



**HAL**  
open science

# Dynamique et stabilisation d'un plasma magnétique froid

Ibtissem Zaafrani

► **To cite this version:**

Ibtissem Zaafrani. Dynamique et stabilisation d'un plasma magnétique froid. Mathématiques [math]. Université de Lorraine; Université de Sousse (Tunisie), 2021. Français. NNT : 2021LORR0312 . tel-03620093

**HAL Id: tel-03620093**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03620093>**

Submitted on 25 Mar 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE



# Thèse

présentée en vue d'obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université de Lorraine et de l'Université de Sousse**

Spécialité : «Mathématiques»

par

**Ibtissem ZAAFRANI**

---

## Dynamique et stabilisation d'un plasma magnétique froid

---

Thèse soutenue publiquement le 17 décembre 2021 devant le jury composé de :

Ingrid Lacroix-Violet	Présidente	Université de Lorraine
Amel Atallah	Rapporteuse	Université de Tunis El Manar
Hélène Barucq	Rapporteuse	INRIA Bordeaux Sud-Ouest
Jamel Ferchichi	Examineur	Université de Sousse
Moez Khenissi	Directeur	Université de Sousse
Simon Labrunie	Directeur	Université de Lorraine





# Remerciements

Je remercie en premier lieu « Campus France » pour le financement des douze mois de la bourse d'excellence Eiffel que j'ai obtenue.

Je remercie les directeurs de thèse Moez Khenissi et Simon Labrunie de m'avoir laissée indépendante durant cette période. Mais, il faut noter que plusieurs fois il y a eu un manque de liberté alors que, la liberté est une condition essentielle pour moi. Enfin, la thèse est terminée et la recherche commence !

Je tiens à remercier Amel Atallah et Hélène Barucq d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je remercie aussi Ingrid Lacroix-Violet et Jamel Ferchichi qui ont accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie Kim Dang Phung de m'avoir invitée à une conférence qui s'est tenue à Domaine de Chalès. Je le remercie pour les échanges et ses conseils. Je remercie également tous les participants de cette conférence pour leur sympathie. En particulier, Emmanuel Humbert pour son humanisme et Emmanuel Trélat pour ses conseils et son accessibilité.

Je remercie également Rémi Buffe et Julie Valein pour nos échanges.

Je remercie infiniment Anne de Roton, membre du comité de suivi de ma thèse. Merci pour ton honnêteté. Merci pour ta disponibilité, ton écoute et tes conseils dans les moments de doute, pour ta grande humanité tout simplement. J'ai grandement apprécié nos discussions, chacune d'entre elles était pour moi un grand bol d'air. Il ne faut pas que j'oublie de remercier une autre personne qui a aussi joué un rôle essentiel, c'est Nadia Marc. Je l'ai rencontré en début de ma troisième année de thèse. Elle a été d'un très grand soutien pour moi ; merci pour ton accompagnement. Je suis très heureuse de vous avoir rencontré. Je remercie également Khalid Koufany pour sa gentillesse et son amicalité.

Je remercie l'administration du laboratoire IECL, tout particulièrement Valérie Daubenfeld, Élodie Cunat, Paola Schneider et Cécile Jérôme, et Didier Gemmerle surtout pour les conseils prodigués le jour précédent ma soutenance. De l'école doctorale IAEM, j'aimerais remercier Sabrina Ferry pour sa positivité et son soutien. Je remercie également l'administration de l'ESSTHS et du laboratoire LAMMDA, en particulier mes chères amies Hela Hamed et Wafa ben Mahmoud. Et enfin, l'Université de Sousse, je pense à Bahia Hizem ; merci pour ton sourire et ta gentillesse.

Je remercie le personnel de ma résidence à Nancy ; une pensée particulière pour Nadia Florentin pour son aide administrative sans limite, pour son sourire, pour nos discussions, pour son immense gentillesse et enfin pour son amitié.

Je remercie bien évidemment tous les doctorants que j'ai rencontré durant ma thèse. Je commence par mes collègues des divers bureaux : merci à Simon J., Rodolphe, Noura, Marco et Thomas pour votre bonne humeur et votre bienveillance. Un immense merci à Hassan pour sa disponibilité et son soutien. Chacun de vous est doté de belles qualités humaines. Et enfin, je remercie mes derniers co-bureau Blaise et Pierrick avec qui je me suis très rapidement bien entendue. Je souhaite bien du courage à tous les deux, pour la réussite de leur thèse. Je tiens à remercier tout particulièrement Pierre-Adrien pour les nombreux moments agréables passés en ta compagnie lors des pauses et parfois rejoint par Rodolphe. Je n'oublie pas de te remercier pour le « tore » ! Merci à Asma, Radhia et Valentin pour leur écoute et leur soutien. Merci à Marwa pour nos pauses et discussions ! De manière générale, je remercie Dimitry, Vincent, Maha, Nasab, Marwane, Iness, Fatma B., Youssef Sa., Pierre, Hussein, Youssef Se., Fatma A., Basma, Ilhem...

Une pensée particulière pour Amel, mon amie depuis la L3. Merci pour ta présence en cas de besoin. J'espère que notre amitié durera...

Je remercie toutes les personnes présentes à ma soutenance de thèse, certains parmi eux ont été remercié précédemment. Je rajoute : EL Haj Laamri, Karim Ramdani, Jean-Rodolphe Roche et Rihab Daadaa.

Je m'excuse auprès des personnes que j'ai oubliées.

Avant de finir, je tiens à remercier les personnes les plus importantes : les membres de ma famille. Mes parents, à qui je dois tout. Merci pour votre immense soutien qui a beaucoup compter pour moi et vos encouragements. Je pense à mes sœurs, en particulier à la plus petite et à mon frère.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Contexte physique et modélisation</b>	<b>11</b>
1.1 Réactions de fusion nucléaires . . . . .	11
1.2 Définition d'un plasma de fusion . . . . .	12
1.3 Confinement magnétique . . . . .	13
1.4 Réacteur : Tokamak . . . . .	14
1.5 Champ magnétique dans un tokamak . . . . .	15
1.6 Chauffage du plasma et génération du courant . . . . .	16
1.6.1 Chauffage du plasma . . . . .	16
1.6.2 Génération du courant . . . . .	18
1.7 Propagation et absorption de l'onde électromagnétique . . . . .	18
1.8 Modélisation . . . . .	19
<b>2 Notations et préliminaires</b>	<b>25</b>
2.1 Espaces fonctionnels . . . . .	25
2.1.1 Espaces des champs scalaires et vectoriels . . . . .	26
2.1.2 Espaces de frontière, traces et formules de Green . . . . .	27
2.1.3 Régularité en temps . . . . .	30
2.2 Quelques espaces de noyaux des opérateurs rotationnel et divergence	30
2.3 Problèmes de type Helmholtz . . . . .	38
2.4 Théorie des semi-groupes et stabilité . . . . .	40
2.4.1 Semi-groupes, existence et unicité de la solution . . . . .	41
2.4.2 Stabilité des semi-groupes . . . . .	43
<b>3 Caractère bien posé du modèle</b>	<b>47</b>
3.1 Mise en place du problème . . . . .	47
3.2 Cas du conducteur parfait . . . . .	50
3.3 Cas de la condition de Silver–Müller . . . . .	53
3.3.1 Condition aux limites homogène (absorbante) . . . . .	54
3.3.2 Condition aux limites générale (non homogène) . . . . .	57
3.4 À propos des équations de contrainte . . . . .	59



3.5	Caractère bien posé du modèle avec condition de Silver–Müller sur tout le bord . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Étude asymptotique</b>	<b>63</b>
	Introduction . . . . .	63
4.1	Géométrie et notations . . . . .	66
4.2	Quelques résultats d’analyse fonctionnelle . . . . .	67
4.2.1	Décompositions de Hodge et espaces liés à la topologie . . . . .	67
4.2.2	Un résultat de compacité . . . . .	70
4.3	Propriétés spectrales de certaines matrices utiles . . . . .	74
4.4	Stabilité forte . . . . .	78
4.4.1	Cas du conducteur parfait . . . . .	78
4.4.2	Cas de la condition de Silver–Müller homogène . . . . .	86
4.5	Stabilité forte du modèle avec condition de Silver–Müller sur tout le bord . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Résultats de stabilisation</b>	<b>93</b>
	Introduction . . . . .	93
5.1	Stabilité polynomiale . . . . .	96
5.1.1	Cas du conducteur parfait . . . . .	96
5.1.2	Cas de la condition de Silver–Müller . . . . .	104
5.2	Résultats de stabilité exponentielle . . . . .	107
5.2.1	Stabilité non exponentielle dans le cas du conducteur parfait	107
5.2.2	Stabilité exponentielle conditionnelle dans le cas de la condition Silver–Müller . . . . .	108
5.3	Convergence vers le régime harmonique . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Stabilité du modèle dans le cas d’un problème d’interface vide-plasma</b>	<b>115</b>
	Introduction . . . . .	115
6.1	Caractère bien posé du modèle . . . . .	117
6.2	Stabilité forte . . . . .	119
	<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>

# Introduction

La fusion nucléaire, en vue de produire de l'électricité, se présente aujourd'hui comme une option majeure dans les recherches sur les nouvelles sources d'énergie. Reposant sur la fusion de deux noyaux légers, elle serait un candidat de premier choix pour fournir de grandes quantités d'énergie avec très peu de combustible. Depuis les soixante dernières années, de nombreux dispositifs visant à produire des réactions de fusion ont vu le jour. Le plus prometteur d'entre eux aujourd'hui est le tokamak, réacteur à confinement magnétique [78]. Dans cette machine, une des composantes du champ magnétique qui confine le milieu, gaz totalement ionisé appelé plasma, nécessite qu'un courant soit maintenu dans le plasma. Aussi, afin d'obtenir des réactions de fusion nucléaire, il est nécessaire de chauffer le plasma à haute température. Parmi les différentes méthodes connues permettant à la fois la génération du courant et le chauffage, l'injection d'ondes électromagnétiques depuis l'extérieur du plasma s'est révélée particulièrement efficace. À ce titre, ces ondes sont un élément primordial du concept de tokamak. En outre, les ondes électromagnétiques, selon leur gamme de fréquence, peuvent être utilisées en technologie de tokamak dans des autres procédés par exemple, pour stabiliser ou diagnostiquer le plasma, modifier ses propriétés, ou encore permettre de contrôler le profil de densité de courant.

L'interaction des ondes électromagnétiques avec le plasma est un sujet intéressant en physique des plasmas [43, 53, 76]. La théorie de la propagation des ondes dans les plasmas magnétisés a été développée par T. H. Stix depuis la fin des années 1950 et son travail a été résumé dans [71, 72]. Des travaux supplémentaires sont également disponibles, par exemple ceux de M. Brambilla [8] et D. G. Swanson [74]. En plus les plasmas de fusion nucléaire, ce phénomène couvre de nombreux domaines tels que l'astrophysique, la physique spatiale etc. Les ondes électromagnétiques sont souvent utilisées pour déterminer les caractéristiques du plasma. Plusieurs phénomènes surviennent lors des interactions des ondes et plasma, tels que l'absorption, la réfraction, la réflexion, la diffusion, la conversion de mode etc. [72, 73, 74]. Tous ces mécanismes dépendent du plasma et des paramètres magnétiques, en particulier la densité et la collisionnalité du plasma, l'intensité et la direction du champ magnétique, ainsi que la géométrie et les conditions aux limites du domaine. Des efforts considérables ont été consacrés à la com-

préhension et à la modélisation des mécanismes qui régissent la propagation et l'absorption des ondes électromagnétiques dans un plasma [7, 9, 50]. Du point de vue mathématique, les équations décrivant le couplage des ondes et plasma sont fortement non linéaires, complexes et ardues à résoudre. Même dans un cadre linéaires, elles sont généralement très anisotropes et, dans de nombreux contextes pratiques, également très hétérogènes. L'éventail ahurissant de phénomènes et de paramètres impliqués dans cette modélisation nécessite de dériver des modèles simplifiés adaptés au phénomène à l'étude, et à l'objectif théorique ou calculatoire de cette étude.

Il existe différents modèles de plasma magnétique [44]. Chacun d'eux comporte une description de la dynamique des particules et une description de l'évolution du champ électromagnétique. Dans notre travail, nous utiliserons un modèle fluide pour décrire le mouvement des particules. Nous nous intéressons au cas du plasma froid qui est obtenu en négligeant les effets de la pression. Le champ électromagnétique est décrit par les équations de Maxwell. Le couplage entre ces deux systèmes d'équations décrit l'interaction entre l'onde et les particules et il est appelé système d'Euler–Maxwell. L'interdépendance entre le champ électromagnétique total présent dans le milieu et les particules de plasma est schématisée sur la figure 1. Nous nous concentrerons dans ce sujet sur l'approximation linéaire. Une première étude de ce modèle linéaire en régime harmonique, axée sur la propagation et l'absorption a été réalisée dans la thèse de T. Hattori [46]. Le régime harmonique correspond à une dépendance temporelle de la forme  $e^{-i\omega t}$ , où  $\omega > 0$  est une fréquence donnée de l'onde. Il s'agit de l'étude de l'équation

$$\mathbf{rot rot} \mathbf{E} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbb{K} \mathbf{E} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

avec  $c$  est la vitesse de la lumière et  $\mathbf{E}$  l'amplitude du champ électrique harmonique. La matrice  $\mathbb{K}$  est le tenseur de réponse plasmatique. Il varie en espace et dépend du champ magnétique statique imposé pour confiner le plasma. L'équation ci-dessus est obtenue en combinant les équations de Maxwell avec la dynamique des particules. Dans cette étude, l'absorption est due aux collisions entre particules, qui agissent comme des frottements. Diverses formulations variationnelles possibles ont été discutées dans [18] pour établir le caractère bien posé du modèle. Le cas le plus simple a été discuté dans la thèse de E. Sébelin [68] et la référence [69]. Cependant, à notre connaissance, ce modèle est mal posé en l'absence d'absorption dans l'espace des fonctions de carré intégrable. Ce problème a suscité un intérêt considérable. Dans [35], B. Després, L. M. Imbert-Gérard et R. Weder ont proposé une analyse mathématique de ce modèle simplifié en dimension un, où  $\mathbb{K}$  est le tenseur diélectrique, et ont construit une solution singulière. Cette solution est la somme d'une valeur principale et d'une masse de Dirac à l'origine et enfin d'une fonction de carré intégrable. L'approche qu'ils ont utilisée suit le principe d'absorption limite qui consiste à ajouter un paramètre de régularisation sur la

diagonale du tenseur et le faire tendre vers zéro dans la solution des équations régularisées. Une conséquence essentielle de cette analyse est que le chauffage ne s'annule pas lorsque l'absorption tend vers zéro : ceci correspond à une dissipation d'énergie non nulle. Par la suite, plusieurs formulations pour caractériser cette solution ont été proposées par M. Campos Pinto et B. Desprès dans [29]. Elles fournissent un cadre pratique pour les approximations numériques. Les auteurs donnent une généralisation en dimension deux. Une autre caractérisation des solutions limites, cette fois-ci à l'aide des formulations mixtes, a été décrite par ces deux derniers auteurs en collaboration avec A. Nicolopoulos dans l'article [30]. Pour plus de résultats sur ce sujet, le lecteur intéressé peut se référer à [36] pour des résultats mathématiques, et à [31] pour une étude numérique. Néanmoins, avec tous ces efforts, il reste à traiter le problème d'unicité de la solution et, de plus, il faut noter que cette solution trouvée ne correspond pas à la solution physique que nous recherchons. C'est par ce biais que l'étude du système Euler–Maxwell instationnaire a été abordée dans cette thèse. L'objectif principal consiste d'abord à étudier le caractère bien posé du modèle dans les cas avec frottement et sans frottement, puis d'étudier la limite de l'énergie par rapport à la variable temps lorsque le système est excité par une source harmonique. Cela revient à utiliser la théorie de stabilité pour un problème d'évolution.

Dans cette thèse, nous considérons un modèle Euler–Maxwell linéarisé pour la propagation et l'absorption des ondes électromagnétiques dans un plasma magnétisé. Nous nous placerons dans le cas d'un modèle instationnaire, ce qui constitue la contrepartie temporelle des travaux [46, 18]. Comme le couplage entre les ondes et le plasma se fait dans un espace confiné, cela conduit à travailler en domaine borné de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, ce domaine doit comporter le tore, c'est la géométrie de la chambre d'un tokamak, comme un cas particulier pour garantir le cas physique. À la frontière de celui-ci, des conditions doivent alors être imposées pour modéliser l'injection d'ondes dans le milieu. En fait, les ondes sont injectées par des antennes situées sur la paroi de la chambre. Nous nous intéressons à diverses conditions aux limites. De façon générale, les questions que nous nous posons sont les suivantes. Le système d'Euler–Maxwell linéarisé est-il bien posé dans chaque cas des conditions aux limites ? Autrement dit, possède-il une unique solution dépendant continûment de la donnée ? Si oui, peut-on déterminer le comportement en temps long de la solution dans chaque cas ? Si oui, peut-on déterminer le taux de décroissance, exponentielle et polynomiale, de l'énergie ? Si tel est le cas, peut-on trouver le comportement de la solution dans le cas où une condition aux limites non absorbante est imposée sur la frontière et si les sources sont choisies harmoniques en temps ? Ces questions sont les grands axes de ce travail de thèse.

L'étude de la stabilité du système Euler–Maxwell est liée à celle du système de Maxwell avec les mêmes conditions aux limites puisqu'elles dépendent seulement du champ électromagnétique. Le caractère bien posé du système de Maxwell

couplé avec la condition aux limites de Silver–Müller homogène imposée sur une partie de la frontière et l’étude du comportement asymptotique en temps long de la solution a été établie avec la thèse de H. Barucq [11] en 1993. Par la suite, on trouve le premier résultat sur la stabilité exponentielle de la solution dans l’article de V. Komornik [48]. Dans ce travail, le domaine d’étude est strictement étoilé et la condition de Silver–Müller homogène est imposée sur toute la frontière. La preuve est basée sur la méthode des multiplicateurs. C’est avec la thèse de K. Phung [62] que ce travail a été étendu à une classe plus large de domaines et est résumé dans le papier [61], en utilisant une approche basée sur l’analyse microlocale de l’équation d’onde qui nécessite une condition de contrôle géométrique sur la partie absorbante de la frontière. Notons que dans tous ces travaux sur la stabilisation frontière, le champ électromagnétique est supposé à divergence nulle ce qui facilite le travail et ramène le système à une équation d’onde. De plus, K. Phung a étudié dans sa thèse la stabilité exponentielle du système de Maxwell avec loi d’Ohm, incluant une conductivité et situé dans un domaine de frontière parfaitement conductrice. Dans [40], M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise apportent leur contribution en montrant que la méthode des multiplicateurs peut être appliquée dans des domaines plus sophistiqués que ceux strictement en forme d’étoile. D’autre part, la stabilité du modèle Euler–Maxwell a été étudiée par divers auteurs dans des cas très simplifiés [57, 58, 65]; ils n’incluaient pas l’anisotropie et l’inhomogénéité, et ils considéraient généralement des topologies ou des conditions aux limites plus simples que dans notre cas, et de plus la divergence de tous les variables est nulle dans les deux première références. La méthode utilisée dans [58] est basée sur une approche dans le domaine fréquentiel. Dans notre cas, nous allons essayer de garder notre modèle le plus général possible, en ne supposant aucune homogénéité dans les propriétés du plasma, ni dans le champ magnétique extérieur, ni aucune condition topologique ou géométrique forte sur le domaine. Nous ne supposons pas que le champ électrique ou la densité de courant sont à divergence nulle.

La méthode utilisée pour étudier la stabilité est celle du domaine fréquentiel [3, 55, 47, 60, 23]. On va voir qu’il n’est plus possible d’appliquer les méthodes de [61] et [48] à notre cas. Les outils mathématiques liés à cette méthode sont la théorie des semi-groupes et les spectres d’opérateurs. Malheureusement, la résolvante de l’opérateur d’évolution associé au modèle n’est pas compacte et l’absorption interne agit seulement sur les variables fluides. Cela nous demande de mettre en place de nombreux résultats techniques liés à l’inhomogénéité, l’anisotropie et la topologie. L’absorption d’énergie est due aux collisions (amortissement interne), et à la condition de Silver–Müller homogène, amortissement sur la frontière. Nous verrons que le modèle Euler–Maxwell instationnaire est bien posé même sans collisions. En revanche, le caractère bien posé dans le cas harmonique en temps avec collision et condition non homogène de Silver–Müller repose sur l’absorption par les collisions. La solution obtenue est une limite de la solution du modèle

instationnaire. D'autre part, la décroissance exponentielle de l'énergie dépend fortement de la forme globale du domaine et de la partie absorbante de la frontière.

## **Plan de la thèse**

Cette thèse comporte six chapitres qui s'organisent comme suit.

**Chapitre 1** : ce premier chapitre est dédié à une description générale sur la fusion thermonucléaire et le principe de fonctionnement d'un réacteur. Je présente après une dérivation rigoureuse du modèle.

**Chapitre 2** : dans ce chapitre, j'effectue quelques rappels généraux des outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension des développements. Je rappelle quelques propriétés des espaces fonctionnelles utiles dans la suite, le problème de type Helmholtz avec contraintes et les techniques permettant sa résolution. Ensuite, j'introduis quelques concepts de base sur la théorie des semi-groupes. Je finis par donner les différentes méthodes utilisées pour prouver la stabilité du modèle.

**Chapitre 3** : ce chapitre est consacré à la preuve de caractère bien posé du modèle, avec trois types de conditions aux limites : une condition parfaitement conductrice sur toute la frontière, condition de Silver–Müller homogène ou non sur une partie de celle-ci. Nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres physiques pour que ces problèmes admettent une unique solution forte en utilisant la théorie des semi-groupes. Je travaille dans un cadre fonctionnel général puis je récupère les contraintes sur le champ électromagnétique.

**Chapitre 4** : ce chapitre se concentre sur l'étude du comportement asymptotique en temps long de la solution du modèle dans deux cas : conducteur parfait et Silver–Müller homogène. Avant tout, je prouve quelques résultats plus avancés de l'analyse fonctionnelle, dont nous aurons besoin dans la suite. Puis, j'étudie les propriétés spectrales de diverses matrices décrivant l'anisotropie et d'autres propriétés du plasma, qui seront essentielles dans les preuves de stabilité. Je montre que l'énergie décroît vers zéro sur l'orthogonal des solutions stationnaires du problème, sous certaines hypothèses physiquement raisonnables. Ces solutions stationnaires sont liées aux propriétés de connexité ou de topologie du domaine du travail et forment un ensemble de dimension finie si on travaille avec un espace contenant les contraintes du champ magnétique. Je démontre après que la solution peut converger vers un état d'équilibre non nul dans un espace plus grand. Ce état est caractérisé en fonction des données initiales : il correspond à la projection des données sur l'ensemble des solutions stationnaires. Enfin, je donne une conséquence sur le comportement de la solution en temps long dans le cas où la

condition de Silver–Müller est imposée sur toute la frontière.

**Chapitre 5 :** je détermine ici un taux de décroissance de l'énergie du modèle. J'établis un résultat de stabilité polynomiale pour les deux types de conditions aux limites. Je montre ensuite un résultat de décroissance exponentielle conditionnel dans le cas de la condition de Silver–Müller homogène. Ce résultat dépend de la géométrie du domaine. Cependant, la solution ne décroît pas exponentiellement dans le cas du conducteur parfait. Par la suite, nous concluons avec un résultat de convergence vers le régime harmonique lorsque les données de la condition de Silver–Müller sont harmoniques en temps.

**Chapitre 6 :** nous donnons dans ce chapitre une extension des résultats obtenus à un problème d'interface vide-plasma. L'équation d'Euler est vérifiée dans un sous domaine, ce qui correspond au fait que le bord du tokamak est pratiquement vide de plasma. D'un point de vue mathématique, cette modélisation est légèrement plus compliquée. Nous prouvons la bonne position du modèle et nous étudions le comportement asymptotique de la solution.

## Système couplé champs/particules

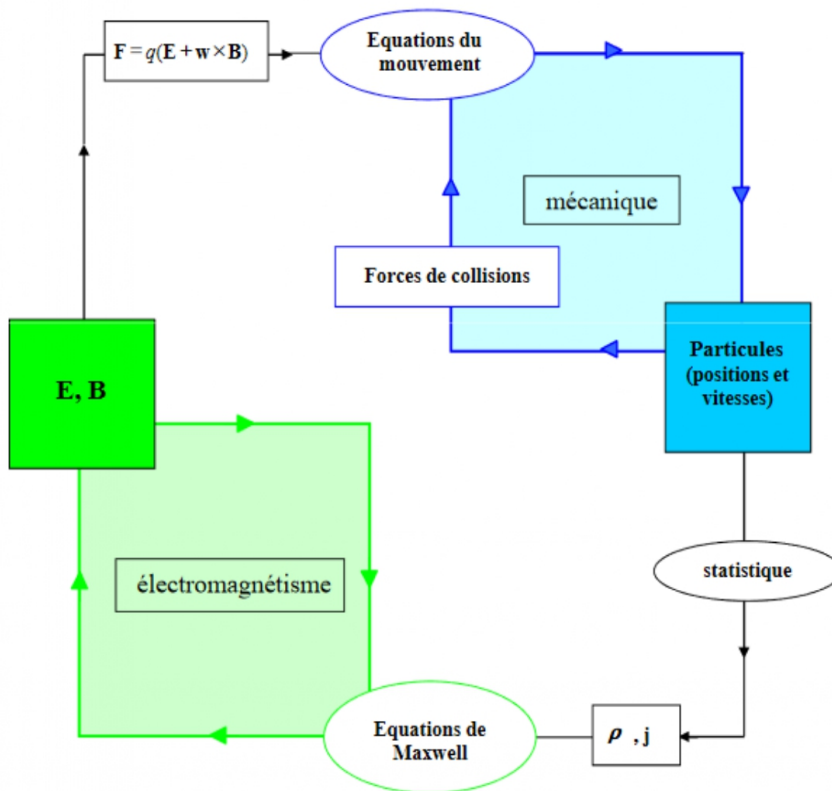


FIGURE 1: Interactions et couplage entre le champ électromagnétique et les particules dans le plasma.





# Chapitre 1

## Contexte physique et modélisation

L'objectif de ce chapitre est de fournir les bases essentielles pour la compréhension physique du modèle étudié dans ce mémoire. Pour cela, on va présenter, dans un premier temps, les principes de la fusion nucléaire et des généralités sur le fonctionnement du réacteur tokamak. On donnera une description des étapes du confinement magnétique et des méthodes du chauffage du plasma. Ensuite, on étudie la propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma et on présente une dérivation rigoureuse du modèle et les conditions aux limites qui modélisent l'injection d'ondes dans le milieu. Pour une discussion plus complète des concepts physiques relatifs à la fusion thermonucléaire par voie magnétique, les réacteurs et l'interaction entre ondes et plasma, le lecteur pourra se reporter aux références [1, 78, 27, 37, 50].

### 1.1 Réactions de fusion nucléaires

La production d'énergie par la fusion nucléaire s'appuie sur le principe d'équivalence entre masse et énergie qu'a énoncé Einstein. Lorsqu'on fusionne deux noyaux atomiques convenablement choisis, la masse des produits de la réaction est inférieure à la somme des masses de ces noyaux réactifs ; cette différence de masse est libérée sous forme d'énergie [37].

Cette réaction exoénergétique se fait entre deux noyaux légers. Plusieurs réactions de fusion sont envisageables [10]. La plus avantageuse en terme de section efficace, de rendement et de disponibilité des combustibles est la réaction impliquant le deutérium et le tritium (D-T). La fusion de ces deux isotopes de l'hydrogène produit un noyau d'hélium, appelé aussi particule  $\alpha$ , et un neutron libérant tous deux 17.59 MeV d'énergie portée sous forme cinétique.

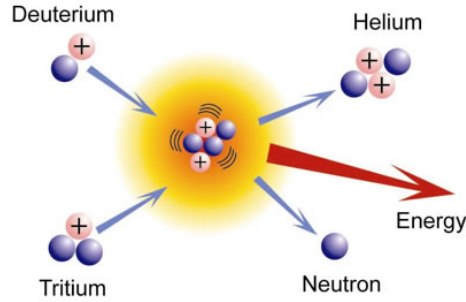


FIGURE 1.1: Réaction de fusion Deutérium-Tritium.

Le deutérium est largement présent sur Terre. On l’extract du l’eau du mer ( $33 \text{ g/m}^3$ ) à un coût relativement modeste [78]. Cependant, le tritium n’existe pas à l’état naturel, et il a une demi-vie de 12,3 ans. Il sera produit en bombardant du lithium par les neutrons issus des réactions de fusion dans des « couvertures tritigènes » qui entourent la chambre de réaction. Le lithium est présent en abondance dans la croûte terrestre et dans les océans. De très faibles quantités de deutérium et de tritium suffisent à alimenter la réaction de fusion, et la quantité d’énergie produite par la réaction est d’environ quatre millions de fois supérieure à celle que génèrent des réactions chimiques telles que la combustion du charbon, du pétrole ou du gaz naturel. On voit donc l’importance de cette réaction.

## 1.2 Définition d’un plasma de fusion

La réalisation de la fusion nucléaire D-T (figure 1.1) s’exerce que lorsque il y a une très courte distance (de l’ordre de  $10^{-15} \text{ m}$ ) entre les noyaux atomiques. Le problème est que les noyaux sont chargés positivement, ils ont donc tendance à se repousser mutuellement. Dès lors, il est nécessaire de leur communiquer une énergie suffisante afin de permettre leur rapprochement malgré leurs charges identiques. Cette énergie nécessaire ne peut être atteinte que si le milieu est porté à une température de l’ordre d’une centaine de millions de degrés, soit plus de 6 fois la température au cœur du soleil. La fusion ainsi obtenue est appelée fusion thermonucléaire. Dans ces conditions, les électrons se sont détachés complètement du noyau. Ce mélange constitue un gaz ionisé appelé plasma, quatrième état de la matière, au sein duquel les réactions de fusion sont possibles. Le plasma constitue la majorité de l’univers, on le retrouve par exemple dans les étoiles et le soleil.

Pour que la réaction de fusion soit rentable énergiquement, c’est-à-dire que l’énergie libérée par les fusions soit supérieure à l’énergie fournie pour créer le plasma et assurer le fonctionnement du réacteur, le plasma devra vérifier la condition suivante [78]

$$n T \tau_E > 3 \times 10^{20} \text{ m}^{-3} \text{ keV s}$$

avec  $n$  la densité du plasma (nombre des particules par unité de volume),  $T$  sa température et  $\tau_E$  le temps de confinement c'est-à-dire le temps que met le plasma à se vider de son contenu énergétique si on coupe brutalement les sources qui l'alimentent. La relation ci-dessus traduit le fait que pour produire de l'énergie à partir des réactions de fusion, il est nécessaire de confiner efficacement un plasma très chaud et suffisamment dense pendant une durée  $\tau_E$  assez longue. Cette relation est connue sous le nom *critère de Lawson* [51]. Il s'agit donc de créer un régime de confinement de l'énergie qui satisfasse ce critère.

### 1.3 Confinement magnétique

Pour maintenir le plasma à des températures élevées afin de produire suffisamment d'énergie, il faut le confiner dans un volume limité. Un tel plasma serait très difficile à conserver dans une enceinte matérielle. En effet, devant de telles températures la paroi s'éroderait, introduisant des particules lourdes au sein du milieu ionisé, qui lui seraient très rapidement fatales [34]. D'autre part, même si un matériau pouvait être trouvé qui résiste aux énormes températures et pressions, il resterait encore le problème de refroidissement du plasma par la paroi qui peut le faire disparaître. C'est pour cela qu'il faut maintenir les particules du plasma à distance des objets matériels. Comme le plasma est constitué de particules chargées, on peut contrôler leur comportement en le soumettant à l'action d'un champ magnétique. En fait, une particule chargée décrit une trajectoire en hélice autour d'une ligne de champ magnétique sous l'effet de la force de Lorentz. La figure 1.2 illustre le mouvement des particules le long des lignes de champ droites dans un cylindre. Pour éviter les pertes aux extrémités, il suffirait de refermer les lignes du champ magnétique sur elles-mêmes afin de piéger les particules : on se trouve dans une structure de forme torique. C'est le principe de confinement magnétique [1, 78].

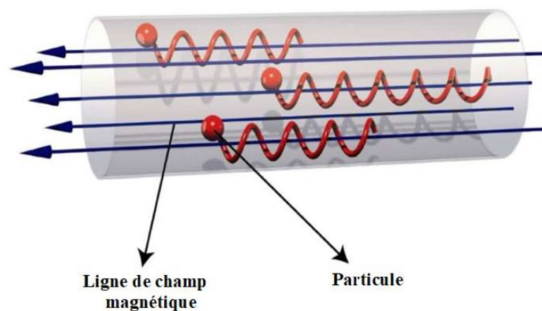


FIGURE 1.2: Particules chargées autour des lignes de champ.

Parmi les systèmes de confinement magnétique possibles du plasma, la configuration la plus performante est le tokamak.

## 1.4 Réacteur : Tokamak

Le tokamak est une machine expérimentale conçue pour démontrer la faisabilité scientifique et technique de l'énergie de fusion [38]. Il a été inventé au début des années 1950 par les physiciens Igor Tamm et Andreï Sakharov [75]. Le mot tokamak vient du russe « *toroidalnaïa kamera s magnitnymi katouchkami* » qui signifie chambre toroïdale à confinement magnétique. Comme son nom l'indique, c'est un tore dans lequel circule un plasma de fusion. Il s'agit d'une installation capable de produire les conditions nécessaires pour obtenir une énergie de fusion. Actuellement de nombreux tokamaks existent dans le monde, citons TFTR, JET, Tore Supra... Jusqu'à présent, ces machines sont destinées à la recherche pour répondre aux questions qui se posent encore quant aux choix technologiques et scientifiques à effectuer pour les futurs réacteurs, et pas encore à la production d'électricité (c'est-à-dire la quantité d'énergie produite par les réactions de fusion est inférieure à celle qu'on a dû fournir pour entretenir le plasma). Les résultats obtenus ont servi à l'élaboration du projet international ITER.

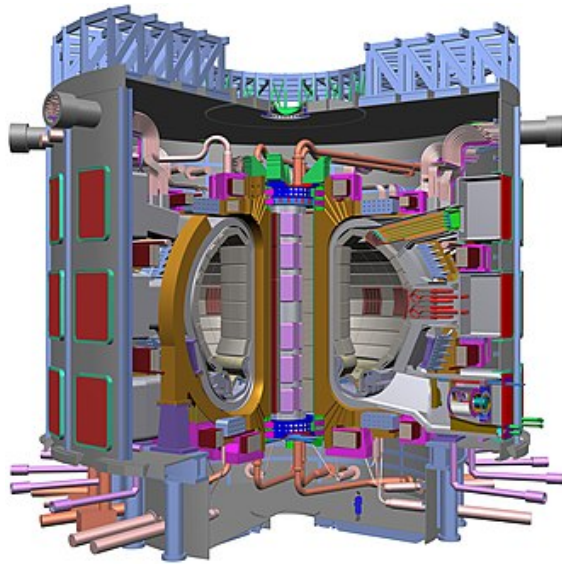


FIGURE 1.3: Schéma en coupe d'ITER.

ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) est le futur tokamak international en cours de construction sur le site de Cadarache en France. Il est le plus grand projet scientifique mondial actuel regroupant 35 pays. Après une dizaine d'années d'études, l'entrée en opération et la production de son premier plasma sont prévues pour 2025. Le but d'ITER est de démontrer la faisabilité de la production d'énergie via la fusion thermonucléaire et d'atteindre le critère de Lawson. Il devrait produire dix fois plus de puissance qu'il n'en aura fallu pour chauffer le plasma.

## 1.5 Champ magnétique dans un tokamak

Un tokamak est constitué principalement d'une chambre à vide, de bobines toroïdales, de bobines poloïdales et d'une bobine centrale (figure 1.4). La chambre à vide torique maintient les conditions de vide adéquates pour créer le plasma. Les bobines toroïdales créent un champ magnétique dans la direction du tore (figure 1.5 : bobines en rouge et lignes de champ figurées en bleu). Comme vu précédemment, les particules présentes dans le plasma sont contraintes à se déplacer le long des lignes de champ. Cependant, ce champ toroïdal imposé ne sera toutefois pas suffisant pour confiner les particules, soumises à un phénomène de dérive verticale liée au gradient de champ et à la force centrifuge. Pour compenser cette dérive, dirigée dans une direction opposée pour les ions et les électrons, une solution consiste à ajouter un champ magnétique poloïdal (figure 1.6, lignes figurées en bleu) qui lui est perpendiculaire [1]. Ce dernier est induit par un courant circulant dans le plasma (figure 1.6, ligne en jaune) généré par effet transformateur à partir d'un circuit primaire, situé au centre du tore, dont le secondaire est le plasma. Il est d'un ordre de grandeur dix fois plus faible que le champ toroïdal. L'addition de ces deux champs aboutit à la création d'un champ hélicoïdal (figure 1.7, lignes figurées en bleu). Cette configuration magnétique hélicoïdale, même si elle n'élimine pas toutes les fuites de particules, améliore tout de même significativement le confinement du plasma et donc ses performances. C'est le principe de base du tokamak.

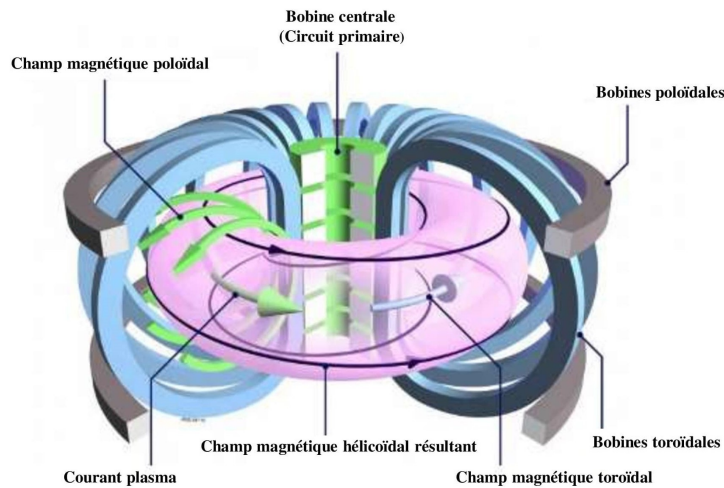


FIGURE 1.4: Structure d'un tokamak.

Nous notons dans tout ce mémoire le champ magnétique hélicoïdal résultant par  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . Les bobines poloïdales du tokamak permettent d'assurer l'équilibre du plasma, sa position, sa forme et le contrôle du courant en créant un champ magnétique vertical.

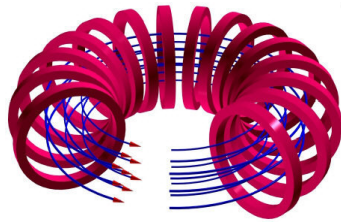


FIGURE 1.5: Lignes de champ toroïdal.

+

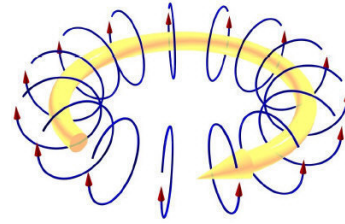


FIGURE 1.6: Lignes de champ poloïdal

=

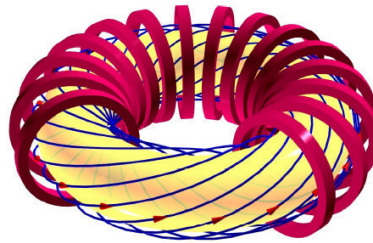


FIGURE 1.7: Lignes de champ hélicoïdal résultant.

Il existe une autre machine destinée à la production des réactions de fusion nucléaire et basée sur le confinement magnétique : c'est le stellarator. Le champ magnétique hélicoïdal nécessaire au confinement du plasma est entièrement assuré par des bobines extérieures (étranges bobines tordues). La grande complexité de la topologie des bobines et la difficulté technique de leur installation ont laissé la majorité des chercheurs s'orienter vers les tokamaks, plus faciles à concevoir.

## 1.6 Chauffage du plasma et génération du courant

### 1.6.1 Chauffage du plasma

Comme nous l'avons expliqué dans la section 1.2, l'efficacité de la fusion est directement liée à la température du plasma. Il est donc indispensable de la chauffer suffisamment (plus de 100 millions de degrés). Il existe plusieurs méthodes de chauffage employées dans les tokamaks. Premièrement, le courant toroïdal nécessaire au confinement du plasma permet également son chauffage par effet Joule. Cependant, cette méthode reste efficace jusqu'à une température de l'ordre de 10 millions de degrés et elle décroît lorsque la température du plasma augmente. En plus de ce régime de chauffage dit ohmique, il convient alors d'utiliser des systèmes de chauffage externes afin d'espérer atteindre les températures requises

pour les réactions de fusion. Ces systèmes de chauffages additionnels se classent en deux grandes familles :

- **L'injection de particules neutres** : on injecte dans le plasma des particules neutres, généralement du deutérium, fortement accélérées (à très haute énergie). Ces particules, après ionisation dans le plasma, transfèrent leur énergie par collision aux autres particules et la température du plasma augmente.
- **Les ondes électromagnétiques** : on envoie au plasma une onde à une fréquence choisie de manière à être en résonance avec une catégorie des particules du plasma afin de leur communiquer de l'énergie. Les ondes électromagnétiques se génèrent par des systèmes différents suivant leur fréquence, puis se propagent jusqu'au tokamak par des lignes de transmission (guides d'onde) et enfin se couplent au plasma par l'intermédiaire des antennes qui tapissent une partie de l'enceinte de confinement. Le choix de la fréquence permet de définir l'espèce de particules (ions ou électrons) qui sera chauffée et la région où se fera l'absorption de l'onde et donc le chauffage.

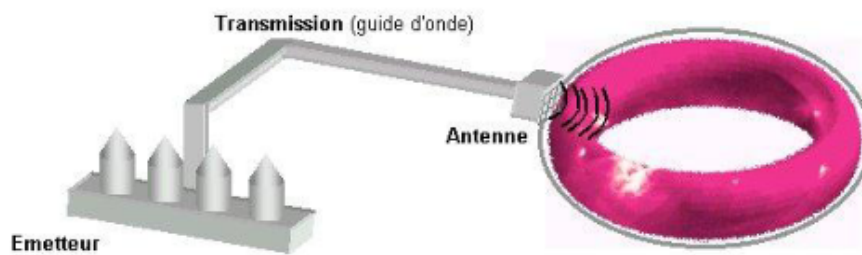


FIGURE 1.8: L'envoi de l'onde électromagnétique.

En outre, il y a une autre méthode de chauffage interne pour un tokamak. Les noyaux d'hélium (particules alpha), produits lors de la réaction de fusion D-T, portent des charges électriques. Ils restent donc confinés par le champ magnétique et cèdent leur énergie au plasma par collisions. Notons que ces particules conservent environ 20% de l'énergie issue de la réaction de fusion. Le reste de cette énergie est emporté hors du plasma par les neutrons, qui ne sont pas soumis aux champs de confinement puisqu'ils n'ont pas de charge et il sera absorbé par la première paroi, c'est le premier élément matériel rencontré au-delà du plasma, et transformé en chaleur afin de fournir de l'électricité. Comme indiqué dans §1.1, les neutrons sont également utilisés pour produire du tritium.

En résumant tout ce qui a été indiqué dès le début de ce chapitre, nous pouvons citer les étapes de fonctionnement d'un tokamak. D'abord, on injecte dans la chambre à vide le mélange combustible deutérium-tritium, à basse pression.



Puis, on crée le champ magnétique toroïdal. On ionise après le contenu de la chambre pour obtenir le plasma. On crée le courant plasma afin de générer son propre champ magnétique poloïdal. Ensuite, il y aura la phase de chauffage externe qui consiste en l'injection des particules neutres et en l'excitation par des ondes électromagnétiques. Finalement, à une température très élevée, la réaction de fusion se produit.

Parmi les méthodes de chauffage citées dans cette section, nous nous intéressons à celle par onde électromagnétique. Nous étudions la propagation et l'absorption de l'onde par le plasma ainsi que l'interaction entre les deux.

### 1.6.2 Génération du courant

Les systèmes de chauffages additionnels indiqués ci-dessus permettent aussi la génération du courant. En effet, nous avons vu précédemment que le champ magnétique poloïdal créé par le courant est important pour le confinement dans un tokamak. La génération de ce champ est cependant limitée par le fait que l'effet transformateur ne peut maintenir le courant dans le plasma que durant un temps limité (quelques heures dans un réacteur), le circuit primaire n'a qu'une capacité limitée. Ce procédé est fondamentalement non stationnaire et en mode pulsé. Il est donc nécessaire de pouvoir générer le courant par des procédés permettant un régime continu. Ce domaine est très activement exploré par la machine Tore Supra. Pour passer de l'effet chauffage à l'effet génération de courant en utilisant les ondes électromagnétiques, il s'agit d'ajouter un effet de directionnalité sur le spectre de ces ondes. Ainsi, elles n'entreront en résonance qu'avec des particules se déplaçant dans une direction privilégiée. Pour plus d'explication, nous renvoyons le lecteur à [39].

## 1.7 Propagation et absorption de l'onde électromagnétique

L'onde électromagnétique se couple au plasma au travers des antennes, situées sur les parois de l'enceinte de confinement (figure 1.9), puis elle est progressivement absorbée au cours de sa propagation dans le plasma. Il existe deux grands mécanismes permettant au plasma d'absorber l'énergie de l'onde [39] : l'absorption de type cyclotronique et l'absorption de type Landau. Dans les deux cas, l'interaction onde-particules est résonante, c'est-à-dire qu'elles vibrent à la même fréquence. Dans le cas absorption cyclotronique, il s'agit de coupler le plasma avec une onde dont la fréquence est en résonance avec la fréquence de rotation d'une espèce (ions ou électrons) autour des lignes du champ magnétique. Dans

le cas d'absorption Landau, l'onde est en résonance avec une population de particules, de telle façon qu'elles aient quasiment la même vitesse de propagation. De là, l'amortissement de l'onde résulte principalement de deux mécanismes : l'effet collisionnel et l'amortissement sans collision (absorption Landau). Pour le premier cas, il s'agit des collisions entre les particules du plasma, c'est-à-dire une particule après avoir absorbé une partie d'énergie de l'onde transmet son énergie à une autre particule par collision et donc elle contribue au chauffage. Nous nous intéressons au cas du plasma collisionnel dans ce mémoire.



FIGURE 1.9: Antenne de chauffage.

Le chauffage et la génération du courant par l'onde sont assurés par trois types d'ondes de fréquences diverses [50]. Les ondes aux fréquences cyclotroniques ioniques (FCI : 30 – 120 MHz) permettent de chauffer les ions. Les ondes aux fréquences cyclotroniques électroniques (FCE : 60 – 170 GHz) entrent en résonance avec les électrons. On obtient ainsi un transfert de l'énergie électromagnétique de l'onde vers l'énergie cinétique des ions ou des électrons, qui vont par la suite chauffer l'ensemble du plasma par collision. Le troisième type de fréquence est appelé fréquence hybride, intermédiaire entre FCE et FCI (LH : 2.5 – 8 GHz) où les ondes cèdent de l'énergie aux électrons par effet Landau. L'onde hybride est un candidat idéal pour la génération du courant.

Chaque type de chauffage possède ses applications propres, et est capable de fournir différents résultats suivant la manière dont il est utilisé.

## 1.8 Modélisation

Le système physique que nous intéressent est le plasma, pénétré par un fort champ magnétique externe statique  $\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{x})$  qui rend le milieu anisotrope. Un tel milieu peut être décrit comme un ensemble de particules chargées (électrons et diverses espèces d'ions) qui se déplacent dans le vide et créent des champs

électromagnétiques qui, à leur tour, affectent leur mouvement. Les champs électromagnétiques sont donc régis par les équations habituelles de Maxwell dans le vide :

$$\mathbf{rot} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$c^2 \mathbf{rot} \mathcal{B} = \frac{\mathcal{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{div} \mathcal{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{div} \mathcal{B} = 0. \quad (1.4)$$

Ici  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  désignent les champs électrique et magnétique ;  $\varrho$  et  $\mathcal{J}$  respectivement la densité de charge électrique et la densité de courant ;  $\varepsilon_0$  est la permittivité électrique, et  $c$  la vitesse de la lumière, dans le vide.

Le champ électromagnétique est la somme d'une partie statique et d'une petite perturbation provoquée par la pénétration d'une onde électromagnétique. Pour simplifier la discussion, nous supposons que le plasma est en équilibre mécanique et électrostatique en l'absence de l'onde. Ainsi, les champs électriques et magnétiques peuvent s'écrire :

$$\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) = \epsilon \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{B}(t, \mathbf{x}),$$

où  $\epsilon \ll 1$  est le paramètre de perturbation. La charge totale et la densité de courant sont celles dues à la perturbation

$$\varrho(t, \mathbf{x}) = \epsilon \rho(t, \mathbf{x}), \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(t, \mathbf{x}) = \epsilon \mathbf{J}(t, \mathbf{x}). \quad (1.5)$$

Les parties statiques de  $\mathcal{E}$ ,  $\varrho$  et  $\mathcal{J}$  sont nulles par l'hypothèse d'équilibre.

De plus, nous supposons que le plasma est froid, c'est-à-dire que l'agitation thermique des particules, et donc leur pression, est négligeable. On désignera les espèces de particules (électrons et diverses espèces d'ions) d'indice  $s$ . On note  $q_s$  la charge d'une particule et  $m_s$  sa masse. L'équation de conservation de la quantité de mouvement des particules de l'espèce  $s$  s'écrit :

$$m_s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + m_s (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s - q_s (\mathcal{E} + \mathbf{u}_s \times \mathcal{B}) + m_s \nu_s \mathbf{u}_s = 0, \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{u}_s$  désigne la vitesse du fluide et  $\nu_s \geq 0$  est la fréquence de collision qui ne dépend que de la variable  $\mathbf{x}$ . Les densités de charge et de courant peuvent être exprimées en fonction des densités de particules  $n_s(t, \mathbf{x})$  et des vitesses du fluide :

$$\varrho = \sum_s q_s n_s = \sum_s q_s n_s, \quad \mathcal{J} = \sum_s \mathcal{J}_s = \sum_s q_s n_s \mathbf{u}_s.$$

Maintenant, en multipliant l'équation (1.6) par  $\frac{n_s q_s}{m_s}$ , nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{J}_s}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_s} (\mathcal{J}_s \cdot \nabla) \mathcal{J}_s - \frac{q_s}{m_s} (\varrho_s \mathbf{E} + \mathcal{J}_s \times \mathcal{B}) + \nu_s \mathcal{J}_s = 0. \quad (1.7)$$

Nous linéarisons maintenant l'équation (1.7). À partir de la discussion ci-dessus, nous pouvons supposer, pour chaque espace  $s$ ,

$$\varrho_s(t, \mathbf{x}) = q_s n_s^0(\mathbf{x}) + \epsilon \rho_s(t, \mathbf{x}), \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_s(t, \mathbf{x}) = \epsilon \mathbf{J}_s(t, \mathbf{x}),$$

où  $n_s^0$  est la densité de particules d'équilibre, supposée dépendre uniquement de  $\mathbf{x}$ . Dans la partie gauche de (1.7), les termes d'ordre 0 dans  $\epsilon$  disparaissent. Pour exprimer les termes d'ordre 1, nous introduisons les fréquences plasma et cyclotron pour l'espèce  $s$ , respectivement :

$$\omega_{ps} := \sqrt{\frac{n_s^0 q_s^2}{\epsilon_0 m_s}}, \quad \Omega_{cs} := \frac{q_s |\mathbf{B}_{\text{ext}}|}{m_s}; \quad (1.8)$$

ils ne dépendent que de la variable d'espace  $\mathbf{x}$ . Observons que la fréquence du cyclotron est signée : elle a le même signe que la charge  $q_s$ . Enfin, en notant  $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_{\text{ext}}}{|\mathbf{B}_{\text{ext}}|}$  le vecteur unitaire aligné avec le champ magnétique externe, nous obtenons l'équation linéarisée :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial t} - \epsilon_0 \omega_{ps}^2 \mathbf{E} - \Omega_{cs} \mathbf{J}_s \times \mathbf{b} + \nu_s \mathbf{J}_s = 0. \quad (1.9)$$

Le champ électromagnétique perturbatif  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  satisfait, à l'ordre 1 en  $\epsilon$ , les équations de Maxwell usuelles dérivées de la forme (1.1)–(1.4), à savoir les équations d'évolution :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ c^2 \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{où : } \mathbf{J} := \sum_s \mathbf{J}_s, \end{aligned}$$

et les équations de divergence :

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{où : } \rho = \sum_s \rho_s, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

En effet, comme les sources sont en dehors du plasma,  $\mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{x})$  est à rotationnel nul et à divergence nulle.

Par souci de simplicité, nous supposons qu'il n'y a que deux espèces de particules dans le plasma : les électrons ( $s = 1$ ) et un type d'ions ( $s = 2$ ). Évidemment, toute la discussion peut être étendue à un nombre arbitraire d'espèces, à condition qu'elles portent toutes une charge électrique (pas d'atomes neutres).

Dans l'ensemble, le modèle qui fera l'objet de cette thèse est le suivant. Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire, un sous-ensemble borné, ouvert et connexe de  $\mathbb{R}^3$  de frontière lipschitzienne  $\Gamma := \partial\Omega$ . L'équation d'évolution des variables hydrodynamiques et électromagnétiques est :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{E} + \Omega_{c1} \mathbf{J}_1 \times \mathbf{b} - \nu_1 \mathbf{J}_1, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{E} + \Omega_{c2} \mathbf{J}_2 \times \mathbf{b} - \nu_2 \mathbf{J}_2, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \mathbf{J}_s, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (1.13)$$

avec les conditions initiales à  $t = 0$  :

$$\mathbf{J}_1(0) = \mathbf{J}_{1,0}; \quad \mathbf{J}_2(0) = \mathbf{J}_{2,0}; \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.14)$$

La frontière  $\Gamma$  est divisée en deux parties  $\Gamma = \overline{\Gamma_A} \cup \overline{\Gamma_P}$ , avec  $\Gamma_A \cap \Gamma_P = \emptyset$ . Sur  $\Gamma_P$ , on impose une condition aux limites de conducteur parfait habituelle. Sur  $\Gamma_A$ , on impose une condition de Silver-Müller :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_P \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_\top = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \Gamma_A \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (1.16)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal unitaire extérieur de  $\Gamma$ ,  $\mathbf{B}_\top$  est la composante de  $\mathbf{B}$  tangente à la frontière  $\Gamma$ , et  $\mathbf{g}$  est une donnée définie sur  $\Gamma_A \times \mathbb{R}_{>0}$ . Si  $\mathbf{g} = 0$ , il s'agit d'une condition aux limites *absorbante*, ce qui signifie que l'énergie électromagnétique peut librement quitter le domaine via  $\Gamma_A$ . Si  $\mathbf{g} \neq 0$ , il s'agit d'une condition modélisant l'injection d'une onde électromagnétique dans le plasma, et  $\Gamma_A$  représente une antenne (voir figure 1.10 pour une configuration possible).

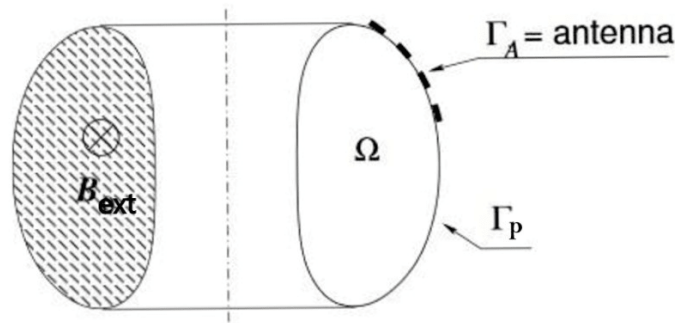


FIGURE 1.10: Une coupe transversale d'un exemple d'un domaine qui représente le volume de plasma dans un tokamak.

La solution du système (1.10)–(1.14) avec les conditions aux limites (1.15)–(1.16) satisfait l'équation  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  dans  $\Omega$  pour tout  $t \geq 0$ , ainsi que la condition aux limites

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_P \times \mathbb{R}_{>0},$$

dès lors qu'elles sont satisfaites à  $t = 0$ . De même, l'équation de divergence du champ électrique est vérifiée pour tout  $t > 0$  si elle est vérifiée à  $t = 0$  et que l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

est vérifiée. Ce dernier point est une conséquence immédiate des équations de continuité pour les différentes espèces, à savoir

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0.$$

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à trois cas différents : le premier lorsque  $\Gamma_A = \emptyset$ , c'est-à-dire que nous avons une condition de conducteur parfait sur toute la frontière ; le deuxième cas où  $\Gamma_P = \emptyset$  et donc l'équation (1.16) est imposée sur toute la frontière ; et le cas où les deux parties sont non vides. Ce dernier peut encore se subdiviser, techniquement, selon que  $\partial\Gamma_A \cap \partial\Gamma_P = \emptyset$  ou  $\neq \emptyset$ .



# Chapitre 2

## Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle un certain nombre de définitions, de résultats et méthodes mathématiques mis en œuvre dans ce mémoire. Dans la première partie, on donne les définitions des espaces qui constituent le cadre dans lequel les analyses sont faites. On introduit les espaces de Sobolev classiques et les espaces spécifiques liés aux opérateurs du divergence et rotationnel. On rappelle également les notions de trace et les espaces de frontière. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on présente les propriétés de deux espaces statiques pour le champ magnétique intervenant lors de l'étude de la stabilité forte du modèle Euler–Maxwell, le premier dans le cas du conducteur parfait et le deuxième dans le cas de Silver–Müller. Dans la troisième partie, on effectue un rappel sur le problème de type Helmholtz avec contraintes et les techniques permettant sa résolution. Ce outil joue un rôle central dans le chapitre 4. Enfin, en quatrième partie, on introduit d'abord quelques concepts de base concernant les semi-groupes dont on se sert au chapitre 3 pour établir le caractère bien posé du modèle. Ensuite, on donne les différentes méthodes qui seront utilisées pour prouver la stabilité forte, polynomiale et exponentielle dans les chapitres suivants. Pour plus de précisions sur les définitions et résultats sur les espaces introduits, on renvoie le lecteur à [33, 26, 45, 4, 24, 2, 41].

### 2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous introduisons les espaces fonctionnels adaptés à l'étude des équations de Maxwell. De façon générale, les espaces fonctionnels des champs vectoriels sont désignés par des lettres en caractère gras et les espaces de champs scalaires sont désignés par des lettres en caractère normal.



### 2.1.1 Espaces des champs scalaires et vectoriels

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire, un ensemble ouvert borné connexe de frontière  $\partial\Omega := \Gamma$  lipschitzienne. La normale unitaire sortante à  $\Gamma$  est notée  $\mathbf{n}$ . On commence par définir les espaces de distributions

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\Omega) &= \{w : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : w \in C^\infty(\Omega) \text{ à support compact dans } \Omega\} \\ \mathcal{D}(\Omega) &= \mathcal{D}(\Omega)^3, \\ \mathcal{D}'(\Omega) &= \text{espace dual de } \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

De façon classique, on définit les espaces de Sobolev

$$\begin{aligned}L^2(\Omega) &:= \left\{ w : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} : \int_{\Omega} |w|^2 \, d\Omega < +\infty \right\}, \\ \mathbf{L}^2(\Omega) &:= (L^2(\Omega))^3.\end{aligned}$$

On note  $(\cdot | \cdot)$  les produits scalaires de  $L^2(\Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , et  $\|\cdot\|$  les normes associées. D'autre part, pour tout espace de Hilbert  $\mathcal{W}$  autre que  $L^2(\Omega)$  ou  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , son produit scalaire sera noté par  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$  et sa norme par  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ . Le produit de dualité entre  $\mathcal{W}$  et son espace dual  $\mathcal{W}'$  s'écrit comme  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$ ; l'indice désigne l'espace auquel la *seconde* variable appartient.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^1(\Omega) &= \{w \in L^2(\Omega) : \mathbf{grad} w \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad \|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \{\|\cdot\|^2 + \|\mathbf{grad} \cdot\|^2\}^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{H}^1(\Omega) &= (\mathbf{H}^1(\Omega))^3, \\ \mathbf{H}_0^1(\Omega) &= \{w \in \mathbf{H}^1(\Omega) : w|_{\Gamma} = 0\}, \quad \|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \|\mathbf{grad} \cdot\| \\ \mathbf{H}^{-1}(\Omega) &= (\mathbf{H}_0^1(\Omega))'.\end{aligned}$$

Maintenant, on introduit les espaces usuels en électromagnétisme ainsi que leurs normes. Débutons par les espaces associés à l'opérateur rotationnel :

- $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad \|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)} = \{\|\cdot\|^2 + \|\mathbf{rot} \cdot\|^2\}^{\frac{1}{2}}.$
- $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega),$
- $\mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0\},$
- $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega).$

Ensuite, on définit les espaces liés à la divergence :

- $\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}, \quad \|\cdot\|_{\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega)} = \{\|\cdot\|^2 + \|\mathbf{div} \cdot\|^2\}^{\frac{1}{2}}.$
- $\mathbf{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega),$
- $\mathbf{H}(\mathbf{div} 0; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{div} \mathbf{v} = 0\},$
- $\mathbf{H}_0(\mathbf{div} 0; \Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{div} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{div}; \Omega).$

## 2.1.2 Espaces de frontière, traces et formules de Green

On présente ici quelques espaces définis sur la frontière  $\Gamma$  et les opérateurs traces dont on se sert dans tout le mémoire. On introduit d'abord les espaces de Sobolev sur la frontière puis les espaces spécifiques qui interviennent dans la construction des formules (intégrales) de Green pour l'électromagnétisme. On sépare cette partie en deux. Dans un premier temps, on discute sur les espaces définis sur toute la frontière, et dans un second temps sur ceux définis sur une partie.

### Traces sur tout le bord

On définit les espaces de Sobolev de frontière

$$\mathbf{L}^2(\Gamma) = \left\{ w : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} : \int_{\Gamma} |w|^2 \, d\Gamma < +\infty \right\}, \quad \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)},$$

$$\mathbf{L}^2(\Gamma) = (\mathbf{L}^2(\Gamma))^3,$$

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{ w \in \mathbf{L}^2(\Gamma) : \exists v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ t.q. } v|_{\Gamma} = w \},$$

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = (\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^3,$$

$$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \text{espace dual de } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

$$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \text{espace dual de } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Ensuite, on introduit les applications traces qui sont continues :

<i>trace normale</i>	• $\gamma_n : \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , avec $\gamma_n(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} _{\Gamma}$
<i>trace tangentielle</i>	• $\gamma_{\top} : \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , avec $\gamma_{\top}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{n} _{\Gamma}$
<i>composante tangentielle</i>	• $\pi_{\top} : \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , avec $\pi_{\top}(\mathbf{v}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) _{\Gamma}$

On a les caractérisations suivantes :

- $\mathbf{H}_0(\text{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \}$ ,
- $\mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \}$ .

On définit l'espace des champs de vecteurs tangentiels de carré intégrable

$$\mathbf{L}_t^2(\Gamma) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Gamma) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \}.$$

On introduit maintenant quelques espaces de frontière pour l'électromagnétisme

- $\mathbf{TT}(\Gamma) := \{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \exists \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega), \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} \}$ ,
- $\mathbf{TC}(\Gamma) := \{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \exists \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega), \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{v}_{\top}|_{\Gamma} \}$ .

Les applications  $\gamma_\top$  et  $\pi_\top$  sont surjectives de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  respectivement dans  $\mathbf{TT}(\Gamma)$  et  $\mathbf{TC}(\Gamma)$ . Ces deux espaces ont été décrits dans [15], où ils sont respectivement désignés par  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_\Gamma, \Gamma) = \mathbf{TT}(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}_\Gamma, \Gamma) = \mathbf{TC}(\Gamma)$ . Et dans [16], on a le résultat de dualité suivant par rapport à l'espace pivot  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  :

$$(\mathbf{TT}(\Gamma))' = \mathbf{TC}(\Gamma).$$

De plus, on a la formule d'intégration par parties suivante :

$$\forall(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)^2, \quad (\mathbf{v} \mid \mathbf{rot} \mathbf{w}) - (\mathbf{rot} \mathbf{v} \mid \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \mathbf{w}_\top \rangle_{\mathbf{TC}(\Gamma)}. \quad (2.1)$$

Si l'un des deux champs est dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , la formule de Green à utiliser est

$$\forall(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (\mathbf{v} \mid \mathbf{rot} \mathbf{w}) - (\mathbf{rot} \mathbf{v} \mid \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (2.2)$$

### Traces sur une partie du bord

Soit  $\Gamma_\tau$  un sous-ensemble ouvert de  $\Gamma$  tel que sa frontière est une sous-variété lipschitzienne de  $\Gamma$ . Soit  $\Gamma_\nu$  tel que  $\Gamma = \overline{\Gamma_\tau} \cup \overline{\Gamma_\nu}$ , avec  $\Gamma_\tau \cap \Gamma_\nu = \emptyset$ . (On utilisera cette hypothèse dans la section 2.2).

Notons que les définitions des espaces de frontière précédentes restent valables si on remplace  $\Gamma$  par  $\Gamma_\tau$  ou  $\Gamma_\nu$  :  $L^2(\Gamma_\tau)$ ,  $\mathbf{H}^1(\Gamma_\nu)$  etc.

On introduit les espaces

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau) &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau) : \text{l'extension de } \mathbf{v} \text{ par } 0 \text{ à } \Gamma \text{ appartient à } \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\}, \\ \widetilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau) &= \text{espace dual de } \widetilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau). \end{aligned}$$

Lorsque la trace tangentielle ou normale est nulle sur une partie  $\Gamma_\tau$  ou  $\Gamma_\nu$  du bord, on introduit les sous-espaces de Hilbert de  $\mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega)$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  :

- $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\mathbf{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_\nu} = 0\}$ ,
- $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\mathbf{div} 0; \Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{div} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\mathbf{div}; \Omega)$ ,
- $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}(\mathbf{rot}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_\tau} = 0\}$ ,
- $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}(\mathbf{rot} 0; \Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}(\mathbf{rot}; \Omega)$ .

Les espaces  $\mathbf{TT}(\Gamma_\tau)$  et  $\mathbf{TC}(\Gamma_\tau)$  désignent respectivement les images des applications  $\gamma_\top$  et  $\pi_\top$  définies sur  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ , restreintes sur la partie  $\Gamma_\tau$  de la frontière. Dans [15], ils sont appelés  $\mathbf{H}_{\parallel, 00}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{div}_{\Gamma_\tau}, \Gamma_\tau)$  et  $\mathbf{H}_{\perp, 00}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{curl}_{\Gamma_\tau}, \Gamma_\tau)$ .

Comme précédemment, on définit les espaces de frontière qui apparaissent dans

les formules d'intégration par parties pour l'électromagnétisme, dans ce cas,

- $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_\tau) := \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau) : \exists \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega), \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_\tau}\}$   
 $= \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{TT}(\Gamma_\tau) : \text{l'extension de } \boldsymbol{\varphi} \text{ par } 0 \text{ à } \Gamma \text{ appartient à } \mathbf{TT}(\Gamma)\};$
- $\widetilde{\mathbf{TC}}(\Gamma_\tau) := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau) : \exists \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega), \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{v}_\top|_{\Gamma_\tau}\}$   
 $= \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{TC}(\Gamma_\tau) : \text{l'extension de } \boldsymbol{\lambda} \text{ par } 0 \text{ à } \Gamma \text{ appartient à } \mathbf{TC}(\Gamma)\};$

Les applications  $\gamma_\top$  et  $\pi_\top$  sont surjectives de  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega)$  respectivement dans  $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_\tau)$  et  $\widetilde{\mathbf{TC}}(\Gamma_\tau)$ . Ces deux espaces sont notés respectivement  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_\tau}^0, \Gamma_\tau)$  et  $\mathbf{H}_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{rot}_{\Gamma_\tau}^0, \Gamma_\tau)$  dans [15]. On a les résultats de dualité suivants par rapport à l'espace de pivot  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_\tau)$  :

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_\tau))' &= \mathbf{TC}(\Gamma_\tau) \\ \mathbf{TT}(\Gamma_\tau) &= (\widetilde{\mathbf{TC}}(\Gamma_\tau))'. \end{aligned}$$

On notera le produit de dualité entre ces espaces par  $\gamma_\tau^0 \langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi_\tau}$  ou  $\gamma_\tau \langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi_\tau^0}$ . Cela permet de donner la formule d'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega), \\ (\mathbf{v} \mid \mathbf{rot} \mathbf{w}) - (\mathbf{rot} \mathbf{v} \mid \mathbf{w}) = \gamma_\tau \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \mathbf{w}_\top \rangle_{\pi_\tau^0}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

On présente maintenant quelques propriétés utiles de ces espaces et qui seront utilisées de façon fondamentale dans ce mémoire.

**Proposition 2.1.1.** *Supposons que  $\partial\Gamma_\tau \cap \partial\Gamma_\nu = \emptyset$ . Dans ce cas, si  $\Gamma_\tau$  est lisse, alors on a*

$$\mathbf{TT}(\Gamma_\tau) \cap \mathbf{TC}(\Gamma_\tau) \subset \mathbf{L}_t^2(\Gamma_\tau).$$

Ce résultat a été prouvé en [13] et présenté dans la remarque 5.1.5 de [4]. Lorsque l'intersection des deux parties du bord est non vide, ce qui est appelé problème intérieur tronqué dans [4], on a le résultat d'inclusion suivant.

**Proposition 2.1.2.** *Supposons que  $\partial\Gamma_\tau \cap \partial\Gamma_\nu \neq \emptyset$ . Dans ce cas, si  $\Gamma_\tau$  est sans sommets pathologiques, alors on a*

$$\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_\tau) \cap \mathbf{TC}(\Gamma_\tau) \subset \mathbf{L}_t^2(\Gamma_\tau).$$

La notion de sommet pathologique et la démonstration de ce résultat sont présentées dans [4, §5.1.2].

### 2.1.3 Régularité en temps

Pour résoudre un problème d'évolution, on utilise des espaces de fonctions dépendant à la fois du temps  $t$  et de la variable d'espace  $x$ . Ainsi, pour une fonction  $f$  dépendant de  $t$  et  $x$ , on étudie  $x \mapsto f(t_0, x)$ , pour  $t_0$  fixé. Cette application sera notée  $f(t_0)$ . Dans cette sous-section, on présente quelques espaces qu'on va utiliser dans le chapitre suivant pour établir le caractère bien posé du modèle et donner la régularité de la solution obtenue. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $X$  un espace de Banach. On note  $\partial_t^k(\cdot)$  (ou  $\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\cdot)$ ) la dérivée partielle  $k^{\text{ième}}$  par rapport au temps. On introduit

$$L^1(I; X) = \left\{ f : I \rightarrow X \text{ mesurable} : \int_I \|f(t)\|_X dt < +\infty \right\},$$

$$\|f\|_{L^1(I; X)} = \int_I \|f\|_X dt.$$

On définit, pour  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$W^{m,1}(I; X) = \{f \in L^1(I; X) : \forall k \in \mathbb{N}, k \leq m, \partial_t^k f \in L^1(I; X)\},$$

avec la norme associée  $\|f\|_{W^{m,1}(I; X)} = \sum_{k=0}^m \|\partial_t^k f\|_{L^1(I; X)}$ , et l'espace

$$C^m(I; X) = \{\text{fonctions de classe } C^m \text{ sur } I, \text{ à valeurs dans } X\}.$$

## 2.2 Quelques espaces de noyaux des opérateurs rotationnel et divergence

Introduisons les deux noyaux

- $\mathbf{Z}_T(\Omega) := \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{div} 0; \Omega)$ ,
- $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau) := \mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\mathbf{div} 0; \Omega)$ .

Dans cette section, on rappelle quelques propriétés de ces espaces ainsi que des décompositions orthogonales qui servent au chapitre 4 pour caractériser l'espace des solutions stationnaires du modèle, plus précisément du champ magnétique, pour les deux types de conditions aux limites.

On commence d'abord par préciser la géométrie du domaine.

**Définition 2.2.1.** *On dit qu'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  est topologiquement trivial si étant donné un champ de vecteur  $\mathbf{v}$  assez régulier défini sur  $\Omega$  tel que  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$ , il existe une fonction continue  $p$  telle que  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} p$ .*

En particulier, un domaine simplement connexe est topologiquement trivial.

**Définition 2.2.2.** Soit  $\mathcal{O}$  un espace ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . Sa frontière  $\partial\mathcal{O}$  est pseudo-lipschitzienne si, à chaque point  $\mathbf{x}$  de  $\partial\mathcal{O}$ , il existe un entier  $r(\mathbf{x})$  égal à 1 ou 2 et un réel strictement positif  $\theta_0$  tel que pour tout réel  $\theta \in ]0, \theta_0[$ , l'intersection de  $\mathcal{O}$  avec la boule de centre  $\mathbf{x}$  et de rayon  $\theta$  possède  $r(\mathbf{x})$  composante(s) connexe(s), chacune à frontière lipschitzienne.

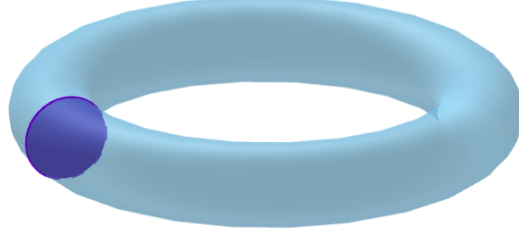


FIGURE 2.1: Exemple de domaine topologiquement non trivial. Le domaine  $\Omega$  est constitué de l'intérieur du tore. La frontière  $\partial\Omega$  est la frontière du tore. La surface violette est une coupure  $\Sigma_1$ , et l'ensemble  $\dot{\Omega} = \Omega \setminus \Sigma_1$  est simplement connexe tel que sa frontière  $\partial\dot{\Omega}$  est pseudo-lipschitzienne.

Dans tout ce mémoire, le domaine  $\Omega$  peut être topologiquement non trivial comme l'exemple de la figure 2.1. Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse suivante qui permet d'étudier sa topologie.

Nous supposons qu'il existe  $J$  surfaces ouvertes connexes  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , appelées « coupures », incluses dans  $\Omega$ , telles que :

- i) chaque surface  $\Sigma_j$  est une variété bidimensionnelle lisse et orientable ;
- ii) la frontière de  $\Sigma_j$  est contenue dans  $\partial\Omega$  ;
- iii) l'intersection  $\overline{\Sigma_j} \cap \overline{\Sigma_i}$  est vide pour  $i \neq j$  ;
- iv) l'ensemble ouvert  $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \Sigma$ , où  $\Sigma = \bigcup_{j=1}^J \Sigma_j$ , est pseudo-lipschitzien et topologiquement trivial.

Si le domaine  $\Omega$  est topologiquement trivial,  $J = 0$  et  $\dot{\Omega} = \Omega$ . L'opérateur d'extension de  $\mathbf{L}^2(\dot{\Omega})$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est noté  $\tilde{\cdot}$ , tandis que  $[\cdot]_{\Sigma_j}$  désigne le saut à travers la surface  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Nous notons encore par  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal sur chaque coupure  $\Sigma_j$ . Étant orientable, chaque coupure est supposée avoir un côté “plus” et un côté “moins”, donc nous définissons le saut de  $w$  et  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  à travers  $\Sigma_j$  par

$$[w]_{\Sigma_j} = w|_{\Sigma_j^+} - w|_{\Sigma_j^-} \quad \text{et} \quad [\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma_j} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_j^+} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma_j^-}.$$

Pour tout  $j$ , nous notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_j}$  le produit de dualité entre  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_j)$  et son dual  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_j)$ .

### Espace $\mathbf{Z}_T(\Omega)$

On commence par donner une caractérisation sur  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$  prouvée dans [2].

**Proposition 2.2.3.** *La dimension de l'espace vectoriel  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$  est égale à  $J$ , le nombre du coupures. De plus, une base de  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $(\mathbf{grad} \dot{q}_j)_{1 \leq j \leq J}$ , où chaque  $\dot{q}_j$  est l'unique solution dans  $H^1(\dot{\Omega})$  du problème*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \dot{q}_k & = 0 \quad \text{dans } \dot{\Omega}, \\ \partial_{\mathbf{n}} \dot{q}_j & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ [\dot{q}_j]_{\Sigma_i} & = \text{cst}_i, \quad 1 \leq i \leq J \\ [\partial_{\mathbf{n}} \dot{q}_j]_{\Sigma_i} & = 0, \quad 1 \leq i \leq J \\ \langle \partial_{\mathbf{n}} \dot{q}_j, 1 \rangle_{\Sigma_i} & = \delta_{ji}, \quad 1 \leq i \leq J. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

**Remarque 2.2.4.** *Si  $\Omega$  est topologiquement trivial alors  $\mathbf{Z}_T(\Omega) = \{0\}$ .*

Avant de rappeler des décompositions de Helmholtz, nous définissons les espaces suivants que nous allons utiliser :

$$H_{zmv}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0\};$$

$$\mathbf{H}_0^{\Sigma}(\text{div } 0; \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{div } 0; \Omega) : \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq J\}.$$

**Proposition 2.2.5.** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . On a les décompositions suivantes orthogonales pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  :*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2(\Omega) &= \mathbf{grad} H_{zmv}^1(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{H}_0(\text{div } 0; \Omega) \\ \mathbf{H}_0(\text{div } 0; \Omega) &= \mathbf{Z}_T(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{H}_0^{\Sigma}(\text{div } 0; \Omega) \\ \text{et } \mathbf{H}(\mathbf{rot } 0; \Omega) &= \mathbf{grad} H_{zmv}^1(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{Z}_T(\Omega). \end{aligned} \quad (2.5)$$

On a aussi

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{rot } 0; \Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{H}_0^{\Sigma}(\text{div } 0; \Omega). \quad (2.6)$$

La décomposition (2.5) est une conséquence de la proposition 2.2.3. Pour les preuves de la première décomposition et la troisième nous renvoyons le lecteur au [4, §3.7].

### Espace $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_{\tau})$

Cet espace avec condition aux limites mêlées a été étudié par Fernandes et Gilardi dans [41]. On fait ici un rappel des résultats obtenus.

On suppose que  $\Gamma_{\tau} \setminus \partial\Sigma$  admet un nombre fini de composantes connexes, notés  $\Gamma_{\tau,i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dont les fermetures  $\overline{\Gamma_{\tau,i}}$  sont des sous-variétés lipschitziennes compactes de  $\Gamma$  d'intérieurs  $\Gamma_{\tau,i}$ .

Afin de caractériser l'espace  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  nous avons besoin d'introduire quelques espaces. D'abord, nous fixons un vecteur  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} := (a_i)_{1 \leq i \leq N}$

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \quad \text{tel que} \quad \sum_{i=1}^N a_i \neq 0. \quad (2.7)$$

Ensuite, nous définissons l'espace

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{const } \Gamma_\tau, \Sigma}^{\frac{1}{2}}(\partial\dot{\Omega}; \mathbf{a}) := \{ & p \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\dot{\Omega}) : \exists \mathbf{c} = (c_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0, \\ & p|_{\Gamma_{\tau,i}} = c_i \text{ pour } i = 1, \dots, N; \\ & \exists \mathbf{c}' = (c'_j)_{1 \leq j \leq J} \in \mathbb{R}^J : [p]_{\Sigma_j} = c'_j \text{ pour } j = 1, \dots, J\}. \end{aligned}$$

De plus, nous introduisons

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega) := \{ & \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\text{div } 0; \Omega) : \\ & \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau \cup \Sigma)} = 0 \quad \forall p \in \mathbf{H}_{\text{const } \Gamma_\tau, \Sigma}^{\frac{1}{2}}(\partial\dot{\Omega}; \mathbf{a})\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le produit de dualité  $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau \cup \Sigma)} = 0$  dans (2.8) a un sens grâce à la proposition suivante prouvée dans [41].

**Proposition 2.2.6.** *Soit  $u \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Alors,  $u|_{\Gamma_\tau}$  appartient à  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau)$  si et seulement si  $u|_{\Gamma_\nu}$  appartient à  $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\nu)$ . De plus, si l'une des conditions est satisfaite, nous avons*

$$\forall v \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \langle u, v \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle u|_{\Gamma_\tau}, v|_{\Gamma_\tau} \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\tau)} + \langle u|_{\Gamma_\nu}, v|_{\Gamma_\nu} \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\nu)}. \quad (2.9)$$

L'égalité (2.9) est évidente si  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$  sont la réunion des composantes connexes de  $\Gamma$ . Pour plus de détail sur (2.8), nous renvoyons le lecteur à la remarque 3.4 de [41].

Selon [41, proposition 5.1], la structure de l'espace  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  est décrite comme suit : pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  il existe un unique triplet  $(p, \mathbf{c}, \mathbf{c}')$ , avec  $p \in \mathbf{H}^1(\dot{\Omega})$  et  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^J$  tel que  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$ , satisfaisant

$$\mathbf{grad} p = \mathbf{v} \quad \text{dans } \dot{\Omega} \quad (2.10)$$

$$\Delta p = 0 \quad \text{dans } \dot{\Omega} \quad (2.11)$$

$$p|_{\Gamma_{\tau,i}} = c_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

$$[p]_{\Sigma_j} = c'_j, \quad j = 1, \dots, J \quad (2.13)$$

$$\partial_{\mathbf{n}} p = 0, \quad \text{sur } \Gamma_\nu \cap \partial\dot{\Omega} \quad (2.14)$$

$$[\partial_{\mathbf{n}} p]_{\Sigma_j} = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.15)$$

Les conditions (2.11) et (2.15) viennent du fait que  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega$ , tandis que la condition (2.13) se déduit de l'équation  $\mathbf{rot } \mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega$ . Et enfin, de



la condition aux limites  $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_\tau$ , nous déduisons (2.12) pour certains  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ . Le rôle de la contrainte  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$  ici est d'obtenir l'unicité de  $p$  et  $\mathbf{c}$ . En effet, la différence  $(p, \mathbf{c}, \mathbf{c}')$  de deux triplets admissibles résout (2.10)–(2.15) avec  $\mathbf{v} = 0$ . On en déduit que  $p$  est une constante  $C$ , d'où  $c'_j = 0$  pour tout  $j$  et  $c_i = C$  pour tout  $i$ . En utilisant  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$  et la condition (2.7), on conclut que  $C = 0$ , c'est-à-dire,  $p = 0$  et  $\mathbf{c} = 0$ .

Cette caractérisation nous permet de déduire le résultat suivant.

**Proposition 2.2.7.** *On a*

$$\dim \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau) \leq N + J - 1.$$

Sous certaines conditions sur  $\Gamma_\tau$ ,  $\Gamma_\nu$  et la position des coupes  $\Sigma_j$ , Fernandes et Gilardi ont déterminé la dimension de  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  ainsi ils ont donné une construction particulièrement aisée de l'espace  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ , comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 2.2.8.** *Supposons que, pour toute composante connexe  $\Gamma_{\tau, i}$  de  $\Gamma_\tau$ , l'ensemble  $\Gamma_{\tau, i} \setminus \partial\Sigma$  soit connexe. Supposons en outre que, pour tout  $j$ , une et une seule des deux possibilités suivantes soit vérifiée*

1.  $\partial\Sigma_j \subset \Gamma_\nu$  ou
2.  $\partial\Sigma_j \cap \Gamma_\tau \neq \emptyset$ .

*Notons  $1, \dots, J'$  les valeurs de  $j$  pour lesquelles  $\partial\Sigma_j \subset \Gamma_\nu$ . Alors,*

$$\dim \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau) = N + J' - 1.$$

*De plus, un champ vectoriel  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\text{div } 0; \Omega)$  appartient à  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$  si et seulement si*

$$\int_{\Gamma_{\tau, i}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 0$$

*pour tout  $i = 1, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, J'$ .*

Cette proposition suggère que les coupures  $\Sigma_j$  pour  $j > J'$  ne jouent aucun rôle dans la description de  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  et  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ . D'autre part, si  $\partial\Sigma$  divise  $\Gamma_\tau$  en composantes connexes de plus en plus nombreuses, la description de ces deux espaces sera de plus en plus compliquée (voir remarque 5.9 de [41]).

Profitons de cette proposition en donnant un exemple (introduit dans [41]) significatif : lorsque  $\Omega$  est le volume d'un tore (cf. la figure 2.1).

EXEMPLES. Soit  $\Omega$  le volume borné par un tore  $\Gamma$ . Une seule coupure  $\Sigma$  peut rendre  $\Omega$  simplement connexe (voir la figure 2.1), donc topologiquement trivial, et elle va être parallèle à l'axe de symétrie. Alors, on prend  $J = 1$ . On traite deux exemples suivant les choix de  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$ .

1) Supposons que  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$  sont obtenus en coupant  $\Gamma$  au moyen d'un plan orthogonal à l'axe de symétrie, voir la figure 2.2. Dans ce cas, n'importe quelle position de  $\Sigma$  coupe  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$  à la fois et la proposition 2.2.8 s'applique de manière naturelle. Nous avons  $N = 1$  et  $J' = 0$ , d'où  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau) = \{0\}$  et

$$\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega) = \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\text{div } 0; \Omega).$$

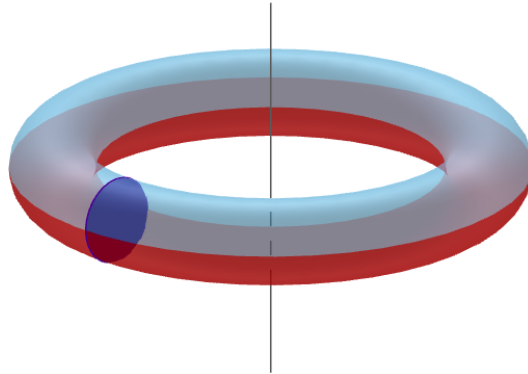


FIGURE 2.2: Exemple des choix de  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$  dans le cas d'un tore. La frontière du tore est constituée des deux parties connexes : une en rouge et l'autre en bleue. La surface violette est une coupure  $\Sigma$ . Selon les conditions de la proposition 2.2.8, le choix de  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$  est quelconque dans ce cas.

2) Supposons que  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$  sont obtenus en coupant  $\Gamma$  au moyen d'un plan passant par l'axe de symétrie, voir l'exemple de la figure 2.3. Dans ce cas, la proposition 2.2.8 s'applique si  $\partial\Sigma \subset \Gamma_\nu$ .

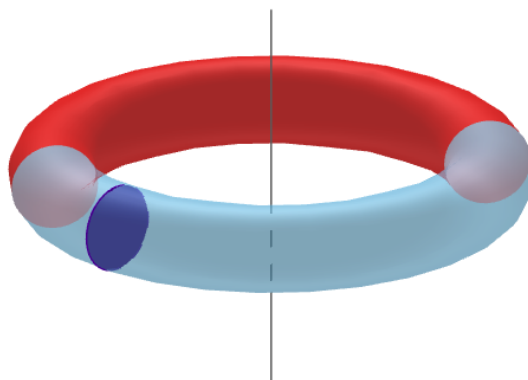


FIGURE 2.3: Exemple des choix de  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$  dans le cas d'un tore. La surface violette est une coupure  $\Sigma$ . Selon les conditions de la proposition 2.2.8, la partie du bord colorée en rouge représente  $\Gamma_\tau$ , et la partie bleue représente  $\Gamma_\nu$ .

Nous avons alors  $N = 1$  et  $J' = 1$ , par conséquent  $\dim \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau) = 1$  et un champ vectoriel  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\operatorname{div} 0; \Omega)$  appartient à  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$  si et seulement si

$$\int_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = 0.$$

### Décompositions orthogonales :

On présente ici des résultats de décompositions orthogonales dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , en précisant le lien entre les deux espaces  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  et  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$ . Ces résultats sont introduits par le schéma (4.14) de [41] et les preuves sont données dans la section 6.

**Proposition 2.2.9.** *Soit  $\Omega$  un domaine. On a les décompositions suivantes orthogonales pour le produit scalaire de  $(\cdot | \cdot)$  :*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2(\Omega) &= \mathbf{grad} \mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}^1(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\operatorname{div} 0; \Omega), \\ \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu}(\operatorname{div} 0; \Omega) &= \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega), \\ \text{et } \mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}(\mathbf{rot} 0; \Omega) &= \mathbf{grad} \mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}^1(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau). \end{aligned} \quad (2.16)$$

On a aussi

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}_{0, \Gamma_\tau}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega). \quad (2.17)$$

La définition de  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$  semble dépendre à la fois de  $\mathbf{a}$  et de  $\Sigma$  puisque elle est basée sur l'espace  $\mathbf{H}_{\text{const } \Gamma_\tau, \Sigma}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{a})$ . Au contraire, la proposition précédente montre que ce n'est pas le cas. En effet, chaque choix de  $\mathbf{a}$  et de  $\Sigma$  correspond à l'une des manières possibles de décrire  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_\nu; \text{flux}, \Gamma_\tau, \Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$  et caractériser chaque élément de  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  comme dans (2.10)-(2.15).

### L'image de l'opérateur rotationnel :

On donne ici une caractérisation de l'image de l'opérateur  $\mathbf{rot}$  dans le cas où on travaille avec des conditions mêlées. Cette caractérisation est basée sur le résultat de compacité suivant qui est aussi prouvé dans [41].

**Proposition 2.2.10.** *L'espace*

$$\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_\nu} \in L^2(\Gamma_\nu), \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_\tau} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_\tau)\}, \quad (2.18)$$

*muni de la norme du graphe, s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .*

De cette injection on déduit [41] une inégalité en norme de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

**Proposition 2.2.11.** *Il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|\mathbf{v}\| \leq C (\|\mathbf{rot} \mathbf{v}\| + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v} \times \mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_\tau)} + \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_\nu)})$$

pour tout  $\mathbf{v}$  dans l'orthogonal de  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_\tau)$  appartenant également à l'espace (2.18).

On énonce maintenant le résultat principal qui fournit une relation entre l'image de l'opérateur  $\mathbf{rot}$  et l'espace  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu;\text{flux},\Gamma_\tau,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$ .

**Proposition 2.2.12.** *L'opérateur*

$$\mathbf{rot} : \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_{0,\Gamma_\tau;\text{flux},\Gamma_\nu,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu;\text{flux},\Gamma_\tau,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega) \quad (2.19)$$

est un isomorphisme topologique si les espaces dans la formule (2.19) sont munis des normes de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , respectivement. De plus, nous avons

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega) = \mathbf{rot}(\mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_{0,\Gamma_\tau;\text{flux},\Gamma_\nu,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)).$$

En particulier,  $\mathbf{rot} \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega)$  est fermé dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  et nous avons

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega) = \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu;\text{flux},\Gamma_\tau,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega). \quad (2.20)$$

Pour conclure, nous présentons un exemple simple de l'utilisation de cette proposition pour l'étude d'un problème magnétostatique avec des conditions aux limites mêlées. On cherche  $\mathbf{V}$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  tel que

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{V} & = \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{V} & = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{V} \times \mathbf{n} & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\nu \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\tau \end{array} \right.$$

avec  $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  donné. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\mathbf{F}$  pour que le système  $(\mathcal{P})$  admette une solution. Supposons qu'il existe  $\mathbf{V} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  une solution de  $(\mathcal{P})$ . Alors,  $\mathbf{V} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega)$  et l'égalité (2.20) implique que  $\mathbf{F}$  appartient à  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu;\text{flux},\Gamma_\tau,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$ . Inversement, supposons maintenant que  $\mathbf{F}$  appartient à ce dernier espace et cherchons une solution. D'après la proposition 2.2.12, il existe un unique  $\mathbf{V} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_{0,\Gamma_\tau;\text{flux},\Gamma_\nu,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$  tel que

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega.$$

En particulier,  $\mathbf{V}$  vérifie les équations du système  $(\mathcal{P})$ . Par conséquent, nous déduisons qu'il existe au moins un  $\mathbf{V} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  solution de  $(\mathcal{P})$  si, et seulement si,  $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu;\text{flux},\Gamma_\tau,\Sigma}(\operatorname{div} 0; \Omega)$ .

De ce premier exemple, nous pouvons passer à résoudre le problème  $(\mathcal{P})$  avec divergence et trace normale non nulle, voir théorème 8.4 de [41] pour la solution.

Le cas où la trace tangentielle est non homogène est traité par Alonso & Valli dans [6] et par Saranen dans les références [66] et [67]. Dans [6],  $\Gamma_\nu$  et  $\Gamma_\tau$  sont supposés sans frontière commune, c'est-à-dire chacune est l'union des composantes connexes de  $\Gamma$ , par contre dans [66] et [67]  $\Gamma_\nu$  est égal à  $\Gamma$  entier.

Pour plus d'application de la proposition 2.2.12 (et corollaire 7.10 de [41] dans le cas non homogène), ainsi que la résolution des problèmes électromagnétiques, nous renvoyons le lecteur à [5, 42]. Dans ces références, les hypothèses de la proposition 2.2.8 sont satisfaites, et donc on se trouve avec une caractérisation plus simple de l'espace  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_\nu;\text{flux},\Gamma_\tau,\Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ .

## 2.3 Problèmes de type Helmholtz

Dans cette partie, on définit les problèmes de type Helmholtz écrits sous forme variationnelle et on rappelle quelques résultats utilisés pour prouver le caractère bien posé de ces problèmes dont on se servira dans le chapitre 4. On reprend les résultats de [4, chapitre 4].

Soit  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{V}$  deux espaces de Hilbert, tel que  $\mathcal{V}$  est un sous-espace de  $\mathcal{H}$  avec injection  $i_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}}$  continue. Soit  $a(.,.)$  une forme sesquilinéaire continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ . Soit  $c(.,.)$  une autre forme sesquilinéaire continue sur  $\mathcal{H} \times \mathcal{V}$ . Étant donné  $f \in \mathcal{V}'$  (espace dual de  $\mathcal{V}$ ), le problème de Helmholtz de type *coercitif + compact* à résoudre est

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ \forall v \in \mathcal{V}, a(w, v) + c(w, v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Le problème (2.21) est résolu à l'aide de l'alternative de Fredholm.

**Théorème 2.3.1.** (*Problème de type Helmholtz*) *Supposons que la forme sesquilinéaire  $a$  est coercive sur  $\mathcal{V}$  et que l'injection canonique  $i_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}}$  est compacte. Alors :*

- *soit, pour tout  $f \in \mathcal{V}'$ , le problème (2.21) a une, et une seule, solution  $w$ , qui dépend continûment de  $f$  ;*
- *soit, le problème (2.21) a des solutions si, et seulement si,  $f$  vérifie un nombre fini  $n_c$  de conditions d'orthogonalité. Alors l'espace des solutions est affine, et la dimension de l'espace vectoriel linéaire correspondant (le noyau) est égale à  $n_c$ . De plus, la partie de la solution orthogonale au noyau dépend continûment des données.*

**Remarque 2.3.2.** *Il existe un opérateur borné  $A$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}'$  tel que  $\langle Aw, v \rangle_{\mathcal{V}} = a(w, v)$  pour tout  $v$  dans  $\mathcal{V}$ . On peut généraliser le théorème 2.3.1 en remplaçant la condition  $a$  coercive sur  $\mathcal{V}$  par  $A$  est un isomorphisme de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}'$ .*

On énonce maintenant le problème de type Helmholtz avec contraintes. Introduisons un autre espace de Hilbert, noté  $\mathcal{Q}$ ,  $g \in \mathcal{Q}'$  et  $b(.,.)$  une forme sesquilinéaire

continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ . Le problème de Helmholtz avec contraintes est formulé comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (w, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \text{ tel que} \\ \forall v \in \mathcal{V}, a(w, v) + c(w, v) + \overline{b(v, p)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}} \\ \forall q \in \mathcal{Q}, b(w, q) = \langle g, q \rangle_{\mathcal{Q}} \end{cases} \quad (2.22)$$

En terme d'opérateur, on peut définir les opérateurs bornées  $B$  et  $B^+$ , respectivement de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{Q}'$  et de  $\mathcal{Q}$  dans  $\mathcal{V}'$  par :

$$\forall (v, q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}, \quad \langle Bv, q \rangle_{\mathcal{Q}} = b(v, q) = \overline{\langle B^+q, v \rangle_{\mathcal{V}}}.$$

Le caractère bien posé du problème (2.22) est classiquement lié à une condition de *stabilité*, appelée aussi *condition inf-sup*.

**Définition 2.3.3.** Soit  $b(.,.)$  une forme sesquilinéaire continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ . On dira qu'elle satisfait la condition inf-sup si

$$\exists C_b > 0, \quad \inf_{q \in \mathcal{Q} \setminus \{0\}} \sup_{v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} \frac{|b(v, q)|}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|q\|_{\mathcal{Q}}} \geq C_b. \quad (2.23)$$

On introduit

$$\mathcal{K} = \{v \in \mathcal{V} : \forall q \in \mathcal{Q}, b(v, q) = 0\} \text{ et } \mathcal{K}^0 = \{h \in \mathcal{V}' : \forall v \in \mathcal{K}, \langle h, v \rangle_{\mathcal{V}} = 0\}.$$

Le sous espace  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{V}$  est le noyau de  $b(.,.)$ , et  $\mathcal{K}^0$  est appelé son polaire. La forme  $b(.,.)$  est continue,  $\mathcal{K}$  est fermé dans  $\mathcal{V}$ , donc on peut écrire  $\mathcal{V} = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}^\perp$ . Alors, on a le résultat [45] :

**Lemme 2.3.4.** Soit  $b(.,.)$  une forme sesquilinéaire continue sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- il existe  $C_b > 0$  tel que  $b(.,.)$  satisfait (2.23) ;
- l'opérateur  $B^+$  est bijectif de  $\mathcal{Q}$  dans  $\mathcal{K}^0$ , et

$$\forall q \in \mathcal{Q}, \quad \|B^+q\|_{\mathcal{V}'} \geq C_b \|q\|_{\mathcal{Q}};$$

- l'opérateur  $B$  est bijectif de  $\mathcal{K}^\perp$  dans  $\mathcal{Q}'$ , et

$$\forall v \in \mathcal{K}^\perp, \quad \|Bv\|_{\mathcal{Q}'} \geq C_b \|v\|_{\mathcal{V}}.$$

Supposons que la forme  $b$  satisfait la condition inf-sup (2.23) pour un certain  $C_b > 0$ . Selon le lemme précédent, il existe un, et un seul,  $w_g \in \mathcal{K}^\perp$  tel que  $Bw_g = g$ . Alors, on introduit  $f' \in \mathcal{V}'$  définie par :

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \langle f', v \rangle_{\mathcal{V}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}} - a(w_g, v) - c(w_g, v). \quad (2.24)$$

À l'aide de cette définition, nous considérons un autre problème de type Helmholtz dans  $\mathcal{K}$ . Soit le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_0 \in \mathcal{K} \text{ tel que} \\ \forall v_{\parallel} \in \mathcal{K}, a(w_0, v_{\parallel}) + c(w_0, v_{\parallel}) = \langle f', v_{\parallel} \rangle_{\mathcal{V}}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Les deux problèmes de type Helmholtz (2.22) et (2.25) sont reliés, par un résultat d'existence, de la manière suivante :

**Proposition 2.3.5.** *Supposons que la forme  $b$  satisfait la condition inf-sup (2.23) pour un certain  $C_b > 0$ . Soit  $w_g \in \mathcal{K}^{\perp}$  caractérisé par  $Bw_g = g$ .*

1. *S'il existe  $(w, p)$  une solution de (2.22), alors  $w - w_g$  résout (2.25).*
2. *S'il existe  $w_0$  une solution de (2.25), alors il existe  $p \in \mathcal{Q}$  tel que  $(w_0 + w_g, p)$  résout (2.22).*

De là, on peut énoncer le résultat en ce qui concerne les problèmes de type Helmholtz avec contraintes.

**Théorème 2.3.6.** *(Problème de Helmholtz avec contraintes) Supposons que la forme sesquilinéaire  $a$  est coercive sur  $\mathcal{K}$ , que l'injection canonique  $i_{\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}}$  est compacte, et enfin, que la forme  $b$  satisfait la condition inf-sup pour un certain  $C_b > 0$ . Alors, les problèmes de Helmholtz (2.22) et (2.25) s'intègrent dans le cadre coercitif + compact.*

Pour plus d'explication, d'après la proposition 2.3.5, le problème (2.22) admet une solution  $w$ , si et seulement si, le problème (2.25) admet une solution  $w_0$ . Et de plus, si  $w$  existe, on a la relation  $w = w_0 + w_g$ . Comme la composante  $w_g \in \mathcal{K}^{\perp}$  existe et unique, alors, pour établir le caractère bien posé du problème (2.22), il suffit de le résoudre dans le noyau  $\mathcal{K}$  avec  $g = 0$ , ce qui est équivalent au problème (2.25) qu'on résout en utilisant la proposition 2.3.1. Donc, on revient toujours au cadre coercitif + compact.

## 2.4 Théorie des semi-groupes et stabilité

L'étude effectuée dans cette thèse est basée sur la théorie des semi-groupes et l'analyse spectrale. Pour cela, on présente d'abord, dans cette section, quelques définitions et résultats concernant la théorie des semi-groupes qui impliquent le caractère bien posé d'un problème abstrait de Cauchy. Ensuite, on rappelle des résultats sur la stabilité forte, polynomiale et exponentielle qui serviront à prouver les principaux résultats de ce mémoire dans les chapitres suivants. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [60, 25, 3, 55, 47, 60, 23, 21, 22, 54].

### 2.4.1 Semi-groupes, existence et unicité de la solution

Dans toute cette sous-section,  $Y$  désigne un espace de Banach à priori complexe de norme  $\|\cdot\|_Y$ , et  $X$  est un espace de Hilbert à priori complexe de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$  et de norme associée  $\|\cdot\|_X$ . On note  $\mathcal{L}(Y)$  l'espace des applications linéaires bornées de  $Y$  dans  $Y$  avec la norme opératorielle  $\|\cdot\|$  (même notation pour la norme de  $\mathcal{L}(X)$ ).

**Remarque 2.4.1.** *Les résultats de cette section s'appliquent aussi aux espaces réels.*

On s'intéresse ici à la résolution du problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \partial_t U(t) + AU(t) = 0 & \text{pour } t > 0; \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $-A$  le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur un espace de Hilbert  $X$  et  $U_0 \in X$  est la donnée initiale. Tout d'abord, on commence par introduire quelques définitions et théorèmes de base.

**Définition 2.4.2.** *Une famille d'opérateurs  $(T(t))_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{L}(Y)$  est un semi-groupe fortement continu sur  $Y$  ou un  $C^0$ -semi-groupe si elle vérifie :*

- (i)  $T(0) = I$ ,
- (ii)  $T(t+s) = T(t)T(s)$ ,  $\forall t, s \geq 0$ ,
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$ .

**Théorème 2.4.3.** *Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un  $C^0$ -semi-groupe sur  $Y$ . Alors, il existe deux constantes  $w \geq 0$  et  $M \geq 1$  telles que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}, \quad t \geq 0.$$

Si  $w = 0$ , le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  est dit uniformément borné et si de plus  $M = 1$  on l'appelle semi-groupe de contraction.

**Définition 2.4.4.** *Un opérateur non borné sur  $Y$  est un couple  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ , où  $D(\mathcal{A})$  est un sous-espace vectoriel de  $Y$  et  $\mathcal{A}$  est une application linéaire de  $D(\mathcal{A})$  dans  $Y$ . Le sous-espace  $D(\mathcal{A})$  est appelé le domaine de  $\mathcal{A}$ .*

**Définition 2.4.5.** *Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un  $C^0$ -semi-groupe sur  $Y$ . Le générateur infinitésimal du semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  est l'opérateur non borné  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  défini par*

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in Y : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in Y.$$



**Théorème 2.4.6.** *Si  $\mathcal{A}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi-groupe sur  $Y$ , alors  $D(\mathcal{A})$  dense dans  $Y$  et  $\mathcal{A}$  est fermé.*

**Définition 2.4.7.** *Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné sur  $Y$  est dit monotone si*

$$\|\lambda x + Ax\|_Y \geq \|x\|_Y, \quad \forall x \in D(A), \quad \forall \lambda > 0.$$

*Dans ce cas, l'opérateur  $\mathcal{A} = -A$  est dit dissipatif.*

**Proposition 2.4.8.** *Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné sur  $X$  est monotone si et seulement si*

$$\Re(Ax, x)_X \geq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

**Remarque 2.4.9.** *Lorsque  $X$  est un espace réel,  $\Re(Ax, x)_X = (Ax, x)_X$ .*

**Définition 2.4.10.** *Un opérateur  $(A, D(A))$  linéaire non borné sur  $Y$  est dit maximal monotone si*

- (i)  *$A$  est monotone.*
- (ii)  *$\exists \lambda_0 > 0$  tel que l'image  $R(\lambda_0 x + Ax) = Y$ .*

*Dans ce cas, l'opérateur  $\mathcal{A} = -A$  est dit maximal dissipatif.*

**Proposition 2.4.11.** *Un opérateur maximal monotone (resp. dissipatif) sur un espace de Hilbert est à domaine dense.*

**Définition 2.4.12.** *Soit  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  un opérateur linéaire non borné sur  $Y$ .*

— *L'ensemble résolvant de  $\mathcal{A}$  est défini par*

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ existe et est continu de } Y \text{ dans } D(\mathcal{A})\}.$$

— *Le spectre de  $\mathcal{A}$ , noté  $\sigma(\mathcal{A})$ , est le complémentaire de l'ensemble résolvant*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}).$$

Pour l'existence de la solution du problème (2.26), on utilise le théorème de Lumer–Philips ou Hille–Yosida suivant [60] :

**Théorème 2.4.13** (Hille–Yosida). *Un opérateur linéaire non borné  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  sur  $Y$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contractions  $(T(t))_{t \geq 0}$  si et seulement si*

- (i)  *$\mathcal{A}$  est fermé et  $\overline{D(\mathcal{A})} = Y$ .*
- (ii) *L'ensemble résolvant  $\rho(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{A}$  contient  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  et pour tout  $\lambda > 0$*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

**Théorème 2.4.14** (Lumer–Phillips). *Soit  $(A, D(A))$  un opérateur linéaire non borné sur  $Y$  de domaine  $D(A)$  dense dans  $Y$ .  $\mathcal{A}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi-groupe de contractions si et seulement si il est maximal dissipatif.*

**Corollaire 2.4.15.** *Un opérateur linéaire non borné  $A$  sur un espace de Hilbert  $X$  est le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi-groupe de contractions si et seulement si il est maximal dissipatif.*

Par conséquent, l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.26) sont la conséquence du théorème suivant :

**Théorème 2.4.16.** *Soit  $(A, D(A))$  un opérateur linéaire non borné sur  $X$ . Supposons que  $-A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi-groupe de contractions  $(T(t))_{t \geq 0}$ . Alors,*

1. *Pour tout  $U_0 \in X$ , le problème (2.26) admet une unique solution faible*

$$U(t) = T(t)U_0 \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; X).$$

2. *Pour tout  $U_0 \in D(A)$ , le problème (2.26) admet une unique solution forte*

$$U(t) \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; X) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(A)).$$

**Remarque 2.4.17.** *Pour la résolution d'un problème non-homogène, c'est-à-dire le problème (2.26) avec un second membre  $f$  non nul, il suffit de rajouter dans le théorème 2.4.16 l'hypothèse de régularité  $f \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; X) \cap L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(A))$  ou  $W^{1,1}(\mathbb{R}_{> 0}; X)$  (voir proposition 4.1.6 de [25]). Dans ce cas, la solution est donnée par la formule de Duhamel*

$$U(t) = T(t)U_0 + \int_0^t T(t-s)f(s) ds.$$

## 2.4.2 Stabilité des semi-groupes

Après avoir rappelé quelques résultats concernant le caractère bien posé du système (2.26), nous abordons à discuter dans cette sous-section la stabilité en temps long de la solution, c'est-à-dire sa limite au voisinage de l'infini par rapport au temps et son taux de décroissance. Nous commençons d'abord par introduire la définition de la stabilité forte, exponentielle et polynomiale d'un  $C^0$ -semi-groupe.

**Définition 2.4.18.** *Soit  $(T(t))_{t \geq 0}$  un  $C^0$ -semi-groupe de contractions sur un espace de Hilbert  $X$  de générateur  $\mathcal{A}$ . On dit que le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  est*

— *Fortement stable si*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T(t)U_0\|_X = 0, \quad \forall U_0 \in X.$$

— Exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives  $C$  et  $\gamma$  telles que

$$\|T(t)U_0\|_X \leq C e^{-\gamma t} \|U_0\|_X, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall U_0 \in X.$$

— Polynomialement stable s'il existe deux constantes positives  $C$  et  $\alpha$  telles que

$$\|T(t)U_0\|_X \leq C t^{-\alpha} \|U_0\|_X, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall U_0 \in X.$$

Ensuite, pour démontrer la stabilité forte d'un  $C^0$ -semi-groupe, nous appliquons le théorème suivant dû à Arendt–Batty et Lyubich–Vu [3, 55].

**Théorème 2.4.19** (Arendt–Batty / Lyubich–Vu). *Soient  $X$  un espace de Banach réflexif et  $(T(t))_{t \geq 0}$  un  $C^0$ -semi-groupe borné sur  $X$  de générateur  $\mathcal{A}$ . Alors  $(T(t))_{t \geq 0}$  est fortement stable si*

1. *Aucune valeur propre de  $\mathcal{A}$  ne se trouve sur l'axe imaginaire.*
2.  *$i\mathbb{R} = \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \cap \sigma(\mathcal{A})$  est dénombrable.*

**Remarque 2.4.20.** *Si la résolvante  $(I - \mathcal{A})^{-1}$  de l'opérateur  $\mathcal{A}$  est compacte, alors  $\sigma(\mathcal{A})$  est égal à son spectre ponctuel qui est, par définition, formé par ses valeurs propres. Par conséquent, le théorème 2.4.19 se réduit à  $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ .*

Maintenant, lorsque le  $C^0$ -semi-groupe est fortement stable, nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles il est exponentiellement stable. En fait, les résultats de la stabilité exponentielle sont obtenus en utilisant différentes méthodes telles que la méthode des multiplicateurs, une approche dans le domaine fréquentiel, l'analyse microlocale etc. Dans cette thèse, nous utiliserons seulement la méthode fréquentielle qui a été introduite par Huang [47] et Prüss [60] :

**Théorème 2.4.21** (Prüss / Huang). *Un  $C^0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  de contractions sur un espace de Hilbert  $X$  de générateur  $\mathcal{A}$  est exponentiellement stable si et seulement si,*

$$\bullet \quad i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \tag{2.27}$$

et

$$\bullet \quad \sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty. \tag{2.28}$$

Nous allons voir que le  $C^0$ -semi-groupe associé à notre système Euler–Maxwell avec condition aux limites du conducteur parfait n'est pas exponentiellement stable. Nous cherchons donc un autre type de taux de décroissance comme la stabilité polynomiale. Nous commençons au chapitre 5 par étudier la stabilité polynomiale dans les deux cas. En général, les résultats de stabilité polynomiale sont également obtenus en utilisant différentes méthodes telles que la méthode de multiplicateurs, une approche dans le domaine fréquentiel, l'analyse de Fourier,

l'analyse microlocale ou une combinaison de ces méthodes etc. Nous allons utiliser dans ce mémoire la méthode fréquentielle proposée par Borichev et Tomilov dans [23, théorème 2.4].

**Théorème 2.4.22** (Borichev–Tomilov). *Un  $C^0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  de contractions sur un espace de Hilbert  $X$  de générateur  $\mathcal{A}$  satisfait*

$$\|T(t)U_0\|_X \leq C t^{-\frac{1}{\ell}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall t > 1, \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A})$$

ainsi que

$$\|T(t)U_0\|_X \leq C t^{-1} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}^\ell)}, \quad \forall t > 1, \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A}^\ell)$$

pour une certaine constante  $C > 0$  et pour un entier positif  $\ell$  si

- $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ ,

et

- $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta^\ell} \|(i\beta \mathbb{I} - \mathcal{A})^{-1}\| < +\infty.$  (2.29)



# Chapitre 3

## Caractère bien posé du modèle

Dans ce chapitre, nous établissons le caractère bien posé du modèle Euler–Maxwell en utilisant la théorie des semi-groupes §2.4.1. Nous étudions l’existence, l’unicité et la régularité de la solution avec différentes conditions aux limites à savoir la condition du conducteur parfait et la condition de Silver–Müller. Avant tout, nous réintroduisons le modèle et étudions quelques propriétés liées à l’anisotropie et à l’inhomogénéité du plasma.

### 3.1 Mise en place du problème

Considérons  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , i.e., un ouvert borné connexe à frontière  $\partial\Omega := \Gamma$  lipschitzienne. Rappelons que physiquement  $\Omega$  représente le volume de plasma dans le tokamak. Notons  $\mathbb{R}_{>0} = ]0, +\infty[$ . Considérons le système suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{E} + \Omega_{c1} \mathbf{J}_1 \times \mathbf{b} - \nu_1 \mathbf{J}_1, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{E} + \Omega_{c2} \mathbf{J}_2 \times \mathbf{b} - \nu_2 \mathbf{J}_2, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \mathbf{J}_s, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (3.4)$$

avec les conditions initiales à  $t = 0$  :

$$\mathbf{J}_1(0) = \mathbf{J}_{1,0}; \quad \mathbf{J}_2(0) = \mathbf{J}_{2,0}; \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.5)$$

Rappelons que  $\omega_{ps}$ ,  $\Omega_{cs}$ ,  $\nu_s$  sont des fonctions réelles scalaires qui dépendent de  $\mathbf{x}$ . De plus,  $\mathbf{b}$  est un champ de vecteur unitaire dépendant de  $\mathbf{x}$ .

Nous faisons l’hypothèse que la frontière  $\Gamma$  est divisée en deux parties  $\Gamma = \overline{\Gamma_A} \cup \overline{\Gamma_P}$ , avec  $\Gamma_A \cap \Gamma_P = \emptyset$ . Sur la partie physique  $\Gamma_P$ , il y a une condition aux limites

(métallique) du conducteur parfait usuelle. Sur  $\Gamma_A$ , qui peut être vide, il y a une condition aux limites de Silver–Müller non homogène.

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_P \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_\top = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \Gamma_A \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal unitaire extérieur à  $\Gamma$ ,  $\mathbf{B}_\top$  est la composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  tangente à la frontière  $\Gamma$ , et  $\mathbf{g}$  est une donnée définie sur  $\Gamma_A \times \mathbb{R}_{>0}$ .

**Remarque 3.1.1.** *Pour anticiper sur les chapitres suivants, on considère que les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  peuvent être à valeur dans  $\mathbb{C}^3$ , bien que physiquement ils soient évidemment dans  $\mathbb{R}^3$ . Par conséquent, tous les espaces fonctionnels que nous introduirons dans la suite de ce mémoire sont complexes.*

Nous souhaitons déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur  $\nu_s$ ,  $\omega_{ps}$  et  $\Omega_{cs}$ ,  $s = 1, 2$ , pour assurer que les problèmes (3.1)–(3.7) avec  $\Gamma_A = \emptyset$  ou non possèdent chacun une unique solution forte au sens de la théorie des semi-groupes. Nous résolvons ces problèmes dans un cadre fonctionnel minimal. Notre stratégie va consister à travailler dans l’espace  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)$  pour le champ électrique, dans l’espace  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  pour le champ magnétique (avec la condition aux limites de Silver–Müller) et dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  à poids pour les densités de courant. Les paramètres physiques  $\nu_s$  et  $\omega_{ps}$  pour chaque espèce sont positives par définition (1.8), tandis que  $\Omega_{cs}$  dépend du signe de la charge  $q_s$ . Dans tout le mémoire, nous prenons l’hypothèse suivante :

**Hypothèse 1.** *Nous supposons qu’il existe des nombres réels strictement positifs  $\nu^*$ ,  $\Omega^*$  et  $\omega^*$  tels que, pour presque tout  $\mathbf{x} \in \Omega$  et pour chaque espèce  $s$  (ions et électrons), on a :*

$$0 \leq \nu_s(\mathbf{x}) \leq \nu^*, \quad (3.8)$$

$$|\Omega_{cs}(\mathbf{x})| \leq \Omega^*, \quad (3.9)$$

$$0 < \omega_{ps}(\mathbf{x}) \leq \omega^*. \quad (3.10)$$

Pour  $s \in \{1, 2\}$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$  fixés, l’application  $\mathbf{v} \mapsto \Omega_{cs}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v} + \nu_s(\mathbf{x}) \mathbf{v}$  définie de  $\mathbb{C}^3$  vers lui-même est linéaire. Donc, il existe une matrice  $\mathbb{M}_s(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que :

$$\Omega_{cs}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v} + \nu_s(\mathbf{x}) \mathbf{v} = \mathbb{M}_s(\mathbf{x}) \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3. \quad (3.11)$$

Nous désignons par  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  la norme matricielle sur l’espace  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  induite par la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ . Rappelons quelques résultats classiques sur la matrice  $\mathbb{M}_s$  obtenus et présentés dans le mémoire [52].

**Proposition 3.1.2.** *Il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\|\lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}} < 1$ , pour tout  $s \in \{1, 2\}$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Alors, la matrice  $\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s$  est inversible pour tout  $s \in \{1, 2\}$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$ , où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité, et son inverse est uniformément borné sur  $\Omega$ .*

Ce résultat nous permet d'introduire la

**Définition 3.1.3.** *Soit  $\lambda$  donné par la proposition 3.1.2. Soit  $\mathbb{D}_\lambda : \Omega \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  la matrice*

$$\mathbb{D}_\lambda(\mathbf{x}) := \sum_s \omega_{ps}^2(\mathbf{x})(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.12)$$

Par convention, les sommes sur la variable  $s$  portent sur toutes les espèces de particules, c'est-à-dire de  $s = 1$  à 2 dans notre modèle.

**Proposition 3.1.4.** *La matrice  $\mathbb{D}_\lambda(\mathbf{x})$  est positive pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $\Omega$ . De plus, il existe  $\xi > 0$  tel que*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|\mathbb{D}_\lambda(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}} \leq \xi.$$

**Preuve.** Soit  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Pour montrer la positivité de  $\mathbb{D}_\lambda$ , il suffit de prouver que la matrice  $(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))^{-1}$  est positive pour  $s \in \{1, 2\}$ . Étant donné  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ , nous avons

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x})\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= |\mathbf{v}|^2 + \lambda \nu_s(\mathbf{x})|\mathbf{v}|^2 \stackrel{(3.8)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Alors,  $\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x})$  est positive. Ensuite, prenons  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , il existe  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\mathbf{w} = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))\boldsymbol{\eta}$ . Par conséquent, il s'ensuit que

$$(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \boldsymbol{\eta} \cdot (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))\boldsymbol{\eta} \geq 0.$$

Alors, la matrice  $(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))^{-1}$  est positive. La bornitude uniforme de  $\mathbb{D}_\lambda$  est une conséquence facile de l'hypothèse 1 et la proposition 3.1.2. ■

Pour établir le caractère bien posé du modèle, nous réécrivons le système (3.1)–(3.5) comme équation d'évolution du premier ordre

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \mathbb{A} \mathbf{U} &= 0, \\ \mathbf{U}(0) &= \mathbf{U}_0, \end{cases} \quad (3.13)$$

où le vecteur  $\mathbf{U}$  est

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix},$$



et  $\mathbb{A}$  est un opérateur linéaire formellement donné par l'expression

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_1 & 0 & -\varepsilon_0 \omega_{p1}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_2 & -\varepsilon_0 \omega_{p2}^2 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_0} & \frac{1}{\varepsilon_0} & 0 & -c^2 \mathbf{rot} \\ 0 & 0 & \mathbf{rot} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Les conditions aux limites (3.6)–(3.7) seront incluses dans le domaine de l'opérateur selon les cas. L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.13) découle du théorème classique 2.4.16, comme nous le verrons plus tard.

Nous introduisons les espaces  $L^2$  pondérés associés à chaque index d'espèce  $s$  :

$$\mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega) := \left\{ \mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable, t.q. } \int_{\Omega} \left| \frac{\mathbf{w}}{\omega_{ps}} \right|^2 d\Omega < +\infty, \right\}$$

i.e.,  $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega)$  si, et seulement si,  $\mathbf{w}/\omega_{ps} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , muni de sa norme canonique :

$$\|\mathbf{w}\|_{(s)} := \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega)} := \left\| \frac{\mathbf{w}}{\omega_{ps}} \right\|.$$

Au vu de la borne (3.10), on en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Lemme 3.1.5.** *Pour chaque  $s$  :*

1. *L'espace  $\mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .*
2. *Pour tout  $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , on a  $\omega_{ps}^2 \mathbf{w} \in \mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega)$ .*

Ensuite, nous introduisons l'espace d'énergie

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega),$$

et nous le munissons du produit scalaire défini pour tout  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top$  et  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4)^\top$  par

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_{\mathbf{X}} := \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \left( \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{V}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) + \varepsilon_0 (\mathbf{U}_3 | \mathbf{V}_3) + c^2 \varepsilon_0 (\mathbf{U}_4 | \mathbf{V}_4), \quad (3.15)$$

et de la norme associée  $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ .

## 3.2 Cas du conducteur parfait

Intéressons-nous tout d'abord au cas où  $\Gamma_A$  est vide. Nous supposons que le domaine  $\Omega$  est entouré par un conducteur parfait, ce qui signifie :

$$\mathbf{E}(t) \times \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \quad \forall t > 0 \quad (3.16)$$

$$\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \quad \forall t > 0. \quad (3.17)$$

Notons

$(\mathfrak{P}_1)$  : problème formé d'équations (3.1)–(3.5) avec condition aux limites (3.16).

Maintenant, nous définissons l'opérateur linéaire non borné  $\mathbb{A}_1 : D(\mathbb{A}_1) \subset \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  par

$$\begin{aligned} D(\mathbb{A}_1) &:= \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \\ \mathbb{A}_1 \mathbf{U} &:= \mathbb{A} \mathbf{U}, \quad \forall \mathbf{U} \in D(\mathbb{A}_1). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le fait que  $R(\mathbb{A}_1) \subset \mathbf{X}$  découle de la proposition 3.1.2 et du lemme 3.1.5. L'équation d'évolution abstraite (3.13) s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{U}(t) + \mathbb{A}_1 \mathbf{U}(t) = 0, \quad \text{pour } t > 0, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0. \quad (3.19)$$

**Proposition 3.2.1.** *L'opérateur  $\mathbb{A}_1$  est maximal monotone.*

**Preuve.** Tout d'abord, nous vérifions que  $\mathbb{A}_1$  est monotone. Étant donné  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_1)$ , on trouve, par la définition de  $\mathbb{A}$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbb{A} \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathbf{X}} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \left( \frac{\mathbb{M}_s \mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) - \sum_s (\mathbf{U}_3 | \mathbf{U}_s) + \sum_s (\mathbf{U}_s | \mathbf{U}_3) \\ &\quad - \varepsilon_0 (c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 | \mathbf{U}_3) + \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 | \mathbf{U}_4). \end{aligned}$$

Par le lemme 3.1.5,  $\mathbf{U}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  pour  $s = 1, 2$  aussi. En prenant la partie réelle de ce produit scalaire, on obtient :

$$\Re(\mathbb{A} \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \Re \left( \frac{\mathbb{M}_s \mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) - \varepsilon_0 c^2 \Re [(\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 | \mathbf{U}_3) - (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 | \mathbf{U}_4)]. \quad (3.20)$$

Mais, pour tout  $s = 1, 2$ , on a, selon la définition de  $\mathbb{M}_s$ ,

$$\begin{aligned} \Re \left( \frac{\mathbb{M}_s \mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) &= \Re \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) + \Re \left( \Omega_{cs} \mathbf{b} \times \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) \\ &= \Re \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ainsi, en injectant (3.21) dans (3.20) et en utilisant la formule de Green (2.1), la condition aux limites  $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$  et la condition (3.8), on obtient

$$\Re(\mathbb{A}_1 \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \Re \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) \geq 0. \quad (3.22)$$

D'où la monotonie de  $\mathbb{A}_1$ .

Passons maintenant au caractère maximal. Nous procédons par analyse et synthèse. Soit  $\lambda > 0$  donné par la proposition 3.1.2. Étant donné  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)^\top \in \mathbf{X}$  quelconque, nous recherchons  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_1)$  tel que

$$(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{A}_1) \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

Plus explicitement, cette équation s'écrit :

$$\mathbf{U}_1 + \lambda \mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1 - \lambda \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_1, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{U}_2 + \lambda \mathbb{M}_2 \mathbf{U}_2 - \lambda \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_2, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{U}_3 + \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \mathbf{U}_1 + \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \mathbf{U}_2 - \lambda c^2 \operatorname{rot} \mathbf{U}_4 = \mathbf{F}_3, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{U}_4 + \lambda \operatorname{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_4. \quad (3.26)$$

En supposant qu'une solution de  $\mathbf{U}$  de (3.23)–(3.26) existe, nous pouvons éliminer les équations (3.23), (3.24) et (3.26) respectivement :

$$\mathbf{U}_1 = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_1)^{-1} (\mathbf{F}_1 + \lambda \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3), \quad (3.27)$$

$$\mathbf{U}_2 = (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_2)^{-1} (\mathbf{F}_2 + \lambda \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3), \quad (3.28)$$

$$\mathbf{U}_4 = \mathbf{F}_4 - \lambda \operatorname{rot} \mathbf{U}_3. \quad (3.29)$$

En insérant ces trois expressions dans (3.25), on obtient, en fonction de  $\mathbf{U}_3$ ,

$$\mathbf{U}_3 + \lambda^2 c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{U}_3 + \lambda^2 \mathbb{D}_\lambda \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3 + \lambda c^2 \operatorname{rot} \mathbf{F}_4 - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \sum_s (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s. \quad (3.30)$$

En multipliant cette identité par une fonction-test  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$  et en appliquant la formule de Green (2.1), on trouve la formulation variationnelle suivante :

*Trouver  $\mathbf{U}_3 \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$  tel que*

$$a(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega) \quad (3.31)$$

où les formes  $a$  et  $L$  sont définies sur  $\mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)$  par :

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := (\mathbf{w} | \mathbf{v}) + \lambda^2 c^2 (\operatorname{rot} \mathbf{w} | \operatorname{rot} \mathbf{v}) + \lambda^2 (\mathbb{D}_\lambda \mathbf{w} | \mathbf{v}), \quad (3.32)$$

$$L(\mathbf{v}) := (\mathbf{F}_3 | \mathbf{v}) + \lambda c^2 (\mathbf{F}_4 | \operatorname{rot} \mathbf{v}) - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \sum_s ((\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s | \mathbf{v}). \quad (3.33)$$

Le problème (3.31) est bien posé. En effet, grâce à la proposition 3.1.4, la forme sesquilinéaire  $a$  est continue et coercive sur  $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ . La forme  $L$  est anti-linéaire, et par les propositions 3.1.2, 3.1.4 et le lemme 3.1.5, elle est évidemment continue sur  $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ . Donc, nous concluons par le théorème de Lax–Milgram l'existence d'une unique solution  $\mathbf{U}_3 \in \mathbf{H}_0(\operatorname{rot}; \Omega)$  à la formulation (3.31).

Maintenant, revenons au problème (3.23)–(3.26). Nous définissons  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  par (3.27) et (3.28). Encore, par la proposition 3.1.2 et le lemme 3.1.5, ils appartiennent respectivement à  $\mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega)$ . Aussi, nous définissons  $\mathbf{U}_4$  par (3.29) ; il appartient à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Ensuite, si nous prenons  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$  comme fonction-test dans la formulation (3.31) et utilisons la formule de Green (2.1), nous obtenons l'équation (3.30). Alors, par définition de  $\mathbf{U}_4$ , nous pouvons écrire cette équation comme

$$\mathbf{U}_3 - \lambda c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 + \lambda^2 \mathbb{D}_\lambda \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3 - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \sum_s (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s. \quad (3.34)$$

Cette équation, d'une part, implique que  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , et d'autre part est équivalente à (3.25) (il suffit juste de remplacer  $\mathbb{D}_\lambda$  par son expression). Par conséquent, le quadruple  $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)$  appartient à  $D(\mathbb{A}_1)$  et il résout les équations (3.23)–(3.26). La preuve est terminée. ■

Énonçons maintenant le résultat principal de cette section lorsque les coefficients physiques  $\nu_s$ ,  $\Omega_{c,s}$  et  $\omega_{ps}$  satisfont respectivement les conditions (3.8), (3.9) et (3.10).

**Théorème 3.2.2.** *L'opérateur  $-\mathbb{A}_1$  génère un  $C^0$ -semi-groupe de contraction  $(T_1(t))_{t \geq 0}$  sur l'espace d'énergie  $\mathbf{X}$ . Ainsi, pour tout  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}$ , il existe une solution unique  $\mathbf{U} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X})$ , donnée par  $\mathbf{U}(t) = T_1(t) \mathbf{U}_0$ , qui résout le problème  $(\mathfrak{P}_1)$ .*

*De plus, si  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_1)$ , alors*

$$\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(\mathbb{A}_1)).$$

*En outre, nous avons  $\|\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathbf{U}_0\|_{\mathbf{X}}$  et  $\|\partial_t \mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathbb{A}_1 \mathbf{U}_0\|_{\mathbf{X}}$ .*

**Preuve.** La proposition précédente implique que l'opérateur  $-\mathbb{A}_1$  est maximal dissipatif. Par conséquent, nous pouvons appliquer le corollaire 2.4.15 et le théorème 2.4.16 pour obtenir le résultat. ■

### 3.3 Cas de la condition de Silver–Müller

Maintenant, nous supposons que  $\Gamma_A$  est non vide. Les sous-ensembles  $\overline{\Gamma_A}$  et  $\overline{\Gamma_P}$  sont des sous-variétés compactes lipschitziennes de  $\Gamma$ . Ici, nous ne supposons pas nécessairement que  $\partial\Gamma_A \cap \partial\Gamma_P = \emptyset$  (i.e., nous considérons à la fois des problèmes extérieurs et intérieurs tronqués dans la terminologie de [4]) mais nous supposons que  $\Gamma_A$  n'est pas trop irrégulière. Une condition suffisante est de supposer que  $\Gamma_A$  soit lisse, ou polyédrique sans ce qu'on appelle *des sommets pathologiques* [4, p. 204] (voir propositions 2.1.1 et 2.1.2). Cette exigence n'est pas très stricte ; elle

peut toujours être satisfaite dans le cas absorbant, où  $\Gamma_A$  apparaît comme une frontière artificielle, dont l'emplacement exact et la forme sont dans une certaine mesure arbitraires. Une condition aux limites de Silver–Müller est imposée sur l'antenne  $\Gamma_A$ , (3.7), et une condition aux limites du conducteur parfait sur le reste de la frontière  $\Gamma_P$ , (3.6). Notre objectif est de résoudre le problème (3.13) avec ces conditions aux limites. Tout d'abord, nous allons commencer par le cas homogène (ou absorbant),  $\mathbf{g} = 0$ , et ensuite nous passons au cas général  $\mathbf{g} \neq 0$ .

Notons :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{P}_2) &: \text{problème formé d'équations (3.1)–(3.5) avec conditions aux limites} \\ &\quad (3.6) - (3.7). \\ (\mathfrak{P}_2)_{hom} &: \text{problème } (\mathfrak{P}_2) \text{ avec } \mathbf{g} = 0. \end{aligned}$$

### 3.3.1 Condition aux limites homogène (absorbante)

Définissons l'opérateur linéaire non borné  $\mathbb{A}_2 : D(\mathbb{A}_2) \subset \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$  comme

$$D(\mathbb{A}_2) := \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega) \times \mathcal{H},$$

où

$$\mathcal{H} = \{(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4) \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{n} + c \mathbf{V}_4 \top = 0 \text{ sur } \Gamma_A\},$$

et

$$\mathbb{A}_2 \mathbf{U} := \mathbb{A} \mathbf{U}, \quad \forall \mathbf{U} \in D(\mathbb{A}_2). \quad (3.35)$$

Par conséquent, l'équation d'évolution abstraite (3.13) s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{U}(t) + \mathbb{A}_2 \mathbf{U}(t) = 0, \quad \text{pour } t > 0, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0. \quad (3.36)$$

Pour montrer que le problème ci-dessus est bien posé, nous introduisons l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) : \mathbf{v}_\top \in \mathbf{L}^2(\Gamma_A)\} \quad (3.37)$$

que nous munirons du produit scalaire

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{\mathcal{V}} := (\mathbf{w} \mid \mathbf{v}) + (\mathbf{rot} \mathbf{w} \mid \mathbf{rot} \mathbf{v}) + (\mathbf{w}_\top \mid \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A}. \quad (3.38)$$

Ci-dessus,  $(\cdot \mid \cdot)_{\Gamma_A}$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbf{L}^2(\Gamma_A)$ .

Nous procédons de la même façon qu'au §3.2 pour prouver le caractère bien posé du problème (3.36) c'est-à-dire en montrant que  $\mathbb{A}_2$  est maximal monotone. Dans les preuves, ci-dessous, nous nous concentrons principalement sur les différences avec la sous-section 3.2. Ces différences portent uniquement sur les conditions aux limites : il s'agit de rajouter un terme du bord dans les formules d'intégration par parties.

**Proposition 3.3.1.** *L'opérateur  $\mathbb{A}_2$  est maximal monotone.*

**Preuve.** Commençons par prouver la monotonie de  $\mathbb{A}_2$ . Choisissons un élément  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top$  dans  $D(\mathbb{A}_2)$ . L'inégalité (3.20) est toujours vérifiée ; elle ne repose que sur l'expression de  $\mathbb{A}$  dans  $\Omega$ , pas sur les conditions aux limites. Comme  $\mathbf{U}_3 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)$ , nous obtenons par la formule d'intégration par parties (2.3) :

$$\Re[(\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 | \mathbf{U}_3) - (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 | \mathbf{U}_4)] = \Re(\gamma_A^0 \langle \mathbf{U}_3 \times \mathbf{n}, \mathbf{U}_{4\top} \rangle_{\pi_A}).$$

Maintenant, nous utilisons la condition aux limites de Silver–Müller  $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{n} + c \mathbf{U}_{4\top} = 0$  sur  $\Gamma_A$ . Nous remarquons que  $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{n}$  et  $\mathbf{U}_{4\top}$  appartiennent tous deux à  $\mathbf{TT}(\Gamma_A) \cap \mathbf{TC}(\Gamma_A) \subset \mathbf{L}_t^2(\Gamma_A)$  comme dit dans §2. Alors, il suit que

$$\Re(\gamma_A^0 \langle \mathbf{U}_3 \times \mathbf{n}, \mathbf{U}_{4\top} \rangle_{\pi_A}) = -c \|\mathbf{U}_{4\top}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2. \quad (3.39)$$

Nous concluons donc de (3.20) que

$$\Re(\mathbb{A}_2 \mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) + \varepsilon_0 c^3 \|\mathbf{U}_{4\top}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \geq 0, \quad (3.40)$$

ce qui donne la monotonie de l'opérateur  $\mathbb{A}_2$ .

Maintenant, nous montrons la maximalité de  $\mathbb{A}_2$ . Encore une fois, nous utilisons le même  $\lambda > 0$  donné par la proposition 3.1.2. Étant donné n'importe quel  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)^\top \in \mathbf{X}$ , nous cherchons  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_2)$  tel que

$$(\mathbb{I} + \lambda \mathbb{A}_2) \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

ce qui est équivalent au système (3.23)–(3.26) (plus les conditions aux limites). En suivant le même argument que dans la proposition 3.2.1, nous pouvons éliminer  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$  et  $\mathbf{U}_4$ , et ils sont donnés respectivement par (3.27), (3.28) et (3.29), tandis que  $\mathbf{U}_3$  vérifie l'équation :

$$\mathbf{U}_3 + \lambda^2 c^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{U}_3 + \lambda^2 \mathbb{D}_\lambda \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3 + \lambda c^2 \mathbf{rot} \mathbf{F}_4 - \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \sum_s (\mathbb{I} + \lambda \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s. \quad (3.42)$$

Ainsi, en multipliant (3.42) par une fonction-test  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , en appliquant la formule de Green (2.3), et en utilisant la condition aux limites de Silver–Müller et l'expression (3.29), on arrive à la formulation variationnelle :

Trouver  $\mathbf{U}_3 \in \mathcal{V}$  tel que

$$\tilde{a}(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.43)$$

avec la forme sesquilinéaire  $\tilde{a}$  définie par :

$$\tilde{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \lambda c(\mathbf{w}_\top | \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A}, \quad (3.44)$$

et les formes  $a$  et  $L$  données respectivement par (3.32) et (3.33).

Comme la forme  $a$  est coercive sur  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  (proposition 3.2.1), la forme  $\tilde{a}$  est coercive sur  $\mathcal{V}$ . Alors, par le théorème de Lax–Milgram, le problème (3.43) admet une unique solution  $\mathbf{U}_3 \in \mathcal{V}$ . Définissons  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$  et  $\mathbf{U}_4$  respectivement par (3.27), (3.28) et (3.29), ils appartiennent respectivement à  $\mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . En prenant une fonction-test  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$  dans (3.43), nous trouvons l'équation (3.42) qui est équivalente à (3.25). Donc,  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)$  satisfait formellement l'équation (3.41), et afin de prouver qu'il appartient à  $D(\mathbb{A}_2)$  il ne reste plus qu'à vérifier la condition aux limites de Silver–Müller homogène sur  $\Gamma_A$ . À cette fin, en utilisant la formule d'intégration par parties (2.3) dans (3.43) et la définition de  $\mathbf{U}_4$ , il découle de l'identité (3.42) que :

$$\lambda c(\mathbf{U}_{3\top} | \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A} - \lambda c^2_{\gamma_A} \langle \mathbf{U}_4 \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_\top \rangle_{\pi_A^0} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (3.45)$$

Soient  $\boldsymbol{\omega} \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$  et  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  son extension par 0 à toute la frontière. Par la surjectivité de l'application trace, il existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tel que  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{v}|_\Gamma$ ; clairement,  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Puis, en appliquant les formules d'intégration par parties (2.3), (2.2) à  $\mathbf{U}_4$  et  $\mathbf{v}$ , on obtient que

$$\gamma_A \langle \mathbf{U}_4 \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_\top \rangle_{\pi_A^0} = \langle \mathbf{U}_4 \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)}. \quad (3.46)$$

En rappelant que  $\mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{v}_\top + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{n}$ , il s'ensuit que  $(\mathbf{U}_{3\top} | \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A} = (\mathbf{U}_{3\top} | \mathbf{v})_{\Gamma_A}$ . En utilisant (3.46) et l'identité précédente, Eq. (3.45) devient :

$$(\mathbf{U}_{3\top} | \mathbf{v})_{\Gamma_A} - c \langle \mathbf{U}_4 \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)} = 0. \quad (3.47)$$

Comme  $\mathbf{v}|_{\Gamma_A} = \boldsymbol{\omega}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  est arbitraire dans  $\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$ , on conclut de (3.47) que  $\mathbf{U}_{3\top} - c \mathbf{U}_4 \times \mathbf{n} = 0$  dans  $\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$  ce qui est équivalent à  $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{n} + c \mathbf{U}_{4\top} = 0$  dans  $\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$ , et donc aussi dans  $\mathbf{L}^2(\Gamma_A)$  car  $\mathbf{U}_{3\top}$  est dans  $\mathbf{L}^2(\Gamma_A)$  (plus un argument de densité). Cela achève la démonstration. ■

Cette proposition nous permet de déduire le caractère bien posé du problème  $(\mathfrak{P}_2)_{hom}$  sous l'hypothèse 1 :

**Théorème 3.3.2.** *L'opérateur  $-\mathbb{A}_2$  génère un  $C^0$ -semi-groupe de contractions  $(T_2(t))_{t \geq 0}$  sur l'espace d'énergie  $\mathbf{X}$ . Ainsi, pour tout  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}$ , il existe une unique solution  $\mathbf{U} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X})$ , donnée par  $\mathbf{U}(t) = T_2(t)\mathbf{U}_0$ , qui résout le problème  $(\mathfrak{P}_2)_{hom}$ .*

De plus, si  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_2)$ , alors

$$\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(\mathbb{A}_2)).$$

En outre, nous avons  $\|\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathbf{U}_0\|_{\mathbf{X}}$  et  $\|\partial_t \mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathbb{A}_2 \mathbf{U}_0\|_{\mathbf{X}}$ .

**Preuve.** Entièrement semblable au théorème 3.2.2. ■

**Remarque 3.3.3.** *L'utilité des hypothèses sur  $\Gamma_A$  est d'assurer l'inclusion dans  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_A)$  de l'espace  $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) \cap \mathbf{TC}(\Gamma_A)$  pour pouvoir obtenir l'égalité (3.39) qui donne la monotonie de l'opérateur  $\mathbb{A}_2$ . Bien entendu, nous pouvons prouver ce résultat autrement, sans ces hypothèses, en changeant le domaine : il suffit de remplacer dans la définition de  $D(\mathbb{A}_2)$  l'espace  $\mathcal{H}$  par l'ensemble suivant*

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4) \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_A), \mathbf{V}_{4\top} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_A) \\ \text{satisfaisant } \mathbf{V}_3 \times \mathbf{n} + c \mathbf{V}_{4\top} = 0 \text{ sur } \Gamma_A\}. \end{aligned}$$

En fait, c'est la définition habituelle du domaine dans l'étude des équations du Maxwell avec condition aux limites de Silver–Müller homogène (voir par exemple [58]). En revanche, dans ce mémoire nous nous intéressons aussi au cas non homogène (caractère bien posé §3.3.2, convergence vers le régime harmonique §5.3). Comme ce cas est lié au cas homogène, avec le nouveau domaine la donnée  $\mathbf{g}$  devrait appartenir à  $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) \cap \mathbf{L}^2(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A) \cap \mathbf{L}^2(\Gamma_A)$  au lieu de  $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$ . Donc, cela restreint les valeurs possibles de  $\mathbf{g}$ . Pour cela, nous choisissons d'étudier le cas le plus général sur  $\mathbf{g}$  en imposant des conditions sur  $\Gamma_A$ .

### 3.3.2 Condition aux limites générale (non homogène)

Ici, nous supposons que  $\mathbf{g} \neq 0$  dans (3.7). Nous allons résoudre le problème d'évolution en utilisant un relèvement de la donnée aux limites  $\mathbf{g}$ . À cette fin, nous introduisons l'application :

$$\begin{aligned} Z_A : \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) &\rightarrow \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A) \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \gamma_{\top}(\mathbf{v}) + c\pi_{\top}(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Il est clair que  $Z_A$  est linéaire et continue, et en raison de la surjectivité de  $\gamma_{\top}$  et  $\pi_{\top}$  (voir la définition de  $\widetilde{\mathbf{TT}}$  et  $\mathbf{TC}$ ),  $Z_A$  est aussi surjective. Donc, nous en déduisons que  $Z_A$  est bijective de  $(\ker Z_A)^{\perp}$  vers  $\widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$  et nous notons son inverse par  $R_A$ . D'après le théorème de Banach–Schauder,  $R_A$  est continue.

Nous supposons la régularité suivante sur la donnée aux limites  $\mathbf{g}$  :

$$\mathbf{g} \in W^{2,1}(\mathbb{R}_{>0}; \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)). \quad (3.48)$$



D'après le paragraphe précédent, pour tout  $t \geq 0$  il existe  $(\mathbf{g}_3(t), \mathbf{g}_4(t)) \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  tel que

$$(\mathbf{g}_3(t), \mathbf{g}_4(t)) = R_A[\mathbf{g}(t)], \quad \text{i.e.,} \quad \mathbf{g}_3(t) \times \mathbf{n} + c \mathbf{g}_{4\top}(t) = \mathbf{g}(t) \text{ sur } \Gamma_A, \quad (3.49)$$

et les fonctions  $(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$  ont la régularité suivante :

$$(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4) \in W^{2,1}(\mathbb{R}_{>0}; \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)). \quad (3.50)$$

Comme dit plus haut, à l'aide du couple  $(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ , nous reformulons le problème  $(\mathfrak{P}_2)$  pour satisfaire la condition aux limites de Silver–Müller homogène et nous utilisons le théorème 3.3.2 pour conclure. Nous avons le résultat suivant.

**Théorème 3.3.4.** *Supposons que les données initiales satisfassent :*

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{1,0} \in \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega), & \mathbf{J}_{2,0} \in \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega), \\ \mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega), & \mathbf{B}_0 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \\ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_{0\top} = \mathbf{g}(0) & \text{sur } \Gamma_A, \end{cases} \quad (3.51)$$

et  $\mathbf{g}$  est de régularité (3.48), qui donne un sens à la valeur initiale  $\mathbf{g}(0)$ . Alors, il existe une et une seule solution  $\mathbf{U} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}, \mathbf{B})^\top$  au problème  $(\mathfrak{P}_2)$ , telle que ses composantes aient la régularité suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2) &\in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega)), \\ \mathbf{E} &\in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)), \\ \mathbf{B} &\in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)). \end{aligned}$$

**Preuve.** Définissons  $(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$  par (3.49), et introduisons l'inconnue auxiliaire  $\mathbf{U}^* = (\mathbf{J}_1^*, \mathbf{J}_2^*, \mathbf{E}^*, \mathbf{B}^*)^\top$  :

$$\mathbf{J}_1^* = \mathbf{J}_1, \quad \mathbf{J}_2^* = \mathbf{J}_2, \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \mathbf{g}_4.$$

Si une solution  $(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}, \mathbf{B})^\top$  comme ci-dessus existe alors, par construction, le champ  $\mathbf{U}^*(t)$  appartient à  $D(\mathbb{A}_2)$  pour tout  $t \geq 0$ . De plus, il est régi par les équations d'évolution

$$\partial_t \mathbf{U}^* + \mathbb{A} \mathbf{U}^* = \mathbf{F}, \quad t > 0, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{U}^*(0) = \mathbf{U}_0^*, \quad (3.53)$$

avec des données

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{g}_3 \\ \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{g}_3 \\ -\partial_t \mathbf{g}_3 + c^2 \mathbf{rot} \mathbf{g}_4 \\ -\partial_t \mathbf{g}_4 - \mathbf{rot} \mathbf{g}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_0^* = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{1,0} \\ \mathbf{J}_{2,0} \\ \mathbf{E}_0 - \mathbf{g}_3(0) \\ \mathbf{B}_0 - \mathbf{g}_4(0) \end{pmatrix}.$$

Grâce à (3.50) et le lemme 3.1.5, on voit que  $\mathbf{F} \in W^{1,1}(\mathbb{R}_{>0}; \mathbf{X})$ ; et, évidemment,  $\mathbf{U}_0^* \in D(\mathbb{A}_2)$ . Donc, le problème (3.52)–(3.53) admet une unique solution forte (voir [25, proposition 4.1.6] ou remarque 2.4.17), avec régularité  $\mathbf{U}^* \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(\mathbb{A}_2))$ , qui dépend continûment des données  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{U}_0^*$ . Par conséquent, nous obtenons l'existence de

$$\mathbf{U} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}, \mathbf{B})^\top = (\mathbf{J}_1^*, \mathbf{J}_2^*, \mathbf{E}^* + \mathbf{g}_3, \mathbf{B}^* + \mathbf{g}_4)^\top$$

solution de (3.13) avec condition aux limites (3.6)–(3.7), et dépendant continûment des données  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{U}_0$ . Pour obtenir l'unicité, on remarque que la différence de deux solutions résout le problème homogène (3.36) avec une donnée initiale nulle. Donc, elle est nulle, ce qui donne l'unicité. ■

### 3.4 À propos des équations de contrainte

Suivant le schéma habituel en électromagnétisme, les contraintes sur les champs : équations de divergence

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (3.54)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (3.55)$$

condition aux limites magnétique

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_P \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (3.56)$$

sont préservées par le semi-groupe d'évolution, à condition qu'elles soient vérifiées à  $t = 0$  et que les sources  $(\rho, \mathbf{J}) := \sum_s (\rho_s, \mathbf{J}_s)$  satisfassent l'équation de conservation de charge  $\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ . En fait, une fois que l'existence et l'unicité de la solution au modèle couplé sont obtenues, les variables électromagnétiques  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  apparaissent naturellement comme la solution des équations de Maxwell avec des données  $(\rho, \mathbf{J})$ .

Le théorème suivant est valable pour les conditions de Silver–Müller homogène et non homogène et dans le cas du conducteur parfait : on procède de la même façon en remplaçant  $\Gamma_P$  par  $\Gamma$ . Rappelons que, pour les notations, les espaces  $\mathbf{H}_{0,\Gamma}(\mathbf{rot}; \Omega)$  et  $\mathbf{H}_{0,\Gamma}(\operatorname{div}; \Omega)$  sont égaux respectivement à  $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$  et  $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega)$ .

**Théorème 3.4.1.** *Supposons que*

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{\rho(0)}{\varepsilon_0}, \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_P,$$

*et que l'équation de conservation de charge*

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}(t) = 0 \quad \text{est vérifiée dans } \Omega \text{ pour p.p. } t > 0.$$

Alors, pour tout  $t > 0$ , le champ électrique  $\mathbf{E}$  satisfait (3.54) et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  satisfait (3.55) et (3.56).

**Preuve.** Soit  $t \geq 0$ . Tout d'abord, nous étudions la divergence du champ magnétique. Appliquons la divergence à l'équation de Faraday (3.4), nous obtenons

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t}\right) = 0,$$

et par [4, théorème 2.3.13], l'identité précédente devient  $\partial_t \operatorname{div} \mathbf{B}(t) = 0$ . Comme, par hypothèse,  $\mathbf{B}$  est de divergence nulle à  $t = 0$ , on conclut que  $\operatorname{div} \mathbf{B}(t) = 0$ , pour tout  $t > 0$ .

Maintenant, nous retrouvons la divergence du champ électrique. Comme précédemment, nous appliquons cette fois la divergence à l'équation d'Ampère (3.3) et utilisons encore [4, théorème 2.3.13], ainsi nous trouvons, par hypothèse, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E}(t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{J}(t) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Mais, à  $t = 0$ , nous avons  $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(0)$ , donc par (3.57) nous déduisons l'équation de divergence de  $\mathbf{E}$  pour tout  $t > 0$ .

Il nous reste la condition aux limites magnétique. Étant donné  $t \geq 0$ , d'après les théorèmes 3.3.2 et 3.3.4, on a  $\mathbf{E}(t) \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)$ . Par conséquent, en raison du théorème 7 de [26], on a  $\mathbf{rot} \mathbf{E} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$  et  $\mathbf{rot} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_P} = 0$  dans  $\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)$  (voir [41] ou la preuve du théorème 4.3 de [52]). Rappelons que les résultats concernant le caractère bien posé du modèle indiquent que  $\mathbf{B} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{L}^2(\Omega))$ . En utilisant le fait que  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , on obtient  $\mathbf{B} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega))$ . Comme l'application trace normale  $\gamma_n$  est continue de  $\mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega)$  dans  $\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)$ , on déduit de [4, proposition 2.3.5] que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_P} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P)). \quad (3.58)$$

Maintenant, appliquons-nous [4, théorème 2.3.13] à  $\gamma_n$  et  $\mathbf{B}$ , on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_P}) = \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_P} \quad (3.59)$$

dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{>0}; \tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_P))$ . Ensuite, en prenant la trace normale des deux l'équation de Faraday (3.4) et en utilisant les équations (3.58) et (3.59), on prouve que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_P}) = 0.$$

Par hypothèse, la trace normale de  $\mathbf{B}$  à  $t = 0$  est nulle, donc nous concluons que  $\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_P} = 0$  et cela est vrai pour tout  $t > 0$ . ■

**Remarque 3.4.2.** *Définissons les espaces fonctionnels suivant*

$$\mathbf{X}_1 := \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0; \Omega),$$

$$\mathbf{X}_2 := \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\operatorname{div} 0; \Omega)$$

$$\text{et } \mathbf{Y} := \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega).$$

Alors, pour  $\ell = 1, 2$ , l'image  $R(\mathbb{A}_\ell)$  de  $\mathbb{A}_\ell$  est incluse dans  $\mathbf{X}_\ell$ . Il suffit d'utiliser l'implication si  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)$  alors  $\mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\operatorname{div} 0; \Omega)$ . De plus, d'après le théorème 3.4.1, nous concluons que l'espace  $\mathbf{X}_\ell$  est stable par le semi-groupe  $(T_\ell(t))_{t \geq 0}$  et nous obtenons les résultats de régularité suivants :

- Pour tout  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_1) \cap \mathbf{X}_1$ , il existe un unique

$$\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_1) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(\mathbb{A}_1) \cap \mathbf{X}_1)$$

solution du système d'équations (3.1)–(3.5) et (3.55) avec les conditions aux limites (3.16)–(3.17).

- Pour tout  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_2) \cap \mathbf{X}_2$ , il existe un unique

$$\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_2) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(\mathbb{A}_2) \cap \mathbf{X}_2)$$

solution du système d'équations (3.1)–(3.5) et (3.55) avec les conditions aux limites homogènes (3.6)–(3.56).

- Pour tout  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_2$  satisfaisant (3.51), il existe un unique

$$\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_2) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{Y} \cap \mathbf{X}_2)$$

solution du système d'équations (3.1)–(3.5) et (3.55) avec les conditions aux limites (3.6)–(3.56).

Aussi, si on prend seulement  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_\ell$ , le problème admet une solution faible  $\mathbf{U} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_\ell)$ .

### 3.5 Caractère bien posé du modèle avec condition de Silver–Müller sur tout le bord

Nous rappelons que l'étude du modèle avec condition de Silver–Müller a été faite avec  $\Gamma_P$  quelconque. Ici nous supposons que  $\Gamma_P$  est vide, alors dans ce cas,  $\Gamma_A = \Gamma = \partial\Omega$  et il y a seulement la condition de Silver–Müller :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_\top = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \Gamma. \quad (3.60)$$

Nous définissons les problèmes suivants :

$(\mathfrak{P}_3)$  : problème formé d'équations (3.1)–(3.5) avec condition aux limites (3.60).

$(\mathfrak{P}_3)_{\text{hom}}$  : problème  $(\mathfrak{P}_3)$  avec  $\mathbf{g} = 0$ .

Le problème  $(\mathfrak{P}_3)$  est bien posé sous l'hypothèse 1. La preuve est une conséquence immédiate du travail fait dans §3.3. En fait nous pouvons étendre les résultats obtenus dans §3.3, où la condition de Silver-Müller est imposée sur une partie du bord, au cas où  $\Gamma_P = \emptyset$ . Soulignons que nous n'avons pas utilisé le fait que  $\Gamma_P \neq \emptyset$  dans les démonstrations. Les deux cas sont différenciés par leurs espaces. Dans ce cas, nous supposons que

$$\mathbf{g} \in W^{2,1}(\mathbb{R}_{>0}; \mathbf{TT}(\Gamma) + \mathbf{TC}(\Gamma)),$$

et que  $\Gamma$  soit lisse et donc nous pouvons appliquer la proposition 2.1.1. Après le caractère bien posé du modèle, nous pouvons récupérer aussi les contraintes comme dans §3.4. Pour le champ magnétique, il n'y a pas de contrainte sur la trace normale.

# Chapitre 4

## Étude asymptotique

### Introduction

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés au caractère bien posé du modèle Euler–Maxwell dans le cas du conducteur parfait,  $(\mathfrak{P}_1)$ , puis avec une condition aux limites de Silver–Müller,  $(\mathfrak{P}_2)$ . Nous avons montré l’existence d’une unique solution forte dans chaque cas dans un cadre fonctionnel minimal sous l’hypothèse 1. Ensuite, nous avons récupéré les contraintes sur le champ électromagnétique. Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier le comportement asymptotique de la solution en temps long dans chaque cas. Bien sûr, nous traitons toujours le cas inhomogène et anisotrope. Pour cela, nous définissons l’énergie de notre modèle, qui est proportionnelle à la norme au carré de la solution sur l’espace  $\mathbf{X}$ ,

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \left\| \frac{\mathbf{J}_s(t)}{\omega_{ps}} \right\|^2 + \varepsilon_0 \|\mathbf{E}(t)\|^2 + c^2 \varepsilon_0 \|\mathbf{B}(t)\|^2 \right).$$

Avec la définition (1.8) de la fréquence plasma, le terme donné par les variables  $\mathbf{J}_s$  s’interprète comme l’énergie cinétique des particules :  $\left| \frac{\mathbf{J}_s}{\omega_{ps}} \right|^2 \propto n_s |\mathbf{u}_s|^2$  à l’ordre dominant dans le paramètre de perturbation  $\epsilon$  (voir §1.8) ; tandis que la partie en  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  est l’énergie électromagnétique de l’onde. Le choix de la norme de l’espace  $\mathbf{X}$  fait du modèle Euler–Maxwell un problème dissipatif. En effet, étant donné  $\mathbf{U}_0$  satisfaisant la condition (3.51), alors  $\mathcal{E}(t)$  appartient à  $C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X})$  et on a

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_s \partial_t \mathbf{J}_s(t) \cdot \frac{\overline{\mathbf{J}_s(t)}}{\varepsilon_0 \omega_{ps}^2} + \partial_t \mathbf{E}(t) \cdot \varepsilon_0 \overline{\mathbf{E}(t)} + \partial_t \mathbf{B}(t) \cdot \varepsilon_0 c^2 \overline{\mathbf{B}(t)} \right\} d\Omega.$$

En remplaçant chaque dérivée par son expression dans (3.1)-(3.4) et en utilisant les conditions aux limites (3.6)-(3.7) et la formule de Green (2.1), on trouve que :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \left\| \frac{\sqrt{\nu_s} \mathbf{J}_s(t)}{\omega_{ps}} \right\|^2 - \varepsilon_0 c^2 \int_{\Gamma_A} (c |\mathbf{B}_\top(t)|^2 - \mathbf{g}(t) \cdot \overline{\mathbf{B}_\top(t)}) d\Gamma. \quad (4.1)$$

Ici,  $\Gamma_A$  est quelconque : elle peut être vide ou non. L'équation ci-dessus montre que l'énergie est décroissante (au sens large) si  $\Gamma_A = \emptyset$  ou  $\mathbf{g} = 0$ . D'autre part, si  $\Gamma_A = \emptyset$  et  $\nu_s = 0$ , la dérivée s'annule et  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$  pour tout  $t > 0$ , donc l'énergie est conservée. Cela justifie qu'on ait besoin, dans tous les cas, d'une hypothèse supplémentaire sur les paramètres physiques pour garantir la convergence de la solution vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. Donc, nous étudierons la décroissance de l'énergie dans les deux cas suivants : conducteur parfait ( $\Gamma_A = \emptyset$ ) et condition de Silver-Müller homogène ( $\Gamma_A \neq \emptyset$  et  $\mathbf{g} = 0$ ).

Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 1, l'onde électromagnétique va transmettre son énergie au plasma et le chauffer. En prenant  $\mathbf{J}_s = 0$ , pour  $s = 1, 2$ , et aussi  $\mathbf{g} = 0$ , nous déduisons de l'équation (4.1) la décroissance de l'énergie du système de Maxwell avec conditions mêlées (3.3)-(3.7). L'étude du comportement en temps long de cette énergie a été fait par H. Barucq dans sa thèse [11]. Elle a montré avec B. Hanouzet [12, 13], en supposant que la frontière  $\partial\Omega$  du domaine est régulière et que  $\partial\Gamma_A \cap \partial\Gamma_P = \emptyset$ , que  $\mathcal{E}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  sur l'orthogonal des solutions stationnaires du système lorsque les données initiales satisfont  $\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_P$ . La démonstration repose sur une méthode proposée dans [32] pour l'équation des ondes et utilise les propriétés du semi-groupe associé au problème. Ici, les équations de contraintes sur le champ électromagnétique jouent un rôle important dans l'étude de la stabilité, en particulier l'ensemble des solutions stationnaires est de dimension finie et par conséquent on peut caractériser la limite de l'énergie par la projection des données initiales sur cet ensemble comme dans [12, 13]. Ainsi, le domaine de l'opérateur associé à ce problème est constitué des éléments de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} 0; \Omega)$  vérifiant les conditions aux limites. La condition de régularité sur la frontière, le fait que l'intersection du bord de  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_A$  est vide et que  $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$  et  $\mathbf{B}_\top$  appartiennent tous deux à  $\mathbf{TT}(\Gamma_A) \cap \mathbf{TC}(\Gamma_A)$  grâce à la condition de Silver-Müller homogène permettent de conclure que le domaine de l'opérateur coïncide avec l'espace formé des éléments de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  à divergence nulle satisfaisant les mêmes conditions aux limites (voir théorème 2 et corollaire 2.2 de [11] pour la démonstration). (Nous renvoyons le lecteur intéressé par d'autres résultats d'injection continue dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  à [45].) Notons que ce nouvel espace facilite le travail, en particulier on peut utiliser l'injection compacte de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  etc. Plusieurs auteurs ont travaillé sur l'espace  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ , citons [61], [48] et [59]. Une autre méthode classique pour l'étude asymptotique du système de Maxwell présentée dans le chapitre 4 de [11], sous les mêmes propriétés sur  $\Omega$  et sa frontière  $\Gamma$ ,

consiste à calculer la limite en temps long de l'un des deux champs, comme solution du système d'ordre deux résultant de l'élimination de l'autre champ. Pour retrouver la même limite stationnaire que celle issue de la première méthode il suffit de supposer que les données initiales vérifient les relations de compatibilité entre les système d'ordre un et deux.

Pour notre système couplé, nous nous intéressons au cas où la divergence du champ électrique et la densité de courant sont non nulles. Bien entendu, même si la divergence est nulle, on ne peut pas ramener le système à une équation d'onde avec second membre nul. En particulier, nous ne pouvons pas utiliser les techniques de [12, 13]. Pour notre approche, nous allons utiliser un critère général d'Arendt–Batty et Lyubich–Vu, théorème 2.4.19, basé sur la théorie spectrale. La résolvante de l'opérateur  $\mathbb{A}_\ell$ , pour  $\ell = 1, 2$ , est non-compacte, nous devons analyser le spectre complet sur l'axe imaginaire. Une des étapes consiste à montrer que l'opérateur  $\lambda \mathbb{I} + \mathbb{A}_\ell$ , pour  $\lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , est surjectif. Nous verrons que le théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas dans ce cas. L'alternative sera donc d'utiliser le problème de type Helmholtz avec contraintes qu'on a présenté dans §2.3. Afin d'appliquer le théorème 2.3.6, on a besoin de prouver un résultat d'injection compacte dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Il s'agit de l'injection de l'espace  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$  qui est constitué des champs  $\mathbf{w}$  appartenant à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  tels que  $\mathbf{rot} \mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $\text{div} \mathbb{B}\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{w} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ , où  $\mathbb{B}$  est une fonction matricielle complexe non hermitienne vérifiant quelques hypothèses. Nous allons démontrer ce résultat dans le cas où  $\Gamma$  est non connexe (y compris le cas connexe). Évidemment, nous nous servirons de cette injection dans les deux cas : conducteur parfait et condition de Silver–Müller. Notons que cette injection est une prolongation des travaux de [77, 4, 46].

Présentons maintenant le plan de ce chapitre. Nous commençons par introduire les notations et la géométrie dans la section 4.1. Nous considérons le cadre géométrique général, y compris les domaines non topologiquement triviaux ou les domaines avec une frontière non connexe. Dans la section suivante, nous prouvons quelques résultats d'analyse fonctionnelle comme une décomposition de Hodge puis le résultat d'injection compacte de  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  dans le cas d'un milieu non homogène. Puis, dans la section 4.3, nous étudions quelques propriétés spectrales de certaines matrices, liées aux matrices  $\mathbb{M}_1$  et  $\mathbb{M}_2$  définies dans le chapitre 3, et décrivant l'anisotropie et d'autres propriétés du plasma. Ces propriétés constituent un ingrédient clé pour étudier la stabilité du modèle. Ensuite, dans la section 4.4, en utilisant le critère d'Arendt–Batty et Lyubich–Vu, nous montrons la stabilité forte de notre système (3.1)-(3.7) (avec  $\mathbf{g} = 0$ ) sans conditions géométriques supplémentaires sur le domaine, sous des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres physiques  $\nu_s$  et  $\omega_s$ . Nous débutons par le cas du conducteur parfait dans la sous-section 4.4.1. Enfin, dans la section 4.5, nous prouvons à l'aide de ces résultats la stabilité forte de notre modèle dans le cas où  $\Gamma_P$  est vide.



## 4.1 Géométrie et notations

Considérons  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire, un ouvert borné connexe de frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  lipschitzienne. Nous ferons l'hypothèse que le domaine  $\Omega$  peut être topologiquement non trivial (voir la définition 2.2.1), et la frontière  $\Gamma$  peut être connexe, ou non. Nous introduisons maintenant quelques notations associées à cette géométrie ; nous utilisons encore les notations de [2, 4, 41].

Lorsque  $\Gamma$  est non connexe, nous notons par  $\Gamma_k$ ,  $0 \leq k \leq K$ , les composants connexes de  $\Gamma$ ,  $\Gamma_0$  étant la frontière de la composante non bornée de  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ . Et lorsque elle est connexe,  $\Gamma_0 = \Gamma$ . Introduisons un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  :

$$H_{\partial\Omega}^1(\Omega) := \{q \in H^1(\Omega) : q|_{\Gamma_0} = 0, q|_{\Gamma_k} = C_k, 1 \leq k \leq K\}.$$

Ci-dessus,  $C_k$  est une constante, et pour  $\ell \neq k$ ,  $C_\ell$  et  $C_k$  peuvent être différentes. Cet espace peut être doté de la norme  $\|\cdot\|_{H_{\partial\Omega}^1(\Omega)} = \|\mathbf{grad} \cdot\|$  (voir [4, proposition 2.1.66]), autrement dit, il vérifie l'inégalité de Poincaré.

Lorsque le domaine  $\Omega$  est topologiquement non trivial, nous gardons les notations des coupures introduites dans §2.2 : il existe des surfaces ouvertes  $\Sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq J$ , telles que l'ensemble  $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^J \Sigma_j$ , est pseudo-lipschitzien (voir la définition 2.2.2) et topologiquement trivial. Nous notons  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à  $\partial\dot{\Omega}$  fixé sur chaque  $\Sigma_j$ ,  $1 \leq j \leq J$ . Le saut à travers  $\Sigma_j$  est désigné par  $[\cdot]_{\Sigma_j}$ .

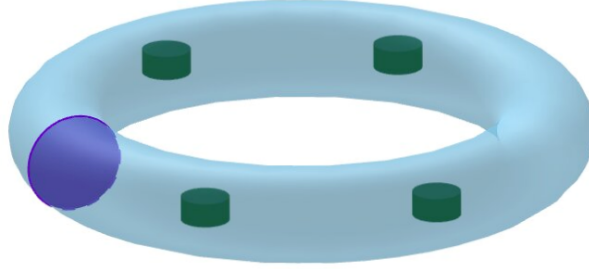


FIGURE 4.1: Exemple de domaine topologiquement non trivial avec une frontière non connexe. Le domaine  $\Omega$  est constitué de l'intérieur du tore moins les cylindres verts. La frontière  $\partial\Omega$  est l'union des frontières du tore et des cylindres qui sont tous disjoints. La surface violette est une coupure  $\Sigma_1$ , et l'ensemble  $\dot{\Omega} = \Omega \setminus \Sigma_1$  est simplement connexe.

Lorsque  $\Gamma_A \neq \emptyset$ , nous supposons que  $\Gamma_A \setminus \bigcup_{j=1}^J \Sigma_j$  admet un nombre fini de composants connexes, noté  $\Gamma_{A,i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dont les fermetures sont des sous-variétés compactes lipschitzienne de  $\Gamma$ .

## 4.2 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Nous démontrons d'abord une décomposition de Hodge et une caractérisation d'un noyau dans le cas non homogène en travaillant avec une matrice quelconque satisfaisant des conditions de bornitude et d'ellipticité. Dans un second temps, nous nous servons de ces résultats pour prouver un résultat de compacité en donnant une inégalité en norme.

### 4.2.1 Décompositions de Hodge et espaces liés à la topologie

Soit  $\mathbb{B} : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  une fonction matricielle. Nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\exists \eta, \zeta > 0, \quad \eta(\mathbf{v}^* \mathbf{v}) \geq |\mathbf{v}^* \mathbb{B}(\mathbf{x}) \mathbf{v}| \geq \zeta(\mathbf{v}^* \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{v}^*$  est le transposé conjugué du vecteur  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}^* \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ .

Définissons l'espace de Hilbert

$$\mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$$

Cet espace est muni de la norme canonique  $\mathbf{v} \mapsto (\|\mathbf{v}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v}\|^2)^{\frac{1}{2}}$ . Le sous-espace  $\mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}0; \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v} = 0\}$  est évidemment un sous-espace fermé de  $\mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}; \Omega)$  et de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Si  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}; \Omega)$ , la trace normale  $\mathbb{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  est un élément bien défini dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  et la formule d'intégration par parties est valable

$$\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}; \Omega) \times H^1(\Omega), \quad (\mathbb{B} \mathbf{v} \mid \mathbf{grad} q) + (\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v} \mid q) = \langle \mathbb{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \quad (4.3)$$

Si  $q \in H_0^1(\Omega)$ , la formule ci-dessus peut être étendue à  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Donc,  $\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v} \in H^{-1}(\Omega)$  et on obtient

$$(\mathbb{B} \mathbf{v} \mid \mathbf{grad} q) + \langle \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v}, q \rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0. \quad (4.4)$$

Dans ce paragraphe, nous introduisons quelques autres espaces et notations associés à une matrice  $\mathbb{B}$  satisfaisant (4.2), et nous prouvons quelques résultats utiles. Nous commençons par un résultat sur des problèmes elliptiques, dont la preuve est simple.

**Lemme 4.2.1.** *Pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème elliptique :*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } q \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ -\Delta_{\mathbb{B}} q := -\operatorname{div}(\mathbb{B} \mathbf{grad} q) = f \end{array} \right. \quad (4.5)$$

admet une solution unique. De plus, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|q\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}. \quad (4.6)$$

**Preuve.** Soit  $f$  un élément de  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ . Grâce à la formule d'intégration par partie (4.4), nous avons la formulation variationnelle de (4.5) :

$$a(q, \varphi) := (\mathbb{B} \mathbf{grad} q \mid \mathbf{grad} \varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (4.7)$$

La forme  $a$  est bilinéaire, et selon l'inégalité (4.2) elle vérifie

$$|a(\varphi, \varphi)| \geq \zeta \|\varphi\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2, \quad \forall \varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

donc,  $a$  est coercive dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et de plus elle est continue sur cet espace selon (4.2). Par conséquent, la formulation (4.7) est bien posée par le théorème de Lax-Milgram. ■

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer un résultat de décomposition de Helmholtz des champs de vecteurs  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Cette décomposition est en gradient et en partie  $\mathbb{B}$ -solénoïde.

**Lemme 4.2.2.** *Pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , il existe une unique paire  $(q, \mathbf{v}^T) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  satisfaisant les conditions*

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} q + \mathbf{v}^T, \quad \operatorname{div}(\mathbb{B}\mathbf{v}^T) = 0. \quad (4.8)$$

De plus, il existe  $C > 0$  constante indépendante de  $\mathbf{v}$  telle que

$$\|\mathbf{grad} q\| \leq C \|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{v}^T\| \leq C \|\mathbf{v}\|. \quad (4.9)$$

**Preuve.** Soit  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Comme  $\mathbb{B}$  est borné et l'application  $\operatorname{div}$  est continue de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ , nous avons  $\operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  et  $\|\operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq C_1 \|\mathbf{v}\|$ . Selon le lemme 4.2.1, il existe un, et un seul,  $q \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  qui résout le problème (4.5) avec donnée  $f = -\operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{v}$  et satisfait  $\|\mathbf{grad} q\| \leq C \|\operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}$ . Finalement, soit  $\mathbf{v}^T = \mathbf{v} - \mathbf{grad} q$ . Par construction, nous avons  $\mathbf{v}^T \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{v}^T = 0$ . Les estimations de (4.9) sont facilement vérifiées. ■

Nous caractérisons maintenant l'espace suivant :

$$\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B}) := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}0; \Omega).$$

Nous le munissons de la norme  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|$ . La preuve du résultat suivant est inspirée de [2].

**Proposition 4.2.3.** *La dimension de l'espace vectoriel  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$  est égale à  $K$ , le nombre de composants connexes de la frontière  $\partial\Omega$ , moins un. De plus, une base de  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$  est l'ensemble des fonctions  $(\mathbf{grad} q_k)_{1 \leq k \leq K}$ , où chaque  $q_k$  est l'unique solution dans  $H^1(\Omega)$  du problème*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{\mathbb{B}} q_k = \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ q_k|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{et} \quad q_k|_{\Gamma_i} = C_i, \quad 1 \leq i \leq K, \\ \langle \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = -1 \\ \langle \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} = \delta_{ki}, \quad 1 \leq i \leq K. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

**Preuve.** Pour  $1 \leq k \leq K$ , le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{grad} \bar{q} \, d\Omega = q|_{\Gamma_k}, \quad \forall q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.11)$$

admet, grâce aux hypothèses sur  $\mathbb{B}$  et en vertu du théorème de Lax–Milgram, une unique solution. Donc, en utilisant (4.11) avec  $q \in \mathcal{D}(\Omega)$ , nous obtenons

$$\langle \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k, q \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = - \int_{\Omega} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{grad} \bar{q} \, d\Omega = 0.$$

Il s'ensuit que  $\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k = 0$  dans  $\Omega$ , et  $\mathbf{grad} q_k \in \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}; \Omega)$ . Ensuite, en prenant un entier  $1 \leq i \leq K$ , en choisissant  $q$  dans  $H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tel que  $q|_{\Gamma_k} = \delta_{ki}$  pour tout  $k$  et en appliquant la formule de Green (4.3), la formulation (4.11) donne

$$\sum_{m=1}^K q|_{\Gamma_m} \langle \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_m)} = \int_{\Omega} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{grad} \bar{q} \, d\Omega = \delta_{ki}.$$

Cela conduit à

$$\langle \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} = \delta_{ki}, \quad (4.12)$$

et cela est vérifié pour tout  $k$ . D'autre part, puisque  $\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k = 0$  et le fait que

$$0 = (\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k | 1) = \sum_{m=0}^K \langle \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_m)},$$

nous déduisons de (4.12) que  $\langle \mathbb{B} \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = -1$ . Alors,  $q_k$  satisfait (4.10). Inversement, il est facile de prouver que chaque solution (4.10) résout (4.11). Donc, Eq. (4.10) admet une unique solution.

De ce qui précède, les fonctions  $\mathbf{grad} q_k$ , pour  $1 \leq k \leq K$ , appartiennent à  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$ . De plus, l'équation (4.12) montre que ces fonctions sont linéairement indépendantes ; il reste à voir qu'elles engendrent  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$ . Prenons une fonction quelconque  $\mathbf{w}$  dans  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$  et considérons la fonction

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \sum_{k=1}^K \langle \mathbb{B}\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} \mathbf{grad} q_k.$$

Clairement,  $\mathbf{v}$  appartient à  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$  et vérifie  $\langle \mathbb{B}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} = 0$ , pour  $1 \leq i \leq K$ . Alors, selon le théorème 3.4 de [45, chapitre 1] il existe un potentiel-vecteur  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tel que  $\mathbb{B}\mathbf{v} = \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}$  in  $\Omega$ . On a, selon la formule de Green (2.1) :

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbb{B}\mathbf{v}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \overline{\boldsymbol{\psi}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \overline{\boldsymbol{\psi}} \, d\Omega + \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \boldsymbol{\psi} \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0.$$

Donc,  $\mathbf{v} = 0$ . La démonstration est achevée.  $\blacksquare$

**Remarque 4.2.4.** *On peut vérifier facilement que  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B}) = \mathbf{grad}[Q_N(\Omega; \mathbb{B})]$ , où  $Q_N(\Omega; \mathbb{B})$  est l'ensemble des éléments  $q \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tels que  $\Delta_{\mathbb{B}}q = 0$  dans  $\Omega$ . En effet, la deuxième inclusion est évidente et, pour la première inclusion il suffit d'utiliser le théorème 3.3.9 de [4] qui indique que tout élément  $\mathbf{v}$  de  $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega)$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q$  avec  $q$  appartient à  $\mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$ . Une base de  $Q_N(\Omega; \mathbb{B})$  est l'ensemble  $(q_k)_{1 \leq k \leq K}$  tel que  $q_k|_{\Gamma_i} = \delta_{ki}$  pour  $i = 1, \dots, K$ .*

L'espace  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$  étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Nous pouvons utiliser n'importe quelle norme pour mesurer des éléments de cet espace ; par exemple

$$\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{v}\|, \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} \mapsto |(\langle \mathbb{B}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)})_{1 \leq k \leq K}|_p,$$

avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Comme  $\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B}) = \mathbf{grad} Q_N(\Omega; \mathbb{B})$ , on peut aussi utiliser  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q \mapsto |(q|_{\Gamma_k})_{1 \leq k \leq K}|_p$ , avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Par la suite, nous noterons  $|\cdot|_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})}$  la norme choisie.

## 4.2.2 Un résultat de compacité

Introduisons l'espace fonctionnel

$$\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B}) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) : \operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{w} \in L^2(\Omega) \text{ et } \mathbf{w}_{\top|\Gamma} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)\};$$

évidemment,  $\mathbf{w}_{\top|\Gamma}$  peut être remplacé par  $\mathbf{w} \times \mathbf{n}_{|\Gamma}$  dans la définition ci-dessus. Nous le munissons de sa norme canonique

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})}^2 = \|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{w}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w}_{\top}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2. \quad (4.13)$$

Ci-dessous, nous prouvons quelques propriétés utiles de l'espace  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$  : il s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , ce qui donne une inégalité en norme  $\mathbf{L}^2$  pour les éléments de  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$ , et enfin déduire une nouvelle norme équivalente à (4.13). Ces résultats généralisent ceux de [46, théorème 3.22] (pour la condition aux limites  $\mathbf{w} \times \mathbf{n} = 0$  et  $\Gamma$  connexe) et [4, théorème 8.1.3] (où  $\mathbb{B}$  est supposée réelle et symétrique, et  $\mathbf{w} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_P$  avec  $\partial\Gamma_A \cap \partial\Gamma_P = \emptyset$ ), tous deux fondés sur le travail de pionnier [77]. Cependant, les deux caractéristiques négatives simultanées (non-hermitisme de  $\mathbb{B}$  et non-connexité de  $\Gamma$ ) appellent une démonstration minutieuse. Cette injection constitue un résultat un peu plus général que celui dont nous avons besoin pour notre étude, à savoir l'injection compacte des sous-espaces de  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$  définis par  $\operatorname{div} \mathbb{B}\mathbf{w} = 0$  et  $\mathbf{w} \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$  ou  $\Gamma_P$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

### Injection compacte de $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$

Définissons

$$\mathbf{Z}_N(\Omega) := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot} \, 0; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \, 0; \Omega) = \mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{I}).$$

Comme la matrice identité  $\mathbb{I}$  satisfait évidemment la condition (4.2),  $\mathbf{Z}_N(\Omega)$  est de dimension  $K$  et une base est donnée par (4.10). Ensuite, nous introduisons le sous-espace (fermé) de  $\mathbf{H}(\operatorname{div} \, 0; \Omega)$  :

$$\mathbf{H}^\Gamma(\operatorname{div} \, 0; \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div} \, 0; \Omega) : \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, \, 1 \leq k \leq K\}.$$

Comme conséquence immédiate de la proposition 4.2.3, nous avons :

**Proposition 4.2.5.** *La décomposition orthogonale suivante de l'espace  $\mathbf{H}(\operatorname{div} \, 0; \Omega)$  est satisfaite :*

$$\mathbf{H}(\operatorname{div} \, 0; \Omega) = \mathbf{Z}_N(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{H}^\Gamma(\operatorname{div} \, 0; \Omega).$$

Rappelons un théorème classique de [2, 4] que nous utiliserons par la suite.

**Théorème 4.2.6.** *Étant donné  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , on a*

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, \, 0 \leq i \leq K \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \exists \mathbf{w} \in \mathbf{H}_{zmv}^1(\Omega), \\ \mathbf{v} = \mathbf{rot} \, \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

Maintenant, nous pouvons prouver le résultat de compacité suivant.

**Théorème 4.2.7.** *L'injection de  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  est compacte.*

**Preuve.** Soit  $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$ . D'après le lemme 4.2.2, il existe deux suites  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbf{v}_n^T)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments, respectivement, de  $H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , telles que  $\mathbf{v}_n = \mathbf{grad} q_n + \mathbf{v}_n^T$  pour tout  $n$ . Notre but, à l'aide de cette décomposition, est de prouver qu'une sous-suite de  $(\mathbf{v}_n)_n$  converge fortement dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Cela se fait en deux étapes.

ÉTAPE 1. Selon (4.9), la suite  $(q_n)_n$  satisfait, pour tout  $n$  :  $\|\mathbf{grad} q_n\| \leq C \|\mathbf{v}_n\|$ , avec  $C$  indépendant de  $\mathbf{v}_n$ . Alors,  $(q_n)_n$  est bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ , et puisque  $H_0^1(\Omega)$  s'injecte de façon compacte dans  $L^2(\Omega)$ , il existe une sous-suite, encore notée par  $(q_n)_n$ , qui converge fortement dans  $L^2(\Omega)$ . Maintenant, montrons que la sous-suite  $(\mathbf{grad} q_n)_n$  converge dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Notons  $\mathbf{v}_{nm} := \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_m$  et  $\mathbf{grad} q_{nm} := \mathbf{grad} q_n - \mathbf{grad} q_m$ . Par construction, la suite  $(q_n)_n$  vérifie  $\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v}_n = \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{grad} q_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cela conduit à l'inégalité

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div}(\mathbb{B} \mathbf{grad} q_{nm}) \mid q_{nm})| &= |(\operatorname{div}(\mathbb{B} \mathbf{v}_{nm}) \mid q_{nm})| \\ &\leq \|\operatorname{div}(\mathbb{B} \mathbf{v}_{nm})\| \|q_{nm}\| \\ &\leq 2 \sup_n \|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})} \|q_{nm}\| \leq C' \|q_{nm}\|. \end{aligned}$$

D'autre part, de (4.2) et la formule d'intégration par parties (4.3), nous déduisons :

$$\begin{aligned} |(\operatorname{div}(\mathbb{B} \mathbf{grad} q_{nm}) \mid q_{nm})| &= |(\mathbb{B} \mathbf{grad} q_{nm} \mid \mathbf{grad} q_{nm})| \\ &\geq \zeta \|\mathbf{grad} q_{nm}\|^2. \end{aligned}$$

En combinant ce qui précède, nous concluons :

$$\|\mathbf{grad} q_n - \mathbf{grad} q_m\|^2 \leq \frac{C'}{\zeta} \|q_{nm}\|.$$

Alors,  $(\mathbf{grad} q_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , et donc elle converge dans cet espace.

ÉTAPE 2. Rappelons que la suite  $(\mathbf{v}_n^T)_n$  vérifie  $\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v}_n^T = 0$ ,  $\mathbf{rot} \mathbf{v}_n^T = \mathbf{rot} \mathbf{v}_n$  et  $\mathbf{v}_n^T \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = \mathbf{v}_n \times \mathbf{n}_{|\Gamma}$ . Par la proposition 4.2.5, il existe une suite  $(\mathbf{y}_n)_n$  d'éléments de  $\mathbf{H}^\Gamma(\operatorname{div} 0; \Omega)$  et une suite  $(\mathbf{z}_n)_n$  sur  $\mathbf{Z}_N(\Omega)$  telles que  $\mathbb{B} \mathbf{v}_n^T = \mathbf{z}_n + \mathbf{y}_n$  pour tout  $n$ . La suite  $(\mathbf{z}_n)_n$  est bornée dans l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathbf{Z}_N(\Omega)$ , alors il existe une sous-suite, encore notée par  $(\mathbf{z}_n)_n$ , qui converge dans toute norme, e.g., celle de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Ensuite, d'après le théorème 4.2.6, il existe une suite  $(\mathbf{w}_n)_n$  d'éléments de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  telle que  $\mathbf{y}_n = \mathbf{rot} \mathbf{w}_n$  pour tout  $n$ , et elle vérifie :

$$\|\mathbf{w}_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \xi \|\mathbf{y}_n\|$$

pour un certain  $\xi > 0$ . Comme  $(\mathbf{y}_n)_n$  est bornée dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , il résulte que  $(\mathbf{w}_n)_n$  est bornée dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . Comme l'application trace est continue de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , il s'ensuit que  $(\mathbf{w}_{n|\Gamma})_n$  est bornée dans  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Donc, par le théorème

d'injection compacte de Sobolev, on peut extraire une sous-suite, encore notée par  $(\mathbf{w}_n)_n$ , qui converge dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  et telle que  $(\mathbf{w}_{n|\Gamma})_n$  converge dans  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ . Notons  $\mathbf{v}_{nm}^T := \mathbf{v}_n^T - \mathbf{v}_m^T$ ,  $\mathbf{w}_{nm} := \mathbf{w}_n - \mathbf{w}_m$  et  $\mathbf{z}_{nm} := \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m$ . Selon la condition (4.2),  $\mathbb{B}$  est inversible, et nous trouvons

$$\begin{aligned} |(\mathbb{B}^{-1}(\mathbf{z}_{nm} + \mathbf{rot} \mathbf{w}_{nm}) \mid \mathbf{z}_{nm} + \mathbf{rot} \mathbf{w}_{nm})| &= |(\mathbf{v}_{nm}^T \mid \mathbb{B}\mathbf{v}_{nm}^T)| \\ &\geq \zeta \|\mathbf{v}_{nm}^T\|^2. \end{aligned}$$

Ensuite, par la formule d'intégration par parties (2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} &|(\mathbb{B}^{-1}(\mathbf{z}_{nm} + \mathbf{rot} \mathbf{w}_{nm}) \mid \mathbf{z}_{nm} + \mathbf{rot} \mathbf{w}_{nm})| \\ &= |(\mathbf{v}_{nm}^T \mid \mathbf{z}_{nm} + \mathbf{rot} \mathbf{w}_{nm})| \\ &= \left| (\mathbf{v}_{nm}^T \mid \mathbf{z}_{nm}) + (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{nm}^T \mid \mathbf{w}_{nm}) + (\mathbf{v}_{nm}^T \times \mathbf{n} \mid (\mathbf{w}_{nm})_\top)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right| \\ &= \left| (\mathbf{v}_{nm}^T \mid \mathbf{z}_{nm}) + (\mathbf{rot} \mathbf{v}_{nm} \mid \mathbf{w}_{nm}) + (\mathbf{v}_{nm} \times \mathbf{n} \mid (\mathbf{w}_{nm})_\top)_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right| \\ &\leq 2 \sup_n \|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega;\mathbb{B})} (\|\mathbf{z}_{nm}\| + \|\mathbf{w}_{nm}\| + \|\mathbf{w}_{nm}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}). \\ &\leq C' (\|\mathbf{z}_{nm}\| + \|\mathbf{w}_{nm}\| + \|\mathbf{w}_{nm}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}). \end{aligned}$$

En combinant ce qui précède, nous trouvons

$$\|\mathbf{v}_n^T - \mathbf{v}_m^T\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C'}{\zeta} (\|\mathbf{z}_{nm}\| + \|\mathbf{w}_{nm}\| + \|\mathbf{w}_{nm}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}).$$

Alors,  $(\mathbf{v}_n^T)_n$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , et donc elle converge dans cet espace. Finalement, la sous-suite  $(\mathbf{v}_n)_n$ , défini par  $\mathbf{v}_n := \mathbf{grad} q_n + \mathbf{v}_n^T$ , converge dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .  $\blacksquare$

### Normes équivalentes sur $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega;\mathbb{B})$

En conséquence du théorème 4.2.7, nous déduisons l'inégalité suivante en norme  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . On note  $P_{\mathbf{Z}_N(\Omega;\mathbb{B})}$  la projection orthogonale dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  sur l'espace  $\mathbf{Z}_N(\Omega;\mathbb{B})$ .

**Proposition 4.2.8.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega;\mathbb{B}), \\ \|\mathbf{v}\| \leq C \{ \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\| + \|\mathbf{div} \mathbb{B}\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}_\top\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + |P_{\mathbf{Z}_N(\Omega;\mathbb{B})}\mathbf{v}|_{\mathbf{Z}_N(\Omega;\mathbb{B})} \}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Preuve.** On démontre par l'absurde. Si (4.14) n'est pas vraie, alors il existe une suite  $(\mathbf{v}_n)_n \in \mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega;\mathbb{B})$  telle que, pour tout  $n$  :

$$\|\mathbf{v}_n\| = 1, \quad (4.15)$$

$$\|\mathbf{rot} \mathbf{v}_n\| + \|\mathbf{div} \mathbb{B}\mathbf{v}_n\| + \|\mathbf{v}_{n\top}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} + |P_{\mathbf{Z}_N(\Omega;\mathbb{B})}\mathbf{v}_n|_{\mathbf{Z}_N(\Omega;\mathbb{B})} \leq \frac{1}{n+1}. \quad (4.16)$$



Cela implique que  $(\mathbf{v}_n)$  est bornée dans  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$ , donc elle admet une sous-suite, encore notée  $(\mathbf{v}_n)$ , qui converge faiblement vers un certain  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$ . Nous déduisons, en particulier, que les suites  $(\mathbf{rot} \mathbf{v}_n)_n$  et  $(\operatorname{div} \mathbf{v}_n)_n$  convergent faiblement vers  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$  et  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  respectivement, et

$$\mathbf{v}_{n\top} \rightharpoonup \mathbf{v}_\top \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Gamma).$$

En combinant cela avec (4.16), on obtient les convergences fortes et les valeurs des limites correspondantes de

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{v}_n &\rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 && \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v}_n &\rightarrow \operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v} = 0 && \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \mathbf{v}_{n\top} &\rightarrow \mathbf{v}_\top = 0 && \text{dans } \mathbf{L}^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Donc,  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})$ . D'autre part,  $P_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})} \mathbf{v}_n \rightarrow P_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})} \mathbf{v}$ ; la convergence est en fait forte car l'espace est de dimension finie. Mais l'équation (4.16) implique que  $P_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})} \mathbf{v} = 0$ , i.e.,  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})^\perp$  aussi. En d'autres termes,  $\mathbf{v} = 0$ .

Puis par le théorème 4.2.7 d'injection compacte,  $(\mathbf{v}_n)$  converge fortement dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , et la limite est nécessairement égale à  $\mathbf{v}$ . Avec (4.15), cela implique  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 1$ . Ceci est une contradiction et la démonstration est complète. ■

**Corollaire 4.2.9.** *La semi-norme*

$$|v|_{\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})} = \left( \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbb{B} \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}_\top\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + |P_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})} \mathbf{v}|_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*est une norme dans  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{B})$ , équivalente à la norme canonique.*

### 4.3 Propriétés spectrales de certaines matrices utiles

Comme au paragraphe 3.1, nous allons étudier quelques propriétés de certaines matrices. Nous notons encore  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  la norme de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  subordonnée à la norme euclidienne. Dans l'étude de la stabilité de notre système, en plus de l'hypothèse 1, nous supposons :

**Hypothèse 2.** *Pour chaque espèce  $s$ , les fonctions réelles  $\nu_s$  et  $\omega_{ps}$  sont bornées inférieurement par une constante strictement positive sur  $\Omega$ , i.e., il existe  $\nu_* > 0$  et  $\omega_* > 0$  telles que :*

$$\omega_{ps}(\mathbf{x}) \geq \omega_*, \quad \nu_s(\mathbf{x}) \geq \nu_*, \quad \forall s \in \{1, 2\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \text{ p.p.} \quad (4.17)$$

Débutons par un résultat général sur les matrices qui sera utile dans cette section.

**Lemme 4.3.1.** Soient  $a$ ,  $b$  et  $f$  trois fonctions complexes qui dépendent de la variable  $\mathbf{x}$ . Alors la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

est normale, i.e., elle commute avec sa transposée conjuguée, et ses valeurs propres sont  $\lambda_1 = a + ib$ ,  $\lambda_2 = a - ib$  et  $\lambda_3 = f$ .

Dans cette section, nous nous plaçons dans le repère de Stix introduit dans [72] et défini par :

**Définition 4.3.2.** On appelle repère de Stix, un repère orthonormé  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  tel que le vecteur  $\mathbf{e}_3$  est parallèle au champ magnétique statique  $\mathbf{B}_{ext}$ .

Dans le reste de ce mémoire, nous prenons  $\mathbf{e}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Proposition 4.3.3.** Soient  $s \in \{1, 2\}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, la matrice  $i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s$  est inversible pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ . De plus, son inverse est uniformément borné sur  $\Omega$ .

**Preuve.** Tout d'abord, nous déterminons la matrice  $\mathbb{M}_s$ . Soient  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$  et  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$  ses coordonnées dans le repère de Stix. D'après la définition de  $\mathbb{M}_s$  nous obtenons

$$\mathbb{M}_s \mathbf{v} = (\alpha_1 \nu_s - \alpha_2 \Omega_{cs}) \mathbf{e}_1 + (\alpha_2 \nu_s + \alpha_1 \Omega_{cs}) \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \nu_s \mathbf{e}_3.$$

Alors, l'expression de  $\mathbb{M}_s$  s'écrit :

$$\mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} \nu_s & -\Omega_{cs} & 0 \\ \Omega_{cs} & \nu_s & 0 \\ 0 & 0 & \nu_s \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons que

$$i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s = \begin{pmatrix} i\alpha + \nu_s & -\Omega_{cs} & 0 \\ \Omega_{cs} & i\alpha + \nu_s & 0 \\ 0 & 0 & i\alpha + \nu_s \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est :

$$\begin{aligned} \det(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s) &= (i\alpha + \nu_s) [(i\alpha + \nu_s)^2 + \Omega_{cs}^2] \\ &= (i\alpha + \nu_s) [(\Omega_{cs}^2 + \nu_s^2 - \alpha^2) + 2i\alpha\nu_s] := d_s. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse 2, pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé il suit que  $|d_s(\mathbf{x})| \geq d_\alpha > 0$  presque partout sur  $\Omega$ . Ainsi, la matrice  $i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s$  est inversible, et la formule d'inversion usuelle donne :

$$(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1} = \frac{1}{d_s} \begin{pmatrix} (i\alpha + \nu_s)^2 & \Omega_{cs}(i\alpha + \nu_s) & 0 \\ -\Omega_{cs}(i\alpha + \nu_s) & (i\alpha + \nu_s)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (i\alpha + \nu_s)^2 + \Omega_{cs}^2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que cette matrice a la même forme que celle donnée par (4.18), donc d'après le lemme 4.3.1 elle est normale. En utilisant [28, théorème 1.4-2], nous déduisons que la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  de  $(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1}$  est égale à son rayon spectral. Par conséquent, pour prouver que  $(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1}$  est uniformément borné, il suffit de borner son rayon spectral sur  $\Omega$ . Ses valeurs propres sont :

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha,1} &= \frac{(i\alpha + \nu_s)^2 + i\Omega_{cs}(i\alpha + \nu_s)}{d_s} \\ \gamma_{\alpha,2} &= \frac{(i\alpha + \nu_s)^2 - i\Omega_{cs}(i\alpha + \nu_s)}{d_s} \\ \gamma_{\alpha,3} &= \frac{(i\alpha + \nu_s)^2 + \Omega_{cs}^2}{d_s}.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 1 et ce qui précède, ces valeurs propres sont bornées sur  $\Omega$ . ■

De l'hypothèse 1 et de la proposition 4.3.3 il s'ensuit que :

**Proposition 4.3.4.** *Considérons  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Soit  $\mathbb{D}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  la matrice*

$$\mathbb{D}_\alpha(\mathbf{x}) := \sum_s \omega_{ps}^2(\mathbf{x})(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.19)$$

Alors,  $\mathbb{D}_\alpha$  est uniformément bornée sur  $\Omega$ .

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Nous introduisons maintenant une autre matrice qui jouera un rôle important dans les preuves de stabilité. Définissons

$$\mathbb{B}_\alpha := i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{D}_\alpha := \begin{pmatrix} P & Q & 0 \\ -Q & P & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

où les fonctions  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont données par

$$P(\mathbf{x}) := i\alpha + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{x})(i\alpha + \nu_s(\mathbf{x}))}{(i\alpha + \nu_s(\mathbf{x}))^2 + \Omega_{cs}^2(\mathbf{x})}, \quad (4.21)$$

$$Q(\mathbf{x}) := \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{x})\Omega_{cs}(\mathbf{x})}{(i\alpha + \nu_s(\mathbf{x}))^2 + \Omega_{cs}^2(\mathbf{x})}, \quad (4.22)$$

$$R(\mathbf{x}) := i\alpha + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{x})}{i\alpha + \nu_s(\mathbf{x})}. \quad (4.23)$$

Selon le lemme 4.3.1, la matrice  $\mathbb{B}_\alpha$  est normale, c'est-à-dire  $\mathbb{B}_\alpha\mathbb{B}_\alpha^* = \mathbb{B}_\alpha^*\mathbb{B}_\alpha$  où  $\mathbb{B}_\alpha^*$  est sa transposée conjuguée, et ses valeurs propres sont

$$\lambda_{\alpha,1} = P + iQ, \quad \lambda_{\alpha,2} = P - iQ, \quad \lambda_{\alpha,3} = R.$$

Selon la proposition 4.3.4, nous déduisons que  $\mathbb{B}_\alpha$  est uniformément bornée sur  $\Omega$ , i.e., il existe une constante  $\eta_\alpha > 0$  dépendant de  $\alpha$  telle que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|\mathbb{B}_\alpha(\mathbf{x})\|_{\mathcal{M}} \leq \eta_\alpha.$$

Nous allons prouver à présent certains résultats concernant cette matrice.

**Proposition 4.3.5.** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors, les parties réelles de  $(\lambda_{\alpha,j})_{j=1, 2, 3}$  sont uniformément bornées inférieurement sur  $\Omega$ . Nous définissons alors  $\zeta_\alpha$  comme étant*

$$\zeta_\alpha := \min_{j=1, 2, 3} \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \Re(\lambda_{\alpha,j}(\mathbf{x})) > 0. \quad (4.24)$$

**Preuve.** D'après (4.21)–(4.23), on obtient l'expression des parties réelles des valeurs propres de  $\mathbb{B}_\alpha$  :

$$\begin{aligned} \Re(\lambda_{\alpha,1}(\mathbf{x})) &= \Re[(P + iQ)(\mathbf{x})] \\ &= \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{x})\nu_s(\mathbf{x})}{(\Omega_{cs}^2(\mathbf{x}) + \nu_s^2(\mathbf{x}) - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\nu_s^2(\mathbf{x})} [(\Omega_{cs}(\mathbf{x}) + \alpha)^2 + \nu_s^2(\mathbf{x})], \\ \Re(\lambda_{\alpha,2}(\mathbf{x})) &= \Re[P(\mathbf{x}) - iQ(\mathbf{x})] \\ &= \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{x})\nu_s(\mathbf{x})}{(\Omega_{cs}^2(\mathbf{x}) + \nu_s^2(\mathbf{x}) - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\nu_s^2(\mathbf{x})} [(\Omega_{cs}(\mathbf{x}) - \alpha)^2 + \nu_s(\mathbf{x})^2], \\ \Re(\lambda_{\alpha,3}(\mathbf{x})) &= \Re[R(\mathbf{x})] = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2(\mathbf{x})\nu_s(\mathbf{x})}{\nu_s^2(\mathbf{x}) + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse 2 et à (3.10), on en déduit que ces parties réelles sont strictement positives. Le reste de la démonstration découle des hypothèses 1 et 2. ■

À partir de cette proposition, nous pouvons énoncer un encadrement fondamental.

**Lemme 4.3.6.** *Sous les hypothèses 1 et 2, et pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a :*

$$\eta_\alpha(\mathbf{v}^*\mathbf{v}) \geq |\mathbf{v}^*\mathbb{B}_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{v}| \geq \Re[\mathbf{v}^*\mathbb{B}_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{v}] \geq \zeta_\alpha(\mathbf{v}^*\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4.25)$$

**Preuve.** Rappelons que la matrice  $\mathbb{B}_\alpha$  est normale, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée de  $\mathbb{C}^3$ . Il existe une matrice unitaire  $\mathbb{U}$  constante et une matrice diagonale  $\mathbb{P}(\mathbf{x})$ , pour  $\mathbf{x} \in \Omega$ , telles que  $\mathbb{B}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbb{U}\mathbb{P}(\mathbf{x})\mathbb{U}^*$ .

D'où, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ , nous avons

$$\mathbf{v}^*\mathbb{B}_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\mathbb{U}\mathbb{P}(\mathbf{x})\mathbb{U}^*\mathbf{v} = (\mathbb{U}^*\mathbf{v})^*\mathbb{P}(\mathbf{x})(\mathbb{U}^*\mathbf{v}).$$

En notant  $\tilde{v}_j$  la jème composante du vecteur  $\mathbb{U}^* \mathbf{v}$ , nous pouvons conclure que

$$\Re[\mathbf{v}^* \mathbb{B}_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{v}] = \Re\left[\sum_{j=1}^3 \lambda_{\alpha,j}(\mathbf{x}) |\tilde{v}_j|^2\right] = \sum_{j=1}^3 \Re(\lambda_{\alpha,j}(\mathbf{x})) |\tilde{v}_j|^2$$

Puisque  $\mathbb{U}^*$  est unitaire, on trouve  $\|\mathbb{U}^* \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ . Par conséquent, en utilisant (4.24) nous obtenons bien le résultat

$$\Re[\mathbf{v}^* \mathbb{B}_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{v}] \geq \zeta_\alpha(\mathbf{v}^* \mathbf{v}).$$

■

**Remarque 4.3.7.** *D'après le lemme 4.3.6, nous pouvons appliquer tous les résultats de la sous-section 4.2.1 à la matrice  $\mathbb{B}_\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

## 4.4 Stabilité forte

Dans cette sous-section, nous étudions la stabilité forte du système d'Euler–Maxwell (3.1)–(3.5) avec les conditions aux limites homogènes (3.6)–(3.7) dans le sens où son énergie converge vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini pour toutes les données initiales dans un sous espace fermé, à déterminer, de l'espace d'énergie. Nous commençons par le cas du conducteur parfait puis nous passons au cas de la condition de Silver–Müller homogène. Pour  $\ell = 1, 2$ , le domaine  $D(\mathbb{A}_\ell)$  ne s'injecte pas de façon compacte dans  $\mathbf{X}$ ; donc, la résolvante de  $\mathbb{A}_\ell$  est non compacte, comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre. Donc, cela empêche l'utilisation de nombreux résultats théoriques sur les opérateurs et méthodes basées sur la compacité des trajectoires comme le principe de l'invariance de Lasalle [70] et la décomposition spectrale de Benchimol [14]. Par conséquent, nous utiliserons un critère plus général dû à Arendt–Batty et Lyubich–Vu [3, 55], sans besoin d'aucune condition géométrique supplémentaire sur le domaine  $\Omega$ .

Nous supposons dans cette section que, outre l'hypothèse 1, l'hypothèse 2 est satisfaite. Notons que, en conséquence de ces deux hypothèses, les espaces  $\mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega)$  sont égaux à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , et les normes  $\|\cdot\|_{(s)}$  et  $\|\cdot\|$  sont équivalentes. De même, la norme  $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$  est équivalente à la norme canonique de  $\mathbf{L}^2(\Omega)^4$ .

Dans le cas où  $\Gamma_A$  est non vide, nous gardons les hypothèses sur  $\Gamma_P$  et  $\Gamma_A$  introduites dans la section 3.3. Autrement dit, nous travaillons dans le cas général et l'intersection entre leurs frontières peut être vide ou non sauf que  $\Gamma_A$  est soit lisse, soit polyédrique sans sommets pathologiques.

### 4.4.1 Cas du conducteur parfait

Pour prouver la stabilité forte du modèle dans le cas du conducteur parfait,  $(\mathfrak{P}_1)$ , nous démontrons que l'opérateur  $-\mathbb{A}_1$  n'admet pas de valeurs propres imaginaires pures et que  $\sigma(-\mathbb{A}_1) \cap i\mathbb{R}$  est au plus dénombrable.

Débutons par étudier les valeurs propres sur l'axe imaginaire.

**Proposition 4.4.1.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'opérateur  $i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{A}_1$  est injectif, i.e.,*

$$\ker(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{A}_1) = \{0\}.$$

*De plus, 0 est une valeur propre de  $\mathbb{A}_1$  et l'ensemble correspondant de vecteurs propres est :*

$$\ker \mathbb{A}_1 = \{(0, 0, 0, \mathbf{V}) : \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega)\}.$$

**Preuve.** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_1)$  tels que

$$(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{A}_1)\mathbf{U} = 0. \quad (4.26)$$

Ceci est équivalent au système

$$i\alpha\mathbf{U}_1 + \mathbb{M}_1\mathbf{U}_1 - \varepsilon_0\omega_{p1}^2\mathbf{U}_3 = 0, \quad (4.27)$$

$$i\alpha\mathbf{U}_2 + \mathbb{M}_2\mathbf{U}_2 - \varepsilon_0\omega_{p2}^2\mathbf{U}_3 = 0, \quad (4.28)$$

$$i\alpha\mathbf{U}_3 + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{U}_1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{U}_2 - c^2\mathbf{rot}\mathbf{U}_4 = 0, \quad (4.29)$$

$$i\alpha\mathbf{U}_4 + \mathbf{rot}\mathbf{U}_3 = 0. \quad (4.30)$$

En prenant la partie réelle du produit scalaire de (4.26) avec  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbf{X}$ , on obtient :

$$\Re(i\alpha \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{X}}^2) = \Re(\mathbb{A}_1\mathbf{U}, \mathbf{U})_{\mathbf{X}} = 0.$$

Par la monotonie de  $\mathbb{A}_1$ , voir (3.22), on prouve que :

$$\left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) = 0, \quad s = 1, 2. \quad (4.31)$$

En utilisant l'hypothèse 2, on trouve bien

$$\left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right. \right) \geq \frac{\nu_*}{\varepsilon_0} \|\mathbf{U}_s\|_{(s)}^2, \quad s = 1, 2. \quad (4.32)$$

Ainsi, de (4.31) et (4.32), nous déduisons

$$\mathbf{U}_1 = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{U}_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.33)$$

Ceci, avec l'équation (4.27), implique que

$$\mathbf{U}_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (4.34)$$

Maintenant si  $\alpha \neq 0$ ,  $\mathbf{U}_4 = 0$  découle de (4.34) et (4.30). Et si  $\alpha = 0$ , on conclut des équations (4.29), (4.33) et (4.34) que  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = 0$ . La démonstration est terminée. ■

Observons que  $\ker \mathbb{A}_1$  constitue l'espace des solutions stationnaires du problème (3.1)–(3.5) avec condition aux limites du conducteur parfait électrique (3.6) sur tout le bord. Comme  $\mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega)$  est de dimension infinie, alors il en est de même pour  $\ker \mathbb{A}_1$ . En utilisant la remarque 3.4.2, nous pouvons parler de la restriction de  $\mathbb{A}_1$  sur l'espace  $\mathbf{X}_1$ . Définissons alors l'opérateur non borné  $\mathbb{A}_1|_{\mathbf{X}_1} : D(\mathbb{A}_1) \cap \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_1$ . Dans ce cas, l'ensemble des solutions stationnaires du problème formé par les équations (3.1)–(3.5) et (3.55), avec les conditions aux limites (3.6) et (3.56), est égal à

$$\ker(\mathbb{A}_1|_{\mathbf{X}_1}) = \{0\}^3 \times \mathbf{Z}_T(\Omega),$$

où le noyau

$$\mathbf{Z}_T(\Omega) := \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{div} 0; \Omega).$$

Rappelons que dans §2.2, nous avons donné une caractérisation de l'espace  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$ . Il est de dimension finie, égale à  $J$ , le nombre de coupures (si  $\Omega$  est topologiquement trivial alors  $\mathbf{Z}_T(\Omega) = \{0\}$ ), et une base de cet espace est donnée par la proposition 2.2.3 qu'on va utiliser par la suite. Les noyaux de l'opérateur  $\mathbb{A}_1$  dans  $\mathbf{X}$  et dans  $\mathbf{X}_1$  possèdent le même espace orthogonal d'après les décompositions orthogonales (2.5) et (2.6) sous le produit scalaire de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ .

**Proposition 4.4.2.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'opérateur  $i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_1$  est surjectif, i.e.,*

$$R(i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_1) = \mathbf{X}.$$

**Preuve.** Prenons  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)^\top \in \mathbf{X}$  quelconques. Nous cherchons  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_1)$ , qui résout

$$(i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_1) \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (4.35)$$

De manière équivalente, d'après (3.14), nous considérons le système suivant

$$i\alpha \mathbf{U}_1 + \mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1 - \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_1, \quad (4.36)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_2 + \mathbb{M}_2 \mathbf{U}_2 - \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_2, \quad (4.37)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_3 + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{U}_1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{U}_2 - c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = \mathbf{F}_3, \quad (4.38)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_4 + \mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_4. \quad (4.39)$$

En utilisant (4.36), (4.37) et (4.39), nous gardons  $\mathbf{U}_3$  comme inconnue principale et éliminons les autres :

$$\mathbf{U}_1 = (i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_1)^{-1} (\mathbf{F}_1 + \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3), \quad (4.40)$$

$$\mathbf{U}_2 = (i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_2)^{-1} (\mathbf{F}_2 + \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3), \quad (4.41)$$

$$\mathbf{U}_4 = (i\alpha)^{-1} (\mathbf{F}_4 - \mathbf{rot} \mathbf{U}_3). \quad (4.42)$$

En insérant ces expressions dans (4.38), nous obtenons une équation en  $\mathbf{U}_3$  :

$$i\alpha \mathbf{U}_3 + \frac{c^2}{i\alpha} \mathbf{rot rot U}_3 + \mathbb{D}_\alpha \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3 + \frac{c^2}{i\alpha} \mathbf{rot F}_4 - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s ((i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s). \quad (4.43)$$

Si l'on écrit la formulation variationnelle de cette équation (compte tenu de la condition au limite  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ ), nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Lax–Milgram comme dans la proposition 3.2.1 : l'opérateur du premier membre (même multiplié par une constante convenable) n'est pas positif. Nous allons donc résoudre ce problème avec une version adaptée de l'alternative de Fredholm pour les problèmes contraints, comme dans [4, §4.5.1] ou §2.3. La prise en compte des contraintes est nécessaire pour donner des propriétés de compacité (par le théorème 4.2.7), qui ne sont pas fournies par la définition de notre opérateur d'évolution.

Ainsi, nous introduisons la formulation mixte suivante pour (4.43) :

Trouver  $(\mathbf{U}_3, p) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tel que

$$a_\alpha(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) + c_\alpha(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) + \overline{b_\alpha(\mathbf{v}, p)} = L_\alpha(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega), \quad (4.44)$$

$$b_\alpha(\mathbf{U}_3, q) = (\mathbf{G} \mid \mathbf{grad} q), \quad (4.45)$$

où les formes sesquilinéaires  $a_\alpha$ ,  $c_\alpha$  et  $b_\alpha$  sont définies par :

$$a_\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := (i\alpha)^{-1} c^2 (\mathbf{rot w} \mid \mathbf{rot v}), \quad (4.46)$$

$$c_\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := (\mathbb{B}_\alpha \mathbf{w} \mid \mathbf{v}), \quad \text{où } \mathbb{B}_\alpha = i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{D}_\alpha, \quad (4.47)$$

$$b_\alpha(\mathbf{v}, q) := (\mathbb{B}_\alpha \mathbf{v} \mid \mathbf{grad} q). \quad (4.48)$$

La forme anti-linéaire  $L_\alpha$  est donnée par :

$$L_\alpha(\mathbf{v}) := (\mathbf{F}_3 \mid \mathbf{v}) + \frac{c^2}{i\alpha} (\mathbf{F}_4 \mid \mathbf{rot v}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s ((i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s \mid \mathbf{v}), \quad (4.49)$$

et  $\mathbf{G}$  est un élément de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  qui sera choisi plus tard.

Pour montrer que la formulation variationnelle (4.44)–(4.45) est bien posé, nous vérifions d'abord que les hypothèses du théorème 2.3.6 sur des problèmes de type Helmholtz avec contraintes sont remplies, et nous concluons par l'alternative de Fredholm.

*i) Continuité*: il est clair que les formes sesquilinéaires  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$  et  $c_\alpha$ , et la forme anti-linéaire  $L_\alpha$ , sont continues.

*ii) Coercivité sur le noyau*: le noyau de  $b_\alpha$  est défini par

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) : b_\alpha(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega)\}$$



qui, selon les formules de Green (4.4) and (4.3), peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}_\alpha 0; \Omega) : \langle \mathbb{B}_\alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, \forall 1 \leq k \leq K \} \\ &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}_\alpha 0; \Omega) : P_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B}_\alpha)} \mathbf{v} = 0 \}. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 4.2.9 appliqué au sous-espace fermé  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{X}_{N, \Gamma}(\Omega; \mathbb{B}_\alpha)$ , la forme sesquilinéaire  $a_\alpha$  est coercive sur  $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$ .

*iii) Condition inf-sup:* soit  $q \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  et posons  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ , donc  $\mathbf{v}$  vérifie  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)} = (\|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{v}\|$ . D'autre part, d'après le lemme 4.3.6, nous avons

$$\begin{aligned} |b_\alpha(\mathbf{v}, q)| &= |(\mathbb{B}_\alpha \mathbf{v} | \mathbf{grad} q)| = |(\mathbb{B}_\alpha \mathbf{v} | \mathbf{v})| \\ &\geq \zeta_\alpha \|\mathbf{v}\|^2 = \zeta_\alpha \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{grad} q\|. \end{aligned} \quad (4.50)$$

En combinant ce qui précède, il s'ensuit que

$$\frac{|b_\alpha(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)}} \geq \zeta_\alpha \|\mathbf{grad} q\| = \zeta_\alpha \|q\|_{\mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)}. \quad (4.51)$$

Par conséquent, il existe  $C_b = \zeta_\alpha > 0$  tel que

$$\forall q \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)} \frac{|b_\alpha(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)}} \geq C_b \|q\|_{\mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)}.$$

Donc, les hypothèses du théorème 2.3.6 sont satisfaites : nous pouvons appliquer l'alternative de Fredholm (théorème 2.3.1). Ainsi, nous montrons que la formulation variationnelle (4.44) est injective sur le noyau  $\mathbf{K}$ , c'est-à-dire sa solution est unique. Soit  $\mathbf{Z}_3$  une solution de

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad a_\alpha(\mathbf{Z}_3, \mathbf{v}) + c_\alpha(\mathbf{Z}_3, \mathbf{v}) = 0. \quad (4.52)$$

Puisque  $\mathbf{Z}_3$  appartient à  $\mathbf{K}$ , on a  $\mathbf{Z}_3 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  avec  $\operatorname{div} \mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3 = 0$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0$ . Ensuite, considérons  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Introduisons le champ scalaire  $\varphi \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  qui résout la formulation variationnelle : pour tout  $\psi \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$ ,  $(\mathbb{B}_\alpha \mathbf{grad} \varphi | \mathbf{grad} \psi) = (\mathbb{B}_\alpha \mathbf{y} | \mathbf{grad} \psi)$ . Par construction,  $\mathbf{v} := \mathbf{y} - \mathbf{grad} \varphi$  appartient à  $\mathbf{K}$  avec  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot} \mathbf{y}$ , donc on peut l'utiliser comme fonction-test dans (4.52). D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \langle (i\alpha)^{-1} c^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{Z}_3 + \mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3, \mathbf{y} \rangle &= (i\alpha)^{-1} c^2 (\mathbf{rot} \mathbf{Z}_3 | \mathbf{rot} \mathbf{y}) + (\mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3 | \mathbf{y}) \\ &= (i\alpha)^{-1} c^2 (\mathbf{rot} \mathbf{Z}_3 | \mathbf{rot} \mathbf{v}) + (\mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3 | \mathbf{v} + \mathbf{grad} \varphi) \\ &= (i\alpha)^{-1} c^2 (\mathbf{rot} \mathbf{Z}_3 | \mathbf{rot} \mathbf{v}) + (\mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3 | \mathbf{v}) = 0. \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue par intégration par parties, en utilisant que  $\operatorname{div}(\mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3) = 0$  dans  $\Omega$  et  $\langle \mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0$ , pour tout  $1 \leq k \leq K$ . Rappelons que  $\mathbb{B}_\alpha = i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{D}_\alpha$ ; comme  $\mathbf{y}$  est quelconque, il s'ensuit que :

$$i\alpha \mathbf{Z}_3 + (i\alpha)^{-1} c^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{Z}_3 + \mathbb{D}_\alpha \mathbf{Z}_3 = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.53)$$

Soient maintenant  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  et  $\mathbf{Z}_4$  définis par

$$(\mathrm{i}\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)\mathbf{Z}_s = \varepsilon_0\omega_{ps}^2\mathbf{Z}_3, \quad s = 1, 2; \quad (4.54)$$

$$\mathbf{Z}_4 = -(\mathrm{i}\alpha)^{-1}\mathbf{rot}\mathbf{Z}_3. \quad (4.55)$$

Clairement, ces champs appartiennent à  $\mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$ . En remplaçant la matrice  $\mathbb{D}_\alpha$  par son expression dans (4.53) et en utilisant les définitions ci-dessus, nous obtenons

$$\mathrm{i}\alpha\mathbf{Z}_3 + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{Z}_1 + \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{Z}_2 - c^2\mathbf{rot}\mathbf{Z}_4 = 0, \quad (4.56)$$

ce qui implique que  $\mathbf{rot}\mathbf{Z}_4 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Les équations (4.54)–(4.56) sont équivalentes à  $(\mathrm{i}\alpha\mathbb{I} + \mathbb{A}_1)\mathbf{Z} = 0$ , avec  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_1)$ . Par conséquent, selon la proposition 4.4.1, on trouve  $\mathbf{Z} = 0$ , et alors  $\mathbf{Z}_3 = 0$  dans  $\Omega$ . Ainsi, la formulation (4.52) est injective. Finalement, selon le théorème 2.3.6 et la proposition 2.3.5, le problème (4.44)–(4.45) admet une unique solution  $(\mathbf{U}_3, p) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$ .

Pour montrer l'équivalence entre (4.44) et la formulation forte (4.43), nous devons vérifier que le multiplicateur de Lagrange  $p$  est nul. En prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} p \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$  comme une fonction-test dans (4.44), nous obtenons

$$(\mathbb{B}_\alpha\mathbf{U}_3 \mid \mathbf{grad} p) + (\mathbb{B}_\alpha\mathbf{grad} p \mid \mathbf{grad} p) = (\mathbf{F}_3 \mid \mathbf{grad} p) - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s ((\mathrm{i}\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1}\mathbf{F}_s \mid \mathbf{grad} p). \quad (4.57)$$

Le premier terme ci-dessus est le premier membre de l'équation de contrainte (4.45). Ainsi, en choisissant

$$\mathbf{G} := \mathbf{F}_3 - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s (\mathrm{i}\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1}\mathbf{F}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (4.58)$$

nous obtenons, selon (4.57) et (4.45),

$$(\mathbb{B}_\alpha\mathbf{grad} p \mid \mathbf{grad} p) = 0.$$

Grâce au lemme 4.3.6, nous déduisons que  $\mathbf{grad} p = 0$  dans  $\Omega$ . Comme  $p$  appartient à  $\mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$ , nous trouvons  $p = 0$ .

Revenons au problème (4.35). Nous définissons  $\mathbf{U}_1 \in \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega)$ ,  $\mathbf{U}_2 \in \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega)$  respectivement par (4.40) et (4.41). Définissons de plus  $\mathbf{U}_4 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  par (4.42). En prenant  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$  comme une fonction-test dans (4.44), en remplaçant  $\mathbb{B}_\alpha$  par son expression et en utilisant la formule de Green (2.1), nous obtenons l'équation (4.43), et par la définition (4.42) de  $\mathbf{U}_4$  nous trouvons

$$\mathrm{i}\alpha\mathbf{U}_3 - c^2\mathbf{rot}\mathbf{U}_4 + \mathbb{D}_\alpha\mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3 - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s (\mathrm{i}\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1}\mathbf{F}_s \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega). \quad (4.59)$$

Ceci implique que  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ . Pour finir la démonstration, il reste à vérifier que l'équation (4.38) est satisfaite : pour cela, il suffit de remplacer en (4.59) la matrice  $\mathbb{D}_\alpha$  par sa définition et d'utiliser les deux équations (4.40) et (4.41). ■

Introduisons un sous-espace fermé de  $\mathbf{X}$  :

$$\tilde{\mathbf{X}}_1 := \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_0^\Sigma(\operatorname{div} 0; \Omega). \quad (4.60)$$

Bien sûr,  $\tilde{\mathbf{X}}_1$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire induit.

**Proposition 4.4.3.** *L'image  $R(\mathbb{A}_1)$  de  $\mathbb{A}_1$  est incluse dans  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ .*

**Preuve.** Considérons  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top$  un élément de  $D(\mathbb{A}_1)$ . Alors, par la définition (3.18) de  $\mathbb{A}_1$ ,  $\mathbb{A}_1 \mathbf{U}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{X}}_1$  si, et seulement si,  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_3$  appartient à  $\mathbf{H}_0^\Sigma(\operatorname{div} 0; \Omega)$ . Mais  $\mathbf{U}_3 \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$ , et c'est bien connu (voir, e.g., [4, remarque 3.5.2]) que  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$  implique  $\mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^\Sigma(\operatorname{div} 0; \Omega)$ . ■

L'analyse spectrale de l'opérateur  $\mathbb{A}_1$  montre qu'aucune stabilisation ne peut avoir lieu dans tout l'espace  $\mathbf{X}$  : une donnée initiale  $\mathbf{U}_0 \in \ker \mathbb{A}_1$  engendre une solution constante dans le temps. Les résultats ci-dessus nous amènent à introduire l'opérateur non borné  $\tilde{\mathbb{A}}_1 : D(\tilde{\mathbb{A}}_1) \rightarrow \tilde{\mathbf{X}}_1$  défini par

$$D(\tilde{\mathbb{A}}_1) = D(\mathbb{A}_1) \cap \tilde{\mathbf{X}}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{A}}_1 \mathbf{U} = \mathbb{A}_1 \mathbf{U}, \quad \forall \mathbf{U} \in D(\tilde{\mathbb{A}}_1). \quad (4.61)$$

Les propriétés spectrales de  $\tilde{\mathbb{A}}_1$  se déduisent facilement des propositions 4.4.1 et 4.4.2. On a le résultat suivant.

**Proposition 4.4.4.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $i\alpha \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_1$  est injectif. Pour  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , il est surjectif.*

**Preuve.** L'injectivité pour  $\alpha \neq 0$  découle directement de la proposition 4.4.1. Pour  $\alpha = 0$ ,  $\tilde{\mathbb{A}}_1 \mathbf{U} = 0$  signifie  $\mathbf{U} \in \tilde{\mathbf{X}}_1$  et  $\mathbb{A}_1 \mathbf{U} = 0$ , donc  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_3 = 0$ ,  $\mathbf{U}_4 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega)$  et  $\mathbf{U}_4 \in \mathbf{H}_0^\Sigma(\operatorname{div} 0; \Omega)$ . Selon (2.6), cela implique  $\mathbf{U}_4 = 0$ .

En tenant compte de la proposition 4.4.2, la propriété de surjectivité signifie que, si  $\mathbf{F} \in \tilde{\mathbf{X}}_1$ , l'unique solution  $\mathbf{U}$  de  $i\alpha \mathbf{U} + \mathbb{A}_1 \mathbf{U} = \mathbf{F}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ . Ceci, à son tour, est une conséquence évidente de la proposition 4.4.3. ■

Nous remarquons que  $\tilde{\mathbf{X}}_1$  est un espace invariant pour le problème (3.19), voir lemme 4.4.7, c'est-à-dire que la solution  $\mathbf{U}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{X}}_1$  dès que  $\mathbf{U}_0$  est dans  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ . Nous introduisons alors le semi-groupe  $(\tilde{T}_1(t))_{t \geq 0}$  défini par

$$\tilde{T}_1(t) := T_{1|_{D(\tilde{\mathbb{A}}_1)}}(t), \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Nous avons le résultat principal suivant sur la stabilité forte du modèle.

**Théorème 4.4.5.** *Le semi-groupe de contractions  $(\check{T}_1(t))_{t \geq 0}$  de générateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$  est fortement stable sur l'espace d'énergie  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ , i.e.,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\check{T}_1(t)\tilde{\mathbf{U}}_0\|_{\tilde{\mathbf{X}}_1} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{U}}_0 \in \tilde{\mathbf{X}}_1. \quad (4.62)$$

**Preuve.** D'après la proposition 4.4.4, nous concluons que

$$\sigma(-\tilde{\mathbb{A}}_1) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \quad \text{ou} \quad \{0\},$$

qui est dénombrable dans les deux cas, et que 0 n'est pas une valeur propre. D'autre part,  $\tilde{\mathbb{A}}_1$  est monotone dans  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ , alors  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$  est dissipatif dans  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ . Le reste de la preuve découle du théorème 2.4.19. ■

**Remarque 4.4.6.** *Comme nous le verrons dans le chapitre 5, 0 n'appartient pas à  $\sigma(-\tilde{\mathbb{A}}_1)$ .*

Du théorème 4.4.5, nous déduisons la convergence de la solution vers un état stationnaire non nul en général, qui dépend de la donnée initiale, dans l'espace  $\mathbf{X}_1$ . Nous notons par  $P_1$  la projection orthogonale dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  sur  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$ .

**Lemme 4.4.7.** *Soit  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{U}$  la solution du problème (3.19). Alors on a*

$$P_1(\mathbf{B}(t)) = P_1(\mathbf{B}_0), \quad \forall t > 0. \quad (4.63)$$

**Preuve.** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}, \mathbf{B})^\top$  solution de  $(\mathfrak{P}_1)$ . De l'équation de Faraday (3.4), on a pour tout  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{rot} \mathbf{E}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega = 0, \quad \forall t > 0.$$

Comme par définition de l'espace  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$ ,  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega$ , et comme on a aussi  $\mathbf{E}(t) \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ , on obtient par intégration de partie  $\mathbf{rot} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega$ . Par conséquent, on déduit

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}(t) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}_0 \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega, \quad \forall t > 0,$$

ce qui est équivalent à l'équation (4.63). ■

Le lemme 4.4.7 montre que la projection de la solution  $\mathbf{U}$  sur  $\ker(\mathbb{A}_1|_{\mathbf{X}_1})$  ne dépend pas du temps. Alors nous concluons...

**Corollaire 4.4.8.** *La solution du problem (3.19) satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| T_1(t) \mathbf{U}_0 - \sum_{1 \leq j \leq J} \xi_j (0, 0, 0, \widetilde{\mathbf{grad} \dot{q}_j})^\top \right\|_{\mathbf{X}_1} = 0, \quad \forall \mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_1,$$

où  $\xi_j = \langle \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j}$ , pour  $j = 1, \dots, J$ , et  $(\widetilde{\mathbf{grad} \dot{q}_j})_{1 \leq j \leq J}$  est une base de l'espace  $\mathbf{Z}_T(\Omega)$  donnée par la proposition 2.2.3.

**Preuve.** Soit  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_1$ . En utilisant la décomposition orthogonale (2.5) et le lemme 4.4.7, nous concluons que la solution  $\mathbf{U}$  du système (3.1)–(3.5) et (3.55), avec conditions aux limites (3.6) et (3.56), peut s'écrire comme :

$$\mathbf{U}(t) = \widetilde{\mathbf{U}}(t) + (0, 0, 0, P_1 \mathbf{B}_0),$$

et  $\widetilde{\mathbf{U}}(t) \in \widetilde{\mathbf{X}}_1$  est la solution du problem

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{U}}(t) + \widetilde{\mathbb{A}}_1 \widetilde{\mathbf{U}}(t) = 0, \quad \text{pour } t > 0, \quad \widetilde{\mathbf{U}}(0) = \widetilde{\mathbf{U}}_0,$$

où la condition initiale  $\widetilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{U}_0 - (0, 0, 0, P_1 \mathbf{B}_0)$  appartient à  $\widetilde{\mathbf{X}}_1$ . Ensuite, il existe  $J$  constantes  $\xi_1, \dots, \xi_J$  telles que  $P_1 \mathbf{B}_0 = \sum_{1 \leq j \leq J} \xi_j \widetilde{\mathbf{grad} \dot{q}_j}$ . Par conséquent, l'élément  $\mathbf{B}_0 - P_1 \mathbf{B}_0$  appartient à  $\mathbf{H}_0^\Sigma(\text{div } 0; \Omega)$ , qui donne :

$$\langle \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} = \sum_j \xi_j \langle \widetilde{\mathbf{grad} \dot{q}_j} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_i} = \xi_i.$$

Enfin, d'après le théorème 4.4.5,  $\widetilde{\mathbf{U}}$  satisfait  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\widetilde{\mathbf{U}}(t)\|_{\widetilde{\mathbf{X}}_1} = 0$ , d'où le résultat. ■

## 4.4.2 Cas de la condition de Silver–Müller homogène

Pour prouver la stabilité forte du modèle dans le cas de la condition de Silver–Müller homogène,  $(\mathfrak{P}_2)_{hom}$ , nous démontrons que l'opérateur  $-\mathbb{A}_2$  n'admet pas de valeurs propres imaginaires pures et que  $\sigma(-\mathbb{A}_2) \cap i\mathbb{R}$  contient seulement un ensemble dénombrable d'éléments. Nous présentons dans les preuves seulement les différences par rapport au cas du conducteur parfait.

Commençons par le résultat suivant sur les valeurs propres imaginaires.

**Proposition 4.4.9.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'opérateur  $i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{A}_2$  est injectif, i.e.,*

$$\ker(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{A}_2) = \{0\}.$$

De plus, 0 est une valeur propre de  $\mathbb{A}_2$  et l'ensemble de ses vecteurs propres est

$$\ker(\mathbb{A}_2) = \{(0, 0, 0, \mathbf{V}) : \mathbf{V} \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_A}(\mathbf{rot} \, 0; \Omega)\}.$$

**Preuve.** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_2)$  tels que

$$(\mathrm{i}\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U} = 0, \quad (4.64)$$

ce qui est équivalent, dans  $\Omega$ , au système (4.27)–(4.30). En prenant le produit scalaire de (4.64) avec  $\mathbf{U}$ , on obtient :

$$\Re(\mathrm{i}\alpha \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{X}}^2) = \Re(\mathbb{A}_2 \mathbf{U} | \mathbf{U})_{\mathbf{X}} = 0.$$

En utilisant la monotonie de  $\mathbb{A}_2$ , voir (3.40), on prouve que

$$\left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \middle| \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right) = 0, \quad s = 1, 2, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{U}_{4\top}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 = 0.$$

Pour le reste de la preuve, on suit les mêmes arguments que dans la proposition 4.4.1.  $\blacksquare$

La proposition ci-dessus indique que  $\ker \mathbb{A}_2$  coïncide avec l'ensemble des solutions stationnaires du problème (3.1)–(3.5) avec condition aux limites (3.6) et (3.7) (avec  $\mathbf{g} = 0$ ). Similairement à l'opérateur  $\mathbb{A}_1$ , si nous définissons l'opérateur  $\mathbb{A}_{2|\mathbf{X}_2} : D(\mathbb{A}_2) \cap \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{X}_2$  comme la restriction de  $\mathbb{A}_2$  sur  $\mathbf{X}_2$ , alors nous obtenons

$$\ker(\mathbb{A}_{2|\mathbf{X}_2}) = \{0\}^3 \times \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A),$$

L'espace  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A)$  est caractérisé dans §2.2. Il est de dimension fini et selon la proposition 2.2.7 on a  $\dim \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A) \leq N + J - 1$ . Pour déterminer la dimension exacte de cet espace, il suffit de rajouter les hypothèses de la proposition 2.2.8, c'est-à-dire l'ensemble  $\Gamma_{A,i} \setminus \partial\Sigma$  est connexe pour tout  $i = 1, \dots, N$  et le bord  $\partial\Sigma_j$  est soit inclus dans  $\Gamma_P$ , soit intersecte  $\Gamma_A$  pour tout  $j = 1 \dots, J$ . On obtient alors  $\dim \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A) = N + J' - 1$  avec  $J'$  est le nombre des coupures  $\Sigma_j$  telles que  $\partial\Sigma_j \subset \Gamma_P$ .

Selon les décompositions orthogonales (2.16) et (2.17), on constate que l'orthogonal de l'espace  $\ker \mathbb{A}_2$  est le même que celui de  $\ker(\mathbb{A}_{2|\mathbf{X}_2})$ , et sur cet espace, nous allons étudier la convergence forte.

**Proposition 4.4.10.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'opérateur  $\mathrm{i}\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_2$  est surjectif, i.e.*

$$R(\mathrm{i}\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) = \mathbf{X}.$$

**Preuve.** Nous suivons la démonstration de la proposition 4.4.2. Soient  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)^\top \in \mathbf{X}$ ; nous cherchons  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_2)$  qui résout :

$$(\mathrm{i}\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

ce qui est équivalent au système (4.36)–(4.39), avec différentes conditions aux limites. Encore une fois, nous éliminons  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{U}_2$  et  $\mathbf{U}_4$  par (4.40), (4.41) et (4.42) respectivement, tandis que  $\mathbf{U}_3$  vérifie l'équation (4.43) dans  $\Omega$ . Étant donné la condition aux limites de Silver–Müller, la formulation mixte de (4.43) s'écrit, en rappelant l'espace  $\mathcal{V}$  défini en (3.37) :

Trouver  $(\mathbf{U}_3, p) \in \mathcal{V} \times H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tel que

$$\tilde{a}_\alpha(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) + c_\alpha(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) + \overline{b_\alpha(\mathbf{v}, p)} = L_\alpha(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (4.66)$$

$$b_\alpha(\mathbf{U}_3, q) = (\mathbf{G} \mid \mathbf{grad} q), \quad \forall q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega), \quad (4.67)$$

où la forme sesquilinéaire  $\tilde{a}_\alpha$  est définie comme :

$$\tilde{a}_\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := a_\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{w}_\top \mid \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A}, \quad (4.68)$$

la forme  $a_\alpha$  étant définie dans (4.46); d'autre part,  $b_\alpha$ ,  $c_\alpha$ ,  $L_\alpha$  sont comme dans (4.47)–(4.49).  $\mathbf{G}$  est un élément de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  qui sera choisi plus tard.

La vérification des hypothèses du théorème 2.3.6 se déroule comme dans la proposition 4.4.2.

*i) Continuité:* évidente.

*ii) Coercivité sur le noyau:* le noyau de  $b_\alpha(\cdot, \cdot)$  est défini par

$$K = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : b_\alpha(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega)\} \quad (4.69)$$

qui, d'après les formules de Green (4.4) et (4.3), peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} K &= \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}_\alpha 0; \Omega) : \langle \mathbb{B}_\alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, \quad \forall 1 \leq k \leq K\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}_\alpha 0; \Omega) : P_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B})} \mathbf{v} = 0\}. \end{aligned}$$

Selon le corollaire 4.2.9, la forme sesquilinéaire  $\tilde{a}_\alpha$  est coercive sur  $K \times K$ . En effet, en prenant  $\mathbf{v} \in K$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v})| &= \left| (i\alpha)^{-1} c^2 \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|^2 + c \|\mathbf{v}_\top\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \right| \\ &= \left( (|\alpha|^{-1} c^2 \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|^2)^2 + (c \|\mathbf{v}_\top\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mais, nous avons l'inégalité

$$(z^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |z + y|, \quad \forall (z, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v})| &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\alpha|^{-1} c^2 \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|^2 + c \|\mathbf{v}_\top\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{|\alpha|^{-1} c^2, c\} \left( \|\mathbf{rot} \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}_\top\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \right) = C |\mathbf{v}|_{\mathbf{X}_{N, \Gamma}(\Omega; \mathbb{B}_\alpha)}. \end{aligned}$$

*iii) Condition inf-sup:* prenons  $q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  quelconque et notons  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q$ . Alors, nous avons  $\mathbf{rot} \mathbf{v} = 0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{v}_\top = 0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ , donc  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  et vérifie  $\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}} = \|\mathbf{v}\|$ . La conclusion découle des inégalités (4.50) et (4.51).

Comme dans le cas du conducteur parfait, nous pouvons appliquer l'alternative de Fredholm. Ainsi, nous montrons que la formulation variationnelle (4.66) est injective sur le noyau  $K$ . Soit  $\mathbf{Z}_3$  une solution de la formulation variationnelle

$$\forall \mathbf{v} \in K, \quad \tilde{a}_\alpha(\mathbf{Z}_3, \mathbf{v}) + c_\alpha(\mathbf{Z}_3, \mathbf{v}) = 0. \quad (4.70)$$

Puisque  $\mathbf{Z}_3$  appartient à  $K$ , on a  $\mathbf{Z}_3 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  avec  $\text{div} \mathbb{B}_\alpha \mathbf{Z}_3 = 0$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{n}_{\Gamma_P} = 0$ . Comme dans la proposition 4.4.2, on obtient l'existence de  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  et  $\mathbf{Z}_4 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  tels que  $(i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{A})\mathbf{Z} = 0$ , avec  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4)^\top$ . Pour appliquer la proposition 4.4.9, il faut vérifier que  $\mathbf{Z} \in D(\mathbb{A}_2)$ , i.e., la condition de Silver–Müller est satisfaite. Pour  $\mathbf{v} \in K$ , en utilisant la formule d'intégration par parties (2.3) dans (4.70) et l'équation (4.53), nous obtenons

$$(\mathbf{Z}_{3\top} | \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A} - c_{\gamma_A} \langle \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_\top \rangle_{\pi_A^0} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in K. \quad (4.71)$$

Maintenant, considérons  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ . Soit  $\varphi$  l'unique élément de  $H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tel que

$$(\mathbb{B}_\alpha \mathbf{grad} \varphi | \mathbf{grad} \psi) = (\mathbb{B}_\alpha \mathbf{y} | \mathbf{grad} \psi), \quad \forall \psi \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega).$$

La fonction  $\varphi$  est bien définie grâce au lemme 4.3.6. Observons ensuite que  $\mathbf{v} := \mathbf{y} - \mathbf{grad} \varphi$  constitue un élément de  $K$  avec  $\mathbf{v}_\top = \mathbf{y}_\top$  sur  $\Gamma_A$ . En l'utilisant comme fonction test dans (4.71), nous trouvons

$$(\mathbf{Z}_{3\top} | \mathbf{y}_\top)_{\Gamma_A} - c_{\gamma_A} \langle \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{n}, \mathbf{y}_\top \rangle_{\pi_A^0} = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{V}.$$

L'équation ci-dessus est la même que (3.45), donc nous obtenons la condition aux limites de Silver–Müller comme dans la preuve de la proposition 3.3.1. Par conséquent,  $\mathbf{Z}$  appartient à  $D(\mathbb{A}_2)$ , et de la proposition 4.4.9 nous déduisons que  $\mathbf{Z} = 0$ , donc  $\mathbf{Z}_3 = 0$ , et par conséquent la formulation (4.70) est injective.

Nous déduisons par le théorème 2.3.6 et la proposition 2.3.5 que le problème (4.66)–(4.67) admet une unique solution  $(\mathbf{U}_3, p) \in \mathcal{V} \times H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$ . En choisissant  $\mathbf{G}$  comme dans (4.58), nous obtenons une fois de plus  $p = 0$ . Donc,  $\mathbf{U}_3$  satisfait (4.43), ou de manière équivalente

$$\frac{c^2}{i\alpha} \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 - \mathbf{F}_4) + \mathbb{B}_\alpha \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3 - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s (i\alpha\mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s \quad (4.72)$$

au sens des distributions. Définissons  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_4$  respectivement par (4.40), (4.41), et (4.42), ces champs appartiennent clairement à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . En combinant (4.72) et (4.42) avec la définition de  $\mathbb{B}_\alpha$ , on voit que  $\mathbf{U}_4 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ . Ainsi, le



quadruplet  $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)$  vérifie le système (4.36)–(4.39). Pour que ce quadruple appartienne à  $D(\mathbb{A}_2)$ , il faut vérifier que la condition de Silver–Müller homogène sur  $\Gamma_A$  est satisfaite. À cette fin, nous utilisons la formule de Green (2.3) dans (4.66), et trouvons que

$$c(\mathbf{U}_{3\top} | \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A} - c^2_{\gamma_A} \langle \mathbf{U}_4 \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_\top \rangle_{\pi_A^0} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (4.73)$$

En suivant le même argument que dans la preuve de la proposition 3.3.1, nous concluons que Eq. (4.73) implique que  $\mathbf{U}_{3\top} - c\mathbf{U}_4 \times \mathbf{n} = 0$  dans  $\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$ , ce qui est équivalent à  $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{n} + c\mathbf{U}_{4\top} = 0$  dans  $\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)$  et donc dans  $\mathbf{L}^2(\Gamma_A)$  car  $\mathbf{U}_{3\top}$  appartient à  $\mathbf{L}^2(\Gamma_A)$ . Ceci achève la preuve. ■

Introduisons encore un autre sous-espace fermé de  $\mathbf{X}$  :

$$\tilde{\mathbf{X}}_2 := \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div}0; \Omega). \quad (4.74)$$

C'est un espace de Hilbert lorsqu'il est doté du produit scalaire de  $\mathbf{X}$ .

**Proposition 4.4.11.** *L'image de  $R(\mathbb{A}_2)$  of  $\mathbb{A}_2$  est incluse dans  $\tilde{\mathbf{X}}_2$ .*

**Preuve.** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top$  un élément de  $D(\mathbb{A}_2)$ . Alors, par la définition (3.35) de  $\mathbb{A}_2$ , on a  $\mathbb{A}_2\mathbf{U}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{X}}_2$  si, et seulement si,  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_3$  appartient à l'espace  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div}0; \Omega)$ . Rappelons que  $\mathbf{U}_3$  appartient à  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)$ , nous pouvons donc conclure par la proposition 2.2.12, exactement l'équation (2.20). ■

Les résultats de l'analyse spectrale de l'opérateur  $\mathbb{A}_2$  nous amènent à introduire l'opérateur non borné  $(D(\tilde{\mathbb{A}}_2), \tilde{\mathbb{A}}_2)$  sur  $\tilde{\mathbf{X}}_2$  défini par

$$D(\tilde{\mathbb{A}}_2) = D(\mathbb{A}_2) \cap \tilde{\mathbf{X}}_2 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{A}}_2\mathbf{U} = \mathbb{A}_2\mathbf{U}, \quad \forall \mathbf{U} \in D(\tilde{\mathbb{A}}_2). \quad (4.75)$$

Étudions les propriétés spectrales de  $\tilde{\mathbb{A}}_2$ .

**Proposition 4.4.12.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $i\alpha\mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_2$  est injectif. Pour  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , il est surjectif.*

**Preuve.** Semblable à la proposition 4.4.4, en utilisant les propositions 4.4.9, 4.4.10, 4.4.11, et la décomposition orthogonale (2.17). ■

Observons que  $\tilde{\mathbf{X}}_2$  est un espace invariant pour le problème (3.36), voir le lemme 4.4.14, c'est-à-dire la solution  $\mathbf{U}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{X}}_2$  dès que  $\mathbf{U}_0$  est dans  $\tilde{\mathbf{X}}_2$ . Nous définissons alors le semi-groupe  $(\tilde{T}_2(t))_{t \geq 0}$  défini par

$$\tilde{T}_2(t) := T_{2|D(\tilde{\mathbb{A}}_2)}(t), \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Énonçons maintenant le résultat principal sur la stabilité forte du modèle.

**Théorème 4.4.13.** *Le semi-groupe de contractions  $(\tilde{T}_2(t))_{t \geq 0}$  de générateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_2$  est fortement stable sur l'espace d'énergie  $\tilde{\mathbf{X}}_2$  au sens où*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{T}_2(t)\tilde{\mathbf{U}}_0\|_{\mathbf{X}} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{U}}_0 \in \tilde{\mathbf{X}}_2.$$

**Preuve.** Il suffit de reprendre la preuve du théorème 4.4.5. ■

De même que dans §4.4.1, nous déduirons la convergence de la solution vers un élément de  $\mathbf{X}_2$  en fonction de la donnée initiale du champs magnétique. Nous notons par  $P_2$  la projection orthogonale dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  sur  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A)$ .

**Lemme 4.4.14.** *Soient  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_2$  et  $\mathbf{U}$  la solution du problème (3.36). Alors on a*

$$P_2(\mathbf{B}(t)) = P_2(\mathbf{B}_0), \quad \forall t > 0.$$

En combinant ce résultat avec le théorème 4.4.13, nous concluons le résultat suivant.

**Corollaire 4.4.15.** *La solution du problème (3.36) satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T_2(t)\mathbf{U}_0 - (0, 0, 0, P_2\mathbf{B}_0)^\top\|_{\mathbf{X}_2} = 0, \quad \forall \mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_2.$$

## 4.5 Stabilité forte du modèle avec condition de Silver–Müller sur tout le bord

Rappelons que dans §3.5, nous avons défini le problème  $(\mathfrak{P}_3)$  qui est formé par le système des équations (3.1)–(3.5) avec la condition aux limites de Silver–Müller imposée sur tout le bord et nous avons parlé du caractère bien posé de ce problème. Pour le cas homogène,  $(\mathfrak{P}_3)_{hom}$ , la décroissance d'énergie est donnée par l'équation (4.1) avec  $\Gamma_A = \Gamma$  et  $\mathbf{g} = 0$ . De la même façon que dans §3.5, nous pouvons conclure la stabilité forte du  $(\mathfrak{P}_3)_{hom}$ , sous les hypothèses 1 et 2, en étendant les résultats de §4.4.2 au cas  $\Gamma_P$  vide. Comme nous l'avons indiqué dans la section 3.5, nous n'avons pas utilisé le fait que  $\Gamma_P$  est non vide dans les preuves des propositions 4.4.9 et 4.4.10. Les différences portant uniquement sur les conditions aux limites, et donc les espaces. Les hypothèses du théorème 2.3.6 restent satisfaites dans la preuve de la proposition 4.4.10. En effet, les résultats de compacité du théorème 4.2.7 ainsi que l'équivalence des normes du corollaire 4.2.9 sont traités dans le cas où la trace tangentielle est définie sur tout le bord, et pas sur une partie, et est dans  $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ .

Nous allons donner ici les modifications nécessaires pour les espaces. L'ensemble des solutions stationnaires du problème  $(\mathfrak{P}_3)_{hom}$  dans l'espace d'énergie  $\mathbf{X}$ , qui est égal au noyau de l'opérateur non borné associé à ce problème, est

$$\{(0, 0, 0, \mathbf{V}) : \mathbf{V} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega)\}$$

qui correspond à l'ensemble des vecteurs propres de la valeur propre 0. Dans le même esprit qu'au §4.4.2, comme cet espace est de dimension infinie, nous allons passer à un sous espace de l'espace d'énergie. Il s'agit de rajouter la contrainte sur le champ magnétique,  $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$  dans  $\Omega$ , qui laisse le système stable à condition que la donnée initiale  $\mathbf{B}_0$  la satisfasse. Dans ce cas l'ensemble des solutions stationnaires est

$$\{0\}^3 \times \mathbf{Z}_N(\Omega).$$

Nous rappelons que l'espace  $\mathbf{Z}_N(\Omega)$  a été introduit dans les sous-sections 4.2.2 et 4.2.1 avec la matrice  $\mathbb{B}$  égale à l'identité. Il est de dimension  $K$ , le nombre de composantes connexes du bord moins un. En particulier, si  $\partial\Omega$  est connexe,  $\mathbf{Z}_N(\Omega) = \{0\}$ . Nous réécrivons la décomposition orthogonale introduite dans la proposition 4.2.5, et une autre dans l'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  :

$$\mathbf{H}(\mathbf{div} 0; \Omega) = \mathbf{Z}_N(\Omega) \oplus \mathbf{H}^\Gamma(\mathbf{div} 0; \Omega), \quad (4.76)$$

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega) \oplus \mathbf{H}^\Gamma(\mathbf{div} 0; \Omega). \quad (4.77)$$

Pour la preuve de la décomposition (4.77), nous pouvons utiliser l'inclusion de l'espace  $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega)$  dans  $\mathbf{grad} \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$ , qui est fournie par le théorème 3.3.9 de [4], et la formule de Green. Comme indiqué ci-dessus,  $\mathbf{Z}_N(\Omega)$  est l'ensemble des solutions stationnaires pour le champ magnétique. Donc, pour  $t > 0$ , la projection orthogonale pour le produit scalaire de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  de  $\mathbf{B}(t)$  sur cet espace est égale à celle de  $\mathbf{B}_0$ . D'autre part, définissons le sous-espace fermé de l'espace  $\mathbf{X}$  :

$$\tilde{\mathbf{X}}_3 := \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^\Gamma(\mathbf{div} 0; \Omega).$$

C'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire de  $\mathbf{X}$ . D'après ce qui précède, on conclut que  $\tilde{\mathbf{X}}_3$  est invariant pour le problème  $(\mathfrak{P}_3)$ . Pour  $\mathbf{U}_0 \in \tilde{\mathbf{X}}_3$  fixé, la solution du  $(\mathfrak{P}_3)_{hom}$  converge fortement vers 0. Comme dans le corollaire 4.4.15, la solution peut converger vers une constante en temps lorsque la donnée initiale est dans un espace plus grand que  $\tilde{\mathbf{X}}_3$  : on prend  $\mathbf{B}_0$  dans  $\mathbf{H}(\mathbf{div} 0; \Omega)$  au lieu de  $\mathbf{H}^\Gamma(\mathbf{div} 0; \Omega)$  et on utilise la décomposition (4.76). Si on travaille avec la base  $(\mathbf{grad} q_k)_{1 \leq k \leq K}$  de  $\mathbf{Z}_N(\Omega)$  définie dans la proposition 4.2.3, on conclut facilement que la projection orthogonale de  $\mathbf{B}_0$  dans  $\mathbf{Z}_N(\Omega)$  vaut

$$\sum_{1 \leq k \leq K} \langle \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_k} \mathbf{grad} q_k.$$

# Chapitre 5

## Résultats de stabilisation

### Introduction

Nous poursuivons l'étude sur la stabilisation du modèle Euler–Maxwell avec les deux types de conditions aux limites. Jusqu'à présent, nous travaillions dans le cas où les coefficients  $\nu_s$  pour  $s = 1, 2$ , qui sont responsables de la perte interne d'énergie, sont définies sur tout le domaine  $\Omega$ . Dans le chapitre 4, en utilisant la théorie spectrale, nous avons obtenu des résultats de stabilité forte de ce modèle sans conditions géométriques sur le domaine. Nous avons prouvé que l'énergie décroît vers 0 dans les espaces  $\tilde{\mathbf{X}}_s$ ,  $s = 1, 2$ , dans chaque cas, et vers un état stationnaire dans les espaces  $\mathbf{X}_s$ ,  $s = 1, 2$ , dépendant de la donnée initiale. Dans ce chapitre, nous souhaitons étudier la question de la détermination des taux de décroissance de l'énergie. Plus précisément, nous nous intéresserons à la décroissance polynomiale et exponentielle de l'énergie des problèmes  $(\mathfrak{P}_1)$  et  $(\mathfrak{P}_2)_{hom}$ .

Dans le cas où les paramètres physiques  $\nu_s$  et  $\omega_{ps}$  sont constants et  $\Omega_{cs}$  est nulle, on parle de cas homogène et isotrope, ce modèle a été étudié dans [57, 58, 65]. Le cas du conducteur parfait a été étudié dans [57, 58], et il a été montré dans [57, théorème 4.12] qu'il est polynomialement stable, à savoir que son énergie décroît comme  $t^{-1}$  pour une donnée initiale suffisamment régulière. Dans [58], S. Nicaise s'est intéressé au cas de la condition de Silver–Müller. Cette condition est imposée sur toute la frontière tandis que l'équation de dérivée de la variable  $\mathbf{J}_s$  est définie sur un sous-espace de  $\Omega$ . Il a obtenu une décroissance polynomiale de l'énergie de type  $t^{-2}$  et un résultat de stabilité exponentielle en utilisant la décroissance exponentielle du système de Maxwell couplé avec la condition aux limites de Silver–Müller. Dans ces références, les auteurs ont supposé que  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0$  et travaillé avec des conditions plus simples sur le domaine : le domaine est simplement connexe et à frontière connexe. Au contraire, dans ce chapitre, nous gardons notre modèle le plus général possible comme dans le chapitre 4 en étudiant le cas non-homogène et anisotrope avec les champs  $\mathbf{E}$  et

$\mathbf{J}_s$  sont à divergence non nulle et le domaine  $\Omega$  possède un cadre topologique et géométrique général (n'oublions pas que les hypothèses introduites dans §3.3 sur  $\Gamma_A$  restent toujours imposées).

La question sur la décroissance exponentielle de la solution du système de Maxwell (3.3)-(3.4) sans second membre avec la condition aux limites absorbante de Silver–Müller a été mise en place par plusieurs auteurs [48, 49, 40, 63]. Elle a été prouvée sous certaines conditions géométriques sur le domaine. Présentons brièvement ces travaux. Le premier résultat, suite à l'étude asymptotique faite par H. Barucq et B. Hanouzet [11, 12], a été obtenu par V. Komornik [48] qui a supposé que  $\Omega$  est strictement étoilé par rapport à l'origine. Dans ce papier, la condition aux limites de Silver–Müller est imposée sur tout le bord  $\Gamma$  de classe  $C^1$ . Il a montré que l'énergie  $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) e^{1-\beta t}$  avec  $\beta$  une constante positive calculée (cf. théorème 1.1 de [48] pour l'expression) qui est optimale lorsque  $\Omega$  est une boule ouverte centrée à l'origine, et elle vaut  $2R$  où  $R$  est le rayon de la boule. La preuve est basée sur la méthode des multiplicateurs. Ensuite, son résultat a été étendu par K. Phung [61, 63] à une classe plus large de domaines par analyse microlocale en suivant la méthode développée par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch dans [19, 20] sur l'équation des ondes, qui impose que le champ électromagnétique soit à divergence nulle, et en utilisant des résultats de propagation des singularités de ce champ établis dans [56, 79]. Ici, une hypothèse suffisante est que la frontière du domaine  $\Omega$  soit de classe  $C^\infty$ . La condition aux limites de Silver–Müller est imposée sur  $\Gamma_A$  avec  $\partial\Gamma_A \cap \partial\Gamma_P = \emptyset$ , comme dans [12]. Enfin, M. Eller et al. [40] ont aussi prouvé la décroissance exponentielle de l'énergie par la méthode des multiplicateurs dans une classe plus générale de domaines comprenant le cas d'un ouvert strictement étoilé (voir Exemples 3.7 et 3.8 de [40]). Dans les deux travaux [48] et [40], le champ électromagnétique est à divergence nulle. Pour être plus clair, cette condition est importante dans leur démonstration car elle leur permet de déterminer une identité en fonction de l'énergie qui est l'outil principal pour prouver la décroissance exponentielle. Par conséquent, nous ne pouvons pas appliquer cette méthode à notre modèle. D'autre part, H. Barucq et M. Fontes [17] ont étudié un système couplé construit à partir du système de Maxwell posé dans un milieu anisotrope tel que le champ électromagnétique est à divergence non nulle. Ils ont montré, sous certaines hypothèses sur les données initiales, et en supposant que le domaine est strictement étoilé de frontière connexe, que l'énergie (la fonctionnelle) d'ordre deux et un décroît exponentiellement en utilisant une identité déduite de celle de [48]. Notons que d'un point de vue physique, comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce mémoire, la chambre de tokamak est torique, et le volume du tore n'est pas étoilé. Donc, le cas d'un ouvert étoilé est loin de notre cas. De même, notre système ne peut pas être transformé en équation d'onde, ni pour le champ électrique ni pour le champ magnétique. Pour cette raison, notre problème (3.1)-(3.4) n'entre pas dans le cadre de [61, 63].

Pour faire face à ces difficultés, nous appliquerons une approche dans le domaine fréquentiel, en utilisant un théorème de Prüss et Huang [60, 47], basé sur la bornitude de la résolvante de l'opérateur d'évolution sur l'axe imaginaire. Dans notre approche, nous montrerons la décroissance exponentielle dans le cas de Silver–Müller en nous servant de la décroissance exponentielle du système de Maxwell complet. Autrement dit, nous obtiendrons un résultat conditionnel à l'aide du système de Maxwell dans le cas où le champ électromagnétique est à divergence nulle. Mathématiquement, nous pouvons utiliser les résultats de [48, 40, 63]. En revanche, du point de vue physique, le travail fait par K. Phung [61, 63] est le plus proche de notre cas. De même, pour étudier la stabilité polynomiale, nous utiliserons une approche dans le domaine fréquentiel basée sur la croissance de la résolvante sur l'axe imaginaire. Par contre, dans ce cas, nous n'aurons besoin d'aucun résultat supplémentaire. Rappelons qu'une bonne partie du travail sur le spectre de l'opérateur a été faite dans le chapitre précédent.

Après avoir étudié le comportement asymptotique et le taux de décroissance de la solution dans le cas de la condition de Silver–Müller homogène, la question naturelle qui vient ensuite s'énonce ainsi : peut-on déterminer le comportement en temps long de la solution générale de  $(\mathfrak{P}_2)$  à l'aide de ces résultats ? Et sous quelles conditions sur les données  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{U}_0$  ? Le régime harmonique en temps nous donne la réponse. Il s'agit d'exciter le système par une source harmonique, et dans ce cas la solution obtenue est une limite de la solution générale du modèle instationnaire. Nous verrons que le caractère bien posé repose sur l'absorption, autrement dit elle dépend des résultats obtenus dans le cas de Silver–Müller homogène.

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Dans la section 5.1, nous cherchons grâce à une approche en domaine fréquentiel un taux de décroissance polynomial pour notre système. En effet, sans aucune condition géométrique sur le domaine, nous établissons une décroissance polynomiale de l'énergie, dans le cas du conducteur parfait et le cas de la condition de Silver–Müller, de type  $\frac{1}{t}$ . Ensuite, dans la section 5.2, nous donnons des résultats de stabilité exponentielle. Nous montrons dans la sous-section 5.2.1 que notre système n'est pas exponentiellement stable dans le cas du conducteur parfait, plus précisément nous montrons qu'un nombre infini de valeurs propres se rapprochent de l'axe imaginaire. Puis, en 5.2.2, nous démontrons dans le cas de la condition de Silver–Müller la stabilité exponentielle de notre modèle en utilisant celle du système de Maxwell complet avec les mêmes conditions aux limites. Enfin, dans le dernier paragraphe, en tant qu'application, nous établissons avec un résultat de convergence vers le régime harmonique dans le cas non homogène sous des conditions sur les données de la frontière.

## 5.1 Stabilité polynomiale

Cette section est consacrée à l'étude de la stabilité polynomiale du système (3.1)-(3.5) avec les différentes conditions aux limites. Pour cela, nous utiliserons une approche dans le domaine fréquentiel, à savoir que nous appliquerons le théorème 2.4 de [23] (voir également [21, 22, 54]).

Considérons  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . Dans tout ce chapitre, nous gardons les hypothèses géométriques et les notations de la section 4.1 du chapitre 4. Bien évidemment, les hypothèses 1 et 2 sont toujours satisfaites ici puisque ce travail est une continuation de celle du chapitre précédent.

### 5.1.1 Cas du conducteur parfait

Selon le théorème 2.4.22 de Borichev–Tomilov, le  $C^0$ -semi-groupe  $(T_1(t))_{t \geq 0}$  est polynomialement stable de l'ordre de  $t^{-\frac{1}{\ell}}$ , pour un certain  $\ell > 0$ , sous des hypothèses sur la donnée initiale si

$$i\mathbb{R} \subset \rho(-\tilde{\mathbb{A}}_1)$$

et

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\beta|^\ell} \|(i\beta \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_1)^{-1}\| < +\infty,$$

où  $\rho(-\tilde{\mathbb{A}}_1)$  est l'ensemble résolvant de  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$ . Dans le chapitre 4, précisément §4.4.1, nous avons vu que l'axe  $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$  est inclus dans  $\rho(-\tilde{\mathbb{A}}_1)$  sous les hypothèses 1 et 2. Par conséquent, il ne reste plus qu'à prouver que  $0 \in \rho(-\tilde{\mathbb{A}}_1)$ . Puis, nous allons prouver la deuxième condition pour  $\ell = 2$ .

**Proposition 5.1.1.** *L'élément 0 appartient à  $\rho(-\tilde{\mathbb{A}}_1)$ .*

**Preuve.** D'après la proposition 4.4.4, nous savons que 0 n'est pas une valeur propre, donc pour prouver que  $0 \in \rho(-\tilde{\mathbb{A}}_1)$ , nous devons vérifier que  $\tilde{\mathbb{A}}_1$  est surjectif et a un inverse borné. Les deux propriétés découlent du fait que la résolvante de  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$  est uniformément bornée au voisinage de 0, ce que nous allons maintenant prouver par l'absurde.

Supposons que la condition ci-dessus soit fautive, alors il existe une suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  avec  $\beta_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et une suite de champs vectoriels  $(\mathbf{U}_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\mathbf{U}_1^n, \mathbf{U}_2^n, \mathbf{U}_3^n, \mathbf{U}_4^n)^\top)_n$  dans  $D(\tilde{\mathbb{A}}_1)$ , avec

$$\|\mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}} = 1, \quad \forall n, \tag{5.1}$$

telles que

$$\|(i\beta_n \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_1) \mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \tag{5.2}$$

qui est équivalent à

$$i\beta_n \mathbf{U}_1^n + \mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1^n - \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3^n \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (5.3)$$

$$i\beta_n \mathbf{U}_2^n + \mathbb{M}_2 \mathbf{U}_2^n - \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3^n \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (5.4)$$

$$i\beta_n \varepsilon_0 \mathbf{U}_3^n + \mathbf{U}_1^n + \mathbf{U}_2^n - \varepsilon_0 c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (5.5)$$

$$i\varepsilon_0 c^2 \beta_n \mathbf{U}_4^n + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (5.6)$$

Puisque, selon (3.22) et (5.1),

$$\sum_s \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s^n}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \middle| \frac{\mathbf{U}_s^n}{\omega_{ps}} \right) = \Re((i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_1) \mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n)_{\mathbf{X}} \leq \|(i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_1) \mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}}, \quad (5.7)$$

nous obtenons de (5.2)

$$\left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s^n}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \middle| \frac{\mathbf{U}_s^n}{\omega_{ps}} \right) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2 \quad (5.8)$$

qui conduit avec (4.32) à

$$\|\mathbf{U}_s^n\|_{(s)} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2. \quad (5.9)$$

La matrice  $\mathbb{M}_s$  est bornée sur  $\Omega$ , et il suit de (5.9) et (5.3) que

$$\mathbf{U}_3^n \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \text{ quand } n \rightarrow +\infty \quad (5.10)$$

et nous déduisons de l'équation (5.5) que

$$\mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \rightarrow 0 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.11)$$

Cela montre que  $(\mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n)_n$  est bornée dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . En tenant compte de (5.1), la suite  $(\mathbf{U}_4^n)_n$  est bornée sur  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ , et plus précisément dans le sous-espace fermé  $\mathcal{J}_1(\Omega) := \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0^\Sigma(\text{div } 0; \Omega)$  auquel appartiennent tous ses termes étant donné la définition de  $D(\hat{\mathbb{A}}_1)$ , voir (4.61) et (4.60). Mais  $\mathcal{J}_1(\Omega)$  est également un sous-espace fermé de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\text{div}; \Omega)$ , qui s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  [4, théorème 3.5.4]; on peut donc extraire une sous-suite, encore notée  $(\mathbf{U}_{4n})_n$ , qui converge fortement dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  vers un certain  $\mathbf{U}_4 \in \mathcal{J}_1(\Omega)$ . En conséquence,  $(\mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n)_n$  converge au sens des distributions vers  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_4$ ; ceci combiné avec (5.11) implique que

$$\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = 0 \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Alors,  $\mathbf{U}_4 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega)$ . Avec  $\mathbf{U}_4 \in \mathcal{J}_1(\Omega)$ , cela signifie que  $\mathbf{U}_4$  appartient à  $\mathbf{Z}_T(\Omega) = \mathbf{H}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_0(\text{div } 0; \Omega)$  et à son orthogonal  $\mathbf{H}_0^\Sigma(\text{div } 0; \Omega)$  (cf. (2.5)), d'où  $\mathbf{U}_4 = 0$ .



D'autre part, (5.1), (5.9) et (5.10) impliquent que

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_0 c^2 \|\mathbf{U}_4^n\|^2 = \varepsilon_0 c^2 \|\mathbf{U}_4\|^2,$$

en particulier,  $\mathbf{U}_4 \neq 0$ , d'où la contradiction. La résolvante est donc uniformément bornée au voisinage de 0 :

$$\exists C > 0, \quad \forall \beta \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad \|(i\beta \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_1)^{-1}\| \leq C. \quad (5.12)$$

La surjectivité de  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$  et le bornitude de son inverse découlent alors d'un argument standard. Choisissons  $\mathbf{F} \in \tilde{\mathbf{X}}_1$  quelconque. Selon la proposition 4.4.4, pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  il existe un unique  $\mathbf{U}_k \in D(\tilde{\mathbb{A}}_1)$  tel que  $(ik^{-1} + \mathbb{A})\mathbf{U}_k = -\mathbf{F}$ , et

$$\|\mathbf{U}_k\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}}.$$

Étant bornée, la suite  $(\mathbf{U}_k)_k$  admet une sous-suite (encore notée  $(\mathbf{U}_k)_k$ ) qui converge faiblement vers  $\mathbf{U} \in \tilde{\mathbf{X}}_1$ , car ce dernier est un sous-espace fermé de  $\mathbf{X}$ , qui satisfait toujours  $\|\mathbf{U}\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{X}}$ . De plus,  $-\mathbb{A}\mathbf{U}_k \rightharpoonup -\mathbb{A}\mathbf{U}$  au sens de distributions. Mais, d'autre part

$$-\mathbb{A}\mathbf{U}_k = \mathbf{F} + ik^{-1}\mathbf{U}_k \rightarrow \mathbf{F} \quad \text{dans } \mathbf{X}.$$

Par conséquent,  $-\mathbb{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ , i.e.,  $\mathbf{U} \in D(\tilde{\mathbb{A}}_1)$ . Comme  $\mathbf{F}$  est arbitraire, cela prouve que  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$  est surjective, donc bijective, entre  $D(\tilde{\mathbb{A}}_1)$  et  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ , et son inverse est borné :

$$\|(-\tilde{\mathbb{A}}_1)^{-1}\| \leq C, \quad \text{et} \quad \|(-\tilde{\mathbb{A}}_1)^{-1}\|_{\tilde{\mathbf{X}}_1 \rightarrow D(\tilde{\mathbb{A}}_1)} \leq C + 1. \quad \blacksquare$$

La surjectivité de  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$  peut être obtenue par un argument direct. Nous avons donné la preuve ci-dessus car elle fournit un modèle pour celle dans le cas de la condition de Silver–Müller. Nous donnons à présent la preuve directe. D'abord, débutons en rappelant quelques résultats bien connus (cf. [2, théorème 3.17, théorème 3.12], [4, chapitre 3]) dont nous aurons besoin dans la preuve.

**Théorème 5.1.2.** *Étant donné  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , on a*

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq J, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \exists! \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega), \\ \mathbf{v} = \mathbf{rot} \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, \quad 0 \leq i \leq K. \end{array} \right.$$

**Théorème 5.1.3.** *Étant donné  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , on a*

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, \quad 0 \leq i \leq K \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \exists! \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}; \Omega), \\ \mathbf{v} = \mathbf{rot} \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \langle \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq J. \end{array} \right.$$

**Proposition 5.1.4.** *L'opérateur  $\tilde{\mathbb{A}}_1$  est surjectif sur  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ , i.e.,  $R(\tilde{\mathbb{A}}_1) = \tilde{\mathbf{X}}_1$ .*

**Preuve.** Prenons  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)^\top \in \tilde{\mathbf{X}}_1$  quelconque et cherchons  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\tilde{\mathbb{A}}_1)$ , qui vérifie

$$\mathbb{A}_1 \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (5.13)$$

ou de façon équivalente

$$\mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1 - \varepsilon_0 \omega_{p_1}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_1, \quad (5.14)$$

$$\mathbb{M}_2 \mathbf{U}_2 - \varepsilon_0 \omega_{p_2}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_2, \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{U}_1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{U}_2 - c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = \mathbf{F}_3, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_4. \quad (5.17)$$

En supposant qu'une solution  $\mathbf{U}$  de (5.14)-(5.17) existe, nous pouvons éliminer les équations (5.14), (5.15) et (5.16) respectivement

$$\mathbf{U}_1 = \mathbb{M}_1^{-1}(\mathbf{F}_1 + \varepsilon_0 \omega_{p_1}^2 \mathbf{U}_3), \quad (5.18)$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbb{M}_2^{-1}(\mathbf{F}_2 + \varepsilon_0 \omega_{p_2}^2 \mathbf{U}_3), \quad (5.19)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \sum_{s=1}^2 \mathbb{M}_s^{-1}(\mathbf{F}_s + \varepsilon_0 \omega_{p_s}^2 \mathbf{U}_3) - \frac{1}{c^2} \mathbf{F}_3. \quad (5.20)$$

Notons que cette fois, nous avons éliminé  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_4$  en fonction de  $\mathbf{U}_3$  car  $\mathbf{U}_4$  n'apparaît pas dans le système. Tout d'abord, nous commençons par prouver l'existence  $\mathbf{U}_3$  qui est régi par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U}_3 \in \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_4 \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div}(\mathbb{B}_0 \mathbf{U}_3) = \text{div} \mathbf{g} \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \\ \mathbf{U}_3 \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

avec  $\mathbf{g}$  un élément de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  qui sera choisi plus tard.

Alors, introduisons la formulation variationnelle mixte du problème (5.21) :

Trouver  $(\mathbf{U}_3, p) \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \times H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tel que :

$$a_0(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) + \overline{b_0(\mathbf{v}, p)} = L_0(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega), \quad (5.22)$$

$$b_0(\mathbf{U}_3, q) = (\mathbf{g} \mid \mathbf{grad} q), \quad \forall q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega), \quad (5.23)$$

où les formes sesquilinéaires  $a_0$  et  $b_0$  sont définies par :

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &:= (\mathbf{rot} \mathbf{w} \mid \mathbf{rot} \mathbf{v}), \\ b_0(\mathbf{v}, q) &:= (\mathbb{B}_0 \mathbf{v} \mid \mathbf{grad} q). \end{aligned}$$

La forme anti-linéaire  $L_0$  est donnée par :

$$L_0(\mathbf{v}) := (\mathbf{F}_4 \mid \mathbf{rot} \mathbf{v}). \quad (5.24)$$

Pour établir que la formulation variationnelle (5.22)-(5.23) est bien posée, nous devons vérifier que les hypothèses du théorème 4.2.19 de [4], de Babuska et Brezzi, sont satisfaites.

*i) Continuité:* il est clair que les formes sesquilinéaires  $a_0$  et  $b_0$  et la forme anti-linéaire  $L_0$  sont continues.

*ii) Coercivité sur le noyau:* le noyau de  $b_0(\cdot, \cdot)$  est défini par

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) : b_0(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \forall q \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)\}$$

qui, selon les formules de Green (4.4) and (4.3), peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}_0 0; \Omega) : \langle \mathbb{B}_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, \quad \forall 1 \leq k \leq K\} \\ &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div} \mathbb{B}_0 0; \Omega) : P_{\mathbf{Z}_N(\Omega; \mathbb{B}_0)} \mathbf{v} = 0\}. \end{aligned}$$

Selon le corollaire 4.2.9 appliqué au sous-espace fermé  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{X}_{N, \Gamma}(\Omega; \mathbb{B}_0)$ , la forme sesquilinéaire  $a_0$  est coercive sur  $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$ .

*iii) Condition inf-sup:* soit  $q \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  et posons  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} q \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega)$ , donc  $\mathbf{v}$  vérifie  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ . D'autre part, selon le lemme 4.3.6, nous avons

$$\begin{aligned} |b_0(\mathbf{v}, q)| &= |(\mathbb{B}_0 \mathbf{v} \mid \mathbf{grad} q)| = |(\mathbb{B}_0 \mathbf{v} \mid \mathbf{v})| \\ &\geq \zeta_0 \|\mathbf{v}\|^2 = \zeta_0 \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{grad} q\|. \end{aligned}$$

En combinant ce qui précède, il s'ensuit que

$$\frac{|b_0(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)}} \geq \zeta_0 \|\mathbf{grad} q\| = \zeta_0 \|q\|_{\mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)}.$$

En conclusion, il existe  $C_b = \zeta_0 > 0$  tel que

$$\forall q \in \mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)} \frac{|b_0(\mathbf{v}, q)|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)}} \geq C_b \|q\|_{\mathbf{H}_{\partial\Omega}^1(\Omega)}.$$

Par conséquent, le problème mixte (5.22)-(5.23) est bien posé.

Pour montrer l'équivalence entre (5.22) et (5.21), il faut d'abord vérifier que le multiplicateur de Lagrange  $p$  s'annule dans (5.22). En utilisant  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} p \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$  comme fonction-test dans (5.22), nous obtenons

$$\|\mathbf{grad} p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = 0, \quad \text{soit} \quad p = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Ensuite, prouvons que  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_4$  dans  $\Omega$ . Par hypothèse, on a  $\mathbf{F}_4 \in \mathbf{H}_0^\Sigma(\operatorname{div} 0; \Omega)$  donc d'après le théorème 5.1.2, il existe  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$  tel que  $\mathbf{rot} \mathbf{w} = \mathbf{F}_4$  dans

$\Omega$ . En utilisant  $\mathbf{v} := \mathbf{U}_3 - \mathbf{w}$  comme fonction-test dans (5.22), nous trouvons que  $\|\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 - \mathbf{F}_4\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_4$  dans  $\Omega$ .

Revenons maintenant au problème (5.14)-(5.17). Définissons  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  respectivement par (5.18) et (5.19). Il est clair qu'ils appartiennent  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Il reste à prouver l'existence de  $\mathbf{U}_4$  qui vérifie (5.20). Pour cela, définissons

$$\mathbf{R} := \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \sum_{s=1}^2 \mathbb{M}_s^{-1} (\mathbf{F}_s + \varepsilon_0 \omega_{ps}^2 \mathbf{U}_3) - \frac{1}{c^2} \mathbf{F}_3.$$

$\mathbf{R}$  appartient à  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Rappelons que  $\mathbb{B}_0 = \sum_{s=1}^2 \omega_{ps}^2 \mathbb{M}_s^{-1}$  et d'après (5.23), nous avons

$$\left( \sum_{s=1}^2 \omega_{ps}^2 \mathbb{M}_s^{-1} \mathbf{U}_3 \mid \mathbf{grad} q \right) = (\mathbf{g} \mid \mathbf{grad} q). \quad (5.25)$$

Donc, en choisissant

$$\mathbf{g} := \mathbf{F}_3 - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{s=1}^2 \mathbb{M}_s^{-1} \mathbf{F}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega),$$

nous obtenons, selon (5.25),  $\operatorname{div} \mathbf{R} = 0$  dans  $\Omega$ . Ensuite, pour  $k \in \{1, \dots, K\}$  fixé, définissons  $q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tel que  $q|_{\Gamma_k} = 1$  et  $q|_{\Gamma_i} = 0$  pour  $i \neq k$ . Donc, nous obtenons par intégration par partie :

$$\langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = \langle \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = (\mathbf{R} \mid \mathbf{grad} q) \stackrel{(5.25)}{=} 0.$$

Par conséquent,  $\mathbf{R}$  vérifie les hypothèses du théorème 5.1.3. Il existe donc un, et un seul, vecteur potentiel  $\mathbf{U}_4 \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div} 0; \Omega)$  tel que  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = \mathbf{R}$  et  $\langle \mathbf{U}_4 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j} = 0$  pour tout  $1 \leq j \leq J$ , autrement dit

$$\exists! \mathbf{U}_4 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}_0^\Sigma(\operatorname{div} 0; \Omega) \quad \text{tel que} \quad \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = \mathbf{R} \quad \text{dans } \Omega.$$

Enfin, nous avons l'existence d'un unique  $\mathbf{U} \in D(\mathbb{A}_1) \cap \widetilde{\mathbf{X}}_1$  qui résout  $\mathbb{A}_1 \mathbf{U} = \mathbf{F}$ . La démonstration est achevée.  $\blacksquare$

**Proposition 5.1.5.** *La résolvante de l'opérateur  $-\widetilde{\mathbb{A}}_1$  satisfait la condition (2.29) avec  $\ell = 2$ .*

**Preuve.** Nous raisonnons à nouveau par l'absurde, i.e., nous supposons que (2.29) est fautive pour tout  $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ; la valeur de  $\ell$  sera précisée plus tard. Alors, il existe une suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}$  avec  $|\beta_n| \rightarrow +\infty$  as  $n \rightarrow +\infty$ , et une suite  $(\mathbf{U}^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\mathbf{U}_1^n, \mathbf{U}_2^n, \mathbf{U}_3^n, \mathbf{U}_4^n)^\top)_n$  d'éléments de  $D(\widetilde{\mathbb{A}}_1)$ , telles que

$$\|\mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}} = 1, \quad \forall n, \quad (5.26)$$

et

$$\beta_n^\ell \|(i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_1) \mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad (5.27)$$

qui est équivalent à

$$\beta_n^\ell (i\beta_n \mathbf{U}_1^n + \mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1^n - \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3^n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (5.28)$$

$$\beta_n^\ell (i\beta_n \mathbf{U}_2^n + \mathbb{M}_2 \mathbf{U}_2^n - \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3^n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (5.29)$$

$$\beta_n^\ell (i\beta_n \varepsilon_0 \mathbf{U}_3^n + \mathbf{U}_1^n + \mathbf{U}_2^n - \varepsilon_0 c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (5.30)$$

$$\beta_n^\ell (i\varepsilon_0 c^2 \beta_n \mathbf{U}_4^n + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n) \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega). \quad (5.31)$$

Comme, selon (3.22) et (5.26),

$$|\beta_n^\ell| \sum_s \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s^n}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s^n}{\omega_{ps}} \right. \right) = |\beta_n^\ell| \Re((i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_1) \mathbf{U}^n, \mathbf{U}^n)_{\mathbf{X}} \leq |\beta_n^\ell| \|(i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_1) \mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}},$$

nous déduisons de (5.27) que

$$|\beta_n^\ell| \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s^n}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s^n}{\omega_{ps}} \right. \right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2,$$

ce qui implique, par les hypothèses 1 et 2,

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}} \mathbf{U}_s^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2. \quad (5.32)$$

(Par souci de simplicité, on peut supposer  $\ell$  pair, de sorte que  $\beta_n^{\frac{\ell}{2}}$  est défini sans ambiguïté; sinon, on peut choisir une détermination principale pour la racine carrée d'un nombre réel négatif. Cela n'a que peu d'importance, car toutes les limites que nous considérons sont nulles.)

En multipliant (5.28) par  $\beta_n^{-\frac{\ell}{2}-1}$ , on obtient :

$$i\beta_n^{\frac{\ell}{2}} \mathbf{U}_1^n + \beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1^n - \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \mathbf{U}_3^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

avec (5.32), cela donne

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \mathbf{U}_3^n \rightarrow 0, \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.33)$$

De même, en multipliant (5.30) par  $\beta_n^{-\frac{\ell}{2}-2}$  on trouve :

$$i\beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \varepsilon_0 \mathbf{U}_3^n + \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{U}_1^n + \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{U}_2^n - \varepsilon_0 c^2 \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

en prenant en compte (5.32) et (5.33), nous arrivons à :

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.34)$$

Maintenant, multiplions (5.31) par  $\beta_n^{-\frac{\ell}{2}-2}$  :

$$i\varepsilon_0 c^2 \beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \mathbf{U}_4^n + \varepsilon_0 c^2 \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

puis nous effectuons le produit scalaire (à droite) de cette équation avec  $\mathbf{U}_4^n$  et trouvons

$$i\varepsilon_0 c^2 \beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \|\mathbf{U}_4^n\|^2 + \varepsilon_0 c^2 \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n | \mathbf{U}_4^n) \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.35)$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green (2.1) et la condition  $\mathbf{U}_3^n \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ , nous obtenons :

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n | \mathbf{U}_4^n) = \left( \mathbf{U}_3^n \left| \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \right. \right) \leq \|\mathbf{U}_3^n\| \|\beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n\|. \quad (5.36)$$

En supposant  $\ell \geq 2$ , nous déduisons de (5.33) que :

$$\|\mathbf{U}_3^n\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.37)$$

Ainsi, des équations (5.36), (5.37) et (5.34), nous déduisons

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n | \mathbf{U}_4^n) \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.38)$$

Utilisant (5.35), cette dernière propriété implique

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \|\mathbf{U}_4^n\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (5.39)$$

si  $\ell \geq 2$ . Dans ce cas, l'exposant  $\frac{\ell}{2} - 1 \geq 0$ , et on obtient *a fortiori* :

$$\|\mathbf{U}_4^n\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.40)$$

Comme (5.32) implique, pour tout  $\ell > 0$ , que

$$\|\mathbf{U}_s^n\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2, \quad (5.41)$$

en prenant en compte (5.37) et (5.40) et en utilisant l'équivalence des normes, nous obtenons  $\|\mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , qui contredit (5.26). ■

Grâce aux résultats ci-dessus, nous obtenons le théorème important de cette section.

**Théorème 5.1.6.** *Le semi-groupe de contraction  $(\check{T}_1(t))_{t \geq 0}$ , de générateur  $-\check{\mathbb{A}}_1$ , est polynomialement stable sur  $\check{\mathbf{X}}_1$ , i.e., il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\forall t > 1, \quad \|\check{T}_1(t)\check{\mathbf{U}}_0\|_{\check{\mathbf{X}}_1} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|\check{\mathbf{U}}_0\|_{D(\check{\mathbb{A}}_1)}, \quad \forall \check{\mathbf{U}}_0 \in D(\check{\mathbb{A}}_1). \quad (5.42)$$

*De plus, sous les hypothèses du théorème 3.4.1 sur  $\mathbf{B}_0$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que la solution du problème (3.19) satisfait*

$$\forall t > 1, \quad \|T_1(t)\mathbf{U}_0 - \sum_{1 \leq j \leq J} \xi_j (0, 0, 0, \widetilde{\mathbf{grad} \dot{q}_j})^\top\|_{\mathbf{X}_1} \leq M t^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}_0\|_{D(\mathbb{A}_1) \cap \mathbf{X}_1}, \quad (5.43)$$

pour tout  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_1) \cap \mathbf{X}_1$ , où  $\xi_j = \langle \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Sigma_j}$ , pour  $j = 1, \dots, J$ .

**Preuve.** L'équation (5.43) est une conséquence de (5.42) et du corollaire 4.4.8. ■

### 5.1.2 Cas de la condition de Silver–Müller

Selon le théorème 2.4.22 de Borichev–Tomilov, le  $C^0$ -semi-groupe  $(T_2(t))_{t \geq 0}$  est polynomialement stable de l'ordre de  $t^{-\frac{1}{\ell}}$ , pour un certain  $\ell > 0$ , sous des hypothèses sur la donnée initiale si

$$i\mathbb{R} \subset \rho(-\tilde{\mathbb{A}}_2)$$

et

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta^\ell} \|(i\beta \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_2)^{-1}\| < +\infty,$$

avec  $\rho(-\tilde{\mathbb{A}}_2)$  est l'ensemble résolvant de l'opérateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_2$ . Dans le chapitre 4, précisément §4.4.2, nous avons vu que l'axe  $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$  est inclus  $\rho(-\tilde{\mathbb{A}}_2)$  sous les hypothèses 1 et 2. Par conséquent, il ne reste plus dans la première condition qu'à prouver que  $0 \in \rho(-\tilde{\mathbb{A}}_2)$ . Puis, nous allons prouver la deuxième condition pour  $\ell = 2$ .

**Proposition 5.1.7.** *L'élément 0 appartient à  $\rho(-\tilde{\mathbb{A}}_2)$ .*

**Preuve.** Nous utilisons les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 5.1.1, et nous prouvons que la résolvante de  $-\tilde{\mathbb{A}}_2$  est uniformément bornée au voisinage de 0 par l'absurde.

Supposons que ce n'est pas le cas, alors il existe une suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  avec  $\beta_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et une suite de champs vectoriels  $(\mathbf{U}_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\mathbf{U}_1^n, \mathbf{U}_2^n, \mathbf{U}_3^n, \mathbf{U}_4^n)^\top)_n$  sur  $D(\tilde{\mathbb{A}}_2)$ , avec

$$\|\mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}} = 1, \quad \forall n, \tag{5.44}$$

telles que

$$\|(i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \tag{5.45}$$

ce qui est à nouveau équivalent au système (5.3)–(5.6), avec d'autres conditions aux limites.

Par la monotonie de  $\mathbb{A}_2$  (Eq. (3.40)) et (5.44) :

$$\begin{aligned} \sum_s \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s^n}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s^n}{\omega_{ps}} \right. \right) + \varepsilon_0 c^3 \|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 &= \Re((i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n)_{\mathbf{X}} \\ &\leq \|(i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

nous obtenons de (5.45)

$$\left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s^n}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s^n}{\omega_{ps}} \right. \right) \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad \forall s = 1, 2 \tag{5.46}$$

et

$$\|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.47)$$

Comme on l'a déjà dit, la condition  $\mathbf{U}_{4\top}^n \in \mathbf{L}^2(\Gamma_A)$  découle de la condition aux limites de Silver–Müller, en l'absence de sommets pathologiques.

En raisonnant comme dans la proposition 5.1.1, nous déduisons que

$$\|\mathbf{U}_s^n\|_{(s)} \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2, 3; \quad (5.48)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.49)$$

Donc,  $(\mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n)_n$  est bornée dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . En tenant compte de (5.44) et (5.47), la suite  $(\mathbf{U}_4^n)_n$  est bornée dans  $\mathcal{W} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) : \mathbf{w} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_A} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma_A)\}$ , et plus précisément dans le sous-espace fermé  $\mathcal{J}_2(\Omega) := \mathcal{W} \cap \mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div} 0; \Omega)$  auquel appartiennent tous ses termes étant donné la définition de  $D(\tilde{\mathbb{A}}_2)$ , voir (4.75) et (4.74). D'autre part,  $\mathcal{J}_2(\Omega)$  apparaît également comme un sous-espace fermé de

$$\left\{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) : \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_P} \in L^2(\Gamma_P) \text{ et } \mathbf{w} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_A} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma_A) \right\}, \quad (5.50)$$

qui s'injecte de façon compacte dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  d'après la proposition 2.2.10. Par conséquent, nous pouvons extraire une sous-suite, encore notée  $(\mathbf{U}_4^n)_n$ , qui converge fortement dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , et faiblement dans  $\mathcal{J}_2(\Omega)$ , vers un certain  $\mathbf{U}_4 \in \mathcal{J}_2(\Omega)$ . En combinant la convergence faible dans  $\mathcal{J}_2(\Omega)$  avec (5.49) et (5.47), nous trouvons

$$\mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \rightarrow \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

$$\mathbf{U}_{4\top}^n \rightarrow \mathbf{U}_{4\top} = 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}_t^2(\Gamma_A), \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Alors,  $\mathbf{U}_4 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_A}(\mathbf{rot} 0; \Omega)$ . Avec  $\mathbf{U}_4 \in \mathcal{J}_2(\Omega)$ , cela signifie que  $\mathbf{U}_4$  appartient à la fois à  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A) = \mathbf{H}_{0,\Gamma_A}(\mathbf{rot} 0; \Omega) \cap \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\text{div} 0; \Omega)$  et à son orthogonal  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div} 0; \Omega)$  (cf. (2.16)), d'où  $\mathbf{U}_4 = 0$ .

D'autre part, (5.44) and (5.48) impliquent que

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{U}_n\|_{\mathbf{X}}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_0 c^2 \|\mathbf{U}_4^n\|^2 = \varepsilon_0 c^2 \|\mathbf{U}_4\|^2,$$

en particulier,  $\mathbf{U}_4 \neq 0$ , et la conclusion ci-dessus est contredite. La preuve est terminée. ■

**Proposition 5.1.8.** *La résolvante de l'opérateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_2$  satisfait la condition (2.29) avec  $\ell = 2$ .*



**Preuve.** Nous suivons le schéma de la preuve de la proposition 5.1.5, en insistant uniquement sur les différences. Supposons que (2.29) est fausse, avec  $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  à préciser plus tard, alors il existe une suite  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et une suite  $(\mathbf{U}^n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\mathbf{U}_1^n, \mathbf{U}_2^n, \mathbf{U}_3^n, \mathbf{U}_4^n)^\top)_n$  sur  $D(\widehat{\mathbb{A}}_2)$ , telle que :

$$\|\mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}} = 1, \quad \forall n, \quad (5.51)$$

et

$$\beta_n^\ell \|(i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty; \quad (5.52)$$

encore une fois, cette dernière condition est équivalente au système (5.28)–(5.31), avec des conditions aux limites différentes.

En utilisant la monotonie de  $\mathbb{A}_2$  (équation (3.40)) et (5.51) :

$$\begin{aligned} |\beta_n^\ell| \sum_s \left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s^n}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \left| \frac{\mathbf{U}_s^n}{\omega_{ps}} \right. \right) + \varepsilon_0 c^3 |\beta_n^\ell| \|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 &= |\beta_n^\ell| \Re((i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U}^n, \mathbf{U}^n)_{\mathbf{X}} \\ &\leq |\beta_n^\ell| \|(i\beta_n \mathbb{I} + \mathbb{A}_2) \mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

nous déduisons de (5.52) que :

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}} \mathbf{U}_s^n \rightarrow 0, \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2, \quad (5.53)$$

et

$$\beta_n^\ell \|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.54)$$

En raisonnant comme dans la proposition 5.1.5, nous concluons :

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-1} \mathbf{U}_3^n \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad (5.55)$$

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \rightarrow 0, \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty, \quad (5.56)$$

ce qui donne (5.35) encore. Ensuite, en utilisant la formule de Green (2.3) et la condition aux limites de Silver–Müller, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n | \mathbf{U}_4^n) &= \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} (\mathbf{U}_3^n | \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n) - \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \gamma_A^0 \langle \mathbf{U}_3^n \times \mathbf{n}, \mathbf{U}_{4\top}^n \rangle_{\pi_A} \\ &= \left( \mathbf{U}_3^n \left| \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n \right. \right) + c \beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Mais, d'autre part, d'après (5.54)

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} \|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 = \beta_n^{-\frac{\ell}{2}-2} \times \left( \beta_n^\ell \|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

pour tout  $\ell > 0$ . De plus, l'équation (5.56) implique que le premier terme du second membre de (5.57) converge vers 0 si  $\ell \geq 2$ . En conséquence,

$$\beta_n^{\frac{\ell}{2}-2} (\mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n | \mathbf{U}_4^n) \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (5.58)$$

pour  $\ell \geq 2$ , ce qui avec (5.35) implique (5.40). Finalement, cela implique que  $\|\mathbf{U}^n\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0$ , contredisant l'hypothèse (5.51). ■

Les résultats ci-dessus nous permettent de conclure avec le résultat important de cette sous-section.

**Théorème 5.1.9.** *Le semi-groupe de contraction  $(\tilde{T}_2(t))_{t \geq 0}$ , de générateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_2$ , est polynomialement stable sur  $\tilde{\mathbf{X}}_2$ , i.e., il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\forall t > 1, \quad \|\tilde{T}_2(t)\tilde{\mathbf{U}}_0\|_{\tilde{\mathbf{X}}_2} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{\mathbf{U}}_0\|_{D(\tilde{\mathbb{A}}_2)}, \quad \forall \tilde{\mathbf{U}}_0 \in D(\tilde{\mathbb{A}}_2). \quad (5.59)$$

*De plus, sous les hypothèses du théorème 3.4.1 sur  $\mathbf{B}_0$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que la solution du problème (3.36) satisfait*

$$\forall t > 1, \quad \|T_2(t)\mathbf{U}_0 - (0, 0, 0, P_2\mathbf{B}_0)^\top\|_{\mathbf{X}_2} \leq M t^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}_0\|_{D(\mathbb{A}_2) \cap \mathbf{X}_2}, \quad \forall \mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_2) \cap \mathbf{X}_2. \quad (5.60)$$

**Remarque 5.1.10.** *Tout ce que nous venons de faire dans ce paragraphe fonctionne également lorsque  $\Gamma_P = \emptyset$ . La seule modification porte sur l'espace (5.50) : en prenant  $\Gamma_P$  vide, cet espace est égal à  $\mathbf{X}_{N,\Gamma}(\Omega; \mathbb{I})$ , et comme la matrice identité  $\mathbb{I}$  satisfait la condition (4.2), nous pouvons appliquer le résultat d'injection compacte du théorème 4.2.7. Rappelons que dans §4.5, nous avons indiqué que les résultats de §4.4.2 sont aussi satisfaits dans le cas où  $\Gamma_P$  est vide. Donc, tout cela nous permet de conclure sur la stabilité polynomiale du problème  $(\mathfrak{P}_3)_{\text{hom}}$  : pour toute donnée initiale dans  $\mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega) \times \mathcal{H}_\Gamma$  où*

$$\mathcal{H}_\Gamma = \{(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4) \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) : \mathbf{V}_3 \times \mathbf{n} + c\mathbf{V}_4 \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

*l'énergie de la solution du problème  $(\mathfrak{P}_3)_{\text{hom}}$  décroît polynomialement en  $1/t$  sous les hypothèses 1 et 2. N'oublions pas que l'espace  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$  sera remplacé par  $\mathbf{H}^\Gamma(\text{div } 0; \Omega)$  dans ce cas.*

## 5.2 Résultats de stabilité exponentielle

Dans cette section, nous étudions la stabilité exponentielle du système (3.1)-(3.5) avec les différentes conditions aux limites, en utilisant une approche dans le domaine fréquentiel, à savoir le théorème de Prüss et Huang [60, 47].

### 5.2.1 Stabilité non exponentielle dans le cas du conducteur parfait

Dans cette sous-section, notre objectif est de montrer que le modèle Euler-Maxwell avec une condition aux limites de conducteur parfait partout ( $\Gamma_A = \emptyset$ ) n'est *jamais* exponentiellement stable : il n'existe pas de version améliorée du

théorème 5.1.6. Dans ce cas, l'opérateur de Maxwell a un nombre infini de valeurs propres sur l'axe imaginaire : l'opérateur d'évolution associé ne peut pas être exponentiellement stable.

**Théorème 5.2.1.** *Le semi-groupe de contractions  $(\tilde{T}_1(t))_{t \geq 0}$ , de générateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$ , n'est pas exponentiellement stable sur l'espace d'énergie  $\tilde{\mathbf{X}}_1$ .*

**Preuve.** Considérons le problème des valeurs propres avec condition aux limites du conducteur parfait :

$$\begin{cases} c^2 \mathbf{rot rot} \mathbf{E}_k = \lambda_k^2 \mathbf{E}_k, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}_k = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{E}_k \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (5.61)$$

Il est bien connu (voir, par exemple, [4, §8.2.1]) qu'il admet une suite croissante de valeurs propres tendant vers l'infini. Supposons que les vecteurs propres correspondants sont normalisés par  $\|\mathbf{E}_k\| = 1$ , et introduisons la suite  $(\mathbf{U}^k)_{k \in \mathbb{N}}$  sur  $D(\tilde{\mathbb{A}}_1)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s^k &= (\mathrm{i}\lambda_k \mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1} \varepsilon_0 \omega_{ps}^2 \mathbf{E}_k, \quad s = 1, 2, \\ \mathbf{U}_3^k &= \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{U}_4^k &= -\frac{1}{\mathrm{i}\lambda_k} \mathbf{rot} \mathbf{E}_k. \end{aligned}$$

Grâce à §4.3, il est facile de montrer que  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  implique  $\|(i\lambda_k \mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1}\|_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$ . Par conséquent,  $\|\mathbf{U}_s^k\| \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ , et :

$$(\mathrm{i}\lambda_k \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_1) \mathbf{U}^k = \left(0, 0, \frac{1}{\varepsilon_0} (\mathbf{U}_1^k + \mathbf{U}_2^k), 0\right)^\top \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

D'autre part, en prenant  $\mathbf{E}_k$  comme une fonction test dans (5.61), on trouve  $\|\mathbf{U}_4^k\| = 1/c$ . Dans l'ensemble,  $0 < U_* \leq \|\mathbf{U}^k\| \leq U^* < +\infty$ , pour  $U_*$ ,  $U^*$  indépendants de  $k$ . Cela montre que l'équivalent de (2.28) ou (5.63) ne peut pas avoir lieu pour  $-\tilde{\mathbb{A}}_1$ . ■

## 5.2.2 Stabilité exponentielle conditionnelle dans le cas de la condition Silver–Müller

Dans cette sous-section, nous souhaitons étudier la stabilité exponentielle du modèle Euler-Maxwell dans le cas de la condition de Silver–Müller. D'après §5.1.2, on a vu que l'axe imaginaire est inclus dans  $\rho(-\tilde{\mathbb{A}}_2)$ . Selon le théorème 2.4.21 de Prüss et Huang, il reste à montrer que la résolvante est bornée au voisinage de l'infini. Nous allons prouver ce résultat conditionnellement, c'est-à-dire, si la résolvante de l'opérateur de Maxwell est bornée alors la résolvante de notre modèle l'est aussi. Dans ce cas, on parle de la stabilité exponentielle du système de Maxwell à divergence nulle et avec condition aux limites de Silver–Müller.

**Proposition 5.2.2.** *Supposons que le système Maxwell à divergence nulle et sans source avec condition aux limites de Silver–Müller, ou mêlée :*

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} = c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B}, & \partial_t \mathbf{B} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, & \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_P \times \mathbb{R}_{>0}, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_\top = 0, & & \text{sur } \Gamma_A \times \mathbb{R}_{>0}. \end{cases} \quad (5.62)$$

soit exponentiellement stable. Alors, la résolvante de l'opérateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_2$  satisfait :

$$\sup_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta + \tilde{\mathbb{A}}_2)^{-1}\| < \infty. \quad (5.63)$$

**Preuve.** Encore une fois, nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite  $(\beta_n)_n$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $|\beta_n| \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et une suite de champs  $(\mathbf{U}^n)_n = ((\mathbf{U}_1^n, \mathbf{U}_2^n, \mathbf{U}_3^n, \mathbf{U}_4^n)^\top)_n$  dans  $D(\tilde{\mathbb{A}}_2)$ , satisfaisant (5.44) et (5.45), cette dernière étant équivalente au système (5.3)–(5.6). En suivant le même raisonnement que dans la proposition 5.1.7, on obtient

$$\|\mathbf{U}_s^n\| \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \quad s = 1, 2; \quad (5.64)$$

$$\|\mathbf{U}_{4\top}^n\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.65)$$

Afin d'utiliser la stabilité exponentielle de (5.62), nous devons corriger  $\mathbf{U}_3^n$  car il ne satisfait pas  $\operatorname{div} \mathbf{U}_3^n = 0$  dans  $\Omega$ . Considérons  $\varphi_n \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  l'unique solution de

$$(\mathbf{grad} \varphi_n \mid \mathbf{grad} \psi) = (\mathbf{U}_3^n \mid \mathbf{grad} \psi), \quad \forall \psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (5.66)$$

Maintenant, définissons

$$\hat{\mathbf{U}}_3^n = \mathbf{U}_3^n - \mathbf{grad} \varphi_n, \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors,  $\hat{\mathbf{U}}_3^n$  appartient à  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)$  et satisfait

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{U}}_3^n = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.67)$$

Introduisons

$$\mathbf{L}_n := i\beta_n \varepsilon_0 \mathbf{U}_3^n + \sum_s \mathbf{U}_s^n - \varepsilon_0 c^2 \operatorname{rot} \mathbf{U}_4^n,$$

le premier membre de (5.5) ; par hypothèse  $\|\mathbf{L}_n\| \rightarrow 0$ . En choisissant  $\psi = \varphi_n$  dans (5.66) et en utilisant la formule de Green (2.1), nous trouvons

$$\begin{aligned} \|\mathbf{grad} \varphi_n\|^2 &= \frac{1}{i\beta_n \varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathbf{L}_n - \sum_s \mathbf{U}_s^n + \varepsilon_0 c^2 \operatorname{rot} \mathbf{U}_4^n) \cdot \mathbf{grad} \overline{\varphi_n} \, d\Omega \\ &= \frac{1}{i\beta_n \varepsilon_0} \int_{\Omega} (\mathbf{L}_n - \sum_s \mathbf{U}_s^n) \cdot \mathbf{grad} \overline{\varphi_n} \, d\Omega \\ &\leq \frac{C}{\beta_n} (\|\mathbf{L}_n\| + \sum_s \|\mathbf{U}_s^n\|) \|\mathbf{grad} \varphi_n\|. \end{aligned}$$

Alors, de (5.5) et (5.64) nous déduisons que

$$\|\beta_n \mathbf{grad} \varphi_n\| \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.68)$$

Introduisons maintenant

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_n &= \mathbf{L}_n - \sum_s \mathbf{U}_s^n - i\beta_n \varepsilon_0 \mathbf{grad} \varphi_n, \\ \mathbf{Q}_n &= i\varepsilon_0 c^2 \beta_n \mathbf{U}_4^n + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_3^n. \end{aligned}$$

Par (5.6), (5.64) et (5.68), on obtient :

$$\hat{\mathbf{L}}_n, \mathbf{Q}_n \rightarrow 0 \quad \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (5.69)$$

Pour résumer, le couple  $(\hat{\mathbf{U}}_3^n, \mathbf{U}_4^n)$  satisfait la condition aux limites du conducteur parfait sur  $\Gamma_P$ , la condition aux limites de Silver–Müller sur  $\Gamma_A$ , et le problème de Maxwell harmonique à divergence nulle dans  $\Omega$  :

$$\begin{cases} i\beta_n \varepsilon_0 \hat{\mathbf{U}}_3^n - \varepsilon_0 c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4^n = \hat{\mathbf{L}}_n, \\ i\varepsilon_0 c^2 \beta_n \mathbf{U}_4^n + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{rot} \hat{\mathbf{U}}_3^n = \mathbf{Q}_n. \end{cases} \quad (5.70)$$

Par hypothèse, le système (5.62) est exponentiellement stable; ainsi, selon le théorème 2.4.21, sa résolvante est uniformément bornée sur l'axe imaginaire. En d'autres termes, il existe une constante positive  $C$ , indépendante de  $n$ , telle que la solution  $(\hat{\mathbf{U}}_3^n, \mathbf{U}_4^n)$  de (5.70) satisfait

$$\|\hat{\mathbf{U}}_3^n\| + \|\mathbf{U}_4^n\| \leq C \left( \|\hat{\mathbf{L}}_n\| + \|\mathbf{Q}_n\| \right).$$

De (5.69), on déduit que

$$\|\hat{\mathbf{U}}_3^n\| + \|\mathbf{U}_4^n\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

et finalement par (5.68) on obtient

$$\|\mathbf{U}_3^n\| + \|\mathbf{U}_4^n\| \rightarrow 0, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

qui avec (5.64) donne la contradiction désirée de (5.1). ■

En utilisant à nouveau le théorème 2.4.21, nous obtenons une version améliorée conditionnelle du théorème 5.1.9 de décroissance.

**Théorème 5.2.3.** *Supposons que le système Maxwell à divergence nulle (5.62) est exponentiellement stable. Alors, le semi-groupe de contractions  $(\tilde{T}_2(t))_{t \geq 0}$ , de générateur  $-\tilde{\mathbf{A}}_2$ , est exponentiellement stable sur  $\tilde{\mathbf{X}}_2$ , i.e., il existe deux constantes  $C, \gamma > 0$  telles que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|\tilde{T}_2(t) \tilde{\mathbf{U}}_0\|_{\tilde{\mathbf{X}}_2} \leq C e^{-\gamma t} \|\tilde{\mathbf{U}}_0\|_{\tilde{\mathbf{X}}_2}, \quad \forall \tilde{\mathbf{U}}_0 \in \tilde{\mathbf{X}}_2. \quad (5.71)$$

*De plus, sous les hypothèses du théorème 3.4.1 sur  $\mathbf{B}_0$ , il existe une constante  $M > 0$  telle que la solution du problème (3.36) satisfait*

$$\forall t \geq 0, \quad \|T_2(t) \mathbf{U}_0 - (0, 0, 0, P_2 \mathbf{B}_0)^\top\|_{\mathbf{X}_2} \leq M e^{-\gamma t} \|\mathbf{U}_0\|_{\mathbf{X}_2}, \quad \forall \mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_2.$$

**Remarque 5.2.4.** *Des exemples de conditions suffisantes pour la stabilité exponentielle du système de Maxwell avec Silver–Müller pur ou des conditions aux limites mêlées sont donnés dans les articles fondateurs [48, 63], et discutés dans l’introduction de ce chapitre.*

**Remarque 5.2.5.** *Soulignons que dans la preuve de la proposition 5.2.2, nous n’avons pas utilisé la condition (5.65). Cependant, sans hypothèses supplémentaires, il ne paraît pas possible d’obtenir, en utilisant les équations (5.5)–(5.6), (5.64) et (5.65), une contradiction sur le champ électromagnétique, c’est-à-dire montrer que sa norme converge vers zéro.*

**Remarque 5.2.6.** *Comme dans la remarque 5.1.10, indiquons que l’étude faite dans la preuve ci-dessus est également valide en prenant  $\Gamma_P = \emptyset$ . Alors nous pouvons étendre les résultats du théorème 5.2.3 à ce cas et nous déduisons la décroissance exponentielle de l’énergie des solutions du problème  $(\mathfrak{P}_3)_{\text{hom}}$  sous les hypothèses 1 et 2 à condition que le système de Maxwell sans divergence avec la condition aux limites de Silver–Müller imposée sur toute la frontière soit exponentiellement stable.*

### 5.3 Convergence vers le régime harmonique

Une solution harmonique en temps du modèle (3.1)–(3.7) est une solution particulière telle que  $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \Re [\mathbf{U}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$ . Une telle solution ne peut exister que si deux conditions sont remplies :

- i) le forçage est harmoniques en temps :  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \Re [\mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$ ,
- ii) il y a correspondance de données initiales :  $\mathbf{U}_0(\mathbf{x}) = \Re [\mathbf{U}(\mathbf{x})]$ .

Bien sûr, la condition générale (3.51) doit également être vérifiée.

La version harmonique de (3.1)–(3.4), i.e., avec  $\partial_t \mapsto -i\omega$ , a été étudiée dans [18]. Sous les hypothèses 1 et 2, son caractère bien posé a été établi avec des conditions aux limites légèrement différentes, mais l’adaptation au cas de la condition de Silver–Müller n’est pas difficile. En effet, la solution du problème harmonique, complétée par des conditions aux limites formellement semblables à (3.6)–(3.7), peut être exprimée avec les outils présentés dans ce mémoire. Les variables harmoniques seront notées par des lettres grasses droites :  $\mathbf{J}_s$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , etc.

Soit  $\mathbf{g} \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$ . Comme dans §3.3.2, définissons :

$$(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4) \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \quad \text{t.q.} \quad \mathbf{g}_3 \times \mathbf{n} + c \mathbf{g}_{4\Gamma} = \mathbf{g} \text{ sur } \Gamma_A,$$

$$\mathbf{J}_1^* = \mathbf{J}_1, \quad \mathbf{J}_2^* = \mathbf{J}_2, \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{E} - \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \mathbf{g}_4.$$

La variable  $\mathbf{U}^* \in D(\mathbb{A}_2)$  est solution de

$$-i\omega \mathbf{U}^* + \mathbb{A}_2 \mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{g}_3 \\ \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{g}_3 \\ i\omega \mathbf{g}_3 + c^2 \mathbf{rot} \mathbf{g}_4 \\ i\omega \mathbf{g}_4 - \mathbf{rot} \mathbf{g}_3 \end{pmatrix}, \quad (5.72)$$

ce qui est une équation bien posée d'après la proposition 4.4.10. Alors,  $\mathbf{U} := \mathbf{U}^* + (0, 0, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)^\top$  est la solution du problème harmonique. Évidemment, la différence de deux solutions appartient à  $D(\mathbb{A}_2)$  et satisfait  $-i\omega \mathbf{U} + \mathbb{A} \mathbf{U} = 0$ , donc la solution est nulle selon la proposition 4.4.9.

**Définition 5.3.1.** *Pour tout  $\mathbf{g} \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$ , on note  $H[\mathbf{g}] := \mathbf{U}$ , l'unique solution du problème harmonique construite par la procédure ci-dessus.*

Par unicité, tout relèvement  $(\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$  de la donnée  $\mathbf{g}$  peut être utilisé. Par exemple, il est possible de prendre  $\mathbf{g}_4 \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_P; \text{flux}, \Gamma_A, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ . Commençons par  $(\mathbf{g}_3^0, \mathbf{g}_4^0) = R_A[\mathbf{g}]$ . On définit  $\varphi \in H_{0, \Gamma_A}^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_A} = 0\}$  la solution de

$$(\mathbf{grad} \varphi \mid \mathbf{grad} \psi) = (\mathbf{g}_4^0 \mid \mathbf{grad} \psi), \quad \forall \psi \in H_{0, \Gamma_A}^1(\Omega),$$

et  $\mathbf{g}_4^1 := \mathbf{g}_4^0 - \mathbf{grad} \varphi$ . En utilisant (4.3), nous trouvons  $\mathbf{g}_4^1 \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_P}(\text{div } 0; \Omega)$  et  $\mathbf{g}_{4\top}^1 = \mathbf{g}_{4\top}^0$  sur  $\Gamma_A$ . Alors on pose :

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_3^0, \quad \mathbf{g}_4 = \mathbf{g}_4^1 - P_2 \mathbf{g}_4^1;$$

rappelons que  $P_2$  est la projection orthogonale sur  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A)$ . Selon (2.16),  $\mathbf{g}_4 \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_P; \text{flux}, \Gamma_A, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ , et  $\mathbf{g}_{4\top} = \mathbf{g}_{4\top}^1 = \mathbf{g}_{4\top}^0$  sur  $\Gamma_A$ , i.e.,  $\mathbf{g}_3 \times \mathbf{n} + c \mathbf{g}_{4\top} = \mathbf{g}$ .

**Proposition 5.3.2.** *L'image de l'application  $H$  est incluse dans  $\widetilde{\mathbf{X}}_2$ .*

**Preuve.** Soit  $\mathbf{g} \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$ . Prenons  $\mathbf{g}_4 \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_P; \text{flux}, \Gamma_A, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$  comme ci-dessus. Comme  $\mathbf{g}_3 \in \mathbf{H}_{0, \Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega)$  par définition, son rotationnel appartient à  $\mathbf{H}_{0, \Gamma_P; \text{flux}, \Gamma_A, \Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ . Par conséquent, le second membre de (5.72) appartient en fait à  $\widetilde{\mathbf{X}}_2$ . Selon la proposition 4.4.12 la solution appartient aussi à cet espace, et donc  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^* + (0, 0, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)^\top$  aussi. ■

Par unicité de la solution du modèle temporel  $(\mathfrak{P}_2)$ ,  $\mathbf{U}^\omega(t, \mathbf{x}) = \Re [H[\mathbf{g}](\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$  est la solution de ce système, avec la donnée  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \Re [\mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$  et la condition initiale «bien choisie»  $\mathbf{U}_0^\omega(\mathbf{x}) = \Re [H[\mathbf{g}](\mathbf{x})]$ . Ainsi, les conditions nécessaires énoncées au début de cette section sont en fait suffisantes.

En revanche, si le forçage est toujours harmonique en temps, mais que la condition initiale est arbitraire, la solution de  $(\mathfrak{P}_2)$  n'a pas une forme harmonique en temps. Cependant, si la condition initiale satisfait à la fois la condition de compatibilité et les exigences physiques pour un champ magnétique, alors la solution converge vers une fonction harmonique en temps aussi vite que la solution du système homogène converge vers 0.

**Théorème 5.3.3.** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}, \mathbf{B})^\top$  la solution de  $(\mathfrak{P}_2)$  avec la donnée harmonique en temps  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \Re [\mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$ , où  $\mathbf{g} \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$ , et la donnée initiale  $\mathbf{U}_0 = (\mathbf{J}_{1,0}, \mathbf{J}_{2,0}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)^\top \in \widetilde{\mathbf{X}}_2$ , en particulier  $\mathbf{B}_0 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ , satisfaisant

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega), \mathbf{B}_0 \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \\ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_{0\top} = \mathbf{g}(0) \quad \text{sur } \Gamma_A. \end{cases}$$

Il existe une constante  $K(\mathbf{g}, \mathbf{U}_0)$  telle que :

$$\|\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^\omega(t)\|_{\mathbf{X}} \leq K(\mathbf{g}, \mathbf{U}_0) \phi(t), \quad (5.73)$$

avec  $\mathbf{U}^\omega(t, \mathbf{x}) = \Re [H[\mathbf{g}](\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$ , et la fonction décroissante  $\phi(\cdot)$  peut être prise dans tous les cas comme  $\phi(t) = t^{-\frac{1}{2}}$  pour  $t > 1$ , et comme  $\phi(t) = e^{-\gamma t}$  si le système Maxwell sans divergence (5.62) est exponentiellement stable.

**Preuve.** La différence  $\mathbf{U} - \mathbf{U}^\omega$  est solution de (3.1)–(3.7) avec condition aux limites homogène de Silver–Müller. De plus, la donnée initiale  $\mathbf{U}_0 - \Re H[\mathbf{g}]$  satisfait la même condition aux limites ; par construction, elle appartient à  $\widetilde{\mathbf{X}}_2$  selon la proposition 5.3.2 ; tandis que ses troisième et quatrième composantes appartiennent à  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ . Au total,  $\mathbf{U}_0 - \Re H[\mathbf{g}] \in D(\mathbb{A}_2)$  : on peut appliquer l'estimation (5.59), et même (5.71) sous les hypothèses du théorème 5.2.3. ■





# Chapitre 6

## Stabilité du modèle dans le cas d'un problème d'interface vide-plasma

### Introduction

Nous étudions dans ce chapitre un problème d'interface vide-plasma. Comme expliqué dans le chapitre 1, le plasma doit être éloigné de la paroi matérielle du tokamak en le confinant par un champ magnétique externe. Mais cela n'empêche pas d'avoir des fuites de particules, en fait le confinement minimise ces fuites. Dans l'espace confiné, la densité du plasma est très élevée ; en revanche la densité dans l'espace entre la paroi et le champ de confinement est très faible. Par conséquent, les paramètres physiques  $\omega_{ps}$  et  $\nu_s$  y sont extrêmement petits. Dans ce cas, les estimations obtenues dans les deux derniers chapitres et qui reposent sur des minoration (hypothèse 2) explosent lorsque ces paramètres tendent vers zéro. Étudier la stabilisation du modèle sans cette hypothèse au voisinage du bord du tokamak paraît extrêmement difficile. Nous avons donc tenté une autre approche. Nous supposons que les paramètres physiques sont nuls dans un voisinage du bord. D'autre part, les antennes sont situées dans cette région, voir figure 1.9 par exemple, ce qui implique que les ondes électromagnétiques ne pénètrent pas directement dans le plasma. Le couplage entre les ondes et le plasma se fait dans l'espace confiné et les paramètres physiques liés au plasma seront définis dans cette région.

Introduisons le problème. Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  de frontière lipschitzienne  $\Gamma := \partial\Omega$ , et soit  $\Omega_p$  un sous ensemble non vide de  $\Omega$  de frontière  $\Upsilon$  lipschitzienne et connexe telle que  $\overline{\Omega}_p \subset \Omega$ . Notons  $\Omega_v = \Omega \setminus \overline{\Omega}_p$  qui est de frontière  $\Gamma \cup \Upsilon$  (voir le figure 6.1 pour une configuration possible).

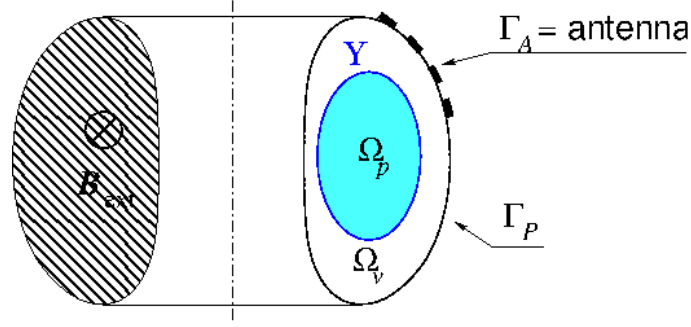


FIGURE 6.1: Exemple d'une configuration d'un problème d'interface vide-plasma lorsque le domaine représente le volume de plasma dans un tokamak.

Nous considérons le système suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{E} + \Omega_{c1} \mathbf{J}_1 \times \mathbf{b} - \nu_1 \mathbf{J}_1, \quad \text{dans } \Omega_p \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_2}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{E} + \Omega_{c2} \mathbf{J}_2 \times \mathbf{b} - \nu_2 \mathbf{J}_2, \quad \text{dans } \Omega_p \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \mathbf{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \tilde{\mathbf{J}}_s, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{rot} \mathbf{E}, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}; \quad (6.4)$$

avec les conditions initiales à  $t = 0$  :

$$\mathbf{J}_1(0) = \mathbf{J}_{1,0}; \quad \mathbf{J}_2(0) = \mathbf{J}_{2,0}; \quad \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0, \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.5)$$

Ci-dessus,  $\tilde{\mathbf{J}}_s = 1_{\Omega_p} \mathbf{J}_s$  est le prolongement de  $\mathbf{J}_s$  par 0 sur  $\Omega_v$ ,  $1_{\Omega_p}$  est la fonction caractéristique de  $\Omega_p$ . Sur le bord  $\Gamma$ , nous imposons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{E} \times \mathbf{n} & = 0, & \text{sur } \Gamma_P \times \mathbb{R}_{>0}, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_\top & = 0, & \text{sur } \Gamma_A \times \mathbb{R}_{>0}. \end{cases} \quad (6.6)$$

Les équations de contrainte qu'on peut retrouver si la solution existe sont :

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(t)}{\varepsilon_0}, \quad \text{dans } \Omega_p \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = 0, \quad \text{dans } \Omega_v \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_P \times \mathbb{R}_{>0}. \quad (6.10)$$

à condition qu'elles soient satisfaites à  $t = 0$ . Une étude de ce modèle dans un cas simplifié a été faite dans [58] : le modèle est homogène et isotrope, la condition

aux limites de Silver–Müller est valable sur toute la frontière, celle-ci est connexe et le domaine est simplement connexe. Comme dans les chapitres précédents, nous nous intéressons au cas anisotrope et inhomogène. Nous étudions le caractère bien posé du modèle puis le comportement asymptotique en temps long de la solution. Nous verrons que les résultats de ce chapitre sont des conséquences de ceux obtenus lorsque l'équation d'Euler est vérifiée sur tout le domaine.

Le système (6.1)-(6.5) avec les conditions aux limites (6.6) se réécrit dans le cadre d'équation d'évolution (3.13) telle que, cette fois-ci, l'opérateur linéaire associé est donné par

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_1 & 0 & -\varepsilon_0 \omega_{p1}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_2 & -\varepsilon_0 \omega_{p2}^2 & 0 \\ \frac{P_v}{\varepsilon_0} & \frac{P_v}{\varepsilon_0} & 0 & -c^2 \mathbf{rot} \\ 0 & 0 & \mathbf{rot} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

où l'opérateur  $P_v$  associe à  $\mathbf{v}$  défini sur  $\Omega_p$  son prolongement  $\tilde{\mathbf{v}}$  par 0 sur  $\Omega_v$ .

Comme dans le chapitre 3, nous supposons ici que l'hypothèse 1 est satisfaite sur  $\Omega_p$ . Dans ce cas, les propositions 3.1.2, 3.1.4 et le lemme 3.1.5 restent vrais dans  $\Omega_p$ . Introduisons l'espace d'énergie

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega_p) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega_p) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega),$$

muni du produit scalaire défini pour tout  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top$  et  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4)^\top$  par

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_{\mathbf{X}_p} := \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \left( \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \middle| \frac{\mathbf{V}_s}{\omega_{ps}} \right)_{\Omega_p} + \varepsilon_0 (\mathbf{U}_3 | \mathbf{V}_3) + c^2 \varepsilon_0 (\mathbf{U}_4 | \mathbf{V}_4), \quad (6.12)$$

et la norme associée  $\|\cdot\|_{\mathbf{X}_p}$ . Le premier terme du second membre est le produit scalaire dans l'espace  $\mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega_p)$ .

## 6.1 Caractère bien posé du modèle

Définissons l'opérateur linéaire non borné  $\mathbb{A}_p : D(\mathbb{A}_p) \subset \mathbf{X}_p \rightarrow \mathbf{X}_p$  par

$$D(\mathbb{A}_p) := \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega_p) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega_p) \times \mathcal{H},$$

et

$$\mathbb{A}_p \mathbf{U} := \tilde{\mathbb{A}} \mathbf{U}, \quad \forall \mathbf{U} \in D(\mathbb{A}_p). \quad (6.13)$$

Par conséquent, le problème d'évolution s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{U}(t) + \mathbb{A}_p \mathbf{U}(t) = 0, \quad \text{pour } t > 0, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0. \quad (6.14)$$

Nous conservons dans ce chapitre les hypothèses introduites sur les parties de la frontière  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_P$  dans les chapitres précédents, plus précisément dans le chapitre 3.

**Théorème 6.1.1.** *L'opérateur  $-\mathbb{A}_p$  génère un  $C^0$ -semi-groupe de contractions  $(T_p(t))_{t \geq 0}$  sur l'espace d'énergie  $\mathbf{X}_p$ . Ainsi, pour tout  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_p$ , il existe une unique solution  $\mathbf{U} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_p)$ , donnée par  $\mathbf{U}(t) = T_p(t)\mathbf{U}_0$ , qui résout le système d'équations (6.1)-(6.5) avec les conditions aux limites (6.6).*

*De plus, si  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_p)$ , alors*

$$\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_p) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(\mathbb{A}_p)).$$

*En outre, nous avons  $\|\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{X}_p} \leq \|\mathbf{U}_0\|_{\mathbf{X}_p}$  et  $\|\partial_t \mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{X}_p} \leq \|\mathbb{A}_p \mathbf{U}_0\|_{\mathbf{X}_p}$ .*

**Preuve.** C'est exactement la même démonstration que celle de la proposition 3.3.1. Il s'agit de multiplier le terme  $\lambda^2 \mathbb{D}_\lambda \mathbf{U}_3$  par  $1_{\Omega_p}$  et de remplacer  $\mathbf{F}_s$  par  $\tilde{\mathbf{F}}_s$  pour  $s = 1, 2$  dans l'équation (3.42). ■

Nous pouvons maintenant récupérer les contraintes du modèle.

**Théorème 6.1.2.** *Supposons que*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{\rho(0)}{\varepsilon_0} & \text{dans } \Omega_p & \text{et } \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 & \text{dans } \Omega_v, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 & \text{dans } \Omega, & \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_P, \end{cases} \quad (6.15)$$

*et que l'équation de conservation de charge*

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}(t) = 0 \quad \text{est vérifiée dans } \Omega_p \text{ pour p.p. } t > 0.$$

*Alors, pour tout  $t > 0$ , le champ électrique satisfait (6.7)-(6.8), et le champ magnétique satisfait (6.9) et (6.10).*

**Remarque 6.1.3.** *Nous définissons l'espace*

$$\mathbf{X}_{p,c} := \mathbf{L}_{(1)}^2(\Omega_p) \times \mathbf{L}_{(2)}^2(\Omega_p) \times \mathbf{S}_p(\Omega) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\operatorname{div} 0; \Omega)$$

*avec  $\mathbf{S}_p(\Omega) = \{\mathbf{V} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{V}|_{\Omega_v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div} 0; \Omega_v)\}$ . Alors, l'image  $R(\mathbb{A}_p)$  de  $\mathbb{A}_p$  est incluse dans  $\mathbf{X}_{p,c}$  et, d'après le théorème 6.1.2, nous trouvons que l'espace  $\mathbf{X}_{p,c}$  est stable par le semi-groupe  $(T_p(t))_{t \geq 0}$ , i.e., pour tout  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_p) \cap \mathbf{X}_{p,c}$ , il existe une unique solution*

$$\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_{p,c}) \cap C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; D(\mathbb{A}_p) \cap \mathbf{X}_{p,c})$$

*au système d'équations (6.1)-(6.5) et (6.8)-(6.9) avec les conditions aux limites (6.6) et (6.10).*

De plus, si on prend seulement  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_{p,c}$ , le problème admet une solution faible  $\mathbf{U} \in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbf{X}_{p,c})$ .

**Remarque 6.1.4.** De ce travail, nous pouvons conclure le caractère bien posé du modèle dans le cas de Silver–Müller non homogène. Le théorème 3.3.4 reste valable en prenant  $\mathbf{J}_{s,0} \in \mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega_p)$  pour  $s = 1, 2$ . De même, avec cette dernière condition, le modèle (6.1)-(6.5) est bien posé dans le cas du conducteur parfait et les équations de contrainte sont données par le théorème 6.1.2.

## 6.2 Stabilité forte

L'énergie associée à (6.14) avec  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathbb{A}_p)$  satisfait d'après (4.1)

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s \left\| \frac{\sqrt{\nu_s} \mathbf{J}_s(t)}{\omega_{ps}} \right\|_{\Omega_p}^2 - \varepsilon_0 c^3 \|\mathbf{U}_{4T}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 \leq 0,$$

donc, l'énergie est décroissante. Nous utilisons encore le théorème 2.4.19 d'Arendt–Batty et Lyubich–Vu, basé sur la théorie spectrale, pour déterminer la limite de la solution en temps long. Il est clair que la résolvante de l'opérateur  $\mathbb{A}_p$  est non compacte.

Dans cette section, nous supposons de plus que l'hypothèse 2 est vérifiée dans  $\Omega_p$ . Par conséquent, les espaces  $\mathbf{L}_{(s)}^2(\Omega_p)$  et  $\mathbf{L}^2(\Omega_p)$  sont égaux, et leurs normes sont équivalentes. De plus, nous prenons les hypothèses géométriques et les notations de la section 4.1 sur les coupures et la frontière.

**Proposition 6.2.1.** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'opérateur  $i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_p$  est injectif, i.e.,

$$\ker(i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_p) = \{0\}.$$

De plus, 0 est une valeur propre de  $\mathbb{A}_p$  et l'ensemble de ses vecteurs propres est

$$\ker(\mathbb{A}_p) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{K}_p(\Omega) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_A}(\mathbf{rot} 0; \Omega),$$

avec

$$\mathbf{K}_p(\Omega) := \{\mathbf{V} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{V}|_{\Omega_p} = 0, \mathbf{V}|_{\Omega_v} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot} 0; \Omega_v)\}.$$

**Preuve.** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_p)$  tels que

$$(i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_p) \mathbf{U} = 0, \tag{6.16}$$

ce qui est équivalent à

$$i\alpha \mathbf{U}_1 + \mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1 - \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (6.17)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_2 + \mathbb{M}_2 \mathbf{U}_2 - \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (6.18)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_3 + \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{U}}_1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{U}}_2 - c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.19)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_4 + \mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.20)$$

Prenant le produit scalaire de (6.16) avec  $\mathbf{U}$  dans  $\mathbf{X}_p$ , on trouve :

$$\Re(i\alpha \|\mathbf{U}\|_{\mathbf{X}_p}^2) = \Re(\mathbb{A}_p \mathbf{U} \mid \mathbf{U})_{\mathbf{X}_p} = 0.$$

Par la monotonie de  $\mathbb{A}_p$ , voir (3.40), on obtient

$$\left( \frac{\nu_s \mathbf{U}_s}{\varepsilon_0 \omega_{ps}} \mid \frac{\mathbf{U}_s}{\omega_{ps}} \right)_{\Omega_p} = 0, \quad s = 1, 2, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{U}_{4\top}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma_A)}^2 = 0,$$

ce qui implique avec l'hypothèse 2 que

$$\mathbf{U}_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad s = 1, 2. \quad (6.21)$$

Cela, avec l'équation (6.17) ou (6.18), nous donne

$$\mathbf{U}_3 = 0 \quad \text{dans } \Omega_p. \quad (6.22)$$

Si  $\alpha \neq 0$ , de l'équation (6.20) et (6.22), on déduit que

$$\mathbf{U}_4 = 0 \quad \text{dans } \Omega_p. \quad (6.23)$$

D'après (6.19) et (6.21), on a  $\mathbf{U}_3 = (i\alpha)^{-1} c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4$  dans  $\Omega$ , ce qui avec (6.20) donne :

$$-\alpha^2 \mathbf{U}_4 + c^2 \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

soit compte tenu de la condition  $\text{div} \mathbf{U}_4 = 0$ ,

$$-\alpha^2 \mathbf{U}_4 - c^2 \Delta \mathbf{U}_4 = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

De (6.23) et du théorème de Holmgren, on déduit que  $\mathbf{U}_4 = 0$  dans  $\Omega$  et donc d'après (6.19) on obtient  $\mathbf{U}_3 = 0$  dans  $\Omega$ .

Maintenant si  $\alpha = 0$ , nous concluons de (6.19), (6.20) et (6.21) que  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = 0$  dans  $\Omega$ . Et avec les conditions aux limites (6.6), nous obtenons  $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$  et de la condition (6.22) nous déduisons que  $\mathbf{U}_3 \times \mathbf{n} = 0$  sur  $\Upsilon$ . ■

Dans la proposition précédente,  $\ker(\mathbb{A}_p)$  représente l'ensemble des solutions stationnaires du problème (6.1)-(6.5) avec les conditions aux limites (6.6). Cet espace est de dimension infinie. Rappelons qu'il est indiqué dans la remarque 6.1.3 que  $R(\mathbb{A}_p) \subset \mathbf{X}_{p,c}$ , donc cela nous permet de définir la restriction de  $\mathbb{A}_p$  sur  $\mathbf{X}_{p,c}$  et de définir l'opérateur non borné  $\mathbb{A}_p|_{\mathbf{X}_{p,c}} : D(\mathbb{A}_p) \cap \mathbf{X}_{p,c} \rightarrow \mathbf{X}_{p,c}$ . Dans ce cas, l'ensemble des solutions stationnaires dans l'espace  $\mathbf{X}_{p,c}$  est égal à

$$\ker(\mathbb{A}_p|_{\mathbf{X}_{p,c}}) = \{0\}^2 \times \mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega) \times \mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A),$$

avec  $\mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega) := \{\mathbf{V} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{V}|_{\Omega_p} = 0, \mathbf{V}|_{\Omega_v} \in \mathbf{Z}_N(\Omega_v)\}$ . Notons  $\Gamma_{K+1} = \Upsilon$ . Une base de  $\mathbf{Z}_N(\Omega_v)$  est l'ensemble des fonctions  $(\mathbf{grad} q_k)_{1 \leq k \leq K+1}$  où  $q_k \in H^1(\Omega_v)$  est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \Delta q_k = 0, & \text{dans } \Omega_v, \\ q_k|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{et} \quad q_k|_{\Gamma_i} = cst_i, & 1 \leq i \leq K+1, \\ \langle \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = -1 \\ \langle \mathbf{grad} q_k \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)} = \delta_{ki}, & 1 \leq i \leq K+1. \end{cases} \quad (6.24)$$

Si nous voulons de plus caractériser l'espace  $\mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega)$ , nous étendons, pour  $k = 1, \dots, K+1$ , la fonction  $q_k$  à  $\Omega_p$  par

$$\varphi_k = \begin{cases} cst_{K+1} & \text{dans } \Omega_p, \\ q_k & \text{dans } \Omega_v. \end{cases} \quad (6.25)$$

Par conséquent, l'ensemble  $(\mathbf{grad} \varphi_k)_{1 \leq k \leq K+1}$  forme une base de  $\mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega)$ . L'orthogonal de  $\mathbf{Z}_N(\Omega_v)$  dans l'espace  $\mathbf{H}_0(\text{div } 0; \Omega_v)$ , pour le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ , est

$$\mathbf{H}^{\Gamma, \Upsilon}(\text{div } 0; \Omega_v) := \{\mathbf{V} \in \mathbf{H}(\text{div } 0; \Omega_v) : \langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_k)} = 0, 1 \leq k \leq K+1\}.$$

Alors, l'orthogonal de  $\mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega)$  est égal à

$$\mathbf{N}_p(\Omega) := [\mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega)]^\perp = \{\mathbf{V} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{V}|_{\Omega_v} \in \mathbf{H}^{\Gamma, \Upsilon}(\text{div } 0; \Omega_v)\}.$$

**Proposition 6.2.2.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'opérateur  $i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_p$  est surjectif, i.e.*

$$R(i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_p) = \mathbf{X}_p.$$

**Preuve.** Nous prenons  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4)^\top \in \mathbf{X}_p$  quelconques, et nous cherchons  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top \in D(\mathbb{A}_p)$ , qui résout

$$(i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{A}_p) \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (6.26)$$



De manière équivalente, d'après (6.11), nous considérons le système suivant

$$i\alpha \mathbf{U}_1 + \mathbb{M}_1 \mathbf{U}_1 - \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_1 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (6.27)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_2 + \mathbb{M}_2 \mathbf{U}_2 - \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_2 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (6.28)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_3 + \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{U}}_1 + \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\mathbf{U}}_2 - c^2 \mathbf{rot} \mathbf{U}_4 = \mathbf{F}_3 \quad \text{dans } \Omega, \quad (6.29)$$

$$i\alpha \mathbf{U}_4 + \mathbf{rot} \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_4 \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.30)$$

En utilisant (6.27), (6.28) et (6.30), nous gardons la variable  $\mathbf{U}_3$  comme inconnue principale et éliminons les autres :

$$\mathbf{U}_1 = (i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_1)^{-1} (\mathbf{F}_1 + \varepsilon_0 \omega_{p1}^2 \mathbf{U}_3) \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{U}_2 = (i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_2)^{-1} (\mathbf{F}_2 + \varepsilon_0 \omega_{p2}^2 \mathbf{U}_3) \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (6.32)$$

$$\mathbf{U}_4 = (i\alpha)^{-1} (\mathbf{F}_4 - \mathbf{rot} \mathbf{U}_3) \quad \text{dans } \Omega. \quad (6.33)$$

En insérant ces expressions dans (6.29), nous obtenons une équation en  $\mathbf{U}_3$  :

$$i\alpha \mathbf{U}_3 + \frac{c^2}{i\alpha} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{U}_3 + \mathbb{D}_\alpha \mathbf{U}_3 = \mathbf{F}_3 + \frac{c^2}{i\alpha} \mathbf{rot} \mathbf{F}_4 - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s P_v ((i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s). \quad (6.34)$$

Afin de construire une formulation variationnelle à l'aide de cette équation nous avons besoin de définir une nouvelle matrice. Soit  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  une fonction matricielle définie par

$$\tilde{\mathbb{B}}_\alpha = \begin{cases} i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{D}_\alpha & \text{dans } \Omega_p, \\ i\alpha \mathbb{I} & \text{dans } \Omega_v. \end{cases}$$

En utilisant la condition aux limites de Silver–Müller et les formules d'intégration par parties, la formulation mixte de (6.34) s'écrit :

Trouver  $(\mathbf{U}_3, p) \in \mathcal{V} \times H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  tel que

$$\tilde{a}_\alpha(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) + \tilde{c}_\alpha(\mathbf{U}_3, \mathbf{v}) + \tilde{b}_\alpha(\mathbf{v}, p) = L_{\alpha,p}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (6.35)$$

$$\tilde{b}_\alpha(\mathbf{U}_3, q) = (\mathbf{G} \mid \mathbf{grad} q), \quad \forall q \in H_{\partial\Omega}^1(\Omega), \quad (6.36)$$

où les formes sesquilinéaires  $\tilde{a}_\alpha$ ,  $\tilde{c}_\alpha$  et  $\tilde{b}_\alpha$  sont respectivement définies sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathcal{V}$  et  $\mathcal{V} \times H_{\partial\Omega}^1(\Omega)$  comme :

$$\tilde{a}_\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := (i\alpha)^{-1} c^2 (\mathbf{rot} \mathbf{w} \mid \mathbf{rot} \mathbf{v}) + c (\mathbf{w}_\top \mid \mathbf{v}_\top)_{\Gamma_A}, \quad (6.37)$$

$$\tilde{c}_\alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) := (\tilde{\mathbb{B}}_\alpha \mathbf{w} \mid \mathbf{v}), \quad (6.38)$$

$$\tilde{b}_\alpha(\mathbf{v}, q) := (\tilde{\mathbb{B}}_\alpha \mathbf{v} \mid \mathbf{grad} q). \quad (6.39)$$

La forme anti-linéaire  $\tilde{L}_\alpha$  sur  $\mathcal{V}$  est donnée par :

$$\tilde{L}_\alpha(\mathbf{v}) := (\mathbf{F}_3 \mid \mathbf{v}) + \frac{c^2}{i\alpha} (\mathbf{F}_4 \mid \mathbf{rot} \mathbf{v}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_s (P_v ((i\alpha \mathbb{I} + \mathbb{M}_s)^{-1} \mathbf{F}_s) \mid \mathbf{v}), \quad (6.40)$$

et  $\mathbf{G}$  est un élément de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  qui sera choisi plus tard.

Nous remarquons que les formes ci-dessus sont presque les mêmes que dans la preuve de la proposition 4.4.10. Nous avons juste remplacé la matrice  $\mathbb{B}_\alpha$  par  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$  dans (4.47), (4.48) et  $\mathbf{F}_s$  par  $\tilde{\mathbf{F}}_s$  dans (4.49). Donc, pour appliquer le théorème de Helmholtz 2.3.6 au problème (6.37)-(6.39), la matrice  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$  doit satisfaire les mêmes hypothèses sur la matrice  $\mathbb{B}_\alpha$ , i.e., la condition (4.25). Nous cherchons donc  $\tilde{\eta}_\alpha, \tilde{\zeta}_\alpha$  deux réels strictement positifs tels que

$$\tilde{\eta}_\alpha(\mathbf{v}^*\mathbf{v}) \geq \|\mathbf{v}^*\tilde{\mathbb{B}}_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{v}\| \geq \tilde{\zeta}_\alpha(\mathbf{v}^*\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.41)$$

Pour avoir (6.41), nous allons montrer dans un premier temps qu'il existe un demi-plan fermé, ne contenant pas l'origine, mais contenant les valeurs propres  $(\tilde{\lambda}_{\alpha,j})_{1 \leq j \leq 3}$  de  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$  quel que soit le point  $\mathbf{x}$ . Nous étudions deux cas :

1) Dans  $\Omega_p$  : on a  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x})$ , et d'après (4.25) les valeurs propres  $(\tilde{\lambda}_{\alpha,j})_{1 \leq j \leq 3}$  se trouvent dans le demi-plan fermé limité par la droite d'équation  $\Delta : \Re(z) = \zeta_\alpha$ , voir figure 6.2. De plus,  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$  étant bornée par  $\eta_\alpha$ , ses valeurs propres sont bornées par  $\eta_\alpha$ . En particulier, leur partie imaginaire en valeur absolue l'est aussi. Définissons  $\kappa$  tel que  $\kappa = \eta_\alpha$  si  $\eta_\alpha > |\alpha|$  et  $\kappa = \eta_\alpha + |\alpha|$  si non. Évidemment, la valeur absolue de la partie imaginaire est bornée par  $\kappa$ .

2) Dans  $\Omega_v$  : on a  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha(\mathbf{x}) = i\alpha\mathbb{I}(\mathbf{x})$ , donc ses valeurs propres sont  $\tilde{\lambda}_{\alpha,j} = i\alpha$  pour tout  $j$ .

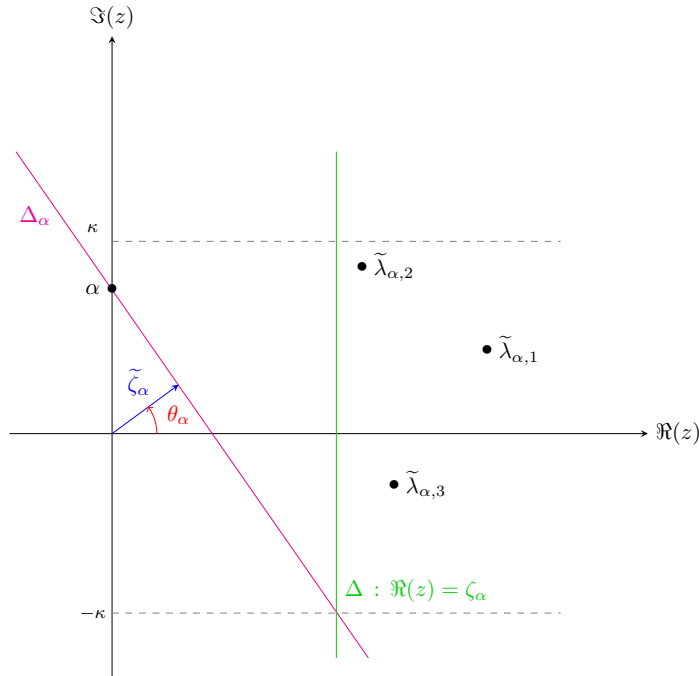


FIGURE 6.2: Demi-plan et valeurs propres de la matrice  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$ .

Pour conclure, toutes les valeurs propres de  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$  sont dans le demi-plan fermé limité par la droite  $\Delta_\alpha$  qui passe par les points  $z_1 = i\alpha$  et  $z_2 = \zeta_\alpha - i\kappa$ , voir la figure 6.2. Dans ce cas, la matrice  $e^{-i\theta_\alpha}\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$  a ses valeurs propres dans le demi-plan constitué des éléments  $z$  tels que  $\Re(z) \geq \zeta_\alpha$ . Notons que cette dernière matrice est normale car tout multiple d'une matrice normales est normale. Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \tilde{\mathbb{B}}_\alpha \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega \right| &= \left| \int_{\Omega} e^{-i\theta_\alpha} \tilde{\mathbb{B}}_\alpha \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega \right| \\ &\geq \Re \int_{\Omega} e^{-i\theta_\alpha} \tilde{\mathbb{B}}_\alpha \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega \\ &\geq \int_{\Omega} \tilde{\zeta}_\alpha \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega = \tilde{\zeta}_\alpha \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Pour la bornitude de  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha$ , il suffit de prendre  $\tilde{\eta}_\alpha = \eta_\alpha + \alpha$ . L'équation (6.41) est ainsi établie.

Le reste de la démonstration découle de celle de la proposition 4.4.10 : il faut juste remplacer le vecteur  $\mathbb{B}_\alpha \mathbf{v}$  par  $\tilde{\mathbb{B}}_\alpha \mathbf{v} := i\alpha \mathbb{I} \mathbf{v} + 1_{\Omega_p} \mathbb{D}_\alpha \mathbf{v}$ . La preuve est achevée. ■

Introduisons un sous-espace fermé de  $\mathbf{X}_p$  :

$$\tilde{\mathbf{X}}_{p,c} := \mathbf{L}^2(\Omega_p) \times \mathbf{L}^2(\Omega_p) \times \mathbf{N}_p(\Omega) \times \mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div}0; \Omega). \quad (6.42)$$

C'est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire de  $\mathbf{X}$ .

**Proposition 6.2.3.** *L'image  $R(\mathbb{A}_p)$  de  $\mathbb{A}_p$  est incluse dans  $\tilde{\mathbf{X}}_{p,c}$ .*

**Preuve.** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)^\top$  un élément de  $D(\mathbb{A}_p)$ . Alors, d'après la définition (6.13) de  $\mathbb{A}_p$ ,  $\mathbb{A}_p \mathbf{U}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{X}}_{p,c}$  si, et seulement si,  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_4$  appartient à  $\mathbf{N}_p(\Omega)$  et  $\mathbf{rot} \mathbf{U}_3$  appartient à  $\mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div}0; \Omega)$ . La dernière condition est prouvée dans la proposition 4.4.11 (pour la quatrième composante, on est dans le même cadre qu'au §4.4.2), et pour la première condition il suffit d'utiliser la remarque 3.4.2 de [4]. ■

Les résultats de l'analyse spectrale de l'opérateur  $\mathbb{A}_p$  nous amènent à introduire l'opérateur non-borné  $(D(\tilde{\mathbb{A}}_p), \tilde{\mathbb{A}}_p)$  sur  $\tilde{\mathbf{X}}_{p,c}$  défini par

$$D(\tilde{\mathbb{A}}_p) = D(\mathbb{A}_p) \cap \tilde{\mathbf{X}}_{p,c} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{A}}_p \mathbf{U} = \mathbb{A}_p \mathbf{U}, \quad \forall \mathbf{U} \in D(\tilde{\mathbb{A}}_p). \quad (6.43)$$

Nous déduisons les propriétés spectrales de  $\tilde{\mathbb{A}}_p$ .

**Proposition 6.2.4.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'opérateur  $i\alpha \mathbb{I} + \tilde{\mathbb{A}}_p$  est surjectif. Pour  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , il est injectif.*

L'espace  $\tilde{\mathbf{X}}_{p,c}$  est invariant pour le problème (6.14) : la solution  $\mathbf{U}$  appartient à  $\tilde{\mathbf{X}}_{p,c}$  dès que  $\mathbf{U}_0$  est dans cet espace (voir lemme 6.2.6). Nous introduisons alors le semi-groupe  $(\check{T}_p(t))_{t \geq 0}$  défini par

$$\check{T}_p(t) := T_{p|D(\tilde{\mathbb{A}}_p)}(t), \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Donnons maintenant le résultat important de cette section.

**Théorème 6.2.5.** *Le semi-groupe de contractions  $(\check{T}_p(t))_{t \geq 0}$  de générateur  $-\tilde{\mathbb{A}}_p$  est fortement stable dans l'espace d'énergie  $\tilde{\mathbf{X}}_{p,c}$ , i.e.,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\check{T}_p(t)\tilde{\mathbf{U}}_0\|_{\tilde{\mathbf{X}}_{p,c}} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{U}}_0 \in \tilde{\mathbf{X}}_{p,c}. \quad (6.44)$$

Notons  $P_p$  la projection orthogonale dans  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  sur l'espace  $\mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega)$ . Rappelons que  $P_2$  est la projection orthogonale sur  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A)$ . Nous avons le résultat suivant :

**Lemme 6.2.6.** *Soit  $\mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_{p,c}$  et  $\mathbf{U}$  la solution du problème (6.14). Alors, nous avons*

$$\begin{aligned} P_p(\mathbf{E}(t)) &= P_p(\mathbf{E}_0), & \forall t > 0, \\ P_2(\mathbf{B}(t)) &= P_2(\mathbf{B}_0), & \forall t > 0. \end{aligned}$$

**Preuve.** Il suffit de multiplier l'équation (6.3) par un élément du noyau  $\mathbf{K}_p(\Omega) \cap \mathbf{S}_p(\Omega)$  et (6.4) par un élément de  $\mathbf{Z}(\Omega; \Gamma_A)$  et d'intégrer par partie sur  $\Omega$ . ■

Nous obtenons la convergence de la solution vers un état stationnaire non nul.

**Corollaire 6.2.7.** *La solution du problème (6.14) satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|T_p(t)\mathbf{U}_0 - (0, 0, P_p\mathbf{E}_0, P_2\mathbf{B}_0)^\top\|_{\mathbf{X}_{p,c}} = 0, \quad \forall \mathbf{U}_0 \in \mathbf{X}_{p,c}.$$

**Remarque 6.2.8.** *Suite à la remarque 6.1.4, et en travaillant de la même manière, on montre que la solution du système (6.1)-(6.5) avec la condition aux limites du conducteur parfait est fortement stable dans l'espace*

$$\tilde{\mathbf{X}}_{p,1} := \mathbf{L}^2(\Omega_p) \times \mathbf{L}^2(\Omega_p) \times \mathbf{N}_p(\Omega) \times \mathbf{H}_0^\Sigma(\text{div } 0; \Omega).$$

*En fait, l'ensemble des solutions stationnaires pour le champ électrique est le même dans les deux cas.*

Nous finissons avec le comportement en temps long de la solution du modèle dans le cas d'une excitation harmonique (cas particulier de la condition de Silver-Müller non homogène).

**Théorème 6.2.9.** Soit  $\mathbf{U} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}, \mathbf{B})^\top$  la solution du modèle (6.1)-(6.5) avec condition aux limites (3.6)-(3.7), telle que la donnée de Silver–Müller est harmonique en temps  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \Re [\mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$ , où  $\mathbf{g} \in \widetilde{\mathbf{TT}}(\Gamma_A) + \mathbf{TC}(\Gamma_A)$ , et la donnée initiale  $\mathbf{U}_0 = (\mathbf{J}_{1,0}, \mathbf{J}_{2,0}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)^\top \in \widetilde{\mathbf{X}}_{p,c}$ , en particulier  $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{N}_p(\Omega)$  et  $\mathbf{B}_0 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P;\text{flux},\Gamma_A,\Sigma}(\text{div } 0; \Omega)$ , satisfaisant

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_P}(\text{rot}; \Omega), \quad \mathbf{B}_0 \in \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega), \\ \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n} + c \mathbf{B}_{0\top} = \mathbf{g}(0) \quad \text{sur } \Gamma_A. \end{cases}$$

Alors, nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^\omega(t)\|_{\mathbf{X}_p} = 0,$$

avec  $\mathbf{U}^\omega(t, \mathbf{x}) = \Re [H[\mathbf{g}](\mathbf{x}) e^{-i\omega t}]$  est la solution du modèle avec la même donnée  $\mathbf{g}$  et la condition initiale  $\mathbf{U}_0^\omega(\mathbf{x}) = \Re [H[\mathbf{g}](\mathbf{x})]$ .

# Bibliographie

- [1] J. ADAM. *La fusion nucléaire*. Editions Pour la Science, Paris, 1993.
- [2] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE & V. GIRAULT. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21** (1998) 823–864.
- [3] W. ARENDT & C. J. K BATTY. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **305**(2) (1988) 837–852.
- [4] F. ASSOUS, P. CIARLET & S. LABRUNIE. *Mathematical foundations of computational electromagnetism*. Applied Mathematical Sciences vol. **198**, Springer, 2018.
- [5] A. ALONSO RODRIGUEZ, P. FERNANDES & A. VALLI. Weak and strong formulations for the time-harmonic eddy-current problem in general multi-connected domains. *Euro. Jnl. of App. math.*, vol. **14** (2003) 387–406.
- [6] A. ALONSO & A. VALLI. Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$  and the construction of an extension operator. *manuscripta math.*, **89** (1996) 159–178.
- [7] M. BRAMBILLA. Self-consistent field and power absorption from electron cyclotron resonance in a high frequency plasma accelerator. *Plasma Physics*, **10**(4) (1968), pp. 359.
- [8] M. BRAMBILLA. *Kinetic Theory of Plasma Waves, Homogeneous Plasmas*. Clarendon Press, International Series of Monographs on Physics, Oxford, (1998).
- [9] P. BONOLI, J. LEE, A. RAM, J. WRIGHT, M. MERINO, Á. SÁNCHEZ-VILLAR & E. AHEDO. Wave Propagation and Absorption in ECR Plasma Thrusters. IEPC-2017-105. *The 35th International Electric Propulsion Conference*, Georgia Institute of Technology, USA, 2017.
- [10] D. BLANC. *Physique nucléaire, particules*. Masson Paris Milan Barcelone, 1995.
- [11] H. BARUCQ. *Étude asymptotique du système de Maxwell avec conditions aux limites absorbantes*. Thèse, Université de Bordeaux I (1993).
- [12] H. BARUCQ, B. HANOZET. Étude asymptotique du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver–Müller II. *C. R. Sci. Paris Sér. I Math.*, **316** (1993), 1019–1024.

- [13] H. BARUCQ, B. HANOUCZET. Asymptotic behavior of solutions to Maxwell's system in bounded domains with absorbing boundary Silver–Müller's condition on the exterior boundary. *Asymptotic Analysis* **15** (1997), 25–40.
- [14] C. D. BENCHIMOL. A note on weak stabilizability of contraction semigroups. *SIAM J. on Control and Optimization.*, **16(3)** (1978), 373–379.
- [15] A. BUFFA & P. CIARLET. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations Part I : An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **24** (2001), 9–30.
- [16] A. BUFFA & P. CIARLET. On traces for functional spaces related to Maxwell's equations. Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **24** (2001), 31–48.
- [17] H. BARUCQ & M. FONTES. Well-posedness and exponential stability of Maxwell-like systems coupled with strongly absorbing layers. *J. Math. Pures Appl.* **87** (2007) 253–273.
- [18] A. BACK, T. HATTORI, S. LABRUNIE, J.R. ROCHE & P. BERTRAND. Electromagnetic wave propagation and absorption in magnetised plasmas : variational formulations and domain decomposition. *ESAIM : M2AN* **49** (2015), 1239–1260.
- [19] C. BARDOS, G. LEBEAU & J. RAUCH. dans *Contrôle exacte, stabilisation et perturbation des systèmes distribués*. 1, J.-L. Lions ed., Rech. Math. Appl., Masson, Paris, 1988.
- [20] C. BARDOS, G. LEBEAU & J. RAUCH. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control optim.* **30(5)** (1992), 1024–1065.
- [21] A. BÁTKAI, K. J. ENGEL, J. PRÜSS & R. SCHNAUBELT. Polynomial stability of operator semigroups. *Math. Nachr.*, **279(13-14)** (2006), 1425–1440.
- [22] C. J. K. BATTY & T. DUYCKAERTS. Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces. *J. Equ.*, **8(4)** (2008), 765–780.
- [23] A. BORICHEV & Y. TOMILOV. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. Ann.*, **347** (2010), 455–478.
- [24] H. BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext, Springer, 2011.
- [25] T. CAZENAVE & A. HARAUX. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **13**, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [26] M. CESSENAT. *Mathematical Methods in Electromagnetism, Linear Theory and Applications*. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. **41**, World Scientific, River Edge, NJ, 1996.

- [27] F. F. CHEN. *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. vol. **1** : *Plasma Physics*, Plenum Press, 1984.
- [28] P. G. CIARLET. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson Paris Milan Barcelone Mexico, 1988.
- [29] M. CAMPOS PINTO & B. DESPRÉS. Constructive formulations of resonant Maxwell's equations. *SIAM. J. MATH. ANAL.* **49(5)** (2017), 3637–3670.
- [30] M. CAMPOS PINTO, B. DESPRÉS & A. NICOLOPOULOS. A stable formulation of resonant Maxwell's equations in cold plasma. *J. Comput. Appl. Math.* **362** (2019), 185–204.
- [31] C. CALDINI-QUEIROS, B. DESPRÉS, L.-M. IMBERT-GÉRARD & M. KACHANOVSK. A numerical study of the solution of X-mode equations around the hybrid resonance *ESAIM : Proceedings and Surveys* **53** (2016), 1–21.
- [32] C. M. DAFERMOS. Asymptotic Behavior of Solutions of Evolution Equations. *In : Nonlinear Evolution Equations*, M. G. Crandall, Academic Press, New York (1978), 103–123.
- [33] R. DAUTRAY & J.-L. LIONS. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, Paris (1987).
- [34] R. DUMONT. *Contrôle du profil de courant par ondes cyclotroniques électroniques dans les tokamaks*. Thèse, Université Henri Poincaré, Nancy I (2001).
- [35] B. DESPRÉS, L.-M. IMBERT-GÉRARD & R. WEDER. Hybrid resonance of Maxwell's equations in slab geometry. *J. Math. Pures Appl.* **101** (2014), 623–659.
- [36] B. DESPRÉS, L.-M. IMBERT-GÉRARD & O. LAFITTE. Singular solutions for the plasma at the resonance. *Journal de l'École polytechnique - Mathématiques.* **4** (2017), 177–222.
- [37] En ligne : [irfm.cea.fr](http://irfm.cea.fr)
- [38] En ligne : [www.iter.org](http://www.iter.org)
- [39] En ligne : [www-fusion-magnetique.cea.fr](http://www-fusion-magnetique.cea.fr)
- [40] M. ELLER, J. LAGNESE & S. NICAISE. Stabilisation of heterogeneous Maxwell's equations by linear or nonlinear boundary feedbacks. *Electron. J. Differential Equations*, **21** (2002), 1–26.
- [41] P. FERNANDES & G. GILARDI. Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions. *Math. Models Meth. App. Sci.*, **7** (1997), 957–991.
- [42] P. FERNANDES & I. PERUGIA. Vector potential formulation for magnetostatics and modelling of permanent magnets. *IMA J. of App. Math.*, **66** (2001), 293–318.
- [43] V. L. GINZBURG. *The propagation of electromagnetic waves in plasmas*. Oxford, New York, Pergamon Press, 1970.



- [44] R.J. GOLDSTON & P.H. RUTHERFORD. *Introduction to plasma physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol (1995).
- [45] V. GIRAULT & P.-A. RAVIART. *Finite element methods for Navier–Stokes equations, Theory and algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics vol. **5**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [46] T. HATTORI. *Décomposition de domaine pour la simulation Full-Wave dans un plasma froid*. Thèse, Université de Lorraine (2014). Online : [http://docnum.univ-lorraine.fr/public/DDOC\\_T\\_2014\\_0380\\_HATTORI.pdf](http://docnum.univ-lorraine.fr/public/DDOC_T_2014_0380_HATTORI.pdf).
- [47] F. L. HUANG. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. Differential Equations*, **1(1)** (1985), 43–56.
- [48] V. KOMORNIK. Boundary stabilization, observation and control of Maxwell’s equations. *PanAmer. Math. J.* **4** (1994) 47–61.
- [49] V. KOMORNIK. *Exact controllability and stabilization, The multiplier method*. RAM : Research in Applied Mathematics. Masson, Paris, 1994.
- [50] M. KIKUCHI, K. LACKNER & M. QUANG TRAN. *Fusion physics*. International Atomic Energy Agency. Vienna, Austria 2012.
- [51] J. D. LAWSON. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society B*, **(70)** (1957), 6–10.
- [52] S. LABRUNIE & I. ZAAFRANI. Dynamique d’un plasma magnétique froid. 2017. Prépublication HAL no. 01572067, version 2, online : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01572067v2/document>
- [53] M. LAROUSSE . Interaction of microwaves with atmospheric pressure plasmas *Int. J. Infrared Millim. Waves*, Vol. **16** (1995), 2069–2083.
- [54] Z. LIU & B. RAO. Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation. *Z. Angew. Math. Phys.*, **56(4)** (2005), 630–644.
- [55] Y. I. LYUBICH & Q. P. VU. Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces. *Studia Math.*, **88(1)** (1988), 37–42.
- [56] O. NALIN. Contrôlabilité exacte sur une partie du bord des équations de Maxwell. *C. R. Sci. Paris Sér. I Math.*, **309** (1989), 811–815.
- [57] S. NICAISE. Stabilization and asymptotic behavior of dispersive medium models. *Systems Control Lett.*, **61(5)** (2012), 638–648.
- [58] S. NICAISE. Stabilization of a Drude / vacuum model. *Journal of Analysis and its Applications*, **37(3)** (2018), 349–375.
- [59] S. Nicaise, C. Pignotti, Boundary stabilization of Maxwell’s equations with space-time variable coefficients, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **9** (2003) 563–578.
- [60] A. PAZY. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences vol. **44**, Springer-Verlag, 1983.

- [61] K.D. PHUNG. Stabilisation frontière du système de Maxwell avec la condition aux limites absorbante de Silver–Müller. *C. R. Sci. Paris Sér. I Math.*, **320** (1995), 187–192.
- [62] K. D. PHUNG. *Stabilisation d’ondes électromagnétiques*. Thèse, E.N.S de Cachan (1998).
- [63] K.D. PHUNG. Contrôle et stabilisation d’ondes électromagnétiques, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **5** (2000), 87–137.
- [64] J. PRÜSS. On the spectrum of  $C_0$ -semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284**(2) (1984), 847–857.
- [65] J. VIQUERAT, M. KLEMM, S. LANTERI, & C. SCHEID. Theoretical and numerical analysis of local dispersion models coupled to a discontinuous Galerkin time-domain method for Maxwell’s equations. Technical Report 8298, INRIA, 2013. Online : <https://hal.inria.fr/hal-00819758v2/document>.
- [66] J. SARANEN. On Generalized Harmonic Fields in Domains with Anisotropic Nonhomogeneous Media. *J. Math. Anal.*, **88** (1982), 104–115.
- [67] J. SARANEN. On Electric and Magnetic Problems for Vector Fields in Anisotropic Nonhomogeneous Media. *J. Math. Anal.*, **91** (1983), 254–275.
- [68] E. SÉBLIN. *Développement des méthodes numériques pour la résolution de la propagation et de l’absorption de l’onde hybride dans les tokamaks*. Thèse, Université de Franche-Comté (1997).
- [69] E. SÉBLIN, J. C. MIELLOU, O. LAFITTE, Y. PEYSSON, X. LITAUDON & D. MOREAU. Uniqueness and Existence Result Around Lax-Milgram Lemma : Application to Electromagnetic Waves Propagation in Tokamak Plasmas. *Technical Report EUR-CEA-FC-1609* (Euratom-CEA Federation), (1997).
- [70] M. SLEMROD. Feedbacks stabilization of a linear system in a hilbert space with an a priori bounded control. *Math. Control Signals System*, **2** (1989), 265–285.
- [71] T. H. STIX. *The Theory of Plasma Waves*. McGraw-Hill, The advanced physics monograph series, New York (1962).
- [72] T. H. STIX. *Waves in plasmas*. American Institute of Physics, New York (1992).
- [73] D. G. SWANSON. *Theory of mode conversion and tunneling in inhomogeneous plasmas*. Wiley, New York (1998).
- [74] D. G. SWANSON. *Plasma Waves*. 2nd Edition, Series in Plasma Physics, IOP Science (2003).
- [75] A. D. SAKHAROV & I. E. TAMM. *Plasma Physics and the Problem of Thermonuclear Reactors*. Vol. **1**, Pergamon, New York, 1959-1960.

- [76] D. L. TANG, A. P. SUN, X. M. QIU & P. K. CHU. Interaction of electromagnetic waves with a magnetized nonuniform plasma slab. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **31(3)** (2003), 405–410.
- [77] C. WEBER. A local compactness theorem for Maxwell's equations, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **2**, 12–25 (1980).
- [78] J. WESSON. *Tokamaks*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [79] K. YAMAMOTO. Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations. *Japan J. Math.*, **14** (1988), 119–163.

**Titre :** Dynamique et stabilisation d'un plasma magnétique froid.

**Résumé :** Dans cette thèse, nous considérons un modèle Euler-Maxwell linéarisé de propagation et d'absorption des ondes électromagnétiques dans un plasma magnétique. Deux types de conditions aux limites sont envisagées : conducteur parfait sur toute la frontière et Silver-Müller homogène ou non sur une partie de celle-ci. D'abord, j'établis les équations du modèle et je montre sa bonne position par la théorie des semi-groupes. Ensuite, je m'intéresse à la stabilisation du modèle. Dans un premier temps, je réalise une étude sur le comportement asymptotique en temps long de la solution. Je montre qu'elle décroît vers zéro sous certaines hypothèses physiquement raisonnables. Je conclus à sa convergence vers un état stationnaire non nul dans un espace d'énergie plus grand. Cet état stationnaire est lié aux propriétés de topologie du domaine, et s'exprime en fonction des données initiales. Dans un second temps, j'étudie la décroissance de l'énergie en utilisant la méthode du domaine fréquentiel. J'établis une décroissance polynomiale pour les deux conditions aux limites. Je démontre également un résultat conditionnel de décroissance exponentielle dans le cas Silver-Müller homogène. Dans le cas du conducteur parfait, nous montrons que le système Euler-Maxwell n'est pas exponentiellement stable. Nous concluons par un résultat de convergence vers le régime harmonique en temps en présence d'un forçage harmonique. Parmi les principales difficultés rencontrées, la résolvante de l'opérateur d'évolution est non compacte et l'absorption interne agit seulement sur les variables fluides. Aucune hypothèse d'homogénéité n'est faite, et les hypothèses topologiques et géométriques sur le domaine sont minimales. Ces résultats semblent fortement liés aux propriétés spectrales de diverses matrices décrivant l'anisotropie et d'autres propriétés du plasma. Enfin, nous donnons une extension de ces résultats à un problème d'interface vide-plasma.

**Mots-clefs :** équations de Maxwell, plasma, modèles hydrodynamiques, stabilisation, condition aux limites absorbante, semi-groupes d'évolution, stabilité forte, stabilité exponentielle, stabilité polynomiale, méthode du domaine fréquentiel.

**Title:** Dynamics and stabilization of a cold magnetic plasma.

**Abstract:** In this thesis, we consider a linearized Euler-Maxwell model for the propagation and absorption of electromagnetic waves in a magnetized plasma. Two types of boundary conditions are considered: perfectly conducting on the whole boundary and Silver-Müller, homogeneous or not, on part of it. First, I establish the equations of the model and show its well-posedness by the theory of semigroups. Then, I am interested in the stabilization of the model. First, I carry out a study on the long-term asymptotic behavior of the solution. I show that it decreases towards zero under certain physically reasonable assumptions. I conclude that it converges to a non-zero stationary state in a larger energy space. This stationary state is linked to the topology properties of the domain, and is expressed as a function of the initial data. Secondly, I study the energy decay rate by using the frequency domain method. I establish a polynomial decay for both boundary conditions. I also prove a conditional exponential decay result in the homogeneous Silver-Müller case. In the perfectly conducting case, we show that the Euler-Maxwell system is not exponentially stable. We conclude by a result of convergence towards the time-harmonic regime in the presence of a harmonic forcing. Among the main difficulties encountered, the resolvent of the evolution operator is not compact and the internal absorption acts only on the fluid variables. No homogeneity assumption is made, and the topological and geometrical assumptions on the domain are minimal. These results appear strongly linked to the spectral properties of various matrices describing the anisotropy and other plasma properties. Finally, we extend those results to the case of a vacuum-plasma interface problem.

**Keywords:** Maxwell equations, plasma, hydrodynamic models, stabilization, absorbing boundary condition, evolution semi-groups, strong stability, exponential stability, polynomial stability, frequency domain method.