



HAL
open science

Formulation mixte augmentée d'un modèle “ Full-wave ” tridimensionnel dans un plasma froid : analyse numérique d'une approximation -

Rihab Daadaa

► To cite this version:

Rihab Daadaa. Formulation mixte augmentée d'un modèle “ Full-wave ” tridimensionnel dans un plasma froid : analyse numérique d'une approximation - . Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2021. Français. NNT : 2021LORR0307 . tel-03612357

HAL Id: tel-03612357

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03612357v1>

Submitted on 17 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse de Doctorat

présentée par

Rihab DAADAA

en vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lorraine
mention : Mathématiques

**Formulation mixte augmentée d'un modèle
« Full-Wave » tridimensionnel dans un plasma froid :
Analyse numérique d'une approximation $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$.**

Soutenue publiquement le 13 décembre 2021

Membres du Jury :

Michel Mehrenberger Professeur, Université Aix-Marseille (Président)

Frédérique Charles Maîtresse de conférence HDR, Sorbonne Université (Rapporteuse)

Anais Crestetto Maîtresse de conférence, Université de Nantes (Examinatrice)

Moez Khenissi Professeur, Université de Sousse, Tunisie (Examinateur)

Simon Labrunie Maître de conférence HDR, Université de Lorraine (Directeur de thèse)

Jean Rodolphe Roche Professeur émérite, Université de Lorraine (Directeur de thèse)

**LA VIE N'EST BONNE QU'À ÉTUDIER ET ENSEIGNER LES
MATHÉMATIQUES !
Blaise Pascal 1623 – 1662**

Remerciements

Je peux enfin dire que "J'AI RÉUSSI" malgré toutes difficultés. Cette réussite je la dédie à plusieurs personnes auxquelles je suis extrêmement reconnaissante.

Les premiers servis de mes remerciements sont, bien entendu, les promoteurs de cette thèse **Jean Rodolphe Roche** et **Simon Labrunie**. Je les remercie de m'avoir offert cette chance de réaliser un rêve d'enfance (devenir docteur en mathématiques). Ils m'ont bien soutenue et guidée tout au long de ces années et ils ont su comment me motiver et m'apprendre à être plus autonome. Je salue vivement leurs conseils avisés et soutien surtout pendant les périodes de confinement qui étaient très dures quant à l'avancement de ma recherche. Merci d'être disponibles et présents durant ce joli parcours.

J'adresse également mes plus vifs remerciements aux membres de jury qui ont évalué ce travail de thèse, Professeur **Michel Mehrenberger** et Madame **Frédérique Charles** pour avoir évalué mon travail en qualité de rapporteurs, Professeur **Moez Khenissi** et Madame **Anaïs Crestetto** pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce rapport.

Cette thèse a été réalisée au sein du laboratoire de Mathématiques à l'**IECL** à Nancy où j'ai passé une des plus belles années de ma vie. Je remercie chaleureusement tout le personnel qui m'a accueillie, sans doute, sans votre effort, mon arrivée et installation à ce laboratoire ne puissent être possibles. Plus particulièrement, je remercie **Élodie Cunat** et **Laurence Quirot** qui ont su répondre à toutes mes questions administratives surtout lors des démarches pour l'obtention de mon titre de séjour ainsi que pour mon service d'enseignement. Merci surtout d'avoir accepté d'épater vos papilles avec mes gâteaux. Ce fut un immense plaisir.

Je n'oublie certainement pas mes professeurs de l'école supérieure des sciences et de la technologie de Hammam Sousse **ESSTHS**, c'est grâce à la coopération entre cette école et l'**IECL** que cette aventure a commencé. Je les remercie énormément, en particulier je m'adresse une autre fois à mon professeur Monsieur **Moez Khenissi** pour son encouragement. Merci de m'avoir poussée à m'investir dans cette thèse tout en connaissant ma situation et les circonstances.

Je remercie également **Julien Fontchastagner** pour son aide à réaliser mon maillage avec le logiciel GMSH.

Une pensée très particulière à ma chère enseignante **Sonia Ben Mariem**, vous avez fait la différence dans mon parcours et votre touche m'a beaucoup apporté. Je vous dois toute ma gratitude et mon respect.

La gratitude, ne pas voir le cadeau, mais d'abord celui qui l'offre et je suis remplie de gratitude envers Dieu qui m'a offert la plus belle et tendre famille à qui j'adresse tout mon amour. Je remercie mes parents, ma mère **Chedia** et mon père **Bouraoui** pour leurs sacrifices et efforts considérables tout au long de ces années. Vous avez fait de moi la femme que je suis maintenant et dont je suis extrêmement fière. Merci à mon cher époux **Mohamed** pour son amour inconditionnel et son soutien depuis plus que 17 ans, tu as su me donner le courage et la force dont j'avais besoin. Merci à ma source d'affection et d'amitié **Ridha**, **Randa** et **Rania** sans vous je ne saurais jamais dépasser mes faiblesses. Merci à ma grand-mère à qui je dois beaucoup de respect et amour, merci mamie pour tes prières. Merci à mes oncles, mes tantes et tous mes cousins pour leur soutien et encouragement, je remercie Dieu de vous avoir dans ma vie. **Awatef** et **Malika**, mes remerciements ne suffisent pas pour exprimer à quel point je suis reconnaissante envers votre soutien et amour, vous avez fait preuve de fidélité et sincérité. Merci aussi à ma belle famille qui m'a tant soutenue. Merci à vous tous de m'avoir poussée et encouragée à m'engager dans cette belle aventure mathématique, ma reconnaissance est au-delà de mes mots.

Je suis également reconnaissante envers tous mes amis et proches, spécialement **Mouna**, **Nahed** et **Habiba** ainsi que toute autre personne ayant contribué à faire cette thèse.

Ma dernière pensée de gratitude dirigée vers le ciel à toi ma très chère "**SONIA**", je te dédie cette réussite que j'aurais bien voulue la partager avec toi.

À vous mes plus chers au monde, mes deux petits trésors,
MOEMEN et **MAYSSOUN**,
10/06/2012 et 03/05/2021.

Table des matières

Introduction	2
1 Modélisation	6
1.1 Fusion nucléaire	6
1.1.1 Génération de courant et chauffage	8
1.2 Modèle	11
1.2.1 The full wave system	13
1.2.2 Expression du tenseur diélectrique $\underline{\mathbf{K}}$	15
1.2.3 Analyse spectrale du tenseur de conductivité $\underline{\mathbf{K}}$	20
1.2.4 Champ magnétique extérieur \mathbf{B}_0	22
1.2.5 Profil de densité des espèces, ions et électrons	24
1.3 Conditions aux limites	24
1.3.1 Conditions au bord naturelles	24
1.3.2 Conditions au bord essentielles	25
2 Formulations variationnelles	28
2.1 Formulation variationnelle	28
2.1.1 Conditions au bord naturelles	28
2.2 Étude de l'espace $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$	30
2.2.1 Injection compacte	30
2.2.2 Un résultat de régularité	31
2.3 Existence et unicité de la solution	32
2.3.1 Application aux équations de Maxwell	35
2.3.2 Équivalence entre les formulations	39
3 Approximation par éléments finis	42
3.1 Introduction	42
3.2 Formulation discrète	42
3.2.1 Discrétisation du domaine	42
3.2.2 Éléments finis mixtes de Taylor-Hood	43
3.2.3 Formulation matricielle	44
3.2.4 Écriture matricielle	45
3.2.5 Formulation variationnelle mixte augmentée discrète	46

3.3	Matrice de masse interne	47
3.3.1	Matrice de masse $\underline{\mathbb{B}}$	
	49
3.3.2	Le second membre f	
	49
3.3.3	Calcul des intégrales	50
3.3.4	Coefficients de la matrice du système	54
3.3.5	Discrétisation de l'espace avec condition aux limites essentielles . .	56
3.3.6	Matrice de raideur interne	57
3.3.7	Assemblage de la matrice du système linéaire	58
4	Condition Inf-Sup discrète en 3 dimensions	64
4.1	Introduction	64
4.2	Définition de la normale à Γ_h	65
4.3	Espaces d'approximation	66
4.4	Approximation du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$	66
4.4.1	Rappels	66
4.4.2	Définition de $\underline{\mathbf{K}}_h$	68
4.5	Formulation discrète	70
4.6	Existence et unicité de la solution	70
4.6.1	Coercivité de $a_{s,h}$	71
4.6.2	Condition inf-sup, stabilité des éléments de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ en 3D	72
4.7	Estimation d'erreur	83
4.8	Domaine convexe non polyédrique	84
5	Simulations Numériques	92
5.1	Introduction	92
5.2	Tenseur Diélectrique	95
5.2.1	Densité des électrons	95
5.2.2	Température des espèces	96
5.2.3	Fréquences du plasma	97
5.2.4	Fréquence collisionnelle	97
5.2.5	Vitesse d'agitation thermique	98
5.2.6	Champ magnétique extérieur	98
5.2.7	Vecteur d'onde	100
5.2.8	Amortissement Landau	100
5.2.9	Le tenseur et ses dérivées	101
5.2.10	Accessibilité	103
5.2.11	Résultats numériques quand $\underline{\mathbf{K}}$ est à coefficients constants	110
5.2.12	Résultats numériques quand $\underline{\mathbf{K}}$ est à coefficients variables dans le repère de Stix	118
5.2.13	Absorption	141

6	Conclusion	144
7	Appendices	147
7.1	Appendice A : Systèmes de coordonnées	147
7.1.1	Système des coordonnées toroïdales/poloïdales (r, θ, φ)	147
7.1.2	Coordonnées cylindriques/toroïdales (R, Z, φ)	149
7.1.3	Système des coordonnées de Stix	150
7.2	Appendice B : Analyse fonctionnelle : rappels et propriétés	153
7.2.1	Espaces fonctionnels	154
7.2.2	Espaces des traces	155
7.2.3	Formules de Green	157
7.2.4	Opérateurs différentiels et espaces de Hilbert	157
7.3	Appendice C : Les équations de Maxwell : Rappel	159
7.4	Appendice D : Formule d'intégration de type Newton-Côtes	160
7.4.1	Reconstruction d'une formule d'intégration d'ordre 2	160
7.4.2	Reconstruction d'une formule d'intégration d'ordre 3	162
7.5	Appendice E : Équivalence des normes	164
7.6	Appendice F : Propriétés topologiques de domaines réguliers et non simplement connexes	166
7.7	Appendice G : Théorie de régularité des problèmes elliptiques	168
7.8	Appendice H : Base de l'espace d'interpolation \mathbb{P}_2	169
		177

Introduction

L'objet de ce mémoire de thèse est d'étudier une méthode de simulation numérique d'un modèle dit « Full wave » de la propagation dans un tokamak d'une onde électromagnétique injectée par un ensemble d'antennes installées sur le bord de l'enceinte de confinement. On étudiera une méthode d'approximation par éléments finis de Lagrange introduite dans [5], adaptée à notre contexte.

Dans le premier chapitre on introduit le modèle physique considéré pour décrire la propagation d'une onde (électrostatique) d'une fréquence proche de la résonance hybride dans un plasma dit froid et confiné par un champ magnétique à l'intérieur d'un tokamak.

Ce modèle a un historique qui remonte aux années 1980 par les travaux des chercheurs nord-américains sur le tokamak Alcator C-Mod du MIT, voir [58], [60], [6], [53] ainsi que leurs références. En Europe, en parallèle, des études comparables ont été menées autour du tokamak du programme Jet. Ces travaux sont à la base du modèle présenté dans ce mémoire, voir [14], [47], [45] et [46] ainsi que les thèses [52] et [36].

Dans ce mémoire, comme en général dans les travaux précédents, on remplace la géométrie du tokamak par celle du tore. La propagation des ondes électromagnétiques est modélisée par les équations de Maxwell. Dans ce travail on considère une approximation de la solution harmonique en temps. On obtient le système d'équations aux dérivées partielles qui caractérisent les modèles appelés Full-wave décrits dans le chapitre dédié à la modélisation et qui fera l'objet d'analyse et de simulation :

$$(0.1) \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(0.2) \quad \mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(0.3) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C,$$

$$(0.4) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A$$

avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide, \mathbf{j}_s est un courant superficiel qui parcourt l'antenne Γ_A et $\underline{\mathbf{K}}$ est le tenseur diélectrique.

Dans ce chapitre on rappelle comment on obtient l'expression du tenseur diélectrique $\underline{\mathbf{K}}$ ainsi que les propriétés spectrales qui sont déterminantes pour établir l'existence et l'unicité de la solution. Ce tenseur n'est pas Hermitien et donc les démonstrations classiques de la stabilité de la méthode des éléments finis ne sont plus valables.

Dans le chapitre deux on rappelle les formulations variationnelles mixtes et mixtes augmentées déjà étudiées dans Sebelin [52], Hattori [36] et [8]. Ces formulations nous permettent de chercher des solutions dans $(H^1(\Omega))^3$ et donc une approximation par des éléments finis de Lagrange dans cet espace. Pour démontrer que ces formulations sont bien posées on utilise le théorème de Babuska-Brezzi [30], mais à cause des caractéristiques du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$ un résultat ad-hoc est nécessaire pour obtenir la coercivité de la forme sesquilineaire. Ce résultat est dû à Sebelin et al. [52].

Le chapitre trois est dédié à la présentation de la discrétisation des équations du modèle en trois dimensions d'espace. Pour l'approximation de la solution, le champ électrique \mathbf{E} , on considère des éléments finis \mathbb{P}_2 ; pour les multiplicateurs on considère une approximation \mathbb{P}_1 , c'est à dire une approximation de Taylor Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$. Dans les travaux précédents

les auteurs on considéré des approximations monodimensionnelles [52] ou des approximations dites « $2d_2^1$ », c'est à dire on développe la solution en série de Fourier dans l'angle toroïdal. Ainsi Meneghini [53], Hattori [36] et [7], obtiennent un problème bidimensionnel sur une section poloïdale du tore. Par ailleurs, dans le travail de Meneghini, la contrainte $\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) = 0$ n'est pas imposée. Cette équation est vérifiée dans le cas théorique par la solution de l'équation (0.1), mais elle n'est pas vérifiée a priori par une approximation numérique par des éléments finis \mathbb{P}_2 . Il faut l'imposer à travers une contrainte, c'est qui est fait dans ce mémoire de thèse.

Dans ce chapitre on montre comment est construit le système linéaire du type points selle, le modèle discret, et comment on introduit les conditions au bord. Les caractéristiques du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$ impliquent que la matrice de raideur est non-Hermitienne et creuse, on pourra alors résoudre le système d'équations linéaires par une méthode directe de type LU [35] ou une méthode itérative GMRS [50].

Dans le chapitre quatre il est démontré le caractère bien posé du système d'équations discret quand on considère une approximation de type Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$. La difficulté majeure a été d'établir la condition inf-sup du théorème de Babuska-Brezzi à cause des caractéristiques du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$. Il est donné un résultat d'existence et unicité de la solution dans le cas d'un « tore » polyédrique.

Après avoir défini la normale discrète on introduit une approximation \mathbb{P}_1 du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$, noté $\underline{\mathbf{K}}_h$. Il est démontré que pour h petit, le pas de discrétisation, $\underline{\mathbf{K}}_h$ vérifie les mêmes propriétés spectrales que $\underline{\mathbf{K}}$. Ainsi on montre la coercivité de la forme sesquilinéaire « discrète ».

Le point le plus technique est la démonstration de la condition inf-sup. La démonstration suit le canevas présenté dans [19]. On considère les espaces d'approximation :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h &= Y_h^3, \\ Q_h &= \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}_h); \quad q_{h|_{TT}} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall TT \subset \mathcal{T}_{1,h}\} \\ \text{où } Y_h &= \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}_h); \quad (v_{h|_{TT}})_i \in \mathbb{P}_2, \quad i = 1 : 3 \text{ et } \forall TT \subset \mathcal{T}_{1,h}\} \end{aligned}$$

On définit les espaces des fonctions :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Y}_h : \mathbf{v}_h(a) \times \mathbf{n}_h(a) = \mathbf{0} \text{ pour tout point d'interpolation } a \text{ de } \Gamma_h\}, \\ \mathbf{X}_{0,h} &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Y}_h : \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_h\} \subset (H_0^1)^3(\Omega_h), \\ Q_{0,h} &= \{q_h \in Q_h : \int_{\Omega_h} q_h \, d\Omega_h = 0\}. \end{aligned}$$

avec les normes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h} &= \left(\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega_h}^2 + \|\text{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega_h}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|q_h\|_{Q_h} &= \|q_h\|_{0,\Omega_h}. \end{aligned}$$

$$(0.5) \quad \|q\|_{Q_{0,h}}^2 = \sum_{TT \in \mathcal{T}_{1,h}} h_{TT}^2 \|\nabla q\|_{0,TT}^2$$

Tout d'abord on démontrera à l'aide du lemme du Fortin, [33], une condition inf-sup sur l'espace $\mathbf{X}_{0,h} \times Q_{0,h}$ muni des normes $\|\cdot\|_{1,\Omega_h}, \|\cdot\|_{Q_{0,h}}$. Ensuite on établit une condition inf-sup intermédiaire sur l'espace $(\mathbf{H}_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega}) \times (L_0^2(\Omega), \|\cdot\|_{0,\Omega})$. On obtient ensuite une troisième condition inf-sup sur l'espace $(\mathbf{X}_{0,h}, \|\cdot\|_{1,\Omega_h}) \times (Q_{0,h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$. Ces trois conditions nous permettront d'établir celle sur l'espace $\mathbf{X}_{0,h} \times Q_{0,h}$ muni des normes $(\|\cdot\|_{\mathbf{X}_h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$. Et enfin à l'aide de la technique de démonstration proposée en [19], on en conclut la condition inf-sup finale sur l'espace $\mathbf{X}_h \times Q_h$ muni des normes $(\|\cdot\|_{\mathbf{X}_h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$.

Une borne a priori de l'erreur est déduite automatiquement, voir [30], [57] et [36].

Le chapitre 5 est dédié aux simulations numériques. On commence par expliciter les termes du tenseur \mathbf{K} ainsi que ses dérivées nécessaires au montage de la matrice de raideur du système. Les premières simulations concernent le cas avec une densité des électrons et des ions constante et égale à la valeur au centre de la section poloidale. Ensuite on considère le cas où les densités ont un profil parabolique, la valeur au bord du tokamak est 10^{-4} fois la valeur au centre du tokamak. On fait aussi une simulation dans le cas où le vecteur d'onde est une fonction de la distance au centre du tokamak.

On présente des résultats pour divers valeurs de B_0 , la norme du champ magnétique extérieur, et pour diverses valeurs de la pulsation de l'onde incidente. Dans tous les cas considérés la longueur d'onde est compatible avec le principe de cinq points de maillage par longueur d'onde.

Le chapitre se termine par une table montrant l'évolution de la puissance absorbée par le plasma par effet Joule en fonction de \mathbf{B}_0 , le champ magnétique extérieur, et ω , la pulsation de l'onde injectée.

Le dernier chapitre de ce mémoire concerne une série d'appendices rappelant des résultats nécessaires à la compréhension du texte. Par exemple le changement de base entre le système cartésien et le système de Stix, dans lequel le tenseur \mathbf{K} est défini.

1 Modélisation

1.1 Fusion nucléaire

La matière est constituée des atomes, particules formées d'un noyau autour duquel gravite un ensemble d'électrons. Le noyau est constitué des protons et neutrons, le nombre d'électrons est le même que celui de protons. Les forces qui assurent la cohésion du noyau c'est à dire l'énergie nécessaire à la liaison varient d'un atome à l'autre et la perturbation de la configuration des électrons et de protons peut produire la libération d'importantes quantités d'énergie appelée énergie nucléaire. Dans une réaction de fusion, on réalise la synthèse à partir de deux noyaux légers un noyau plus lourd avec libération simultanée d'énergie. Par exemple la fusion d'un noyau de deutérium composé d'un proton et un neutron avec un noyau de tritium composé d'un proton et deux neutrons. On obtient un noyau d'hélium et un neutron. La quantité d'énergie obtenue par gramme de mélange de

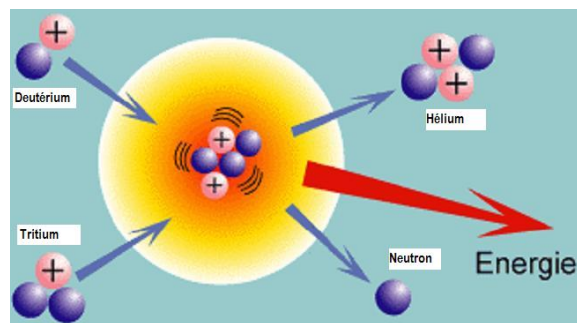


FIGURE 1.1 – Fusion nucléaire

deutérium et de tritium est équivalente à celle libérée par la combustion de plus de 10000 litres d'essence. Ainsi un réacteur à fusion est donc essentiellement un bruleur nucléaire à l'intérieur duquel se trouve un mélange de deutérium et de tritium sous forme de plasma. Pour pouvoir fusionner deux noyaux, il faut les lancer l'un contre l'autre, ceci nécessite une énergie telle qu'ils puissent contre carre les forces de répulsion. La traduction de cette énergie en termes de température correspond à des valeurs de l'ordre de plusieurs dizaines de millions de degrés Celsius, dans le cas de ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor)¹ la température est estimée à 150 millions des degrés Celsius.

1. Pour plus d'informations www.iter.gouv.fr

À ces stades, les physiciens ont remarqué deux problèmes techniques parmi des milliers. À des températures très élevées les particules se déplacent à une très grande vitesse (quelques milliers de km/s) et si aucune précaution n'est prise, elles s'enfuiraient très rapidement sans rencontrer une autre particule pour fusionner et produire de l'énergie, il est donc nécessaire de confiner l'ensemble du plasma. Un confinement matériel est impossible, aucune paroi construite dans des restructures classiques pourrait résister aux températures considérées. La solution adoptée dans le projet ITER et en général dans les recherches menées en Europe, et autour du projet ITER, est le confinement magnétique. Le confinement magnétique est obtenu à l'aide d'un champ magnétique. Aux températures considérées, les atomes du plasma sont ionisés et subissent un effet d'enroulement quand on les fait se mouvoir dans un champ magnétique. Si l'on renferme ce champ magnétique sur lui-même, par exemple dans un tore, les particules se trouvent prisonnières, c'est à dire confinées. Plusieurs configurations ont été étudiées mais celle adoptée dans le projet ITER et étudiée dans cette thèse est une configuration toroïdale, nommée tokamak. Inventée au début des années 1950 par les physiciens soviétiques Igor Tamm et Andreï Sakharov sur une idée originale du physicien Oleg Lavrentiev, le terme tokamak veut dire en français, chambre toroïdale avec bobines magnétiques. Le premier tokamak, dénommé T1, a été construit à l'institut Kurchatov à Moscou². Dans le cas du tokamak on impose un champ magnétique extérieur dans lequel

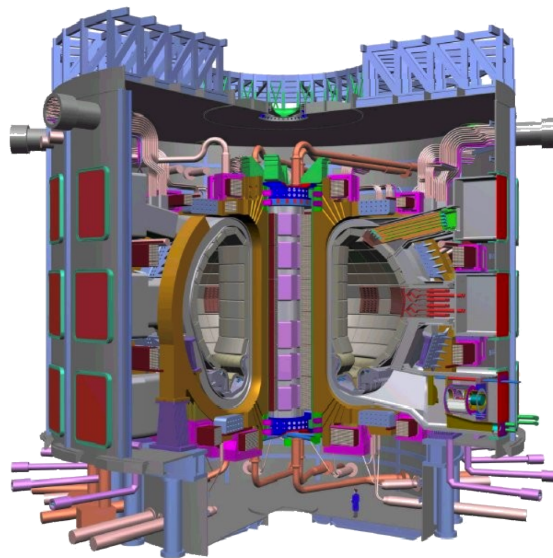


FIGURE 1.2 – Tokamak du projet ITER

les lignes de force sont légèrement torsadées. Tout ceci est obtenu par la superposition d'un champ magnétique toroïdal B_ϕ engendré par des bobines extérieures et un champ poloïdal B_θ induit par un courant circulant toroïdalement dans le plasma.

Les particules chargées décrivent alors une trajectoire en hélice autour d'un champ magnétique, ainsi on compense la pression du plasma qui cherche à sortir de l'enceinte par la pression

2. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Tokamak>

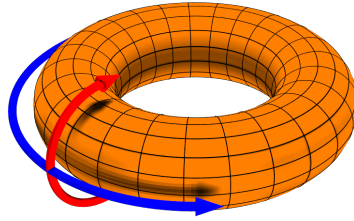


FIGURE 1.3 – Champs magnétique toroïdal et poloïdal

magnétique. Cette situation n'est en fait pas toujours stable, certains phénomènes parasites permettent aux particules de sortir du piège au bout d'un certain temps appelé le temps de confinement des particules. Si le milieu est suffisamment dense, les collisions sont fréquentes mais le temps de confinement est court. Si le milieu est peu dense les collisions sont rares et les particules ont tendance à rester confinées longtemps. Dans ce cadre on

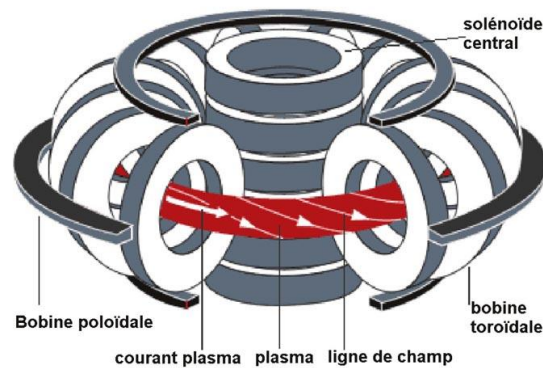


FIGURE 1.4 – Trajectoire des particules

apporte de l'énergie pour obtenir le confinement et la température du plasma.

1.1.1 Génération de courant et chauffage

Pour que la machine soit viable il faut que l'énergie produite par les réactions de fusion compense l'énergie utilisée pour faire fonctionner le réacteur. Cet aspect a été étudié et un critère, dit de Lawson [41] donne la valeurs (température des ions par rapport à la densité et le temps de confinement) qu'il faut atteindre pour obtenir un bilan positif d'énergie. Le critère de Lawson est établi quand la puissance créée par la réaction de fusion deutérium-tritium compense la puissance perdue dans le processus. Pour un tokamak de type ITER

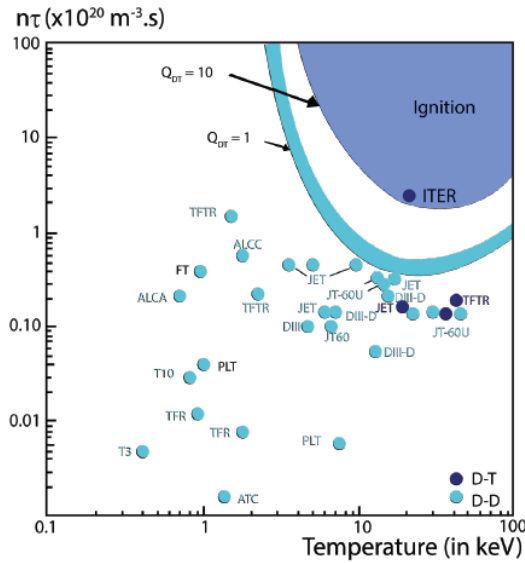


FIGURE 1.5 – Diagramme de Lawson

le critère de Lawson impose que [1]

$$(1.1) \quad n_e T \tau \geq 5.10^{21} \text{ KeV} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$$

Avec n_e la densité des électrons du plasma, T la température du plasma et τ le temps du confinement. Dans un tokamak les densités du plasma sont de l'ordre de 10^{20} par mètre cube et le temps de confinement dans les expériences réalisées jusqu'à présent ne dépasse pas la seconde.

Donc pour vérifier le critère de Lawson il faut porter le plasma à une très haute température, environs 10keV c'est à dire environs 120 millions de degrés Celsius. Ainsi les méthodes du chauffage apporté de l'extérieur du plasma confiné dans le tokamak constituent un point crucial pour arriver à rendre opérationnel les réacteurs de fusion nucléaire. En premier lieu le courant nécessaire au confinement du plasma permet un chauffage par effet Joule, mais il est insuffisant, environs 2 keV. Il devient donc nécessaire d'ajouter un chauffage dit

non inductif. Plusieurs méthodes ont été expérimentées pour augmenter la température du plasma, fondamentalement il existe deux types :

L'injection des particules neutres, qui consiste à introduire dans le plasma des particules

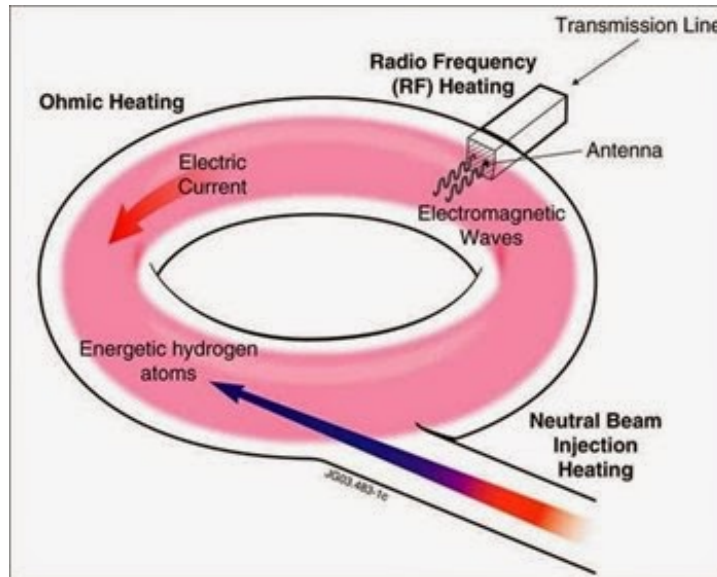


FIGURE 1.6 – Types de chauffage

électriquement neutres mais très énergétiques par le moyen de collisions qui transfèrent une partie de leur énergie aux particules du plasma.

Le deuxième type est le chauffage par onde radio fréquence. Il s'agit d'injecter dans le plasma une onde électromagnétique avec des caractéristiques bien déterminées pour obtenir une absorption d'énergie dans le milieu. La principale caractéristique est que l'onde injectée doit avoir une fréquence de résonance avec les particules constituant le plasma, c'est à dire vibrer à la même fréquence. Le chauffage cyclotronique ionique à la manière d'un four à micro-ondes utilise une onde à haute fréquence, proche de celle de la fréquence de giration des ions, c'est à dire de l'ordre de quelques dizaines de Mégahertz (MHz). Cette absorption n'est pas possible dans un plasma à une composante unique (effet de blindage), il est alors ajouté un pourcentage d'ions d'hydrogène de masse inférieure à celle du deutérium. L'onde est alors fortement absorbée par les ions d'hydrogène qui transmettront leur énergie ensuite aux électrons par collisions, qui chaufferont à leur tour les ions de deutérium. Le chauffage cyclotronique électronique chauffe les électrons du plasma au moyen d'un faisceau de rayonnement électromagnétique de haute intensité et d'une fréquence 170 GHz, qui est la fréquence de résonance des électrons. Ces électrons rentrent alors en collision avec les ions et leur transfèrent l'énergie absorbée. La longueur d'onde correspondante est de quelques millimètres. Dans le cas du chauffage cyclotronique dit à la fréquence hybride basse on est dans l'ordre du Gigahertz, c'est à dire des ondes d'une longueur proche du centimètre qui est très faible par rapport aux dimensions du domaine occupé par le plasma confiné. Ce type d'onde est très efficace pour accélérer les électrons par absorption Landau

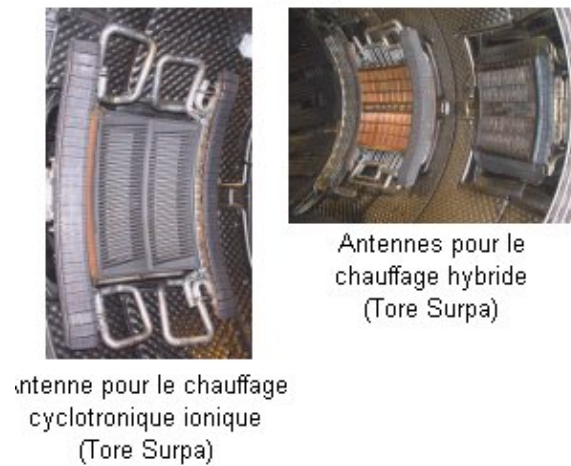


FIGURE 1.7 – Antennes

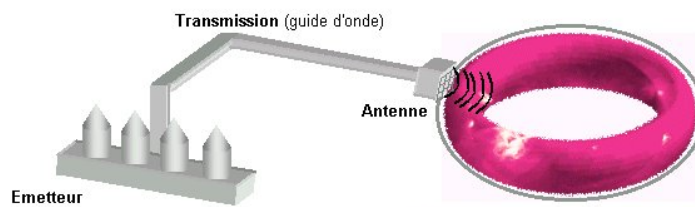


FIGURE 1.8 – Générateur

dans la direction toroïdale. En raison de cette capacité d'absorption directe et intense des électrons, l'efficacité de génération de courant de l'onde hybride compte parmi les meilleures. En conséquence le chauffage à la fréquence hybride basse est très utilisé dans les machines actuelles comme une méthode efficace pour la génération de courant non-inductif. Ce type de chauffage par des ondes électromagnétiques nécessite un générateur, des lignes de transmission et une antenne. Le générateur produit des ondes à la fréquence désirée, qui sont transportées par une ligne de transmission, le guide d'ondes, jusqu'à une antenne située dans une paroi du tokamak, c'est à dire l'enceinte de confinement, cette antenne envoie les ondes dans le plasma.

Dans cette thèse on se propose de développer une méthode numérique de simulation de la propagation dans le plasma d'un tokamak d'une onde de fréquence hybride basse.

1.2 Modèle

L'objectif de cette section est de présenter le modèle dit Full Wave qui décrit la propagation dans un plasma froid magnétisé des ondes électromagnétiques dans la gamme de fréquences de l'ordre de la fréquence hybride base. Ces ondes se propagent à un certain angle du champ magnétique statique assurant le confinement du plasma, ce champ magnétique dit extérieur est noté \mathbf{B}_0 . La fréquence cyclotronique électronique, ou pulsa-

tion gyromagnétique notée ω_{ce} , est donnée par $\omega_{ce} = \frac{|q_e|}{m_e} B_0$, la fréquence cyclotronique ionique notée ω_{ci} , est donnée par $\omega_{ci} = \frac{q_i}{m_i} B_0$ ou, m_e et m_i sont respectivement la masse de l'électron et de l'ion considérés, q_e et q_i sont respectivement la charge d'un électron et la charge d'un ion considérés. B_0 est la norme du champ magnétique statique \mathbf{B}_0 .

La pulsation gyromagnétique ou encore la fréquence cyclotronique de l'onde hybride basse est de l'ordre de la moyenne géométrique de ω_{ci} et ω_{ce} , c'est à dire, $\omega_{lh}^2 \sim \omega_{ci}\omega_{ce}$. Par ailleurs la pulsation des ondes hybrides basses ω_{lh} est nettement supérieure à la fréquence cyclotronique ionique ω_{ci} et bien inférieure à la fréquence cyclotronique électronique ω_{ce} , c'est à dire, plus grande qu'un facteur de l'ordre de $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$,

$$(1.2) \quad \omega_{ci}(\bar{\mathbf{x}}) \ll \omega_{lh} \ll \omega_{ce}(\bar{\mathbf{x}})$$

On fait dépendre ici ω_{ci} et ω_{ce} de la position $\bar{\mathbf{x}}$ car ces quantités dépendent de \mathbf{B}_0 , qui en réalité dépend aussi de la position, à moins que l'on choisisse constante, ce qui est supposé dans certaines simulations. Une application numérique simplifiée donnera une idée de la gamme de fréquences qui nous intéresse et les longueurs d'onde considérées. On se donne les quantités suivantes qui sont importante pour l'approximation numérique :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} q_i &= 1,6 * 10^{-19} C (= \text{Coulomb}) \\ m_i &= 1,6726 * 10^{-27} kg \\ q_e &= -1,6 * 10^{-19} C \\ m_e &= 0.91094 * 10^{-30} kg \\ B_0 &= 3,2 \text{ Tesla} \end{aligned}$$

donc on a :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \omega_{ce} &\simeq 5.6206 * 10^{11} rad s^{-1} \\ \omega_{ci} &\simeq 3.0611 * 10^8 rad s^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $\omega_{lh} \simeq 1.3117 * 10^{10} rad s^{-1}$. La longueur d'onde associée est de l'ordre de 14cm. Plus généralement on considère des fréquences entre 0.5 et 5 GHz, les longueurs d'ondes correspondantes sont comprises entre 6 cm et 6dm. L'onde incidente ω pourra alors être de l'ordre de $0.1\omega_{lh}$ à ω_{lh} . Les hypothèses faites sur la gamme des fréquences qui nous intéressent impliquent qu'on pourra négliger l'amortissement cyclotronique sur les ions, par contre l'inégalité $\omega \ll \omega_{ce}$ signifie que les électrons sont fortement magnétisés, d'où le seul effet thermique important en dehors de la zone de résonance hybride basse est l'amortissement Landau dû au mouvement libre des électrons le long des lignes de champ magnétique, [52]. Les auteurs déjà signalés avancent qu'on peut alors supposer travailler dans le cadre d'une approximation dite des plasmas froid pour décrire le couplage et la propagation d'une onde au bord de l'antenne à la région d'absorption dans le plasma. L'approximation dite plasma froid suppose que les particules du milieu sont immobiles en

l'absence d'une perturbation et que sur l'action d'un champ électromagnétique elles oscillent autour de leur position d'équilibre fixe dans l'espace. Cela revient à négliger l'agitation thermique de ces particules devant leur mouvement d'oscillation.

1.2.1 The full wave system

Le plasma confiné dans un tokamak est décrit comme un ensemble de particules chargées d'électrons et plusieurs espèces d'ions que créent les champs électromagnétiques qui s'additionnent au champ dit extérieur de confinement, et champs créés par les ondes injectées qui affectent le mouvement des particules, on veut connaître la portée de ce phénomène. La propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma confiné est décrite par les équations de Maxwell [4] :

$$(1.5) \quad \operatorname{div} \mathcal{D} = \varrho \quad (\text{loi de Gauss électrique}),$$

$$(1.6) \quad \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 \quad (\text{loi de Gauss magnétique}),$$

$$(1.7) \quad \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (\text{loi de Faraday}),$$

$$(1.8) \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (\text{loi d'Ampère})$$

où \mathcal{E} est le champ électrique, \mathcal{H} est le champ magnétique, \mathcal{D} est le champ d'induction électrique et \mathcal{B} est le champ d'induction magnétique, ces champs vectoriels sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^3$. Par ailleurs \mathcal{J} est la densité de courant total et ϱ la densité de charge électrique. \mathcal{J} est une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^3$ et ϱ est une fonction scalaire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Ces quantités vérifient une équation de conservation de la charge :

$$(1.9) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{J} = 0.$$

Pour déterminer \mathcal{J} et ϱ il faudra coupler le système des équations de Maxwell, au moins de façon implicite avec les équations décrivant le mouvement des particules. Mais avant tout, les équations de Maxwell ne permettent pas de déterminer les champs électromagnétiques complètement, le système doit être fermé à l'aide de ce qui est appelé des lois de comportement. Si on suppose que le milieu est homogène, les lois de comportement peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$(1.10) \quad \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{H}$$

$$(1.11) \quad \mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E}$$

où ε_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du vide. Une substitution élémentaire dans les équations (1.5) nous donne les équations

décrivant la propagation des ondes dans un plasma anisotrope vérifiée par \mathbf{B} et \mathcal{E} :

$$(1.12) \quad \mathbf{rot} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$(1.13) \quad \mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathcal{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}.$$

$$(1.14) \quad \text{div}(\varepsilon_0 \mathcal{E}) = \varrho,$$

$$(1.15) \quad \text{div} \mathbf{B} = 0,$$

Pour résoudre ce système on écrit formellement que les champs \mathcal{E} et \mathbf{B} sont l'addition d'une partie statique, à l'équilibre sans la présence de l'onde injectée, plus une très petite perturbation due à l'onde apportée par l'antenne, c'est à dire :

$$(1.16) \quad \mathcal{E} = \mathbf{E}_0 + \epsilon \bar{\mathcal{E}}$$

$$(1.17) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \epsilon \bar{\mathbf{B}}$$

avec $\epsilon \ll 1$.

Par la suite on suppose que dans l'absence de l'onde émise par l'antenne on est à l'équilibre stationnaire du plasma, donc on suppose que $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$.

Maintenant on va chercher les solutions du système (1.12) avec un comportement périodique en temps ou encore en régime harmonique, c'est à dire, une dépendance temporelle de la forme $e^{-i\omega t}$, avec $\omega > 0$ la pulsation de l'onde. Ainsi :

$$(1.18) \quad \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

$$(1.19) \quad \bar{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

et

$$(1.20) \quad \mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

$$(1.21) \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \epsilon \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

avec $\text{Re}[r]$ la partie réelle du nombre complexe r . Si on suppose que les parties statiques de \mathcal{J} et ϱ sont aussi nulles on a :

$$(1.22) \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \bar{\mathcal{J}} = \epsilon \text{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

$$(1.23) \quad \varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho_0(\mathbf{x}) + \epsilon \bar{\varrho}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \text{Re}[\varrho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}]$$

Par ailleurs le champ magnétique extérieur est statique et vérifie que $\text{div} \mathbf{B}_0 = 0$ et $\mathbf{rot} \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$. Si on introduit ces approximations dans l'équation (1.12) on trouve que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont solutions du système d'équations suivant :

$$(1.24) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B},$$

$$(1.25) \quad \mu_0^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{B} + i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{J}.$$

$$(1.26) \quad \text{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho,$$

$$(1.27) \quad \text{div} \mathbf{B} = 0,$$

Par substitution on peut éliminer la variable \mathbf{B} des équations précédentes et on obtient alors l'équation :

$$(1.28) \quad \mathbf{rot rot E} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{dans } \Omega,$$

avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Les hypothèses faites sur le comportement du milieu nous permettent d'appliquer la loi d'Ohm :

$$(1.29) \quad \mathbf{J} = \underline{\sigma} \mathbf{E}.$$

où $\underline{\sigma}$ est le tenseur de conductivité. Encore par substitution on obtient l'équation caractérisant le modèle "full wave" :

$$(1.30) \quad \mathbf{rot rot E} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(\underline{\mathbf{I}} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \underline{\sigma} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega.$$

où $\underline{\mathbf{I}}$ est la matrice identité. Ou encore

$$(1.31) \quad \mathbf{rot rot E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega.$$

où $\underline{\mathbf{K}}$ est le tenseur diélectrique défini par :

$$(1.32) \quad \underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{I}} + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \underline{\sigma}$$

il est appelé aussi réponse du plasma. Comme son nom l'indique, il caractérise le milieu et détermine les possibilités de propagation des ondes. Dans la section suivante on déterminera le tenseur diélectrique $\underline{\mathbf{K}}$.

1.2.2 Expression du tenseur diélectrique $\underline{\mathbf{K}}$

Les champs \mathcal{E} et \mathcal{B} solutions des équations de Maxwell sont déterminés par le champ de vecteur densité de courant \mathcal{J} . Le champ \mathcal{J} peut être décomposé en deux parties, l'une qui sera obtenue à partir d'un modèle fluide décrivant le mouvement des particules du plasma qu'on notera \mathcal{J}_{class} et une deuxième partie qui est un terme stabilisateur du à l'amortissement Landau qu'on notera \mathcal{J}_{res} . Pour déterminer la partie de la densité de courant \mathcal{J}_{class} on considère un plasma composé d'électrons et d'ions en présence d'un champ magnétique extérieur \mathcal{B} et un champ électrique \mathcal{E} . On notera les quantités associées à chacune des espèces avec un sous-indice ξ , par exemple la charge et la masse d'une particule d'indice ξ sera noté q_ξ et m_ξ respectivement. Si on note $\mathbf{u}_\xi(t, \mathbf{x})$ la vitesse du fluide d'indice ξ , à partir des équations de Vlasov [17] on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$(1.33) \quad m_\xi \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_\xi + m_\xi (\mathbf{u}_\xi \cdot \nabla) \mathbf{u}_\xi - q_\xi (\mathcal{E} + \mathbf{u}_\xi \times \mathcal{B}) + m_\xi \nu_c \mathbf{u}_\xi - \frac{1}{n_\xi} \nabla p_\xi = \mathbf{0}$$

avec ν_c la fréquence de collision électron-ions et \mathbf{p}_ξ la pression associée à l'espèce d'indice ξ . En fait l'approximation "plasma froid" permet de négliger les termes de pression, ce qui revient à dire que la vitesse de phase des ondes considérées note v_ϕ doit être infiniment plus petite que la vitesse thermique des espèces, notée v_{th} , donc on suppose que $v_\phi \ll v_{th}$. On a supposé le plasma en équilibre avant l'arrivée de l'onde électromagnétique qui agit comme une petite perturbation locale, ainsi :

$$(1.34) \quad \mathbf{u}_\xi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{0,\xi}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{u}_{1,\xi}(\mathbf{x}, t)$$

avec $\mathbf{u}_{0,\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ si on suppose que les particules sont immobiles avant l'arrivée de l'onde. Maintenant on introduit les développements (1.16), (1.17) et (1.34) dans l'équation (1.33) on obtient à l'ordre 0 en ϵ que $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ et à l'ordre 1 que :

$$(1.35) \quad m_\xi \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_{1,\xi} - q_\xi (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{1,\xi} \times \mathbf{B}_0) + m_\xi \nu_c \mathbf{u}_{1,\xi} = \mathbf{0}$$

Par ailleurs la densité de la charge ρ est donnée par $\rho = q n$ et la densité du courant par \mathcal{J} , ainsi :

$$(1.36) \quad \rho = \sum_{\xi} \rho_{\xi} = \sum_{\xi} q_{\xi} n_{\xi}(\mathbf{x}, t)$$

$$(1.37) \quad \mathcal{J} = \sum_{\xi} \mathcal{J}_{\xi} = \sum_{\xi} q_{\xi} n_{\xi}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_{\xi}(\mathbf{x}, t)$$

En multipliant (1.35) par $\frac{n_{\xi} q_{\xi}}{m_{\xi}}$ on obtient :

$$(1.38) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}_{\xi} + \frac{1}{q_{\xi}} (\mathcal{J}_{\xi} \nabla \mathcal{J}_{\xi}) - \frac{q_{\xi}}{m_{\xi}} (\rho_{\xi} \mathbf{E} + \mathcal{J}_{\xi} \times \mathbf{B}_0) + \nu_c \mathcal{J}_{\xi} = \mathbf{0}$$

Si maintenant on réécrit (1.22) :

$$(1.39) \quad \mathcal{J}_{\xi} = \mathcal{J}_{0,\xi} + \epsilon \mathcal{J}_{1,\xi}$$

on obtient au premier ordre en ϵ :

$$(1.40) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J}_{1,\xi} - \frac{q_{\xi}}{m_{\xi}} (\rho_{\xi} \mathbf{E} + \mathcal{J}_{1,\xi} \times \mathbf{B}_0) + \nu_c \mathcal{J}_{1,\xi} = \mathbf{0}$$

Ensuite on introduit le développement (1.22), c'est à dire on suppose que :

$$(1.41) \quad \mathcal{J}_{1,\xi} = \text{Re}[\mathbf{J}_{\xi}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$$

$$(1.42) \quad \rho_{1,\xi}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\rho_{\xi}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$$

et (1.20) on obtient :

$$(1.43) \quad -i\omega \mathcal{J}_{\xi} - \frac{q_{\xi}}{m_{\xi}} (\rho_{\xi} \mathbf{E} + \mathcal{J}_{\xi} \times \mathbf{B}_0) + \nu_c \mathcal{J}_{\xi} = \mathbf{0}$$

Maintenant on introduit la fréquence du plasma $\omega_{p,\xi}$ et la fréquence cyclotronique $\omega_{c,\xi}$ de chaque espèce ξ :

$$(1.44) \quad \omega_{p,\xi} = \sqrt{\frac{n_{0,\xi} q_\xi^2}{\epsilon_0 m_\xi}} \quad \text{et} \quad \omega_{c,\xi} = \frac{|q_\xi|}{m_\xi} B_0$$

on obtient :

$$(1.45) \quad \imath(\omega + \imath\nu_c)\mathbf{J}_\xi + \epsilon_0\omega_{p,\xi}^2\mathbf{E} + \text{sign}(q_\xi)\omega_{c,\xi}\mathbf{J}_\xi \times \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

avec $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}$ (ici $B_0 = \|\mathbf{B}_0\|$).

On se place alors dans le repère de Stix introduit dans [55]. À chaque point \mathbf{x} on considère le repère orthonormal donné par $(\mathbf{e}_1(\mathbf{x}), \mathbf{e}_2(\mathbf{x}), \mathbf{e}_3(\mathbf{x}))$ où $\mathbf{e}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})$, c'est à dire, parallèle au champ magnétique extérieur \mathbf{B}_0 . On note alors

$$\mathbf{v}_\perp = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_\parallel = v_3\mathbf{e}_3.$$

Dans ce référentiel, les vecteurs \mathbf{v} peuvent être exprimés à l'aide de leurs composantes parallèles et perpendiculaire à \mathbf{B}_0 :

$$(1.46) \quad \begin{aligned} v_1 &= v_\perp \cos \phi \\ v_2 &= v_\perp \sin \phi \\ v_3 &= v_\parallel \end{aligned}$$

avec $v_\perp = |\mathbf{v}_\perp| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ et ϕ représente l'azimut par rapport à l'axe $x_1 > 0$.

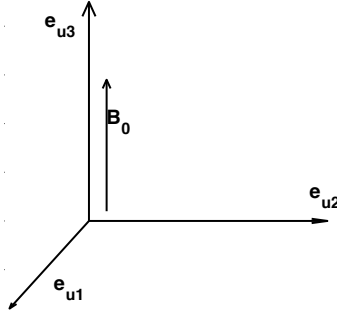


FIGURE 1.9 – Système de Stix

Pour calculer \mathbf{J}_ξ on va calculer $\mathbf{J}_{\xi,\perp}$ et $\mathbf{J}_{\xi,\parallel}$.

En faisant le produit vectoriel à droite de l'équation (1.45) avec \mathbf{b} on obtient :

$$(1.47) \quad \imath(\omega + \imath\nu_c)\mathbf{J}_\xi \times \mathbf{b} + \epsilon_0\omega_{p,\xi}^2\mathbf{E} \times \mathbf{b} + \text{sign}(q_\xi)\omega_{c,\xi}(\mathbf{J}_\xi \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

mais $\mathbf{J}_\perp = \mathbf{b} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{b}) = -((\mathbf{J} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b})$ on obtient :

$$(1.48) \quad \imath(\omega + \imath\nu_c)\mathbf{J}_\xi \times \mathbf{b} + \epsilon_0\omega_{p,\xi}^2\mathbf{E} \times \mathbf{b} - \text{sign}(q_\xi)\omega_{c,\xi}\mathbf{J}_{\xi,\perp} = \mathbf{0},$$

En faisant maintenant le produit vectoriel avec \mathbf{b} à gauche on vérifie que :

$$(1.49) \quad \iota(\omega + \iota\nu_c)\mathbf{J}_{\xi,\perp} + \varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2\mathbf{E}_\perp + \text{sign}(q_\xi)\omega_{c,\xi}\mathbf{J}_\xi \times \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

De (1.48) et (1.49) on peut éliminer $\mathbf{J}_\xi \times \mathbf{b}$ dans (1.48) et alors :

$$(1.50) \quad ((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{c,\xi}^2)\mathbf{J}_{\xi,\perp} = \iota(\omega + \nu_c)\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2\mathbf{E}_\perp - \text{sign}(q_\xi)\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2\omega_{c,\xi}\mathbf{E} \times \mathbf{b}.$$

Alors on a :

$$(1.51) \quad \mathbf{J}_{\xi,\perp} = \frac{\iota(\omega + \nu_c)\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2}{((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{c,\xi}^2)}\mathbf{E}_\perp - \frac{\text{sign}(q_\xi)\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2\omega_{c,\xi}}{((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{c,\xi}^2)}\mathbf{E} \times \mathbf{b}.$$

Pour calculer $\mathbf{J}_{\xi,\parallel} = (\mathbf{J}_{\xi,\parallel} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}$ on fait le produit scalaire de (1.45) avec \mathbf{b} :

$$(1.52) \quad \iota(\omega + \iota\nu_c)\mathbf{J}_\xi \cdot \mathbf{b} + \varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2\mathbf{E} \cdot \mathbf{b} + \text{sign}(q_\xi)\omega_{c,\xi}(\mathbf{J}_\xi \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

Et alors on obtient :

$$(1.53) \quad \mathbf{J}_{\xi,\parallel} = \frac{\iota\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2}{\omega + \nu_c}\mathbf{E}_\parallel.$$

Donc la densité de courant \mathbf{J}_ξ associée à chaque espèce ξ est donnée par :

$$(1.54) \quad \mathbf{J}_\xi = \frac{\iota\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2}{\omega + \nu_c}\mathbf{E}_\parallel + \frac{\iota(\omega + \nu_c)\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2}{((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{c,\xi}^2)}\mathbf{E}_\perp - \frac{\text{sign}(q_\xi)\varepsilon_0\omega_{p,\xi}^2\omega_{c,\xi}}{((\omega + \nu_c)^2 - \omega_{c,\xi}^2)}\mathbf{E} \times \mathbf{b}$$

Maintenant on note $\alpha(\mathbf{x}) = \omega + \nu_c(\mathbf{x})$ et on additionne les contributions de chaque espèce pour obtenir la densité de courant \mathbf{J}_{cla} :

$$(1.55) \quad \mathbf{J}_{cla} = \iota\varepsilon_0\omega \sum_\xi \frac{\omega_{p,\xi}^2}{\omega \alpha} \mathbf{E}_\parallel + \iota\varepsilon_0\omega \frac{\alpha}{\omega} \sum_\xi \frac{\omega_{p,\xi}^2}{\alpha^2 - \omega_{c,\xi}^2} \mathbf{E}_\perp - \varepsilon_0\omega \frac{1}{\omega} \sum_\xi \frac{\text{sign}(q_\xi)\omega_{p,\xi}^2\omega_{c,\xi}}{\alpha^2 - \omega_{c,\xi}^2} \mathbf{E} \times \mathbf{b}$$

Par la suite on va noter :

$$(1.56) \quad \beta(\mathbf{x}) = \sum_\xi \frac{\omega_{p,\xi}^2 \mathbf{x}}{\omega \alpha(\mathbf{x})}$$

$$(1.57) \quad \gamma(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(\mathbf{x})}{\omega} \sum_\xi \frac{\omega_{p,\xi}^2(\mathbf{x})}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,\xi}^2(\mathbf{x})}$$

$$(1.58) \quad \delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega} \sum_\xi \frac{\text{sign}(q_\xi)\omega_{p,\xi}^2(\mathbf{x})\omega_{c,\xi}(\mathbf{x})}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,\xi}^2(\mathbf{x})}$$

Dans le repère de Stix on a :

$$(1.59) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= E_1(\mathbf{x}) e_1(\mathbf{x}) + E_2(\mathbf{x}) e_2(\mathbf{x}) + E_3(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) \\ \mathbf{E}_\parallel(\mathbf{x}) &= E_3(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) &= E_2(\mathbf{x}) e_1(\mathbf{x}) - E_1(\mathbf{x}) e_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{E}_\perp(\mathbf{x}) &= E_1(\mathbf{x}) e_1(\mathbf{x}) + E_2(\mathbf{x}) e_2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Alors on peut expliciter la partie dite classique de la densité du courant dans le repère de Stix :

$$(1.60) \quad J_{cla}(\mathbf{x}) = \imath \epsilon_0 \omega \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{x}) & -\imath \delta(\mathbf{x}) & 0 \\ \imath \delta(\mathbf{x}) & \gamma(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \beta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1(\mathbf{x}) \\ E_2(\mathbf{x}) \\ E_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Et donc le tenseur de conductivité classique dans le repère de Stix :

$$(1.61) \quad \underline{\sigma}_{cla}(\mathbf{x}) = \imath \epsilon_0 \omega \begin{pmatrix} \gamma(\mathbf{x}) & -\imath \delta(\mathbf{x}) & 0 \\ \imath \delta(\mathbf{x}) & \gamma(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & \beta(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Alors si maintenant on note :

$$(1.62) \quad S(\mathbf{x}) = 1 - \gamma(\mathbf{x})$$

$$(1.63) \quad D(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$$

$$(1.64) \quad P(\mathbf{x}) = 1 - \beta(\mathbf{x})$$

Le tenseur diélectrique dans le repère de Stix s'écrit :

$$(1.65) \quad \begin{aligned} \underline{\epsilon}(\mathbf{x}) &= \underline{\mathcal{I}} + \frac{\imath}{\epsilon_0 \omega} \underline{\sigma}_{cla}(\mathbf{x}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \gamma(\mathbf{x}) & \imath \delta(\mathbf{x}) & 0 \\ -\imath \delta(\mathbf{x}) & 1 - \gamma(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S(\mathbf{x}) & -\imath D(\mathbf{x}) & 0 \\ \imath D(\mathbf{x}) & S(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & P(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A ce stade on va introduire la partie de la densité de courant due à l'amortissement Landau. En effet un amortissement possible est du à un effet non collisionnel découvert par L.D. Landau [40]. Avec ce mécanisme local, on peut générer du courant dans un plasma par interaction d'ondes à la fréquence hybride basse avec des électrons résonnants, c'est à dire, dont la vitesse parallèle au champ extérieur \mathbf{B}_0 avoisine la vitesse de phase de l'onde. Ces électrons sont ainsi accélérés dans le sens de \mathbf{B}_0 . Ainsi le courant généré par cet effet est de la forme :

$$(1.66) \quad \mathbf{J}_{res}(\mathbf{x}) = \gamma_e(\mathbf{x}) \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{x})$$

Les analyses faites dans des travaux antérieures, voir [52], montrent que le coefficient $\gamma_e(\mathbf{x})$ est obtenu à partir d'une linéarisation locale des équations de Vlasov dans un voisinage du point \mathbf{x} . Si on suppose une distribution maxwellienne des électrons dans le plasma, [52] le taux d'amortissement Landau local γ_e vaut :

$$(1.67) \quad \gamma_e = \epsilon \omega^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2(\mathbf{x})}{k_{\parallel}^3} \left(\frac{m_e}{k_B T_e(\mathbf{x})} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\omega^2 m_e}{2 k_{\parallel}^2 k_B T_e(\mathbf{x})} \right)$$

où T_e est la température des électrons, k_{\parallel} la composante du vecteur d'onde \mathbf{k} parallèle à \mathbf{B}_0 , k_B la constante de Boltzmann. En additionnant les contributions de \mathbf{J}_{cla} et \mathbf{J}_{res} on obtient l'expression du tenseur de conductivité dans le repère de Stix :

$$(1.68) \quad \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{cla} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_e \end{pmatrix}$$

Alors le tenseur de réponse du plasma dans le repère de Stix prend la forme suivante :

$$(1.69) \quad \underline{\mathbf{K}}_{Stix}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} S(\mathbf{x}) & -\imath D(\mathbf{x}) & 0 \\ \imath D(\mathbf{x}) & S(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & P(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \frac{\imath}{\epsilon_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_e(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Si on considère maintenant la base canonique de \mathbb{R}^3 , $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et on appelle $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ la matrice de changement de base local avec le système de Stix, voir appendice A, on aura :

$$(1.70) \quad \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{x}) \underline{\mathbf{K}}_{Stix}(\mathbf{x}) \mathbb{P}^T(\mathbf{x})$$

avec :

$$(1.71) \quad \mathbb{P}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ -\frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ 0 & -\frac{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} & \frac{B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \end{pmatrix}$$

où l'on note $\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_k = \sqrt{B_{0,i}^2(\mathbf{x}) + B_{0,j}^2(\mathbf{x})}$ avec $k = \{1, 2, 3\}/\{i, j\}$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$ la norme euclidienne.

1.2.3 Analyse spectrale du tenseur de conductivité $\underline{\mathbf{K}}$

Remarque 1.1. Pour faire l'étude spectrale du tenseur de conductivité $\underline{\mathbf{K}}$, on suppose que les fonctions $\nu_c, \gamma_e, \omega_{c,\xi}$ et $\omega_{p,\xi}$, pour chaque espèce ξ (ions et électrons), sont continues de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R} et bornées inférieurement et supérieurement par des nombres strictement positifs.

Proposition 1.1. Les valeurs propres de la matrice $\underline{\mathbf{K}}$ sont $\lambda_1 = S + D, \lambda_2 = S - D$ et $\lambda_3 = P_L$. De plus, il existe une base de vecteurs propres indépendants des valeurs S, D et P_L .

En effet, les vecteurs propres selon, respectivement, les valeurs propres $S + D, S - D$ et P_L sont :

$$(1.72) \quad \mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \imath \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On se donne les deux lemmes suivants.

Lemme 1.1. *La fonction $\mathbf{r} \mapsto \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})$ est bornée, continue de $\overline{\Omega}$ dans $M_3(\mathbb{C})$ et $\max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} \|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})\|_0 = K^+ < +\infty$ avec*

$$K^+ = \max_{i=1,2,3} \left\{ \max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} |\lambda_i(\mathbf{r})| \right\}$$

où $\|\cdot\|_0$ représente la norme matricielle induite par la norme vectorielle euclidienne et λ_i les valeurs propres de $\underline{\mathbf{K}}$ définies dans la proposition (1.1).

Démonstration. Soit $\mathbf{r} \in \overline{\Omega}$, la norme du tenseur $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})$ induite par la norme vectorielle euclidienne peut être exprimée par

$$(1.73) \quad \|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})\|_0 = [\text{valeur propre maximale de } \underline{\mathbf{K}}^H(\mathbf{r})\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})]^{1/2}.$$

D'après (5.48) et (5.49), on a

$$\underline{\mathbf{K}}^H(\mathbf{r})\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} |S(\mathbf{r})|^2 + |D(\mathbf{r})|^2 & -2\imath \operatorname{Re}[\overline{S}(\mathbf{r})D(\mathbf{r})] & 0 \\ 2\imath \operatorname{Re}[\overline{S}(\mathbf{r})D(\mathbf{r})] & |S(\mathbf{r})|^2 + |D(\mathbf{r})|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |P_L(\mathbf{r})|^2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $|P_L(\mathbf{r})|^2, |S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})|^2, |S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})|^2$. D'où (1.73) devient

$$\|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r})\|_0 = \max \left\{ |S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})|, |S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})|, |P_L(\mathbf{r})| \right\}.$$

Ainsi on obtient le résultat du lemme en prenant

$$K^+ = \max \left\{ \max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} |S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})|, \max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} |S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})|, \max_{\mathbf{r} \in \overline{\Omega}} |P_L(\mathbf{r})| \right\}$$

qui est effectivement bornée grâce à la remarque (1.1). □

Remarque 1.2. *Le fait que K^+ soit la valeur singulière maximale implique*

$$(1.74) \quad \operatorname{Re}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{x})] \leq K^+ (\mathbf{x}^H \mathbf{x}).$$

Lemme 1.2. *Il existe une constante $\zeta > 0$ dépendant de ω et telle que*

$$(1.75) \quad |\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x}| \geq \operatorname{Im}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x})] \geq \zeta (\mathbf{x}^H \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Démonstration. La proposition (1.1) nous montre qu'il existe une matrice unitaire $\underline{\mathbf{U}}$ constante et une matrice diagonale $\underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r})$ telles que $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \underline{\mathbf{U}}^H$. D'où, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$

$$\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \underline{\mathbf{U}} \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \underline{\mathbf{U}}^H \mathbf{x} = \mathbf{y}^H \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \mathbf{y}$$

avec $\mathbf{y} = \underline{\mathbf{U}}^H \mathbf{x}$ vérifiant $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$. On a donc

$$\operatorname{Im}[\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{r}) \mathbf{x}] = \operatorname{Im}[\mathbf{y}^H \underline{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{r}) \mathbf{y}] = \sum_{i=1}^3 \operatorname{Im}[\lambda_i(\mathbf{r})] |y_i|^2$$

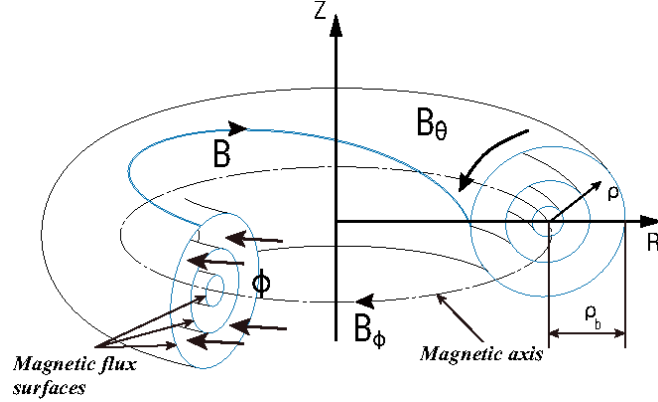


FIGURE 1.10 – Champ extérieur

Soit $b_s(\mathbf{r}) = \omega_{cs}^2(\mathbf{r}) - \omega^2 + \nu^2(\mathbf{r})$, on a alors

$$\text{Im}[\lambda_1(\mathbf{r})] = \text{Im}[S(\mathbf{r}) + D(\mathbf{r})] = \frac{\nu_c(\mathbf{r})}{\omega} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{r})}{b_s^2(\mathbf{r}) + 4\omega^2\nu_c^2(\mathbf{r})} \left[(\omega_{cs}(\mathbf{r}) - \omega)^2 + \nu_c^2(\mathbf{r}) \right],$$

$$\text{Im}[\lambda_2(\mathbf{r})] = \text{Im}[S(\mathbf{r}) - D(\mathbf{r})] = \frac{\nu_c(\mathbf{r})}{\omega} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{r})}{b_s^2(\mathbf{r}) + 4\omega^2\nu_c^2(\mathbf{r})} \left[(\omega_{cs}(\mathbf{r}) + \omega)^2 + \nu_c^2(\mathbf{r}) \right],$$

$$\text{Im}[\lambda_3(\mathbf{r})] = \text{Im}[P_L(\mathbf{r})] = \frac{\nu_c(\mathbf{r})}{\omega(\omega^2 + \nu_c^2(\mathbf{r}))} \sum_s \omega_{ps}^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0\omega} \gamma_e(\mathbf{r}).$$

D'après les hypothèses faites sur les différentes fréquences, on peut conclure que $\text{Im}[\lambda_i]_{i=1,2,3}$ sont uniformément bornées inférieurement. On pose alors

$$\zeta = \min_{i=1,2,3} \left\{ \min_{\mathbf{r} \in \Omega} \text{Im}[\lambda_i(\mathbf{r})] \right\}.$$

Par conséquent $\zeta > 0$ et on obtient bien le résultat suivant

$$\text{Im}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{x})] \geq \zeta(\mathbf{x}^H \mathbf{x}).$$

□

1.2.4 Champ magnétique extérieur \mathbf{B}_0

Le confinement, l'équilibre et la stabilité du plasma sont assurés par un champ magnétique extérieur, noté \mathbf{B}_0 , qui est la superposition d'un champ toroïdal $B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ et d'un champ poloïdal $B_\theta \mathbf{e}_\theta$. On obtient ainsi un champ hélicoïdal. Les particules du plasma confiné, les ions et les électrons tournent autour des lignes de force du champ magnétique, voir figure 1.10. Idéalement une particule après une orbite sur l'axe majeure doit retourner à la position initiale, dans la pratique cela n'est pas le cas. Ceci dépend d'une relation entre le grand rayon R_0 et le petit rayon a du tokamak ainsi que du rapport entre le champ

toroïdal et poloïdal. L'écart est donné par un angle $i(r) = 2\pi \frac{R_0}{r} \frac{B_\theta}{B_\varphi}$. Dans la littérature sur le confinement magnétique, voir [55], on introduit un facteur de sécurité défini par :

$$q(r) = \frac{2\pi}{i(r)} = \frac{r}{R_0} \frac{B_\varphi}{B_\theta}.$$

Où $r = \sqrt{(R - R_0)^2 + Z^2}$, $R = \sqrt{x^2 + y^2} = R_0 + r \cos \theta$.

En fait, pour atteindre une bonne stabilité MHD, il est assumé que $q(r)$ doit vérifier $q \sim 1$ à l'intérieur du tokamak. Cela implique que le champ poloïdal B_θ est nettement plus petit que le champ toroïdal B_φ . On supposera que $q(r)$ est une fonction parabolique de r :

$$(1.76) \quad q(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 (q_b - q_c) + q_c \quad 0 \leq r \leq a$$

avec q_c la valeur au centre du plasma et q_b la valeur au bord du plasma.

Suivant les thèses de Sébelin [52] et Litaudon [42] sur le même sujet on considère le champ extérieur défini en coordonnées cylindriques/toroïdales (R, Z, φ) :

$$(1.77) \quad \mathbf{B}_0(R, Z, \varphi) = \frac{B_0 R_0}{R} \begin{pmatrix} -Z \\ \frac{\rho(r)q(r)}{R - R_0} \\ \frac{\rho(r)q(r)}{1} \end{pmatrix}$$

Où B_0 est une constante et $\rho(r) = \sqrt{R_0^2 - r^2}$, $r \ll R_0$. Il apparait que le champ magnétique extérieur ne varie pas avec φ . En coordonnées cartésiennes on obtient

$$(1.78) \quad \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{0,R} \\ B_{0,Z} \\ B_{0,\varphi} \end{pmatrix}$$

Une version simplifiée considérée par Hattori dans sa thèse est donnée en coordonnées (R, Z, φ) par :

$$(1.79) \quad \mathbf{B}_0(R, Z, \varphi) = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et en coordonnées cartésiennes :

$$(1.80) \quad \mathbf{B}_0(x, y, z) = B_0 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\varphi = \arctan y/x$.

1.2.5 Profil de densité des espèces, ions et électrons

Dans les cas des simulations numériques on va considérer deux espèces de particules, les électrons dont la densité est notée n_e et les ions dont la densité est notée n_i . Par ailleurs on considèrera deux profils de densité. Dans les cas le plus simple on suppose la densité constante. Dans un deuxième cas on suppose que chaque densité est de forme parabolique radiale avec un maximum au centre du plasma, c'est à dire :

$$(1.81) \quad n_e(\mathbf{x}) = n_{e,max} \left[(1 - \epsilon) \left(1 - \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2}{a^2} \right) + \epsilon \right]$$

avec $0 < \epsilon \ll 1$, et $n_{e,max}$ la densité des électrons au centre de la section du tore. On supposera que la densité des ions a le même profil en remplaçant $n_{e,max}$ par $n_{i,max}$, dans les deux cas la valeur de la densité dans le centre de la section du tore.

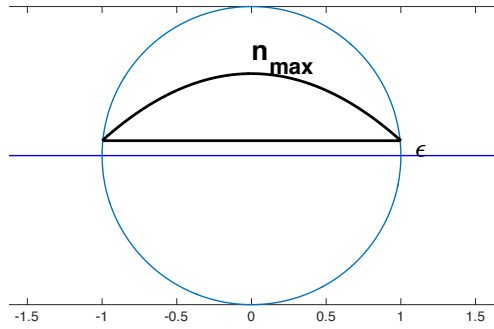


FIGURE 1.11 – Profil des densités

1.3 Conditions aux limites

On suppose que le bord Γ est composé de deux parties de mesures non nulles Γ_A et Γ_C où Γ_A représente l'antenne et Γ_C sa partie complémentaire dans Γ . Les conditions au bord de type Dirichlet et Neumann sont traitées indépendamment sur Γ_A . Sur la deuxième partie du bord $\Gamma_C = \Gamma \setminus \Gamma_A$, le champ électrique vérifie la condition du conducteur parfait suivante :

$$(1.82) \quad \mathcal{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C$$

1.3.1 Conditions au bord naturelles

Le plasma n'est parcouru par aucun courant par contre un courant superficiel \mathbf{j}_s parcourt l'antenne. On pose

$$(1.83) \quad \mathcal{J} = \mathbf{j}_s \delta_{\Gamma_A} \quad \text{avec } \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{n} = 0$$

Lemme 1.3. (Condition de saut entre deux milieux magnétiques)[36]

Soit Γ_{12} l'interface entre deux milieux Ω_1 et Ω_2 , on note \mathbf{n}_{12} un vecteur unitaire sortant par rapport au milieu Ω_1 . Les champs magnétiques vérifient alors les égalités suivantes sur Γ_{12} :

$$(1.84) \quad \mathcal{B}_{n_2} - \mathcal{B}_{n_1} = \mathbf{0},$$

$$(1.85) \quad \mathcal{H}_{T_2} - \mathcal{H}_{T_1} = \mathbf{j}_s \times \mathbf{n}_{12}$$

En utilisant le lemme 1.3, on peut montrer que le champ électrique \mathbf{E} vérifie en régime harmonique sur Γ_A la condition suivante [36] :

$$(1.86) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A,$$

où $\mathbf{j}_s(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[\mathbf{j}_s(\mathbf{x}) \exp^{-i\omega t}]$.

Sur le bord complémentaire de l'antenne, la condition s'écrit $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Les équations vérifiées par le champ électrique \mathbf{E} en régime harmonique sont données par

$$(1.87) \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(1.88) \quad \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(1.89) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C,$$

$$(1.90) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A$$

L'équation (1.88) découle de la divergence de l'équation (1.87).

1.3.2 Conditions au bord essentielles

On définit les espaces suivants

$$(1.91) \quad \mathbf{H}(\text{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}) \in L^2(\Omega)\},$$

$$(1.92) \quad \mathbf{X}(\text{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega).$$

L'équation (1.90) décrivant la condition sur l'antenne Γ_A de type Neumann peut être remplacée par la condition au limite de type Dirichlet non homogène suivante

$$(1.93) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{sur } \Gamma_A.$$

Le système d'équations (1.87) - (1.90) devient

$$(1.94) \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(1.95) \quad \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(1.96) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C,$$

$$(1.97) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \quad \text{sur } \Gamma_A.$$

La régularité de \mathbf{h} entraîne que l'on fasse l'hypothèse suivante : S'il existe une solution à ces équations qui appartient à $\mathbf{L}^2(\Omega)$, alors $\mathbf{E} \in \mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$. Il faut donc que $\tilde{\mathbf{h}}$, prolongement de \mathbf{h} par $\mathbf{0}$ à tout Γ , soit la trace d'un champ $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$. Or l'application γ_{Γ} est surjective de $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ dans $\Upsilon_{\partial\Omega}$ (voir la proposition 2.9), donc si $\tilde{\mathbf{h}} \in \Upsilon_{\partial\Omega}$ alors il existe $\mathbf{E}_a \in \mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ tel que $\mathbf{E}_a \times \mathbf{n}_{|\Gamma_A} = \tilde{\mathbf{h}}$. La fonction \mathbf{E}_a est un relèvement de la fonction \mathbf{E} et on peut écrire

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}_a$$

avec $\tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_A} = \mathbf{0}$.

Le problème (1.94) - (1.97) devient alors

Trouver une fonction $\tilde{\mathbf{E}}$ vérifiant les équations suivantes

$$(1.98) \quad \text{rot rot } \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}} = -\text{rot rot } \mathbf{E}_a + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_a \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(1.99) \quad \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{E}}) = -\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_a) \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(1.100) \quad \tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C,$$

$$(1.101) \quad \tilde{\mathbf{E}} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_A.$$

On va établir dans le chapitre suivant la formulation variationnelle des équations précédentes pour passer à la suite aux éléments finis.

2 Formulations variationnelles

Dans ce chapitre on va rappeler la formulation variationnelle des équations (1.87)-(1.90) puis étudier le caractère bien posé du problème variationnel provenant de cette formulation, [36], [8]. Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution de ces deux problèmes, on tient compte de l'effet collisionnel et de l'amortissement Landau. Le théorème utilisé pour la démonstration est celui de Babuska-Brezzi [30], donc on se ramène à établir la coercivité des formes sesquilinéaires [52].

On présente aussi quelques propriétés de l'espace $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ pour pouvoir appliquer la méthode des éléments finis liée à ces formulations variationnelles.

2.1 Formulation variationnelle

2.1.1 Conditions au bord naturelles

Pour établir la formulation variationnelle, on intègre sur le domaine Ω le résultat de la multiplication de l'équation (1.94) par des fonctions test. Les champs, électrique et magnétique, sont dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, en régime harmonique, l'équation ((7.33), Appendice C) dite loi de Faraday implique que le champ électrique $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$. On considère alors une fonction test $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$:

$$(2.1) \quad 0 = (\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} | \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} | \mathbf{F})$$

$$(2.2) \quad = -\langle \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}, \mathbf{F}_T \rangle_{\Gamma} + (\mathbf{rot} \mathbf{E} | \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} | \mathbf{F})$$

On introduit alors l'espace fonctionnel suivant

$$(2.3) \quad \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = \mathbf{0}\}$$

Si on prend une fonction test $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega)$ alors $\mathbf{F} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur Γ_C alors en utilisant l'équation (1.86) on en déduit que sur l'antenne, le champ \mathbf{E} vérifie l'équation suivante

$$(2.4) \quad \langle i\omega\mu_0 \mathbf{j}_s, \mathbf{F} \rangle_{\Gamma_A} = (\mathbf{rot} \mathbf{E} | \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} | \mathbf{F})$$

La formulation variationnelle de (1.87) - (1.89) ainsi obtenue consiste à : trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega)$ tel que

$$(2.5) \quad a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega)$$

avec

$$(2.6) \quad a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) := (\mathbf{rot} \mathbf{E} \mid \mathbf{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} \mid \mathbf{F}),$$

$$(2.7) \quad l(\mathbf{F}) := \omega \mu_0 \langle \mathbf{j}_s, \mathbf{F}_T \rangle_{\Gamma_A}.$$

On introduit l'espace suivant

$$(2.8) \quad \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega)$$

On introduit la condition de divergence (1.88) dans la formulation variationnelle (2.5) pour obtenir une nouvelle formulation variationnelle dite augmentée (FVA) [18].

Trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ tel que

$$(2.9) \quad a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$$

où

$$(2.10) \quad a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) = a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + s(\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) \mid \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}))$$

avec s un paramètre complexe que l'on précisera plus tard.

Pour obtenir une formulation variationnelle mixte augmentée (FVMA), on traite l'équation liée à la condition de divergence (1.88) comme une contrainte. On obtient alors :

Trouver $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tel que

$$(2.11) \quad a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{b(\mathbf{F}, p)} = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$$

$$(2.12) \quad b(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

avec

$$(2.13) \quad b(\mathbf{F}, p) := (\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}) \mid p).$$

C'est la formulation variationnelle à laquelle on s'intéresse dorénavant.

Un autre type de formulation variationnelle dite mixte non augmentée (FVMNA) peut résulter de nos équations principales. Cette formulation est obtenue en introduisant le multiplicateur de Lagrange pour la contrainte $\text{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} = 0$. On cherche alors le champ électrique \mathbf{E} et le multiplicateur de Lagrange p solutions de

$$(2.14) \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} - \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{grad} p = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(2.15) \quad \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(2.16) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_C,$$

$$(2.17) \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \omega \mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{sur } \Gamma_A.$$

Alors le problème variationnel lié aux équations précédentes consiste à trouver le couple $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(2.18) \quad a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{\beta(\mathbf{F}, p)} = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}_0^C(\mathbf{rot}, \Omega)$$

$$(2.19) \quad \beta(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in H_0^1(\Omega)$$

avec

$$(2.20) \quad \beta(\mathbf{F}, p) := -(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F} \mid \mathbf{grad} p).$$

2.2 Étude de l'espace $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$

2.2.1 Injection compacte

Dans l'article [59], Weber a démontré que pour un ensemble G simplement connexe, l'injection de l'espace $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{M}}, G) = \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, G) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div} \underline{\mathbf{M}}, G)$ dans $\mathbf{L}^2(G)$ est compacte si la matrice $\underline{\mathbf{M}}$ à valeur dans \mathbb{R} est symétrique, bornée et définie positive uniformément. Dans notre cas le tenseur diélectrique $\underline{\mathbf{K}}$, cf (5.48) n'est pas hermitien et notre domaine Ω n'est pas simplement connexe.

En conséquence, on doit montrer que l'injection de $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Théorème 2.1. *Si Ω est lipschitzien à frontière connexe alors l'injection de $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.*

Démonstration. On suppose tout d'abord que Γ est connexe ce qui est le cas du tore.

On considère $\{\mathbf{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$, elle vérifie alors que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$(2.21) \quad \begin{aligned} (1) \quad & \|\mathbf{u}_m\|_0 \leq C \\ (2) \quad & \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_m\|_0 \leq C \\ (3) \quad & \|\mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_m)\|_0 \leq C \\ (4) \quad & \mathbf{u}_m \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

En utilisant la remarque (7.3. i) de l'Appendice F, on considère la décomposition suivante de \mathbf{u}_m suivante

$$(2.22) \quad \begin{aligned} (1) \quad & \mathbf{u}_m = \mathbf{u}_m^1 + \mathbf{u}_m^2 \\ (2) \quad & \mathbf{u}_m^1 = \mathbf{grad} \phi_m \quad \text{avec } \phi_m \in H_0^1(\Omega) \\ (3) \quad & \mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_m^2) = 0 \\ (4) \quad & \mathbf{u}_m^i \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0 \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

avec \mathbf{u}_m^1 et \mathbf{u}_m^2 sont dans $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$.

On va montrer alors qu'on peut extraire une sous-suite de $\{\mathbf{u}_m^i\}_{i=1,2}$ convergente dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

La suite $\{\mathbf{u}_m^1\}$ est bornée dans $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$, donc par le lemme (7.2, Appendice B), on a $\|\phi_m\|_{H^1} \leq C$. En appliquant ensuite le théorème de Rellich (7.4, Appendice B), on peut extraire une sous-suite $\{\phi_{m_k}\}$ de $\{\phi_m\}$ convergente dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. On pose alors $\phi_{kl} = \phi_{m_k} - \phi_{m_l}$ et on a

$$(2.23) \quad \begin{aligned} |(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi_{kl}) | \phi_{kl})| &= |(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{u}_{m_k}^1 - \mathbf{u}_{m_l}^1)) | \phi_{kl})| \rightarrow 0 \quad k, l \rightarrow +\infty \\ \text{et } |(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi_{kl}) | \phi_{kl})| &\stackrel{\text{(Green(7.26))}}{=} |(\underline{\mathbf{K}} \operatorname{grad} \phi_{kl} | \operatorname{grad} \phi_{kl})| \\ &\stackrel{1.75}{\geq} \zeta \|\operatorname{grad} \phi_{kl}\|_0 = \zeta \|\mathbf{u}_{m_k}^1 - \mathbf{u}_{m_l}^1\|_0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que la suite $\{\mathbf{u}_{m_k}^1\}$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

La suite $\{\mathbf{u}_m^2\}$ vérifie (2.22)₍₃₎ et par le lemme (7.1, Appendice B) du potentiel vecteur tangentiel, on a

$$(2.24) \quad \underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}_m^2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_m \quad \text{avec } \mathbf{A}_m \in \mathbf{X}(\Omega).$$

vérifiant $\operatorname{div} \mathbf{A}_m = 0$ et $\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$.

Il est clair que $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A}_m \in \mathbf{X}_T(\Omega)$, on montre alors que la suite $\{\mathbf{A}_m\}$ est bornée :

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{A}_m\|_{\mathbf{X}_T} &= \|\mathbf{A}_m\|_0 + \underbrace{\|\operatorname{div} \mathbf{A}_m\|_0}_{=0} + \underbrace{\|\operatorname{rot} \mathbf{A}_m\|_0}_{=\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}_m^2} \\ &\stackrel{(7.46)}{\leq} (C+1) \|\underline{\mathbf{K}} \mathbf{u}_m^2\|_0 \leq C' \|\mathbf{u}_m^2\|_0 \stackrel{(7.49)}{\leq} C'' \|\mathbf{u}_m\|_0 \end{aligned}$$

et par (2.21)₍₁₎, on a $\{\mathbf{A}_m\}$ bornée. Par le théorème (7.6, Appendice B), la suite $\{\mathbf{A}_m\}$ admet une sous-suite $\{\mathbf{A}_{m_k}\}$ convergente dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. On pose alors $\mathbf{A}_{kl} = \mathbf{A}_{m_k} - \mathbf{A}_{m_l}$ et on a

$$(2.26) \quad \begin{aligned} |(\operatorname{rot} \underline{\mathbf{K}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl} | \mathbf{A}_{kl})| &= |(\operatorname{rot}(\mathbf{u}_{m_k}^2 - \mathbf{u}_{m_l}^2) | \mathbf{A}_{kl})| \rightarrow 0 \quad k, l \rightarrow +\infty \\ \text{et } |(\operatorname{rot} \underline{\mathbf{K}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl} | \mathbf{A}_{kl})| &\stackrel{(7.27)}{=} |(\underline{\mathbf{K}}^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl} | \operatorname{rot} \mathbf{A}_{kl})| \\ &= |(\mathbf{u}_{m_k}^2 - \mathbf{u}_{m_l}^2 | \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{u}_{m_k}^2 - \mathbf{u}_{m_l}^2))| \\ &\stackrel{1.75}{\geq} \zeta \|\mathbf{u}_{m_k}^2 - \mathbf{u}_{m_l}^2\|_0 \end{aligned}$$

Ce qui implique que la suite $\{\mathbf{u}_{m_k}^2\}$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. □

2.2.2 Un résultat de régularité

On suppose dorénavant que la tenseur $\underline{\mathbf{K}} \in \mathbf{W}^{1,\infty}$. Dans [33], il a été démontré que si Ω est un ouvert régulier alors l'espace $\mathbf{X}_N(\Omega)$ est inclus dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. On se demande si ce théorème reste valable en remplaçant $\mathbf{X}_N(\Omega)$ par $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$. Malheureusement on ne peut pas adopter la démonstration pour l'espace $\mathbf{X}_N(\Omega)$ pour notre cas. On veut montrer le théorème suivant :

Théorème 2.2. *On suppose Ω un ouvert régulier i.e de classe $C^{1,1}$ alors l'espace $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ est inclus dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.*

Pour notre cas, on va procéder comme dans le registre du résultat de compacité. On va considérer la décomposition dite de Birman-Solomyak [13] puis on s'appuie sur la régularité du problème elliptique.

Proposition 2.1. *Toute fonction $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ s'écrit sous la forme*

$$(2.27) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_{BS} + \mathbf{grad} \varphi.$$

avec $\mathbf{u}_{BS} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ et $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\varphi \in L^2(\Omega)$.

Démonstration. Voir [36] □

Pour conclure la démonstration du théorème (2.2), on va montrer que $\mathbf{grad} \varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ou encore que $\varphi \in H^2(\Omega)$. Suivant les résultats de la théorie sur la régularité des problèmes elliptiques donnés dans (7.7), on peut alors dire que, si Ω est assez régulier :

Proposition 2.2. *La fonction φ de la proposition (2.1) appartient à $H^2(\Omega)$.*

Démonstration. On sait que l'opérateur $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}$ n'est pas fortement elliptique. Mais on sait qu'il existe un $\zeta > 0$ tel que

$$\text{Im}[(\mathbf{x}^H \underline{\mathbf{K}} \mathbf{x})] \geq \zeta (\mathbf{x}^H \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^3.$$

Donc en multipliant par $-i$ la matrice $\underline{\mathbf{K}}$, l'opérateur $\Delta_{-i\underline{\mathbf{K}}} = -i\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}$ est un opérateur fortement elliptique. Donc on applique le théorème 7.9 au problème

$$\begin{aligned} \Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\varphi &= \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \varphi) = f \quad \text{avec } f \in L^2(\Omega) \\ \varphi &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

alors $\varphi \in H^2(\Omega)$. □

2.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section on étudie le caractère bien posé de la formulation variationnelle (FVMA) (2.11)-(2.12) et (FVMNA) (2.18)-(2.19). On rappelle tout d'abord le théorème fondamental de Lax-Milgram quant à l'étude de l'existence et l'unicité des équations variationnelles. On rappelle un théorème fondamental qui assure le caractère bien posé de certaines équations variationnelles

Théorème 2.3. (*Lax-Milgram*)

Soit $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \mapsto \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue, i.e

$$(2.28) \quad |a(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V$$

et coercive [21], i.e

$$(2.29) \quad |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq c_1 \|\mathbf{v}\|_V^2$$

et soit l une forme anti-linéaire continue sur \mathbf{V} . Alors l'équation

$$(2.30) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

admet une unique solution $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. De plus elle dépend continûment de la donnée

$$(2.31) \quad \|\mathbf{u}\|_V \leq C \|l\|_{V'}$$

Dans le cas d'un problème sous contrainte (2.12) tel est notre cas, le problème variationnel obtenu est dit *mixte* (2.11)-(2.12) ainsi que (2.18)-(2.19), on généralise le théorème de Lax-Milgram (2.3) de la façon suivante :

Théorème 2.4. (*Babuska-Brezzi*)

Soient \mathbf{W} et Q deux espaces de Hilbert, a et b deux formes sesquilinéaires continues

$$(2.32) \quad a(., .) : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{C},$$

$$(2.33) \quad b(., .) : \mathbf{W} \times Q \ni (\mathbf{v}, q) \mapsto b(\mathbf{v}, q) \in \mathbb{C},$$

et L, l deux formes anti-linéaires continues

$$(2.34) \quad L(.) : \mathbf{W} \ni \mathbf{v} \mapsto L(\mathbf{v}) \in \mathbb{C},$$

$$(2.35) \quad l(.) : Q \ni q \mapsto l(q) \in \mathbb{C},$$

On pose $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}; b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q\}$. Si

(i) la forme bilinéaire a est \mathbf{V} -coercive, i.e il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_W \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

(ii) la forme bilinéaire b satisfait la condition inf-sup, i.e il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_W \|q\|_Q} \geq \delta$$

alors le problème

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{W} \times Q$ tel que

$$(2.36) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \overline{b(\mathbf{v}, p)} = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W},$$

$$(2.37) \quad b(\mathbf{u}, q) = l(q) \quad \forall q \in Q,$$

est bien posé, i.e il existe un unique couple (\mathbf{u}, p) vérifiant (4.31)-(4.32) et

$$(2.38) \quad \|\mathbf{u}\|_W + \|p\|_Q \leq C(\|L\|_{W'} + \|l\|_{Q'})$$

Démonstration. voir [30] ou aussi [33] □

Pour une forme bilinéaire à valeurs complexes, on peut obtenir la \mathbf{V} -coercivité (condition (i)) de la manière suivante, voir [52] :

Proposition 2.3. *Soient \mathbf{V} et \mathbf{H} deux espaces de Hilbert tels que l'injection de \mathbf{V} dans \mathbf{H} soit continue et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$. Si*

- (i') *il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ telle que la partie réelle de $a(\cdot, \cdot)$, $\operatorname{Re}[a(\cdot, \cdot)]$, vérifie l'inégalité :*

$$(2.39) \quad |\operatorname{Re}[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 - \lambda \|\mathbf{v}\|_H^2, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

- (i'') *il existe une constante $\gamma > 0$, telle que la partie imaginaire de $a(\cdot, \cdot)$, $\operatorname{Im}[a(\cdot, \cdot)]$, vérifie l'inégalité :*

$$(2.40) \quad |\operatorname{Im}[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]| \geq \gamma \|\mathbf{v}\|_H^2, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Alors la forme bilinéaire a est \mathbf{V} -coercive.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^2 &= |\operatorname{Re}[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]|^2 + |\operatorname{Im}[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]|^2 \\ &\geq (\alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 - \lambda \|\mathbf{v}\|_H^2)^2 + \gamma^2 \|\mathbf{v}\|_H^4 \\ &\geq \alpha^2 \|\mathbf{v}\|_V^4 - 2\alpha\lambda \|\mathbf{v}\|_V^2 \|\mathbf{v}\|_H^2 + \lambda^2 \|\mathbf{v}\|_H^4 + \gamma^2 \|\mathbf{v}\|_H^4 \end{aligned}$$

Or en utilisant l'inégalité de Young on obtient

$$-2\alpha\lambda \|\mathbf{v}\|_V^2 \|\mathbf{v}\|_H^2 \geq -\frac{\alpha^2}{\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_V^4 - \varepsilon \lambda^2 \|\mathbf{v}\|_H^4 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ce qui nous amène à

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^2 \geq \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \|\mathbf{v}\|_V^4 + [\lambda^2(1 - \varepsilon) + \gamma^2] \|\mathbf{v}\|_H^4$$

Pour éliminer le terme en $\|\mathbf{v}\|_H^4$, on cherche un $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda^2(1 - \varepsilon) + \gamma^2 = 0$ i.e $\varepsilon = 1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} > 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})|^2 &\geq \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2}}\right) \|\mathbf{v}\|_V^4 + 0 \\ \Rightarrow |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| &\geq \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}} \|\mathbf{v}\|_V^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

□

Remarque 2.1. On ne peut pas assurer la coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$ avec l'hypothèse (i) du théorème. Par exemple, si on considère $\mathbf{V} = \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{rot} \mathbf{u} | \mathbf{rot} \mathbf{v})$.

L'hypothèse (i') est vérifiée car

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2 = \|\mathbf{v}\|_V^2 - \|\mathbf{v}\|_H^2.$$

mais a n'est pas coercive car si \mathbf{v} est un gradient, on n'a pas

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| = \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2 \geq c \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

avec $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

2.3.1 Application aux équations de Maxwell

Remarque 2.2. On suppose dorénavant que pour chaque espèce ξ (ions et électrons), les fonctions $\nu_c, \gamma_e, \omega_{c\xi}$ et $\omega_{p\xi}$ sont dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ dans \mathbb{R} et bornées inférieurement et supérieurement par des nombres strictement positifs.

On se donne le théorème suivant qu'on démontrera prochainement.

Théorème 2.5. Suivant les hypothèses de la remarque (2.2), si de plus $\text{Re}(\xi) > 0$ et $\text{Im}(\xi) \leq 0$, alors les problèmes variationnels (2.11)-(2.12) et (2.11)-(2.19) sont bien posés.

On va appliquer le théorème (2.4) aux problèmes variationnels. On démontrera dans un premier temps que la forme sesquilinéaire a_s est coercive puis que la forme bilinéaire b vérifie la condition (ii). Pour établir la coercivité de a_s , on tiendra compte des propriétés spectrales du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$.

Proposition 2.4. La forme sesquilinéaire a_s vérifie la condition (i)

Démonstration. On a $a_s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2 + s \|\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} | \mathbf{v})$.

On obtient alors,

$$\begin{aligned} \text{Re}[a_s(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &= \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2 + \text{Re}[s] \|\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \text{Re}[(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} | \mathbf{v})] \\ &\geq \min(1, \text{Re}[s]) (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2 - \|\mathbf{v}\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} K^+ \|\mathbf{v}\|_0^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Im}[a_s(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &= \text{Im}[s] \|\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \text{Im}[(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v} | \mathbf{v})] \\ &\leq \text{Im}[s] \|\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \zeta \|\mathbf{v}\|_0^2 \end{aligned}$$

Alors si $\text{Im}[s] \leq 0$ et $\text{Re}[s] > 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \text{Re}[a_s(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &\geq \underbrace{\min(1, \text{Re}[s])}_{\alpha} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2 - \underbrace{\left(\min(1, \text{Re}[s]) + \frac{\omega^2}{c^2} K^+\right)}_{\lambda} \|\mathbf{v}\|_0^2 \\ \text{Im}[a_s(\mathbf{v}, \mathbf{v})] &\leq \text{Im}[s] \|\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v})\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \zeta \|\mathbf{v}\|_0^2 \\ &\leq - \underbrace{\frac{\omega^2}{c^2} \zeta}_{\gamma} \|\mathbf{v}\|_0^2. \end{aligned}$$

Les hypothèses (i') et (i'') sont donc bien vérifiées. \square

En utilisant le théorème 2.3 de Lax-Milgram, on a alors

Proposition 2.5. *La formulation variationnelle augmentée (FVA) (2.9) est bien posée.*

On se donne tout d'abord la proposition suivante qui nous sera utile pour la démonstration de la deuxième condition du théorème (2.4), on donne .

Proposition 2.6. *Soit f une fonction dans $H^{-1}(\Omega)$, le problème elliptique*

Trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(2.42) \quad -\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi = -\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) = f$$

est bien posé. De plus, la solution ϕ dépend continument de la donnée f , i.e.,

$$\|\phi\|_{H^1} \leq C \|f\|_{H^{-1}}$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de ϕ et f .

Démonstration. On établit la formulation variationnelle de (2.42) en utilisant la formule de Green (7.26) :

$$(2.43) \quad a'(\phi, \psi) = l'(\psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

avec

$$a'(\phi, \psi) = \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \psi} d\Omega \quad \text{et} \quad l'(\psi) = \int_{\Omega} f \overline{\psi} d\Omega.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |a'(\phi, \phi)| &\geq \text{Im}[a'(\phi, \phi)] \\ &\geq \text{Im}\left[\int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega\right] \\ &\stackrel{(1.75)}{\geq} \zeta \int_{\Omega} |\mathbf{grad} \phi|^2 d\Omega \\ &\stackrel{(7.29)}{\geq} \zeta_0 \|\phi\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Donc la forme bilinéaire a' est coercive. En utilisant le théorème (2.3) de Lax-Milgram on conclut alors que le problème variationnel est bien posé et on a de plus

$$\|\phi\|_{H^1} \leq C\|f\|_{H^{-1}}. \quad \square$$

Remarque 2.3. Le problème (2.42) cette fois avec l'opérateur $\Delta_{\underline{\mathbf{K}}^H}$ est également bien posé.

On va alors montrer le résultat suivant :

Proposition 2.7. La forme sesquilinéaire b du problème variationnel (2.11)-(2.12) vérifie la condition (ii).

Remarque 2.4. La condition (ii), dite condition inf-sup, nous fournit une condition nécessaire et suffisante pour que la formulation soit bien posée. Elle est vérifiée si et seulement si :

$$(2.44) \quad \forall q \in Q \quad \exists \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \text{tel que} \quad |b(\mathbf{v}, q)| \geq \delta \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}} \|q\|_Q.$$

Démonstration. Soit $q \in L^2(\Omega)$, on cherche $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ vérifiant (2.44).

Remarquons tout d'abord que, comme $\mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \subset \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$, il suffit alors de chercher $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ vérifiant

$$|b(\mathbf{v}, q)| \geq \delta \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \|q\|_0.$$

Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$ une solution du problème (2.42) avec $f = q \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{v} = \mathbf{grad} \phi$ ce qui implique que $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$ [22].

De plus comme $q \in L^2(\Omega)$ alors $\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)$ où encore $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega)$.

Ce qui implique que $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$.

De plus, le lemme (1.2) nous donne

$$\left| \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega \right| \geq \text{Im} \left[\int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega \right] \geq \zeta \|\mathbf{grad} \phi\|_0^2$$

et on a

$$\left| \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) \cdot \overline{\mathbf{grad} \phi} d\Omega \right| \stackrel{(7.26)}{=} |(\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) | \phi)| = |(q | \phi)|$$

De plus, l'inégalité de Poincaré (7.29) nous fournit l'existence d'une constante $C_p > 0$ telle que

$$|(q | \phi)| \leq \|q\|_0 \|\phi\|_0 \leq C_p \|q\|_0 \|\mathbf{grad} \phi\|_0$$

En posant $C = \frac{C_p}{\zeta} > 0$ on a

$$\|\mathbf{grad} \phi\|_0 \leq C \|q\|_0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2 &= \|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2 + \|\text{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}\|_0^2 \\ &= \|\mathbf{grad} \phi\|_0^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{grad} \phi\|_0^2 + \|\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi)\|_0^2 \\ &= \|\mathbf{grad} \phi\|_0^2 + \|q\|_0^2 \\ (2.45) \quad &\leq (1 + C^2) \|q\|_0^2 \end{aligned}$$

Ce qui donne à la fin

$$\frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{x}}} = \frac{|(\operatorname{div} \mathbf{K}\mathbf{v} \mid q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{x}}} \geq \frac{\|q\|_0^2}{\sqrt{1+C^2}\|q\|_0}$$

d'où la condition *inf-sup* avec $\delta = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}$ □

On peut aussi affirmer que

Proposition 2.8. *La forme bilinéaire β de la formulation variationnelle mixte non augmentée (FVMNA) (2.18)-(2.19), vérifie la condition (ii).*

Démonstration. On procède de la même façon que dans la démonstration précédente. Soit $q \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \mathbf{grad} q \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$.

On pose $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$. Le lemme (1.2) montre que

$$\begin{aligned} |\beta(\mathbf{v}, q)| &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{K}\mathbf{v}) \cdot \overline{\mathbf{grad} q} d\Omega \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} (\mathbf{K}\mathbf{v}) \cdot \bar{v} d\Omega \right| \\ (2.46) \qquad &\geq \zeta \|\mathbf{v}\|_0^2 = \zeta \|\mathbf{v}\|_0 \|\mathbf{grad} q\|_0 \end{aligned}$$

D'où

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{rot})} = (\|\mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2)^{1/2} = \|\mathbf{v}\|_0$$

et l'inégalité de Poincaré (7.29) montre que

$$\|\mathbf{grad} q\|_0 \geq C_p \|q\|_{H^1}$$

Donc on a bien dans (2.46)

$$|\beta(\mathbf{v}, q)| \geq C_{\beta} \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{rot})} \|q\|_{H^1}$$

avec $C_{\beta} = \frac{\zeta}{\sqrt{1+C_p^2}}$. □

Remarque 2.5. *Després et al. [23] ont montré que le problème limite lorsque l'absorption tend vers 0 est mal posé dans certains cas. On peut traduire ceci par le fait que la dissipation induite par les collisions et l'amortissement Landau soit nécessaire car sinon notre raisonnement n'est plus valable. Donc, il est bien clair que le lemme (1.2) est essentiel pour montrer la coercitivité des formes bilinéaires ainsi que les conditions *inf-sup* des FVMA et FVMNA.*

On va montrer maintenant que l'hypothèse faite sur le problème avec condition au bord essentielle est bien vraie.

Proposition 2.9. *L'application trace tangentielle γ_{\top} est surjective de $\mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ dans $\Upsilon_{\partial\Omega}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{g} \in \Upsilon_{\partial\Omega}$, par définition, il existe $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot} \mathbf{v}, \Omega)$ tel que $\mathbf{w} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}$ dans $\partial\Omega$.

D'autre part, on sait que le problème elliptique

Trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$(2.47) \quad -\Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi = \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w}) \quad \text{avec} \quad \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{w}) \in H^{-1}(\Omega)$$

admet une solution grâce à la proposition (2.6).

On pose $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{grad} \phi$, ce qui implique $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}) = 0$.

Comme $\mathbf{grad} \phi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega)$, on a $\mathbf{v} \in \mathbf{X}(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ vérifiant $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{g}$ dans $\partial\Omega$. \square

2.3.2 Équivalence entre les formulations

Dans ce paragraphe, on montre l'équivalence entre les formulations variationnelles FVA, FVMA et FVMNA.

Proposition 2.10. *Soit (\mathbf{E}, p) une solution de la formulation variationnelle mixte augmentée (FVMA) ((2.11)-(2.12) respectivement de la formulation variationnelle mixte non augmentée (FVMNA) (2.18)-(2.19), alors $p = 0$.*

Démonstration. Soit (\mathbf{E}, p) une solution de FVMA.

Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$, l'unique fonction vérifiant $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{grad} \phi) = p$ et on considère $\mathbf{F} := \mathbf{grad} \phi \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ une fonction test dans (2.11), on a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a_s(\mathbf{E}, \mathbf{grad} \phi) + \overline{b(\mathbf{grad} \phi, p)} - l(\mathbf{grad} \phi) \\ &= -\frac{\omega^2}{c^2}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} | \mathbf{grad} \phi) + s(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) | p) + \|p\|_0^2 - i\omega\mu_0\langle \mathbf{j}_s, (\mathbf{grad} \phi)_{\top} \rangle_{\Gamma} \\ &\stackrel{(7.25)}{=} -\frac{\omega^2}{c^2}(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} | \phi) + \|p\|_0^2 - i\omega\mu_0\langle \mathbf{j}_s, (\mathbf{grad} \phi)_{\top} \rangle_{\Gamma} \\ &\stackrel{(2.11)}{=} \|p\|_0^2 - i\omega\mu_0\langle \mathbf{j}_s, \mathbf{n} \times \underbrace{(\mathbf{grad} \phi \times \mathbf{n})}_{=0} \rangle_{\Gamma} \\ (2.48) \quad &= \|p\|_0^2 \end{aligned}$$

On suit la même démonstration que pour la FVMNA. \square

Tout d'abord, les propositions (2.5), (2.7) et (2.8) ont montré l'unicité de la solution de chaque formulation. Donc, pour établir l'équivalence entre les trois formulations variationnelles FVA, FVMNA et FVMA, il suffit de montrer que si (\mathbf{E}, p) est une solution d'une formulation alors elle est une solution des autres.

Proposition 2.11. *$(\mathbf{E}, 0)$ est une solution de la FVMA (2.11)-(2.12) $\Rightarrow \mathbf{E}$ est une solution de la FVA (2.9).*

Passons à la deuxième implication.

Proposition 2.12. *Si $(\mathbf{E}, 0)$ est une solution de la FVMNA (2.18)-(2.19) alors $(\mathbf{E}, 0)$ est une solution de la FVMA (2.11)-(2.12).*

Démonstration. Soit $(\mathbf{E}, 0)$ une solution de la FVMNA, l'équation (2.19) implique que $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) = 0$. En effet, on a

$$0 = \beta(\mathbf{E}, q) = -(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E} \mid \mathbf{grad} q) = (\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) \mid q) = b(\mathbf{E}, q) \quad \forall q \in H_0^1(\Omega)$$

Or l'espace $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, donc $b(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \Rightarrow (2.12)$.
Et donc on a $\mathbf{E} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$. De plus :

$$\begin{aligned} a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{b(\mathbf{F}, 0)} &= a(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + s(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}) \mid \nabla \cdot (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F})) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \end{aligned}$$

□

3 Approximation par éléments finis

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent on a démontré l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle du problème modèle, à savoir une version des équations de Maxwell en régime harmonique en temps. La formulation variationnelle mentionnée, dite mixte augmentée prend la forme suivante : trouver $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ tel que $\forall s \in \mathbb{C}$

$$(3.1) \quad a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{b(\mathbf{F}, p)} = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$$

$$(3.2) \quad b(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega)$$

où

$$a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}, \mathbf{v}) + s(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}), \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v})),$$

$$b(\mathbf{v}, q) = (\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}), q)$$

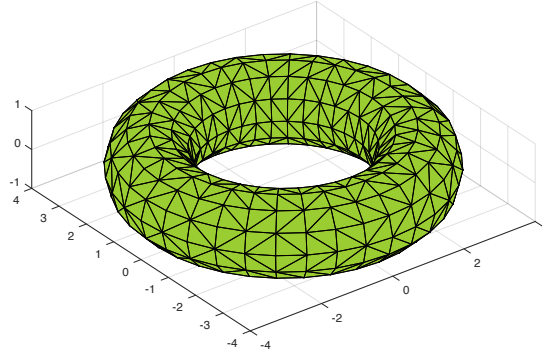
et $l(\mathbf{v}) = i\omega\mu_0 \langle \mathbf{j}_s, \mathbf{v}_T \rangle_\Gamma$.

Dans ce chapitre on présentera une méthode de discrétisation par éléments finis de type Taylor-Hood $\mathbb{P}2 - \mathbb{P}1$ [56] adaptée à la formulation variationnelle (3.1)-(3.2). On précisera toutes les étapes et calculs qui conduiront à définir le système linéaire que finalement sera résolu par le logiciel de simulation.

3.2 Formulation discrète

3.2.1 Discrétisation du domaine

On rappelle que notre domaine de calcul dans les exemples qu'on étudiera est un tore, qui est une première approximation raisonnable du domaine occupé par le plasma dans un Tokamak. Pour la mise au point du logiciel on considèrera que le grand rayon R_0 et le petit rayon a du tore seront respectivement $3m$ et $1m$.

FIGURE 3.1 – tore $3m - 1m$.

On construit un maillage \mathcal{T}_h^2 conforme en tétraèdres du domaine $\bar{\Omega}$ constitué de L tétraèdres, $\mathcal{T} = \{TT_l, l = 1, \dots, L\}$ tels que :

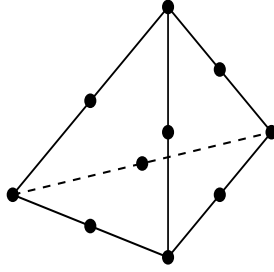
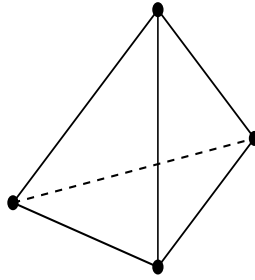
- $\bar{\Omega} = \bigcup_{l=1}^L \overline{TT_l}$
- $\forall l, l' \in \{1, \dots, L\}$

$$TT_l \cap TT_{l'} = \begin{cases} \text{soit } \emptyset \\ \text{soit un sommet commun} \\ \text{soit une arête commune} \\ \text{soit une face commune} \end{cases}$$

- Soit $h_{TT} = \max_l h_l$, où h_l représente le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre TT_l .
- Soit $\tilde{h}_{TT} = \max_l \tilde{h}_l$, où \tilde{h}_l le rayon de la sphère inscrite au tétraèdre TT_l .
- On suppose qu'il existe $\tilde{\sigma} > 0$ tel que $\frac{h_{TT}}{\tilde{h}_{TT}} \leq \tilde{\sigma}$, $\forall TT \in \mathcal{T}_h^2$.

3.2.2 Éléments finis mixtes de Taylor-Hood

Dans ce paragraphe on introduit les éléments finis de Taylor Hood adaptés à la résolution des problèmes de type points selle lorsque l'on considère une discrétisation du domaines en tétraèdres. Les éléments finis de Taylor Hood on été introduits dans [56] pour la résolution des équations de Navier-Stokes et ensuite généralisés à un grand nombre de problèmes résolus en utilisant une formulation variationnelle mixte. Dans le cas des équations de Maxwell on peut mentionner les travaux de [5]. Dans la thèse de Hattori [36] en deux dimensions l'auteur a implémenté une approximation dite \mathbb{P}_2 -iso- \mathbb{P}_1 . Dans notre travail en trois dimensions on considère des éléments finis de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$, cela veux dire que :

FIGURE 3.2 – Degrés de liberté de l'approximation \mathbb{P}_2 FIGURE 3.3 – Degrés de liberté de l'approximation \mathbb{P}_1

- Le champ électrique \mathbf{E} est approché par une fonction continue, qui est un polynôme de degré 2 sur chaque tétraèdre .
- Le multiplicateur de Lagrange p associé à la contrainte sur la divergence sera approché par une fonction continue qui est un polynôme de degré 1 sur chaque tétraèdre.

Donc les espaces d'approximation du champ \mathbf{E} et du multiplicateur p sont respectivement :

$$\mathbf{Y}_h = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})^3; \quad \{\mathbf{v}_{/TT}\}_i \in \mathbb{P}_2(TT), i = 1, 2, 3 \text{ et } \forall TT \in \mathcal{T}_h^2 \right\}$$

$$\text{et } Q_h = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}); \quad v_{/TT} \in \mathbb{P}_1(TT) \quad \forall TT \in \mathcal{T}_h^1 \right\}$$

Dans un grand nombre de livres sur les éléments finis on trouve les fonctions de base associées aux approximations \mathbb{P}_2 et \mathbb{P}_1 sur chaque tétraèdre, voir [24].

3.2.3 Formulation matricielle

On note \mathbf{X}_N^h et $\mathbf{X}_{N,C}^h$ les espaces $\mathbf{Y}_h \cap \mathbf{X}_N$ et $\mathbf{Y}_h \cap \mathbf{X}_N^C$ respectivement. On remarque que les espaces \mathbf{X}_N^h et $\mathbf{X}_{N,C}^h$ sont isomorphes à des sous espaces de dimensions finies de \mathbf{X}_N et \mathbf{X}_N^C respectivement.

Dans ce chapitre on suppose que les formulations variationnelles discrètes vérifient le théorème de Babuska-Brezzi, [30] sur les paires d'espaces (\mathbf{X}_N^h, Q_h) et $(\mathbf{X}_{N,C}^h, Q_h)$ car

cela est démontré dans le chapitre suivant. Afin d'établir le système discret associé à la formulation variationnelle (3.1)-(3.2) on introduit les notations suivantes :

- Soit N_h^1 le nombre de sommets de la tétraédrisation du maillage (le nombre de degrés de liberté associé à la discrétisation \mathbb{P}_1).
- Soit N_h^2 le nombre de sommets plus le nombre des arêtes de la tétraédrisation du maillage (le nombre de degrés de liberté associé à la discrétisation \mathbb{P}_2).
- N_Ω^1 : le nombre de sommets des tétraèdres intérieurs à Ω .
- $N_{\partial\Omega}^1$: le nombre de sommets des triangles du bord de Ω .
- S_i : les points d'interpolation dans Ω .

Par ailleurs on peut remarquer que les éléments finis considérés sont nodaux et donc il y a une fonction de forme (ou encore de base) par nœuds de discrétisation géométrique dans le cas de Q_h et un éléments de base par points d'interpolation \mathbb{P}_2 , à savoir les sommets et les milieux des arêtes, ainsi la dimension de Q_h est N_h^1 et la dimension de \mathbf{Y}_h est $3N_h^2$.

3.2.4 Écriture matricielle

On désigne par $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . La dimension de l'espace \mathbf{Y}_h est donc $3N_h^2$. Soient Φ et Ψ deux bases des espaces \mathbf{Y}_h et Q_h respectivement composées par des vecteurs nodaux et données par

$$(3.3) \quad \Phi = \{\phi_1^1, \phi_1^2, \phi_1^3, \dots, \phi_{N_2}^1, \phi_{N_2}^2, \phi_{N_2}^3\}$$

$$(3.4) \quad \Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_{N_1}\}$$

dont les fonctions de forme sont définies respectivement par :

$$(3.5) \quad \phi_i^m = \phi_i \cdot \mathbf{e}_m, \quad m = 1, 2, 3 \text{ et } i = 1 : N_h^2$$

$$(3.6) \quad \psi_i(S_j) = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, N_h^1$$

où ϕ_i et ψ_j sont des fonctions continues en \mathbb{P}_2 et \mathbb{P}_1 respectivement et vérifiant :

$$\phi_i(S_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N_h^2$$

Tout vecteur \mathbf{u}^h de \mathbf{Y}_h respectivement toute fonction p^h de Q_h peut être exprimé(e) de la façon suivante :

$$(3.7) \quad \mathbf{u}^h(x) = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{N_h^2} u_i^l \phi_i^l(x) = \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{i=1}^{N_h^2} u_i^l \phi_i(x) \right) \mathbf{e}_l$$

$$(3.8) \quad p^h(x) = \sum_{i=1}^{N_h^1} p_i \psi_i(x)$$

3.2.5 Formulation variationnelle mixte augmentée discrète

La formulation variationnelle discrète associée aux équations (2.11)-(2.12) est donnée par :

trouver (\mathbf{E}^h, p^h) dans $\mathbf{X}_{N,C}^h \times Q_h$ tel que

$$(3.9) \quad a_s(\mathbf{E}^h, \mathbf{F}^h) + \overline{b(\mathbf{F}^h, p^h)} = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F}^h \in \mathbf{X}_{N,C}^h$$

$$(3.10) \quad b(\mathbf{E}^h, q^h) = 0 \quad \forall q^h \in Q_h$$

avec

$$(3.11) \quad \mathbf{F}^h = \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^{N_h^2} F_j^l \phi_j^l = \sum_{l=1}^3 F_l^h \mathbf{e}_l, \quad q = \sum_{j=1}^{N_h^1} q_j \psi_j.$$

Les équations (3.9)-(4.36) s'écrivent :

$$(3.12) \quad \sum_{l,m} (F_l^h)^H \underline{\mathbf{A}}_s^{l,m} E_m^h + \sum_l (F_l^h)^H (\underline{\mathbf{B}}^l)^H p = \sum_l (F_l^h)^H f^l$$

$$(3.13) \quad \sum_l q^H \underline{\mathbf{B}}^l \mathbf{E}^l = \mathbf{0}$$

avec

$$(3.14) \quad (\underline{\mathbf{A}}_s^{l,m})_{i,j} = a_s(\phi_j^m, \phi_i^l) \quad i, j = 1, \dots, N_h^2; \quad l, m = 1, 2, 3$$

$$(3.15) \quad (\underline{\mathbf{B}}^l)_{i,j} = b(\phi_j^l, \psi_i) \quad i = 1, \dots, N_h^1, \quad j = 1, \dots, 3N_h^2, \quad l = 1, 2, 3$$

$$(3.16) \quad (\mathbf{f}^l)_i = l(\phi_i^l) \quad i = 1, \dots, N_h^2, \quad l = 1, 2, 3$$

On obtient ainsi le système matriciel suivant :

$$(3.17) \quad \begin{pmatrix} F_1^h \\ F_2^h \\ F_3^h \\ q \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s^{11} & \underline{\mathbf{A}}_s^{12} & \underline{\mathbf{A}}_s^{13} & \underline{\mathbf{B}}^{1H} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{21} & \underline{\mathbf{A}}_s^{22} & \underline{\mathbf{A}}_s^{23} & \underline{\mathbf{B}}^{2H} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{31} & \underline{\mathbf{A}}_s^{32} & \underline{\mathbf{A}}_s^{33} & \underline{\mathbf{B}}^{3H} \\ \underline{\mathbf{B}}^1 & \underline{\mathbf{B}}^2 & \underline{\mathbf{B}}^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^h \\ E_2^h \\ E_3^h \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^h \\ F_2^h \\ F_3^h \\ q \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $(\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2, \mathbf{F}^3, q) \in \mathbb{C}^{3N_h^2 + N_h^1}$.

Le système linéaire 3.17 peut être réécrit de la façon suivante :

$$(3.18) \quad \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s & \underline{\mathbf{B}}^H \\ \underline{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

avec $\underline{\mathbf{A}}_s$ et $\underline{\mathbf{B}}$ sont respectivement dans $\mathbb{C}^{3N_h^2 \times 3N_h^2}$ et $\mathbb{C}^{N_h^1 \times 3N_h^2}$ et sont données par

$$(3.19) \quad \underline{\mathbf{A}}_s := \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s^{11} & \underline{\mathbf{A}}_s^{12} & \underline{\mathbf{A}}_s^{13} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{21} & \underline{\mathbf{A}}_s^{22} & \underline{\mathbf{A}}_s^{23} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^{31} & \underline{\mathbf{A}}_s^{32} & \underline{\mathbf{A}}_s^{33} \end{pmatrix}$$

$$(3.20) \quad \underline{\mathbf{B}} := (\underline{\mathbf{B}}^1 \quad \underline{\mathbf{B}}^2 \quad \underline{\mathbf{B}}^3)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_1^h \\ E_2^h \\ E_3^h \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3N_h^2} \text{ et } \mathbf{f} \in \mathbb{C}^{3N_h^2}$$

Ce système linéaire résultant est de type point selle généralisé et à cause du caractère non hermitien du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$, il est la matrice correspondante est non hermitienne.

3.3 Matrice de masse interne

Dans cette section, on va calculer les termes de la matrice de masse interne $\underline{\mathbf{A}}_s$ du système matriciel (3.17) en utilisant les formules de quadrature et les formules de changement de bases correspondantes. La matrice $\underline{\mathbf{A}}_s$ est donnée par :

$$\underline{\mathbf{A}}_s = \mathbb{R}\text{ot} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbb{M} + s\mathbb{D}\text{iv} \in \mathbb{C}^{3N_h^2 \times 3N_h^2}$$

où

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}\text{ot}^{mn})_{ij} &= (\mathbf{rot} \phi_j^n, \mathbf{rot} \phi_i^m) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{rot} \phi_j^n \overline{\mathbf{rot} \phi_i^m} dx dy dz. \\ (\mathbb{M}^{mn})_{ij} &= (\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n, \phi_i^m) \\ &= \int_{\Omega} \overline{\phi_i^m} \underline{\mathbf{K}}_{mn} \phi_j^n dx dy dz. \\ (\mathbb{D}\text{iv}^{mn})_{ij} &= (\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n), \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \phi_i^m)) \\ &= \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n) \overline{\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \phi_i^m)} dx dy dz. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \phi_j^n \overline{\mathbf{rot} \phi_i^m} &= \left(\delta_{n3} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} - \delta_{n2} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \left(\delta_{m3} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} - \delta_{m2} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) \\ &+ \left(-\delta_{n3} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \delta_{n1} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \left(-\delta_{m3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \delta_{m1} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) \\ &+ \left(\delta_{n2} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - \delta_{n1} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \left(\delta_{m2} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - \delta_{m1} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

D'où ;

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}ot^{11})_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) dx dy dz \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \phi_j)_{23} \cdot (\nabla \phi_i)_{23} dx dy dz \\
(\mathbb{R}ot^{12})_{ij} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dx dy dz \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \phi_j)_1 \cdot (\nabla \phi_i)_2 dx dy dz \\
(\mathbb{R}ot^{21})_{ij} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy dz \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \phi_i)_1 \cdot (\nabla \phi_j)_2 dx dy dz = (\mathbb{R}ot^{12})_{ji} \\
(\mathbb{R}ot^{13})_{ij} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dx dy dz \\
(\mathbb{R}ot^{31})_{ij} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy dz = (\mathbb{R}ot^{13})_{ji} \\
(\mathbb{R}ot^{22})_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) dx dy dz \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \phi_j)_{13} \cdot (\nabla \phi_i)_{13} dx dy dz \\
(\mathbb{R}ot^{23})_{ij} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} dx dy dz \\
(\mathbb{R}ot^{32})_{ij} &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dx dy dz = (\mathbb{R}ot^{32})_{ji} \\
(\mathbb{R}ot^{33})_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) dx dy dz \\
&= \int_{\Omega} (\nabla \phi_j)_{12} \cdot (\nabla \phi_i)_{12} dx dy dz
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$(\mathbb{M}^{mn})_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \underline{\mathbf{K}}_{mn} \phi_j dx dy dz$$

Par définition de l'opérateur de divergence :

$$\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \underline{K}_{1n} \phi_j \\ \underline{K}_{2n} \phi_j \\ \underline{K}_{3n} \phi_j \end{pmatrix} = \left(\phi_j \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial x} + \underline{K}_{1n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y} + \underline{K}_{2n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \phi_j \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z} + \underline{K}_{3n} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right)$$

Les coefficients de la matrice $\mathbb{D}iv$ sont donnés par :

$$(\mathbb{D}iv^{mn})_{ij} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \phi_j^n) \overline{\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \phi_i^m)} dx dy dz$$

On obtient alors ;

$$(\mathbb{D}\text{iv}^{mn})_{ij} = \int_{\Omega} \left(\phi_j \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial x} + \underline{K}_{1n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y} + \underline{K}_{2n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \phi_j \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z} + \underline{K}_{3n} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \\ \left(\phi_i \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial x} + \underline{K}_{1n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \phi_i \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y} + \underline{K}_{2n} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \phi_i \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z} + \underline{K}_{3n} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) dx dy dz$$

3.3.1 Matrice de masse $\underline{\mathbb{B}}$

Pour calculer la matrice de masse $\underline{\mathbb{B}}$, on suit les mêmes démarches que précédemment. On rappelle que $\underline{\mathbb{B}}$ est une matrice de taille $N_h^1 \times 3N_h^2$ donnée par :

$$\underline{\mathbb{B}} := (\underline{B}^1 \quad \underline{B}^2 \quad \underline{B}^3) \in \mathbb{C}^{N_h^1 \times 3N_h^2}$$

où

$$(\underline{\mathbb{B}}^n)_{ij} = (\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\phi_j^n), \psi_i)_{0,\Omega} \\ = \int_{\Omega} \left(\underline{K}_{1n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial x} + \underline{K}_{2n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \phi_j \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y} + \underline{K}_{3n} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + \phi_j \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z} \right) \psi_i dx dy dz$$

3.3.2 Le second membre \mathbf{f}

On rappelle que notre second membre $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{3N_h^2}$

$$\mathbf{f} := \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \mathbf{f}^3 \end{pmatrix}$$

avec

$$(\mathbf{f}^m)_i = \begin{cases} \omega \mu_0 \langle j_s, \phi_{\Gamma_i}^m \rangle_{\Gamma_A} & \text{sur } \Gamma \\ 0 & \text{en dehors de } \Gamma \end{cases}$$

On a alors :

$$(\mathbf{f}^m)_i = \omega \mu_0 \int_{\Gamma_A} j_s \cdot \phi_{\Gamma_i}^m d\Gamma \\ = \omega \mu_0 \int_{\Gamma_A} j_s \cdot (n \times \phi_i^m \times n) d\Gamma \\ = \omega \mu_0 \int_{\Gamma_A} j_s \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \phi_i \delta_{m1} \\ \phi_i \delta_{m2} \\ \phi_i \delta_{m3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} d\Gamma$$

d'où

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}^1)_i &= \omega\mu_0 \int_{\Gamma_A} \phi_i(j_{s1}(n_2^2 + n_3^2) - j_{s2}n_1n_2 - j_{s3}n_1n_2) \, d\Gamma \\ (\mathbf{f}^2)_i &= \omega\mu_0 \int_{\Gamma_A} \phi_i(-j_{s1}n_1n_2 + j_{s2}(n_1^2 + n_3^2) - j_{s3}n_2n_3) \, d\Gamma \\ (\mathbf{f}^3)_i &= \omega\mu_0 \int_{\Gamma_A} \phi_i(-j_{s1}n_1n_3 - j_{s2}n_2n_3 + j_{s3}(n_1^2 + n_2^2)) \, d\Gamma \end{aligned}$$

3.3.3 Calcul des intégrales

Formule de changement de variables

Comme il en est l'habitude dans la méthode des éléments finis on décomposera les intégrales définissant les coefficients de la matrice du système linéaire (3.18) en une addition des intégrales sur les tétraèdres définis par la discrétisation géométrique du domaine, pour ensuite se ramener, à l'aide un changement de variables, à un calcul sur un triangle de référence utilisant une formule de quadrature bien choisie. On cherche à construire les matrices relatives au système linéaire (3.18), on désigne par \mathcal{T} et \mathcal{E} respectivement l'ensemble des tétraèdres constituant la discrétisation Ω et l'ensemble des faces (triangles) sur Γ . En fait le support des fonctions de forme est inclus dans un sous ensemble très restreint de tétraèdres. On calcule les intégrales de la façon suivante :

$$(3.21) \quad \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{TT \in \mathcal{T}} \int_{TT} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

$$(3.22) \quad \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \, d\sigma = \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E f(\boldsymbol{\sigma}) \, d\boldsymbol{\sigma}$$

Pour chaque élément, seulement quelques fonctions sont non nulles sur TT (respectivement sur E).

Le calcul des matrices et vecteurs élémentaires $\text{Rot}_{TT}^{m,n}$, $\text{M}_{TT}^{m,n}$, $\text{Div}_{TT}^{m,n}$ et B_{TT}^n , concernant chaque tétraèdre $TT \in \mathcal{T}_h$ et f_E^m, h_E^m sur chaque face $E \in \mathcal{E}$, va être effectué sur un élément de référence \widehat{TT} , respectivement sur chaque face de référence \widehat{E} .

Dans notre cas le tétraèdre de référence est donné par $\widehat{T} := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 / \xi_i \geq 0 \text{ et } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 1\}$ et la face de référence est donnée par $\widehat{E} := \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 / \xi \geq 0 \text{ et } \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$, voir [24].

Le passage d'un élément quelconque à un élément de référence s'effectue en utilisant les

transformations affines suivantes :

$$(3.23) \quad \mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}_{TT} + \mathbf{B}_{TT}\boldsymbol{\xi}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \widehat{TT}$$

$$(3.24) \quad \mathbf{b}_{TT} = \mathbf{S}_1^{TT},$$

$$(3.25) \quad \mathbf{B}_{TT} = (\mathbf{S}_2^{TT} - \mathbf{S}_1^{TT}, \mathbf{S}_3^{TT} - \mathbf{S}_1^{TT}, \mathbf{S}_4^{TT} - \mathbf{S}_1^{TT}),$$

$$(3.26) \quad \mathbf{F}_E(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}_E + \mathbf{B}_E\boldsymbol{\xi}; \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \widehat{E},$$

$$(3.27) \quad \mathbf{b}_E = \mathbf{S}_1^E, \mathbf{B}_E = (\mathbf{S}_3^E - \mathbf{S}_1^E, \mathbf{S}_2^E - \mathbf{S}_1^E).$$

\mathbf{S}_i^{TT} et \mathbf{S}_j^E , $i = 1 : 4$, $j = 1 : 2$ sont les sommets du tétraèdre TT et de la face E respectivement. On obtient alors

$$\int_{TT} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} (f \circ \mathbf{F}_{TT})(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}$$

avec $|\det \mathbf{B}_{TT}| = 6V$ où V est le volume de l'élément réel.

Et

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\mathbf{B}_E| \int_{\widehat{E}} (f \circ \mathbf{F}_E)(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}$$

avec $|\mathbf{B}_E| = \|\overline{S_3^E S_1^E} \times \overline{S_2^E S_1^E}\|$.

Une base de notre espace des éléments finis \mathbb{P}_2 dans le tétraèdre de référence est donnée par :

$$\ll 1, \varepsilon, \eta, \xi, \varepsilon^2, \varepsilon\eta, \eta^2, \eta\xi, \xi^2, \xi\varepsilon \gg$$

Nos intégrales sont approchées par les valeurs calculées à l'aide des formules de quadrature, i.e;

$$\int_{\widehat{TT}} f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{K_{TT}} \omega_i f(x_i)$$

où les x_i , $i = 0, \dots, K_{TT}$ sont les nœuds d'intégration et les ω_i , $i = 0, \dots, K_{TT}$ sont les poids de la formule de quadrature.

En considérant $\{N_1, N_2, \dots\}$ les fonctions de base de référence telles que $N_j^{TT} \circ \mathbf{F}_{TT} = N_j$ et $\mathbf{grad} f \circ \mathbf{F}_{TT} = \mathbf{B}_{TT}^{-\top} \mathbf{grad}(f \circ \mathbf{F}_{TT})$, les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}ot_{TT}^{11})_{ij} &= |\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} \left((\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_3 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_3 + (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_2 \right) d\boldsymbol{\xi} \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{12})_{ij} &= -|\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_2 d\boldsymbol{\xi} = (\mathbb{R}ot_{TT}^{21})_{ji} \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{13})_{ij} &= -|\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_3 d\boldsymbol{\xi} = (\mathbb{R}ot_T^{31})_{ji} \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{23})_{ij} &= -|\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_3 d\boldsymbol{\xi} = (\mathbb{R}ot_T^{32})_{ji} \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{22})_{ij} &= |\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} \left((\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_3 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_3 + (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_1 \right) d\boldsymbol{\xi} \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{33})_{ij} &= |\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} \left((\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_2 + (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_1 \right) d\boldsymbol{\xi} \\
(\mathbb{M}_{TT}^{mn})_{ij} &= |\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \underline{K}_{mn}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) N_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\
(\mathbb{D}iv_{TT}^{mn})_{ij} &= |\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} \left(N_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial x}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) + \underline{K}_{1n}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 + \right. \\
&\quad \left. + N_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) \right. \\
&\quad \left. + \underline{K}_{2n}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 + N_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) + \underline{K}_{3n}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_3 \right) \\
&\quad \times \left(N_i(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{1m}}{\partial x}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) + \underline{K}_{1m}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_1 + N_i(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{2m}}{\partial y}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) \right. \\
&\quad \left. + \underline{K}_{2m}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_2 + N_i(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{3m}}{\partial z}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) + \underline{K}_{3m}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\boldsymbol{\xi}))_3 \right) d\boldsymbol{\xi}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathbb{B}_{TT}^n)_{ij} &= |\det \mathbf{B}_{TT}| \int_{\widehat{TT}} \left(\underline{K}_{1n}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_1 + N_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial y}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) \right. \\
&\quad \left. + \underline{K}_{2n}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_2 + N_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) \right. \\
&\quad \left. + \underline{K}_{3n}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\boldsymbol{\xi}))_3 + N_j(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z}(\mathbf{F}_{TT}(\boldsymbol{\xi})) \right) \tilde{N}_i(\boldsymbol{\xi}) dx dy dz.
\end{aligned}$$

formule de quadrature

Dans ce travail les intégrales présentées dans le paragraphe précédent sont approchées par une formule de quadrature à 15 points sur le tétraèdre de référence \widehat{TT} et elle est

d'ordre 5 [24]. Donc on obtient une approximation donnée par la somme finie :

$$(3.28) \quad \int_{\widehat{TT}} f(\xi) d\xi \simeq \sum_{l=1}^{K_{TT}} \omega_l f(\xi_l)$$

où

$$K_{TT} = 15,$$

Les nœuds d'intégration :

$$\xi_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\xi_2 = (b_1, b_1, b_1); \quad b_1 = \frac{7+\sqrt{15}}{34}$$

$$\xi_3 = (b_1, b_1, c_1); \quad c_1 = \frac{13+3\sqrt{15}}{34}$$

$$\xi_4 = (b_1, c_1, b_1);$$

$$\xi_5 = (c_1, b_1, b_1);$$

$$\xi_6 = (b_2, b_2, b_2); \quad b_2 = \frac{7-\sqrt{15}}{34}$$

$$\xi_7 = (b_2, b_2, c_2); \quad c_2 = \frac{13-3\sqrt{15}}{34}$$

$$\xi_8 = (b_2, c_2, b_2);$$

$$\xi_9 = (c_2, b_2, b_2);$$

$$\xi_{10} = (d, d, e); \quad d = \frac{5-\sqrt{15}}{20}, \quad e = \frac{5+\sqrt{15}}{20}$$

$$\xi_{11} = (d, e, d);$$

$$\xi_{12} = (e, d, d);$$

$$\xi_{13} = (d, e, e);$$

$$\xi_{14} = (e, d, e);$$

$$\xi_{15} = (e, e, d);$$

Les poids de la formule de quadrature sont : $\omega_1 = \frac{112}{5670}$, $\omega_2 = \dots = \omega_5 = \frac{2665 + 14\sqrt{15}}{226800}$,

$$\omega_6 = \dots = \omega_9 = \frac{2665 - 14\sqrt{15}}{226800}, \quad \omega_{10} = \dots = \omega_{15} = \frac{5}{567}.$$

Les intégrales sur une face de référence \widehat{E} sont approchées par la formule de quadrature d'ordre 3 à 4 points suivantes :

$$(3.29) \quad \int_{\widehat{E}} f(\xi) d\xi \simeq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{K_E} \omega_l f(\xi_l)$$

où $K_E = 4$, les nœuds d'intégration sont donnés par :

$$\xi_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \xi_2 = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

$$\xi_3 = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), \quad \xi_4 = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

et les poids d'intégration ω_i sont donnés par $\omega_1 = -\frac{9}{32}$ et $\omega_i = \frac{25}{96} \forall i = 2 : 4$.

3.3.4 Coefficients de la matrice du système

En utilisant la formule de quadrature (3.28), on obtient une approximation des matrices élémentaires :

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}ot_{TT}^{1,1})_{ij} &\simeq |\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_3 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_3 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{K_T} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_2 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_2 \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{2,2})_{ij} &\simeq |\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_3 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_3 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_1 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_1 \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{3,3})_{ij} &\simeq |\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_1 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_1 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_2 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_2 \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{1,2})_{ij} &\simeq -|\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_1 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_2 \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{1,3})_{ij} &\simeq -|\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_1 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_3 \\
(\mathbb{R}ot_{TT}^{2,3})_{ij} &\simeq -|\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l) \right)_2 \left(\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l) \right)_3 \\
(\mathbb{M}_{TT}^{m,n})_{ij} &\simeq |\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l N_i(\xi_l) \underline{K}_{mn} N_j(\xi_l)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\mathbb{B}_{TT}^n)_{ij} &\simeq |\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{k=1}^{K_{TT}} w_k \left(+ \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial x}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_k)) N_j(\xi_k) + \underline{K}_{1n}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_k)) \mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_k) \right)_1 \\
&\quad + \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_k)) N_j(\xi_k) + \underline{K}_{3n}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_k)) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_k))_2 \\
&\quad + \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_k)) N_j(\xi_k) + \underline{K}_{3n}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_k)) (\mathbf{B}_{TT}^{-\top} \widehat{\nabla} N_j(\xi_k))_3 \tilde{N}_i(\xi_k).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{D}\text{iv}_{TT}^{m,n})_{ij} &\simeq |\det(\mathbf{B}_{TT})| \sum_{l=1}^{K_{TT}} w_l \left(N_j(\xi_l) \frac{\partial \underline{K}_{1n}}{\partial x}(F_T(\xi_l)) + \underline{K}_{1n}(F_T(\xi_l)) (\underline{B}_T^{-T} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l))_1 \right. \\
&\quad + N_j(\xi_l) \frac{\partial \underline{K}_{2n}}{\partial y}(F_T(\xi_l)) \\
&\quad + \underline{K}_{2n}(F_T(\xi_l)) (\underline{B}_T^{-T} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l))_2 + N_j(\xi_l) \frac{\partial \underline{K}_{3n}}{\partial z}(F_T(\xi_l)) + \underline{K}_{3n}(F_T(\xi_l)) (\underline{B}_T^{-T} \widehat{\nabla} N_j(\xi_l))_3 \left. \right) \\
&\quad \times \left(N_i(\xi_l) \frac{\partial \underline{K}_{1m}}{\partial x}(F_T(\xi_l)) + \overline{\underline{K}_{1m}(F_T(\xi_l))} (\underline{B}_T^{-T} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l))_1 + N_i(\xi_l) \frac{\partial \underline{K}_{2m}}{\partial y}(F_T(\xi_l)) \right. \\
&\quad \left. + \overline{\underline{K}_{2m}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_l))} (\underline{B}_T^{-T} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l))_2 + N_i(\xi_l) \frac{\partial \underline{K}_{3m}}{\partial z}(\mathbf{F}_{TT}(\xi_l)) + \overline{\underline{K}_{3m}(F_T(\xi_l))} (\underline{B}_T^{-T} \widehat{\nabla} N_i(\xi_l))_3 \right)
\end{aligned}$$

Le second membre f En passant à l'élément de référence et en utilisant les éléments de base on trouve :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f}_E^1)_i &= \omega \mu_0 |B_E| \sum_{l=1}^{K_E} \tilde{N}_i(\xi_l) \left((n_{E,2}^2 + n_{E,3}^2)(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_1(\mathbf{F}_E(\xi_l)) - (n_{E,1} n_{E,2})(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_2(\mathbf{F}_E(\xi_l)) \right. \\
&\quad \left. - (n_{E,1} n_{E,3})(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_3(\mathbf{F}_E(\xi_l)) \right) \\
(\mathbf{f}_E^2)_i &= \omega \mu_0 |B_E| \sum_{l=1}^{K_E} \tilde{N}_i(\xi_l) \left((n_{E,1}^2 + n_{E,3}^2)(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_2(\mathbf{F}_E(\xi_l)) - (n_{E,1} n_{E,2})(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_1(\mathbf{F}_E(\xi_l)) \right. \\
&\quad \left. - (n_{E,2} n_{E,3})(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_3(\mathbf{F}_E(\xi_l)) \right) \\
(\mathbf{f}_E^3)_i &= \omega \mu_0 |B_E| \sum_{l=1}^{K_E} \tilde{N}_i(\xi_l) \left((n_{E,1}^2 + n_{E,2}^2)(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_3(\mathbf{F}_E(\xi_l)) - (n_{E,1} n_{E,3})(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_1(\mathbf{F}_E(\xi_l)) \right. \\
&\quad \left. - (n_{E,2} n_{E,2})(\mathbf{F}_E(\xi_l)) j_2(\mathbf{F}_E(\xi_l)) \right)
\end{aligned}$$

Élimination de la condition essentielle

L'idée est d'éliminer la condition au bord donnée par $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur le complémentaire de l'antenne A , [38].

On introduit notre nouvelle base $B = \{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}\}$ pour modifier l'équation au bord $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$.

L'équation $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = h$ dans la nouvelle base B est équivalente à :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_B^1 \\ E_B^2 \\ E_B^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_B^1 \\ h_B^2 \\ h_B^3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ E_B^3 \\ -E_B^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} h_B^1 \\ h_B^2 \\ h_B^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient alors la condition de type Dirichlet suivante :

$$(3.30) \quad \begin{pmatrix} E_B^2 \\ E_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_B^3 \\ h_B^2 \end{pmatrix}$$

3.3.5 Discrétisation de l'espace avec condition aux limites essentielles

On note $\Gamma_D \subset \Gamma$ (respectivement Γ_N) la partie du bord où on suppose vérifier une condition de bord essentielle de conducteur parfait (dite de Dirichlet par abus de langage) $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$. On note Γ_N la partie du bord où on suppose vérifier une condition de bord naturelle (dite de Neumann) $\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \iota \omega \mu_0 \mathbf{j}_s$.

On classe les sommets de notre maillage de la façon suivante : les points intérieurs, notés Ω_{int} , \mathbf{N} pour les points avec condition de Neumann et \mathbf{D} pour les points avec condition de Dirichlet. On décompose alors l'ensemble des points sur $\bar{\Omega}_h$ en $I_\Omega = I_{int} \cup I_N \cup I_D$. Alors, suivant l'emplacement des sommets S_i on utilisera deux types de bases :

– $\forall i \in I_{int} \cup I_N, S_i \in \Omega \cup \Gamma_N$, on représente la solution approchée dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.
– $\forall i \in I_D, S_i \in \Gamma_D$, on travaille avec la nouvelle base locale $B_i = \{\mathbf{n}_i, \boldsymbol{\tau}_i, \mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i\} = (b_i^k)_{k=1/3}$.

En conséquence la base de $\mathbf{X}_{N,C}^h$ est donnée par :

$$(3.31) \quad \boldsymbol{\phi}_i^l = \phi_i \mathbf{e}^l \text{ pour } l = 1, 2, 3 \text{ et } i \in I_{int} \cup I_N$$

$$(3.32) \quad \boldsymbol{\phi}_i^1 = \phi_i \mathbf{n}_i, \boldsymbol{\phi}_i^2 = \phi_i \boldsymbol{\tau}_i \text{ et } \boldsymbol{\phi}_i^3 = \phi_i (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i) \text{ } i \in I_D$$

Alors, $\forall \mathbf{E}^h \in \mathbf{X}_{N,C}^h$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^h &= \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^{D_2} \mathbf{E}_i^l(S_i) \phi_i^l \\ &= \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{i \in I_{int} \cap I_N} \mathbf{E}_i^l(S_i) \phi_i^l \right) + \sum_{i \in I_D} \mathbf{E}_i^1(S_i) \phi_i^1 + \sum_{i \in I_D} \mathbf{E}_i^2(S_i) \phi_i^2 + \sum_{i \in I_D} \mathbf{E}_i^3(S_i) \phi_i^l \\ &= \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{i \in I_{int} \cap I_N} \mathbf{E}_i^l(S_i) \phi_i \mathbf{e}_l \right) + \sum_{i \in I_D} \left(\mathbf{E}_i^1(S_i) \phi_i \mathbf{n}_i - h_{B_i}^3(S_i) \phi_i \boldsymbol{\tau}_i + h_{B_i}^2(S_i) \phi_i (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i) \right). \end{aligned}$$

3.3.6 Matrice de raideur interne

Si maintenant on cherche à écrire la matrice de raideur interne $\underline{\mathbf{A}}_s$ dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ lorsque $i \in I_{int} \cup I_N$ et $\{\mathbf{n}_i, \boldsymbol{\tau}_i, (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i)\}$ lorsque $i \in I_D$ on pourra remarquer quatre types de cellule pour les indices $i, j, = 1, \dots, N_h^2$. Pour les indices i, j tels que les nœuds S_i et S_j appartiennent à Ω :

$$\mathbb{A}_{\Omega, \Omega}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\phi_j \mathbf{e}_1, \phi_i \mathbf{e}_1) & a_s(\phi_j \mathbf{e}_2, \phi_i \mathbf{e}_1) & a_s(\phi_j \mathbf{e}_3, \phi_i \mathbf{e}_1) \\ a_s(\phi_j \mathbf{e}_1, \phi_i \mathbf{e}_2) & a_s(\phi_j \mathbf{e}_2, \phi_i \mathbf{e}_2) & a_s(\phi_j \mathbf{e}_3, \phi_i \mathbf{e}_2) \\ a_s(\phi_j \mathbf{e}_1, \phi_i \mathbf{e}_3) & a_s(\phi_j \mathbf{e}_2, \phi_i \mathbf{e}_3) & a_s(\phi_j \mathbf{e}_3, \phi_i \mathbf{e}_3) \end{pmatrix}$$

Si $i \in I_D$ et $j \in I_D$ on trouve :

$$\mathbb{A}_{\Gamma_D, \Gamma_D}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{n}_i) & a_s(\phi_j \boldsymbol{\tau}_j, \phi_i \mathbf{n}_i) & a_s(\phi_j (\mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j), \phi_i \mathbf{n}_i) \\ a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \boldsymbol{\tau}_i) & a_s(\phi_j \boldsymbol{\tau}_j, \phi_i \boldsymbol{\tau}_i) & a_s(\phi_j (\mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j), \phi_i \boldsymbol{\tau}_i) \\ a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i)) & a_s(\phi_j \boldsymbol{\tau}_j, \phi_i (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i)) & a_s(\phi_j (\mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j), \phi_i (\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i)) \end{pmatrix}$$

Si $i \in I_{int} \cup I_N$ et $j \in I_D$ on trouveras la cellule suivante :

$$\mathbb{A}_{\Omega, \Gamma_D}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{e}_1) & a_s(\phi_j \boldsymbol{\tau}_j, \phi_i \mathbf{e}_1) & a_s(\phi_j (\mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j), \phi_i \mathbf{e}_1) \\ a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{e}_2) & a_s(\phi_j \boldsymbol{\tau}_j, \phi_i \mathbf{e}_2) & a_s(\phi_j (\mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j), \phi_i \mathbf{e}_2) \\ a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{e}_3) & a_s(\phi_j \boldsymbol{\tau}_j, \phi_i \mathbf{e}_3) & a_s(\phi_j (\mathbf{n}_j \times \boldsymbol{\tau}_j), \phi_i \mathbf{e}_3) \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la cellule $\mathbb{A}_{\Gamma_D, \Omega}^{j,i} = \mathbb{A}_{\Omega, \Gamma_D}^{i,j}$ par symétrie si $j \in I_{int} \cup I_N$ et $i \in I_D$.

Pour introduire les équations correspondantes à la condition essentielle (Dirichlet) on éliminera de la matrice \mathbb{A} les lignes et les colonnes correspondantes aux coordonnées en $\boldsymbol{\tau}_i$ et $\mathbf{n}_i \times \boldsymbol{\tau}_i$ quand $i \in I_D$. On obtient :

$$(3.33) \quad \mathbb{A}_{\Gamma_D, \Gamma_D}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{n}_i) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}.$$

et

$$(3.34) \quad \mathbb{A}_{\Omega, \Gamma_D}^{i,j} = \begin{pmatrix} a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{e}_1) & 0 & 0 \\ a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{e}_2) & 0 & 0 \\ a_s(\phi_j \mathbf{n}_j, \phi_i \mathbf{e}_3) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En imposant la valeur 1 sur les termes diagonaux éliminés, on s'assure que la matrice ainsi modifiée soit inversible. Si maintenant on suppose qu'on a numéroté les nœuds d'interpolation de façon à ce que les points en Γ_D soient les derniers, on obtiendra une matrice $\tilde{\mathbf{A}}_s$ avec le profil suivant :

$$(3.35) \quad \tilde{\mathbf{A}}_s = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{\Omega, \Omega} & \mathbb{A}_{\Omega, \Gamma_D} \\ \mathbb{A}_{\Gamma_D, \Omega} & \mathbb{A}_{\Gamma_D, \Gamma_D} \end{pmatrix}$$

On procède de la même façon avec la matrice des contraintes $\underline{\mathbf{B}}$ en mettant à zéro les coefficients des colonnes correspondantes aux τ_i et $\mathbf{n}_i \times \tau_i$ quand $i \in I_D$, pour obtenir $\tilde{\mathbf{B}}$. Donc le système linéaire à résoudre numériquement est donné par :

$$(3.36) \quad \underline{\mathbf{A}}_s \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{où} \quad \underline{\mathbf{A}}_s = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_s & \tilde{\mathbf{B}}^H \\ \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

avec \mathbf{x} contenant les valeurs nodales du champ \mathbf{E}^h et p^h , dans la base B_i si $i \in I_D$.

Dans la pratique, si on veut conserver une numérotation des nœuds optimale par rapport à la résolution du système linéaire (proximité de la numérotation des nœuds proches) on ne pourra choisir la numérotation des nœuds sur Γ_D . Pour obtenir la matrice correspondante aux conditions de bord essentielles il suffira de considérer la matrice de changement de base \mathbf{Z} avec des cellules diagonales $\mathbf{Z}_{i,i} = I_{d,3 \times 3}$ pour $i \in I_{int} \cup I_N$ et :

$$(3.37) \quad \mathbf{Z}_{i,i} = \begin{pmatrix} n_{i,1} & \tau_{i,1} & (\mathbf{n}_i \times \tau_i)_1 \\ n_{i,2} & \tau_{i,2} & (\mathbf{n}_i \times \tau_i)_2 \\ n_{i,3} & \tau_{i,3} & (\mathbf{n}_i \times \tau_i)_3 \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite la matrice :

$$(3.38) \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^t \underline{\mathbf{A}}_s \mathbf{Z} & (\underline{\mathbf{B}} \mathbf{Z})^H \\ \underline{\mathbf{B}} \mathbf{Z} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

On effectue maintenant les mêmes modifications nécessaires pour prendre en compte les conditions essentielles pour obtenir $\tilde{\mathbf{A}}_s$, $\tilde{\mathbf{B}}$ et le même système (3.36).

3.3.7 Assemblage de la matrice du système linéaire

Dans ce paragraphe on décrit les procédures d'assemblage de la matrice du système linéaire résolu pour obtenir l'approximation du champ électrique \mathbf{E} et du multiplicateur p . Soit Th le tableau qui décrit la tétraédrisation du domaine Ω . Soit N_h^2 le nombre de nœuds

de discrétisation du champ \mathbf{E} et Lh le nombre de tétraèdres. Le nombre d'inconnues pour obtenir une approximation \mathbb{P}_2 de \mathbf{E} est alors égal à $3 * N_h^2$. Soit N_h^1 le nombre de points de discrétisation géométrique (c'est à dire les noeuds définissant les tétraèdres). Le nombre d'inconnues nécessaires pour obtenir une approximation \mathbb{P}_1 du multiplicateur de Lagrange p est noté $NhGeo$.

On construit quatre matrices creuses \mathbf{matRR} , \mathbf{matM} , \mathbf{matD} et \mathbf{matB} correspondant aux matrices définies au paragraphe (3.3.6).

L'algorithme pour l'assemblage de la matrice \mathbf{matRR} de coefficients $(\mathbf{rot} \phi_j^m, \mathbf{rot} \phi_i^n)$ est le suivant :

Pour $l = 1 : Lh$

On calcule les matrices élémentaires $\mathbf{RRh}\{m\}\{n\}(i, j) = (\mathbb{Rot}_{TT}^{m,n})_{ij}$

avec $m, n = 1 : 3$, le nombre d'inconnues \mathbf{E} par noeud, et $i, j = 1 : 10$, le nombre de points d'interpolation \mathbb{P}_2 .

Ensuite on cumule la contribution du tétraèdre l aux noeuds correspondants :

Pour $m = 1 : 3$

Pour $n = 1 : 3$

$$\mathbf{RR}\{m\}\{n\}(Th(1 : 10, l), Th(1 : 10, l)) = \mathbf{RR}\{m\}\{n\}(Th(1 : 10, l), Th(1 : 10, l)) + \mathbf{RRh}\{m\}\{n\}$$

end

end

end

La matrice \mathbf{matRR} est obtenue ensuite par concaténation des cellules $\mathbf{RR}\{m\}\{n\}$:

$$\mathbf{matRR} = [\mathbf{RR}\{1\}\{1\} \mathbf{RR}\{1\}\{2\} \mathbf{RR}\{1\}\{3\}; \mathbf{RR}\{2\}\{1\} \mathbf{RR}\{2\}\{2\} \mathbf{RR}\{2\}\{3\}; \mathbf{RR}\{3\}\{1\} \mathbf{RR}\{3\}\{2\} \mathbf{RR}\{3\}\{3\}]$$

La matrice \mathbf{matM} correspondant au produit $(\mathbf{KE}, \mathbf{F})$ est assemblée avec l'algorithme suivant :

Pour $l = 1 : Lh$

On calcule les matrices élémentaires $\mathbf{Mh}\{m\}\{n\}(i, j) = (\mathbb{M}_{TT}^{m,n})_{ij}$

avec $m, n = 1 : 3$, le nombre d'inconnues \mathbf{E} par noeud, et $i, j = 1 : 10$, le nombre de points d'interpolation \mathbb{P}_2 .

Ensuite on cumule la contribution du tétraèdre l aux noeuds correspondants :

Pour $m = 1 : 3$

Pour $n = 1 : 3$

$$\mathbf{MM}\{m\}\{n\}(Th(1 : 10, l), Th(1 : 10, l)) = \mathbf{MM}\{m\}\{n\}(Th(1 : 10, l), Th(1 : 10, l)) + \mathbf{Mh}\{m\}\{n\}$$

end
end
end

La matrice \mathbf{matM} est obtenue ensuite par concaténation des cellules $\mathbf{MM}\{m\}\{n\}$:

$$\mathbf{matM} = [\mathbf{MM}\{1\}\{1\} \ \mathbf{MM}\{1\}\{2\} \ \mathbf{MM}\{1\}\{3\}; \mathbf{MM}\{2\}\{1\} \ \mathbf{MM}\{2\}\{2\} \ \mathbf{MM}\{2\}\{3\}; \\ \mathbf{MM}\{3\}\{1\} \ \mathbf{MM}\{3\}\{2\} \ \mathbf{MM}\{3\}\{3\}]$$

De la même façon la matrice \mathbf{matD} correspondant au produit $(\text{div}(\mathbf{KE}), \nabla \cdot (\mathbf{KF}))$ est assemblée par l'algorithme suivant :

Pour $l = 1 : Lh$

On calcule les matrices élémentaires $\mathbf{Dh}\{m\}\{n\}(i, j) = (\text{Div}_{TT}^{m,n})_{i,j}$

avec $m, n = 1 : 3$, le nombre d'inconnues E par noeud, et $i, j = 1 : 10$, le nombre de points d'interpolation \mathbb{P}_2 .

Ensuite on cumule la contribution du tétraèdre l aux noeuds correspondants :

Pour $m = 1 : 3$

Pour $n = 1 : 3$

$$\mathbf{DD}\{m\}\{n\}(Th(1 : 10, l), Th(1 : 10, l)) = \mathbf{DD}\{m\}\{n\}(Th(1 : 10, l), Th(1 : 10, l)) \\ + \mathbf{Dh}\{m\}\{n\}$$

end
end
end

La matrice \mathbf{matD} est obtenue ensuite par concaténation des cellules $\mathbf{DD}\{m\}\{n\}$:

$$\mathbf{matD} = [\mathbf{DD}\{1\}\{1\} \ \mathbf{DD}\{1\}\{2\} \ \mathbf{DD}\{1\}\{3\}; \mathbf{DD}\{2\}\{1\} \ \mathbf{DD}\{2\}\{2\} \ \mathbf{DD}\{2\}\{3\}; \\ \mathbf{DD}\{3\}\{1\} \ \mathbf{DD}\{3\}\{2\} \ \mathbf{DD}\{3\}\{3\}]$$

Si maintenant on note $cte = \frac{\omega^2}{c^2}$ et s le coefficient de pénalité, la matrice \mathbf{A}_s est simplement :

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{matRR} - cte * \mathbf{matM} + s * \mathbf{matD}$$

Si on note, comme dans le paragraphe précédent, \mathbf{Z} la matrice de changement de base définie dans la section (3.3.6) on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}}_s = \mathbf{Z}^t \mathbf{A}_s \mathbf{Z}$$

Pour introduire la condition au bord du conducteur parfait on annule la ligne et la colonne correspondante aux noeuds du bord où $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$, sauf le coefficient diagonal qui prend la valeur un, pour obtenir une nouvelle matrice que l'on notera toujours $\tilde{\mathbf{A}}_s$.

L'assemblage de la matrice \mathbf{matB} correspondant au terme $(\text{div}(\mathbf{KE}), p)$ est relativement plus complexe car \mathbf{E} est approchée par des éléments finis \mathbb{P}_2 et p par des éléments finis \mathbb{P}_1 . Une rénumérotation des équations est nécessaire car l'ancienne numérotation ne correspond plus aux indices des équations. La matrice \mathbf{matB} obtenue est rectangulaire de dimension $N_h^1 \times 3 * N_h^2$. Cette correspondance d'indices se trouve dans le tableau $indTl$.

On obtient l'algorithme suivant :

Pour $l = 1 : Lh$

On calcule les matrices élémentaires $\mathbf{Bh}\{m\}(i, j) = (\mathbb{B}_{TT}^n)_{ij}$

avec $m = 1 : 3$, le nombre d'inconnues E par noeud, $i = 1 : 4$ et $j = 1 : 10$.

Ensuite on cumule la contribution du tétraèdre l aux noeuds correspondants :

Pour $m = 1 : 3$

Pour $i = 1 : 4$

$ind = indTl(Th(i, l))$

Pour $j = 1 : 10$

$$\mathbf{BB}\{m\}(ind, Th(1 : 10, l)) = \mathbf{BB}\{m\}(ind, Th(1 : 10, l)) + \mathbf{Bh}\{m\}$$

end

end

end

end

Ensuite la matrice \mathbf{matB} est obtenue par concaténation des cellules $\mathbf{BB}\{m\}$:

$$\mathbf{matB} = [\mathbf{BB}\{1\} \ \mathbf{BB}\{2\} \ \mathbf{BB}\{3\}]$$

Dans l'étape suivante on calcule \mathbf{matBZ} pour introduire la condition au bord du conducteur parfait $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur Γ_C . On annule les colonnes correspondantes aux noeuds où $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ est vérifié, pour obtenir $\tilde{\mathbf{matB}}$.

On obtient la matrice, dans la base introduite dans la section (3.3.6), du système linéaire associé à la formulation faible mixte augmentée :

$$\mathbf{A} = [\tilde{\mathbf{A}}_s \ (\tilde{\mathbf{matB}})^H; \ \tilde{\mathbf{matB}} \ \mathbf{0}]$$

L'assemblage du second membre suit la même règle. On note N_A le nombre d'antennes. Soient $LThA$ le tableau contenant l'adresse des éléments du bord de chaque antenne, le tableau ETh décrivant la triangulation du bord. Ainsi on fera :

Pour $k = 1 : N_A$

Pour $i = 1 : LThA(k)$

$ielem = \text{liste-elements-antenne}(i)$

On calcule les matrices élémentaires $\mathbf{Vech}\{n\}(j) = \mathbf{f}_j^n$

avec $n = 1 : 3$ et $j = 1 : 6$ le nombre de noeuds d'approximation \mathbb{P}_2 sur le bord.

Ensuite on cumule la contribution du tétraèdre $ielem$ aux noeuds correspondants :

Pour $n = 1 : 3$

Pour $j = 1 : 6$

$$\mathbf{f}\{n\}(ETh(j, ielem), 1) = \mathbf{f}\{n\}(ETh(j, ielem), 1) + \mathbf{Vech}\{n\}(j)$$

end

end

end

end

Le vecteur $\mathbf{secondM}$ est obtenu ensuite par la concaténation des cellules $\mathbf{f}\{n\}$, $n = 1 : 3$.

$$\mathbf{secondM} = [\mathbf{f}1; \mathbf{f}2; \mathbf{f}3]$$

Ensuite pour tenir compte de la condition au bord sur Γ_C on calcule :

$$\mathbf{sec\~{o}ndM} = \mathbf{Z}^t \times \mathbf{secondM}$$

et on annule les lignes correspondantes aux inconnues vérifiant $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$, pour obtenir un nouveau $\mathbf{sec\~{o}ndM}$. Et donc le système linéaire associé à la formulation faible mixte augmentée prend la forme :

$$(3.39) \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_s & (\mathbf{matB})^H \\ \mathbf{matB} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{sec\~{o}ndM} \\ \mathbf{N}_h^1 \mathbf{zeros} \end{pmatrix}$$

La résolution du système linéaire (3.39) peut être réalisée par deux méthodes, la méthode directe de Gauss ou par une méthode itérative GMRES, qui est adapté à des systèmes non hermitiens, voir [50], [25], [51].

Pour obtenir des résultats satisfaisants les méthodes itératives nécessitent un preconditionnement de la matrice du système linéaire, voir [27], [26], [10] et [9]. Dans le cas présent on a implémenté un preconditionneur dit diagonal et un preconditionneur SSOR avec $w = 1$, voir [48] et [44]. La factorisation ILU ne semblent pas donner des résultats satisfaisants. Dans les exemples examinés dans le chapitre 5 la méthode la plus précise est la méthode directe.

4 Condition Inf-Sup discrète en 3 dimensions

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier le caractère bien posé de la formulation variationnelle mixte augmentée notée FVMAD du problème variationnel discret (3.1)-(3.2). On va montrer la stabilité des éléments finis de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ implémentés pour approcher le champ électrique \mathbf{E} d'une part et le multiplicateur de Lagrange p d'une autre part.

Des études analogues ont été faites pour les problèmes de Stokes en 2 et 3 dimensions [32], [57], [33]. On va étendre ces résultats à nos équations.

On va utiliser les techniques introduites dans [30], [57] et [19] pour des éléments finis tétraédriques. On suppose que Ω est un polyèdre de \mathbb{R}^3 approchant un tore dont les nœuds de la frontière, Γ , sont des points de la frontière du tore qui sera ainsi constitué d'un ensemble fini de faces polyédriques.

On considère $\mathcal{T}_{2,h}$ une triangulation de Γ , note Γ_h , telle que :

$$\Gamma_h = \Gamma$$

et

$$\overline{\Gamma}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{2,h}} \overline{T} = \overline{\Gamma}$$

et $\mathcal{T}_{1,h}$ une discrétisation géométrique de Ω par un ensemble de tétraèdres obtenue à partir de $\mathcal{T}_{2,h}$, on a :

$$\Omega_h = \Omega$$

et

$$\overline{\Omega}_h = \bigcup_{TT \in \mathcal{T}_{1,h}} \overline{TT} = \overline{\Omega}$$

Cette discrétisation est conforme dans le sens où l'intersection de deux éléments distincts TT_1 et TT_2 de $\mathcal{T}_{1,h}$ est soit le vide, une face, une arête ou un sommet (de TT_1 et TT_2).

On définit deux paramètres h_{TT} et ρ_{TT} de la façon suivante : h_{TT} est le diamètre extérieur du tétraèdre TT , c'est à dire le diamètre de la plus petite boule contenant TT et ρ_{TT} le diamètre de la plus grande boule contenue dans TT .

On note $h = \max_{TT \in \mathcal{T}_{1,h}} h_{TT}$.

On introduit le nombre $\sigma_{TT} = \frac{h_{TT}}{\rho_{TT}}$. Ce nombre ne dépend pas de la taille du tétraèdre TT mais uniquement de sa forme géométrique. Il mesure l'aplatissement de TT : plus σ_{TT} est grand plus TT est aplati. Donc pour assurer la régularité de notre maillage, on suppose qu'il existe $\sigma > 0$ telle que

$$(4.1) \quad \sigma_{TT} \leq \sigma \quad \forall TT \in \mathcal{T}_{1,h}$$

On suppose aussi que le maillage est quasi-uniforme, c'est à dire :

$$\exists 0 < c < 1; \quad ch \leq h_{TT} \leq h$$

On suppose de plus que $\Gamma \cap \partial TT$ est soit le vide soit un triangle du bord Γ .

En conséquence, il existe $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et $\sigma_4 > 0$ telles que pour tout triangle $T \subset \mathcal{T}_{2,h}$ on a :

$$(4.2) \quad \sigma_1 h \leq |e| \leq \sigma_2 h \quad \text{pour toute arête } e \subset \partial T$$

$$(4.3) \quad \sigma_3 h^2 \leq |T| \leq \sigma_4 h^2 \quad \text{pour tout triangle } T \subset \partial TT$$

où $|e|$ et $|T|$ désignent respectivement la longueur de l'arête e et la surface du triangle T .

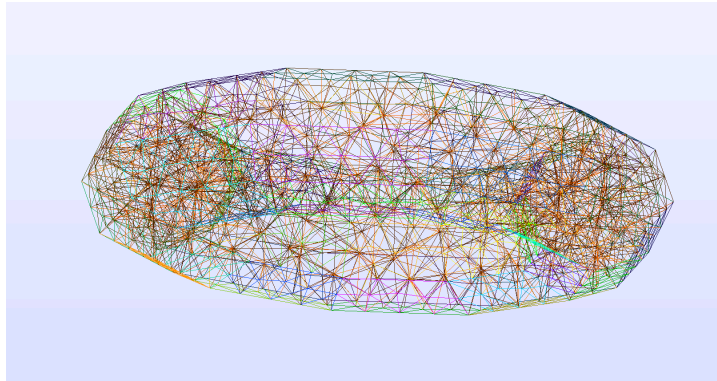


FIGURE 4.1 – Maillage tore polyédrique

4.2 Définition de la normale à Γ_h

Dans tout ce qui suit, les variables en gras désignent les variables vectorielles. Dans cette partie, on va définir la normale à Γ_h .

Soit \mathbf{n}_{T_i} la normale à la face T_i (triangles) d'un tétraèdre TT , $i = 1, \dots, 4$.

On définit la normale à Γ_h , notée par \mathbf{n}_h , de la façon suivante :

- Pour tout point \mathbf{x} appartenant à une face du polyèdre, $\mathbf{n}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_{T_i}$ si $\mathbf{x} \in T_i$.
- Sur les arêtes et les sommets du polyèdre, on définit la normale \mathbf{n}_h par

$$(4.4) \quad \mathbf{n}_h(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i/\mathbf{x} \in \bar{T}_i} |T_i| \mathbf{n}_{T_i}}{\sum_{i/\mathbf{x} \in \bar{T}_i} |T_i|}$$

En général, on notera \mathbf{n}_T la normale à une face T d'un tétraèdre TT .

4.3 Espaces d'approximation

Soient \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 les ensembles des polynômes de degré 1 et de degré 2 à valeurs complexes respectivement.

On introduit les espaces d'approximation du couple champ électrique complexe \mathbf{E} et multiplicateur de Lagrange p approché par des éléments finis de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ adaptés à la résolution des problèmes de type point-selle et évalués sur le même maillage pour une discrétisation du domaine en tétraèdres. Les espaces d'approximation du champ \mathbf{E} et du multiplicateur p sont respectivement \mathbf{Y}_h et Q_h donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h &= Y_h^3, \\ Q_h &= \{q_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h); \quad q_{h|_{TT}} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall TT \subset \mathcal{T}_{1,h}\} \\ \text{où } Y_h &= \{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}_h); \quad v_{h|_{TT}} \in \mathbb{P}_2, \quad \forall TT \subset \mathcal{T}_{1,h}\} \end{aligned}$$

On introduit les trois espaces discrets suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Y}_h : \mathbf{v}_h(a) \times \mathbf{n}_h(a) = \mathbf{0} \text{ pour tout point d'interpolation } a \text{ de } \Gamma_h\}, \\ \mathbf{X}_{0,h} &= \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Y}_h : \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_h\} \subset (H_0^1)^3(\Omega_h), \\ Q_{0,h} &= \{q_h \in Q_h : \int_{\Omega_h} q_h \, d\Omega_h = 0\}. \end{aligned}$$

4.4 Approximation du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$

4.4.1 Rappels

Dans le chapitre 2 on a rappelé les propriétés spectrales du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$. Ses valeurs propres sont simples et 2 à 2 distinctes et son polynôme caractéristique est scindé dans \mathbb{C} . Ses valeurs propres sont de parties imaginaires uniformément bornées inférieurement par une constante strictement positive. En conséquence, il existe $\zeta > 0$ définie par :

$$(4.5) \quad \zeta = \min_{i=1:3} \{ \min_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \text{Im}[\lambda_i(\mathbf{x})] \}$$

telle que

$$(4.6) \quad |\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) \mathbf{r}| \geq \text{Im}[(\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) \mathbf{r})] \geq \zeta(\mathbf{r}^H \mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

On suppose que les coefficients du tenseur $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})$, notés $\underline{\mathbf{K}}_{ij}(\mathbf{x})$, $i, j = 1 : 3$, appartiennent à l'ensemble $W^{2,\infty}(\bar{\Omega})$. En conséquence, on peut déduire qu'il existe deux constantes K' et K'' strictement positives telles que pour tout $i, j, k, l = 1 : 3$ on a :

$$(4.7) \quad \left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \right| \leq K' \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega},$$

et

$$(4.8) \quad \left| \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{K}}_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}) \right| \leq K'' \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Notations. Pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, on note par $|||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})|||_0$ et $|||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})|||_\infty$ les normes matricielle induites respectivement par la norme vectorielle euclidienne et la norme vectorielle infinie.

Des hypothèses faites sur les coefficients de $\underline{\mathbf{K}}$, c'est à dire $\mathbf{x} \mapsto \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})$ est bornée, continue de $\bar{\Omega}$ dans $M_3(\mathbb{C})$ on peut déduire qu'il existe $K_0^+ > 0$ tel que :

$$(4.9) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})|||_0 = K_0^+.$$

On peut aussi déduire qu'il existe une constante $K_\infty^+ > 0$ telle que :

$$(4.10) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})|||_\infty = K_\infty^+.$$

Remarque 4.1. Le fait que K_0^+ soit la valeur singulière maximale implique que

$$(4.11) \quad \text{Re}[(\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) \mathbf{r})] \leq K_0^+(\mathbf{r}^H \mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Vu les propriétés spectrales de la matrice $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})$, le tenseur est inversible pour tout $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. L'application inverse est continue donc on peut déduire qu'il existe une constante $K_0^{(-1),+} > 0$ telle que :

$$(4.12) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |||\underline{\mathbf{K}}^{-1}(\mathbf{x})|||_0 = K_0^{(-1),+}$$

On peut aussi déduire qu'il existe une constante $K_\infty^{(-1),+} > 0$ telle que :

$$(4.13) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |||\underline{\mathbf{K}}^{-1}(\mathbf{x})|||_\infty = K_\infty^{(-1),+}$$

4.4.2 Définition de $\underline{\mathbf{K}}_h$

On définit une approximation $\underline{\mathbf{K}}_h$ de $\underline{\mathbf{K}}$ de la façon suivante : pour tout $i, j = 1 : 3$, on considère $\underline{\mathbf{K}}_{h_{i,j}}(\mathbf{x})$ l'approximation de $\underline{\mathbf{K}}_{i,j}(\mathbf{x})$ dans l'ensemble $\{v \in \mathcal{C}(\Omega) : v|_{TT} \in \mathbb{P}_1(TT)\}$. Donc on définit $\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})$ le tenseur de coefficients $\underline{\mathbf{K}}_{h_{i,j}}(\mathbf{x})$.

Pour étudier les propriétés de la matrice $\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})$ pour tout \mathbf{x} dans $\bar{\Omega}_h$, on a besoin d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 4.1. [43] *Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille de tétraèdres réguliers. On suppose que les éléments (K, P_K, Σ_K) sont de Lagrange, affinement équivalents à un même élément $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ et de classe \mathcal{C}^0 . On suppose de plus que l'on a*

$$(4.14) \quad \mathbb{P}_k(K) \subset P_K \subset H^1(K) \cap \mathcal{C}(K), \quad \text{avec } k > \frac{n}{2} - 1.$$

Alors il existe $c = c(n, k, \widehat{K}, \widehat{\Pi})$ telle que

$$(4.15) \quad |v - \Pi_h v|_{m, \Omega} \leq c \sigma^m h^{k+1-m} |v|_{k+1, \Omega},$$

pour tout $v \in H^{k+1}(\Omega)$, $m \in \{0, 1\}$, σ la constante de régularité du maillage définie dans (4.1) et $\widehat{\Pi}$ est l'opérateur de \widehat{P} -interpolation.

La démonstration de ce théorème se trouve dans [43], page 83, théorème 7.11. Un théorème similaire dans le cas de la norme infinie se trouve dans [28] page 61. On suppose de plus que $\underline{\mathbf{K}}_{i,j}(\mathbf{x})$ appartient à l'ensemble $W^{2,\infty}(\bar{\Omega})$ pour tout $i, j = 1 : 3$, donc pour $k = 1$ on peut déduire que :

$$\begin{aligned} & - \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} |||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})|||_0 \leq \tilde{C}_1 h^2 \text{ sur } \Omega_h, \\ & - \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} |||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})|||_\infty \leq \tilde{C}_2 h^2 \text{ sur } \Omega_h. \end{aligned}$$

Les deux constantes \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 dépendent des bornes supérieures sur $\bar{\Omega}$ des dérivées partielles d'ordre 2 de $\underline{\mathbf{K}}_{h_{i,j}}(\mathbf{x})$.

En conséquence, on peut déduire que, pour h suffisamment petit, la matrice $\underline{\mathbf{K}}_h$ possède des propriétés spectrales similaires à celles vérifiées par la matrice $\underline{\mathbf{K}}$, voir [49]. En particulier pour h suffisamment petit, on démontre que la matrice $\underline{\mathbf{K}}_h$ possède une propriété similaire à celle prouvée dans le lemme (1.2) pour la matrice $\underline{\mathbf{K}}$.

Remarque 4.2. *La fonction $\mathbf{x} \mapsto \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})$ est continue de $\bar{\Omega}_h$ à valeurs dans $M_3(\mathbb{C})$, bornée et $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} |||\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})|||_0 \leq K_{h_1}^+ < +\infty$.*

Plus encore :

$$(4.16) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} |||\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})|||_0 \leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} |||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})|||_0 + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} |||\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})|||_0 \leq K_0^+ + \tilde{C}_1 h^2$$

alors il existe $h_1 > 0$ tel que $K_0^+ + \tilde{C}_1 h^2 > 0$ pour tout $h \leq h_1$ on a

$$(4.17) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} |||\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})|||_0 \leq K_{h_1}^+$$

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})\|_\infty \leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\|_\infty + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})\|_\infty \leq K_\infty^+ + n\tilde{C}_2 h^2$$

alors il existe $h_2 > 0$ tel que $K_\infty^+ + \tilde{C}_2 h^2 > 0$ pour tout $h \leq h_2$ on a

$$(4.18) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x})\|_\infty \leq K_{h_2}^+$$

Les propriétés spectrales de $\underline{\mathbf{K}}_h$ étant similaires à celles de $\underline{\mathbf{K}}$ pour h suffisamment petit, on en déduit le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Il existe une constante $\zeta^* > 0$ et $h_3 > 0$ tels que pour tout $h \leq h_3$ on a*

$$(4.19) \quad |\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) \mathbf{r}| \geq \text{Im}[(\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) \mathbf{r})] \geq \zeta^*(\mathbf{r}^H \mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{r} \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{aligned} \text{Im}[\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) \mathbf{r}] &= \text{Im}[\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) \mathbf{r} + \mathbf{r}^H (\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})) \mathbf{r}] \\ &\geq \zeta(\mathbf{r}^H \mathbf{r}) - |\mathbf{r}^H (\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})) \mathbf{r}| \\ &\geq \zeta(\mathbf{r}^H \mathbf{r}) - \|\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x})\|_0 (\mathbf{r}^H \mathbf{r}) \\ &\geq \zeta(\mathbf{r}^H \mathbf{r}) - \tilde{C}_1 h^2 (\mathbf{r}^H \mathbf{r}) \\ &\geq (\zeta - \tilde{C}_1 h^2) (\mathbf{r}^H \mathbf{r}) \end{aligned}$$

Donc il existe $h_3 > 0$ tel que $(\zeta - \tilde{C}_1 h^2) > 0$ pour tout $h \leq h_3$ on a

$$\text{Im}[\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) \mathbf{r}] \geq \zeta^*(\mathbf{r}^H \mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h$$

avec $\zeta^* > 0$ indépendante de h . □

Par ailleurs, par continuité de l'inversion des matrices inversibles on peut déduire que

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(\mathbf{x})\|_0 \leq K_0^{(-1),+} + \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}^{-1}(\mathbf{x})\|_0 \leq K_0^{(-1),+} + \tilde{C}_3 h^2.$$

Donc il existe $h_4 > 0$ tel que $K_2^{(-1),+} + \tilde{C}_3 h^2 > 0$ pour tout $h \leq h_4$ on a

$$(4.20) \quad \max_{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(\mathbf{x})\|_0 \leq K_{h_4}^{(-1),+}$$

De la même façon, en utilisant l'équation (4.13), on montre qu'il existe $h_5 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_5$

$$(4.21) \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|\underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(\mathbf{x})\|_\infty \leq K_{h_5}^{(-1)}$$

De plus, pour tout tétraèdre TT de $\mathcal{T}_{1,h}$ on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right| &\leq \left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} - \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right| + \left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right| \\ &\leq Mh + K' \quad (\text{d'après (4.7) et le théorème 4.1}). \end{aligned}$$

Donc il existe $h_6 > 0$ tel que $Mh + K' > 0$, on a pour tout $h \leq h_6$:

$$(4.22) \quad \left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{h_i, j}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right| \leq K'_{h_6}$$

Dans la suite de ce chapitre, sans affirmation du contraire, on supposera que $h < h_0 = \min\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$.

4.5 Formulation discrète

On introduit les formes sesquilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}) dx \\ b_h(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h\mathbf{v}) dx \\ b_h^h(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega_h} q \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h\mathbf{v}) dx \\ b^h(\mathbf{v}, q) &= \int_{\Omega_h} q \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}) dx \end{aligned}$$

On rappelle la formulation variationnelle mixte augmentée associée au problème variationnel discret (3.1)-(3.2) :

Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{X}_h \times Q_h$ tel que

$$(4.23) \quad a_{s,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \overline{b_h^h(\mathbf{v}_h, p_h)} = l_{s,h}(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h,$$

$$(4.24) \quad b_h^h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h.$$

avec

$$\begin{aligned} a_{s,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= (\mathbf{rot} \mathbf{u}_h, \mathbf{rot} \mathbf{v}_h)_{0, \Omega_h} - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega_h} + s(\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{u}_h, \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h)_{0, \Omega_h}, \\ b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h) &= (\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h), q_h)_{0, \Omega_h}. \end{aligned}$$

4.6 Existence et unicité de la solution

On s'intéresse à montrer le caractère bien-posé de la formulation précédente, (4.23)-(4.24). Pour cela, on rappelle un théorème fondamental qui assure l'existence et l'unicité de solutions de certaines formulations variationnelles mixtes.

Théorème 4.2. (*Babuska-Brezzi*)

Soient \mathbf{W} et Q deux espaces de Hilbert, a et b deux formes sesquilinéaires continues

$$(4.25) \quad a(\cdot, \cdot) : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{C},$$

$$(4.26) \quad b(\cdot, \cdot) : \mathbf{W} \times Q \ni (\mathbf{v}, q) \longmapsto b(\mathbf{v}, q) \in \mathbb{C},$$

et L, l deux formes anti-linéaires continues

$$(4.27) \quad L(\cdot) : \mathbf{W} \ni \mathbf{v} \longmapsto L(\mathbf{v}) \in \mathbb{C},$$

$$(4.28) \quad l(\cdot) : Q \ni q \longmapsto l(q) \in \mathbb{C},$$

On pose $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{W}; b(\mathbf{v}, q) = 0 \quad \forall q \in Q\} = \ker(b)$. Si

(i) la forme bilinéaire a est \mathbf{V} -coercive, i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$(4.29) \quad |a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_W \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

(ii) la forme bilinéaire b satisfait la condition inf-sup, i.e. il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$(4.30) \quad \inf_{q \in Q} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}} \frac{|b(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_W \|q\|_Q} \geq \delta$$

alors le problème

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{W} \times Q$ tel que

$$(4.31) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \overline{b(\mathbf{v}, p)} = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W},$$

$$(4.32) \quad b(\mathbf{u}, q) = l(q) \quad \forall q \in Q,$$

est bien posé, i.e. il existe un unique couple (\mathbf{u}, p) vérifiant (4.31)-(4.32) et

$$(4.33) \quad \|\mathbf{u}\|_W + \|p\|_Q \leq C(\|L\|_{W'} + \|l\|_{Q'})$$

Démonstration. voir [30] ou [33]. □

4.6.1 Coercivité de $a_{s,h}$

La forme bilinéaire $a_{s,h}$ de la formulation variationnelle mixte augmentée du problème discret (4.23)-(4.24) est à valeurs complexes. On rappelle le résultat suivant qui sert à démontrer la \mathbf{V} -ellipticité (condition (i) du théorème de Babuska-Brezzi) pour le cas présent, voir [52].

Proposition 4.1. Soient \mathbf{V} et \mathbf{H} des espaces de Hilbert tels que l'injection de \mathbf{V} dans \mathbf{H} soit continue et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire sur $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$. Si

- (i') il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ telles que la partie réelle de $a(\cdot, \cdot)$, $Re[a(\cdot, \cdot)]$, vérifie l'inégalité :

$$(4.34) \quad |Re[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 - \lambda \|\mathbf{v}\|_H^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

- (i'') il existe une constante $\gamma > 0$, telle que la partie imaginaire de $a(\cdot, \cdot)$, $Im[a(\cdot, \cdot)]$, vérifie l'inégalité :

$$(4.35) \quad |Im[a(\mathbf{v}, \mathbf{v})]| \geq \gamma \|\mathbf{v}\|_H^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.$$

Alors la forme bilinéaire a_s est \mathbf{V} -coercive.

Dans le cas du problème original, il a été démontré dans [36] et (voir chap 2) que

Théorème 4.3. *On suppose que, pour chaque espèce s (ions et électrons), les fonctions à valeurs complexes ν , γ_e , ω_{cs} et ω_{ps} , sont continues sur $\bar{\Omega}$ et bornées inférieurement et supérieurement par des nombres strictement positifs. Et si $Re(s) > 0$ et $Im(s) \leq 0$ alors la formulation variationnelle mixte augmentée admet une solution.*

On suppose dorénavant que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.2 de Babuska-Brezzi aux problèmes variationnels.

Proposition 4.2. *La forme bilinéaire $a_{s,h}$ vérifie la condition (i) pour tout $h < h_0$.*

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, il suffit de vérifier les deux hypothèses de la proposition 4.1.

La forme bilinéaire $a_{s,h}$ dépend de la matrice $\underline{\mathbf{K}}_h$.

Une démarche similaire à celle employée dans la démonstration de la coercivité de a_s nous permet de déduire que :

$$\begin{aligned} Re[a_{s,h}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)] &\geq \min(1, Re[s])(\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h}^2 - \|\mathbf{v}_h\|_0^2) - \frac{\omega^2}{c^2} K_h^+ \|\mathbf{v}_h\|_0^2 \\ Im[a_{s,h}(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)] &\leq Im[s] \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h)\|_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \zeta^* \|\mathbf{v}_h\|_0^2 \end{aligned}$$

Les deux conditions étant vérifiées, la forme bilinéaire $a_{s,h}$ est coercive pour tout $h < h_0$ \square

Remarque 4.3. *En conséquence, la \mathbf{V} -coercivité de la forme bilinéaire $a_{s,h}$ du problème discret découle (directement) de celle de la forme bilinéaire a_s du problème continu.*

4.6.2 Condition inf-sup, stabilité des éléments de Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ en 3D

On commence tout d'abord par introduire les normes suivantes sur les espaces discrets. On munit \mathbf{X}_h et Q_h respectivement des deux normes suivantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h} &= \left(\|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega_h}^2 + \|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega_h}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|q_h\|_{Q_h} &= \|q_h\|_{0,\Omega_h} . \end{aligned}$$

On veut montrer que le problème variationnel discret (4.23)-(4.24) est bien posé sur $\mathbf{X}_h \times Q_h$; $\exists \beta > 0$ indépendante du pas de discrétisation h telle que

$$(4.36) \quad \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|q_h\|_{0,\Omega_h} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h}} \geq \beta$$

Remarque 4.4. La démonstration comportera deux parties : on démontrera dans un premier temps que la condition Inf-Sup est vérifiée sur $\mathbf{X}_{0,h} \times Q_{0,h}$ puis sur $\mathbf{X}_h \times Q_h$. La démonstration comportera plusieurs étapes intermédiaires ; tout d'abord on démontrera à l'aide du lemme du Fortin, [29], [33] (page 117), une condition inf-sup sur l'espace $\mathbf{X}_{0,h} \times Q_{0,h}$ muni des normes $\|\cdot\|_{1,\Omega_h}, \|\cdot\|_{Q_{0,h}}$. On établira ensuite une condition inf-sup intermédiaire sur l'espace $(\mathbf{H}_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega}) \times (L_0^2(\Omega), \|\cdot\|_{0,\Omega})$. Ensuite une troisième condition inf-sup sur l'espace $(\mathbf{X}_{0,h}, \|\cdot\|_{1,\Omega_h}) \times (Q_{0,h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$. Ces trois conditions nous permettront d'établir celle sur l'espace $\mathbf{X}_{0,h} \times Q_{0,h}$ muni des normes $(\|\cdot\|_{\mathbf{X}_h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$. Et enfin à l'aide de la technique de [19], on en conclut la condition inf-sup finale sur l'espace $\mathbf{X}_h \times Q_h$ muni des normes $(\|\cdot\|_{\mathbf{X}_h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$.

a)– **Condition Inf-Sup sur l'espace $\mathbf{X}_{0,h} \times Q_{0,h}$:**

On introduit la norme suivante sur $Q_{0,h}$:

$$(4.37) \quad \|q\|_{Q_{0,h}}^2 = \sum_{TT \in \mathcal{T}_{1,h}} h_{TT}^2 \|\nabla q\|_{0,TT}^2$$

Remarquons que $\|\cdot\|_{Q_{0,h}}$ s'annule pour des fonctions constantes, d'où l'intérêt de se restreindre à $Q_{0,h}$.

Dans un premier temps, on rappelle un lemme indispensable quant à la démonstration de la condition inf-sup, voir [29], [33] (page 117).

Lemme 4.2. (Lemme de Fortin) On suppose qu'il existe un opérateur $P_h : Q_{0,h} \longrightarrow \mathbf{X}_{0,h}$ linéaire borné et une constante $\beta_1 > 0$ tels que

$$(4.38) \quad |b_h^h(P_h(q_h^0), q_h^0)| \geq \beta_1 \|P_h(q_h^0)\|_{1,\Omega_h} \|q_h^0\|_{Q_{0,h}}.$$

Alors, la condition inf-sup est vérifiée, c'est à dire :

$$(4.39) \quad \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \geq \beta_1 \|q_h^0\|_{Q_{0,h}}$$

Pour démontrer la condition inf-sup (4.36), on commence par démontrer la condition inf-sup dans $\mathbf{X}_{0,h} \times Q_{0,h}$ muni des normes $\|\cdot\|_{1,\Omega_h}, \|\cdot\|_{Q_{0,h}}$.

Démonstration. On applique dans ce paragraphe le lemme de Fortin.

Construction de l'opérateur P_h

On considère TT un tétraèdre de $\mathcal{T}_{1,h}$. Soit e une arête du tétraèdre TT de sommets a_i et a_j avec $i < j$ et de milieu m_e .

On définit le vecteur tangent τ_e à l'arête e par $\tau_e = \frac{a_i - a_j}{\|a_i - a_j\|}$.

On notera par $\nabla q_{h,\tau_e}^0$ le gradient tangentiel à l'arête e d'un élément q_h^0 appartenant à $Q_{0,h}$

et défini par $\nabla q_{h,\tau_e}^0 = \tau_e(\nabla q_h^0 \cdot \tau_e)$.

Pour un élément q_h^0 de $Q_{0,h}$, on pose $\mathbf{v}_{e_h}^0 = P_e(q_h^0)$ l'élément de $\mathbf{X}_{0,h}$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{e_h}^0(m_e) &= -(\underline{\mathbf{K}}_h(m_e))^{-1} \nabla q_{h,\tau}^0(m_e) |e|^2, \text{ si } m_e \text{ est le milieu de } e \subset \partial TT \setminus \partial\Omega_h, \\ \mathbf{v}_{e_h}^0(a) &= 0 \text{ pour tout autre point nodal } a \text{ de } \mathbf{X}_h. \end{aligned}$$

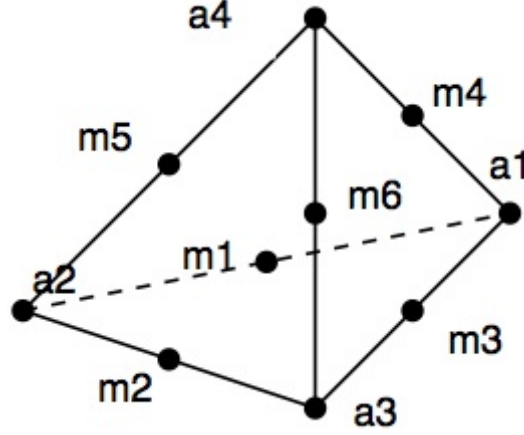


FIGURE 4.2 – tétraèdre avec 10 points d'interpolation

On définit :

$$\mathbf{v}_h^0 = P_h(q_h^0) := \sum_{e \in \Gamma_h} P_e(q_h^0) \in \mathbf{X}_{0,h}$$

Suivant la démarche de [33] et [30] et le fait que $\forall h \leq h_0$, $|\underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_e)| \leq K_{h_5,\infty}^{(-1),+}$ on a :

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{v}_h^0 \|_{1,TT} \leq C h_{TT} \| \nabla q_h^0 \|_{0,TT} \\ \implies &\| \mathbf{v}_h^0 \|_{1,\Omega_h} \leq C \left(\sum_{TT} h_{TT}^2 \| \nabla q_h^0 \|_{0,TT}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ (4.40) \quad \implies &\| \mathbf{v}_h^0 \|_{1,\Omega_h} \leq C \| q_h^0 \|_{Q_{0,h}} \end{aligned}$$

avec C une constante qui dépend de $K_{h_5,\infty}^{(-1),+}$ et indépendante de h pour tout $h \leq h_0$.

Ainsi l'opérateur $P_h : Q_{0,h} \rightarrow \mathbf{X}_{0,h}$ est continu.

Pour le reste de la démonstration, on a besoin d'introduire la formule d'intégration numérique sur un tétraèdre TT suivante construite dans la partie (7.4.2) :

Définition 4.1. Soit p un polynôme défini sur \mathbb{R}^3 , on définit la formule de quadrature suivante :

$$(4.41) \quad \int_{TT} p(x) dx \approx \left(\sum_B \alpha_B p(B) + \sum_S \alpha_S p(S) \right) |TT|$$

où B et S varient respectivement sur les barycentres et les sommets des faces du tétraèdre TT . α_B et α_S sont deux constantes données par : $\alpha_B = \frac{3}{8} \cdot 10^{-1}$ et $\alpha_S = 4167 \cdot 10^{-6}$. Par construction, cette formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3 .

Avec le choix précédent de \mathbf{v}_h^0 , on a :

$$\begin{aligned} |b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)| &= \left| \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0) q_h^0 dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_h} (\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0) \cdot \nabla q_h^0 dx \right| \\ &= \left| \sum_{TT} \int_{TT} (\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0) \cdot \nabla q_h^0 dx \right| \\ &\stackrel{(4.41)}{=} \left| \sum_{TT} |TT| \left(\sum_{j=1}^4 \alpha_{B_j} (\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0)(B_j) \cdot \nabla q_h^0 \right) \right| \end{aligned}$$

On note par T_{B_j} le triangle dont le barycentre est noté par B_j , on a :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}_h(B_j) \mathbf{v}_h^0(B_j) &= -\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) \sum_{m_k \in T_{B_j}} \underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_k) \nabla q_{h,\tau}^0(m_k) \varphi_{m_k}(B_j) |e_{m,k}|^2 \\ &= -\frac{4}{9} \sum_{m_k \in T_{B_j}} \underline{\mathbf{K}}_h(B_j) \underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_k) \nabla q_{h,\tau}^0(m_k) |e_{m,k}|^2 \quad (\varphi_{m_k}(B_j) = \frac{4}{9} \text{ pour tout } B_j) \\ &= -\frac{4}{9} \sum_{m_k \in T_{B_j}} (\nabla q_{h,\tau}^0(m_k) + (\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k)) \underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_k) \nabla q_{h,\tau}^0(m_k)) |e_{m,k}|^2 \end{aligned}$$

D'autre part, on remarque que l'uniformité et la régularité imposées sur le maillage entraîne que $\{\nabla q_{h,\tau}^0(m_k)\}_{1 \leq k \leq 6}$ forme une famille génératrice de \mathbb{R}^3 . D'où, l'existence de $C_q > 0$ telle que

$$(4.42) \quad \|\nabla q_h^0\|_{0,TT} \leq C_q \sum_{j=1}^4 \sum_{m_k \in T_{B_j}} \|\nabla q_{h,\tau}^0(m_k)\|_{0,TT}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|b_{h,h}(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)| &= \frac{4}{9} \left| \sum_{TT} |TT| \sum_{j=1}^4 \alpha_{B_j} \sum_{m_k \in T_{B_j}} |e_{m,k}|^2 \nabla q_{h,\tau}^0(m_k) \cdot \nabla q_h^0(m_k) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{TT} |TT| \sum_{j=1}^4 \alpha_{B_j} \sum_{m_k \in T_{B_j}} |e_{m,k}|^2 (\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k)) \underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_k) \nabla q_{h,\tau}^0(m_k) \cdot \nabla q_h^0(m_k) \right| \\
&\geq \frac{4}{9} \left| \sum_{TT} |TT| \sum_{j=1}^4 \alpha_{B_j} \sum_{m_k \in T_{B_j}} \underbrace{|e_{m,k}|^2}_{\geq \sigma_1^2 h_{TT}^2} \underbrace{\nabla q_{h,\tau}^0(m_k) \cdot \nabla q_h^0(m_k)}_{=|\nabla q_{h,\tau}^0(m_k)|^2} \right| \\
&\quad - \frac{4}{9} \left| \sum_{TT} |TT| \sum_{j=1}^4 \alpha_{B_j} \sum_{m_k \in T_{B_j}} |e_{m,k}|^2 \underbrace{(\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k)) \underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_k) \nabla q_{h,\tau}^0(m_k) \cdot \nabla q_h^0(m_k)}_{\|Ax \cdot y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|} \right| \\
&\geq \frac{4}{9} \alpha_B \left(\sigma_1^2 \sum_{TT} h_{TT}^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{m_k \in T_{B_j}} |TT| |\nabla q_{h,\tau}^0(m_k)|^2 \right. \\
&\quad \left. - \sigma_2^2 \sum_{TT} h_{TT}^2 |TT| \sum_{j=1}^4 \sum_{m_k \in T_{B_j}} \left| \left\| (\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k)) \underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_k) \right\|_0 |\nabla q_h^0(m_k)| |\nabla q_{h,\tau}^0(m_k)| \right| \right) \\
&\geq \frac{4}{9} \alpha_B \left(\sigma_1^2 \sum_{TT} h_{TT}^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{m_k \in T_{B_j}} \|\nabla q_{h,\tau}^0(m_k)\|_{0,TT}^2 \right. \\
&\quad \left. - \sigma_2^2 \sum_{TT} h_{TT}^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{m_k \in T_{B_j}} \underbrace{\left\| (\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k)) \right\|_0}_{*} \underbrace{\left\| \underline{\mathbf{K}}_h^{-1}(m_k) \right\|_0}_{(4.20)} \|\nabla q_h^0(m_k)\|_{0,TT}^2 \right)
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le terme en * on a

$$\begin{aligned}
\left\| (\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k)) \right\|_0 &\leq \left\| (\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}(B_j)) \right\|_0 + \left\| (\underline{\mathbf{K}}(B_j) - \underline{\mathbf{K}}(m_k)) \right\|_0 \\
&\quad + \left\| (\underline{\mathbf{K}}(m_k) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k)) \right\|_0 \\
&\leq 2\tilde{C}_1 h^2 + K_0^+ h
\end{aligned}$$

Donc pour h suffisamment petit, $\|(\underline{\mathbf{K}}_h(B_j) - \underline{\mathbf{K}}_h(m_k))\|_0 \leq C(\underline{\mathbf{K}})h$. D'où

$$\begin{aligned}
|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)| &\stackrel{(4.42)}{\geq} \frac{4}{9} \alpha_B \sigma_1^2 \tilde{C}_q \sum_{TT} h_{TT}^2 \|\nabla q_h^0\|_{0,TT}^2 \\
&\quad - \frac{4}{9} \alpha_B \sigma_2^2 \sum_{TT} h_{TT}^2 \underbrace{\sum_{j=1}^4 \sum_{m_k \in T_{B_j}}}_{=12} C(\underline{\mathbf{K}}) h K_{h_4}^{(-1),+} \|\nabla q_h^0\|_{0,TT}^2 \\
&\geq \frac{4}{9} \alpha_B (\sigma_1^2 \tilde{C}_q - 12 \sigma_2^2 h C(\underline{\mathbf{K}}) K_{h_4}^{(-1),+}) \sum_{TT} h_{TT}^2 \|\nabla q_h^0\|_{0,TT}^2 \\
&= \frac{4}{9} \alpha_B (\sigma_1^2 \tilde{C}_q - 12 \sigma_2^2 h C(\underline{\mathbf{K}}) K_{h_4}^{(-1),+}) \|q_h^0\|_{Q_{0,h}}^2
\end{aligned}$$

Donc, il existe $h_7 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_7$ on a $\frac{4}{9} \alpha_B (\sigma_1^2 \tilde{C}_q - 12 \sigma_2^2 h C(\underline{\mathbf{K}}) K_{h_4}^{(-1),+}) \geq \tilde{C} > 0$. Alors

$$|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)| \geq \tilde{C} \|q_h^0\|_{Q_{0,h}}^2$$

Compte tenu de la continuité de l'opérateur P_h (4.40), on en déduit que

$$\frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \geq \frac{\tilde{C}}{C} \|q_h^0\|_{Q_{0,h}}$$

En conséquence, si on note $\beta_1 = \frac{\tilde{C}}{C}$, on obtient que

$$(4.43) \quad |b_h^h(P_h(q_h^0), q_h^0)| \geq \beta_1 \|P_h(q_h^0)\|_{1,\Omega_h} \|q_h^0\|_{Q_{0,h}}.$$

D'où

$$(4.44) \quad \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \geq \frac{|b(P_h(q_h^0), q_h^0)|}{\|P_h(q_h^0)\|_{1,\Omega_h}} \geq \beta_1 \|q_h^0\|_{Q_{0,h}}$$

□

Dans le paragraphe suivant, on démontre la condition Inf-Sup sur l'espace $(\mathbf{X}_{0,h}, \times Q_{0,h})$ muni respectivement des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_0$.

Lemme 4.3. *La condition inf-sup est bien posée sur l'espace $(H_0^1(\Omega)^3, \|\cdot\|_{1,\Omega}) \times (L_0^2(\Omega), \|\cdot\|_{0,\Omega})$; il existe $\beta_c > 0$ telle que :*

$$(4.45) \quad \sup_{\mathbf{v}^0 \in H_0^1(\Omega)^3} \frac{|b(\mathbf{v}^0, q^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega}} \geq \beta_c \|q^0\|_{0,\Omega}$$

Démonstration. Soit $q^0 \in L_0^2(\Omega)$, en utilisant le lemme A.42 dans [28], on en déduit qu'il existe \mathbf{w}^0 dans $H_0^1(\Omega)^3$ tel que $\operatorname{div}(\mathbf{w}^0) = q^0$ et $\|\mathbf{w}^0\|_{1,\Omega} \leq C_{NS}\|q^0\|_{0,\Omega}$.

On pose $\mathbf{v}^0 = \underline{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{w}^0$, donc $\mathbf{v}^0 \in H_0^1(\Omega)^3$, $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}^0) = q^0$ et $\|\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega} \leq C_{NS}\|q^0\|_{0,\Omega}$.

De plus, à partir des propriétés spectrales du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$ vues dans les sections précédentes, l'application f :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega)^3 &\longrightarrow L_0^2(\Omega) \\ \mathbf{v}^0 &\longmapsto \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}^0) \end{aligned}$$

est une surjection linéaire continue. On considère alors f^*

$$\begin{aligned} \ker(f)^\perp &\longrightarrow L_0^2(\Omega) \\ \mathbf{v}^0 &\longmapsto \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}^0) \end{aligned}$$

Par construction, cette application est une bijection linéaire continue, par le théorème de l'isomorphisme de Banach, sa bijection réciproque est continue aussi et donc il existe une constante $C_K > 0$ telle que $\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega} \leq C_K\|q^0\|_{0,\Omega}$.

En conclusion, pour $q^0 \in L_0^2(\Omega)$ il existe $\mathbf{v}^0 \in \ker(f)^\perp \subset H_0^1(\Omega)^3$ tel que $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}^0) = q^0$ et $\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega} \leq C_K\|q^0\|_{0,\Omega}$.

Ce qui implique l'existence de $\beta_c > 0$ telle que

$$\sup_{\mathbf{v}^0 \in H_0^1(\Omega)^3} \frac{|b(\mathbf{v}^0, q^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega}} \geq \beta_c \|q^0\|_{0,\Omega}$$

D'où le caractère bien posé de la condition inf-sup continue sur l'espace $(H_0^1(\Omega)^3, \|\cdot\|_1) \times (L_0^2(\Omega), \|\cdot\|_0)$. \square

Maintenant on démontrera la condition inf-sup dans $(\mathbf{X}_{0,h}, \|\cdot\|_{1,\Omega_h}) \times (Q_{0,h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$.

Lemme 4.4. *La condition inf-sup est bien posée sur l'espace $(\mathbf{X}_{0,h}, \|\cdot\|_{1,\Omega_h}) \times (Q_{0,h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$; il existe $\tilde{\beta} > 0$ telle que :*

$$(4.46) \quad \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \geq \tilde{\beta} \|q_h^0\|_{0,\Omega_h}$$

Avant de commencer la démonstration on rappelle une technique d'interpolation pour gérer des fonctions dans $\mathbf{L}^1(\Omega)$ en utilisant les éléments finis de Lagrange conformes dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Cette technique a été introduite par Clément [20] d'où l'appellation "Opérateur de Clément". Cet opérateur d'approximation possède les 2 propriétés suivantes.

Lemme 4.5. (*Clément*)

— *Stabilité* : Soient $1 \leq p < +\infty$ et $0 \leq m \leq 1$. Il existe c telle que

$$(4.47) \quad \forall h, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{m,p}(\Omega), \quad \|\pi_h \mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)}.$$

— *Approximation* : Pour tout élément TT de $\mathcal{T}_{1,h}$, on note par Δ_{TT} l'ensemble des éléments dans \mathcal{T}_h ayant au moins un sommet avec TT . Soient l, m , et p tels que $1 \leq p < +\infty$ et $0 \leq m \leq l \leq k + 1$. Alors il existe c telle que

$$(4.48) \quad \forall h, \forall TT \in \mathcal{T}_h, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{l,p}(\Delta_{TT}), \quad \|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}\|_{m,p,TT} \leq ch_{TT}^{l-m} \|\mathbf{v}\|_{l,p,\Delta_{TT}}.$$

Ces propriétés ont été étudiées et démontrées par [20], [11] et [12].

Démonstration. En ce qui concerne la démonstration du lemme (4.4), l'équation (4.2) montre qu'il existe un opérateur d'approximation de Clément modifié afin de préserver la condition aux limites homogène, [[28], 1.127, 1.129(i)], $\pi_h : H_0^1(\Omega)^3 \rightarrow \mathbf{X}_{0,h}$ borné satisfaisant les deux propriétés précédentes. D'où

$$(4.49) \quad \|\pi_h \mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h} \leq C_1 \|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}.$$

et

$$(4.50) \quad \begin{aligned} |(\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{v}^0 - \pi_h \mathbf{v}^0)), q_h^0)_{0,\Omega_h}| &= |(\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{v}^0 - \pi_h \mathbf{v}^0), \nabla q_h^0)_{0,\Omega_h}| \\ &\leq C_2 K_{h_1}^+ \sum_{TT \in \mathcal{T}_{1,h}} h_{TT} \|\mathbf{v}^0\|_{1,TT} \|\nabla q_h^0\|_{0,TT} \\ &\leq C_2 \|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h} \|q_h^0\|_{Q_{0,h}} \end{aligned}$$

avec $C_1, C_2 > 0$.

Puisque $\Omega_h = \Omega$, on a $b_h^h = b_h$. Soit \mathbf{v}^0 un élément de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}^0) = q_h^0$, on a alors

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} &\geq \frac{|b_h^h(\pi_h \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\pi_h \mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &\geq \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\pi_h \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &= \frac{1}{C_1} \left| \frac{b_h(\mathbf{v}^0, q_h^0)}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} + \frac{b_h(\pi_h \mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^0, q_h^0)}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \right| \\ &\geq \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega}} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\pi_h \mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &\geq \frac{1}{C_1} \frac{|b(\mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega}} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\pi_h \mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &\stackrel{4.45}{\geq} \frac{\beta_c}{C_1} \|q_h^0\|_0 - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} - \frac{C_2}{C_1} \|q_h^0\|_{Q_{0,h}} \\ &\stackrel{4.44}{\geq} \frac{\beta_c}{C_1} \|q_h^0\|_0 - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} - \frac{C_2}{C_1 \beta_1} \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega}} \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$(1 + \frac{C_2}{C_1 \beta_1}) \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \geq \frac{\beta_c}{C_1} \|q_h^0\|_0 - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}}.$$

Pour conclure le résultat, on rappelle le résultat de l'inégalité inverse globale [[28], p. 76] suivant.

Proposition 4.3. *Soit $\{\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}\}$ un élément fini. Soit $l \geq 0$ tel que $\hat{P} \subset W^{l,\infty}(\hat{K})$. Soit $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ une famille quasi-uniforme de maillages réguliers dans \mathbb{R}^d avec $h \leq 1$. Soient $0 \leq m \leq l$, $p \geq 1$ et $q \leq \infty$. On pose $W_h = \{v_h; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h \circ T_K \in \hat{P}\}$. Alors, il existe une constante C_{II} indépendante de h , telle que, pour tout $v_h \in W_h$ et $0 \leq m \leq l$,*

$$(4.51) \quad \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{l,p,K}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{II} h^{m-l+\min(0, \frac{d}{p}-\frac{d}{q})} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{m,q,K}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

D'autre part

$$(4.52) \quad \begin{aligned} \left| b_h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\mathbf{v}^0, q_h^0) \right| &= \left| b_h^h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b^h(\mathbf{v}^0, q_h^0) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}((\underline{\mathbf{K}}_h - \underline{\mathbf{K}})\mathbf{v}^0) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega_h} |\nabla q_h^0 \cdot (\underline{\mathbf{K}}_h - \underline{\mathbf{K}})\mathbf{v}^0| dx \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h} \|(\underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{K}}_h(\mathbf{x}))\|_0 \|\nabla q_h^0\|_{0,\Omega_h} \|\mathbf{v}^0\|_{0,\Omega_h} \\ &\leq \tilde{C}_1 h^2 \|q_h^0\|_{1,\Omega_h} \|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h} \\ &\stackrel{(4.51)}{\leq} \tilde{C}_1 C_{II} h \|q_h^0\|_{0,\Omega_h} \|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h} \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\left(1 + \frac{C_2}{C_1 \beta_1}\right) \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \geq \left(\frac{\beta_c}{C_1} - h \frac{C_{II} \tilde{C}_1}{C_1}\right) \|q_h^0\|_{0,\Omega_h}.$$

Donc, il existe $h_8 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_8$, on a $\left(\frac{\beta_c}{C_1} - h \frac{C_{II} \tilde{C}_1}{C_1}\right) > 0$

D'où l'existence de $\tilde{\beta} > 0$ telle que

$$(4.53) \quad \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \geq \tilde{\beta} \|q_h^0\|_{0,\Omega_h}$$

□

Lemme 4.6. *La condition inf-sup est bien vérifiée sur l'espace $(\mathbf{X}_{0,h}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}_h}) \times (Q_{0,h}, \|\cdot\|_{0,\Omega_h})$; il existe $\beta_{X_0} > 0$ telle que*

$$(4.54) \quad \inf_{q_h^0 \in Q_{0,h}} \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h} \|q_h^0\|_0} \geq \beta_{X_0}$$

Démonstration. Pour établir la condition inf-sup avec la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}_h}$, on va utiliser l'équivalence des normes suivante [7.5]

$$(4.55) \quad \|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h, \Omega_h}^2 \leq C_0 \|\mathbf{v}_h^0\|_{1, \Omega_h}^2$$

En utilisant (7.42) dans la condition inf-sup (4.53) on trouve

$$(4.56) \quad \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h}} \geq \beta_{X_0} \|q_h^0\|_{0, \Omega_h}$$

où $\beta_{X_0} = \sqrt{C_0} \tilde{\beta}$.

□

b)– Condition Inf-Sup sur $\mathbf{X}_h \times Q_h$:

On va montrer dans le paragraphe suivant que la condition Inf-Sup est vérifiée sur l'espace $\mathbf{X}_h \times Q_h$ dans le cas d'un domaine polyédrique.

Dans cette partie, on va suivre un raisonnement analogue à celui de P.Ciarlet et V.Girault [33] pour étudier le caractère bien posé de la condition inf-sup sur un domaine polyédrique.

Pour tout $h < H$, on considère une discrétisation structurée, i.e., toute face $F \in \partial\Omega$ est discrétisée en triangles de diamètre $\simeq h$. On commence tout d'abord par énoncer le lemme suivant.

Lemme 4.7. *Soit F une face de $\partial\Omega$.*

Il existe $\rho \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ telle que $\text{Supp}(\rho|_{\partial\Omega})$ est inclus dans un compact de F et $\int_F \rho \, d\Gamma = 1$

Construction de ρ_h Soient Π_h l'opérateur d'interpolation de Lagrange dans Y_h et $\phi_i, i = 1, \dots, N$ les fonctions de base de Y_h .

On définit $\rho_h \in Y_h$ par :

$$\rho_h = \Pi_h(\rho) + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i, \text{ avec } c_i, i = 1, \dots, N \text{ sont tels que } \int_F (\rho_h - \rho) \, d\Gamma = 0$$

Ainsi, $\int_F \rho_h \, d\Gamma = 1$ et $\exists C_3 > 0$ indépendante de h telle que $\|\rho_h\|_1 \leq C_3$. On pose $\tilde{\rho}_h = \rho_h \cdot \mathbf{n}_F$, donc $\tilde{\rho}_h \in \mathbf{X}_h$ et $\|\tilde{\rho}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq C_3$

Soit $C_4 = \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h) \, d\Omega$. On vérifie que $C_4 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h) \, d\Omega_h \right| &= \left| \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h (\rho_h \mathbf{n}_F)) \, d\Omega_h \right| \\ &= \left| \int_F \rho_h \underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F \, d\Gamma_h \right| \\ &\geq \left| \operatorname{Im} \left(\int_F \rho_h \underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_F \, d\Gamma_h \right) \right| \\ &\geq \zeta^* \left| \int_F \rho_h \, d\Gamma_h \right| > 0 \end{aligned}$$

On pose $\boldsymbol{\rho}_h = \frac{1}{C_4} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h$ donc $\boldsymbol{\rho}_h \in \mathbf{X}_h$, $\int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega_h = 1$ et $\|\boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq \frac{C_3}{|C_4|}$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.4. *La condition Inf-Sup discrète est vérifiée dans (\mathbf{X}_h, Q_h) ; il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h telle que pour tout h suffisamment petit on a*

$$(4.57) \quad \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h} \|q_h\|_0} \geq \beta$$

Démonstration. Soit $q_h \in Q_h$, on peut le décomposer en $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$ avec $q_h^0 \in Q_{0,h}$ et $\bar{q}_h = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q_h \, d\Omega$.

D'après (4.54) $\exists \mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}$ tel que $\int_{\Omega} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0) \, d\Omega = \|q_h^0\|_0^2$ et $\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h} \leq \gamma \|q_h^0\|_0$.

On pose $\mathbf{v}_h = \alpha \mathbf{v}_h^0 + \bar{q}_h \boldsymbol{\rho}_h$, alors

$$\begin{aligned} |b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)| &= |b_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \\ &= \left| \int_{\Omega} q_h \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h) \, d\Omega \right| \\ &= \left| \alpha \|q_h^0\|_0^2 + \bar{q}_h \int_{\Omega} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega + \bar{q}_h^2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega + \alpha \bar{q}_h \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0) \, d\Omega}_{=0} \right| \\ &= \left| \alpha \|q_h^0\|_0^2 + \bar{q}_h \int_{\Omega} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega + \bar{q}_h^2 \right| \\ &\geq \alpha \|q_h^0\|_0^2 - \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \|\bar{q}_h\|_0 \left| \int_{\Omega} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega \right| + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 \\ &\geq \alpha \|q_h^0\|_0^2 - \frac{C_3}{|C_4| |\Omega|^{\frac{1}{2}}} \|\bar{q}_h\|_0 \|q_h^0\|_0 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 \\ &\geq \alpha \|q_h^0\|_0^2 - \frac{C_3^2}{2\varepsilon |C_4|^2 |\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|q_h^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2, \quad \text{avec } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \alpha$, puis $\alpha = \frac{C_3^2}{|C_4|^2}$:

$$(4.58) \quad \begin{aligned} |b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)| &\geq \frac{C_3^2}{2|C_4|^2} \|q_h^0\|_0^2 + \frac{1}{2|\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 \\ &\geq \min\left(\frac{C_3^2}{2|C_4|^2}, \frac{1}{2|\Omega|}\right) \|q_h\|_0^2 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h} &= \|\alpha \mathbf{v}_h^0 + \bar{q}_h \boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathbf{X}_h} \\ &\leq |\alpha| \|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h} + |\bar{q}_h| \|\boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathbf{X}_h} \\ &\leq \gamma |\alpha| \|q_h^0\|_0 + \frac{C_3}{|C_4| |\Omega|^{\frac{1}{2}}} \|\bar{q}_h\|_0 \\ &\leq \left(\gamma |\alpha| + \frac{C_3}{|C_4| |\Omega|^{\frac{1}{2}}}\right) \|q_h\|_0 \\ &= C_5 \|q_h\|_0 \end{aligned}$$

où $C_5 = \gamma |\alpha| + \frac{C_3}{|C_4| |\Omega|^{\frac{1}{2}}}$.

Pour conclure le reste du résultat, on remplace $\|q_h\|_0$ dans la dernière inégalité (4.58) on retrouve

$$|b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)| \geq \beta \|q_h\|_0 \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h}$$

où $\beta = \frac{1}{C_5} \min\left(\frac{1}{2|\Omega|}, \frac{C_3^2}{2|C_4|^2}\right)$. □

4.7 Estimation d'erreur

Une fois démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème discret on peut rappeler les estimations de l'erreur en fonction du pas de discrétisation h entre la valeur de la solution exacte et la solution de la formulation discrète. De nombreux auteurs ont contribué au calcul des estimations d'erreur pour des formulations mixtes, voir [30], [34], [36]. On donne pour rappel les théorèmes suivants sur le taux de convergence des éléments finis de Taylor-Hood [56]. On note dans ce paragraphe les espaces $\mathbf{X}_N^C(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, par \mathbf{X} et Q alors :

Théorème 4.5. (*Ordre de convergence*) *On suppose que les hypothèses du théorème (4.2) de Babuska-Brezzi sont vérifiées. On suppose aussi que les espaces \mathbf{X} et Q contiennent respectivement les polynômes de degré 2 et les polynômes de degré 1 alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$(4.59) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{X}} + \|p - p_h\|_Q \leq Ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1)$$

pour tout $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^2 \times H^1$.

On peut alors trouver une estimation en norme $L^2(\Omega)$:

Théorème 4.6. [34] Soient (\mathbf{u}_h, p_h) et $(\mathbf{u}, 0)$ la solution approchée et la solution exacte du problème mixte associé au modèle Full-Wave respectivement. On a les estimations d'erreurs suivantes

$$(4.60) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 \leq Ch^2$$

$$(4.61) \quad \|p - p_h\|_0 \leq Ch^{3/2}$$

4.8 Domaine convexe non polyédrique

On peut étendre la démonstration de la condition Inf-Sup (4.57) dans le cas d'un domaine convexe non polyédrique de frontière suffisamment régulière.

On commence par une triangulation conforme, régulière et quasi-uniforme du bord de Ω , notée $\mathcal{T}_{2,h}$.

On obtient $\partial\Omega_h = \Gamma_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{2,h}} \bar{T}$ tel que tous les nœuds de discrétisation appartiennent à

Γ . Ensuite, on étend cette discrétisation à un maillage en tétraèdres de Ω en conservant la régularité, la conformité et la quasi-uniformité du maillage.

On obtient $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{TT \in \mathcal{T}_{1,h}} \overline{TT}$.

Pour ce cas, on a $\bar{\Omega}_h \subsetneq \bar{\Omega}$ et $\Gamma_h \cap \Gamma = \{\text{nœuds de triangulation de } \partial\Omega\}$.

Supposons que pour tout $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h$ on peut définir un champ $\mathbf{n}_h(\mathbf{x})$ régulier. On définira la normale sur Γ_h égale à $\mathbf{n}_h(\mathbf{x})$. On supposera par ailleurs que $\|\mathbf{n}_h(\mathbf{x}) - \mathbf{n}_T(\mathbf{x})\|_0 \leq hC(n)$ pour $\mathbf{x} \in \Gamma_h$, avec $C(n)$ une constante qui dépend des dérivées partielles premières de \mathbf{n}_h , qui sont supposées régulières sur Γ_h .

Par exemple : Soient Ω le volume intérieur à un ellipsoïde centré à l'origine et de rayons R_x, R_y et R_z , on notera $RR = \min\{R_x, R_y, R_z\}$ et S une sphère centrée dans l'origine de rayon RR_1 avec $RR_1 \ll RR$. On notera alors $\mathbf{n}(x)$ la normale extérieure, qui est une fonction C^∞ .

Soit $\mathcal{T}_{2,h}$ une triangulation de $\Gamma = \partial\Omega$ et $\mathcal{T}_{1,h}$ une tétraédrisation régulière de Ω obtenue à partir de $\mathcal{T}_{2,h}$.

- Pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega_h$, on définit la normale extérieure de la façon suivante : Si \mathbf{x} est de coordonnées (θ_x, φ_x) , avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ dans l'ellipsoïde de rayons r_x, r_y, r_z , avec $RR_1 < r_x \leq R_x$, $RR_1 < r_y \leq R_y$, et $RR_1 < r_z \leq R_z$, soit \mathbf{x}^* le point de coordonnées θ_x, φ_x dans l'ellipsoïde de rayons R_x, R_y et R_z , on notera $\mathbf{n}_h(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}^*)$.

- Pour tout point $\mathbf{x} \in S$ on considère un prolongement C^∞ du \mathbf{n}_h défini sur $\bar{\Omega}_h \setminus S$. On obtient ainsi un champ de vecteurs dans $C^\infty(\bar{\Omega}_h)$. Ce champ de vecteur, noté toujours \mathbf{n}_h sera la normale approchée en Γ_h . Par ailleurs, il vérifie :

$$\|\mathbf{n}_h(\mathbf{x}) - \mathbf{n}_T(\mathbf{x})\|_0 \leq hC(n).$$

Dans ce contexte on peut étendre la portée du Lemme (4.7) ainsi que le Théorème (4.4).

Pour le lemme (4.7) dans les cas où $\Omega_h \subset \Omega$, on procède comme suit.

On pose :

$$\tilde{\mathbf{v}}^0 = \begin{cases} \mathbf{v}^0 & \text{sur } \Omega_h \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_h \end{cases} \text{ et } \tilde{q}_h^0 = \begin{cases} q_h^0 & \text{sur } \Omega_h \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_h \end{cases} \implies \tilde{\mathbf{v}}^0 \in H_0^1(\Omega)^3 \text{ et } \tilde{q}_h^0 \in L_0^2(\Omega).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} &\geq \frac{|b_h^h(\pi_h \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\pi_h \mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &\geq \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\pi_h \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &= \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\pi_h \mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &\geq \frac{1}{C_1} \frac{|b(\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{q}_h^0)|}{\|\tilde{\mathbf{v}}^0\|_{1,\Omega}} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{q}_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\pi_h \mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \\ &\geq \frac{\beta_c}{C_1} \|q_h^0\|_{0,\Omega_h} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{q}_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} - \frac{C_2}{C_1} \|q_h^0\|_{Q_{0,h}} \\ &\stackrel{4.44}{\geq} \frac{\beta_c}{C_1} \|q_h^0\|_{0,\Omega_h} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{q}_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} - \frac{C_2}{C_1 \beta_1} \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_{0,h}} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} \\ \implies \left(1 + \frac{C_2}{C_1 \beta_1}\right) \sup_{\mathbf{v}_h^0 \in \mathbf{X}_h} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h^0, q_h^0)|}{\|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}} &\geq \frac{\beta_c}{C_1} \|q_h^0\|_{0,\Omega_h} - \frac{1}{C_1} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{q}_h^0)|}{\|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h}} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |b_h^h(\mathbf{v}^0, q_h^0) - b(\tilde{\mathbf{v}}^0, \tilde{q}_h^0)| &= \left| \int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}^0) dx - \int_{\Omega} \tilde{q}_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{v}}^0) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}((\underline{\mathbf{K}}_h - \underline{\mathbf{K}}) \mathbf{v}^0) dx - \underbrace{\int_{\Omega \setminus \Omega_h} \tilde{q}_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{v}}^0) dx}_{\tilde{q}_h^0=0 \text{ sur } \Omega \setminus \Omega_h} \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}((\underline{\mathbf{K}}_h - \underline{\mathbf{K}}) \mathbf{v}^0) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_h} \nabla q_h^0 \cdot ((\underline{\mathbf{K}}_h - \underline{\mathbf{K}}) \mathbf{v}^0) dx \right| \\ &\stackrel{4.52}{\leq} \tilde{C}_1 C_{II} h \|q_h^0\|_{0,\Omega_h} \|\mathbf{v}^0\|_{1,\Omega_h} \end{aligned}$$

Et on conclut de la même façon que dans le cas polyédrique.

En ce qui concerne la démonstration du théorème 4.4 dans le cas de $\Omega_h \subset \Omega$ il est nécessaire de donner une version plus précise de la fonction ρ et d'utiliser la définition et les propriétés du champ de vecteurs \mathbf{n}_h .

Construction de ρ_h :

Soit \mathbf{x}_0 un sommet d'un tétraèdre de la triangulation $\mathcal{T}_{2,h}$.

On pose $F_h = B(\mathbf{x}_0, H) \cap \Gamma_h$, où $B(\mathbf{x}_0, H)$ désigne la boule de centre \mathbf{x}_0 et de rayon H avec $H > 0$.

On note par $\mathbf{n}_T(\mathbf{x})$ la normale au point \mathbf{x} à un triangle T appartenant à Γ_h .

Soit ε_1 tel que $H > \varepsilon_1 > 0$, on note par $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon_1)$ la boule de centre \mathbf{x}_0 et de rayon ε_1 .

On définit la fonction ρ_1 en tout point \mathbf{x} de $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon_1) \cap \Omega_h$ par $\rho_1(\mathbf{x}) = (\varepsilon_1^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_0^2)^3$.

On prolonge ρ_1 de façon \mathcal{C}^2 par 0 sur tout Ω_h et on note ρ ce prolongement.

D'où, $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$ et $\int_{\Gamma_h} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = C_\rho > 0$.

On considère Π_h l'opérateur d'interpolation sur l'espace Y_h .

On considère $\rho_2 = \frac{\rho}{C_\rho}$ et $\rho_{2,h}(x) = \Pi_h(\rho_2) = \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \phi_i(x)$ où NPI désigne le nombre de points d'interpolation et $\{\phi_i\}_{i=1:NPI}$ les fonctions de base de Y_h .

Par construction on obtient,

$$(4.62) \quad \int_{\Gamma_h} \rho_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$$

$$(4.63) \quad \exists C(\rho) > 0 \text{ telle que } \|\rho_2(\mathbf{x})\|_0 \leq C(\rho); \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h$$

D'où

$$(4.64) \quad \left| \int_{\Gamma_h} \rho_{2,h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \geq \left| \int_{\Gamma_h} \rho_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| - \int_{\Gamma_h} |\rho_2(\mathbf{x}) - \rho_{2,h}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \stackrel{(4.15)}{\geq} (1 - h^2 C(\rho))$$

avec $C(\rho)$ est une constante qui dépend de la dérivée seconde de ρ . Donc il existe $h_8 > 0$ tel que pour tout $h \leq h_8$ il existe $\varepsilon > 0$ telle que $1 - h^2 C(\rho) > 1 - \varepsilon$.

Soit $\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \rho_2(\mathbf{x}) \mathbf{n}_h(\mathbf{x})$, donc $\tilde{\rho} \in W^{2,\infty}(\bar{\Omega}_h)$, d'où l'existence de deux constantes $\tilde{\rho}_0$ et $\tilde{\rho}'_0$ strictement positives telles que

$$\|\tilde{\rho}\|_{0,\Omega_h} \leq \tilde{\rho}_0 \text{ et } \max_{\substack{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h \\ i,j=1:3}} \left\| \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{x})_i}{\partial x_j} \right\|_{0,\Omega_h} \leq \tilde{\rho}'_0$$

On pose

$$(4.65) \quad \tilde{\rho}_h(\mathbf{x}) = \Pi_h(\tilde{\rho}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \cdot \mathbf{n}_h(x_i) \phi_i(\mathbf{x}).$$

Par conséquent, il existe deux constantes $\tilde{\rho}_{h_9}$ et $\tilde{\rho}'_{h_{10}}$ strictement positives telles que :

$$\|\tilde{\rho}_h(\mathbf{x})\|_{0,\Omega_h} \leq \tilde{\rho}_{h_9} \text{ et } \max_{\substack{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h \\ i,j=1:3}} \left| \frac{\partial \tilde{\rho}_h(\mathbf{x})_i}{\partial x_j} \right| \leq \tilde{\rho}'_{h_{10}}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_h\|_{0,\Omega_h} &\leq \|\tilde{\boldsymbol{\rho}} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h\|_{0,\Omega_h} + \|\tilde{\boldsymbol{\rho}}\|_{0,\Omega_h} \\ &\leq C^*h^2 + \tilde{\rho}_0\end{aligned}$$

avec C^* une constante qui dépend des dérivées partielles premières de $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$.

Donc, il existe $h_9 > 0$ tel que $C^*h^2 + \tilde{\rho}_0 > 0$ on a pour tout $h \leq h_9$ $\|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_h\|_{0,\Omega} \leq \tilde{\rho}_{h_9}$.

On suit le même raisonnement pour montrer l'existence de $h_{10} > 0$ tel que pour tout

$$h \leq h_{10} \text{ on a } \max_{\substack{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h \\ i,j=1:3}} \left| \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h(\mathbf{x})_i}{\partial x_j} \right| \leq \tilde{\rho}'_{h_{10}}.$$

En conséquence, pour h suffisamment petit, $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_h$ ainsi que ses dérivées partielles premières sont uniformément bornées dans Ω_h .

$$\Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h \in \mathbf{X}_h \text{ et } \exists \tilde{C}_\rho > 0 \text{ telle que } \|\tilde{\boldsymbol{\rho}}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq \tilde{C}_\rho$$

On pose $C_6 = \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h(x) \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h(x)) dx$. Vérifions que $C_6 \neq 0$.

$$\begin{aligned}|C_6| &= \left| \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h(x) \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma_h} \underline{\mathbf{K}}_h(x) \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h(x) \cdot \mathbf{n}(x) d\Gamma \right| \\ &= \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \underline{\mathbf{K}}_h(x) \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h(x) \cdot \mathbf{n}_T(x) d\Gamma \right| \\ &\stackrel{(4.65)}{=} \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) \mathbf{n}_h(x_i) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) (\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x)) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) \mathbf{n}_T(x_i) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right| \\ &\geq \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) \mathbf{n}_T(x) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right| \\ &\quad - \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) (\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x)) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left| \operatorname{Im} \left(\sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) \mathbf{n}_T(x) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right) \right| \quad (|a| \geq |\operatorname{Im}(a)|, \forall a \in \mathbb{C}) \\
&- \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_h(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) (\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x)) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right| \\
&\stackrel{(4.19)}{\geq} \zeta^* \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \phi_i(x) dx \right| - \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) (\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x)) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right| \\
&\geq \zeta^* \left| \int_{F_h} \rho_{2,h}(x) d\Gamma \right| - \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) (\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x)) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right| \\
&\stackrel{(4.64)}{\geq} \zeta^*(1 - \varepsilon) - \left| \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \rho_2(x_i) \underline{\mathbf{K}}_h(x) (\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x)) \cdot \mathbf{n}_T(x) \phi_i(x) dx \right| \\
&\geq \zeta^*(1 - \varepsilon) - \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \|\underline{\mathbf{K}}_h(x)\|_0 |\rho_2(x_i)| \|\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x)\|_0 |\phi_i(x)| dx \\
&\stackrel{(4.17)}{\geq} \zeta^*(1 - \varepsilon) - K_{h_1}^+ \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} \|\rho_2(x_i)\|_0 (\|\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x_i)\|_0 + \|\mathbf{n}_T(x_i) - \mathbf{n}_T(x)\|_0) |\phi_i(x)| dx
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x_i)\|_0 = \\
(4.66) \quad &\begin{cases} \|\mathbf{n}(x_i) - \mathbf{n}_T(x_i)\|_0 & \text{si } x_i \in \Gamma_h \\ \|\mathbf{n}(x^*) - \mathbf{n}_T(x_i)\|_0 & \text{si } x_i \notin \Gamma_h \end{cases}
\end{aligned}$$

Pour les deux cas on a, $\|\mathbf{n}_h(x_i) - \mathbf{n}_T(x_i)\|_0 \leq h C(\mathbf{n})$ avec $C(\mathbf{n})$ une constante qui dépend des dérivées partielles premières de \mathbf{n} qui sont bornées car $\mathbf{n} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$.

D'où

$$\begin{aligned}
|C_6| &\stackrel{(4.63)}{\geq} \zeta^*(1 - \varepsilon) - K_{h_1}^+ C(\mathbf{n}, \rho_2) h \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \int_T \sum_{i=1}^{NPI} |\phi_i(x)| dx \\
&\geq \zeta^*(1 - \varepsilon) - K_{h_1}^+ C(\mathbf{n}, \rho_2) h \sum_{T \in \mathcal{F}_h} \underbrace{\sum_{i=1}^{NPI}}_{=6} \int_{\hat{T}} |T| \underbrace{\|\hat{\phi}_i(\hat{x}_i)\|_0}_{\leq 1} d\hat{x} \\
&\geq \zeta^*(1 - \varepsilon) - 6 |\hat{T}| K_{h_1}^+ C(\mathbf{n}, \rho_2) h \sum_{T \in \mathcal{F}_h} |T| \\
&\geq \zeta^*(1 - \varepsilon) - 6 |\hat{T}| K_{h_1}^+ C(\mathbf{n}, \rho_2) h \operatorname{mes}(F_h)
\end{aligned}$$

avec $C(\mathbf{n}, \rho_2)$ est une constante qui dépend des dérivées partielles premières de \mathbf{n} et de la constante provenant de l'équation (4.63).

Donc, il existe $h_{11} > 0$ tel que pour tout $h \leq h_{11}$,

$$(\zeta^*(1 - \varepsilon) - 6 |\hat{T}| K_{h_1}^+ C(\mathbf{n}, \rho_2) h \text{mes}(\Gamma_h)) > C_{h_{11}} > 0.$$

On pose $\boldsymbol{\rho}_h(x) = \frac{1}{C_6} \tilde{\boldsymbol{\rho}}_h(x)$, donc par construction $\boldsymbol{\rho}_h \in \mathbf{X}_h$ et $\|\boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathbf{X}_h} \leq \frac{\tilde{C}_\rho}{|C_6|}$.

Théorème 4.7. *La condition Inf-Sup est vérifiée sur $\mathbf{X}_h \times Q_h$ i.e, $\exists \beta > 0$ indépendante de h telle que pour tout h suffisamment petit on a :*

$$\inf_{q \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{X}_h} \frac{|b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{X}_h} \|q_h\|_0} \geq \beta$$

Démonstration. On va suivre la même démonstration que dans le cas d'un domaine polyédrique.

On décompose un élément q_h appartenant à Q_h de la façon suivante : $q_h = q_h^0 + \bar{q}_h$

avec $q_h^0 \in Q_{0,h}$ et $\bar{q}_h = \frac{1}{|\Omega_h|} \int_{\Omega_h} q_h \, d\Omega_h$.

On sait qu'il existe \mathbf{v}_h^0 dans $\mathbf{X}_{0,h}$ tel que $\int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0) \, d\Omega_h = \|q_h^0\|_0^2$,

et $\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h} \leq \gamma \|q_h^0\|_0$.

On pose $\mathbf{v}_h = \alpha \mathbf{v}_h^0 + \bar{q}_h \boldsymbol{\rho}_h$, alors

$$\begin{aligned} |b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)| &= \left| \int_{\Omega_h} q_h \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h) \, d\Omega_h \right| \\ &= \left| \alpha \|q_h^0\|_0^2 + \bar{q}_h \int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega_h + \bar{q}_h^2 \int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega_h + \alpha \bar{q}_h \underbrace{\int_{\Omega_h} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0) \, d\Omega_h}_{=0} \right| \\ &= \left| \alpha \|q_h^0\|_0^2 + \bar{q}_h \int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega_h + \bar{q}_h^2 \right| \\ &\geq \alpha \|q_h^0\|_0^2 - \frac{1}{|\Omega_h|^{\frac{1}{2}}} \|\bar{q}_h\|_0 \left| \int_{\Omega_h} q_h^0 \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \boldsymbol{\rho}_h) \, d\Omega_h \right| + \frac{1}{|\Omega_h|} \|\bar{q}_h\|_0^2 \\ &\geq \alpha \|q_h^0\|_0^2 - \frac{C_\rho}{|C_6| |\Omega_h|^{\frac{1}{2}}} \|\bar{q}_h\|_0 \|q_h^0\|_0 + \frac{1}{|\Omega_h|} \|\bar{q}_h\|_0^2 \\ &\geq \alpha \|q_h^0\|_0^2 - \frac{C_\rho^2}{2\varepsilon |C_6|^2 |\Omega_h|} \|\bar{q}_h\|_0^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|q_h^0\|_0^2 + \frac{1}{|\Omega_h|} \|\bar{q}_h\|_0^2, \quad \text{avec } \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = \alpha$ puis $\alpha = \frac{C_\rho^2}{2 |C_6|^2}$ et en utilisant le fait que $|\Omega_h| \leq |\Omega|$, on obtient

$$\begin{aligned} |b_h^h(\mathbf{v}_h, q_h)| &\geq \frac{C_\rho^2}{2 |C_6|^2} \|q_h^0\|_0^2 + \frac{1}{2 |\Omega_h|} \|\bar{q}_h\|_0^2 \\ &\geq \frac{C_\rho^2}{2 |C_6|^2} \|q_h^0\|_0^2 + \frac{1}{2 |\Omega|} \|\bar{q}_h\|_0^2 \\ &\geq \min\left(\frac{C_\rho^2}{2 |C_6|^2}, \frac{1}{2 |\Omega|}\right) \|q_h\|_0^2 \end{aligned}$$

En suivant le même raisonnement que dans le cas polyédrique, on retrouve le résultat. \square

5 Simulations Numériques

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente des résultats numériques obtenus à travers la réalisation informatique de la formulation discrétisée dans le chapitre (3) et dont l'existence d'une solution unique et la stabilité sont démontrées dans le chapitre (4).

Dans cette première section on présente les résultats obtenus quand le domaine est un cube et la solution est donnée, ceci avec l'idée de valider le montage des matrices et la résolution du système linéaire. Suivront des réalisations dans le tore avec un tenseur diélectrique plus réaliste d'un point de vue de la physique et donc non hermitien.

Le domaine Ω est le cube $] - 1, 1[^3$ maillé par des éléments finis géométriques d'ordre 1 :

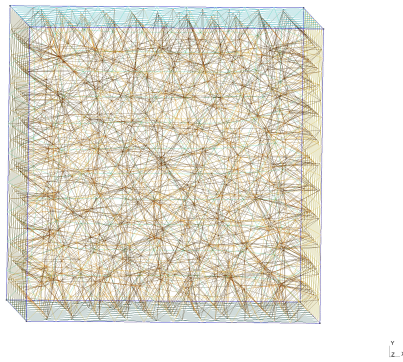


FIGURE 5.1 – Maillage du cube $] - 1, 1[^3$

Le champ des vecteurs normaux, noté \mathbf{n} calculé par la méthode décrite dans le chapitre (4) et représenté dans la figure suivante :

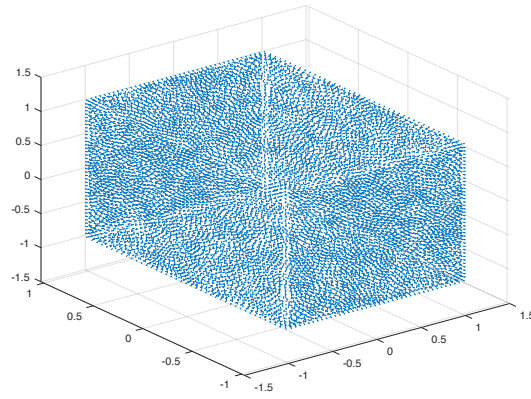


FIGURE 5.2 – Champ des normales

On considère comme solution connue le champ de vecteurs défini par $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ où $E_x = E_y = E_z = E(x, y, z) = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)$ avec la condition au bord du conducteur parfait $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Par un calcul élémentaire on obtient les seconds membres des équations et alors on résout :

trouver (\mathbf{E}^h, p^h) dans $\mathbf{V}_2^h \times V_1^h$ tel que

$$(5.1) \quad a_s(\mathbf{E}^h, \mathbf{F}^h) + \overline{b(\mathbf{F}^h, p^h)} = (\mathbf{f}, \mathbf{F}^h) \quad \forall \mathbf{F}^h \in \mathbf{X}_{N,C}^h$$

$$(5.2) \quad b(\mathbf{E}^h, q^h) = (g, q^h) \quad \forall q^h \in V_1^h$$

où

$$a_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}, \mathbf{v}) + s(\mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}), \mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v})),$$

$$b(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{v}), q)$$

\mathbf{f} est le second membre de la première équation et g est le second membre de la contrainte sur la divergence.

Le pas de discrétisation du maillage (5.1) est de $h = 0.1$ et donc on obtient 31019 tétraèdres. Après montage de la matrice des éléments finis on obtient un système avec $3 * 47760$ inconnues. La matrice est creuse avec 10688068 éléments non nuls. La résolution du système linéaire peut être réalisée par la méthode GMRES [50] ou par une méthode directe LU [35]. Dans les deux cas on obtient une précision relative de l'ordre 10^{-16} .

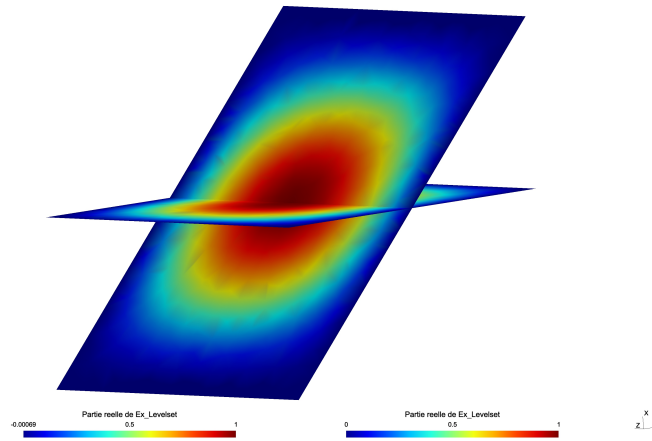


FIGURE 5.3 – Représentation de deux sections de la partie réelle de la composante E_x de \mathbf{E} , les niveaux vont de $-6e^{-4}$ à 1

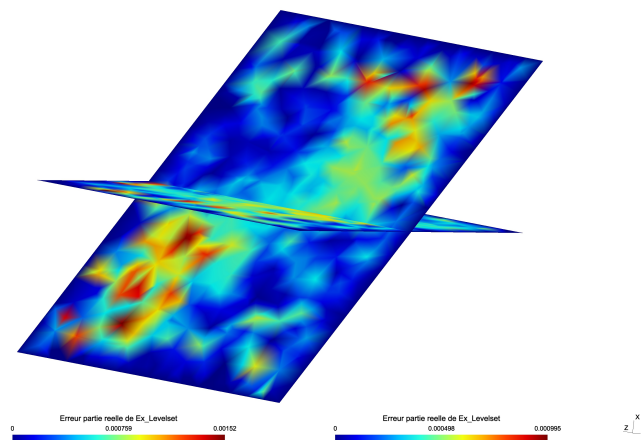


FIGURE 5.4 – Représentation de deux sections de l'erreur sur partie réelle de la composante E_x de \mathbf{E} , les niveaux vont de 0 à $1e^{-3}$

La norme \mathbf{L}^2 de l'erreur est d'ordre $10e^{-3}$, donc la précision des calculs est celle prévue par la théorie.

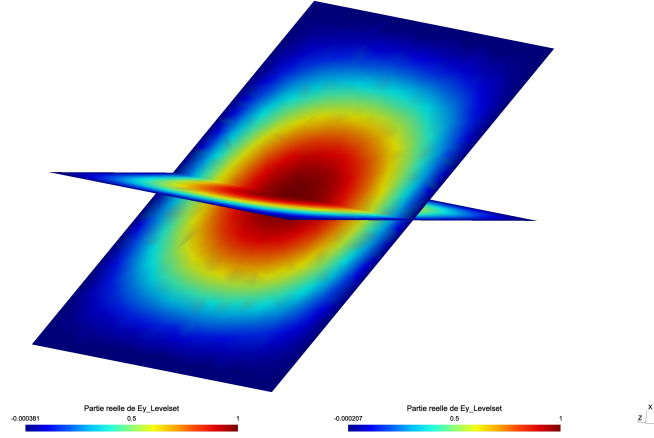


FIGURE 5.5 – Représentation de deux sections de la partie réelle de la composante E_y de \mathbf{E} , les niveaux vont de $-3.81e^{-4}$ à 1

5.2 Tenseur Diélectrique

5.2.1 Densité des électrons

On va considérer deux formes différentes de la fonction de densité des électrons et des ions dans le plasma constituant le milieu dans lequel on étudie la propagation des ondes. Un premier cas consiste à supposer que la densité des électrons et ions est constante et égale à une quantité que l'on notera n_{maxe} pour les électrons et n_{maxi} pour les ions. Ces deux valeurs, sont en fait, la valeur de la densité des électrons et ions au centre de la section poloïdale du tokamak. Dans un deuxième cas, dans une approximation plus réaliste, on peut supposer que la densité varie entre le centre et le bord de la section. Pour tenir compte de cette possibilité on considère deux profils radiaux, à savoir :

$$(5.3) \quad n_e(x, y, z) = n_{maxe}((1 - \epsilon) * (1 - (\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2}{a^2}))) + \epsilon)$$

et

$$(5.4) \quad n_e(x, y, z) = (n_{maxe} - n_{mine})(1 - (\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2}{a^2})) + n_{mine}$$

où R_0 est le grand rayon du tore, a le petit rayon du tore, n_{maxe} est la densité des électrons au centre du tore et n_{mine} est la densité au bord du tore. La valeur de n_{maxe} est égale à $5e^{19} m^{-3}$ et la valeur de n_{mine} est de $5.e^{15} m^{-3}$ pour les deux espèces.

Pour les fonctions de densités des ions on considère des fonctions du même profil mais avec les n_{maxi} et n_{mini} données.

Leurs dérivées par rapport à x, y et z sont les suivantes :

$$(5.5) \quad \frac{\partial n_e}{\partial x} = 2n_{maxe}(\epsilon - 1) \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)}{a^2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} x$$

$$(5.6) \quad \frac{\partial n_e}{\partial y} = 2n_{maxe}(\epsilon - 1) \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)}{a^2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} y$$

et

$$(5.7) \quad \frac{\partial n_e}{\partial z} = 2n_{maxe}(\epsilon - 1) \frac{z}{a^2}$$

Dans les cas de la définition des densités données en (5.4) on obtient :

$$(5.8) \quad \frac{\partial n_e}{\partial x} = -2(n_{maxe} - n_{mine}) \frac{1}{a^2} (\sqrt{x^2 + y^2} - R_0) (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} x$$

$$(5.9) \quad \frac{\partial n_e}{\partial y} = -2(n_{maxe} - n_{mine}) \frac{1}{a^2} (\sqrt{x^2 + y^2} - R_0) (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} y$$

et

$$(5.10) \quad \frac{\partial n_e}{\partial z} = -2(n_{maxe} - n_{mine}) \frac{1}{a^2} z$$

Idem dans le cas de la densité d'ions.

5.2.2 Température des espèces

La fonction de température des espèces est similaire à la fonction de densité.

$$(5.11) \quad T_\xi(x, y, z) = (T_{max\xi} - T_{min\xi}) \left(1 - \left(\frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2}{a^2}\right)\right) + T_{min\xi}$$

avec $\xi = e, i$.

Par ailleurs, on suppose $T_{max\xi} = 1.16015676104272 \times 10^7 K$ et $T_{min\xi} = 1.16015676104272 \times 10^3 K$.

On déduit sans peine les dérivées :

$$(5.12) \quad \frac{\partial T_\xi}{\partial x} = -2(T_{max\xi} - T_{min\xi}) \frac{1}{a^2} (\sqrt{x^2 + y^2} - R_0) (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} x$$

De la même manière on obtient les dérivées par rapport à y et z pour $\xi = e, i$.

5.2.3 Fréquences du plasma

Si on considère un champ extérieur \mathbf{B}_0 uniforme, les fréquences cyclotroniques sont constantes :

$$(5.13) \quad \omega_{c,\xi} = \frac{|q_\xi|}{m_\xi} |\mathbf{B}_0|$$

où $\xi = e, i$

Par contre les fréquences plasma sont fonction de la densité.

$$(5.14) \quad \omega_{p,\xi} = \sqrt{\frac{n_\xi(x, y, z) q_\xi^2}{\epsilon_0 m_\xi}} = \left(\sqrt{\frac{q_\xi^2}{\epsilon_0 m_\xi}} \right) \sqrt{n_\xi(x, y, z)}$$

Ainsi les dérivées prennent la forme :

$$(5.15) \quad \frac{\partial \omega_{p,\xi}}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{q_\xi^2}{\epsilon_0 m_\xi}} \right) (n_\xi(x, y, z))^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial n_\xi}{\partial x}$$

On déduit pour $\xi = e, i$ les dérivées par rapport à y et z .

5.2.4 Fréquence collisionnelle

La longueur de Debye est une fonction de deux quantités qui peuvent être considérées variables, la densité et la température :

$$(5.16) \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e q_e^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B}{q_e^2}} \frac{\sqrt{T_e}}{\sqrt{n_e}}$$

alors si T_e est une constante :

$$(5.17) \quad \frac{\partial \lambda_D}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{q_e^2}} n_e^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial n_e}{\partial x}$$

on déduit ensuite les dérivées par rapport à y et z .

Si T est une fonction de x, y et z et $n_e = n_{maxe}$ on obtient :

$$(5.18) \quad \frac{\partial \lambda_D}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B}{n_e q_e^2}} T_e^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

idem pour les dérivées par rapport à y et z .

Si maintenant on considère λ_D dans le cas où n_e et T_e sont des fonctions de la position on trouve naturellement :

$$(5.19) \quad \frac{\partial \lambda_D}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{q_e^2}} n_e^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B}{n_e q_e^2}} T_e^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

Dans le cas de la fonction qui donne le volume de la sphère de Debye :

$$(5.20) \quad \Lambda = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e$$

on déduit ces dérivées :

$$(5.21) \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial x} = \frac{4}{3}\pi(3\lambda_D^2 n_e \frac{\partial\lambda_D}{\partial x} + \lambda_D^3 \frac{\partial n_e}{\partial x})$$

La fréquence collisionnelle ν_c est définie par :

$$(5.22) \quad \nu_c = \frac{\ln(\Lambda)w_{pe}}{\Lambda}$$

Ces dérivées par rapport à x , y et z sont obtenues par composition des dérivées déjà calculées :

$$(5.23) \quad \frac{\partial\nu_c}{\partial x} = \frac{\Lambda(w_{p,e} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial\Lambda}{\partial x} + \ln(\Lambda) \frac{\partial w_{p,e}}{\partial x}) - \ln(\Lambda)w_{p,e} \frac{\partial\Lambda}{\partial x}}{\Lambda^2}$$

Alors le facteur $\alpha(x, y, z) = w + i\nu_c(x, y, z)$ a pour dérivée :

$$(5.24) \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x} = i \frac{\partial\nu_c}{\partial x}$$

Cela se répète pour les variables y et z .

5.2.5 Vitesse d'agitation thermique

Le terme d'agitation thermique des électrons, comme son nom l'indique, est une fonction de la température des électrons :

$$(5.25) \quad v_{the} = \sqrt{\frac{2k_B}{m_e}} \sqrt{T_e}$$

et donc la dérivée par rapport à x est la suivante :

$$(5.26) \quad \frac{\partial v_{the}}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2k_B}{m_e}} T_e^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial T_e}{\partial x}$$

On obtient de façon similaire les dérivées par rapport à y et z .

5.2.6 Champ magnétique extérieur

Dans ce travail on considère une expression du champ magnétique extérieur simplifiée :

$$(5.27) \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} B_{0,1} \\ B_{0,2} \\ B_{0,3} \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $B_0 = 0.5 - 3.2T$ et $\phi = \text{Arg}(x + iy)$.

Ainsi la matrice de passage du repère de Stix au système au repère cartésien prend la forme :

$$(5.28) \quad \mathbb{P}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ -\frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ 0 & -\frac{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} & \frac{B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_i$ sont définies dans l'appendice A.

Ainsi la matrice des dérivées par rapport à x est la suivante :

$$(5.29) \quad \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \sin(\phi) & 0 & \frac{y}{x^2+y^2} \cos(\phi) \\ \frac{-y}{x^2+y^2} \cos(\phi) & 0 & \frac{y}{x^2+y^2} \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les dérivées par rapport à y et z sont obtenues de la même manière.

$$(5.30) \quad \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial y}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{x^2+y^2} \sin(\phi) & 0 & \frac{-x}{x^2+y^2} \cos(\phi) \\ \frac{x}{x^2+y^2} \cos(\phi) & 0 & \frac{-x}{x^2+y^2} \sin(\phi) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$(5.31) \quad \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial z}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Une deuxième approximation plus complexe du champ magnétique extérieur est celle proposée par Lituadon 1990 [42] et Sebélin 1997 [52]. En coordonnées cylindriques/toroidales (voir appendice A) le champ magnétique extérieur est donné par :

$$(5.32) \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} B_{0,1} \\ B_{0,2} \\ B_{0,3} \end{pmatrix} = \frac{B_0 R_0}{R} \begin{pmatrix} \frac{-Z}{d(r)q(r)} \\ \frac{R-R_0}{d(r)q(r)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r = \sqrt{(R - R_0)^2 + Z^2}$ et $d(r) = \sqrt{R_0^2 - r^2}$. La fonction $q(r)$ est le paramètre de sécurité et a la forme suivante :

$$(5.33) \quad q(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 (q_b - q_c) + q_c$$

avec q_c la valeur au centre du plasma et q_b la valeur au bord du plasma. Des valeurs typiques de q_c et q_b sont respectivement 1 et 3.

Le champ magnétique extérieur en coordonnées cartésiennes est alors donné par :

$$(5.34) \quad \mathbf{B}_0 = \frac{B_0 R_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z}{d(\mathbf{x})q(\mathbf{x})} \\ \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{d(\mathbf{x})q(\mathbf{x})} \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\phi = \arctan(y/x)$, $d(\mathbf{x}) = \sqrt{R_0^2 - ((\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2)}$ et :

$$(5.35) \quad q(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{a^2}\right) ((\sqrt{x^2 + y^2} - R_0)^2 + z^2) (q_b - q_c) + q_c$$

5.2.7 Vecteur d'onde

Le vecteur d'onde dans les coordonnées de Stix est le suivant :

$$(5.36) \quad \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

où k est une constante. En conséquence, en coordonnées cartésiennes :

$$(5.37) \quad \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si maintenant on considère le champ magnétique extérieur défini en (5.27) on peut donner la forme de k_{\parallel} :

$$(5.38) \quad k_{\parallel}(\mathbf{x}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ainsi les dérivées de k_{\parallel} par rapport à x et y sont :

$$(5.39) \quad \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial x}(\mathbf{x}) = -k(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}x$$

$$(5.40) \quad \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial y}(\mathbf{x}) = -k(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}y$$

et :

$$(5.41) \quad \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial z}(\mathbf{x}) = 0$$

5.2.8 Amortissement Landau

Le taux d'amortissement Landau est donné par l'expression suivante :

$$(5.42) \quad \gamma_e(x, y, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2 n_e q_e^2}{m_e v_{the}^3 k_{\parallel}^3} \exp\left(-\frac{\omega}{2v_{the}^2 k_{\parallel}^2}\right)$$

Le calcul des dérivées de $\gamma_e(x, y, z)$ par rapport à x , y et z va dépendre de ce que l'on considère comme une fonction de x , y et z : la densité et/ou la température électronique et/ou le vecteur d'onde.

Dans une première approximation, si l'on considère n_e et T_e constantes, \mathbf{B}_0 donné par (5.27) et $k_{\parallel} = \frac{k}{R_0}$, les dérivées sont nulles.

Si maintenant la densité des espèces est donnée par (5.3) ou (5.4) on trouve :

$$(5.43) \quad \frac{\partial \gamma_e}{\partial x}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2 q_e^2}{m_e v_{the}^3 k_{\parallel}^3} \exp\left(-\frac{\omega}{2v_{the}^2 k_{\parallel}^2}\right) \frac{\partial n_e}{\partial x}(\mathbf{x})$$

Dans les cas où on considère $k_{\parallel}(\mathbf{x}) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et le reste indépendant de la position on a :

$$(5.44) \quad \frac{\partial \gamma_e}{\partial x}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{-(\omega^2 n_e q_e^2)}{m_e v_{the}^3} 3k_{\parallel}^{-4} \exp\left(-\frac{\omega}{2v_{the}^2 k_{\parallel}^2}\right) \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial x}(\mathbf{x}) +$$

$$(5.45) \quad + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2 n_e q_e^2}{m_e v_{the}^3 k_{\parallel}^3} \exp\left(-\frac{\omega}{2v_{the}^2 k_{\parallel}^2}\right) \left(\frac{\omega k_{\parallel}^{-3}}{v_{the}^2}\right) \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial x}(\mathbf{x})$$

Se T_e est maintenant une fonction (x, y, z) on trouve :

$$(5.46) \quad \frac{\partial \gamma_e}{\partial x}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{-(\omega^2 n_e q_e^2)}{m_e k_{\parallel}^3} 3v_{the}^{-4} \exp\left(-\frac{\omega}{2v_{the}^2 k_{\parallel}^2}\right) \frac{\partial v_{the}}{\partial x}(\mathbf{x}) +$$

$$(5.47) \quad + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2 n_e q_e^2}{m_e v_{the}^3 k_{\parallel}^3} \exp\left(-\frac{\omega}{2v_{the}^2 k_{\parallel}^2}\right) \left(\frac{\omega v_{the}^{-3}}{k_{\parallel}^2}\right) \frac{\partial v_{the}}{\partial x}(\mathbf{x})$$

avec $\frac{\partial v_{the}}{\partial x}$ donnée dans (5.26). Il en va de même pour le calcul des dérivées par rapport à y et z .

Ainsi, suivant quelle fonction parmi la densité, la température électronique ou le vecteur d'onde est considérée comme fonction de x, y, z ou constante, on obtient les dérivées par combinaison linéaire.

5.2.9 Le tenseur et ses dérivées

On a défini le tenseur de conductivité ou encore la réponse du plasma dans (5.48) dans le repère de Stix :

$$(5.48) \quad \underline{\mathbf{K}}_{Stix}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} S(\mathbf{x}) & -iD(\mathbf{x}) & 0 \\ iD(\mathbf{x}) & S(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & P(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_e(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

et si $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ est la matrice de changement de base local, le tenseur de conductivité $\underline{\mathbf{K}}$ est donné par :

$$(5.49) \quad \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{x}) \underline{\mathbf{K}}_{Stix}(\mathbf{x}) \mathbb{P}^T(\mathbf{x})$$

Si l'on note $\underline{\mathbf{K}}'$ le tableau des dérivées de coefficients $\underline{\mathbf{K}}_{m,n}$, son expression est obtenue en effectuant le calcul suivant :

$$(5.50) \quad \underline{\mathbf{K}}'(\mathbf{x}) = \mathbb{P}'(\mathbf{x}) \underline{\mathbf{K}}_{Stix}(\mathbf{x}) \mathbb{P}^T(\mathbf{x}) + \mathbb{P}(\mathbf{x}) \underline{\mathbf{K}}'_{Stix}(\mathbf{x}) \mathbb{P}^T(\mathbf{x}) + \mathbb{P}(\mathbf{x}) \underline{\mathbf{K}}_{Stix}(\mathbf{x}) \mathbb{P}^{T'}(\mathbf{x})$$

Il nous reste alors à calculer les dérivées par rapport à x , y et z des coefficients $S(\mathbf{x})$, $D(\mathbf{x})$ et $P(\mathbf{x})$. Le calcul des dérivées de $\frac{\partial \gamma_e}{\partial x}(\mathbf{x})$ a été fait dans le paragraphe précédent.

L'expression des coefficients S , D et P est donnée dans (1.62) dans le cas général. Dans le cas de nos simulations, avec uniquement deux espèces, les électrons et les ions, on obtient :

$$(5.51) \quad S(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\alpha(\mathbf{x})}{\omega} \left(\frac{\omega_{p,e}^2(\mathbf{x})}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2} + \frac{\omega_{p,i}^2(\mathbf{x})}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2} \right)$$

Les quantités $\omega_{p,e}^2(\mathbf{x})$ et $\alpha^2(x)$ sont des fonctions de la position. De plus on rappelle que l'on a supposé $\omega_{c,e}^2(\mathbf{x})$ indépendante de \mathbf{x} car \mathbf{B}_0 est uniforme, donc par dérivation on trouve :

$$(5.52) \quad \frac{\partial S}{\partial x}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\mathbf{x}) \left(\frac{\omega_{p,e}^2(\mathbf{x})}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2} + \frac{\omega_{p,i}^2(\mathbf{x})}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2} \right) + \right.$$

$$(5.53) \quad \left. \alpha(\mathbf{x}) \left(\left(\frac{2\omega_{p,e}(\mathbf{x})(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2)}{(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2)^2} \right) \frac{\partial \omega_{p,e}}{\partial x}(\mathbf{x}) - \frac{\omega_{p,e}^2(\mathbf{x}) 2\alpha(\mathbf{x})}{(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2)^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\mathbf{x}) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{2\omega_{p,i}(\mathbf{x})(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2)}{(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2)^2} \right) \frac{\partial \omega_{p,i}}{\partial x}(\mathbf{x}) - \left(\frac{\omega_{p,i}^2(\mathbf{x}) 2\alpha(\mathbf{x})}{(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2)^2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\mathbf{x}) \right) \right)$$

Le coefficient $D(\mathbf{x})$ est défini dans (1.62) et prend la forme suivante :

$$(5.54) \quad D(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega_{p,i}^2(\mathbf{x}) \omega_{c,i}}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2} - \frac{\omega_{p,e}^2(\mathbf{x}) \omega_{c,e}}{\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2} \right)$$

En dérivant on obtient :

$$(5.55) \quad \frac{\partial D}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega} \left(\left(\frac{2\omega_{p,i}(\mathbf{x}) \omega_{c,i} (\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2) \frac{\partial \omega_{p,i}}{\partial x}(\mathbf{x}) - 2\omega_{c,i} \omega_{p,i}^2(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\mathbf{x})}{(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,i}^2)^2} \right) - \right. \\ \left. \left(\frac{2\omega_{p,e}(\mathbf{x}) \omega_{c,e} (\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2) \frac{\partial \omega_{p,e}}{\partial x}(\mathbf{x}) - 2\omega_{c,e} \omega_{p,e}^2(\mathbf{x}) \alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\mathbf{x})}{(\alpha^2(\mathbf{x}) - \omega_{c,e}^2)^2} \right) \right)$$

Le coefficient $P(\mathbf{x})$ prend, dans notre contexte, la forme suivante :

$$(5.56) \quad P(\mathbf{x}) = 1 - \frac{1}{\omega \alpha(\mathbf{x})} (\omega_{p,e}^2(\mathbf{x}) + \omega_{p,i}^2(\mathbf{x}))$$

En dérivant on obtient :

$$(5.57) \quad \frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{(\omega_{p,e}^2(\mathbf{x}) + \omega_{p,i}^2(\mathbf{x}))}{\omega (\alpha(\mathbf{x}))^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\omega \alpha(\mathbf{x})} (2\omega_{p,e}(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega_{p,e}}{\partial x}(\mathbf{x}) + 2\omega_{p,i}(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega_{p,i}}{\partial x}(\mathbf{x}))$$

Les dérivées par rapport à y et z sont obtenues de la même manière.

5.2.10 Accessibilité

La dynamique des ondes dans un plasma froid peut être décrite en négligeant les phénomènes d'absorption γ_e et ν_c , donc on les supposera nulles, voir Bonoli [60] et Hattori [36]. Maintenant, dans cette section, on suppose que la solution est une onde plane, c'est à dire de la forme $\mathcal{E}e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t}$ avec \mathbf{k} le vecteur d'onde. Si on pose $\mathbf{E} = \mathcal{E}e^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, l'équation (1.31) devient

$$(5.58) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathcal{E}) + \underline{\mathbf{K}}\mathcal{E} = 0.$$

où $\mathbf{n} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k}$, est l'indice de réfraction vectoriel. On parle d'accessibilité s'il existe un \mathbf{n} à coefficients réels solution de (5.58).

Dans le repère de Stix on a :

$$(5.59) \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_{\perp} \\ 0 \\ n_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Suivant le raisonnement et les calculs effectués dans Hattori [36] le plasma est accessible s'il existe $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\det\mathbf{M} = 0$ avec :

$$(5.60) \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} S - n_{\parallel}^2 & -iD & n_{\perp}n_{\parallel} \\ iD & S - n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 & 0 \\ n_{\perp}n_{\parallel} & 0 & P - n_{\perp}^2 \end{pmatrix}$$

car dans le repère de Stix la relation (5.58) s'écrit :

$$(5.61) \quad \mathbf{M}\mathcal{E} = 0$$

Si $\omega_{ci} \leq \omega_{lh} \leq \omega_{ce}$ et $\gamma_e = \nu_c = 0$ les termes de $\underline{\mathbf{K}}$, S , D et P sont réels.

Le terme n_{\parallel} est donné par l'injection de l'onde, dans notre cas $n_{\parallel} = \frac{c}{\omega} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, le terme n_{\perp} est la réponse du plasma. Ainsi comme n_{\parallel} est donné on cherche n_{\perp} la solution de $\det\mathbf{M}(n_{\perp}^2) = Q(n_{\perp}^2) = 0$. Le polynôme $Q(x)$ est de degré 2 :

$$(5.62) \quad Q(x) = Sx^2 - ((S + P)r - D^2)x + P(r^2 - D^2)$$

avec $r = S - n_{\parallel}^2$. Donc n_{\perp} est un réel si Q a des racines réelles positives.

L'existence d'une solution réelle dépend du signe du discriminant de $Q(x)$ en fonction de r :

$$(5.63) \quad \Delta_Q(r) = (S - P)^2 r^2 - 2D^2(S + P)r + D^2(D^2 + 4SP)$$

Si $\Delta_Q(r) < 0$ les racines de Q sont complexes et le plasma est inaccessible.

Si $\Delta_Q(r) \geq 0$ il peut y avoir des racines négatives, alors on regarde la somme Σ et le produit Π des racines :

$$(5.64) \quad \Sigma = \frac{(S + P)r - D^2}{S} \text{ et } \Pi = \frac{P(r^2 - D^2)}{S}$$

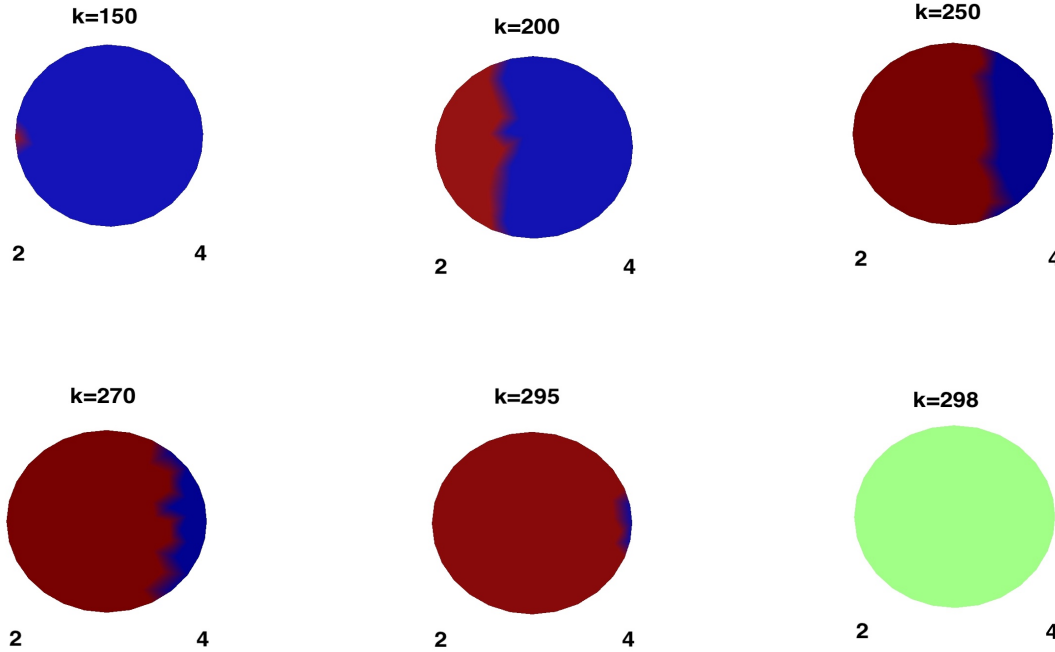


FIGURE 5.6 – Représentation des régions où le plasma est accessible ou pas, en bleu la région inaccessible, en rouge la région accessible. Dans le cas où $k = 298$ la couleur verte signifie que le tore est complètement accessible.

Si $\Sigma < 0$ et $\Pi > 0$ le polynôme Q a uniquement des racines négatives.

Suivant le raisonnement exposé dans Hattori [36] on conclut que le plasma est inaccessible si :

- $\Delta_Q < 0$
- $\Delta_Q \geq 0$ avec $\Sigma < 0$ et $\Pi > 0$

Le plasma est accessible sinon. On va exploiter ces résultats pour déterminer pour quelles valeurs de $n_{||}$, c'est à dire de k , on a accessibilité pour diverses configurations des données w et \mathbf{B}_0 .

Un premier exemple concerne le cas où $B_0 = 3.2T$ et $\omega = \omega_{lh}$ avec une densité des électrons et ions constante. Dans la figure (5.6) on représente dans une section poloïdale du tore les régions accessibles en rouge et inaccessibles en bleu, pour diverses valeurs de k .

Un deuxième exemple concerne le cas où $B_0 = 3.2T$ et $\omega = \omega_{lh}$ avec une densité des électrons et ions variable, $\epsilon = 0.0001$. Dans la figure (5.7) on représente, dans une section poloïdale du tore, les régions accessibles en rouge et les régions inaccessibles en bleu, pour diverses valeurs de k .

Un troisième exemple concerne le cas où $B_0 = 3.2T$ et $\omega = 0.1\omega_{lh}$ avec une densité d'électrons et ions constante. Dans la figure (5.8) on représente dans une section poloïdale du tore les régions accessibles en rouge et inaccessibles en bleu, pour diverses valeurs de

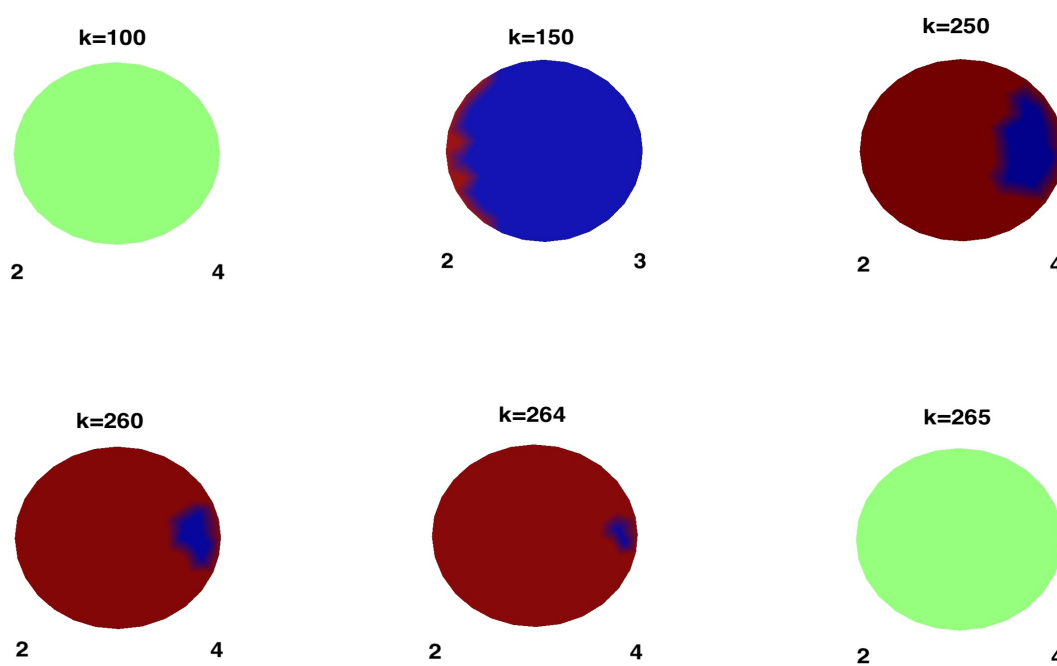


FIGURE 5.7 – Représentation des régions où le plasma est accessible ou pas, en bleu la région inaccessible, en rouge la région accessible. Dans le cas où $k = 265$ la couleur verte signifie une section poloïdale du tore complètement accessible. Dans le cas où $k = 100$ la couleur verte signifie que le tore est complètement inaccessible.

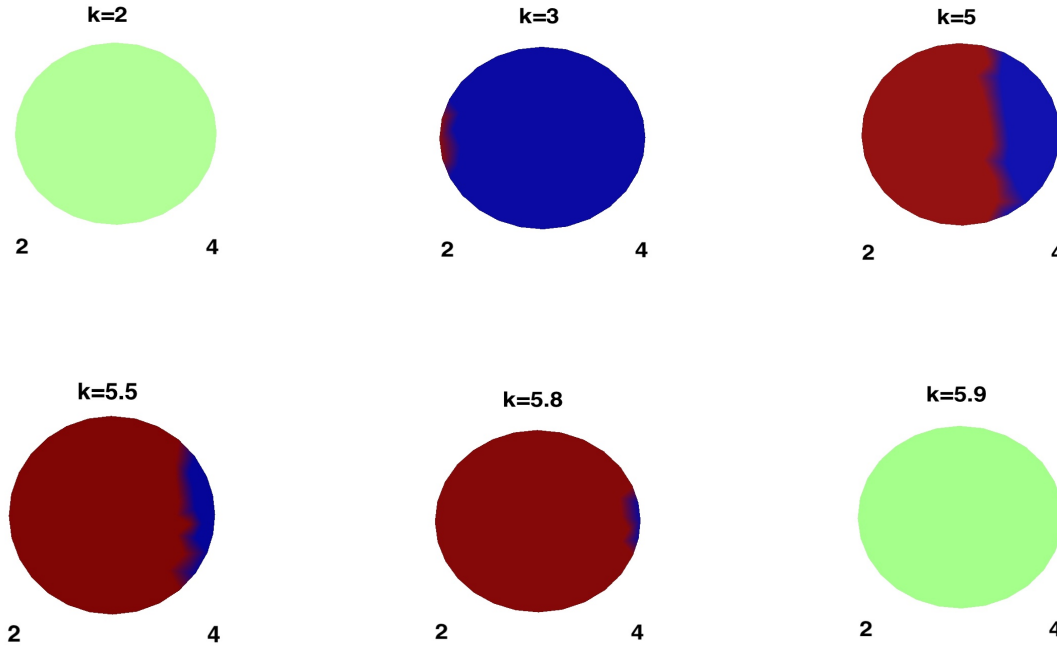


FIGURE 5.8 – Représentation des régions où le plasma est accessible ou pas, en bleu la région inaccessible, en rouge la région accessible. Dans le cas où $k = 5.9$ la couleur verte signifie une section poloïdale du tore complètement accessible. Dans le cas où $k = 2$ la couleur verte signifie une section poloïdale du tore complètement inaccessible.

k. Un quatrième exemple concerne le cas où $B_0 = 1.2T$ et $\omega = \omega_{lh}$ avec une densité des électrons et ions variable $\epsilon = 0.0001$. Dans la figure (5.9) on représente dans une section du tore les régions accessibles en rouge et inaccessibles en bleu, pour diverses valeurs de k .

Si $\Delta_Q < 0$ les racines de $\det \mathbf{M} = 0$ ont une partie imaginaire non nulle et donc il n'y a pas d'accessibilité stricte, dans [36] est introduite la notion d'accessibilité vague, quand $n_\perp \in \mathbb{C}$ solution de $\det \mathbf{M} = 0$, vérifie $|Re(n_\perp)| \gg |Im(n_\perp)|$.

Dans la figure (5.10) on représente dans une section poloïdale du tore les régions accessibles en rouge, région d'accessibilité vague en bleu ciel et régions inaccessibles en bleu, pour diverses valeurs de k . Le calcul concerne le cas où $B_0 = 4T$ et $\omega = \omega_{lh}$ avec une densité des électrons et ions variable, $\epsilon = 0.0001$.

Dans la table (5.1) on trouve la relation entre la norme du champ magnétique extérieur, la fréquence cyclotronique hybride basse et le facteur k à partir duquel le domaine est strictement accessible.

La figure (5.11) nous montre que la relation entre \mathbf{B}_0 , le champ magnétique extérieur

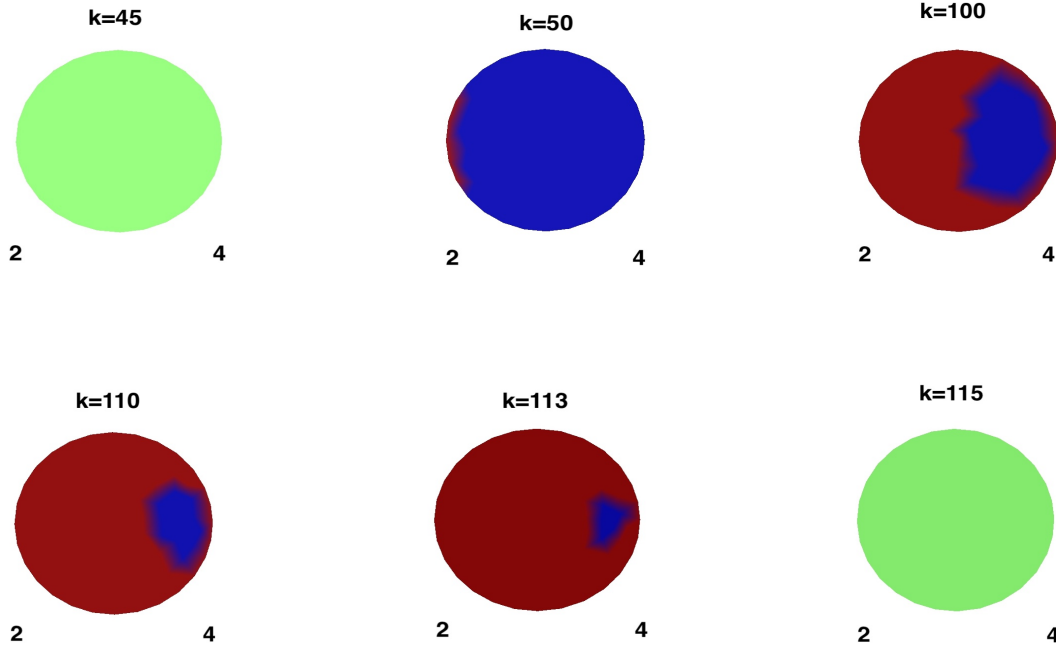


FIGURE 5.9 – Représentation des régions où le plasma est accessible ou pas, en bleu la région inaccessible, en rouge la région accessible. Dans le cas où $k = 115$ la couleur verte signifie une section polôidale du tore complètement accessible. Dans le cas où $k = 45$ la couleur verte signifie l' inaccessibilité.

B_0	ω_{lh}	k	B_0	ω_{lh}	k
0.5	2.05×10^9	72.5	2.5	1.02×10^{10}	212.7
0.7	2.87×10^9	72.5	2.7	1.11×10^{10}	227.7
1.	4.10×10^9	98.4	3.	1.23×10^{10}	250.2
1.2	4.93×10^9	114.7	3.2	1.31×10^{10}	264.95
1.5	6.15×10^9	137.4	3.6	1.48×10^{10}	294.4
1.8	7.98×10^9	160.3	4.	1.64×10^{10}	325
2.	8.20×10^9	175.195	5.	2.05×10^{10}	400.4
2.3	9.43×10^9	197.7	6.	2.46×10^{10}	478.51

TABLE 5.1 – Évolution de ω_{lh} et k en fonction de B_0 .

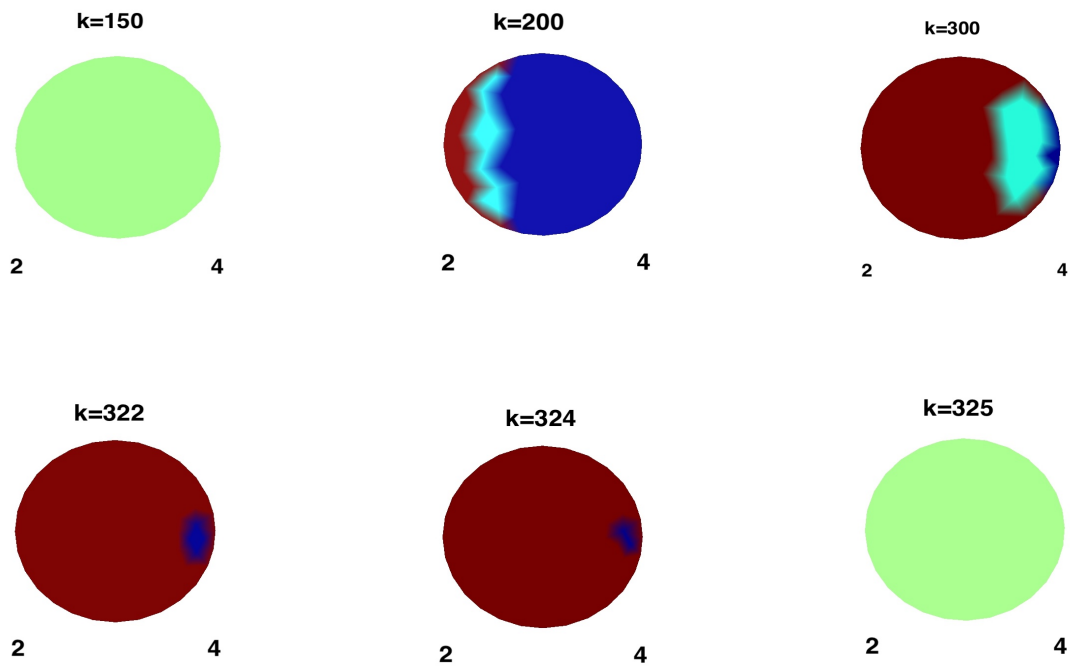


FIGURE 5.10 – Représentation des régions où le plasma est accessible ou pas, en bleu la région inaccessible, en bleu ciel region d’accessibilité vague, en rouge la région accessible. Dans le cas où $k = 325$ la couleur verte signifie que le tore est complètement accessible. Dans le cas où $k = 150$ la couleur verte signifie que le tore est inaccessible.

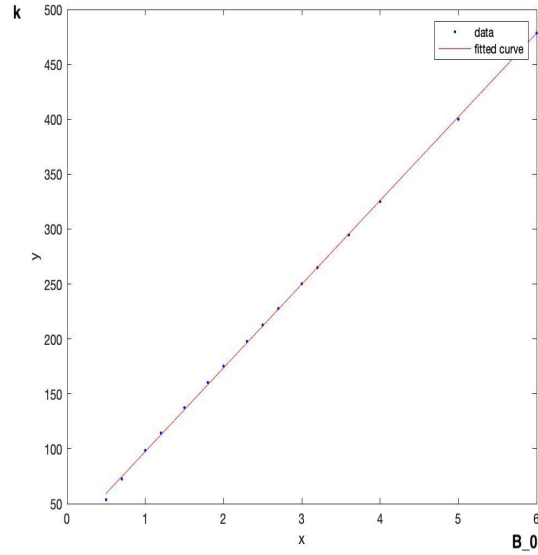


FIGURE 5.11 – Droite représentant l'évolution du facteur k dans $n_{||}$ en fonction du champ magnétique extérieur, pour avoir le domaine strictement accessible.

et la valeur de k qui caractérise $n_{||} = \frac{c}{\omega} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ est linéaire, $k(B_0) = 76, 2B_0 + 21.17$.

La figure (5.12) nous montre que la relation entre B_0 , la norme du champ magnétique extérieur, et la valeur de ω_{lh} , la fréquence cyclotronique hybride basse, est plus complexe, car en fait $\omega_{lh} = \sqrt{\omega_{ci}\omega_{ce}}$.

Par ailleurs on observe que pour ω donnée l'accessibilité augmente avec k et que avec k constant l'accessibilité décroît quand ω augmente.

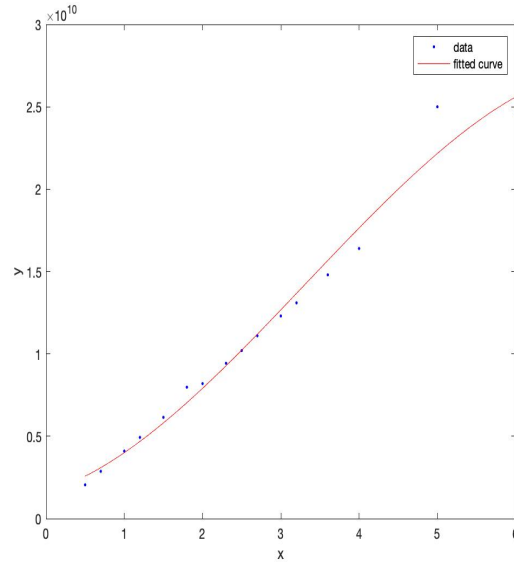


FIGURE 5.12 – Courbe représentant l'évolution de ω_{lh} en fonction du champ magnétique extérieur.

5.2.11 Résultats numériques quand \underline{K} est à coefficients constants

Dans cette section on présente les résultats numériques obtenus quand on considère que les coefficients du tenseur \underline{K}_{Stix} sont indépendants de la position sur le domaine Ω , tore de grand rayon $R_0 = 3m$ et petit rayon $a = 1$.

Les constantes physiques considérées prennent les valeurs suivantes :

- La permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8.85e^{-12} Fm^{-1}$.
- La perméabilité magnétique dans le vide : $\mu_0 = 1.256e^{-6} Fm^{-1}$.
- La constante de Boltzmann : $k_B = 1.381e^{-23} JK^{-1}$.
- La charge des électrons : $q_e = -1.6e^{-19} C$.
- La charge des ions : $q_i = 1.6e^{-19} C$.
- La masse des électrons : $m_e = 9.11e^{-31} kg$.
- La masse des ions : $m_i = 1.67e^{-27} kg$.
- La densité des électrons et ions au centre du tore : $n_e = n_i = 5.0e^{+19} m^{-3}$.
- La température des électrons : $1.16015676104272e^7 K$.
- Norme du champ magnétique extérieur : $0.5T - 3.2T$.

Le résultat des calculs est alors le champ électrique \mathbf{E} en $kVolt/m$. Par exemple si $B_0 = 3.2T$ on déduit les quantités indépendantes de la fréquence cyclotronique de l'onde incidente :

- Les fréquences cyclotroniques du plasma : $\omega_{c,i} = 3.06587e^{+8} rad/s$ et $\omega_{c,e} = 3.98450e^{+11} rad/s$.
- Les fréquences plasma : $\omega_{p,i} = 9.30626e^{+9} rad/s$ et $\omega_{p,e} = 8.98450e^{+11} rad/s$.
- La fréquence(pulsation) hybride basse : $\omega_{lh} = 1.31266e^{+10} rad/s$.

Dans un premier exemple on impose la valeur de $0.1\omega_{lh}$ à la pulsation de l'onde incidente w et on considère un vecteur d'onde parallèle au champ magnétique extérieur, avec la composante parallèle égale à $k_{\parallel} = \frac{k}{R_0}$, avec $k = 200$ et la densité constante, ainsi on obtient le terme d'amortissement Landau $\gamma_e = 3.11109e^{+2}$.

Les coefficients du tenseur de Stix prennent les valeurs suivantes :

- $S = -5.166e^{+1} + 3.7326e^{-2}i$
- $D = 2.72619e^{+2} - 1.64051e^{-2}i$
- $P = -9.21882e^{+4} + 5.75836e^{+1}i$
- $P + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \gamma_e = -9.21883e^{+4} + 1.25659e^{+5}i$

Après discrétisation avec un pas $h = 0,23m$ et le paramètre $s = 1 - i$ on obtient 210240 inconnues pour l'approximation de \mathbf{E} et 9504 inconnues pour le multiplicateur p , cela donne un système linéaire avec 219744 inconnues. Après assemblage de la matrice associé à la discrétisation décrite dans le chapitre (3) le profil est le suivant :

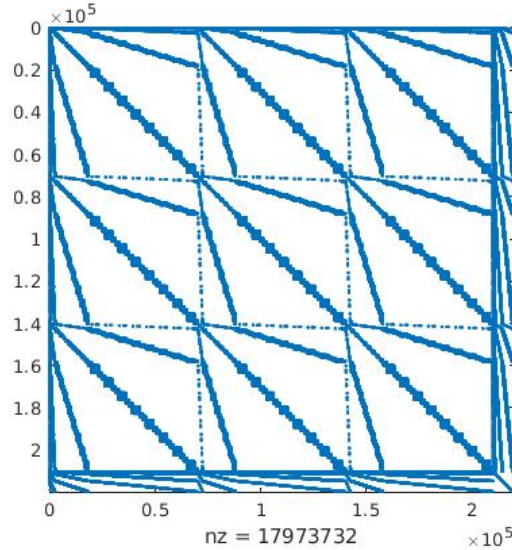


FIGURE 5.13 – Représentation des éléments non nuls de la matrice du système linéaire

Dans la figure (5.14) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.16) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ sur la section $z = 0$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

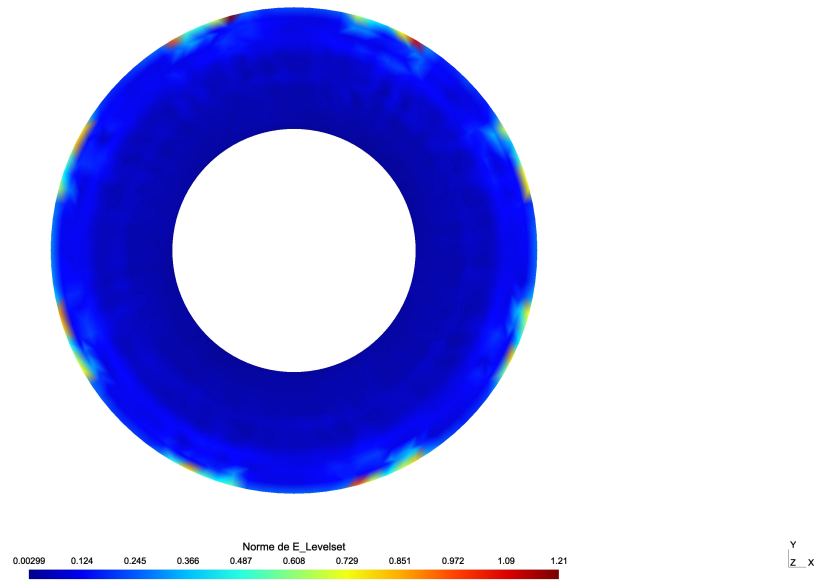


FIGURE 5.14 – Représentation de la section $z = 0$ de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $2.99e^{-3}$ à 1.21

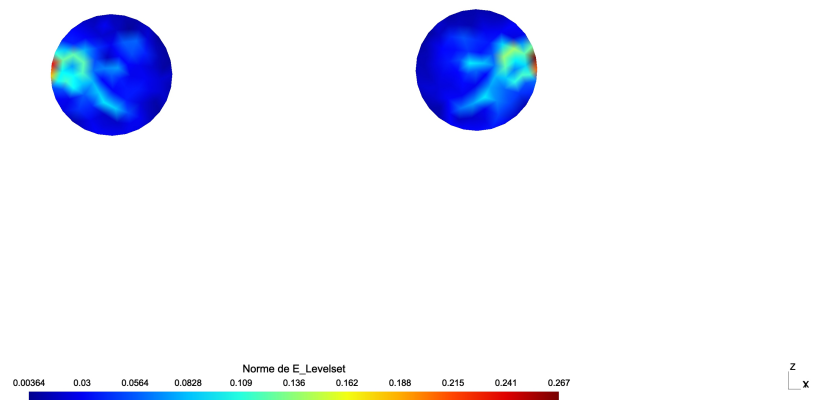


FIGURE 5.15 – Représentation d'une section polioïdale de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $3.64e^{-3}$ à 0.267

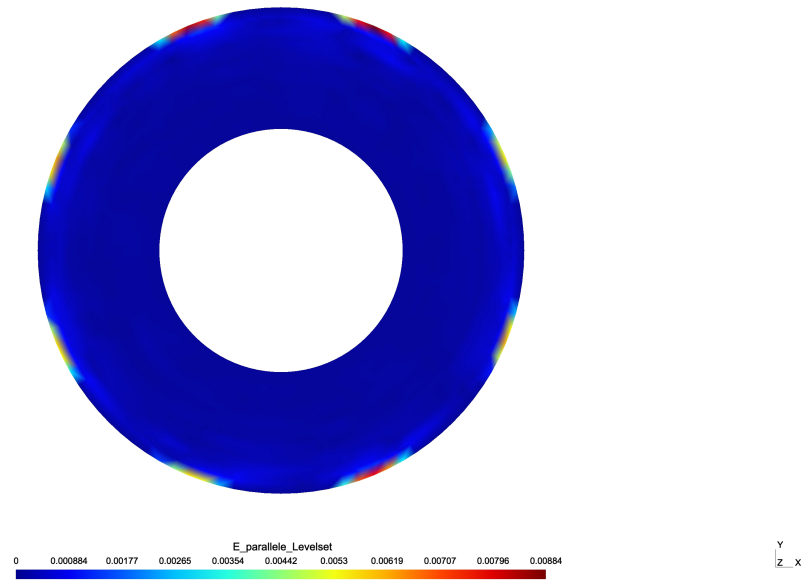


FIGURE 5.16 – Représentation de la section $z = 0$ de la composante parallèle à \mathbf{B}_0 de \mathbf{E} , les niveaux vont de 0 à 0.008

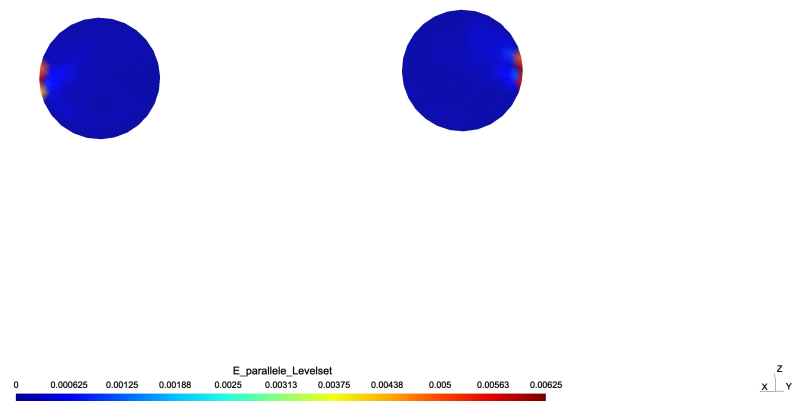


FIGURE 5.17 – Représentation d'une section poloidale de la composante parallèle à \mathbf{B}_0 de \mathbf{E} , les niveaux vont de 0 à 0.006

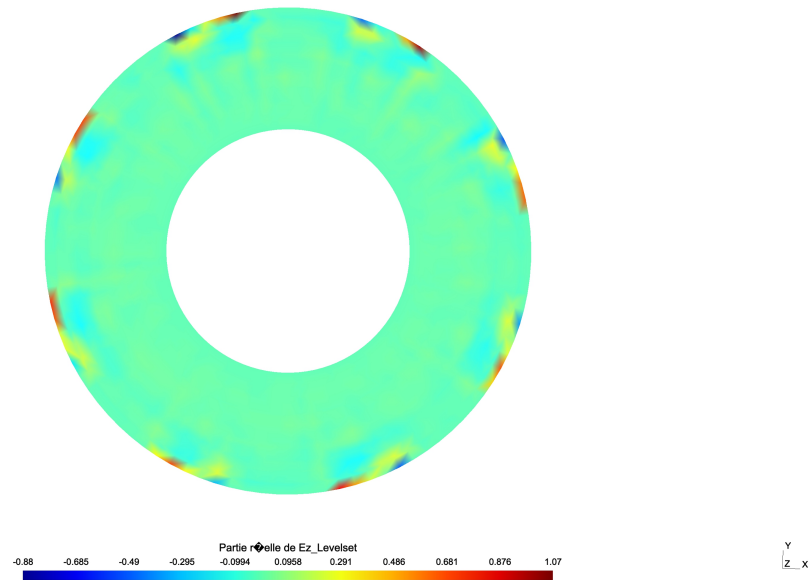


FIGURE 5.18 – Représentation de la section $z = 0$ de la partie réelle de E_z de \mathbf{E} , les niveaux vont de -0.88 à 1.07

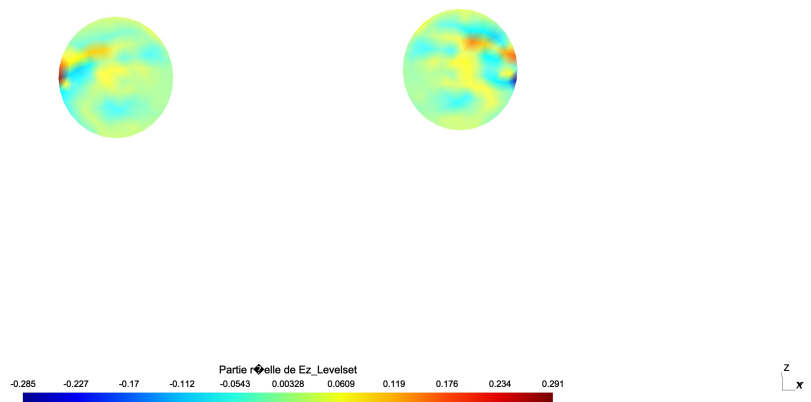


FIGURE 5.19 – Représentation d'une section poloidale de la partie réelle de E_z de \mathbf{E} , les niveaux vont de -0.285 à 0.291

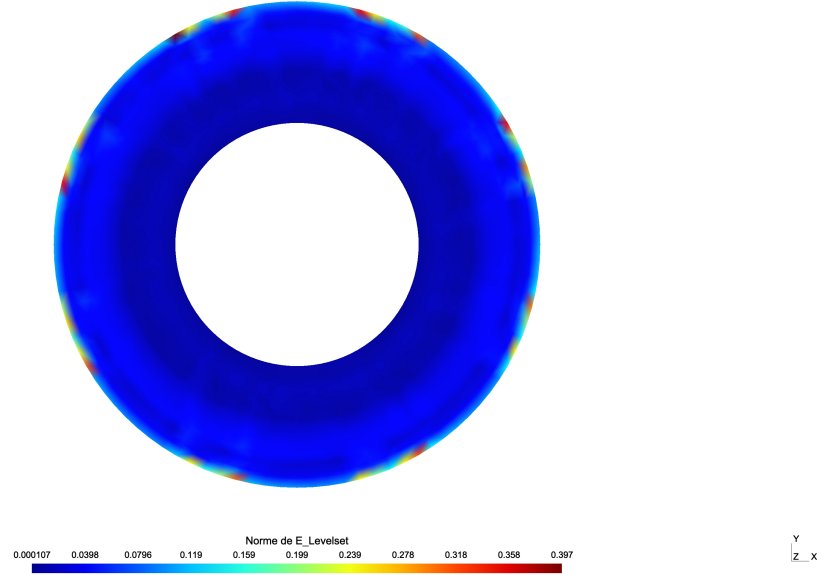


FIGURE 5.20 – Représentation de la section $z = 0$ de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $0.1e^{-4}$ à 0.397 , ($B_0 = 0.5$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$, densité constante).

Dans un deuxième exemple on considère $B_0 = 0.5T$, on impose la valeur de $0.5\omega_{lh} = 1.02552e^{+9}$ à la pulsation de l'onde incidente ω et on considère un vecteur d'onde parallèle au champ magnétique extérieur, avec la composante parallèle égale à $k_{\parallel} = \frac{k}{R_0}$, avec $k = 200$. Ainsi on obtient le terme d'amortissement Landau $\gamma_e = 1.36913e^{+3}$.

Les coefficients du tenseur de Stix prennent les valeurs suivantes :

- $S = -6.09399e^{+1} + 8.2740e^{-2} i$
- $D = 1.767002e^{+3} - 5.79350e^{-3} i$
- $P = -1.51042e^{+5} + 1.20761e^{+2} i$
- $P + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \gamma_e = -1.51042e^{+5} + 1.50975e^{+5} i$

Dans la figure (5.20) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.21) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$ et plusieurs sections perpendiculaires, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.22) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ sur une section $z = 0$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.23) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ sur une section polioïdale,

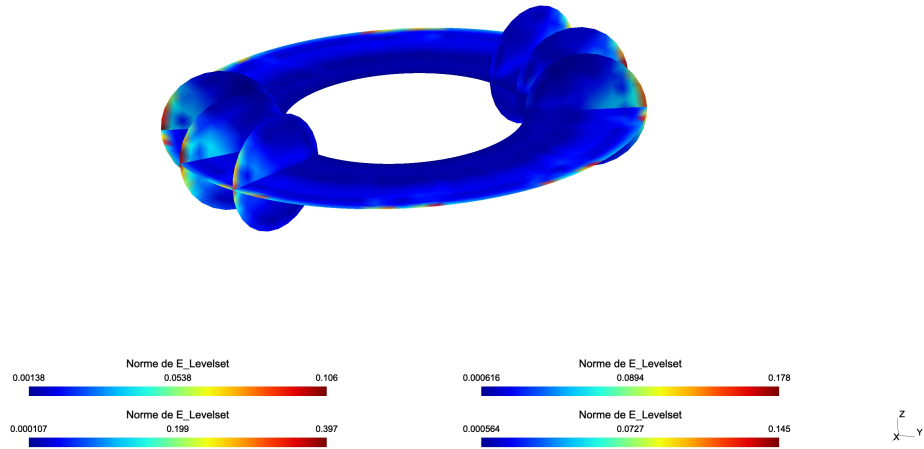


FIGURE 5.21 – Représentation de la section $z = 0$ et plusieurs sections poloidales de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $0.1e^{-4}$ à 0.397 , ($B_0 = 0.5$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$, densité constante).

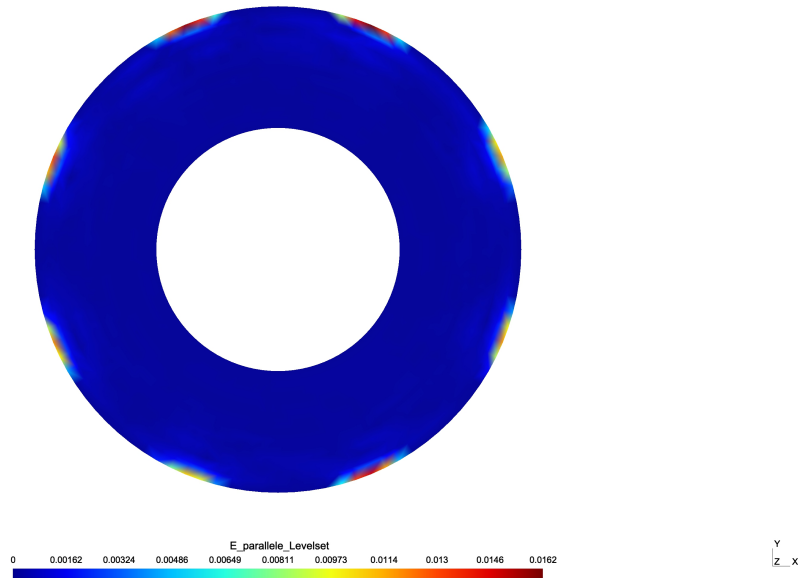


FIGURE 5.22 – Représentation de la composante parallèle à \mathbf{B}_0 de \mathbf{E} , les niveaux vont de 0 à 0.0162, ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$, densité constante).

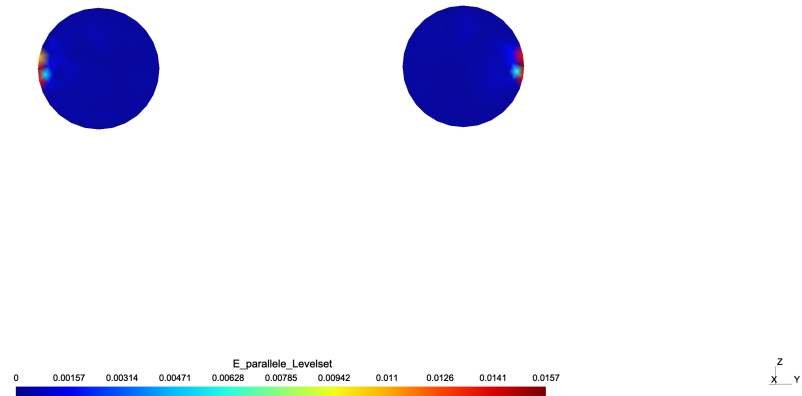


FIGURE 5.23 – Représentation de la composante parallèle à \mathbf{B}_0 de \mathbf{E} , les niveaux vont de 0 à 0.0157, ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$, densité constante.).

résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.5T$.

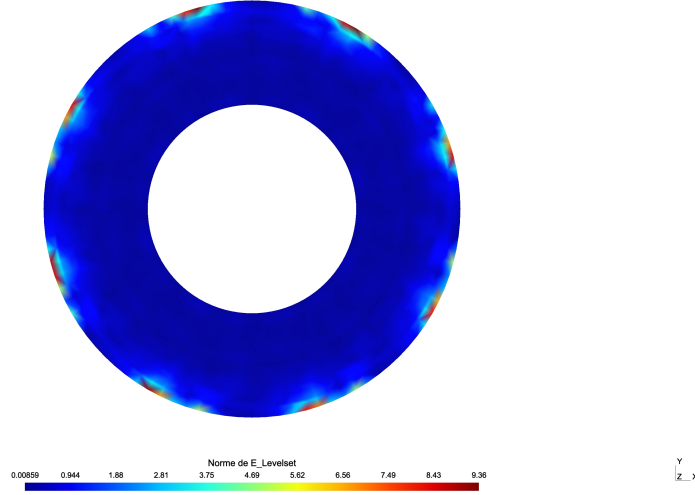


FIGURE 5.24 – Représentation de la section $z = 0$ de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $8.59e^{-3}$ à 9.36, ($B_0 = 3.2$, $0.1\omega_{lh}$, $k = 200$).

5.2.12 Résultats numériques quand \underline{K} est à coefficients variables dans le repère de Stix

Dans un troisième exemple on considère le cas où la densité des électrons et ions est variable avec la distance au centre du tore suivant les fonctions (5.3) et (5.4), avec $\varepsilon = 1.e^{-4}$ et $B_0 = 3.2T$. Par ailleurs, on impose la valeur de $0.1\omega_{lh} = 1.31266e^{+9}$ à la pulsation de l'onde incidente ω et on considère un vecteur d'onde parallèle au champ magnétique extérieur, avec la composante parallèle égale à $k_{||} = \frac{k}{R_0}$, avec $k = 200$. Alors la longueur d'onde est de $1.435981m$.

Dans la figure (5.24) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.25) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur une section polioïdale, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.26) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ sur une section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.27) on observe la valeur de la norme de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 sur une section parallèle au plan z , cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.28) on observe la valeur de la partie réelle de E_z sur une section $z = 0$,

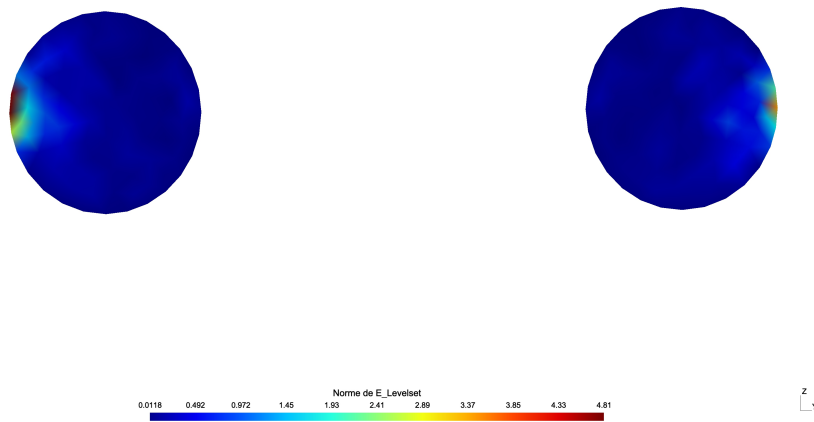


FIGURE 5.25 – Représentation sur une section poloïdale de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $1.18e^{-2}$ à 4.81, ($B_0 = 3.2$, $0.1\omega_{lh}$, $k = 200$).

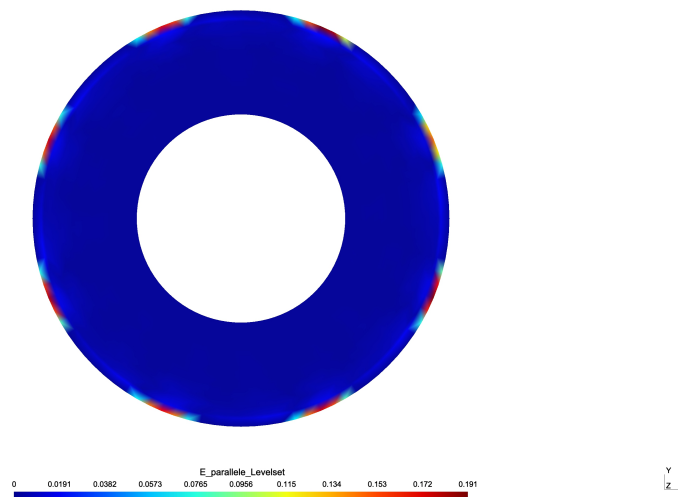


FIGURE 5.26 – Représentation sur la section $z = 0$ de la norme de de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.191, ($B_0 = 3.2$, $0.1\omega_{lh}$, $k = 200$).

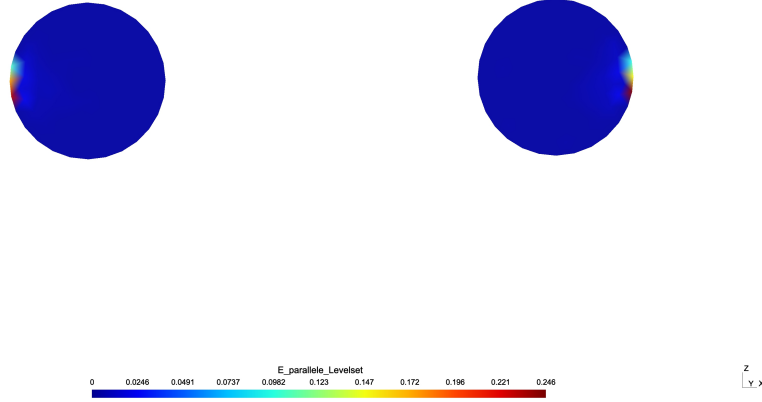


FIGURE 5.27 – Représentation sur une section poloïdale de la norme de de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.246, ($B_0 = 3.2$, $0.1\omega_{lh}$, $k = 200$).

cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.29) on observe la valeur de la partie imaginaire de E_z sur une section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.1\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans un quatrième exemple on considère les cas où $\mathbf{B}_0 = 0.7T$ et la densité des électrons et ions est variable avec la distance au centre du tore suivant les fonctions (5.3) et (5.4), avec $\varepsilon = 1.e^{-4}$. Par ailleurs on impose la valeur de $0.5\omega_{lh} = 1.43572e^{+9}$ à la pulsation de l'onde incidente ω et on considère un vecteur d'onde parallèle au champ magnétique extérieur, avec la composante parallèle égale à $k_{||} = \frac{k}{R_0}$, avec $k = 200$. La longueur d'onde est alors de $1.312897m$.

Dans la figure (5.30) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.7T$.

Dans la figure (5.31) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur une section poloïdale, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.7T$.

Dans la figure (5.32) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ sur une section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.7T$.

Dans la figure (5.33) on observe la valeur de la norme composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 sur des section poloïdals, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$,

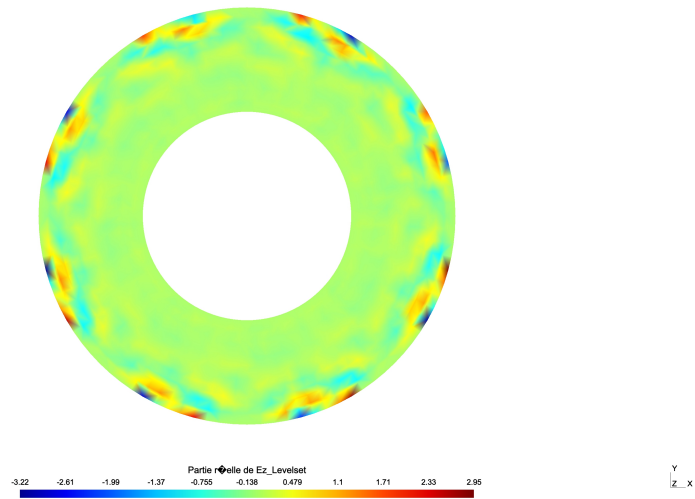


FIGURE 5.28 – Représentation sur la section $z = 0$ de la valeur de la partie réelle de E_z les niveaux vont de -3.22 à 2.95 , ($B_0 = 3.2$, $0.1\omega_{lh}$, $k = 200$).

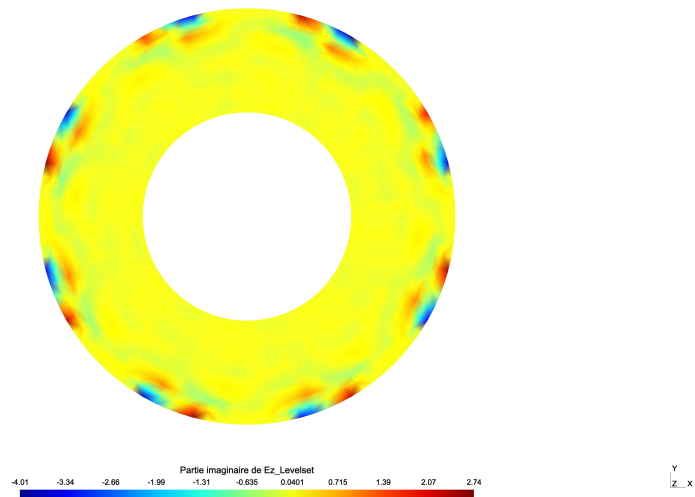


FIGURE 5.29 – Représentation sur la section $z = 0$ de la valeur de la partie imaginaire de E_z les niveaux vont de -4.01 à 2.74 , ($B_0 = 3.2$, $0.1\omega_{lh}$, $k = 200$).

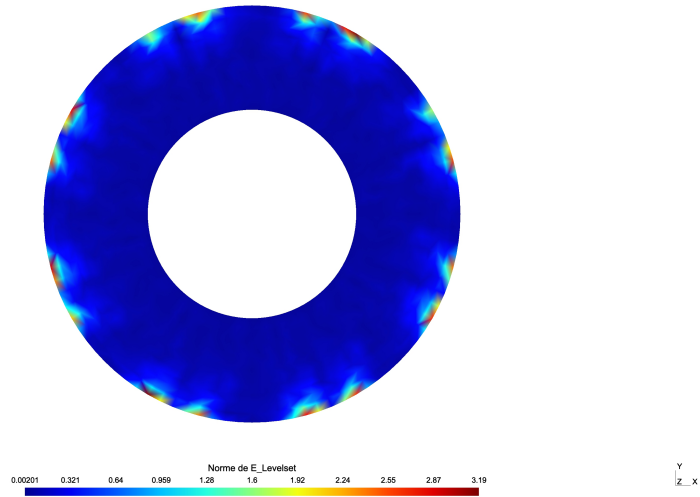


FIGURE 5.30 – Représentation de la section $z = 0$ de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $2.01e^{-3}$ à 3.19 , ($B_0 = 0.7T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

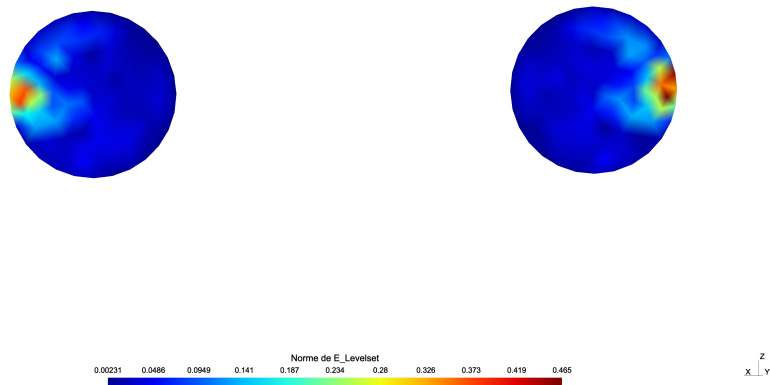


FIGURE 5.31 – Représentation sur une section poloidale de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $2.3e^{-3}$ à 0.465 , ($B_0 = 0.7T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

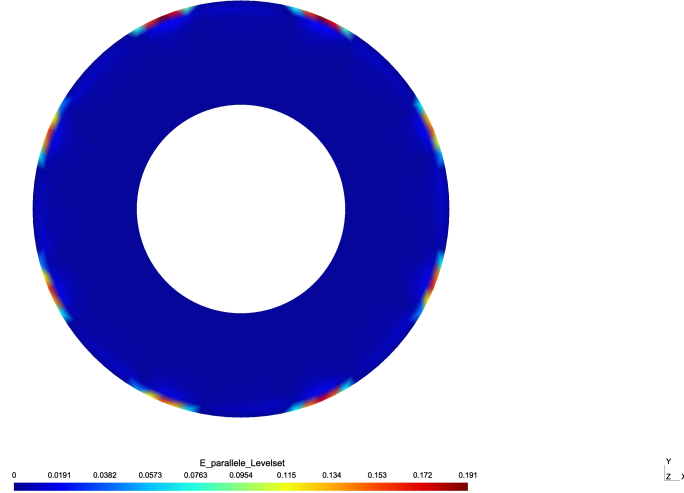


FIGURE 5.32 – Représentation sur la section $z = 0$ de la norme de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.172, ($B_0 = 0.7T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.7T$.

Dans la figure (5.34) on observe la valeur de la partie réelle de E_z sur une section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.7T$.

Dans la figure (5.35) on observe la valeur de la partie imaginaire de E_z sur une section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 0.7T$.

Dans un cinquième exemple on considère les cas où $B_0 = 1.5T$ et la densité des électrons et ions est variable avec la distance au centre du tore suivant les fonctions (5.3) et (5.4), avec $\varepsilon = 1.e^{-4}$. Par ailleurs on impose la valeur de $0.25\omega_{lh} = 1.53827e^{+9}$ à la pulsation de l'onde incidente ω et on considère un vecteur d'onde parallèle au champ magnétique extérieur, avec la composante parallèle égale à $k_{\parallel} = \frac{k}{R_0}$, avec $k = 200$. La longueur d'onde est alors de $1.22537m$.

Dans la figure (5.36) on observe la valeur de la norme composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 sur une section poloïdale, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.25\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 1.5T$.

Dans la figure (5.37) on observe la valeur de la norme composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 sur une section poloïdale, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.25\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 1.5T$.

Dans la figure (5.38) on observe la valeur de la norme composante de \mathbf{E} parallèle à

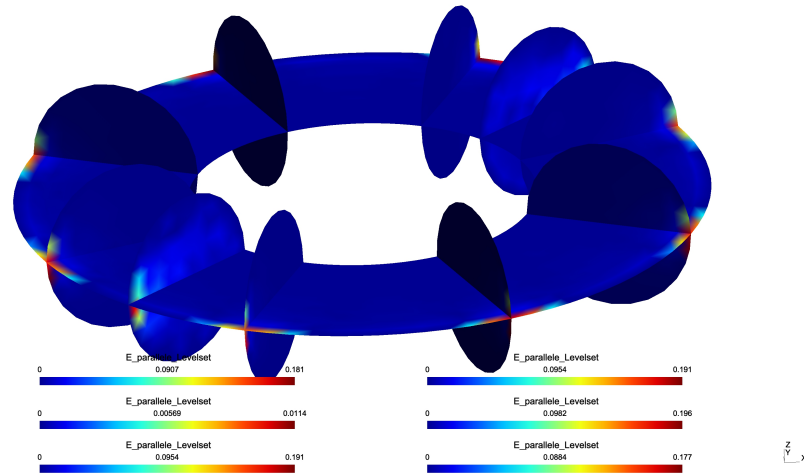


FIGURE 5.33 – Représentation sur des sections poloidales de la norme de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.196 ($B_0 = 0.7T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

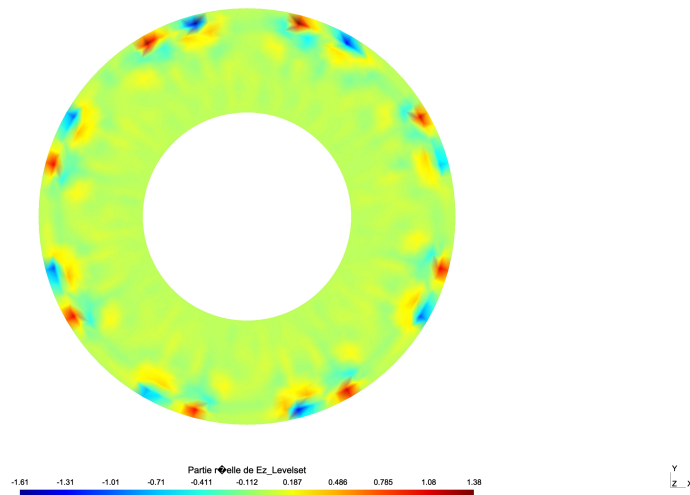


FIGURE 5.34 – Représentation sur la section $z = 0$ de la valeur de la partie réelle de E_z , les niveaux vont de -1.61 à 1.38 , ($B_0 = 0.7T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

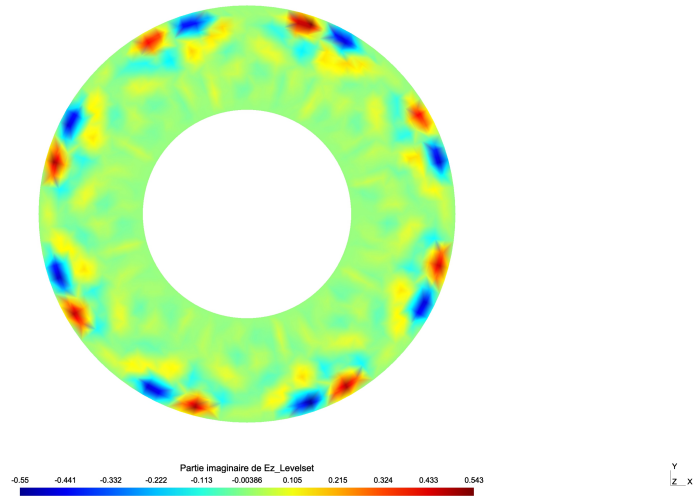


FIGURE 5.35 – Représentation sur la section $z = 0$ de la valeur de la partie imaginaire de E_z , les niveaux vont de -0.538 à 0.534 , ($B_0 = 0.7T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

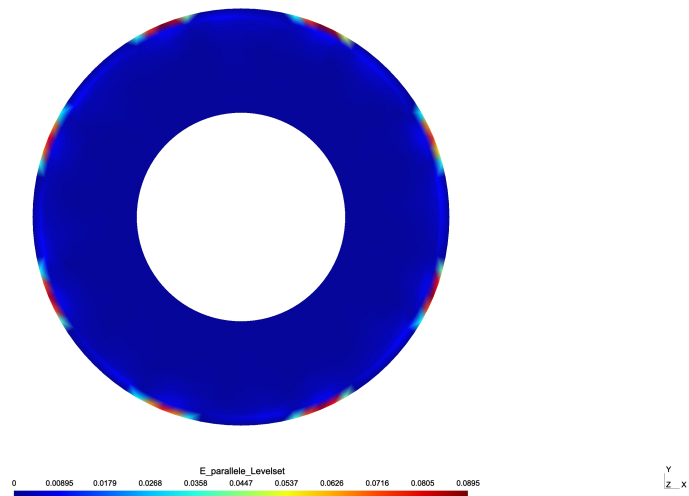


FIGURE 5.36 – Représentation sur une section parallèle au plan z de la norme de de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.0805, ($B_0 = 1.5T$, $0.25\omega_{lh}$, $k = 200$).

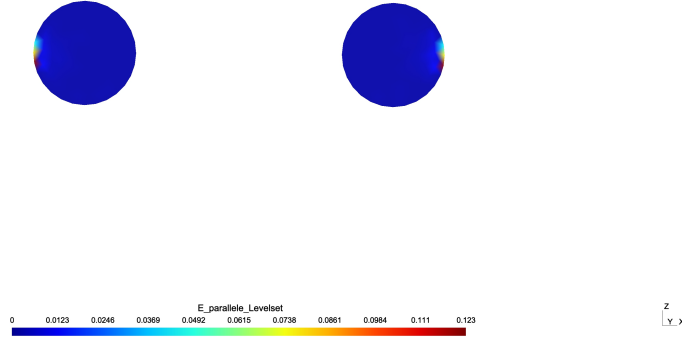


FIGURE 5.37 – Représentation sur une section parallèle au plan z de la norme de de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.123, ($B_0 = 1.5T$, $0.25\omega_{lh}$, $k = 200$).

\mathbf{B}_0 sur plusieurs sections poloïdales, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.25\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 1.5T$.

Dans la figure (5.39) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 10^{-04}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.25\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 1.5T$.

Dans la figure (5.40) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur plusieurs sections poloïdales, cas où la densité des électrons et ions est variable, $\varepsilon = 1.e^{-4}$, résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.25\omega_{lh}$, le paramètre $k = 200$ et $B_0 = 1.5T$.

Dans un sixième exemple on considère les cas où la composante parallèle à B_0 du vecteur d'onde est variable, de la forme : $k_{||} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, avec $k = 200$. La densité des électrons est constante et on impose la valeur de $0.2\omega_{lh}$ à la pulsation de l'onde incidente ω .

Dans la figure (5.41) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$, dans le cas où le vecteur d'onde est variable et la densité constante. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.2\omega_{lh}$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.42) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur une section poloïdale, dans le cas où le vecteur d'onde est variable et la densité constante. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.2\omega_{lh}$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.43) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ sur une section $z = 0$, dans le cas où le vecteur d'onde est variable et la densité constante. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.2\omega_{lh}$ et $B_0 = 3.2T$.

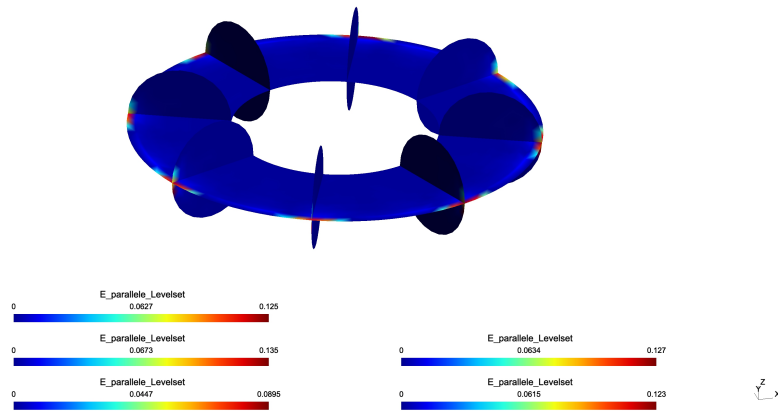


FIGURE 5.38 – Représentation sur une section poloïdale de la norme de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.125, ($B_0 = 1.5T$, $0.25\omega_{lh}$, $k = 200$).

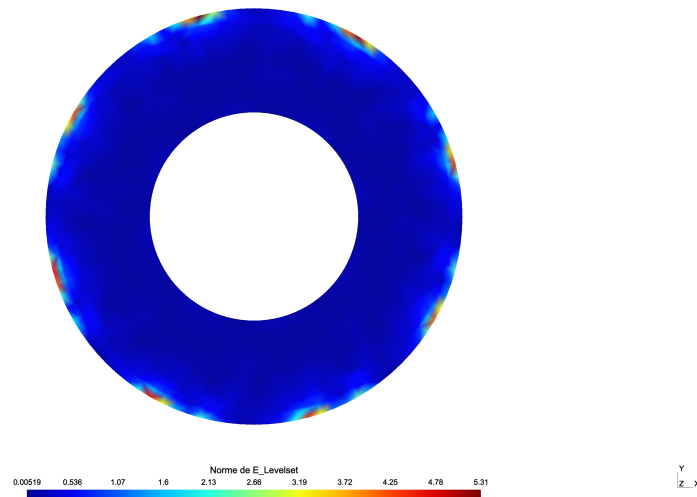


FIGURE 5.39 – Représentation de la section $z = 0$ de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $7.8e^{-3}$ à 1.52, ($B_0 = 1.5T$, $0.25\omega_{lh}$, $k = 200$).

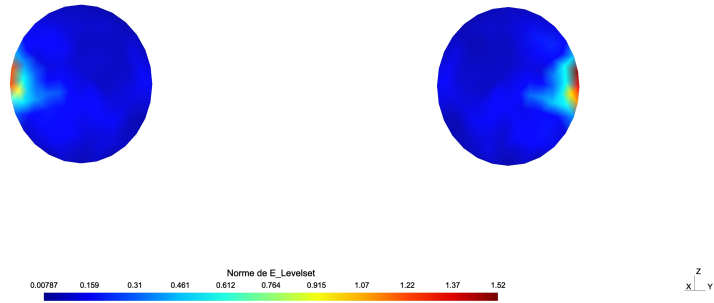


FIGURE 5.40 – Représentation sur une section poloïdale de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de 0 à 0.125, ($B_0 = 1.5T$, $0.25\omega_{lh}$, $k = 200$).

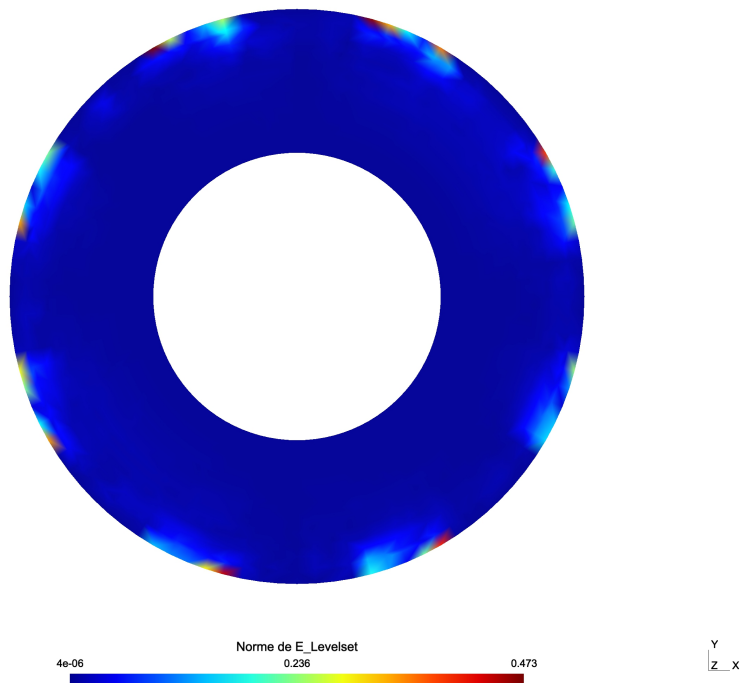


FIGURE 5.41 – Représentation de la section $z = 0$ de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $4e^{-6}$ à 0.476, ($B_0 = 3.2T$, $0.2\omega_{lh}$, $k_{||}$ variable).

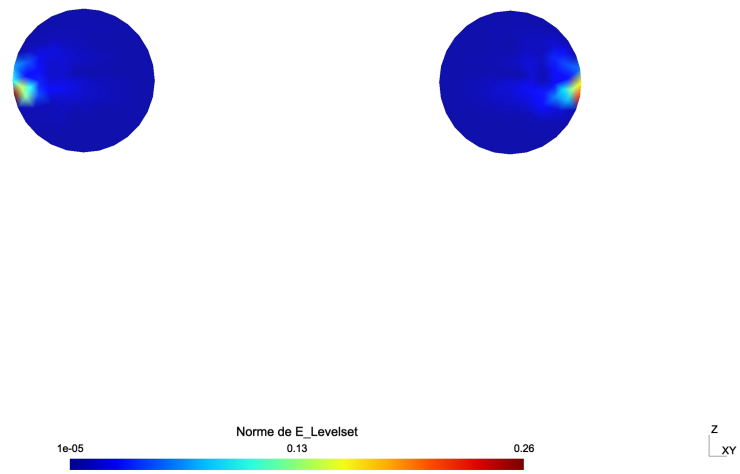


FIGURE 5.42 – Représentation sur une section poloïdale de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $1.e^{-5}$ à 0.26 , ($B_0 = 3.2T$, $0.2\omega_{lh}$, $k_{||}$ variable).

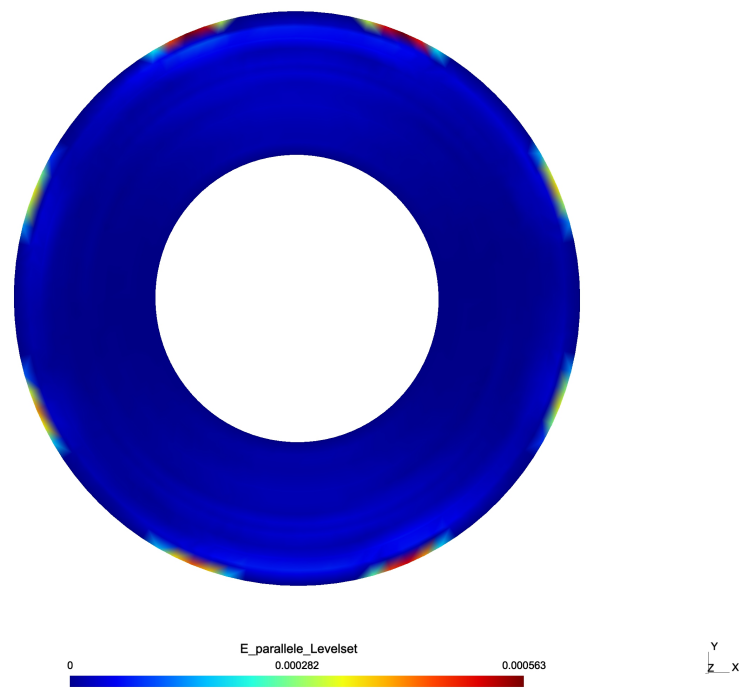


FIGURE 5.43 – Représentation sur la section $z = 0$ de la norme de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.0005, ($B_0 = 3.2T$, $0.2\omega_{lh}$, $k_{||}$ variable).

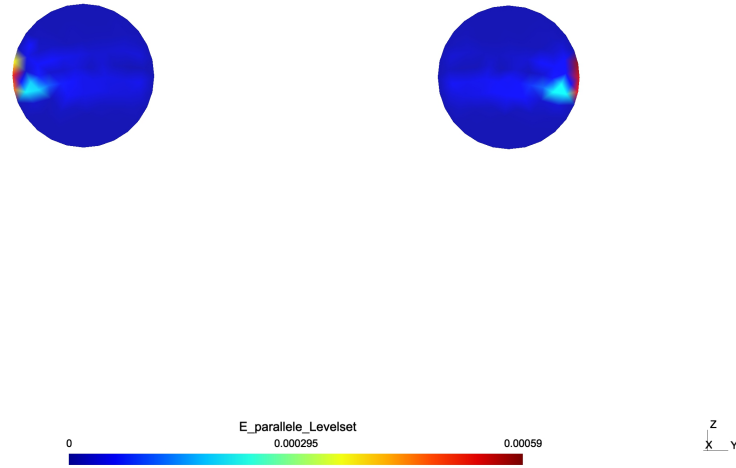


FIGURE 5.44 – Représentation sur une section parallèle au plan z de la norme de de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.00059, ($B_0 = 3.2T, 0.2\omega_{lh}$, $k_{||}$ variable).

Dans la figure (5.44) on observe la valeur de la norme composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 sur une section poloïdale, dans le cas où le vecteur d'onde est variable et la densité constante. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.2\omega_{lh}$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.45) on observe la valeur de la norme composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 sur plusieurs sections poloïdales, dans le cas où le vecteur d'onde est variable et la densité constante. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.2\omega_{lh}$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.46) on observe la valeur de la partie réelle de E_z sur une section $z = 0$, dans le cas où le vecteur d'onde est variable et la densité constante. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.2\omega_{lh}$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans la figure (5.47) on observe la valeur de la partie imaginaire de E_z sur plusieurs sections poloïdales, dans le cas où le vecteur d'onde est variable et la densité constante. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.2\omega_{lh}$ et $B_0 = 3.2T$.

Dans un septième exemple on considère le cas où $B_0 = 0.5T$, la densité des électrons et ions est variable avec la distance au centre du tore suivant les fonctions (5.3) et (5.4), avec $\varepsilon = 1.e^{-4}$. Par ailleurs on impose la valeur de $0.5\omega_{lh}$ à la pulsation de l'onde incidente

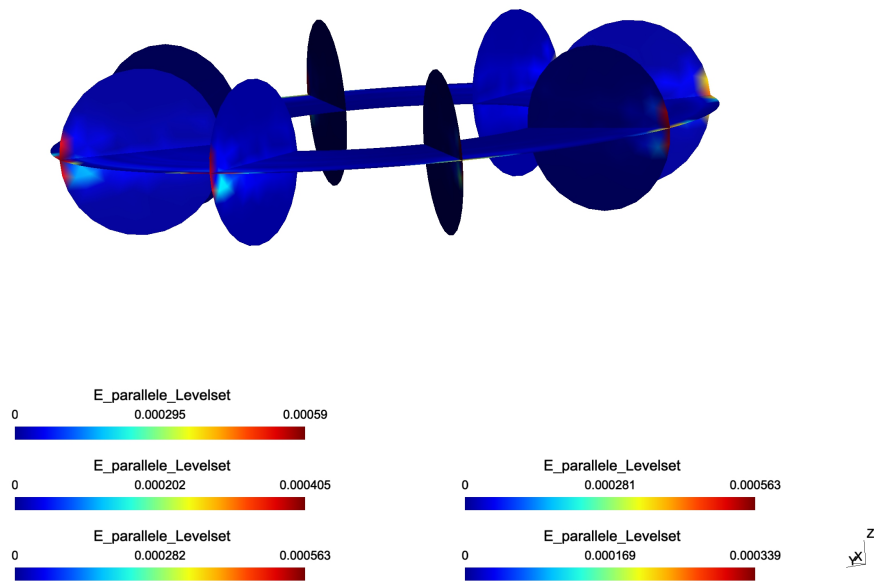


FIGURE 5.45 – Représentation sur plusieurs sections poloïdales de la norme de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.00059. ($B_0 = 3.2T$, $0.2\omega_{th}$, $k_{||}$ variable).

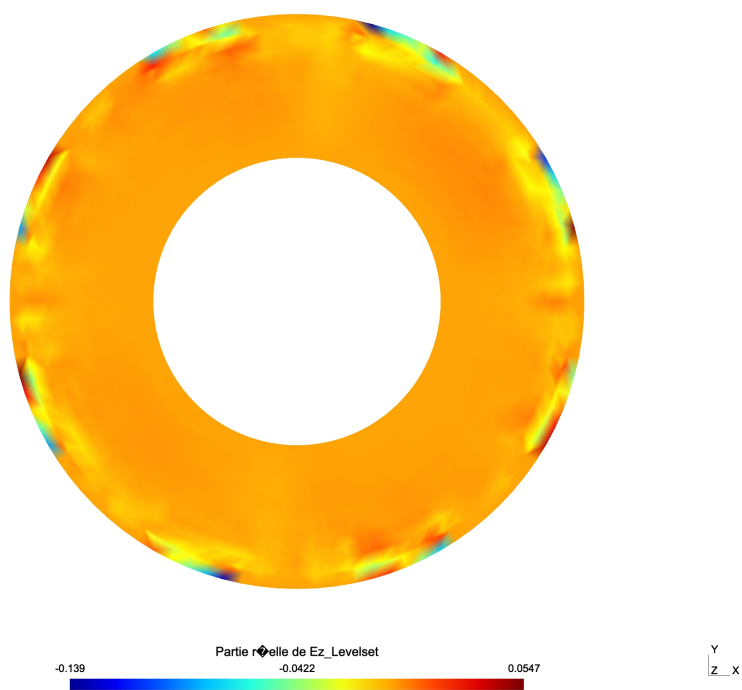


FIGURE 5.46 – Représentation sur la section $z = 0$ de la valeur de la partie réelle de E_z les niveaux vont de -0.139 à 0.0547 . ($B_0 = 3.2T$, $0.2\omega_{lh}$, $k_{||}$ variable).

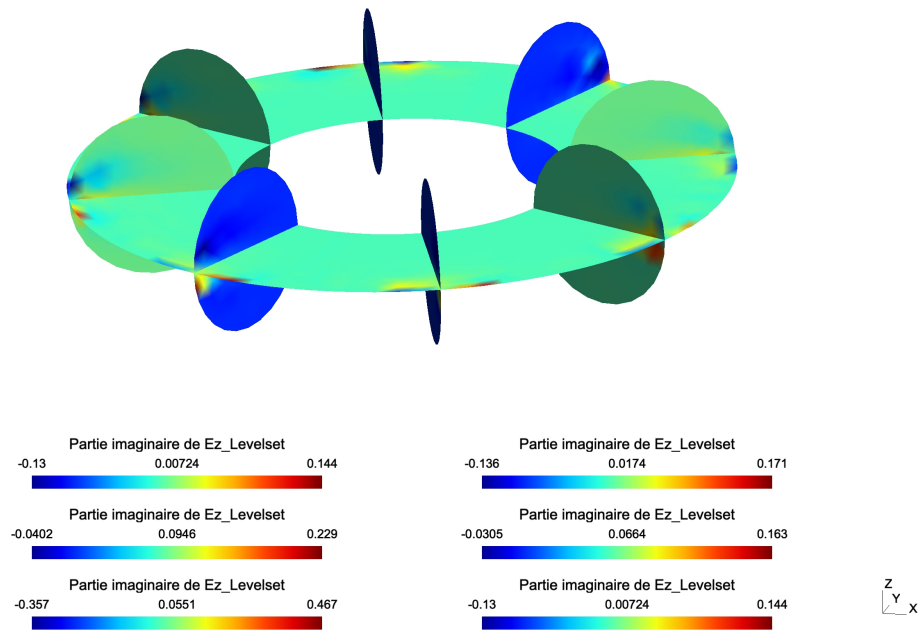


FIGURE 5.47 – Représentation sur plusieurs sections poloïdales de la valeur de la partie imaginaire de E_z , les niveaux vont de -0.357 à 0.467 , ($B_0 = 3.2T$, $0.2\omega_{lh}$, $k_{||}$ variable).

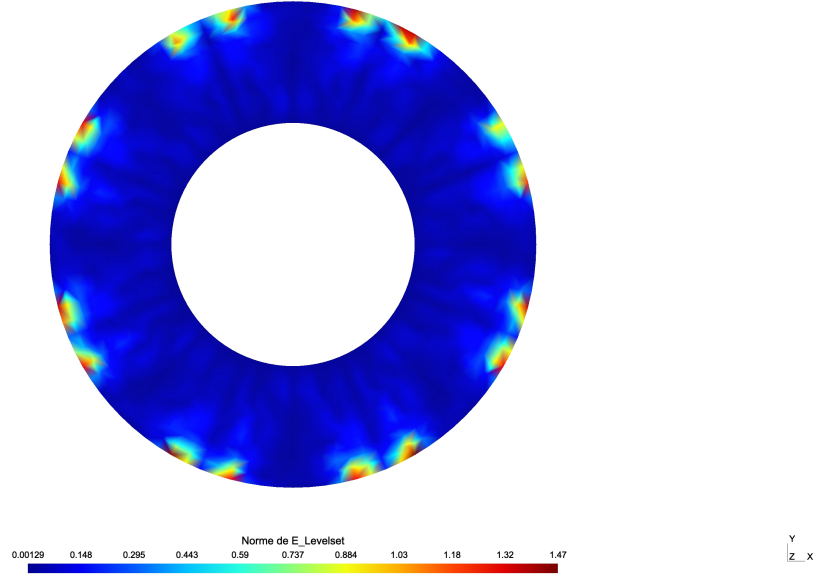


FIGURE 5.48 – Représentation de la section $z = 0$ de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $1.29e^{-3}$ à 1.47 , ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

ω et on considère un vecteur d'onde parallèle au champ magnétique extérieur, avec la composante parallèle égale à $k_{\parallel} = \frac{k}{R_0}$, avec $k = 200$, la longueur d'onde est de $1.838055m$.

Dans la figure (5.48) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur la section $z = 0$, et une section poloïdale dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.49) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} sur une section poloïdale, dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.50) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ sur une section $z = 0$, dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.51) on observe la valeur de la norme composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 sur une section poloïdale, dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.52) on observe la valeur de la partie réelle de E_x , dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.53) on observe la valeur de la partie imaginaire de E_x , dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

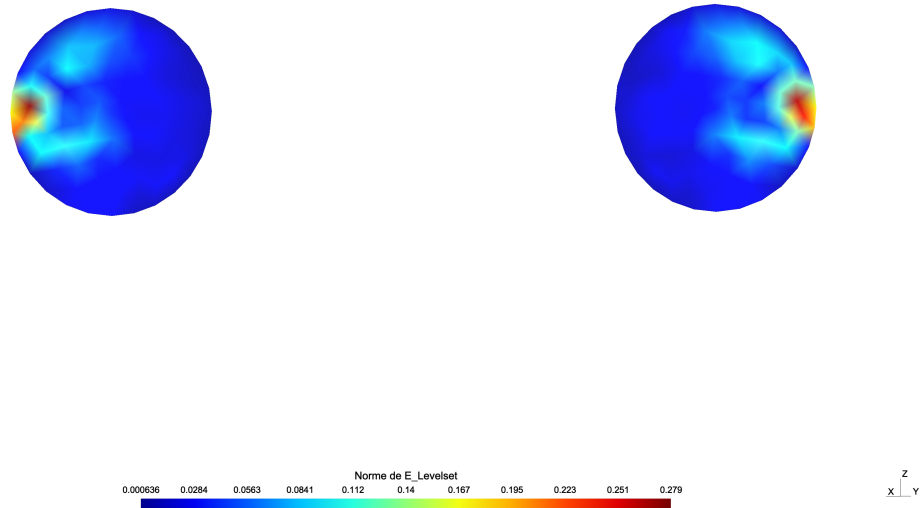


FIGURE 5.49 – Représentation sur plusieurs sections, $z = 0$ et poloidales, de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de $6.36e^{-4}$ à 0.279, ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

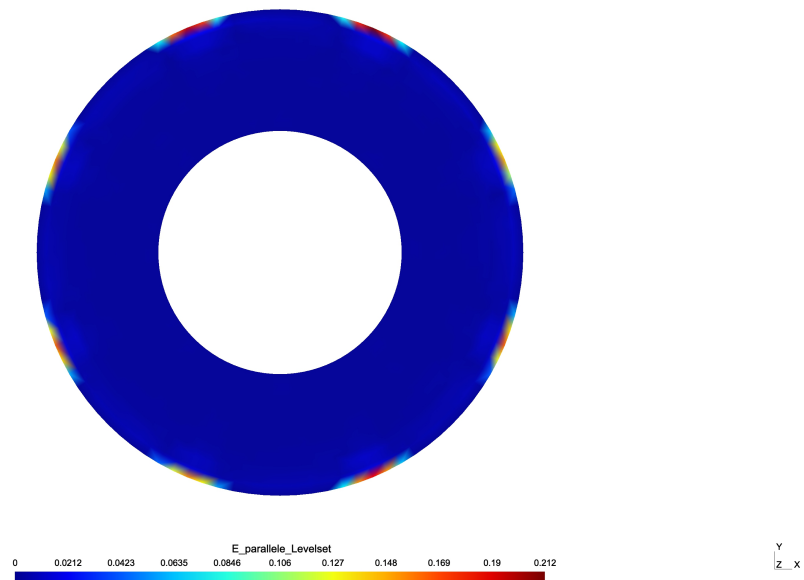


FIGURE 5.50 – Représentation sur la section $z = 0$ de la norme de de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.212,, ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

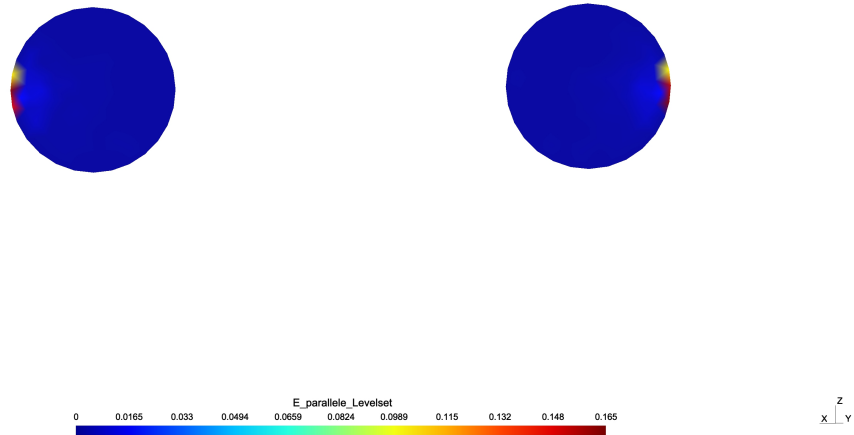


FIGURE 5.51 – Représentation sur une section polôidale de la norme de de la composante de \mathbf{E} parallèle à \mathbf{B}_0 , les niveaux vont de 0 à 0.165, ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{ih}$, $k = 200$).

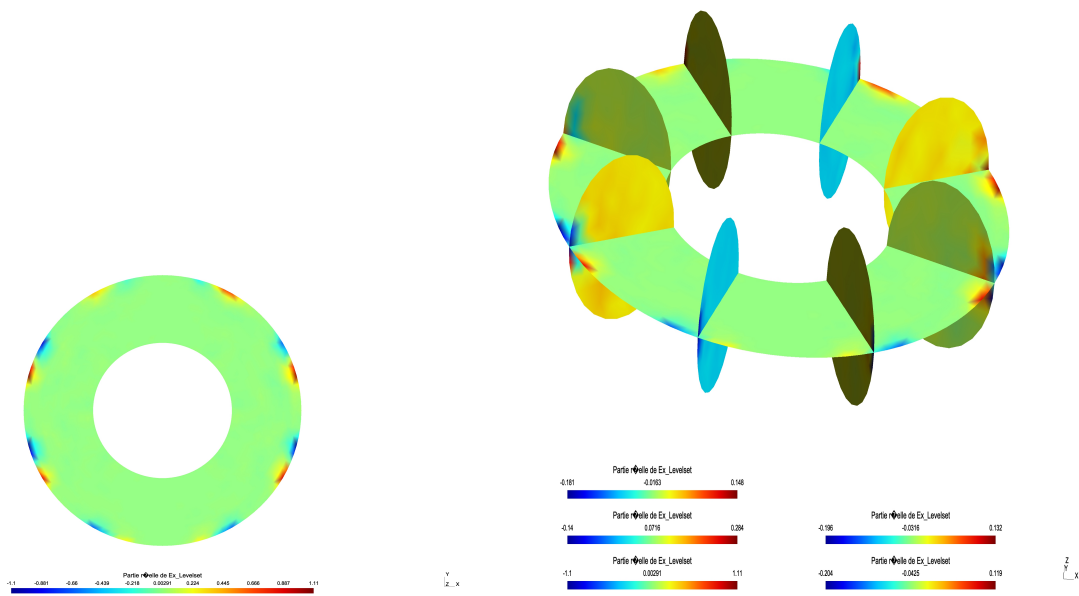


FIGURE 5.52 – Représentation de la valeur de la partie réelle de E_x , les niveaux vont de -1.1 à 1.1 , ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{ih}$, $k = 200$).

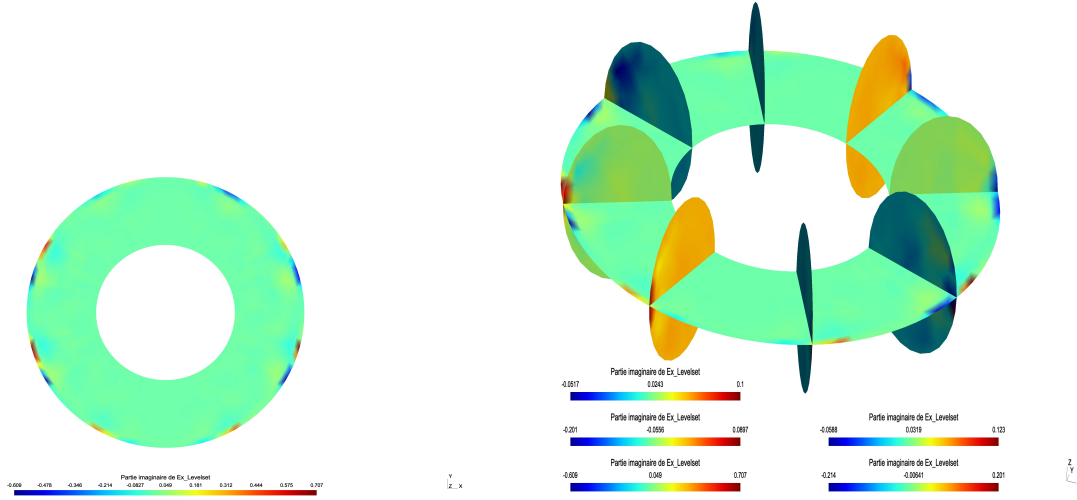


FIGURE 5.53 – Représentation de la valeur de la partie imaginaire de E_x , les niveaux vont de -0.609 à 0.707 , ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

Dans la figure (5.54) on observe la valeur de la partie réelle de E_y , dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.55) on observe la valeur de la partie imaginaire de E_y , dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.56) on observe la valeur de la partie réelle de E_z , dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans la figure (5.57) on observe la valeur de la partie imaginaire de E_z , dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.5\omega_{lh}$ et $B_0 = 0.5T$.

Dans le prochain exemple on considère les cas où $B_0 = 2.5T$, $\omega = 0.1\omega_{lh} = 1.025e^{+9}$ et $k = 300$. Alors la longueur d'onde est de $1.8380055m$. La densité des électrons et des ions est variable, $\epsilon = 0.0001$.

Dans la figure (5.58) on observe la valeur de la norme de \mathbf{E} , dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente est $\omega = 0.1\omega_{lh}$ et $B_0 = 2.5T$. On présente la trace sur une section toroïdale et plusieurs sections poloidales.

Dans la figure (5.59) on observe la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$, dans le cas où la densité est variable. Résultat obtenu quand la pulsation de l'onde incidente $\omega = 0.1\omega_{lh}$ et $B_0 = 2.5T$. On présente la trace sur une section toroïdale et plusieurs sections poloidales.

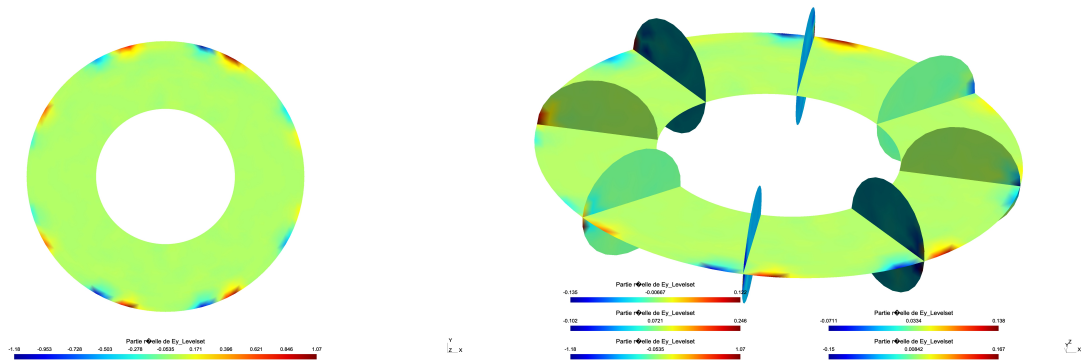


FIGURE 5.54 – Représentation de la valeur de la partie réelle de E_y , les niveaux vont de -1.18 à 1.07 , ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

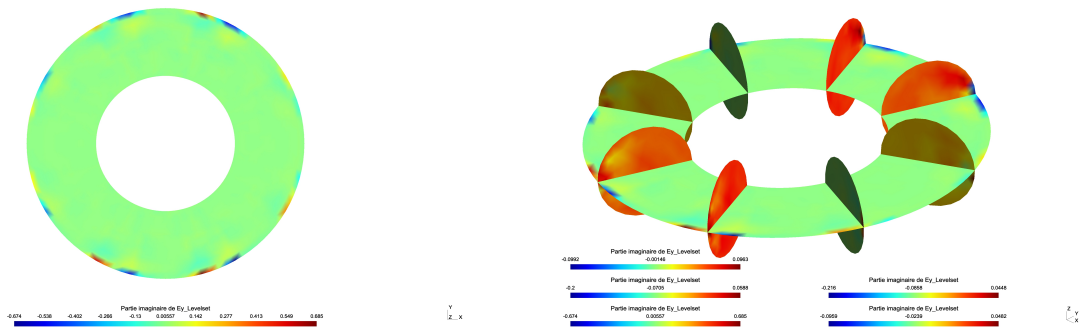


FIGURE 5.55 – Représentation de la valeur de la partie imaginaire de E_y , les niveaux vont de -0.674 à 0.685 , ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

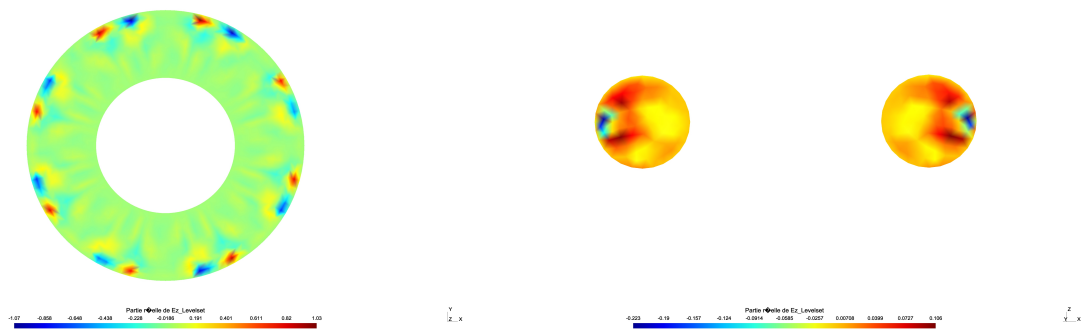


FIGURE 5.56 – Représentation de la valeur de la partie réelle de E_z , les niveaux vont de -1.07 à 1.03 , ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

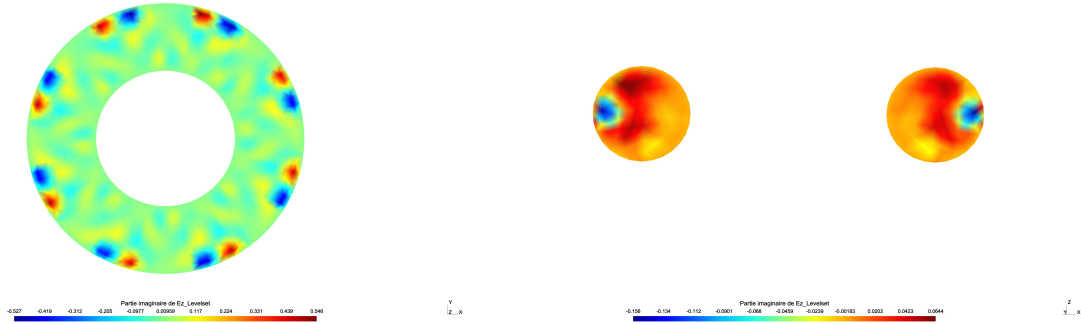


FIGURE 5.57 – Représentation de la valeur de la partie imaginaire de E_z , les niveaux vont de -0.527 à 0.546 , ($B_0 = 0.5T$, $0.5\omega_{lh}$, $k = 200$).

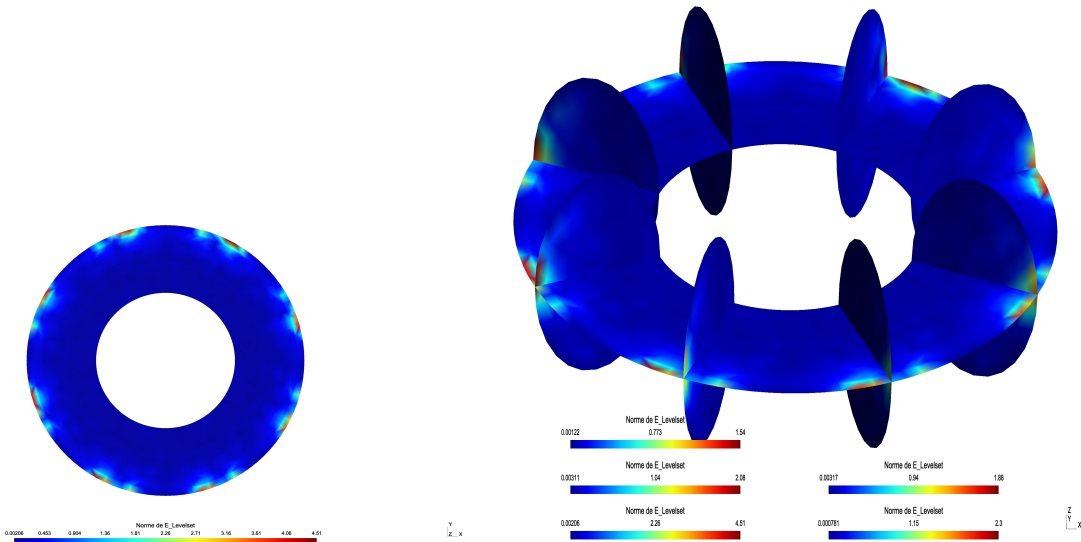


FIGURE 5.58 – Représentation de la valeur de la norme de \mathbf{E} , les niveaux vont de 0.002 à 4.51 , ($B_0 = 2.5T$, $0.1\omega_{lh}$, $k = 300$).

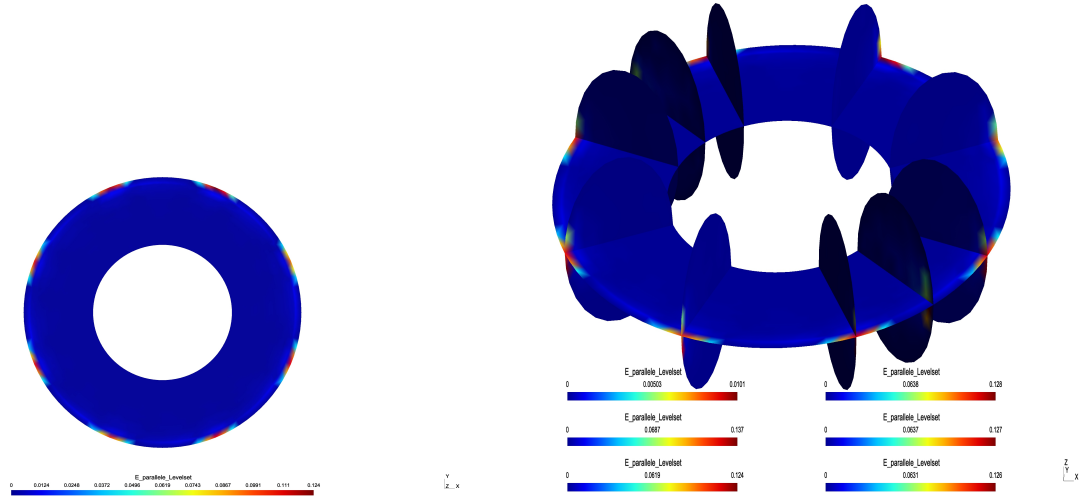


FIGURE 5.59 – Représentation de la valeur de $E_{par} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}$ les niveaux vont de 0. à 0.124, ($B_0 = 2.5T$, $0.1\omega_{th}, k = 300$).

5.2.13 Absorption

Un indicateur intéressant est l'absorption d'énergie par le plasma. Suivant l'analyse de Meneghini et al. [6], [53] et Hattori [36] la puissance absorbée par le plasma par effet Joule est donnée par :

$$(5.65) \quad P_\omega = \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \text{Imag}(\mathbf{K} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}) d\Omega$$

Dans la table (5.2) on donne les valeurs de P_ω en fonction de B_0 et ω dans le cas où la densité est constante.

B_0	ω	P_ω
0.5	$2.051033e^{+8}$	0
0.7	$2.871446e^{+8}$	0
1.	$4.102065e^{+8}$	$2.0e^{-6}$
1.2	$4.922478e^{+8}$	$9.0e^{-6}$
1.5	$6.153098e^{+8}$	$4.9e^{-5}$
1.75	$7.178614e^{+8}$	$1.33e^{-4}$
2	$8.20413e^{+8}$	$2.72e^{-4}$
2.5	$1.025516e^{+9}$	$7.73e^{-4}$
3.	$1.230620e^{+9}$	$1.76e^{-3}$
3.2	$1.312661e^{+9}$	$2.349e^{-3}$

TABLE 5.2 – Évolution de P_ω en fonction de B_0 et ω la pulsation de l'onde incidente.

Les calculs présentés dans ce chapitre sont restreints aux valeurs d'onde incidente $0.1\omega_{lh}$ quand $B_0 = 3.2T$ à cause de la relation entre la longueur d'onde et le maillage, qui doit comprendre cinq points par longueur d'onde. Dans le cas $B_0 = 0.5T$ on a pu considérer le cas où $\omega = 0.5\omega_{lh}$, car la longueur d'onde est alors compatible avec le maillage.

Le logiciel est écrit en langage MatlabTM et on a utilisé le logiciel GMSH pour réaliser les maillages, voir [31]. Le temps d'exécution du programme pour chaque exemple est de 10^4 secondes sur un DELLTM 540, processeur Xeon 2.4GHz.

6 Conclusion

Dans ce mémoire de thèse j'ai présenté l'étude et la mise en œuvre d'une méthode numérique pour la simulation d'un modèle « Full wave » de propagation dans un tokamak d'une onde électromagnétique. Ce phénomène est étudié en vue de développer des techniques de chauffage d'un plasma confiné dans un tokamak.

La propagation des ondes électromagnétiques est modélisée par les équations de Maxwell. On a cherché à calculer des solutions harmoniques en temps. Il en résulte une équation de type « Helmholtz-like », [4], avec une contrainte de divergence.

En particulier, dans le chapitre consacré à la modélisation, j'ai rappelé la forme du tenseur diélectrique $\underline{\mathbf{K}}$ qui décrit la réponse du milieu. Ce tenseur n'est pas hermitien, ce qui fait que l'analyse du système d'équations échappe aux arguments classiques, centrés sur des modèles symétriques.

Le terme d'amortissement Landau, et par conséquent les propriétés spectrales du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$, m'ont permis d'utiliser le théorème de Babuska–Brezzi.

Ensuite j'ai considéré une formulation mixte augmentée, déjà étudiée dans [36], qui m'a permis d'introduire une approximation numérique de la solution du type Taylor–Hood en trois dimensions.

Dans le chapitre 3, j'ai présenté la discrétisation du système d'équations aux dérivées partielles caractérisant le modèle. J'ai explicité les formules de quadrature numérique et les divers termes de la matrice de raideur, ainsi que le second membre du système discret. J'ai également présenté l'algorithme de d'assemblage de la matrice du système discret. On obtient ainsi un système non-hermitien d'équations linéaires, appelé système de point-selle généralisée. Pour calculer une solution, on a utilisé la méthode directe de Gauss et la méthode itérative GMRES, et on observe que c'est en fait la méthode directe qui donne les résultats les plus précis.

Le chapitre 4 est consacré à la démonstration de l'existence et unicité de la solution du système discret. Comme dans le cas continu, les propriétés spectrales du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$ ont permis de démontrer que la forme sesquilinéaire augmentée est coercitive. La démonstration de la condition inf-sup présente plus de difficultés à cause de deux facteurs, l'approximation \mathbb{P}_2 en trois dimensions et les caractéristiques du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$. En premier lieu, on remplace le tenseur $\underline{\mathbf{K}}$ par une approximation \mathbb{P}_1 qui, pour un pas de maillage assez petit, possède les mêmes propriétés spectrales que le tenseur continu. J'ai ainsi établi la condition inf-sup dans le cas d'un « tore » polyédrique. Cette démonstration a été généralisée au cas d'un domaine non polyédrique convexe, dans lequel le domaine approché est inclus dans le

domaine exact. Un futur travail pourra concerner le cas du tore non polyédrique, cas qui présente une difficulté additionnelle : l'approximation n'est plus conforme.

Dans le chapitre 5, dédié à la simulation numérique, j'ai traité plusieurs cas, en fonction de la norme du champ magnétique extérieur, de la pulsation de l'onde incidente, du profil de la densité des électrons et de la forme du vecteur d'onde.

L'analyse des résultats nous montre que, pour une pulsation donnée, l'accessibilité croît avec le module de n_{\parallel} . D'autre part, l'absorption de l'énergie par effet Joule croît en fonction de la norme du champ extérieur et de la pulsation. Les diverses figures représentent la norme du champ électrique et sa composante parallèle au champ magnétique extérieur montrant qu'elles ont une valeur très forte au voisinage des antennes et une décroissance importante et rapide dans le reste du domaine.

Les calculs sont très limités par l'aspect informatique, une évolution possible est la parallélisation de l'algorithme d'assemblage de la matrice de raideur qui prend la plus grande partie du temps d'exécution du programme à cause du tenseur $\underline{\mathbf{K}}$. La décomposition de domaine, déjà envisagée en deux dimensions dans [36], permettra d'explorer des longueurs d'onde plus courtes.

7 Appendices

7.1 Appendice A : Systèmes de coordonnées

Dans le cadre de cette thèse le système de coordonnées de référence est le cartésien, mais dans le cas de quantités scalaires et vectorielles dans un tore il est aisé d'utiliser un système de coordonnées orthogonal curviligne adapté. On considère le système toroïdal/poloïdal et le système cylindrique toroïdal. Soient R_0 le grand rayon du tore et a le petit rayon du tore.

7.1.1 Système des coordonnées toroïdales/poloïdales (r, θ, φ)

Soit $0 \leq r \leq a$, θ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ alors

$$(7.1) \quad \begin{aligned} x(r, \theta, \varphi) &= (R_0 + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y(r, \theta, \varphi) &= (R_0 + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z(r, \theta, \varphi) &= r \sin \theta \end{aligned}$$

et si $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - R_0$ alors

$$(7.2) \quad \begin{aligned} r(x, y, z) &= \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{z}{\rho}\right) \quad \text{valeur principale} \\ \varphi(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{valeur principale} \end{aligned}$$

La valeur principale signifie pour $y > 0$

$$(7.3) \quad \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \phi \operatorname{sgn}(y) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y) & x = 0 \\ (\pi - \phi) \operatorname{sgn}(y) & x < 0 \end{cases}$$

où $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ est tel que $\tan \phi = \left|\frac{y}{x}\right|$ et sgn est la fonction signe. Par ailleurs si $y = 0$ alors :

$$(7.4) \quad \arctan\left(\frac{0}{x}\right) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \text{non défini} & x = 0 \\ \pi & x < 0 \end{cases}$$

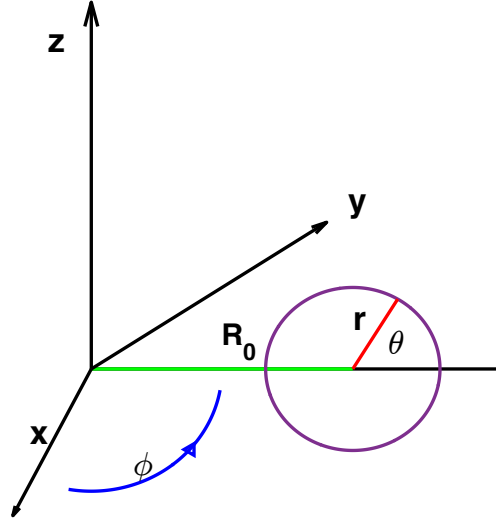


FIGURE 7.1 – Coordonnées toroïdales/poloïdales

Dans le tore avec $a \ll R_0$, x et y ne sont jamais nuls simultanément. Le résultat appartient à $[-\pi, \pi[$ mais peut être transposés à $[0, 2\pi[$ en ajoutant 2π aux valeurs négatives. Soit $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ la base locale canonique et soit $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ la base locale dans le système des coordonnées toroïdales/poloïdales. Alors un champ de vecteur \mathbf{F} peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

avec :

$$(7.5) \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix}$$

et

$$(7.6) \quad \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Dans la littérature sur la MHD en physique on trouve souvent un système de coordonnées toroïdal/poloïdal où le sens de φ est inversé. On obtient alors :

$$(7.7) \quad \begin{aligned} x(r, \theta, \varphi) &= (R_0 + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y(r, \theta, \varphi) &= -(R_0 + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z(r, \theta, \varphi) &= r \sin \theta \end{aligned}$$

et alors :

$$(7.8) \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix}$$

et

$$(7.9) \quad \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

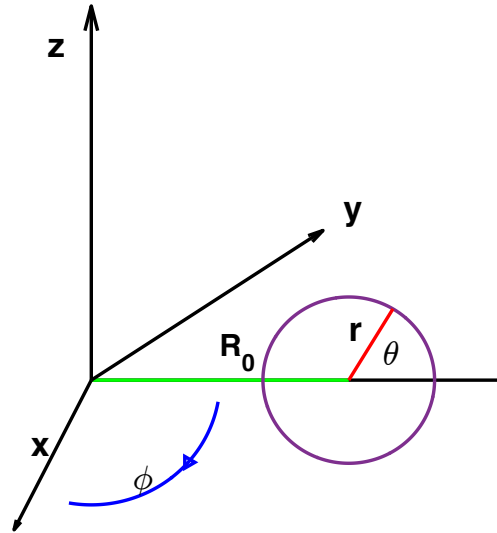


FIGURE 7.2 – Coordonnées toroïdales/poloïdales où le sens de φ est inversé

7.1.2 Coordonnées cylindriques/toroïdales (R, Z, φ)

On note R la coordonnée radiale, Z une coordonnée opposée à la coordonnée z cartésienne, et φ la coordonnée toroïdale.

$$(7.10) \quad \begin{aligned} x(R, Z, \varphi) &= R \cos \varphi \\ y(R, Z, \varphi) &= R \sin \varphi \\ z(R, Z, \varphi) &= -Z \end{aligned}$$

On remarque que :

$$(7.11) \quad \begin{aligned} R(x, y, z) &= R_0 + r \cos \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \\ Z(x, y, z) &= -z \\ \varphi(x, y, z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{valeur principale} \end{aligned}$$

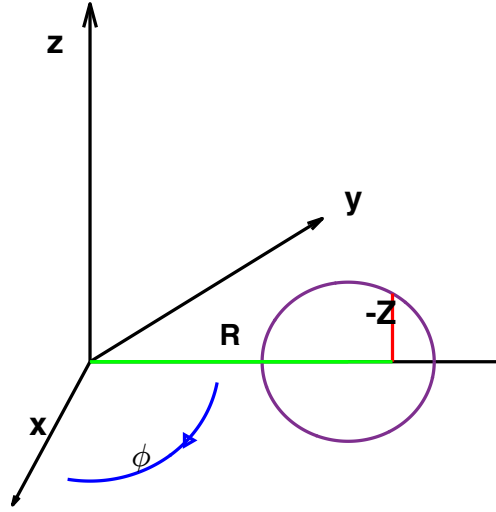


FIGURE 7.3 – Coordonnées cylindriques/toroidales

Par ailleurs si :

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = F_R \mathbf{e}_R + F_Z \mathbf{e}_Z + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

on a

$$(7.12) \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_R \\ F_Z \\ F_\varphi \end{pmatrix}$$

et

$$(7.13) \quad \begin{pmatrix} F_R \\ F_Z \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

7.1.3 Système des coordonnées de Stix

Le système de coordonnées locales de Stix, [55], u_1, u_2, u_3 est défini tel que le troisième vecteur \mathbf{e}_{u_3} est parallèle au champ magnétique extérieur \mathbf{B}_0 . Un champ de vecteurs $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ peut être décomposé en F_\perp et F_\parallel tel que :

$$(7.14) \quad F_\perp = F_{u_1} \mathbf{e}_{u_1} + F_{u_2} \mathbf{e}_{u_2} \quad \text{et} \quad F_\parallel = F_{u_3} \mathbf{b}$$

avec $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{B}_0(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|}$. Les vecteurs \mathbf{e}_{u_1} et \mathbf{e}_{u_2} doivent être choisis tels que :

$$(7.15) \quad F_{u_1} = f_\perp \cos \phi$$

$$(7.16) \quad F_{u_2} = f_\perp \sin \phi$$

$$(7.17) \quad F_{u_3} = F_{u_3}$$

avec $\phi \in [0, 2\pi[$ orientée de façon à obtenir un trièdre direct.

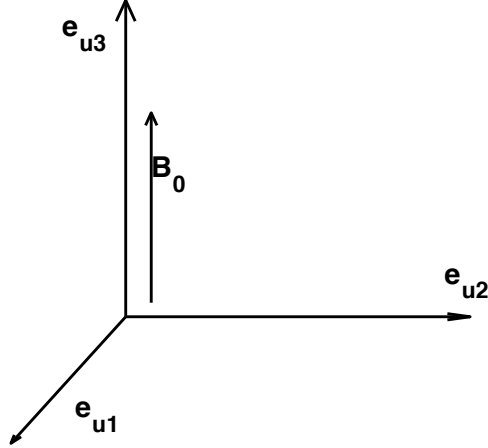


FIGURE 7.4 – Coordonnées de Stix

Soit $\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) = B_{0,1}(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + B_{0,2}(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + B_{0,3}(\mathbf{x})\mathbf{e}_3$ avec $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , alors

$$\mathbf{e}_{u3} = \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \mathbf{e}_1 + \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \mathbf{e}_2 + \frac{B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \mathbf{e}_3$$

Si maintenant on choisit le vecteur \mathbf{e}_{u1} :

$$(7.18) \quad \mathbf{e}_{u1} = \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} \mathbf{e}_1 - \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} \mathbf{e}_2$$

et

$$\mathbf{e}_{u2} = \mathbf{e}_{u3} \times \mathbf{e}_{u1} = \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} \mathbf{e}_1 + \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} \mathbf{e}_2 - \frac{\|\mathbf{B}_0\|_3(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \mathbf{e}_3.$$

On obtient un trièdre direct.

Si on note $\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_k = \sqrt{B_{0,i}^2(\mathbf{x}) + B_{0,j}^2(\mathbf{x})}$ avec $k = \{1, 2, 3\}/\{i, j\}$ on obtient la matrice de passage suivante Stix-Cartésien :

$$(7.19) \quad \mathbb{P}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ -\frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ 0 & -\frac{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} & \frac{B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \end{pmatrix}$$

Alors on a :

$$(7.20) \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ -\frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ 0 & -\frac{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} & \frac{B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{u1} \\ F_{u2} \\ F_{u3} \end{pmatrix}$$

et

$$(7.21) \quad \begin{pmatrix} F_{u_1} \\ F_{u_2} \\ F_{u_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & -\frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & 0 \\ \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3} & -\frac{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|_3}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \\ \frac{B_{0,1}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} & \frac{B_{0,2}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} & \frac{B_{0,3}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{B}_0(\mathbf{x})\|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

7.2 Appendice B : Analyse fonctionnelle : rappels et propriétés

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^3 de frontière Γ lipschitzienne.
 On note $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ une base canonique de \mathbb{R}^3 .
 On définit les notations suivantes qu'on utilisera par la suite :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} : \text{un vecteur et ses composantes dans } \mathbb{R}^3.$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} : \text{vecteur unitaire sortant normal à } \Gamma.$$

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} : \text{composante normale de } \mathbf{u} \text{ à } \Gamma.$$

$$\mathbf{u}_\top = \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) : \text{composante tangentielle de } \mathbf{u} \text{ à } \Gamma.$$

Opérateurs différentiels

On note par :

$$\text{divergence de } \mathbf{v} : \operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3,$$

$$\text{gradient de } v : \mathbf{grad} v = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 \\ \partial_2 v_2 \\ \partial_3 v_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{rotationnel de } \mathbf{v} : \mathbf{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Par extension, on définit le gradient d'un champ vectoriel \mathbf{v} comme la matrice 3×3 dont chaque ligne contient le gradient de la composante associée de \mathbf{v} :

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & \partial_3 v_3 \end{pmatrix}$$

où $\partial_i(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$.

Ces opérateurs différentiels sont exprimés en coordonnées cartésiennes.

Proposition 7.1. *Soit \mathbf{v} un vecteur de \mathbb{C}^3 . On rappelle les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} &= \Delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

7.2.1 Espaces fonctionnels

On rappelle ici les différents espaces de Hilbert et les normes associées qui seront utilisés par la suite .

Espaces de champs vectoriels

On définit l'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω par

$$(7.22) \quad \mathcal{D}(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega))^3$$

Définition 7.1. *l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R}^3 restreintes à $\overline{\Omega}$.*

Définition 7.2. *L'espace $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$ est l'espace des fonctions réelles \mathbf{u} sur Ω , mesurables et telle que la quantité $(\int_\Omega |\mathbf{u}|^2 d\Omega)^{1/2}$ est finie.*

Muni du produit scalaire usuel $(\mathbf{u} | \mathbf{v}) := \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} d\Omega$, l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On note $\|\mathbf{u}\|_0^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = (\mathbf{u} | \mathbf{u})$

On introduit alors les espaces de Hilbert suivants pour les produits scalaires associés :

$$(7.23) \quad \begin{aligned} H^1(\Omega) &:= \{v \in L^2(\Omega) | \operatorname{grad} v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \\ \mathbf{H}^1(\Omega) &:= H^1(\Omega)^3 \\ \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) | \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\} \\ \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) | \operatorname{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

munis respectivement des produits scalaires

$$\begin{aligned}(u, v)_{H^1} &:= (u \mid v) + (\mathbf{grad} u \mid \mathbf{grad} v) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{div})} &:= (\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) + (\text{div} \mathbf{u} \mid \text{div} \mathbf{v}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{rot})} &:= (\mathbf{u} \mid \mathbf{v}) + (\mathbf{rot} \mathbf{u} \mid \mathbf{rot} \mathbf{v})\end{aligned}$$

7.2.2 Espaces des traces

Définition 7.3. (*trace*)

Soit \mathbf{f} une fonction régulière définie sur $\overline{\Omega}$. On note l'application trace $\gamma : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}|_{\Gamma}$.

Proposition 7.2. L'application γ définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue et surjective de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sur $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma(\mathbf{H}^1(\Omega))$.

Définition 7.4. (*trace normale*)

Soit \mathbf{f} une fonction régulière définie sur $\overline{\Omega}$. On note l'application trace normale $\gamma_n : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma}$.

Proposition 7.3. L'application γ_n définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ sur $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ (l'espace dual de $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$), qui est surjective.

Définition 7.5. (*trace tangentielle et composante tangentielle*)

Soit \mathbf{f} une fonction régulière définie sur $\overline{\Omega}$. On note les applications trace tangentielle $\gamma_{\top} : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f} \times \mathbf{n}|_{\Gamma}$ et trace composante tangentielle $\pi_{\top} : \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_{\top} = \mathbf{n} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{n})|_{\Gamma}$.

Proposition 7.4. Les applications γ_{\top} et π_{\top} définies sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se prolongent par continuité en applications linéaires continues de $\mathbf{H}_1(\Omega)$ sur $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ respectivement. Les espaces d'arrivée de ces deux applications sont notés respectivement $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\partial\Omega)$ et $\mathbf{H}_{\parallel}^{1/2}(\partial\Omega)$.

Pour mieux caractériser ces deux espaces, on peut regarder [15], [16] et [2].

Définition 7.6. Les espaces $\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\partial\Omega)$ et $\mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\partial\Omega)$ sont les duaux respectifs des espaces $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\partial\Omega)$ et $\mathbf{H}_{\parallel}^{1/2}(\partial\Omega)$ par rapport à l'espace pivot $\mathbf{L}_t^2(\partial\Omega) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega) \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0\}$.

Définition 7.7. (*divergence tangentielle*)

On définit l'opérateur divergence tangentielle, noté div_{\top} , de $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ vers $H^{-3/2}(\partial\Omega)$ satisfaisant

$$(7.24) \quad \ll \text{div}_{\top} \boldsymbol{\lambda}, \psi \gg_{\partial\Omega} = -\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{grad}_{\top} \psi^* \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \psi \in H^{3/2}(\partial\Omega)$$

où $\ll \cdot, \cdot \gg_{\partial\Omega} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-3/2}, H^{3/2}}$, $\psi^* \in H^2(\Omega)$ un relèvement de ψ dans Ω et $\mathbf{grad} \mathbf{v}_{\top}$ est le gradient tangential défini par $\mathbf{grad} \mathbf{v}_{\top} = \pi_{\top}(\mathbf{grad} \mathbf{v})$.

Définition 7.8. (*rotationnel vectoriel tangentiel*)

On définit le rotationnel vectoriel tangentiel par $\mathbf{rot}_\top u = \gamma_\top(\mathbf{grad} u)$.

L'opérateur rotationnel scalaire tangentiel de $\mathbf{H}_\top^{-1/2}(\partial\Omega)$ vers $H^{-3/2}(\partial\Omega)$ est défini par

$$(7.25) \quad \ll \mathbf{rot}_\top \boldsymbol{\lambda}, \psi \gg_{\partial\Omega} = -\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{rot}_\top \psi^* \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \psi \in H^{3/2}(\partial\Omega)$$

On a alors le théorème suivant [16] :

Théorème 7.1. Soit $\Upsilon_{\partial\Omega} = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\partial\Omega) \mid \operatorname{div}_\top \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)\}$, l'application trace tangentielle γ_\top est continue surjective de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ vers $\Upsilon_{\partial\Omega}$.

Théorème 7.2. Soit $\mathbf{U}_{\partial\Omega} = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\parallel^{-1/2}(\partial\Omega) \mid \mathbf{rot}_\top \boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)\}$, l'application trace composante tangentielle π_\top est continue surjective de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ vers $\mathbf{U}_{\partial\Omega}$.

On introduit les fermetures de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans les espaces $H^1(\Omega)$, $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$:

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \overline{\mathbf{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} \\ \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) &= \overline{\mathbf{D}(\Omega)}^{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)} \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) &= \overline{\mathbf{D}(\Omega)}^{\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)}. \end{aligned}$$

L'existence des traces permet d'identifier ces espaces.

Théorème 7.3.

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{v \in H^1 \mid v|_\Gamma = 0\}, \\ \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0\}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \mid \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0\}. \end{aligned}$$

7.2.3 Formules de Green

Les formules suivantes sont démontrées dans [33].

$$(7.26) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} v + (\operatorname{div} \mathbf{u})v] d\Omega = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{\Gamma}$$

$$(7.27) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot} \mathbf{v}, \Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \int_{\Omega} [\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}] d\Omega = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle_{\Gamma}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)}$.

Il est possible d'établir une dualité entre la trace tangentielle et la composante tangentielle, on obtient une formule d'intégration par partie, similaire à la formule (7.27), qui est démontrée dans [15] :

$$(7.28) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \int_{\Omega} [\mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}] d\Omega = \langle \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}), \mathbf{v} \times \mathbf{n} \rangle_{\mathcal{U}_{\partial\Omega}, \mathcal{V}_{\partial\Omega}}$$

7.2.4 Opérateurs différentiels et espaces de Hilbert

Définition 7.9. Une inclusion d'un espace A dans un espace B est dite continue si

$$\|v\|_B \leq C \|v\|_A \quad \forall v \in A.$$

Une inclusion de A dans B est dite compacte si toute suite bornée de A admet une sous-suite convergente dans B .

Proposition 7.5. (Inégalité de Poincaré)

Il existe une constante C_p dépendante de Ω telle que

$$(7.29) \quad \|v\|_0 \leq C_p \|\mathbf{grad} v\|_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Théorème 7.4. (de Rellich)

L'injection $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte

Démonstration. La démonstration est dans [33] □

On définit l'espace suivant

$$\mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$$

muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{X}} := (\mathbf{u} | \mathbf{v}) + (\mathbf{rot} \mathbf{u} | \mathbf{rot} \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{u} | \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

Remarque 7.1. L'espace $\mathbf{X}(\Omega)$ est généralement noté $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \operatorname{div}; \Omega)$.

On note les espaces

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_N(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}(\Omega) \mid \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\} \\ &= \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega). \\ \mathbf{X}_T(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{X}(\Omega) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{div}, \Omega).\end{aligned}$$

Propriétés de l'espace $\mathbf{X}(\Omega)$

Proposition 7.6. *L'espace $\mathbf{X}_N(\Omega) \cap \mathbf{X}_T(\Omega)$ coïncide avec l'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. Voir [3]. □

Les théorèmes qui suivent sont démontrés dans [3]

Théorème 7.5. *L'inclusion $\mathbf{X}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte.*

Théorème 7.6. *L'inclusion $\mathbf{X}_N(\Omega)$ ainsi que $\mathbf{X}_T(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.*

Théorème 7.7. *Si Ω est de classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ou convexe alors $\mathbf{X}_N(\Omega)$ ainsi que $\mathbf{X}_T(\Omega)$ s'injectent continument dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.*

Proposition 7.7. *(inégalité de Weber)*

Il existe une constante C_w dépendant de Ω telle que

$$(7.30) \quad \|\mathbf{v}\|_0^2 \leq C_w (\|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|_0^2 + \|\mathbf{div} \mathbf{v}\|_0^2) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_N(\Omega).$$

L'inégalité est vérifiée aussi $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_T(\Omega)$.

Démonstration. Voir [33]. □

7.3 Appendice C : Les équations de Maxwell : Rappel

Les équations de Maxwell décrivent la propagation des ondes électromagnétiques confinées dans un plasma. Elles sont données par :

$$(7.31) \quad \operatorname{div} \mathcal{D} = \varrho \quad (\text{loi de Gauss électrique}),$$

$$(7.32) \quad \operatorname{div} \mathcal{B} = 0 \quad (\text{loi de Gauss magnétique}),$$

$$(7.33) \quad \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (\text{loi de Faraday}),$$

$$(7.34) \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \quad (\text{loi d'Ampère})$$

où \mathcal{E} , \mathcal{H} , \mathcal{D} et \mathcal{B} désignent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, le champ d'induction électrique et le champ d'induction magnétique. Les quantités \mathcal{J} et ϱ sont respectivement la densité de courant et la densité de charge électrique. Les champs vectoriels \mathcal{E} , \mathcal{H} , \mathcal{D} , \mathcal{B} et \mathcal{J} sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$. ϱ est une fonction scalaire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

On a la relation de conservation de la charge :

$$(7.35) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{J} = 0.$$

Lorsqu'il s'agit d'un conducteur imparfait, il existe un tenseur $\underline{\sigma}$ reliant le champ électrique \mathcal{E} et la densité de courant \mathcal{J} par la loi d'Ohm :

$$(7.36) \quad \mathcal{J} = \underline{\sigma} \mathcal{E}$$

7.4 Appendice D : Formule d'intégration de type Newton-Côtes

Dans cette section, on va décrire la construction de la formule d'intégration utilisée dans (4.41).

On rappelle la formule de changement de variable suivante :

$$\begin{aligned} \int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_K f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{\hat{K}} f(x(\boldsymbol{\xi}), y(\boldsymbol{\xi}), z(\boldsymbol{\xi})) |Jac_f(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

avec K et \hat{K} respectivement, un tétraèdre et un tétraèdre de référence. On notera par $\mathbf{x} = (x, y, z)$ et $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ respectivement les variables dans les tétraèdres K et \hat{K} .

7.4.1 Reconstruction d'une formule d'intégration d'ordre 2

On veut construire une formule d'intégration de la forme

$$(7.37) \quad \int_{\hat{K}} f(x(\boldsymbol{\xi}), y(\boldsymbol{\xi}), z(\boldsymbol{\xi})) |Jac_f(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{N=10} \omega_i f(x(\boldsymbol{\xi}_i), y(\boldsymbol{\xi}_i), z(\boldsymbol{\xi}_i)) |Jac_f(\boldsymbol{\xi}_i)|$$

a. Valeurs des points d'intégration $\boldsymbol{\xi}_i$ dans \hat{K}

Les points d'intégration $\boldsymbol{\xi}_i$ dans le tétraèdre de référence \hat{K} sont numérotés comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 &= (0, 0, 0), & \boldsymbol{\xi}_2 &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \\ \boldsymbol{\xi}_3 &= (1, 0, 0), & \boldsymbol{\xi}_4 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \boldsymbol{\xi}_5 &= (0, 1, 0), & \boldsymbol{\xi}_6 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \boldsymbol{\xi}_7 &= \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), & \boldsymbol{\xi}_8 &= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \\ \boldsymbol{\xi}_9 &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & \boldsymbol{\xi}_{10} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

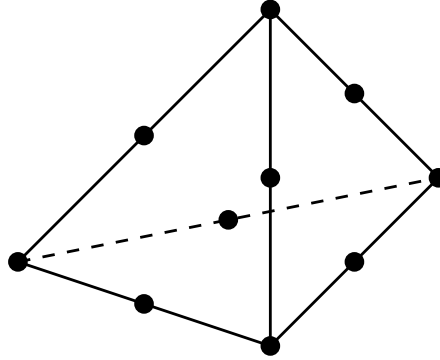


FIGURE 7.5 – Points d'intégration

b. Calcul des poids ω_i

Calcul de la base d'un polynôme de degré 2 sur le tétraèdre de référence \hat{T}

On cherche une base $\{\varphi_i\}_{i=1:10}$ d'un polynôme de degré 2 telle que

$$\begin{aligned}\varphi_i(\boldsymbol{\xi}_i) &= 1 \\ \varphi_i(\boldsymbol{\xi}_j) &= 0 \quad \forall i \neq j\end{aligned}$$

On rappelle que la base canonique polynomiale quadratique complète est de la forme

$$(7.38) \quad 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad (\xi\eta) \quad \eta^2 \quad (\eta\zeta) \quad \zeta^2 \quad (\xi\zeta)$$

Ces fonctions seront notées $P_k(\boldsymbol{\xi})$ pour $k = 1 : 10$.

Pour $i = 1, \dots, 10$, on construit les 10 systèmes linéaires suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{10} c_k^i P_k(\boldsymbol{\xi}_i) = 1 \\ \sum_{k=1}^{10} c_k^i P_k(\boldsymbol{\xi}_j) = 0 \quad \forall j \neq i \end{array} \right. \quad \text{et donc}$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{\xi}_i) = \sum_{k=1}^{10} c_k^i P_k(\boldsymbol{\xi})$$

Le polynôme d'interpolation de degré 2 d'une fonction g sur le tétraèdre de référence dans la base $\{\varphi_i\}$ s'écrit alors

$$P(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{10} g(\boldsymbol{\xi}_k) \varphi_k(\boldsymbol{\xi})$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\hat{T}T} P(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} &= \sum_{k=1}^{10} g(\boldsymbol{\xi}_k) \int_{\hat{T}T} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \omega_K(\boldsymbol{\xi}_k) \\ \text{avec } \omega_k &= \int_{\hat{T}T} \varphi_k(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \sum_{k=1}^{10} c_i^k \int_{\hat{T}T} P_i(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

Pour calculer les différentes valeurs de $P_i(\boldsymbol{\xi})$, $i = 1 : 10$ on utilise la formule suivante

$$(7.39) \quad \int_{\hat{T}T} \xi^i \eta^j \zeta^k d\xi d\eta d\zeta = \frac{i! j! k!}{(i + j + k + 3)!}$$

En utilisant la formule 7.39, on trouve les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \omega_i &\approx -0.0083 \quad \forall i \in \{1, 3, 5, 10\} \\ \omega_j &\approx 0.0333 \quad \forall j \in \{2, 4, 6, 7, 8, 9\} \end{aligned}$$

7.4.2 Reconstruction d'une formule d'intégration d'ordre 3

a. Valeurs des points d'intégration $\boldsymbol{\xi}_i$ dans \hat{K}

On considère un tétraèdre avec 20 points d'intégration. On numérote ces points de la façon suivante

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 &= (0, 0, 0), \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right), \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \left(\frac{2}{3}, 0, 0\right), \quad \boldsymbol{\xi}_4 = (1, 0, 0) \\ \boldsymbol{\xi}_5 &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \boldsymbol{\xi}_6 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad \boldsymbol{\xi}_7 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\xi}_8 = \left(0, \frac{2}{3}, 0\right) \\ \boldsymbol{\xi}_9 &= \left(0, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{10} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{11} = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{12} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \\ \boldsymbol{\xi}_{13} &= \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{14} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{15} = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{16} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \boldsymbol{\xi}_{17} &= \left(0, 0, \frac{2}{3}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{18} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{19} = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \boldsymbol{\xi}_{20} = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

b. Calcul des poids ω_i

Calcul de la base d'un polynôme de degré 3 sur le tétraèdre de référence $\hat{T}T$

Soit $\{P_k(\boldsymbol{\xi})\}_{k=1:20}$ la base canonique polynomiale cubique complète donnée par

$$(7.40) \quad 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad (\xi\eta) \quad \eta^2 \quad (\eta\zeta) \quad \zeta^2 \quad (\xi\zeta) \quad \xi^3 \quad (\xi^2\eta) \quad (\xi\eta^2) \quad \eta^3 \quad (\eta^2\zeta) \quad (\eta\zeta^2) \quad \zeta^3 \quad (\xi^2\zeta) \quad (\xi\zeta^2) \quad (\xi\eta\zeta)$$

7.4. APPENDICE D : FORMULE D'INTÉGRATION DE TYPE NEWTON-CÔTES¹⁶³

On suit les mêmes démarches que dans la première partie. On calcule les poids ω_i , $i = 1 : 20$ avec Matlab et on trouve les valeurs suivantes

$$\omega_i \approx 0.004167 \quad \forall i \in \{1, 4, 7, 20\}$$

$$\omega_i \approx 0.0375 \quad \forall i \in \{10, 12, 14, 16\}$$

$$\omega_i = 0 \quad \forall i \in \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19\}$$

Il est clair que $\omega_i \geq 0$, $\forall i = 1 : 20$. On obtient ainsi une formule à 8 points exacte pour les polynômes de degré ≤ 3 . Pour plus de précisions voir [54], [24] .

7.5 Appendice E : Équivalence des normes

Dans cette partie on va montrer l'existence d'une constante C_0 indépendante de h telle que $\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h}^2 \leq C_0 \|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}^2$. On rappelle tout d'abord le théorème suivant.

Théorème 7.8. (Inégalité de Jensen [39]) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x_1, \dots, x_n \in I$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels vérifiant $\alpha_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Si de plus $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, alors

$$(7.41) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

Revenons à notre démonstration et montrons qu'il existe $C_0 > 0$ et indépendant de h tel que $\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h}^2 \leq C_0 \|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}^2$. On a $\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h}^2 = \|\mathbf{v}_h^0\|_{0,\Omega_h}^2 + \|\operatorname{div}(\mathbf{K}_h \mathbf{v}_h^0)\|_{0,\Omega_h}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}_h^0\|_{0,\Omega_h}^2$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\operatorname{rot} \mathbf{v}_h^0\|_{0,\Omega_h}^2 &= \int_{\Omega_h} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{v}_{h_3}^0}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{v}_{h_2}^0}{\partial x_3} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{h_1}^0}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{v}_{h_3}^0}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{h_2}^0}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{v}_{h_1}^0}{\partial x_2} \right|^2 \right) dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega_h} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{h_j}^0}{\partial x_i} \right|^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{h_j}^0}{\partial x_i} \right|^2 dx \\ &= 2 \|\nabla \mathbf{v}_h^0\|_{0,\Omega_h}^2 \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}_h \mathbf{v}_h^0)\|_{0,\Omega_h}^2 &= \int_{\Omega_h} \left| \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}} \mathbf{v}_{h_j}^0) \right|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega_h} \left| \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}} \mathbf{v}_{h_j}^0) \right| \right) \right|^2 dx \\
&= \int_{\Omega_h} \left| \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{9}{9} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}} \mathbf{v}_{h_j}^0) \right| \right) \right|^2 dx \\
&= 81 \int_{\Omega_h} \left| \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{9} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}} \mathbf{v}_{h_j}^0) \right| \right) \right|^2 dx \\
&\stackrel{(7.41)}{\leq} 81 \int_{\Omega_h} \left| \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{9} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (\underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}} \mathbf{v}_{h_j}^0) \right| \right) \right|^2 dx \\
&= 9 \int_{\Omega_h} \left| \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}}}{\partial x_i} \mathbf{v}_{h_j}^0 + \underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}} \frac{\partial \mathbf{v}_{h_j}^0}{\partial x_i} \right| \right) \right|^2 dx \\
&\leq 9 \int_{\Omega_h} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2 \left(\left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}}}{\partial x_i} \mathbf{v}_{h_j}^0 \right|^2 + \left| \underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}} \frac{\partial \mathbf{v}_{h_j}^0}{\partial x_i} \right|^2 \right) dx \\
&\leq 18 \int_{\Omega_h} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sup_{\Omega_h} \left(\left| \frac{\partial \underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}}}{\partial x_i} \right|^2, |\underline{\mathbf{K}}_{h_{ij}}|^2 \right) (|\mathbf{v}_{h_j}^0|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{h_j}^0}{\partial x_i} \right|^2) dx \\
&\leq 18 \sup(K'_{h_6}, K^+_{h_2}) \left(\int_{\Omega_h} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |\mathbf{v}_{h_j}^0|^2 dx + \int_{\Omega_h} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{h_j}^0}{\partial x_i} \right|^2 dx \right) \\
&\leq 54 \sup(K'_{h_6}, K^+_{h_2}) \|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}^2
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h}^2 &\leq \|\mathbf{v}_h^0\|_{0,\Omega_h}^2 + 54 \sup(K'_{h_6}, K^+_{h_2}) \|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}^2 + 2 \|\nabla \mathbf{v}_h^0\|_{0,\Omega_h}^2 \\
&\leq (3 + 54 \sup(K'_{h_6}, K^+_{h_2})) \|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}^2
\end{aligned}$$

D'où l'existence d'un $C_0 = (3 + 54 \sup(K'_{h_6}, K^+_{h_2})) > 0$ et indépendant de h telle que

$$(7.42) \quad \|\mathbf{v}_h^0\|_{\mathbf{X}_h,\Omega_h}^2 \leq C_0 \|\mathbf{v}_h^0\|_{1,\Omega_h}^2$$

7.6 Appendice F : Propriétés topologiques de domaines réguliers et non simplement connexes

Définition 7.10. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 . On dit que Ω est pseudo-lipschitzien si pour tout point \mathbf{x} sur le bord $\partial\Omega$, il existe un entier $r(\mathbf{x})$ égal à 1 ou 2 et un réel strictement positif α_0 tels que pour tout réel α avec $0 < \alpha < \alpha_0$, l'intersection de Ω avec la boule de centre \mathbf{x} et de rayon α , a $r(\mathbf{x})$ composante(s) connexe(s) qui sont chacune lipschitzienne.

On suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine lipschitzien tel qu'il existe $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ surfaces ouvertes connexes $\Sigma_j, 1 \leq j \leq \tilde{N}$ inclus dans Ω vérifiant :

- $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et les coupures Σ_j ne sont pas tangentes à Γ .
- le bord des Σ_j est contenu dans Γ pour $1 \leq j \leq \tilde{N}$.

· si on définit $\Sigma = \bigcup_{j=1}^{\tilde{N}} \Sigma_j$ et $\dot{\Omega} = \Omega \setminus \Sigma$, alors $\dot{\Omega}$ est pseudo-lipschitzien et simplement connexe.

Enfin, on décompose Γ en $\bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$, où Γ_j sont les composantes connexes de Γ . Or le tore

vérifie bien ces propriétés avec $\tilde{N} = 1$ et sa frontière est connexe donc $m = 1$.

On a alors le lemme suivant (démontré dans [3]).

Lemme 7.1. (potentiel vecteur tangentiel)

Si la frontière Γ est connexe, alors une fonction \mathbf{u} dans $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ satisfait

$$(7.43) \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega$$

si et seulement si il existe un potentiel vecteur $\mathbf{A} \in \mathbf{X}(\Omega)$ tel que

$$(7.44) \quad \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{A} \text{ dans } \Omega \text{ et } \text{div } \mathbf{A} = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(7.45) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ et } \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0.$$

La fonction \mathbf{A} est unique et on a

$$(7.46) \quad \|\mathbf{A}\|_0 \leq C \|\mathbf{u}\|_0.$$

Remarque 7.2. Si Γ a plusieurs composantes (i.e $m > 1$) alors l'hypothèse (7.43) devient

$$(7.47) \quad \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0 \quad 0 \leq j \leq m.$$

Enfin on a une décomposition de Helmholtz des champs de vecteurs $\mathbf{L}^2(\Omega)$ en partie gradient et "K-solénoïde"

Lemme 7.2. Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, alors il existe $\phi \in H_0^1(\Omega)$ et $\mathbf{u}_T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ avec $\text{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_T) = 0$ tel que

$$(7.48) \quad \mathbf{u} = \text{grad } \phi + \mathbf{u}_T$$

vérifiant

$$(7.49) \quad \|\text{grad } \phi\|_0 \leq C \|\mathbf{u}\|_0 \text{ et } \|\mathbf{u}_T\|_0 \leq C \|\mathbf{u}\|_0.$$

7.6. APPENDICE F : PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE DOMAINES RÉGULIERS ET NON SIMPLI

Démonstration. On cherche $(\phi, \mathbf{u}_T) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que

$$(7.50) \quad \mathbf{u} = \mathbf{grad} \phi + \mathbf{u}_T \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(7.51) \quad \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

En appliquant $\operatorname{div} \underline{\mathbf{K}}$ aux deux membres de l'équation (7.50), on cherche $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}) = \Delta_{\underline{\mathbf{K}}}\phi$. Or $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \Rightarrow \underline{\mathbf{K}}\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \Rightarrow \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}) \in H^{-1}(\Omega)$ car la divergence est continue de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Et donc la proposition 2.6 montre l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

On pose alors $\mathbf{u}_T = \mathbf{u} - \mathbf{grad} \phi$ et on a

$$\mathbf{u}_T \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ et } \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}}\mathbf{u}_T) = 0.$$

□

Remarque 7.3. *i) Si $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ alors $\mathbf{grad} \phi \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ et par conséquent $\mathbf{u}_T \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega)$*

ii) Grâce à la remarque 2.3, on a aussi une décomposition des champs de vecteurs $\mathbf{L}^2(\Omega)$ en partie $\underline{\mathbf{K}}^H$ -gradient et solénoïde : soit $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, alors il existe $\phi \in H_0^1(\Omega)$ et $\mathbf{u}_T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ avec $\operatorname{div} \mathbf{u}_T = 0$ tel que

$$(7.52) \quad \mathbf{u} = \underline{\mathbf{K}}^H \mathbf{grad} \phi + \mathbf{u}_T$$

7.7 Appendice G : Théorie de régularité des problèmes elliptiques

On rappelle ici quelques résultats principaux dans la théorie de la régularité des problèmes elliptiques [37] : soit a une forme sesquilinéaire donnée par

$$a(\phi, \psi) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} a_{i,j}(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\mathbf{x})}$$

L'opérateur A associé, appliquant $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ si $(a_{i,j}) \in L^\infty(\Omega)$, s'écrit

$$A\phi = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{i,j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right).$$

Définition 7.11. *On dit que l'opérateur A est (uniformément) fortement elliptique s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega} \quad \forall \mathbf{r} \in \mathbb{C}^3 \quad \operatorname{Re}(\mathbf{r}^H \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \mathbf{r}) \geq c |\mathbf{r}|^2$$

avec $\underline{\mathbf{A}}$ la matrice $(a_{i,j})$.

Théorème 7.9. *Soit Ω un ouvert borné et régulier. On suppose que l'opérateur A est fortement elliptique avec les coefficients $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$ et que $f \in L^2(\Omega)$. Alors la solution du problème*

$$A\phi = f \quad \text{et} \quad \phi \in H_0^1(\Omega)$$

appartient à $H^2(\Omega)$.

7.8 Appendice H : Base de l'espace d'interpolation \mathbb{P}_2

La base canonique polynomiale quadratique complète est de la forme ;

$$(7.53) \quad 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad (\xi\eta) \quad \eta^2 \quad (\eta\zeta) \quad \zeta^2 \quad (\xi\zeta)$$

Les points d'interpolation $\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ dans le tétraèdre de référence \hat{K} sont numérotés dans Gmsh comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 &= (0, 0, 0), & \boldsymbol{\xi}_2 &= (1, 0, 0) \\ \boldsymbol{\xi}_3 &= (0, 1, 0), & \boldsymbol{\xi}_4 &= (0, 0, 1) \\ \boldsymbol{\xi}_5 &= \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), & \boldsymbol{\xi}_6 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ \boldsymbol{\xi}_7 &= \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), & \boldsymbol{\xi}_8 &= \left(0, 0, \frac{1}{2}\right) \\ \boldsymbol{\xi}_9 &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & \boldsymbol{\xi}_{10} &= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

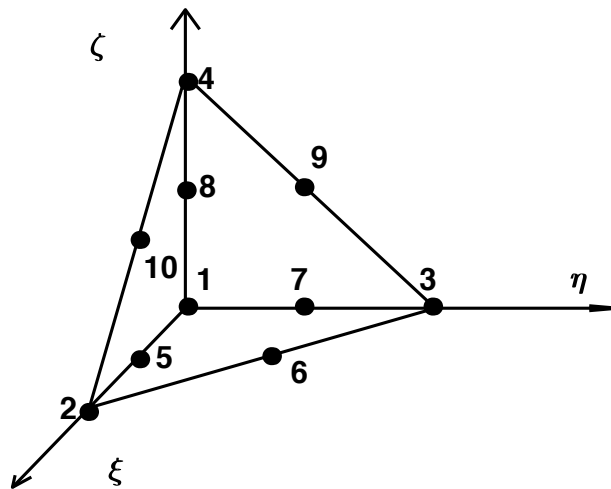


FIGURE 7.6 – Points d'interpolation, notation GMSH

Soit $\lambda = 1 - \xi - \eta - \zeta$ alors :

#	\hat{N}	$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \xi}$	$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \zeta}$
1	$-\lambda(1 - 2\lambda)$	$1 - 4\lambda$	$1 - 4\lambda$	$1 - 4\lambda$
2	$\xi(1 - 2\xi)$	$-1 + 4\xi$	0	0
3	$-\eta(1 - 2\eta)$	0	$-1 + 4\eta$	0
4	$-\zeta(1 - 2\zeta)$	0	0	$-1 + 4\zeta$
5	$4\xi\lambda$	$4(\lambda - \xi)$	-4ξ	-4ξ
6	$4\xi\eta$	4η	4ξ	0
7	$4\eta\lambda$	-4η	$4(\lambda - \eta)$	-4η
8	$4\zeta\lambda$	-4ζ	-4ζ	$4(\lambda - \zeta)$
9	$4\eta\zeta$	0	4ζ	4η
10	$4\xi\zeta$	4ζ	0	4ξ

Bibliographie

- [1] www.cea.fr.
- [2] A. Alonso and A. Valli. A domain decomposition approach for heterogeneous time-harmonic Maxwell equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 143(1-2) :97–112, 1997.
- [3] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9) :823–864, 1998.
- [4] F. Assous, P.Jr. Ciarlet, and S. Labrunie. *Mathematical foundations of computational electromagnetics*. Springer, Berlin, 2018.
- [5] F. Assous, P. Degond, E. Heintze, P-A. Raviart, and J. Segré. On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations. *Journal of Computational Physics*, 109(2) :222–237, 1993.
- [6] F. Assous, P. Degond, and J. Segré. Full wave simulation of lower hybrid waves in Maxwellian plasma based on finite element method. *Physics of Plasma*, 16, 2009.
- [7] A. Back, R. Daadaa, S. Labrunie, P. Bertrand, and J.R. Roche. Numerical Full Wave Simulation in a Tokamak Plasma. In *The 20th International Symposium on High Voltage Engineering*, sept. 2017.
- [8] A. Back, T. Hattori, S. Labrunie, J-R. Roche, and P. Bertrand. Electromagnetic wave propagation and absorption in magnetised plasmas : variational formulations and domain decomposition. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(5) :1239–1260, 2015.
- [9] M. Benzi, G. H. Golub, and J. Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica*, 14 :1–137, 2005.
- [10] M. Benzi and G.H. Golub. A preconditioner for generalized saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26(1) :20–41, 2004.
- [11] C Bernardi. Optimal finite-element interpolation on curved domains. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(5) :1212–1240, 1989.
- [12] C Bernardi and V Girault. A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(5) :1893–1916, 1998.

- [13] M.Sh. Birman and M.Z. Solomyak. Maxwell operator in regions with nonsmooth boundaries. *Siberian Mathematical Journal*, 28(1) :12–24, 1987.
- [14] J. Bizarro, Y. Peysson, P.T. Bonoli, J. Carrasco, T. Dudok de Wit, V. Fuchs, G.T. Hoang, X. Lituadon, D. Moreau, Ch. Pocheau, and Schkarofsky I.P. On self consistent ray tracing and Fokker Planck modeling of the hard x ray emission during lower hybrid current drive in tokamaks. *Physics of Plasma*, 5, 1993.
- [15] A. Buffa and Jr. P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part i : An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1) :9–30, 2001.
- [16] A. Buffa and Jr. P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part ii : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1) :31–48, 2001.
- [17] F. F. Chen. *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, volume 1. Springer, 1984.
- [18] P. Ciarlet Jr. Augmented formulations for solving Maxwell equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(2-5) :559–586, 2005.
- [19] P. Ciarlet Jr and V. Girault. Condition inf-sup pour l’élément fini de Taylor–Hood P2-iso-P1, 3-D ; application aux équations de Maxwell. *Comptes Rendus Mathématique*, 335(10) :827–832, 2002.
- [20] Ph. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Revue française d’automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 9(R2) :77–84, 1975.
- [21] M. Costabel. A coercive bilinear form for Maxwell’s equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 157(2) :527–541, 1991.
- [22] R. Dautray and J-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1985.
- [23] L. Després, B. Imbert-Gérard and R. Weder. Hybrid resonance of Maxwell’s equations in slab geometry. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 101(5) :623–659, 2014.
- [24] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses Université Laval, 1981.
- [25] S. C. Eisenstat, H. C. Elman, and M. H. Schultz. Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(2) :345–357, 1983.
- [26] A. El Maliki. *Résolution de problèmes aux limites à l’aide de méthodes itératives hiérarchiques à préconditionneur variable*. PhD thesis, Université Laval, 2007.
- [27] H. Elman and D. Silvester. Fast nonsymmetric iterations and preconditioning for Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17(1) :33–46, 1996.

- [28] A. Ern and J-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159. Springer Science & Business Media, 2013.
- [29] M. Fortin. An analysis of the convergence of mixed finite element methods. *RAIRO. Analyse numérique*, 11(4) :341–354, 1977.
- [30] M. Fortin and F. Brezzi. *Mixed and hybrid finite element methods*. New York : Springer-Verlag, 1991.
- [31] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [32] V. Girault and P-A. Raviart. An analysis of a mixed finite element method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, 33(3) :235–271, 1979.
- [33] V. Girault and P-A. Raviart. Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms. *STIA*, 87 :52227, 1986.
- [34] V. Girault and P-A. Raviart. *Finite finite element method for the Navier-Stokes equations, Theory and algorithms*. Springer, 1986.
- [35] G. Golub and Ch. F. Van Loan. *Matrix computations*. Baltimore, MD : The Johns Hopkins Univ. Press, 1996.
- [36] T. Hattori. *Décomposition de domaine pour la simulation Full-Wave dans un plasma froid*. PhD thesis, Université de Lorraine, 2014.
- [37] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators I : Distribution theory and Fourier analysis*. Springer, 2015.
- [38] E. Jamelot. *Résolution des équations de Maxwell avec des éléments finis de Galerkin discontinus*. PhD thesis, Paris 6, 2005.
- [39] J. Jensen, Ludwig W-V., et al. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta mathematica*, 30 :175–193, 1906.
- [40] L.D. Landau. On the vibrations of the electronic plasma. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 10 :25, 1946.
- [41] J-D Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the physical society. Section B*, 70(1) :6, 1957.
- [42] X. Lituadon. *Etude théorique et expérimentale du couplage de l'onde hybride dans Tore-Supra et jet au moyen d'antennes à multijonctions*. PhD thesis, Aix-Marseille 1, 1990.
- [43] S. Nicaise. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus : [2e cycle, écoles d'ingénieurs]*. Dunod, 2000.
- [44] M. A. Olshanskii and E-E. Tyrtyshnikov. *Iterative methods for linear systems : theory and applications*. SIAM, 2014.
- [45] Y. Peysson, R. Arslanbekov, V. Basiuk, J. Carrasco, X. Lituadon, D. Moreau, and J. Bizarro. Magnetic ripple and the modeling of lower hybrid current drive in tokamaks. *Physics of Plasma*, 3, 1996.

- [46] Y. Peysson, J.R. Roche, P.J. Bertrand, H. Chatenet, C. Kirsch, A. Mokrani, and S. Labrunie. Mixed augmented formulation (MAVF) for lower hybrid full-wave calculations. *RF : The 18th Topical Conference on Radio Frequency Power in Plasmas*, pages 633–636, 2009.
- [47] Y. Peysson, E. Sebélin, X. Lituadon, D. Moreau, J.C. Miellou, M.M. Schoucri, and Schkarofsky I.P. Full wave modelling of lower hybrid current drive in tokamaks. *Physics of Plasma*, 38(8) :939–944, 1998.
- [48] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [49] P.-A. Raviart. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris New York [etc.], 1983.
- [50] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Philadelphia, PA : SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [51] Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3) :856–869, 1986.
- [52] E. Sebelin. *Développement des méthodes numériques pour la résolution de la propagation et de l'absorption de l'onde hybride dans les tokamaks*. PhD thesis, Besançon, 1997.
- [53] S. Shiraiwa, O. Meneghini, R. Parker, P. Bonoli, M. Garrett, M.C. Kaufman, J. C. Wright, and S. Wukitch. Plasma wave simulation based on a versatile finite element method solver. *Physics of Plasma*, 17, 2010.
- [54] P. Silvester. Symmetric quadrature formulae for simplexes. *Mathematics of computation : a journal devoted to advances in numerical analysis, the application of computational methods, mathematical tables, high-speed calculators and other aids to computation*, 24(109) :95–100, 1970-01.
- [55] T.H. Stix. *Waves in plasmas*. Springer Science & Business Media, 1992.
- [56] C. Taylor and P. Hood. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique. *Computers & Fluids*, 1(1) :73–100, 1973.
- [57] R. Verfürth. Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. *RAIRO. Analyse numérique*, 18(2) :175–182, 1984.
- [58] R.L. Watterson, Y. Takase, P.T. Bonoli, M. Porkolab, R. E Slusher, and M.C.. Surko. Spectrum and propagation of lower hybrid waves in a tokamak plasma. *Physics of Fluids*, 28, 1985.
- [59] Ch. Weber and P. Werner. A local compactness theorem for Maxwell's equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2(1) :12–25, 1980.
- [60] J.C. Wright, P.T. Bonoli, M. Brambilla, F. Meo, E. D'Azevedo, D.B. Batchelor, E.F. Jaeger, L.A. Berry, C.K. Phillips, and A. Pletzer. Full wave simulations of fast wave mode conversion and lower hybrid wave propagation in tokamaks. *Physics of Plasmas*, 11(5) :2473–2479, 2004.

Résumé

L'objet de ce mémoire de thèse est d'étudier une méthode de simulation numérique d'un modèle dit « Full wave » de la propagation dans un tokamak d'une onde électromagnétique injectée par un ensemble d'antennes installées sur le bord de l'enceinte de confinement. Une méthode de simulation par éléments finis de Lagrange est déployée.

Dans le premier chapitre est introduit le modèle physique considéré pour décrire la propagation d'une onde électrostatique d'une fréquence proche de la résonance hybride dans un plasma dit froid et confiné par un champ magnétique à l'intérieur d'un tokamak. La propagation des ondes électromagnétiques est modélisée par les équations de Maxwell. Une approximation de la solution harmonique en temps est considérée. Dans le chapitre deux sont rappelées les formulations variationnelles mixtes et mixtes augmentées déjà étudiées précédemment. Ces formulations nous permettent de chercher des solutions dans $(H^1(\Omega))^3$ et donc une approximation en éléments finis conformes dans cet espace. Le chapitre trois est dédié à la présentation de la discrétisation des équations du modèle en trois dimensions d'espace. Dans le chapitre quatre il est démontré le caractère bien posé du système d'équations discret lorsqu'on considère une approximation de type Taylor-Hood $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$. Un résultat d'existence et unicité de la solution dans le cas d'un « tore » polyédrique est présenté. Le chapitre 5 est dédié aux simulations numériques. En premier on explicite les termes du tenseur diélectrique $\underline{\mathbf{K}}$ ainsi que ses dérivées, qui sont nécessaires au montage de la matrice de raideur du système. Les premières simulations concernent le cas où la densité des électrons et des ions est constante. On présente ensuite des résultats dans le cas où les densités ont un profil parabolique. Le cas où le vecteur d'onde est une fonction de la distance au centre du tokamak est également considéré.

Mots-Clés : Maxwell, Full-wave, électromagnétisme, formulation mixte, formulation augmentée, éléments finis, Taylor-Hood, condition inf.-sup.

Abstract

The object of this thesis is to study a numerical simulation method of a so-called « Full wave » model of the propagation in a tokamak of an electromagnetic wave injected by a set of antennas installed in the boundary of the containment chamber. A Lagrange finite element approximation method is deployed.

In the first chapter, we introduced the physical model considered to describe the propagation of an electrostatic wave of a frequency close to hybrid resonance in a so-called cold plasma, plasma confined by a magnetic field inside a tokamak. The propagation of electromagnetic waves is modeled by Maxwell's equations. This work contemplates an approximation of the time-harmonic solution. In the second chapter, we recall the mixed and mixed variational formulations already studied in the past. These formulations allow us to find solutions in $(H^1(\Omega))^3$ and therefore a conformal finite element approximation in this space. Chapter three is dedicated to the presentation of the discretization of the model's equations in three dimensions of space. In chapter four it is demonstrated the well-posed character of the discrete system of equations when one considers a Taylor-Hood type approximation $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$. In this section we proved a result about the existence and the uniqueness of the solution in the case of a polyhedral « torus ». Chapter 5 is dedicated to numerical simulations. First are introduced the terms of the dielectric tensor $\underline{\mathbf{K}}$ and its derivatives, needed to mount the stiffness matrix of the system. The first simulations concern the case where the density of electrons and ions is constant. Then results are presented in the case where densities have a parabolic profile. It is also considered the case where the wave vector is a function of the distance at the center of the tokamak.

Keywords : Maxwell, Full-wave, electromagnetic waves, mixed formulation, augmented formulation, finite elements, Taylor-Hood, Inf.-sup. condition