB \in G/B$  vu comme section  $\text{Spec } k \hookrightarrow G/B$ . Le choix de  $B_A$  donne un morphisme  $W_A \rightarrow \mathcal{B}_A$  défini par  $S \mapsto (nT_A(S) \mapsto nB_A(S)n^{-1})$  sur les faisceaux correspondant. La composition de ce morphisme avec  $w_A : \text{Spec } A \rightarrow W_A$  donne alors lieu à une section  $\text{Spec } A \rightarrow \mathcal{B}_A$  dont la famille produite par changement de base  $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$  réalise clairement le sous-schéma fermé  $Z \hookrightarrow G/B$  précédent tandis que chaque fibre géométrique en  $s \in \text{Spec } A$  est

intègre et correspond au point fermé  $w_{A\bar{s}}B_{A\bar{s}} \in G_{A\bar{s}}/B_{A\bar{s}}$ . De plus, le sous-groupe de Borel  $B_A$  est à fibres géométriques intègres. C'est aussi le cas du groupe réductif  $H_A$ , entendu qu'il est équivalent, pour un  $S$  schéma en groupes, d'être affine et lisse sur  $S$  avec fibres connexes et d'être affine, plat, de présentation finie sur  $S$ , à fibres géométriques intègres (SGA3 Exposé XIX Scholie 2.1 [DGA11b]). Enfin, pour toute  $A$  assez grande,  $G_A$  agit naturellement sur  $\mathcal{B}_A$  et la famille d'actions obtenues réalise clairement l'action naturelle de  $G$  sur  $G/B$ , propre sur  $k$ . L'application du corollaire 3.3.5 précédent avec  $H_1 := H$ ,  $H_2 := B$  donne alors les assertions souhaitées à l'exception de la projectivité, pour toute  $A$  assez grande, du schéma  $Y_A$  obtenu. Mais celle-ci est automatique, entendu qu'il s'agit d'un sous-schéma fermé du  $A$ -schéma projectif  $\mathcal{B}_A$ .  $\square$

## Chapitre 4

# Résultats préliminaires, sous-groupes symétriques et induction parabolique

Ce chapitre donne plusieurs résultats préparatoires relatifs à certains groupes algébriques, obtenus comme sous-groupes de points fixes par une involution et par induction parabolique. Plus précisément, nous serons intéressés par des groupes  $Z$  de la forme  $L_Z U_P$  où  $P$  est un sous-groupe parabolique,  $U_P$  son radical unipotent et  $L_Z = (L^\theta)^0$ , la composante connexe du sous-groupe des points fixes par une involution  $\theta$  d'un sous-groupe de Lévi  $L$  de  $P$ . Ces résultats permettront une première application des théorèmes généraux 6.1.1 et 7.1.13 avec, respectivement, les théorèmes 6.2.1 et 7.2.1. Par là, ils constitueront aussi une étape intermédiaire et décisive pour la preuve des applications en types classiques. C'est également en ce sens que nous les emploierons pour obtenir des paramétrisations des  $Z$ -orbites dans la variété de drapeaux.

L'étude des sous-groupes de points fixes par une involution forme la théorie des sous-groupes symétriques, pour laquelle des références majeures dans la littérature existent déjà, voir [Ric82], [RS90]. Avec parfois quelques adaptations nous présenterons donc ici des résultats relativement classiques.

Commençons par fixer et rappeler quelques notations relatives aux sous-groupes paraboliques. Si  $P$  désigne un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant un tore maximal  $T$ , nous désignerons par  $W_P$  le groupe de Weyl du sous-groupe de Lévi de  $P$  associé à  $T$ . Par  $W^P$  nous désignerons l'ensemble des représentants de longueur minimale du quotient  $W/W_P$ ,  $W$  étant le groupe de Weyl de  $G$  relatif à  $T$ . Nous rappelons les résultats suivants, où nous avons fixé  $B$  un sous-groupe de Borel tel que  $T \subset P$  et désignons par  $\Phi$  l'ensemble de racines relatif à  $T$  et  $\Delta$  la base de racines relative à  $B$ .

**Proposition 4.0.1.** *L'ensemble  $W^P$  paramètre les  $B$ -orbites de la variété de drapeaux partiels  $G/P$ , ou de manière équivalente,  $(W^P)^{-1}$  paramètre les  $B$ -orbites de  $G/B$ .*

*Démonstration.* Nous renvoyons à [Bor91], §14.18 et §21 pour une preuve. □

**Proposition 4.0.2.** *On suppose  $P$  donné par le sous-ensemble  $I \subset \Delta$ . On note et on a les caractérisations suivantes :*

$$\begin{aligned} W_P &:= \text{le groupe de Weyl du sous-groupe de Lévi de } P \text{ contenant } T \\ &\simeq \text{le groupe de Weyl du groupe réductif } P/U_P \text{ relatif à } TU_P/U_P \\ &\simeq \langle s_\alpha, \alpha \in I \rangle \\ &\simeq \{ v \in W \mid v \leq v_0 \} \text{ où } v_0 \text{ désigne l'élément de plus grande longueur de } W_P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^P &:= \{ v \in W \mid \ell(v) = \min \ell(vW_P) \} \\ &= \{ v \in W \mid v(\alpha) > 0 \ \forall \alpha \in I \} \end{aligned}$$

$$= \{ v \in W \mid \ell(vw) = \ell(v) + \ell(w) \ \forall w \in W_P \}.$$

*Démonstration.* Pour la description de  $W_P$ , on se réfère à [Spr09], 8.4. Pour celle de  $W^P$ , montrons les équivalences suivantes de manière circulaire, où  $v \in W$  fixé.

$$v(\alpha) > 0 \ \forall \alpha \in I \Leftrightarrow \ell(vw) = \ell(v) + \ell(w) \ \forall w \in W_P \Leftrightarrow \ell(v) = \min \ell(vW_P).$$

Pour la première implication, supposons  $v(\alpha) > 0$  pour tout  $\alpha \in I$  ainsi que  $w \in W_P$ . La description de  $W_P$  permet d'affirmer que  $w$  stabilise à la fois  $\Phi_I$  et  $\Phi^+ - \Phi_I$  où  $\Phi_I$  désigne l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires (alors nécessairement entières) d'éléments de  $I$ . Soit en effet une réflexion simple  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ . Comme pour toute réflexion associée à une racine, on a  $(s_\alpha - id)(\Phi) \subset \mathbb{Z}\alpha \cap \Phi$ . Par conséquent, si  $\beta \in I$  alors  $s_\alpha(\beta) \in \Phi_I$  et on déduit par linéarité que  $s_\alpha$  stabilise  $\Phi_I$ . Comme en outre  $\alpha \in \Delta$ ,  $s_\alpha$  permute les éléments de  $\Phi^+ - \{\alpha\}$  (voir par exemple [Spr09], lemme 8.2.7), et on trouve que  $s_\alpha$  stabilise encore  $\Phi^+ - \Phi_I$ . Par la propriété d'engendrement de  $W_P$ ,  $w$  satisfait donc aussi à ces propriétés. Maintenant, on voit que  $\{\alpha > 0 \mid vw(\alpha) < 0\}$  se décompose en deux ensembles disjoints  $\{\alpha \in \Phi^+ \cap \Phi_I \mid vw(\alpha) < 0\}$  et  $\{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_I \mid vw(\alpha) < 0\}$ . Mais comme  $w$  stabilise  $\Phi_I$ , l'hypothèse sur  $v$  permet de dire que le premier ensemble est égal à  $\{\alpha \in \Phi^+ \cap \Phi_I \mid w(\alpha) < 0\}$  soit encore à  $\{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) < 0\}$  puisque  $w$  stabilise  $\Phi^+ \setminus \Phi_I$ . Pour cette même raison, le second ensemble ci-dessus s'identifie par la bijection  $w$  à  $\{\gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi_I \mid v(\gamma) < 0\}$  qui est égal à  $\{\gamma \in \Phi^+ \mid v(\gamma) < 0\}$  par l'hypothèse sur  $v$ . En prenant les cardinaux, on a bien  $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$ . La deuxième implication est claire. Pour la dernière, on peut employer la caractérisation du produit des cellules de Schubert en termes de longueur d'éléments du groupe de Weyl (voir [Spr09], 8.3.7). Elle donne notamment pour tout  $\beta \in \Phi^+ : v(\beta) > 0 \Leftrightarrow \ell(vs_\beta) = \ell(v) + 1$  et  $v(\beta) < 0 \Leftrightarrow \ell(vs_\beta) = \ell(v) - 1$ . Par conséquent, si  $v$  réalise la longueur minimale de  $vW_P$ , alors pour tout  $\alpha \in I$ , on aura  $\ell(vs_\alpha) = \ell(v) + 1$  de sorte que  $v(\alpha) > 0$ , d'où la première assertion des équivalences.  $\square$

## 4.1 Quelques propriétés sur les sous-groupes de points fixes

Dans cette première section, nous rappelons et prouvons quelques propriétés classiques et générales sur les sous-groupes de points fixes, dont nous ferons usage par la suite.

Nous concentrons dans le théorème suivant plusieurs résultats fondamentaux. La première assertion est une application du théorème 7.5 de [Ste68]. La seconde et la troisième se trouvent dans la proposition 10.1.5 de [Ric82] en utilisant l'équivalence  $G/H$  affine  $\Leftrightarrow H^0$  est réductif, pour un groupe algébrique réductif  $G$  et un sous-groupe fermé  $H$  (voir [Ric77]). La dernière assertion est le théorème 8.2 de [Ste68].

**Théorème 4.1.1.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe réductif en caractéristique différente de 2. Soit  $\sigma$  une involution de  $G$ . On désigne par  $G^\sigma$  l'ensemble des points fixes de  $\sigma$ .*

1. *Il existe un tore maximal  $T$  et sous-groupe de Borel  $B$  le contenant, tous les deux stables par  $\sigma$ .*
2.  *$G/G^\sigma$  est une variété affine.*
3.  *$(G^\sigma)^0$  (et donc  $G^\sigma$ ) est réductif.*
4. *Si  $G$  est semi-simple simplement connexe, alors  $G^\sigma$  est connexe.*

Nous admettrons également le théorème suivant.

**Théorème 4.1.2** (Théorème A de [Ric82]). *Soit  $\mathcal{A}$  un groupe algébrique affine agissant sur une variété  $X$ . Soit  $G$  et  $S$  des sous-groupes fermés de  $\mathcal{A}$  et posons  $Z := (G^S)^0$ . On suppose que :*

1.  *$G$  est distingué dans  $\mathcal{A}$ , connexe, et son action induite sur  $X$  est transitive.*
2. *La représentation  $Ad: S \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$  est complètement réductible et  $Lie Z = \mathfrak{g}^S$ .*

Alors  $Z$  agit transitivement sur chaque composante connexe de  $X^S$ . Autrement dit, composantes connexes et composantes irréductibles de  $X^S$  coïncident et ce sont les  $Z$ -orbites. Celles-ci sont donc toutes fermées et en nombre fini.

Dans les faits, nous utiliserons ce résultat sous la forme de ce corollaire :

**Corollaire 4.1.3.** (On suppose la caractéristique différente de 2.) Soit  $X$  une variété algébrique munie de l'action d'un groupe algébrique linéaire connexe  $G$ . Soit  $\sigma$  une involution de  $G$  et  $\iota$  une involution de  $X$ . On suppose que :

- (i) L'action de  $G$  sur  $X$  est transitive.
- (ii) Les actions de  $\sigma$ ,  $\iota$  et celle de  $G$  sont "compatibles" au sens où pour tout  $g \in G$ ,  $x \in X$ , on a  $\iota(g \cdot x) = \sigma(g) \cdot \iota(x)$ .

Alors  $G^\sigma$  agit sur  $X^\iota$  et  $(G^\sigma)^0$  agit transitivement sur chaque composante irréductible de  $X^\iota$ . Celles-ci sont donc aussi les composantes connexes, les  $(G^\sigma)^0$ -orbites et elles sont fermées et en nombre fini.

*Démonstration.* On pose  $S$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(G)$  engendré par  $\sigma$  puis  $\mathcal{A}$  le produit semi-direct  $G \rtimes S$ . On identifie  $S$  et  $G$  comme sous-groupes de  $\mathcal{A}$  de la manière usuelle. L'action de  $S$  sur  $G$  correspond alors à la conjugaison dans  $\mathcal{A}$  et  $G$  est distingué dans  $\mathcal{A}$ . Définissons aussi une action de  $S$  sur  $X$  par " $\sigma \cdot x := \iota(x)$ ". Par ailleurs, avec l'hypothèse (ii), on peut encore définir une action de  $\mathcal{A}$  sur  $X$  par " $(g, \sigma) \cdot x := g \cdot (\iota(x))$ " qui induit celle de  $G$  donnée par l'énoncé. Soulignons simplement la bonne propriété d'associativité : pour tout  $g_1, g_2$  dans  $G$  et  $x$  dans  $X$ , l'hypothèse (ii) donne en particulier  $\iota(g_2 \cdot \iota(x)) = (\sigma(g_2) \cdot \iota^2(x)) = (\sigma(g_2) \cdot x)$  et on a la suite d'égalités  $(g_1, \sigma) \cdot ((g_2, \sigma) \cdot x) = (g_1, \sigma) \cdot (g_2 \cdot \iota(x)) = g_1 \cdot (\iota(g_2 \cdot \iota(x))) = g_1 \cdot (\sigma(g_2) \cdot \iota^2(x)) = ((g_1, \sigma) \cdot (g_2, \sigma)) \cdot x$ . Cette dernière action restant transitive, on satisfait l'hypothèse 1 du théorème 4.1.2. Mais comme la caractéristique est différente de 2 et que  $\sigma^2 = id$ , toutes les représentations de  $S$  sont complètement réductibles, et on a aussi  $\text{Lie}(G^S) = \text{Lie}(G)^S$ , de sorte que l'hypothèse 2 du théorème est aussi satisfaite. On peut ainsi l'appliquer et on a le résultat souhaité.  $\square$

Il sera utile pour nous de disposer d'une propriété de conjugaison des sous-groupes de Borel fixés par une involution, notamment dans l'usage de la notion de paire adaptée (voir définition 5.4.3). La proposition suivante remplit cet effet. Elle repose sur une condition radicielle.

Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif et  $\sigma$  une involution. On dit que la paire  $(G, \sigma)$  satisfait la condition (A) suivante si :

$$\begin{aligned} & \text{Il existe } T \subset B \text{ un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel tels que :} \\ & \sigma(T) = T, \sigma(B) = B, \forall \alpha \in \Delta, \sigma(\alpha) = \alpha \Rightarrow U_\alpha \subset G^\sigma, \end{aligned} \tag{A}$$

où  $U_\alpha$  est l'unique sous-groupe connexe de  $G$ ,  $T$ -stable et d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_\alpha$  et où  $\Delta$  désigne l'ensemble des racines simples relatif à  $T$  et  $B$  (la stabilité de  $T$  et  $B$  munissant naturellement cet ensemble, comme celui des racines et des racines positives, d'une action de  $\sigma$ ).

La condition étant vérifiée, signalons que pour toute racine simple  $\alpha \in \Delta$ ,  $\sigma$  préserve alors le sous-groupe  $U_\alpha$ . Ce dernier étant isomorphe au groupe additif  $\mathbb{G}_a$ , l'involution induite  $\sigma|_{U_\alpha}$  ne peut être que  $\pm id$  (les automorphismes du groupe additif  $\mathbb{G}_a$  consistant dans les morphismes  $x \mapsto \lambda x$ , avec  $\lambda \in k \setminus \{0\}$ , voir Exercice 4 §7 [Hum81]). On a la proposition suivante.

**Proposition 4.1.4.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe en caractéristique nulle. Soit  $\sigma$  une involution de  $G$ . On a les assertions suivantes.*

1. *Si  $B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  stable par  $\sigma$ , alors  $B^\sigma := B \cap (G^\sigma)^0$  est un sous-groupe de Borel de  $(G^\sigma)^0$ .*
2. *Supposons que  $G$  est réductif et que  $(G, \sigma)$  satisfait la condition (A). Alors.*
  - (a) *Il existe un unique sous-groupe de Borel de  $G$  contenant un sous-groupe de Borel de  $(G^\sigma)^0$  donné, et il est stable par  $\sigma$ .*
  - (b) *L'application  $B \mapsto B^\sigma$  induit un isomorphisme entre la sous-variété des drapeaux de  $G$  stables par  $\sigma$  et la variété des drapeaux de  $(G^\sigma)^0$ . Autrement dit, pour tout sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  stable par  $\sigma$ , le morphisme naturel  $(G^\sigma)^0 \rightarrow (G/B)^\sigma$ ,  $g \mapsto gB$  passe au quotient en un isomorphisme  $(G^\sigma)^0/B^\sigma \simeq (G/B)^\sigma$ . Et en particulier, deux drapeaux de  $G$  stables par  $\sigma$  sont conjugués par  $(G^\sigma)^0$ .*

*Démonstration.* 1. Montrons 1. Si  $B$  est un sous-groupe de Borel stable par  $\sigma$ , alors  $G/B$  est muni d'une action naturelle de  $\sigma$ , compatible avec son action sur  $G$ . On satisfait donc aux hypothèses du corollaire 4.1.3 et on trouve que  $(G^\sigma)^0$  agit transitivement sur chaque composante irréductible de la sous variété  $(G/B)^\sigma$ . Cette dernière étant fermée dans  $G/B$  comme ses composantes, on en déduit que le stabilisateur  $B^\sigma$  de  $B$  dans  $(G^\sigma)^0$  est parabolique. Comme il est résoluble, il est lui-même un sous-groupe de Borel de  $(G^\sigma)^0$ .

2. Montrons 2(a). Supposons la condition (A) vérifiée et soient  $T$  et  $B$  le tore maximal et le sous-groupe de Borel qu'elle fournit. Par conjugaison et le point précédent, il suffit donc de montrer que  $B$  est l'unique sous-groupe de Borel de  $G$  contenant  $B^\sigma$ . Relativement au tore  $T$ , fixons une base de Chevalley  $(e_\alpha)_\alpha$  pour la décomposition radicielle  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$ . En différentiant,  $\sigma$  agit sur  $\mathfrak{g}$ . De plus, stabilisant  $T$  et  $B$ , il agit comme remarqué plus haut sur les racines simples  $\Delta$  relatives à  $T$  et  $B$ . Soit maintenant  $\alpha \in \Delta$ . On a  $\sigma \cdot e_\alpha \in \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$  et ainsi  $x_\alpha := e_\alpha + \sigma \cdot e_\alpha \in \mathfrak{b}^\sigma = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}^\sigma$ . Si  $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ ,  $e_\alpha$  et  $\sigma \cdot e_\alpha$  ne sont pas liés et on a  $x_\alpha \neq 0$ . Si au contraire  $\sigma(\alpha) = \alpha$  alors la condition (A) assure que  $\sigma \cdot e_\alpha = e_\alpha$  de sorte que  $x_\alpha = 2e_\alpha$  est encore non nul. Soit maintenant  $B'$  un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant  $B^\sigma$  et posons  $H := Z_G((T^\sigma)^0)$ . Ainsi  $B'$  contient le tore  $(T^\sigma)^0$ , et par le corollaire 22.4 [Hum81],  $H \cap B'$  est un sous-groupe de Borel de  $H$ . Or par le lemme 4.1.5 ci-après, on a  $H = T$ . Par conséquent,  $H \cap B' = H$  et  $B'$  contient  $T$ . Son algèbre de Lie  $\mathfrak{b}'$  se décompose donc suivant des espaces de poids sous  $T$  et, projetant les  $x_\alpha \neq 0$  le long des sous-espaces  $\mathfrak{g}_\alpha$ , on en déduit que  $\mathfrak{b}'$  contient tous les  $\mathfrak{g}_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ . Il suit que le radical unipotent  $U$  de  $B$  est contenu dans  $B'$ , puis  $B' \subset N_G(U)$ . Ce dernier groupe étant  $B$  lui-même (corollaire D, 23.1 [Hum81]), on a bien  $B' = B$  comme souhaité.

3. Supposons encore (A) vérifiée et montrons 2(b). Désignons par  $\mathcal{B}_G^\sigma$  la sous-variété des drapeaux de  $G$  stables par  $\sigma$ , et par  $\mathcal{B}_{(G^\sigma)^0}$  la variété des drapeaux de  $(G^\sigma)^0$ . Le point 1 montre la bonne définition de l'application  $\phi: \mathcal{B}_G^\sigma \rightarrow \mathcal{B}_{(G^\sigma)^0}$ ,  $B \mapsto B^\sigma$ . L'unicité du point 2(a) en donne l'injectivité, et l'existence en donne la surjectivité. Si  $B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  stable par  $\sigma$ , alors le morphisme naturel  $(G^\sigma)^0 \rightarrow (G/B)^\sigma$ ,  $g \mapsto gB$  passe clairement au quotient en un morphisme  $\psi: (G^\sigma)^0/B^\sigma \rightarrow (G/B)^\sigma$  et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (G^\sigma)^0/B^\sigma & \xrightarrow{\psi} & (G/B)^\sigma \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathcal{B}_{(G^\sigma)^0} & \xleftarrow[\phi]{\sim} & \mathcal{B}_G^\sigma \end{array}$$

donne le second isomorphisme souhaité, les flèches verticales consistant dans les identifications usuelles des variétés de drapeaux et des quotients par un sous-groupe de Borel. On en déduit encore facilement l'assertion sur la conjugaison.  $\square$

On a employé le lemme suivant, valable sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente :

**Lemme 4.1.5.** *Soit  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ . On suppose  $T$  et  $B$  stables par  $\sigma$ . Alors le sous-groupe de points fixes  $T^\sigma$  vérifie  $Z_G((T^\sigma)^0) = T$  (ie  $(T^\sigma)^0$  est un sous-tore régulier de  $T$ ).*

*Démonstration.* Soulignons que  $G$  est réductif, et considérons l'ensemble  $\Phi$  des racines relatives à  $T$ . Par le corollaire 26.2 A (b) de [Hum81], il suffit de montrer que le tore  $(T^\sigma)^0$  est régulier (au sens de [Hum81], voir début du paragraphe 24). Mais pour ce faire, par la proposition 24.3 de cette même référence, il suffit de montrer qu'aucune racine n'est triviale sur  $(T^\sigma)^0$ . Soit donc  $\alpha \in \Phi$  et supposons  $(T^\sigma)^0 \subset \text{Ker } \alpha$ . Pour  $t \in T$ , comme  $\sigma(t)t$  est clairement un élément de  $(T^\sigma)^0$ , on a  $\alpha(\sigma(t)t) = \alpha(\sigma(t))\alpha(t) = 1$ . On en déduit  $s(\alpha) = -\alpha$ . Or  $B$  et donc son algèbre de Lie  $\mathfrak{b}$  sont stables par  $\sigma$  et  $\sigma$  permute les espaces de poids selon  $\sigma \cdot \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$ . Par conséquent, on a les équivalences  $\mathfrak{g}_\alpha \subset B \Leftrightarrow \sigma \cdot \mathfrak{g}_\alpha \subset \sigma \cdot \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{b}$ . Mais ceci entre en contradiction avec la partition de  $\Phi$  que produit  $B$  entre racines positives  $\Phi^+ := \{\beta \in \Phi \mid \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{b}\}$  et négatives  $\Phi^- := -\Phi^+$ . On a donc bien le résultat attendu.  $\square$

Plusieurs situations classiques satisferont la condition (A).

**Proposition 4.1.6.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. La condition (A) est vérifiée dans le cas des paires  $(G, \sigma)$  suivantes :*

1.  $G = \text{Gl}(V) \times \text{Gl}(V)$ ,  $G^\sigma = (G^\sigma)^0 = \{(x, x)\} \simeq \text{Gl}(V)$  avec  $\sigma := (x, y) \mapsto (y, x)$ .
2. Si  $\dim V$  impair,  $G = \text{Gl}(V)$ ,  $G^\sigma = \text{O}(V)$ ,  $(G^\sigma)^0 = \text{SO}(V)$  avec  $\sigma := g \mapsto (g^*)^{-1}$ , relativement à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $V^1$ .
3. Si  $\dim V$  pair,  $G = \text{Gl}(V)$ ,  $G^\sigma = (G^\sigma)^0 = \text{Sp}(V)$  avec  $\sigma := g \mapsto (g^*)^{-1}$ , relativement à une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur  $V$ .

*Démonstration.* On reporte la preuve de cet énoncé au chapitre suivant (lemme 5.4.6) puisque nous utiliserons les formes concrètes proposées par les modèles matriciels.  $\square$

**Remarque 4.1.7.** *Les deux exemples suivants montrent que la condition (A) est essentielle pour satisfaire à l'assertion 2 de la proposition 4.1.4. Qui plus est, avec le second exemple, on voit que l'imparité de  $\dim V$  pour le cas orthogonal est nécessaire pour satisfaire à (A).*

1. On considère  $G := \text{Gl}_{p+q}$  et  $\sigma$  l'involution correspondant à la conjugaison par  $\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$ . Le sous-groupe  $G^\sigma = (G^\sigma)^0$  consiste alors en matrices de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ , où  $A \in \text{Gl}_p$ ,  $A' \in \text{Gl}_q$ . Mais si  $B_p$  et  $B_q$  désignent respectivement les sous-groupes des matrices triangulaires supérieures de tailles  $p$  et  $q$ , alors  $\begin{pmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_q \end{pmatrix}$  est un sous-groupe de Borel de  $(G^\sigma)^0$ . Il est de plus contenu dans les deux sous-groupes de Borel de  $G$  consistant d'une part dans les matrices triangulaires supérieures, d'autre part dans les matrices de la forme  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & A' \end{pmatrix}$ , où  $A \in B_p$ ,  $A' \in B_q$ ,  $C \in M_{q,p}$ . On ne satisfait donc pas à l'assertion 2(a). On peut observer que la condition radicielle de (A) n'est pas vérifiée. En effet, relativement au tore maximal  $T \simeq \{(t_1, \dots, t_n)\}$  des matrices diagonales inversibles, la racine simple (comme toutes les racines, puisqu'ici  $T \subset G^\sigma$ )  $\alpha_p := \varepsilon_p \varepsilon_{p+1}^{-1} : t \mapsto t_p t_{p+1}^{-1}$  est bien fixée par  $\sigma$ . Mais l'espace de poids  $\mathfrak{g}_{\alpha_p}$  consiste dans la droite engendrée par la matrice dont le seul coefficient non nul est en  $(p, p+1)$  et tous ses vecteurs sont envoyés par l'involution sur leur opposé.

1. Le symbole \* désignant l'adjoint relativement à cette forme

2. On considère pour  $n$  pair,  $G := \mathrm{Gl}_n$  et  $\sigma$  l'involution  $g \mapsto {}^t g^{-1}$ , donnant lieu à  $O_n = G^\sigma$  et  $SO_n = (G^\sigma)^0$ . On sait que la sous-variété des drapeaux stables par  $\sigma$  n'est pas connexe, tandis que la variété des drapeaux de  $SO_n$  est connexe, comme le groupe  $SO_n$  lui-même. Lorsque  $n = 2$ , ceci est particulièrement remarquable en considérant un modèle vectoriel : on se donne un espace vectoriel  $V$  de dimension 2, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $\omega$  et une base convenable identifiant  $G$  à  $\mathrm{Gl}(V)$  et  $G^\sigma$  à  $O(V, \omega)$ . Les drapeaux de  $G$  stables par  $\sigma$  s'identifient aux deux droites isotropes pour  $\omega$  tandis que  $(G^\sigma)^0$  consiste en une unique droite isotrope. De même que pour le premier exemple, on peut observer que la condition radicielle de (A) n'est pas vérifiée. Pour cela et pour rendre les calculs plus aisés, considérons que la transposition intervenant dans  $\sigma$  s'effectue le long de l'antidiagonale plutôt que de la diagonale. Les données ainsi obtenues s'identifient naturellement aux précédentes, et avec cette hypothèse, le tore maximal  $T \simeq \{ (t_1, \dots, t_n) \}$  des matrices diagonales inversibles et le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures inversibles sont stables par  $\sigma$ . La racine simple (au contraire de toutes les autres racines simples)  $\alpha_{n/2} := \varepsilon_{n/2} \varepsilon_{n/2+1}^{-1} : t \mapsto t_{n/2} t_{n/2+1}^{-1}$  est alors bien fixée par  $\sigma$ , mais l'espace de poids  $\mathfrak{g}_{\alpha_{n/2}}$  consiste dans la droite engendrée par la matrice dont le seul coefficient non nul est en  $(n/2, n/2 + 1)$  et tous ses vecteurs sont envoyés par l'involution sur leur opposé.

## 4.2 Étude d'orbites et paramétrisations

Dans cette seconde section, on cherche à établir la proposition 4.2.3 qui s'intéresse à l'ensemble des orbites de la variété des drapeaux sous l'action d'un sous-groupe symétrique. Elle nous permettra d'établir des paramétrisations concrètes dans le chapitre suivant.

La proposition qui suit peut se trouver dans [Ric82], 9.1, mais nous nous proposons de la redémontrer au moyen du corollaire 4.1.3 précédent.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif,  $\psi : G \rightarrow G$  une involution. On pose  $\gamma : G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x\psi(x)^{-1}$ . On considère l'action  $*$  de  $G$  sur lui-même par  $g * x := g\psi(g)^{-1}x$ . Alors pour cette action,  $\{x \in G \mid \psi(x) = x^{-1}\}$  est stable, possède un nombre fini d'orbites et chacune de ces orbites est fermée. En particulier,  $\gamma(G) = G * 1_G$  est fermé.*

*Démonstration.* On considère  $\sigma$  l'involution de  $G \times G$  qui échange les deux coordonnées. On munit ensuite la variété  $G$ , renommée  $X$  pour l'occasion, de l'action de  $G \times G$  définie par  $(g_1, g_2) \cdot x := g_1 x \psi(g_2)^{-1}$  et de celle de  $\sigma$  définie par  $\sigma \cdot x := \psi(x)^{-1}$ . On voit que  $G \times G$  est connexe et son action sur  $X$  clairement transitive. De plus, avec  $\psi^2 = \mathrm{id}$ , on a pour tout  $x \in X$  et  $g_1, g_2 \in G$  :

$$\sigma \cdot ((g_1, g_2) \cdot x) = \psi(g_1 x \psi(g_2)^{-1})^{-1} = g_2 \psi(x)^{-1} \psi(g_1)^{-1} = \sigma(g_1, g_2) \cdot (\sigma \cdot x),$$

de sorte que les actions de  $\sigma$  et  $G \times G$  sont compatibles. On peut donc appliquer le corollaire 4.1.3 et on trouve que les  $((G \times G)^\sigma)^0$ -orbites de  $X^\sigma$  sont toutes fermées et en nombre fini. Mais clairement,  $((G \times G)^\sigma)^0$  correspond à la diagonale de  $G \times G$  et  $X^\sigma$  correspond exactement à la sous-variété fermée  $\{x \in G \mid \psi(x) = x^{-1}\}$ . Comme les orbites pour cette diagonale sont exactement celles pour l'action  $*$  de l'énoncé, et que  $\gamma(G)$  est l'orbite de l'élément neutre, on a le résultat souhaité.  $\square$

Nous emploierons également le résultat ci-après.

**Proposition 4.2.2.** *On suppose la caractéristique nulle. Soit  $U$  un groupe algébrique linéaire unipotent et  $\psi$  un automorphisme de  $U$  d'ordre 2. On pose  $\gamma : U \rightarrow U$  défini par  $x \mapsto x\psi(x)^{-1}$ , et on note  $U^\psi$  le sous-groupe des points fixes de  $\psi$ . Alors*

1.  $U^\psi$  et  $\gamma(U)$  sont des sous-variétés fermées de  $U$ .
2. Le produit  $\gamma(U) \times U^\psi \rightarrow U$  est un isomorphisme de variétés.

3.  $\gamma$  induit un isomorphisme de la variété  $\gamma(U)$  sur elle-même et cette dernière correspond à  $\{x \in U \mid \psi(x) = x^{-1}\}$ .

*Démonstration.* On rappelle les deux faits suivants, valables sous l'hypothèse d'un corps de base  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle :

*Un élément unipotent d'ordre fini est l'identité du  $k$ -groupe algébrique affine considéré.*  $(\star)$

*Un  $k$ -groupe algébrique affine unipotent est connexe*  $(\star\star)$

En effet, par un plongement du groupe algébrique linéaire dans un groupe linéaire, les éléments unipotents d'ordre fini s'identifient à des endomorphismes annulés par un polynôme du type  $X^n - 1$ , scindé à racines simples. Ils sont donc aussi semi-simples et ne peuvent qu'être l'élément neutre. On a bien  $(\star)$ . Pour  $(\star\star)$ , nous renvoyons à la proposition 4.1 §2, chapitre IV de [DG70]. On désignera par  $Z(U)$  le centre de  $U$  et par  $\alpha$  le produit  $\gamma(U) \times U^\psi \rightarrow U$ . On procède en plusieurs étapes.

1. Par  $(\star\star)$ , les groupes unipotents  $U$ ,  $Z(U)$ ,  $U^\psi$  sont connexes. C'est donc aussi le cas de la variété  $\gamma(U)$ .
2.  $U^\psi$  est clairement fermé, et  $\gamma(U)$  l'est par la proposition 4.2.1. On a l'assertion 1.
3. La preuve des isomorphismes est une adaptation directe de la proposition 9.3 de [Bor91] ou du théorème 18.3 de [Hum81]. Beaucoup d'arguments étant simplifiés dans notre situation, nous en proposons ici une preuve détaillée.

- (a)  $Z(U)$  est stable par l'automorphisme  $\psi$ , et donc par  $\gamma$ .
- (b) Pour  $x, y \in U$ , on a  $\gamma(x) = \gamma(y) \Leftrightarrow x\psi(x)^{-1} = y\psi(y)^{-1} \Leftrightarrow y^{-1}x = \psi(y^{-1}x) \in U^\psi \Leftrightarrow xU^\psi = yU^\psi$ .
- (c) Si  $x \in Z(U)$  et  $y \in U$ , alors  $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$  et  $\gamma(x^{-1}) = \gamma(x)^{-1}$ . En effet, la seconde assertion se déduit de la première et de  $\psi(1) = 1$ . De plus,  $\psi$  stabilisant  $Z(U)$  comme vu ci-dessus, on trouve  $\gamma(xy) = xy\psi(xy)^{-1} = x\gamma(y)\psi(x)^{-1} = \gamma(x)\gamma(y)$ .
- (d)  $\gamma(U) \cap U^\psi = \{1_U\}$ . En effet, si  $\gamma(y) = x \neq 1$  est dans cette intersection, alors  $x = \psi(x) = \psi(y\psi(y^{-1})) = \psi(y)y^{-1} = \gamma(y)^{-1} = x^{-1}$ , de sorte que  $x^2 = 1$ . Par  $(\star)$ ,  $x = 1_U$ .
- (e)  $\alpha: \gamma(U) \times U^\psi \rightarrow U$  est bijectif dès que  $U$  est abélien. Dans ce cas en effet, (c) montre que  $\gamma: U \rightarrow U$  est un morphisme de groupes ainsi que  $\alpha$ . Comme  $\text{Ker } \alpha$  est isomorphe à  $\gamma(U) \cap U^\psi$ , (d) donne l'injectivité. De plus  $\text{Ker } \gamma = U^\psi$  de sorte que  $\dim U = \dim \gamma(U) + \dim U^\psi$ . Ainsi  $\alpha(\gamma(U) \times U^\psi) = \gamma(U)U^\psi$  est un fermé (c'est un sous-groupe et une variété constructible), de même dimension que le groupe unipotent  $U$ , connexe. L'inclusion  $\gamma(U)U^\psi \subset U$  est donc une égalité et on a la surjectivité.
- (f)  $\alpha$  est toujours bijectif. On le montre par récurrence sur la dimension de  $U$ . En dimension 1,  $U$  sera forcément abélien et (e) donne l'initialisation. En dimension strictement supérieure, on pose  $V := Z(U)$ . Si  $V = U$ , on conclut là encore directement avec (e). Sinon, comme  $U$  est nilpotent,  $\dim Z(U) > 0$  et  $U/V$  et  $V$  sont des groupes connexes unipotents de dimensions strictement inférieures à celle de  $U$ . Posons la surjection canonique  $\pi: U \rightarrow U/V$ . Par (a),  $\psi$  et  $\gamma$  induisent respectivement via  $\pi$  les morphismes  $\bar{\psi}$  et  $\bar{\gamma}$  sur le quotient  $U/V$ , et  $\bar{\psi}$  garde les mêmes propriétés que  $\psi$ . Par hypothèse de récurrence appliquée aux groupes  $U/V$  et  $V$ , les produits  $\bar{\alpha}: \bar{\gamma}(U/V) \times (U/V)^{\bar{\psi}} \rightarrow U/V$  et  $\alpha_0: \gamma(V) \times V^\psi \rightarrow V$  sont des bijections. Maintenant, si  $\alpha(x, y) = \alpha(x', y')$  pour  $x, x' \in \gamma(U)$ ,  $y, y' \in U^\psi$ , alors  $xy = x'y'$  et en appliquant  $\pi$  à cette égalité, on voit que  $\bar{\alpha}(\pi(x), \pi(y)) = \bar{\alpha}(\pi(x'), \pi(y'))$  d'où  $\pi(x) = \pi(x')$  et  $\pi(y) = \pi(y')$  par injectivité de  $\bar{\alpha}$ . L'élément  $z := x'^{-1}x = y'y^{-1}$  est donc dans  $V$ , et même dans le sous-groupe  $V^\psi$  puisque  $y$  et  $y'$  sont fixés par  $\psi$ . Mais les éléments de  $\gamma(U)$  sont inversés par  $\psi$  d'ordre 2, d'où  $x'^{-1}x = z = \psi(z) = \psi(x'^{-1})\psi(x) = x'x^{-1}$  puis  $x'^2 = x^2$ . Et comme  $z \in V$  est central, on a

$z^2 = x'^{-1}xz = x'^{-1}zx = x'^{-2}x^2 = 1$ . Comme en (d), on en déduit  $z = 1$  puis  $x = x'$ ,  $y = y'$ . On a bien l'injectivité de  $\alpha$ . La surjectivité découle de la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
U &= \pi^{-1}(U/V) \\
&= \pi^{-1}(\bar{\gamma}(U/V)(U/V)^{\bar{\psi}}) \quad (\text{surjectivité de } \bar{\alpha}) \\
&= \pi^{-1}(\pi(\gamma(U))\pi(U^\psi)) \quad (\pi \circ \gamma = \bar{\gamma} \circ \pi, \pi \circ \psi = \bar{\psi} \circ \pi \text{ par définition de } \bar{\gamma} \text{ et } \bar{\psi}) \\
&= \pi^{-1}(\pi(\gamma(U)U^\psi)) \quad (\pi \text{ morphisme de groupes}) \\
&= \gamma(U)U^\psi V \quad (Ker \pi = V) \\
&= \gamma(U)VU^\psi \quad (V \text{ est central}) \\
&= \gamma(U)\gamma(V)V^\psi U^\psi \quad (\text{surjectivité de } \alpha_0) \\
&= \gamma(U)U^\psi \quad (\text{grâce à (c) et } V \text{ central})
\end{aligned}$$

4. On déduit de ce qui précède la bijectivité de  $\gamma : \gamma(U) \rightarrow \gamma(U)$ . D'une part en effet si  $\gamma(x) = \gamma(y)$  avec  $x, y \in \gamma(U)$ , alors par (b),  $xU^\psi = yU^\psi$  puis  $x = y$  par injectivité de  $\alpha$ , et on a l'injectivité souhaitée. D'autre part, ce même point (b) donne, avec la surjectivité de  $\alpha$ ,  $\gamma(U) = \gamma(\gamma(U)U^\psi) = \gamma(\gamma(U))$ , et on a la surjectivité souhaitée. Montrons maintenant l'égalité  $\gamma(U) = \{x \in U \mid \psi(x) = x^{-1}\}$ . L'inclusion  $\subset$  est claire, et soit  $u \in U$  tel que  $\psi(u) = u^{-1}$ . Par surjectivité de  $\alpha$ , il existe  $x \in U$ ,  $y \in U^\psi$  avec  $u = \gamma(x)y$ . Comme  $u = \psi(u^{-1})$ , on trouve  $\gamma(x)y = \psi(y^{-1}\gamma(x)^{-1}) = y^{-1}\gamma(x) = y^{-1}x\psi(x^{-1}) = (y^{-1}x)\psi((y^{-1}x)^{-1})y^{-1} = \gamma(y^{-1}x)y^{-1}$ . Par injectivité de  $\alpha$ , on a alors  $y = y^{-1}$  de sorte que  $y^2 = 1$  puis  $y = 1$ . On en déduit  $u \in \gamma(U)$  puis la seconde inclusion  $\supset$ .
5. Pour finir, montrons que les morphismes bijectifs précédents  $\alpha: \gamma(U) \times U^\phi \rightarrow U$  et  $\gamma_{|\gamma(U)} : \gamma(U) \rightarrow \gamma(U)$  sont de véritables isomorphismes. Comme  $U$  est un groupe algébrique, il est lisse. Et comme la caractéristique est nulle, par la propriété 2.3.5, la bijectivité de  $\alpha$  implique qu'il s'agit en fait d'un isomorphisme  $\gamma(U) \times U^\phi \simeq U$ . Par conséquent  $\gamma(U) \times U^\phi$  puis  $\gamma(U)$  sont lisses. Par le même propriété,  $\gamma_{|\gamma(U)}$  est aussi un isomorphisme  $\gamma(U) \simeq \gamma(U)$ . On a les propriétés attendues. □

Avant de donner la proposition souhaitée, rappelons des résultats et notions classiques liés à la décomposition de Bruhat et aux racines d'un groupe réductif. Soit donc  $G$  un groupe algébrique connexe réductif en caractéristique nulle,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ . Soit  $N$  le normalisateur de  $T$  et  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $\vartheta$  une involution de  $G$  stabilisant  $T$  et  $B$ . Relativement à  $B$  et  $T$  fixés dans l'énoncé, on notera  $U$  le radical unipotent de  $B$ , et pour  $w \in W$ ,  $U_w^-$  (respectivement  $U_w^+$ ), le groupe engendré par les sous-groupes connexes unipotents  $U_\alpha$  ( $U_\alpha$  étant caractérisé comme l'unique sous-groupe connexe,  $T$ -stable, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_\alpha$ ) où  $\alpha$  est une racine telle que  $\alpha > 0$  et  $w(\alpha) < 0$  (respectivement telle que  $\alpha > 0$  et  $w(\alpha) > 0$ ). Par le théorème 28.4 [Hum81], on dispose d'une injection

$$\begin{aligned}
h: \quad N &\rightarrow (U \times U) \backslash G. \\
n &\mapsto UnU
\end{aligned} \tag{4.1}$$

De plus, les différents résultats relatifs au lemme de Bruhat donnent alors, en plus de la décomposition  $G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$ , des isomorphismes  $f_n: U_{w^{-1}}^- \times B \simeq BwB$  définis par  $(u, b) \mapsto unb$ , pour tout  $n \in N$  représentant  $w \in W$ . Voyons qu'il en découle une bijection

$$\begin{aligned}
f: \quad \left\{ (u, n, u') \mid n \in N, u' \in U, u \in U_{(nT)^{-1}}^- \right\} &\rightarrow G \\
(u, n, u') &\mapsto unu'.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

En effet, pour tout  $w \in W$  et  $m \in N$  représentant  $w$ ,  $f(u, n, u') \in BwB$  implique  $BnB = BmB = BwB$  d'où  $nT = mT = w$  et  $u \in U_{w^{-1}}^-$ . On en déduit alors le diagramme commutatif suivant

d'ensembles :

$$\begin{array}{ccc}
 f^{-1}(BwB) & \xrightarrow{f} & BwB \\
 \downarrow \wr & & \nearrow \\
 U_{w^{-1}}^- \times T \times U & & \\
 \downarrow \wr & \nearrow f_m & \\
 U_{w^{-1}}^- \times B, & & 
 \end{array}$$

les flèches verticales étant respectivement définies par  $(u, n, u') \mapsto (u, m^{-1}n, u')$  et  $(u, t, u') \mapsto (u, tu')$ . La seconde est clairement bijective par la décomposition  $B \simeq T \times U$ . La première possède un inverse donné par  $(u, t, u') \mapsto (u, mt, u')$ , et elle est aussi bijective. La restriction de  $f$  au dessus de  $BwB$  est donc bijective, et par la décomposition de Bruhat, ce sera encore le cas de  $f$ .

Par ailleurs, pour tout  $w \in W$ , le produit fournit un isomorphisme :

$$U_w^- \times U_w^+ \simeq U, \quad (4.3)$$

on a aussi :

$$wU_w^+w^{-1} = U_{w^{-1}}^+, \quad (4.4)$$

et l'involution  $\vartheta$  agissant sur le groupe de Weyl par son action sur  $T$ , on a en outre :

$$\begin{aligned}
 \vartheta(U_w^-) &= U_{\vartheta(w)}^-, \\
 \vartheta(U_w^+) &= U_{\vartheta(w)}^+.
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

L'isomorphisme (4.3) découle de l'isomorphisme classique  $\prod_{\alpha>0} U_\alpha \simeq U$  et l'égalité (4.4) d'un calcul immédiat. Montrons simplement les égalités de (4.5). Grâce à son action sur  $T$ , on peut voir  $\vartheta$  comme un endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  contenant les racines. Rappelons que  $W$  agit également linéairement sur cet espace, par conjugaison sur  $T$  au moyen des représentants dans  $N$ . Selon ce point de vue, on a alors  $\vartheta(w) = \vartheta w \vartheta$ . En effet, pour un caractère  $\mu \in E$  et  $t \in T$ , on a  $\vartheta(w)(\mu(t)) = \mu(\vartheta(w)^{-1}t\vartheta(w)) = \mu(\vartheta(w^{-1}\vartheta(t)w)) = \vartheta(\mu(w^{-1}\vartheta(t)w)) = w\vartheta(\mu(\vartheta(t))) = (\vartheta w \vartheta)(\mu(t))$ . Par ailleurs, pour toute racine  $\alpha$ , on a  $\vartheta(U_\alpha) = U_{\vartheta(\alpha)}$ . En effet, pour  $t \in T$ , l'égalité  $Int_t \circ \vartheta = \vartheta \circ Int_{\vartheta(t)}$  donne par différentiation  $Ad_t \circ d\vartheta = d\vartheta \circ Ad_{\vartheta(t)}$ . On en déduit facilement  $d\vartheta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\vartheta(\alpha)}$  et ainsi le sous-groupe  $\vartheta(U_\alpha)$  qui reste  $T$ -stable ( $\vartheta$  préservant  $T$ ) et connexe, est d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\vartheta(\alpha)}$  : il s'agit donc de  $U_{\vartheta(\alpha)}$ . Puisque  $\vartheta$  est une involution préservant le sous-ensemble de racines positives ( $\vartheta$  préservant  $B$ ) on a enfin les égalités :

$$\begin{aligned}
 \vartheta(U_w^-) &= \langle \vartheta(U_\alpha) \mid \alpha > 0, w(\alpha) < 0 \rangle \\
 &= \langle U_{\vartheta(\alpha)} \mid \alpha > 0, w(\alpha) < 0 \rangle \\
 &= \langle U_{\vartheta(\beta)} \mid \vartheta(\beta) > 0, w(\vartheta(\beta)) < 0 \rangle \\
 &= \langle U_\beta \mid \beta > 0, \vartheta w \vartheta(\beta) < 0 \rangle \\
 &= \langle U_\beta \mid \beta > 0, \vartheta(w)(\beta) < 0 \rangle \\
 &= U_{\vartheta(w)}^-.
 \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue montre l'égalité  $\vartheta(U_w^+) = U_{\vartheta(w)}^+$  et on a bien (4.5).

Nous pouvons enfin établir la proposition souhaitée. Elle présente et combine, sous une forme qui nous sera utile, des résultats centraux de [Spr85] (§4) et [RS90] (théorème 1.3 et remarque 1.4).

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif en caractéristique nulle,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ . Soit  $N$  le normalisateur de  $T$  et  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $\vartheta$  une involution de  $G$  stabilisant  $T$  et  $B$ . On pose  $K := G^\vartheta$  et  $\tau: G \rightarrow G$  défini par  $x \mapsto x\vartheta(x)^{-1}$ . En plus des actions usuelles, on considère l'action  $*$  donnée par  $g * x := gx\vartheta(g)^{-1}$ , qui se restreint en une action de  $T$  sur  $\tau(G) \cap N$ , et on note  $T_* \backslash (\tau(G) \cap N)$  l'ensemble correspondant d'orbites. Alors on a le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont des bijections :*

$$\begin{array}{ccc}
 K \backslash (G/B) & \xrightarrow{K \cdot xB \mapsto G \cdot (xB, \vartheta(x)B)} & G \backslash (G/B \times G/B) \\
 \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
 T_* \backslash (\tau(G) \cap N) & \xrightarrow{T * y \mapsto yT} & W
 \end{array} \tag{4.6}$$

En particulier, toute  $K$ -orbite de  $G/B$  possède un représentant  $yB \in G/B$  avec  $y^{-1}\vartheta(y) \in N$ . De plus,  $K \backslash (G/B)$  est fini.

*Démonstration.* Nous emploierons les notations  $U$ ,  $U_w^-$ , etc. données ci-dessus.

1. Montrons toutes les informations fournies par le diagramme (4.6).

Remarquons tout d'abord que l'application  $x \mapsto xT$  passe au quotient par l'action  $*$  de  $T$  sur  $\tau(G) \cap N$ . En effet, pour  $x$  dans cet ensemble et  $t \in T$ , on a  $t * x = tx\vartheta(t)^{-1} = x(x^{-1}tx\vartheta(t)^{-1}) \in xT$  puisque  $T$  est stable par  $\vartheta$  et  $x \in N$ . Il suit  $y = t * x \Rightarrow yT = xT$  et le passage au quotient peut s'effectuer. La flèche horizontale inférieure est donc bien définie.

Ensuite, le fait que la flèche verticale droite est une bijection découle de la décomposition de Bruhat.

Par ailleurs, pour  $y = \tau(x) \in \tau(G) \cap N$ , on a  $G \cdot (x^{-1}B, \vartheta(x)^{-1}B) = G \cdot (B, x\vartheta(x)^{-1}B) = G \cdot (B, yB)$ . On en déduit la commutativité du diagramme dès lors que la flèche verticale gauche est bien définie.

Il nous reste donc à montrer la bonne définition et la bijectivité de cette dernière flèche. Par la bijection naturelle  $B \backslash G/K \simeq K \backslash (G/B)$ , ceci revient à le faire pour l'application :

$$\Lambda: \begin{array}{ccc} T_* \backslash \tau(G) \cap N & \rightarrow & B \backslash G/K \\ T * \tau(x) & \mapsto & BxK. \end{array} \tag{4.7}$$

On peut l'obtenir avec la combinaison d'une bijection  $T \backslash \tau^{-1}(N)/K \simeq B \backslash G/K$  démontrée dans le paragraphe 4 de [Spr85], rappelée avec le théorème 1.3 de [RS90], et d'une bijection plus évidente  $T_* \backslash (\tau(G) \cap N) \simeq T \backslash \tau^{-1}(N)/K$  montrée dans la remarque 1.4 de cette dernière référence. Mais on se propose de fournir ici une preuve condensée.

Soit donc  $x, x' \in \tau^{-1}(N)$ . D'une part, si  $\tau(x') \in T * \tau(x)$ , alors il existe  $t \in T$  tel que  $x'\vartheta(x')^{-1} = tx\vartheta(x)^{-1}\vartheta(t)^{-1}$  de sorte que  $x^{-1}t^{-1}x' = \vartheta(x^{-1}t^{-1}x') \in K$  et ainsi  $x' \in TxK \subset BxK$ . D'autre part, si  $x' \in BxK$ , alors il existe  $ut \in UT = B, k \in K$  tels que  $x' = utxk$ , et en notant  $n = \tau(x)$ ,  $n' = \tau(x')$ , on a  $n' = utxk\vartheta(k)^{-1}\vartheta(x)^{-1}\vartheta(ut) = u(tn\vartheta(t)^{-1})\vartheta(u)^{-1}$ . Ainsi,  $Un'U = Utn\vartheta(t)^{-1}U$ . Par injectivité de  $h$  (4.1), les deux éléments  $n'$  et  $tn\vartheta(t)^{-1}$  de

$N$  sont égaux, ce qui montre  $\tau(x') \in T * \tau(x)$ . On conclut ainsi à la bonne définition puis à l'injectivité de  $\Lambda$  (4.7). La surjectivité repose sur le fait suivant.

*Toutes les  $B$ -orbites de  $\Xi := \{x \in G \mid \vartheta(x) = x^{-1}\}$  pour l'action  $*$  rencontrent  $N$ .* (\*)

En effet, à supposer celui-ci établi, comme  $\tau(G) \subset \Xi$  est clairement  $B$ -stable pour cette action, on aura  $\tau(G) \subset \bigcup_{n \in \tau(G) \cap N} B * n$  puis  $G = \tau^{-1}(\tau(G)) \subset \bigcup_{n \in \tau(G) \cap N} \tau^{-1}(B * n)$ . Mais  $\tau$  est clairement  $B$ -équivariante pour la translation à gauche au départ et l'action  $*$  à l'arrivée. De plus, toutes ses fibres sont clairement  $K$ -stables pour la translation à droite. Donc  $\tau^{-1}(B * n) = B\tau^{-1}(n) = \bigcup_{x \in \tau^{-1}(n)} BxK$  pour tout  $n \in \tau(G) \cap N$ . On en déduit  $G \subset \bigcup_{x \in \tau^{-1}(\tau(G) \cap N)} BxK$ . Toute  $B * K$ -orbite possède donc un représentant  $x$  tel que  $\tau(x) \in \tau(G) \cap N$ , et donc un antécédent par  $\Lambda$  (4.7); on a la surjectivité.

Montrons donc le fait (\*). Soit  $x \in \Xi$ . Par la bijection  $f$  (4.2), il existe  $u, n, u'$  avec  $n \in N, u' \in U, u \in U_{w^{-1}}^-$  où  $w := nT$  et tels que  $x = unu'$ . L'égalité  $\vartheta(x) = x^{-1}$  entraîne  $\vartheta(u)\vartheta(n)\vartheta(u') = u'^{-1}n^{-1}u^{-1}$  d'où  $U\vartheta(n)U = Un^{-1}U$  puis  $\vartheta(n) = n^{-1}$  par l'injectivité de  $h$  (4.1) et ainsi  $\vartheta(w) = w^{-1}$ .

Par ailleurs, l'isomorphisme (4.3) donne l'existence de  $(v^-, v^+) \in U_{w^{-1}}^- \times U_{w^{-1}}^+$  tel que  $\vartheta(u')^{-1} = v^-v^+ \Leftrightarrow u'^{-1} = \vartheta(v^-)\vartheta(v^+)$ . On a ainsi :

$$\vartheta(u)n^{-1}v^{+1}v^{-1} = \vartheta(x) = x^{-1} = \vartheta(v^-)\vartheta(v^+)n^{-1}u^{-1} = \vartheta(v^-)n^{-1}(n\vartheta(v^+)n^{-1}u^{-1}). \quad (4.8)$$

Par (4.5),  $\vartheta(u), \vartheta(v^-) \in \vartheta(U_{w^{-1}}^-) = U_{\vartheta(w^{-1})}^-$ . Et comme  $\vartheta(w) = w^{-1}$ ,  $\vartheta(u), \vartheta(v^-)$  sont finalement dans  $U_w^-$ . De même, en combinant (4.5) et (4.4), on a  $w\vartheta(U_{w^{-1}}^+)w^{-1} = wU_{\vartheta(w^{-1})}^+w^{-1} = wU_w^+w^{-1} = U_{w^{-1}}^+$  et on trouve que  $n\vartheta(v^+)n^{-1}u^{-1}$  est dans  $U_{w^{-1}}^+U \subset U$ . Puisque  $n^{-1}$  représente  $w^{-1}$ , l'injectivité de  $f$  (4.2) appliquée à (4.8) permet ainsi de déduire  $\vartheta(u) = \vartheta(v^-)$  et  $v^{+1}v^{-1} = n\vartheta(v^+)n^{-1}u^{-1}$ . Il suit  $u = v^-$  puis  $n\vartheta(v^+)n^{-1} = v^{+1}$ . On a alors  $x = v^- (n\vartheta(v^+)^{-1}) \vartheta(v^-)^{-1}$  de sorte que  $v^+n = n\vartheta(v^+)^{-1} \in B * x$ .

Maintenant, comme  $w\vartheta(U_{w^{-1}}^+)w^{-1} = U_{w^{-1}}^+$ , et  $\vartheta(n) = n^{-1}$ , on voit que  $\rho: v \mapsto n\vartheta(v)n^{-1}$  définit un automorphisme de  $U_{w^{-1}}^+$  de période 2. Et comme  $n\vartheta(v^+)n^{-1} = v^{+1}$ , on a  $\rho(v^+) = v^{+1}$ . Par la proposition 4.2.2, il existe alors  $v \in U_{w^{-1}}^+$  tel que  $v^+ = v\rho(v)^{-1}$ . Ainsi  $vn\vartheta(v)^{-1} = v^+n$  est dans  $B * x$ , et avec  $v \in U_{w^{-1}}^+ \subset B$ , l'élément  $n$  y est également. On a démontré le fait (\*).

2. Montrons enfin que  $K \backslash (G/B)$  est fini. Pour cela, on montre le fait suivant, en appliquant les mêmes arguments que dans [Spr85] (4.1 (ii)) (mais où l'auteur établit le résultat pour les  $B*$ -orbites) :

$$T_* \backslash (\Xi \cap N) \text{ est fini.} \quad (**)$$

La bijection  $\Lambda$  (4.7) précédente ainsi que l'inclusion  $T_* \backslash (\tau(G) \cap N) \subset T_* \backslash (\Xi \cap N)$  permettront alors de conclure. Avec un argument donné au tout début de cette preuve, l'application  $\psi: T_* \backslash (\Xi \cap N) \rightarrow W, T_* x \mapsto xT$  est bien définie. Comme  $W$  est fini, il suffit alors de montrer que les fibres  $\psi^{-1}(nT) = \{T * x \mid x \in nT \cap \Xi\}$  sont toutes finies lorsque  $n$  est pris dans  $\Xi \cap N$ .

Soit donc un tel  $n$ . Désignons par  $\zeta$  et  $\eta$  les homomorphismes du tore  $T$  respectivement définis par  $t \mapsto n\vartheta(t)n^{-1}t$  et  $t \mapsto n\vartheta(t)n^{-1}t^{-1}$ . On remarque que  $Im(\eta) \subset Ker(\zeta)$  puisque pour  $t \in T$ , on a  $\zeta\eta(t) = n\vartheta(n\vartheta(t)n^{-1}t^{-1})n\vartheta(t)n^{-1}t^{-1} = n\vartheta(n)t\vartheta(n)^{-1}\vartheta(t)^{-1}n^{-1}n\vartheta(t)n^{-1}t^{-1} = 1_T$  grâce à  $\vartheta(n) = n^{-1}$ . Ainsi, le quotient  $Q := Ker(\zeta)/Im(\eta)$  est bien défini. C'est un groupe algébrique linéaire commutatif dont tous les éléments sont semi-simples. Il s'immerge donc dans un groupe de matrices triangulaires. Mais tous ses éléments sont d'ordre au plus 2 puisque pour  $t \in Ker(\zeta)$ , on a  $t = n\vartheta(t^{-1})n^{-1}$  et donc  $t^2 = n\vartheta(t^{-1})n^{-1}t = \eta(t^{-1}) \in Im(\eta)$ . Par conséquent  $Q$  est nécessairement fini. Par ailleurs, pour  $t$  et  $t'$  dans  $T$  on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} tn \in N \cap \Xi &\Leftrightarrow (tn)^{-1} = \vartheta(tn) \\ &\Leftrightarrow t^{-1} = n\vartheta(t)n^{-1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t \in \text{Ker}(\zeta),$$

$$\begin{aligned} tn \in T * t'n &\Leftrightarrow \exists t_1 \in T; tn = t_1 t' n \vartheta(t_1^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \exists t_1 \in T; t = t_1 (n(n^{-1}t'n)) \vartheta(t_1^{-1}) (n(n^{-1}t'n))^{-1} t' \\ &\Leftrightarrow \exists t_1 \in T; t = (t_1 w \vartheta(t_1)^{-1}) t' \\ &\Leftrightarrow t \in \text{Im}(\eta) t'. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'une bijection  $Q \simeq \psi^{-1}(nT)$  qui envoie la classe de  $t$  sur la  $T*$  orbite  $T * tn$ . La fibre  $\psi^{-1}(nT)$  est donc finie comme  $Q$  et on a le fait annoncé (\*\*).  $\square$

Lorsque nous définirons la notion de paire adaptée, le corollaire suivant nous sera utile.

**Corollaire 4.2.4.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe en caractéristique nulle et  $\vartheta$  une involution de  $G$ . Soit  $T$  et  $T'$  des tores maximaux inclus dans un même sous-groupe de Borel  $B$ . On suppose  $T, T'$  et  $B$   $\vartheta$ -stables. Alors  $T$  et  $T'$  sont conjugués par un élément de  $B \cap G^\vartheta$ .*

*Démonstration.* Soit les données de l'énoncé et notons  $K := G^\vartheta$ . Il existe clairement  $x \in B$  tel que  $T' = xTx^{-1}$ . Puisque  $T$  et  $T'$  sont  $\vartheta$ -stables, on trouve encore  $T' = \vartheta(x)T\vartheta(x)^{-1}$  d'où  $x^{-1}\vartheta(x) \in N_G(T)$ . En considérant le morphisme  $\tau: y \mapsto y\vartheta(y)^{-1}$ , on a donc  $\tau(x^{-1}) \in \tau(G) \cap N_G(T)$ . Mais la proposition 4.2.3 et son diagramme (4.6) fournit une bijection  $f: T_* \setminus (\tau(G) \cap N_G(T)) \rightarrow K \setminus (G/B)$ ,  $T * \tau(y) \mapsto K \cdot y^{-1}B$ . Comme  $x \in B$ , on trouve  $f(T * \tau(x^{-1})) = K \cdot xB = K \cdot 1_G B = f(T * 1_G)$  et ainsi  $\tau(x^{-1}) \in T * 1_G$ . Il existe donc  $t \in T$  tel que  $x^{-1}\vartheta(x) = t\vartheta(t)^{-1}$ , d'où  $xt \in K$ . Comme  $T \subset B$ , on a encore  $xt \in K \cap B$  et l'égalité  $T' = xtT(xt)^{-1}$  donne le résultat attendu.  $\square$

### 4.3 De l'induction parabolique aux sous-groupes symétriques

Le résultat de cette section permet de ramener l'étude des orbites pour l'action d'un certain groupe sur la variété des drapeaux, à celle des orbites pour l'action induite de sa partie réductive. Nous verrons que cette dernière, dans les contextes qui nous intéresseront, s'interprétera comme sous-groupe de point fixe par une involution, et nous permettra ainsi d'employer des résultats sur les sous-groupes symétriques. Nous avons ainsi le théorème suivant. Nous renvoyons à [CFG20] pour des résultats analogues.

**Théorème 4.3.1.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe réductif. Soit  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$  et  $P = LU_P$  un sous-groupe parabolique les contenant décomposé en son radical unipotent  $U_P$  et en un sous-groupe de Levi  $L := Z_G(S)$  relatif à un sous-tore  $S \subset T$ . Soit en outre  $Z$  tel que  $U_P \subset Z \subset P$ . On note  $L_Z = Z \cap L$ . Soit enfin  $\mathcal{O}$  une  $P$ -orbite de  $G/B$ . On fait agir  $P$  sur  $\mathcal{O}$  de manière naturelle et sur l'ensemble des  $S$ -points fixes  $\mathcal{O}^S$  à travers  $L$  par  $lu * x := l.x$ . Alors :*

1. *Il existe un unique morphisme algébrique  $P$ -équivariant  $\phi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^S$  qui est une rétraction de l'inclusion  $\mathcal{O}^S \subset \mathcal{O}$ . De plus, il induit une bijection entre les ensembles d'orbites  $Z \setminus \mathcal{O} \simeq L_Z \setminus \mathcal{O}^S$ . On peut le résumer par le diagramme suivant.*

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ L_Z \setminus \mathcal{O}^S & \xrightarrow{\sim} & Z \setminus \mathcal{O} & \xrightarrow{\sim} & L_Z \setminus \mathcal{O}^S \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathcal{O}^S & \xrightarrow{c} & \mathcal{O} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}^S \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & & \text{id} & & \end{array} \quad (4.9)$$

En particulier, l'action naturelle de  $L$  sur  $\mathcal{O}^S \neq \emptyset$  est transitive, et pour tout  $xB \in \mathcal{O}^S$ , les bijections entre orbites échangent  $L_Z.xB = Z * xB$  et  $Z.xB$  et on a  $\dim \mathcal{O} - \dim \mathcal{O}^S = \dim Z.xB - \dim L_Z.xB$ .

2. Il existe un isomorphisme (non canonique)  $\mathcal{O}^S \simeq L/L \cap B$  et en particulier,  $\mathcal{O}^S$  est complète.

*Démonstration.* 1. Tout d'abord,  $\mathcal{O}^S$  n'est pas vide car la variété  $\mathcal{O}$  étant  $B$ -stable, elle consiste en une réunion de cellules de Schubert ayant chacune un point fixe par  $T$  et donc par  $S \subset T$ .

2. L'unicité est claire (il existe toujours au plus une rétraction équivariante sur un ensemble homogène). On cherche alors à établir le diagramme pour  $\phi: gB \mapsto \lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a)gB$ , où  $\lambda: \mathbb{G}_m \rightarrow T$  est un cocaractère caractérisant  $P, U_P$  et  $L$  de la manière suivante (voir proposition 8.4.5 de [Spr09]) :

$$\begin{aligned} P &= \{x \in G \mid \lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a)x\lambda(a)^{-1} \text{ existe}\}, \\ U_P &= \{x \in G \mid \lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a)x\lambda(a)^{-1} = e\}, \\ L &= Z_G(\lambda) \text{ (avec } \text{Im } \lambda \subset S). \end{aligned} \tag{4.10}$$

(ainsi  $P$  est le sous-groupe parabolique relatif aux racines  $\alpha$  simples positives définies par  $B$  vérifiant  $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$ ).

Soit alors  $xB \in \mathcal{O}^S$ . On considère la composée  $P \rightarrow L \rightarrow \mathcal{O}^S$  de la projection  $P \rightarrow L$ ,  $lu \mapsto l$  avec le morphisme orbital  $\beta_x: L \rightarrow \mathcal{O}^S$ ,  $l \mapsto l.xB$ . Elle est invariante sous l'action du stabilisateur  $P_{xB}$  de  $xB$ . En effet, soit  $p \in P_{xB}$  décomposé en  $p = lu \in LU_P$ . Son image par cette composée est  $l.xB$ . Mais par définition de  $L$  et  $U_P$  et l'appartenance  $xB \in \mathcal{O}^S$ , on a  $xB = \lambda(a)lu.xB = l\lambda(a)u\lambda(a)^{-1}xB \rightarrow l.xB$  lorsque  $a \rightarrow 0$ . On en déduit  $l.xB = xB$  et on a l'invariance voulue. Par conséquent, on peut passer au quotient  $P/P_{xB}$ . Puisqu'on se situe en caractéristique nulle, le morphisme orbital  $\alpha_x: P \rightarrow \mathcal{O}$ ,  $p \mapsto p.xB$  représente ce quotient (proposition 2.3.11) et il existe un unique morphisme algébrique rendant commutatif le diagramme voulu :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \xrightarrow{\exists} & \mathcal{O}^S \\ \alpha_x \uparrow & & \uparrow \beta_x \\ P & \twoheadrightarrow & L \end{array}$$

Cet unique morphisme correspond à  $\phi$ . En effet, pour  $l \in L$ ,  $u \in U_P$ , par un argument de limite analogue au précédent, on a  $\lambda(a)\alpha_x(lu) = \lambda(a)lu.xB = l\lambda(a)u\lambda(a)^{-1}xB \rightarrow l.xB = \beta_x(l)$  lorsque  $a \rightarrow 0$ . L'existence de cette limite et la surjectivité de  $\alpha_x$  montre alors que  $\phi$  est bien défini avec  $\phi(\alpha_x(lu)) = \beta_x(l)$  pour tout  $l, u$  comme précédemment. On en déduit encore  $\phi\alpha_x = \beta_x$  et  $\phi$  est bien l'unique morphisme algébrique précédent. En outre, la description qui vient d'être faite montre qu'il est  $P$ -équivariant pour les actions posées dans l'énoncé, et avec la définition initiale au moyen de  $\lambda$  on voit clairement qu'il s'agit d'une rétraction de  $\mathcal{O}^S \subset \mathcal{O}$ . On a en particulier que  $\phi$  est surjective et que  $\mathcal{O}^S$  est irréductible et homogène. On en déduit le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & id & & \\ & & \curvearrowright & & \\ L_Z \backslash \mathcal{O}^S & \longrightarrow & Z \backslash \mathcal{O} & \longrightarrow & L_Z \backslash \mathcal{O}^S \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}^S & \xrightarrow{c} & \mathcal{O} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}^S, \\ & & id & & \\ & & \curvearrowleft & & \end{array}$$

duquel découle automatiquement l'injectivité de  $L_Z \backslash \mathcal{O}^S \rightarrow Z \backslash \mathcal{O}$  et la surjectivité de  $Z \backslash \mathcal{O} \rightarrow L_Z \backslash \mathcal{O}^S$ .

Pour démontrer le point 1 du théorème, il suffit par exemple de montrer que la première de ces applications est surjective. Ceci revient encore à montrer que toute  $Z$ -orbite dans  $\mathcal{O}$  rencontre  $\mathcal{O}^S$ . Or si  $\mathcal{O}_Z$  est une  $Z$ -orbite de  $\mathcal{O}$ , alors, comme  $\mathcal{O}^S \neq \emptyset$  il existe  $lu = p \in P$  et  $xB \in \mathcal{O}^S$  tel que  $\mathcal{O}_Z = Z.px B$ . Mais  $px B = l u x B = l u l^{-1} l x B \in Z.l x B$  car  $U_P \subset Z$  est normal dans  $P$ . Ainsi  $l x B \in \mathcal{O}_Z$ ; et par définition de  $L$ , c'est encore un élément de  $\mathcal{O}^S$ .

Terminons simplement en faisant remarquer que si  $f$  est une application équivariante, l'application induite entre ensembles d'orbites est définie par  $\mathfrak{D} \mapsto f(\mathfrak{D})$ . De plus, lorsque cette dernière est bijective, son inverse est définie par les images réciproques  $\mathfrak{D} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{D})$ . Ici, on a donc  $\phi^{-1}(L_Z.x B) = \phi^{-1}(Z * x B) = Z.x B$  pour tout  $x B \in \mathcal{O}^S$ . Le morphisme  $\phi$  étant équivariant entre variétés irréductibles et homogènes, on en déduit l'égalité de dimensions en passant par la dimension d'une fibre.

3. Comme l'action de  $L$  sur  $\mathcal{O}^S$  est transitive et la caractéristique nulle, le choix de  $x B \in \mathcal{O}^S$  donne lieu à un isomorphisme  $L/Stab_L(x B) \simeq \mathcal{O}^S$ . Mais comme  ${}^x B$  est un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant  $S$ ,  $L \cap {}^x B$  est un sous-groupe de Borel de  $L$  (corollaire 22.4 [Hum81]). Ainsi, le quotient et donc  $\mathcal{O}^S$  sont des variétés complètes. En outre, par conjugaison, on se ramène alors au sous-groupe de Borel  $B \cap L$  de  $L$  et on a un isomorphisme  $L/B \cap L \simeq \mathcal{O}^S$ .  $\square$

## 4.4 Formules de dimension

Nous verrons qu'un ingrédient décisif pour obtenir les théorèmes finaux de notre thèse reposent sur des conditions de dimension. La théorie des sous-groupes symétriques permet d'obtenir celles qui nous intéresseront.

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif en caractéristique nulle,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ , et soit  $W$  le groupe de Weyl ainsi que  $\Phi$  l'ensemble des racines qui leur sont associées. Soit  $\theta$  une involution de  $G$  stabilisant  $T$  et  $B$ . On pose  $K := G^\theta$ . Alors pour tout  $x \in G$  tel que  $w_x := x^{-1}\theta(x)T \in W$ ,<sup>2</sup> on a :*

$$\dim K/K \cap {}^x B = \dim K/K \cap B + \frac{1}{2} \left( \ell(w_x) + \dim E_-(w_x) - \dim E_-(1) \right),$$

où  $E_-(a) := \{v \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi \mid a.\theta.v = -v\}$  pour  $a \in W$ ,  $\theta$  et les éléments de  $W$  étant vus comme endomorphismes de  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi$  par leur action sur  $T$ .

*Démonstration.* C'est une reformulation du théorème 4.6 de [RS90]. On voit que  $w_x$  appartient au sous-ensemble du groupe de Weyl suivant  $I := \{w \in W \mid \theta(w) = w^{-1}\}$ . La démonstration du théorème précédemment cité procède alors par récurrence sur la longueur  $L(w_x)$  introduite par les auteurs, et définie par  $L(a) = (\ell(a) + \dim E_-(a) - \dim E_-(1))/2$  pour  $a \in I$  (voir proposition 3.9 et lemme 3.4 [RS90], ce dernier assurant l'implication  $L(a) = 0 \Rightarrow a = 1$  pour  $a \in I$ ). Nous nous contentons ici d'établir l'initialisation de ce raisonnement par récurrence, car elle repose sur le lemme suivant qui est intéressant en lui-même.

**Lemme 4.4.2.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ . Soit  $\theta$  une involution de  $G$  stabilisant  $T$  et  $B$ . On pose  $K := G^\theta$ . Alors, pour tout  $x \in G$  avec  $x\theta(x)^{-1} \in B$ ,  $B.xK$  est fermé dans  $G/K$  et sa dimension est  $\dim B - \dim B \cap K$ .*

*Démonstration.* On considère l'action transitive de  $G$  sur  $G/B$  par translation à gauche qui induit, par stabilité de  $B$ , une action de l'automorphisme involutif  $\theta$  sur cette même variété. Toutes ces actions sont alors par définition compatibles au sens du corollaire 4.1.3 et on peut appliquer ce

2. Cette condition d'appartenance est équivalente au fait que  $xTx^{-1}$  est stable par  $\theta$ .

dernier. On trouve ainsi en particulier que les  $K^0$ -orbites de  $G/B$  sont toutes fermées. Elles sont donc aussi projectives puisque  $G/B$  l'est. Maintenant, si  $x\theta(x)^{-1} \in B$ , alors

$$\theta(x^{-1}B) = \theta(x^{-1}Bx) = \theta(x)^{-1}B\theta(x) = x^{-1}(x\theta(x)^{-1}B\theta(x)x^{-1})x = x^{-1}Bx = x^{-1}B$$

de sorte que  $x^{-1}B \in (G/B)^S$ . On trouve ainsi que  $K^0 \cdot x^{-1}B$  est projective. C'est donc encore le cas de  $K \cdot x^{-1}B \simeq K/K \cap x^{-1}B$ . On en déduit que  $K \cap x^{-1}B$  est un sous-groupe de Borel de  $K$  de même que  $K \cap B$ , et on a  $\dim K \cdot x^{-1}B = \dim K - \dim K \cap B$ . Par la correspondance des  $K$ -orbites de  $G/B$  et des  $B$ -orbites de  $G/K$ , le lemme est démontré.  $\square$

Ainsi, lorsque  $L(w_x) = 0$ ,  $w_x = id$  de sorte que  $x^{-1}\theta^{-1}(x^{-1}) \in T \subset B$  et par la correspondance entre  $K$ -orbites de  $G/B$  et  $B$ -orbites de  $G/K$ , on a  $\dim K/K \cap xB = \dim B \cdot x^{-1}K + \dim K - \dim B = \dim K - \dim K \cap B = \dim K/K \cap B + 0$  et on reconnaît l'hypothèse de récurrence au rang 0.  $\square$

En utilisant les résultats de la première section de ce chapitre, on parvient alors à la formule suivante de dimension.

**Théorème 4.4.3.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe réductif en caractéristique nulle. Soit  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$  et  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $P$  un sous-groupe parabolique contenant  $B$  et  $L$  le sous-groupe de Lévi associé. On note encore, relativement à  $T \subset L$ , l'ensemble de racines  $\Phi_L$ ,  $B_L$  le sous-groupe de Borel  $B \cap L$ , ainsi que  $W_P$  le groupe de Weyl et  $W^P$  l'ensemble des représentants de longueur minimale du quotient  $W/W_P$ . Soit  $\theta$  une involution de  $L$  stabilisant  $B_L$  et  $T$ . On pose  $L_Z := L^\theta$  et par induction parabolique,  $Z := L_Z U_P$ . Alors, pour toute  $Z$ -orbite  $\mathcal{O}_Z \subset G/B$ , il existe  $(l, b, w) \in L \times B_L \times (W^P)^{-1}$  tels que  $w_l := l^{-1}\theta(l)T \in W_P$  et  $\mathcal{O}_Z = Z.lbwB$ . En outre, pour tout tel triplet  $(l, b, w)$ , on a :*

$$\dim \mathcal{O}_Z = \dim Z/Z \cap B + \ell(w) + 1/2 \left( \ell(w_l) + \dim E_-(w_l) - \dim E_-(1) \right),$$

$$\text{où } E_-(a) := \{v \in \mathbb{R} \otimes_Z \Phi_L \mid a.\theta.v = -v\} \text{ pour } a \in W_P.$$

*Démonstration.* Puisque  $L$  est un sous-groupe de Lévi du sous-groupe parabolique  $P$  avec  $T \subset P$ , il existe  $S$  un sous-tore de  $T$  tel que  $L = Z_G(S)$ . Posons  $L_Z := Z \cap L$  et montrons tout d'abord l'existence d'un triplet décrivant  $\mathcal{O}_Z$  comme voulu. On sait que  $W^P$  paramètre les  $B$ -orbites de  $G/P$ . Mais puisque elles sont en bijection avec les  $P$ -orbites de  $G/B$  par  $B \cdot xP \mapsto P \cdot x^{-1}B$ , ces dernières sont paramétrées par  $(W^P)^{-1}$ . Ainsi, il existe  $w \in (W^P)^{-1}$  tel que  $\mathcal{O}_Z \subset P \cdot wB =: \mathcal{O}$ . Or, par le théorème 4.3.1 il existe  $xB \in \mathcal{O}^S$  tel que  $\mathcal{O}_Z = Z \cdot xB$ . L'inclusion précédente donne donc l'existence de  $l' \in L$ ,  $u \in U_P$  tels que  $xB = l'uwB$ . Mais comme  $S$  fixe  $xB$ , on a par caractérisation de  $L$  et  $U_P : xB = \lambda(t)xB = l'\lambda(t)u\lambda(t)^{-1}wB \rightarrow l'wB$  lorsque  $t \rightarrow 0, t \in k^*$ . Ainsi  $xB = l'wB$ . Par ailleurs, comme  $L_Z = L^\theta$ , on sait par un résultat de [RS90] que toute  $L_Z$ -orbite de  $L/B_L$  peut-être représentée par un élément  $l \in L$  avec  $l^{-1}\theta(l)T \in W_P$ . Il existe donc un tel élément  $l \in L$ , ainsi que  $l_Z \in L_Z$  et  $b \in B_L$  tel que  $l' = l_Z l b$ . On a donc finalement  $\mathcal{O}_Z = Z.lbwB$  avec  $(l, b, w)$  comme voulu.

Montrons maintenant la formule de dimension à partir d'un tel triplet  $(l, b, w)$ . Posons comme précédemment,  $\mathcal{O} := P \cdot wB$ . Comme  $lbwB$  est clairement fixé par  $S$ , on a par le théorème 4.3.1 (1),  $\dim Z.lbwB - \dim L_Z.lbwB = \dim \mathcal{O} - \dim \mathcal{O}^S$ . Mais  $\dim \mathcal{O} = \dim B \cdot w^{-1}P + \dim P - \dim B$ . Et par ce même théorème 4.3.1 (2), on a  $\dim \mathcal{O}^S = \dim L/B_L = \dim P/B$ . Ainsi  $\dim \mathcal{O} - \dim \mathcal{O}^S = l(w^{-1}) = l(w)$  puis  $\dim \mathcal{O}_Z = \dim L_Z.lbwB + l(w) = \dim L_Z/L_Z \cap^{lbw} B + l(w)$ . Or, avec  $w^{-1} \in W^P = \{v \in W \mid v(\alpha) > 0, \forall \alpha \in I_P\}$ , on a  $L \cap^w B = L \cap B$ , de sorte que  $L_Z \cap^{lbw} B = Z \cap (L \cap^{lbw} B) = Z \cap^{lb} (L \cap^w B) = Z \cap^{lb} (L \cap B) = Z \cap (L \cap^l B) = L_Z \cap^l B_L$ . Et comme  $L_Z$  est le sous-groupe de points fixes par  $\theta$  du groupe réductif connexe  $L$  et que  $w_l := l^{-1}\theta(l)T \in W_P$ , par le théorème 4.4.1, on a :

$$\dim L_Z/L_Z \cap^l B_L = \dim L_Z/L_Z \cap B_L + (\ell(w_l) + \dim E_-(w_l) - \dim E_-(1))/2.$$

En remarquant que  $L_Z/L_Z \cap B_L \simeq Z/Z \cap B$ , on obtient finalement bien la formule de la dimension pour  $\mathcal{O}_Z$ .  $\square$

**Corollaire 4.4.4.** *Sous les données de l'énoncé précédent, supposons  $\mathcal{O}_Z$  de la forme  $Z.wB$  avec  $w \in W$ . Posons  $\tau := v_2^{-1}$  où  $w^{-1} = v_1 v_2$  est la décomposition de  $w^{-1}$  dans  $W^P W_P$ . Alors :*

$$\dim \mathcal{O}_Z = \dim Z/Z \cap B + \ell(w) + \ell(\tau^{-1}\theta(\tau))/2 - \ell(\tau).$$

*Démonstration.* On peut trouver  $\tau$  tel que  $w^{-1}\tau \in W^P$ . On choisit un représentant  $\dot{\tau}$  de  $\tau$  dans  $N_L(T)$  et on applique alors la formule du théorème pour le triplet  $(\dot{\tau}, 1, \tau^{-1}w)$ . Or par propriété,  $\ell(w^{-1}\tau) = \ell(\tau^{-1}w) = \ell(w^{-1}) - \ell(\tau)$ . De plus, comme  $\tau$  est déjà un élément de  $W_P$ , et que  $\theta(\tau).\theta = \theta.\tau$  comme endomorphisme de  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi_L$ , on a, pour tout  $v$  dans ce dernier espace :

$$(\tau^{-1}\theta(\tau)).\theta.v = -v \Leftrightarrow \tau.(\tau^{-1}\theta(\tau)).\theta.v = \tau.(-v) \Leftrightarrow \theta(\tau).\theta.v = -\tau.v \Leftrightarrow \theta.\tau.v = -\tau.v \Leftrightarrow \tau.v \in E_-(1).$$

On en déduit  $E_-(\tau^{-1}\theta(\tau)) = \tau^{-1}.E_-(1)$ . On simplifie ainsi l'expression du théorème 4.4.3 et on trouve la formule souhaitée.  $\square$

# Chapitre 5

## Résultats préliminaires, modèles et paramétrisations pour les groupes classiques

Ce chapitre vise à préparer les applications des théorèmes généraux aux groupes  $Gl(V)$ ,  $SO(V)$ ,  $Sp(V)$  représentant les types classiques  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . En premier lieu, on fixe ainsi des modèles matriciels qui fourniront un cadre commode pour des preuves et on donne quelques propriétés élémentaires sur les systèmes de racines qui y apparaissent. On explique ensuite comment l'usage de ces modèles explicites ne nous fera pas perdre excessivement de généralité grâce à la notion de paire adaptée (définition 5.4.3). On propose enfin des paramétrisations pour les orbites qui apparaissent dans ces cas classiques.

### 5.1 Conventions, notations et rappels

#### 5.1.1 Conventions et notations

Donnons dès maintenant quelques conventions et commodités de notations.

1. On identifiera souvent les permutations et leur matrice dans la base usuelle et pour tout entier  $d$ , on notera aussi  $\zeta_d$  le morphisme naturel des matrices monomiales  $\mathbb{M}$  de taille  $d$  vers groupe des permutations  $\mathfrak{S}_d$ .
2. Pour des entiers  $d \leq n$ , on dit que  $\varsigma \in \mathfrak{S}_d$  est la *permutation induite* de  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  sur  $\{k+1, \dots, k+d\} \subset \{1, \dots, n\}$  si  $\varsigma$  se déduit de  $\sigma$  au moyen de bijections strictement croissantes comme il suit :

$$\begin{array}{ccc} \{1, \dots, d\} & \xrightarrow[\sim]{\nearrow} & \{k+1, \dots, k+d\} \\ \varsigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \{1, \dots, d\} & \xrightarrow[\sim]{\nearrow} & \sigma(\{k+1, \dots, k+d\}), \end{array}$$

ou, de manière équivalente, lorsque la permutation  $\sigma \cdot \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & \varsigma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-(k+d)} \end{pmatrix}$  est strictement croissante sur  $\{k+1, \dots, k+d\}$ .

3. Pour tout entier  $n$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on notera  $\ell_n(\sigma)$  le nombre d'inversions de  $\sigma$ , soit sa longueur dans  $\mathfrak{S}_n$  :  $\ell_n(\sigma) := \#\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}$ .
4. Pour tout entier  $d$  et  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on notera, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté,  $\bar{i} := d - i + 1$ .

5. Par ailleurs, pour toute matrice  $M$ , on notera  ${}^\delta M$  la symétrie de  $M$  selon l'antidiagonale (c'est-à-dire échangeant le coefficient en  $(i, j)$  avec celui en  $(\bar{j}, \bar{i})$ ).
6. Pour tout entier  $d$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ , on notera  $\tilde{\sigma}$  la permutation de  $\{1, \dots, d\}$  définie par  $i \mapsto \overline{\sigma(\bar{i})}$ . On a donc  $\tilde{\sigma} = u_0 \sigma u_0$  où  $u_0$  est l'élément de plus grande longueur de  $\mathfrak{S}_d$  (soit donc l'unique permutation strictement décroissante de  $\{1, \dots, d\}$ ). De plus, l'identification des permutations avec leurs matrices donne  $\tilde{\sigma} = {}^\delta \sigma^{-1}$ .
7. Enfin, lorsqu'un tore maximal et un sous-groupe de Borel du groupe ambiant réductif sont fixés, on posera  $\rho$  la somme de tous les poids fondamentaux, soit encore la demi-somme des racines positives.

Dans tous ce chapitre, les objets seront définis relativement à un corps algébriquement clos et de caractéristique différente de 2 pour les types  $B, C, D$ .

## 5.2 Type A

On commence par exposer ce qui concerne le type  $A$ ; on trouvera les analogues pour les types  $B, C, D$  dans la section suivante.

### 5.2.1 Modèle matriciel $\mathcal{M}(n, r)$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in \{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ , on introduit le modèle matriciel  $\mathcal{M}(n, r)$ , définissant les groupes  $G_n, B_n, T_n, W_n, P_{n,r}, L_{n,r}, Z_{n,r}, LZ_{n,r}, BL_{n,r}, H_{n,r}, BH_{n,r}, TH_{n,r}, WP_{n,r}, W^{P_{n,r}}$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_n$ , les éléments  $e_{n,r}, \sigma_{0,n}$  et les morphismes  $\theta_{n,r}, \pi_{n,r}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
G_n &:= GL_n, \\
\mathfrak{g}_n &:= \mathfrak{gl}_n, \\
e_{n,r} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_n, \\
T_n &:= \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \subset G_n, \\
B_n &:= \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix} \subset G_n, \\
P_{n,r} &:= \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \in G_n \mid A, B, C \text{ carrées de taille respective } r, n-2r, r \right\}, \\
L_{n,r} &:= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \in P_{n,r} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \mid A, C \in GL_r, B \in GL_{n-2r} \right\}, \\
Z_{n,r} &:= \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \in P_{n,r} \right\}, \\
H_{n,r} &:= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in GL_r \right\}, \\
LZ_{n,r} &:= L_{n,r} \cap Z_{n,r}, \\
BL_{n,r} &:= B_n \cap L_{n,r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{H_{n,r}} &:= T_n \cap H_{n,r}, \\ B_{H_{n,r}} &:= B_n \cap H_{n,r}. \end{aligned}$$

On pose encore :

$$\begin{aligned} W_n &:= \mathfrak{S}_n, \\ \sigma_{0,n} &:= \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in W_n, \\ W_{P_{n,r}} &:= \left\{ \left( \begin{array}{ccc} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{array} \right) \middle| \sigma_1, \sigma_3 \in \mathfrak{S}_r, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n-2r} \right\}, \\ W^{P_{n,r}} &:= \left\{ u \in W_n \mid \begin{array}{l} u \text{ est croissante sur} \\ \{1, \dots, r\}, \{r+1, \dots, n-r\}, \{n-r+1, \dots, n\} \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

Enfin on définit :

$$\begin{aligned} \theta_{n,r} : \quad & \begin{array}{ccc} L_{n,r} & \rightarrow & L_{n,r} \\ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \end{array} \\ \\ \pi_{n,r} : \quad & \begin{array}{ccc} Z_{n,r} & \rightarrow & H_{n,r} \\ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}. \end{array} \end{aligned}$$

Ces définitions appellent déjà quelques commentaires.

Pour alléger les notations, oublions un instant les indices  $n, r$  et désignons par  $G, T$ , etc les objets  $G_n, T_n$ , etc.

$G$  est isomorphe à un  $GL(V)$ , et il est réductif connexe de type  $A$ .

$H$  est isomorphe à  $GL_r$ , il est donc aussi réductif connexe.

On voit que  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie de  $G$  et que  $e$  en est un élément nilpotent : c'est une matrice nilpotente d'ordre 2. De plus,  $T$  est un tore maximal,  $B$  un sous-groupe de Borel et  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$  avec  $L$  comme sous-groupe de Levi associé. On voit aussi que  $\theta$  est une involution de  $L$  stabilisant  $T$  et  $B$  avec  $L^\theta = L_Z$  sous-groupe connexe, et  $Z = L_Z U_P = Z_G(e)$  est également connexe. Enfin,  $H \subset Z$  est un sous-groupe fermé,  $B_H$  en est un sous-groupe de Borel,  $T_H$  en est un tore maximal et  $\pi: Z \rightarrow H$  fournit une rétraction avec  $\pi(B \cap Z) \subset B$ .

Par ailleurs,  $N_G(T)$  est classiquement l'ensemble des matrices monomiales inversibles ; en considérant le morphisme surjectif  $\zeta_n$  qui envoie ces dernières sur les permutations correspondantes,  $W_n$  s'identifie alors au groupe de Weyl de  $G$  associé à  $T$ . Son élément de plus grande longueur est ainsi donné par  $\sigma_0$ .

En outre, la proposition 5.2.1 ci-après montre que  $W_P$  s'identifie au groupe de Weyl de  $P$  ou de  $L$  associé à  $T$  et que  $W^P$  forme bien un système de représentant de longueur minimale du quotient  $W/W_P$ .

Enfin,  $\theta$  induit sur  $W_P$  l'involution :

$$\begin{pmatrix} \sigma & & \\ & v & \\ & & \sigma' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma' & & \\ & v & \\ & & \sigma \end{pmatrix}.$$

### 5.2.2 Racines et sous-groupe parabolique particulier

Posons  $\Phi$ ,  $\Phi^+$  et  $\Delta$  les ensembles de racines, racines positives et simples positives relatives à  $T_n$  et  $B_n$  :

$$\begin{aligned}\Phi &= \{ \epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n \}, \\ \Phi^+ &= \{ \epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n \}, \\ \Delta &= \{ \alpha_i := \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid i = 1, \dots, n-1 \}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Rappelons alors le résultat :

**Proposition 5.2.1.** *Soit  $\sum_{i=1}^m r_i = n$  une composition de l'entier  $n$  et  $P$  le sous-groupe parabolique associé à  $B_n$  et au sous-ensemble de racines simples  $\Delta \setminus \{ \alpha_{r_1}, \alpha_{r_1+r_2}, \dots, \alpha_{r_1+\dots+r_{m-1}} \}$ . Autrement dit :*

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & * & * & * \\ & A_2 & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & A_m \end{pmatrix} \in G_n \mid A_i \text{ carrée de taille } r_i. \right\}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}W_P &= \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m \end{pmatrix} \mid \sigma_i \in \mathfrak{S}_{r_i} \ \forall i = 1, \dots, m \right\}, \\ W^P &= \left\{ u \in W_n \mid \begin{array}{l} \forall i = 0, \dots, m-1, \ u \text{ est croissante sur} \\ \{ 1 + \sum_{k=1}^i r_k, \sum_{k=1}^{i+1} r_k \} \end{array} \right\},\end{aligned}$$

où l'on note  $W^P$  l'ensemble des représentants de longueur minimale du quotient  $W/W_P$ .

*Démonstration.*  $W_P$  est le groupe de Weyl du groupe réductif

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix} \mid A_i \in GL_{r_i} \ \forall i = 1, \dots, m \right\},$$

de sorte que  $W_P = \zeta_n(\mathbb{M} \cap L)$  et on a l'égalité voulue. Pour  $W^P$ , la caractérisation de  $P$  par le sous-ensemble de racines simples donne (proposition 4.0.2) :

$$\begin{aligned}u \in W^P &\Leftrightarrow u(\alpha) > 0 \ \forall \alpha \in \Delta - \{ \alpha_{r_1}, \alpha_{r_1+r_2}, \dots, \alpha_{r_1+\dots+r_{m-1}} \} \\ &\Leftrightarrow u(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) > 0 \ \forall j \in \{ 1, \dots, n-1 \} - \{ r_1, r_1+r_2, \dots, r_1+\dots+r_{m-1} \} \\ &\Leftrightarrow u(j) < u(j+1) \ \forall j \in \{ 1, \dots, n-1 \} - \{ r_1, r_1+r_2, \dots, r_1+\dots+r_{m-1} \} \\ &\Leftrightarrow u \text{ est croissante sur } \left\{ 1 + \sum_{k=1}^i r_k, \dots, \sum_{k=1}^{i+1} r_k \right\} \ \forall i = 0, \dots, m-1.\end{aligned}$$

□

### 5.2.3 Un caractère dominant

Puisqu'il est effectué dans le modèle matriciel, on place ici un résultat que nous utiliserons essentiellement dans le théorème final de notre travail.

**Proposition 5.2.2** (Type A). *Soit  $H$  et  $T_H$  selon le modèle matriciel  $\mathcal{M}(n, r)$ . Alors le caractère  $2\rho_H - \rho_{|T_H}$  est dominant.*

*Démonstration.* Pour un  $T$ -caractère  $\lambda$ , on notera  $\lambda'$  sa restriction à  $T_H$ . Les descriptions de  $H$ ,  $T_H$  permettent d'avoir les résultats suivants. On a ici  $H \simeq Gl_r$  et :

$$\begin{aligned} 2\rho_H &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j, \\ 2\rho_{|T_H} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j, \\ \varepsilon'_i &= \varepsilon'_{n-r+i} \quad \forall i \in [1, r], \\ \varepsilon'_j &= 0 \quad \forall j \in [r+1, n-r]. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2\rho_{|T_H} &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j + \sum_{n-r+1 \leq i < j \leq n} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq r < j \leq n-r} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j + \sum_{r+1 \leq i \leq n-r < j \leq n} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq r < n-r+1 \leq j \leq n} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j + \sum_{r+1 \leq i < j \leq n-r} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq r} \varepsilon'_i - \varepsilon'_j + \sum_{1 \leq l < k \leq r} \varepsilon'_{n-r+l} - \varepsilon'_{n-r+k} \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq r < j \leq n-r} \varepsilon'_i - 0 + \sum_{1 \leq l \leq r < i \leq n-r} 0 - \varepsilon'_{n-r+l} \\ &+ \sum_{1 \leq i, l \leq r} \varepsilon'_i - \varepsilon'_{n-r+l} + \sum_{r+1 \leq i < j \leq n-r} 0 - 0 \\ &= 4\rho_H, \end{aligned}$$

d'où  $2\rho_H - \rho_{|T_H} = 0$ . □

## 5.3 Types B, C, D

On introduit ici un modèle matriciel et des propriétés qui permettront de développer des arguments communs aux types B, C et D.

### 5.3.1 Modèle matriciel $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in \{0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$  et  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ , on note  $I_{\varepsilon, n}$  la matrice  $\begin{pmatrix} I_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{\lfloor n/2 \rfloor} \end{pmatrix}$  et on introduit le modèle matriciel  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ , définissant les groupes  $G_{\varepsilon, n}, T_{\varepsilon, n}, B_{\varepsilon, n}, W_{\varepsilon, n}, P_{\varepsilon, n, r}, L_{\varepsilon, n, r}, Z_{\varepsilon, n, r}, LZ_{\varepsilon, n, r}, BL_{\varepsilon, n, r}, H_{\varepsilon, n, r}, TH_{\varepsilon, n, r}, BH_{\varepsilon, n, r}, WP_{\varepsilon, n, r}, WP_{\varepsilon, n, r}$ , l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\varepsilon, n}$ , les éléments  $e_{\varepsilon, n, r}, \sigma_{0, \varepsilon, n}$  et les morphismes  $\theta_{\varepsilon, n, r}, \pi_{\varepsilon, n, r}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon, n} &:= \left\{ M \in Sl_n \mid I_{\varepsilon, n} {}^\delta M I_{\varepsilon, n} = M^{-1} \right\}, \\ \mathfrak{g}_{\varepsilon, n} &:= \left\{ M \in M_n \mid I_{\varepsilon, n} {}^\delta M I_{\varepsilon, n} + M = 0 \right\}, \\ e_{\varepsilon, n, r} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{-\varepsilon, r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_{\varepsilon, n} &:= \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in G_{\varepsilon, n} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & t_{n/2} & & \\ & & & t_{n/2}^{-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & t_1^{-1} \end{pmatrix} \mid \forall i \in k^* \right\} \text{ si } n \text{ est pair} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{et } \left\{ \left( \begin{array}{cccc} t_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t_{(n-1)/2} & \\ & & & 1 \\ & & & & t_{(n-1)/2}^{-1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & t_1^{-1} \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} t_i \in k^* \\ \forall i=1, \dots, (n-1)/2 \end{array} \right\} \text{ sinon,} \\
B_{\varepsilon, n} & := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in G_{\varepsilon, n} \right\}, \\
P_{\varepsilon, n, r} & := \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \in G_{\varepsilon, n} \middle| A, B, C \text{ carrées de tailles respectives } r, n-2r, r \right\} \\
& = \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & \delta A^{-1} \end{pmatrix} \in G_{\varepsilon, n} \middle| A \in G_r, B \in G_{\varepsilon, n-2r} \right\}, \\
L_{\varepsilon, n, r} & := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \in P_{\varepsilon, n, r} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & \delta A^{-1} \end{pmatrix} \middle| A \in G_r, B \in G_{\varepsilon, n-2r} \right\}, \\
Z_{\varepsilon, n, r} & := \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & I_{-\varepsilon, r} A I_{-\varepsilon, r} \end{pmatrix} \in P_{\varepsilon, n, r} \right\}^0 \\
& = \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & I_{-\varepsilon, r} A I_{-\varepsilon, r} \end{pmatrix} \in P_{\varepsilon, n, r} \middle| A \in G_{-\varepsilon, r}, B \in G_{\varepsilon, n-2r} \right\}, \\
H_{\varepsilon, n, r} & := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{-\varepsilon, r} A I_{-\varepsilon, r} \end{pmatrix} \middle| A \in G_{-\varepsilon, r} \right\}, \\
L_{Z_{\varepsilon, n, r}} & := L_{\varepsilon, n, r} \cap Z_{\varepsilon, n, r}, \\
B_{L_{\varepsilon, n, r}} & := B_{\varepsilon, n} \cap L_{\varepsilon, n, r}, \\
T_{H_{\varepsilon, n, r}} & := T_{\varepsilon, n} \cap H_{\varepsilon, n, r}, \\
B_{H_{\varepsilon, n, r}} & := B_{\varepsilon, n} \cap H_{\varepsilon, n, r}.
\end{aligned}$$

On pose encore :

$$\begin{aligned}
W_{\varepsilon, n} & := \left\{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \middle| \begin{array}{l} \check{\sigma} = \sigma \text{ et, lorsque } 2 \mid n \text{ et } \varepsilon = 1, \\ \#\{1 \leq i \leq n/2 \mid \sigma(i) > n/2\} \text{ est pair} \end{array} \right\}, \\
\sigma_{0, \varepsilon, n} & := \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \varepsilon = 1, 2 \mid n \text{ et } 4 \nmid n, \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ sinon,} \\
W_{P_{\varepsilon, n, r}} & := \left\{ \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & v & \\ & & \check{\sigma} \end{pmatrix} \middle| \sigma \in \mathfrak{S}_r, v \in W_{\varepsilon, n-2r} \right\}, \\
W^{P_{\varepsilon, n, r}} & := \left\{ u \in W_{\varepsilon, n} \middle| \begin{array}{l} u \text{ est croissante sur } \{1, \dots, r\}, \{r+1, \dots, [n/2]\} \\ \text{et } u([n/2]) < u([n/2] + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2}) \end{array} \right\},
\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & X & & Y \\ 0 & B & -\delta(A^{-1}XB^{-1}I_{\varepsilon, n-2r}) & \\ 0 & 0 & & \delta A^{-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} (A, B, X, Y) \in G_r \times G_{\varepsilon, n-2r} \times Mat_{r, n-2r} \times Mat_{r, r}; \\ A^{-1}Y + \delta(\varepsilon A^{-1}Y) + A^{-1}XB^{-1} - \delta(A^{-1}XB^{-1}I_{\varepsilon, n-2r}) = 0 \end{array} \right\}$$

Enfin on définit :

$$\begin{aligned} \theta_{\varepsilon,n,r} : \quad & L_{\varepsilon,n,r} \quad \rightarrow \quad L_{\varepsilon,n,r} \\ & \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} I_{-\varepsilon,r}CI_{-\varepsilon,r} & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & I_{-\varepsilon,r}AI_{-\varepsilon,r} \end{pmatrix}, \\ \\ \pi_{\varepsilon,n,r} : \quad & Z_{\varepsilon,n,r} \quad \rightarrow \quad H_{\varepsilon,n,r} \\ & \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & I_{-\varepsilon,r}AI_{-\varepsilon,r} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{-\varepsilon,r}AI_{-\varepsilon,r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Remarque 5.3.1.** La définition de  $G_{\varepsilon,n}$  impose la parité de  $n$  lorsque  $\varepsilon = -1$ . Le même argument appliqué à  $G_{-\varepsilon,r}$  impose la parité de  $r$  si  $\varepsilon = 1$ .

Pour alléger les notations, oublions un instant les indices  $\varepsilon, n, r$  et désignons par  $G, T$ , etc les objets  $G_{\varepsilon,n}, T_{\varepsilon,n}$ , etc.

$G$  est isomorphe à un  $SO(V)$  ou à un  $Sp(V)$  selon que  $\varepsilon$  vaut 1 ou  $-1$ . Il est donc semi-simple connexe de type  $D, B, C$  lorsque, respectivement  $\varepsilon = 1$  et  $n$  pair,  $\varepsilon = 1$  et  $n$  impair, ou  $\varepsilon = -1$  et  $n$  impair.

$H$  est isomorphe à  $G_{-\varepsilon,r}$  soit à  $Sp_r$  si  $\varepsilon = 1$  et à  $SO_r$  si  $\varepsilon = -1$ . Il est dans tous les cas semi-simple connexe.

De manière analogue au modèle du type  $A$ , on voit que  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie de  $G$  et que  $e$  en est un élément nilpotent : c'est une matrice nilpotente d'ordre 2. De plus,  $T$  est un tore maximal,  $B$  un sous-groupe de Borel et  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  contenant  $B$  avec  $L$  comme sous-groupe de Levi associé. On voit aussi que  $\theta$  est une involution de  $L$  stabilisant  $T$  et  $B$  avec  $(L^\theta)^0 = L_Z$  sous-groupe connexe, et  $Z = L_Z U_P = Z_G(e)^0$  est également connexe. Enfin,  $H \subset Z$  est un sous-groupe fermé,  $B_H$  en est un sous-groupe de Borel,  $T_H$  en est un tore maximal et  $\pi : Z \rightarrow H$  fournit une rétraction avec  $\pi(B \cap Z) \subset B$ .

Par ailleurs, on peut voir que  $N_G(T)$  consiste en l'intersection de  $G$  avec les matrices monomiales inversibles. Aussi, par la surjection  $\zeta_n$ ,  $W$  s'identifie au groupe de Weyl de  $G$  relatif à  $T$ . Son élément de plus grande longueur est alors donné par  $\sigma_0$ .

En outre, la proposition 5.3.3 ci-après montre que  $W_P$  s'identifie au groupe de Weyl de  $P$  ou de  $L$  relatif à  $T$  et que  $W^P$  forme bien un système de représentants de longueurs minimales du quotient  $W/W_P$ .

Enfin,  $\theta$  induit sur  $W_P$  l'involution :

$$\begin{pmatrix} \sigma & & \\ & v & \\ & & \check{\sigma} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \check{\sigma} & & \\ & v & \\ & & \sigma \end{pmatrix}.$$

**Remarque 5.3.2.** Soulignons par ailleurs une spécificité du type  $C$ . Lorsque  $\varepsilon = 1$  (types  $B$  et  $D$ ),  $Z_G(e)$  est connexe et on a ainsi l'égalité  $Z = Z_G(e)$ . Mais ce n'est pas nécessairement le cas lorsque  $\varepsilon = -1$  (type  $C$ ). Cependant, si le rang  $r$  de  $e$  est impair, alors on a  $\det(-Id_r) = (-1)^r = -1$  d'où un isomorphisme

$$SO_r \times \{\pm 1\} \simeq O_r, \quad (g, \epsilon) \mapsto \epsilon g. \quad (5.2)$$

Considérant les formes matricielles, on en déduit un isomorphisme analogue

$$Z_G(e)^0 \times \{\pm 1\} \simeq Z_G(e), \quad (z, \epsilon) \mapsto \epsilon z. \quad (5.3)$$

Cela rendra ainsi inoffensif ce problème de connexité lors de l'étude des  $Z$ -orbites de  $G/B$ , tout comme le défaut de connexité de  $O_r$  n'empêche pas d'identifier ses orbites et celles de  $SO_r$  dans  $G_r/B_r$ . Si  $xB_r$  est dans  $G_r/B_r$ , respectivement  $xB$  dans  $G/B$ , alors on a en effet :

$$O_r \cdot xB_r = (SO_r \cdot xB_r) \cup (SO_r \cdot -xB_r) = (SO_r \cdot xB_r),$$

respectivement :

$$Z_G(e) \cdot xB = (Z_G(e)^0 \cdot xB) \cup (Z_G(e)^0 \cdot -xB) = Z_G(e)^0 \cdot xB.$$

### 5.3.2 Racines et groupes de Weyl types B, C, D

De manière analogue au type  $A$ , on précise ici des systèmes de racines et des sous-ensembles de  $W$  relatifs à des sous-groupes paraboliques particuliers. Notons  $\Phi$ ,  $\Phi^+$  et  $\Delta$  les ensembles de racines, racines positives et simples positives relatives à  $T$  et  $B$ . Posons tout d'abord :

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \{ \pm(\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq \lfloor n/2 \rfloor \}, \\ \Phi_0^+ &= \{ (\epsilon_i \pm \epsilon_j) \mid 1 \leq i < j \leq \lfloor n/2 \rfloor \}, \\ \Delta_0 &= \{ \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1 \}.\end{aligned}$$

On aura ainsi, en fonction des valeurs prises par  $\varepsilon$  et  $n$ , soit des types :

$$\begin{aligned}(\varepsilon = 1, n \text{ impair}) : \underset{\text{Type B}}{\Phi} &= \Phi_0 \cup \{ \pm\epsilon_i \mid i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \}, \\ &\Phi^+ = \Phi_0^+ \cup \{ \epsilon_i \mid i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \}, \\ &\Delta = \Delta_0 \cup \{ \epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor} \}, \\ (\varepsilon = -1, n \text{ pair}) : \underset{\text{Type C}}{\Phi} &= \Phi_0 \cup \{ \pm 2\epsilon_i \mid i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \}, \\ &\Phi^+ = \Phi_0^+ \cup \{ 2\epsilon_i \mid i = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \}, \\ &\Delta = \Delta_0 \cup \{ 2\epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor} \}, \\ (\varepsilon = 1, n \text{ pair}) : \underset{\text{Type D}}{\Phi} &= \Phi_0, \\ &\Phi^+ = \Phi_0^+, \\ &\Delta = \Delta_0 \cup \{ \epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor - 1} + \epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor} \}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Avec l'égalité  $\epsilon_{\bar{i}} = -\epsilon_i$  (qui fait notamment retrouver  $\epsilon_{n+1/2} = 0$  lorsque  $n$  est impair (type  $B$ )), on peut également écrire de manière plus concise :

$$\begin{aligned}\Phi^+ &= \{ \epsilon_k - \epsilon_l \mid 1 \leq k < l \leq n \}, \\ \Delta &= \Delta_0 \cup \left\{ \epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor} - \epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2}} \right\}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

On rappelle alors le résultat suivant (où on se limite à un cas particulier, par rapport à la Proposition 5.2.1) :

**Proposition 5.3.3.** *Soit  $r \leq \lfloor n/2 \rfloor$  et le sous-groupe parabolique  $P$  associé à  $B_{\varepsilon, n}$  et l'ensemble de racines  $\Delta \setminus \{ \epsilon_r - \epsilon_{r+1} \}$  :*

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \in G_{\varepsilon, n} \mid A, B, C \text{ carrées de taille respective } r, n-2r, r \right\}.$$

On a :

$$\begin{aligned}W_P &= \left\{ \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & v & \\ & & \check{\sigma} \end{pmatrix} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_r, v \in W_{\varepsilon, n-2r} \right\}, \\ W^P &= \left\{ u \in W_{\varepsilon, n} \mid \begin{array}{l} u \text{ est croissante sur } \{1, \dots, r\}, \{r+1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\} \\ \text{et } u(\lfloor n/2 \rfloor) < u(\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2}) \end{array} \right\}, \\ &= \left\{ u \in W_{\varepsilon, n} \mid \begin{array}{l} u \text{ est croissante sur } \{1, \dots, r\}, \text{ ainsi que sur} \\ \{r+1, \dots, n-r\} \text{ en types B, C, et sur} \\ \{r+1, \dots, n/2\}, \{n/2+1, \dots, n-r\}, \{r+1, \dots, n-r\} \setminus \{n/2, n/2+1\} \text{ en type D} \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

*Démonstration.*  $W_P$  est le groupe de Weyl du groupe réductif

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & C \end{pmatrix} \in P \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & & \\ & B & \\ & & \delta_{A^{-1}} \end{pmatrix} \mid A \in Gl_r, B \in G_{\varepsilon, n-2r} \right\};$$

on a ainsi  $W_P = \zeta_n(\mathbb{M} \cap L)$  et l'égalité voulue. Pour  $W^P$ , la caractérisation de  $P$  par  $\Delta - \{\epsilon_r - \epsilon_{r+1}\}$  donne (proposition 4.0.2) :

$$\begin{aligned} u \in W^P &\Leftrightarrow u(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta - \{\epsilon_r - \epsilon_{r+1}\} \\ &\Leftrightarrow u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} - \{r\} \quad \text{et} \quad u(\epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor} - \epsilon_{\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2}}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \epsilon_{u(i)} - \epsilon_{u(i+1)} > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\} - \{r\} \quad \text{et} \quad \epsilon_{u(\lfloor n/2 \rfloor)} - \epsilon_{u(\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2})} > 0 \\ &\Leftrightarrow u(i) < u(i+1) \quad \forall i \in \{1, \dots, r-1\} \cup \{r+1, \dots, n-1\} \quad \text{et} \quad u(\lfloor n/2 \rfloor) < u\left(\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow u \text{ est croissante sur } \{1, \dots, r\}, \{r+1, \dots, n\} \quad \text{et} \quad u(\lfloor n/2 \rfloor) < u\left(\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2}\right). \end{aligned}$$

□

### 5.3.3 Quelques résultats sur les longueurs

On montre ici plusieurs propriétés concernant les permutations et les longueurs d'éléments du groupe de Weyl. Elles interviendront dans les démonstrations qui suivront.

**Lemme 5.3.4.** *Soit  $v \in W_{\varepsilon, n}$ . Alors on a la correspondance suivante entre nombre d'inversions et longueur :*

$$\ell_n(v) = 2\ell(v) + \varepsilon \# \{1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \mid v(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  tel que  $\check{\sigma} = \sigma$ . Pour alléger les notations, on sous-entendra que les indices  $i, j, i', j'$  décrivant plusieurs des ensembles suivants seront pris dans  $\{1, \dots, n\}$ . On a tout d'abord :

$$\# \{i < j \mid \sigma(i) > \sigma(j)\} = 2\# \{i < j < \bar{i} \mid \sigma(i) > \sigma(j)\} + \# \{1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \mid \sigma(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}. \quad (5.6)$$

En effet, on a la partition :

$$\{i < j\} = \{i < j < \bar{i}\} \cup \{\bar{j} < \bar{i} < j\} \cup \{i < j = \bar{i}\}. \quad (5.7)$$

Mais puisque  $\check{\sigma} = \sigma$ , on a  $\sigma(i) > \sigma(j) \Leftrightarrow \sigma(\bar{i}) = \overline{\sigma(i)} < \overline{\sigma(j)} = \sigma(\bar{j})$ . De plus, la condition  $\sigma(i) > \sigma(\bar{i})$  implique  $\sigma(i) > \overline{\sigma(i)}$  puis  $\sigma(i) > \lfloor n/2 \rfloor$ . Enfin,  $i < \bar{i}$  implique  $i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ . Il suit les bijections suivantes :

$$\begin{aligned} \{\bar{j} < \bar{i} < j \mid \sigma(i) > \sigma(j)\} &\simeq \{i' < j' < \bar{i}' \mid \sigma(i') > \sigma(j')\}, \\ (i, j) &\mapsto (\bar{j}, \bar{i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{i < j = \bar{i}\} &\simeq \{1 \leq i < \lfloor n/2 \rfloor \mid \sigma(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}, \\ (i, j) &\mapsto i \end{aligned}$$

On en déduit facilement l'égalité (5.6) en décomposant  $\{i < j \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}$  selon (5.7) et en prenant le cardinal.

Maintenant, notons  $\Phi_\sigma^+ := \{\alpha \in \Phi^+ \mid \sigma(\alpha) \in \Phi^-\}$  dont le cardinal est exactement  $\ell(\sigma)$ . Le lemme se déduit alors de (5.6) et des bijections suivantes issues de la description de  $\Phi$  en fonctions des types (5.4, 5.5) :

$$\begin{aligned}
(\varepsilon = 1, n \text{ impair}) : \Phi_{\sigma}^{+} &\simeq \{ i < j < \bar{i} \mid \sigma(i) > \sigma(j) \} \\
&\quad \text{Type B} \\
&\simeq \{ i < j < \bar{i} \mid \sigma(i) > \sigma(j), j \neq (n+1)/2 \} \cup \{ 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \mid \sigma(i) > \lfloor n/2 \rfloor \} \\
(\varepsilon_i - \varepsilon_j) &\leftarrow (i, j) \\
\varepsilon_i &\leftarrow i, \\
(\varepsilon = -1, n \text{ pair}) : \Phi_{\sigma}^{+} &\simeq \{ i < j < \bar{i} \mid \sigma(i) > \sigma(j) \} \cup \{ 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \mid \sigma(i) > \lfloor n/2 \rfloor \} \\
&\quad \text{Type C} \\
(\varepsilon_i - \varepsilon_j) &\leftarrow (i, j) \\
2\varepsilon_i &\leftarrow i, \\
(\varepsilon = 1, n \text{ pair}) : \Phi_{\sigma}^{+} &\simeq \{ i < j < \bar{i} \mid \sigma(i) > \sigma(j) \} \\
&\quad \text{Type D} \\
(\varepsilon_i - \varepsilon_j) &\leftarrow (i, j).
\end{aligned}$$

□

**Lemme 5.3.5.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  tel que  $\forall 1 \leq i < j \leq d$ ,  $\sigma(i) < \sigma(j)$  ou  $\sigma(\bar{i}) > \sigma(\bar{j})$ . Alors  $\ell_d(\check{\sigma}\sigma^{-1}) = 2\ell_d(\sigma)$ .

*Démonstration.* Pour n'importe quelle permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  on a en fait l'égalité suivante, qui implique le résultat souhaité :

$$\ell_d(\check{\sigma}\sigma^{-1}) = 2\ell_d(\sigma) - 2\#\{ 1 \leq i < j \leq d \mid \sigma(i) > \sigma(j) \text{ et } \sigma(\bar{i}) < \sigma(\bar{j}) \} \quad (5.8)$$

Désignons par  $N$  la quantité :

$$N := \#\{ (s, t) \mid s < t, \sigma^{-1}(s) > \sigma^{-1}(t), \check{\sigma}\sigma^{-1}(s) < \check{\sigma}\sigma^{-1}(t) \},$$

et calculons les quantités  $A, B$  suivantes :

$$\begin{aligned}
A &:= \#\{ (i, j) \mid i < j, \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j), \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) > \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} \\
&= \#\{ (i, j) \mid i < j, \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) \} - \#\{ (i, j) \mid i < j, \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j), \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) < \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} \\
&= \ell_d(\sigma) - N.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &:= \#\{ (i, j) \mid i < j, \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) > \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} \\
&= \#\{ (i, j) \mid \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) > \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} - \#\{ (i, j) \mid i > j, \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) > \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} \\
&= \#\{ l < k \mid \check{\sigma}(l) > \check{\sigma}(k) \} - \#\{ (i, j) \mid i > j, \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) > \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} \\
&= \ell_d(\check{\sigma}) - \#\{ (i, j) \mid i > j, \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) > \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} \\
&= \ell_d(\check{\sigma}) - N \\
&= \ell_d(\sigma) - N.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\ell_d(\check{\sigma}\sigma^{-1}) &= \#\{ 1 \leq i < j \leq d \mid \check{\sigma}\sigma^{-1}(i) > \check{\sigma}\sigma^{-1}(j) \} \\
&= A + B \\
&= 2\ell_d(\sigma) - 2N.
\end{aligned}$$

Mais :

$$N = \#\{ (s, t) \mid s < t, \sigma^{-1}(s) > \sigma^{-1}(t), \check{\sigma}\sigma^{-1}(s) < \check{\sigma}\sigma^{-1}(t) \}$$

$$\begin{aligned}
&= \# \left\{ (s, t) \mid s < t, \overline{\sigma^{-1}(s)} < \overline{\sigma^{-1}(t)}, \overline{\sigma(\sigma^{-1}(s))} < \overline{\sigma(\sigma^{-1}(t))} \right\} \\
&= \# \left\{ (s, t) \mid s < t, \overline{\sigma^{-1}(s)} < \overline{\sigma^{-1}(t)}, \sigma(\sigma^{-1}(s)) > \sigma(\sigma^{-1}(t)) \right\} \\
&= \# \{ 1 \leq i < j \leq d \mid \sigma(i) > \sigma(j) \text{ et } \sigma(\bar{i}) < \sigma(\bar{j}) \}.
\end{aligned}$$

d'où l'égalité (5.8) annoncée.  $\square$

**Lemme 5.3.6.** *Soit  $v \in \mathfrak{S}_d$ . Alors il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  tel que  $\check{\sigma} = \sigma$  et  $\forall 1 \leq i < j \leq d$ ,  $v\sigma(i) < v\sigma(j)$  ou  $v\sigma(\bar{i}) > v\sigma(\bar{j})$ .*

*Démonstration.* On montre en fait davantage : si  $d = 2k$  est pair, alors il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}$  tel que  $\check{\sigma} = \sigma$  et  $v\sigma(i) = \min \{ v\sigma(j) \mid j \in [i, \bar{i}] \}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Et si  $d = 2k + 1$  est impair, alors il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_{2k+1}$  tel que  $\check{\sigma} = \sigma$  et  $v\sigma(i) = \min \{ v\sigma(j) \mid j \in [i, \bar{i}] \setminus \{k+1\} \}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Cette propriété implique bien celle de l'énoncé. En effet, supposons que  $v\sigma$  la vérifie et fixons  $1 \leq i < j \leq d$ . Dans le cas  $d = 2k$  pair, si  $i \leq k$ , alors si  $j \in [i, \bar{i}]$ , la propriété de minimalité donne  $v\sigma(i) < v\sigma(j)$ ; mais si  $\bar{i} < j$ , alors  $i \in [j, \bar{j}]$ ,  $\bar{j} \leq k$  et cette même propriété donne  $v\sigma(\bar{j}) < v\sigma(\bar{i})$ . Si  $k < i$ , alors  $\bar{j} < \bar{i} \geq k$  et on a encore une fois  $v\sigma(\bar{j}) < v\sigma(\bar{i})$  par minimalité. Dans le cas  $d = 2k + 1$  impair, les mêmes raisonnements donnent l'alternative attendue pour  $i \neq k + 1$  et  $j \neq k + 1$ . Si  $i = k + 1$ , alors on a  $\bar{j} < k + 1 < j$  et par minimalité on trouve  $v\sigma(\bar{j}) < v\sigma(j)$ . Mais puisque  $\check{\sigma} = \sigma$ , on a nécessairement  $\sigma(i) = \sigma(k + 1) = k + 1 = \sigma(\bar{i})$ . Aussi  $v\sigma(i) = v(k + 1) = v\sigma(\bar{i})$ . Cet entier étant nécessairement à gauche de  $v\sigma(j)$  ou à droite de  $v\sigma(\bar{j})$  par l'inégalité précédente, on a encore l'alternative souhaitée. Si enfin  $j = k + 1$ , alors en substituant  $\bar{i}$  à  $j$  dans le raisonnement précédent, on a la même conclusion.

Il reste à démontrer l'existence d'une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  donnant lieu à la propriété annoncée. On pose tout d'abord  $a$  la composition des transpositions de la forme  $(i \bar{i})$  pour  $1 \leq i \leq k$  tel que  $v(i) > v(\bar{i})$ . On pose ensuite  $b$  l'unique élément de  $\mathfrak{S}_d$  tel que  $\check{b} = b$  et  $vab$  soit strictement croissant sur  $\{1, \dots, k\}$ . On vérifie alors que  $\sigma := ab$  fournit la propriété attendue.  $\square$

**Exemple 5.3.7.** *Posons  $v = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7536142 \end{pmatrix}$ . Selon la construction de la preuve, on a ainsi :*

$$\begin{aligned}
a &= (1 \ 7)(2 \ 6)(3 \ 5), \\
va &= \begin{pmatrix} 1234567 \\ 2416357 \end{pmatrix}, \\
b &= \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3124675 \end{pmatrix}, \\
\sigma = ab &= \begin{pmatrix} 1234567 \\ 5764213 \end{pmatrix}, \\
v\sigma &= \begin{pmatrix} 1234567 \\ 1246573 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### 5.3.4 Un caractère dominant

De manière tout à fait analogue au type A, on établit ici la dominance d'un caractère.

**Proposition 5.3.8** (Types B,D). *Soit  $H$  et  $T_H$  selon le modèle matriciel  $\mathcal{M}(1, n, r)$ . Alors le caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  est dominant.*

*Démonstration.* Pour les types B et D intervenant dans  $\mathcal{M}(1, n, r)$ ,  $r$  est nécessairement pair et on a  $H \simeq G_{-1, r} \simeq Sp_r$ . En utilisant la description des racines positives (5.4), on a après simplification :

$$2\rho_H = \sum_{1 \leq i \leq r/2} (r - 2i + 2)\varepsilon'_i,$$

$$\begin{aligned}
2\rho_{T_H} &= \sum_{1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor} (n-2i)\varepsilon'_i, \\
\varepsilon'_i &= \varepsilon'_{r-i+1} \quad \forall i \in [1, r], \\
\varepsilon'_j &= 0 \quad \forall j \in [r+1, n-r].
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
2\rho_{T_H} &= \sum_{1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor} (n-2i)\varepsilon'_i \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r} (n-2i)\varepsilon'_i \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r/2} (n-2i)\varepsilon'_i + \sum_{r/2+1 \leq i \leq r} (n-2i)\varepsilon'_i \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r/2} (n-2i)\varepsilon'_i + \sum_{1 \leq j \leq r/2} (n-2(r-j+1))\varepsilon'_{r-j+1} \\
&= \sum_{1 \leq i \leq r/2} ((n-2i) - (n-2r+2i-2))\varepsilon'_i \\
&= 2 \sum_{1 \leq i \leq r/2} (r-2i+1)\varepsilon'_i \\
&= 2\rho_H - \sum_{1 \leq i \leq r/2} \varepsilon'_i,
\end{aligned}$$

d'où  $2\rho_H - \rho_{T_H} = \sum_{1 \leq i \leq r/2} \varepsilon'_i$ . □

**Remarque 5.3.9.** *Remarquons simplement que des calculs analogues à la dernière preuve donnent  $2\rho_H - \rho_{T_H} = -\sum_{1 \leq i \leq r/2} \varepsilon'_i$  pour le type  $C$  et le modèle considéré. Le caractère n'est donc plus dominant.*

## 5.4 Paires, orbites adaptées et sous-groupe associé

Les modèles matriciels précédents sont un cadre commode dans lequel effectuer les preuves de nos résultats pour les types classiques  $A, B, C, D$ . Cependant, les configurations qu'ils proposent, et notamment la forme du tore maximal et du sous-groupe de Borel, possèdent des traits particuliers qui empêchent de pouvoir considérer ces derniers en toute généralité. Pour capter ces spécificités de manière plus intrinsèque, nous introduisons la notion de paire et d'orbite adaptées à l'élément (ad-)nilpotent en jeu. Elles reposent sur la construction d'une involution relative à cet élément. En employant également le résultat standard de la classification des orbites nilpotentes, nous démontrons une propriété d'identification (point 3 du théorème 5.4.7) qui forme l'objectif de ce chapitre.

### 5.4.1 Involution associée

Dans cette sous-section, nous définissons l'involution associée à un élément (ad-)nilpotent (définition 5.4.1) ainsi que la notion de paire adaptée (définition 5.4.3).

Dans l'article [CFG20], P-E. Chaput, L.Fresse et T.Gobet en proposent déjà une définition. Ils la construisent au moyen d'un élément non trivial du groupe de Weyl d'une copie de  $Sl_2$  associée à un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet contenant  $e$  (voir leur définition 4.1). Nous proposons ici de définir l'involution au moyen de l'application exponentielle. Nous obtiendrons alors une formule explicite nous permettant d'en déduire que l'involution préserve le sous-groupe de Lévi  $L$ . Les précédents auteurs aboutissent à ce résultat de manière plus théorique.

On considère  $G$  un groupe algébrique connexe réductif, et  $e$  un élément ad-nilpotent de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . On suppose le corps de base  $k$  algébriquement clos et la hauteur de  $e$  égale à

2 (rappelons que la **hauteur** est ici l'ordre de ad-nilpotence moins un, i.e. l'entier  $m$  vérifiant  $(ad e)^{m+1} = 0$ ,  $(ad e)^m \neq 0$ ). On considère le centralisateur  $Z$  de  $e$  dans  $G$  :

$$Z := Z_G(e) = \{ g \in G \mid g \cdot e = e \}.$$

Pour alléger les notations, pour tout  $x_1, \dots, x_m$  dans  $\mathfrak{g}$ , on désignera par  $[x_m x_{m-1} \dots x_1]$  la composition de crochets  $[x_m [x_{m-1} [\dots [x_2 x_1] \dots]]$ .

### Construction de l'involution associée à $e$

Soit maintenant un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, f, h)$ . Il existe un sous-groupe parabolique  $P$  naturellement associé à  $e$ , indépendant du choix de ce triplet et vérifiant  $\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i$ , où les  $\mathfrak{g}_i$  sont les espaces de poids sous l'action de  $h$ . Un tel triplet va nous permettre de définir aussi une involution  $\theta$  de  $P/U_P$  que nous trouverons également indépendante du choix effectué.

À  $(e, f, h)$  correspond un morphisme de groupes  $\phi : Sl_2 \rightarrow G$  tel que :

$$d\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e, \quad d\phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f, \quad d\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = h.$$

Le choix de  $h$  détermine également un sous-groupe de Lévi  $L$  de  $P$  caractérisé par  $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(h)$ . L'hypothèse sur la hauteur de  $e$  impose plusieurs conditions remarquables. Tout d'abord, l'étude des représentation des algèbres de Lie restreint les espaces de poids non triviaux :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2. \quad (5.9)$$

Par ailleurs, on a la description suivante concernant le centralisateur (voir proposition 1.1 et 5.1 de [CFG20]) :

$$Z = (Z \cap L)U_P, \quad Z^0 = (Z \cap L)^0 U_P. \quad (5.10)$$

On pose alors :

$$\gamma_0 := \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vartheta := \text{Int}_{\gamma_0} : G \rightarrow G, \quad g \mapsto \gamma_0 g \gamma_0^{-1}.$$

En désignant par  $\mathcal{U}$  (respectivement  $\mathcal{N}$ ) la sous variété des éléments unipotents (respectivement la sous-algèbre de Lie des éléments ad-nilpotents) d'un groupe algébrique connexe (respectivement d'une algèbre de Lie), on a le diagramme suivant, où la même notation  $exp$  désigne l'exponentielle matricielle ou celle d'endomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}(Sl_2) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{U}(G) & \xrightarrow{Ad} & \mathcal{U}(Gl(\mathfrak{g})) \\ \uparrow \text{exp} & & & & \uparrow \text{exp} \\ \mathcal{N}(\mathfrak{sl}_2) & \xrightarrow{d\phi} & \mathcal{N}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{ad} & \mathcal{N}(End \mathfrak{g}). \end{array} \quad (5.11)$$

En effet, pour tout morphisme de groupes algébriques  $u : A \rightarrow B$  où  $A$  et  $B$  sont des sous-groupes de groupes linéaires, on a :

$$u \circ exp = exp \circ du$$

sur  $\mathcal{N}(\mathfrak{a})$ . Pour le voir, on peut par exemple employer le corollaire II §6 3.6 de [DG70]. Il donne une propriété de commutation analogue relativement à une exponentielle abstraite, caractérisée avec la proposition 3.1 de cette même référence. Mais dans le cadre linéaire nous retrouvons l'exponentielle usuelle (voir Exemple 3.3) et sa restriction à des éléments nilpotents conduit alors directement à la formule souhaitée. Puisque  $d(Ad \circ \phi) = ad \circ d\phi$ , on a bien la commutativité de (5.11).

Maintenant, comme  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , cette commutativité donne ainsi

$$d\vartheta = Ad_{\gamma_0} = \exp(ad_e) \exp(ad_{-f}) \exp(ad_e).$$

Calculons alors  $d\vartheta(x)$  pour tout  $i$  et  $x \in \mathfrak{g}_i$ . En utilisant l'action connue de  $e$  et  $f$  sur les espaces de poids et l'égalité de Jacobi, on trouve tout d'abord :

$$\begin{aligned} [fex] &= [efx] - ix, \\ [feex] &= [eefx] - (2 + 2i)[ex], \\ [ffex] &= [effx] + (2 - 2i)[fx], \\ [ffee] &= [eeffx] - 4i[efx] + (2i + 2i^2)x. \end{aligned}$$

En y ajoutant les annulations imposées par la décomposition (5.9), on trouve alors :

$$\begin{aligned} \exp(ad_{-f}) \exp(ad_e)(x) &= (x + [ex] + [eex]/2) - [f(x + [ex] + [eex]/2)] + [ff(x + [ex] + [eex]/2)]/2 \\ &= (1 + 3i/2 + i^2/2)x - i[fx] + [ffx]/2 \\ &\quad + (2 + i)[ex] - (1 + i)[efx] + [effx]/2 \\ &\quad + [eex]/2 - [eefx]/2 + [eeffx]/4. \end{aligned}$$

En appliquant  $\exp(ad_e)$  et en s'aidant encore des formules précédentes, on aboutit ainsi à l'expression :

$$\begin{aligned} d\vartheta(x) &= (1 + 3/2i + i^2/2)x - i[fx] + [ffx]/2 \\ &\quad + (3 + 5/2i + 1/2i^2)[ex] - (1 + 2i)[efx] + [effx] \\ &\quad + (3 + 7/4i + i^2/4)[eex] - (3/2 + 3/2i)[eefx] + [eeffx]. \end{aligned}$$

Elle donne en particulier :

$$d\vartheta(e) = -f,$$

et pour tout  $x \in \mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0$ ,

$$d\vartheta(x) = x - [efx] = x - [fex].$$

Le morphisme  $d\vartheta$  préserve donc  $\mathfrak{l}$  et sa restriction à cette sous-algèbre de Lie est une involution. Nous situant en caractéristique nulle, on a donc également  $\vartheta(L) \subset L$  et  $\vartheta$  peut se restreindre à  $L$ . De plus, par fidélité du foncteur de Lie sur les groupes algébriques connexes, cette restriction est également une involution. Enfin, pour  $x \in \mathfrak{l}$ , l'injectivité de  $[f \cdot]$  sur  $\mathfrak{g}_2$  donne :

$$d\vartheta(x) = x \Leftrightarrow [fex] = 0 \Leftrightarrow [ex] = 0 \Leftrightarrow x \in \mathfrak{z}.$$

On en déduit  $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{l}^{d\vartheta}$ . La caractéristique nulle permet d'en déduire l'égalité sur les groupes :

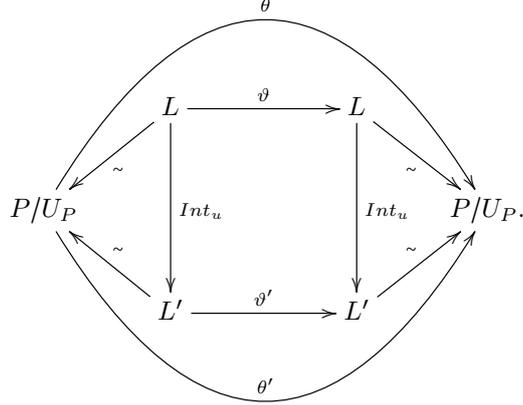
$$(Z \cap L)^0 = (L^\vartheta)^0. \quad (5.12)$$

Enfin, l'isomorphisme naturel  $L \simeq P/U_P$  nous permet de définir l'involution  $\theta$  annoncée :

$$\begin{array}{ccc} P/U_P & \xrightarrow{\theta} & P/U_P \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ L & \xrightarrow{\vartheta} & L. \end{array} \quad (5.13)$$

**Définition 5.4.1.** On appelle *involution associée à  $e$* , et on notera  $\theta_e$  ou  $\theta$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, l'involution  $\theta : P/U_P \rightarrow P/U_P$  construite précédemment.

La définition de  $\theta$  ne dépend pas du  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, f, h)$  choisi. En effet, soit  $(e, f', h')$  désignant un autre  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet contenant  $e$ . Notons  $\phi', L', \vartheta'$  et  $\theta'$  les objets correspondants à  $\phi, L, \vartheta, \theta$ . Il existe  $z \in Z^0$  tel que  $h' = Ad_z \cdot h, f' = Ad_z \cdot f$  et  $L' = zLz^{-1}$ . On en déduit  $d\phi' = Ad_z d\phi$  puis  $\phi' = Int_z \phi$  par fidélité du foncteur de Lie. Il suit  $\vartheta' = Int_z \vartheta Int_{z^{-1}}$ . Mais par (5.12), il existe  $u \in U_P$  et  $y \in (Z \cap L)^0$  tels que  $z = uy$ . Et avec (5.12) on a  $y \in L^\vartheta$  d'où  $Int_y \vartheta Int_{y^{-1}} = \vartheta$  puis  $\vartheta' = Int_u \vartheta Int_{u^{-1}}$ . De plus,  $L' = uLu^{-1}$  et si  $x \in L$ , on a  $uxu^{-1}U_P = x(x^{-1}u)xU_P = xU_P$  de sorte que la conjugaison  $Int_u$  fait commuter les identifications naturelles des sous-groupes de Lévi avec le quotient  $P/U_P$ . On en déduit le diagramme commutatif suivant donnant l'égalité  $\theta' = \theta$ .



Soulignons trois conséquences de notre construction.

- L'ensemble des points fixes  $(P/U_P)^\theta$  consiste exactement en  $Z/U_P$ .
- De plus, avec (5.10), la composante neutre  $((P/U_P)^\theta)^0$  est  $Z^0/U_P$ .
- Par ailleurs, pour tout sous-groupe de Lévi  $L$  de  $P$  issu d'un  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet contenant  $e$ ,  $\theta$  induit une involution de  $L$ , notée encore  $\theta$ , avec  $(L^\theta)^0 = (Z \cap L)^0$ .

**Remarque 5.4.2.** Les involutions  $\theta_{n,r}$  et  $\theta_{\varepsilon,n,r}$  des modèles matriciels correspondent exactement à l'involution de  $L$  induite par l'involution  $\theta$  associée à l'élément nilpotent  $e_{n,r}$  ou  $e_{\varepsilon,n,r}$ .

Justifions brièvement cette dernière remarque. Pour le type  $A$ , on fait le choix du  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, f, h)$  :

$$e := e_{n,r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_r \end{pmatrix}.$$

On voit alors facilement que  $P_{n,r}$  est le sous-groupe parabolique associé à  $e$ . De plus, on trouve

l'expression suivante pour tout  $x := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_n$  (matrice par blocs) :

$$\exp(ad_e)\exp(ad_{-f})\exp(ad_e)(x) = \begin{pmatrix} A_{33} & A_{32} & -A_{31} \\ A_{23} & A_{22} & -A_{21} \\ -A_{13} & -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $d\theta$  correspond à l'involution  $d\theta_{n,r}$ , et donc  $\theta$  à  $\theta_{n,r}$ . Comme le sous-groupe de Borel  $B_n$  est clairement stable par  $\theta_{n,r}$ , et qu'il contient  $U_P$ , on en déduit qu'il est bien adapté à  $e$ .

De manière analogue, pour les types  $B, C, D$ , on fait le choix du  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(e, f, h)$  :

$$e := e_{\varepsilon,n,r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{-\varepsilon,r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_{-\varepsilon,r} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_r \end{pmatrix},$$

et on trouve l'expression suivante pour tout  $x := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon,n}$  (matrice par blocs) :

$$\exp(ad_e)\exp(ad_{-f})\exp(ad_e)(x) = \begin{pmatrix} I_{-\varepsilon,r}A_{33}I_{-\varepsilon,r} & I_{-\varepsilon,r}A_{32} & -I_{-\varepsilon,r}A_{31}I_{-\varepsilon,r} \\ A_{23}I_{-\varepsilon,r} & A_{22} & -A_{21}I_{-\varepsilon,r} \\ -I_{-\varepsilon,r}A_{13}I_{-\varepsilon,r} & -I_{-\varepsilon,r}A_{12} & I_{-\varepsilon,r}A_{11}I_{-\varepsilon,r} \end{pmatrix}.$$

On en déduit les assertions souhaitées sur les sous-groupes  $P_{\varepsilon,n,r}$ ,  $B_{\varepsilon,n}$ ,  $T_{\varepsilon,n}$  et l'involution  $\theta_{\varepsilon,n,r}$ .

### 5.4.2 Paires adaptées

On peut maintenant définir la notion de paire adaptée.

**Définition 5.4.3.** *On dit qu'une paire  $(T, B)$  est **adaptée** si :*

1.  $T$  est un tore maximal inclus dans le sous-groupe de Borel  $B$ .
2.  $B \subset P^1$  et  $B/U_P$  est  $\theta$ -stable.
3.  $T \simeq TU_P/U_P$  est  $\theta$ -stable.

**Remarque 5.4.4.** *Avec l'identification entre involutions signalée dans la remarque 5.4.2 précédente, les couples  $(T_n, B_n)$  ou  $(T_{\varepsilon, n}, B_{\varepsilon, n})$  des modèles matriciels forment clairement des paires adaptées à l'élément nilpotent  $e_{n, r}$  ou  $e_{\varepsilon, n, r}$ .*

Avec la définition précédente vient celle d'orbite adaptée.

**Définition 5.4.5.** *On dit qu'une  $Z$ -orbite de la variété des drapeaux de  $G$  est **adaptée** si elle contient un point fixe par le tore d'une paire adaptée<sup>2</sup>.*

### 5.4.3 Identification avec le modèle matriciel

Comme annoncé, la notion de paire adaptée, au moyen d'une propriété de conjugaison, va permettre l'identification aux modèles matriciels. Nous commençons par un lemme technique, qui prouve notamment la proposition 4.1.6 du chapitre 4.

**Lemme 5.4.6.** *Soit  $m$  un entier. La condition (A) du chapitre 4 est vérifiée pour les paires suivantes :*

1.  $G = Gl_m \times Gl_m$ ,  $G^\sigma = (G^\sigma)^0 = \{(A, A)\} \simeq Gl_m$  avec  $\sigma := (A, C) \mapsto (C, A)$ .
2. Si  $\varepsilon = 1$  et  $m$  impair (respectivement  $\varepsilon = -1$  et  $m$  pair),  $G = Gl_m$ ,  $G^\sigma \simeq O_m$  (respectivement  $\simeq Sp_m$ ),  $(G^\sigma)^0 = G_{\varepsilon, m} \simeq SO_m$  (respectivement  $\simeq Sp_m$ ), avec  $\sigma := g \mapsto I_{\varepsilon, m} \delta g^{-1} I_{\varepsilon, m}$ .

*Démonstration.* 1. Montrons 1. Si  $G$  et  $\sigma$  sont comme dans l'énoncé, il est clair que le sous-groupe  $T := T_m \times T_m$  où  $T_m$  consiste dans les matrices diagonales inversibles de taille  $m$  est un tore maximal de  $G$ , stable par  $\sigma$ . En outre, le sous-groupe  $B := B_m \times B_m$  où  $B_m$  consiste dans les matrices triangulaires supérieures inversibles de taille  $m$  est un sous-groupe de Borel de  $G$ , stable par  $\sigma$ . On a de plus  $T \subset B$ . L'ensemble  $\Delta$  de racines simples associées est alors  $\{(\alpha_i, 0) \mid i \in \{1, \dots, m-1\}\} \cup \{(0, \alpha_i) \mid i \in \{1, \dots, m-1\}\}$  où, selon les notations utilisées plus haut pour le type A,  $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ . On voit que  $\sigma$  ne peut fixer aucune de ces racines, et on en déduit que la condition (A) est trivialement vérifiée.

2. Montrons 2. Donnons-nous  $G$  et  $\sigma$  comme dans l'énoncé. Posons  $T := T_m$  et  $B := B_m$ , le sous-groupe des matrices diagonales inversibles, et celui des matrices triangulaires supérieures, de taille  $m$ . Ainsi,  $T \subset B$  est un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel de  $G$ , et l'un et l'autre sont stables par  $\sigma$ . L'ensemble  $\Delta$  de racines simples associées est  $\{\alpha_i \mid i \in \{1, \dots, m-1\}\}$ , où encore une fois,  $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ , selon les notations du type A. On trouve alors que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{m-i}$ . Si maintenant  $m$  est impair, aucun  $i$  ne peut vérifier  $m = 2i$  de sorte que  $\sigma$  ne fixe aucune racine simple, et la condition souhaitée est a fortiori satisfaite. Si  $m$  est pair alors la racine  $\alpha_{m/2}$  est fixée par  $\sigma$ . L'espace de poids  $\mathfrak{g}_{\alpha_{m/2}}$  correspondant est la droite engendrée par le vecteur  $X_i$ , matrice d'unique coefficient non nul en  $(m/2, m/2 + 1)$ . Mais si  $\varepsilon = -1$ ,  $\sigma$  agit sur  $\mathfrak{g}$  par le morphisme  $X \mapsto -I_{-1, m} \delta X I_{-1}$ , de sorte que  $\sigma(X_{m/2}) = -(-X_{m/2}) = X_{m/2}$ . On en déduit  $\mathfrak{g}_{\alpha_{m/2}} \subset \mathfrak{g}^\sigma$  soit encore une fois le résultat souhaité. □

1. On rappelle que cette condition implique  $U_P \subset B$ . En effet,  $U_P$  peut se caractériser comme la variété des éléments unipotents de la composante neutre de l'intersection de tous les sous-groupes de Borel de  $P$  (théorème 26.1 [Hum81]).

2. Ou de manière équivalente, si elle contient le sous-groupe de Borel d'une paire adaptée

Il vient enfin le théorème, dont le troisième point est le résultat attendu.

**Théorème 5.4.7.** *Soit  $G$  le groupe  $Gl(V)$ ,  $SO(V)$  ou  $Sp(V)$  sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit  $e \in \mathfrak{g}$  un élément nilpotent d'ordre 2,  $Z$  son centralisateur. Soit  $P$  le sous-groupe parabolique et  $\theta: P/U_P \rightarrow P/U_P$  l'involution associée à  $e$ . Lorsque  $G = Sp(V)$  on suppose le rang de  $e$  impair. Alors on a :*

1.  $(P/U_P, \theta)$  satisfait la condition (A). En particulier, les sous-groupes de Borel de  $P/U_P$  stables par  $\theta$  sont en bijection naturelle avec les sous-groupes de Borel de  $Z^0/U_P = ((P/U_P)^\theta)^0$ .
2. Les paires adaptées existent et elles sont conjuguées sous  $Z$ .
3. Si  $(T, B)$  est une paire adaptée, alors il existe un isomorphisme de groupes algébriques qui identifie  $G$ ,  $B$ ,  $T$ ,  $Z$ ,  $e$  avec les données analogues des modèles matriciels précédents, en fonction des types.

*Démonstration.* 0. Montrons tout d'abord que l'on peut supposer  $G$ ,  $Z$ ,  $P$ ,  $e$  de la forme donnée par les modèles matriciels. En effet, par le choix d'une base convenable, adaptée à la forme bilinéaire pour le cas orthogonal et symplectique, on peut naturellement supposer que  $G$  est le sous-groupe matriciel  $G_n$  ou  $G_{\varepsilon, n}$  (en fonction des types) décrit précédemment. Si cette seule identification n'autorise pas à supposer que  $e$ ,  $Z$  et  $P$  sont aussi de la forme voulue, l'étude des invariants des orbites nilpotentes permet de le faire par conjugaison intérieure, ou éventuellement extérieure dans le cas des types  $B$  et  $D$ . En effet, pour les groupes  $Gl(V)$ ,  $O(V)$  et  $Sp(V)$ , les orbites nilpotentes sont paramétrées par des diagrammes de Young<sup>3</sup> (voir par exemple [Jan04], théorème 1.1 pour le type  $A$  et §1.6 pour les autres types). Mais le diagramme d'une orbite nilpotente d'un élément d'ordre 2 est complètement déterminé par le rang de l'élément en question. Puisque l'élément nilpotent  $e$  et l'élément  $e_r$  ou  $e_{\varepsilon, r}$  des modèles matriciels est d'ordre 2 et de rang  $r$ , il sont donc conjugués de façon intérieure pour  $G_n$  ou  $G_{-1, n}$  et par un élément de  $\{M \in Gl_n \mid I_{\varepsilon, n}^\delta M I_{\varepsilon, n} = M^{-1}\} \simeq O_n$  pour  $G_{1, n} \simeq SO_n$ . Les groupes  $P$  et  $Z$  étant caractérisés par l'élément  $e$ , on a l'assertion souhaitée.

1. Supposons donc  $G$ ,  $Z$ ,  $P$  et  $e$  selon les modèles matriciels et montrons 1. Par la caractérisation de l'involution  $\theta$  associée à  $e$  et selon la remarque 5.4.1, celle-ci correspond à l'involution  $\theta_{n, r}$  ou  $\theta_{\varepsilon, n, r}$  définie sur le sous-groupe de Lévi  $L = L_{n, r}$  ou  $L_{\varepsilon, n, r}$  des modèles matriciels. En notant encore  $\theta$  cette dernière involution, il s'agit ainsi de montrer que la paire symétrique  $(L, \theta)$  vérifie la condition (A). Pour ce faire, on raisonne différemment pour le type  $A$  et pour les autres types.
  - (a) Montrons le résultat pour le type  $A$  (modèle  $\mathcal{M}(n, r)$ ). En considérant la permutation  $\sigma$  de la première et dernière coordonnée sur le produit  $Gl_r \times Gl_{n-2r} \times Gl_r$ , la forme de  $L$  et de  $\theta$  donnent un isomorphisme  $\phi: L \simeq Gl_r \times Gl_{n-2r} \times Gl_r$  équivariant de l'action de  $\theta$  vers celle de  $\sigma$ . Or puisque  $\sigma$  laisse complètement fixe le facteur central  $Gl_{n-2r}$ , le point 1 du lemme 5.4.6 assure clairement que  $(Gl_r \times Gl_{n-2r} \times Gl_r, \sigma)$  satisfait à la condition (A). Par l'isomorphisme équivariant  $\phi$ , c'est donc aussi le cas de  $(L, \theta)$ .
  - (b) Montrons le résultat pour les types  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (modèle  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ ). La forme de  $L$  donne un isomorphisme  $\phi: L \simeq Gl_r \times G_{\varepsilon, n-2r}$ . Avec  $\sigma_1$  l'involution  $g \mapsto I_{e, r}^\delta g^{-1} I_{e, r}$ , on voit que  $\phi$  est équivariant pour l'action de  $\theta$  vers celle de  $\sigma := \sigma_1 \times id$ . Mais le point 2 du lemme 5.4.6 assure que  $(Gl_r, \sigma_1)$  vérifie la condition (A), entendu que  $r$  est supposé impair si  $\varepsilon = -1$ . C'est donc encore clairement le cas de  $(Gl_r \times G_{\varepsilon, n-2r}, \sigma)$ , puis de  $(L, \theta)$  par l'isomorphisme équivariant  $\phi$ .
2. Supposons encore  $G$ ,  $Z$ ,  $P$  et  $e$  selon les modèles matriciels et montrons 2. Par le point 1 précédent, on peut appliquer la propriété 4.1.4 au groupe algébrique linéaire connexe réductif

3. Une autre façon de procéder est de voir que  $e$  aura exactement la matrice nilpotente du modèle matriciel comme forme normale de Jordan (c'est le théorème de la forme normale de Jordan, classique en type  $A$ , et voir [Jan04] théorème 1 (types  $B, D$ ) et 2 (type  $C$ ) dans 1.11).

$P/U_P$  et à l'involution  $\theta$ . De même on peut employer le corollaire 4.2.4. Selon la remarque 5.4.4, le tore maximal et le sous-groupe de Borel du modèle matriciel en jeu fournissent clairement une paire adaptée et on a l'existence<sup>4</sup>. Soit maintenant deux paires adaptées  $(T, B)$ ,  $(T', B')$ . Notons  $(\tilde{T}, \tilde{B})$  et  $(\tilde{T}', \tilde{B}')$  leur image dans  $P/U_P$ . Par un relèvement sur  $P$  au moyen du morphisme canonique  $P \rightarrow P/U_P$  puis sur  $G$  au moyen de l'inclusion  $P \subset G$  et enfin avec l'égalité  $(P/U_P)^\theta = Z/U_P$  (voir remarque 5.4.1), il suffit de montrer que ces deux dernières paires sont conjuguées par un élément de  $(P/U_P)^\theta$ . Le point 2(b) de la propriété 4.1.4 assure que c'est déjà le cas de  $\tilde{B}$  et  $\tilde{B}'$ . En notant  $z$  l'élément donnant la conjugaison  $\tilde{B} = z\tilde{B}'z^{-1}$ , on a  $\tilde{T}, z\tilde{T}'z^{-1} \subset \tilde{B}$ . Le corollaire montre alors que ces tores  $\theta$ -stables sont conjugués par un élément  $z'$  de  $\tilde{B} \cap (P/U_P)^\theta : \tilde{T} = z'z\tilde{T}'z^{-1}z'^{-1}$ . Par conséquent, les paires  $(\tilde{T}, \tilde{B})$  et  $(\tilde{T}', \tilde{B}')$  sont conjuguées par  $z'z \in (P/U_P)^\theta$  et on a le résultat attendu.

3. Montrons enfin 3. Soit donc  $(T, B)$  une paire adaptée à  $e$ . On a vu que l'on peut déjà supposer  $G, Z, e$  de la forme souhaitée grâce à une composée d'isomorphismes. L'image correspondante de  $(T, B)$  reste adaptée, et par le point 2 précédent, elle sera conjuguée sous  $Z$  à la paire adaptée formée par le tore maximal et le sous-groupe de Borel du modèle matriciel en jeu. Aussi, par l'isomorphisme de cette conjugaison qui ne changera  $G, Z$  et  $e$ , on peut enfin supposer  $T$  et  $B$  de la forme matricielle souhaitée. □

**Remarque 5.4.8.** *Il est remarquable que la condition de rang impair pour le type C apparaîtra également essentielle dans la construction de l'équivalence birationnelle propre à ce type (théorème 6.3.3), où elle permet de pallier au défaut de connexité de  $Z$ .*

## 5.5 Paramétrisation Z-orbites types classiques

Dans cette dernière section de résultats préliminaires, on propose une paramétrisation des  $Z$ -orbites de la variétés des drapeaux  $G/B$  dans le cadre des modèles matriciels précédents  $\mathcal{M}(n, r)$  et  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . La conséquence utile pour la preuve de nos théorèmes finaux sera l'existence de points fixes par le tore d'une paire adaptée pour toute  $Z$ -orbite dans les types  $A, B, D$ .

Notre paramétrisation procède en deux étapes, le résultat de chacune d'elle pouvant déjà se trouver dans la littérature.

La première étape consiste, pour les types  $B, C, D$ , à paramétrer des orbites dans la variété de drapeaux du groupe linéaire pour l'action d'un groupe orthogonal ou symplectique (lemme 5.5.3). Pour le type  $A$ , il s'agira plus simplement de paramétrer les orbites d'un produit de deux telles variétés de drapeaux, pour l'action diagonale du groupe linéaire en jeu (voir lemme 5.5.1). De telles paramétrisations ont été effectuées par exemple par R-W. Richardson et T-A. Springer dans [RS90] (voir Exemples 10.2 et 10.4, 10.1) et nous reprenons ici l'essentiel de leurs arguments. Signalons également les résultats de T.Matsuki et T.Oshima ([MO90], théorème 4.1), et, dans un cadre vectoriel, ceux de R.Howe et H.Kraft ([HK98] Claim A2), de L.Fresse et I.Penkov (proposition 4 de [FP17]). La paramétrisation proposés par ces derniers sera d'ailleurs une transposition exacte de celle que nous nous proposons de présenter au sein des drapeaux vectoriels.

La seconde étape consiste à étendre les paramétrisations ainsi obtenues aux groupes ambiants et aux orbites qui nous intéressent. Essentiellement, nous emploierons le théorème 4.3.1. Notre méthode correspond alors précisément à celle déjà employée par P-E.Chaput, L.Fresse et T.Gobet dans leur article [CFG20]. Soulignons que les arguments ne sont pas assujettis aux types classiques et que, par l'introduction d'un système de paramètres abstraits dépendant des situations, les auteurs en tirent une paramétrisation générale des  $Z$ -orbites dans  $G/B$  (Théorème 7.2 de l'article précédemment cité).

Dans toute cette section et pour la facilité de l'exposition, on supposera la caractéristique du corps de base nulle.

---

4. De façon plus générale, on aurait pu employer le point 1 du théorème 4.1.1 qui fournissait un tore maximal et un sous-groupe de Borel sur  $P/U_P$  que l'on aurait pu relever en une paire convenable sur  $P$  puis  $G$ .

### 5.5.1 Paramétrisations préliminaires

On commence par des résultats intermédiaires que nous pourrons ensuite étendre dans le théorème de fin de section.

Le premier lemme concerne le type  $A$ . Il est une simple conséquence de la forme des groupes considérés et de la paramétrisation classique, issu du lemme de Bruhat, des  $\mathcal{G}$ -orbites de couples de drapeaux d'un groupe  $\mathcal{G}$  par son groupe de Weyl (un tore maximal ayant été préalablement choisi)<sup>5</sup>. Remarquons ainsi que l'hypothèse d'une caractéristique nulle n'est pas utilisée dans la preuve.

**Lemme 5.5.1** (Type  $A$ ). *On considère les groupes  $L, T, B, Z$ , etc. fournis par le modèle matriciel  $\mathcal{M}(n, r)$ . On a alors la paramétrisation suivante des  $L_Z$ -orbites de  $L/B_L$  :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_r &\rightarrow L_Z \backslash (L/B_L) \\ v &\mapsto L_Z \cdot \begin{pmatrix} v & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} B_L. \end{aligned}$$

En particulier, toutes les orbites ont un point  $T$ -fixe.

*Démonstration.* On considère les groupes  $L, T, B, B_L, L_Z$  etc. fournis par le modèle matriciel  $\mathcal{M}(n, r)$ . Faisons agir  $G_r \times G_{n-2r}$  sur  $G_r/B_r \times G_r/B_r \times G_{n-2r}/B_{n-2r}$  par

$$(g, \gamma) \cdot (xB_r, yB_r, zB_{n-2r}) := (gx_{B_r}, gy_{B_r}, \gamma z_{B_{n-2r}}).$$

Remarquons alors que  $(xB_r, yB_r, zB_{n-2r}) \mapsto \begin{pmatrix} x & & \\ & z & \\ & & y \end{pmatrix} B_L$  fournit un isomorphisme  $G_r/B_r \times G_r/B_r \times G_{n-2r}/B_{n-2r} \simeq L/B_L$  qui est en outre  $G_r \times G_{n-2r} \simeq L_Z$ -équivariant. Comme  $G_{n-2r}$  agit transitivement sur ses drapeaux  $G_{n-2r}/B_{n-2r}$ , on en déduit des bijections :

$$G_r \backslash (G_r/B_r \times G_r/B_r) \simeq (G_r \times G_{n-2r}) \backslash (G_r/B_r \times G_r/B_r \times G_{n-2r}/B_{n-2r}) \simeq L_Z \backslash (L/B_L),$$

dont la composition est donnée par

$$G_r \cdot (xB_r, yB_r) \mapsto L_Z \cdot \begin{pmatrix} x & & \\ & 1 & \\ & & y \end{pmatrix} B_L. \quad (5.14)$$

Or, le résultat classique de paramétrisation annoncé en préambule de ce lemme donne, appliqué au groupe  $G_r$  et à son groupe de Weyl relatif à  $T_r$  identifié avec  $\mathfrak{S}_r$  :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_r &\rightarrow G_r \backslash (G_r/B_r \times G_r/B_r) \\ v &\mapsto G_r \cdot (vB_r, B_r) \end{aligned} \quad (5.15)$$

La composition de (5.14) et (5.15) fournit alors la paramétrisation attendue.  $\square$

Le cas des types  $B, C, D$  est plus complexe, il nécessite la proposition suivante, dont la preuve repose sur la théorie des sous-groupes symétriques selon la proposition 4.2.3. Nous rappelons qu'elle est elle-même issue de l'article [RS90] de Richardson et Springer. Soulignons en outre que les auteurs traitent en exemple une paramétrisation relative au groupe orthogonal (Exemple 10.2 de cette même référence). Nos arguments seront similaires à ceux qu'ils emploient.

5. Cette paramétrisation a déjà été exploitée dans la proposition 4.2.3.

Définissons au préalable plusieurs objets et fixons quelques notations, relativement à un entier  $m$  et à  $a = \{\pm 1\}$ .

$$\begin{aligned} \vartheta : G_m &\rightarrow G_m, \quad g \mapsto I_{a,m} \delta g^{-1} I_{a,m}, \\ v_0 &:= \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_m, \\ \mathcal{I}_m^a &= \begin{cases} \{v \in \mathfrak{S}_m \mid v^2 = id\} & \text{si } a = 1, \\ \{v \in \mathfrak{S}_m \mid v^2 = id, \forall i, v(i) \neq i\} & \text{si } a = -1 \end{cases} \\ \mathcal{O}(v) &:= \{gB_m \mid (\vartheta(g)B_m, gB_m) \in G_m \cdot (B_m, v_0 v B_m)\} \subset G_m/B_m, \text{ pour tout } v \in \mathfrak{S}_m. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Le groupe  $G_{a,m}$  apparaît ainsi comme le sous-groupe de points fixes  $(G_m^\vartheta)^0$ . De plus, l'involution  $\vartheta$  est aussi donnée par  $g \mapsto I_{a,m} v_0^t g^{-1} v_0 I_{a,m}$  sur  $G_m$  et elle induit la bijection  $\sigma \mapsto v_0 \sigma v_0$  de  $\mathfrak{S}_m$ .

Pour éclairer d'une autre manière ces données et la future paramétrisation, donnons-leur une description vectorielle. Considérons donc un espace vectoriel  $V$  de dimension  $m$  muni d'une forme  $\omega$  orthogonale si  $a = 1$  et  $m$  impair ou symplectique si  $a = -1$ . On note  $\mathcal{F}(V)$  la variété des drapeaux vectoriels de  $V$ . Pour  $F := \{0\} = F_0 \subset \dots \subset F_i \subset \dots \subset V = F_n$  dans  $\mathcal{F}(V)$ , on définit son drapeau dual :

$$F^\perp := \{0\} = F_n^\perp \subset F_{n-1}^\perp \subset \dots \subset F_i^\perp \subset \dots \subset V = F_0^\perp.$$

Pour une base  $(c_i)$  de  $V$ , on introduit encore le drapeau

$$F(c_1, \dots, c_n) := \{0\} \subset \langle c_1 \rangle \subset \dots \subset \langle c_1, \dots, c_i \rangle \subset V = \langle c_1, \dots, c_n \rangle.$$

Pour un entier  $d$ , notons  $J_d$  la matrice carrée de taille  $d$  possédant des 1 sur l'antidiagonale, des 0 partout ailleurs. Posons

$$J := \begin{pmatrix} 0 & J_d \\ aJ_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Il existe alors une base  $(f_i)$  de  $V$  dans laquelle la matrice de  $\omega$  soit  $J$ . On note  $\tilde{F} := F(f_1, \dots, f_n)$ . La base  $(f_i)$  fournit un isomorphisme d'espaces vectoriels  $k^m \simeq V$  et de groupes  $\nu : G_m \simeq Gl(V)$ . On a les faits suivants.

1.  $\vartheta$  s'identifie à l'involution  $\sigma := \nu \vartheta \nu^{-1}$  de  $Gl(V)$  décrite par  $u \mapsto u^{*-1}$ ,  $(\ )^*$  étant le passage à l'endomorphisme adjoint relativement à  $\omega$ .
2.  $G_m^\vartheta$  s'identifie à  $\nu(G_m^\vartheta) = Gl(V)^\sigma = O(\omega) := \{u \in Gl(V) \mid u \text{ préserve } \omega\}$ .
3.  $\tilde{F}^\perp = \tilde{F}$ .
4.  $G_m$  agit sur  $V$  via  $\nu$  et  $B = Stab_{G_m}(\tilde{F})$ .
5. On a un isomorphisme de variétés :

$$G_m/B_m \simeq \mathcal{F}(V), \quad gB \mapsto g \cdot \tilde{F} = \nu(g)(\tilde{F}).$$

Pour  $x$  dans  $V$  et  $g \in G_m$ , on a ainsi  $\vartheta(g) \cdot x = \nu(\vartheta(g))(x) = \sigma(\nu(g))(x) = \nu(g)^{*-1}(x)$ . Mais si  $u$  est dans  $Gl(V)$ , alors pour tout sous-espace vectoriel  $E$  de  $V$ , on a classiquement  $(u(E))^\perp = u^{*-1}(E^\perp)$ . D'où  $(u(\tilde{F}))^\perp = u^{*-1}(\tilde{F}^\perp) = u^{*-1}(\tilde{F})$ . On en déduit  $(g \cdot \tilde{F})^\perp = \vartheta(g) \cdot \tilde{F}$ . Par conséquent, l'involution induite par  $\vartheta$  sur  $G_m/B_m$  correspond au passage au dual  $F \mapsto F^\perp$ , soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_m/B_m & \xrightarrow{gB_m \mapsto \vartheta(g)B_m} & G_m/B_m \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{F \mapsto F^\perp} & \mathcal{F}(V). \end{array} \tag{5.17}$$

Pour  $v \in \mathfrak{S}_m$ , on a ainsi l'identification :

$$\mathcal{O}(v) \simeq \{ F \in \mathcal{F}(V) \mid (F, F^\perp) \text{ est dans la } Gl(V)\text{-orbite de } (\tilde{F}, v_0 v \tilde{F}) \}.$$

Ajoutons enfin que ce dernier sous-ensemble de drapeaux s'identifie encore à :

$$\left\{ F(c_1, \dots, c_n) \mid \omega(c_k, c_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } v(k) = l \geq k \\ a & \text{si } v(k) = l < k \\ 0 & \text{si } v(k) \neq l \end{cases} \right\}.$$

Nous trouvons cette dernière assertion dans l'article [FP17] de L.Fresse et I.Penkov, proposition 4. Comme annoncé, les auteurs y établissent en outre une paramétrisation correspondant exactement à celle que nous proposons ici, selon l'identification (5.17).

**Proposition 5.5.2.** *On suppose  $a = -1$  ou bien  $a = 1$  avec  $m$  impair. On a la paramétrisation suivante des  $G_{a,m}$  orbites de  $G_m/B_m$  :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_m^a & \rightarrow & G_{a,m} \backslash (G_m/B_m) \\ v & \mapsto & \mathcal{O}(v) \end{array}$$

En outre, les orbites possédant un point  $T_m$ -fixe correspondent aux paramètres  $v \in \mathcal{I}_m^{-1}$ . C'est donc le cas de toutes les orbites si  $a = -1$ .

*Démonstration.* Pour la clarté de l'exposition, on désignera par  $G, T, B, W, N$  les groupes respectifs  $G_m, T_m, B_m, W_m, N_{G_m}(T_m)$ . On considère également l'involution  $\vartheta: G \rightarrow G$  de (5.16). Ainsi  $G$  est réductif connexe, et  $T$  et  $B$  sont stables sous  $\vartheta$ . On pose enfin  $K := G^\vartheta$ . Nous allons paramétrer les  $K$ -orbites de  $G/B$ . Cela fournira le résultat attendu lorsque  $a = -1$ , puisqu'alors  $K = G_{a,m}$ . Mais ce sera également le cas si  $a = 1$ , car l'imparité supposée de  $m$  donne  $K = G_{a,m} \cup (-G_{a,m})$ , d'où une identification entre les  $K$ -orbites et les  $G_{a,m}$ -orbites de  $G/B$  (voir remarque 5.3.2).

La caractéristique étant nulle, on vérifie les hypothèses de la proposition 4.2.3. On considère alors le diagramme (4.6) de cette même proposition avec le morphisme de variétés  $\tau: G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto x\vartheta(x)^{-1}$ . On l'adapte avec le morphisme  $\zeta := \zeta_m$  et l'identification du groupe de Weyl de  $G$  avec  $W = \mathfrak{S}_m$ . Ainsi,  $T * x \mapsto xT$  correspond à l'application  $\psi := T * x \mapsto \zeta(x)$  sur  $T_* \backslash (\tau(G) \cap N)$  qui a pour image  $\zeta(\tau(G) \cap N) \subset W$ . On introduit encore la notation  $\phi := K \cdot yB \mapsto G \cdot (yB, \vartheta(y)B)$ . Au moyen de la proposition 4.2.3, on obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} K \backslash (G/B) & \xrightarrow{\phi} & G \backslash (G/B \times G/B) \\ \uparrow \wr & & \uparrow w \mapsto G \cdot (B, wB) \\ T_* \backslash (\tau(G) \cap N) & \xrightarrow{\psi} & \zeta(\tau(G) \cap N). \end{array} \quad (5.18)$$

On procède ensuite en plusieurs étapes.

1. On a  $\mathcal{I}_m^a = \zeta(\tau(G) \cap N)v_0$ . En effet, si  $g \in G$ , on a  $\tau(g) = (g(I_{a,m}v_0)^t g)v_0 I_{a,m}$ . Mais  $I_{a,m}v_0$  est une matrice inversible symétrique si  $a = 1$ , antisymétrique si  $a = -1$ . L'action de congruence et la réduction des formes quadratiques et symplectiques donnent donc  $\tau(G) = A_a v_0 I_{a,m}$  où  $A_a$  consiste en les matrices inversibles qui sont symétriques si  $a = 1$ , antisymétriques si  $a = -1$ . Comme  $v_0 I_{a,m} \in N$ , on a  $\tau(G) \cap N = (A_a \cap N)v_0 I_{a,m}$ , de sorte que  $\zeta(\tau(G) \cap N)v_0 =$

$\zeta(A_a \cap N) \cdot \zeta(v_0) \cdot \zeta(I_{a,m}) \cdot v_0 = \zeta(A_a \cap N) \cdot v_0 \cdot 1 \cdot v_0 = \zeta(A_a \cap N)$ . Mais comme  $\zeta$  commute avec la transposition qui est aussi le passage à l'inverse sur  $W$  et que les matrices de  $A_{-1}$  ne possèdent pas de coefficients diagonaux non nuls, on vérifie que  $\zeta(A_a \cap N) = \mathcal{I}_m^a$ . On a bien l'égalité d'ensembles souhaitée.

2. L'application  $\psi$  est injective. En effet, remarquons tout d'abord que pour  $x \in A_a \cap N$ , l'ensemble  $xT \cap A_a$  est inclus dans  $\{txt \mid t \in T\}$ . En effet  $x \in N$  agit sur  $T$  comme  $\zeta(x)$  de sorte que pour  $t, t' \in T$ , on a les équivalences :  $xt' = txt \Leftrightarrow t' = x^{-1}txt \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\} t'_i = t_{\zeta(x)(i)} t_i$ . Mais si  $y = xt' \in xT \cap A_a$ , alors  $xy = {}^t y = ({}^t t')({}^t x) = xt'x$  d'où  $xt' = y = t'x$  et  $t' = x^{-1}t'x$ , soit encore  $\forall i \in \{1, \dots, m\} t'_i = t'_{\zeta(x)(i)}$ . En utilisant le fait que  $\zeta(x)$  est une involution, on peut alors trouver  $t \in T$  satisfaisant à la dernière égalité de l'équivalence. On a donc bien l'inclusion d'ensembles voulue.
3. Établissons la paramétrisation. Par les deux points précédents et le diagramme (5.18), l'application  $\phi$  est bijective. Avec une translation par  $v_0$ , l'angle supérieur droit du diagramme fournit ainsi une bijection  $\xi: \mathcal{I}_n^a \rightarrow K \backslash (G/B)$  donnée par  $v \mapsto \phi^{-1}(x_v)$  où  $x_v$  désigne la  $G$ -orbite  $G.(B, vv_0B)$ . Il s'agit donc simplement de voir que  $\xi(v) = \mathcal{O}(v)$  pour tout  $v \in \mathcal{I}_n^a$ . Fixons donc un tel  $v$ . Comme  $\mathcal{O}(v)$  est clairement  $K$ -stable, c'est une réunion de  $K$ -orbites. Et comme  $\vartheta$  stabilise  $B$  et induit clairement  $w \mapsto v_0 w v_0$  sur  $W$ , on a pour tout  $y \in G$ ,  $(\vartheta(y)B, yB) \in G.(B, v_0 v B) \Leftrightarrow (yB, \vartheta(y)B) \in G.(B, \vartheta(v_0 v)B) = G.(B, vv_0B)$ . Aussi, les  $K$ -orbites qui recouvrent  $\mathcal{O}(v)$  sont toutes des antécédents de  $x_v$  par  $\phi$ . Par bijectivité, il n'y a donc qu'une seule de ces orbites et elle est l'image de  $x_v$  par la réciproque de  $\phi$  : on a bien  $\mathcal{O}(v) = \phi^{-1}(x_v) = \xi(v)$ .
4. Montrons enfin l'assertion sur les points fixes. Soit  $v \in \mathcal{I}_m^{-1}$ , i.e. une involution sans point fixe. Le groupe  $K$  envisagé est alors  $G_{-1,m}$ , et ceci impose la parité de  $m$ . Aussi,  $v_0$  est sans point fixe et se trouve conjuguée à  $v$  : il existe  $u \in \mathfrak{S}_m$  tel que  $v = u^{-1}v_0u$ . Ainsi  $(v_0 u v_0 B, uB) = v_0 u v_0 \cdot (B, v_0 u^{-1} v_0 u B) = v_0 u v_0 \cdot (B, v_0 v B) \in G \cdot (B, v_0 v B)$ . On en déduit  $uB \in \mathcal{O}(v)$  et ainsi  $\mathcal{O}(v)$  possède bien un point  $T$ -fixe. Réciproquement si c'est le cas, il existe  $u \in \mathfrak{S}_m$  tel que  $uB \in \mathcal{O}(v)$ . Ainsi  $(v_0 u v_0 B, uB)$  puis  $(B, v_0 u^{-1} v_0 u B)$  sont dans la  $G$ -orbite de  $(B, v_0 v B)$ . On en déduit  $B v_0 u^{-1} v_0 u B = B v_0 v B$  ce qui assure l'égalité  $v_0 u^{-1} v_0 u = v_0 v$  par le lemme de Bruhat. On a donc  $v = u^{-1}v_0u$  et c'est bien un élément de  $\mathcal{I}_m^{-1}$ .

□

On en déduit le lemme suivant, analogue du précédent en type A.

**Lemme 5.5.3** (Types B, C, D). *On considère les groupes  $L, T, B, Z$ , etc. fournis par le modèle matriciel  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . On suppose  $\varepsilon = 1$  ou bien  $\varepsilon = -1$  avec  $r$  impair. On a alors la paramétrisation suivante des  $L_Z$ -orbites de  $L/B_L$  :*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r^{-\varepsilon} &\rightarrow L_Z \backslash (L/B_L) \\ v &\mapsto L_Z \cdot \begin{pmatrix} x & & \\ & 1 & \\ & & \delta_{x^{-1}} \end{pmatrix} B_L \text{ où } x \text{ est n'importe quel élément tel que } xB_r \in \mathcal{O}(v). \end{aligned}$$

En outre, les orbites possédant un point  $T$ -fixe correspondent aux paramètres  $v \in \mathcal{I}_r^{-1}$ . C'est donc le cas de toutes les orbites si  $\varepsilon = 1$  (types B, D).

*Démonstration.* On considère encore les groupes  $G, P$ , etc. fournis par le modèle matriciel  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ .

Remarquons que  $(xB_r, yB_{\varepsilon, n-2r}) \mapsto \begin{pmatrix} x & & \\ & y & \\ & & \delta_{x^{-1}} \end{pmatrix} B_L$  fournit un isomorphisme  $\Upsilon: G_r/B_r \times G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r} \simeq L/B_L$  qui est en outre  $G_{-\varepsilon, r} \times G_{\varepsilon, n-2r} \simeq L_Z$  et  $T_r \times T_{\varepsilon, n-2r} \simeq T$  équivariant. En appliquant la propriété 5.5.2 (pour  $a := -\varepsilon, m := r$ ), on obtient ainsi une bijection  $\xi: \mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \rightarrow L_Z \backslash (L/B_L)$  donnée par

le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{I}_r^{-\varepsilon} & \xrightarrow{\quad \xi \quad} & L_Z \backslash (L/B_L) & \xleftarrow{\quad} & L/B_L \\
\downarrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
G_{-\varepsilon, r} \backslash (G_r/B_r) & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & (G_{-\varepsilon, r} \times G_{\varepsilon, n-2r}) \backslash (G_r/B_r \times G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r}) & \xleftarrow{\quad} & (G_r/B_r \times G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r}),
\end{array}$$

de sorte que pour tout  $v \in \mathcal{I}_r^{-\varepsilon}$ ,  $\xi(v)$  est l'image par  $\Upsilon$  de  $\mathcal{O}(v) \times (G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r})$ , soit encore

$L_Z \cdot \begin{pmatrix} x & & \\ & I_{n-2r} & \\ & & \delta_{x^{-1}} \end{pmatrix} B_L$  dès que  $x B_r \in \mathcal{O}(v)$ . La condition sur les points  $T$ -fixes se déduit alors de cette même proposition 5.5.2 et de la  $T_r \times T_{n-2r} \simeq T$ -équivariance.  $\square$

### 5.5.2 Le théorème

On peut maintenant établir le théorème suivant. Comme annoncé, l'idée est simplement de porter aux groupes  $G_n, G_{\varepsilon, n}$  les résultats précédents selon une méthode déjà employée par Chaput, Fresse et Gobet ([CFG20]). On utilise une induction parabolique, qui permet de passer des groupes réductifs  $L_{n, r}$  ou  $L_{\varepsilon, n, r}$  aux sous-groupes  $P_{n, r}$  ou  $P_{\varepsilon, n, r}$ . L'action bien connue de ces sous-groupes sur la variété de drapeaux permet ensuite de conclure. Rappelons que la caractéristique du corps de base est supposée nulle et que les orbites  $\mathcal{O}(v) \subset G_m/B_m$  et les sous-ensembles  $\mathcal{I}_m^a$  sont définis en (5.16).

**Théorème 5.5.4.** *On considère les groupes  $G, T, B, P, Z, W^P$ , etc. fournis par les modèles matriciels  $\mathcal{M}(n, r)$  ou  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . On suppose  $\varepsilon = 1$  ou bien  $\varepsilon = -1$  avec  $r$  impair. On a alors les paramétrisations suivantes des  $Z$ -orbites de  $G/B$  en fonction des modèles (des types) :*

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{l} \text{Type A} \\ \text{Modèle } \mathcal{M}(n, r) \end{array} & \begin{array}{l} \mathfrak{S}_r \times W^P \rightarrow Z \backslash (G/B) \\ (v, w) \mapsto Z \cdot \begin{pmatrix} v & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} w^{-1} B. \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{Types B, C, D} \\ \text{Modèle } \mathcal{M}(\varepsilon, n, r) \end{array} & \begin{array}{l} \mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \times W^P \rightarrow Z \backslash (G/B) \\ (v, w) \mapsto Z \cdot \begin{pmatrix} x & & \\ & 1 & \\ & & \delta_{x^{-1}} \end{pmatrix} w^{-1} B_L \text{ où } x \text{ est n'importe quel élément tel que } x B_r \in \mathcal{O}(v). \end{array}
\end{array}$$

Ainsi toutes les orbites ont un point  $T$ -fixe en types A, B, D. En type C, seules les orbites correspondant aux paramètres  $v \in \mathcal{I}_r^{-1}$  sont dans ce cas.

*Démonstration.* On raisonne indifféremment pour le modèle  $\mathcal{M}(n, r)$  (Type A) ou  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$  (Types B, C, D) à partir des lemmes 5.5.1 et 5.5.3. On désigne ainsi par  $\xi$  la bijection de paramétrisation  $\mathfrak{S}_r \rightarrow L_Z \backslash L/B_L$  ou  $\mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \rightarrow L_Z \backslash L/B_L$ . On note encore  $\mathcal{O}(v, w)$  pour la  $Z$ -orbite de l'énoncé, de paramètre  $(v, w)$  dans  $\mathfrak{S}_r \times W^P$  ou  $\mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \times W^P$ .

On voit que les différents groupes proposés dans les modèles matriciels satisfont aux hypothèses du théorème 4.3.1, pour  $S$  un certain sous-tore de  $T$  tel que  $L = Z_G(S)$ . Pour tout  $w \in W^P$ , il existe alors une bijection  $\chi_w$  donnée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \xrightarrow{\quad \chi_w \quad} & & \\
L_Z \backslash (L/B_L) & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & L_Z \backslash (P \cdot w^{-1} B)^S & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & Z \backslash (P \cdot w^{-1} B) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
L/B_L & \xrightarrow[\quad y B_L \mapsto y w^{-1} B \quad]{\quad \sim \quad} & (P \cdot w^{-1} B)^S & \xrightarrow{\quad \subset \quad} & P \cdot w^{-1} B,
\end{array} \tag{5.19}$$

de sorte que  $\chi_w(L_Z.yB_L) = Z.yw^{-1}B$  et  $\chi_w^{-1}(Z.xB) = L_Z.xwB_L$  dès que  $y \in L$  et  $x \in (P.w^{-1}B)^S$ .

On a alors clairement  $\mathcal{O}(v, w) = \chi_w \circ \xi(v)$  pour tout  $(v, w) \in \mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \times W^P$ . Mais la bijectivité de  $\xi$  et des  $\chi_w, w \in W^P$  ajoutée au fait que  $W^P$  paramètre  $P \backslash (G/B)$  par  $w \mapsto P.w^{-1}B$  montre que l'application  $\mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \times W^P \rightarrow Z \backslash (G/B), (v, w) \mapsto \chi_w \circ \xi(v)$  est bijective. En effet si  $\chi_w \circ \xi(v) = \chi_{w'} \circ \xi(v')$ , alors  $P.w^{-1}B$  et  $P.w'^{-1}B$  s'intersectent de sorte que  $w = w'$  puis  $\xi(v) = \xi(v')$  et  $v = v'$  par injectivité de  $\chi_w$  et  $\xi$ ; on a l'injectivité souhaitée. De plus, toute  $Z$ -orbite de  $G/B$  sera comprise dans une  $P$ -orbite, nécessairement de la forme  $P.w^{-1}B$  pour un certain  $w \in W^P$ . Par surjectivité de  $\chi_w$  puis de  $\xi$ , on trouve ainsi un antécédent  $(v, w)$  de cette  $Z$ -orbite et on a la surjectivité. On a bien la paramétrisation attendue.

Intéressons-nous maintenant aux orbites avec points  $T$ -fixes. Pour  $w \in W^P$ , la  $T$ -équivalence de  $L/B_L \hookrightarrow P.w^{-1}B$  et le diagramme (5.19) montrent qu'une  $Z$ -orbite de  $P.w^{-1}B$  possède un point  $T$ -fixe si et seulement si il en est de même pour son antécédent par  $\chi_w$ . Par conséquent,  $\mathcal{O}(v, w)$  possède un point  $T$ -fixe si et seulement si c'est le cas de  $\xi(v)$  ce qui équivaut encore à la condition voulue sur  $v$  grâce aux lemmes 5.5.1 et 5.5.3.  $\square$



# Chapitre 6

## Une équivalence birationnelle

### 6.1 Cas général

On propose ici un théorème de birationnalité de portée assez générale, mais dont les hypothèses restent très techniques. Aussi notre objectif est-il de l'appliquer à des situations concrètes plus connues. On établira ainsi le théorème 6.2.1 traitant de sous-groupes symétriques. Ce dernier sera ensuite utilisé à son tour pour obtenir les théorèmes 6.3.1 et 6.3.3 sur les groupes en types classiques et leurs orbites nilpotentes d'ordre deux.

**Théorème 6.1.1.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe réductif en caractéristique nulle,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ , et soit  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $H \subset Z \subset G$  des sous-groupes fermés connexes munis d'une rétraction  $\pi: Z \rightarrow H$  et tels que  $B_H := B \cap H$  soit un sous-groupe de Borel de  $H$ . On fait agir  $Z$  sur  $H/B_H \times G/B$  par  $z.(xB_H, yB) := (\pi(z)xB_H, zyB)$ . Soit  $w \in W$ . On pose  $X := \overline{Z.wB}$  et  $\hat{X} := (\iota \times id)^{-1}(G.(eB, wB))$  où  $\iota$  est l'immersion  $H/B_H \hookrightarrow G/B$ .*

*Alors  $\hat{X}$  est une variété projective irréductible isomorphe à  $H \times^{B_H} \overline{B.wB}$  compatiblement à  $G \times^B \overline{B.wB} \simeq G.(eB, wB)$  de sorte qu'on a le diagramme :*

$$\begin{array}{ccccc}
 & H \times^{B_H} \overline{B.wB} & \hookrightarrow & G \times^B \overline{B.wB} & \\
 & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & \\
 H/B_H & & & & G/B \\
 \swarrow pr_1 & & & & \swarrow pr_1 \\
 & \hat{X} & \xrightarrow{\iota \times id} & G.(eB, wB) & \\
 & \searrow \wr & & \searrow \wr & \\
 & & & & 
 \end{array}$$

$\wr$

En outre, si on suppose que :

1.  ${}^w B \cap Z \subset \pi^{-1}(B_H)({}^w B \cap Z)^0$ ,
2.  $z^{-1}\pi(z) \in \overline{{}^w B B}$  pour tout  $z \in Z$ ,
3.  $\dim Z/Z \cap {}^w B = \ell(w) + \dim H/B_H$ ,

alors  $\hat{X}$  est stable par  $Z$  et la projection sur la seconde coordonnée fournit un morphisme birationnel surjectif projectif et  $Z$ -équivariant  $\hat{X} \rightarrow X$  qui est un isomorphisme au dessus de  $Z.wB$ .

*Démonstration.* Tout d'abord,  $\hat{X}$  est projective comme fermé de la variété projective  $H/B_H \times G/B$ ,  $B_H$  étant un sous groupe de Borel. Par annulation, tout morphisme de variétés de source  $\hat{X}$  sera encore projectif (voir Exercice II 4.8 [Har83]). De plus, comme la projection  $\hat{X} \rightarrow H/B_H$  est  $H$ -équivariante, de fibre au dessus de  $eB_H$  qui s'identifie à  $\overline{B.wB}$ , par la proposition 2.3.15,  $\hat{X}$  est canoniquement isomorphe au produit contracté  $H \times^{B_H} \overline{B.wB}$  de base  $H/B_H$  et tout le diagramme proposé se déduit facilement. Par connexité de  $H$ , on voit encore que  $\hat{X}$  est irréductible.

Pour établir le morphisme birationnel, on suppose les trois hypothèses relative à  $w$  vérifiées et on procède en plusieurs étapes. On considérera la projection  $pr_2: H/B_H \times G/B \rightarrow G/B$ .

1. En utilisant l'isomorphisme  $\hat{X} \cong H \times^{B_H} \overline{B.wB}$  et en appliquant l'hypothèse 3 on a  $\dim \hat{X} = \ell(w) + \dim H/B_H = \dim Z.wB = \dim X$ .
2. Ensuite, en notant  $f$  le morphisme  $g \mapsto (gB, wB)$ , on a pour  $b' \in {}^w B$  et  $b \in B$ ,  $f(b'b) = (b'bB, wB) = (b'B, b'wB) = b' \cdot (B, wB)$ . Aussi on a  $f({}^w BB) \subset \overline{G.(eB, wB)}$  de sorte que  $f({}^w BB) \subset \overline{G.(eB, wB)}$ . Par conséquent, si  $z \in Z$ , l'hypothèse 2 permet d'avoir :

$$\iota \times id (z.(eB_H, wB)) = \iota \times id (\pi(z)B_H, zwB) = z.f(z^{-1}\pi(z)) \in z.f(\overline{{}^w BB}) \subset \overline{G.(eB, wB)}.$$

On en déduit donc  $Z.(eB_H, wB) \subset \hat{X}$ .

3. Maintenant, en observant que  $pr_2$  se restreint en un morphisme surjectif  $Z.(eB_H, wB) \rightarrow Z.wB$ , les points précédents donnent  $\dim Z.wB \leq \dim Z.(eB_H, wB) \leq \dim \hat{X} = \dim Z.wB$  de sorte que  $\dim Z.wB = \dim Z.(eB_H, wB)$ . Ceci implique encore l'égalité de dimension des stabilisateurs  $\dim {}^w B \cap Z = \dim {}^w B \cap Z \cap \pi^{-1}(B_H)$  d'où l'égalité de variétés  $({}^w B \cap Z)^0 = (\pi^{-1}({}^w B \cap Z) \cap \pi^{-1}(B_H))^0$  puis l'inclusion  $({}^w B \cap Z)^0 \subset \pi^{-1}(B_H)$ . Avec l'hypothèse 1, on en déduit l'inclusion  $\pi({}^w B \cap Z) \subset B_H$ . On a alors

$$\begin{aligned} pr_2^{-1}(wB) \cap Z.(eB_H, wB) &= \{ (\pi(z)B_H, zwB) \mid z \in Z, zwB = wB \} \\ &= \{ (\pi(z)B_H, zwB) \mid z \in {}^w B \cap Z \} \\ &= \pi({}^w B \cap Z).B_H \times \{wB\} \\ &= \{(B_H, wB)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le morphisme surjectif induit  $Z.(eB_H, wB) \rightarrow Z.wB$  qui est  $Z$ -équivariant entre variétés homogènes, est aussi injectif. Comme  $Z$  est connexe et que la caractéristique est nulle, c'est un isomorphisme (voir par exemple [Spr09], 5.3.5 (1)).

4. Les deux points précédents donnent aussi en particulier  $Z.wB \subset pr_2(\hat{X})$ . Mais comme  $\hat{X}$  est fermé dans  $H/B_H \times G/B$  avec  $H/B_H$  complète, l'image  $pr_2(\hat{X})$  est fermée dans  $G/B$  et on en déduit  $X \subset pr_2(\hat{X})$ . Par irréductibilité et l'inégalité de dimensions  $\dim pr_2(\hat{X}) \leq \dim \hat{X} = \dim X$ , on obtient l'égalité. On a la surjectivité et la bonne définition de la projection induite  $\hat{X} \rightarrow X$ .

On a finalement tous les éléments pour la conclusion désirée. □

**Remarque 6.1.2.** Lorsque  $Z \cap B$  est un sous-groupe de Borel de  $Z$  avec  $\dim Z \cap B = \ell(w) + \dim Z \cap {}^w B$  et  $Z \cap {}^w B \subset (Z \cap B)(Z \cap {}^w B)^0$ , on peut appliquer le théorème à  $Z = H$  et on a ainsi un morphisme birationnel  $Z \times^B \overline{B.wB} \rightarrow Z.wB$ .

## 6.2 Application 1 : sous-groupe obtenu par induction parabolique

Comme annoncé, une première application concerne les sous-groupes obtenus par induction parabolique à partir d'un sous-groupe symétrique d'un sous-groupe de Lévi.

**Théorème 6.2.1.** *Soit  $G$  un groupe algébrique connexe en caractéristique nulle,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$  et  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $P$  un sous-groupe parabolique contenant  $B$  et  $L$  le sous-groupe de Levi associé. Soit  $\theta$  une involution de  $L$  stabilisant  $T$  et  $B_L := B \cap L$ . On pose  $L_Z := (L^\theta)^0$  et par induction parabolique,  $Z := L_Z U_P$ . Soit  $H \subset Z$  un sous-groupe fermé connexe tel que  $B_H := B \cap H$  soit un sous-groupe de Borel de  $H$  et muni d'une rétraction  $\pi: Z \rightarrow H$ . Soit  $\tau := v_2^{-1}$  où  $w^{-1} = v_1 v_2$  est la décomposition de  $w^{-1}$  dans  $W^P W_P$ . On suppose que*

$$(i) \quad z^{-1} \pi(z) \in \overline{w B B} \text{ pour tout } z \in Z,$$

$$(ii) \quad \ell(\tau) - \ell(\tau^{-1} \theta(\tau)) / 2 = \dim Z / Z \cap B - \dim H / B_H.$$

Alors, on dispose d'un morphisme birationnel surjectif  $Z$ -équivariant  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot w B} \rightarrow \overline{Z \cdot w B}$  (qui induit un isomorphisme entre les deux  $Z$ -orbites ouvertes et denses  $Z \cdot [e, w B]$  et  $Z \cdot w B$ ).

*Démonstration.* Avec le corollaire 4.4.4, (ii) implique immédiatement la troisième des hypothèses du théorème 6.1.1; (i) en est exactement la seconde et le lemme suivant montre la première. On peut donc appliquer le théorème à ce cas particulier et on a la conclusion souhaitée.  $\square$

Pour  $A$  un groupe algébrique, désignons par  $A_u$  la sous-variété de ses éléments unipotents.

**Lemme 6.2.2.** *Sous les mêmes données que le théorème 6.2.1 précédent et pour  $v \in W$  quelconque, on a*

$${}^v B \cap Z \subset (T \cap Z)({}^v B \cap Z)_u,$$

et donc en particulier

$${}^v B \cap Z \subset \pi^{-1}(B_H)({}^v B \cap Z)^0.$$

*Démonstration.* Désignons par  $U_P$  le radical unipotent de  $P$ , et par  $U$  celui de  $B$ . Pour la première inclusion, il suffit de montrer  ${}^v B \cap L_Z \subset (T \cap Z)({}^v B \cap Z)_u$ . En effet, il existe un cocaractère  $\lambda: \mathbb{G}_m \rightarrow T$  tel que  $U_P = \{x \in G \mid \lim_{a \rightarrow 0} \lambda(a) x \lambda(a)^{-1} = e\}$  et  $L = Z_G(\text{Im } \lambda)$ . Ainsi, si  $z = lu \in {}^v B \cap Z$  avec  $l \in L_Z$  et  $u \in U_P$ , alors  $\lambda(a) z \lambda(a)^{-1}$  reste dans  ${}^v B$  pour tout  $a$  et  $\lambda(a) z \lambda(a)^{-1} = l \lambda(a) u \lambda(a)^{-1} \rightarrow l$  lorsque  $a \rightarrow 0$ . Par conséquent  $l$  puis  $u$  sont dans le fermé  ${}^v B$ . On en déduit  ${}^v B \cap Z \subset ({}^v B \cap L_Z) \cdot ({}^v B \cap U_P) \subset ({}^v B \cap L_Z) \cdot ({}^v B \cap Z)_u$ .

Montrons donc maintenant  ${}^v B \cap L_Z \subset (T \cap Z)({}^v B \cap Z)_u$ . Soit  $x \in {}^v B \cap L_Z$ . La décomposition dans  ${}^v B$ , groupe connexe résoluble contenant  $T$  permet d'écrire  $x = tu$  avec  $t \in T$  et  $u \in ({}^v B)_u = {}^v U$  radical unipotent de  ${}^v B$ . On a ainsi  $u = t^{-1} x \in T L_Z \subset L$  et on peut appliquer  $\theta$ . Comme  $x \in L_Z$ , on a  $tu = \theta(t) \theta(u)$ , et comme  $\theta$  stabilise  $T \subset {}^v B$ , on a  $\theta(u) = \theta(t)^{-1} t u \in {}^v B$ . Or  $\theta(u)$  reste unipotent. C'est donc un élément du groupe  $({}^v B)_u$ . Il en est donc de même de  $\theta(u) u^{-1} = \theta(t)^{-1} t$  qui se trouve aussi dans  $T$  et puisque  $T \cap ({}^v B)_u = 1_G$ , on a finalement  $\theta(u) = u$  et  $\theta(t) = t$  soit  $t, u \in L_Z$ . Ainsi on a bien  $x \in (T \cap L_Z)({}^v B)_u \cap L_Z = (T \cap Z)({}^v B \cap Z)_u$ .

Pour montrer la seconde inclusion de l'énoncé, commençons par établir l'inclusion (qui est en fait une égalité)  $\pi(B \cap Z) \subset B_H$ . Pour ce faire, remarquons que  $B \cap Z$  est un sous-groupe de Borel de  $Z$ . En effet, comme  $B \subset P$ , on a  $U_P \subset B$ , puisque le radical unipotent  $U_P$  de  $P$  se trouve dans tous les sous-groupes de Borel de  $P$  (théorème 26.1 [Hum81]). Par suite,  $Z \cap B = (L_Z U_P) \cap B = (L_Z \cap B) U_P$ . Il suffit alors de montrer que  $L_Z \cap B$  est un sous-groupe de Borel de  $L_Z$ . Mais la proposition 4.1.4 nous l'assure puisque  $L \cap B$  est un sous-groupe de Borel de  $L$  et que  $L_Z \cap B = (L^\theta)^0 \cap B \cap L$ .

Maintenant, comme  $\pi: Z \rightarrow H$  est un épimorphisme de groupes algébriques, l'image  $\pi(B \cap Z)$  est un sous-groupe de Borel de  $H$  (corollaire 21.3 C [Hum81]). Or,  $\pi$  étant aussi une rétraction, l'inclusion  $B_H = B \cap H \subset B \cap Z$  entraîne  $B_H = \pi(B_H) \subset \pi(B \cap Z)$ . Et comme  $B_H$  est un sous-groupe de Borel de  $H$ , cette dernière inclusion est une égalité. On a  $\pi(B \cap Z) = B_H \subset B$ .

La seconde inclusion de l'énoncé découle alors de la première puisqu'on a ainsi  $\pi(T \cap Z) \subset \pi(B \cap Z) \subset B_H$  et que  $({}^v B \cap Z)_u \subset ({}^v B \cap Z)^0$ , entendu qu'un groupe affine unipotent en caractéristique nulle est connexe ([DG70] proposition 4.1 chapitre 4 paragraphe 2).  $\square$

**Remarque 6.2.3.** *Poursuivant la remarque 6.1.2 précédente, on voit que pour  $H = Z$  les conditions à satisfaire sont encore simplifiées : (i) est automatiquement vérifié et il suffit que  $Z \cap B$  soit un sous-groupe de Borel de  $Z$  et qu'on ait l'égalité  $\ell(\tau^{-1}\theta(\tau)) = 2\ell(\tau)$ .*

**Remarque 6.2.4.** *Dans l'application suivante,  $L$  sera le produit de plusieurs facteurs et  $H$  sera la projection de  $L_Z$  sur le produit des facteurs où  $\theta$  n'est pas l'identité.*

## 6.3 Application 2 : stabilisateur d'un élément nilpotent d'ordre 2, types A, B, C, D

### 6.3.1 Le(s) théorème(s)

On se propose d'aller encore un peu plus en avant dans l'application des résultats précédents en démontrant le théorème suivant.

**Théorème 6.3.1** (Types A,B,D). *Soit  $G$  le groupe  $Gl(V)$  ou  $SO(V)$  sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit  $e$  un élément nilpotent d'ordre 2 de  $\mathfrak{g}$  et  $Z$  son centralisateur dans  $G$ . Soit  $(T, B)$  une paire adaptée à  $e$  (définition 5.4.3). Alors :*

1. *Il existe  $H \subset Z$  un sous-groupe fermé connexe tel que  $B_H := H \cap B$  soit un sous-groupe de Borel,  $T_H := H \cap T$  un tore maximal, et muni d'une rétraction  $\pi: Z \twoheadrightarrow H$  à travers laquelle  $H$  est une  $Z$ -variété.*
2. *Le caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  est dominant.*
3. *Pour toute adhérence  $Y$  d'une  $Z$ -orbite dans  $G/B$ , il existe  $w \in W(G, T)$  tel que  $Y = \overline{Z \cdot wB} = \overline{HB \cdot wB}$  et le morphisme naturel  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow G/B$  se factorise en un morphisme birationnel projectif  $Z$ -équivariant :*

$$H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow Y, \quad (6.1)$$

*l'action de  $Z$  sur  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB}$  étant définie par  $z \cdot [h, gB] = [\pi(z)h, h^{-1}\pi(z)^{-1}zhgB]$ .*

**Remarque 6.3.2.** *Le morphisme birationnel (6.1) induit un isomorphisme entre les deux  $Z$ -orbites ouvertes et denses  $Z \cdot [e, wB]$  et  $Z \cdot wB$ .*

Pour le type C, la formulation est un peu plus délicate. En effet, deux phénomènes qui se produisent dans les types A, B, D et sur lesquels s'appuiera notre preuve n'ont plus lieu. D'une part, le centralisateur d'un élément nilpotent d'ordre 2 n'est pas nécessairement connexe. D'autre part, et de façon plus essentielle, les orbites alors en jeu ne possèdent pas nécessairement de point fixé par le tore maximal choisi (voir théorème 5.5.4) et ne sont donc pas nécessairement de la forme " $Z \cdot wB$ ". Aussi, il nous faut ajouter des hypothèses. Prendre la composante neutre du centralisateur et exiger un rang impair pour  $e$  permet de pallier à la première difficulté puisque dans ce cas  $Z_G(e) = Z_G(e)^0 \rtimes \{\pm 1\}$ , de sorte que les  $Z_G(e)^0$ -orbites correspondent toutefois encore aux  $Z_G(e)$ -orbites (voir remarque 5.3.2). Pour la seconde difficulté, nous ajoutons la condition de point fixe, qui est simplement relative à la  $Z$ -orbite en jeu, en vertu du rang impair et de la conjugaison des paires adaptées dans ce cas (théorème 5.4.7, point 2). Enfin, le caractère  $2\rho_{H_{-1,n,r}} - \rho_{T_{H_{-1,n,r}}}$  n'est plus dominant (remarque 5.3.9). Nous devons donc nous satisfaire de l'énoncé suivant.

**Théorème 6.3.3** (Type C). *Le précédent théorème reste valable pour  $G = Sp(V)$  si l'on exclut la conclusion sur le caractère dominant et si l'on ajoute les hypothèses :*

- $Z$  est la composante neutre du centralisateur de  $e$ ,
- $e$  est de rang impair,
- les  $Z$ -orbites considérées sont adaptées (définition 5.4.5).

La preuve de ces deux théorèmes montre en fait le résultat suivant. Plus technique, il aura cependant le mérite de donner des descriptions explicites des résolutions obtenues.

**Théorème 6.3.4** (Types A, B, C, D). *On se place dans les modèles matriciels  $\mathcal{M}(n, r)$  ou  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . Soit  $w \in W$ . On suppose, en fonction des types :*

*Type A*  $w^{-1}$  strictement décroissant sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  et strictement croissant sur  $\{1, \dots, r\}$ .  
Modèle  $\mathcal{M}(n, r)$

*Types B, C, D*  $w^{-1}$  est strictement décroissant sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  ou  $w^{-1} \circ (n/2 \ n/2 + 1)$  est strictement décroissant sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  avec  $\varepsilon = 1$  et  $n$  pair. De plus, pour tout  $1 \leq i < j \leq r$ ,  $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$  ou  $w^{-1}(\bar{i}) > w^{-1}(\bar{j})$ .  
Modèle  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$

Alors le morphisme naturel  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow G/B$  se factorise en un morphisme birationnel surjectif  $Z$ -équivariant :

$$H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow \overline{Z \cdot wB}. \quad (6.2)$$

Les sous-sections suivantes sont donc dévolues à la preuve des théorèmes 6.3.1 et 6.3.3 précédant. Notre stratégie est d'appliquer le théorème 6.2.1 précédent à la situation particulière des modèles matriciels  $\mathcal{M}(n, r)$  et  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . On distinguera ainsi deux cas : le type A d'une part, les types B, C et D d'autre part. Les raisonnements effectués dans l'un et l'autre seront analogues, et la fin de démonstration identique, mais la présence d'une involution dans le second, associée à une différence de racines intervenant lors d'une étape importante justifie de procéder de cette manière. On commence par étudier le type A, plus simple ; il suggérera les raisonnements à mener pour les autres types.

On utilisera les conventions et notations décrites en début du chapitre précédent (Sous-section Convention et notations, 5.1.1) et notamment la notion de permutation *induite*.

### 6.3.2 Type A

On se donne donc  $G := G_n$ ,  $B := B_n$ ,  $e := e_{n,r}$ , etc. selon le modèle matriciel  $\mathcal{M}(n, r)$ .

On établit ici deux propositions qui seront les ingrédients essentiels pour appliquer à ce cas le théorème 6.2.1 : elles permettront de satisfaire respectivement aux hypothèses (i) et (ii) de celui-ci.

Il sera commode de poser  $u_0 := \sigma_{0, n-2r}$  soit l'élément de plus grande longueur de  $W_{n-2r} = \mathfrak{S}_{n-2r}$  (soit encore l'unique bijection strictement décroissante de  $\{1, \dots, n-2r\}$ ). On commence par un lemme :

**Lemme 6.3.5.** *Soit  $v \in W$ . Alors il existe  $z_0 \in Z \cap N_G(T)$  tel que l'élément  $w := \zeta_n(z_0)^{-1}v$  vérifie les conditions suivantes :*

- (a)  $w^{-1}$  induit  $u_0$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  ; autrement dit,  $w^{-1}$  est strictement décroissante sur cet intervalle.
- (b)  $w^{-1}$  est strictement croissante sur  $\{1, \dots, r\}$ .

*Démonstration.* Si  $v \in W$ , alors il existe simplement  $\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n-2r}$  et  $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_r$  tels que  $v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sigma_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

se restreint en une permutation strictement décroissante sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  et  $v^{-1}\sigma_2$  est strictement croissant sur  $\{1, \dots, r\}$ . Avec l'identification des permutations et de leurs matrices, on pose alors :

$$z_0 := \begin{pmatrix} \sigma_2 & & \\ & \sigma_1 & \\ & & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi clairement  $z_0 \in Z \cap N_G(T)$  et  $\zeta_n(z_0)$  a la même expression que  $z_0$  dans  $W$ . Il suit que  $v^{-1}\zeta_n(z_0)$  vaut  $v^{-1}\sigma_1$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  et  $v^{-1}\sigma_2$  sur  $\{1, \dots, r\}$ , de sorte que  $\zeta_n(z_0)^{-1}v$  satisfait aux conditions voulues.  $\square$

**Propriétés essentielles**

Voici les deux propriétés essentielles annoncées.

**Proposition 6.3.6.** *Si  $w \in W$  vérifie la propriété (a) du lemme 6.3.5, alors  $z^{-1}\pi(z) \in \overline{{}^w B B}$  pour tout  $z \in Z$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $w^{-1}$  vérifie la propriété (a), posons  $B_{n-2r}$  le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de  $Gl_{n-2r}$  et posons

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & u_0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

On a tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{u_0}B_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subset {}^w B. \quad (6.3)$$

En effet, cette inclusion revient à :

$$w^{-1}w_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w_0^{-1}w_0 \subset B,$$

et comme  $w^{-1}w_0$  stabilise les matrices inversibles, il suffit de montrer :

$$w^{-1}w_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} w_0^{-1}w_0 \subset \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix},$$

soit encore

$$w^{-1}w_0(i) < w^{-1}w_0(j), \text{ pour tout } r+1 \leq i < j \leq n-r.$$

Mais par hypothèse,  $w^{-1}$  induit  $u_0$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ , c'est-à-dire que  $w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & u_0^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  est strictement croissante sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ . Comme  $u_0$  est d'ordre deux, on retrouve  $w^{-1}w_0$  et on a le second terme de l'équivalence.

Maintenant, comme  $u_0$  est de plus grande longueur, on trouve que  ${}^{u_0}B_{n-2r}B_{n-2r} \simeq B_{n-2r}u_0B_{n-2r}$  est de dimension maximale et donc dense dans  $Gl_{n-2r}$ . On a ainsi :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & Gl_{n-2r} & \\ & & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \overline{{}^{u_0}B_{n-2r}B_{n-2r}} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & {}^{u_0}B_{n-2r}B_{n-2r} & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \\ &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & {}^{u_0}B_{n-2r} & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & B_{n-2r} & \\ & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec l'inclusion (6.3), on en déduit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & Gl_{n-2r} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \subset \overline{{}^w B B}. \quad (6.4)$$

Soit maintenant  $z \in Z$ . On observe que  $z^{-1}\pi(z)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & C & D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Or une telle matrice

se décompose en  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & C & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C^{-1}D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et son appartenance à  $G$  permet de vérifier que  $C \in Gl_{n-2r}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C^{-1}D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ . Par l'inclusion (6.4), on a donc finalement  $z^{-1}\pi(z) \in \overline{wBBB} = \overline{wBB}$ .  $\square$

**Proposition 6.3.7.** *Soit  $w \in W$  vérifiant les propriétés (a) et (b) du lemme 6.3.5. Posons  $\tau := v_2^{-1}$  où  $w^{-1} = v_1v_2$  est la décomposition de  $w^{-1}$  dans  $W^PW_P$ . Alors on a  $\ell(\tau) - (\ell(\tau^{-1}\theta(\tau)))/2 = \dim Z/Z \cap B - \dim H/B_H$ .*

*Démonstration.* Soit  $w$  comme le suggère l'énoncé. Il existe clairement  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  tel que  $w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \sigma \end{pmatrix}$  soit strictement croissante sur  $\{n-r+1, \dots, n\}$ . On pose alors :

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & u_0 & \\ & & \sigma \end{pmatrix}.$$

Par la proposition 5.2.1, on voit que  $\tau \in W_P$  mais aussi  $w^{-1}\tau \in W^P$  car cette permutation correspond clairement à  $w^{-1}$  sur  $\{1, \dots, r\}$ , à  $w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & u_0^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\{r+1, \dots, n\}$  et à  $w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \sigma \end{pmatrix}$  sur  $\{n-r+1, \dots, n\}$ , qui sont toutes les trois croissantes par hypothèses (a) et (b) sur  $w$  et construction de  $\sigma$ . D'autre part, en appliquant la formule que prend  $\theta$  sur  $W_P$ , on trouve :

$$\tau^{-1}\theta(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & u_0^{-1} & \\ & & \sigma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & u_0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & 1 & \\ & & \sigma^{-1} \end{pmatrix}.$$

On voit donc que  $\ell(\tau^{-1}\theta(\tau)) = 2\ell(\sigma)$ . De plus,  $\ell(\tau) = \ell(u_0) + \ell(\sigma)$ . Mais les expressions des groupes  $Z, B, H$  selon le modèle matriciel  $\mathcal{M}(n, r)$  et la définition de  $u_0$  donnent  $\dim Z/Z \cap B - \dim H/B_H = \dim Gl_{n-2r}/B_{n-2r} = \ell(u_0)$ . Ces différentes égalités nous donnent enfin la formule de dimension attendue :  $\ell(\tau) - (\ell(\tau^{-1}\theta(\tau)))/2 = \dim Z/Z \cap B - \dim H/B_H$ .  $\square$

### 6.3.3 Types B, C, D

Pour les trois types  $B, C$ , et  $D$ , on utilise donc le modèle  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$  et on cherche à obtenir des propriétés analogues aux précédentes. La situation étant moins évidente, on aura cependant besoin d'utiliser plus d'outils et de résultats intermédiaires.

Soit donc  $G := G_{\varepsilon, n}$ ,  $B := B_{\varepsilon, n}$ ,  $e := e_{\varepsilon, n, r}$ ,  $W := W_{\varepsilon, n, \dots}$ , selon le modèle matriciel  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . On continue et achève ici l'analogie avec le type  $A$  en établissant les deux propriétés essentielles pour l'application du théorème 6.2.1 à ce cas. Il sera une fois de plus commode de poser  $u_0 := \sigma_{\varepsilon, n-2r}$  soit l'élément de plus grande longueur de  $W_{\varepsilon, n-2r}$ . On posera aussi pour  $v \in W$ ,  $d_v := \#\{r+1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \mid v(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}$  puis  $s_v$  la permutation de  $\{1, \dots, n-2r\}$  consistant en la transposition  $\left(\frac{n-2r}{2} \quad \frac{n-2r}{2} + 1\right)$  lorsque  $\varepsilon = 1$  et  $2 \mid n$  et  $2 \nmid d_v$ , et en l'identité sinon. L'introduction de  $s_v$  se motive par le fait suivant.

$$\begin{aligned} \text{Si } u \in \mathfrak{S}_{n-2r} \text{ est induit par } v \in W_{\varepsilon, n} \text{ sur } \{r+1, \dots, n-r\}, \\ \text{alors } s_v u \text{ et } s_{v^{-1}} u \text{ sont dans } W_{\varepsilon, n-2r}. \end{aligned} \quad (*)$$

Soit en effet de tels  $u, v$ . Comme  $\check{v} = v$ , l'application  $i \mapsto \overline{v(i)}$  fournit une bijection entre  $\{r+1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \mid v(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}$  et  $\{r+1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \mid v^{-1}(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}$ . Ainsi  $d_v = d_{v^{-1}}$  puis  $s_v = s_{v^{-1}}$  et il suffit de montrer l'appartenance de  $s_v u$  à  $W_{\varepsilon, n-2r}$ . Mais  $\check{v} = v$  entraîne encore, relativement à  $\check{\mathfrak{S}}_{n-2r}$ ,  $\check{u} = u$  et donc aussi  $s_{\check{v}} \check{u} = s_v u$ . Considérant la description de  $W_{\varepsilon, n-2r}$ , il ne s'agit plus que de montrer la parité de  $q := \#\{1 \leq i \leq (n-2r)/2 \mid s_v u(i) > (n-2r)/2\}$  lorsque  $\varepsilon = 1$  et  $2 \mid n$ . Or, dans cette situation où  $n$  est pair, la translation  $i \mapsto r+i$  identifie  $\{1 \leq i \leq (n-2r)/2 \mid u(i) > (n-2r)/2\}$  et  $\{r+1 \leq i \leq n/2 \mid v(i) > n/2\}$ . Par conséquent, si  $2 \mid d_v$  alors  $s_v = id$  puis  $q = d_v$ . Si au contraire  $2 \nmid d_v$  alors  $s_v = \begin{pmatrix} \frac{n-2r}{2} & \frac{n-2r}{2} + 1 \\ & \end{pmatrix}$  et donc  $q = d_v \pm 1$ . On trouve donc chaque fois  $2 \mid q$  et le fait est démontré.

Récapitulons dans un tableau les descriptions de  $s_v, u_0$  et  $s_v u_0$  en fonction des cas<sup>1</sup>.

	$2 \mid d_v$	$2 \nmid d_v$
$2 \nmid n$ ou $\varepsilon = -1$	$s_v = id$ $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $s_v u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$s_v = id$ $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $s_v u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \ddots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$4 \mid n$ $\varepsilon = 1$	$s_v = id$ $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ $s_v u_0 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$	$s_v = \begin{pmatrix} \frac{n-2r}{2} & \frac{n-2r}{2} + 1 \\ & \end{pmatrix}$ $u_0 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$ $s_v u_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$
$4 \nmid n$ $2 \mid n$ $\varepsilon = 1$	$s_v = id$ $u_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ $s_v u_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$	$s_v = \begin{pmatrix} \frac{n-2r}{2} & \frac{n-2r}{2} + 1 \\ & \end{pmatrix}$ $u_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ $s_v u_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$

On commence par le lemme :

1. On rappelle (voir remarque 5.3.1) que  $r$  est nécessairement pair dès que  $n$  l'est, de sorte que la divisibilité de  $n$  par 4 équivaut à celle de  $n-2r$ .

**Lemme 6.3.8.** *Soit  $v \in W$ . Alors il existe  $z_0 \in Z \cap N_G(T)$  tel que l'élément  $w := \zeta_n(z_0)^{-1}v$  satisfait :*

- (a)  $s_v = s_w$  et  $w^{-1}$  induit  $s_w u_0$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ ,
- (b)  $\forall 1 \leq i < j \leq r$ ,  $w^{-1}(i) < w^{-1}(j)$  ou  $w^{-1}(\bar{i}) > w^{-1}(\bar{j})$ .

*Démonstration.* Soit  $v \in W$ . Soit  $u \in \mathfrak{S}_{n-2r}$  la permutation induite par  $v^{-1}$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ . Comme  $v^{-1} \in W$ , par le fait (\*),  $s_v u$  est dans  $W_{\varepsilon, n-2r}$ . Il existe par conséquent  $\sigma_1 \in W_{\varepsilon, n-2r}$  tel

que  $s_v u \sigma_1 = u_0$ . Par suite,  $v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sigma_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$  induit sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  l'élément  $s_v^{-1} u_0 = s_v u_0$ . On

a en outre un représentant de  $\sigma_1$ , soit  $g_1 \in G_{\varepsilon, n-2r}$  monomial tel que  $\zeta_{n-2r}(g_1) = \sigma_1$ . Par ailleurs, le lemme 5.3.6 appliqué à  $v^{-1}$  donne immédiatement  $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_r$  tel que  $v^{-1} \sigma_2$  satisfait (b) et  $\check{\sigma}_2 = \sigma_2$ . Par cette dernière propriété, la matrice de  $\sigma_2$  fournit, à multiplication par une matrice diagonale près, un élément  $g_2 \in G_{-\varepsilon, r}$  monomial qui vérifie donc  $\zeta_r(g_2) = \sigma_2$ . En effet, lorsque  $\varepsilon = -1$  et  $r$

impair, on multiplie  $\sigma_2$  par  $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \det(\sigma_2) & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ . Et lorsque  $\varepsilon = 1$ , il existe clairement  $t_0 \in T_r$  dont les

coefficients sont  $\pm 1$  et tel que  $I_{r,-1} \sigma_2 I_{r,-1} = t_0 \sigma_2$ . On vérifie alors en appliquant  $\delta(\cdot)$  que  $\delta t_0 = t_0$  de sorte qu'il existe  $\lambda \in T_{r/2}$  dont les coefficients sont  $\pm 1$  avec  $t_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \delta \lambda \end{pmatrix}$ . On pose alors  $t := \begin{pmatrix} \lambda & \\ & 1 \end{pmatrix}$  et on vérifie que  $t \sigma_2 \in G_{-\varepsilon, r}$ . On pose maintenant :

$$z_0 := \begin{pmatrix} g_2 & & \\ & g_1 & \\ & & I_{-\varepsilon, r} g_2 I_{-\varepsilon, r} \end{pmatrix}.$$

On a ainsi clairement  $z_0 \in Z \cap N_G(T)$  et

$$\zeta_n(z_0) = \begin{pmatrix} \zeta_r(g_2) & & \\ & \zeta_{n-2r}(g_1) & \\ & & \zeta_r(I_{-\varepsilon, r} g_2 I_{-\varepsilon, r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_2 & & \\ & \sigma_1 & \\ & & \check{\sigma}_2 \end{pmatrix}.$$

On voit alors que  $v^{-1} \zeta_n(z_0)$  induit sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  le même élément que  $v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sigma_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ,

soit  $s_v u_0$ . Mais comme  $\sigma_1 \in W_{\varepsilon, n-2r}$ , la parité de  $\#\{i \in r+1, \dots, n-r \mid v^{-1}(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}$  dans le cas  $\varepsilon = 1$ ,  $n$  pair est la même que celle de  $\#\{i \in r+1, \dots, n-r \mid v^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sigma_1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}(i) > \lfloor n/2 \rfloor\}$ . On a donc

$s_v = s_{\zeta_n(z_0)^{-1}v}$ . D'autre part on voit aussi que  $v^{-1} \zeta_n(z_0)$  induit sur  $\{1, \dots, r\}$  le même élément que  $v^{-1} \sigma_2$ . L'élément  $w$  posé dans l'énoncé vérifie donc les propriétés voulues.  $\square$

**Remarque 6.3.9.** *Plus concrètement, un élément  $w \in W$  satisfait la condition (a) du lemme (ie induit  $s_w u_0$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ ) si et seulement si  $w^{-1}$  est strictement décroissant sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  ou bien  $\varepsilon = 1$ ,  $n$  est pair et  $w^{-1} \circ (n/2 \ n/2 + 1)$  est strictement décroissant sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ .*

Prouvons cette équivalence. Soit  $w \in W$  et  $u$  la permutation de  $\mathfrak{S}_{n-2r}$  induite par  $w^{-1}$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ . Rappelons l'égalité  $d_w = d_{w^{-1}}$ . Par ailleurs, pour  $2 \mid n$ , la stricte décroissance de  $w^{-1}$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  implique  $d_w = (n-2r)/2$  et par suite

$$2 \mid d_w \Leftrightarrow 4 \mid n.$$

De même, la stricte décroissance de  $w^{-1} \circ (\frac{n}{2} \ \frac{n}{2} + 1)$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  implique  $d_w = (n-2r)/2 - 1$  puis

$$2 \nmid d_w \Leftrightarrow 4 \mid n.$$

En employant le tableau (6.5) et ces deux résultats, on trouve les équivalences suivantes qui permettent de conclure.

$w^{-1}$  induit  $s_w u_0$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$

$\Leftrightarrow u = s_w u_0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \text{ strictement décroissant sur } \{1, \dots, n-2r\} \text{ pour } \varepsilon = -1 \text{ ou } 2 \nmid n \text{ ou } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 4 \mid n \\ 2 \mid d_w \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 2 \mid n \\ 4 \nmid n \\ 2 \nmid d_w \end{cases} \\ \\ \text{ou} \\ u \circ \left(\frac{n-2r}{2} \quad \frac{n-2r}{2} + 1\right) \text{ strictement décroissant sur } \{1, \dots, n-2r\} \text{ pour } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 4 \mid n \\ 2 \nmid d_w \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 2 \mid n \\ 4 \nmid n \\ 2 \mid d_w \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w^{-1} \text{ strictement décroissant sur } \{r+1, \dots, n-r\} \text{ pour } \varepsilon = -1 \text{ ou } 2 \nmid n \text{ ou } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 4 \mid n \\ 2 \mid d_w \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 2 \mid n \\ 4 \nmid n \\ 2 \nmid d_w \end{cases} \\ \\ \text{ou} \\ w^{-1} \circ \left(\frac{n}{2} \quad \frac{n}{2} + 1\right) \text{ strictement décroissant sur } \{r+1, \dots, n-r\} \text{ pour } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 4 \mid n \\ 2 \nmid d_w \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 2 \mid n \\ 4 \nmid n \\ 2 \mid d_w \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w^{-1} \text{ strictement décroissant sur } \{r+1, \dots, n-r\} \\ \\ \text{ou} \\ w^{-1} \circ \left(\frac{n}{2} \quad \frac{n}{2} + 1\right) \text{ strictement décroissant sur } \{r+1, \dots, n-r\} \text{ pour } \begin{cases} \varepsilon = 1 \\ 2 \mid n \end{cases} \end{array} \right.$$

### Propriétés essentielles

Voici les deux propriétés essentielles annoncées.

**Proposition 6.3.10.** *Si  $w \in W$  vérifie la propriété (a) du lemme 6.3.8, alors  $z^{-1}\pi(z) \in \overline{wBB}$  pour tout  $z \in Z$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $w^{-1}$  vérifie la propriété (a) et posons  $w_0 := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & u_0 s_w & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ . On a tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 B_{\varepsilon, n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subset {}^w B. \quad (6.6)$$

En effet, signalons dans un premier temps que  $s_w$  stabilise  $B_{\varepsilon, n-2r}$ . C'est évident si  $s_w = id$  et dans tous les cas  $s_w$  stabilise clairement  $G_{\varepsilon, n-2r}$ . Si  $s_w \neq id$ , on se trouve dans la situation où  $\varepsilon = 1$ , et  $n-2r$  sont pairs. Ainsi pour  $i, j \in \{1, \dots, n-2r\}$  avec  $1 \leq i < j < \bar{i} = n-2r-i+1$ , on voit que  $s_w(i) < s_w(j)$ , car un tel couple  $i, j$  vérifie  $i < (n-2r)/2$  et  $s_w(j) = j$  ou  $(n-2r)/2$  ou  $(n-2r)/2+1$  de sorte que  $s_w(i) = i < s_w(j)$ . Par la connaissance de l'algèbre de Lie de  $B_{\varepsilon, n-2r}$  dans cette

situation on en déduit  $s_w \cdot \mathfrak{b}_{\varepsilon, n-2r} \subset \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix}$  puis  $s_w \cdot \mathfrak{b}_{\varepsilon, n-2r} \subset \mathfrak{b}_{\varepsilon, n-2r}$  car  $s_w \cdot G_{\varepsilon, n-2r} = G_{\varepsilon, n-2r}$ .

Nous situant en caractéristique nulle, l'inclusion correspondante pour les groupes connexes en jeu

est vraie et on a l'égalité par maximalité. L'inclusion (6.6) voulue est donc équivalente à :

$$w^{-1}w_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_{\varepsilon, n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} w_0^{-1}w \subset B.$$

Or  $w^{-1}w_0$  stabilise  $G$ . Comme les sous-groupes de Borel en jeu sont les intersections de leur groupe ambiant avec les matrices triangulaires supérieures, il suffit donc de montrer :

$$w^{-1}w_0 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} w_0^{-1}w \subset \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix} \text{ soit } \forall r+1 \leq i < j \leq n-r, w^{-1}w_0(i) < w^{-1}w_0(j).$$

Mais par hypothèse,  $w^{-1}$  induit  $s_w u_0$  sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ , c'est-à-dire que  $w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (s_w u_0)^{-1} & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$  est strictement croissante sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ . Comme  $s_w$  et  $u_0$  sont d'ordre deux, on retrouve  $w^{-1}w_0$  et on a le second terme de l'équivalence.

Maintenant, comme  $u_0$  est de plus grande longueur, on trouve que

$${}^{u_0}B_{\varepsilon, n-2r} B_{\varepsilon, n-2r} \simeq B_{\varepsilon, n-2r} u_0 B_{\varepsilon, n-2r}$$

est de dimension maximale et donc dense dans  $G_{\varepsilon, n-2r}$ . On a ainsi :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & G_{\varepsilon, n-2r} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \overline{{}^{u_0}B_{\varepsilon, n-2r} B_{\varepsilon, n-2r}} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & {}^{u_0}B_{\varepsilon, n-2r} B_{\varepsilon, n-2r} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & {}^{u_0}B_{\varepsilon, n-2r} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & B_{\varepsilon, n-2r} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avec l'inclusion 6.6, on en déduit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & G_{\varepsilon, n-2r} & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \subset \overline{{}^w B B}. \quad (6.7)$$

Soit maintenant  $z \in Z$ . On observe que  $z^{-1}\pi(z)$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & C & D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Or une telle

matrice se décompose en  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & C & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C^{-1}D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et son appartenance à  $G$  permet de vérifier

que  $C \in G_{\varepsilon, n-2r}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C^{-1}D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ . Par l'inclusion (6.7), on a donc finalement  $z^{-1}\pi(z) \in \overline{{}^w B B B} = \overline{{}^w B B}$ .  $\square$

**Proposition 6.3.11.** *Soit  $w \in W$  vérifiant les propriétés (a) et (b) du lemme 6.3.8. Posons  $\tau := v_2^{-1}$  où  $w^{-1} = v_1 v_2$  est la décomposition de  $w^{-1}$  dans  $W^P W_P$ . Alors  $\ell(\tau) - (\ell(\tau^{-1}\theta(\tau)))/2 = \dim Z/Z \cap B - \dim H/B_H$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $w \in W$  vérifie les propriétés (a) et (b) voulues. Il existe tout d'abord  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  tel que  $w^{-1}\sigma$  soit croissant sur  $\{1, \dots, r\}$ . On pose alors :

$$\tau := \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & \check{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Avec la proposition 5.3.3,  $\tau \in W_P$ . Et avec  $w^{-1}\tau = w^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (s_w u_0)^{-1} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & s_w & \\ & & \check{\sigma} \end{pmatrix}$ , on voit que  $w^{-1}\tau$  est croissante sur  $\{1, \dots, r\}$  mais aussi sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  par l'hypothèse (a) et la croissance de  $s_w$  sur  $\{1, \dots, \lfloor (n)/2 \rfloor - r\}$ . De plus, on a toujours  $s_w(\lfloor (n)/2 \rfloor - r) < s_w(\lfloor (n)/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2} - r)$ . C'est clair si  $s_w = id$  et, lorsque  $\varepsilon = 1$  et  $n$  est pair,  $\frac{\varepsilon + (-1)^n}{2} = 1$  et on a  $s_w(n/2 - r) = n/2 - r + 1 < n/2 + 2 - r = s_w(n/2 + 2 - r)$ . On en déduit  $w^{-1}\tau(\lfloor n/2 \rfloor) < w^{-1}\tau(\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \frac{\varepsilon + (-1)^n}{2})$ . Ainsi  $w^{-1}\tau \in W^P$  par cette même proposition 5.3.3.

D'autre part, en appliquant la formule que prend  $\theta$  sur  $W_P$ , on trouve :

$$\tau^{-1}\theta(\tau) = \begin{pmatrix} \sigma^{-1} & & \\ & u_0^{-1} & \\ & & \check{\sigma}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{\sigma} & & \\ & u_0 & \\ & & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}\check{\sigma} & & \\ & 1 & \\ & & \check{\sigma}^{-1}\sigma \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\ell_n(\tau^{-1}\theta(\tau)) = 2\ell_r(\sigma^{-1}\check{\sigma})$ . En outre  $\ell_n(\tau) = \ell_{n-2r}(u_0) + 2\ell_r(\sigma)$ . Mais avec le lemme 5.3.4 on voit clairement que  $\ell_n(\tau^{-1}\theta(\tau)) = 2\ell(\tau^{-1}\theta(\tau))$  et  $\ell_n(\tau) - 2\ell(\tau) = \ell_{n-2r}(u_0) - 2\ell(u_0)$ . De plus, comme  $\sigma^{-1} = (w^{-1}\sigma)^{-1}w^{-1}$ , avec  $(w^{-1}\sigma)^{-1}$  strictement croissant,  $\sigma$  vérifie comme  $w$  la propriété (b) de la proposition 6.3.8. Ainsi, le lemme 5.3.5 donne  $\ell_r(\sigma^{-1}\sigma) = 2\ell_r(\sigma^{-1})$ , soit encore  $\ell_r(\sigma^{-1}\check{\sigma}) = 2\ell_r(\sigma)$ . Par conséquent, on a d'une part  $\ell(\tau^{-1}\theta(\tau))/2 = \ell_n(\tau^{-1}\theta(\tau))/4 = \ell_r(\sigma)$  et d'autre part  $\ell(\tau) = 1/2(\ell_n(\tau) - \ell_{n-2r}(u_0) + 2\ell(u_0)) = \ell_r(\sigma) + \ell(u_0)$ . D'où  $\ell(\tau) - \ell(\tau^{-1}\theta(\tau))/2 = \ell(u_0)$ . Or la description des groupes utilisés et la définition de  $u_0$  donnent  $\dim Z/Z \cap B - \dim H/B_H = \dim G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r} = \ell(u_0)$ . Par conséquent, on a bien  $\ell(\tau) - \ell(\tau^{-1}\theta(\tau))/2 = \dim Z/Z \cap B - \dim H/B_H$ .  $\square$

### 6.3.4 Conclusion

On peut maintenant conclure la preuve des théorèmes 6.3.1, 6.3.3, 6.3.4. On effectue le raisonnement pour les types  $A$ ,  $B$ ,  $D$  et on soulignera simplement ce qui devra être ajusté en type  $C$ . Soit donc les hypothèses du théorème 6.3.1, avec notamment  $G = Gl(V)$ ,  $SO(V)$  en caractéristique nulle,  $e$  un élément nilpotent de  $\mathfrak{g}$  d'ordre 2,  $(T, B)$  une paire adaptée à  $e$ ,  $Z := Z_G(e)$  et  $W$  le groupe de Weyl. Par le théorème 5.4.7, on peut identifier cette donnée à celle correspondante dans les modèles matriciels  $\mathcal{M}(n, r)$  ou  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . Par cette identification encore, on définit les groupes  $B$ ,  $H$  et la rétraction  $\pi$  comme correspondant, en fonction des types, aux groupes  $B_n$  ou  $B_{\varepsilon, n, r}$ ,  $H_{n, r}$  ou  $H_{\varepsilon, n, r}$  et aux morphismes  $\pi_{n, r} : Z_{n, r} \rightarrow H_{n, r}$  ou  $\pi_{\varepsilon, n, r} : Z_{\varepsilon, n, r} \rightarrow H_{\varepsilon, n, r}$ . Le caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  reste alors dominant (propositions 5.2.2 et 5.3.8). Plus généralement, tous nos raisonnements pourront s'effectuer dans les modèles matriciels.

Soit ensuite  $Y$  l'adhérence d'une  $Z$ -orbite de  $G/B$ . Par le théorème 5.5.4, celle-ci possède un point  $T$ -fixe. Il existe donc  $v \in W$  tel que  $Y = \overline{Z \cdot vB}$ . Par le lemme 6.3.5 en type  $A$  ou 6.3.8 en type  $B$ ,  $D$ , on corrige  $v$  en un  $w \in W$  vérifiant les propriétés (a) et (b) correspondantes et décrivant toujours l'orbite  $Z \cdot wB$ . Enfin, avec les deux propositions qualifiées d'essentielles 6.3.6 et 6.3.7 pour le type  $A$  et 6.3.10 et 6.3.11 en types  $B$ ,  $D$ , on vérifie les hypothèses (i) et (ii) du théorème 6.2.1, entendu que les groupes du modèle matriciel satisfont bien aux autres conditions de l'énoncé. On a donc l'existence d'un morphisme birationnel donnant la conclusion souhaitée pour les types  $A$ ,  $B$ ,  $D$ .

Pour le type  $C$ , on considère donc un groupe  $G = Sp(V)$  et les mêmes données que précédemment avec les hypothèses supplémentaires données dans le théorème 6.3.3. Comme annoncé au début de cette section, le fait de considérer l'élément nilpotent de rang impair et la composante

connexe de son centralisateur garantit que les  $Z$ -orbites coïncident avec les  $Z^0$ -orbites. Et le fait de considérer des  $Z$ -orbites adaptées garantit qu'elles posséderont un point  $T$ -fixe. On peut donc employer exactement les mêmes propriétés et les mêmes raisonnements que ceux précédemment utilisés pour les types  $B$  et  $D$ . On obtient encore l'existence d'un morphisme birationnel ayant la forme souhaitée.

# Chapitre 7

## Normalité et rationalité

L'objet de ce dernier chapitre consiste en les théorèmes 7.1.13, 7.2.1, 7.3.1 qui établissent des propriétés de normalité et de rationalité pour certaines adhérences d'orbites. Les deux derniers se déduisent essentiellement du premier, dont le cadre est plus général, et des théorèmes 6.2.1 et 6.3.1 précédents, assurant l'existence d'un bon morphisme birationnel.

### 7.1 Cas général

On cherche donc à établir le théorème 7.1.13 ci-après. Pour ce faire, on applique, grâce aux résultats préliminaires sur les réalisations, un résultat de X.He et J-F.Thomsen et ses conséquences grâce aux scindages de Frobenius. Elles permettront de satisfaire aux hypothèses du théorème 7.1.1 suivant qui fournira, par récurrence, toutes les propriétés voulues.

#### 7.1.1 Normalité, rationalité, birationalité par récurrence

Le chapitre 2 de résultats préliminaires permet d'établir le théorème suivant. Il propose simplement une reformulation au niveau des schémas de résultats et d'un raisonnement de N.Perrin et E.Smirnov présents dans l'article [PS12] (lemmes 5.1, 5.2, 5.5). Nous en reprenons donc les arguments essentiels.

**Théorème 7.1.1.** *Soit  $p_i: Y \rightarrow T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  des morphismes de schémas. Soit  $(\tilde{X}_i)_i$  et  $(X_i)_i$  des familles de  $Y$ -schémas telles que pour tout  $i$  dans  $[0, n[$ ,  $\tilde{X}_{i+1}$  est le produit fibré  $\tilde{X}_i \times_{T_{i+1}} Y$  muni de sa projection vers  $Y$  tandis que  $X_i$  est l'image schématique de  $\tilde{X}_i \rightarrow Y$ .*

- (i) *Si  $\mathbf{P}$  est une propriété de morphisme stable par changement de base, par composition, vérifiée par les immersions fermées et par  $p_i$  pour tout  $i$ , alors :*

$$\text{Si } \tilde{X}_0 \rightarrow X_0 \text{ a } \mathbf{P} \text{ alors pour tout } i, \tilde{X}_i \rightarrow X_i \text{ a } \mathbf{P}.$$

- (ii) *Si  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  est quasi-compact et pour tout  $i$ ,  $p_i$  est fidèlement plat, de présentation finie et séparé, alors :*

$$\text{Si } \tilde{X}_n \rightarrow X_n \text{ est birationnel alors pour tout } i, \tilde{X}_i \rightarrow X_i \text{ est birationnel.}$$

- (iii) *Si  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  est de type fini,  $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$  birationnel et pour tout  $i$ ,  $T_i$  localement noethérien,  $p_i$  fidèlement plat et propre, à fibres géométriquement normales, tel que le comorphisme de tous ses changements de base soit un isomorphisme, et s'il existe en outre un faisceau inversible ample  $\mathcal{L}$  sur  $T_{i+1}$  tel que la restriction*

$$H^0(X_{i+1}, (p_{i+1}^* \mathcal{L})_{|X_{i+1}}) \rightarrow H^0(X_i, (p_{i+1}^* \mathcal{L})_{|X_i})$$

*est surjective, alors :*

Si  $X_0$  est normal alors pour tout  $i$ ,  $X_i$  est normal.

(iv) Si, de plus encore, pour tout  $i$ , on a  $R^1 p_{i*} \mathcal{O}_Y = 0$  et  $R^k p_{i*} \mathcal{F} = 0$  pour  $k > 1$  et  $\mathcal{F}$  cohérent sur  $Y$ , alors :

Si  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  est rationnel, alors pour tout  $i$ ,  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  est rationnel.

**Remarque 7.1.2.** 1. Avant de présenter la preuve, soulignons que la birationnalité du dernier morphisme de la famille donnée  $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$  est essentielle, non seulement pour établir la birationnalité de tous les termes  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  de la famille (assertion (ii)), mais encore pour leur transporter la normalité de  $X_0$  et la rationalité de  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  (assertions (iii) et (iv)).

2. Nous appliquerons ce théorème à une famille  $\{\tilde{X}_i \rightarrow X_i\}_i$  dont les membres seront très semblables. Ils sont tous obtenus comme une composition  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}_i} \rightarrow \overline{HB} \cdot w_i \overline{B}$  du produit contracté par  $H$  d'une résolution de Bott-Samelson  $Z_{\mathfrak{w}_i} \rightarrow \overline{B} \cdot w_i \overline{B}$  et d'un morphisme  $H \times^{B_H} \overline{B} \cdot w_i \overline{B} \rightarrow \overline{HB} \cdot w_i \overline{B} \subset G/B$ ,  $[h, gB] \mapsto hgB$ ; les  $w_i$  étant des éléments du groupe de Weyl en jeu, décomposés suivant des mots  $\mathfrak{w}_i$  (voir théorème 7.1.13). Cependant, le travail que nous avons fourni (théorème 6.3.1) ne nous assurera, a priori, que de la birationnalité du dernier membre de la famille  $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$ . L'élément  $w_n$  en jeu répondra en effet à des conditions précises que nous ne saurons contrôler pour les autres éléments  $w_i$ . Aussi, le théorème 7.1.1 ci-dessus nous fait véritablement gagner en informations. Il s'avère donc crucial pour le résultat principal de notre thèse porté sur les propriétés géométriques de normalité, Cohen-Macaulay, etc. (théorème 0.0.1/7.3.1).

*Démonstration.* Nous établirons (i), (iii) et (iv) par récurrence ascendante et (ii) par récurrence descendante. Plus précisément, nous montrerons, avec les points ci-après, différentes implications qui suffiront<sup>1</sup> dans leur ensemble, à établir successivement (i), (ii), (iii), (iv) par récurrence selon le schéma suivant : le point 1 fournit l'étape d'hérédité pour une preuve par récurrence ascendante de (i); muni de (i), le point 2 fournira l'étape d'hérédité pour une preuve par récurrence descendante de (ii); muni de (ii), le point 3 etc.

Au préalable, nous introduisons deux diagrammes, le premier servant à la seule preuve du point 1, le second aux preuves des points suivants.

Fixons  $i$  dans  $[0, n-1]$ .

On a le premier diagramme commutatif suivant, dont les carrés sont cartésiens, la flèche verticale droite correspondant au morphisme  $p_{i+1}$  et celles non spécifiées aux morphismes naturels de structure, issus de la définition de la famille  $\{\tilde{X}_j\}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X}_{i+1} & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{X}_i & \xrightarrow{\quad} & T_{i+1} \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & & Y
 \end{array}
 \tag{7.1}$$

Par ailleurs, on note  $Z^{i+1}$  l'image schématique par  $p_{i+1}$  d'un sous-schéma  $Z$  de  $Y$ . Considérant les immersions fermées naturelles  $X_{i+1} \hookrightarrow Y$ ,  $X_i^{i+1} \hookrightarrow T_{i+1}$  et  $X_{i+1}^{i+1} \hookrightarrow T_{i+1}$ , on définit  $q : X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  et  $q' : X_{i+1} \rightarrow X_{i+1}^{i+1}$  comme restrictions de  $p_{i+1}$ . Avec en outre les morphismes  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  et  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1}$  de la famille donnée dans l'énoncé, on obtient le diagramme commutatif suivant dont les carrés, obtenus par changements de base, sont complétés par des factorisations  $u$  et  $v$  que nous allons

1. Toutes les étapes d'initialisations étant claires.

définir et justifier.

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{X}_{i+1} = \tilde{X}_i \times_{T_{i+1}} Y & \longrightarrow & \tilde{X}_i & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 X_i \times_{T_{i+1}} Y & \longrightarrow & X_i & & \\
 \downarrow & & \downarrow q & & \\
 X_{i+1} \xrightarrow{u} X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y & \longrightarrow & X_i^{i+1} & \xleftarrow{v} & X_i^{i+1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{p_{i+1}} & T_{i+1} & & \\
 \swarrow & & \searrow & & \\
 X_{i+1} & & X_{i+1} & & \\
 & \searrow q' & & & 
 \end{array} \tag{7.2}$$

Comme le morphisme de structure  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow Y$  correspond clairement à la triple composition verticale gauche du diagramme et que celle-ci s'achève par l'immersion fermée  $X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y \hookrightarrow Y$  (obtenue par changement de base de  $X_i^{i+1} \hookrightarrow T_{i+1}$ ), la factorisation  $u$  est produite par la définition de l'image schématique  $X_{i+1} \hookrightarrow Y$  (définition 3.2.1). La restriction  $X_{i+1} \rightarrow T_{i+1}$  de  $p_{i+1}$  à  $X_{i+1}$  apparaît alors comme la composition de  $u$ , du changement de base  $X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y \rightarrow X_i^{i+1}$  et de l'immersion fermée  $X_i^{i+1} \hookrightarrow T_{i+1}$ . La factorisation  $v$  est ainsi produite par le même argument, relativement à l'image schématique  $X_i^{i+1} \hookrightarrow T_{i+1}$ . La définition de  $u$  et  $v$  et la commutativité du diagramme sont ainsi établies.

Exposons maintenant les points et les implications annoncés.

1. Dans ce point, nous supposons  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  et  $p_{i+1}$  posséder une propriété  $\mathbf{P}$  telle que décrite dans l'énoncé. Nous montrons alors que  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1}$  possède  $\mathbf{P}$  (7.3).

Un résultat classique (voir Exercice II 4.8 [Har83]) donne que le premier membre d'une composée satisfait  $\mathbf{P}$  dès que la composée elle-même satisfait  $\mathbf{P}$  et que son second membre est séparé. Ainsi, puisque les flèches  $X_j \rightarrow Y$  sont des immersions fermées et en particulier sont séparées, et que  $\mathbf{P}$  est stable par composition et vérifiée pour les immersions fermées, il est équivalent, pour tout  $j$ , de dire que  $\tilde{X}_j \rightarrow Y$  satisfait  $\mathbf{P}$  ou que  $\tilde{X}_j \rightarrow X_j$  satisfait  $\mathbf{P}$ .

Ainsi, la flèche horizontale inférieure de (7.1), composition de  $\tilde{X}_i \rightarrow Y$  et  $p_{i+1}$  satisfait  $\mathbf{P}$ . Par changement de base, la flèche horizontale supérieure  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow Y$  satisfait  $\mathbf{P}$  et l'argument ci-dessus donne le résultat attendu :

$$\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1} \text{ satisfait } \mathbf{P} . \tag{7.3}$$

2. Dans ce point, nous supposons  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1}$  birationnel avec  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  quasi-compact et  $p_{i+1}$  fidèlement plat séparé de présentation finie. Nous montrons alors la birationnalité de  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  (7.6), de  $q$  (7.7) et le fait que  $u$  et  $v$  soient des isomorphismes (7.4) et (7.5). Signalons que notre notion de birationnel suppose l'intégrité de la source et de la cible (définition 1.2.1).

Par changement de base toutes les flèches horizontales possèdent les mêmes propriétés que  $p_{i+1}$ . Ensuite, le morphisme  $q$  étant une restriction de  $p_{i+1}$  à deux sous-schémas fermés, il reste quasi-compact, séparé, localement de type fini, par composition et propriété d'annulation (voir Exercice II 4.8 [Har83]). Il est aussi schématiquement dominant par définition de  $X_i^{i+1}$ , de même que  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  par définition de  $X_i$ . Les deux premières flèches verticales droites sont donc quasi-compactes et schématiquement dominantes, et, par changement de base plat (proposition 3.2.4 (i)), il en est de même pour les deux flèches verticales gauches. Par quasi-compactité, leur composition respective est encore schématiquement dominante (proposition 3.2.4 (ii)). La propriété d'intégrité descendant le long des morphismes fidèlement plats (lemme 35.16.1 [Sta21]) et schématiquement dominants (proposition 3.2.8),

l'intégrité de  $\tilde{X}_{i+1}$  entraîne ainsi celle de  $\tilde{X}_i$ ,  $X_i$ ,  $X_i^{i+1}$ ,  $X_i \times_{T_{i+1}} Y$ ,  $X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y$ . On en déduit aussi que les trois premières flèches horizontales sont schématiquement dominantes (proposition 3.2.8). Finalement, les deux premiers carrés de (7.2) ne comportent que des schémas intègres et des flèches schématiquement dominantes quasi-compactes.

Maintenant, comme la composition  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_i \times_{T_{i+1}} Y \rightarrow X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y$  est schématiquement dominante, la caractérisation de l'image schématique  $X_{i+1}$  (corollaire 3.2.2) entraîne :

$$u \text{ est un isomorphisme } X_{i+1} \simeq X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y. \quad (7.4)$$

La composition de l'isomorphisme  $u$  et de la flèche schématiquement dominante  $X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y \rightarrow X_i^{i+1}$  est ainsi également schématiquement dominante et par le même argument relativement à l'image schématique  $X_{i+1} \rightarrow T_{i+1}$ , on a

$$v \text{ est un isomorphisme } X_{i+1} \simeq X_i^{i+1}. \quad (7.5)$$

Nous venons de voir avec (7.4) que le morphisme birationnel quasi-compact  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1}$  correspond à  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_i \times_{T_{i+1}} Y \rightarrow X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y$ . Selon (7.2), il est donc induit par la composée  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  au moyen d'un changement de base fidèlement plat, quasi-compact, localement de présentation finie. Par la proposition 2.2.13, cette composée  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  est également birationnelle. Et comme  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  est schématiquement dominant quasi-compact et  $q: X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  séparé localement de type fini, la proposition 2.2.16 permet de conclure ce point 3 :

$$\tilde{X}_i \rightarrow X_i \text{ est birationnel,} \quad (7.6)$$

et

$$q: X_i \rightarrow X_i^{i+1} \text{ est birationnel.} \quad (7.7)$$

3. Dans ce point, nous supposons  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1}$  birationnel avec  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  de type fini,  $T_{i+1}$  localement noéthérien,  $p_{i+1}$  fidèlement plat et propre et tel que le comorphisme de tous ses changements de base soit un isomorphisme. Nous supposons encore la surjectivité de la restriction de l'énoncé pour un certain faisceau inversible ample  $\mathcal{L}$  sur  $T_{i+1}$ . Nous montrons alors que  $q$  est propre entre schémas localement noéthériens (7.8) et que son comorphisme est un isomorphisme (7.9).

Notons que nos suppositions sont plus fortes que celles du point 3 et nous pourrions donc utiliser les conséquences qui en découlent.

Le morphisme  $q: X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  est ainsi birationnel (7.7).

De plus, comme  $p_{i+1}$  est propre et que  $q$  en est une restriction à des sous-schémas fermés, par propriété d'annulation (voir Exercice II 4.8 [Har83]), on trouve que  $q$  est également propre.

En particulier,  $q$  et  $p_{i+1}$  sont de type fini. Puisque c'est aussi le cas de  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  et que cette propriété est stable par composition et changement de base, on trouve que toutes les flèches de (7.2) sont de type fini. Comme  $T_{i+1}$  localement noéthérien, on en déduit que tous les schémas de ce diagramme sont localement noéthériens.

On a donc notamment montré :

$$q \text{ est propre entre schémas localement noéthériens.} \quad (7.8)$$

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_{i+1}^{i+1}, \mathcal{L}_{|X_{i+1}^{i+1}}) & \longrightarrow & H^0(X_{i+1}, q'^*(\mathcal{L}_{|X_{i+1}^{i+1}})) = H^0(X_{i+1}, (p_{i+1}^* \mathcal{L})_{|X_{i+1}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X_i^{i+1}, \mathcal{L}_{|X_i^{i+1}}) & \longrightarrow & H^0(X_i, q^*(\mathcal{L}_{|X_i^{i+1}})) = H^0(X_i, (p_{i+1}^* \mathcal{L})_{|X_i}), \end{array}$$

les différentes flèches correspondant aux restrictions de sections issues des morphismes  $X_i^{i+1} \hookrightarrow X_{i+1}^{i+1}$ ,  $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ ,  $q : X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  ainsi que  $q' : X_{i+1} \rightarrow X_{i+1}^{i+1}$ . Par (7.4) et (7.5),  $q'$  s'identifie au changement de base  $X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y \rightarrow X_{i+1}^{i+1}$  de  $p_{i+1}$ . Son comorphisme, et donc le morphisme de restriction  $\mathcal{L}|_{X_{i+1}^{i+1}} \rightarrow q'_* q'^*(\mathcal{L}|_{X_{i+1}^{i+1}})$  sont des isomorphismes et la flèche horizontale supérieure est bijective. Mais la flèche verticale droite est surjective par la troisième hypothèse de l'énoncé et celle verticale gauche est bijective par l'isomorphisme (7.5). On en déduit la surjectivité de la flèche horizontale basse. Comme elle est en outre injective puisque  $q$  est surjective (car propre et birationnel) et que  $\mathcal{L}|_{X_{i+1}^{i+1}}$  est localement libre, elle fournit un isomorphisme. Par la propriété 2.2.21,  $\mathcal{L}|_{X_{i+1}^{i+1}}$  étant ample et  $q$  propre surjectif de but localement noethérien, on en déduit l'isomorphisme souhaité :

$$\mathcal{O}_{X_{i+1}^{i+1}} \simeq q_* \mathcal{O}_{X_i}. \quad (7.9)$$

4. Dans ce point, nous faisons les mêmes suppositions que dans le précédent, auxquelles nous rajoutons les suivantes :  $X_i$  est normal, et  $p_{i+1}$  est à fibres géométriquement normales. Nous montrons alors la normalité de  $X_{i+1}$  (7.10).

Encore une fois, les hypothèses faites nous permettent d'exploiter les points précédents.

Le changement de base  $X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y \rightarrow X_{i+1}^{i+1}$  de  $p_{i+1}$  en garde plusieurs des propriétés. Il est notamment fidèlement plat, à fibres géométriquement normales. Il en sera donc de même pour sa composition avec l'isomorphisme  $u : X_{i+1} \simeq X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y$  (7.4). Par propriété de descente fidèlement plate entre schémas localement noethériens (Proposition 14.57, [GW10]), la normalité de  $X_{i+1}$  est ainsi impliquée par celle de  $X_i^{i+1}$ .

Mais  $q : X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  est birationnel (7.7). Il est aussi propre entre schémas localement noethériens avec  $\mathcal{O}_{X_{i+1}^{i+1}} \simeq q_* \mathcal{O}_{X_i}$  (7.8) et (7.9). Aussi, par la proposition 2.2.20, on en déduit la normalité de  $X_i^{i+1}$  puis le résultat attendu :

$$X_{i+1} \text{ est normal.} \quad (7.10)$$

5. Dans ce point, nous faisons les mêmes suppositions que dans le point 3, auxquelles nous rajoutons les suivantes :  $\tilde{X}_i \rightarrow X_i$  est rationnel et  $p_{i+1}$  satisfait les annulations  $R^1 p_{i+1*} \mathcal{O}_Y = 0$  et  $R^k p_{i+1*} \mathcal{F} = 0$  pour  $k > 1$  et  $\mathcal{F}$  cohérent sur  $Y$ . Nous montrons alors la rationalité de  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1}$ .

Nous nous permettrons donc d'employer les résultats du point 3 et de ceux qui le précèdent.

Par changement de base plat selon le diagramme (7.2),  $\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_i \times_{T_{i+1}} Y$  est aussi rationnel (proposition 2.2.17). Puisque la composée de morphismes rationnels reste rationnelle (ibidem), il suffit donc de montrer la rationalité de  $X_i \times_{T_{i+1}} S \rightarrow X_i^{i+1} \times_{T_{i+1}} Y$  soit donc encore celle de  $q : X_i \rightarrow X_i^{i+1}$  par un argument analogue de changement de base. Puisque l'on sait déjà que  $q$  est propre entre schémas localement noethériens (7.8) avec  $\mathcal{O}_{X_{i+1}^{i+1}} \simeq q_* \mathcal{O}_{X_i}$  (7.9), il suffit de montrer l'annulation des images directes de cohomologie d'ordre supérieur ou égal à 1. Pour ce faire, observons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{i} & Y \\ \downarrow q & & \downarrow p_{i+1} \\ X_i^{i+1} & \xrightarrow{j} & T_{i+1}, \end{array}$$

où  $i$  et  $j$  sont des immersions fermées et fixons  $k > 0$ .

Comme  $p_{i+1}$  et  $i$  sont propres, il existe une suite spectrale de Leray (Théorème 1.18b [Mil80]) :

$$E_2^{p,q} := (R^p p_{i+1*})(R^q i_*) \mathcal{O}_{X_i} \Rightarrow R^n (p_{i+1} i)_* \mathcal{O}_{X_i} =: E^n.$$

Or, l'exactitude de  $i_*$  donne  $E_2^{p,q} = 0$  pour tout  $p \geq 0$ ,  $q \geq 1$ . Par un raisonnement classique (proposition 2.2.4), on a alors notamment un isomorphisme  $(R^k p_{i+1*})(i_* \mathcal{O}_{X_i}) \simeq R^k (p_{i+1}i)_* \mathcal{O}_{X_i}$ . Mais l'exactitude de  $j_*$  donne encore

$$R^k (p_{i+1}i)_* \mathcal{O}_{X_i} = R^k (jq)_* \mathcal{O}_{X_i} \simeq j_*(R^k q_* \mathcal{O}_{X_i}).$$

D'autre part, en notant  $\mathcal{I}$  le faisceau cohérent sur  $S$  correspondant au sous-schéma fermé  $X_i$ , l'application du foncteur dérivé fournit une suite exacte :

$$R^k p_{i+1*}(\mathcal{O}_S) \rightarrow (R^k p_{i+1*})(i_* \mathcal{O}_{X_i}) \rightarrow R^{k+1} p_{i+1*}(\mathcal{I}).$$

Les hypothèses sur  $p_{i+1}$  donnant  $R^k p_{i+1*}(\mathcal{O}_Y) = R^{k+1} p_{i+1*}(\mathcal{I}) = 0$ , on en déduit l'annulation de  $(R^k p_{i+1*})(i_* \mathcal{O}_{X_i})$ . Ainsi  $j_*(R^k q_* \mathcal{O}_{X_i}) = 0$ , et la pleine fidélité de  $j_*$  donne enfin l'annulation souhaitée  $R^k q_*(\mathcal{O}_{X_i}) = 0$ . Le morphisme  $q$  est donc rationnel et on en déduit le résultat souhaité :

$$\tilde{X}_{i+1} \rightarrow X_{i+1} \text{ est rationnel.} \quad (7.11)$$

Nous avons tous les ingrédients pour prouver le théorème selon le schéma annoncé.  $\square$

Remarquons que plusieurs hypothèses peuvent prendre une forme plus concrète.

**Remarque 7.1.3.** - Dans (iii) on peut remplacer de manière équivalente la propriété sur les comorphismes par  $H^0(Y_{it}, \mathcal{O}_{Y_{it}}) = \kappa(t)$  pour chaque fibre  $Y_{it}$ ,  $t \in T_i$ . L'implication directe correspond simplement aux changements de base  $\text{Spec } \kappa(t) \rightarrow T_i$  suivi de l'application du foncteur sections globales  $\Gamma(\text{Spec } \kappa(t), -)$ , pour  $t \in T_i$ . La réciproque est une application du théorème de cohomologie et changement de base (voir théorème 2.2.3) grâce à la surjectivité des flèches naturelles  $R^0 p_{i*} \mathcal{O}_Y(t) = (p_{i*} \mathcal{O}_Y)_t \otimes_{\mathcal{O}_{T_i}} \kappa(t) \rightarrow H^0(Y_{it}, \mathcal{O}_{Y_{it}}) = \kappa(t)$ ,  $t \in T_i$ . Il donne que celles-ci sont bijectives et que  $p_{i*} \mathcal{O}_Y$  est localement inversible sur  $\mathcal{O}_{T_i}$ , d'où l'isomorphisme  $\mathcal{O}_{T_i} \simeq p_{i*} \mathcal{O}_Y$ . Il donne enfin que le changement de base  $u^* p_{i*} \mathcal{O}_Y \rightarrow p'_{i*} \mathcal{O}_{Y'}$  est un isomorphisme pour tout diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{p'_i} & T_i \\ \downarrow & & \downarrow u \\ S & \xrightarrow{p_i} & T_i. \end{array}$$

- Au moyen du lemme 7.1.4 ci-après, ces hypothèses équivalentes sont satisfaites si les fibres de  $p_i$  sont aussi géométriquement connexes et réduites.
- Dans (iv), on peut remplacer de manière équivalente l'hypothèse sur les foncteurs dérivés par les annulations suivantes de cohomologie sur chaque fibre  $Y_{it}$ ,  $t \in T_i$  :  $H^1(Y_{it}, \mathcal{O}_{Y_{it}}) = 0$ ,  $H^k(Y_{it}, \mathcal{F}_{Y_{it}}) = 0$  pour  $k > 1$ ,  $\mathcal{F}$  cohérent sur  $Y$ . C'est encore une application du théorème de cohomologie et de changement de base (théorème 2.2.3).
- Ces hypothèses sont encore équivalentes à  $H^1(Y_{it}, \mathcal{O}_{Y_{it}}) = 0$  et  $\dim Y_{it} \leq 1$ . Le sens direct est donné par le théorème de Lichtenbaum (voir Théorème 48.34.2, [Sta21]), la réciproque par le Lemme 30.20.9 [Sta21].

**Lemme 7.1.4.** Soit  $k$  un corps algébriquement clos et  $X$  un  $k$ -schéma propre, connexe, réduit. Alors  $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ .

*Démonstration.* En composant avec une inclusion ouverte  $\mathbb{A}_k^1 \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$ , les morphismes  $X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  s'identifient par arguments de propreté, connexité et formation de l'image schématique sur une source réduite, à des points fermés de  $\mathbb{A}_k^1$  et donc,  $k$  étant algébriquement clos, à des points de  $k$ . Par la correspondance  $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq \text{Hom}_k(X, \mathbb{A}_k^1)$  on a l'identification souhaitée.  $\square$

### 7.1.2 Scindage de Frobenius et conséquences

Ayant réalisé nos variétés par des schémas sur des  $\mathbb{Z}$ -algèbres de type fini, on sait que considérer les fibres spéciales permettra de les voir en caractéristiques positives (proposition 3.0.1. Dans ce contexte, le scindage de Frobenius va s'avérer un outil puissant. On recourt ici à un théorème de X.He et J.F.Thomsen ([HT12]) donnant l'existence de scindage relativement à des faisceaux inversibles amples. On y ajoute des résultats de scindages et d'annulation de cohomologie présentés par M.Brion et S.Kumar ([BK05]). En les combinant et en les appliquant à notre réalisation issue du chapitre 3 (théorème 3.4.1 et corollaire 3.4.2), on pourra alors obtenir un résultat de cohomologie pour nos variétés  $(\overline{HB \cdot wB})_{red}$  (corollaire 7.1.12). Rappelons au préalable la notion de scindage de Frobenius relativement à un faisceau inversible.

**Définition 7.1.5.** *Soit  $X$  un schéma sur un corps de caractéristique positive,  $F : X \rightarrow X$  son morphisme de Frobenius. Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau inversible sur  $X$ . On dit que  $X$  admet un  **$\mathcal{M}$ -scindage de Frobenius** s'il existe une section  $s \in H^0(X, \mathcal{M})$ , envisagée comme un morphisme de faisceaux  $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{M}$ , ainsi qu'un morphisme de  $\mathcal{O}_X$ -module  $\Psi : F_*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}_X$  tel que  $(\Psi \circ F_*(s)) \circ F^\# = id_{\mathcal{O}_X}$ . Cette égalité signifie que  $\Psi \circ F_*(s)$  est un scindage de Frobenius et on a le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{F^\#} & F_*\mathcal{O}_X \\ \downarrow id & \swarrow & \downarrow F_*(s) \\ \mathcal{O}_X & \xleftarrow{\Psi} & F_*(\mathcal{M}). \end{array}$$

Pour un caractère  $\lambda$ , soit  $k_{-\lambda}$  le  $B$ -module induit par l'action de  $-\lambda$  sur  $k$ . On notera alors  $\mathcal{L}(\lambda)$  le faisceau inversible de  $\mathcal{O}_{G/B}$  module, défini comme le faisceau des sections du fibré  $G \times^B k_{-\lambda} \rightarrow G/B$ .

**Remarque 7.1.6.** *Rappelons que le fibré en droite  $\mathcal{L}(\lambda)$  est ample si et seulement si  $\lambda - \rho$  est dominant, et il est même très ample dans ce cas (cf [BK05], exercice (1) 3.1).*

**Le théorème de He et Thomsen** Le théorème fondamental qui nous assure l'existence d'un scindage est le suivant. Rappelons que pour  $\Gamma$  un groupe algébrique réductif muni d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel,  $\rho_\Gamma$  désigne la demi-somme des racines positives.

**Théorème 7.1.7** (He-Thomsen, [HT12]). *Soit  $k$  un corps algébriquement clos,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique connexe semi-simple,  $B$  un sous-groupe de Borel et  $T \subset B$  un tore maximal. Soit  $H$  un sous-groupe connexe réductif tel que  $B_H := B \cap H$  et  $T_H := T \cap H$  soient respectivement un sous-groupe de Borel et un tore maximal de  $H$ . Si :*

- $car(k) = p > 0$  est assez grande,
- $2\rho_H - \rho_{T_H}$  est dominant,

*alors  $G/B$  admet un scindage de Frobenius relativement à  $\mathcal{L}((p-1)\rho)$  qui est compatible avec toutes les sous-variétés  $\overline{HB \cdot wB}$  pour  $w \in W$ .*

Le théorème 7.1.9, la proposition 7.1.10 et son corollaire 7.1.11 suivants se trouvent ainsi dans l'ouvrage [BK05] de M.Brion et S.Kumar, à ceci près que nous modifions simplement et très légèrement les hypothèses pour pouvoir les appliquer à notre situation. Nous proposons une preuve détaillée pour les deux derniers résultats, les seuls ingrédients essentiels étant présents dans [BK05]. Rappelons qu'un faisceau inversible sur  $X$  est semi-ample si sa  $n$ -ième puissance tensorielle est globalement engendrée pour  $n$  assez grand.

Nous utiliserons le lemme ci-après :

**Lemme 7.1.8.** *Soit un diagramme cartésien de schémas :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \text{Spec } B \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \text{Spec } A, \end{array}$$

et  $\mathcal{F}$  un faisceau quasi-cohérent sur  $X$ . Alors on a un isomorphisme de  $B$ -modules :

$$H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_A B \simeq H^0(Y, f^* \mathcal{F}).$$

*Démonstration.* Par recollement des sections et en considérant la flèche naturelle  $H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_A B \rightarrow H^0(Y, f^* \mathcal{F})$  induite par la restriction de  $f$  et la structure de  $B$ -module de  $H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ , l'assertion est locale en  $X$  et on peut supposer  $X = \text{Spec } C$  affine. Mais alors  $Y \simeq \text{Spec } B \otimes_A C$  est aussi affine et  $\mathcal{F}$  étant quasi-cohérent, on a un isomorphisme de  $C \otimes_A B$  puis de  $B$ -modules :  $f^* \mathcal{F} = f^* H^0(X, \mathcal{F}) \simeq H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_C (C \otimes_A B) \simeq H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_A B$ , d'où le résultat attendu en prenant les sections globales.  $\square$

**Théorème 7.1.9** (Adapté du Théorème 1.4.8 [BK05]). *Soit  $X$  un schéma sur un corps de caractéristique positive et propre sur un schéma affine. Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau semi-ample sur  $X$ . Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau inversible ample sur  $X$  et  $s$  l'une de ses sections globales.*

- (i) *Si  $X$  possède un scindage de Frobenius relativement à  $(\mathcal{M}, s)$ , alors  $H^i(X, \mathcal{L}) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .*
- (ii) *Si un sous-schéma fermé  $Y$  est compatiblement scindé relativement à  $(\mathcal{M}, s)$ , alors la restriction  $H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L}|_Y)$  est surjective et  $H^i(Y, \mathcal{L}|_Y) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .*

*Démonstration.* C'est exactement le théorème annoncé de [BK05], où l'on généralise simplement la notion de scindage relative à un diviseur effectif  $D$  par celle relative à un faisceau inversible et au choix d'une section globale. La première notion est en effet utilisée ici dans la seule mesure où elle donne l'existence propre à la seconde notion ; au moyen du faisceau  $\mathcal{O}_X(D)$  et de la section canonique.  $\square$

On pourra utiliser ce dernier théorème en recourant aux liens qui peuvent exister entre la cohomologie d'une fibre spéciale et celle d'une fibre générique.

**Proposition 7.1.10** (Adapté de la Proposition 1.6.2 [BK05]). *Soit  $S$  un schéma intègre et  $X \rightarrow S$  un morphisme propre de schémas noethériens, et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ , plat sur  $S$ . Soit  $i \geq 0$ . S'il existe  $s \in S$  tel que  $H^0(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}_{\bar{s}}) = 0$ , alors  $H^0(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}_{\bar{\eta}}) = 0$ .*

*Démonstration.* Supposons l'existence d'un point  $s$  comme dans l'énoncé. Par le lemme 7.1.8, on a  $H^0(X_s, \mathcal{F}_s) \otimes_{\kappa(s)} \kappa(s) \simeq H^0(X_{\bar{s}}, \mathcal{F}_{\bar{s}})$ . Aussi, l'annulation du second espace vectoriel entraîne celle de  $H^0(X_s, \mathcal{F}_s)$ . Or, comme  $X \rightarrow S$  est propre,  $S$  noethérien,  $\mathcal{F}$  cohérent sur  $X$ , plat sur  $A$ , par le théorème 2.2.2 de semicontinuité,  $\{s' \in S \mid H^i(X_{s'}, \mathcal{F}_{s'}) = 0\}$  est un ouvert. Il est donc non vide et contient le point générique  $\eta$ . Par le lemme 7.1.8 et une identification analogue à celle qui précède, on a le résultat attendu.  $\square$

**Corollaire 7.1.11** (Adapté du Corollaire 1.6.3 [BK05]). *Soit  $S$  un schéma intègre et  $X \rightarrow S$  un morphisme propre de schémas noethériens, et  $Y \hookrightarrow X$  un sous-schéma fermé. On suppose qu'il existe  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$  et  $s \in S$  tel que :*

- (i)  $H^1(X_{\bar{s}}, \mathcal{L}_{\bar{s}}) = 0$ ,
- (ii) la restriction  $H^0(X_{\bar{s}}, \mathcal{L}_{\bar{s}}) \rightarrow H^0(Y_{\bar{s}}, \mathcal{L}_{\bar{s}}|_{Y_{\bar{s}}})$  est surjective.

Alors la restriction  $H^0(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{L}_{\bar{\eta}}) \rightarrow H^0(Y_{\bar{\eta}}, \mathcal{L}_{\bar{\eta}}|_{Y_{\bar{\eta}}})$  est aussi surjective.

*Démonstration.* Soit les données de l'énoncé avec  $\mathcal{L}$  et  $s$  vérifiant les hypothèses (i) et (ii). On note  $\mathcal{I}$  le faisceau d'idéaux et  $i$  le morphisme définissant le sous-schéma fermé  $Y \hookrightarrow X$ . Par description des sous schémas-fermés, les faisceaux d'idéaux correspondants pour  $Y_{\bar{s}}$  et  $Y_{\bar{\eta}}$  sont donc les tirés en arrière  $\mathcal{I}_{\bar{s}}$  et  $\mathcal{I}_{\bar{\eta}}$ . En tensorisant les suites exactes relatives à  $i_{\bar{s}}$  et  $i_{\bar{\eta}}$  par les faisceaux inversibles  $\mathcal{L}_{\bar{s}}$  et  $\mathcal{L}_{\bar{\eta}}$  puis en appliquant la cohomologie, on trouve alors les suites exactes :

$$H^0(X_{\bar{s}}, \mathcal{L}_{\bar{s}}) \rightarrow H^0(X_{\bar{s}}, i_{\bar{s}*} \mathcal{O}_{Y_{\bar{s}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\bar{s}}}} \mathcal{L}_{\bar{s}}) \rightarrow H^1(X_{\bar{s}}, \mathcal{L}_{\bar{s}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\bar{s}}}} \mathcal{I}_{\bar{s}}) \rightarrow H^1(X_{\bar{s}}, \mathcal{L}_{\bar{s}}),$$

et

$$H^0(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{L}_{\bar{\eta}}) \rightarrow H^0(X_{\bar{\eta}}, i_{\bar{\eta}*} \mathcal{O}_{Y_{\bar{\eta}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}} \mathcal{L}_{\bar{\eta}}) \rightarrow H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{L}_{\bar{\eta}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\bar{\eta}}}} \mathcal{I}_{\bar{\eta}}).$$

Mais  $\mathcal{L}_{\bar{s}}$  étant localement libre de rang fini, on a des isomorphismes  $i_{\bar{s}*} \mathcal{O}_{Y_{\bar{s}}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\bar{s}}}} \mathcal{L}_{\bar{s}} \simeq i_{\bar{s}*} i_{\bar{s}}^* \mathcal{L}_{\bar{s}}$  (formule de projection) et  $\mathcal{L}_{\bar{s}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\bar{s}}}} \mathcal{I}_{\bar{s}} \simeq (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I})_{\bar{s}}$  ainsi que des identifications analogues pour ce qui concerne le point générique  $\eta$ . On voit alors que la première suite exacte et les hypothèses (i) et (ii) entraînent l'annulation de  $H^1(X_{\bar{s}}, (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I})_{\bar{s}})$ . Par la platitude sur  $S$  du faisceau inversible  $\mathcal{L}$  issue de celle de  $X$ , la proposition 7.1.10 précédente entraîne à son tour l'annulation de  $H^1(X_{\bar{\eta}}, (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I})_{\bar{\eta}})$ , et la seconde suite exacte permet de conclure à la surjectivité souhaitée.  $\square$

Comme annoncé, la combinaison du théorème de X.He et J-F Thomsen, des précédents résultats de M.Brion et S.Kumar avec le théorème 3.4.1 et le corollaire 3.4.2 fournissent le résultat suivant. Il sera destiné à satisfaire l'une des hypothèses du théorème 7.1.1 et permettra ainsi d'établir le théorème 7.1.13 visé dans cette section.

**Corollaire 7.1.12.** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle,  $G$  un  $k$ -groupe algébrique linéaire connexe semi-simple,  $B$  un sous-groupe de Borel et  $T \subset B$  un tore maximal. Soit  $H$  un sous-groupe connexe réductif tel que  $B_H := B \cap H$  et  $T_H := T \cap H$  soient respectivement un sous-groupe de Borel et un tore maximal de  $H$ . Si  $2\rho_H - \rho_{|T_H}$  est dominant alors pour tout faisceau semi-ample  $\mathcal{L}$  sur  $G/B$  et tout  $w \in W$ , la restriction des sections est surjective :*

$$H^0(G/B, \mathcal{L}) \twoheadrightarrow H^0(\overline{(HB \cdot wB)}_{red}, \mathcal{L}_{|\overline{(HB \cdot wB)}_{red}}).$$

En particulier, pour de tels  $\mathcal{L}$  et tout  $w_1 \leq w_2$ , la restriction suivante est surjective :

$$H^0(\overline{(HB \cdot w_2B)}_{red}, \mathcal{L}_{|\overline{(HB \cdot w_2B)}_{red}}) \twoheadrightarrow H^0(\overline{(HB \cdot w_1B)}_{red}, \mathcal{L}_{|\overline{(HB \cdot w_1B)}_{red}}).$$

*Démonstration.* Soit les données de l'énoncé. Appliquons le théorème 3.4.1 et le corollaire 3.4.2 à la donnée de  $G$ ,  $B$ ,  $T$ ,  $H$  et  $w \in W$  et notons  $(G_A)_A$ ,  $(B_A)$ , ...,  $(w_A)_A$  et  $(Y_A^w)_A$  les familles obtenues. Puisque  $(\mathcal{B}_A)_A$  réalise  $G/B$ , appliquons aussi le théorème 8.5.2 EGAIV [Gro66] (voir théorème 3.1.3 (ii) ci-dessus) pour réaliser  $\mathcal{L}$  en une famille de  $\mathcal{O}_{\mathcal{B}_A}$ -modules  $\mathcal{L}_A$ . Les différentes familles étant en nombre fini, les résultats du théorème 3.4.1, du corollaire 3.4.2 et la proposition 8.5.5 avec le lemme 8.10.5.2 EGAIV [Gro66] (voir théorème 3.1.5 ci-dessus) permettent notamment de supposer, en choisissant  $A$  assez grande :

- $\mathcal{L}_A$  semi-ample inversible,
- l'existence d'un isomorphisme de  $\mathcal{B}_{A_{\bar{s}}}$  schémas  $Y_{A_{\bar{s}}}^w \simeq \overline{(H_{A_{\bar{s}}} B_{A_{\bar{s}}} \cdot w_{A_{\bar{s}}} B_{A_{\bar{s}}})_{red}}$  pour tout  $s \in \text{Spec } A$ .

Maintenant, par la proposition 3.0.1, l'hypothèse de caractère dominant, et les propriétés données par le théorème 3.4.1, il existe  $m \in \text{Spec } A$  un point fermé tel que  $G_{A_{\bar{m}}}$ ,  $T_{A_{\bar{m}}}$ ,  $B_{A_{\bar{m}}}$ ,  $H_{A_{\bar{m}}}$  sont des groupes algébriques en caractéristique positive assez grande et satisfont aux hypothèses du théorème 7.1.7 de X.He et J-F.Thomsen. Soulignons que la dominance du caractère  $2\rho_{H_{A_{\bar{m}}}} - \rho_{|(T_{A_{\bar{m}}} \cap H_{A_{\bar{m}}})_{\bar{m}}}$  est bien préservée. Les changements de bases de  $G_A$  et  $H_A$  conservent en effet la même donnée radicielle épinglée, par l'équivalence de catégories entres groupes réductifs épinglés et données radicielles épinglées (voir SGA3 Exposé XXV Théorème 1 et ses corollaires,

[DGA11b]). Il existe donc un scindage de Frobenius de  $\mathcal{B}_{A\bar{m}} \simeq G_{A\bar{m}}/B_{A\bar{m}}$  relativement à un faisceau ample et scindant compatiblement les sous-variétés  $Y_{A\bar{m}}^w \simeq (\overline{H_{A\bar{m}}B_{A\bar{m}} \cdot w_{A\bar{m}}B_{A\bar{m}}})_{red}$ . Par le théorème 7.1.9, le "tiré en arrière"  $\mathcal{L}_{A\bar{m}}$  étant semi-ample inversible, la restriction

$$H^0(\mathcal{B}_{A\bar{m}}, \mathcal{L}_{A\bar{m}}) \rightarrow H^0(Y_{A\bar{m}}^w, \mathcal{L}_{A\bar{m}|Y_{A\bar{m}}^w})$$

est surjective et  $H^1(\mathcal{B}_{A\bar{m}}, \mathcal{L}_{A\bar{m}}) = 0$ . Comme  $\mathcal{B}_A$  est propre sur  $A$  noethérien, par le corollaire 7.1.11, on en déduit que la restriction correspondante sur la fibre générique géométrique  $H^0(\mathcal{B}_{A\bar{\eta}}, \mathcal{L}_{A\bar{\eta}}) \rightarrow H^0(Y_{A\bar{\eta}}^w, \mathcal{L}_{A\bar{\eta}|Y_{A\bar{\eta}}^w})$  est aussi surjective. Puisque  $k$  est algébriquement clos, on a  $A_{\bar{\eta}} = \kappa(\eta) \subset \overline{\kappa(\eta)} \subset k$  et on en déduit la surjection :

$$H^0(\mathcal{B}_{A\bar{\eta}}, \mathcal{L}_{A\bar{\eta}}) \otimes_{\kappa(\eta)} k \rightarrow H^0(Y_{A\bar{\eta}}^w, \mathcal{L}_{A\bar{\eta}|Y_{A\bar{\eta}}^w}) \otimes_{\kappa(\eta)} k.$$

Mais celle-ci correspond exactement à la restriction :

$$H^0(G/B, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(\overline{(HB \cdot wB)})_{red}, \mathcal{L}|_{\overline{(HB \cdot wB)}_{red}},$$

par application du lemme 7.1.8 (Annexe) aux faisceaux quasi-cohérents  $\mathcal{L}_{A\bar{\eta}}$  et  $\mathcal{L}_{A\bar{\eta}|Y_{A\bar{\eta}}^w}$  et par les identifications  $\mathcal{B}_{A\bar{\eta}_k} \simeq \mathcal{B}_{A_k} \simeq G/B$ ,  $Y_{A\bar{\eta}_k}^w \simeq Y_{A_k}^w \simeq \overline{(HB \cdot wB)}_{red}$ ,  $\mathcal{L}_{A\bar{\eta}_k} \simeq \mathcal{L}_{A_k} \simeq \mathcal{L}$  et  $(\mathcal{L}_{A\bar{\eta}|Y_{A\bar{\eta}}^w})_k \simeq \mathcal{L}_{A\bar{\eta}_k|Y_{A\bar{\eta}_k}^w} \simeq \mathcal{L}_{A_k|Y_{A_k}^w} \simeq \mathcal{L}|_{\overline{(HB \cdot wB)}_{red}}$ . La surjectivité des restrictions relativement à  $w_1 \leq w_2$  se déduit aisément du diagramme issu de l'ordre de Bruhat  $\overline{(B \cdot w_1 B)}_{red} \hookrightarrow \overline{(B \cdot w_2 B)}_{red}$  :

$$\begin{array}{ccc} \overline{(HB \cdot w_1 B)}_{red} & \hookrightarrow & \overline{(HB \cdot w_2 B)}_{red} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & G/B. \end{array}$$

□

### 7.1.3 Le théorème

On a maintenant tous les ingrédients pour pouvoir démontrer notre théorème dans un cadre relativement général.

**Théorème 7.1.13.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe réductif en caractéristique nulle,  $B$  un sous-groupe de Borel,  $T \subset B$  un tore maximal et  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $H$  un sous-groupe connexe réductif tel que  $B_H := B \cap H$  et  $T_H := T \cap H$  soient respectivement un sous-groupe de Borel et un tore maximal de  $H$ . Soit  $w \in W$ . On suppose que :*

- (i) *Le morphisme naturel  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow G/B$  issu de l'action de  $H$  est birationnel vers son image  $\overline{HB \cdot wB}$ .*
- (ii) *Le caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  est dominant.*

Alors  $\overline{HB \cdot wB}$  est normale, Cohen-Macaulay et à singularités rationnelles.

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que l'on peut se ramener au cas où  $G$  est semi-simple. Soit donc  $G$  réductif avec  $B, T, W, H$  vérifiant les hypothèses de l'énoncé et posons  $G' := G/R(G)$  le quotient semi-simple de  $G$  ainsi que  $\pi: G \rightarrow G'$  le passage au quotient. Posons en outre  $H', B'$ , etc les images par  $\pi$  de  $H, B$ , etc. Comme  $\pi$  est un épimorphisme de groupes,  $B'$ , respectivement  $T'$  est un sous-groupe de Borel et un tore maximal de  $G'$ . Comme  $G$  est réductif,  $R(G) = \text{Ker } \pi$  est un tore et il est aussi inclus dans tous les sous-groupes de Borel de  $G$ , ainsi que dans tous ses tores maximaux. On en déduit que  $\pi$  induit un isomorphisme entre les variétés de drapeaux  $G/B \simeq G'/B'$ , les groupes de Weyl  $W \simeq W'$ , et les systèmes de racines  $\Phi(G, T) \simeq \Phi(G', T')$

et racines positives relatives à  $B$ ,  $B'$ ,  $\Phi^+(G, T, B) \simeq \Phi^+(G', T', B')$ . De même, si l'on note  $\tilde{\pi}$  la surjection  $H \rightarrow H'$  induite par  $\pi$ , alors comme  $R(H) = (R(G) \cap H)^0$  par maximalité et comme  $H$  est réductif, on trouve que  $\text{Ker } \tilde{\pi} = R(G) \cap H$  est inclus dans tous les sous-groupes de Borel de  $H$ , ainsi que dans tous ses tores maximaux. On en déduit que  $H'$  est encore réductif et que  $\tilde{\pi}$  induit des isomorphismes  $H/B_H \simeq H'/(B_H)'$ ,  $W_H \simeq W_{H'}$ ,  $\Phi(H, T_H) \simeq \Phi(H', (T_H)')$  et  $\Phi^+(H, T_H, B_H) \simeq \Phi^+(H', (T_H)', (B_H)')$ . De plus,  $H' \cap B' = (B_H)'$  et c'est un sous-groupe de Borel de  $H'$ . L'inclusion  $(B_H)' \subset H' \cap B'$  est en effet évidente et si  $\pi(h) = \pi(b) \in H' \cap B'$ , alors  $b^{-1}h \in \text{Ker } \pi = R(G) \subset B$  de sorte que  $h \in B_H$  et  $\pi(h) \in (B_H)'$ . De même,  $(T_H)' = T' \cap H'$  est un tore maximal de  $H'$ . Ainsi, en notant  $T_{H'}' = T' \cap H'$ ,  $B_{H'}' = B \cap H$ , le caractère  $2\rho_{H'} - \rho_{T_{H'}'}$  reste dominant. Enfin, en composant avec l'inverse de l'isomorphisme  $H/B_H \simeq H'/B_{H'}'$ , en notant  $w'$  l'élément de  $W'$  correspondant à  $w \in W$  et en considérant une action de  $H$  induite par  $\pi$ , on obtient un morphisme  $H$ -équivariant de variétés  $H' \times^{B_{H'}'} \overline{B' \cdot w' B'} \rightarrow \overline{H/B_H}$ . Sa fibre au point fermé  $eB_H$  est alors  $\overline{B' \cdot w' B'}$ , isomorphe de manière  $H$ -équivariante à  $\overline{B \cdot w B}$ . Aussi, par la proposition 2.3.15, les produits contractés sont isomorphes au dessus de  $H/B_H$  et on en déduit le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont des isomorphismes et celles horizontales correspondent à la factorisation des morphismes naturels vers la variété de drapeaux :

$$\begin{array}{ccccc} H' \times^{B_{H'}'} \overline{B' \cdot w' B'} & \longrightarrow & \overline{H' B' \cdot w' B'} & \longrightarrow & H'/B_{H'}' \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H \times^{B_H} \overline{B \cdot w B} & \longrightarrow & \overline{H B \cdot w B} & \longrightarrow & H/B_H. \end{array}$$

On peut donc conclure à la réduction de cas : si  $G$ ,  $H$ ,  $B$ , etc. satisfont aux hypothèses du théorème, il en sera de même pour  $G'$ ,  $H'$ ,  $B'$ , etc. et la conclusion sur  $\overline{H' B' \cdot w' B'}$  se transportera sur  $\overline{H B \cdot w B}$ .

Soit maintenant les données et hypothèses de l'énoncé avec  $G$  semi-simple. Choisissons un mot  $\mathfrak{w} = (s_{\alpha_{j_1}}, \dots, s_{\alpha_{j_n}})$  décomposant  $w$  et notons  $Z_{\mathfrak{w}}$  la variété de Bott-Samelson associée. En suivant une description présente par exemple dans [BK05] (Exercice 2.2 E1), on a pour tout  $i \in [1, n-1]$  un isomorphisme de  $G/B$ -variétés  $Z_{\mathfrak{w}[i+1]} \simeq Z_{\mathfrak{w}[i]} \times_{G/P_{\alpha_{j_{i+1}}}} G/B$  où  $\mathfrak{w}[i]$  correspond au sous-mot  $(s_{\alpha_{j_1}}, \dots, s_{\alpha_{j_i}})$ . Par ailleurs, comme le quotient et produit contracté  $H/B_H \simeq H \times^{B_H} \{eB\}$  existent, construisons les familles  $(Z_i)$  et  $(\tilde{X}_i)$  comme dans le corollaire 2.1.33, avec  $H$ ,  $B_H$ ,  $G/B$ ,  $G/P_{\alpha_{j_i}}$  et la surjection naturelle  $G/B \rightarrow G/P_{\alpha_{j_i}}$  jouant respectivement les rôles de  $G$ ,  $H$ ,  $Y$ ,  $T_i$ , et  $p_i : Y \rightarrow T_i$ , et en partant de  $X := \text{Spec } k$  correspondant au point fermé  $eB \in Y$ . Par conséquent, on a ainsi pour tout  $i \in [0, n]$  :

$$\begin{cases} Z_0 & = X = Z_{\mathfrak{w}[0]} = \{eB\} \\ Z_{i+1} & = Z_i \times_{T_{i+1}} Y \simeq Z_{\mathfrak{w}[i+1]} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \tilde{X}_0 & = H/B_H \simeq H \times^{B_H} \{eB\} \\ \tilde{X}_{i+1} & = \tilde{X}_i \times_{T_{i+1}} Y \end{cases}$$

puis des isomorphismes de  $G/B$ -variétés  $B_H$ -équivariants :

$$\tilde{X}_i \simeq H \times^{B_H} Z_i \simeq H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[i]}, \quad (7.12)$$

les variétés  $Z_i$  et  $\tilde{X}_i$  étant respectivement munies d'une structure de  $Y$ -schéma par les immersions  $\text{Spec } k \hookrightarrow Y$  et  $H/B_H \hookrightarrow G/B$  pour  $i = 0$  et par les projections sur les secondes coordonnées  $Z_i \rightarrow Y$  et  $\tilde{X}_i \rightarrow Y$  pour  $i > 1$ . Les structures de  $T_i$ -schémas étant toutes issues d'une composée avec  $p_i : Y \rightarrow T_i$ .

Posons encore, pour tout  $i$ ,  $X_i$  l'image schématique de  $\tilde{X}_i \rightarrow Y$ . Il suit de (7.12) que les images  $X_i$  et  $\overline{H B \cdot w[i] B}$  dans  $Y = G/B$  correspondent, et de façon compatible aux immersions  $\tilde{X}_i \hookrightarrow \tilde{X}_{i+1}$  et  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[i]} \hookrightarrow H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[i+1]}$ . Autrement dit, on obtient le diagramme suivant, où les flèches

horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X}_i & \xrightarrow{\sim} & H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[i]} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \tilde{X}_{i+1} & \xrightarrow{\sim} & H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}[i+1]} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 X_{i+1} & \xrightarrow{\sim} & \overline{HB \cdot w[i+1]B} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 X_i & \xrightarrow{\sim} & \overline{HB \cdot w[i]B}
 \end{array}
 \quad (7.13)$$

Maintenant, la résolution dite de Bott-Samelson fournit un morphisme de variétés, birationnel  $B$ -équivariant et donc  $B_H$ -équivariant  $Z_{\mathfrak{w}} \rightarrow \overline{B \cdot wB}$ . Par la proposition 2.3.16, le morphisme  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}} \rightarrow H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB}$  est encore birationnel. Aussi, par l'hypothèse (i) et stabilité de la birationalité (proposition 2.2.16), le morphisme  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}} \rightarrow \overline{HB \cdot wB}$ , image de la composition  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}} \rightarrow H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow G/B$  est encore birationnel.

Avec le diagramme (7.13),  $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$  est donc aussi birationnel. De plus,  $\tilde{X}_0 \rightarrow X_0$  est un isomorphisme, donc projectif et  $X_0 \simeq H/B_H$  est clairement normale. Enfin pour tout  $i$ ,  $p_i$  est une  $\mathbb{P}_k^1$ -fibration entre  $k$ -variétés projectives, de sorte qu'il s'agit notamment d'un morphisme fidèlement plat, propre et à fibres géométriquement normales. En outre, par la remarque 7.1.3, il satisfait encore  $R^1 p_{i*} \mathcal{O}_Y = 0$  et  $R^k p_{i*} \mathcal{F} = 0$  pour  $k > 1$ ,  $\mathcal{F}$  cohérent sur  $Y$  et tout changement de base de son comorphisme reste un isomorphisme. D'autre part, pour tout  $i$ ,  $T_{i+1}$  étant une variété projective, elle possède un faisceau inversible ample  $\mathcal{L}$ . Mais  $(p_{i+1}^* \mathcal{L})|_{X_{i+1}}$  est alors inversible semi-ample sur  $Y = G/B$ . Aussi, avec l'hypothèse sur le caractère dominant et l'identification dans  $G/B$  de  $X_i \rightarrow X_{i+1}$ , le corollaire 7.1.12 donne encore la surjectivité de la restriction :

$$H^0(X_{i+1}, (p_{i+1}^* \mathcal{L})|_{X_{i+1}}) \rightarrow H^0(X_i, (p_{i+1}^* \mathcal{L})|_{X_i}).$$

Toutes les hypothèses sont donc satisfaites pour appliquer l'intégralité du théorème 7.1.1 et de ses implications :  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}} \rightarrow \overline{Z \cdot wB}$  est donc birationnel, rationnel, projectif et  $\overline{Z \cdot wB}$  normale. De plus, comme  $Z_{\mathfrak{w}}$  est lisse, ce sera encore le cas de  $H \times^{B_H} Z_{\mathfrak{w}}$  (proposition 2.3.15). Par conséquent, si la caractéristique est nulle, alors par les propriétés 2.3.8 et 2.3.9,  $\overline{Z \cdot wB}$  est encore Cohen-Macaulay et à singularités rationnelles.  $\square$

**Corollaire 7.1.14.** *Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe réductif, en caractéristique nulle,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$ , et soit  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $H \subset Z \subset G$  des sous-groupes fermés connexes munis d'une rétraction  $\pi : Z \rightarrow H$  avec  $H$  réductif et tel que  $B_H := B \cap H$  et  $T_H := T \cap H$  soient respectivement un sous-groupe de Borel et un tore maximal de  $H$ . On fixe  $w \in W$  et on suppose que :*

1.  ${}^w B \cap Z \subset \pi^{-1}(B_H)({}^w B \cap Z)^0$ ,
2.  $z^{-1} \pi(z) \in \overline{{}^w B B}$  pour tout  $z \in Z$ ,
3.  $\dim Z/Z \cap {}^w B = \ell(w) + \dim H/B_H$ ,
4. le caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  est dominant,

Alors  $\overline{Z \cdot wB}$  est Cohen-Macaulay, normale, à singularités rationnelles.

*Démonstration.* Les hypothèses, et notamment la caractéristique nulle, permettent d'appliquer le théorème 6.1.1. Ainsi  $\overline{Z \cdot wB} = \overline{HB \cdot wB}$  et le morphisme naturel  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow \overline{HB \cdot wB}$  est birationnel. On peut alors appliquer le théorème 7.1.13 et on obtient le résultat voulu.  $\square$

## 7.2 Application 1 : sous-groupe obtenu par induction parabolique

**Théorème 7.2.1.** *On suppose la caractéristique nulle. Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire connexe réductif,  $T$  un tore maximal inclus dans un sous-groupe de Borel  $B$  et  $W$  le groupe de Weyl associé. Soit  $P$  un sous-groupe parabolique contenant  $B$  et  $L$  le sous-groupe de Levi associé. Soit  $\theta$  une involution de  $L$  stabilisant  $T$  et  $B_L := B \cap L$ . On pose  $L_Z := (L^\theta)^0$  et par induction parabolique,  $Z := L_Z U_P$ . Soit  $H \subset Z$  un sous-groupe fermé connexe tel que  $B_H := B \cap H$  soit un sous-groupe de Borel de  $H$  et muni d'une rétraction  $\pi: Z \rightarrow H$  avec  $\pi(B \cap Z) \subset B$ . On fixe  $w \in W$  et on suppose que :*

- $z^{-1}\pi(z) \in \overline{wB}$  pour tout  $z \in Z$ .
- il existe  $\tau \in W_P$  tel que  $w^{-1}\tau \in W^P$  et  $\ell(\tau) - (\ell(\tau^{-1}\theta(\tau)))/2 = \dim Z/Z \cap B - \dim H/B_H$ .
- Le caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  est dominant.

Alors,  $\overline{Z \cdot wB}$  est Cohen-Macaulay, normale, à singularités rationnelles.

*Démonstration.* De manière tout à fait analogue au corollaire 7.1.14, on applique le théorème 7.1.13 grâce au morphisme birationnel  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB} \rightarrow \overline{HB \cdot wB}$  fourni par le théorème 6.2.1.  $\square$

## 7.3 Application 2 : stabilisateur d'un élément nilpotent d'ordre 2, types A, B, D

Pour notre dernier théorème, nos arguments ne permettent pas d'inclure le type  $C$  pour deux raisons essentielles précédemment citées : la non dominance du caractère  $2\rho_H - \rho_{T_H}$  et l'existence de  $Z$ -orbites de la variété de drapeaux sans points fixés par le tore maximal en jeu. Nous ne connaissons cependant pas de contre-exemple qui empêcherait que son résultat reste valable pour ce type.

**Théorème 7.3.1.** *Soit  $G$  le groupe  $Gl(V)$  ou  $SO(V)$  en caractéristique nulle,  $B$  un sous-groupe de Borel. Si  $Z$  désigne le centralisateur d'un élément nilpotent d'ordre 2 de  $\mathfrak{g}$ , alors toute adhérence de  $Z$ -orbite dans  $G/B$  est Cohen-Macaulay, normale, à singularités rationnelles.*

*Démonstration.* De manière encore analogue aux résultats précédents, on applique simplement le théorème 7.1.13 grâce au théorème 6.3.1.  $\square$



# Chapitre 8

## Annexes

### 8.1 Annexe A : Formules de dimension pour certaines $Z$ -orbites

Nous avons pu voir que des sous-groupes de groupes de permutations permettent de paramétrer les  $Z$ -orbites de  $G/B$ , lorsque  $G, B, Z$  se situent dans l'un des modèles matriciels  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . Nous proposons ici des représentations graphiques de ces paramètres qui fourniront des formules pour la dimension de leurs orbites. Nous espérons se voir dégager ainsi clairement et visuellement par exemple, le fait qu'une  $Z$ -orbite soit dense dans une composante irréductible d'une fibre de Springer. Comme cette piste est encore à explorer, nous avons choisi de placer cette section ici en Annexe.

Pour un entier  $m$  et  $a \in \{\pm 1\}$ , rappelons les notations et conventions (5.16). Ainsi  $\mathcal{I}_m^a$  est l'ensemble de toutes les involutions de  $\mathfrak{S}_m$  si  $a = 1$  et celles sans points fixes si  $a = -1$ , l'involution  $\vartheta = G_m \rightarrow G_m$  est définie par  $g \mapsto I_{\varepsilon, m} \delta g^{-1} I_{\varepsilon, m}$ , etc. Rappelons aussi que nous avons désigné par  $\mathcal{O}(v)$  une  $G_{\alpha, m}$  orbite de  $G_m/B_m$  relativement à un paramètre  $v \in \mathcal{I}_m^a$  (voir proposition 5.5.2).

#### Définition et représentation graphiques des paramètres

**Définition 8.1.1.** Soit  $n$  et  $r$  des entiers avec  $n \geq 2r \geq 1$ . On appelle  $(n, r)$ -**graphe admissible** un graphe dont les sommets sont les  $n$  points successifs d'une ligne discrète  $\{1, \dots, n\}$ , et disposant de  $r$  arcs orientés ou flèches joignant chacune deux sommets distincts telles que la présence de  $x \overleftarrow{\quad} y$  (respectivement  $x \overrightarrow{\quad} y$ ) implique celle de  $\bar{y} \overleftarrow{\quad} \bar{x}$  (respectivement  $\bar{y} \overrightarrow{\quad} \bar{x}$ ). Un tel graphe sera dit **adapté** s'il ne comporte pas de flèche joignant les sommets  $x$  et  $\bar{x}$ .

Nous avons alors une identification des paramètres en jeu avec les graphes adaptés.

**Proposition 8.1.2.** Soit  $n$  et  $r$  des entiers avec  $n \geq 2r \geq 1$ . On pose  $v_0$  l'élément de plus grande longueur de  $\mathfrak{S}_r$ . On fixe  $W^P$  relativement au modèle matriciel  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$ . On a les correspondances biunivoques suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \{(n, r)\text{-graphes admissibles}\} & \xleftarrow[\sim]{\gamma} & \mathcal{I}_r^1 \times W^P \\
 & \searrow \alpha \sim & \nearrow \beta \sim \\
 & & \left\{ (I, f) \left| \begin{array}{l} I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = r, I \cap \bar{I} = \emptyset, \\ f \text{ bijection } I \rightarrow \bar{I} \text{ telle que} \\ f(a) = \bar{b} \Leftrightarrow f(b) = \bar{a} \forall a, b \in I \end{array} \right. \right\}
 \end{array}$$

où

- -  $\gamma(v, w)$  est le graphe formé par les  $r$  flèches de sources  $w(vv_0(i))$  et de cibles  $w(n-r+i)$  pour  $i$  variant dans  $\{1, \dots, r\}$ .
- -  $\gamma^{-1}(\mathcal{G})$  est l'unique couple  $(v, w) \in \mathfrak{S}_r \times W^P$  tel que  $w(\{1, \dots, r\})$  décrit les sources des flèches de  $\mathcal{G}$  et tel qu'il existe, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , une flèche de source  $w(vv_0(i))$ , de cible  $w(n-r+i)$  ( $v$  est alors nécessairement une involution).
- -  $\alpha(I, f)$  est le graphe formé par les  $r$ -flèches de cibles  $x$  et de sources  $f(x)$  pour  $x$  variant dans  $I$ .
- -  $\alpha^{-1}(\mathcal{G})$  consiste dans l'ensemble formé par les cibles des flèches de  $\mathcal{G}$  et dans la bijection envoyant ces premières sur la source de leur flèche correspondante.
- -  $\beta(I, f)$  est l'unique couple  $(v, w) \in \mathfrak{S}_r \times W^P$  tel que  $w\{1, \dots, r\} = I$  et tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $f(w(vv_0(i))) = w(n-r+i)$  ( $v$  est alors nécessairement une involution).
- -  $\beta^{-1}(v, w)$  consiste dans l'ensemble formé par  $w\{1, \dots, r\}$  et dans la bijection envoyant  $w(vv_0(i))$  sur  $w(n-r+i)$  pour tout  $i = 1, \dots, r$ .

Et par restriction, on obtient encore le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \{(n, r)\text{-graphes admissibles adaptés}\} & \xleftarrow[\sim]{\gamma} & \mathcal{I}_r^{-1} \times W^P \\
 & \searrow \alpha \sim & \nearrow \beta \sim \\
 & \left\{ (I, f) \left[ \begin{array}{l} I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = r, I \cap \bar{I} = \emptyset, \\ f \text{ bijection } I \rightarrow \bar{I} \text{ telle que} \\ f(a) = \bar{b} \Leftrightarrow f(b) = \bar{a} \forall a, b \in I \\ \text{avec } f(a) \neq \bar{a} \forall a \in I \end{array} \right. \right\} & 
 \end{array}$$

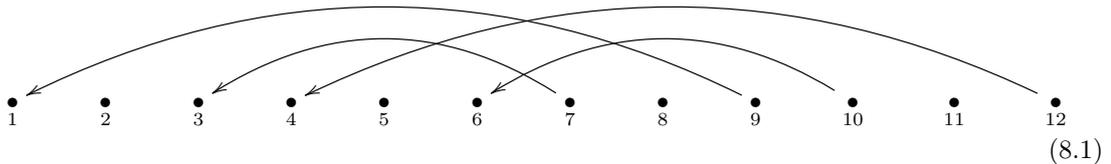
Donnons un exemple en type  $D$ .

**Exemple 8.1.3.** Choisissons  $n = 12$ ,  $r = 4$ , et  $\varepsilon = 1$ , posons les éléments  $w \in W^P$  et  $v \in \mathcal{I}_r^{-1}$  suivants :

$$w := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 10 & 12 & 2 & 5 & 8 & 11 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

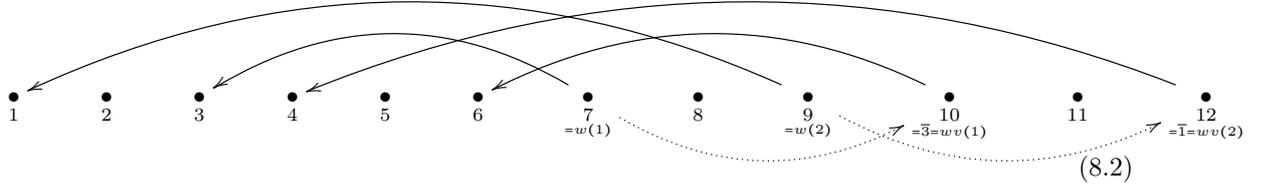
$$v := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (13)(24).$$

Le graphe admissible  $\gamma(v, w)$  correspondant est adapté; on peut le représenter de la manière suivante :



Réciproquement, si l'on se donne un tel graphe, l'ensemble  $I$  des sommets sources de flèches caractérise univoquement  $w \in W^P$  selon  $I = w\{1, \dots, r\}$ , par les conditions de stricte croissance et l'égalité  $\tilde{w} = w$  qu'impose la description de  $W^P$  dans cette situation (voir proposition 5.3.3). Remarquons que les flèches de (8.1) décrivent les couples  $(w(vv_0(i)), w(n-r+i))$ ,  $i \in [1, r]$ . Mais en posant  $j = wv_0(i) = wv(r-i+1)$  et en employant les égalités  $\tilde{w} = w$  et  $v^2 = id$  on voit que

ces couples sont aussi décrits par les suivants :  $(j, \overline{wvw^{-1}(j)})$ ,  $j \in [1, r]$ . Aussi, on peut compléter (8.1) par la représentation graphique de l'involution  $wvw^{-1}$  de  $I$  qui caractérise complètement  $v$ .



**Remarque 8.1.4.** Les formules de dimensions qui vont suivre font intervenir de manière cruciale l'ensemble  $I$  et la représentation graphique de  $v$  (soit celle de  $wvw^{-1}$ ). En ce sens, elles pourront se "lirent" sur les graphes admissibles considérés.

### 8.1.1 Résultats intermédiaires

Dans cette sous-section, nous fixons un entier  $m$ , nous considérons le groupe  $G_m$  muni de l'involution  $\vartheta$ . Pour établir des formules de dimension, nous établissons deux propriétés utiles.

On rappelle la définition  $E_-(a) := \{v \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Phi \mid a.\theta.v = -v\}$ , relative à un ensemble de racines  $\Phi$ , une involution de groupes  $\theta$  et un élément  $a$  du groupe de Weyl vérifiant  $\theta(a) = a^{-1}$  (voir théorème 4.4.1).

Nous commençons par un lemme :

**Lemme 8.1.5.** Soit  $G$  un groupe algébrique connexe et réductif. Soit  $T$  un tore maximal,  $W$  le groupe de Weyl et  $\Phi$  le système de racine qui lui sont associés. Soit  $\theta$  une involution de  $G$  stabilisant  $T$ . Elle agit alors sur  $\Phi$ . Pour tout  $a \in W$  et  $s := s_\alpha$  une réflexion simple relative à une racine  $\alpha \in E_-(a)$ , on a alors  $sa\theta(s)^{-1} = a$ . De plus,  $E_-(sa)$  est un hyperplan de  $E_-(a)$ .

*Démonstration.* En remarquant que pour tout  $w \in W$ ,  $\theta(w) = \theta w \theta$  vu comme endomorphisme de  $E := \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \Phi$ , on a les équivalences  $sa\theta(s)^{-1} = a \Leftrightarrow sa\theta s \theta = a \Leftrightarrow (a\theta)s(a\theta)^{-1} = s$ . Or, comme  $\theta$  stabilise  $T$ , on peut munir  $E$  d'un produit scalaire à la fois  $W$  et  $\theta$  invariant. Aussi,  $(a\theta)s(a\theta)^{-1}$  est la réflexion orthogonale d'axe  $(a\theta)\text{Ker}(s+id) = (a\theta)\mathbb{R}(\alpha) = \mathbb{R}\alpha$  puisque  $\alpha \in E_-(a)$  par hypothèse. Donc  $(a\theta)s(a\theta)^{-1} = s$  et on l'égalité voulue. Maintenant, cette égalité entraîne  $s.E_-(a) = E_-(sa\theta(s)^{-1}) = E_-(a)$  et  $s.E_-(sa) = E_-(ssa\theta(s)^{-1}) = E_-(a\theta(s)^{-1}) = E_-(sa)$  de sorte que  $E_-(a)$  et  $E_-(sa)$  sont  $s$ -stables.  $s$  étant une réflexion d'axe  $\mathbb{R}\alpha$ , on a donc

$$\begin{aligned} E_-(a) &= \text{Ker}(s - id) \cap E_-(a) \oplus \mathbb{R}\alpha \cap E_-(a), \\ E_-(sa) &= \text{Ker}(s - id) \cap E_-(sa) \oplus \mathbb{R}\alpha \cap E_-(sa). \end{aligned}$$

Mais  $\alpha \in E_-(a)$  et donc aussi  $\alpha \notin E_-(sa)$  par hypothèse. De plus, pour  $v \in \text{Ker}(s - id)$ , on a  $v \in E_-(sa) \Leftrightarrow sa\theta(v) = -v \Leftrightarrow a\theta(v) = -v \Leftrightarrow v \in E_-(a)$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} E_-(a) &= \text{Ker}(s - id) \cap E_-(a) \oplus \mathbb{R}\alpha \cap E_-(a), \\ E_-(sa) &= \text{Ker}(s - id) \cap E_-(a), \end{aligned}$$

et on a le second résultat attendu. □

Nous obtenons alors des formules graphiques pour la longueur d'involution.

**Proposition 8.1.6.** Soit  $v \in \mathfrak{S}_m$  une involution. On note  $\text{arc}(v)$  l'ensemble des arcs de la représentation graphique de  $v$ , et pour un arc  $a \in \text{arc}(v)$ ,  $\text{long}(a)$  sa longueur, soit un plus le nombre de sommets qui séparent strictement sa source de sa cible, et  $\text{inter}_v(a)$  le nombre d'intersection qu'il possède avec d'autres arcs de  $v$ . On a alors les formules suivantes :

- $\ell_m(v) = \sum_{a \in \text{arc}(v)} (2 \cdot \text{long}(a) - \text{inter}_v(a) - 1)$ .
- $\dim E_-(vv_0) = m - 1 - \#\text{arc}(v)$ .

*Démonstration.* On montre les deux formules par récurrence sur le nombre d'arcs. Si  $v$  ne comporte aucun arc, c'est l'identité et la formule pour la longueur est claire. D'autre part, pour  $t \in T_m$ ,  $v_0\vartheta(t) = \vartheta(v_0^{-1}tv_0) = \delta(\delta t^{-1}) = t^{-1}$  de sorte que  $v_0\vartheta$  est la symétrie centrale et ainsi  $E_-(vv_0) = E_-(v_0) = E := \mathbb{R} \times_{\mathbb{Z}} \Phi$  est de dimension  $\#\Phi = m-1$ . On a bien l'initialisation. Supposons maintenant l'hypothèse de récurrence vraie au rang  $k$  et soit une involution  $v$  avec  $\#\text{arc}(v) = k+1$ . Considérons un arc  $b := \overset{\curvearrowright}{x}y$  avec  $x < y$  et posons  $v' = v(xy) = (xy)v$ . Ainsi  $v'$  reste une involution avec  $\text{arc}(v') = \text{arc}(v) - \{b\}$  de cardinal  $k$  et par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \ell_m(v') &= \sum_{a \in \text{arc}(v')} (2 \cdot \text{long}(a) - \text{inter}_{v'}(a) - 1) \\ &= \sum_{\substack{a \in \text{arc}(v') \\ a \cap b = \emptyset}} (2 \cdot \text{long}(a) - (\text{inter}_v(a) - 1) - 1) + \sum_{\substack{a \in \text{arc}(v') \\ a \cap b \neq \emptyset}} (2 \cdot \text{long}(a) - \text{inter}_v(a) - 1) \\ &= \sum_{\substack{a \in \text{arc}(v) \\ a \neq b}} (2 \cdot \text{long}(a) - \text{inter}_v(a) - 1) + \text{inter}_v(b). \end{aligned}$$

Mais d'autre part, en comptabilisant le nombre d'inversions et en mettant à part les couples  $(i < j)$  où l'une au moins des coordonnées est  $x$  ou  $y$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \ell_m(v) - \ell_m(v') &= \#\{x < i \neq y \mid v(i) < y\} - \#\{x < i \neq y \mid v(i) < x\} \\ &\quad + \#\{y < i \mid v(i) < x\} - \#\{y < i \mid v(i) < y\} \\ &\quad + \#\{i < x \mid y < v(i)\} - \#\{i < x \mid x < v(i)\} \\ &\quad + \#\{x \neq i < y \mid x < v(i)\} - \#\{x \neq i < y \mid y < v(i)\} \\ &\quad + 1_{x < y} - 1_{y < x} \\ &= \#\{x < i \neq y \mid x < v(i) < y\} \\ &\quad - \#\{y < i \mid x < v(i) < y\} \\ &\quad - \#\{i < x \mid x < v(i) < y\} \\ &\quad + \#\{x \neq i < y \mid x < v(i) < y\} \\ &\quad + 1 \\ &= \#\{x < i < y \mid x < v(i) < y\} \\ &\quad + \#\{x < i < y \mid x < v(i) < y\} \\ &\quad + 1 \\ &= 2 \cdot \#\{x < i < y\} - 2 - 2 \cdot \text{inter}_v(b) + 1 \\ &= 2 \cdot \text{long}(b) - 2 \cdot \text{inter}_v(b) - 1. \end{aligned}$$

En combinant les deux égalités obtenues, on trouve bien la formule attendue pour  $\ell_m(v)$ . Intéressons-nous désormais à  $\dim E_-(vv_0)$ . Par hypothèse de récurrence appliquée à  $v'$ , on a  $\dim E_-(v'v_0) = m-1-k$ . Notons  $\alpha$  la racine simple associée à  $x < y$  et  $s := s_\alpha = (xy)$ . Comme  $v_0\vartheta$  est la symétrie centrale, et que clairement  $v' = vs$  fixe  $\alpha$ , on a  $(v'v_0\vartheta)(\alpha) = -\alpha$  et ainsi  $\alpha \in E_-(v'v_0)$ . Par le lemme 8.1.5, on a donc  $\dim E_-(vv_0) = \dim E_-(sv'v_0) = \dim E_-(v'v_0) - 1 = m-1-(k+1)$ . On reconnaît l'autre formule souhaitée. On a donc bien obtenu l'hypothèse de récurrence au rang  $k+1$ .  $\square$

On lie alors dans un premier temps ces formules de longueur avec la dimension des  $G_{\mathbf{a},m}$ -orbites de  $G_m/B_m$ .

**Proposition 8.1.7.** *Soit  $\mathbf{a} = \pm 1$ . Pour  $v \in \mathcal{I}_m^{\mathbf{a}}$ , on a la formule de dimension :*

$$\dim \mathcal{O}(v) = \dim G_{\mathbf{a},m}/B_{\mathbf{a},m} + \frac{1}{2} \left( \binom{m}{2} + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \right) + \sum_{a \in \text{arc}(v)} \text{inter}_v(a) - 2 \cdot \text{long}(a).$$

*Soit, en fonction de  $\mathbf{a}$  :*

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a} = 1) : \dim \mathcal{O}(v) &= \binom{m}{2} + \frac{1}{2} \left( \sum_{a \in \text{arc}(v)} \text{inter}_v(a) - 2 \cdot \text{long}(a) \right), \\ (\mathfrak{a} = -1) : \dim \mathcal{O}(v) &= \frac{m^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \sum_{a \in \text{arc}(v)} \text{inter}_v(a) - 2 \cdot \text{long}(a) \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On utilise le théorème 4.4.1., relativement à  $G := G_m$ ,  $K := G_m^\vartheta$ ,  $T := T_m$ ,  $B := B_m$ ,  $W := W_m$ . Toute  $K$  orbite, qui possède par la proposition 4.2.3 un représentant  $xB \in G/B$  avec  $w_x := x^{-1}\vartheta(x)T \in W$  donne ainsi lieu à la formule de dimension  $\dim K/K \cap B + \frac{1}{2}(\ell(w_x) + \dim E_-(w_x) - \dim E_-(1))$ . Mais si  $xB$  est un tel représentant d'une orbite  $\mathcal{O}(v)$ , alors par définition de cette dernière variété et la paramétrisation des  $G$  orbites de  $G/B \times G/B$  par le groupe de Weyl, on a  $w_x = (v_\circ v)^{-1} = vv_0$ . Aussi, on trouve  $\dim \mathcal{O}(v) = \dim K/K \cap B + \frac{1}{2}(\ell(vv_0) + \dim E_-(w_x) - \dim E_-(1))$ . Or  $K \cap B$  est le sous-groupe de Borel  $B_K$  et on connaît ainsi en fonction des types la valeur  $\dim K/K \cap B$ . De plus un dénombrement simple du nombre d'inversions donne  $\ell(vv_0) = \binom{n}{2} - \ell(v)$ . Avec des calculs et simplifications, la proposition 8.1.6 permet alors de conclure aux formules souhaitées.  $\square$

**Exemple 8.1.8.** Reprenons l'exemple 8.1.3 précédent. Rappelons qu'on a  $n = 12$ ,  $r = 4$ ,  $\varepsilon = 1$  (type  $D$ ) et  $v = (13)(24) \in \mathcal{I}_r^{-1}$ . Une représentation graphique de  $v$  (observable également sur (8.2) est donnée par :



Cette représentation ne possède que deux arcs de même longueur 2 qui s'intersectent, on en déduit :

$$L := \sum_{a \in \text{arc}(v)} \text{inter}_v(a) - 2 \cdot \text{long}(a) = 1 - 2 \cdot 2 + 1 - 2 \cdot 2 = -6. \quad (8.3)$$

Puis, avec la proposition précédente pour  $\mathfrak{a} = -\varepsilon = -1$ , on a

$$\dim \mathcal{O}(v) = \frac{4^2}{2} + \frac{1}{2}L = 8 - \frac{1}{2}6 = 5.$$

### 8.1.2 Le théorème

On se place dans le modèle  $\mathcal{M}(\varepsilon, n, r)$  avec  $n$  et  $r$  des entiers avec  $n \geq 2r \geq 1$ , et  $\varepsilon = \pm 1$ . On envisage la paramétrisation du théorème 5.5.4. On introduit la notation, pour un couple de paramètres  $(v, w) \in \mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \times W^P$  :

$$\mathcal{O}(v, w) := Z \cdot \begin{pmatrix} x & & & \\ & 1 & & \\ & & \delta_x^{-1} & \\ & & & \end{pmatrix} w^{-1} B_L \text{ où } x \text{ est n'importe quel élément tel que } xB_r \in \mathcal{O}(v).$$

On étend les résultats précédent aux  $Z$ -orbites de  $G/B$  et on a le théorème suivant.

**Théorème 8.1.9.** Pour des paramètres  $(v, w) \in \mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \times W^P$  et avec  $I := w \{1, \dots, r\}$  et les notations de la proposition 8.1.6, on définit la quantité :

$$c_\varepsilon(v, w) := \frac{1}{2} \left( \sum_{a \in \text{arc}(v)} (\text{inter}_v(a) - 2 \cdot \text{long}(a)) + \sum_{i \in I} (2i - \#([1, i[\cap \bar{I}])) - \varepsilon \#([n/2, n] \cap I) \right),$$

et on a les formules suivantes pour les dimensions :

$$\begin{aligned}
(\varepsilon = 1, n \text{ impair}) : \dim \mathcal{O}(v, w) &= c_\varepsilon(v, w) + \frac{1}{4}(n^2 + 4r^2 - 4nr - 2n + 2r + 1). \\
&\text{Type B} \\
(\varepsilon = -1, n \text{ pair}) : \dim \mathcal{O}(v, w) &= c_\varepsilon(v, w) + \frac{1}{4}(n^2 + 4r^2 - 4nr - 2n + 2r). \\
&\text{Type C} \\
(\varepsilon = 1, n \text{ pair}) : \dim \mathcal{O}(v, w) &= c_\varepsilon(v, w) + \frac{1}{4}(n^2 + 4r^2 - 4nr - 4r). \\
&\text{Type D}
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Rappelons les bijections  $\xi: \mathcal{I}_r^{-\varepsilon} \rightarrow L_Z \setminus (L/B_L)$  et  $\chi: L_Z \setminus (L/B_L) \rightarrow Z \setminus (P.w^{-1}B)$  ( $w \in W^P$ ) décrites dans le théorème 5.5.4 et son diagramme (5.19). Pour tout paramètre  $(v, w)$ , le théorème 4.3.1 donne alors  $\dim \chi_w(\xi(v)) - \dim \xi(v) = \dim P.w^{-1}B - \dim L/B_L = \dim P.w^{-1}B - \dim P.B = \ell(w)$  puisque  $w \in W^P$ . Mais  $\chi_w(\xi(v)) = \mathcal{O}(v, w)$  et d'autre part, la dimension de l'orbite  $\xi(v)$  dans  $L/B_L$  est celle de son antécédent par l'isomorphisme  $(G_r/B_r \times G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r}) \rightarrow L/B_L$  (lemme 5.5.3), soit  $\dim \mathcal{O}(v) + \dim G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r}$ . On en déduit  $\dim \mathcal{O}(v, w) = \dim \mathcal{O}(v) + \ell(w) + \dim G_{\varepsilon, n-2r}/B_{\varepsilon, n-2r}$ . La proposition 8.1.7, la description explicite des groupes classiques en jeu et une lecture graphique de  $w$  donnent alors toutes les formules attendues.  $\square$

**Exemple 8.1.10.** Reprenons une dernière fois l'exemple 8.1.3 précédent. On a  $I := w\{1, \dots, 4\} = \{7, 9, 10, 12\}$  et  $\bar{I} = \{1, 3, 4, 6\}$ . On en déduit :

$$\#([\bar{I}2/2, 12] \cap I) = 4,$$

ainsi que

$$\sum_{i \in I} (2i - \#([\bar{I}1, i[\bar{I}])) = 2 \cdot 7 - 4 + 2 \cdot 9 - 4 + 2 \cdot 10 - 4 + 2 \cdot 12 - 4 = 60.$$

Avec la quantité  $L = -6$  (8.3) trouvée précédemment, on trouve

$$c_1(v, w) = \frac{1}{2}(-6 + 60 - 4) = 25.$$

Comme par ailleurs  $n^2 + 4r^2 - 4nr - 4r = 12^2 + 4^3 - 4 \cdot 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 0$ , on en déduit grâce au théorème :

$$\dim \mathcal{O}(v, w) = 25.$$

## 8.2 Annexe B : Équivalences birationnelles vers les fibres de Springer, type A

Dans cette seconde annexe, on donne un exemple plus concret de notre équivalence birationnelle (3). On l'applique au cas où l'adhérence de la  $Z$ -orbite considérée correspond à une composante irréductible d'une fibre de Springer en type A. Grâce à la paramétrisation de ces composantes par des tableaux de Young (Spaltenstein [Spa82], Fung [Fun03] et Perrin et Smirnov [PS12]), on obtient un morphisme birationnel explicite (théorème 8.2.6). On observe que celui-ci ne fait pas gagner en régularité (proposition 8.2.10), au moyen de résultats connus sur les singularités de ces composantes irréductibles (Fresse et Melnikov [FM10]) et des variétés de Schubert (Lakshmibai [BL00]). Enfin, on propose une description alternative et plus vectorielle de notre équivalence birationnelle (proposition 8.2.16, corollaire 8.2.15).

Insistons sur le fait suivant : comme tout notre travail, les différents résultats proposés ici sont fortement inspirés du travail de Perrin et Smirnov ([PS12]). Seulement, les similitudes sont ici encore plus forte dans la mesure où la situation est à la fois celle exactement investie par les auteurs, et celle à partir de laquelle nous avons cherché des généralisations. L'enjeu de cette section est donc notamment de montrer que les constructions et résultats précédents nous permettent de retrouver, comme cas particuliers, des objets introduits par Perrin et Smirnov selon d'autres voies.

La description que nous proposons dans la dernière sous-section illustre bien cette différence d'approche. Les auteurs définissent une variété  $\hat{X}$  comme sous-variété de drapeaux vectoriels et

à partir de laquelle ils produisent un morphisme birationnel vers une composante irréductible  $X$  d'une fibre de Springer. Ils repèrent alors une variété de Schubert intervenant dans sa construction. De notre côté, nous procédons de manière inverse : nous partons d'une variété de Schubert paramétrée par une certaine permutation  $w_\tau$ , et dont la définition (8.2.3) à partir de la composante  $X$  donnée nous permet d'employer le théorème d'équivalence birationnelle acquis (6.3.4). Par des identifications classiques entre quotients par des sous-groupes de Borel et variétés de drapeaux vectoriels, nous retrouvons alors une variété  $\hat{X}_{w_\tau}$  qui coïncidera avec  $\hat{X}$  dans certaines situations (proposition 8.2.16).

### 8.2.1 Description du morphisme birationnel

Soit donc  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soit  $G$  le groupe linéaire  $Gl(V)$  et  $e$  un endomorphisme de  $V$ , nilpotent d'ordre 2 et de rang  $r$ . Soit encore  $Z$  son centralisateur dans  $G$ . On notera  $\mathcal{F}(V)$  la variété des drapeaux vectoriels et  $\mathcal{F}(V)_e$  celle des drapeaux stables par  $e$ .

#### Définition des objets

Par une base convenable  $(f_i)_i$  (voir aussi théorème 5.4.7) il existe un isomorphisme  $G \simeq G_n = Gl_n$  qui identifie  $e$  et  $Z$  aux données correspondantes  $e_{n,r}$  et  $Z_{n,r}$  du modèle matriciel  $\mathcal{M}(n,r)$ . Désignons alors par  $B, H, B_H, T$  les sous-groupes de  $G$  encore identifié par cet isomorphisme aux groupes  $B_n, H_{n,r}, B_{H_{n,r}}, T_n$ . La forme de  $e_{n,r}$  implique que la base choisie vérifie :

$$\begin{aligned} Im e &= \langle f_1, \dots, f_r \rangle, \\ Ker e &= \langle f_1, \dots, f_{n-r} \rangle, \\ e(f_{n-r+i}) &= f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Posons encore  $\tilde{F} \in \mathcal{F}(V)$  et  $\tilde{F}' \in \mathcal{F}(Im e)$  les drapeaux tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i &= \langle f_1, \dots, f_i \rangle \quad \forall i \in [1, n], \\ \tilde{F}'_i &= \langle f_1, \dots, f_i \rangle \quad \forall i \in [1, r]. \end{aligned}$$

On voit ainsi que le stabilisateur de  $\tilde{F}$  dans  $G$  est exactement le sous-groupe de Borel  $B$  et on a des identifications naturelles :

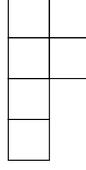
$$G/B \simeq \mathcal{F}(V), \quad \mathcal{B}_e \simeq \mathcal{F}(V)_e.$$

Remarquons par ailleurs que  $H$  s'identifie alors à  $Gl(Im e)$  s'immergeant dans  $Gl(V)$  selon le morphisme  $u \mapsto \psi \circ (u \oplus id_{Ker e} / Im e \oplus u) \circ \psi^{-1}$ , où  $\psi$  est l'isomorphisme  $Im e \oplus Ker e / Im e \oplus Im e \simeq V$  donné par  $Im e \subset V$ ,  $Ker e / Im e \simeq \langle f_{r+1}, \dots, f_{n-r} \rangle \subset V$  et  $Im e \hookrightarrow V, f_i \mapsto f_{n-r+i}$ . Sous cet isomorphisme,  $H$  agit naturellement sur  $Im e$  et on voit alors aussi que le stabilisateur de  $\tilde{F}'$  dans  $H$  est exactement le sous-groupe de Borel  $B_H$ . On a encore une identification naturelle :

$$H/B_H \simeq \mathcal{F}(Im e).$$

Enfin, le groupe de Weyl  $W$  de  $G$  relatif à  $T$  s'identifie facilement au moyen de cette base à  $\mathfrak{S}_n = W_n$  ; on comprendra donc ses éléments comme des permutations et on pourra les faire agir sur  $V, Gl(V)$ , et  $\mathcal{F}(V)$ .

**Tableaux de Young** Comme pour tout endomorphisme nilpotent, on associe à la classe de conjugaison de  $e$  un diagramme de Young  $\lambda := \lambda(e)$  de taille  $n$ . On le base ici sur le coin supérieur gauche, la longueur des lignes étant la taille des blocs de Jordan, celle des colonnes la dimension graduée des noyaux itérés. Dans notre cas, on a donc simplement deux colonnes de taille respective  $n-r$  et  $r$ , soit par exemple pour  $n=6, r=2$  :



On introduit alors la notion suivante :

**Définition 8.2.1.** <sup>1</sup> *Un tableau de Young  $\tau$  de forme  $\lambda$  ou associé à  $e$  est une bijection  $\lambda \rightarrow [1, n]$  telle que les nombres assignés aux différentes cases décroissent de gauche à droite sur chaque ligne et décroissent de haut en bas sur chaque colonne. Le **cotableau de Young**  $\tau^*$  de  $\tau$  est la composée de  $\tau$  avec  $i \mapsto \bar{i} = n - i + 1$ .*

On représente graphiquement tableaux et cotableaux. Pour un tableau de Young  $\tau$ , l'on note  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$  les nombres de la seconde colonne. On ajoute  $p_0 := 0$  et  $p_{r+1} = n + 1$  et on a :

$$\tau = \begin{array}{|c|c|} \hline n & p_r \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \cdot & p_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad \tau^* = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \bar{p}_r \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline \cdot & \bar{p}_1 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline n & \\ \hline \end{array}$$

Relativement à  $\tau$ , on définit les variétés suivantes :

$$X_\tau^0 := \{F \in \mathcal{F}(V)_e \mid \dim \text{Im } e \cap F_i = k, k \in [0, r], i \in [p_k, p_{k+1}]\},$$

$$X_\tau := \overline{X_\tau^0}.$$

Perrin et Smirnov ([PS12]) proposent la reformulation suivante des résultats de Spaltenstein ([Spa82]) puis Fung ([Fun03]) :

**Théorème 8.2.2.**  *$X_\tau$  est une composante irréductible de  $\mathcal{F}(V)_e$  et toutes les composantes sont obtenues de cette manière (en faisant varier les tableaux de Young de même forme  $\lambda$ ).*

**Élément  $w_\tau$**  Pour chaque tableau de Young  $\tau$  associé à  $e$ , nous construisons et définissons une permutation  $w_\tau$  de la manière suivante.

La définition de cet élément repose sur la satisfaction des conditions suivantes, qui se trouvent être suffisantes pour qu'une permutation  $w$  puisse donner lieu à l'équivalence birationnelle ci-après (8.5)(voir théorème 8.2.6) :

1.  $w^{-1}$  est strictement croissant sur  $\{1, \dots, r\}$ , strictement décroissant sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  (il s'agit de pouvoir appliquer le théorème 6.3.4, fournissant une équivalence birationnelle (6.2)).
2.  $w\tilde{F}$  appartient à  $X_\tau$  (cela assure que l'image  $\overline{Z \cdot wB} \simeq \overline{Z \cdot w\tilde{F}}$  du précédent morphisme 6.2 est incluse dans  $X_\tau$ ).
3.  $\ell(w) = \binom{n-r}{2}$  (cela assure une égalité de dimensions  $\dim \overline{Z \cdot wB} = \dim X_\tau$ , forçant l'égalité dans l'inclusion précédente.)

En revanche, nous ne savons pas si de telles conditions caractérisent univoquement l'élément  $w$  qui les satisfait.

<sup>1</sup>. Nous donnons ici les deux définitions duales, dans la mesure où les deux se trouvent dans la littérature (voir [PS12] pour le tableau, [FM10] pour le cotableau par exemple).

**Définition 8.2.3** ( $w_\tau$ ). • On définit des entiers  $q_1, \dots, q_r$  et  $s_1, \dots, s_{n-2r}$  de la manière suivante :

- $q_r := p_r + 1 = \min(p_r + 1, \dots, n)$  et par récurrence décroissante sur  $i = r - 1 \dots 1$ ,  $q_i := \min(\{p_i + 1, \dots, n\} \setminus \{p_{i+1}, q_{i+1}, \dots, p_r, q_r\})$ .
- $\{s_1, \dots, s_{n-2r}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{p_1, q_1, \dots, p_r, q_r\}$  avec  $s_i < s_{i+1}$ .

• On définit et on notera alors  $w_\tau$  l'unique permutation de  $\{1, \dots, n\}$  telle que :

- $w_\tau(p_i) := i, \forall i \in \{1, \dots, r\}$ .
- $w_\tau(q_i) := n - r + i, \forall i \in \{1, \dots, r\}$ .
- $w_\tau(s_j) := n - r + 1 - j, \forall j \in \{1, \dots, n - 2r\}$ .

$w_\tau$  induit donc notamment la bijection strictement croissante de  $\{p_1, \dots, p_r\}$  vers  $\{1, \dots, r\}$  et celle strictement décroissante de  $\{s_1, \dots, s_{n-2r}\}$  vers  $\{r + 1, \dots, n - r\}$ .

Donnons des exemples de l'élément  $w_\tau$  obtenu en fonction du tableau  $\tau$  choisi.

**Exemple 8.2.4.**

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \tau^* := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad w_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \\
 \\
 \text{b) } \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 4 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \tau^* := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \quad w_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}. \\
 \\
 \text{c) } \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 5 \\ \hline 6 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \tau^* := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & \\ \hline \end{array}, \quad w_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

**Proposition 8.2.5.** La longueur de  $w_\tau$  est  $\binom{n-r}{2}$ .

*Démonstration.* On considère les entiers  $\{p_k\}$  et  $\{q_l\}$  de la définition 8.2.3 précédente et notons  $w := w_\tau$ . Désignons par  $\mathcal{I}$  l'ensemble des couples formant une inversion pour  $w$ , et dont le cardinal est exactement  $\ell(w)$  :

$$\mathcal{I} := \{1 \leq i < j \leq n \mid w(i) > w(j)\}.$$

Posons alors les sous-ensembles de  $\mathcal{I}$  décrits de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 A &:= \{i \text{ et } j \notin \{p_k\} \cup \{q_l\}\}, \\
 B &:= \{i \in \{p_k\}\}, \\
 C &:= \{i \notin \{p_k\}, j \in \{p_k\}\}, \\
 D &:= \{i \notin \{p_k\} \cup \{q_l\}, j \in \{q_l\}\}, \\
 E &:= \{i \in \{q_l\}, j \notin \{p_k\}\}.
 \end{aligned}$$

Clairement, on a la partition :

$$\mathcal{I} = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D \sqcup E.$$

Puisque  $w$  est strictement décroissante sur  $[1, n] - \{p_k, q_l \mid k, l \in [1, r]\}$ , on a directement

$$\#A = \binom{n-2r}{2}.$$

D'autre part, comme  $p_1 < \dots < p_r$  et que les images des  $p_k$  par  $w$  sont les  $r$  plus petits entiers de  $[1, n]$ , on trouve facilement

$$B = \emptyset,$$

ainsi que  $\#C = \sum_{i=1}^r (p_i - i)$ , soit

$$\#C = \sum_{i=1}^r p_i - \binom{r+1}{2}.$$

De même, puisque les images des  $q_l$  par  $w$  sont les  $r$  plus grand entiers de  $[1, n]$ , on trouve

$$D = \emptyset.$$

Par cette même remarque, hors les éléments de  $\{p_k\}$  et certains de  $\{q_l\}$ , tous les entiers supérieurs à un  $q_l$  donné ont une image par  $w$  inférieure à  $w(q_l)$ . On en déduit

$$\#E = \sum_{i=1}^r \left( n - q_i - \sum_{j=1}^r \mathbf{1}_{p_j > q_i} - \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i} \right).$$

Mais la définition des  $q_l$  montre que pour tout  $k \leq l$ , on a  $p_k \leq p_l < q_l$ . En outre, pour tout  $i < j$ , on a l'équivalence :

$$p_j > q_i \Leftrightarrow q_j > q_i. \quad (8.4)$$

L'implication directe vient de ce que l'on a toujours  $q_j > p_j$ . D'autre part, si  $p_j < q_i$ , alors  $q_j < q_i$  par définition de  $q_j$ , et on a l'implication réciproque par contraposée. Ces remarques permettent de préciser le dernier cardinal

$$\#E = nr - \sum_{i=1}^r q_i - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i}.$$

Enfin, pour tout  $i \in [1, r]$ , on peut calculer la différence  $q_i - p_i$ . La définition de  $q_i$  impose en effet qu'il est immédiatement consécutif à  $p_i$ , à moins que celui-ci ne soit suivi d'autres éléments de  $\{p_k\}$ . Dans ce dernier cas, en posant  $t := \max \{ k > i \mid p_k = p_{k-1} + 1 \}$ , la définition des  $q_t, \dots, q_i$  montre que l'on a une succession d'éléments de  $\{p_k\}$  puis de  $\{q_l\}$  :  $p_i < p_{i+1} = p_i + 1 < \dots < p_t = p_{t-1} + 1 < q_t = p_t + 1 < \dots < q_{i+1} = q_i - 1 < q_i$ . On en déduit  $q_i - p_i = 2(t - i + 1) - 1$ . Mais l'équivalence (8.4) montre que les éléments de la forme  $q_j$  avec  $j > i$  et  $q_j < q_i$  sont nécessairement situés entre  $p_i$  et  $q_i$ . On a donc  $t = i + \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j < q_i} = i + \sum_{j=i+1}^r (1 - \mathbf{1}_{q_j > q_i}) = r - \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i}$ . Ainsi :

$$q_i - p_i = 2(r - i + 1) - 1 - 2 \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i}.$$

On peut maintenant conclure :

$$\begin{aligned} \ell(w) &= \#\mathcal{I} = \#A + \#B + \#C + \#D + \#E \\ &= \binom{n-2r}{2} + 0 + \sum_{i=1}^r p_i - \binom{r+1}{2} + 0 + nr - \sum_{i=1}^r q_i - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i} \\ &= \binom{n-2r}{2} - \binom{r+1}{2} + nr - \sum_{i=1}^r (q_i - p_i) - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i} \\ &= \binom{n-2r}{2} - \binom{r+1}{2} + nr - 2 \sum_{i=1}^r (r - i + 1) + \sum_{i=1}^r 1 + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i} - 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \mathbf{1}_{q_j > q_i} \\ &= \binom{n-2r}{2} - 3 \binom{r+1}{2} + nr + r \\ &= \binom{n-r}{2}. \end{aligned}$$

□

### Le théorème

On peut maintenant énoncer le théorème attendu.

**Théorème 8.2.6.** *Soit  $\tau$  un tableau de Young associé à  $e$ . Alors le morphisme naturel  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot w_\tau B} \rightarrow G/B \simeq \mathcal{F}(V)$  se factorise en un morphisme birationnel surjectif projectif  $Z$ -équivariant :*

$$\begin{aligned} H \times^{B_H} \overline{B \cdot w_\tau B} &\rightarrow X_\tau \\ [h, gB] &\mapsto hg\tilde{F}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

*Démonstration.* Puisque  $w_\tau^{-1}$  est strictement décroissant sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$  et strictement croissante sur  $\{1, \dots, r\}$ , par le théorème 6.3.4 et l'identification issue du choix de la base  $(f_i)_i$ , on a :

$$H \times^{B_H} \overline{B \cdot w_\tau B} \rightarrow \overline{Z \cdot w_\tau B} \quad (8.6)$$

est birationnel surjectif projectif  $Z$ -équivariant. Avec la définition de  $B$  et l'identification  $G/B \simeq \mathcal{F}(V)$  qui en découle, il suffit donc de montrer que  $\overline{Z \cdot w_\tau \tilde{F}} = X_\tau$ .

Mais on a rapidement l'inclusion  $Z \cdot w_\tau \tilde{F} \subset X_\tau$ . En effet, on a  $w\tilde{F} = (\langle f_{w_1}, \dots, f_{w_i} \rangle)_i$ . Or la définition de  $w$  assure que  $\dim \text{Im } e \cap w\tilde{F}_i$  reste constante égale à  $k$  pour  $i$  variant dans  $\{p_k, \dots, p_{k+1}-1\}$ . En outre, puisque  $\text{Ker } e = \langle f_1, \dots, f_{n-r} \rangle$  et que  $w^{-1}\{n-r+1, \dots, n\} = \{q_1, \dots, q_r\}$  on a pour tout  $i : e(w\tilde{F}_i) = \langle e(f_{w_{q_1}}), \dots, e(f_{w_{q_i}}) \rangle = \langle f_1, \dots, f_l \rangle = w\langle f_{p_1}, \dots, f_{p_l} \rangle$  avec un certain  $l \leq r$  tel que  $q_l \leq i$  d'où aussi  $p_l \leq i$ . On en déduit  $w_\tau \tilde{F} \subset X_\tau^0$  puis l'inclusion souhaitée par stabilité de  $X_\tau^0$  sous  $Z$ .

Par ailleurs, puisque le morphisme (8.6) est birationnel, que  $H \simeq \text{Gl}_r$  et que  $\ell(w_\tau) = \binom{n-r}{2}$  par la proposition 8.2.5, on a  $\dim Z \cdot w_\tau \tilde{F} = \dim H \times^{B_H} \overline{B \cdot w_\tau B} = \dim H/B_H + \ell(w_\tau) = \binom{r}{2} + \binom{n-r}{2}$ . Mais d'autre part, on a clairement  $\dim Z = r^2 + (n-r)^2$  et  $\text{rang } G = n$ , de sorte que par (1), on trouve  $\dim X_\tau = \dim \mathcal{B}^e = (\dim Z - \text{rang } G)/2 = (r^2 + (n-r)^2 - n)/2 = (r^2 - r + (n-r)^2 - (n-r))/2 = \binom{r}{2} + \binom{n-r}{2}$ . L'inclusion précédente est donc une égalité par irréductibilité et égalité de dimensions. On a le résultat souhaité.  $\square$

### 8.2.2 Étude de singularité

Soit les mêmes données que la sous-section précédente. On s'intéresse ici au lien entre la régularité de la cible et de la source du morphisme birationnel (8.5).

#### Singularités connues

**Singularités de la variété de Schubert** Le cas de la variété source de (8.5) revient à celui d'une variété de Schubert, et on rappelle le résultat (voir [BL00]) :

**Théorème 8.2.7.** *Soit  $w$  une permutation. Alors  $\overline{B \cdot wB}$  est singulière si et seulement si  $w$  contient le motif 3412 ou 4231, c'est-à-dire s'il existe  $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$  tels que  $w(i_3) < w(i_4) < w(i_1) < w(i_2)$  ou  $w(i_4) < w(i_2) < w(i_3) < w(i_1)$ .*

Pour  $w_\tau$  une permutation associée à un tableau de Young  $\tau$ , on en déduit une condition suffisante de singularité pour la variété de Schubert correspondante.

**Proposition 8.2.8.** *S'il existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $i < p_{i-1} + 1 < p_i + 1 < p_{i+1} < n-1$  alors  $\overline{B \cdot w_\tau B}$  est singulière.*

*Démonstration.* Sous ces hypothèses,  $w_\tau$  contiendra le motif 3412 au moyen de l'existence de  $a, b$  tels que  $a < p_i + 1 < p_{i+1} < b$  et  $w(p_{i+1}) = i+1 < w(b) < w(a) < w(p_i + 1) = w(q_i) = n-i+1$ . En effet, la condition  $p_{i+1} < n-1$  assure l'existence d'un  $b$  parmi les  $\{p_j\}_{j>i+1}$  ou les  $\{s_j\}$ , avec  $p_{i+1} < b$ . Dans tous les cas, on aura donc  $w(p_{i+1}) < w(b)$ . Mais la condition  $i < p_{i-1} + 1$  fournit l'existence de  $a < p_i + 1$  parmi les  $\{s_j\}$ . Et la condition  $p_i + 1 < p_{i+1}$  implique  $p_i + 1 = q_i$ . On aura donc  $w(a) < w(p_i + 1) = w(q_i) = n-i+1$ . Enfin, soit que  $b$  soit l'un des  $\{s_j\}$ , soit l'un des  $\{p_j\}_{j>i+1}$ , on aura toujours  $w(b) < w(a)$  puisque  $a < b$  ( $a < p_i + 1 < p_{i+1} < b$ ).  $\square$

**Singularités de la composante irréductible** Le cas de la composante irréductible de la fibre de Springer formant la variété cible est également connu dans notre situation grâce à un travail de Melnikov et Fresse ([FM10]). Nous l'exposons brièvement.

Soit  $\tau$  un tableau de Young associé à  $e$ . Soit  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-r}$  (respectivement  $b_1 < \dots < b_r$ ) les nombres de la première (resp. seconde) colonne du cotaureau  $\tau^*$ . On pose  $c_1 = b_1 - 1$  puis par récurrence croissante sur  $i = 2, \dots, r$ ,  $c_i := \max \{ a \in \{ a_1, \dots, a_{n-r} \} \setminus \{ c_1, \dots, c_{i-1} \}; a < b_i \}$ . On définit alors  $\sigma_\tau$  la permutation de  $\{ 1, \dots, n \}$  donnée par :

$$\sigma_\tau := (b_1 c_1) \dots (b_r c_r).$$

Enfin, on pose encore l'entier :

$$m_\tau := |\{ 1 \leq i \leq n \mid i \text{ est dans la colonne de gauche et } i + 1 \text{ dans la colonne de droite de } \tau^* \}|.$$

On a alors le théorème (Théorème 1.2 [FM10]).

**Théorème 8.2.9** (Fresse, Melnikov). 1. Si  $m_\tau = 1$ ,  $X_\tau$  est lisse.

2. Si  $m_\tau = 2$ ,  $X_\tau$  est lisse si et seulement si  $\sigma_\tau(1) \neq 1$  ou  $\sigma_\tau(n) \neq n$ .

3. Si  $m_\tau = 3$ ,  $X_\tau$  est lisse si et seulement si  $\sigma_\tau(1) \neq 1$  et  $\sigma_\tau(n) \neq n$  et  $\sigma_\tau(1) \neq n$ .

4. Si  $m_\tau \geq 4$ ,  $X_\tau$  est singulière.

**Lien entre la régularité des variétés**

De ce qui précède, on déduit l'implication :

**Proposition 8.2.10.** Si  $X_\tau$  est singulière, alors c'est aussi le cas de  $\overline{B \cdot w_\tau B}$ .

*Démonstration.* Supposons  $X_\tau$  singulière. Appelons "saut" le fait que deux nombres de  $\tau$  ou  $\tau^*$  situés dans deux cases l'une au dessus de l'autre ne sont pas consécutifs. Le théorème 8.2.9 assure que l'on se situe dans l'un des deux cas suivants.

$\begin{matrix} m_\tau=2 \\ \sigma_\tau(n)=n \end{matrix}$  Dans ce cas, la définition de  $m_\tau$  montre qu'il y a deux "sauts" dans la seconde colonne de  $\tau^*$  ou alors un seul "saut" et le nombre situé dans la case supérieure de cette colonne est différent de 1. En passant à  $\tau$ , on en déduit l'existence de  $i$  tel que  $p_i + 1 < p_{i+1} < n - 1$ . Qui plus est, puisque  $\sigma_\tau(n) = n$ ,  $n$  ne peut être dans la seconde colonne. Il vient que 1 ne peut être l'un des  $p_k$  et on a  $\{ 1, \dots, p_{i-1} \} \notin \{ p_1, \dots, p_{i-1} \}$ .

$m_\tau \geq 3$  Dans ce cas, par un raisonnement analogue au précédent, il existe  $j < i$  tels que  $p_j + 1 < p_{j+1} < p_i + 1 < p_{i+1} < n - 1$ . On trouve en particulier  $p_i + 1 < p_{i+1} < n - 1$  et  $p_j + 1 \in \{ 1, \dots, p_{i-1} \} - \{ p_1, \dots, p_{i-1} \}$ .

Par la proposition 8.2.8, les conditions trouvées dans chacun des cas montrent que  $\overline{B \cdot w_\tau B}$  est singulière. □

L'implication est stricte, ainsi que le montrent l'étude suivante de nos précédents exemples. Nous observons aussi que toutes les autres situations peuvent se produire.

**Exemple 8.2.11.**

a)  $\overline{B \cdot w_\tau B}$  et  $X_\tau$  lisses :

$$\tau = \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \tau^* := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}, \quad w_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \overline{B \cdot w_\tau B} \text{ et } X_\tau \text{ singulières : } & \quad \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 4 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \tau^* := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \quad w_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}. \\
\text{c) } \overline{B \cdot w_\tau B} \text{ singulière et } X_\tau \text{ lisse : } & \quad \tau = \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 5 \\ \hline 6 & 4 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}, \quad \tau^* := \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & \\ \hline \end{array}, \quad w_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### 8.2.3 Autre expression de l'équivalence birationnelle

Pour étudier plus finement le morphisme birationnel (8.5), il pourra être intéressant d'en avoir une autre expression. Ceci sera permis par une identification de la variété source  $H \times^{B_H} \overline{B \cdot w_\tau B}$  avec une variété définie en terme d'incidence sur les drapeaux vectoriels, de manière analogue à ce qui a pu être obtenu pour les composantes irréductibles des fibres de Springer  $X_\tau$ .

#### Description vectorielle du produit contracté source

La description que nous proposons est issue de l'article [PS12] et imite la variété  $\hat{X}$  posée par les auteurs. Dans certaines situations, elle lui sera même égale (proposition 8.2.16), mais des cas se présenteront où elle sera irréductible au contraire de  $\hat{X}^2$  (voir remarque 8.2.17).

Commençons par rappeler une description vectorielle de la variété de Schubert paramétrée par une permutation  $w$ , c'est-à-dire l'image de  $\overline{B \cdot wB}$  dans  $\mathcal{F}(V)$  sous l'identification  $G/B \simeq \mathcal{F}(V)$ . Pour  $w \in W$ , et  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , on note :

$$d_{ij}^w := \#\{1, \dots, i\} \cap \{w(1), \dots, w(j)\}.$$

On a alors :

**Proposition 8.2.12.** *Soit  $w \in W$ . Alors l'image  $\overline{B \cdot w\tilde{F}}$  dans  $\mathcal{F}(V)$  de la variété de Schubert  $B \cdot wB$  admet la description suivante :*

$$\overline{B \cdot w\tilde{F}} = \{ F \in \mathcal{F}(V) \mid \dim F_i \cap \tilde{F}_j \geq d_{ij}^w, \quad i, j \in [1, n] \}$$

*Démonstration.* Désignons par  $Y$  la variété proposée dans l'énoncé. Clairement  $Y$  est  $B$ -stable, c'est donc une réunion d'orbites. Si  $v \in W$  avec  $v\tilde{F} \in Y$ , alors pour tout  $i, j \in [1, n]$ ,  $d_{ij}^v \geq d_{ij}^w$ , ce qui implique  $v \leq w$  pour l'ordre de Bruhat. La description des orbites par la décomposition de Bruhat donne ainsi  $Y \subset \bigcup_{v \leq w} B \cdot v\tilde{F} = \overline{B \cdot w\tilde{F}}$ . Mais la définition des  $d_{ij}^w$  donne clairement  $w\tilde{F} \in Y$  de sorte que  $B \cdot w\tilde{F} \subset Y$ . On conclut en remarquant que  $Y$  est fermée par la semi-continuité supérieure des applications du type  $A \mapsto \dim A \cap E$ ,  $E$  étant un sous-espace vectoriel fixé.  $\square$

Pour  $w \in W$ , posons maintenant :

$$\hat{X}_w := \left\{ (F', F) \in \mathcal{F}(ImN) \times \mathcal{F}(V) \mid \begin{array}{l} \dim F'_i \cap F_j \geq d_{ij}^w, \\ \dim e^{-1}(F'_i) \cap F_j \geq d_{(n-r+i)j}^w \end{array} \quad \forall (i, j) \in [1, r] \times [1, n] \right\}. \quad (8.7)$$

Cette sous-variété de  $\mathcal{F}(ImN) \times \mathcal{F}(V)$  apparaît clairement invariante sous l'action diagonale de  $H$  et la projection sur la première coordonnée  $\hat{X}_w \rightarrow \mathcal{F}(Im e)$  est  $H$ -équivariante. On a :

**Proposition 8.2.13.** *Soit  $w \in W$  tel que  $w^{-1}$  est strictement décroissante sur  $\{r+1, \dots, n-r\}$ . Alors :*

$$\hat{X}_w \simeq H \times^{B_H} \overline{B \cdot wB}$$

comme  $H$ -variétés équivariantes au-dessus de  $\mathcal{F}(Im e) \simeq H/B_H$ . En particulier,  $\hat{X}_w$  est irréductible de dimension  $\binom{r}{2} + \ell(w)$ .

2. Signalons que les auteurs pallient à cette difficulté en considérant une composante irréductible appropriée.

*Démonstration.* Compte tenu du propos qui précède l'énoncé et de la proposition 2.3.15, il suffit de montrer que la projection  $H$ -équivariante sur la première coordonnée  $q : \hat{X}_w \rightarrow \mathcal{F}(Im e)$  possède une fibre au dessus de  $\tilde{F}'$  qui s'identifie à la variété de Schubert  $\overline{B} \cdot w\overline{B}$ . Nous allons montrer que  $q^{-1}(\tilde{F}') = \{ F \in \mathcal{F}(V) \mid \dim \tilde{F}_i \cap F_j \geq d_{ij}^w, i, j \in [1, n] \}$  ce qui donnera le résultat attendu grâce à la proposition 8.2.12.

On voit que pour tout  $i \in [1, r]$ , on  $e^{-1}(\tilde{F}'_i) = \tilde{F}_{n-r+i}$ . Aussi, on a clairement l'identification :

$$q^{-1}(\tilde{F}') \simeq \{ F \in \mathcal{F}(V) \mid \dim \tilde{F}_i \cap F_j \geq d_{ij}^w, (i, j) \in [1, r] \sqcup [n-r+1, n] \times [1, n] \}.$$

Mais on a  $Im e = \tilde{F}_r \subset \tilde{F}_i \subset Ker N = \tilde{F}_{n-r}$  pour tout  $i \in [r+1, n]$ , ainsi que  $\dim Im e \cap F_j \geq d_{rj}^w$  et  $\dim F_j \cap Ker e \geq d_{n-r, j}^w$  pour tout  $j \in [1, n]$  et  $F$  dans la fibre. Le lemme suivant permet alors de conclure.  $\square$

**Lemme 8.2.14.** *Soit  $w$  comme précédemment. Soit  $F \in \mathcal{F}(E)$  avec  $\dim Im e \cap F_j \geq d_{rj}^w$  et  $\dim Ker e \cap F_j \geq d_{n-r, j}^w$  pour tout  $j \in [1, n]$ . Alors, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $a$  avec  $Im e \subset A \subset Ker e$ , on a  $\dim A \cap F_j \geq d_{aj}^w$  pour tout  $j \in [1, n]$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que pour  $j \in [1, n]$  et  $x \in [0, n-2r+1]$  on a l'égalité d'ensembles :

$$I_j(x) := \{w(1), \dots, w(j)\} \cap [r+1, n-r-x] = [n-r-\#I_j(x)+1, n-r-x] \quad (8.8)$$

La stricte décroissance de  $w^{-1}$  sur  $[r+1, n-r]$  donne en effet :

$$\begin{aligned} I_j(x) &= w(\{1, \dots, j\} \cap \{w^{-1}(n-2r-x) < \dots < w^{-1}(2) < w^{-1}(1)\}) \\ &= w(\{w^{-1}(n-2r-x) < \dots < w^{-1}(n-r-\#I_j(x)+1)\}) \\ &= \{n-r-x > n-r-x-1 > \dots > n-r-\#I_j(x)+1\}. \end{aligned}$$

Fixons maintenant  $j \in [1, n]$  et posons  $d := \dim A \cap V_j$  ainsi que  $b := \#I_j(0)$ . On a clairement  $d \geq \dim Im e \cap V_j \geq d_{rj}^w$  mais aussi  $d \geq \dim Ker e \cap V_j - (\dim Ker e - a) \geq d_{n-r, j}^w - (n-r-a)$  puisque  $Ker e \cap V_j/A \cap V_j$  s'injecte dans  $Ker e/A$ . On a donc  $d \geq \max(d_{rj}^w, d_{n-r, j}^w - (n-r-a))$ . Mais  $d_{n-r, j}^w = \#[1, n-r] \cap \{w_1, \dots, w_j\} = \#[1, r] \cap \{w_1, \dots, w_j\} + \#[r+1, n-r] \cap \{w_1, \dots, w_j\} = d_{rj}^w + b$ . Finalement,  $d \geq d_{rj}^w + \max(0, b - n + r + a)$ . Une décomposition analogue à celle qui précède donne encore  $d_{aj}^w = d_{rj}^w + \#\{w(1), \dots, w(j)\} \cap [r+1, a] = d_{rj}^w + \#I_j(n-r-a)$ . Il nous suffit donc de montrer l'égalité  $\max(0, b - n + r + a) = \#I_j(n-r-a)$ .

Si  $b - n + r + a \leq 0$ , alors  $a < n - r - b + 1$ . Par (8.8) les ensembles  $I_j(n-r-a)$  et  $I_j(0)$  sont alors disjoints bien que  $I_j(n-r-a) \subset I_j(0)$ . Ceci implique  $\#I_j(n-r-a) = 0$  et l'égalité voulue dans ce cas.

Si  $b - n + r + a \geq 0$ , alors par (8.8) encore, on a  $I_j(n-r-a) = I_j(0) \cap ]-\infty, a] = [n-r-b+1, a]$  et  $\#I_j(n-r-a) = a - n + r + b$ . On a encore l'égalité dans ce cas.

On a la conclusion souhaitée :  $d \geq d_{aj}^w$ .  $\square$

### Lien avec l'équivalence birationnelle précédente

Soit maintenant  $\tau$  un tableau de Young associé à  $e$ . On note  $\hat{X}_\tau := \hat{X}_{w_\tau}$ . Ce qui précède donne immédiatement le corollaire suivant du théorème 8.2.6 :

**Corollaire 8.2.15.** *La projection sur la seconde coordonnée fournit un morphisme birationnel surjectif projectif  $Z$ -équivariant :*

$$\hat{X}_\tau \rightarrow X_\tau. \quad (8.9)$$

La surjectivité de 8.9 permet alors d'avoir une autre description vectorielle de la composante irréductible de la fibre de Springer  $X_\tau$ . Nous l'exposons dans un cas particulier avec la proposition suivante.

**Proposition 8.2.16.** *On suppose que les  $p_i$  ne sont pas consécutifs, i.e.  $p_{i+1} > p_i + 1$  pour tout  $i$ . Alors on a :*

$$\begin{aligned}\hat{X}_\tau &= \{(F', F) \in \mathcal{F}(Im\ e) \times \mathcal{F}(E) \mid F'_i \subset F_{p_i} \subset e^{-1}(F'_{i-1}) \ \forall i \in [1, r]\} \\ X_\tau &= \{F \in \mathcal{F}(E) \mid \dim F_{p_i} \cap Im\ e \geq i, \dim F_{p_i} \cap Ker\ e \geq p_i - i + 1, F_{p_i} \subset e^{-1}(F_{p_{i-1}}), \forall i \in [1, r]\}.\end{aligned}$$

*Démonstration.* Désignons par  $p$  la surjection (8.9). Lorsque les  $p_i$  ne sont jamais consécutifs, on voit que les conditions de dimensions dans la définition initiale de  $\hat{X}_\tau$  se réduisent à celles où l'on considère les espaces  $F'_i, F_{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ; ce qui donne la première égalité. Pour la seconde, posons  $Y$  qui correspond au membre de droite. Montrons tout d'abord  $X_\tau \subset Y$ . Comme  $Y$  est clairement fermée, il suffit d'avoir  $X_\tau^0 \subset Y$ . Mais si  $F \in X_\tau^0$ , alors on a rapidement pour tout  $i$ ,  $\dim F_{p_i} \cap Im\ e \geq i$  et  $F_{p_i} \subset e^{-1}(F_{p_{i-1}})$ . Il suit que  $F_{p_i}$  et  $Ker\ e$  sont dans  $e^{-1}(F_{p_{i-1}})$  de dimension  $\dim F_{p_{i-1}} \cap Im\ e + \dim Ker\ e$  soit  $i-1+n-r$ , de sorte que  $\dim F_{p_i} \cap Ker\ e \geq p_i - i + 1$  et on a bien  $F \in Y$ . Réciproquement, soit  $F \in Y$ . On construit un drapeau  $F'$  tel que  $(F', F) \in \hat{X}_\tau$  de sorte que  $F = p(F', F) \in p(\hat{X}_\tau) = X_\tau$ . Par récurrence sur  $k = 0, \dots, r$ , on pose  $F'_r := Im\ e$ ,  $F'_{r+1} = V$  et on suppose construits  $F'_r \supset F'_{r-1} \supset \dots \supset F'_{r-k}$  avec pour tout  $i \in [0, k]$ ,  $\dim F'_{r-i} = r-i$  et  $e(F'_{p_{r-i+1}}) \subset F'_{r-i} \subset F_{p_{r-i}} \cap F'_{r-i+1}$ . En utilisant la description de  $Y$ , on a  $\dim e(F'_{p_{r-i}}) = \dim F_{p_{r-i}} - \dim F_{p_{r-i}} \cap Ker\ e \geq r-i-1$ . De plus,  $e(F'_{p_{r-i}}) \subset F_{p_{r-i-1}}$  et  $e(F_{p_{r-i}}) \subset e(F_{p_{r-i+1}}) \subset F'_{r-i}$  par hypothèse de récurrence, de sorte que  $e(F_{p_{r-i}}) \subset F_{p_{r-i-1}} \cap F'_{r-i}$ . Enfin,  $\dim F_{p_{r-i-1}} \cap F'_{r-i} \geq \dim F_{p_{r-i-1}} + \dim F'_{r-i} - \dim F_{p_{r-i}} \geq r-i-1$ . On peut donc construire  $F'_{r-i-1}$  avec  $\dim F'_{r-i-1} = r-i-1$  et  $e(F_{p_{r-i}}) \subset F'_{r-i-1} \subset F_{p_{r-i-1}} \cap F'_{r-i}$ ; on prouve ainsi l'hérédité. Le drapeau  $F'$  obtenu satisfait alors en particulier  $F' \in \mathcal{F}(Im\ e)$  et  $F'_i \subset F_{p_i} \subset e^{-1}(F'_{i-1})$  pour tout  $i \in [1, r]$  et on a bien  $(F', F) \in \hat{X}_\tau$ .  $\square$

**Remarque 8.2.17.** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, notre variété  $\hat{X}_\tau$  coïncide ainsi avec la variété  $\hat{X}$  définie par Perrin et Smirnov. On peut décrire leur dissemblance par le fait suivant. La variété  $\hat{X}$  de Perrin et Smirnov est irréductible si et seulement si pour tout  $i$  dans  $[m, M-1]$ ,  $p_i$  et  $p_{i+1}$  ne sont pas consécutifs, avec  $m := \min\{k \mid p_k \neq k\}$  et  $M := \max\{k \mid p_k \neq n-r-1+k\}$ .*



# Bibliographie

- [AM16] Michael Francis ATIYAH et Ian Grant MACDONALD. *Introduction to commutative algebra*. English. Boulder : Westview Press, 2016, p. ix + 128. ISBN : 978-0-8133-5018-9; 978-0-8133-4544-4.
- [BL00] Sara BILLEY et Venkatramani LAKSHMIBAI. *Singular loci of Schubert varieties*. English. T. 182. Boston, MA : Birkhäuser, 2000, p. xii + 251. ISBN : 3-7643-4092-4.
- [Bor91] Armand BOREL. *Linear algebraic groups*. English. T. 126. New York etc. : Springer-Verlag, 1991, p. x + 288. ISBN : 0-387-97370-2.
- [BB85] Walter BORHO et Jean-Luc BRYLINSKI. “Differential operators on homogeneous spaces. III : Characteristic varieties of Harish Chandra modules and of primitive ideals”. English. In : *Invent. Math.* 80 (1985), p. 1-68. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01388547](https://doi.org/10.1007/BF01388547).
- [BLR90] Siegfried BOSCH, Werner LÜTKEBOHMERT et Michel RAYNAUD. *Néron models*. English. T. 21. Berlin etc. : Springer-Verlag, 1990, p. x + 325. ISBN : 3-540-50587-3.
- [BK05] Michel BRION et Shrawan KUMAR. *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*. English. T. 231. Boston, MA : Birkhäuser, 2005, p. x + 250. ISBN : 0-8176-4191-2.
- [CFG20] Pierre-Emmanuel CHAPUT, Lucas FRESSE et Thomas GOBET. “Parametrization, structure and Bruhat order of certain spherical quotients”. 42 pages, 2 figures, 22 ref. Juin 2020. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02940897>.
- [CG10] Neil CHRISS et Victor GINZBURG. *Representation theory and complex geometry*. English. Boston, MA : Birkhäuser, 2010, p. x + 495. ISBN : 978-0-8176-4937-1; 978-0-8176-4938-8. DOI : [10.1007/978-0-8176-4938-8](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4938-8).
- [Con] Brian CONRAD. “Reductive group schemes”. URL : <http://math.stanford.edu/~conrad/papers/luminysga3smf.pdf>.
- [DG70] Michel DEMAZURE et Peter GABRIEL. *Groupes algébriques*. fr. T. Tome I. Paris, Masson et Cie et Amsterdam, North-Holland publishing company, 1970.
- [DGA70] Michel DEMAZURE, Alexander GROTHENDIECK et Michaël ARTIN. *SGA3 Groupes de Type Multiplicatif, et Structure des Schémas en Groupes Généraux, Exposé VIII à XVIII*. Lecture Notes in Mathematics 152. Meeting Name : Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA3) OCLC : 833632387. Berlin : Springer, 1970. 653 p. ISBN : 978-3-540-05180-0.
- [DGA11a] Michel DEMAZURE, Alexander GROTHENDIECK et Michaël ARTIN, éd. *SGA3 Propriétés générales des schémas en groupes, Exposés I à VIIB*. Éd. recomposée et annotée. Schémas en groupes Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie, 1962-64; un séminaire / dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck; avec la collaboration de M. Artin ...; 1. Meeting Name : Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie, 1962-64 OCLC : 839880406. Paris : Société mathématique de France, 2011. 610 p. ISBN : 978-2-85629-323-2.

- [DGA11b] Michel DEMAZURE, Alexander GROTHENDIECK et Michaël ARTIN, éd. *SGA3 Structure des schémas en groupes réductifs, Exposés XIX à XXVI*. Éd. recomposée et annotée. Schémas en groupes Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie, 1962-64; un séminaire / dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck; avec la collaboration de M. Artin ...; 3. Meeting Name : Seminaire de géométrie algébrique du Bois Marie OCLC : 802547205. Paris : Société mathématique de France, 2011. 337 p. ISBN : 978-2-85629-324-9.
- [DR09] James Matthew DOUGLASS et Gerhard RÖHRLE. “The Steinberg variety and representations of reductive groups.” English. In : *J. Algebra* 321.11 (2009), p. 3158-3196. ISSN : 0021-8693. DOI : [10.1016/j.jalgebra.2008.10.027](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.027).
- [EH00] David EISENBUD et Joe HARRIS. *The geometry of schemes*. English. T. 197. New York, NY : Springer, 2000, p. x + 294. ISBN : 0-387-98638-3; 0-387-98637-5. DOI : [10.1007/b97680](https://doi.org/10.1007/b97680).
- [Fre09] Lucas FRESSE. “Composantes singulières des fibres de Springer dans le cas deux-colonnes”. French. In : *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* 347.11-12 (2009), p. 631-636. ISSN : 1631-073X. DOI : [10.1016/j.crma.2009.04.005](https://doi.org/10.1016/j.crma.2009.04.005).
- [FM10] Lucas FRESSE et Anna MELNIKOV. “On the singularity of the irreducible components of a Springer fiber in  $\mathfrak{sl}_n$ ”. English. In : *Sel. Math., New Ser.* 16.3 (2010), p. 393-418. ISSN : 1022-1824. DOI : [10.1007/s00029-010-0025-z](https://doi.org/10.1007/s00029-010-0025-z).
- [FP17] Lucas FRESSE et Ivan PENKOV. “Orbit duality in ind-varieties of maximal generalized flags”. English. In : *Trans. Mosc. Math. Soc.* 2017 (2017), p. 131-160. ISSN : 0077-1554. DOI : [10.1090/mosc/266](https://doi.org/10.1090/mosc/266).
- [Fun03] Francis Yein Chei FUNG. “On the topology of components of some Springer fibers and their relation to Kazhdan-Lusztig theory.” English. In : *Adv. Math.* 178.2 (2003), p. 244-276. ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1016/S0001-8708\(02\)00072-5](https://doi.org/10.1016/S0001-8708(02)00072-5).
- [Gin86] Victor GINSBURG. “ $\mathfrak{G}$ -module, Springer’s representations and bivariant Chern classes”. English. In : *Adv. Math.* 61 (1986), p. 1-48. ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1016/0001-8708\(86\)90064-2](https://doi.org/10.1016/0001-8708(86)90064-2).
- [GW10] Ulrich GÖRTZ et Torsten WEDHORN. *Algebraic geometry I. Schemes. With examples and exercises*. English. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2010, p. vii + 615. ISBN : 978-3-8348-0676-5.
- [GR70] Hans GRAUERT et Oswald RIEMENSCHNEIDER. “Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen”. de. In : *Inventiones Mathematicae* 11.4 (déc. 1970), p. 263-292. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01403182](https://doi.org/10.1007/BF01403182). URL : <http://link.springer.com/10.1007/BF01403182> (visité le 02/10/2020).
- [Gro60] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas, §1-10, Préliminaires §1-7”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 4 (1960), p. 5-228. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1960\\_\\_4\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1960__4__5_0/).
- [Gro61a] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, §1-8”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 8 (1961), p. 5-222. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1961\\_\\_8\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__8__5_0/).
- [Gro61b] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, §1-5, Préliminaires §8-13”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 11 (1961), p. 5-167. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1961\\_\\_11\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1961__11__5_0/).
- [Gro63] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, §6-7”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 17 (1963), p. 5-91. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1963\\_\\_17\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1963__17__5_0/).

- [Gro64] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, §1, Préliminaires §14-23”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 20 (1964), p. 5-259. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1964\\_\\_20\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1964__20__5_0/).
- [Gro65] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, §2-7”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 24 (1965), p. 5-231. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1965\\_\\_24\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1965__24__5_0/).
- [Gro66] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, §8-15”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 28 (1966), p. 5-255. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1966\\_\\_28\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1966__28__5_0/).
- [Gro67] Alexander GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, §16-23”. fr. In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 32 (1967), p. 5-361. URL : [http://www.numdam.org/item/PMIHES\\_1967\\_\\_32\\_\\_5\\_0/](http://www.numdam.org/item/PMIHES_1967__32__5_0/).
- [GAV72] Alexander GROTHENDIECK, Michaël ARTIN et Jean Louis VERDIER. *SGA4 Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, T.1 : Exposés I à IV*. 2. éd. Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie SGA 4. Berlin, New York : Springer-Verlag, 1972. ISBN : 978-3-540-05896-0.
- [GR04] Alexander GROTHENDIECK et Michèle RAYNAUD. “SGA1 Revêtements étales et groupe fondamental”. In : *arXiv :math/0206203* (4 jan. 2004). arXiv : [math/0206203](https://arxiv.org/abs/math/0206203). URL : <http://arxiv.org/abs/math/0206203> (visité le 12/04/2021).
- [Har83] Robin HARTSHORNE. *Algebraic geometry. Corr. 3rd printing*. English. T. 52. Springer, New York, NY, 1983, p. xvi + 496.
- [HT12] Xuhua HE et Jesper Funch THOMSEN. “On Frobenius splitting of orbit closures of spherical subgroups in flag varieties”. English. In : *Transform. Groups* 17.3 (2012), p. 691-715. ISSN : 1083-4362. DOI : [10.1007/s00031-012-9193-6](https://doi.org/10.1007/s00031-012-9193-6).
- [HJ05] Vladimir HINICH et Anthony JOSEPH. “Orbital variety closures and the convolution product in Borel-Moore homology”. English. In : *Sel. Math., New Ser.* 11.1 (2005), p. 9-36. ISSN : 1022-1824. DOI : [10.1007/s00029-005-0002-0](https://doi.org/10.1007/s00029-005-0002-0).
- [HK98] Roger HOWE et Hanspeter KRAFT. “Principal covariants, multiplicity-free actions, and the  $K$ -types of holomorphic discrete series”. English. In : *Geometry and representation theory of real and  $p$ -adic groups. Papers from the 5th workshop on representation theory of Lie groups and its applications, Córdoba, Argentina, August 1995*. Boston, MA : Birkhäuser, 1998, p. 147-161. ISBN : 0-8176-3931-4 ; 978-1-4612-8681-3.
- [Hum81] James Edward HUMPHREYS. *Linear algebraic groups. Corr. 2nd printing*. English. T. 21. Springer, New York, NY, 1981.
- [Jan04] Jens Carsten JANTZEN. “Nilpotent orbits in representation theory”. English. In : *Lie theory. Lie algebras and representations*. Boston, MA : Birkhäuser, 2004, p. 1-211. ISBN : 0-8176-3373-1.
- [Jos84] Anthony JOSEPH. “On the variety of a highest weight module”. English. In : *J. Algebra* 88 (1984), p. 238-278. ISSN : 0021-8693. DOI : [10.1016/0021-8693\(84\)90100-5](https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90100-5).
- [Jos89] Anthony JOSEPH. “On the characteristic polynomials of orbital varieties”. English. In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 22.4 (1989), p. 569-603. ISSN : 0012-9593. DOI : [10.24033/asens.1594](https://doi.org/10.24033/asens.1594).
- [KL79] David KAZHDAN et George LUSZTIG. “Representations of Coxeter groups and Hecke algebras”. English. In : *Invent. Math.* 53 (1979), p. 165-184. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01390031](https://doi.org/10.1007/BF01390031).

- [Kem+73] George KEMPF et al. *Toroidal embeddings. I*. English. T. 339. Springer, Cham, 1973. DOI : [10.1007/BFb0070318](https://doi.org/10.1007/BFb0070318).
- [Kno14] Friedrich KNOP. “Localization of spherical varieties”. English. In : *Algebra Number Theory* 8.3 (2014), p. 703-728. ISSN : 1937-0652. DOI : [10.2140/ant.2014.8.703](https://doi.org/10.2140/ant.2014.8.703).
- [LM00] Gérard LAUMON et Laurent MORET-BAILLY. *Champs algébriques*. English. T. 39. Berlin : Springer, 2000, p. xii + 208. ISBN : 3-540-65761-4.
- [Laz04] Robert LAZARUSFELD. *Positivity in algebraic geometry. I. Classical setting : line bundles and linear series*. English. T. 48. Berlin : Springer, 2004, p. xviii + 387. ISBN : 3-540-22533-1.
- [Lee89] Marcus Aurelius Augustinus van LEEUWEN. “A Robinson–Schensted algorithm in the geometry of flags for classical groups”. •. Rijksuniversiteit Utrecht, 1989.
- [Lun01] Dominique LUNA. “Variétés sphériques de type A.” French. In : *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 94 (2001), p. 161-226. ISSN : 0073-8301. DOI : [10.1007/s10240-001-8194-0](https://doi.org/10.1007/s10240-001-8194-0).
- [Mac74] Robert Duncan MACPHERSON. “Chern classes for singular algebraic varieties”. English. In : *Ann. Math. (2)* 100 (1974), p. 423-432. ISSN : 0003-486X. DOI : [10.2307/1971080](https://doi.org/10.2307/1971080).
- [MO90] Toshihiko MATSUKI et Toshio OSHIMA. “Embeddings of discrete series into principal series”. English. In : *Towards harmonic analysis on homogeneous spaces of nilpotent Lie groups*. 1990, p. 147-175.
- [MR85] Vikram Bhagvandas MEHTA et Annamalai RAMANATHAN. “Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert varieties”. English. In : *Ann. Math. (2)* 122 (1985), p. 27-40. ISSN : 0003-486X. DOI : [10.2307/1971368](https://doi.org/10.2307/1971368).
- [Mil80] James Stuart MILNE. *Étale cohomology*. English. T. 33. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980.
- [MGE] Ben MOONEN, Gerard van der GEER et Bas EDIXHOVEN. “Abelian Varieties”. URL : <https://www.math.ru.nl/~5Ctextasciitilde%20moonen/research.html%5C#bookabvar>.
- [Mum99] David MUMFORD. *The red book of varieties and schemes. Includes the Michigan lectures (1974) on “Curves and their Jacobians”*. English. T. 1358. Berlin : Springer, 1999, p. x + 306. ISBN : 3-540-63293-X. DOI : [10.1007/b62130](https://doi.org/10.1007/b62130).
- [MFK94] David MUMFORD, John FOGARTY et Frances KIRWAN. *Geometric invariant theory*. English. T. 34. Berlin : Springer-Verlag, 1994, p. 320. ISBN : 3-540-56963-4. DOI : [10.1007/978-3-642-57916-5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57916-5).
- [Pan94] Dimitrii Ivanovich PANYUSHEV. “Complexity and nilpotent orbits”. English. In : *Manuscr. Math.* 83.3-4 (1994), p. 223-237. ISSN : 0025-2611. DOI : [10.1007/BF02567611](https://doi.org/10.1007/BF02567611).
- [PS12] Nicolas PERRIN et Evgeny Yurievich SMIRNOV. “Springer fiber components in the two columns case for types A and D are normal”. English. In : *Bull. Soc. Math. Fr.* 140.3 (2012), p. 309-333. ISSN : 0037-9484. DOI : [10.24033/bsmf.2629](https://doi.org/10.24033/bsmf.2629).
- [Ric77] Roger Wolcott RICHARDSON. “Affine coset spaces of reductive algebraic groups”. English. In : *Bull. Lond. Math. Soc.* 9 (1977), p. 38-41. ISSN : 0024-6093. DOI : [10.1112/blms/9.1.38](https://doi.org/10.1112/blms/9.1.38).
- [Ric82] Roger Wolcott RICHARDSON. “On orbits of algebraic groups and Lie groups”. English. In : *Bull. Aust. Math. Soc.* 25 (1982), p. 1-28. ISSN : 0004-9727. DOI : [10.1017/S0004972700005013](https://doi.org/10.1017/S0004972700005013).
- [RS90] Roger Wolcott RICHARDSON et Tonny Albert SPRINGER. “The Bruhat order on symmetric varieties”. English. In : *Geom. Dedicata* 35.1-3 (1990), p. 389-436. ISSN : 0046-5755. DOI : [10.1007/BF00147354](https://doi.org/10.1007/BF00147354).

- [Ros91a] Wulf ROSSMANN. “Invariant eigendistributions on a semisimple Lie algebra and homology classes on the conormal variety. I : An integral formula”. English. In : *J. Funct. Anal.* 96.1 (1991), p. 130-154. ISSN : 0022-1236. DOI : [10.1016/0022-1236\(91\)90076-H](https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90076-H).
- [Ros91b] Wulf ROSSMANN. “Invariant eigendistributions on a semisimple Lie algebra and homology classes on the conormal variety. II : Representations of Weyl groups”. English. In : *J. Funct. Anal.* 96.1 (1991), p. 155-193. ISSN : 0022-1236. DOI : [10.1016/0022-1236\(91\)90077-I](https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90077-I).
- [Spa82] Nicolas SPALTENSTEIN. *Classes unipotentes et sous-groupes de Borel*. French. T. 946. Springer, Cham, 1982.
- [Spr76] Tonny Albert SPRINGER. “Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups”. English. In : *Invent. Math.* 36 (1976), p. 173-207. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01390009](https://doi.org/10.1007/BF01390009).
- [Spr09] Tonny Albert SPRINGER. *Linear algebraic groups*. English. Basel : Birkhäuser, 2009, p. xv + 334. ISBN : 978-0-8176-4839-8.
- [Spr85] Tony Albert SPRINGER. *Some results on algebraic groups with involutions*. English. Algebraic groups and related topics, Proc. Symp., Kyoto and Nagoya/Jap. 1983, Adv. Stud. Pure Math. 6, 525-543 (1985). 1985.
- [Sta21] STACKS. *The Stacks Project*. 2021. URL : <https://stacks.math.columbia.edu/>.
- [Ste68] Robert STEINBERG. *Endomorphisms of linear algebraic groups*. English. T. 80. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 1968, p. 108. ISBN : 978-0-8218-1280-8 ; 978-1-4704-0029-3. DOI : [10.1090/memo/0080](https://doi.org/10.1090/memo/0080).
- [Ste74] Robert STEINBERG. *Conjugacy classes in algebraic groups. Notes by Vinay V. Deodhar*. English. T. 366. Springer, Cham, 1974.
- [Ste76] Robert STEINBERG. “On the desingularization of the unipotent variety”. English. In : *Invent. Math.* 36 (1976), p. 209-224. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/BF01390010](https://doi.org/10.1007/BF01390010).
- [Vak] Ravi VAKIL. *The Rising Sea : Foundations Of Algebraic Geometry Notes*. URL : <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/index.html> (visité le 08/06/2021).
- [Vis05] Angelo VISTOLI. “Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory”. In : *Fundamental algebraic geometry*. T. 123. Math. Surveys Monogr. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2005, p. 1-104.
- [Vog80] David Alexander Jr. VOGAN. “Ordering of the primitive spectrum of a semisimple Lie algebra”. English. In : *Math. Ann.* 248 (1980), p. 195-203. ISSN : 0025-5831. DOI : [10.1007/BF01420525](https://doi.org/10.1007/BF01420525).