



**HAL**  
open science

# Couplage par décomposition de domaine optimisée de formulations intégrales et éléments finis d'ordre élevé pour l'électromagnétisme

Ismail Badia

► **To cite this version:**

Ismail Badia. Couplage par décomposition de domaine optimisée de formulations intégrales et éléments finis d'ordre élevé pour l'électromagnétisme. Mathématiques [math]. Université de Lorraine; Université de Liège, 2022. Français. NNT : 2022LORR0058 . tel-03708841

**HAL Id: tel-03708841**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03708841>**

Submitted on 29 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES  
UNIVERSITAIRES**

## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)  
*(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)*

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

---

# Couplage par décomposition de domaine optimisée de formulations intégrales et éléments finis d'ordre élevé pour l'électromagnétisme

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 23 Mai 2022

pour l'obtention des

Doctorats des Universités de Lorraine et de Liège

(Mention Mathématiques Appliquées)

par

Ismail BADIA

### Composition du jury

<i>Président :</i>	M. Benoit Vanderheyden	Université de Liège
<i>Directeurs :</i>	M. Xavier Antoine	Université de Lorraine
	M. Christophe Geuzaine	Université de Liège
<i>Rapporteurs :</i>	Mme Marion Darbas	Université Paris 13
	Mme Victorita Dolean	Université de Nice Sophia-Antipolis
<i>Examineurs :</i>	M. Jean-Paul Martinaud	Thales DMS
	M. Séraphin Mefire	Université de Lorraine



# Remerciements

*Le travail présenté dans ce manuscrit n'aurait pas eu lieu sans l'apport et le soutien tant au niveau professionnel que personnel de nombreuses personnes. Il est grand temps de les en remercier dans ces quelques lignes.*

*Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à mes directeurs de thèse, Xavier Antoine et Christophe Geuzaine. Au cours de cette aventure, j'ai pu apprécier leurs grandes qualités humaines et professionnelles. Je les remercie grandement pour leurs conseils enrichissants, leurs encouragements et leur pédagogie grâce auxquelles ce travail de recherche a pu aboutir.*

*Je suis très honoré que Marion Darbas et Victorita Dolean aient accepté d'être les rapporteurs de cet écrit, et les remercie vivement. Je remercie également les autres membres de mon jury de thèse, Benoit Vanderheyden, Jean-Paul Martinaud et Séraphin Mefire.*

*Je tiens à exprimer ma plus vive gratitude à Jean-Paul Martinaud et Samuel Nosal pour m'avoir fait confiance pour cette thèse. Je tiens à remercier Samuel pour le temps qu'il m'a consacré et pour toute l'aide apportée avec bienveillance. Dans la même optique, je remercie également Gilles Salin et Nicolas Salles.*

*Mes chaleureux remerciements s'adressent aux membres du groupe Applied and Computational Electromagnetics pour avoir su créer et maintenir une ambiance studieuse et décontractée. Je remercie tout particulièrement Anthony Royer pour son aide sur le solveur éléments finis utilisé dans ce travail.*

*Je souhaite aussi remercier Timo Betcke d'avoir accepté de faire le nécessaire pour m'accueillir à l'UCL (University College London). C'est notamment lui qui m'a aidé à l'utilisation d'un des codes éléments de frontière central dans ce travail de recherche.*

*Je ne peux conclure ces quelques lignes de remerciements sans penser à toutes les belles rencontres que j'ai pu faire pendant cette thèse et à ma famille. Je voudrais remercier tous mes amis Liégeois qui ont contribué à rendre ces trois années à la fois agréables (et ce même pendant les confinements dus au COVID-19 !) et très enrichissantes sur le plan humain. Enfin, je remercie ma famille et en premier lieu, mes parents. Pour tous leurs sacrifices, je leur rends hommage à travers cet accomplissement personnel.*





*À mes parents*







## Abstract

In terms of computational methods, solving three-dimensional time-harmonic electromagnetic scattering problems is known to be a challenging task, most particularly in the high frequency regime and for dielectric and inhomogeneous scatterers. Indeed, it requires to discretize a system of partial differential equations set in an unbounded domain. In addition, considering a small wavelength  $\lambda$  in this case, naturally requires very fine meshes, and therefore leads to very large number of degrees of freedom. A standard approach consists in combining integral equations for the exterior domain and a weak formulation for the interior domain (the scatterer) resulting in a formulation coupling the Boundary Element Method (BEM) and the Finite Element Method (FEM). Although natural, this approach has some major drawbacks. First, this standard coupling method yields a very large system having a matrix with sparse and dense blocks, which is therefore generally hard to solve and not directly adapted to compression methods. Moreover, it is not possible to easily combine two pre-existing solvers, one FEM solver for the interior domain and one BEM solver for the exterior domain, to construct a global solver for the original problem.

In this thesis, we present a well-conditioned weak coupling formulation between the boundary element method and the high-order finite element method, allowing the construction of such a solver. The approach is based on the use of a non-overlapping domain decomposition method involving optimal transmission operators. The associated transmission conditions are constructed through a localization process based on complex rational Padé approximants of the nonlocal Magnetic-to-Electric operators. The number of iterations required to solve this weak coupling is only slightly dependent on the geometry configuration, the frequency, the contrast between the subdomains and the mesh refinement.

**Keywords:** Maxwell's equations, time-harmonic scattering, optimized domain decomposition method, high-order finite element methods, surface integral equations.



## Résumé

La résolution numérique d'un problème de diffraction électromagnétique tridimensionnel en régime harmonique est connue pour être difficile, notamment en haute fréquence et pour des objets diffractants diélectriques et inhomogènes. En effet, elle nécessite de discrétiser un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine infini. De plus, le fait de considérer une petite longueur d'onde  $\lambda$  dans ce cas, nécessite naturellement un maillage très fin, ce qui conduit par conséquent à un très grand nombre de degrés de liberté. Une approche standard consiste à combiner une méthode d'équations intégrales pour le domaine extérieur et une formulation variationnelle volumique pour le domaine intérieur (objet diffractant), conduisant à une formulation couplant la méthode des éléments de frontière (BEM) et la méthode des éléments finis (FEM). Bien que naturelle, cette approche présente quelques inconvénients majeurs. Tout d'abord, cette méthode de couplage mène à un système linéaire de très grande taille caractérisé par une matrice composée à la fois de parties creuses et denses. Un tel système est généralement difficile à résoudre et n'est pas directement adapté aux méthodes de compression. Ajouté à cela, il n'est pas possible de combiner facilement deux solveurs pré-existants, à savoir un solveur FEM pour le domaine intérieur et un solveur BEM pour le domaine extérieur, afin de construire un solveur global du problème original.

Dans cette thèse, nous présentons un couplage faible bien conditionné entre la méthode des éléments de frontière et celle des éléments finis d'ordre élevé, permettant une simple construction d'un tel solveur. L'approche est basée sur l'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement impliquant des opérateurs de transmission optimaux. Ces derniers sont construits par le biais d'un processus de localisation basé sur des approximations rationnelles complexes de Padé des opérateurs Magnetic-to-Electric non locaux. Le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du couplage faible ne dépend que faiblement de la configuration géométrique, de la fréquence, du contraste entre les sous-domaines et du raffinement de maillage.

**Mots-clés:** Equations de Maxwell, diffraction en régime harmonique, méthode de décomposition de domaine optimisée, éléments finis d'ordre élevé, équations intégrales surfaciques.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>1</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Problématique de la thèse</b>	<b>13</b>
1.1 Les équations de Maxwell . . . . .	15
1.2 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle . . . . .	16
1.3 Problème de diffraction-transmission électromagnétique . . . . .	18
1.4 Formule de Stratton-Chu et champ lointain . . . . .	21
1.5 Méthodes de résolution standards . . . . .	24
1.5.1 Couplages forts . . . . .	25
1.5.2 Motivations pour une nouvelle méthode . . . . .	26
1.5.3 Méthodes de décomposition de domaine . . . . .	27
<b>2 Le couplage faible électromagnétique</b>	<b>29</b>
2.1 Présentation de l'approche . . . . .	31
2.2 Algorithme continu du couplage faible . . . . .	33
2.3 Formulations associées aux opérateurs de résolution . . . . .	35
2.4 Choix des opérateurs de transmission . . . . .	37
2.5 Approximations des opérateurs MtE . . . . .	40
2.5.1 Approximations non locales des opérateurs MtE . . . . .	40
2.5.2 Représentations locales des opérateurs MtE . . . . .	45
2.6 Formulation variationnelle du couplage faible . . . . .	47
2.7 Etude spectrale du couplage faible . . . . .	48
2.7.1 Quelques résultats de diagonalisation . . . . .	48
2.7.2 Etude de la convergence du couplage faible . . . . .	52
<b>3 Mise en œuvre numérique</b>	<b>57</b>
3.1 Discrétisation du couplage FEM-BEM . . . . .	59

3.1.1	Construction des fonctions de forme locales . . . . .	59
3.1.2	Construction des éléments finis globaux . . . . .	61
3.1.3	Orientation des éléments finis globaux . . . . .	62
3.1.4	Discrétisation des formulations variationnelles . . . . .	63
3.2	Algorithme discret du couplage faible FEM-BEM . . . . .	68
3.3	Résultats numériques . . . . .	70
3.3.1	Cas homogène lorsque $\mathbf{g}_{+,h} \in \mathbf{V}_{h,0}$ et $\mathbf{g}_{-,h} \in \mathbf{V}_{h,\beta}$ . . . . .	70
3.3.2	Comparaison des différents choix d'espace pour $\mathbf{g}_{+,h}$ et $\mathbf{g}_{-,h}$ dans le cas homogène . . . . .	79
3.3.3	Cas inhomogène . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Extension à des formalismes plus avancés</b>	<b>89</b>
4.1	Objets diffractants à surface ouverte . . . . .	91
4.2	Couplage faible à partie éléments finis volumiques multi-domaines . . . . .	93
4.2.1	Partitionnement de $\Omega_-$ avec surfaces d'échange fermées . . . . .	94
4.2.2	Partitionnement de $\Omega_-$ avec jonctions . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Applications</b>	<b>103</b>
5.1	Cylindre métallique recouvert de diélectrique . . . . .	105
5.2	Cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique . . . . .	107
5.3	Cylindre diélectrique inhomogène et multicouche . . . . .	109
5.3.1	Cylindre diélectrique multicouche . . . . .	109
5.3.2	Cylindre diélectrique inhomogène . . . . .	111
5.4	Polariseur double bande $K/KA$ . . . . .	112
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>

# Table des figures

1	Exemple d'une simulation numérique réalisée par Thales DMS France pour une antenne réseau sous un radôme avant . . . . .	7
1.1	Définition des angles $\theta$ et $\phi$ . . . . .	19
1.2	Le problème de diffraction-transmission électromagnétique . . . . .	20
1.3	Structure matricielle du couplage fort FEM-BEM . . . . .	27
2.1	Influence des paramètres de Padé sur la convergence GMRES du couplage faible en fonction du nombre d'onde extérieur . . . . .	53
2.2	Influence des paramètres de Padé sur la convergence GMRES du couplage faible optimisé en fonction de $\delta$ . . . . .	53
2.3	Evolution des résidus pour différents types d'opérateurs de transmission . . . . .	54
2.4	Distribution des valeurs propres de $\mathbf{Id} - \mathbf{A}$ dans le plan complexe . . . . .	54
2.5	Evolution du nombre d'itérations GMRES en fonction de $\delta$ (à gauche) et $k_+$ (à droite) pour le couplage faible . . . . .	55
3.1	Exemple d'une fonction d'arête (à gauche) et d'une fonction bulle (à droite) pour l'élément triangle de référence . . . . .	60
3.2	Transformation géométrique du triangle de référence $\hat{K}$ au triangle physique $K$ . . . . .	61
3.3	Six combinaisons possibles pour l'orientation globale d'une face triangulaire . . . . .	63
3.4	Géométries des objets diffractants : sphère, cube et cube avec coin rentrant . . . . .	70
3.5	Influence des paramètres $N_p$ et $\theta_p$ en fonction de $k_+$ sur la convergence du couplage faible FEM-BEM pour $\delta = 2$ . . . . .	71
3.6	Influence des paramètres $N_p$ et $\theta_p$ en fonction de $\delta$ sur la convergence du couplage faible FEM-BEM pour $k_+ = 2$ . . . . .	71
3.7	Influence des paramètres $(\alpha; \beta)$ sur la convergence du couplage faible FEM-BEM . . . . .	72
3.8	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction du paramètre de contraste $\delta$ (avec $k_+ = 1$ et $n_\lambda = 5$ ) . . . . .	73
3.9	Nombre d'itérations GMRES du couplage FEM-BEM faible pour différents objets diffractants en fonction de $\mathcal{Z}_x$ (avec $k_+ = 1$ , $\delta = 13$ et $n_\lambda = 5$ ) . . . . .	74
3.10	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de $k_+$ (avec $\delta = 2$ et $n_\lambda = 5$ ) . . . . .	74
3.11	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction du raffinement de maillage (avec $\delta = 2$ , $k_+ = 1$ et $n_\lambda$ ) . . . . .	75
3.12	Evolution des résidus pour le couplage FEM-BEM faible (avec $k_+ = 1$ , $\delta = 5$ et $n_\lambda = 5$ ) . . . . .	76

3.13	Erreurs relatives $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$ (en noir) entre les courants électrique(à gauche)/magnétique(à droite) analytiques et du couplage faible FEM-BEM, et différence relative $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$ (en bleu) entre les courants électrique(à gauche)/magnétique(à droite) du couplage fort BEM-BEM et du couplage faible FEM-BEM en fonction de $n_\lambda$ (avec $k_+ = 2, \delta = 2$ ) . . . . .	77
3.14	Différence relative entre la SER bistatique du couplage fort BEM-BEM et du couplage faible FEM-BEM en fonction de $n_\lambda$ (avec $k_- = 4, k_+ = 2, \mathcal{Z}_- = \mathcal{Z}_+/2$ ) . . . . .	78
3.15	Convergence de la SER bistatique par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible FEM-BEM (avec $\delta = 2, k_+ = 3$ et $n_\lambda = 10$ ) . . . . .	79
3.16	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction du paramètre de contraste $\delta$ et des différents couples d'espaces de discrétisation (avec $k_+ = 2$ et $n_\lambda = 5$ ) . . . . .	80
3.17	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction de $k_+$ et des différents couples d'espaces de discrétisation (avec $\delta = 2$ et $n_\lambda = 5$ )	81
3.18	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction de $n_\lambda$ et des différents couples d'espaces de discrétisation (avec $k_+ = 1$ et $\delta = 3$ )	82
3.19	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de $\delta$ dans le cas inhomogène (avec $k_+ = 1$ et $n_\lambda = 5$ ) . . . . .	84
3.20	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de $k_+$ dans le cas inhomogène (avec $\delta = 2$ et $n_\lambda = 5$ ) . . . . .	85
3.21	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de $n_\lambda$ dans le cas inhomogène (avec $k_+ = 1$ et $\delta = 2$ ) . . . . .	86
3.22	Convergence de la SER bistatique par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible FEM-BEM dans le cas inhomogène (avec $\delta = 2, k_+ = 3$ et $n_\lambda = 10$ ) . . . . .	87
4.1	Coupe dans le plan $\{x = 0\}$ de la sphère unitaire en partie métallisée et diélectrique . . . . .	91
4.2	SER bistatique du couplage faible FEM-BEM pour différents champs incidents comparée avec la SER bistatique du couplage fort BEM-BEM . . . . .	92
4.3	Redéfinition de la surface d'échange . . . . .	93
4.4	Partitionnement (concentrique) de $\Omega_-$ sans jonction . . . . .	94
4.5	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction du nombre de sous-domaines intérieurs $m$ . . . . .	97
4.6	Quelques approches pour partitionner le domaine intérieur $\Omega_-$ . . . . .	98
5.1	Cylindre métallique recouvert de diélectrique . . . . .	106
5.2	Comparaison des SER bistatique obtenues pour le couplage faible FEM-BEM ( $T_3^4(10^{-4})$ ) et AD . . . . .	107
5.3	Cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique . . . . .	108
5.4	SER bistatique du couplage faible FEM-BEM pour $T_3^4(10^{-4})$ comparée à celle obtenue avec le solveur AD . . . . .	109
5.5	Cylindre diélectrique multicouche . . . . .	110
5.6	Comparaison des SER bistatique obtenues par le couplage faible FEM-BEM pour $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$ et par le solveur AD . . . . .	111
5.7	SER bistatique du cylindre diélectrique inhomogène obtenue avec un couplage faible FEM-BEM et comparée à la SER bistatique du cylindre diélectrique multicouche donnée par AD . . . . .	112



---

5.8	(a) Première et troisième couches identiques, (b) deuxième couche, (c) vue 3D de la cellule unitaire . . . . .	113
5.9	Alimentation du polariseur double bande $K/KA$ . . . . .	113
5.10	Cornets rectangulaires d'alimentation associés à chaque fréquence . . . . .	114
5.11	Schéma du fonctionnement du polariseur double bande $K/KA$ . . . . .	115
5.12	Maillage du domaine intérieur $\Omega_+$ associé au polariseur double bande $K/KA$ . . . . .	116
5.13	Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à 30[GHz] lorsque la paire (5.1) est utilisée . . . . .	119
5.14	Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à 30[GHz] lorsque la paire (5.2) est utilisée . . . . .	120
5.15	Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à 20.2[GHz] lorsque la paire (5.1) est utilisée . . . . .	121
5.16	Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à 20.2[GHz] lorsque la paire (5.2) est utilisée . . . . .	122



# Liste des tableaux

3.1	Nombre de fonctions de forme hiérarchiques pour les éléments triangle et tétraèdre selon l'ordre polynômial . . . . .	60
3.2	Nombre de degrés de liberté $N_w^p$ et $N_z^p$ selon l'ordre polynômial . . . . .	64
3.3	Différences relatives $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$ entre les courants magnétique et électrique du couplage faible FEM-BEM et du couplage fort BEM-BEM pour la sphère, le cube et le cube avec coin ( $\delta = 2$ et $n_\lambda = 10$ ) . . . . .	77
3.4	Différences relatives $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$ entre les courants magnétique et électrique du couplage faible FEM-BEM et du couplage fort BEM-BEM pour le cube ( $k_+ = 1$ , $n_\lambda = 10$ ) et pour différents choix d'espace pour les inconnues du couplage faible . . . . .	82
3.5	Différence relatives $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$ entre les courants magnétique et électrique du couplage faible et fort FEM-BEM pour la sphère ( $n_\lambda = 10$ ) . . . . .	83
4.1	Comparaison de la convergence et de la précision du couplage faible FEM-BEM lorsque $\Omega_-$ est partitionné en deux sous-domaines concentriques et lorsqu'il n'est pas partitionné . . . . .	97
4.2	Comparaison de la convergence et de la précision du couplage faible FEM-BEM lorsque $\Omega_-$ est partitionné en deux sous-domaines avec jonctions et lorsqu'il n'est pas partitionné . . . . .	101
5.1	Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configurations appliqué au cylindre métallique recouvert de diélectrique . . . . .	106
5.2	Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configurations appliqué au cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique . . . . .	108
5.3	Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configurations appliqué au cylindre diélectrique multicouche . . . . .	110
5.4	Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configuration appliqué au cylindre diélectrique inhomogène . . . . .	111
5.5	Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM selon la configuration paramétrique choisie . . . . .	117
5.6	Nombre d'inconnues introduites par la formulation du couplage faible FEM-BEM (Inconnues $\Gamma$ ) et nombre d'inconnues associées au problème intérieur (Inconnues $\Omega_-$ ) . . . . .	117
5.7	Temps de calcul total (et de la factorisation du problème intérieur) pour la convergence du couplage faible FEM-BEM selon selon la configuration paramétrique choisie . . . . .	118

8 Convergence et précision du couplage faible FEM-BEM pour différentes approximations de  $\mathbf{T}_-$  avec  $\mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0$  (sphère,  $k_+ = 2$ ,  $\delta = 2$  et  $n_\lambda = 10$ )  
..... 124

# Introduction

## Contexte et motivations

La propagation d'ondes électromagnétiques est décrite par les équations de Maxwell. Ces dernières sont essentielles pour un large éventail d'applications technologiques, telles que la signature radar d'un avion, le dimensionnement des antennes, ou encore le calcul des interactions entre systèmes électroniques dans le cadre des vérifications de compatibilité électromagnétique. Lorsque les champs impliqués ont une dépendance sinusoïdale par rapport au temps de fréquence angulaire  $\omega$ , nous parlons de régime harmonique ou fréquentiel. Le besoin industriel des simulations impliquant la résolution des équations de Maxwell en régime harmonique a connu un développement important ces deux dernières décennies. Les simulations font à présent partie intégrante des cycles de conception matérielle des équipements (voir par exemple la Figure 1).

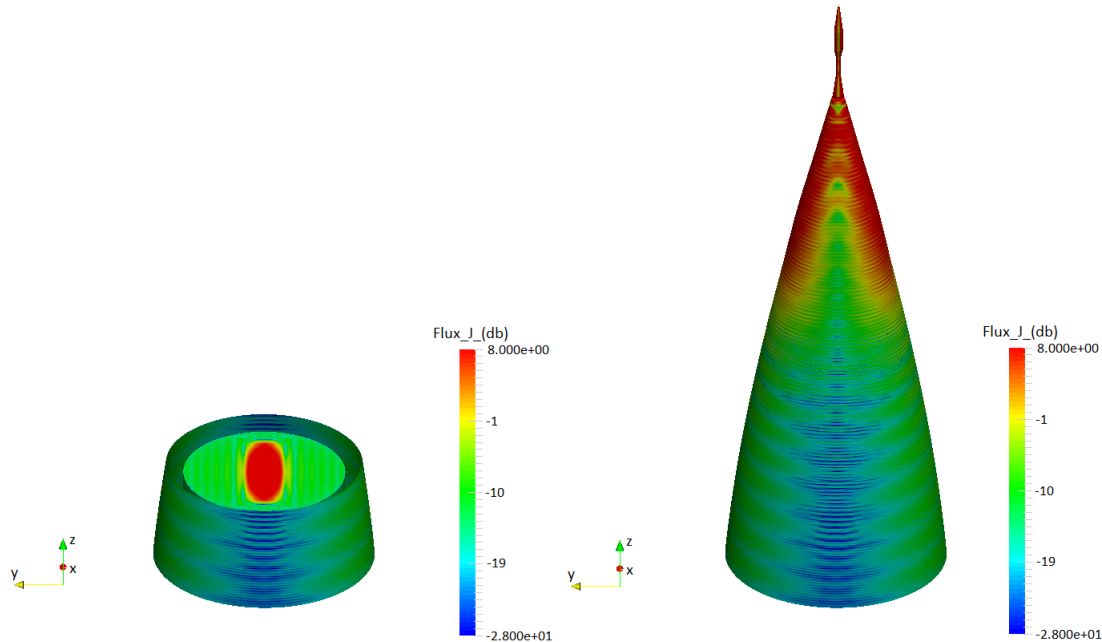


FIGURE 1 – Exemple d’une simulation numérique réalisée par Thales DMS France pour une antenne réseau sous un radôme avant

La résolution des équations de Maxwell en régime harmonique est connue pour être un problème difficile et nécessite des ressources de calcul important. En effet, il est nécessaire de résoudre un système posé sur un domaine infini. De plus, lorsque la longueur d’onde  $\lambda$  est petite devant la taille caractéristique du problème, correspondant au régime haute fréquence,

il est impératif de mailler finement le domaine de calcul afin de capturer le comportement hautement oscillant de la solution. On s'attend alors à ce que la taille caractéristique du maillage  $h$  diminue au moins linéairement avec la longueur d'onde  $\lambda$ , ce qui conduit dans ce cas à un nombre très important de degrés de liberté (Degrees Of Freedom ou DOF) et par conséquent à un système linéaire de très grande taille à résoudre. Une approche complémentaire, que l'on peut combiner au raffinement de maillage, consiste à augmenter l'ordre d'approximation de la méthode de discrétisation.

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur la résolution numérique du problème de diffraction électromagnétique tridimensionnel en régime harmonique. Plusieurs approches permettent d'y arriver. La première, que nous appelons ici *méthode de troncature*, consiste à résoudre les équations de Maxwell par la méthode des éléments finis volumiques [45, 54] (Finite Element Method ou FEM) dans un domaine de calcul 3D borné par une frontière de troncature fictive. Afin de supprimer ou du moins réduire les réflexions parasites sur la surface de troncature, il est nécessaire d'utiliser des conditions aux limites absorbantes (Absorbing/Artificial Boundary Condition ou ABC) [45]. Une alternative, dans le même esprit, consiste à borner le domaine de calcul par une couche absorbante parfaitement adaptée (Perfectly Matched Layer ou PML) [8, 18, 45]. Ces méthodes sont non seulement bien adaptées pour des géométries complexes et des milieux hétérogènes mais elles induisent aussi des matrices creuses. Il est néanmoins difficile, en général, de contrôler la précision de la solution obtenue avec cette méthode. En d'autres termes, une erreur inhérente reste présente au niveau continu. De plus, il est bien connu [43, 44, 55] que l'utilisation des éléments finis volumiques pour les problèmes de propagation d'ondes est affectée par des phénomènes de dispersion (ou pollution) numérique dûs à l'accumulation de l'erreur de phase sur le maillage. D'un point de vue pratique, cet inconvénient implique que la taille caractéristique du maillage  $h$  doit être diminuée plus que linéairement par rapport à la longueur d'onde  $\lambda = k/2\pi$  [43, 44]. Un moyen de réduire les phénomènes de dispersion numérique sans raffiner le maillage est d'augmenter l'ordre des éléments finis. La résolution des systèmes linéaires de grandes tailles à valeurs complexes et indéfinis associés à la FEM, en particulier en régime haute fréquence, reste cependant un défi d'un point de vue computationnel [36]. L'utilisation d'un solveur direct n'est pas envisageable. De plus, le mauvais conditionnement de ces systèmes linéaires rend l'utilisation d'un solveur itératif (par exemple, un solveur de Krylov [63]) rédhibitoire. Des méthodes hybrides, appelées *méthodes de décomposition de domaine* (Domain Decomposition Method ou DDM) [3, 27, 32, 33, 58, 59, 61], couplant des résolutions itératives et directes ont ainsi été spécialement conçues pour pousser les limites des méthodes de troncature.

Une approche alternative consiste à reformuler de façon équivalente les équations de Maxwell en régime harmonique, associées au milieu extérieur de l'objet diffractant supposé homogène, sous la forme d'équations intégrales posées sur la surface de l'objet diffractant [57]. Ces dernières sont alors discrétisées par la méthode des éléments de frontière (Boundary Element Method ou BEM). Le nombre de degrés de liberté induit par BEM par rapport à une méthode volumique est donc plus faible. De plus, les méthodes associées aux équations intégrales ont l'avantage d'introduire une faible dispersion numérique car la solution fondamentale des équations de Maxwell est explicitement prise en compte dans les formulations intégrales [57]. Elles sont par conséquent très précises. Nous pouvons cependant mentionner la mise en œuvre complexe de l'évaluation précise des intégrales singulières intervenant dans les équations intégrales. Par ailleurs, contrairement aux méthodes de troncature, cette approche est exacte au niveau continu. En revanche, le caractère non local des opérateurs intégraux intervenant dans les équations intégrales donne lieu, au niveau discret, à une matrice indéfinie, à valeur complexe et dense. Cette dernière est donc coûteuse à stocker (en  $\mathcal{O}(n_{Dof}^2)$

si nous désignons par  $n_{Dof}$  le nombre de degrés de liberté), et à résoudre (en  $\mathcal{O}(n_{Dof}^3)$ ). Des méthodes de compression comme la méthode multipôle rapide (Fast Multipole Method ou FMM) [35, 49] ou bien les matrices hiérarchiques ( $\mathcal{H}$ -Matrices) [15, 39] permettent toutefois de remédier à ces inconvénients. À titre d'exemple, la FMM permet de réduire le coût d'un produit matrice-vecteur de  $\mathcal{O}(n_{Dof}^2)$  en  $\mathcal{O}(n_{Dof} \log(n_{Dof}))$ . La FMM ne permet pas à ce jour de proposer un solveur direct, et nécessite le préconditionnement du système. En effet, les équations intégrales peuvent être mal conditionnées au niveau continu. Il est alors nécessaire de les préconditionner [4]. Les  $\mathcal{H}$ -Matrices, quant à elles, permettent une représentation hiérarchique et compressée d'une matrice dense tout en gardant la possibilité d'effectuer les opérations classiques, et en particulier la factorisation LU. Ce qui mène à une résolution directe très rapide.

Lorsque l'objet diffractant est homogène, la résolution du problème de diffraction global peut être faite par le biais du couplage d'équations intégrales, communément appelé couplage *BEM-BEM*, associées aux problèmes extérieur et intérieur (objet diffractant) [14, 20, 21, 23, 57, 72]. Néanmoins, les objets diffractants inhomogènes (par exemple des objets intégrant plusieurs couches de matériaux de propriétés électromagnétiques différentes) suscitent de plus en plus d'intérêt chez les industriels. Pour ces objets, les méthodes des éléments finis volumiques sont très bien adaptées. Pour ce qui est du problème en espace libre (problème extérieur), on leur préfère cependant les équations intégrales. Afin de résoudre le problème de diffraction électromagnétique dans sa globalité et au regard de ces éléments, il apparaît clairement qu'une formulation bien adaptée, appelée couplage *FEM-BEM*, consiste à combiner une formulation faible volumique pour la partie hétérogène du domaine de calcul (objet diffractant), discrétisée par la FEM, avec des équations intégrales pour le problème extérieur discrétisées par la BEM.

Les techniques standards de couplage FEM-BEM reposent sur la combinaison d'une formulation variationnelle volumique et d'une équation intégrale surfacique au sein d'une même formulation. Cette approche est souvent appelée couplage *fort* FEM-BEM [24, 41, 42, 46, 48, 66, 73]. Ces formulations directes présentent malheureusement des inconvénients majeurs limitant leur utilisation pour résoudre des problèmes à haute fréquence. Tout d'abord, d'un point de vue calcul massivement parallèle (High Performance Computing ou HPC), ces méthodes fortement couplées produisent des systèmes linéaires complexes et indéfinis de très grande taille caractérisés par des matrices comportant à la fois des parties creuses et denses. À ce jour, il n'existe pas de méthode de type HPC spécialement adaptée au traitement d'une matrice en partie dense et en partie creuse. De plus, les matrices provenant des couplages forts FEM-BEM ne sont pas non plus adaptées à des algorithmes de compression. Naturellement, une question se pose alors : comment combiner deux solveurs préexistants efficaces, à savoir un solveur de type FEM pour le problème intérieur et un solveur de type BEM pour le problème extérieur, pour construire un solveur global optimisé ? Toutes ces raisons ont motivé la recherche de solveurs ne présentant pas les inconvénients exposés plus haut. D'autres couplages FEM-BEM dits *faibles* ont ainsi récemment été introduits pour l'équation de Helmholtz tridimensionnelle pour les problèmes de diffraction acoustique [7, 11, 16, 17] et pour les équations de Maxwell en régime harmonique [16]. Nous remarquons que la mise en œuvre du couplage faible FEM-BEM électromagnétique s'avère néanmoins être nettement plus complexe que le couplage faible FEM-BEM acoustique étant donné la nature vectorielle des inconnues. Concrètement, l'approche couplage faible FEM-BEM peut être interprétée comme une méthode de décomposition de domaine de Schwarz optimisée itérant entre les domaines intérieur et extérieur jusqu'à ce qu'un critère de convergence global soit atteint. Les formulations variationnelles volumiques et les équations intégrales surfaciques ne sont alors couplées que faiblement. Nous pouvons par exemple utiliser des éléments finis d'ordre

élevé pour le problème intérieur sans se soucier de l'ordre des éléments de frontière. Aussi, l'un des points forts de l'approche faible est que nous pouvons sans la moindre difficulté implémenter le couplage faible FEM-BEM à partir de deux solveurs préexistants et optimisés pour chaque sous-domaine, l'un pour la BEM et l'autre pour la FEM. Des couplages faibles FEM-BEM dits non-conformes (maillages générés indépendamment pour les différentes parties du problème analysé) ont été proposés dans [58, 71]. Néanmoins, cette non-conformité a le défaut d'introduire des erreurs d'approximation additionnelles.

Pour les problèmes de propagation d'ondes, et plus particulièrement en régime haute fréquence, l'ingrédient clé pour obtenir un algorithme de couplage faible FEM-BEM efficace est de concevoir des conditions de transmission bien adaptées entre les interfaces des sous-domaines. Il est important de noter que la convergence de l'algorithme peut être très mauvaise, voire jamais atteinte si les conditions de transmission ne sont pas correctement choisies [26]. Concrètement, ces dernières devraient idéalement permettre aux sous-domaines d'échanger le maximum d'information aux interfaces. En électromagnétisme, les conditions de transmission optimales reposent sur l'évaluation de certains opérateurs, dits de transmission, appelés opérateurs *Magnetic-to-Electric* (MtE), liant les courants magnétique et électrique à l'interface d'échange des sous-domaines [16]. D'un point de vue computationnel, l'évaluation numérique des opérateurs MtE est néanmoins très coûteuse. En effet, les opérateurs MtE étant des opérateurs pseudo-différentiels, ils requièrent d'importantes ressources en mémoire et en temps de calcul. C'est la raison pour laquelle des méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz avec des conditions de transmission locales et optimisées ont été proposées dans la littérature [3, 25, 27, 32, 33, 61]. Ces conditions de transmission reposent principalement sur des approximations de l'opérateur MtE. Dans le cadre du couplage faible FEM-BEM acoustique, les auteurs des ouvrages [16, 17], à travers une étude théorique et des premiers tests numériques, ont montré qu'une convergence rapide pouvait être obtenue avec l'utilisation de nouvelles approximations des opérateurs Dirichlet-to-Neumann (DtN), jouant le rôle de l'opérateur MtE pour l'acoustique, dites de Padé [5]. Par le biais de raisonnements microlocaux, des approximations de Padé de l'opérateur MtE ont aussi été introduites dans [31] permettant d'avoir des approximations quasi-locales d'opérateurs pseudo-différentiels non locaux. Dans la littérature, plusieurs travaux en lien avec la méthode de décomposition de domaine en électromagnétisme (par exemple, la résolution de problèmes de diffraction harmonique utilisant des méthodes de troncature [33]) ont montré que les approximations de Padé pouvaient avoir des propriétés très intéressantes d'un point de vue numérique en régime haute fréquence. Il se trouve en effet dans ce cas que le nombre d'itérations pour la convergence de la méthode est quasi-indépendant du raffinement du maillage et de la fréquence.

## Objectifs

Ce travail de recherche s'inscrit dans le cadre d'une collaboration de plusieurs années entre les Universités de Liège et de Lorraine d'une part, et Thales DMS France d'autre part. Cette collaboration fait suite au constat fait par Thales DMS qu'il leur était impossible de prendre en compte des matériaux anisotropes ou inhomogènes dans leur code éléments de frontière interne de simulation électromagnétique **Antenna Design (AD)**. Or, les contraintes de développement sur les matériaux utilisés dans les équipements de Thales DMS donnent souvent lieu à de légères anisotropies ou homogénéités dont les effets doivent être correctement modélisés. Les discussions préliminaires avec Xavier Antoine et Christophe Geuzaine ont permis de proposer une feuille de route méthodologique visant à coupler de manière faible le code AD utilisant la librairie  $\mathcal{H}$ -matrix [15, 39] Hi-BoX [1] avec un code FEM d'ordre



---

élevé tout en bénéficiant des avantages de ces deux méthodes. Une première thèse CIFRE de B. Caudron [16] a permis de mener une étude théorique approfondie et de réaliser des premiers tests numériques académiques démontrant la viabilité de cette nouvelle approche dans le cadre acoustique (équation de Helmholtz scalaire). Certains aspects théoriques ont été abordés pour le cas électromagnétique, avec de premiers test numériques prometteurs dans le cadre homogène, *via* un couplage BEM-BEM discrétisé à l'ordre bas.

Les objectifs de cette thèse s'inscrivent dans le prolongement des travaux initiés dans [16]. Plus précisément, le premier objectif consiste à étendre le couplage au cas FEM-BEM pour traiter des cas inhomogènes. Un objectif sous-jacent est de concevoir ce couplage pour permettre l'utilisation de FEM d'ordre élevé de manière stable, tout en s'affranchissant de la décomposition de Helmholtz sur l'interface d'échange. Ce dernier point est crucial pour traiter les applications industrielles rencontrées par Thales incluant des surfaces d'échange ouvertes. Le deuxième objectif de la thèse consiste à implémenter efficacement cette stratégie originale de couplage faible FEM-BEM, en utilisant AD comme solveur BEM. Le solveur FEM d'ordre élevé est le code open source GmshFEM [62]. Le dernier objectif est de prouver la viabilité de l'approche proposée à travers la simulation sur l'infrastructure de calcul haute performance de Thales de cas industriels représentatifs.

## Organisation du manuscrit

Cette thèse est divisée en cinq chapitres. Le Chapitre 1 présente la problématique de la thèse. Nous faisons dans un premier temps un bref rappel de quelques principes de base de l'électromagnétisme. Ensuite, nous rappelons les outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension des développements avant de présenter le problème de diffraction-transmission électromagnétique. Puis, nous faisons un tour d'horizon des méthodes de résolution standards et nous soulignons leurs points bloquants. Nous concluons ce chapitre en rappelant brièvement les concepts de base des méthodes de décomposition de domaine. Dans le Chapitre 2, nous présentons le couplage faible FEM-BEM électromagnétique puis nous introduisons les formulations choisies pour la résolution des sous-problèmes associés au couplage faible FEM-BEM. Les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible FEM-BEM sont présentés. Nous introduisons ensuite les approximations des opérateurs de transmission optimaux utilisées en pratique avant d'introduire la formulation variationnelle du couplage faible. Enfin, afin de juger la qualité de ces approximations au niveau continu, nous menons une étude spectrale du couplage faible. Le Chapitre 3 est consacré à la discrétisation et l'implémentation des couplages forts et faibles FEM-BEM. Nous présentons des résultats numériques commentés afin d'analyser le comportement de notre méthode. La précision de la solution ainsi que la convergence sont notamment étudiés. Le Chapitre 4 explore des extensions du formalisme du chapitre 2 à des cas plus avancés. Enfin, le Chapitre 5 est dédié à l'application du couplage faible FEM-BEM électromagnétique à quelques exemples.

## Contributions

Cette thèse a donné lieu à la publication et présentations suivantes.

### Article dans une revue internationale

- I. Badia, C. Caudron, X. Antoine and C. Geuzaine. *A well-conditioned weak coupling of boundary element and high-order finite element methods for time-harmonic electromagnetic scattering by inhomogeneous objects*, à paraître dans SIAM Journal on Scientific Computing, 2022.

## Présentations à des conférences et à des workshops

- 12th International Symposium on Electric and Magnetic Fields 2021, Online-Live.
- 2021 International Applied Computational Electromagnetics Society (ACES) Symposium, Online-Live.
- Workshop EM ISAE 2021, Online-Live.
- Conference on Mathematics of Wave Phenomena 2022, Online-Live.

Le code source (C++/python) du couplage faible FEM-BEM électromagnétique pour résoudre un problème de diffraction-transmission électromagnétique est disponible à l'adresse suivante :

`https://gitlab.onelab.info/gmsh/ddm/-/tree/master/examples/maxwell/weak\_FEM\_BEM\_coupling`

Les instructions d'installation sont données dans le fichier README.md.

This work was supported by Thales DMS France under the CIFRE 2018/1609 contract.



# Problématique de la thèse

## Sommaire

---

1.1	Les équations de Maxwell . . . . .	15
1.2	Quelques éléments d'analyse fonctionnelle . . . . .	16
1.3	Problème de diffraction-transmission électromagnétique . . . . .	18
1.4	Formule de Stratton-Chu et champ lointain . . . . .	21
1.5	Méthodes de résolution standards . . . . .	24
1.5.1	Couplages forts . . . . .	25
1.5.2	Motivations pour une nouvelle méthode . . . . .	26
1.5.3	Méthodes de décomposition de domaine . . . . .	27

---



## 1.1 Les équations de Maxwell

Avant d'aborder l'étude mathématique et numérique des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques, il convient de rappeler quelques équations de base. Nous supposons que le milieu est linéaire et isotrope. La propagation d'ondes électromagnétiques est régie par les équations de Maxwell. Plus précisément, le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) := (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t); \mathbf{H}(\mathbf{x}, t))$ , en l'absence de charges et de courants, complété par les lois de comportement, obéit aux équations de Maxwell temporelles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} + \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} - \epsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $\epsilon(\mathbf{x})$  est la permittivité électrique et  $\mu(\mathbf{x})$  la perméabilité magnétique du milieu dépendantes de l'espace afin de tenir compte de la présence éventuelle d'une hétérogénéité du milieu. L'opérateur rotationnel d'un champ  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  est noté  $\mathbf{rot} \mathbf{u}$ . Les variables  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et  $t > 0$  représentent respectivement les variables d'espace et de temps.

Supposons que la source varie de manière sinusoïdale en temps à la fréquence  $f$  en  $[Hz]$ , où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation respectant la convention standard  $\omega > 0$ . Nous cherchons les solutions des équations de Maxwell qui s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \Re(e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \Re(e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})), \quad (1.2)$$

où le nombre complexe  $\iota$  est défini par  $\iota = \sqrt{-1}$ , et  $\Re(c)$  (respectivement  $\Re(\mathbf{c})$ ) représente la partie réelle de  $c \in \mathbb{C}$  (respectivement  $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^3$ ). Les champs inconnus  $\hat{\mathbf{E}}$  et  $\hat{\mathbf{H}}$  sont des fonctions vectorielles à valeurs complexes qui dépendent uniquement de la variable d'espace  $\mathbf{x}$ . En injectant les relations (1.2) dans (1.1) et par linéarité nous pouvons réécrire les équations de Maxwell de manière équivalente à

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \hat{\mathbf{E}} - i\omega\mu(\mathbf{x})\hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{rot} \hat{\mathbf{H}} + i\omega\epsilon(\mathbf{x})\hat{\mathbf{E}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le système (1.3) est communément appelé le système de Maxwell harmonique. En introduisant le nombre d'onde

$$k(\mathbf{x}) = \omega\sqrt{\epsilon(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})} \quad (1.4)$$

et l'impédance caractéristique du milieu

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mu(\mathbf{x})/\epsilon(\mathbf{x})}, \quad (1.5)$$

nous pouvons réécrire (1.3) comme

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} - \iota k(\mathbf{x})\mathcal{Z}(\mathbf{x})\mathbf{H} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{rot} \mathbf{H} + \iota k(\mathbf{x})\mathcal{Z}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{E} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

en oubliant les symboles  $\hat{\phantom{x}}$  par souci de simplification des notations. L'approche fréquentielle présente l'avantage de ne pas devoir tenir compte de l'évolution temporelle menant ainsi à un problème purement spatial.

## 1.2 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

L'étude du système de Maxwell harmonique (1.3) nous amène à manipuler des opérateurs et vecteurs définis sur le bord du domaine. Afin de donner un cadre fonctionnel précis à notre étude, nous allons dans cette section effectuer des rappels mathématiques généraux de manière succincte. Nous nous appuyons ici principalement sur les ouvrages [16, 54, 57].

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert connexe non vide de  $\mathbb{R}^3$  de frontière bornée et régulière  $\Gamma$ , et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante à  $\Omega$ . Les espaces des fonctions et distributions vectorielles ainsi que les champs vectoriels sont précisés en gras. Nous notons  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  le produit vectoriel et  $\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}}$  le produit scalaire entre deux champs vectoriels  $\mathbf{u}$  et  $\bar{\mathbf{v}}$  de  $\mathbb{C}^3$ , où  $\bar{\mathbf{v}}$  est le conjugué complexe de  $\mathbf{v}$ . La norme euclidienne associée est  $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}}}$ . L'espace des distributions sur  $\Omega$  est  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Les espaces  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$  et  $\mathbf{C}^\infty(\Gamma)$  représentent respectivement les espaces des fonctions scalaires et vectorielles infiniment différentiables sur  $\Gamma$ . Soit  $L^2(\Omega)$  (resp.  $L^2(\Gamma)$ ) l'espace de Hilbert des fonctions mesurables de carré intégrable sur  $\Omega$  (resp.  $\Gamma$ ). Nous définissons  $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$  et  $\mathbf{L}^2(\Gamma) = (L^2(\Gamma))^3$ , et introduisons  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  tel que

$$\mathbf{L}_t^2(\Gamma) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Gamma) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \right\}.$$

Finalement, nous définissons l'espace de Sobolev

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\},$$

central dans les formulations variationnelles en électromagnétisme, notamment pour la méthode de Galerkin.

L'introduction d'une définition rigoureuse des opérateurs différentiels de surface nécessite le développement de notions de géométrie différentielle avancées (cf. [57]) que nous n'explicitons pas ici. Commençons par la définition suivante.

**Définition 1.1.** Soit  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ ,  $\hat{u}$  un relèvement de  $u$  dans  $\Omega$  et  $\nabla$  l'opérateur gradient standard. Le gradient surfacique de  $u$ , noté  $\nabla_\Gamma u$ , est défini par

$$\nabla_\Gamma u = \nabla \hat{u} - (\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{u}) \mathbf{n}. \quad (1.7)$$

Le rotationnel surfacique vectoriel de  $u$ , noté  $\mathbf{rot}_\Gamma u$ , est tel que

$$\mathbf{rot}_\Gamma u = \nabla_\Gamma u \wedge \mathbf{n}. \quad (1.8)$$

Nous pouvons alors définir l'opérateur divergence surfacique scalaire  $\text{div}_\Gamma$  (resp. rotationnel  $\text{rot}_\Gamma$ ) comme l'opérateur dual de  $-\nabla_\Gamma$  (resp.  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ) (voir par exemple [54, 57]).

**Définition 1.2.** Pour un champ de vecteurs  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ , la divergence surfacique et le rotationnel scalaire surfacique sur  $\Gamma$  de  $\mathbf{u}$ , notés  $\text{div}_\Gamma \mathbf{u}$  et  $\text{rot}_\Gamma \mathbf{u}$ , sont respectivement définis au sens des distributions par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma), \quad \int_\Gamma \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \varphi \, d\Gamma = - \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \nabla_\Gamma \varphi \, d\Gamma, \quad (1.9)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma), \quad \int_\Gamma \text{rot}_\Gamma \mathbf{u} \varphi \, d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}_\Gamma \varphi \, d\Gamma. \quad (1.10)$$

Enfin, les opérateurs de Laplace-Beltrami scalaire et vectoriel sont définis à partir des quatre opérateurs précédents.

**Définition 1.3.** Soit  $u \in C^\infty(\Gamma)$  et  $\mathbf{u} \in C^\infty(\Gamma)$ . Les opérateurs de Laplace-Beltrami scalaire et vectoriel sont respectivement donnés par

$$\Delta_\Gamma u = \operatorname{div}_\Gamma(\nabla_\Gamma u) = -\operatorname{rot}_\Gamma(\mathbf{rot}_\Gamma u), \quad (1.11)$$

$$\Delta_\Gamma \mathbf{u} = \nabla_\Gamma(\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}) - \mathbf{rot}_\Gamma(\operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u}). \quad (1.12)$$

Introduisons à présent les espaces de Sobolev surfaciques qui nous seront utiles par la suite :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma) &= \{u \in L^2(\Gamma) : \mathbf{rot}_\Gamma u \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)\}, \\ \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma) : \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in L^2(\Gamma)\}, \\ \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma) &= \{u \in L^2(\Gamma) : \nabla_\Gamma u \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma)\}, \\ \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_t^2(\Gamma) : \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \in L^2(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

Nous avons alors les propriétés suivantes [57].

**Proposition 1.1.** Les espaces  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ,  $\mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ,  $\mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$  sont des espaces de Hilbert. De plus, les opérateurs  $\mathbf{rot}_\Gamma$ ,  $\operatorname{rot}_\Gamma$ ,  $\nabla_\Gamma$  et  $\operatorname{div}_\Gamma$  sont continus selon

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}_\Gamma &: \mathbf{H}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{L}_t^2(\Gamma), \\ \operatorname{rot}_\Gamma &: \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma), \\ \nabla_\Gamma &: \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{L}_t^2(\Gamma), \\ \operatorname{div}_\Gamma &: \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma). \end{aligned}$$

Par des arguments de densité et de dualité [57], les définitions des opérateurs précédents peuvent être étendues à des opérateurs linéaires et continus sur les espaces de Sobolev  $\mathbf{H}^s(\Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^s(\Gamma)$ , avec  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \nabla_\Gamma &: \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad , \quad \operatorname{div}_\Gamma : \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma), \\ \mathbf{rot}_\Gamma &: \mathbf{H}^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad , \quad \operatorname{rot}_\Gamma : \mathbf{H}_t^{s+1}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma), \\ \Delta_\Gamma &: \mathbf{H}^{s+2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^s(\Gamma) \quad , \quad \Delta_\Gamma : \mathbf{H}_t^{s+2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma). \end{aligned}$$

Par convention, nous notons  $\mathbf{H}^1(\Gamma) = \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma)$ .

**Proposition 1.2.** Nous avons les relations suivantes :

$$\operatorname{rot}_\Gamma \nabla_\Gamma = 0, \quad \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma = 0, \quad \operatorname{rot}_\Gamma = \operatorname{div}_\Gamma(\cdot \wedge \mathbf{n}). \quad (1.13)$$

Dans la suite du manuscrit, nous utilisons les formules d'intégration par parties suivantes :

$$\forall u \in \mathbf{H}(\nabla_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \int_\Gamma u \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} \, d\Gamma = - \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad (1.14)$$

$$\forall u \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma), \quad \int_\Gamma u \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{v} \, d\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma u \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma. \quad (1.15)$$

Enfin, nous introduisons les espaces de traces tangentielles ( $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ ) et de composantes tangentielles (i.e.  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ).

**Définition 1.4.** Les espaces  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma)$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}, \\ \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \operatorname{rot}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\},\end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \},$$

et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  l'espace dual de  $\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** L'opérateur

$$\begin{aligned}\cdot \wedge \mathbf{n} &: \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{L}_t^2(\Gamma) \\ \mathbf{j} &\mapsto \mathbf{j} \wedge \mathbf{n}\end{aligned}\tag{1.16}$$

s'étend en un isomorphisme continu de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$  sur son dual  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{rot}_\Gamma, \Gamma)$  par rapport à la forme bilinéaire continue antisymétrique [13] suivante :

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \langle \mathbf{v}; \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)} = \int_\Gamma (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma. \tag{1.17}$$

Étant donné que seule la dualité  $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)}$  est utilisée dans ce travail, nous utilisons dorénavant l'abus de notation  $\langle \cdot; \cdot \rangle$  pour la désigner. Par ailleurs, il est important de préciser que les équations de Maxwell nécessitent l'introduction des traces tangentielles des champs électrique et magnétique pour être bien définies.

**Définition 1.5.** L'opérateur trace tangentielle pour un champ  $\mathbf{u}$  infiniment différentiable dans  $\Omega$  est défini par

$$\boldsymbol{\gamma}_t(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_\Gamma \wedge \mathbf{n}. \tag{1.18}$$

Le théorème suivant énonce les propriétés de trace des champs dans  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  ainsi que la formule d'intégration par parties associée.

**Théorème 1.2.** L'opérateur trace  $\boldsymbol{\gamma}_t$  peut être étendu en un opérateur linéaire, continu et surjectif de  $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ . De plus, la relation (1.17) nous permet d'introduire la formule de Green suivante :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \quad \int_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega - \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega = \langle \boldsymbol{\gamma}_t \bar{\mathbf{v}}; \boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{u} \rangle. \tag{1.19}$$

## 1.3 Problème de diffraction-transmission électromagnétique

Nous allons à présent nous intéresser au modèle physique que nous souhaitons résoudre : le problème de diffraction-transmission d'une onde électromagnétique par un obstacle. Pour ce faire, nous nous basons principalement sur les ouvrages [54, 57]. Nous faisons remarquer que d'un point de vue industriel, il est important de connaître la perturbation créée par un obstacle pénétrable, hétérogène et illuminé par une onde plane.



### 1.3. Problème de diffraction-transmission électromagnétique

Supposons que  $\Omega_-$  soit un obstacle hétérogène et pénétrable de  $\mathbb{R}^3$  de frontière régulière et fermée  $\Gamma := \partial\Omega_-$ . Le domaine intérieur  $\Omega_-$  est caractérisé par un nombre d'onde intérieur  $k_-$  et une impédance intérieure  $\mathcal{Z}_-$ , potentiellement dépendantes de l'espace. Nous considérons une onde plane électromagnétique  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{H}_{\text{inc}})$  définie par

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{e}e^{\iota k_+ \sigma_{\text{inc}} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{H}_{\text{inc}} = \mathbf{h}e^{\iota k_+ \sigma_{\text{inc}} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.20)$$

avec  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{h}$  les vecteurs de polarisation et  $\sigma_{\text{inc}} = (\sin \theta_{\text{inc}} \cos \phi_{\text{inc}}, \sin \theta_{\text{inc}} \sin \phi_{\text{inc}}, \cos \theta_{\text{inc}})^T$  le vecteur incident décrit à partir des angles  $\theta$  et  $\phi$  définis dans la Figure 1.1. Les vecteurs  $\mathbf{e}$ ,

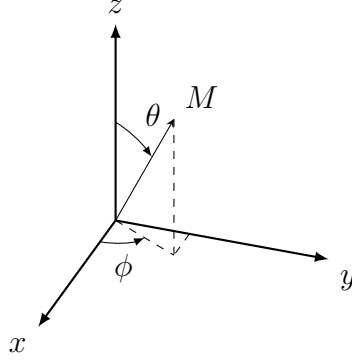


FIGURE 1.1 – Définition des angles  $\theta$  et  $\phi$

$\mathbf{h}$  et  $k_+ \sigma_{\text{inc}}$  vérifient

$$k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{e} + k_+ \sigma_{\text{inc}} \wedge \mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad -k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{h} + k_+ \sigma_{\text{inc}} \wedge \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (1.21)$$

L'onde électromagnétique incidente se propage dans le domaine extérieur  $\Omega_+$ , complémentaire de  $\Omega_-$  dans  $\mathbb{R}^3$ , supposé infini et homogène. Elle vérifie le système de Maxwell harmonique extérieur suivant :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}_{\text{inc}} - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_{\text{inc}} &= \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H}_{\text{inc}} + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{E}_{\text{inc}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega_+, \quad (1.22)$$

avec  $k_+ \in \mathbb{R}_+^*$  le nombre d'onde extérieur et  $\mathcal{Z}_+ \in \mathbb{R}_+^*$  l'impédance du domaine extérieur. Dans la majeure partie des exemples rencontrés, le milieu extérieur correspond à l'air. Par conséquent, nous supposons à partir de maintenant que  $\mathcal{Z}_+ = \mathcal{Z}_0$ , avec  $\mathcal{Z}_0$  l'impédance caractéristique du vide. Nous introduisons un paramètre de contraste  $\delta$  entre les deux domaines  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ . Dans le cas d'un obstacle homogène vérifiant  $\mu_- = \mu_+$ , il est défini de la manière suivante :

$$k_- = \delta k_+, \quad \mathcal{Z}_- = \mathcal{Z}_+ / \delta. \quad (1.23)$$

L'objet diffractant va alors générer une onde diffractée  $(\mathbf{E}_{\text{sc}}; \mathbf{H}_{\text{sc}})$ . Nous notons

$$(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+) = (\mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{H}_{\text{inc}}) + (\mathbf{E}_{\text{sc}}; \mathbf{H}_{\text{sc}}) \quad (1.24)$$

le champ électromagnétique total dans le domaine extérieur  $\Omega_+$ . Ce dernier vérifie les équations de Maxwell harmoniques dans le domaine extérieur :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_+ - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_+ &= \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H}_+ + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{E}_+ &= \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+. \quad (1.25)$$

Il est connu que les équations (1.25) ne suffisent pas à déterminer de façon unique les champs électrique  $\mathbf{E}_+$  et magnétique  $\mathbf{H}_+$ . Pour que le problème extérieur soit bien posé et physiquement admissible, il faut adjoindre une condition de radiation traduisant l'évanescence

de l'onde diffractée à l'infini. L'une des conditions les plus naturelles est la condition de radiation de Silver-Müller à l'infini sur le champ diffracté définie comme suit :

$$\left\{ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_{\text{sc}} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_{\text{sc}} \right) = \mathbf{0}, \right. \quad (1.26)$$

avec  $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^3$ ,  $r := \|\mathbf{x}\|$  la distance radiale et  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}$  le vecteur unitaire radial de la sphère unité  $\mathbb{S}$ . Remarquons que cette condition est introduite à partir d'une considération énergétique et dépend du choix de la convention du temps. La restriction de  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  dans  $\Omega_-$  est notée  $(\mathbf{E}_-; \mathbf{H}_-)$  et vérifie à son tour les équations de Maxwell harmoniques dans le domaine intérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E}_- - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_- = \mathbf{0} \\ \text{rot } \mathbf{H}_- + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_- = \mathbf{0} \end{array} \right. \text{ dans } \Omega_-. \quad (1.27)$$

Une illustration du problème physique de diffraction-transmission introduit est donnée dans la Figure 1.2.

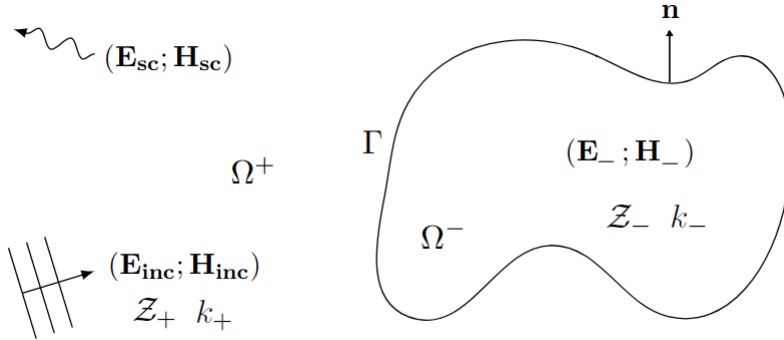


FIGURE 1.2 – Le problème de diffraction-transmission électromagnétique

Afin d'obtenir un problème bien posé, il faut ajouter aux systèmes d'équations introduits des conditions aux limites à l'interface de l'objet. C'est le rôle des conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{E} \\ \gamma_t^- \mathbf{H} = \gamma_t^+ \mathbf{H} \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma, \quad (1.28)$$

qui décrivent la continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à la traversée de  $\Gamma$ . Elles font intervenir les opérateurs de trace tangentielle (1.18), réécrits pour notre problème de diffraction-transmission comme suit :

$$\begin{array}{l} \gamma_t^\pm : \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-) \cup \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_+}) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \\ \mathbf{u} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \mapsto \mathbf{u}_{\pm|\Gamma} \wedge \mathbf{n} \end{array}, \quad (1.29)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante à  $\Omega_-$ . Nous rappelons que  $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_+})$  est l'espace de Sobolev défini par

$$\mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_+}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{B}_R \setminus \overline{\Omega_-}) : \forall R > 0, \Omega_- \subset \mathcal{B}_R \right\},$$

avec  $\mathcal{B}_R$  la boule ouverte de rayon  $R$  centrée à l'origine. Enfin, nous choisissons d'éliminer le champ  $\mathbf{H}$  des systèmes (1.25) et (1.27), et des conditions (1.26) et (1.28) afin d'obtenir une écriture mathématique plus compacte et équivalente posée pour le champ  $\mathbf{E}$  uniquement. Nous obtenons ainsi le problème de diffraction-transmission électromagnétique à résoudre :

Trouver le champ  $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \cup \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \left( \frac{1}{k_- \mathcal{Z}_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) - k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_-, \end{array} \right. \quad (1.30a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E} - k_+^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_+, \end{array} \right. \quad (1.30b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\iota k_+} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{\text{sc}} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_{\text{sc}} = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}), \end{array} \right. \quad (1.30c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{E} \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.30d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_t^- \left( \frac{1}{k_- \mathcal{Z}_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \right) = \frac{1}{k_+ \mathcal{Z}_+} \gamma_t^+ (\mathbf{rot} \mathbf{E}) \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1.30e)$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat d'existence et d'unicité suivant (voir [40, 41] pour une preuve).

**Théorème 1.3.** *Si  $k_-$  et  $\mathcal{Z}_-$  sont continus par morceaux et bornés dans  $\Omega_-$ , alors le problème de diffraction-transmission électromagnétique (1.30) admet une unique solution.*

Pour terminer cette section, mentionnons que, contrairement au problème extérieur qui est bien posé, le problème intérieur souffre de problèmes de résonance [54] correspondant mathématiquement à l'existence de valeurs propres et fonctions propres associées pour le système de Maxwell intérieur. Plus précisément, il existe une suite de valeurs propres  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$  et de fonctions propres  $(\mathbf{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , avec  $\mathbf{E}_n \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \setminus \{\mathbf{0}\}$ , vérifiant le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{E}_n = k_n^2 \mathbf{E}_n \quad \text{dans } \Omega_-, \\ \gamma_t^- \mathbf{E}_n = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad (1.31)$$

rendant le problème intérieur (1.30a) mal posé.

## 1.4 Formule de Stratton-Chu et champ lointain

Dans cette section, nous supposons que les domaines  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$  sont homogènes. L'utilisation des équations intégrales pour résoudre les problèmes (1.25)-(1.26) et (1.27) est alors possible. Cette approche permet de reformuler de manière équivalente le problème aux limites initial comme une équation intégrale posée sur la frontière  $\Gamma$ . Elle a l'avantage de réduire la dimension spatiale du problème. L'obtention de ces équations intégrales sur  $\Gamma$  nécessite cependant la connaissance de la théorie des représentations intégrales. Dans cette section, nous allons rappeler les résultats concernant les représentations intégrales associées aux équations de Maxwell avant de définir le champ lointain. Nous nous appuyons pour cela sur les livres de Colton & Kress [23] et Nédélec [57].

Les représentations intégrales font intervenir des opérateurs intégraux volumiques. Ces derniers sont construits à partir de la solution fondamentale  $G_k : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{C}$  de l'équation de Helmholtz

$$-(\Delta + k^2)G_k = \delta_{\mathbf{0}} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (1.32)$$

avec  $\delta_{\mathbf{0}}$  la distribution de Dirac et  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Une propriété importante de la solution fondamentale est qu'elle vérifie la condition de radiation à l'infini, appelée condition de radiation de Sommerfeld en acoustique. La condition de radiation (1.26) sera ainsi explicitement prise en compte dans la construction des représentations intégrales et des formulations intégrales. Contrairement aux méthodes de troncature, nous n'avons donc pas besoin de prendre en compte numériquement la condition de radiation. Remarquons qu'en général, il n'est pas

facile de trouver une solution fondamentale pour  $k$  dépendant de l'espace. C'est la raison pour laquelle, dans le cadre des représentations intégrales, nous ne travaillons qu'avec des milieux supposés homogènes.

**Définition 1.6.** *Le noyau de Green de l'équation de Helmholtz en dimension 3 est défini par*

$$G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{e^{\iota k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \quad (1.33)$$

Avant d'arriver aux formules de représentations intégrales, il est nécessaire d'introduire deux opérateurs volumiques.

**Définition 1.7.** *Soit  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ . Les opérateurs de simple et double couche volumiques associés à  $k$ , respectivement notés  $\mathcal{T}_k$  et  $\mathcal{K}_k$ , sont définis par*

$$\mathcal{T}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) + \frac{1}{k^2} \nabla \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad (1.34)$$

$$\mathcal{K}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\text{rot} \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}). \quad (1.35)$$

Les opérateurs de simple et double couche volumiques sont continus de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  dans  $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-) \cup \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega}_+)$ . Par ailleurs, les relations de saut de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{H}$  à travers  $\Gamma$  sont définies par

$$[\gamma_t \mathbf{E}] = \gamma_t^- \mathbf{E} - \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{sc}}, \quad [\gamma_t \mathbf{H}] = \gamma_t^- \mathbf{H} - \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{sc}}. \quad (1.36)$$

Nous pouvons à présent introduire le théorème de représentation intégrale (cf. [23] pour une preuve).

**Théorème 1.4.** *Lorsque les milieux  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$  sont homogènes, le champ  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$ , défini comme solution de (1.25)-(1.26) et (1.27), admet la représentation intégrale suivante :*

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \iota k \mathcal{Z} \mathcal{T}_k [\gamma_t \mathbf{H}](\mathbf{x}) - \mathcal{K}_k [\gamma_t \mathbf{E}](\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) - \mathcal{K}_k [\gamma_t \mathbf{H}](\mathbf{x}) - \iota k \mathcal{Z}^{-1} \mathcal{T}_k [\gamma_t \mathbf{E}](\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \end{cases}, \quad (1.37)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_-. \quad (1.38)$$

Si nous nous intéressons au problème extérieur, il est nécessaire de s'affranchir du champ  $(-\mathbf{E}_-; -\mathbf{H}_-)$  en faisant un choix de prolongement. Un choix judicieux est celui du prolongement par  $(\mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{H}_{\text{inc}})$ . Si nous considérons le problème intérieur, alors nous prolongeons le champ  $(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+)$  par  $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$ . Cette approche est résumée par les formules de Stratton-Chu [67].

**Théorème 1.5. Problème intérieur :** *Soit le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  solution de (1.27) avec un milieu  $\Omega_-$  homogène, alors nous avons les formules suivantes :*

$$\iota k \mathcal{Z} \mathcal{T}_k \gamma_t^- \mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{K}_k \gamma_t^- \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+ \end{cases}, \quad (1.39)$$

et

$$-\mathcal{K}_k \gamma_t^- \mathbf{H}(\mathbf{x}) - \iota k \mathcal{Z}^{-1} \mathcal{T}_k \gamma_t^- \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+ \end{cases}. \quad (1.40)$$

**Problème extérieur :** Soit le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  solution de (1.25) avec un milieu  $\Omega_+$  homogène, alors nous avons les formules suivantes :

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) - \iota k \mathcal{Z} \mathcal{T}_k \gamma_t^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathcal{K}_k \gamma_t^+ \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+ \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \end{cases}, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{H}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \mathcal{K}_k \gamma_t^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \iota k \mathcal{Z}^{-1} \mathcal{T}_k \gamma_t^+ \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+ \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \end{cases}. \quad (1.42)$$

Lorsque  $\mathbf{x} \in \Gamma$ , nous avons les formules des traces tangentielles des opérateurs intégraux volumiques.

**Proposition 1.3.** La trace tangentielle de  $\mathcal{T}_k$  est continue sur  $\Gamma$  et vérifie

$$\gamma_t^\pm \mathcal{T}_k = \mathbf{T}_k, \quad (1.43)$$

où l'opérateur  $\mathbf{T}_k \mathbf{j}$  est défini par

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma,$$

$$\mathbf{T}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \frac{1}{k^2} \nabla \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (1.44)$$

La trace tangentielle de  $\mathcal{K}_k$  est discontinue à la traversée de  $\Gamma$  et est définie par

$$\gamma_t^\pm \mathcal{K}_k = \pm \frac{1}{2} \text{Id} + \mathbf{K}_k, \quad (1.45)$$

où  $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$ , l'opérateur  $\mathbf{K}_k$  est donné par

$$\mathbf{K}_k \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int_\Gamma \nabla_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{m}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (1.46)$$

En utilisant la Proposition 1.3 et les formules de représentation (1.39)-(1.40) et (1.41)-(1.42), nous pouvons réécrire de manière équivalente les équations de Maxwell posées dans  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  en des équations intégrales sur  $\Gamma$ . Nous passons alors d'un problème volumique à un problème surfacique. En général, l'évaluation des intégrales intervenant dans les équations intégrales est technique et coûteuse. En effet, elle requiert l'évaluation numérique d'intégrales singulières. Plus précisément, l'origine de cette complication provient de la singularité du noyau de Green lorsque  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , qui correspond à intégrer sur des éléments de frontière proches au niveau discret. L'opérateur double couche présente une singularité qui doit être interprétée au sens de la valeur principale de Cauchy. De son côté, l'opérateur simple couche présente à la fois une singularité intégrable et une hypersingularité qui doit être comprise au sens de la partie finie de Hadamard. Néanmoins, l'utilisation des formules d'intégration par partie permet de s'affranchir de la partie hypersingulière. Les intégrales singulières sont intégrables, mais nécessitent néanmoins l'utilisation de procédures d'intégration semi-analytiques : la partie régulière de l'intégrale singulière est habituellement évaluée à l'aide d'une quadrature de Gauss alors que le calcul de la partie singulière est effectué analytiquement. Remarquons que les représentations intégrales conduisent à la construction d'une infinité d'équations intégrales sur  $\Gamma$  qui sont équivalentes lorsqu'elles sont inversibles.

Une fois que les relations de saut sont évaluées sur  $\Gamma$ , les formules de représentation (1.39)-(1.40) et (1.41)-(1.42) nous permettent de calculer le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  dans  $\Omega_- \cup \Omega_+$ . Il est par ailleurs intéressant d'avoir accès au comportement à l'infini du champ électromagnétique décrit par le champ lointain. Son expression peut facilement être déduite de la représentation intégrale (1.37). Pour ce faire, nous commençons par expliciter le comportement asymptotique des opérateurs intégraux volumiques dans la proposition suivante.

**Proposition 1.4.** Soit  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tel que  $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma}$ . Les développements asymptotiques des opérateurs intégraux volumiques  $\mathcal{T}_k$  et  $\mathcal{K}_k$  sont donnés par les formules suivantes [57] :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \mathcal{T}_k^\infty \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right], \\ \mathcal{K}_k \mathbf{j}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \mathcal{K}_k^\infty \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right],\end{aligned}\tag{1.47}$$

avec  $\mathcal{T}_k^\infty$  et  $\mathcal{K}_k^\infty$  les opérateurs de champ lointain définis sur  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  par

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}, \quad \mathcal{T}_k^\infty \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma e^{-iky \cdot \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \wedge (\mathbf{j}(\mathbf{y}) \wedge \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma(\mathbf{y}),\tag{1.48}$$

$$\forall \mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}, \quad \mathcal{K}_k^\infty \mathbf{j}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_\Gamma e^{-iky \cdot \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}).\tag{1.49}$$

À partir de la Proposition 1.4 et du théorème de représentation (1.37), nous déduisons le développement asymptotique du champ électrique diffracté

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik_+r}}{r} \left[ \mathbf{E}_{\text{sc}}^\infty(\boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right],\tag{1.50}$$

avec

$$\mathbf{E}_{\text{sc}}^\infty = -ik_+ \mathcal{Z}_+ \mathcal{T}_{k_+}^\infty \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{H}_{\text{sc}} + \mathcal{K}_{k_+}^\infty \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{E}_{\text{sc}},\tag{1.51}$$

son champ lointain. D'un point de vue industriel, ce n'est pas le champ lointain lui-même qui est utilisé mais plutôt la Surface Equivalente Radar (SER) (ou encore Radar Cross Section). Cette dernière permet de quantifier la puissance asymptotique moyenne du champ électromagnétique réel réfléchi par l'objet diffractant. Elle est principalement utilisée pour la furtivité radar. Plus précisément, un radar émet une onde électromagnétique qui se propage dans le vide et qui est, à la rencontre d'un objet, diffractée dans plusieurs directions. Une fois perçues par des capteurs, ces ondes diffractées permettent de détecter la présence de l'objet diffractant : nous parlons alors de sa signature radar. Remarquons qu'en général il existe plusieurs solutions pour minimiser la SER d'un objet. Nous pouvons par exemple mentionner l'utilisation de géométries appropriées, de matériaux absorbants ou bien encore minimiser la SER uniquement dans un intervalle où la probabilité que l'objet soit éclairé par l'onde incidente est élevée. Dans ce travail, nous nous concentrons uniquement sur la SER bistatique définie de la manière suivante.

**Définition 1.8.** Pour une direction  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}$  donnée, la SER bistatique est définie comme suit :

$$\text{SER}(\boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}) = 10 \log_{10} \left( 4\pi \frac{\|\mathbf{E}_{\text{sc}}^\infty(\boldsymbol{\sigma})\|^2}{\|\mathbf{E}_{\text{inc}}\|^2} \right),\tag{1.52}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}(\theta, \phi) = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))^T$ , avec  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}} \neq \boldsymbol{\sigma}$ .

*A priori*, la signature radar étant très faible, nous privilégions des méthodes numériques très précises afin de la calculer.

## 1.5 Méthodes de résolution standards

Dans la littérature, nous trouvons plusieurs approches pour résoudre numériquement le problème de diffraction-transmission (1.30). Parmi ces approches, nous pouvons mentionner

par exemple la méthode des éléments finis volumiques associée à une condition aux limites (ABC ou PML) sur une surface artificielle tronquant le domaine infini. Cette approche, que nous appelons *méthode de troncature*, est une technique numérique en pratique très puissante. Cependant, comme toute méthode, elle a ses propres avantages et inconvénients comme nous l'avons mentionné lors de l'introduction de la thèse. Dans cette section, nous présentons à titre illustratif deux méthodes de résolution classiques, *de type couplage fort*, du problème de diffraction-transmission (1.30). Nous utilisons celles-ci en tant que solutions de référence pour valider la méthode originale *de type couplage faible* développée dans la thèse et qui est introduite dans le prochain chapitre. Nous concluons cette section en soulignant les limites de ces méthodes avant de présenter l'approche générale par *décomposition de domaine*, qui sera au fondement des méthodes de couplage faible.

### 1.5.1 Couplages forts

Les couplages forts sont des méthodes qui couplent au sein d'une même formulation les équations correspondant respectivement aux parties intérieure et extérieure du problème global. Dans le cas d'un domaine intérieur homogène, il est possible d'utiliser un couplage fort BEM-BEM [14, 20, 21, 23, 57, 72]. Cette approche consiste à coupler les équations intégrales associées au domaine intérieur  $\Omega_-$  et au domaine extérieur  $\Omega_+$  dans une même formulation. Le couplage fort BEM-BEM présenté dans la proposition suivante s'appuie sur l'ouvrage [57].

**Proposition 1.5.** *Soit  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \cup \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  une solution du problème de diffraction-transmission (1.30). Les traces tangentielles de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  vérifient le système d'équations intégrales suivant :*

$$\begin{pmatrix} -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) & \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{T}_{k_-} + \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{T}_{k_+} \\ -(\iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{T}_{k_-} + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+}) & -(\mathbf{K}_{k_-} + \mathbf{K}_{k_+}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_t^- \mathbf{E} \\ \gamma_t^- \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \end{pmatrix}. \quad (1.53)$$

#### Preuve

En prenant la trace tangentielle (Proposition 1.3) des représentations intégrales (1.39)-(1.40)-(1.41)-(1.42) et en utilisant les conditions aux limites (1.28), le résultat est immédiat. ■

Afin de générer une solution du problème de diffraction-transmission (1.30), il suffit d'injecter la solution du système d'équations intégrales (1.53) dans les représentations intégrales (1.39)-(1.40)-(1.41)-(1.42). Nous rappelons que le couplage fort BEM-BEM n'est plus applicable lorsque l'objet diffractant est inhomogène. En effet, nous avons déjà mentionné que les représentations intégrales présentées dans ce manuscrit ne sont valables que pour des milieux homogènes. Il est alors nécessaire d'avoir recourt à une formulation variationnelle volumique dans le domaine intérieur  $\Omega_-$ . En revanche, nous pouvons toujours utiliser des équations intégrales pour résoudre la partie extérieure du problème de diffraction-transmission (1.30) : c'est ce que nous appelons le couplage fort FEM-BEM [24, 41, 42, 46, 48, 66, 73]. Ce couplage est adapté au problème de diffraction-transmission (1.30) quelle que soit la nature de l'objet diffractant, notamment dans le cas de la présence d'inhomogénéités.

**Proposition 1.6.** *Soit  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-) \cup \mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  une solution du problème de diffraction-transmission (1.30). Le couple  $(\mathbf{E}_-; \gamma_t^+ \mathbf{H})$  satisfait alors la formulation varia-*

tionnelle suivante :  $\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)$ ,  $\mathbf{j}' \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- \mathcal{Z}_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} d\Omega_- - \int_{\Omega_-} k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} d\Omega_- + \iota \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{E}'}; \gamma_t^+ \mathbf{H} \rangle = 0 \\ \frac{1}{2} \langle \gamma_t^- \mathbf{E}; \mathbf{j}' \rangle - \langle \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^- \mathbf{E}; \mathbf{j}' \rangle + \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \langle \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H}; \mathbf{j}' \rangle = \langle \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{j}' \rangle \end{array} \right. . \quad (1.54)$$

### Preuve

La formule d'intégration par parties (1.19) permet d'écrire le système de Maxwell harmonique (1.30a) dans  $\Omega_-$  sous forme variationnelle

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- \mathcal{Z}_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} d\Omega_- - \int_{\Omega_-} k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} d\Omega_- + \iota \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{E}'}; \gamma_t^- \mathbf{H} \rangle = 0. \quad (1.55)$$

En prenant en compte la condition de trace tangentielle (1.30e), nous obtenons

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-), \quad \int_{\Omega_-} \frac{1}{k_- \mathcal{Z}_-} \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}'} d\Omega_- - \int_{\Omega_-} k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} d\Omega_- + \iota \langle \gamma_t^- \overline{\mathbf{E}'}; \gamma_t^+ \mathbf{H} \rangle = 0. \quad (1.56)$$

La trace tangentielle (Proposition 1.3) de la représentation intégrale (1.41) pour le problème extérieur nous donne

$$\frac{1}{2} \gamma_t^+ \mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{E} + \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{T}_{k_+} \gamma_t^+ \mathbf{H} = \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}. \quad (1.57)$$

Il suffit ensuite de remplacer  $\gamma_t^- \mathbf{E}$  par  $\gamma_t^+ \mathbf{E}$  dans l'équation intégrale en se servant de la condition de trace tangentielle (1.30d) du problème de diffraction-transmission (1.30). ■

Il est possible de montrer [57] que nous avons

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)]^2,$$

$$\langle \mathbf{T}_k \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle = - \int_\Gamma \int_\Gamma G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \frac{1}{k^2} \text{div}_\Gamma \mathbf{u}(\mathbf{y}) \text{div}_\Gamma \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (1.58)$$

$$\langle \mathbf{K}_k \mathbf{u}; \mathbf{v} \rangle = - \int_\Gamma \int_\Gamma \nabla_{\mathbf{y}} G_k(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (1.59)$$

Nous terminons cette sous-section en faisons remarquer que si  $k_+^2$  est une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur, les couplages fort FEM-BEM et BEM-BEM deviennent mal posés. En effet, ces valeurs propres rendent les opérateurs intégraux surfaciques  $\mathbf{T}_k$  et  $\frac{1}{2} \mathbf{Id} + \mathbf{K}_k$  non inversibles [57].

## 1.5.2 Motivations pour une nouvelle méthode

À ce stade, nous avons présenté des techniques standards de résolution du problème de diffraction-transmission (1.30). Au vu de nos objectifs, le couplage fort BEM-BEM [14, 20, 21, 23, 57, 72] n'est pas adapté étant donné qu'il n'est applicable qu'à des objets homogènes. Intéressons-nous à présent au couplage fort FEM-BEM [24, 41, 42, 46, 48, 66, 73]. Cette approche repose sur le couplage au sein d'un même système d'une formulation variationnelle volumique associée au problème intérieur et d'un système d'équations intégrales surfaciques posées sur la surface  $\Gamma$  pour le problème extérieur. L'aspect couplage fort de cette approche



standard engendre toutefois plusieurs soucis. En effet, si certes le couplage fort FEM-BEM permet de se ramener en partie à un problème surfacique pour le problème extérieur, le système linéaire global obtenu après sa discrétisation n'est plus creux mais constitué à la fois de parties pleines (BEM) et de parties creuses (FEM). La Figure 1.3 présente un exemple d'une structure matricielle provenant du couplage fort FEM-BEM. De plus, afin de réduire les problèmes de pollution numérique [43, 44, 55], il est nécessaire de mailler finement ou bien d'augmenter l'ordre des éléments finis pour obtenir une précision acceptable lors d'un calcul de SER. Le nombre d'inconnues devient par conséquent très grand, augmentant ainsi la taille de la matrice et rendant le système difficile à résoudre. À ce jour, il n'existe cependant pas de méthode de type HPC spécialement adaptée au traitement de telles matrices.

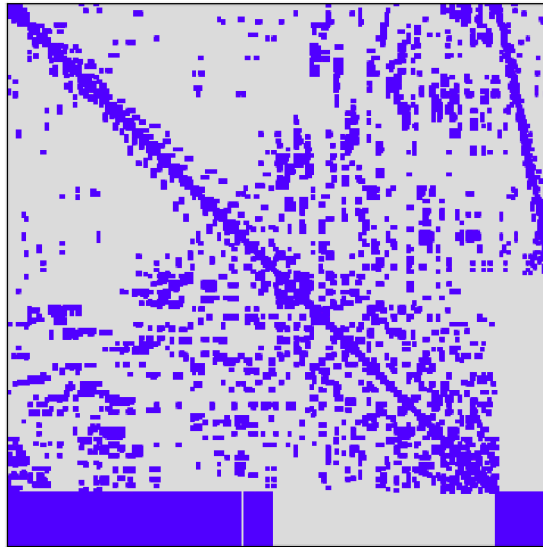


FIGURE 1.3 – Structure matricielle du couplage fort FEM-BEM

Une solution intéressante serait de pouvoir construire un algorithme global qui couple un solveur FEM optimisé pour le problème intérieur, et un autre solveur BEM adapté pour la résolution du problème extérieur. Cependant, le couplage fort des deux méthodes optimisées reste un problème ouvert. Une approche naturelle afin de pallier cette difficulté est de faire appel à une décomposition de domaine (sans recouvrement) entre le domaine intérieur ( $\Omega_-$ ) et le domaine extérieur ( $\Omega_+$ ). Avec une telle approche, la méthode des éléments finis volumiques et la méthode des éléments de frontière ne sont alors que faiblement, et de manière indépendante, couplées à travers un processus itératif d'échange d'informations sur la frontière  $\Gamma$ . De plus, cette approche a un avantage non négligeable dans le cadre d'une collaboration industrielle. En effet, pour chaque sous-problème électromagnétique intérieur/extérieur, les différents partenaires industriels (par exemple les designers des avions/antennes) n'auront besoin de se partager qu'un opérateur (un exécutable pour résoudre leur sous-problème) à la surface d'échange pour résoudre le problème électromagnétique global, et ceci sans partager leur code de simulation ou même leur design. La seule difficulté est de s'assurer de la conformité des données échangées à l'interface  $\Gamma$  de la décomposition de domaine par les algorithmes en question.

### 1.5.3 Méthodes de décomposition de domaine

Historiquement, les méthodes de décomposition de domaine [28, 68] ont été proposées par Schwarz. Elles sont souvent présentées en deux classes : les stratégies sans recouvrement

(non-overlapping) et celles avec recouvrement (overlapping). Comme l’objectif est d’utiliser des méthodes de résolution différentes dans chaque sous-domaine, il est beaucoup plus naturel de considérer une approche sans recouvrement. C’est la stratégie adoptée dans ce manuscrit.

La DDM apparaît comme une approche possible pour aborder la question de la résolution des problèmes de grande taille. Par nature itérative, la philosophie de la DDM repose sur l’adage : “diviser pour mieux régner”. En effet, l’idée principale de la DDM est de subdiviser le grand domaine de calcul en une collection de plus petits sous-domaines sur lesquels il est possible d’opérer une résolution indépendante efficace par un solveur *direct*. Remarquons que c’est un point important en vue d’une implémentation HPC afin d’exploiter au maximum la puissance des architectures distribuées modernes. Bien entendu, chacune des résolutions locales ne permettra pas à elle seule d’obtenir la solution globale. Nous pouvons néanmoins espérer construire une suite de solutions qui convergent vers la solution globale. La DDM exige, à chaque itération, de résoudre les sous-problèmes locaux et d’échanger certaines informations à l’interface des sous-domaines pour préparer l’itération suivante. Un des enjeux de la décomposition de domaine consiste donc précisément à concevoir des méthodes à la fois précises mais aussi convergentes en un nombre minimal d’itérations ayant un faible coût computationnel. La difficulté majeure, notamment pour les problèmes d’ondes, se trouve dans le choix des conditions de transmission entre les sous-domaines pour optimiser l’échange d’informations et ainsi obtenir des algorithmes rapides et convergents.

L’algorithme original de Schwarz ne converge pas pour le problème de Helmholtz. L’idée innovante, d’abord proposée par Lions [47] pour l’équation de Laplace puis par Després pour l’équation de Helmholtz [26], a été de combiner les traces de Dirichlet et de Neumann pour former des conditions de transmission de type Robin rendant l’algorithme convergent. Le principe introduit pour l’équation de Helmholtz a été ensuite étendu aux équations de Maxwell dans [25], rendant la DDM convergente. Celle-ci repose sur des conditions de transmission décrites par de simples conditions d’impédance. Par la suite, des améliorations de cette idée originale ont été proposées dans [3, 9, 25, 27, 32, 33, 61] et consistent principalement à utiliser des opérateurs de transmission plus sophistiqués. D’autre part, il est important de mentionner l’existence d’opérateurs de transmission exacts [31] fournissant des méthodes de décomposition de domaine optimales. Dans cette thèse, nous nous proposons d’approcher ces opérateurs de transmission exacts de façon précise et efficace afin de s’approcher de cette optimalité.

Des couplages faibles FEM-BEM basés sur des méthodes de décomposition de domaine ont été introduits pour les équations de Helmholtz [7, 11]. Récemment, un nouveau couplage faible FEM-BEM acoustique, basé sur des approximations de Padé d’opérateurs optimaux, appelés opérateurs DtN [5], a été introduit dans la thèse de B. Caudron [16]. Le nombre d’itérations nécessaires à la résolution de ce couplage ne dépend que faiblement de la fréquence et du raffinement du maillage. La thèse de B. Caudron fait également état de premiers résultats concernant les équations de Maxwell. Dans le prochain chapitre, nous proposons de rappeler et de compléter le travail de B. Caudron dans le cadre électromagnétique. En particulier, nous utilisons les approximations de Padé des opérateurs MtE proposées dans [31] et déjà utilisées avec succès comme opérateurs de transmission dans [33]. Ceux-ci étendent les opérateurs DtN à l’électromagnétisme.

# Le couplage faible électromagnétique

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Présentation de l'approche . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Algorithme continu du couplage faible . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>2.3</b>	<b>Formulations associées aux opérateurs de résolution . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.4</b>	<b>Choix des opérateurs de transmission . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>2.5</b>	<b>Approximations des opérateurs MtE . . . . .</b>	<b>40</b>
2.5.1	Approximations non locales des opérateurs MtE . . . . .	40
2.5.2	Représentations locales des opérateurs MtE . . . . .	45
<b>2.6</b>	<b>Formulation variationnelle du couplage faible . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>2.7</b>	<b>Etude spectrale du couplage faible . . . . .</b>	<b>48</b>
2.7.1	Quelques résultats de diagonalisation . . . . .	48
2.7.2	Etude de la convergence du couplage faible . . . . .	52

---



## 2.1 Présentation de l'approche

Le couplage faible correspond concrètement à une méthode de décomposition de domaine de Schwarz basée sur la décomposition de  $\mathbb{R}^3$  comme suit :

$$\mathbb{R}^3 = \Omega_- \sqcup \Gamma \sqcup \Omega_+.$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans le chapitre précédent, l'utilisation directe des conditions de transmission (1.30d)-(1.30e) conduit à des algorithmes qui divergent [26]. Il est nécessaire de reformuler ces conditions de transmission et ainsi espérer avoir une méthode convergente. Dans cette section, nous proposons une reformulation du problème de diffraction-transmission électromagnétique (1.30) en un nouveau système appelé *couplage faible électromagnétique*.

La première étape de la méthode consiste à reformuler de manière équivalente les conditions de transmission (1.30d)-(1.30e) du problème de diffraction-transmission (1.30). À cette fin, nous introduisons deux opérateurs linéaires, appelés opérateurs de transmission :

$$\mathbf{T}_- : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{T}_+ : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma).$$

Nous avons alors la proposition suivante.

**Proposition 2.1.** *Si les opérateurs de transmission  $\mathbf{T}_\pm$  sont tels que  $\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+$  soit injectif, alors les conditions de transmission (1.30d)-(1.30e) du problème de diffraction-transmission (1.30) sont équivalentes aux conditions de transmission suivantes :*

$$\begin{cases} \gamma_t^- \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E} = \gamma_t^+ \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E} \\ \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E} = \gamma_t^- \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^- \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.1)$$

Rappelons qu'une méthode de décomposition de domaine se prête généralement très bien à une résolution itérative. La reformulation des conditions de transmission permet alors de préconditionner le problème de diffraction-transmission (1.30) pour qu'il soit adapté à ce type de résolution. Par ailleurs, les méthodes de décomposition de domaine sont habituellement construites pour  $\mathbf{T}_+ = -\mathbf{T}_-$  (voir par exemple [33]). Dans l'optique d'être plus souple pour un préconditionnement optimal, nous supposons toutefois qu'ils peuvent être différents. Introduisons maintenant les opérateurs de trace intervenant dans la définition des sous-problèmes intérieur et extérieur associés au couplage faible :

$$\forall (\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)]^2, \quad \mathbf{B}_-(\mathbf{E}; \mathbf{H}) = \gamma_t^- \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

$$\forall (\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2, \quad \mathbf{B}_+(\mathbf{E}; \mathbf{H}) = \gamma_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

à partir desquels nous introduisons les inconnues du couplage faible définies sur la surface d'échange  $\Gamma$

$$\mathbf{g}_- = \mathbf{B}_-(\mathbf{E}; \mathbf{H}), \quad \mathbf{g}_+ = \mathbf{B}_+(\mathbf{E}; \mathbf{H}). \quad (2.4)$$

Enfin, il nous reste à définir les opérateurs de résolution affines  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$  associés aux sous-problèmes intérieur et extérieur du couplage faible :

$$\forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{R}_- \mathbf{g} = \gamma_t^- \mathbf{E}_-, \quad \forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma), \quad \mathbf{R}_+ \mathbf{g} = \gamma_t^+ \mathbf{E}_+, \quad (2.5)$$

où les champs électromagnétiques  $(\mathbf{E}_-; \mathbf{H}_-) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_-)]^2$  et  $(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  sont les solutions des problèmes aux limites suivants :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_- - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_- & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_- \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_- + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_- & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_- \\ \mathbf{B}_-(\mathbf{E}_-; \mathbf{H}_-) = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \end{cases}, \quad (2.6)$$

et

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_+ - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_+ & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_+ \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_+ + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{E}_+ & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_+ \\ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_{\text{sc}} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_{\text{sc}} & = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}) \\ \mathbf{B}_+(\mathbf{E}_+; \mathbf{H}_+) = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma \end{cases}. \quad (2.7)$$

La propriété affine en  $\mathbf{g}$  des opérateurs de résolution est liée au fait que nous travaillons avec des champs totaux. Ce point sera éclairci dans la prochaine section. D'autre part, il est clair que le caractère bien posé des sous-problèmes (2.6) et (2.7) dépend intrinsèquement du choix des opérateurs de transmission. Dans la suite du manuscrit, nous supposons que les deux sous-problèmes sont bien posés, de sorte que les opérateurs de résolution sont correctement définis. Remarquons que les sous-problèmes (2.6) et (2.7) correspondent à ceux associés aux méthodes de décomposition de domaine classiques. Nous pouvons à présent reformuler le problème de diffraction-transmission (1.30) et introduire le couplage faible électromagnétique.

**Proposition 2.2.** *Le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega_-) \cup \mathbf{H}_{\text{loc}}(\operatorname{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  est solution du problème de diffraction-transmission (1.30) si et seulement si  $\mathbf{g}_-$  et  $\mathbf{g}_+$  sont solutions de*

$$(\mathbf{Id} - \mathcal{S}_\pi) \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

L'opérateur affine  $\mathbf{Id} - \mathcal{S}_\pi$  étant défini à partir des opérateurs  $\mathbf{S}_+$  et  $\mathbf{S}_-$  comme suit :

$$\mathbf{Id} - \mathcal{S}_\pi = \begin{pmatrix} \mathbf{Id} & -\mathbf{S}_+ \\ -\mathbf{S}_- & \mathbf{Id} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

avec

$$\mathbf{S}_+ = \mathbf{Id} + (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{S}_- = \mathbf{Id} - (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_-. \quad (2.10)$$

**Preuve**

Nous commençons par réécrire les conditions de transmission reformulées (2.1) :

$$\mathbf{B}_-(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{B}_+(\mathbf{E}, \mathbf{H}) + (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \gamma_t^+ \mathbf{E}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{B}_+(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{B}_-(\mathbf{E}, \mathbf{H}) - (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \gamma_t^- \mathbf{E}. \quad (2.12)$$

Comme le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  est solution de (2.6) et (2.7), nous en déduisons que

$$\mathbf{R}_\pm \mathbf{g}_\pm = \gamma_t^\pm \mathbf{E} \quad (2.13)$$

et nous obtenons ainsi (2.8). Pour prouver la réciproque, il suffit de vérifier que les conditions de transmission reformulées (2.1) sont satisfaites, ce qui est immédiat. ■

Il est important de remarquer que comme l'opérateur de couplage faible  $\mathbf{Id} - \mathcal{S}_\pi$  est un opérateur affine, il s'ensuit que les inconnues  $\mathbf{g}_\pm$  ne sont pas forcément nulles. Par ailleurs, contrairement à la thèse de B. Caudron [16], nous travaillons ici avec des champs totaux. Cette stratégie a pour avantage d'éviter le partage des sources des sous-problèmes, ce qui est un atout non négligeable dans un contexte de collaboration industrielle.

## 2.2 Algorithme continu du couplage faible

Le couplage faible (2.8) est défini à partir des opérateurs de résolution  $\mathbf{R}_+$  et  $\mathbf{R}_-$ . Au niveau discret, ces derniers correspondent à des algorithmes de résolution pour les problèmes intérieur (2.6) et extérieur (2.7). Ajouté à cela, l'assemblage des matrices associées aux opérateurs de transmission est très coûteux. Nous reviendrons par la suite plus en détails sur ce point. Par conséquent, une résolution directe du couplage faible est en pratique très coûteuse, voire rédhibitoire. Il est donc nécessaire de résoudre le couplage faible (2.8) d'une manière itérative.

La résolution du couplage faible (2.8) par la méthode de Jacobi [63] se traduit à l'itération  $n + 1$  par la résolution des sous-problèmes suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_-^{n+1} - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_-^{n+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_- \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_-^{n+1} + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_-^{n+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_- \\ \mathbf{B}_-(\mathbf{E}_-^{n+1}; \mathbf{H}_-^{n+1}) = \mathbf{g}_-^n & \text{sur } \Gamma \end{cases}, \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_+^{n+1} - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_+^{n+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_+ \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_+^{n+1} + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{E}_+^{n+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_+ \\ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_{\text{sc}}^{n+1} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_{\text{sc}}^{n+1} & = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}) \\ \mathbf{B}_+(\mathbf{E}_+^{n+1}; \mathbf{H}_+^{n+1}) = \mathbf{g}_+^n & \text{sur } \Gamma \end{cases}, \quad (2.15)$$

et enfin la mise à jour des inconnues du couplage faible selon

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^{n+1} \\ \mathbf{g}_+^{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{S}_\pi \begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^n \\ \mathbf{g}_+^n \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante.

**Proposition 2.3.** *Une itération de l'algorithme de Jacobi pour le couplage faible peut être réécrite de manière équivalente à l'algorithme classique de Schwarz comme ci-dessous :*

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_\pm^{n+1} - \iota k_\pm \mathcal{Z}_\pm \mathbf{H}_\pm^{n+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_\pm \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_\pm^{n+1} + \iota k_\pm \mathcal{Z}_\pm^{-1} \mathbf{E}_\pm^{n+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_\pm \\ \mathcal{Z}_\pm \mathbf{H}_{\text{sc}}^{n+1} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_{\text{sc}}^{n+1} & = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}) \\ \gamma_t^- \mathbf{H}^{n+1} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E}^{n+1} = \gamma_t^+ \mathbf{H}^n + \mathbf{T}_- \gamma_t^+ \mathbf{E}^n & \text{sur } \Gamma \\ \gamma_t^+ \mathbf{H}^{n+1} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}^{n+1} = \gamma_t^- \mathbf{H}^n - \mathbf{T}_+ \gamma_t^- \mathbf{E}^n & \text{sur } \Gamma \end{cases}. \quad (2.17)$$

Nous allons à présent détailler l'algorithme du couplage faible dans une approche continue. Pour cela, nous reprenons la résolution du couplage faible par la méthode de Jacobi présentée plus haut. Afin d'arriver à une expression plus compacte de l'algorithme de Jacobi (2.14)-(2.15)-(2.16), nous commençons par réécrire les opérateurs  $\mathbf{R}_\pm$  et  $\mathbf{S}_\pm$  en rajoutant leurs dépendances implicites :

$$\gamma_t^+ \mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{R}_+(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{g}_+^n), \quad \gamma_t^- \mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{R}_-(\mathbf{0}, \mathbf{g}_-^n), \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^{n+1} \\ \mathbf{g}_+^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_+(\mathbf{g}_+^n, \gamma_t^+ \mathbf{E}^{n+1}) \\ \mathbf{S}_-(\mathbf{g}_-^n, \gamma_t^- \mathbf{E}^{n+1}) \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{E}_-^{n+1}$ ,  $\mathbf{E}_+^{n+1}$  et  $\begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^{n+1} \\ \mathbf{g}_+^{n+1} \end{pmatrix}$  sont respectivement les solutions de (2.14), (2.15) et (2.16). Par linéarité des équations, nous pouvons décomposer les champs  $\gamma_t^+ \mathbf{E}^{n+1}$  et  $\gamma_t^- \mathbf{E}^{n+1}$  comme suit :

$$\gamma_t^+ \mathbf{E}^{n+1} = \gamma_t^+ \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} + \gamma_t^+ \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}, \quad \gamma_t^- \mathbf{E}^{n+1} = \gamma_t^- \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} + \gamma_t^- \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}, \quad (2.20)$$

où

$$\gamma_t^- \mathring{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathbf{R}_-(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad \gamma_t^+ \mathring{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathbf{R}_+(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{0}), \quad (2.21)$$

$$\gamma_t^- \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathbf{R}_-(\mathbf{0}, \mathbf{g}_-^n), \quad \gamma_t^+ \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathbf{R}_+(\mathbf{0}, \mathbf{g}_+^n). \quad (2.22)$$

Les solutions  $\gamma_t^\pm \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}$  proviennent d'une résolution faisant intervenir des sources physiques correspondant ici à l'onde incidente. Quant à elles, les solutions  $\gamma_t^\pm \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}$  ont pour sources des sources fictives (ou artificielles). Dans ce cas précis (sources physiques nulles), les quantités  $\mathbf{g}_-^n$  et  $\mathbf{g}_+^n$  peuvent respectivement être interprétées comme les informations échangées de  $\Omega_+$  à  $\Omega_-$  et de  $\Omega_-$  à  $\Omega_+$  à chaque itération à travers  $\Gamma$ . Remarquons que nous pouvons aisément envisager une source dans le domaine intérieur  $\Omega_-$ . Si nous notons  $\mathbf{S}_{\text{int}}^{\text{source}}$ , il suffirait de réécrire  $\gamma_t^- \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}$  comme suit :

$$\gamma_t^- \mathring{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathbf{R}_-(\mathbf{S}_{\text{int}}^{\text{source}}, \mathbf{0}). \quad (2.23)$$

Nous constatons par ailleurs que les quantités  $\gamma_t^- \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}$  et  $\gamma_t^+ \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}$  sont indépendantes du nombre d'itérations  $n$  et peuvent donc se réécrire de la manière suivante :

$$\gamma_t^\pm \mathring{\mathbf{E}} := \gamma_t^\pm \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.24)$$

Par conséquent, les quantités  $\mathbf{g}_+^{n+1}$  et  $\mathbf{g}_-^{n+1}$  sont telles que

$$\mathbf{g}_+^{n+1} = \mathbf{S}_-(\mathbf{g}_-^n, \gamma_t^- \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}) + \mathbf{S}_-(\mathbf{0}, \gamma_t^- \mathring{\mathbf{E}}_-), \quad (2.25)$$

$$\mathbf{g}_-^{n+1} = \mathbf{S}_+(\mathbf{g}_+^n, \gamma_t^+ \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}) + \mathbf{S}_+(\mathbf{0}, \gamma_t^+ \mathring{\mathbf{E}}_+). \quad (2.26)$$

Nous introduisons les notation suivantes :

$$\gamma_t^\pm \tilde{\mathbf{E}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{R}}_\pm(\mathbf{g}_\pm^n), \quad \mathbf{S}_\pm(\mathbf{g}_\pm^n, \gamma_t^\pm \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}) = \tilde{\mathbf{S}}_\pm(\mathbf{g}_\pm^n) \quad (2.27)$$

$$\gamma_t^\pm \mathring{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathring{\mathbf{R}}_\pm(\mathbf{0}), \quad \mathbf{S}_\pm(\mathbf{0}, \gamma_t^\pm \mathring{\mathbf{E}}^{n+1}) = \mathring{\mathbf{S}}_\pm(\mathbf{0}), \quad (2.28)$$

où les opérateurs  $\tilde{\mathbf{R}}_\pm$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_\pm$  sont linéaires en  $\mathbf{g}_\pm$  et  $\mathring{\mathbf{R}}_\pm$ ,  $\mathring{\mathbf{S}}_\pm$  sont associés à la contribution du champ incident. Nous comprenons à présent mieux pourquoi les opérateurs  $\mathbf{R}_\pm$  et  $\mathbf{S}_\pm$  introduits dans la section précédente sont affines. Une itération de l'algorithme du couplage faible correspond donc à

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^{n+1} \\ \mathbf{g}_+^{n+1} \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^n \\ \mathbf{g}_+^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_- \\ \mathbf{b}_+ \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

où la quantité  $\mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^n \\ \mathbf{g}_+^n \end{pmatrix}$  est donnée par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_-^n \\ \mathbf{g}_+^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_+(\mathbf{g}_+^n, \gamma_t^+ \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}) \\ \mathbf{S}_-(\mathbf{g}_-^n, \gamma_t^- \tilde{\mathbf{E}}^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_+(\mathbf{g}_+^n) \\ \tilde{\mathbf{S}}_-(\mathbf{g}_-^n) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

L'information sur l'onde plane incidente est contenue dans le terme de droite

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_- \\ \mathbf{b}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_+(\mathbf{0}, \gamma_t^+ \mathring{\mathbf{E}}) \\ \mathbf{S}_-(\mathbf{0}, \gamma_t^- \mathring{\mathbf{E}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathring{\mathbf{S}}_+(\mathbf{0}) \\ \mathring{\mathbf{S}}_-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Nous avons alors la proposition suivante.



**Proposition 2.4.** *La formulation affine du couplage faible (2.8) peut être reformulée en le système linéaire suivant :*

$$(\mathbf{Id} - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad (2.32)$$

où

$$\tilde{\mathbf{S}}_\pi = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_+ \\ \tilde{\mathbf{S}}_- & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

et

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_- \\ \mathbf{b}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathring{\mathbf{S}}_+(\mathbf{0}) \\ \mathring{\mathbf{S}}_-(\mathbf{0}) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Dans ce travail, nous avons choisi de recourir à la procédure GMRES (Generalized Minimal Residual Method [64]) afin de résoudre efficacement le système linéaire (2.32). L'algorithme du couplage faible est résumé dans l'**Algorithme 1**. Après convergence du couplage faible,

**Algorithme 1 :** Algorithme du couplage faible

1. Calculer le membre de droite  $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_- \\ \mathbf{b}_+ \end{pmatrix}$ .
2. Résoudre le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{Id} - \mathcal{A}) \begin{pmatrix} \mathbf{g}_- \\ \mathbf{g}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_- \\ \mathbf{b}_+ \end{pmatrix},$$

en utilisant un solveur de Krylov (GMRES) [64]. À chaque itération, résoudre les sous-problèmes (2.6) et (2.7).

3. Après convergence, calculer les solutions finales

$$\gamma_t^+ \mathbf{E} = \widetilde{\mathbf{R}}_+ \mathbf{g}_+ + \mathring{\mathbf{R}}_+ \mathbf{0} = \mathbf{R}_+ \mathbf{g}_+,$$

$$\gamma_t^- \mathbf{E} = \widetilde{\mathbf{R}}_- \mathbf{g}_- + \mathring{\mathbf{R}}_- \mathbf{0} = \mathbf{R}_- \mathbf{g}_-.$$

nous rappelons qu'il est nécessaire de résoudre les problèmes intérieur (1.27) et extérieur (1.25) à partir des solutions  $\mathbf{g}_\pm$  pour accéder à la solution  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  du problème de diffraction-transmission (1.30). D'autre part, dans une approche toujours continue, nous résumons l'idée générale d'une itération du couplage faible FEM-BEM dans l'**Algorithme 2**. Remarquons que les opérateurs de résolution  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$  correspondent aux analogues continus des codes préexistants et optimisés : simples binaires retournant les champs pour un terme donné représentant la source artificielle ( $\mathbf{g}_-$  ou  $\mathbf{g}_+$ ) ou physique ( $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ ).

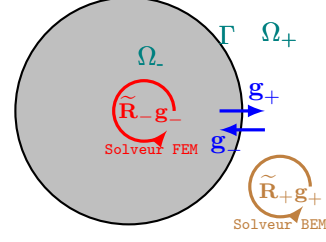
Jusqu'ici, nous avons détaillé l'idée du couplage faible sans expliquer concrètement comment résoudre les sous-problèmes (2.6) et (2.7) associés respectivement aux opérateurs de résolution  $\mathbf{R}_-$  et  $\mathbf{R}_+$ . Ce point fait l'objet de la prochaine section.

## 2.3 Formulations associées aux opérateurs de résolution

Nous présentons les formulations choisies pour la résolution des problèmes intérieur (2.6) et extérieur (2.7). Pour ce faire, nous nous orientons vers une approche générique en ne

**Algorithme 2 :** Itération d'un solveur de type Krylov [63] du couplage faible (2.32) FEM-BEM

1. Résoudre les sous-problèmes **intérieur** (2.6) (solveur FEM optimisé) et **extérieur** (2.7) (solveur BEM optimisé) en supposant que la source physique est nulle.
2. **Mise à jour** des inconnues du couplage faible  $\mathbf{g}_+$  et  $\mathbf{g}_-$  en utilisant l'opérateur  $\mathcal{A}$ .



spécifiant pas pour l'instant la forme des opérateurs de transmission  $\mathbf{T}_\pm$ . Plusieurs approches peuvent être utilisées pour résoudre le problème extérieur associé à l'opérateur  $\mathbf{R}_+$ . Nous avons par exemple les méthodes de troncature [8, 18, 45]. Comme indiqué dans le chapitre précédent, ces méthodes présentent plusieurs inconvénients bien que puissantes. Dans le cadre de la thèse, nous considérons plutôt une approche par équations intégrales. En effet, les caractéristiques physiques du problème extérieur étant constantes, les équations intégrales sont bien adaptées à l'opérateur de résolution  $\mathbf{R}_+$ . De plus, il est important de rappeler l'utilisation à terme d'un code de type intégral industriel (résolution directe) utilisant des  $\mathcal{H}$ -matrices [15, 39] permettant de pallier les limitations que peut poser la BEM.

Le problème extérieur correspond concrètement à un problème aux limites avec une condition d'impédance sur le bord. Dans l'optique de résoudre ce dernier, nous avons choisi une formulation naturelle correspondant à une généralisation de celle proposée dans [6].

**Proposition 2.5.** *Si le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  est solution du système (2.7), alors il vérifie le système d'équations intégrales suivant :*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{T}_+^{-1}\gamma_t^+\mathbf{H} - \mathbf{K}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{E} + \iota k_+\mathcal{Z}_+\mathbf{T}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{H} &= \frac{1}{2}\mathbf{T}_+^{-1}\mathbf{g} + \gamma_t^+\mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \frac{1}{2}\mathbf{T}_+\gamma_t^+\mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{H} - \iota k_+\mathcal{Z}_+^{-1}\mathbf{T}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{E} &= -\frac{1}{2}\mathbf{g} + \gamma_t^+\mathbf{H}_{\text{inc}} \end{cases} \quad (2.35)$$

Réciproquement, si  $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ ,  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ ,  $\mathbf{j} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  vérifient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mathbf{T}_+^{-1}\mathbf{j} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{m} + \iota k_+\mathcal{Z}_+\mathbf{T}_{k_+}\mathbf{j} &= \frac{1}{2}\mathbf{T}_+^{-1}\mathbf{g} + \gamma_t^+\mathbf{E}_{\text{inc}} \\ \frac{1}{2}\mathbf{T}_+\mathbf{m} - \mathbf{K}_{k_+}\mathbf{j} - \iota k_+\mathcal{Z}_+^{-1}\mathbf{T}_{k_+}\mathbf{m} &= -\frac{1}{2}\mathbf{g} + \gamma_t^+\mathbf{H}_{\text{inc}} \end{cases}, \quad (2.36)$$

alors le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  défini par

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{inc}} - \iota k_+\mathcal{Z}_+\mathcal{T}_{k_+}\mathbf{j} + \mathcal{K}_{k_+}\mathbf{m} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathcal{K}_{k_+}\mathbf{j} + \iota k_+\mathcal{Z}_+^{-1}\mathcal{T}_{k_+}\mathbf{m} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+, \quad (2.37)$$

est solution du problème extérieur (2.7).

### Preuve

Soit le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}; \mathbf{H}) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  solution du problème extérieur (2.7). En prolongeant  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  par  $(-\mathbf{E}_{\text{inc}}; -\mathbf{H}_{\text{inc}})$  dans  $\Omega_-$ , nous obtenons la représentation intégrale suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{inc}} - \iota k_+\mathcal{Z}_+\mathcal{T}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{H} + \mathcal{K}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathcal{K}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{H} + \iota k_+\mathcal{Z}_+^{-1}\mathcal{T}_{k_+}\gamma_t^+\mathbf{E} \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_+. \quad (2.38)$$

En prenant la trace tangentielle (Proposition 1.3) et en utilisant la condition au bord ( $\mathbf{g} = \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{H} - \mathbf{T}_+ \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{E}$ ), nous obtenons (2.35). Pour ce qui est de la réciproque, il suffit de remarquer que les traces tangentielles de  $(\mathbf{E}; \mathbf{H})$  sont données par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{E} &= \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{j} + \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{H} &= \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \mathbf{K}_{k_+} \mathbf{j} + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{T}_{k_+} \mathbf{m} \end{cases} \quad (2.39)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que la condition de bord est satisfaite, ce qui est immédiat.  $\blacksquare$

La formulation utilisée pour résoudre le problème intérieur (2.6) associé à l'opérateur  $\mathbf{R}_-$  dépend des propriétés physiques de l'objet diffractant. Dans le cas d'un objet homogène, nous pouvons résoudre le problème intérieur en utilisant une équation intégrale : le couplage est alors de type BEM-BEM.

**Proposition 2.6.** *Un système d'équations intégrales pour résoudre (2.6) est donné par*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{T}_- \boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{E} - \mathbf{K}_{k_-} \boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{H} - \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{T}_{k_-} \boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \mathbf{g} \\ \frac{1}{2} \mathbf{T}_-^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{H} - \mathbf{K}_{k_-} \boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{E} + \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{T}_{k_-} \boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_-^{-1} \mathbf{g} \end{cases} \quad (2.40)$$

### Preuve

La preuve est similaire à la Proposition 2.5 pour le problème extérieur.  $\blacksquare$

Dans le cas d'un objet inhomogène, une formulation variationnelle volumique est nécessaire, conduisant à un couplage de type FEM-BEM.

**Proposition 2.7.** *La formulation variationnelle associée au problème intérieur (2.40) est définie par*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-), \int_{\Omega_-} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega_- - \int_{\Omega_-} k_-^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega_- \\ - \iota k_- \mathcal{Z}_- \langle \boldsymbol{\gamma}_t^- \bar{\mathbf{v}}; \mathbf{T}_- \boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{E} \rangle = - \iota k_- \mathcal{Z}_- \langle \boldsymbol{\gamma}_t^- \bar{\mathbf{v}}; \mathbf{g} \rangle. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dans toutes les formulations introduites, nous avons délibérément omis de discuter du choix des opérateurs de transmission, central dans la qualité du préconditionnement du couplage faible. Ce point est traité dans la prochaine section.

## 2.4 Choix des opérateurs de transmission

La convergence d'un algorithme de décomposition de domaine dépend fondamentalement du choix des opérateurs de transmission. L'objectif principal est d'obtenir une convergence en un nombre d'itérations minimal sans une augmentation importante du coût de calcul moyen de chaque itération. Commençons dans un premier temps par introduire les définitions des opérateurs MtE intérieur et extérieur.

**Définition 2.1.** *L'opérateur Magnetic-to-Electric (MtE) extérieur, noté  $\boldsymbol{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}$ , est défini par*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_{+,k_+,Z_+} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \\ \mathbf{m} &\mapsto \boldsymbol{\gamma}_t^+ \mathbf{H}_{\text{sc},\mathbf{m}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

où le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_m; \mathbf{H}_m) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_+})]^2$  vérifie

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_{\text{sc},m} - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_{\text{sc},m} &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_+ \\ \text{rot } \mathbf{H}_{\text{sc},m} + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{E}_{\text{sc},m} &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_+ \\ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_{\text{sc},m} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \mathbf{E}_{\text{sc},m} &= \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}) \\ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{sc},m} &= \mathbf{m} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.43)$$

L'opérateur MtE intérieur, noté  $\Lambda_{-,k_-,z_-}$ , est défini par

$$\Lambda_{-,k_-,z_-} : \begin{matrix} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \\ \mathbf{m} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \\ \gamma_t^- \mathbf{H}_m \end{matrix}, \quad (2.44)$$

où le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_m; \mathbf{H}_m) \in [\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-)]^2$  vérifie

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_m - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_m &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_- \\ \text{rot } \mathbf{H}_m + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_m &= \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_- \\ \gamma_t^- \mathbf{E}_m &= \mathbf{m} \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.45)$$

Les opérateurs MtE intérieur et extérieur sont linéaires et continus. Il est par ailleurs important de remarquer que l'opérateur  $\Lambda_{-,k_-,z_-}$  n'est bien défini que si  $k_-^2$  n'est pas une valeur propre du système de Maxwell harmonique intérieur (2.45).

Avant d'aborder la question du choix des opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.8), nous introduisons la proposition suivante.

**Proposition 2.8.** *Les opérateurs de transmission  $\mathbf{T}_\pm$ , MtE  $\Lambda_{\pm,k_\pm,z_\pm}$ , et les opérateurs  $\widetilde{\mathbf{R}}_\pm$  correspondant à la partie linéaire (par rapport à  $\mathbf{g}_\pm$ ) des opérateurs de résolution sans la contribution du champ incident (sources physiques nulles) sont liés par les relations suivantes :*

$$(\Lambda_{+,k_+,z_+} - \mathbf{T}_+) \widetilde{\mathbf{R}}_+ = \text{Id}, \quad (\Lambda_{-,k_-,z_-} + \mathbf{T}_-) \widetilde{\mathbf{R}}_- = \text{Id}. \quad (2.46)$$

### Preuve

Après réécriture des inconnues du couplage faible, nous avons

$$\mathbf{g}_+ = \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{sc}} + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{sc}} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad \mathbf{g}_- = \gamma_t^- \mathbf{H} + \mathbf{T}_- \gamma_t^- \mathbf{E}. \quad (2.47)$$

En utilisant les opérateurs MtE introduits plus haut, nous obtenons

$$\mathbf{g}_+ = (\Lambda_{+,k_+,z_+} - \mathbf{T}_+) \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{sc}} + \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} - \mathbf{T}_+ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{g}_- = (\Lambda_{-,k_-,z_-} - \mathbf{T}_-) \gamma_t^- \mathbf{E}_{\text{sc}}. \quad (2.49)$$

Enfin, il suffit de remarquer que  $\widetilde{\mathbf{R}}_+ \mathbf{g}_+ = \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{sc}}$  et  $\widetilde{\mathbf{R}}_- \mathbf{g}_- = \gamma_t^- \mathbf{E}$ , et d'omettre les contributions du champ incident. ■

La Proposition 2.8 nous permet d'identifier les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.8) comme le précise la proposition suivante.

**Proposition 2.9.** *Les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.8) sont donnés par*

$$\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,z_+}, \quad \mathbf{T}_+ = \Lambda_{-,k_-,z_-}. \quad (2.50)$$

**Preuve**

Nous rappelons que le couplage faible est défini par le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_- &= \mathbf{g}_+ + (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_+ \mathbf{g}_+ \\ \mathbf{g}_+ &= \mathbf{g}_- - (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_- \mathbf{g}_- \end{cases} . \quad (2.51)$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} \mathbf{g}_- &= \mathbf{g}_+ + (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} + (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \widetilde{\mathbf{R}}_+ \mathbf{g}_+ \\ \mathbf{g}_+ &= \mathbf{g}_- - (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \widetilde{\mathbf{R}}_- \mathbf{g}_- \end{cases} . \quad (2.52)$$

Supposons que  $\mathbf{T}_- = -\boldsymbol{\Lambda}_{+,k_+,z_+}$ . En utilisant la Proposition 2.8, il vient que

$$\mathbf{g}_- = (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}. \quad (2.53)$$

Autrement dit, nous avons

$$\widetilde{\mathbf{S}}_+ = \mathbf{0}. \quad (2.54)$$

De même, si nous supposons que  $\mathbf{T}_+ = \boldsymbol{\Lambda}_{-,k_-,z_-}$ , nous obtenons

$$\mathbf{g}_+ = \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

ce qui est équivalent à

$$\widetilde{\mathbf{S}}_- = \mathbf{0}. \quad (2.56)$$

Remarquons que, dans ce cas précis (il n'y a pas de source physique pour le problème intérieur), nous avons :  $\widetilde{\mathbf{S}}_- = \mathbf{S}_- = \mathbf{0}$ . Ainsi, la partie linéaire en  $\mathbf{g}_+$  et  $\mathbf{g}_-$  de l'opérateur de couplage faible (2.8) est réduite à l'opérateur identité. ■

Une conséquence directe de ce résultat est que  $\widetilde{\mathbf{S}}_\pi$  est un opérateur nul, conduisant à une résolution triviale du couplage faible (2.8). De plus, si seulement l'un des opérateurs de transmission  $\mathbf{T}_\pm$  est optimal, c'est-à-dire l'une des conditions (2.50) est vérifiée, alors l'opérateur  $\widetilde{\mathbf{S}}_\pi$ , noté aussi  $\mathcal{A}$ , est nilpotent et son spectre est donc réduit à  $\{0\}$ . L'opérateur  $\mathbf{Id} - \widetilde{\mathbf{S}}_\pi$  est par conséquent caractérisé par une concentration des valeurs propres en  $(1, 0)$  dans le plan complexe (car les opérateurs MtE sont exacts), conduisant à une convergence rapide de la procédure GMRES utilisée pour résoudre le couplage faible.

Les opérateurs MtE sont *a priori* des opérateurs pseudo-différentiels non locaux et non explicites dans la plupart des situations, ce qui est à la fois complexe à mettre en oeuvre et coûteux pour une utilisation numérique. Afin de réduire le coût d'évaluation du couplage faible, il est plutôt préférable de considérer des approximations localisées des opérateurs MtE. Dans la littérature, la majeure partie des opérateurs de transmission peut être interprétée comme des approximations de l'opérateur MtE exact. Nous pouvons notamment trouver (voir aussi la Section 2.5) des représentations précises de l'opérateur MtE extérieur. En effet, la solution du problème extérieur a un comportement localisé au voisinage du bord  $\Gamma$ , au moins pour des domaines convexes et en régime haute fréquence, où des méthodes constructives de l'opérateur MtE existent. Il est par conséquent raisonnable de se concentrer sur une évaluation précise de  $\mathbf{T}_- = -\boldsymbol{\Lambda}_{+,k_+,z_+}$ , conduisant à une très bonne propriété spectrale de l'opérateur  $\widetilde{\mathbf{S}}_\pi$ . Cela-dit, la construction d'approximations précises et localisées de  $\mathbf{T}_+ = \boldsymbol{\Lambda}_{-,k_-,z_-}$  est beaucoup plus difficile, et peut même être impossible. Ceci s'explique par le comportement non local des ondes transmises dans  $\Omega_-$  et lié par exemple à la présence d'ondes multiples diffractées. Puisque nous pouvons obtenir des représentations précises de  $\mathbf{T}_-$  impliquant que  $\widetilde{\mathbf{S}}_\pi$  est presque nilpotent, une approximation grossière de  $\boldsymbol{\Lambda}_{-,k_-,z_-}$

pour représenter  $\mathbf{T}_+$  peut sembler suffisante. Enfin, remarquons que dans le cas d'un couplage faible BEM-BEM où nous cherchons à résoudre les sous-problèmes de façon itérative, un choix alternatif des opérateurs de transmission  $\mathbf{T}_\pm$  aurait pu être fait afin d'optimiser le conditionnement des équations intégrales (voir [16]). Comme notre objectif est de préconditionner le couplage faible (2.8) et de résoudre les sous-problèmes de manière directe, nous considérons uniquement les opérateurs optimaux pour le couplage faible (2.50).

À la suite de toute cette discussion, se pose naturellement la question du choix des opérateurs MtE à utiliser en pratique. Nous abordons cette question plus en détails dans la prochaine section.

## 2.5 Approximations des opérateurs MtE

Les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (2.8) sont des opérateurs MtE. L'évaluation numérique de ces opérateurs est toutefois coûteuse en temps de calcul et en mémoire. Une alternative pour contourner cette difficulté consiste à construire des approximations locales de ces opérateurs. Dans cette section, nous détaillons dans un premier temps la construction des opérateurs MtE pour le cas du demi-espace avant d'étendre formellement ces résultats au cas d'une surface fermée, régulière et convexe.

### 2.5.1 Approximations non locales des opérateurs MtE

Les approximations non locales des opérateurs MtE demandent de faire une hypothèse de régularité sur le domaine  $\Gamma$ . C'est pourquoi, en général, nous n'avons pas accès à l'expression des opérateurs MtE pour n'importe quelle géométrie  $\Gamma$ . Dans ce travail, nous supposons que la frontière  $\Gamma$  est régulière. Dans la définition suivante, nous rappelons un outil essentiel pour la suite de l'étude.

**Définition 2.2.** *La transformation de Fourier partielle de  $u$  dans le plan d'équation  $\{x = a\}$ , avec  $a \in \mathbb{R}_+$ , notée  $\mathcal{F}$ , est définie par*

$$\mathcal{F}(u)(\xi_y; \xi_z; x) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x; y; z) e^{-\iota(y\xi_y + z\xi_z)} dydz, \quad (2.57)$$

avec  $(\xi_y, \xi_z)$  les variables duales de  $(y, z)$ .

Cette transformation de Fourier partielle jouit de la même propriété d'inversibilité que la transformation de Fourier standard.

**Proposition 2.10.** *La transformation de Fourier partielle est inversible et a pour inverse*

$$u(x; y; z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(u)(\xi_y; \xi_z; x) e^{\iota(y\xi_y + z\xi_z)} d\xi_y d\xi_z. \quad (2.58)$$

De plus, nous pouvons vérifier sans peine les propriétés suivantes.

**Proposition 2.11.** *La transformation de Fourier partielle  $\mathcal{F}$  vérifie les propriétés de dérivation suivantes :*

$$\mathcal{F}(\partial_y u)(\xi_y; \xi_z; x) = \iota \xi_y \mathcal{F}(u)(\xi_y; \xi_z; x), \quad (2.59)$$

$$\mathcal{F}(\partial_z u)(\xi_y; \xi_z; x) = \iota \xi_z \mathcal{F}(u)(\xi_y; \xi_z; x). \quad (2.60)$$

Remarquons que la transformée de Fourier partielle d'une fonction vectorielle  $\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3)$  est définie par

$$\mathcal{F}(\mathbf{u})(\xi_y; \xi_z; x) = (\mathcal{F}(u_1)(\xi_y; \xi_z; x), \mathcal{F}(u_2)(\xi_y; \xi_z; x), \mathcal{F}(u_3)(\xi_y; \xi_z; x)). \quad (2.61)$$

Concentrons nous dans un premier temps sur le demi-espace homogène suivant :

$$\Omega = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}.$$

La frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  correspond au plan d'équation  $\{x = 0\}$ . La normale unitaire sortante  $\Omega$  est notée  $\mathbf{n} = (-1; 0; 0)$ . Soit le champ électromagnétique  $(\tilde{\mathbf{E}}; \tilde{\mathbf{H}})$ , vérifiant le système de Maxwell harmonique dans  $\Omega$  (avec la condition de Silver-Müller) suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} - \iota k \mathcal{Z} \tilde{\mathbf{H}} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} + \iota k \mathcal{Z}^{-1} \tilde{\mathbf{E}} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \mathcal{Z}_+ \tilde{\mathbf{H}} \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \tilde{\mathbf{E}} \right) & = \mathbf{0} \end{cases}, \quad (2.62)$$

avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Proposition 2.12.** *Dans le cas du demi-espace homogène, nous avons la relation exacte suivante :*

$$\tilde{\mathbf{H}} \wedge \mathbf{n} = \Lambda_{\Gamma, k, \mathcal{Z}}(\tilde{\mathbf{E}} \wedge \mathbf{n}) \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.63)$$

où l'opérateur  $\Lambda_{\Gamma, k, \mathcal{Z}}$  est défini [31] par

$$\Lambda_{\Gamma, k, \mathcal{Z}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k^2} \operatorname{rot}_{\Gamma} \operatorname{rot}_{\Gamma} \right) (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}). \quad (2.64)$$

### Preuve

L'objectif est d'arriver à l'expression exacte de l'opérateur MtE dans le cas du demi-espace homogène  $\Omega$ . Pour ce faire, nous commençons par développer le système de Maxwell harmonique (2.62) :

$$\begin{pmatrix} \partial_y \tilde{E}_z - \partial_z \tilde{E}_y \\ \partial_z \tilde{E}_x - \partial_x \tilde{E}_z \\ \partial_x \tilde{E}_y - \partial_y \tilde{E}_x \end{pmatrix} - \iota k \mathcal{Z} \begin{pmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{pmatrix} \partial_y \tilde{H}_z - \partial_z \tilde{H}_y \\ \partial_z \tilde{H}_x - \partial_x \tilde{H}_z \\ \partial_x \tilde{H}_y - \partial_y \tilde{H}_x \end{pmatrix} + \iota k \mathcal{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Ensuite, nous utilisons la première ligne de chaque système afin d'éliminer les composantes en  $x$  dans les autres équations. Nous obtenons alors

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{Z}}{\iota k} (\partial_z^2 \tilde{H}_y - \partial_z \partial_y \tilde{H}_z) - \partial_x \tilde{E}_z \\ \partial_x \tilde{E}_y + \frac{\mathcal{Z}}{\iota k} (\partial_y^2 \tilde{H}_z - \partial_y \partial_z \tilde{H}_y) \end{pmatrix} - \iota k \mathcal{Z} \begin{pmatrix} \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\iota k \mathcal{Z}} (\partial_z \partial_y \tilde{E}_z - \partial_z^2 \tilde{E}_y) - \partial_x \tilde{H}_z \\ \partial_x \tilde{H}_y + \frac{1}{\iota k \mathcal{Z}} (\partial_y \partial_z \tilde{E}_y - \partial_y^2 \tilde{E}_z) \end{pmatrix} + \iota k \mathcal{Z}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Puis, en appliquant la transformée de Fourier partielle dans un plan  $\{x = a\}$ , avec  $a \in \mathbb{R}_+$ , nous déduisons l'équation différentielle ordinaire (EDO) du premier ordre suivante :

$$\partial_x \mathbf{W} - \iota \nu \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (2.68)$$

où

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\tilde{E}_y) \\ \mathcal{F}(\tilde{E}_z) \\ \mathcal{F}(\tilde{H}_y) \\ \mathcal{F}(\tilde{H}_z) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \frac{\mathcal{Z}}{k\nu} \begin{pmatrix} \xi_y \xi_z & k^2 - \xi_y^2 \\ -(k^2 - \xi_z^2) & -\xi_y \xi_z \end{pmatrix}, \quad \nu = \sqrt{k^2 - \xi_y^2 - \xi_z^2} \neq 0. \quad (2.69)$$

Nous posons  $M$  la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Nous cherchons  $\eta \in \mathbb{C}$  non nul (car  $M$  est inversible puisque  $\nu \neq 0$ ) tel qu'il existe  $(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2) \in [\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})]^2 \setminus \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$  vérifiant

$$M \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \eta^2 = 1, \quad \frac{1}{\eta} \mathcal{M} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1. \quad (2.71)$$

La matrice  $M$  est diagonalisable. En effet, ses valeurs propres sont égales à  $\pm 1$  et nous pouvons aisément en déduire une base de vecteurs propres pour  $M$  menant à la matrice de passage de la base canonique à la base constituée des vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} Id & Id \\ \mathcal{M}^{-1} & -\mathcal{M}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

En utilisant la relation

$$M = PDP^{-1}, \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

l'EDO (2.68) peut se réécrire comme suit :

$$\partial_x \mathbf{X} - \nu D \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad x \geq 0, \quad (2.74)$$

où  $\mathbf{X} = P^{-1} \mathbf{W}$ . La solution de l'EDO (2.74) est  $\mathbf{X}(x, \xi_y, \xi_z) = e^{i\nu D x} \mathbf{X}(0, \xi_y, \xi_z)$ . Il se trouve que les deux dernières composantes de  $\mathbf{X}(0, \xi_y, \xi_z)$  et donc  $\mathbf{X}(x, \xi_y, \xi_z)$  sont nulles. Autrement, lorsque  $k^2 - \xi_y^2 - \xi_z^2 < 0$  (appelée zone elliptique et correspondant aux modes évanescents),  $e^{-i\nu x}$  divergerait en  $+\infty$ . Il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}(\tilde{H}_y) \\ \mathcal{F}(\tilde{H}_z) \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\tilde{E}_y) \\ \mathcal{F}(\tilde{E}_z) \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\tilde{H}_y) \\ \mathcal{F}(\tilde{H}_z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( 1 - \frac{\xi_y^2 + \xi_z^2}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\xi_y \xi_z}{k^2} & -(1 - \frac{\xi_y^2}{k^2}) \\ 1 - \frac{\xi_z^2}{k^2} & \frac{\xi_y \xi_z}{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\tilde{E}_y) \\ \mathcal{F}(\tilde{E}_z) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\mathcal{F}(\tilde{H}_z) \\ \mathcal{F}(\tilde{H}_y) \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( 1 - \frac{\xi_y^2 + \xi_z^2}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\xi_z^2}{k^2} & \frac{\xi_y \xi_z}{k^2} \\ \frac{\xi_y \xi_z}{k^2} & 1 - \frac{\xi_y^2}{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathcal{F}(\tilde{E}_y) \\ -\mathcal{F}(\tilde{E}_z) \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Comme nous avons sur  $\Gamma$  (plan  $\{x = 0\}$ )

$$\mathcal{F}(\Delta_\Gamma \mathbf{u})(\xi_y; \xi_z; 0) = -(\xi_y^2 + \xi_z^2) \mathcal{F}(\mathbf{u})(\xi_y; \xi_z; 0) \quad (2.78)$$



et

$$\mathcal{F}(\mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{u})(\xi_y; \xi_z; 0) = \begin{pmatrix} \xi_z^2 & -\xi_y \xi_z \\ -\xi_y \xi_z & \xi_y^2 \end{pmatrix} \mathcal{F}(\mathbf{u})(\xi_y; \xi_z; 0), \quad (2.79)$$

en supposant que  $a = 0$  et en prenant la transformée de Fourier inverse, nous en déduisons alors que sur  $\Gamma$

$$\begin{pmatrix} -\widetilde{H}_z \\ \widetilde{H}_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \frac{1}{k^2} \mathbf{rot}_\Gamma \mathbf{rot}_\Gamma \right) \begin{pmatrix} -\widetilde{E}_y \\ -\widetilde{E}_z \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Après réécriture, nous obtenons (2.63). ■

Supposons à présent que  $\Gamma$  est une surface fermée, convexe et régulière, et revenons au problème de diffraction-transmission électromagnétique (1.30). Nous proposons de construire des approximations microlocales de  $\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}$  de manière formelle suivant [31] pour pouvoir ensuite les utiliser dans le cadre général de la décomposition de domaine. Pour cela, nous approchons formellement l'opérateur exact  $\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}$  par son approximation basée sur le plan tangent local et suivant la Proposition 2.12. Avec cette transposition, la variable  $x$  est vue comme la variable locale radiale,  $\mathbf{n}_{\mathbf{x}_0}$  la normale unitaire sortante à  $\Omega_-$  en un point  $\mathbf{x}_0$  de  $\Gamma$  et  $y$  et  $z$  correspondent à l'analogie des variables tangentielles locales dans le plan tangent à  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}_0$ . Nous déduisons alors que

$$\Lambda_{-, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \mathbf{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{k^2} \mathbf{rot}_\Gamma \right) \right) (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}), \quad (2.81)$$

et par symétrie nous avons

$$\Lambda_{+, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \mathbf{Id} + \frac{\Delta_\Gamma}{k^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \mathbf{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{k^2} \mathbf{rot}_\Gamma \right) \right) (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}). \quad (2.82)$$

Même si cette approche semble moins rigoureuse d'un point de vue mathématique, elle s'est avérée être précise dans les calculs pratiques de l'équation de Maxwell [33]. Toutefois, une approche plus rigoureuse reposant sur un système de cartes locales et de changements de variables liées au plan tangent mènerait au même résultat [31]. Ces approximations ne sont valables que dans les zones dites hyperbolique, i.e. pour les fréquences  $(k, \xi_y, \xi_z)$  satisfaisant  $k^2 - \xi_y^2 - \xi_z^2 \gg 0$ , et elliptique telles que  $k^2 - \xi_y^2 - \xi_z^2 \ll 0$ . Physiquement, elles caractérisent respectivement les parties propagative et évanescence de l'onde. Néanmoins, dans la zone dite grazing  $k^2 - \xi_y^2 - \xi_z^2 \approx 0$ , qui correspond aux rayons rasants ou glissants,  $\Lambda_{+, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}}$  devient singulier rendant le système non inversible. Pour s'affranchir de cette difficulté, une solution a été proposée dans [31] qui consiste à régulariser  $\Lambda_{+, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}}$  en introduisant un paramètre  $\epsilon$ . Celui-ci est calibré pour que l'opérateur MtE associé s'approche au mieux localement de l'opérateur MtE dans le cas de la sphère osculatrice (et développable en harmoniques sphériques), en introduisant notamment l'effet de la courbure locale de la surface (et qui n'existe pas dans le cas du demi-espace).

**Proposition 2.13.** *Les approximations de type racine carrée régularisées pour  $\Lambda_{+, k, \mathcal{Z}}$  et*

$\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}$  sont respectivement définies par

$$\Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \mathbf{Id} + \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right) (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}), \quad (2.83)$$

$$\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( \mathbf{Id} + \nabla_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{div}_{\Gamma} \right) - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{Id} - \text{rot}_{\Gamma} \left( \frac{1}{k_{\epsilon}^2} \text{rot}_{\Gamma} \right) \right) (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}), \quad (2.84)$$

où  $k_{\epsilon} = k + i\epsilon$  et le paramètre  $\epsilon > 0$  est optimisé selon la formule [31]

$$\epsilon = 0.39k^{\frac{1}{3}}\mathcal{H}^{\frac{2}{3}}, \quad (2.85)$$

$\mathcal{H}$  désignant la courbure moyenne de  $\Gamma$ .

En pratique, le calcul de la courbure moyenne demande un certain travail pour obtenir des évaluations précises. Néanmoins, comme les opérateurs  $\Lambda_{\pm,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}}$  sont essentiellement utilisés comme préconditionneurs pour le couplage faible, nous nous contentons de remplacer  $\mathcal{H}$  par l'inverse du rayon de la sphère circonscrite à  $\Omega_-$ . D'autre part, dans le cas où  $k$  et  $\mathcal{Z}$  dépendent de l'espace, nous nous autorisons à utiliser les extensions formelles des approximations  $\Lambda_{\pm,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}}$  qui peuvent être justifiées de manière rigoureuse par la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et les techniques d'analyse microlocale associées (voir par exemple [50] pour l'équation de propagation d'onde scalaire). Par ailleurs, nous rappelons que la théorie des opérateurs pseudo-différentiels demande une régularité forte sur la frontière  $\Gamma$ . De ce fait, dans le cas d'un manque de régularité du bord, près d'un coin par exemple, les approximations (2.83) et (2.84) peuvent perdre un peu de précision puisqu'elles ne sont pas rigoureusement valides. Cependant, comme elles jouent le rôle de préconditionneurs pour le couplage faible, cela a par conséquent un impact limité sur la convergence globale des algorithmes itératifs. Il serait cependant très intéressant d'améliorer la convergence de la méthode actuelle en incluant soigneusement les effets de coin (par exemple [52] pour l'équation de propagation d'onde scalaire). Cela nécessite toutefois un travail fin de développements mathématiques.

Contrairement à l'opérateur  $\Lambda_{+,k_+,\mathcal{Z}_+}^{\text{sq}}$  qui fournit une bonne approximation de  $\Lambda_{+,k_+,\mathcal{Z}_+}$ , nous pouvons dès à présent prédire que l'approximation de  $\Lambda_{-,k_-,\mathcal{Z}_-}$  par  $\Lambda_{-,k_-,\mathcal{Z}_-}^{\text{sq}}$  reste relativement limitée car l'opérateur  $\Lambda_{-,k_-,\mathcal{Z}_-}$  est généralement un opérateur fondamentalement non local. Pour  $k_-$  et  $\mathcal{Z}_-$  constants, une alternative serait d'utiliser une approximation intégrale (voir [16]) sur la base de la proposition suivante.

**Proposition 2.14.** *Si  $k$  et  $\mathcal{Z}$  sont constants, et si  $k^2$  n'est pas une valeur propre du problème intérieur (2.6), nous avons les relations équivalentes suivantes :*

$$\iota k \mathcal{Z} \mathbf{T}_k (\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}} - \Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}) = \mathbf{Id}, \quad \Lambda_{-,k,\mathcal{Z}} = \frac{1}{\iota k \mathcal{Z}} \mathbf{T}_k^{-1} + \Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}. \quad (2.86)$$

Cette proposition nous montre que, pour  $k$  et  $\mathcal{Z}$  constants, nous pouvons aisément construire des approximations de  $\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}$  à partir d'approximations  $\Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}$ . Nous avons par exemple la proposition suivante.

**Proposition 2.15.** *Si  $k$  et  $\mathcal{Z}$  sont constants et  $k^2$  n'est pas une valeur propre du problème intérieur,  $\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}$  peut être approché par*

$$\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}^{\text{int}} = \frac{1}{\iota k \mathcal{Z}} \mathbf{T}_k^{-1} + \Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}}. \quad (2.87)$$

Bien que l'approximation (2.87) soit meilleure que (2.84) (car étant construite à partir de l'opérateur surfacique non local  $\mathbf{T}_k$ ), elle n'est toutefois pas adaptée à notre étude puisqu'elle n'est valable que pour des objets homogènes. Ajouté à cela, l'approximation intégrale (2.87) demande à évaluer l'opérateur  $\mathbf{T}_k^{-1}$  et est donc plus coûteuse d'un point de vue numérique. Par conséquent, nous omettrons l'étude de l'approximation intégrale (2.87).

## 2.5.2 Représentations locales des opérateurs MtE

Les approximations (2.83) et (2.84) font intervenir des opérateurs pseudo-différentiels non locaux. Leur évaluation requiert des ressources en temps de calcul et en mémoire importantes. De plus, leur représentation discrète (lorsque cela est possible) est caractérisée par une matrice pleine. Pour pallier ce problème, une autre approche est d'utiliser plutôt des approximations locales du symbole de l'opérateur racine carrée inverse et d'approcher ainsi les opérateurs (2.83) et (2.84) par des opérateurs locaux. Une simple approximation de  $\Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}}$  et  $\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}}$  est d'utiliser le développement de Taylor à l'ordre 0 en  $\|\boldsymbol{\xi}\|/k_\epsilon$  du symbole de la racine carrée inverse

$$\left( \mathbf{Id} - \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|^2}{k_\epsilon^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.88)$$

avec  $\|\boldsymbol{\xi}\| = (\xi_y^2 + \xi_z^2)^{1/2}$ . Nous obtenons ainsi les approximations d'ordre 0 suivantes :

$$\Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}^0 = -\frac{1}{\mathcal{Z}}(\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}), \quad \Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}^0 = \frac{1}{\mathcal{Z}}(\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}). \quad (2.89)$$

Des approximations locales de  $\Lambda_{\pm,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq}}$  plus précises ont été introduites dans [31]. Celles-ci se basent sur l'approximation de Padé de la racine carrée [51] définie dans la proposition suivante.

**Proposition 2.16.** *L'approximation de Padé de la racine carrée d'ordre  $N_p$  avec une rotation de branche d'angle  $\theta_p$  est donnée par :  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(z) > -1$ ,  $\forall j \in \{1; \dots; N_p\}$ ,  $z \neq -B_j^{-1}$ ,*

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} \approx e^{\iota \frac{\theta_p}{2}} R_{N_p}((1+z)e^{-\iota \theta_p} - 1) = C_0 + \sum_{\ell=1}^{N_p} \frac{A_\ell z}{1+B_\ell z}, \quad (2.90)$$

où  $R_{N_p}$  représente l'approximation de Padé d'ordre  $N_p$  à valeur réelle

$$R_{N_p} = 1 + \sum_{\ell=1}^{N_p} \frac{a_\ell z}{1+b_\ell z}, \quad (2.91)$$

et

$$C_0 = e^{\iota \frac{\theta_p}{2}} R_{N_p}(e^{-\iota \theta_p} - 1), \quad A_\ell = \frac{e^{-\iota \frac{\theta_p}{2}} a_\ell}{(1+b_\ell(e^{-\iota \theta_p} - 1))^2}, \quad B_\ell = \frac{e^{-\iota \theta_p} b_\ell}{1+b_\ell(e^{-\iota \theta_p} - 1)}, \quad (2.92)$$

avec

$$a_\ell = \frac{2}{2N_p+1} \sin^2 \left( \frac{\ell \pi}{2N_p+1} \right) \quad \text{et} \quad b_\ell = \cos^2 \left( \frac{\ell \pi}{2N_p+1} \right). \quad (2.93)$$

Remarquons que  $\theta_p$  et  $N_p$  sont des paramètres libres qui sont fixés dans les simulations numériques. L'utilisation de (2.90) nous permet d'introduire les approximations de Padé,

notées  $\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ , et définies par

$$\Lambda_{-,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq},N_p,\theta_p} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( C_0 \text{Id} + \sum_{\ell=1}^{N_p} A_\ell \mathcal{J} (\text{Id} + B_\ell \mathcal{J})^{-1} \right)^{-1} \left( \text{Id} - \text{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_\Gamma \right) \right) (\text{Id} \wedge \mathbf{n}), \quad (2.94)$$

$$\Lambda_{+,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq},N_p,\theta_p} = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \left( C_0 \text{Id} + \sum_{\ell=1}^{N_p} A_\ell \mathcal{J} (\text{Id} + B_\ell \mathcal{J})^{-1} \right)^{-1} \left( \text{Id} - \text{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_\Gamma \right) \right) (\text{Id} \wedge \mathbf{n}), \quad (2.95)$$

avec

$$\mathcal{J} = \nabla_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{div}_\Gamma \right) - \text{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_\Gamma \right). \quad (2.96)$$

Nous nous attendons à ce que les approximations (2.94) et (2.95) soient d'autant plus précises que  $N_p$  est grand. Dans [33], il est suggéré que la rotation de branche  $\theta_p$  optimale afin d'évaluer la racine carrée de manière précise est  $\frac{\pi}{2}$ . Comme les approximations de Padé sont décrites en partie par l'inverse d'opérateurs surfaciques locaux, l'implémentation de  $\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  peut être réalisée localement en introduisant des champs auxiliaires surfaciques (voir la Proposition 2.17). Il s'agit d'un point important puisque seules des matrices creuses à valeurs complexes apparaissent au niveau discret. Le coût mémoire est donc relativement faible.

La Proposition suivante présente les formulations variationnelles des opérateurs de transmission basées sur (2.89) et (2.94)-(2.95).

**Proposition 2.17.** *Les formulations faibles associées aux opérateurs de transmission de Taylor d'ordre zéro et de Padé sont respectivement définies, pour  $\mathbf{m} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  et pour toute fonction-test  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ , par*

$$\int_\Gamma \Lambda_{\pm,k,\mathcal{Z}}^0(\mathbf{m}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma = \int_\Gamma \mp \frac{1}{\mathcal{Z}} \mathbf{m} \wedge \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma \quad (2.97)$$

et

$$\int_\Gamma \Lambda_{\pm,k,\mathcal{Z}}^{\text{sq},N_p,\theta_p}(\mathbf{m}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma = \int_\Gamma \mp \frac{1}{\mathcal{Z}} \mathbf{r}_k \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma. \quad (2.98)$$

La fonction  $\mathbf{r}_k \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  est obtenue en résolvant le système suivant constitué de variables auxiliaires :

Trouver  $(\mathbf{r}_k, (\Psi_\ell)_{\ell \in \{1; \dots; N_p\}}, (\phi_\ell)_{\ell \in \{1; \dots; N_p\}}) \in \mathbb{W}$  tel que  $\forall (\mathbf{r}', (\Psi'_\ell)_{\ell \in \{1; \dots; N_p\}}, (\phi'_\ell)_{\ell \in \{1; \dots; N_p\}}) \in \mathbb{W}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Gamma C_0 \mathbf{r}_k \cdot \bar{\mathbf{r}}' \, d\Gamma - \int_\Gamma \mathbf{m} \wedge \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{r}}' \, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_\Gamma(\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}) \cdot \text{rot}_\Gamma(\bar{\mathbf{r}}') \, d\Gamma \\ \quad + \sum_{\ell=1}^{N_p} A_\ell \left( \int_\Gamma \nabla_\Gamma \phi_\ell \cdot \bar{\mathbf{r}}' \, d\Gamma - \int_\Gamma \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_\Gamma \Psi_\ell \cdot \text{rot}_\Gamma(\bar{\mathbf{r}}') \, d\Gamma \right) = \mathbf{0} \\ \int_\Gamma \Psi_\ell \cdot \bar{\Psi}'_\ell \, d\Gamma + B_\ell \left( \int_\Gamma \nabla_\Gamma \phi_\ell \cdot \bar{\Psi}'_\ell \, d\Gamma - \int_\Gamma \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_\Gamma \Psi_\ell \cdot \text{rot}_\Gamma(\bar{\Psi}'_\ell) \, d\Gamma \right) \\ \quad - \int_\Gamma \mathbf{r}_k \cdot \bar{\Psi}'_\ell \, d\Gamma = \mathbf{0} \quad \forall \ell \in \{1; \dots; N_p\} \\ \int_\Gamma \phi_\ell \cdot \bar{\phi}'_\ell \, d\Gamma + \int_\Gamma \frac{1}{k_\epsilon^2} \Psi_\ell \cdot \nabla_\Gamma \bar{\phi}'_\ell \, d\Gamma = 0 \quad \forall \ell \in \{1; \dots; N_p\} \end{array} \right. , \quad (2.99)$$

avec

$$\mathbb{W} := \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \times [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)]^{N_p} \times [\mathbf{H}^1(\Gamma)]^{N_p}.$$

**Preuve**

Soit  $\mathbf{r}_k \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  tel que

$$\mathbf{r}_k = \left( C_0 \mathbf{Id} + \sum_{\ell=1}^{N_p} A_\ell \mathcal{J} (\mathbf{Id} + B_\ell \mathcal{J})^{-1} \right)^{-1} \left( \mathbf{Id} - \text{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_\Gamma \right) \right) (\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}). \quad (2.100)$$

Il suffit ensuite d'introduire les variables auxiliaires  $(\Psi_\ell)_{\ell \in \{1, \dots, N_p\}} \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)]^{N_p}$  et  $(\phi_\ell)_{\ell \in \{1, \dots, N_p\}} \in [\mathbf{H}^1(\Gamma)]^{N_p}$  suivantes :

$$\Psi_\ell = (\mathbf{Id} + B_\ell \mathcal{J})^{-1} \mathbf{r}_k, \quad (2.101)$$

$$\phi_\ell = \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{div}_\Gamma(\Psi_\ell), \quad (2.102)$$

et d'utiliser les formules d'intégration par parties (1.14) et (1.15). ■

## 2.6 Formulation variationnelle du couplage faible

Dans cette section, nous présentons la formulation faible du couplage faible. Nous faisons dans un premier temps remarquer que plusieurs combinaisons possibles d'espaces fonctionnels peuvent être envisagées pour  $(\mathbf{g}_-, \mathbf{g}_+)$ , à savoir :

$$(\mathbf{g}_-, \mathbf{g}_+) \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)],$$

$$(\mathbf{g}_-, \mathbf{g}_+) \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)],$$

$$(\mathbf{g}_-, \mathbf{g}_+) \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)]$$

et

$$(\mathbf{g}_-, \mathbf{g}_+) \in [\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \times \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)].$$

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, le meilleur choix n'est pas évident. En effet, les opérateurs approchés de bas ordre (2.89) sont définis de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  vers  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ . De plus, nous supposons que les opérateurs de transmission de type Padé agissent de  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  vers  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  dans leur formulation faible (voir Proposition 2.17). Par conséquent, les champs  $\mathbf{g}_\pm$  n'appartiennent pas à  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  mais plutôt à l'espace hybride suivant :

$$\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) + \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma).$$

Ajouté à cela, la somme présente dans cet espace n'est pas directe. Pour contourner cette difficulté, une approche alternative, reposant sur la décomposition de Helmholtz [19, 22], a été utilisée dans [16]. Plus précisément, un champ  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  peut être décomposé comme suit :

$$\mathbf{u} = \nabla_\Gamma p + \text{rot}_\Gamma q, \quad \text{avec } p \in H_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \text{ et } q \in H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (2.103)$$

où les espaces  $H_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$  et  $H_0^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  sont des espaces de Sobolev à moyenne nulle sur  $\Gamma$  [57]. Cette décomposition permet ensuite de reformuler de manière équivalente le couplage faible FEM-BEM ou BEM-BEM en introduisant les nouvelles inconnues associées à la décomposition de Helmholtz. Cette approche souffre néanmoins de deux inconvénients : l'augmentation du

nombre d'inconnues et la difficulté à évaluer numériquement la décomposition de Helmholtz sur des surfaces ouvertes qui peuvent apparaître dans certaines applications industrielles.

Dans ce travail, nous nous penchons sur une approche plus naïve, celle de comparer les propriétés de convergence pour  $\mathbf{g}_\pm$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  ou  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ . Au niveau continu, nous rappelons que les espaces  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  et  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  sont mutuellement adjoints par rapport au produit scalaire  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$ . Cette dualité  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  ne vérifie cependant pas une condition inf-sup uniforme [19]. Au niveau discret, cela se traduit par une matrice résultant de ce produit scalaire  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma)$  non inversible. En effet, puisque les fonctions de forme  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  sont obtenues par une simple rotation de 90 degrés des fonctions de forme  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$  (ce point est abordé dans le Chapitre 3), la diagonale de la matrice est nulle [22]. Une solution simple pour éviter ce problème au niveau discret est d'utiliser des fonctions tests dans le même espace que les inconnues associées. C'est la raison pour laquelle nous introduisons la proposition suivante.

**Proposition 2.18.** *La formulation variationnelle du couplage faible (2.8) est définie par :*

*Trouver  $\mathbf{g}_\pm$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  (respectivement dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ) tel que pour toutes fonctions-test  $\mathbf{g}'_\pm$  dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$  (respectivement dans  $\mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ),*

$$\begin{cases} \int_\Gamma \mathbf{g}_- \cdot \overline{\mathbf{g}'_-} d\Gamma - \int_\Gamma \mathbf{g}_+ \cdot \overline{\mathbf{g}'_-} d\Gamma - \int_\Gamma (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_+ \mathbf{g}_+ \cdot \overline{\mathbf{g}'_-} d\Gamma = \mathbf{0} \\ \int_\Gamma \mathbf{g}_+ \cdot \overline{\mathbf{g}'_+} d\Gamma - \int_\Gamma \mathbf{g}_- \cdot \overline{\mathbf{g}'_+} d\Gamma + \int_\Gamma (\mathbf{T}_- + \mathbf{T}_+) \mathbf{R}_- \mathbf{g}_- \cdot \overline{\mathbf{g}'_+} d\Gamma = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.104)$$

Remarquons qu'afin de réaliser une discrétisation stable d'une telle dualité, une autre approche basée sur un raffinement barycentrique a été proposée par Buffa-Christiansen [12]. Cette approche alourdit néanmoins considérablement l'assemblage du problème.

## 2.7 Etude spectrale du couplage faible

Pour une étude complète du couplage faible électromagnétique, nous proposons de reprendre l'étude spectrale faite dans [16]. Cette étude nous permet de juger la qualité des approximations des opérateurs MtE introduites par rapport à la montée en fréquence et au contraste entre les sous-domaines au niveau continu. Pour ce faire, nous nous intéressons à la diagonalisation des opérateurs associés au couplage faible dans le cas de la boule unité centrée à l'origine  $\mathcal{B}_1$  de frontière  $\mathbb{S}$ . Nous supposons que  $\mathcal{B}_1$  est homogène de sorte que  $(k_-, \mathcal{Z}_-) \in [\mathbb{R}_+^*]^2$ .

### 2.7.1 Quelques résultats de diagonalisation

Nous commençons par rappeler quelques définitions nécessaires à la compréhension de la suite de l'étude.

**Définition 2.3.** *Les harmoniques sphériques scalaires d'ordre  $l$ , notées  $Y_l^m$ , sont les  $2l + 1$  fonctions de la forme*

$$Y_l^m(\theta; \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(l + 1/2)(l - m)!}{2\pi(l + m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2.105)$$

avec  $l \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \llbracket -l ; l \rrbracket$ ,  $\theta \in ]0; \pi[$ , et  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Les fonctions  $P_l^m(\cos \theta)$  correspondent aux fonctions associées de Legendre [2].

Remarquons que les harmoniques sphériques scalaires correspondent aux fonctions propres du laplacien surfacique scalaire  $\Delta_{\mathbb{S}}$  sur  $\Gamma$  ( $= \mathbb{S}$ ) [57]. Nous pouvons alors introduire les harmoniques sphériques vectorielles.

**Définition 2.4.** *Les harmoniques sphériques vectorielles d'ordre  $l$ , notées  $\mathbf{U}_l^m$  et  $\mathbf{V}_l^m$ , sont les  $6l + 3$  fonctions de la forme*

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad \forall m \in \llbracket -l ; l \rrbracket, \quad \begin{cases} \mathbf{U}_l^m = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \nabla_{\Gamma} Y_l^m \\ \mathbf{V}_l^m = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \text{rot}_{\Gamma} Y_l^m \end{cases}. \quad (2.106)$$

Les définitions introduites précédemment nous permettent d'énoncer le résultat suivant.

**Proposition 2.19.** *Les hamoniques sphériques vectorielles sont les fonctions propres de l'opérateur  $-\Delta_{\mathbb{S}}$  [57], i.e.*

$$-\Delta_{\mathbb{S}} \mathbf{U}_l^m = l(l+1) \mathbf{U}_l^m, \quad -\Delta_{\mathbb{S}} \mathbf{V}_l^m = l(l+1) \mathbf{V}_l^m. \quad (2.107)$$

Nous allons maintenant discuter de la diagonalisation des opérateurs surfaciques associés au couplage faible. Pour cela, nous utilisons à nouveau les harmoniques sphériques vectorielles. Celles-ci permettent en effet de diagonaliser les opérateurs intervenant dans le couplage faible.

**Proposition 2.20.** *Les fonctions  $\mathbf{V}_l^m$  et  $\mathbf{U}_l^m$  diagonalisent les opérateurs racine carrée (2.83)-(2.84), les approximations de Padé (2.94)-(2.95) ainsi que les approximations bas ordre (2.89) selon*

$$\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}}(\mathbf{U}_l^m) = \mp \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_{\epsilon}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}_l^m, \quad (2.108)$$

$$\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}}(\mathbf{V}_l^m) = \pm \frac{1}{\mathcal{Z}} \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_{\epsilon}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}_l^m, \quad (2.109)$$

$$\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}(\mathbf{U}_l^m) = \mp \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - \frac{B_i}{k_{\epsilon}^2} l(l+1) \right)^{-1} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{l(l+1)}{k_{\epsilon}^2} \right) \mathbf{V}_l^m, \quad (2.110)$$

$$\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}(\mathbf{V}_l^m) = \pm \left( R_0 - \sum_{i=1}^{N_p} \frac{A_i}{B_i} \left( 1 - \frac{B_i}{k_{\epsilon}^2} l(l+1) \right)^{-1} \right)^{-1} \mathbf{U}_l^m, \quad (2.111)$$

$$\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}^0(\mathbf{U}_l^m) = \mp \frac{1}{\mathcal{Z}} \mathbf{V}_l^m, \quad (2.112)$$

$$\Lambda_{\pm, k, \mathcal{Z}}^0(\mathbf{V}_l^m) = \pm \frac{1}{\mathcal{Z}} \mathbf{U}_l^m. \quad (2.113)$$

**Preuve**

Il suffit d'utiliser la Proposition 2.19 et les relations (1.8)-(1.13). ■

Pour une question de généralité, nous introduisons la nouvelle notation suivante :

$$\mathbf{T}_{\pm} \mathbf{U}_l^m = t_{l, \mathbf{U}}^{\pm} \mathbf{V}_l^m, \quad \mathbf{T}_{\pm} \mathbf{V}_l^m = t_{l, \mathbf{V}}^{\pm} \mathbf{U}_l^m. \quad (2.114)$$

Expliquons à présent comment résoudre les problèmes intérieur (2.6) et extérieur (2.7).

**Proposition 2.21.** Soit  $h_l^1$  et  $j_l$  respectivement les fonctions de Hankel sphériques de première espèce et les fonctions de Bessel sphériques de première espèce, avec  $l \in \mathbb{N}^*$  [2]. Nous avons alors les expressions suivantes des champs solutions des problèmes intérieur (2.6) et extérieur (2.7) :

$$\mathbf{E}_- = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_{-,l}^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(k_- r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \alpha_{-,l}^m \frac{(r j_l(k_- r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \beta_{-,l}^m j_l(k_- r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \quad (2.115)$$

$$\mathbf{H}_- = \frac{1}{ik_- \mathcal{Z}_-} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_{-,l}^m \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(k_- r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \beta_{-,l}^m \frac{(r j_l(k_- r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + k_-^2 \alpha_{-,l}^m j_l(k_- r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \quad (2.116)$$

$$\mathbf{E}_+ = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \alpha_{+,l}^m \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(k_+ r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \alpha_{+,l}^m \frac{(r h_l^1(k_+ r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + \beta_{+,l}^m h_l^1(k_+ r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \quad (2.117)$$

$$\mathbf{H}_+ = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \frac{1}{ik_+ \mathcal{Z}_+} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left( \beta_{+,l}^m \sqrt{l(l+1)} \frac{h_l^1(k_+ r)}{r} Y_l^m(\theta; \varphi) \mathbf{e}_r + \beta_{+,l}^m \frac{(r h_l^1(k_+ r))'}{r} \mathbf{U}_l^m(\theta; \varphi) + k_+^2 \alpha_{+,l}^m h_l^1(k_+ r) \mathbf{V}_l^m(\theta; \varphi) \right), \quad (2.118)$$

où

$$\mathbf{g}_- = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-1}^l g_{-,l}^m \mathbf{U}_l^m + s_{-,l}^m \mathbf{V}_l^m, \quad (2.119)$$

$$\mathbf{g}_+ = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=-1}^l g_{+,l}^m \mathbf{U}_l^m + s_{+,l}^m \mathbf{V}_l^m, \quad (2.120)$$

$$\alpha_{-,l}^m = \frac{g_{-,l}^m}{(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- \mathcal{Z}_-^{-1} j_l(k_-)}, \quad (2.121)$$

$$\beta_{-,l}^m = \frac{s_{-,l}^m}{\frac{1}{ik_- \mathcal{Z}_-} (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) - j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^-}, \quad (2.122)$$

$$\alpha_{+,l}^m = \frac{g_{+,l}^m}{ik_+ \mathcal{Z}_+^{-1} h_l^1(k_+) - (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) t_{l,\mathbf{V}}^+}, \quad (2.123)$$

$$\beta_{+,l}^m = \frac{s_{+,l}^m}{\frac{1}{ik_+ \mathcal{Z}_+} (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) + h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+}. \quad (2.124)$$

### Preuve

Il suffit d'utiliser la solution modale des systèmes de Maxwell hamoniques intérieur et extérieur (voir [16]) et les conditions au bord  $\mathbf{g}_\pm = \boldsymbol{\gamma}_t^\pm \mathbf{H} \mp \mathbf{T}_\pm \boldsymbol{\gamma}_t^\pm \mathbf{E}$ . ■

L'utilisation directe de la Proposition 2.21 nous permet d'obtenir le résultat de diagonalisation de la partie linéaire par rapport à  $\mathbf{g}_\pm$  (sources physiques nulles) des opérateurs de résolution.



**Proposition 2.22.** Les opérateurs  $\widetilde{\mathbf{R}}_-$  et  $\widetilde{\mathbf{R}}_+$  sont diagonalisables par les fonctions  $\mathbf{U}_l^m$  et  $\mathbf{V}_l^m$  comme suit :

$$\widetilde{\mathbf{R}}_- \mathbf{U}_l^m = \frac{j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)}{(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- \mathcal{Z}^{-1} j_l(k_-)} \mathbf{V}_l^m, \quad (2.125)$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_- \mathbf{V}_l^m = \frac{j_l(k_-)}{j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^- - \frac{1}{ik_- \mathcal{Z}^-} (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-))} \mathbf{U}_l^m, \quad (2.126)$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_+ \mathbf{U}_l^m = \frac{h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)}{-(h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) t_{l,\mathbf{V}}^+ + ik_+ \mathcal{Z}_+^{-1} h_l^1(k_+)} \mathbf{V}_l^m, \quad (2.127)$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_+ \mathbf{V}_l^m = -\frac{h_l^1(k_+)}{h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+ + \frac{1}{ik_+ \mathcal{Z}_+} (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+))} \mathbf{U}_l^m. \quad (2.128)$$

Enfin, nous présentons ci-dessous, les résultats de diagonalisation de  $\widetilde{\mathbf{S}}_-$ ,  $\widetilde{\mathbf{S}}_+$  et  $\widetilde{\mathbf{S}}_\pi$ .

**Proposition 2.23.** Les opérateurs  $\widetilde{\mathbf{S}}_-$  et  $\widetilde{\mathbf{S}}_+$  sont diagonalisables par les fonctions  $\mathbf{U}_l^m$  et  $\mathbf{V}_l^m$  selon

$$\widetilde{\mathbf{S}}_- \mathbf{U}_l^m = \left( 1 - \frac{(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) (t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- \mathcal{Z}^{-1} j_l(k_-)} \right) \mathbf{U}_l^m, \quad (2.129)$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}_- \mathbf{V}_l^m = \left( 1 - \frac{j_l(k_-) (t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^- - \frac{1}{ik_- \mathcal{Z}^-} (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-))} \right) \mathbf{V}_l^m, \quad (2.130)$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}_+ \mathbf{U}_l^m = \left( 1 + \frac{(h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) (t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{-(h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) t_{l,\mathbf{V}}^+ + ik_+ \mathcal{Z}_+^{-1} h_l^1(k_+)} \right) \mathbf{U}_l^m, \quad (2.131)$$

$$\widetilde{\mathbf{S}}_+ \mathbf{V}_l^m = \left( 1 - \frac{h_l^1(k_+) (t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+ + \frac{1}{ik_+ \mathcal{Z}_+} (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+))} \right) \mathbf{V}_l^m. \quad (2.132)$$

Il s'ensuit que les valeurs propres de  $\widetilde{\mathbf{S}}_\pi$  sont données par

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt{1 - \frac{(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) (t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)) t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- \mathcal{Z}^{-1} j_l(k_-)}} \\ & \quad \times \sqrt{1 + \frac{(h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) (t_{l,\mathbf{V}}^- + t_{l,\mathbf{V}}^+)}{-(h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)) t_{l,\mathbf{V}}^+ + ik_+ \mathcal{Z}_+^{-1} h_l^1(k_+)}} \end{aligned} \quad (2.133)$$

et

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt{1 - \frac{j_l(k_-) (t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^- - \frac{1}{ik_- \mathcal{Z}^-} (j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-))}} \\ & \quad \times \sqrt{1 - \frac{h_l^1(k_+) (t_{l,\mathbf{U}}^- + t_{l,\mathbf{U}}^+)}{h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+ + \frac{1}{ik_+ \mathcal{Z}_+} (h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+))}}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

### Preuve

La Proposition 2.22 et la diagonalisation des opérateurs de transmission (2.114) permettent de déduire les résultats de diagonalisation associés à  $\widetilde{\mathbf{S}}_\pm$ .

Nous cherchons à présent  $\eta \in \mathbb{C}^*$  tel qu'il existe  $(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2) \in [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)] \setminus \{(\mathbf{0}; \mathbf{0})\}$  vérifiant

$$\tilde{\mathbf{S}}_\pi \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_+ \\ \tilde{\mathbf{S}}_- & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{S}}_+ \tilde{\mathbf{S}}_- \mathbf{v}_1 = \eta^2 \mathbf{v}_1. \quad (2.135)$$

Nous désignons par  $V_p(\cdot)$  les valeurs propres d'un opérateur. Comme  $\tilde{\mathbf{S}}_+$  et  $\tilde{\mathbf{S}}_-$  sont diagonalisables dans la même base, nous en déduisons que  $V_p(\tilde{\mathbf{S}}_\pi) = \pm \sqrt{V_p(\tilde{\mathbf{S}}_- \tilde{\mathbf{S}}_+)}$ . ■

## 2.7.2 Etude de la convergence du couplage faible

Dans cette partie, nous évaluons graphiquement la qualité des approximations des opérateurs MtE. Pour cela, nous utilisons les expressions analytiques des valeurs propres de  $\mathcal{A}$  présentées précédemment. L'utilisation de ces résultats nous permet d'assembler une matrice diagonale constituée des premières valeurs propres de  $\mathcal{A}$ . Nous choisissons de considérer uniquement les 100 premières valeurs propres. Nous réalisons par ailleurs une moyenne de 100 exécutions de la procédure GMRES avec des seconds membres  $\mathbf{b}$  aléatoires. Les figures des tests semi-numériques/semi-analytiques que nous présentons ont toutes été obtenues en fixant la tolérance GMRES pour la résolution du couplage faible (2.32) à  $10^{-6}$ . Naturellement, nous nous attendons à ce que la vitesse de convergence de la procédure GMRES soit dépendante des opérateurs de transmission sélectionnés. L'objectif est de trouver un couple d'opérateurs de transmission permettant la résolution du couplage faible en un nombre raisonnable d'itérations GMRES. D'autre part, nous nous intéressons au cas où le couplage faible est optimisé et donc au cas où les opérateurs de transmission correspondent à (2.50). Nous désignons par  $(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+)$  les opérateurs de transmission sélectionnés. Nous rappelons que

$$k_- = \delta k_+, \quad \mathcal{Z}_- = \mathcal{Z}_0 / \delta, \quad \mathcal{Z}_+ = \mathcal{Z}_0. \quad (2.136)$$

La convergence du couplage faible n'est alors paramétrée que par  $\delta$  et  $k_+$ . Le paramètre  $\delta$  permet d'étudier l'influence du contraste entre les deux sous-domaines sur la convergence du couplage faible alors que  $k_+$  permet d'étudier l'effet de la fréquence (lorsque  $\delta$  est fixé) sur la convergence.

### Influence des paramètres de Padé sur la convergence du couplage faible

Avant de comparer la qualité des différentes approximations des opérateurs MtE, nous étudions dans un premier temps l'influence des paramètres de Padé  $N_p$  et  $\theta_p$  sur la convergence du couplage faible pour  $(-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,\mathcal{Z}_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,\mathcal{Z}_-}^{\text{sq},N_p,\theta_p})$ . Nous reportons dans la Figure 2.1 le nombre d'itérations GMRES en fonction du nombre d'onde extérieur pour plusieurs paires de paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  lorsque  $\delta = 4$ . Dans la Figure 2.2, nous analysons le nombre d'itérations GMRES en fonction de  $\delta$  pour plusieurs paires de paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  lorsque  $k_+ = 1$ . Nous traçons dans les deux figures une courbe de référence représentant le cas où nous choisissons la paire  $(-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,\mathcal{Z}_+}^{\text{sq}}; \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,\mathcal{Z}_-}^{\text{sq}})$ . Nous observons que le fait de fixer  $\theta_p$  à  $\frac{\pi}{2}$  permet d'avoir la meilleure convergence (très proche de la courbe de référence) et donc de rendre les approximations de Padé très précises. Nous remarquons toutefois que ce résultat n'est valable qu'à haute fréquence. En effet, à basse fréquence nous constatons clairement un manque de précision. Rappelons que les problèmes à haute fréquence sont néanmoins les cas d'intérêts de ce travail de recherche. Nous observons que  $N_p = 4$  termes semble suffire pour les approximations de Padé. Par conséquent, dans la suite de l'étude, nous considérons toujours que  $\theta_p = \frac{\pi}{2}$  et  $N_p = 4$ . Dans les deux figures, nous remarquons cependant la

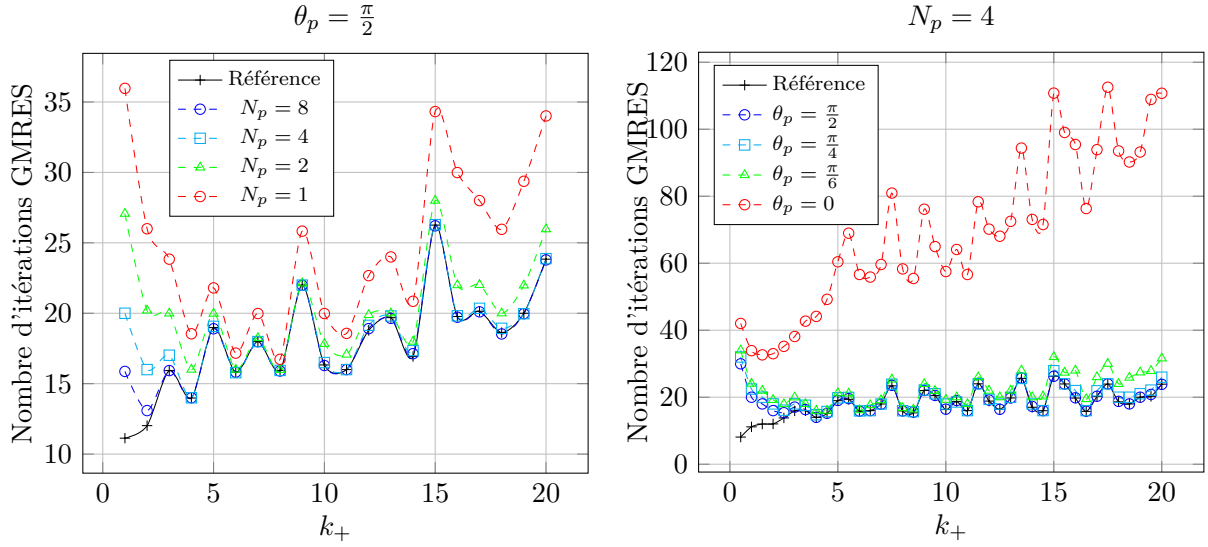
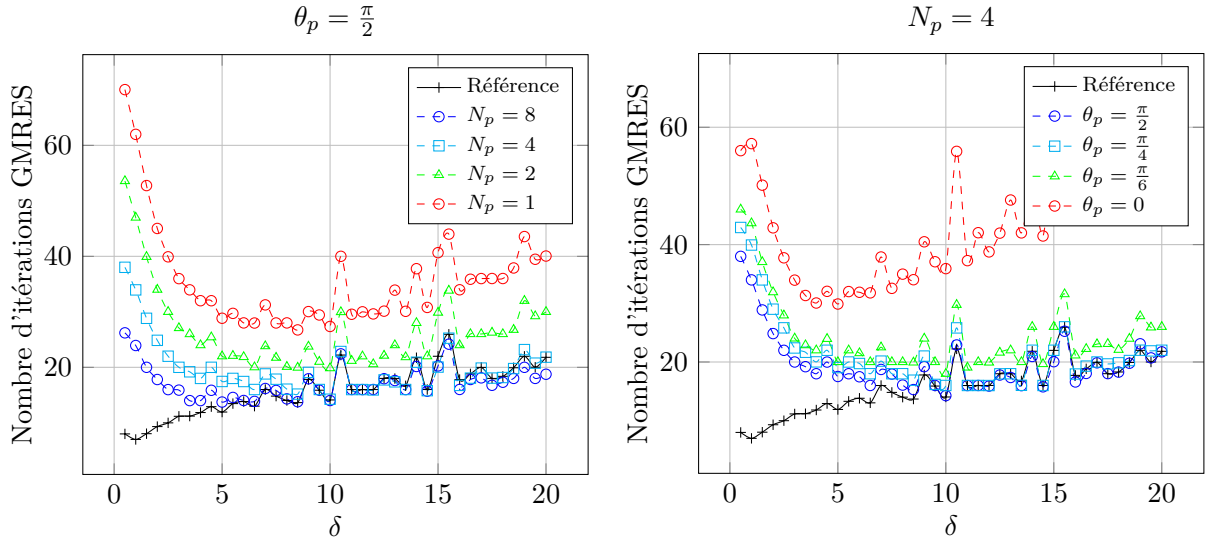


FIGURE 2.1 – Influence des paramètres de Padé sur la convergence GMRES du couplage faible en fonction du nombre d'onde extérieur


 FIGURE 2.2 – Influence des paramètres de Padé sur la convergence GMRES du couplage faible optimisé en fonction de  $\delta$ 

présence de quelques pics caractérisant les problèmes de résonance du couplage faible [16]. Nous reviendrons plus en détails sur ce point.

### Influence des opérateurs de transmission sur la convergence du couplage faible

Nous allons à présent discuter de la pertinence pratique du couplage faible. Pour cela, nous jugeons de la qualité des approximations de Padé et de Taylor d'ordre zéro selon le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la convergence du couplage faible. En effet, plus les opérateurs de transmission correspondent à des approximations précises des opérateurs optimaux (2.50) plus le nombre d'itérations GMRES est faible. Dans le but d'alléger les figures, nous simplifions les notations :  $\Lambda_{\pm}^0 := \Lambda_{\pm, k_{\pm}, \mathcal{Z}_{\pm}}^0$  et  $\Lambda_{\pm}^{\text{sq}} := \Lambda_{\pm, k_{\pm}, \mathcal{Z}_{\pm}}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ . Nous considérons toutes les paires possibles. La Figure 2.3 présente l'évolution des résidus relatifs en fonction du nombre d'itérations GMRES lorsque  $k_{+} = 20$  et  $\delta = 4$ . Nous constatons que

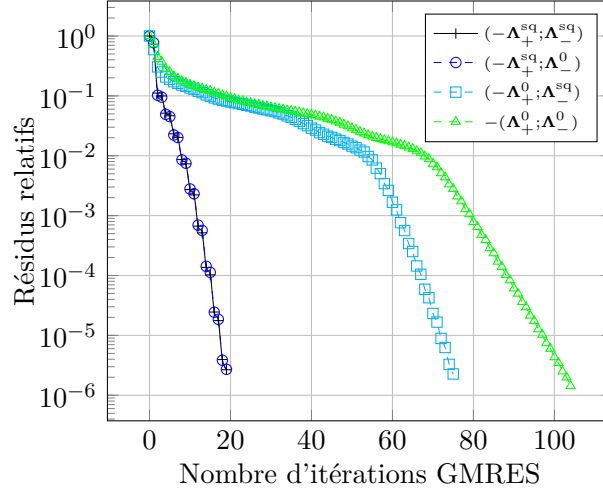


FIGURE 2.3 – Evolution des résidus pour différents types d'opérateurs de transmission

la convergence est optimale lorsque nous choisissons une approximation précise pour  $\mathbf{T}_-$ , à savoir  $-\Lambda_+^{\text{sq}}$ . Ainsi, les paires d'approximations les plus intéressantes sont les suivantes :

$$(-\Lambda_+^{\text{sq}}; \Lambda_-^{\text{sq}}), \quad (-\Lambda_+^{\text{sq}}; \Lambda_-^0). \quad (2.137)$$

Nous avons déjà relevé ce point auparavant. En effet, contrairement à l'opérateur  $\Lambda_{+,k_+,z_+}$ ,  $\Lambda_{-,k_-,z_-}$  est un opérateur fortement non local. L'approximation de ce dernier reste donc limitée, ce qui impacte directement le spectre de l'opérateur d'itération  $\mathbf{Id} - \mathcal{A}$  et donc la vitesse de convergence GMRES. Comme  $\Lambda_+^{\text{sq}}$  est une approximation précise de  $\Lambda_{+,k_+,z_+}$ , l'opérateur  $\mathcal{A}$  est quasi-nilpotent. Pour illustrer ce point, nous reportons la distribution des valeurs propres de  $\mathbf{Id} - \mathcal{A}$  dans la Figure 2.4. Nous constatons un regroupement des valeurs propres autour du point  $(1, 0)$  conduisant à une convergence rapide de la procédure GMRES. De plus, nous remarquons que le spectre de l'opérateur  $\mathbf{Id} - \mathcal{A}$  est identique quelle que soit

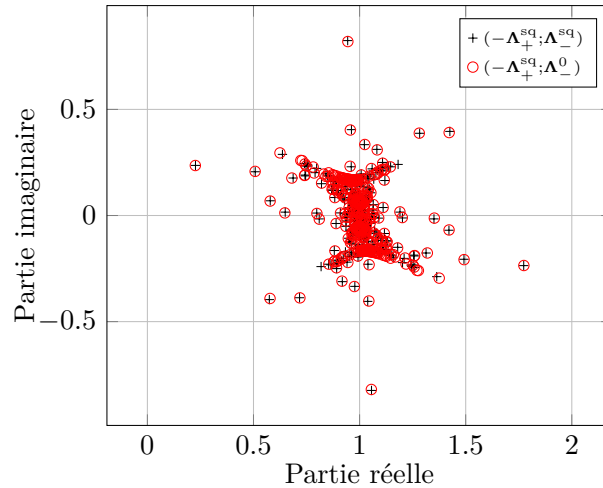


FIGURE 2.4 – Distribution des valeurs propres de  $\mathbf{Id} - \mathcal{A}$  dans le plan complexe

la paire (2.137) choisie. Cela explique pourquoi les courbes de convergence dans la Figure 2.4 des deux paires (2.137) sont confondues. D'un point de vue pratique, il est bien plus intéressant de sélectionner la paire  $(-\Lambda_+^{\text{sq}}; \Lambda_-^0)$  qui permet en effet de réduire le coût de calcul moyen de chaque itération de GMRES. Par ailleurs, il est important de noter qu'en général, pour des matrices non-normales, l'étude de la convergence de GMRES sur la seule

base de la distribution des valeurs propres de  $\mathbf{Id} - \mathcal{A}$  n'est pas suffisante [30, 34]. Il serait en effet intéressant de réaliser une étude complémentaire en évaluant numériquement l'image numérique (field of values) [29, 38] ou le pseudo-spectre [69] de ce dernier.

Afin de valider la hiérarchisation des approximations en termes de qualité faite plus haut, nous étudions l'influence de  $k_+$  et  $\delta$  sur la convergence du couplage faible. Nous présentons dans la Figure 2.5, l'influence de  $\delta$  et  $k_+$  sur la convergence du couplage faible. Nous arrivons à la même conclusion qu'auparavant : les paires (2.137) conduisent à la plus faible dépendance des itérations GMRES par rapport à la fréquence et au contraste entre les deux sous-domaines. Par ailleurs, pour certains couples  $(\delta; k_+)$  spécifiques, nous constatons une augmentation des itérations GMRES tout en conduisant néanmoins à une méthode convergente vers une solution correcte. Ce phénomène de résonance du couplage faible correspond concrètement au caractère mal posé [16] des sous-problèmes, ce qui est précisé dans le résultat suivant.

**Proposition 2.24.** *Les conditions suivantes sont nécessaires au caractère bien posé des sous-problèmes,  $\forall l \in \mathbb{N}^*$  :*

$$\left(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)\right) t_{l,\mathbf{V}}^- + ik_- \mathcal{Z}_-^{-1} j_l(k_-) \neq 0, \quad (2.138)$$

$$\frac{1}{ik_- \mathcal{Z}_-} \left(j_l(k_-) + k_- j_l'(k_-)\right) - j_l(k_-) t_{l,\mathbf{U}}^- \neq 0, \quad (2.139)$$

$$ik_+ \mathcal{Z}_+^{-1} h_l^1(k_+) - \left(h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)\right) t_{l,\mathbf{V}}^+ \neq 0, \quad (2.140)$$

$$\frac{1}{ik_+ \mathcal{Z}_+} \left(h_l^1(k_+) + k_+ h_l^{1'}(k_+)\right) + h_l^1(k_+) t_{l,\mathbf{U}}^+ \neq 0. \quad (2.141)$$

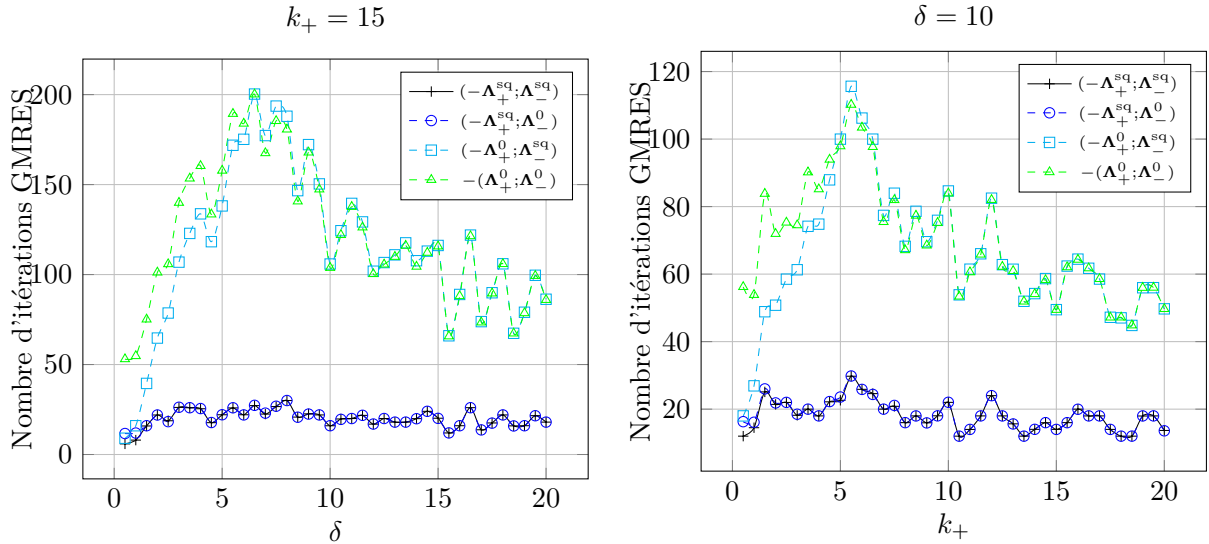


FIGURE 2.5 – Evolution du nombre d'itérations GMRES en fonction de  $\delta$  (à gauche) et  $k_+$  (à droite) pour le couplage faible

Lorsque les conditions présentées dans la Proposition 2.24 ne sont pas vérifiées, les opérateurs de résolution deviennent mal conditionnés. Ce qui a pour effet de dégrader le spectre de  $\mathcal{A}$  et par conséquent une mauvaise convergence GMRES du couplage faible pour le couple  $(\delta; k_+)$  en question. Nous verrons dans le cas discret (et ne fonctionnant que dans ce cas là) qu'un choix alternatif qui apparaît moins naturel, consiste plutôt à étendre de manière fictive le problème extérieur en  $\Omega_-$  en fixant  $\mathbf{T}_+ = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}$ . Cela conduit à une meilleure convergence pour ces couples spécifiques  $(\delta; k_+)$ , plus particulièrement pour le

cas des contrastes élevés, et ceci même avec une approximation de Taylor d'ordre zéro de  $\mathbf{T}_+$ .

L'étude spectrale menée dans cette section nous a confirmé la pertinence pratique du couplage faible. Nous avons montré qu'en régime haute fréquence, les propriétés de convergence sont très similaires lorsque nous utilisons des approximations de type Padé ou de Taylor d'ordre zéro pour  $\mathbf{T}_+$ . De plus, nous avons constaté qu'il est beaucoup plus judicieux de considérer une approximation précise de  $\mathbf{T}_-$ . Le nombre d'itérations GMRES avec ces approximations est faible, et peu dépendant de la fréquence et du contraste entre les deux sous-domaines. Par conséquent, dans la suite de la thèse, nous limitons notre étude aux approximations d'ordre zéro de  $\mathbf{T}_+$ .

Dans le prochain chapitre, nous abordons la question de la résolution numérique du couplage faible FEM-BEM afin de valider ces résultats pour différentes géométries.

# Mise en œuvre numérique

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Discrétisation du couplage FEM-BEM . . . . .</b>	<b>59</b>
3.1.1	Construction des fonctions de forme locales . . . . .	59
3.1.2	Construction des éléments finis globaux . . . . .	61
3.1.3	Orientation des éléments finis globaux . . . . .	62
3.1.4	Discrétisation des formulations variationnelles . . . . .	63
<b>3.2</b>	<b>Algorithme discret du couplage faible FEM-BEM . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.3</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>70</b>
3.3.1	Cas homogène lorsque $\mathbf{g}_{+,h} \in \mathbf{V}_{h,0}$ et $\mathbf{g}_{-,h} \in \mathbf{V}_{h,\beta}$ . . . . .	70
3.3.2	Comparaison des différents choix d'espace pour $\mathbf{g}_{+,h}$ et $\mathbf{g}_{-,h}$ dans le cas homogène . . . . .	79
3.3.3	Cas inhomogène . . . . .	83

---





## 3.1 Discrétisation du couplage FEM-BEM

Dans ce travail de recherche, nous considérons une approximation de  $\Omega_-$  par un domaine de calcul  $\Omega_h$  composé de  $n_t$  éléments tétraédriques avec  $n_f$  faces,  $n_e$  arêtes et  $n_v$  noeuds. La frontière  $\Gamma_h$  de  $\Omega_h$  fait intervenir  $n_t^\partial$  triangles,  $n_e^\partial$  arêtes et  $n_v^\partial$  noeuds. Un élément géométrique (triangle ou tétraèdre) est noté  $K$ . Nous considérons les sous-espaces d'approximation polynômiaux par morceaux notés  $\mathbf{Z}_{h,p} \subset \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma)$ ,  $\mathbf{V}_{h,p} \subset \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)$ ,  $\mathbf{W}_{h,p} \subset \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-)$  et  $Q_h \subset H^1(\Gamma)$ , définis par

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_{h,p} &= \{\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Gamma, \Gamma) \mid \mathbf{u}_{h|_K} \in [P^p(K)]^3 \forall K \in \Gamma_h\}, \\ \mathbf{V}_{h,p} &= \{\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \mid \mathbf{u}_{h|_K} \in [P^p(K)]^3 \forall K \in \Gamma_h\}, \\ \mathbf{W}_{h,p} &= \{\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_-) \mid \mathbf{u}_{h|_K} \in [P^p(K)]^3 \forall K \in \Omega_h\}, \\ Q_h &= \{u_h \in H^1(\Gamma) \mid u_{h|_K} \in P^1(K) \forall K \in \Gamma_h\},\end{aligned}$$

où  $P^p(K)$  désigne l'espace des polynômes par morceaux d'ordre  $p \in \mathbb{N}$ . La discrétisation des équations intégrales surfaciques est basée sur la méthode de Galerkin avec éléments de frontière. D'autres approches peuvent être utilisées comme, par exemple, les techniques de collocation et de Nyström [23]. Contrairement à la méthode des éléments finis volumiques, la BEM bénéficie d'une faible dispersion numérique. En effet, comme nous l'avons auparavant mentionné, la solution fondamentale des équations de Maxwell est explicitement prise en compte dans les formulations intégrales. Par conséquent, des polynômes d'approximation de bas ordre (généralement des fonctions linéaires) peuvent être utilisés. Inversement, il est bien connu qu'une erreur de dispersion numérique apparaît dans la solution provenant de la FEM lorsque la fréquence devient élevée [43, 44, 55]. En conséquence, la taille caractéristique du maillage  $h$  doit être ajustée selon le nombre d'onde  $k$ . Une alternative à cette approche est d'augmenter l'ordre des éléments finis.

Dans cette section, nous allons dans un premier temps expliquer comment construire des fonctions de forme d'ordre élevé avant de présenter la discrétisation des couplages fort et faible FEM-BEM.

### 3.1.1 Construction des fonctions de forme locales

Nous commençons par présenter l'idée générale pour la construction d'une base locale des espaces d'approximation sur l'élément de référence  $\hat{K}$  (triangle en 2D ou tétraèdre en 3D). Pour une question de performance, les fonctions de forme locales doivent être construites à l'aide de polynômes dont le support est petit. Ici, nous utilisons une telle stratégie basée sur des éléments finis hiérarchiques d'ordre élevé proposée dans [70]. Parmi les fonctions de forme hiérarchiques, l'un des choix les plus populaires est celui des fonctions de forme de Lobatto [70]. Dans le cas où nous considérons le sous-espace  $\mathbf{W}_{h,p}$ , trois différents types de fonctions de forme vectorielles peuvent être définis, à savoir les fonctions d'arête, de face et bulles, alors que dans le cas du sous-espace  $\mathbf{Z}_{h,p}$ , nous considérons uniquement les fonctions d'arête et bulles. Plus précisément, nous utilisons les appellations suivantes pour les fonctions de forme :

- Fonction d'arête : une fonction de forme associée à une arête  $i$  est appelée fonction d'arête si sa trace tangentielle est nulle sur toute arête différente de l'arête  $i$ .
- Fonction de face : une fonction de forme associée à une face  $i$  est appelée fonction de face si sa trace tangentielle est nulle sur toute face différente de la face  $i$ .

- Fonction bulle : une fonction de forme associée à un élément est appelée fonction bulle si sa trace tangentielle est nulle sur toute la frontière de ce dernier.

La Figure 3.1 donne deux exemples pour le cas 2D. Comme les éléments du maillage représentent le support pour ces fonctions de forme, le système linéaire final est par conséquent creux.

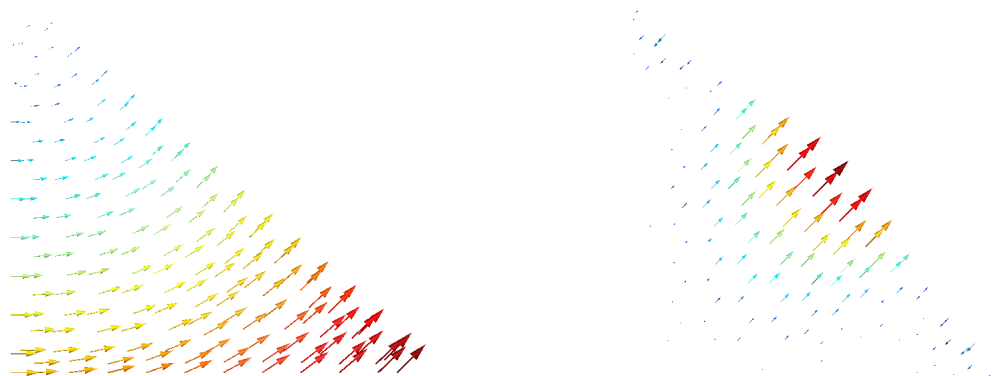


FIGURE 3.1 – Exemple d’une fonction d’arête (à gauche) et d’une fonction bulle (à droite) pour l’élément triangle de référence

Il est important de noter que l’utilisation des fonctions de forme hiérarchiques présente plusieurs avantages. Il a été démontré [70] qu’elles fournissent de bonnes performances tout en étant bien conditionnées. De plus, leur nature hiérarchique implique que les fonctions de forme d’ordre  $p+1$  sont obtenues à partir des fonctions de forme d’ordre  $p$  en ajoutant seulement de nouvelles fonctions de forme. Contrairement aux éléments finis de type Lagrange où nous avons besoin de remailler pour augmenter l’ordre des éléments finis. Ainsi, comme nous le verrons dans la section 3.1.4, il est possible de coupler très aisément les éléments finis d’ordre élevé et d’ordre bas. Aussi, nous pouvons appliquer la condensation statique pour les fonctions bulles [70] et donc réduire la taille du système à résoudre. Le nombre de fonctions de forme vectorielles locales associées à l’élément triangle pour l’espace  $\mathbf{Z}_{h,p}$  et à l’élément tétraèdre pour l’espace  $\mathbf{W}_{h,p}$  est présenté dans le Table 3.1. D’autre part, nous

Type de fonction	Ordre polynômial $p \in \mathbb{N}$	Nombre de fonctions de forme
Triangle		
Arête	$2 > p$	$3(p+1)$
Arête	$2 \leq p < 3$	$6p-2$
Bulle	$3 \leq p$	$(p-1)(p+1)$
Tétraèdre		
Arête	$2 > p$	$6(p+1)$
Arête	$2 \leq p < 3$	$18p-6$
Face	$3 \leq p$	$6(p-1)(p+1)$
Bulle	$4 \leq p$	$(p-1)(p-2)(p+1)/2$

TABLE 3.1 – Nombre de fonctions de forme hiérarchiques pour les éléments triangle et tétraèdre selon l’ordre polynômial

aurons besoin d’une base locale polynômiale d’ordre 1 de  $Q_h$ . La construction de celle-ci est plutôt familière. Elle est simplement définie par des fonctions de noeud (3 fonctions de forme locales pour le triangle). Plus précisément, une fonction de forme associée au noeud

$i$  est appelée fonction de noeud si elle est nulle sur tous les noeuds différents de  $i$ . Enfin, il suffit de remarquer qu'une simple rotation de 90 degrés (caractérisée par l'opération  $\cdot \wedge \mathbf{n}$ ) des fonctions de forme locales de  $\mathbf{Z}_{h,p}$  est une base locale de  $\mathbf{V}_{h,p}$ .

### 3.1.2 Construction des éléments finis globaux

Un ingrédient clé dans la conception d'une FEM est l'idée qu'un élément physique  $K$  est défini comme une transformation affine d'un élément de référence  $\hat{K}$ . De ce fait, tous les calculs peuvent se ramener à des calculs sur l'élément de référence. Nous notons

$$\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K$$

cette transformation affine. La Figure 3.2 illustre cette procédure pour le cas 2D. Celle-ci

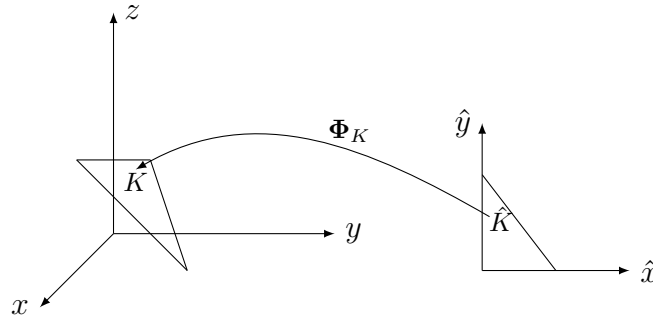


FIGURE 3.2 – Transformation géométrique du triangle de référence  $\hat{K}$  au triangle physique  $K$

doit être  $\mathcal{C}^1(\hat{K})$  et bijective [54]. Si  $\hat{\mathbf{x}}$  désigne les coordonnées d'un point sur l'élément de référence, alors

$$\mathbf{x} = \Phi_K(\hat{\mathbf{x}}) \quad (3.1)$$

correspond aux coordonnées sur l'élément du maillage  $K$ . La matrice jacobienne de la transformation  $\Phi_K$  par rapport aux coordonnées de référence et son déterminant sont donnés par

$$J_K(\hat{\mathbf{x}}) := \left( \frac{\partial \Phi_{K,i}}{\partial \hat{x}_j}(\hat{\mathbf{x}}) \right)_{1 \leq i,j \leq 3} \quad \text{et} \quad \det(J_K). \quad (3.2)$$

Nous allons à présent expliquer comment décrire un champ défini sur un élément physique à partir de l'élément de référence en utilisant (3.2). La stratégie classique que nous allons rappeler dépend de la nature du champ.

**Proposition 3.1.** *Il est possible de montrer [54] les résultats suivants :*

- Si  $u \in H^1(K)$  et  $\hat{u} \in H^1(\hat{K})$  alors

$$u := \hat{u} \circ \Phi_K^{-1}, \quad \nabla u := J_k^{-T} \hat{\nabla} \hat{u} \circ \Phi_K^{-1}. \quad (3.3)$$

- Si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, K)$  et  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \hat{K})$  alors

$$\mathbf{u} := J_k^{-T} \hat{\mathbf{u}} \circ \Phi_K^{-1}, \quad \text{rot } \mathbf{u} := \frac{J_K \hat{\text{rot}} \hat{\mathbf{u}} \circ \Phi_K^{-1}}{\det(J_K)} \quad (\text{en 3D}), \quad (3.4)$$

$$\text{rot}_\Gamma \mathbf{u} := \frac{\hat{\text{rot}}_\Gamma \hat{\mathbf{u}} \circ \Phi_K^{-1}}{\det(J_K)} \quad (\text{en 2D}). \quad (3.5)$$

- Si  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, K)$  et  $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \hat{K})$  alors

$$\mathbf{v} := J_k^{-1} F_K \hat{\mathbf{v}} \circ \Phi_K^{-1}, \quad \text{div}_\Gamma \mathbf{v} := \frac{\text{div}_\Gamma \hat{\mathbf{v}} \circ \Phi_K^{-1}}{\det(J_K)}. \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Orientation des éléments finis globaux

Contrairement aux éléments finis classiques de type Lagrange, les éléments finis hiérarchiques d'ordre élevé ne se réfèrent plus à des évaluations nodales. C'est pourquoi, afin de s'assurer de la continuité de la composante tangentielle (pour  $\mathbf{Z}_{h,p}$  et  $\mathbf{W}_{h,p}$ ) et de la composante normale (pour  $\mathbf{V}_{h,p}$ ) des fonctions de forme globales sur les interfaces des éléments (arêtes et faces), l'orientation des arêtes et des faces est primordiale. Ainsi, la conformité des espaces globaux est respectée. Il existe deux approches afin de prendre en compte l'orientation :

- Introduire une orientation globale unique des arêtes et des faces qui est aussi valable au niveau local (voir [74] pour plus de détails).
- Prendre en compte l'orientation locale des arêtes et des faces dans l'assemblage global.

Nous faisons au préalable remarquer que les fonctions de forme locales ont été définies dans [70] selon une orientation locale des arêtes et des faces, et cohérentes entre les éléments de référence (entre les éléments de référence triangle et tétraèdre par exemple). Nous devons à présent attribuer à chaque arête et chaque face des éléments physiques une orientation globale. Ces orientations n'ont pas besoin d'être stockées explicitement car elles peuvent facilement être récupérées à partir de la numérotation globale unique des noeuds. Nous rappelons qu'un élément  $K$  du maillage est constitué d'une numérotation locale ([1; 3] pour un triangle et [1; 4] pour un tétraèdre).

#### Orientation globale des arêtes

Soit une arête  $e \in \partial K$  composée des noeuds  $v_i \in \mathbb{N}^*$  (de numérotation locale  $i$ ) et  $v_j \in \mathbb{N}^*$  (de numérotation locale  $j$ ) avec  $v_i < v_j$ . Nous fixons l'orientation globale des arêtes en fonction de la numérotation globale de leurs noeuds dans un ordre croissant. L'orientation globale de  $e$  est notée  $\{v_i \rightarrow v_j\}$ . L'arête  $e$  correspond à l'arête  $\hat{e} \in \partial \hat{K}$  dont l'orientation locale a été fixée lors de la définition des fonctions de forme locales [70] et notée  $\{\hat{i} \rightarrow \hat{j}\}$  ( $\hat{i} := \{i \text{ ou } j\}$  et  $\hat{j} := \{i \text{ ou } j\}$ ). Nous devons équiper chaque arête  $e$  du maillage d'un flag, noté

$$o(e) = \pm 1, \quad (3.7)$$

afin d'indiquer si l'orientation locale est identique ou opposée à l'orientation globale. En d'autres termes, nous avons

$$o(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i = v_{\hat{i}}, v_j = v_{\hat{j}} \\ -1 & \text{si } v_j = v_{\hat{i}}, v_i = v_{\hat{j}} \end{cases}. \quad (3.8)$$

Lorsque  $o(e) = -1$ , du fait de la propriété des fonctions de Lobatto, il ne reste plus qu'à inverser le signe des fonctions de base globales d'ordre polynômial impair (voir [70]).

#### Orientation globale des faces

Soit une surface triangulaire  $s \in \partial K$  composée des noeuds  $v_i \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_j \in \mathbb{N}^*$  et  $v_k \in \mathbb{N}^*$  de numérotation locale  $i$ ,  $j$  et  $k$  respectivement. Nous supposons que  $v_i < v_j < v_k$ . L'orientation

globale des faces est fixée en fonction de la numérotation globale de leurs noeuds dans un ordre croissant. L'orientation globale de  $s$  est notée  $\{v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k\}$ . La face  $s$  correspond à la face  $\hat{s} \in \partial\hat{K}$  dont l'orientation locale a été fixée lors de la définition des fonctions de forme [70]. Les six situations différentes qui peuvent se présenter sont illustrées dans la Figure 3.3. Remarquons que les fonctions bulles de l'élément triangle doivent aussi être orientées pour

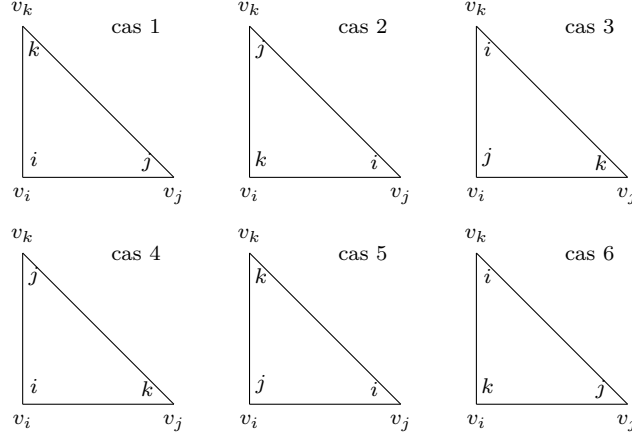


FIGURE 3.3 – Six combinaisons possibles pour l'orientation globale d'une face triangulaire

assurer la conformité avec les fonctions de face du tétraèdre. Dans le cas 1 de la Figure 3.3, toutes les fonctions de face de l'élément de référence associées à la face  $s$  restent inchangées. Faute de quoi, de la même manière mais plus technique que les fonctions d'arête, nous devons transformer les fonctions de face en utilisant une transformation bijective appropriée (voir [70] pour plus de détails).

L'orientation des faces et des arêtes pour tous les éléments  $K \in \Gamma_h$  peut paraître coûteuse. Une alternative est d'évaluer les fonctions de base hiérarchiques d'ordre élevé pour toutes les permutations possibles de l'élément triangle de référence (6 possibilités) ou du tétraèdre de référence (24 possibilités). Enfin, pour chaque élément  $K \in \Gamma_h$ , il suffit de trouver dans quel cas de permutation ce dernier se place.

### 3.1.4 Discrétisation des formulations variationnelles

Dans le but de discrétiser le couplage FEM-BEM, nous introduisons les bases pour chaque espace d'approximation polynômial :

$$\mathbf{Z}_{h,p} := \text{Vect}\{(\mathbf{z}_j^p)_{1 \leq j \leq N_z^p}\}, \quad \mathbf{V}_{h,p} := \text{Vect}\{(\mathbf{e}_j^p)_{1 \leq j \leq N_z^p}\} = \text{Vect}\{(\mathbf{z}_j^p \wedge \mathbf{n})_{1 \leq j \leq N_z^p}\},$$

$$\mathbf{W}_{h,p} := \text{Vect}\{(\mathbf{w}_j)_{1 \leq j \leq N_w^p}\} \quad \text{et} \quad Q_h := \text{Vect}\{(q_j)_{1 \leq j \leq n_v^p}\},$$

où les définitions de  $N_z^p$  et  $N_w^p$  sont présentées dans la Table 3.2. Remarquons que  $\mathbf{V}_{h,0}$  représente l'espace des éléments finis H(div)-conformes de Raviart-Thomas de plus bas degré [60]. Maintenant que nous avons présenté toutes les bases utiles, nous donnons les matrices nécessaires à la discrétisation du couplage FEM-BEM. Nous commençons par introduire la matrice de l'opérateur de trace tangentielle, notée  $\mathbb{G}$ , et donnée par

$$\mathbb{G}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{w}_j|_{\Gamma} = \mathbf{z}_i^p, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{où } 1 \leq i \leq N_z^p \text{ et } 1 \leq j \leq N_w^p. \quad (3.9)$$

Nous désignons par  $\mathbb{P}_{\Gamma_h}^{b \rightarrow a}$  la matrice de l'opérateur d'interpolation sur  $\Gamma_h$  entre des éléments finis hiérarchiques d'ordre  $b \in \mathbb{N}$  vers des éléments finis hiérarchiques d'ordre  $a \in \mathbb{N}$ ,

Ordre polynômial $p \in \mathbb{N}$	$N_z^p$	$N_w^p$
$p < 2$	$(p+1)n_e^\partial$	$(p+1)n_e$
$2 \leq p < 3$	$(p+1)n_e^\partial + 3(p-1)n_t^\partial$	$(p+1)n_e + 3(p-1)n_f$
$3 \leq p < 4$	$(p+1)n_e^\partial + (p-1)(p+1)n_t^\partial$	$(p+1)n_e + (p-1)(p+1)n_f +$ $2(p-1)(p-2)n_t$
$4 \leq p$	$(p+1)n_e^\partial + (p-1)(p+1)n_t^\partial$	$(p+1)n_e + (p-1)(p+1)n_f +$ $(p-1)(p-2)(p+1)n_t/2$

TABLE 3.2 – Nombre de degrés de liberté  $N_w^p$  et  $N_z^p$  selon l'ordre polynômial

avec  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ . Si nous supposons que  $a \leq b$ , en utilisant la nature hiérarchique des bases introduites, la matrice  $\mathbb{P}_{\Gamma_h}^{b \rightarrow a}$ , de dimension  $N_z^a \times N_z^b$ , est constituée de 1 et 0 étant donné que l'opérateur d'interpolation ne doit conserver que les fonctions de base d'ordre inférieur ou égal à  $a$ . Remarquons que  $\mathbb{P}_{\Gamma_h}^{a \rightarrow b} = (\mathbb{P}_{\Gamma_h}^{b \rightarrow a})^T$ . Habituellement, le couplage de deux codes différents requiert de disposer d'une matrice de passage pour s'assurer de la conformité des données échangées. Cependant, pour ne pas surcharger la présentation, nous n'étudions pas ce cas. Nous supposons ainsi que :  $\forall j \in N_z^p$ ,  $\mathbf{e}_j^p = \mathbf{z}_j^p \wedge \mathbf{n}$ . Enfin, nous définissons ci-dessous les matrices variationnelles avec  $i$  le numéro de la ligne et  $j$  le numéro de la colonne :

$$\mathbb{H}_\tau^p = \left( \int_{\Omega_h} \tau \mathbf{rot} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_j d\Omega_h \right)_{1 \leq i, j \leq N_w^p}, \quad \mathbb{J}_\tau^p = \left( \int_{\Omega_h} \tau \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j d\Omega_h \right)_{1 \leq i, j \leq N_w^p}, \quad (3.10)$$

$$\mathbb{H}_{\Gamma_h, \tau}^p = \left( \int_{\Gamma_h} \tau \mathbf{rot}_{\Gamma_h} \mathbf{z}_i^p \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_h} \mathbf{z}_j^p d\Gamma_h \right)_{1 \leq i, j \leq N_z^p}, \quad \mathbb{J}_{\Gamma_h, \tau}^p = \left( \int_{\Gamma_h} \tau \mathbf{z}_i^p \cdot \mathbf{z}_j^p d\Gamma_h \right)_{1 \leq i, j \leq N_z^p}, \quad (3.11)$$

$$\mathbb{R}_{\Gamma_h, \tau}^p = \left( \int_{\Gamma_h} \tau \mathbf{z}_i^p \cdot (\mathbf{z}_j^p \wedge \mathbf{n}) d\Gamma_h \right)_{1 \leq i, j \leq N_z^p}, \quad \mathbb{I}_{\Gamma_h, \tau}^p = \left( \int_{\Gamma_h} \tau \mathbf{e}_i^p \cdot \mathbf{e}_j^p d\Gamma_h \right)_{1 \leq i, j \leq N_z^p}, \quad (3.12)$$

$$\mathbb{L}_{\Gamma_h, \tau}^p = \left( \int_{\Gamma_h} \tau \nabla_{\Gamma_h} q_i \cdot \mathbf{z}_j^p d\Gamma_h \right)_{\substack{1 \leq i \leq n_v^\partial \\ 1 \leq j \leq N_z^p}}, \quad \mathbb{M}_{\Gamma_h} = \left( \int_{\Gamma_h} q_i \cdot q_j d\Gamma_h \right)_{1 \leq i, j \leq n_v^\partial}, \quad (3.13)$$

$$\mathbb{T}_k = \left( \langle \mathbf{T}_k \mathbf{e}_j^0; \mathbf{e}_i^0 \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq N_z^0}, \quad \mathbb{K}_k = \left( \langle \mathbf{K}_k \mathbf{e}_j^0; \mathbf{e}_i^0 \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq N_z^0}. \quad (3.14)$$

Nous faisons remarquer que  $(\mathbb{R}_{\Gamma_h, \tau}^p)^T = -\mathbb{R}_{\Gamma_h, \tau}^p$  et  $(\mathbb{L}_{\Gamma_h, \tau}^p)^T = -\mathbb{L}_{\Gamma_h, \tau}^p$ . Le vecteur des degrés de liberté est noté  $\{\cdot\}$ . Nous pouvons à présent discuter de la discrétisation des différents couplages FEM-BEM.

### Couplage fort FEM-BEM

Pour le couplage FEM-BEM, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 3.2.** *La discrétisation du couplage fort FEM-BEM s'écrit comme suit :*

Trouver  $(\mathbf{E}_{-,h}, \mathbf{j}_{+,h}) \in [\mathbf{W}_{h,p} \times \mathbf{V}_{h,0}]$  tel que, pour toutes fonctions-test  $(\mathbf{w}_i)_{i \in \{1, \dots, N_w^p\}} \in \mathbf{W}_{h,p}$  et  $(\mathbf{e}_i^0)_{i \in \{1, \dots, N_z^0\}} \in \mathbf{V}_{h,0}$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} \frac{1}{k_- \mathcal{Z}_-} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{-,h} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_i d\Omega_h - \int_{\Omega_h} k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_{-,h} \cdot \mathbf{w}_i d\Omega_h + \iota \langle (\mathbb{G} \mathbf{w}_i) \wedge \mathbf{n}; \mathbf{j}_{+,h} \rangle = 0 \\ \frac{1}{2} \langle \mathbf{m}_{-,h}; \mathbf{e}_i^0 \rangle - \langle \mathbb{K}_{k_+} \mathbf{m}_{-,h}; \mathbf{e}_i^0 \rangle + \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \langle \mathbb{T}_{k_+} \mathbf{j}_{-,h}; \mathbf{e}_i^0 \rangle = \langle \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}; \mathbf{e}_i^0 \rangle \end{array} \right. , \quad (3.15)$$

où

$$\mathbf{m}_{-,h} = \sum_{j=1}^{N_z^p} (\mathbb{G} \{ \mathbf{E}_{-,h} \})_j \mathbf{z}_j^p \wedge \mathbf{n}. \quad (3.16)$$

La formulation discrète peut se réécrire sous forme matricielle comme suit :

$$\left( \begin{array}{cc} \mathbb{H}_{\frac{1}{k_- \mathcal{Z}_-}}^p - \mathbb{J}_{k_- \mathcal{Z}_-}^p & -\iota \mathbb{G}^T \mathbb{R}_{\Gamma_h,1}^p \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{0 \rightarrow p} \\ (\mathbb{R}_{\Gamma_h, \frac{1}{2}}^0 - \mathbb{K}_k) \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{p \rightarrow 0} \mathbb{G} & \mathbb{T}_k \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \{ \mathbf{E}_{h,-} \} \\ \{ \mathbf{j}_{h,+} \} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \{ \mathbf{0} \} \\ \mathbb{R}_{\Gamma_h,1}^0 \{ \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \} \end{array} \right). \quad (3.17)$$

### Couplage faible FEM-BEM

Le choix des bases pour discrétiser les inconnues du couplage faible est crucial. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le choix des espace de discrétisation de  $\mathbf{g}_{+,h}$  et  $\mathbf{g}_{-,h}$  n'est pas si immédiat. En effet, plusieurs choix se présentent à nous, à savoir :

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_{+,h}, \mathbf{g}_{-,h}) &\in [\mathbf{V}_{h,0} \times \mathbf{V}_{h,p}], & (\mathbf{g}_{+,h}, \mathbf{g}_{-,h}) &\in [\mathbf{V}_{h,0} \times \mathbf{Z}_{h,p}], \\ (\mathbf{g}_{+,h}, \mathbf{g}_{-,h}) &\in [\mathbf{Z}_{h,0} \times \mathbf{Z}_{h,p}] & \text{et} & (\mathbf{g}_{+,h}, \mathbf{g}_{-,h}) &\in [\mathbf{Z}_{h,0} \times \mathbf{V}_{h,p}]. \end{aligned}$$

Quel que soit le choix des espaces de discrétisation, la discrétisation du couplage faible FEM-BEM se fait exactement de la même manière. Nous présentons par conséquent uniquement la discrétisation du couplage faible FEM-BEM lorsque  $(\mathbf{g}_{+,h}, \mathbf{g}_{-,h}) \in [\mathbf{V}_{h,0} \times \mathbf{V}_{h,p}]$ . Remarquons que les inconnues  $\mathbf{g}_{+,h}$  et  $\mathbf{g}_{-,h}$  sont respectivement discrétisées par de l'ordre 0 et  $p \in \mathbb{N}$ . En effet, dans la Section 3.3, nous verrons qu'un choix sur l'ordre polynômial des inconnues du système doit être fait pour des raisons de stabilité. Toutefois, l'étude exhaustive de l'ordre polynômial de l'ensemble des inconnues du système sur la stabilité du couplage faible serait fastidieuse. De ce fait, nous introduisons uniquement deux paramètres  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$  pour désigner des ordres d'approximation des éléments finis.

Supposons que  $\mathbf{T}_+ = \Lambda_{-,k_-, \mathcal{Z}_-}^0$  (le choix alternatif  $\mathbf{T}_+ = -\Lambda_{+,k_+, \mathcal{Z}_+}^0$  ne changerait que légèrement les formulations), alors la discrétisation du couplage faible FEM-BEM (2.8) est définie dans la proposition suivante.

**Proposition 3.3.** *La discrétisation de la formulation faible (2.104) est donnée par :*

Trouver  $(\mathbf{g}_{+,h}, \mathbf{g}_{-,h}) \in [\mathbf{V}_{h,0} \times \mathbf{V}_{h,\beta}]$  tel que pour toutes fonctions-test  $(\mathbf{e}_i^0)_{i \in \{1, \dots, N_z^0\}} \in \mathbf{V}_{h,0}$  et  $(\mathbf{e}_i^\beta)_{i \in \{1, \dots, N_z^\beta\}} \in \mathbf{V}_{h,\beta}$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_h} \mathbf{g}_{-,h} \cdot \mathbf{e}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \mathbf{g}_{+,h} \cdot \mathbf{e}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \left( \frac{\mathbf{a}_h}{\mathcal{Z}_+} + \frac{\mathbf{m}_{+,h} \wedge \mathbf{n}}{\mathcal{Z}_-} \right) \cdot \mathbf{e}_i^\beta d\Gamma_h = 0 \\ \int_{\Gamma_h} \mathbf{g}_{+,h} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \mathbf{g}_{-,h} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} \left( \frac{\mathbf{c}_h}{\mathcal{Z}_+} + \frac{\mathbf{m}_{-,h} \wedge \mathbf{n}}{\mathcal{Z}_-} \right) \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h = 0 \end{array} \right. , \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{m}_{+,h}$  est le courant magnétique extérieur total solution de la formulation (3.24),  $\mathbf{c}_h$  est défini dans la Proposition 3.6 et

$$\mathbf{m}_{-,h} = \sum_{j=1}^{N_z^\alpha} (\mathbb{G} \{ \mathbf{E}_{-,h} \})_j \mathbf{z}_j^\alpha \wedge \mathbf{n}, \quad (3.19)$$

avec  $\mathbf{E}_{-,h}$  la solution de la formulation volumique discrète (3.26). Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+, \mathcal{Z}_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ , alors  $\mathbf{a}_h$  est défini par la formulation discrète suivante :

Trouver  $(\mathbf{a}_h, (\Psi_{\ell,h})_{\ell \in \{1; \dots; N_p\}}, (\phi_{\ell,h})_{\ell \in \{1; \dots; N_p\}}) \in [\mathbf{Z}_{h,\beta} \times [\mathbf{Z}_{h,\beta}]^{N_p} \times [Q_h]^{N_p}]$  tel que, pour toutes fonctions-test  $(\mathbf{z}_i^\beta)_{i \in \{1, \dots, N_p^\beta\}} \in \mathbf{Z}_{h,\beta}$  et  $(q_i)_{i \in \{1, \dots, n_p^\beta\}} \in Q_h$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_h} C_0 \mathbf{a}_h \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \mathbf{m}_{+,h} \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_{\Gamma_h}(\mathbf{m}_{+,h} \wedge \mathbf{n}) \cdot \text{rot}_{\Gamma_h}(\mathbf{z}_i^\beta) d\Gamma_h \\ + \sum_{\ell=1}^{N_p} A_\ell \left( \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \phi_{\ell,h} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_{\Gamma_h} \Psi_{\ell,h} \cdot \text{rot}_{\Gamma_h}(\mathbf{z}_i^\beta) d\Gamma_h \right) = \mathbf{0} \\ \int_{\Gamma_h} \Psi_{\ell,h} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h + B_\ell \left( \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \phi_{\ell,h} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \text{rot}_{\Gamma_h} \Psi_{\ell,h} \cdot \text{rot}_{\Gamma_h}(\mathbf{z}_i^\beta) d\Gamma_h \right) \\ - \int_{\Gamma_h} \mathbf{a}_h \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h = \mathbf{0} \quad \forall \ell \in \{1; \dots; N_p\} \\ \int_{\Gamma_h} \phi_{\ell,h} \cdot q_i d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \Psi_{\ell,h} \cdot \nabla_{\Gamma_h} q_i d\Gamma_h = 0 \quad \forall \ell \in \{1; \dots; N_p\} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^0$ , alors nous avons plus simplement :

$$\mathbf{a}_h = \mathbf{m}_{+,h} \wedge \mathbf{n}. \quad (3.21)$$

La proposition suivante donne l'écriture matricielle des formulations discrètes présentées dans la Proposition 3.3.

**Proposition 3.4.** *La forme discrète du couplage faible s'écrit sous forme matricielle comme suit :*

• Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^\beta & \mathbb{R}_{\Gamma_h,Z_+^{-1}}^\beta & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\mathbb{I}_{\Gamma_h}^{\beta,1} \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{0 \rightarrow \beta} \\ -\mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\beta \rightarrow 0} & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^0 \\ 0 & C_0 \mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta & -A_1 \mathbb{H}_{\Gamma_h,k_\epsilon^{-2}}^\beta & \dots & -A_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma_h,k_\epsilon^{-2}}^\beta & -A_1 \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta & \dots & -A_{N_p} \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta & 0 \\ \vdots & -\mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta & \mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta - B_1 \mathbb{H}_{\Gamma_h,k_\epsilon^{-2}}^\beta & & & -B_1 \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & & (0) & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & -\mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta & & & \mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma_h,k_\epsilon^{-2}}^\beta & & & -B_{N_p} \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta & \vdots \\ \vdots & 0 & \mathbb{L}_{\Gamma_h,k_\epsilon^{-2}} & & & \mathbb{M}_{\Gamma_h} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & (0) & & \ddots & (0) & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbb{L}_{\Gamma_h,k_\epsilon^{-2}} & 0 & 0 & \mathbb{M}_{\Gamma_h} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}\} \\ \{\mathbf{a}_h\} \\ \{\Psi_{1,h}\} \\ \vdots \\ \{\Psi_{N_p,h}\} \\ \{\phi_{1,h}\} \\ \vdots \\ \{\phi_{N_p,h}\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{\Gamma_h,Z_+^{-1}}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{0 \rightarrow \beta} \{\mathbf{m}_{+,h}\} \\ -\mathbb{R}_{\Gamma_h,Z_+^{-1}}^0 \mathbb{P}^{\alpha \rightarrow 0} \{\mathbf{m}_{-,h}\} + \mathbb{R}_{\Gamma_h,Z_+^{-1}}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\beta \rightarrow 0} \{\mathbf{c}_h\} \\ -(\mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta + \mathbb{H}_{\Gamma_h,k_\epsilon^{-2}}^\beta) \mathbb{P}^{0 \rightarrow \beta} \{\mathbf{m}_{+,h}\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

• Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^0$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^\beta & -\mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^\beta \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{0 \rightarrow \beta} \\ -\mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\beta \rightarrow 0} & \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{\Gamma_h,Z_+^{-1}+Z_+}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{0 \rightarrow \beta} \{\mathbf{m}_{+,h}\} \\ -\mathbb{R}_{\Gamma_h,Z_+^{-1}+Z_+}^0 \mathbb{P}^{\alpha \rightarrow 0} \{\mathbf{m}_{-,h}\} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$



La formulation discrète des équations intégrales (2.35) est présentée dans la proposition suivante.

**Proposition 3.5.** *La discrétisation des équations intégrales (2.35) conduit au problème :*

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{m}_{+,h}, \mathbf{j}_{+,h}) \in [\mathbf{V}_{h,0} \times \mathbf{V}_{h,0}] \text{ tel que pour toute fonction-test } (\mathbf{e}_i^0)_{i \in \{1, \dots, N_z^0\}} \in \\ & \mathbf{V}_{h,0}, \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \mathbf{j}_{+,h} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} (\mathbf{K}_{k_+} \frac{\mathbf{m}_{+,h}}{\mathcal{Z}_-}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h + \iota \int_{\Gamma_h} k_+ \frac{\mathcal{Z}_+}{\mathcal{Z}_-} (\mathbf{T}_{k_+} \mathbf{j}_{+,h}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h \\ & \quad = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \mathbf{g}_{+,h} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} \mathcal{Z}_-^{-1} \gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}} \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h \\ & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \frac{\mathbf{m}_{+,h}}{\mathcal{Z}_-} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} (\mathbf{K}_{k_+} \mathbf{j}_{+,h}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h + \iota \int_{\Gamma_h} k_+ \frac{\mathcal{Z}_-}{\mathcal{Z}_+} (\mathbf{T}_{k_+} \frac{\mathbf{m}_{+,h}}{\mathcal{Z}_-}) \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h \\ & \quad = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_h} \mathbf{g}_{+,h} \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}} \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i^0 d\Gamma_h \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sous forme matricielle, la formulation intégrale discrète conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{K}_{k_+} & \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\Gamma_h, \mathcal{Z}_-}^0 + \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbb{T}_{k_+} \\ \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\Gamma_h, \mathcal{Z}_-}^0 + \iota \frac{k_+}{\mathcal{Z}_+} \mathbb{T}_{k_+} & \mathbb{K}_{k_+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\mathbf{m}_{+,h}\} \\ \{\mathbf{j}_{+,h}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\Gamma_h, \mathcal{Z}_-}^0 \{\mathbf{g}_{+,h}\} + \mathbb{R}_{\Gamma_h, 1}^0 \{\gamma_t^+ \mathbf{E}_{\text{inc}}\} \\ \frac{1}{2} \mathbb{R}_{\Gamma_h, 1}^0 \{\mathbf{g}_{+,h}\} - \mathbb{R}_{\Gamma_h, 1}^0 \{\gamma_t^+ \mathbf{H}_{\text{inc}}\} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Enfin, nous discrétisons la formulation variationnelle (2.41) associée au problème intérieur (2.6) comme suit.

**Proposition 3.6.** *Trouver  $\mathbf{E}_{-,h} \in \mathbf{W}_{h,\alpha}$  vérifiant, pour toute fonction-test  $(\mathbf{w}_i)_{i \in \{1, \dots, N_w\}} \in \mathbf{W}_{h,\alpha}$ , la formulation discrète suivante :*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{-,h} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_i d\Omega_h - \int_{\Omega_h} k_-^2 \mathbf{E}_{-,h} \cdot \mathbf{w}_i d\Omega_h + \iota \int_{\Gamma_h} k_- \frac{\mathcal{Z}_-}{\mathcal{Z}_+} \mathbf{c}_h \cdot \mathbb{G} \mathbf{w}_i d\Gamma_h = \\ & \quad \iota \int_{\Gamma_h} k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{g}_{-,h} \cdot \mathbb{G} \mathbf{w}_i d\Gamma_h \end{aligned} \quad (3.26)$$

Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+, \mathcal{Z}_+}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ , alors  $\mathbf{c}_h$  est défini par :

Trouver  $(\mathbf{c}_h, (\boldsymbol{\chi}_{\ell,h})_{\ell \in \{1, \dots, N_p\}}, (\psi_{\ell,h})_{\ell \in \{1, \dots, N_p\}}) \in [\mathbf{Z}_{h,\beta} \times [\mathbf{Z}_{h,\beta}]^{N_p} \times [Q_h]^{N_p}]$  tel que, pour toutes fonctions-test  $(\mathbf{z}_i^\beta)_{i \in \{1, \dots, N_z^\beta\}} \in \mathbf{Z}_{h,\beta}$  et  $(q_i)_{i \in \{1, \dots, n_v^\beta\}} \in Q_h$ , nous ayons les équations

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Gamma_h} C_0 \mathbf{c}_h \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \mathbf{m}_{-,h} \wedge \mathbf{n} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_{\Gamma_h} (\mathbf{m}_{-,h} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_h} (\mathbf{z}_i^\beta) d\Gamma_h \\ & + \sum_{\ell=1}^{N_p} A_\ell \left( \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \psi_{\ell,h} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_{\Gamma_h} \boldsymbol{\chi}_{\ell,h} \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_h} (\mathbf{z}_i^\beta) d\Gamma_h \right) = \mathbf{0} \\ & \int_{\Gamma_h} \boldsymbol{\chi}_{\ell,h} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h + B_\ell \left( \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} \psi_{\ell,h} \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \mathbf{rot}_{\Gamma_h} \boldsymbol{\chi}_{\ell,h} \cdot \mathbf{rot}_{\Gamma_h} (\mathbf{z}_i^\beta) d\Gamma_h \right) \\ & \quad - \int_{\Gamma_h} \mathbf{c}_h \cdot \mathbf{z}_i^\beta d\Gamma_h = \mathbf{0} \quad \forall \ell \in \{1, \dots, N_p\} \\ & \int_{\Gamma_h} \psi_{\ell,h} \cdot q_i d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} \frac{1}{k_\epsilon^2} \boldsymbol{\chi}_{\ell,h} \cdot \nabla_{\Gamma_h} q_i d\Gamma_h = 0 \quad \forall \ell \in \{1, \dots, N_p\} \end{aligned} \right. \quad (3.27)$$

Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+, \mathcal{Z}_+}^0$ , alors nous avons plus simplement :

$$\mathbf{c}_h = \mathbf{m}_{-,h} \wedge \mathbf{n}. \quad (3.28)$$

Nous pouvons réécrire les formulations introduites dans la Proposition 3.6 sous forme matricielle.

**Proposition 3.7.** *La formulation discrète de (3.26) peut se réécrire sous forme matricielle comme ci-dessous :*

- Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{H}_1^\alpha - \mathbb{J}_{k_-^2}^\alpha & \iota \mathbb{G}^T \mathbb{J}_{\Gamma_h, \frac{k_- Z_-}{Z_+}}^\alpha \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\beta \rightarrow \alpha} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbb{G}^T (\mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta + \mathbb{H}_{\Gamma_h, k_\epsilon^{-2}}^\beta) \mathbb{P}^{\alpha \rightarrow \beta} \mathbb{G} & C_0 \mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta & -A_1 \mathbb{H}_{\Gamma_h, k_\epsilon^{-2}}^\beta & \dots & -A_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma_h, k_\epsilon^{-2}}^\beta & -A_1 \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta & \dots \\ 0 & -\mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta & \mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta - B_1 \mathbb{H}_{\Gamma_h, k_\epsilon^{-2}}^\beta & \dots & \dots & -B_1 \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta & 0 \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & \dots & \dots & \ddots \\ \vdots & -\mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta & \dots & \dots & \mathbb{J}_{\Gamma_h,1}^\beta - B_{N_p} \mathbb{H}_{\Gamma_h, k_\epsilon^{-2}}^\beta & (0) & \dots \\ \vdots & 0 & \mathbb{L}_{\Gamma_h, k_\epsilon^{-2}} & \dots & \dots & \mathbb{M}_{\Gamma_h} & \dots \\ \vdots & \vdots & (0) & \ddots & \dots & (0) & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbb{L}_{\Gamma_h, k_\epsilon^{-2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -A_{N_p} \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta \\ 0 \\ 0 \\ -B_{N_p} \mathbb{L}_{\Gamma_h,1}^\beta \\ 0 \\ 0 \\ \mathbb{M}_{\Gamma_h} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \{\mathbf{E}_{-,h}\} \\ \{\mathbf{c}_h\} \\ \{\boldsymbol{\chi}_{1,h}\} \\ \vdots \\ \{\boldsymbol{\chi}_{N_p,h}\} \\ \{\boldsymbol{\psi}_{1,h}\} \\ \vdots \\ \{\boldsymbol{\psi}_{N_p,h}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota \mathbb{G}^T \mathbb{R}_{\Gamma_h, k_- Z_-}^\alpha \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\beta \rightarrow \alpha} \{\mathbf{g}_{-,h}\} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

- Si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^0$  :

$$(\mathbb{H}_1^\alpha - \mathbb{J}_{k_-^2}^\alpha - \iota \mathbb{G}^T \mathbb{J}_{\Gamma_h, \frac{k_- Z_-}{Z_+}}^\alpha \mathbb{G}) \{\mathbf{E}_{+,h}\} = \iota \mathbb{G}^T \mathbb{R}_{\Gamma_h, k_- Z_-}^\alpha \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\beta \rightarrow \alpha} \{\mathbf{g}_{-,h}\}. \quad (3.30)$$

## 3.2 Algorithme discret du couplage faible FEM-BEM

Dans cette section, nous présentons l'algorithme discret du couplage FEM-BEM. L'idée est similaire à celle utilisée pour l'algorithme au niveau continu. Pour être plus précis, nous commençons par une réécriture afin d'obtenir une expression plus compacte de l'algorithme de Jacobi à l'itération  $n + 1$  appliqué à notre problème discret. Ainsi, nous introduisons les deux familles d'opérateurs  $\mathbf{R}_{\pm,h}$ ,  $\mathbf{S}_{\pm,h}$  telles que

$$\{\mathbf{E}_{+,h}^{n+1}\} = \mathbf{R}_{+,h}(\{\mathbf{E}_{\text{inc}}\}, \{\mathbf{g}_{+,h}^n\}), \quad \{\mathbf{E}_{-,h}^{n+1}\} = \mathbf{R}_{-,h}(\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{g}_{-,h}^n\}), \quad (3.31)$$

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}^{n+1}\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}^{n+1}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{+,h}(\{\mathbf{g}_{+,h}^n\}, \{\mathbf{E}_{+,h}^{n+1}\}) \\ \mathbf{S}_{-,h}(\{\mathbf{g}_{-,h}^n\}, \{\mathbf{E}_{-,h}^{n+1}\}) \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

où  $\{\mathbf{E}_{-,h}^{n+1}\}$ ,  $\{\mathbf{E}_{+,h}^{n+1}\}$  et  $\begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}^{n+1}\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}^{n+1}\} \end{pmatrix}$  sont respectivement solutions des systèmes linéaires (3.30)

(ou (3.29) si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ), (3.25) et (3.23) (ou (3.22) si  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ). À titre d'exemple, la quantité

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}^{n+1}\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}^{n+1}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{+,h}(\{\mathbf{g}_{+,h}^n\}, \{\mathbf{E}_{+,h}^{n+1}\}) \\ \mathbf{S}_{-,h}(\{\mathbf{g}_{-,h}^n\}, \{\mathbf{E}_{-,h}^{n+1}\}) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

correspond, si  $\mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^0$ , à

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^\beta \{\mathbf{g}_{-,h}^{n+1}\} \\ \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^0 \{\mathbf{g}_{+,h}^{n+1}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^\beta \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{0 \rightarrow \beta} \{\mathbf{g}_{+,h}^n\} + \mathbb{R}_{\Gamma_h, Z_-^{-1} + Z_+^{-1}}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{0 \rightarrow \beta} \{\mathbf{m}_{+,h}^{n+1}\} \\ \mathbb{I}_{\Gamma_h,1}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\beta \rightarrow 0} \{\mathbf{g}_{-,h}^n\} - \mathbb{R}_{\Gamma_h, Z_-^{-1} + Z_+^{-1}}^0 \mathbb{P}_{\Gamma_h}^{\alpha \rightarrow 0} \{\mathbf{m}_{-,h}^{n+1}\} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Par analogie avec l'algorithme au niveau continu, nous introduisons les décompositions linéaires suivantes :

$$\{\mathring{\mathbf{E}}_{-,h}\} = \mathbf{R}_{-,h}(\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}\}), \quad \{\mathring{\mathbf{E}}_+\} = \mathbf{R}_{+,h}(\{\mathbf{E}_{\text{inc}}\}, \{\mathbf{0}\}), \quad \{\tilde{\mathbf{E}}_\pm^{n+1}\} = \mathbf{R}_{\pm,h}(\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{g}_\pm^n\}). \quad (3.35)$$

Une itération de l'algorithme discret du couplage faible FEM-BEM correspond alors à

$$\begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}^{n+1}\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}^{n+1}\} \end{pmatrix} = \mathcal{A}_h \begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}^n\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}^n\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-,h} \\ \mathbf{b}_{+,h} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

où la quantité  $\mathcal{A} \begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}^n\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}^n\} \end{pmatrix}$  est donnée par

$$\mathcal{A}_h \begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}^n\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}^n\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{+,h}(\{\mathbf{g}_{+,h}^n\}, \{\tilde{\mathbf{E}}_{+,h}^{n+1}\}) \\ \mathbf{S}_{-,h}(\{\mathbf{g}_{-,h}^n\}, \{\tilde{\mathbf{E}}_{-,h}^{n+1}\}) \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

L'information sur l'onde plane incidente est contenue dans le terme de droite

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-,h} \\ \mathbf{b}_{+,h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{+,h}(\{\mathbf{0}\}, \{\mathring{\mathbf{E}}_{+,h}\}) \\ \mathbf{S}_{-,h}(\{\mathbf{0}\}, \{\mathring{\mathbf{E}}_{-,h}\}) \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

L'ensemble de l'algorithme de couplage faible peut alors être reformulé en le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{Id}_h - \mathcal{A}_h) \begin{pmatrix} \{\mathbf{g}_{-,h}\} \\ \{\mathbf{g}_{+,h}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-,h} \\ \mathbf{b}_{+,h} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

qui peut être résolu par le biais de la procédure GMRES. L'algorithme discret du couplage faible est résumé dans l'**Algorithme 3**.

**Algorithme 3** : Algorithme discret du couplage faible FEM-BEM

1. Calculer le terme de droite du couplage faible FEM-BEM  $\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-,h} \\ \mathbf{b}_{+,h} \end{pmatrix}$ .

2. Résoudre le système linéaire suivant

$$(\mathbf{Id}_h - \mathcal{A}_h) \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{-,h} \\ \mathbf{g}_{+,h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{-,h} \\ \mathbf{b}_{+,h} \end{pmatrix}$$

en utilisant un solveur de Krylov (GMRES). À chaque itération, résoudre les sous-problèmes (3.25) et (3.30) (ou (3.29)).

3. Après convergence, calculer les solutions finales

$$\{\mathbf{E}_{\pm,h}\} = \mathbf{R}_{\pm,h}(\{\mathbf{E}_{\text{inc}}\}, \{\mathbf{0}\}) + \mathbf{R}_{\pm,h}(\{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{g}_{\pm,h}\}) = \mathbf{R}_{\pm,h}(\{\mathbf{E}_{\text{inc}}\}, \{\mathbf{g}_{\pm,h}\}).$$

Nous terminons cette section en faisant remarquer que les sous-problèmes (3.25) et (3.29) (ou (3.30)) sont résolus à chaque itération. Il est par conséquent plus judicieux, dans une étape de pré-traitement, de factoriser (3.29) (ou (3.30)) et d'utiliser une méthode de compression ( $\mathcal{H}$ -Matrices) pour (3.25). Seulement de simples montées et descentes sont alors nécessaire à la résolution des sous-problèmes à chaque itération.

### 3.3 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section quelques exemples numériques pour valider et analyser le comportement de l’**Algorithme 3**. Tous les tests numériques ont été réalisés en utilisant **GmshFEM** [62], une bibliothèque éléments finis open-source récemment développée et basée sur **Gmsh** [37] et la bibliothèque des éléments de frontière **Bempp-c1** [65]. Trois objets diffractants sont considérés : la sphère unité, le cube unité  $]-1; 1[^2$  et le même cube avec un coin rentrant (voir Figure 3.4). Les objets sont éclairés par une onde plane électromagnétique définie par

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{x}) = \mathbf{e} e^{ik_+ \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.40)$$

où  $\mathbf{e} = (1, 0, 0)^T$  et  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}} = (0, 0, 1)^T$ . Nous évaluons également le champ lointain par le biais de la SER bistatique (1.52). Pour tous les exemples présentés, les itérations GMRES (sans paramètre de redémarrage (restart)) sont stoppées lorsque le résidu initial a diminué d’un facteur de  $10^{-4}$ , avec un nombre maximal d’itérations fixé à 200. Nous désignons par  $(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+)_\alpha^\beta$  les opérateurs de transmission sélectionnés en considérant les ordres d’approximation éléments finis  $(\alpha; \beta)$  introduits dans la Section 3.1. Enfin, le nombre de points par longueur d’onde, noté  $n_\lambda$ , est défini par

$$n_\lambda = \lambda/h, \quad \text{avec } \lambda := \min(\lambda_-; \lambda_+). \quad (3.41)$$

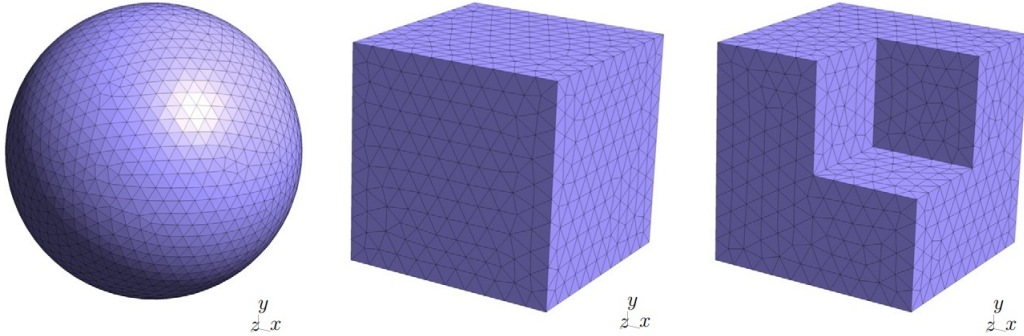


FIGURE 3.4 – Géométries des objets diffractants : sphère, cube et cube avec coin rentrant

#### 3.3.1 Cas homogène lorsque $\mathbf{g}_{+,h} \in \mathbf{V}_{h,0}$ et $\mathbf{g}_{-,h} \in \mathbf{V}_{h,\beta}$

Dans cette sous-section, nous supposons que  $\mathbf{g}_{-,h} \in \mathbf{V}_{h,\beta}$  et  $\mathbf{g}_{+,h} \in \mathbf{V}_{h,0}$ .

#### Influence des paramètres de Padé sur la convergence du couplage faible

Commençons par considérer la sphère unité. Nous reportons dans la Figure 3.5 le nombre d’itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction du nombre d’onde extérieur  $k_+$  pour les opérateurs  $(-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,\mathcal{Z}_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,\mathcal{Z}_-}^0)_2^3$  (certaines comparaisons avec le choix  $\mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,\mathcal{Z}_+}$  sont analysées ultérieurement). Plusieurs paires de paramètres de Padé  $(N_p; \theta_p)$  sont considérées. La Figure 3.6 montre l’évolution du nombre d’itérations GMRES en fonction de  $\delta$  pour les opérateurs  $(-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,\mathcal{Z}_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,\mathcal{Z}_-}^0)_2^3$  et pour plusieurs paires de paramètres de Padé  $(N_p; \theta_p)$ . Nous observons que  $\theta_p = \frac{\pi}{2}$  conduit à la meilleure convergence et que  $N_p = 2$  termes sont suffisants pour le développement de Padé. La valeur optimale pour  $\theta_p$  est en accord avec l’étude spectrale du couplage faible. Nous remarquons par ailleurs la

présence des phénomènes de résonances mentionnés dans la Section 2.7. Dans la suite du manuscrit, nous considérerons toujours  $\theta_p = \frac{\pi}{2}$  et par précaution  $N_p = 4$ .

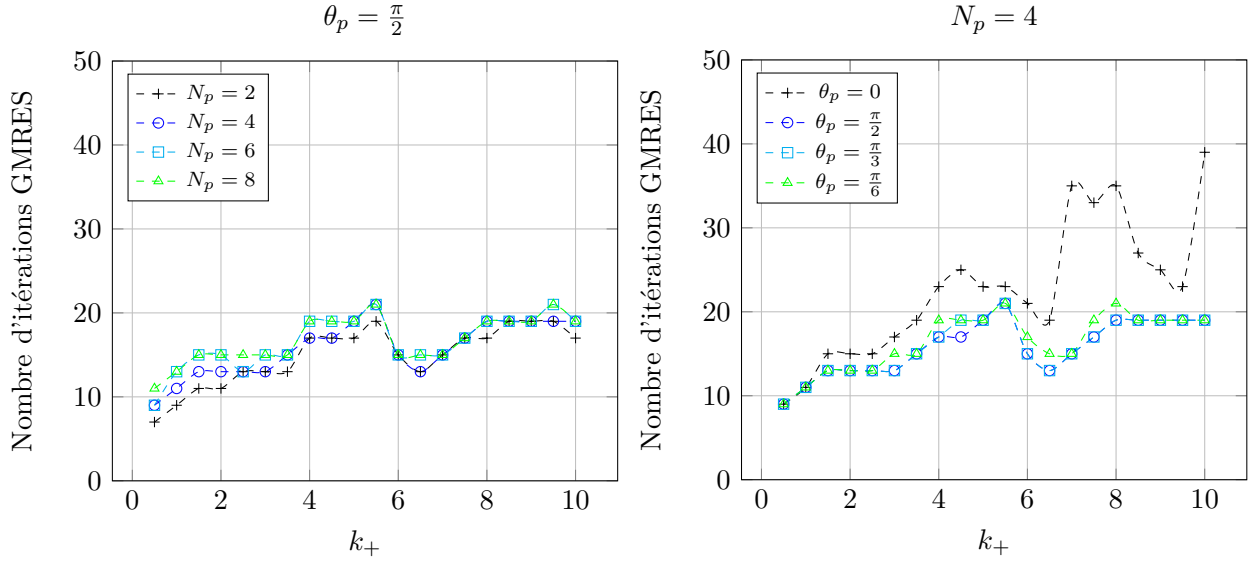


FIGURE 3.5 – Influence des paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  en fonction de  $k_+$  sur la convergence du couplage faible FEM-BEM pour  $\delta = 2$

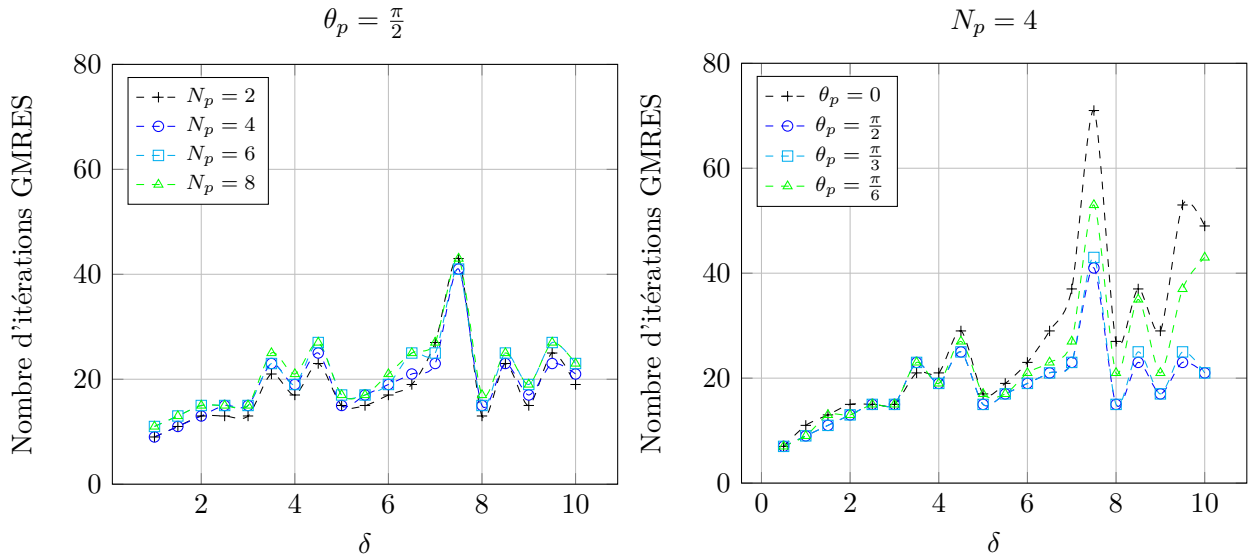


FIGURE 3.6 – Influence des paramètres  $N_p$  et  $\theta_p$  en fonction de  $\delta$  sur la convergence du couplage faible FEM-BEM pour  $k_+ = 2$

### Influence des ordres d'approximation $(\alpha; \beta)$ sur la convergence du couplage faible

À présent, nous fixons les paramètres  $\delta = 2$  et  $k_+ = 1$ . Nous nous intéressons au cube unité. La Figure 3.7 montre l'influence des ordres d'approximation éléments finis  $(\alpha; \beta)$  sur la convergence du couplage faible FEM-BEM avec  $(-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,z_-}^0)_\alpha^\beta$ . Le premier graphique présente l'évolution du nombre d'itérations GMRES en fonction de  $n_\lambda$ , où  $\alpha = 2$  et

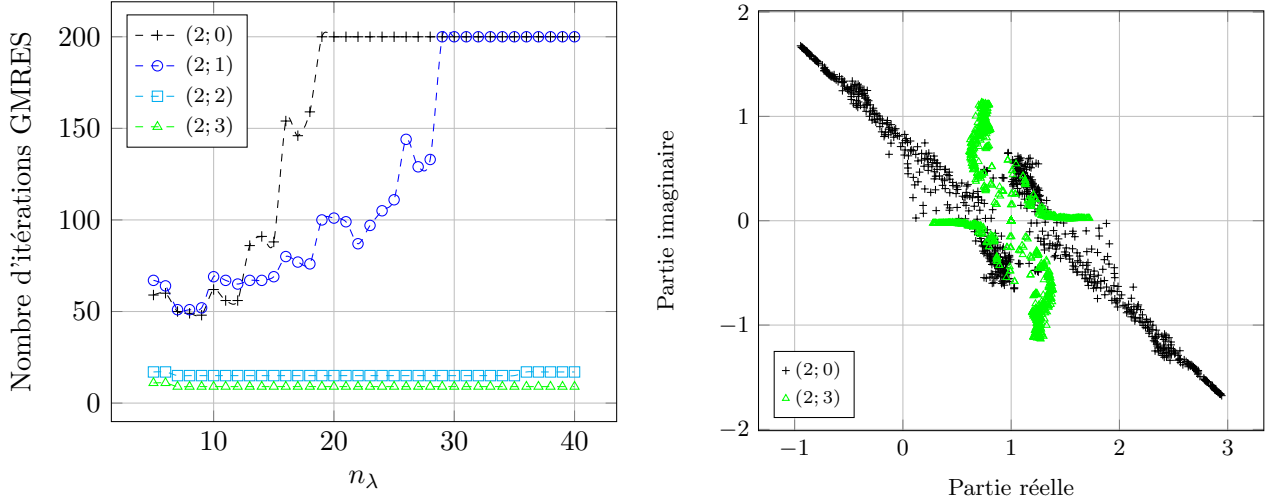


FIGURE 3.7 – Influence des paramètres  $(\alpha; \beta)$  sur la convergence du couplage faible FEM-BEM

$\beta \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ . Nous constatons que pour  $\beta = 0$  et  $\beta = 1$ , le nombre d'itérations augmente fortement avec  $n_\lambda$ . Pour  $\beta = 2$  et  $\beta = 3$  par contre, nous observons une convergence indépendante de  $n_\lambda$ , ce qui est une propriété importante dans des cas pratiques industriels demandant un raffinement de maillage. Nous en déduisons que, comme la convergence GMRES dépend fortement des propriétés spectrales de  $\mathbf{Id}_h - \mathcal{A}_h$ , le choix des paramètres  $(\alpha; \beta)$  a un impact sur la distribution des valeurs propres. Pour illustrer ce point, nous reportons dans le deuxième graphique la distribution des valeurs propres de  $\mathbf{Id}_h - \mathcal{A}_h$  dans le plan complexe lorsque  $n_\lambda = 10$ . Pour le couple  $(\alpha = 2; \beta = 0)$ , la convergence est atteinte en 62 itérations, ce qui peut être expliqué par la présence de valeurs propres à partie réelle négative. En revanche, la paire  $(\alpha = 2; \beta = 3)$  conduit à une excellente convergence en 9 itérations, marquée par un regroupement d'un grand nombre de valeurs propres ( $\sim 80\%$ ) en  $(1, 0)$ . L'approximation grossière de  $\Lambda_{-,k_-,z_-}$  par  $\Lambda_{-,k_-,z_-}^0$  explique la présence également de quelques valeurs propres éloignées de  $(1, 0)$ . La matrice  $\mathbf{Id}_h - \mathcal{A}_h$  reste néanmoins quasi-nilpotente puisque  $\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  est une approximation précise de  $\Lambda_{+,k_+,z_+}$ . Ce qui est en accord avec l'étude spectrale du couplage faible. Ainsi, les résultats numériques de la Figure 3.7 suggèrent que  $\beta$  doit vérifier

$$\beta \geq \alpha. \quad (3.42)$$

Enfin, nous faisons remarquer que l'approximation de  $\mathbf{g}_{+,h}$  par des éléments finis d'ordre 0 semble suffire.

### Influence des opérateurs de transmission sur la convergence du couplage faible

Après avoir étudié et fixé les paramètres mis en jeu dans le couplage faible FEM-BEM, nous comparons à présent la qualité des différents opérateurs de transmission en fonction de  $\delta$ ,  $k_+$  et  $n_\lambda$ . Nous verrons qu'il existe un couple d'opérateurs tel que les problèmes de résonance soient fortement atténués. Dorénavant, nous indiquons toujours sur les figures les valeurs des paramètres physiques  $k_+$  et  $\delta$ , ainsi que le nombre de points par longueur d'onde  $n_\lambda$ . Nous reprenons les notations introduites dans l'étude spectrale du couplage faible afin d'alléger les figures. Nous présentons dans la Figure 3.8 le comportement du couplage faible FEM-BEM pour différentes valeurs de  $\delta$ . Dans le cas des problèmes de diffraction à contraste élevé, nous pouvons clairement constater que, comme mentionné dans le chapitre

précédent, l'utilisation de  $\mathbf{T}_+ = -\Lambda_+^0$  est plus efficace que  $\mathbf{T}_+ = \Lambda_-^0$ . Ce phénomène est encore plus marqué lorsque nous augmentons  $\beta$ . Pour illustrer cette propriété, nous fixons

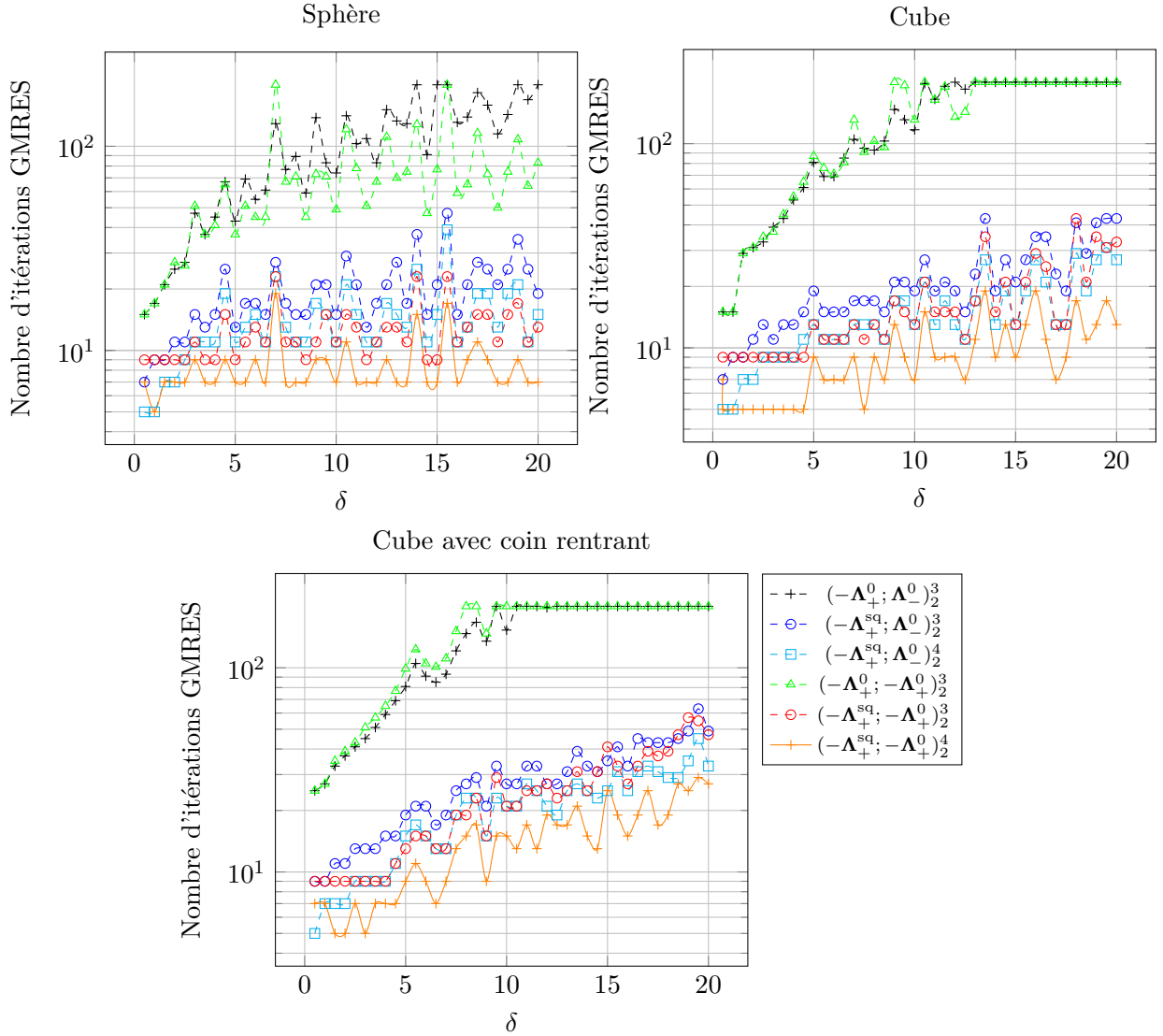


FIGURE 3.8 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction du paramètre de contraste  $\delta$  (avec  $k_+ = 1$  et  $n_\lambda = 5$ )

$\mathbf{T}_- = -\Lambda_+^{\text{sq}}$ , avec  $\alpha = 2$  et  $\beta = 3$ . Nous considérons un paramètre d'impédance  $\mathcal{Z}_x$  qui varie entre 10 et  $5 \times 10^4$ . Nous reportons dans la Figure 3.9 l'évolution du nombre d'itérations GMRES pour les opérateurs  $\mathbf{T}_+ = \mathcal{Z}_x^{-1}(\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n})$  correspondant à diverses valeurs  $\mathcal{Z}_x$  pour un contraste  $\delta = 13$ . Nous observons que le nombre d'itérations est minimal dans un intervalle où  $\mathcal{Z}_+$  semble être une bonne approximation du point gauche de cet intervalle. À l'inverse, la valeur  $\mathcal{Z}_-$  n'est pas un choix approprié puisqu'elle se situe en dehors de cette plage de valeurs optimales. La Figure 3.10 montre l'évolution du nombre d'itérations GMRES en fonction du nombre d'onde extérieur  $k_+$ . Nous observons que la paire  $(-\Lambda_+^{\text{sq}}; -\Lambda_+^0)_2^3$  mène à la plus faible dépendance des itérations GMRES par rapport au nombre d'onde extérieur. Remarquons que les taux de convergence pour les paires  $(-\Lambda_+^{\text{sq}}; -\Lambda_+^0)_2^3$  et  $(-\Lambda_+^{\text{sq}}; \Lambda_-^0)_2^3$  sont quasiment identiques puisque le contraste  $\delta = 2$  est faible. Comme nous pouvons le voir sur les Figures 3.8 et 3.10, l'augmentation du nombre d'itérations GMRES est plus significative pour le cube et le cube avec coin rentrant que pour la sphère. Cela est dû au fait que les approximations (2.84) et (2.83) sont *a priori* formellement dérivées pour des objets

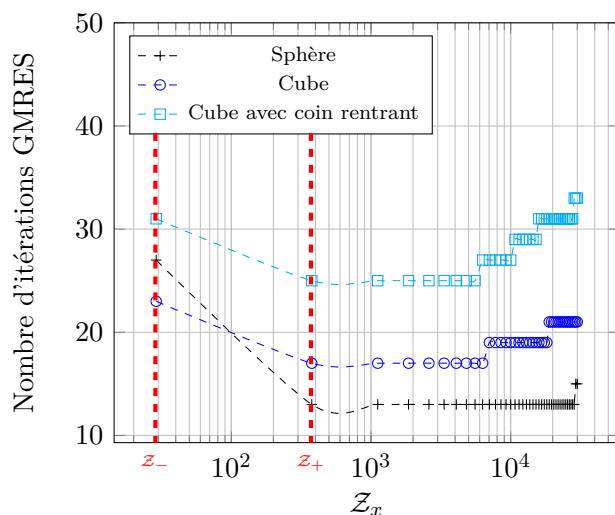


FIGURE 3.9 – Nombre d’itérations GMRES du couplage FEM-BEM faible pour différents objets diffractants en fonction de  $Z_x$  (avec  $k_+ = 1$ ,  $\delta = 13$  et  $n_\lambda = 5$ )

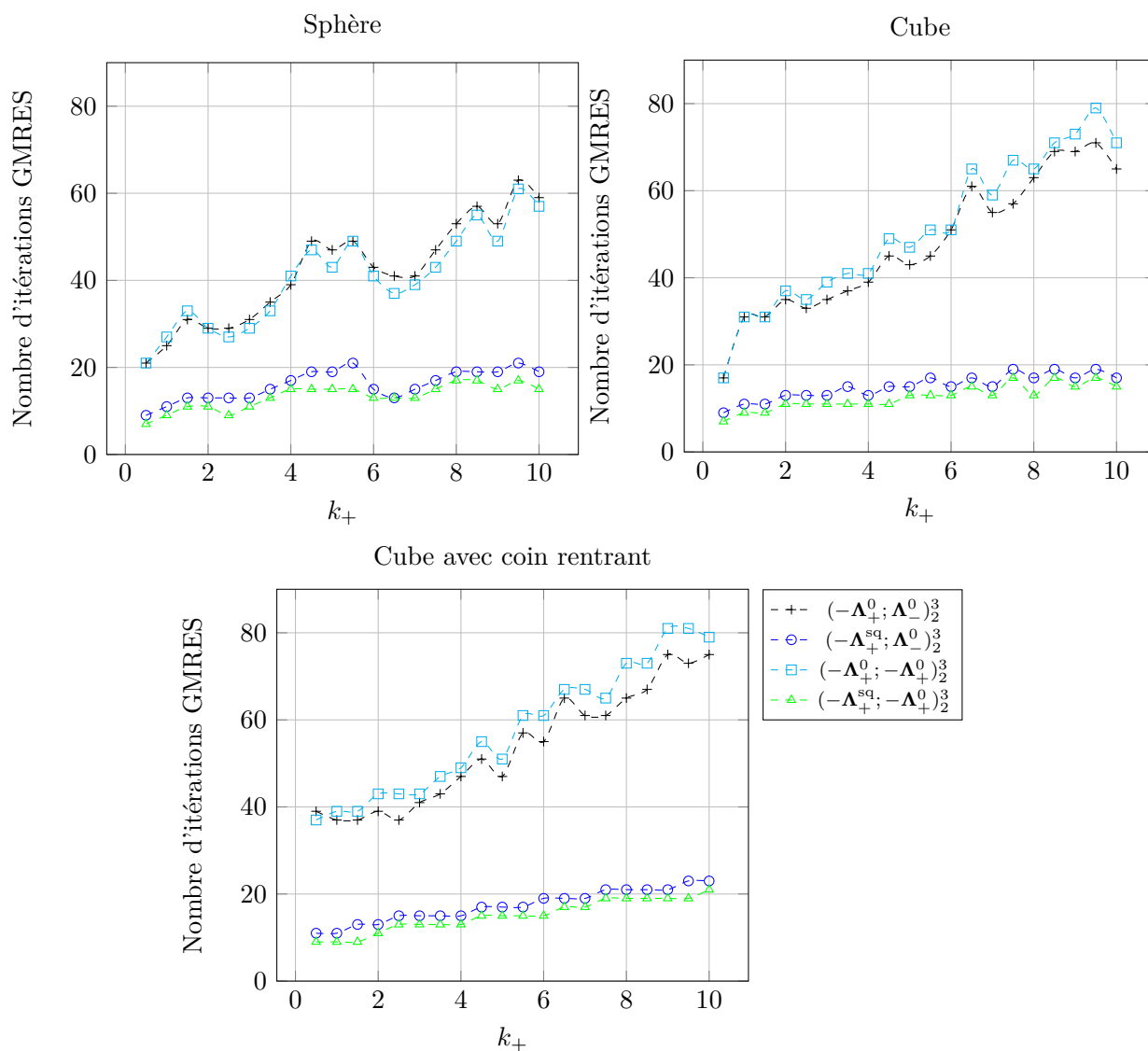


FIGURE 3.10 – Nombre d’itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de  $k_+$  (avec  $\delta = 2$  et  $n_\lambda = 5$ )



réguliers et convexes. La Figure 3.11 montre l'évolution du nombre d'itérations GMRES en fonction de  $n_\lambda$ . Pour  $(-\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; \mp \mathbf{\Lambda}_\pm^0)_2^3$ , le taux de convergence est indépendant du raffinement

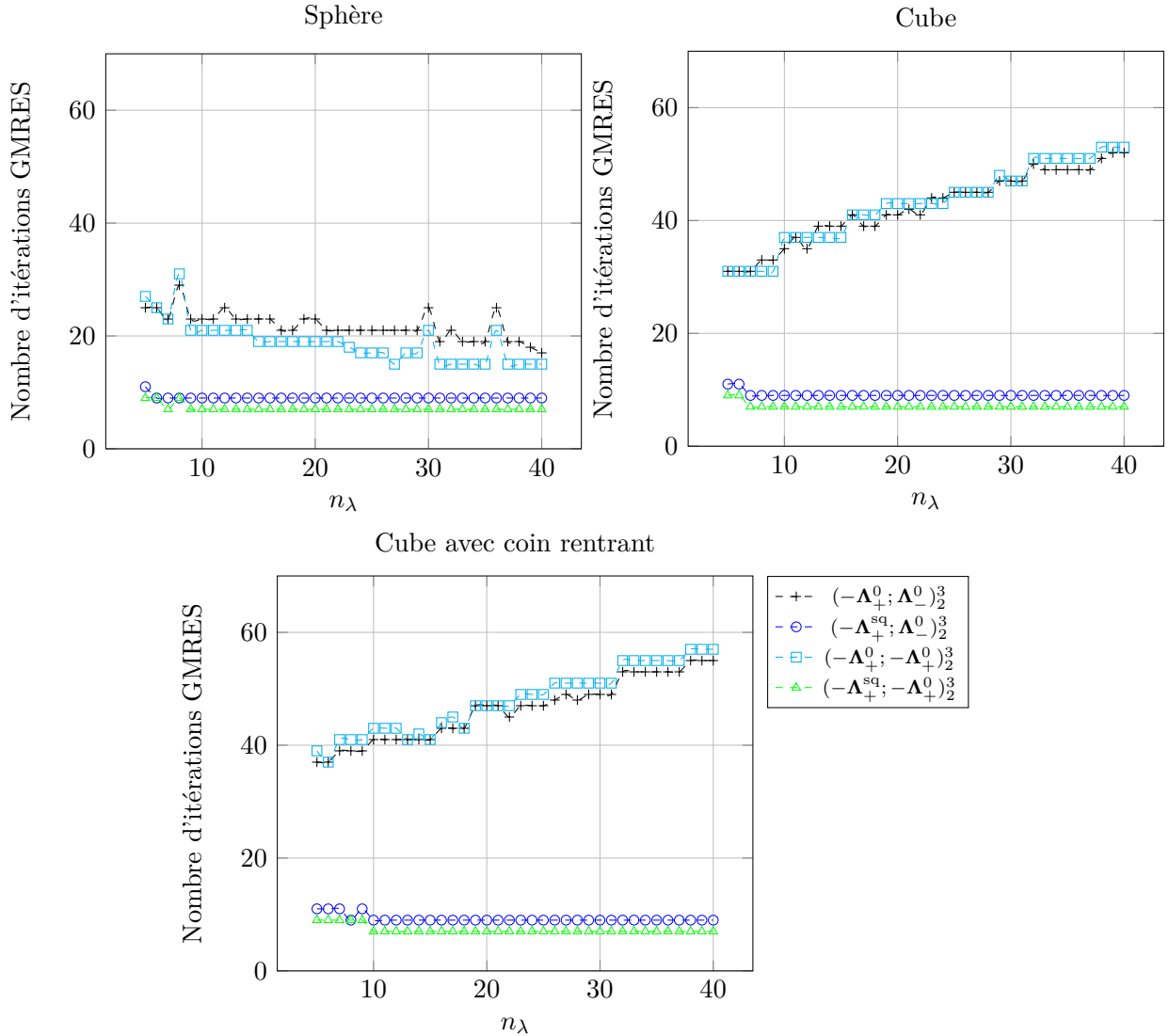


FIGURE 3.11 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction du raffinement de maillage (avec  $\delta = 2$ ,  $k_+ = 1$  et  $n_\lambda$ )

de maillage alors qu'il se détériore clairement avec  $(-\mathbf{\Lambda}_+^0; \mp \mathbf{\Lambda}_\pm^0)_2^3$ . Enfin, la Figure 3.12 présente l'évolution des résidus relatifs en fonction du nombre d'itérations GMRES pour différentes paires  $(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+)_\alpha^\beta$ . La vitesse de convergence est optimale lorsque  $\mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_+^0$  et  $\beta > \alpha$ . Ces résultats sont cohérents avec la discussion menée dans ce paragraphe.

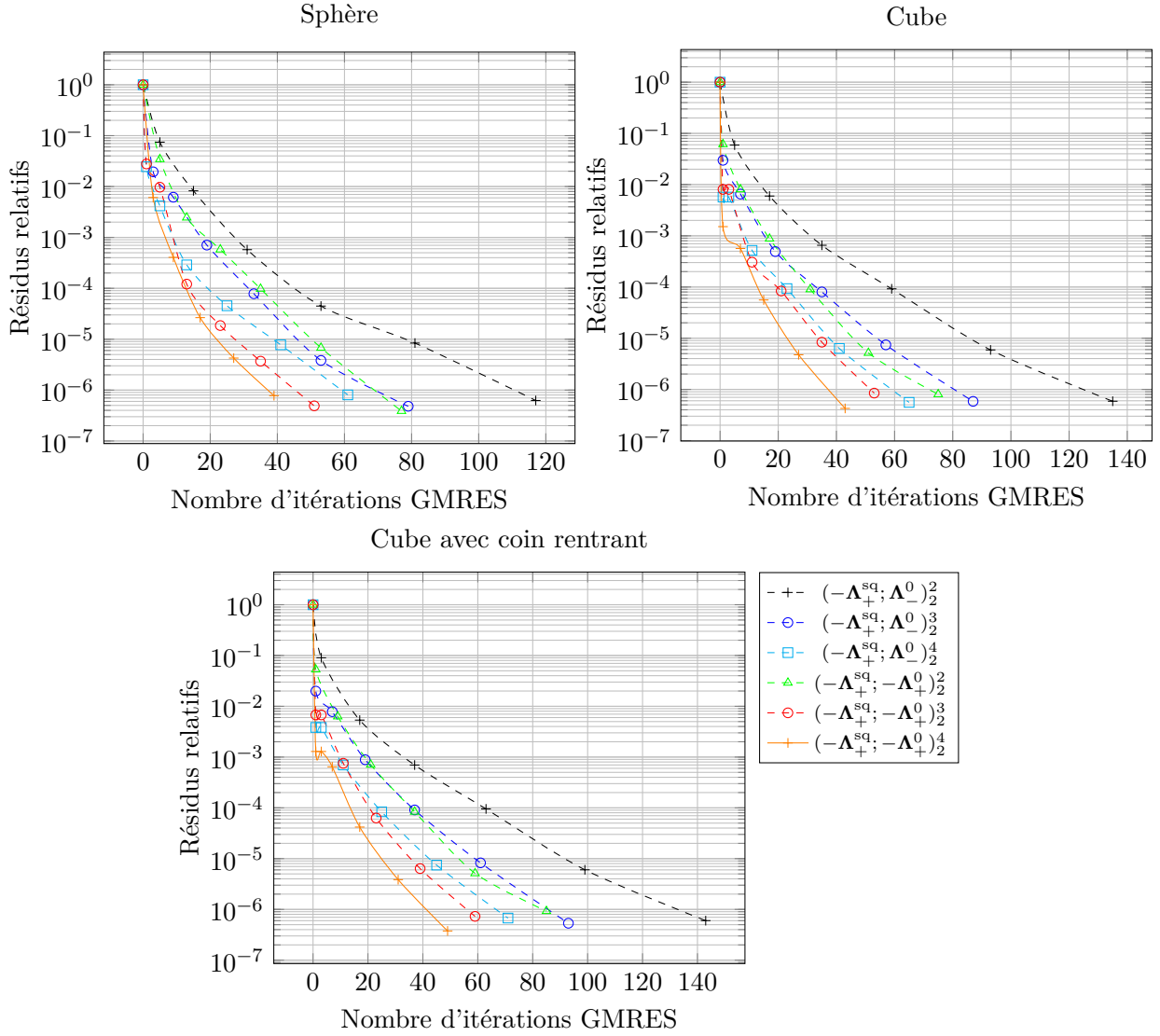


FIGURE 3.12 – Evolution des résidus pour le couplage FEM-BEM faible (avec  $k_+ = 1$ ,  $\delta = 5$  et  $n_\lambda = 5$ )

À partir de ces résultats, nous concluons que le couplage faible FEM-BEM avec le choix des opérateurs  $(-\Lambda_+^{\text{sq}}; -\Lambda_+^0)_\alpha^\beta$ , pour  $\beta > \alpha$ , est très robuste et bien adapté à la résolution de problèmes de diffraction à haute fréquence et à fort contraste. Ajouté à cela, d'un point de vue industriel, si nous devons choisir une surface d'échange, nous opterons plutôt pour une surface convexe et régulière.

### Validation de la solution numérique du couplage faible

Nous désignons respectivement par  $e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{analy}}$ ,  $e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{analy}}$ ,  $e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}$  et  $e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$ , les erreurs  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  relatives associées aux courants électrique et magnétique et les différences  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  relatives entre les courants électrique et magnétique provenant du couplage fort BEM-BEM et du couplage faible FEM-BEM. Celles-ci sont définies comme suit :

$$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{X}} = \frac{\|\gamma_t^- \mathbf{H}_h - \gamma_t^- \mathbf{H}^{\text{X}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)}}{\|\gamma_t^- \mathbf{H}^{\text{X}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)}}, \quad e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{X}} = \frac{\|\gamma_t^- \mathbf{E}_h - \gamma_t^- \mathbf{E}^{\text{X}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)}}{\|\gamma_t^- \mathbf{E}^{\text{X}}\|_{\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)}}. \quad (3.43)$$

Dans le but de valider le couplage faible FEM-BEM, nous calculons pour la sphère diélectrique les erreurs  $e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{analy}}$  et  $e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{analy}}$  pour différents  $n_\lambda$  (voir Figure 3.13) en prenant comme solution de référence les courants électrique/magnétique analytiques (*via* la série de Mie [10]). Ajouté à cela, nous évaluons les différences  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  relatives  $e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}$  et  $e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$ . Alors que la solution du couplage faible FEM-BEM n'a qu'un seul chiffre de précision en erreur analytique, elle est très proche (3 chiffres de précision) de la solution du couplage fort BEM-BEM. Ce comportement est néanmoins attendu. En effet, la discrétisation de la sphère par des triangles plans introduit une erreur géométrique non négligeable. Nous reportons

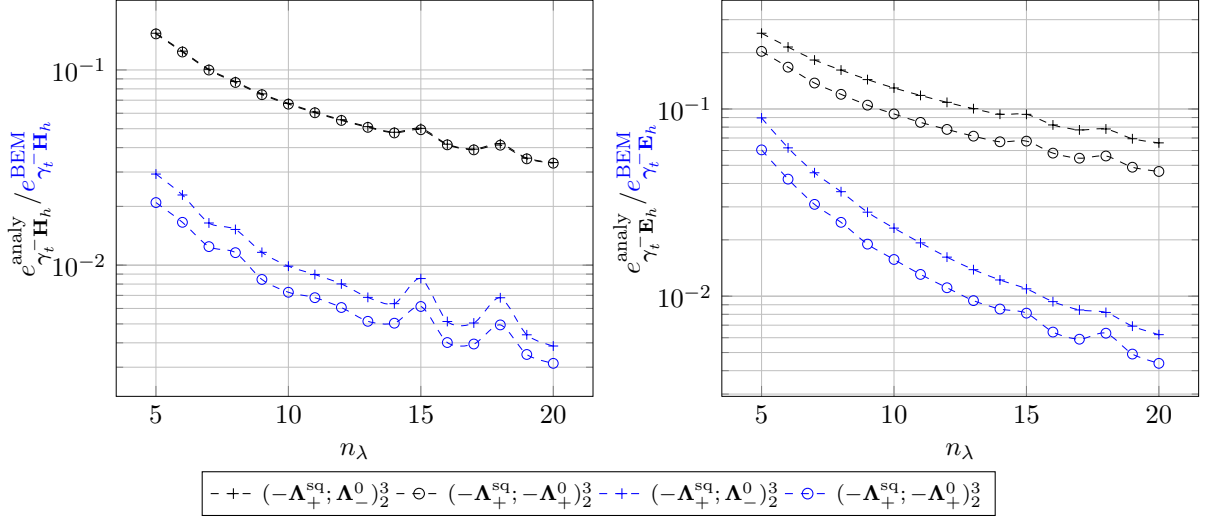


FIGURE 3.13 – Erreurs relatives  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  (en noir) entre les courants électrique(à gauche)/magnétique(à droite) analytiques et du couplage faible FEM-BEM, et différence relative  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  (en bleu) entre les courants électrique(à gauche)/magnétique(à droite) du couplage fort BEM-BEM et du couplage faible FEM-BEM en fonction de  $n_\lambda$  (avec  $k_+ = 2$ ,  $\delta = 2$ )

ensuite dans la Table 3.3 les différences relatives pour tous les objets diffractants avec le choix  $(-\Lambda_+^{\text{sq}}; -\Lambda_+^0)_2^3$ . Nous remarquons une plus faible précision du courant magnétique pour le

$k_+$	Sphère			Cube			Cube avec coin rentrant		
	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}$
1	1.6%	0.4%	1.0%	21%	1.7%	4.9%	21.5%	2.5%	5.5%
2	1.6%	0.7%	2.4%	11.8%	1.3%	4.1%	13.7%	1.6%	5.0%
3	2.7%	2.0%	2.9%	12%	1.2%	3.6%	11.9%	1.5%	4.3%
4	1.2%	1.5%	2.1%	6.9%	1.2%	4.3%	8.3%	1.6%	5.9%

TABLE 3.3 – Différences relatives  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  entre les courants magnétique et électrique du couplage faible FEM-BEM et du couplage fort BEM-BEM pour la sphère, le cube et le cube avec coin ( $\delta = 2$  et  $n_\lambda = 10$ )

cube et le cube avec coin rentrant. Cela est due à la présence de parties non régulières sur la surface d'échange  $\Gamma$  (coins...) rendant la définition de  $(\cdot \wedge \mathbf{n})$  (et donc des opérateurs de transmission) problématique sur celles-ci. Cependant, cette perte de précision, qui comme nous le verrons plus tard a une influence très faible sur la SER, peut facilement être corrigée

par une étape de “post-traitement” en considérant le problème intérieur (1.30a) avec un courant électrique numérique connu. La différence relative  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  associée à ce nouveau courant magnétique est notée  $\widetilde{e_{\gamma_t}^{\text{BEM}}}$  dans la Table 3.3. Une autre approche afin de résoudre le manque de précision du courant magnétique pour le cube et cube avec coin rentrant est de choisir une nouvelle surface d’échange régulière entourant l’objet diffractant. En guise d’exemple, en choisissant  $n_\lambda = 10$ ,  $\delta = 2$ ,  $k_+ = 1$  et une sphère comme surface d’échange entourant le cube avec coin rentrant, nous passons d’une différence  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  relative associée au courant magnétique de 21.5% (aucune approche) à 4.9%. De plus, la différence en norme euclidienne relative entre la SER bistatique avec  $\phi = 0$ , (c’est-à-dire dans le plan  $\{y = 0\}$ ), du couplage fort BEM-BEM et du couplage faible FEM-BEM, notée  $e_{\text{SER}}$  et définie par

$$e_{\text{SER}} = \frac{\|SER(\boldsymbol{\sigma}(\theta, 0); \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}}) - SER(\boldsymbol{\sigma}(\theta, 0); \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}})^{\text{BEM}}\|}{\|SER(\boldsymbol{\sigma}(\theta, 0); \boldsymbol{\sigma}_{\text{inc}})^{\text{BEM}}\|}, \quad (3.44)$$

varie de 1.6% (aucune approche) à 0.2%. Ce qui montre que la perte de précision du courant magnétique n’influe que faiblement sur la SER bistatique. Cette approche a néanmoins l’inconvénient d’augmenter la taille du problème intérieur. La Figure 3.14 présente la différence relative en norme euclidienne entre la SER bistatique du couplage fort BEM-BEM et du couplage faible FEM-BEM pour la sphère selon  $n_\lambda$ . Nous constatons une meilleure précision lorsque  $\mathbf{T}_+ = -\boldsymbol{\Lambda}_+^0$ . Dans la Figure 3.15, nous traçons la SER bistatique en fonction de

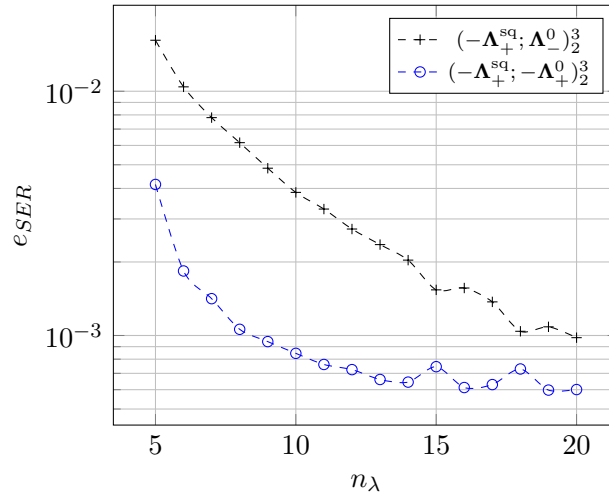


FIGURE 3.14 – Différence relative entre la SER bistatique du couplage fort BEM-BEM et du couplage faible FEM-BEM en fonction de  $n_\lambda$  (avec  $k_- = 4$ ,  $k_+ = 2$ ,  $\mathcal{Z}_- = \mathcal{Z}_+/2$ )

l’angle  $\theta$  avec  $\phi = 0$  pour différentes tolérances GMRES et pour la paire d’opérateurs recommandée  $(-\boldsymbol{\Lambda}_+^{\text{sq}}; -\boldsymbol{\Lambda}_+^0)_2^3$ . Nous calculons également le champ lointain de référence analytique [10] pour la sphère et le champ lointain de couplage fort BEM-BEM pour le cube et le cube avec coin rentrant. Comme prévu, les résultats confirment que la SER converge lorsque la tolérance GMRES diminue et que une tolérance de  $10^{-4}$  est suffisante pour obtenir une SER précise.

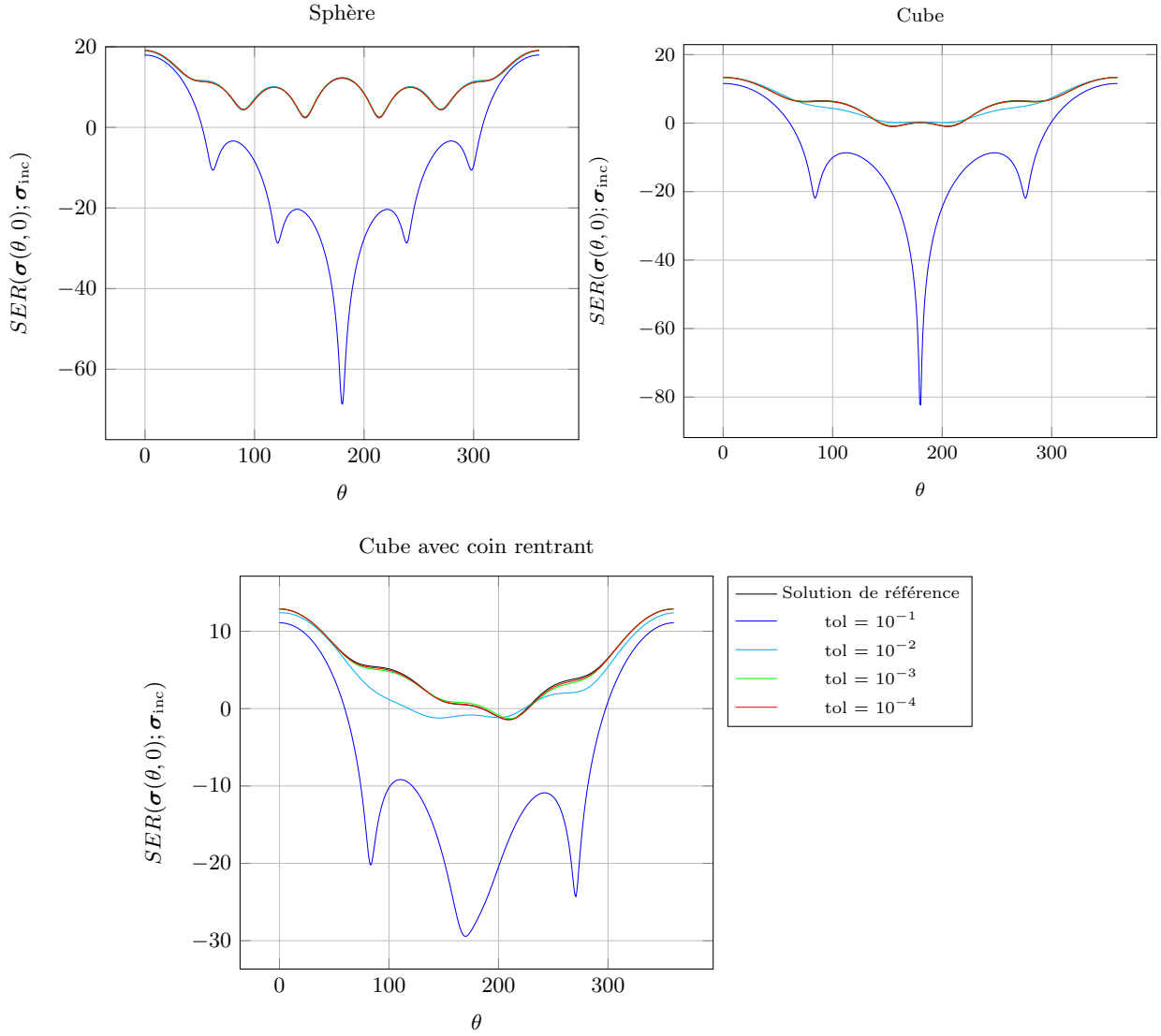


FIGURE 3.15 – Convergence de la SER bistatique par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible FEM-BEM (avec  $\delta = 2$ ,  $k_+ = 3$  et  $n_\lambda = 10$ )

### 3.3.2 Comparaison des différents choix d'espace pour $\mathbf{g}_{+,h}$ et $\mathbf{g}_{-,h}$ dans le cas homogène

Nous avons mentionné auparavant que le choix des espaces de discrétisation des inconnues du couplage faible n'est pas si direct. Nous avons montré que pour  $(\mathbf{g}_{-,h}, \mathbf{g}_{+,h}) \in [\mathbf{V}_{h,\beta} \times \mathbf{V}_{h,0}]$ , la paire menant à la meilleure performance au niveau de la précision et la convergence est  $(-\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; -\mathbf{\Lambda}_+^0)_\alpha^\beta$ , avec  $\alpha < \beta$ . Pour cette paire optimale, nous allons comparer la performance du couplage faible FEM-BEM pour différents choix d'espace de discrétisation des inconnues du couplage faible  $\mathbf{g}_{\pm,h}$  lorsque  $\alpha = 2$  et  $\beta = 3$ . Les différentes combinaisons possibles sont rappelées ci-dessous :

- Choix #1 :  $(\mathbf{g}_{-,h}, \mathbf{g}_{+,h}) \in [\mathbf{V}_{h,\beta} \times \mathbf{V}_{h,0}]$ .
- Choix #2 :  $(\mathbf{g}_{-,h}, \mathbf{g}_{+,h}) \in [\mathbf{V}_{h,\beta} \times \mathbf{Z}_{h,0}]$ .
- Choix #3 :  $(\mathbf{g}_{-,h}, \mathbf{g}_{+,h}) \in [\mathbf{Z}_{h,\beta} \times \mathbf{Z}_{h,0}]$ .
- Choix #4 :  $(\mathbf{g}_{-,h}, \mathbf{g}_{+,h}) \in [\mathbf{Z}_{h,\beta} \times \mathbf{V}_{h,0}]$ .

Nous présentons dans la Figure 3.16 le comportement du couplage faible FEM-BEM pour différents paramètres de contraste  $\delta$ . La Figure 3.17 illustre la dépendance du nombre d'itérations GMRES en fonction du nombre d'onde extérieur  $k_+$ . La Figure 3.18 donne le nombre d'itérations GMRES nécessaires pour résoudre le couplage faible FEM-BEM en fonction du raffinement du maillage. D'un point de vue convergence, nous constatons que

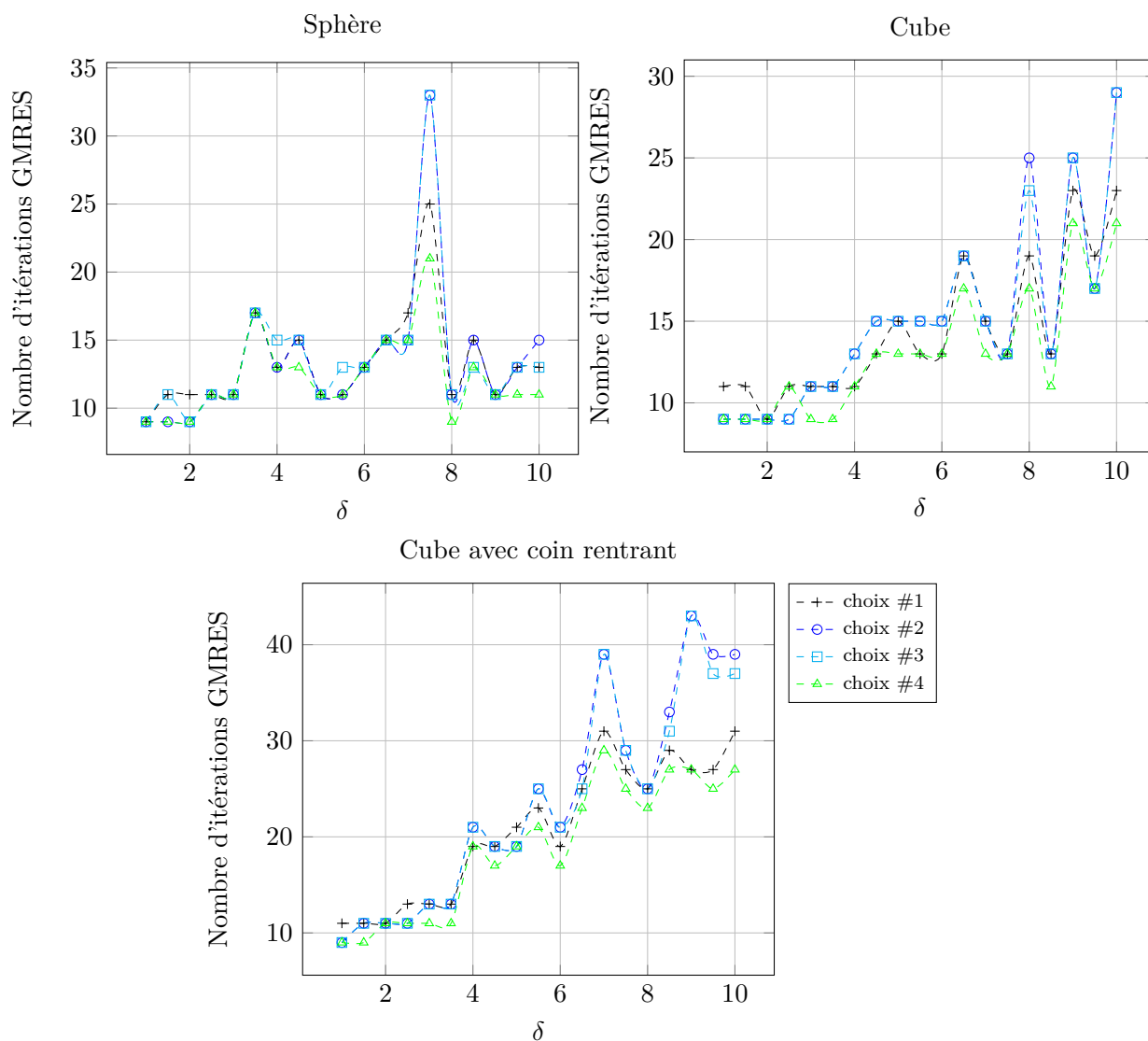


FIGURE 3.16 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction du paramètre de contraste  $\delta$  et des différents couples d'espaces de discrétisation (avec  $k_+ = 2$  et  $n_\lambda = 5$ )

les choix #1 et #4 semblent être légèrement plus performants que les choix #2 et #3, notamment pour certains couples  $(k_+, \delta)$  spécifiques augmentant anormalement (problème de résonance) le nombre d'itérations GMRES. Les choix #1 et #4 ont par ailleurs des performances très proches.

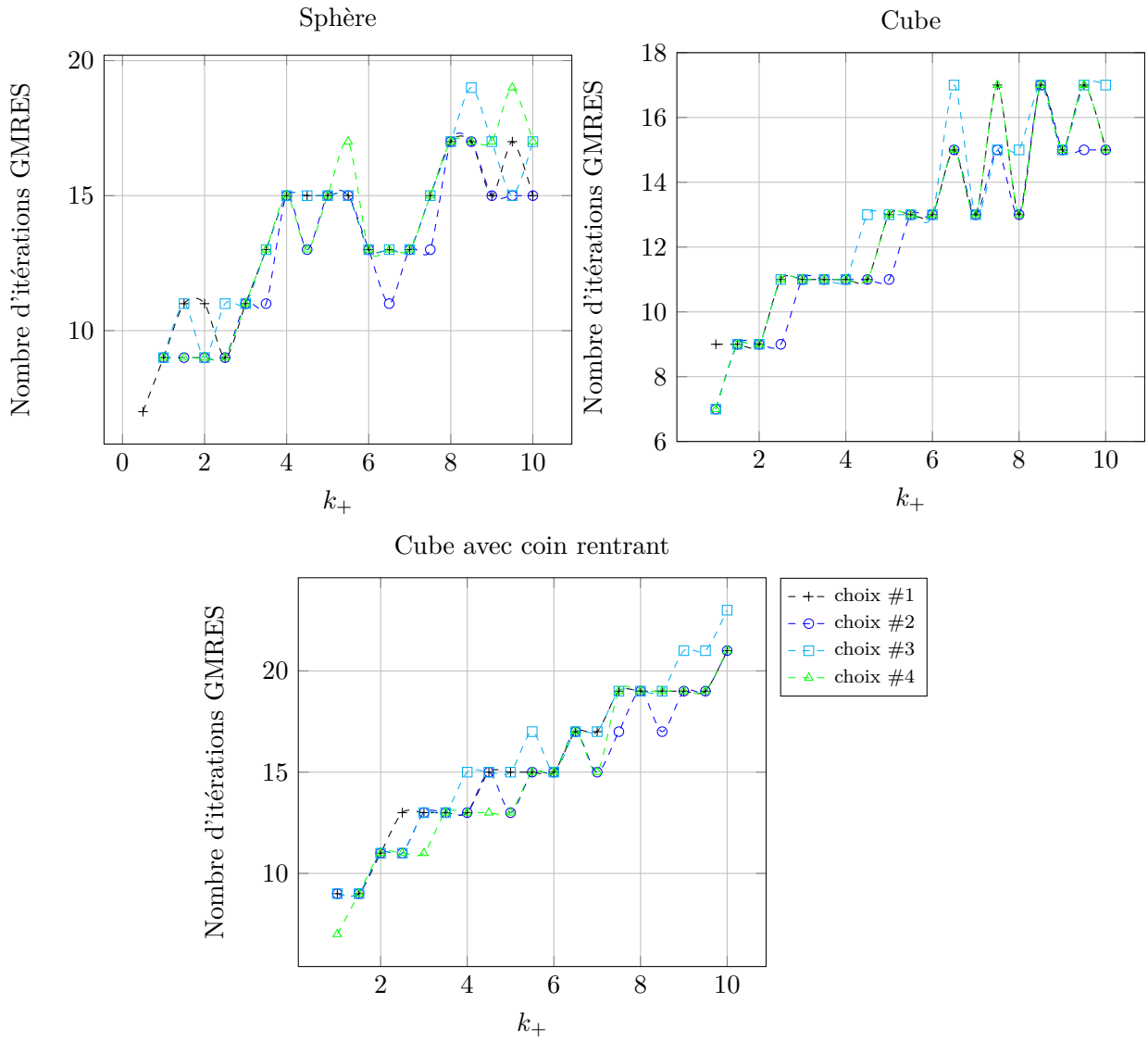


FIGURE 3.17 – Nombre d’itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction de  $k_+$  et des différents couples d’espaces de discrétisation (avec  $\delta = 2$  et  $n_\lambda = 5$ )

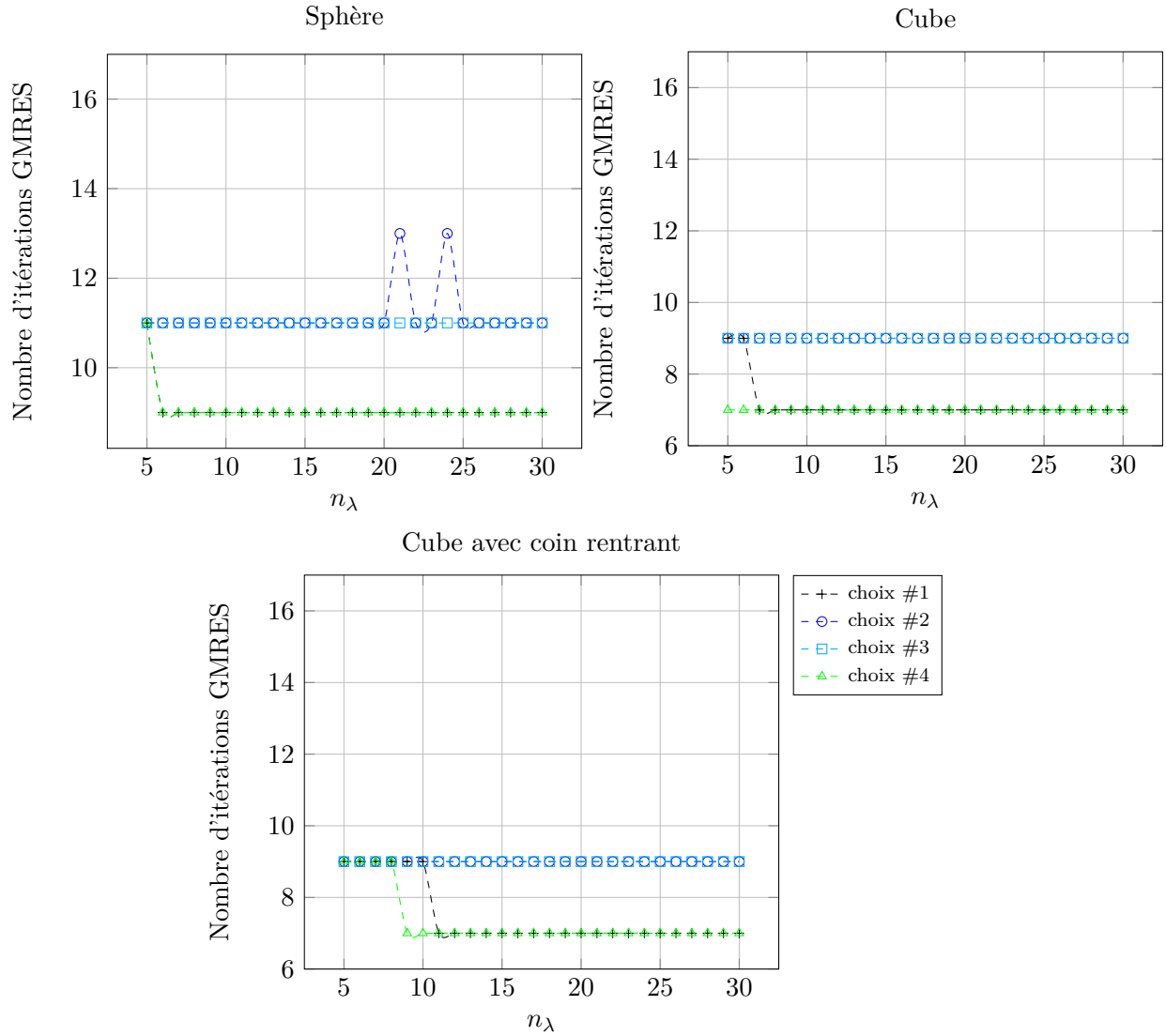


FIGURE 3.18 – Nombre d’itérations GMRES pour le couplage FEM-BEM faible en fonction de  $n_\lambda$  et des différents couples d’espaces de discrétisation (avec  $k_+ = 1$  et  $\delta = 3$ )

Enfin, nous reportons dans la Table 3.4 les différences relatives en norme  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  pour le cube en prenant la solution du couplage fort BEM-BEM pour référence. Nous observons une

$\delta$	Choix #1		Choix #2		Choix #3		Choix #4	
	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}$	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}$	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}$	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}$	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}$	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}$	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}$	$\frac{e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{BEM}}}{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}$
4	10.2%	1.4%	10.6%	2.3%	3.4%	12.0%	4.5%	11.7%
6	7.2%	0.8%	7.5%	1.0%	3.7%	4.2%	5.9%	4.3%
8	3.6%	1.5%	3.6%	1.6%	2.3%	6.2%	4.1%	6.2%
10	3.7%	1.1%	3.6%	1.2%	4.8%	8.5%	7.1%	5.9%
13	8.3%	9.0%	8.6%	9.6%	4.6%	5.6%	5.8%	5.4%

TABLE 3.4 – Différences relatives  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  entre les courants magnétique et électrique du couplage faible FEM-BEM et du couplage fort BEM-BEM pour le cube ( $k_+ = 1$ ,  $n_\lambda = 10$ ) et pour différents choix d’espace pour les inconnues du couplage faible

précision globale acceptable pour l’ensemble des choix. Tous ces résultats laissent penser



que le choix des espaces de discrétisation des inconnues du couplage faible a une légère influence sur la performance global du couplage faible. Par conséquent, le choix #1, i.e.  $(\mathbf{g}_{-,h}, \mathbf{g}_{+,h}) \in [\mathbf{V}_{h,\beta} \times \mathbf{V}_{h,0}]$ , semble être pertinent.

### 3.3.3 Cas inhomogène

Nous analysons à présent le cas des objets diffractants inhomogènes. Plus précisément, nous choisissons  $k_-$  et  $\mathcal{Z}_-$  comme des fonctions dépendantes de l'espace données par

$$k_- = \delta k_+ e^{-\|\mathbf{x}\|^2}, \quad \mathcal{Z}_- = \frac{\mathcal{Z}_+}{\delta} e^{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad (3.45)$$

où  $\delta \in \mathbb{R}_+^*$  est un paramètre de contraste. Les valeurs de  $k_+$ ,  $\delta$  et  $n_\lambda$  sont indiquées sur les figures. Nous présentons dans la Figure 3.19 le comportement du couplage faible FEM-BEM pour différents paramètres de contraste  $\delta$ . Dans la Figure 3.20, nous indiquons le nombre d'itérations GMRES nécessaires pour résoudre le couplage FEM-BEM faible en fonction du nombre d'onde extérieur  $k_+$ . La Figure 3.21 montre l'impact du raffinement du maillage sur le nombre d'itérations GMRES. Nous reportons ensuite dans la Table 3.5 les différences relatives en norme  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  entre les courants magnétique ( $e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{FB}}$ ) et électrique ( $e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{FB}}$ ) du couplage faible FEM-BEM et du couplage fort FEM-BEM pour la sphère unitaire avec le choix  $(-\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; -\mathbf{\Lambda}_+^0)_2^3$ . Enfin, nous traçons sur la Figure 3.22 la SER bistatique obtenue

$k_+$	$\delta$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}_h}^{\text{FB}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}_h}^{\text{FB}}$
1	2	9.9%	0.8%
2	2	7.5%	0.8%
1	3	5.7%	4.9%
1	4	2.9%	1.0%

TABLE 3.5 – Différence relatives  $\mathbf{L}_t^2(\Gamma_h)$  entre les courants magnétique et électrique du couplage faible et fort FEM-BEM pour la sphère ( $n_\lambda = 10$ )

avec différentes tolérances GMRES pour la paire d'opérateurs  $(-\mathbf{\Lambda}_+^{\text{sq}}; -\mathbf{\Lambda}_+^0)_2^3$ . Comme nous pouvons le constater sur ces différentes figures, nous obtenons des résultats similaires à ceux du cas homogène.

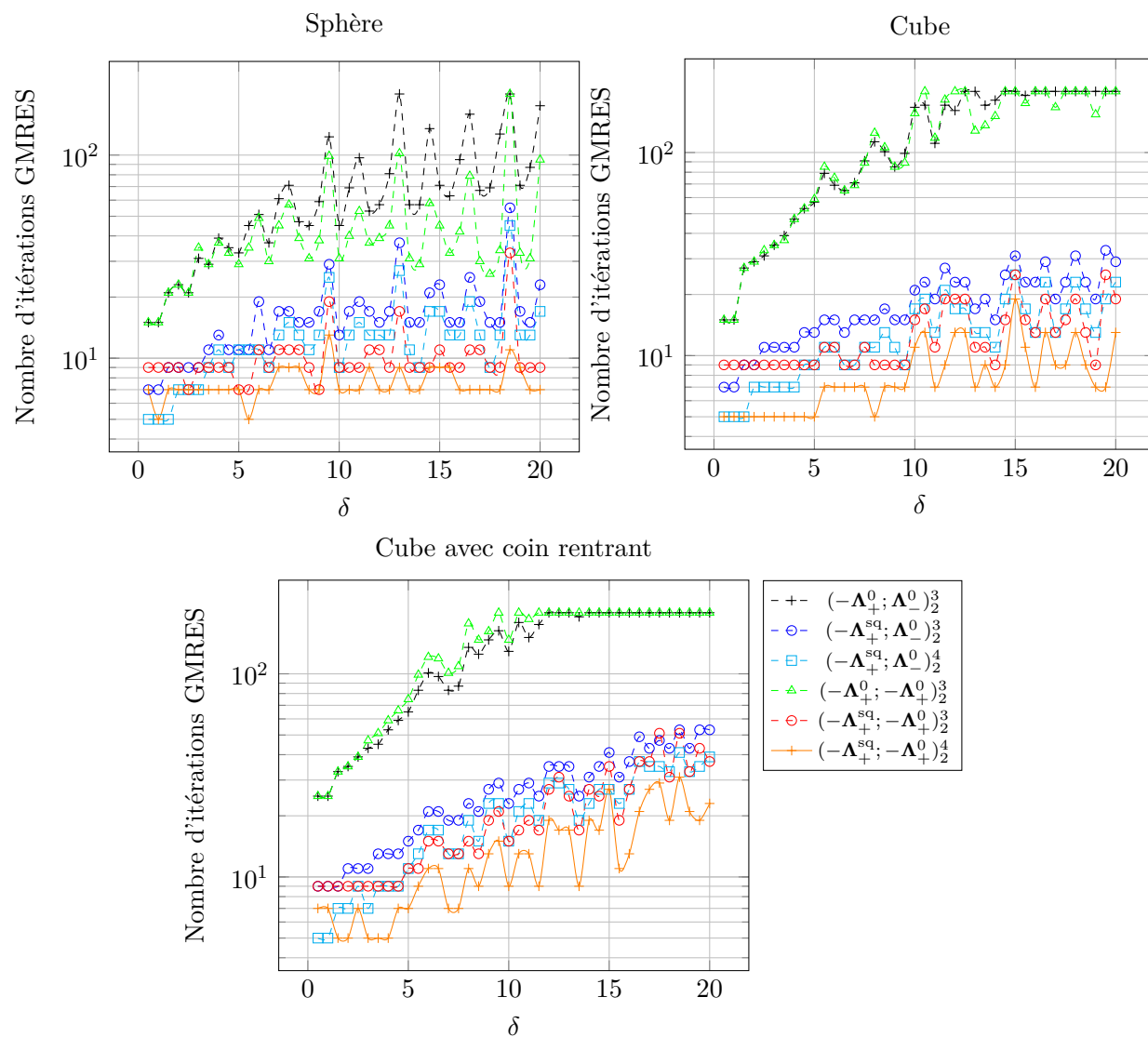


FIGURE 3.19 – Nombre d’itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de  $\delta$  dans le cas inhomogène (avec  $k_+ = 1$  et  $n_\lambda = 5$ )

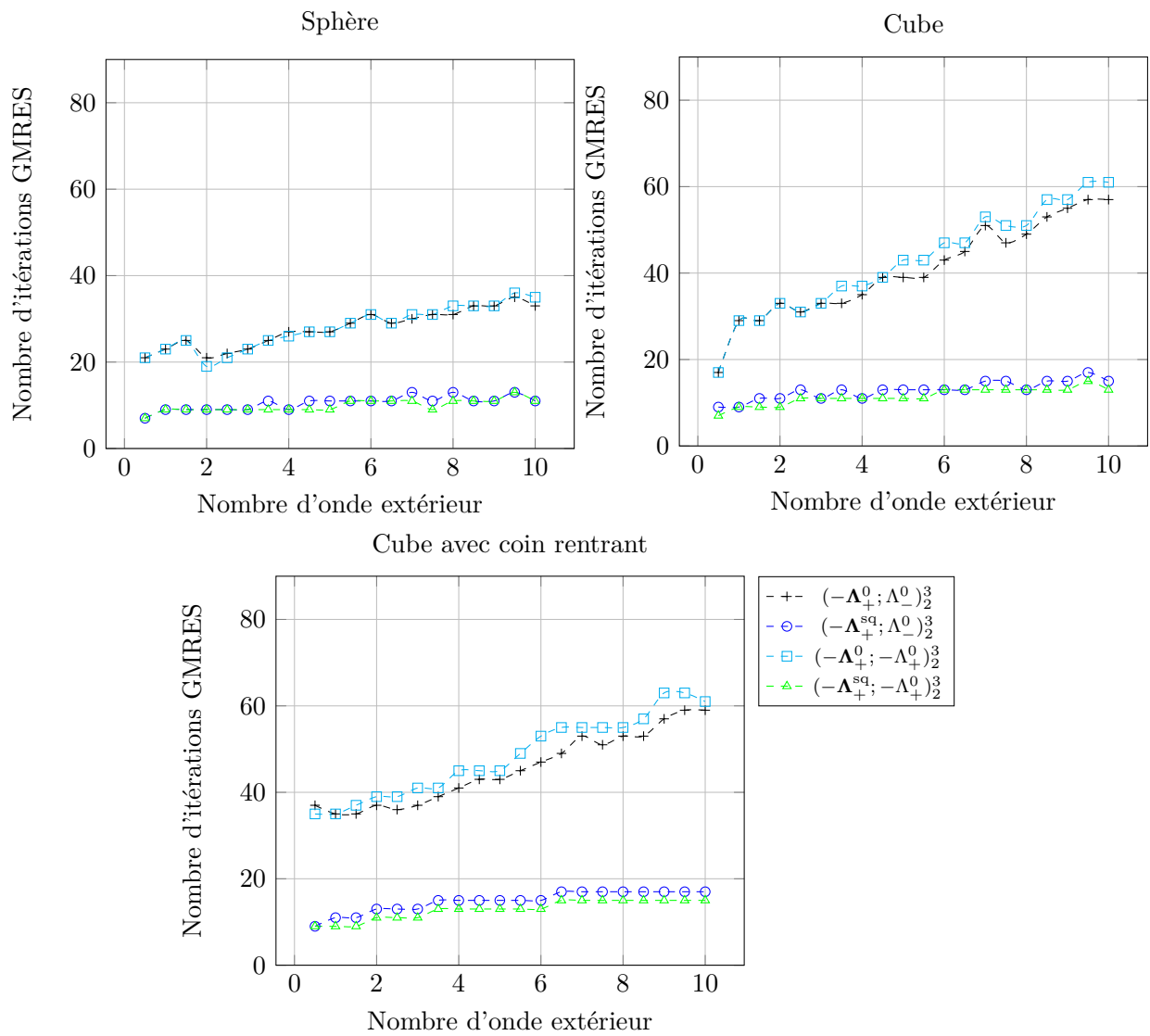


FIGURE 3.20 – Nombre d’itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de  $k_+$  dans le cas inhomogène (avec  $\delta = 2$  et  $n_\lambda = 5$ )

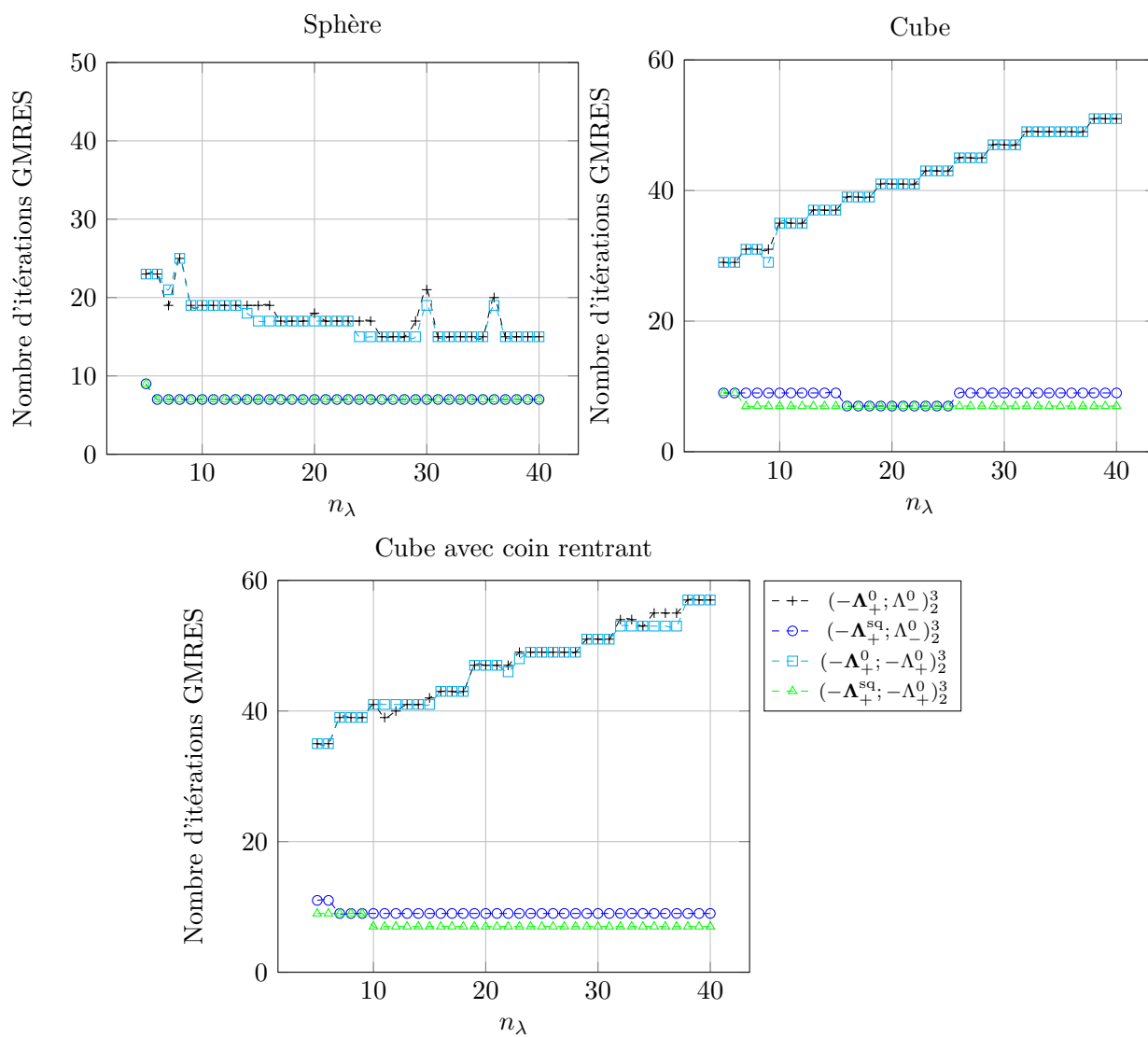


FIGURE 3.21 – Nombre d’itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction de  $n_\lambda$  dans le cas inhomogène (avec  $k_+ = 1$  et  $\delta = 2$ )

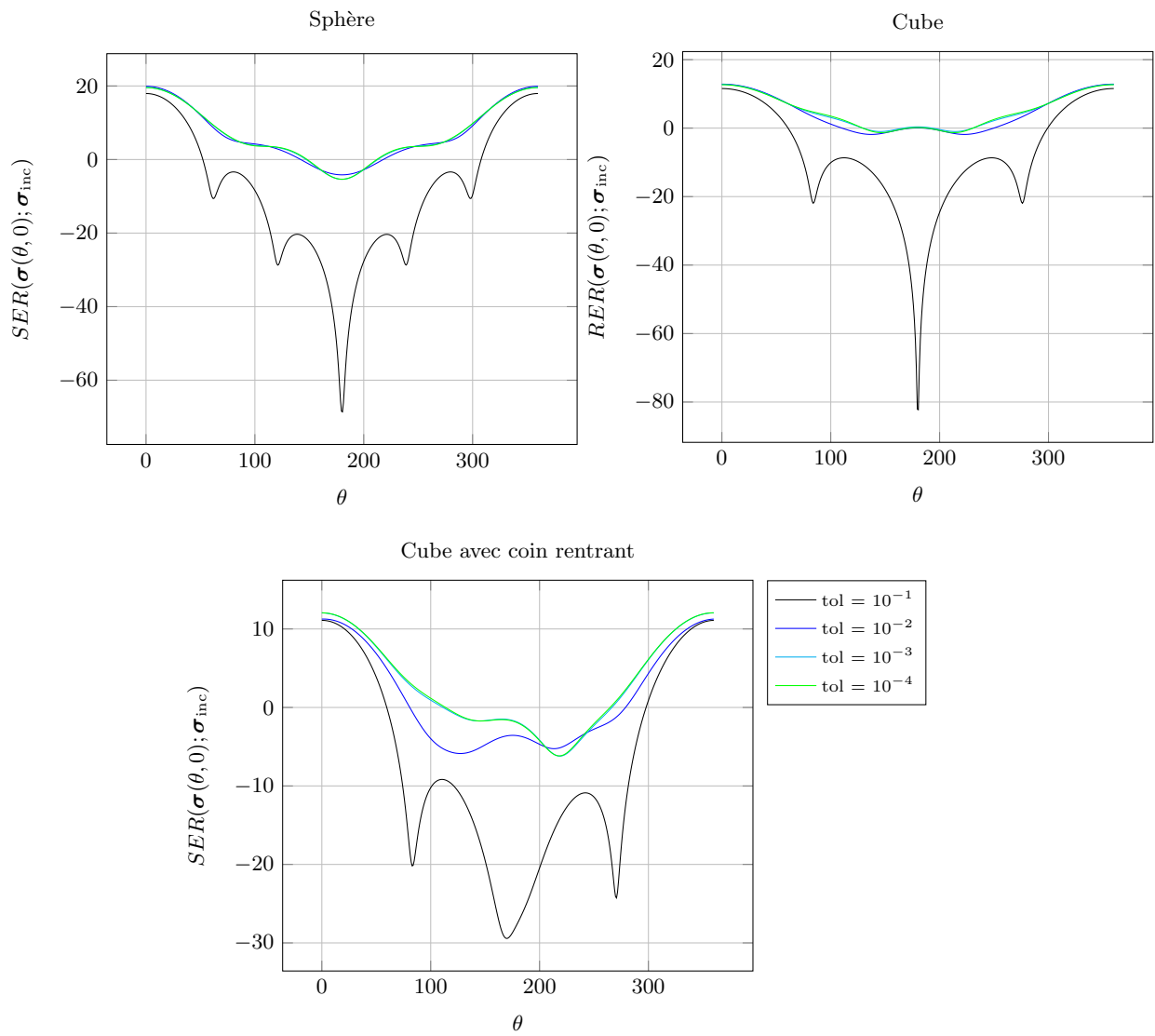


FIGURE 3.22 – Convergence de la SER bistatique par rapport à la tolérance GMRES pour le couplage faible FEM-BEM dans le cas inhomogène (avec  $\delta = 2$ ,  $k_+ = 3$  et  $n_\lambda = 10$ )



# CHAPITRE 4

## Extension à des formalismes plus avancés

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Objets diffractants à surface ouverte . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>4.2</b>	<b>Couplage faible à partie éléments finis volumiques multi-domaines</b>	<b>93</b>
4.2.1	Partitionnement de $\Omega_-$ avec surfaces d'échange fermées . . . . .	94
4.2.2	Partitionnement de $\Omega_-$ avec jonctions . . . . .	98

---





## 4.1 Objets diffractants à surface ouverte

D'un point de vue applicatif, il est indispensable que le couplage faible FEM-BEM puisse traiter des objets diffractants composés à la fois de parties pénétrables et de parties non pénétrables. Pour de tels objets, la surface d'échange  $\Gamma$  entre  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$  n'est plus fermée mais ouverte. L'application directe du couplage faible FEM-BEM aux problèmes impliquant des surfaces ouvertes soulève une question importante que nous n'avons pas abordée jusqu'à présent : quelles conditions les inconnues du couplage faible FEM-BEM et les champs auxiliaires doivent-elles vérifier ? Le champ  $\mathbf{E}$  vérifiant la condition

$$\gamma_t^\pm \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{\text{métal}}, \quad (4.1)$$

aucune information n'est échangée entre  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$  sur  $\Gamma_{\text{métal}}$ . Nous rappelons que lorsque les sources physiques sont nulles, les inconnues du couplage faible  $\mathbf{g}_-$  et  $\mathbf{g}_+$  peuvent respectivement être interprétées comme les informations échangées de  $\Omega_+$  à  $\Omega_-$  et de  $\Omega_-$  à  $\Omega_+$ . De ce fait, deux approches s'offrent à nous afin de prendre en compte cette non transmission de données entre  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$  sur  $\Gamma_{\text{métal}}$ . La première est d'imposer naturellement les inconnues du couplage faible nulles sur  $\Gamma_{\text{métal}}$  de manière *forte*. Nous pouvons imaginer une seconde approche qui consiste à annuler l'opérateur MtE, celui-ci étant l'opérateur utilisé pour faire la transmission de l'information entre  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$ . Il suffit alors d'imposer (cf. la formulation faible (2.98))

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{0}, \quad \Psi_\ell = \mathbf{0}, \quad \phi_\ell = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{\text{métal}}. \quad (4.2)$$

Afin d'illustrer ces deux approches, considérons une sphère unitaire composée à la fois d'une partie métallisée  $\Omega_{\text{métal}}$  de bord  $\Gamma_{\text{métal}} := \partial\Omega_{\text{métal}}$ , et d'une partie diélectrique homogène  $\Omega_-$ , caractérisée par un nombre d'onde  $k_-$  et une impédance  $\mathcal{Z}_-$ . On appelle  $\Omega^+$  le complémentaire de  $\Omega_{\text{métal}} \cup \Omega^-$ . On désigne par  $k_+$  le nombre d'onde dans  $\Omega^+$ , et par  $\mathcal{Z}_+$  l'impédance. Une coupe dans le plan  $\{x = 0\}$  de la sphère est présentée dans la Figure 4.1.

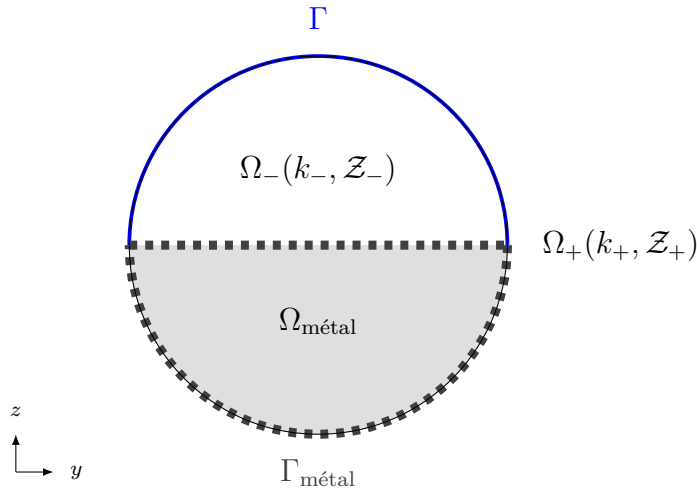


FIGURE 4.1 – Coupe dans le plan  $\{x = 0\}$  de la sphère unitaire en partie métallisée et diélectrique

Nous considérons plusieurs types d'ondes planes incidentes qui éclairent l'objet en question. Les caractéristiques de celles-ci sont indiquées dans les figures. Nous rappelons que l'angle  $\theta_{\text{inc}}$  est l'angle mesuré entre l'axe  $z$  et le vecteur incident tandis que l'angle  $\phi_{\text{inc}}$  désigne l'angle dans le sens trigonométrique direct entre l'axe  $x$  et la projection du vecteur incident dans

le plan  $xy$  (cf. Figure 1.1). Nous supposons que  $\delta = 2$ ,  $k_+ = 1$  et  $n_\lambda = 10$ . Nous choisissons la paire  $(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+)_\alpha^\beta = (-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0)_2^3$  et nous fixons la tolérance GMRES à  $10^{-4}$ . Les tests de cette section ont été réalisés (pour la partie BEM) et validés en utilisant AD

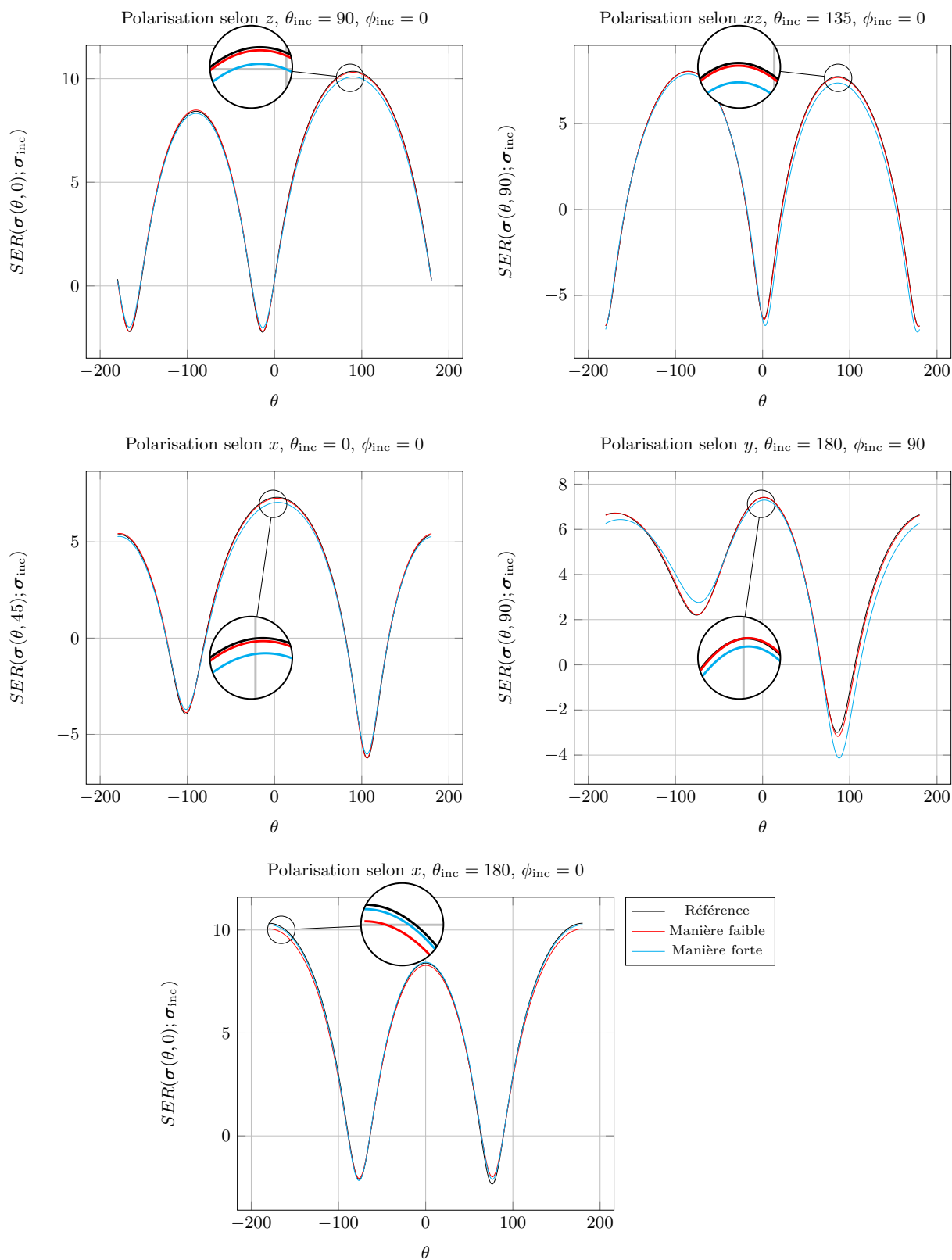


FIGURE 4.2 – SER bistatique du couplage faible FEM-BEM pour différents champs incidents comparée avec la SER bistatique du couplage fort BEM-BEM

(solution de référence) couplé avec la librairie Hi-BoX [1]. Dans la Figure 4.2, nous traçons la SER bistatique en fonction de l'angle  $\theta$  pour différentes polarisations et directions du champ incident. Pour l'ensemble des cas, nous avons constaté une convergence du couplage faible FEM-BEM ne dépendant quasiment pas de la manière de traiter les inconnues du couplage faible sur  $\Gamma_{\text{métal}}$ . À titre d'exemple, pour le cas  $\theta_{\text{inc}} = 180$ ,  $\phi_{\text{inc}} = 0$  de la Figure 4.2, nous obtenons une convergence en 7 itérations pour les deux approches. L'élimination des inconnues du couplage faible sur  $\Gamma_{\text{métal}}$  mène cependant à une précision moindre par rapport à la solution de référence. Cette constatation mériterait une étude plus poussée, par exemple en considérant un raffinement de maillage anisotrope au voisinage de  $\Gamma_{\text{métal}} \setminus \{\Gamma_{\text{métal}} \cap \Gamma\}$ . Il est à noter que conserver les inconnues du couplage faible sans imposer (4.2) donne également de bons résultats, mais avec un coût plus important. Au regard de ce qui précède, dans le cas d'une surface ouverte, pour la paire  $(-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0)_2^3$ , il est donc préférable de choisir une imposition faible des conditions sur les inconnues du couplage faible. Par ailleurs, pour la paire  $(-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0; -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0)_2^3$  où aucun champ auxiliaire n'est introduit, nous avons également constaté que la précision de la solution du couplage faible FEM-BEM est meilleure lorsque nous imposons une condition de Dirichlet homogène aux inconnues  $\mathbf{g}_{\pm}$  uniquement sur  $\Gamma_{\text{métal}} \setminus \{\Gamma_{\text{métal}} \cap \Gamma\}$  par rapport à une condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_{\text{métal}}$ .

Pour finir, remarquons qu'il est possible de s'orienter vers une approche utilisant une surface d'échange  $\Gamma$  fermée en rajoutant une fine couche autour de l'objet diffractant. Le nouveau domaine intérieur, borné par la frontière  $\Gamma$  (cf. Figure 4.3), est alors inhomogène. Le problème intérieur peut ainsi être traité sans difficulté par une FEM.

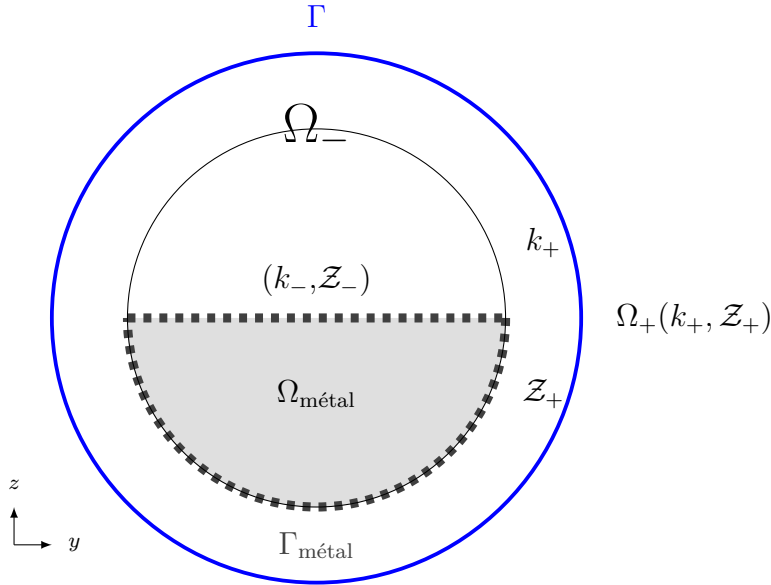


FIGURE 4.3 – Redéfinition de la surface d'échange

## 4.2 Couplage faible à partie éléments finis volumiques multi-domaines

Nous avons présenté le couplage faible comme étant une méthode de décomposition de domaine de Schwarz itérant entre deux sous-domaines, à savoir l'objet diffractant et le milieu extérieur. Nous avons auparavant relevé plusieurs points intéressants du caractère faible de ce couplage, dont notamment le fait que les sous-problèmes peuvent être résolus

indépendamment de manière optimisée. Dans cette section, nous examinons la question des algorithmes de décomposition de domaine pour  $\Omega_-$ .

### 4.2.1 Partitionnement de $\Omega_-$ avec surfaces d'échange fermées

Dans cette sous-section, intéressons nous à la configuration de la Figure 4.4 décrivant une coupe d'une sphère dans le plan  $\{x = 0\}$ . C'est un exemple d'un partitionnement du

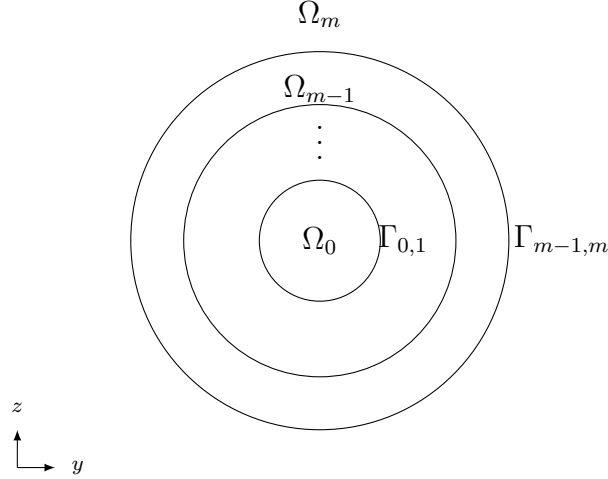


FIGURE 4.4 – Partitionnement (concentrique) de  $\Omega_-$  sans jonction

domaine FEM où la surface d'échange entre, au plus, deux sous-domaines est fermée. Le cas avec jonctions, où plus de deux sous-domaines se rencontrent, est analysé dans la sous-section suivante. Cet obstacle est éclairé par une onde plane électromagnétique polarisée selon  $x$  avec  $\theta_{\text{inc}} = 180$  et  $\phi_{\text{inc}} = 0$ . Le domaine  $\Omega_-$  est partitionné en  $m \in \mathbb{N}^*$  sous-domaines concentriques tels que

$$\Omega_- = \bigcup_{i=0}^{m-1} \Omega_i. \quad (4.3)$$

Remarquons que  $\Omega_+ = \Omega_m$ . Nous supposons que  $k_+ = 1$ ,  $\delta = 2$  et  $n_\lambda = 10$ . Pour une surface  $\Gamma_{\tau(i,j)}$ , avec

$$\tau(i,j) = \begin{cases} "i,j" & \text{si } i < j \\ "j,i" & \text{sinon} \end{cases}, \quad (4.4)$$

nous choisissons la convention d'une normale unitaire  $\mathbf{n}$  sortante à  $\Omega_i$ .

### Couplage faible à partie éléments finis volumiques multi-domaines concentriques

Afin d'écrire la formulation du couplage faible pour notre problème de diffraction-transmission, nous introduisons les opérateurs de transmission suivants :

$$\mathbf{T}_{i,i+1} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}), \quad \text{avec } 0 \leq i \leq m-1,$$

$$\mathbf{T}_{i+1,i} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}), \quad \text{avec } 0 \leq i \leq m-1.$$

Les inconnues du couplage faible sont définies sur les différentes surfaces d'échange  $\Gamma_{i,i+1}$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ , comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{m-1,m} = \gamma_t \mathbf{H}_m - \mathbf{T}_{m-1,m} \gamma_t \mathbf{E}_m \\ \mathbf{g}_{m,m-1} = \gamma_t \mathbf{H}_{m-1} + \mathbf{T}_{m,m-1} \gamma_t \mathbf{E}_{m-1} \\ \mathbf{g}_{i,i+1} = \gamma_t \mathbf{H}_{i+1} + \mathbf{T}_{i,i+1} \gamma_t \mathbf{E}_{i+1} & 0 \leq i \leq m-2 \\ \mathbf{g}_{i+1,i} = \gamma_t \mathbf{H}_i + \mathbf{T}_{i+1,i} \gamma_t \mathbf{E}_i & 0 \leq i \leq m-2 \end{cases}, \quad (4.5)$$

où

$$\forall i \in \llbracket 0 ; m \rrbracket, (\mathbf{E}_i; \mathbf{H}_i) = (\mathbf{E}_{|\Omega_i}; \mathbf{H}_{|\Omega_i}). \quad (4.6)$$

Nous définissons ensuite les opérateurs de résolution  $\mathbf{R}_{i,i+1}$  et  $\mathbf{R}_{i+1,i}$ , avec  $0 \leq i \leq m-1$ , associés aux sous-problèmes du couplage faible suivants :

$$\forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}), \quad \mathbf{R}_{i,i+1} \mathbf{g} = \gamma_t \mathbf{E}_{i+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{i+1,i} \mathbf{g} = \gamma_t \mathbf{E}_i, \quad (4.7)$$

où :

- Si  $\mathbf{R}_{i,i+1} = \mathbf{R}_{m-1,m}$  : le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_m; \mathbf{H}_m) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{rot}, \overline{\Omega_m})]^2$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_m - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_m & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_m \\ \text{rot } \mathbf{H}_m + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{E}_m & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_m \\ \mathcal{Z}_+(\mathbf{H}_m - \mathbf{H}_{\text{inc}}) \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - (\mathbf{E}_m - \mathbf{E}_{\text{inc}}) & = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}) \\ \gamma_t \mathbf{H}_m + \mathbf{T}_{m-1,m} \gamma_t \mathbf{E}_m = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{m-1,m} \end{cases} \quad (4.8)$$

- Si  $\mathbf{R}_{i,i+1}$ , avec  $0 \leq i \leq m-2$  : le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_{i+1}; \mathbf{H}_{i+1}) \in [\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{i+1})]^2$  est solution de

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_{i+1} - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_{i+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_{i+1} \\ \text{rot } \mathbf{H}_{i+1} + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_{i+1} & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_{i+1} \\ \gamma_t \mathbf{H}_{i+1} + \mathbf{T}_{i,i+1} \gamma_t \mathbf{E}_{i+1} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{i,i+1} \end{cases} \quad (4.9)$$

- Si  $\mathbf{R}_{i+1,i}$ , avec  $0 \leq i \leq m-2$  : le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_i; \mathbf{H}_i) \in [\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_i)]^2$  est solution du problème

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_i - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_i & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_i \\ \text{rot } \mathbf{H}_i + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_i & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_i \\ \gamma_t \mathbf{H}_i + \mathbf{T}_{i+1,i} \gamma_t \mathbf{E}_i = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{i,i+1} \end{cases} \quad (4.10)$$

Après réécriture des conditions de transmission sur  $\Gamma_{i,i+1}$  avec  $0 \leq i \leq m-1$ , nous obtenons la formulation du couplage faible à partie éléments finis volumiques multi-domaines concentriques suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{m,m-1} = \mathbf{g}_{m-1,m} + (\mathbf{T}_{m-1,m} + \mathbf{T}_{m,m-1}) \mathbf{R}_{m-1,m} \mathbf{g}_{m-1,m} = \mathbf{S}_{m-1,m} \mathbf{g}_{m-1,m} \text{ sur } \Gamma_{m-1,m} \\ \mathbf{g}_{m-1,m} = \mathbf{g}_{m,m-1} - (\mathbf{T}_{m-1,m} + \mathbf{T}_{m,m-1}) \mathbf{R}_{m,m-1} \mathbf{g}_{m,m-1} = \mathbf{S}_{m,m-1} \mathbf{g}_{m,m-1} \text{ sur } \Gamma_{m,m-1} \\ \mathbf{g}_{i+1,i} = \mathbf{g}_{i,i+1} + (\mathbf{T}_{i+1,i} - \mathbf{T}_{i,i+1}) \mathbf{R}_{i,i+1} \mathbf{g}_{i,i+1} = \mathbf{S}_{i,i+1} \mathbf{g}_{i,i+1} \text{ sur } \Gamma_{i,i+1} \quad 0 \leq i \leq m-2 \\ \mathbf{g}_{i,i+1} = \mathbf{g}_{i+1,i} + (\mathbf{T}_{i,i+1} - \mathbf{T}_{i+1,i}) \mathbf{R}_{i+1,i} \mathbf{g}_{i+1,i} = \mathbf{S}_{i+1,i} \mathbf{g}_{i+1,i} \text{ sur } \Gamma_{i,i+1} \quad 0 \leq i \leq m-2 \end{cases} \quad (4.11)$$

La formulation (4.11) peut être écrite sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{0,1} \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\text{Id} \quad -\mathbf{S}_{0,1}}^{\Gamma_{0,1}} \quad \overbrace{\mathbf{0} \quad \mathbf{0}}^{\Gamma_{1,2}} \quad \overbrace{\mathbf{0} \quad \mathbf{0}}^{\Gamma_{2,3}} \quad \dots \quad \overbrace{\mathbf{0} \quad \mathbf{0}}^{\Gamma_{m-1,m}} \\ -\mathbf{S}_{1,0} \quad \text{Id} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \end{array} \right. \\
 \Gamma_{1,2} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \text{Id} \quad -\mathbf{S}_{2,1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{S}_{1,2} \quad \text{Id} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \end{array} \right. \\
 \Gamma_{2,3} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \text{Id} \quad -\mathbf{S}_{3,2} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{S}_{2,3} \quad \text{Id} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array} \right. \\
 \Gamma_{m-1,m} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \text{Id} - \mathbf{S}_{m,m-1} \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad -\mathbf{S}_{m-1,m} \text{Id} \end{array} \right.
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{l} \mathbf{g}_{1,0} \\ \mathbf{g}_{0,1} \\ \mathbf{g}_{2,1} \\ \mathbf{g}_{1,2} \\ \mathbf{g}_{3,2} \\ \mathbf{g}_{2,3} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{m,m-1} \\ \mathbf{g}_{m-1,m} \end{array} \right] = \mathbf{0}. \quad (4.12)$$

### Opérateurs de transmission optimaux

Nous nous posons à présent la question du choix des opérateurs de transmission. Dans un premier temps, nous définissons les opérateurs MtE suivants :

$$\Lambda_{m-1,m} = \Lambda_{+,k_+,Z_+}, \quad (4.13)$$

$$\Lambda_{i,i+1} : \begin{array}{l} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}) \\ \mathbf{m}_{i+1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}) \\ \boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{H}_{i+1} \end{array}, \quad (4.14)$$

où le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_{i+1}; \mathbf{H}_{i+1}) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_{i+1})]^2$  ( $0 \leq i \leq m-2$ ) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{i+1} - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_{i+1} \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_{i+1} + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_{i+1} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_{i+1} \\ \boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{E}_{i+1} = \mathbf{m}_{i+1} \text{ sur } \Gamma_{i,i+1} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

et

$$\Lambda_{i+1,i} : \begin{array}{l} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}) \\ \mathbf{m}_i \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{i,i+1}}, \Gamma_{i,i+1}) \\ \boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{H}_i \end{array}, \quad (4.16)$$

où  $(\mathbf{E}_i; \mathbf{H}_i) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_i)]^2$  ( $0 \leq i \leq m-2$ ) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{rot} \mathbf{E}_i - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_i = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_i \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_i + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_i = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_i \\ \boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{E}_i = \mathbf{m}_i \text{ sur } \Gamma_{i,i+1} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

De la même manière que le couplage faible FEM-BEM sans partitionnement de  $\Omega_-$ , nous pouvons identifier les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (4.11) comme suit :

$$\mathbf{T}_{m,m-1} = -\Lambda_{m-1,m}, \quad \mathbf{T}_{m-1,m} = \Lambda_{m,m-1}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{T}_{i,i+1} = -\Lambda_{i+1,i} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{i+1,i} = -\Lambda_{i,i+1} \quad \text{avec} \quad 0 \leq i \leq m-2. \quad (4.19)$$

À titre d'exemple, étant donnée la définition de la normale sur  $\Gamma_{0,1}$ , les approximations d'ordre zéro de  $\Lambda_{1,0}$  et  $\Lambda_{0,1}$  sont respectivement définies par

$$\Lambda_{1,0}^0 = -\frac{1}{\mathcal{Z}_-} (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}), \quad \Lambda_{0,1}^0 = \frac{1}{\mathcal{Z}_-} (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}). \quad (4.20)$$

Etude de la convergence et de la précision pour  $m = 2$

Considérons le cas de  $m = 2$  sous-domaines intérieurs. L'inconnue du couplage faible  $\mathbf{g}_{2,1}$  (correspondant à l'information provenant de  $\Omega_+$  lorsque les sources physiques sont nulles) et les inconnues vectorielles associées aux approximations de Padé définies sur  $\Gamma_{1,2}$  sont les seules inconnues discrétisées par de l'ordre élevé (ordre 3). Le champ électrique dans chaque sous-domaine de  $\Omega_-$  est quant à lui discrétisé à l'ordre 2. Dans le cas d'un partitionnement concentrique de  $\Omega_-$ , le choix "Type Padé" correspond à  $\mathbf{T}_{2,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ,  $\mathbf{T}_{1,2} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{0,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,0}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\mathbf{T}_{1,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,1}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  alors que le choix "Type ordre 0" correspond à  $\mathbf{T}_{2,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{1,2} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{0,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,0}^0$  et  $\mathbf{T}_{1,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,1}^0$ . Dans le cas du domaine intérieur sans partitionnement, les choix "Type Padé" et "Type ordre 0" désignent respectivement  $(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+) = (-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0)$  et  $(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+) = (-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0; -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0)$ .

Nous reportons la précision et la convergence du couplage FEM-BEM dans la Table 4.1. Pour les deux choix des conditions de transmission, la précision et le nombre d'itérations sont du même ordre de grandeur, que le domaine intérieur soit partitionné ou non.

	$\Omega_-$ partitionné		$\Omega_-$ non partitionné	
	Type Padé	Type ordre 0	Type Padé	Type ordre 0
Itérations GMRES	9	31	7	27
$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}^{\text{BEM}}$	1.8%	1.7%	1.7%	1.6%
$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}}^{\text{BEM}}$	0.5%	1.0%	0.6%	0.9%
$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}^{\text{analy}}$	8.6%	8.6%	8.6%	8.6%

TABLE 4.1 – Comparaison de la convergence et de la précision du couplage faible FEM-BEM lorsque  $\Omega_-$  est partitionné en deux sous-domaines concentriques et lorsqu'il n'est pas partitionné

Dans la Figure 4.5, nous reportons le nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction du nombre de sous-domaines concentriques intérieurs allant de  $m = 1$  à  $m = 14$ . Comme attendu, nous observons une augmentation quasi-linéaire du

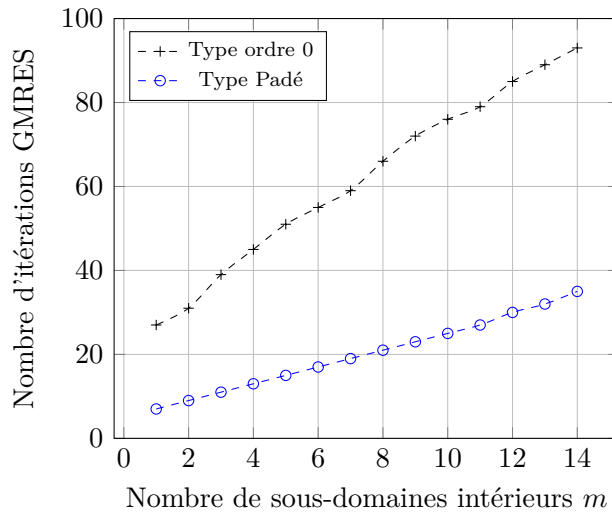


FIGURE 4.5 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM en fonction du nombre de sous-domaines intérieurs  $m$

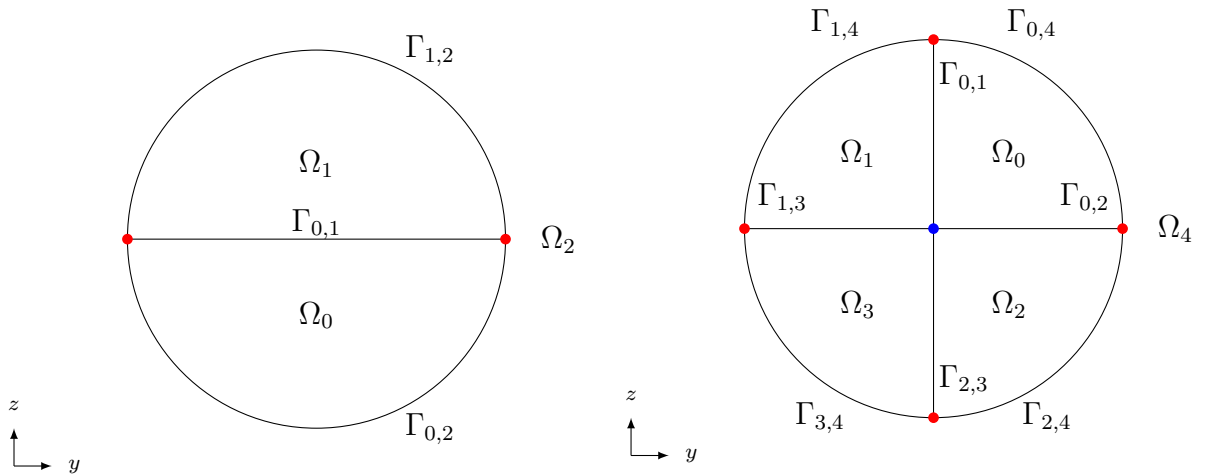
nombre d'itérations pour les deux choix de conditions de transmission, la condition "Type

Padé” menant à un nombre d’itérations plus faible que la condition “Type ordre 0”, au prix d’un coût de factorisation et de résolution des sous-problèmes intérieurs plus important.

### 4.2.2 Partitionnement de $\Omega_-$ avec jonctions

Dans cette sous-section, nous proposons de décomposer  $\Omega_-$  en plusieurs sous-domaines avec jonctions. Les deux situations suivantes se présentent (cf. Figure 4.6) :

- (a) Un partitionnement avec une jonction à la frontière.
- (b) Un partitionnement avec des jonctions à la frontière et à l’intérieur de  $\Omega_-$ .



(a) Partition avec une jonction à la frontière (●) (b) Partition avec des jonctions à la frontière (●) et à l’intérieur de  $\Omega_-$  (●)

FIGURE 4.6 – Quelques approches pour partitionner le domaine intérieur  $\Omega_-$

Les jonctions sont des points (en 2D) ou des lignes (en 3D) particuliers où au moins deux sous-domaines de  $\Omega_-$  se touchent. La présence de ces dernières est en général inévitable si un partitionneur automatique est utilisé. Cependant, leur présence introduit un problème au niveau théorique pour la convergence de la méthode. Plus précisément, lorsqu’un opérateur de type Padé est utilisé comme opérateur de transmission, les jonctions soulèvent un problème de compatibilité dû à l’utilisation d’opérateurs d’ordre élevé (par exemple l’opérateur Laplace-Beltrami) non plus sur une surface fermée mais ouverte. À contrario, les opérateurs de transmission d’ordre zéro ne présentent aucun problème.

Dans la littérature, le sujet est abordé principalement pour l’équation de Helmholtz et est à notre connaissance inexistant pour le cas électromagnétique avec des conditions d’ordre élevé. Pour l’équation de Helmholtz, Modave *et al.* [52, 53] ont reporté un problème de non consistance en l’absence de traitement des jonctions pour les opérateurs de Padé. Il est alors nécessaire d’appliquer certaines conditions de compatibilité aux jonctions afin de garantir le caractère bien posé des sous-problèmes. Des variables auxiliaires supplémentaires doivent être introduites sur les points, les arêtes et les surfaces de jonction. L’approche n’est toutefois exacte que pour une partition cartésienne (avec des angles droits) du domaine.

Afin d’illustrer le problème de jonction, intéressons nous à la configuration de la Figure 4.6a décrivant une coupe de la sphère unité dans le plan  $\{x = 0\}$ . Nous reprenons le même problème physique et les conventions que dans la sous-section précédente. Les domaines  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$  sont dorénavant définis respectivement par  $\Omega_0 \cup \Omega_1$  et  $\Omega_2$ .



**Définition du couplage faible pour la configuration de la Figure 4.6a**

Afin d'écrire la formulation du couplage faible pour notre problème de diffraction-transmission, nous introduisons les opérateurs de transmission suivants :

$$\mathbf{T}_{i,j} : \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_{\tau(i,j)}}, \Gamma_{\tau(i,j)}) \rightarrow \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_{\tau(i,j)}}, \Gamma_{\tau(i,j)}), \quad \text{avec } 0 \leq i \neq j \leq 2.$$

De manière analogue à ce qui a été fait pour le couplage faible sans partitionnement du domaine intérieur  $\Omega_-$ , nous introduisons les inconnues du couplage faible définies sur chaque surface d'échange  $\Gamma_{\tau(i,j)}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{0,2} = \gamma_t \mathbf{H}_2 - \mathbf{T}_{0,2} \gamma_t \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{g}_{2,0} = \gamma_t \mathbf{H}_0 + \mathbf{T}_{2,0} \gamma_t \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{g}_{1,2} = \gamma_t \mathbf{H}_2 - \mathbf{T}_{1,2} \gamma_t \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{g}_{2,1} = \gamma_t \mathbf{H}_1 + \mathbf{T}_{2,1} \gamma_t \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{g}_{0,1} = \gamma_t \mathbf{H}_1 + \mathbf{T}_{0,1} \gamma_t \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{g}_{1,0} = \gamma_t \mathbf{H}_0 + \mathbf{T}_{1,0} \gamma_t \mathbf{E}_0 \end{cases}, \quad (4.21)$$

où

$$(\mathbf{E}_i; \mathbf{H}_i) = (\mathbf{E}_{|\Omega_i}; \mathbf{H}_{|\Omega_i}), \quad \text{avec } 0 \leq i \leq 2. \quad (4.22)$$

Nous définissons ensuite les opérateurs de résolution  $\mathbf{R}_{i,j}$ , avec  $0 \leq i \neq j \leq 2$ , associés aux sous-problèmes du couplage faible comme suit :

$$\forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{div}_{\Gamma_{\tau(i,j)}}, \Gamma_{\tau(i,j)}), \quad \mathbf{R}_{i,j} \mathbf{g} = \gamma_t \mathbf{E}_j, \quad (4.23)$$

où :

- Si  $j = 2$  : le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_2; \mathbf{H}_2) \in [\mathbf{H}_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega_2})]^2$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_2 - \iota k_+ \mathcal{Z}_+ \mathbf{H}_2 & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_2 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_2 + \iota k_+ \mathcal{Z}_+^{-1} \mathbf{E}_2 & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_2 \\ \mathcal{Z}_+(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_{\text{inc}}) \wedge \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_{\text{inc}}) & = \mathcal{O}_{r \rightarrow +\infty}(r^{-2}) \\ \gamma_t \mathbf{H}_2 + \mathbf{T}_{i,2} \gamma_t \mathbf{E}_2 = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{\tau(i,2)} \end{cases}. \quad (4.24)$$

- Si  $j \neq 2$  : le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_j; \mathbf{H}_j) \in [\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_j)]^2$  est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}_j - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_j & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}_j + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_j & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j \\ \gamma_t \mathbf{H}_j + \mathbf{T}_{i,j} \gamma_t \mathbf{E}_j = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_{\tau(i,j)} \end{cases}. \quad (4.25)$$

Après réécriture des conditions de transmission sur  $\Gamma_{0,1}$ ,  $\Gamma_{0,2}$  et  $\Gamma_{1,2}$ , nous obtenons la formulation du couplage faible suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{g}_{0,2} = \mathbf{g}_{2,0} - (\mathbf{T}_{0,2} + \mathbf{T}_{2,0}) \mathbf{R}_{2,0} \mathbf{g}_{2,0} = \mathbf{S}_{2,0} \mathbf{g}_{2,0} \text{ sur } \Gamma_{0,2} \\ \mathbf{g}_{2,0} = \mathbf{g}_{0,2} + (\mathbf{T}_{0,2} + \mathbf{T}_{2,0}) \mathbf{R}_{0,2} \mathbf{g}_{0,2} = \mathbf{S}_{0,2} \mathbf{g}_{0,2} \text{ sur } \Gamma_{0,2} \\ \mathbf{g}_{1,2} = \mathbf{g}_{2,1} - (\mathbf{T}_{1,2} + \mathbf{T}_{2,1}) \mathbf{R}_{2,1} \mathbf{g}_{2,1} = \mathbf{S}_{2,1} \mathbf{g}_{2,1} \text{ sur } \Gamma_{1,2} \\ \mathbf{g}_{2,1} = \mathbf{g}_{1,2} + (\mathbf{T}_{1,2} + \mathbf{T}_{2,1}) \mathbf{R}_{1,2} \mathbf{g}_{1,2} = \mathbf{S}_{1,2} \mathbf{g}_{1,2} \text{ sur } \Gamma_{1,2} \\ \mathbf{g}_{1,0} = \mathbf{g}_{0,1} + (\mathbf{T}_{1,0} - \mathbf{T}_{0,1}) \mathbf{R}_{0,1} \mathbf{g}_{0,1} = \mathbf{S}_{0,1} \mathbf{g}_{0,1} \text{ sur } \Gamma_{0,1} \\ \mathbf{g}_{0,1} = \mathbf{g}_{1,0} + (\mathbf{T}_{0,1} - \mathbf{T}_{1,0}) \mathbf{R}_{1,0} \mathbf{g}_{1,0} = \mathbf{S}_{1,0} \mathbf{g}_{1,0} \text{ sur } \Gamma_{0,1} \end{cases}. \quad (4.26)$$

Celle-ci peut être résumée par le système suivant :

$$\begin{array}{c}
 \Gamma_{0,1} \\
 \Gamma_{0,2} \\
 \Gamma_{1,2}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{c}
 \overbrace{\text{Id} - \mathbf{S}_{1,0}}^{\Gamma_{0,1}} \quad \overbrace{\mathbf{0} \quad \mathbf{0}}^{\Gamma_{0,2}} \quad \overbrace{\mathbf{0} \quad \mathbf{0}}^{\Gamma_{1,2}} \\
 -\mathbf{S}_{0,1} \quad \text{Id} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \text{Id} - \mathbf{S}_{2,0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{S}_{0,2} \quad \text{Id} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \text{Id} - \mathbf{S}_{2,1} \\
 \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{S}_{1,2} \quad \text{Id}
 \end{array} \right\}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{g}_{0,1} \\
 \mathbf{g}_{1,0} \\
 \mathbf{g}_{0,2} \\
 \mathbf{g}_{2,0} \\
 \mathbf{g}_{1,2} \\
 \mathbf{g}_{2,1}
 \end{bmatrix}
 = \mathbf{0}. \quad (4.27)$$

### Opérateurs de transmission optimaux

Concentrons-nous à présent sur le choix des opérateurs de transmission. Dans un premier temps, nous introduisons les opérateurs MtE suivants :

$$\mathbf{\Lambda}_{i,2} = (\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+})|_{\Gamma_{i,2}}, \quad \mathbf{\Lambda}_{2,i} = (\mathbf{\Lambda}_{-,k_-,z_-})|_{\Gamma_{i,2}}, \quad \text{avec } 0 \leq i \leq 1, \quad (4.28)$$

et

$$\mathbf{\Lambda}_{i,j} : \begin{array}{c} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{0,1}}, \Gamma_{0,1}) \\ \mathbf{m}_j \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{H}_t^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma_{0,1}}, \Gamma_{0,1}) \\ \gamma_t \mathbf{H}_j \end{array}, \quad \text{avec } 0 \leq i \neq j \leq 1, \quad (4.29)$$

où le champ électromagnétique  $(\mathbf{E}_j; \mathbf{H}_j) \in [\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_j)]^2$  ( $0 \leq j \leq 1$ ) vérifie

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}_j - \iota k_- \mathcal{Z}_- \mathbf{H}_j & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j \\ \text{rot } \mathbf{H}_j + \iota k_- \mathcal{Z}_-^{-1} \mathbf{E}_j & = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_j \\ \gamma_t \mathbf{E}_j = \mathbf{m}_j & \text{sur } \Gamma_{0,1} \end{cases}. \quad (4.30)$$

Enfin, l'analogie nous permet d'identifier les opérateurs de transmission optimaux pour le couplage faible (4.26), à savoir :

$$\mathbf{T}_{2,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,2}, \quad \mathbf{T}_{0,2} = \mathbf{\Lambda}_{2,0}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{T}_{2,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}, \quad \mathbf{T}_{1,2} = \mathbf{\Lambda}_{2,1}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{T}_{0,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,0} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{1,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,1}. \quad (4.33)$$

### Etude de la convergence et de la précision

Dans la Table 4.2, nous comparons la convergence et la précision du couplage faible avec et sans partitionnement de  $\Omega_-$ . Dans le cas du partitionnement du domaine intérieur, nous procédons comme pour le couplage faible sans partitionnement en discrétisant les inconnues  $\mathbf{g}_{2,0}$ ,  $\mathbf{g}_{2,1}$  et les inconnues vectorielles associées aux approximations de Padé définies sur  $\Gamma_{0,2}$  et  $\Gamma_{1,2}$  à l'ordre élevé (ordre 3). Les champs  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{E}_1$  sont discrétisés à l'ordre 2. Le choix "Type Padé" correspond à  $\mathbf{T}_{2,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,2}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ ,  $\mathbf{T}_{0,2} = -\mathbf{\Lambda}_{0,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{2,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$ ,  $\mathbf{T}_{1,2} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{0,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,0}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  et  $\mathbf{T}_{1,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,1}^{\text{sq}, N_p, \theta_p}$  et "Type ordre 0" à  $\mathbf{T}_{2,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{0,2} = -\mathbf{\Lambda}_{0,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{2,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{1,2} = -\mathbf{\Lambda}_{1,2}^0$ ,  $\mathbf{T}_{0,1} = -\mathbf{\Lambda}_{1,0}^0$  et  $\mathbf{T}_{1,0} = -\mathbf{\Lambda}_{0,1}^0$ . Nous constatons que pour le choix "Type ordre 0" la précision de la solution n'est quasiment pas altérée après le partitionnement de  $\Omega_-$ . Une augmentation du nombre d'itérations est observée comme attendu, étant donné le manque de précision des approximations des opérateurs MtE. Par ailleurs,

#### 4.2. Couplage faible à partie éléments finis volumiques multi-domaines

	$\Omega_-$ partitionné		$\Omega_-$ non partitionné	
	Type Padé	Type ordre 0	Type Padé	Type ordre 0
Itérations GMRES	30	43	7	27
$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}^{\text{BEM}}$	3.8%	1.5%	1.7%	1.6%
$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}}^{\text{BEM}}$	2.6%	0.7%	0.6%	0.9%
$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}^{\text{analy}}$	9.9%	8.9%	8.6%	8.6%

TABLE 4.2 – Comparaison de la convergence et de la précision du couplage faible FEM-BEM lorsque  $\Omega_-$  est partitionné en deux sous-domaines avec jonctions et lorsqu’il n’est pas partitionné

pour le choix “Type Padé”, nous observons une augmentation du nombre d’itérations et une diminution de la précision après le partitionnement avec jonctions du domaine  $\Omega_-$ . Nous pouvons en déduire que, comme évoqué au début de cette sous-section, le non traitement des jonctions pour les approximations d’ordre élevé des opérateurs MtE est clairement un problème pour la convergence et la précision de la méthode. Ce point devrait être étudié plus en profondeur.

Nous terminons cette sous-section en mentionnant que, d’un point de vue industriel, l’utilisation du couplage faible FEM-BEM avec des approximations d’ordre zéro des opérateurs MtE peut être une alternative intéressante. En effet, bien qu’elles conduisent à un nombre d’itérations plus élevé, le coût de factorisation et de résolution des sous-problèmes associés aux sous-domaines de  $\Omega_-$  est plus faible. Le temps de résolution total du couplage faible reste par conséquent acceptable. De plus, avec ce choix, quel que soit le type de jonction, celle-ci n’est pas pénalisante au niveau de la précision.



# CHAPITRE 5

## Applications

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Cylindre métallique recouvert de diélectrique . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>5.2</b>	<b>Cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique . .</b>	<b>107</b>
<b>5.3</b>	<b>Cylindre diélectrique inhomogène et multicouche . . . . .</b>	<b>109</b>
5.3.1	Cylindre diélectrique multicouche . . . . .	109
5.3.2	Cylindre diélectrique inhomogène . . . . .	111
<b>5.4</b>	<b>Polariseur double bande <math>K/KA</math> . . . . .</b>	<b>112</b>

---



Jusqu'à présent, nous avons développé la mise en oeuvre et les principes du couplage faible FEM-BEM sur des cas académiques. Cette section présente quelques applications pratiques de ce nouveau solveur itératif en utilisant GmshFEM [62] et AD couplé avec la librairie  $\mathcal{H}$ -matrix Hi-BoX [1]. Nous donnons aussi une comparaison avec le solveur BEM (AD). Les exemples de cette section sont issus et inspirés du Workshop-EM-ISAE-2020 :

<https://websites.isae-superaero.fr/workshop-em-isae-2020/>

Tous les exemples ont été réalisés sur un serveur de calculs à 36 cœurs (Intel(R) Xeon(R) Gold 6140 CPU @ 2.30[GHz]), avec 756[Go] de RAM.

Nous testons la convergence du couplage faible FEM-BEM pour les paires d'opérateurs de transmission suivantes :

$$(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+) = (-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^0; -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^0), \quad (5.1)$$

$$(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+) = (-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^0). \quad (5.2)$$

La performance de ces paires d'opérateurs au niveau de la précision et de la convergence est étudiée en faisant varier  $N_p$ , la tolérance GMRES, les ordres éléments finis de certaines inconnues vectorielles (précisées plus bas). Afin de ne pas surcharger la présentation, nous nous contentons de présenter uniquement les résultats qui nous paraissent les plus pertinents. Pour ce faire, nous introduisons quelques notations. Nous désignons par

$$T_p^0(tol) \quad (5.3)$$

une configuration paramétrique associée à la paire d'opérateurs (5.1), où  $p$  désigne l'ordre d'approximation de  $\mathbf{g}_-$  et  $tol$  la tolérance GMRES. Une configuration paramétrique associée à la paire (5.2) avec  $\beta$ ,  $N_p$  et  $tol$  fixés est notée

$$T_\beta^{N_p}(tol). \quad (5.4)$$

Enfin, la notation

$$T_{(p,q)}^{N_p}(tol) \quad (5.5)$$

désigne le choix de la paire d'opérateurs (5.2) en supposant que toutes les inconnues vectorielles sont discrétisées à l'ordre 0 mis à part les inconnues  $\mathbf{g}_-$  et  $r_{k_+} = \mathbf{Z}_+ \mathbf{\Lambda}_{+,k_+,Z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p} (\boldsymbol{\gamma}_t^- \mathbf{E})$  qui sont respectivement approximées à l'ordre  $p$  et  $q$ . D'autre part, nous supposons toujours que le champ  $\mathbf{E}_-$  associé au domaine  $\Omega_-$  est discrétisé à l'ordre 2 ( $\alpha = 2$ ). Aussi, dans ce dernier chapitre, nous analysons la question des temps de calcul. Remarquons que la partie la plus coûteuse en temps de calcul du couplage faible est la factorisation du problème intérieur et l'application d'une méthode de compression au problème extérieur. Le temps de calcul de chaque itération est relativement faible car il consiste principalement en la résolution des systèmes triangulaires obtenus après factorisation pour un nouveau membre de droite pour chaque sous-problème. Quelle que soit la configuration paramétrique choisie, la factorisation du problème extérieur (et son temps de calcul) est invariante.

## 5.1 Cylindre métallique recouvert de diélectrique

Nous considérons un cylindre d'une hauteur de 0.25[m] et de rayon 0.1[m]. Nous supposons que le cylindre a une partie cylindrique métallique, notée  $\Omega_{\text{métal}}$ , qui est recouverte d'une couche diélectrique (voir la Figure 5.1) notée  $\Omega_-$  et de caractéristique physique

$$\epsilon_- = (1.788 - i0.012)\epsilon_0, \quad \mu_- = \mu_0. \quad (5.6)$$

Une onde plane incidente de paramètres  $\theta_{\text{inc}} = 90$  et  $\phi_{\text{inc}} = 0$ , et polarisée selon l'axe  $x$ , éclaire le cylindre à une fréquence de  $5[\text{GHz}]$ . Nous discrétisons l'objet diffractant en prenant 8 points par longueur d'onde. La solution de chaque configuration paramétrique du couplage faible FEM-BEM est comparée à celle du couplage fort BEM-BEM (46378 DOF avec une résolution d'une durée totale de  $78[\text{s}]$ ).

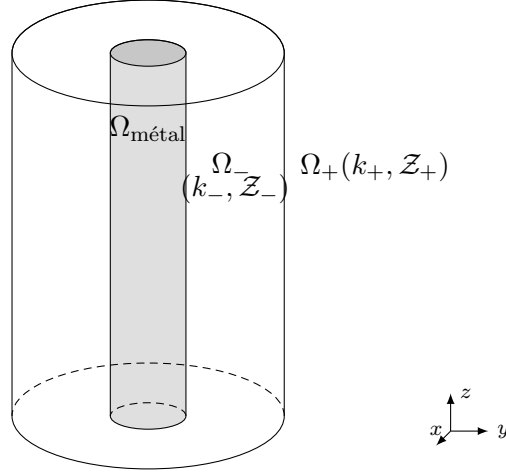


FIGURE 5.1 – Cylindre métallique recouvert de diélectrique

Nous résumons dans la Table 5.1 la performance globale du couplage faible FEM-BEM selon la configuration paramétrique choisie en reportant plusieurs informations :

- Le nombre d'itérations GMRES pour converger avec un résidu égal à  $tol$ .
- L'erreur  $e_{\text{SER}}$  sur la SER.
- Le nombre d'inconnues sur  $\Gamma$  et dans  $\Omega_-$ , qui désignent respectivement le nombre d'inconnues introduites par la formulation du couplage faible FEM-BEM et le nombre d'inconnues associées au problème intérieur.
- Le temps de calcul global, tout en précisant entre parenthèses le temps dédié à la factorisation du problème intérieur.

Configuration	It. GMRES	$e_{\text{SER}}$	$\Gamma$	$\Omega_-$	Tps de calcul [s]
$T_3^0(10^{-4})$	51	3.3%	126720	425757	494(33)
$T_2^0(10^{-3})$	39	3.3%	89596	425757	403(32)
$T_3^4(10^{-4})$	19	3.7%	867020	1222335	497(175)
$T_{(2,2)}^2(10^{-4})$	23	3.8%	183244	662539	312(70)
$T_{(2,2)}^2(10^{-3})$	16	3.8%	183244	662539	284(70)

TABLE 5.1 – Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configurations appliqué au cylindre métallique recouvert de diélectrique

Comme attendu, la paire (5.2) améliore la convergence de GMRES, comparé à la paire (5.1). La convergence pour  $T_3^4(10^{-4})$ ,  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$  est du même ordre de grandeur. D'autre part, comme les différentes configurations jouent le rôle de préconditionneur, l'erreur  $e_{\text{SER}}$  est quasiment similaire. Remarquons que nous obtenons déjà une solution du couplage faible FEM-BEM précise lorsque la tolérance GMRES est égale à  $10^{-3}$ . Nous constatons que, bien que la configuration  $T_3^4(10^{-4})$  mène au plus faible nombre d'itérations, le coût de calcul de la factorisation du problème intérieur est élevé en raison du nombre important de champs



auxiliaires, conduisant à un temps de calcul total supérieur aux autres cas. La configuration  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  (diminution à la fois de l'ordre de certaines inconnues vectorielles et de  $N_p$ ) permet de réduire le nombre d'inconnues et par conséquent le temps de factorisation du problème intérieur. Ce comportement couplé à un faible nombre d'itérations GMRES (23 itérations) permet de diminuer le temps de calcul total de la paire (5.2). En passant d'une tolérance GMRES de  $10^{-4}$  à  $10^{-3}$ , nous arrivons à un temps de calcul total optimal. Nous comparons enfin dans la Figure 5.2 la SER bistatique du couplage faible FEM-BEM pour  $T_3^4(10^{-4})$  avec la SER bistatique obtenue avec le solveur AD. Une valeur de  $e_{\text{SER}}$  à 3.7% se traduit par une parfaite correspondance des courbes.

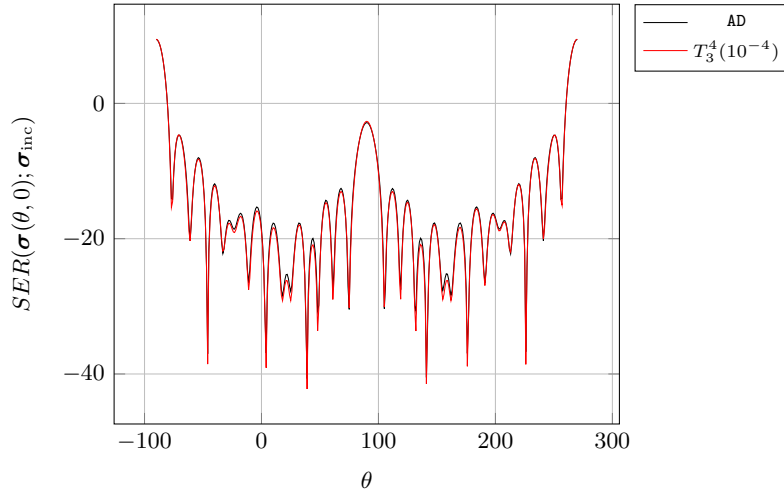


FIGURE 5.2 – Comparaison des SER bistatique obtenues pour le couplage faible FEM-BEM ( $T_3^4(10^{-4})$ ) et AD

## 5.2 Cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique

Nous étudions maintenant le couplage faible FEM-BEM lorsque l'objet diffractant correspond à un cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique (voir la Figure 5.3), noté  $\Omega_{\text{métal}}$ , de hauteur  $0.25[m]$  et de rayon de  $0.1[m]$ . La couche diélectrique, notée  $\Omega_-$ , est caractérisée par

$$\epsilon_- = (0.895 - i0.021)\epsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu_- = \mu_0. \quad (5.7)$$

Nous choisissons 8 points par longueur d'onde pour la discrétisation de cet objet. Une onde plane incidente de paramètres  $\theta_{\text{inc}} = 0$  et  $\phi_{\text{inc}} = 0$ , polarisée selon l'axe  $z$ , éclaire la partie diélectrique du cylindre à une fréquence de  $10[GHz]$ . La solution de chaque configuration paramétrique du couplage faible FEM-BEM est comparée à celle du couplage fort BEM-BEM (avec 95346 DOF pour une résolution d'une durée totale de  $145[s]$ ).

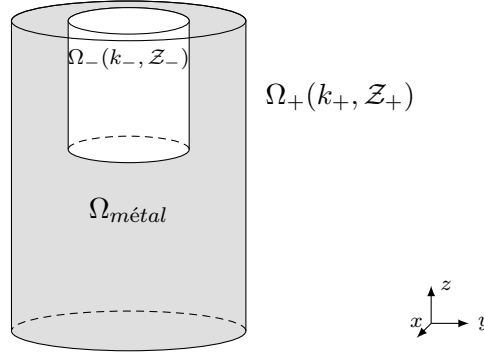


FIGURE 5.3 – Cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique

Nous reportons dans la Table 5.2 les résultats pour le couplage faible FEM-BEM pour différentes configurations. Nous observons que la paire (5.2) améliore la convergence de GMRES, comparativement à (5.1). Comme précédemment, nous remarquons que la convergence pour  $T_3^4(10^{-4})$ ,  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$  est similaire. De plus, une solution très proche du couplage fort BEM-BEM est obtenue, quelle que soit la configuration, notamment pour une tolérance GMRES égale à  $10^{-3}$ . Par ailleurs, remarquons que, comme la surface d'échange est assez petite, le nombre d'inconnues auxiliaires introduit par les approximations de Padé est assez faible. Cela se traduit par un nombre d'inconnues associées à  $\Omega_-$  du même ordre de grandeur pour toutes les configurations. Comme nous diminuons à la fois l'ordre de discrétisation éléments finis de  $\mathbf{g}_-$  et la tolérance GMRES, la configuration  $T_2^0(10^{-3})$ , caractérisée ainsi par un nombre de DOF plus faible, réduit le temps de calcul total par rapport à  $T_3^0(10^{-4})$ . Pour  $T_3^4(10^{-4})$ , nous constatons que l'association d'un temps de factorisation de la matrice associée au problème intérieur (661[s]), qui est quasiment du même ordre de grandeur que celle de  $T_3^0(10^{-4})$  (585[s]), avec un faible nombre d'itérations (11 itérations), donne lieu à un temps de calcul total plus faible que  $T_3^0(10^{-4})$ . Pour  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$ , nous obtenons un comportement inattendu dont nous ignorons les raisons. Plus précisément, le temps de factorisation du problème intérieur est supérieur à celui de la configuration paramétrique  $T_3^4(10^{-4})$ .

Configuration	It. GMRES	$e_{\text{SER}}$	$\Gamma$	$\Omega_-$	Tps de calcul [s]
$T_3^0(10^{-4})$	39	0.4%	18237	852888	1145(585)
$T_2^0(10^{-3})$	31	0.4%	10632	852888	1041(578)
$T_3^4(10^{-4})$	11	0.3%	101113	935764	957(661)
$T_{(2,2)}^2(10^{-4})$	13	0.4%	16841	866003	999(730)
$T_{(2,2)}^2(10^{-3})$	8	0.4%	16841	866003	932(729)

TABLE 5.2 – Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configurations appliqué au cylindre diélectrique emboîté dans un cylindre métallique

Nous terminons cette section en constatant dans la Figure 5.4 que la SER bistatique du couplage faible FEM-BEM pour  $T_3^4(10^{-4})$  (une valeur de  $e_{\text{SER}}$  à 0.3%) est identique à celle du solveur AD.

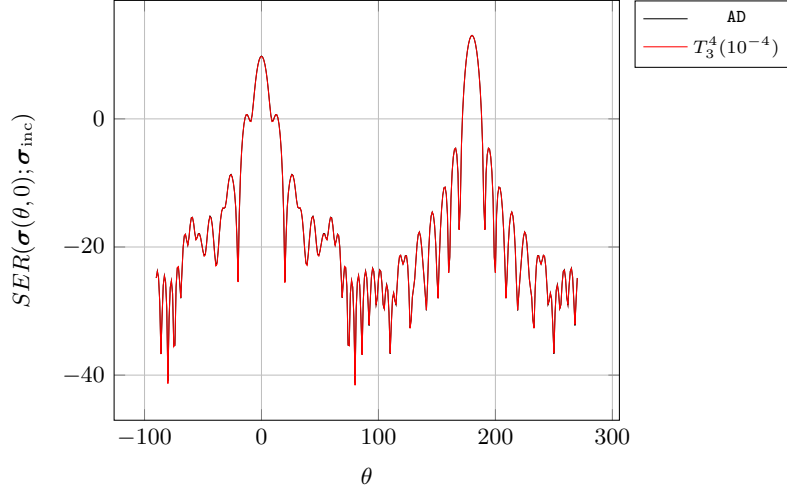


FIGURE 5.4 – SER bistatique du couplage faible FEM-BEM pour  $T_3^4(10^{-4})$  comparée à celle obtenue avec le solveur AD

## 5.3 Cylindre diélectrique inhomogène et multicouche

Nous testons à présent le couplage FEM-BEM sur un cylindre diélectrique inhomogène avec :

$$\epsilon_-(r) = (1 - 16r + 464r^2 - 2083r^3 + \iota(0.02 + 0.16r - 5r^2 + 25r^3))\epsilon_0, \quad \mu_- = \mu_0, \quad (5.8)$$

où  $r$  est la distance par rapport à l'axe de rotation. Le cylindre a une hauteur de  $0.25[m]$  et un rayon égal à  $0.1[m]$ . Une onde plane d'incidence  $\theta_{\text{inc}} = 90$  et  $\phi_{\text{inc}} = 0$ , polarisée selon l'axe  $x$ , illumine le cylindre à la fréquence de  $5[GHz]$ . Nous discrétisons l'objet en choisissant 8 points par longueur d'onde. Remarquons que cette fois-ci le domaine intérieur contient un grand nombre de tétraèdres (195289 tétraèdres). Dans cette section, nous étudions deux versions de ce cylindre.

### 5.3.1 Cylindre diélectrique multicouche

Nous découpons le cylindre inhomogène en quatre couches (voir Figure 5.5). Nous associons à chaque couche une permittivité correspondant à l'estimation de  $\epsilon_-(r)$  (5.8) au point milieu de la couche en question de sorte que

$$\epsilon_1 = (0.895 - \iota 0.021)\epsilon_0, \quad (5.9)$$

$$\epsilon_2 = (1.097 - \iota 0.019)\epsilon_0, \quad (5.10)$$

$$\epsilon_3 = (1.431 - \iota 0.015)\epsilon_0, \quad (5.11)$$

$$\epsilon_4 = (1.788 - \iota 0.012)\epsilon_0. \quad (5.12)$$

La solution de chaque configuration paramétrique du couplage faible FEM-BEM est comparée à celle du couplage fort BEM-BEM (152912 DOF avec une résolution d'une durée totale de  $1315[s]$ ).

Les résultats du couplage faible FEM-BEM sont donnés dans la Table 5.3. Comme attendu, la paire (5.2) conduit à une meilleure convergence du GMRES par rapport à (5.1). Les configurations  $T_3^4(10^{-4})$ ,  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$  donnent une convergence quasi-identique

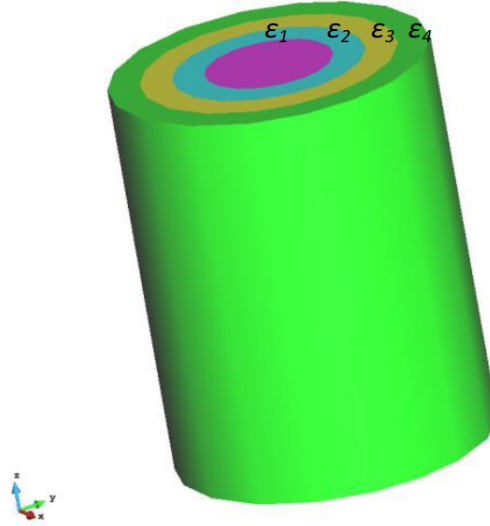


FIGURE 5.5 – Cylindre diélectrique multicouche

Configuration	It. GMRES	$e_{\text{SER}}$	$\Gamma$	$\Omega_-$	Tps de calcul [s]
$T_3^0(10^{-4})$	45	2.9%	218240	1865385	3810(2808)
$T_2^0(10^{-3})$	33	2.8%	126720	1865385	3560(2796)
$T_3^4(10^{-4})$	15	2.6%	1232008	2879153	6000(5420)
$T_{(2,2)}^2(10^{-4})$	17	3.6%	204164	2027309	3777(3342)
$T_{(2,2)}^2(10^{-3})$	13	3.6%	204164	2027309	3696(3350)

TABLE 5.3 – Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configurations appliqué au cylindre diélectrique multicouche

du couplage faible FEM-BEM. De plus, les solutions calculées pour le couplage faible FEM-BEM et fort BEM-BEM sont très proches dans tous les cas. Nous traçons dans la Figure 5.6 les SER bistatique du couplage faible FEM-BEM pour le cas  $T_3^4(10^{-4})$  et pour le couplage fort BEM-BEM (AD), confirmant ainsi la qualité de la solution. De plus, nous constatons que le nombre d'inconnues auxiliaires introduites par les approximations de Padé devient considérable car la surface d'échange est très grande. D'autre part, comme nous diminuons à la fois l'ordre de discrétisation éléments finis de  $\mathbf{g}_-$  ainsi que la tolérance du solveur GMRES, la configuration  $T_2^0(10^{-3})$  donne un temps de calcul plus faible que  $T_3^4(10^{-4})$ . Même si le choix (5.2) génère un nombre d'itérations relativement faible, nous remarquons que le temps de calcul total est supérieur à  $T_2^0(10^{-3})$ , quel que soit la configuration associée à la paire (5.2). Encore une fois, ce comportement est lié au coût de calcul élevé de la factorisation de la matrice associée au problème intérieur pour (5.2). A titre d'exemples, les configurations  $T_3^4(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  induisent respectivement une durée de factorisation de 5420[s] et 3342[s] par rapport à une durée de 2796[s] pour  $T_2^0(10^{-3})$ .

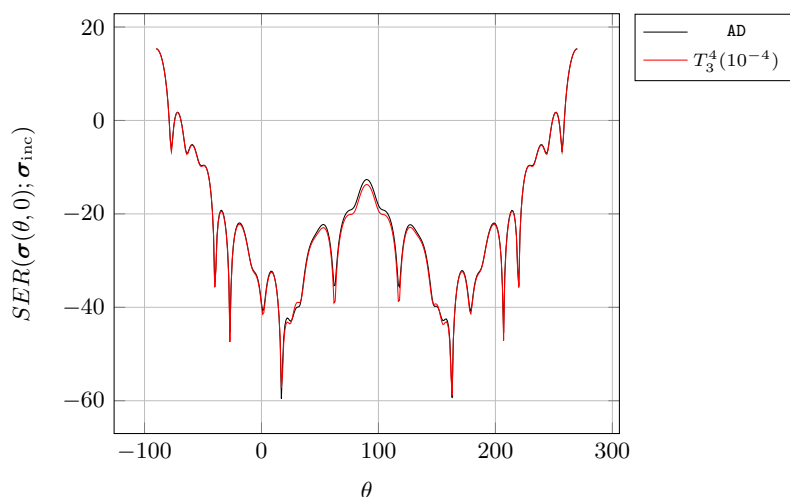


FIGURE 5.6 – Comparaison des SER bistatique obtenues par le couplage faible FEM-BEM pour  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et par le solveur AD

### 5.3.2 Cylindre diélectrique inhomogène

Concentrons-nous à présent sur le cylindre diélectrique inhomogène de permittivité et perméabilité définies par (5.8). Nous reportons dans la Table 5.4 les résultats obtenus qui sont similaires à ceux du cylindre diélectrique multicouche. Plus précisément, bien que la paire

Configuration	It. GMRES	$\Gamma$	$\Omega_-$	Tps de calcul [s]
$T_3^0(10^{-4})$	45	218395	1908417	4454(3466)
$T_2^0(10^{-3})$	33	126810	1908417	4299(3435)
$T_3^4(10^{-4})$	15	1232883	2922905	6621(6000)
$T_{(2,2)}^2(10^{-4})$	17	204309	2070456	5079(4586)
$T_{(2,2)}^2(10^{-3})$	13	204309	2070456	4915(4494)

TABLE 5.4 – Performance du couplage faible FEM-BEM pour différentes configuration appliqué au cylindre diélectrique inhomogène

(5.2) donne une convergence très rapide en nombre d'itérations, elle a cependant l'inconvénient d'introduire un grand nombre de champs auxiliaires (grande surface d'échange) rendant la factorisation du système associé au problème intérieur plus coûteuse en temps de calcul. Pour finir, dans la Figure 5.7, nous traçons les SER bistatique du couplage faible FEM-BEM et du couplage fort BEM-BEM du cylindre diélectrique multicouche. Nous constatons que le modèle multicouche reste tout de même proche du modèle inhomogène.

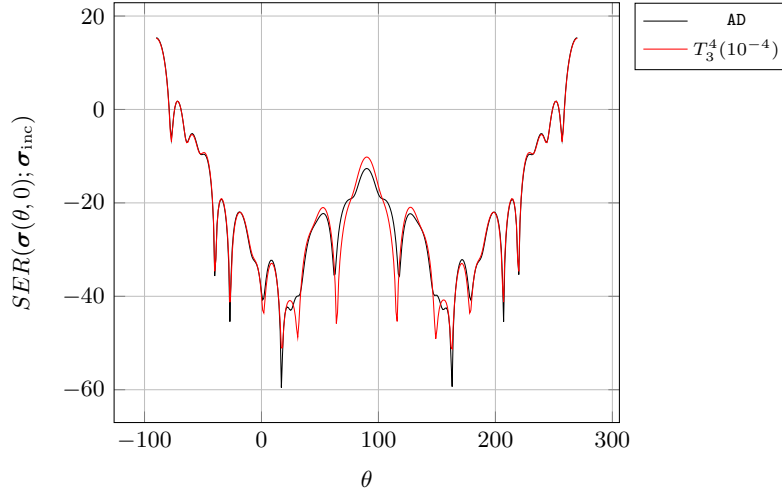


FIGURE 5.7 – SER bistatique du cylindre diélectrique inhomogène obtenue avec un couplage faible FEM-BEM et comparée à la SER bistatique du cylindre diélectrique multicouche donnée par AD

Pour l’ensemble des cas analysés liés au cylindre, les conditions de transmission d’ordre élevé conduisent au plus petit nombre d’itérations et à une bonne précision sur la SER, même pour une tolérance GMRES relativement élevée égale à  $10^{-3}$ . Cependant, lorsque le nombre d’inconnues liées à l’interface de couplage est trop important, ces conditions sont pénalisées par le surcoût lié à la factorisation du problème intérieur. Toutefois, les valeurs élevées observées peuvent probablement être expliquées, au moins en partie, par la formulation utilisée pour coupler les inconnues auxiliaires. Une alternative, introduite dans [31], consiste à travailler avec une autre écriture de l’approximation de Padé qui conduit à un découplage important de certains champs auxiliaires. Ceci a pour effet de creuser les factorisations et devrait permettre alors un gain important du temps CPU pour une utilisation dans le couplage faible FEM-BEM.

## 5.4 Polariseur double bande $K/KA$

Pour terminer, nous testons à présent le couplage faible FEM-BEM sur un exemple tridimensionnel réaliste : le polariseur double bande  $K/KA$ . Le fonctionnement détaillé de ce polariseur est décrit dans [56]. Il est composé d’un arrangement périodique  $8 \times 8$  de cellules unitaires décrites dans la Figure 5.8. Une cellule est constituée de trois couches métalliques parallèles au plan  $xy$  séparées par de fines couches diélectriques de type Rogers Duroid<sup>TM</sup> 5880 avec

$$\epsilon_{\text{pol}} = (2.2 + i0.0018)\epsilon_0, \quad \mu_{\text{pol}} = \mu_0. \quad (5.13)$$

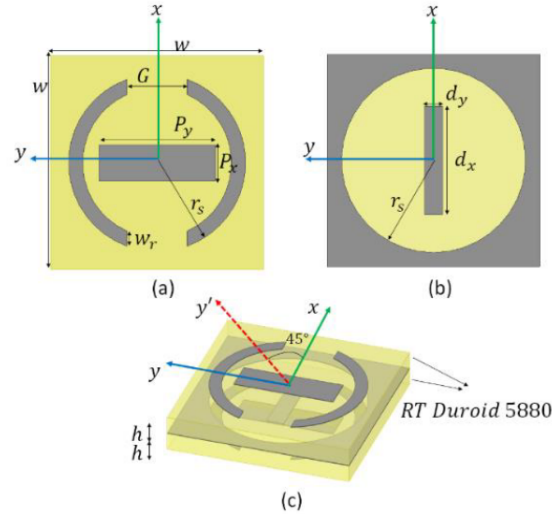


FIGURE 5.8 – (a) Première et troisième couches identiques, (b) deuxième couche, (c) vue 3D de la cellule unitaire

Ce design a la particularité de transformer une onde donnée polarisée linéairement (PL) en une onde polarisée circulaire orthogonale (CP) sur deux fréquences :  $20.2[GHz]$  et  $30[GHz]$ . Remarquons qu'une telle structure trouve son utilité dans des applications comme les satellites de télécommunications [56]. Ici, nous choisissons une onde polarisée linéairement selon  $y$ . Pour ce faire, nous utilisons deux types de cornets rectangulaires (un pour chaque fréquence) afin d'éclairer le polariseur. La Figure 5.9 décrit l'alimentation du polariseur. La Figure 5.10 présente le maillage des deux cornets rectangulaires. Remarquons

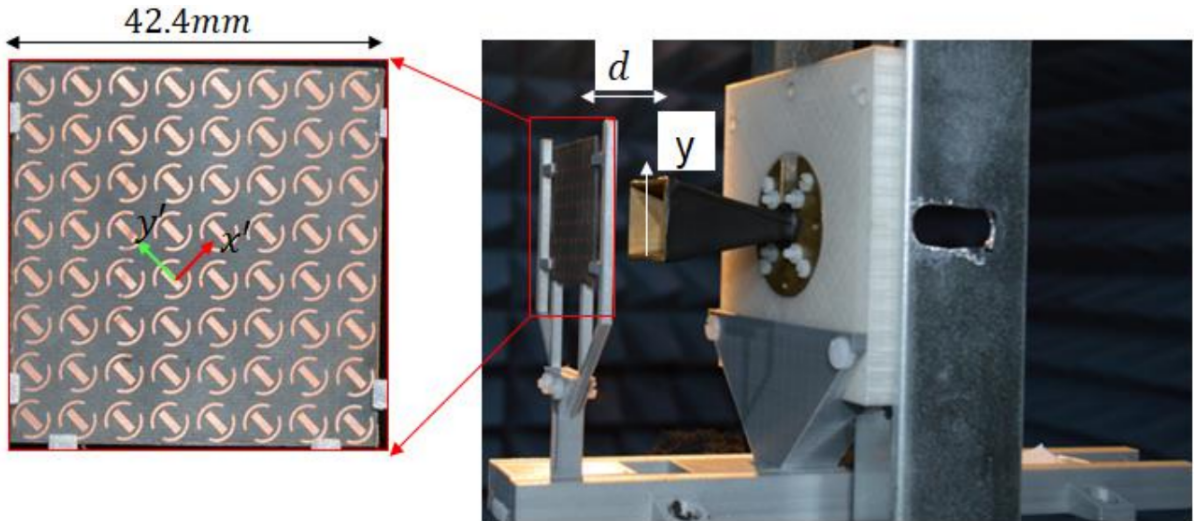
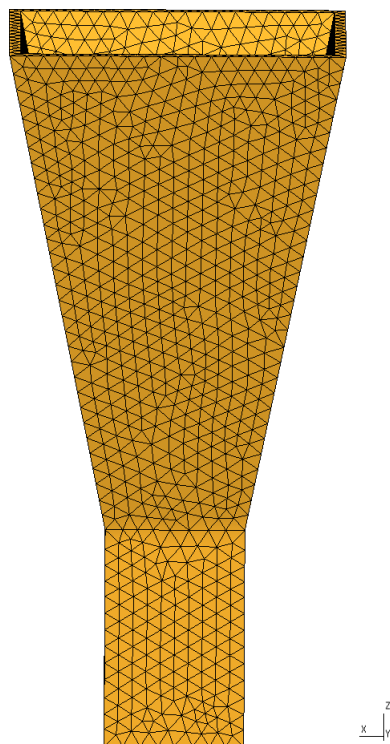


FIGURE 5.9 – Alimentation du polariseur double bande  $K/KA$

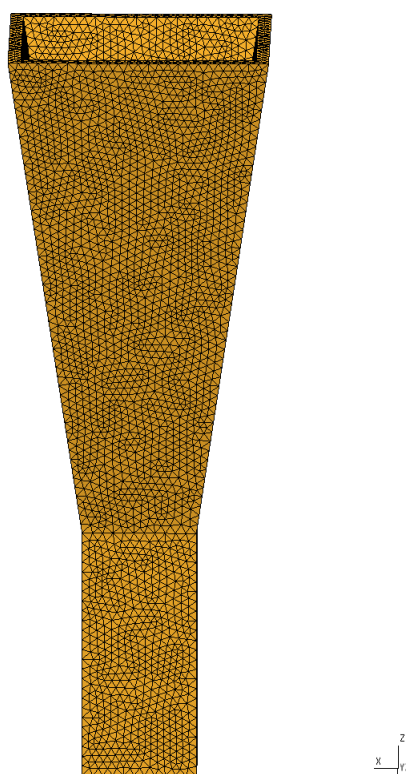
que AD permet la prise en compte de ce type de source sans difficulté. Nous nous intéressons aux gains associés aux polarisations circulaires dans le sens horaire (Right Hand Circular Polarized ou RHCP) et dans le sens anti-horaire (Left Hand Circular Polarized ou LHCP) dans le plan  $yz$  ( $\phi = 90$ ). Celles-ci sont définies comme suit :

$$RHCP(\theta, 90) = 20\log\left(\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{sc,\theta}^\infty(\theta, 90) + \iota E_{sc,\phi}^\infty(\theta, 90))\right|\right), \quad (5.14)$$

$$LHCP(\theta, 90) = 20\log\left(\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{sc,\theta}^\infty(\theta, 90) - \iota E_{sc,\phi}^\infty(\theta, 90))\right|\right), \quad (5.15)$$



(a) Cornet pour 20.2[GHz]



(b) Cornet pour 30[GHz]

FIGURE 5.10 – Cornets rectangulaires d'alimentation associés à chaque fréquence



où  $E_{sc,\theta}^\infty$  et  $E_{sc,\phi}^\infty$  représentent les composantes du champ lointain du champ électrique diffracté  $\mathbf{E}_{sc}^\infty$ . La précision de chaque configuration du couplage faible FEM-BEM est évaluée à l'aide de deux solutions de référence :

- $AD^{raff}$  : couplage fort BEM-BEM à 708664 DOF (résolution en 4525[s]) et 761812 DOF (résolution en 4132[s]) pour les cas à 20.2[GHz] et 30[GHz] respectivement.
- $AD$  : couplage fort BEM-BEM à 212626 DOF (résolution en 1049[s]) et 186260 DOF (résolution en 1208[s]) pour les cas à 20.2[GHz] et 30[GHz] respectivement.

Le schéma du fonctionnement du polariseur double bande est résumé dans la Figure 5.11.

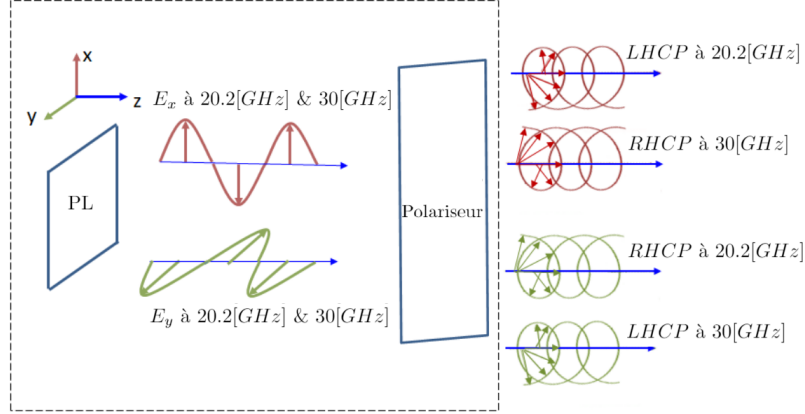
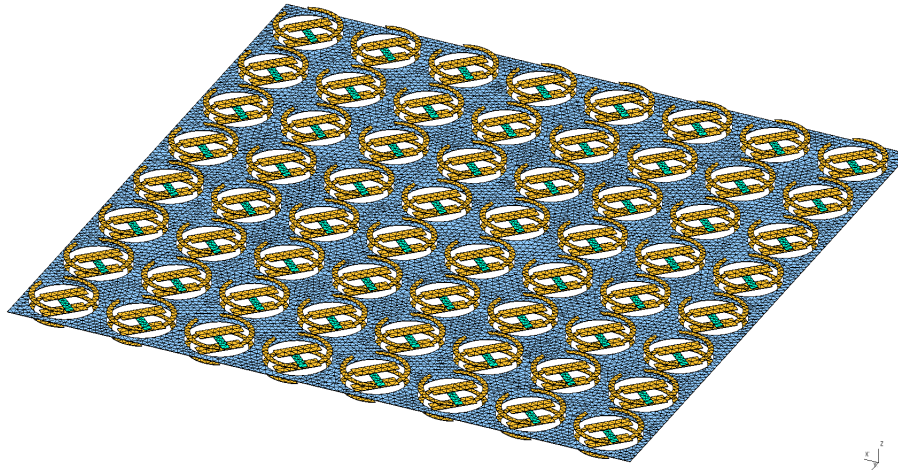


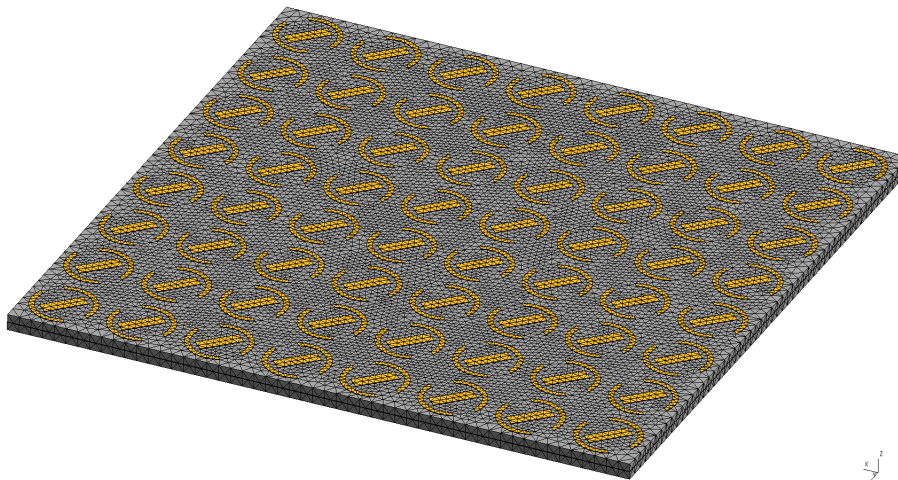
FIGURE 5.11 – Schéma du fonctionnement du polariseur double bande  $K/KA$

Ce problème s'avère difficile à résoudre par une approche BEM pure en raison de la faible épaisseur des couches (0.035[mm] pour le métal par exemple) et des subtilités de la cellule unitaire, comme par exemple des motifs courbes. Il est par conséquent indispensable de mailler finement les motifs pour que la partie éléments de frontière soit précise, augmentant ainsi le nombre d'inconnues sur la surface d'échange. Afin de contourner cette difficulté, nous choisissons d'utiliser une fine surface d'échange entourant le polariseur. Nous rappelons en effet que le problème intérieur est discrétisé avec des éléments finis d'ordre élevé. Ainsi, le domaine contenu dans cette nouvelle surface fine fictive est notre nouveau domaine intérieur qui est dorénavant inhomogène. Nous choisissons de discrétiser le problème avec 15 points par longueur d'onde. La Figure 5.12c présente le maillage de la nouvelle surface d'échange. Le maillage de la partie métallique du polariseur est présenté dans la Figure 5.12a. Enfin, la Figure 5.12b montre la discrétisation du polariseur.

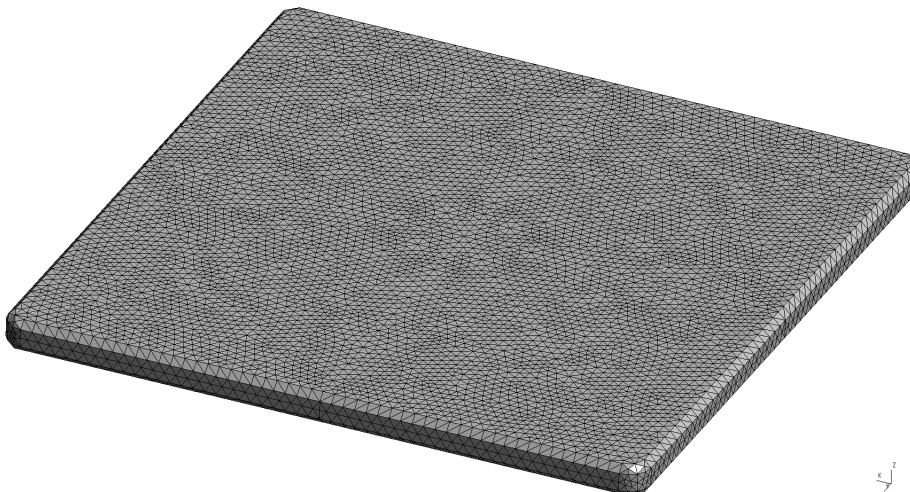
Dans les Figures 5.13 et 5.15, nous comparons les solutions du couplage faible FEM-BEM pour les cas à 30[GHz] et 20.2[GHz] avec les solutions de référence lorsque les différentes configurations paramétriques associées à la paire (5.1) sont choisies. De la même manière, dans les Figures 5.14 et 5.16, nous réalisons la même comparaison mais lorsque nous choisissons les différentes configurations paramétriques associées à la paire (5.2). Comme attendu, le polariseur fonctionne bien sur ces deux bandes de fréquence. Nous constatons que pour les gains élevés (Gain LHCP pour le cas 30[GHz] et Gain RHCP pour le cas 20.2[GHz]), le couplage faible FEM-BEM est très proche de la courbe  $AD^{raff}$  pour toutes les configurations paramétriques, confirmant ainsi que l'utilisation d'une discrétisation par des éléments finis d'ordre élevé du champ  $\mathbf{E}_-$  avec une surface d'échange entourant le polariseur porte ses fruits. Comme nous l'avons mentionné plus haut, il est indispensable de mailler finement le polariseur pour capturer correctement l'influence des motifs, augmentant ainsi le nombre de DOF. C'est ce qui explique le fait que les courbes de  $AD$  sont éloignées de  $AD^{raff}$ . Cette perte de précision est plus marquée (même au lobe principal) pour le Gain RHCP associé au cas



(a) Maillage de la partie métallique du polariseur



(b) Maillage du polariseur



(c) Maillage de la surface d'échange  $\Gamma$

FIGURE 5.12 – Maillage du domaine intérieur  $\Omega_-$  associé au polariseur double bande  $K/KA$

à  $20.2[GHz]$ . Lorsque nous nous concentrons sur les différentes courbes du Gain RHCP pour le cas à  $30[GHz]$  et les différentes courbes du Gain LHCP pour le cas à  $20.2[GHz]$ , la solution du couplage faible FEM-BEM semble ne pas être assez précise (un peu éloignée de  $AD^{raff}$ ) dans un intervalle centré et proche de 0 degré, mais il n'en est rien. En effet, la faible valeur de  $E_{sc,\theta}^\infty(\theta, 90) \pm \iota E_{sc,\phi}^\infty(\theta, 90)$  explique cette observation. D'autre part, tous ces résultats numériques indiquent que le couplage faible FEM-BEM est comparable en termes de précision au couplage fort BEM-BEM, mais nous donne en même temps la possibilité de l'appliquer à des objets diffractants inhomogènes.

La Table 5.5 présente le nombre d'itérations GMRES nécessaires à la convergence du couplage faible FEM-BEM pour les différentes configurations paramétriques. À partir de

Cas	$T_3^0(10^{-4})$	$T_2^0(10^{-3})$	$T_3^4(10^{-4})$	$T_{(2,2)}^2(10^{-4})$	$T_{(2,2)}^2(10^{-3})$
$30[GHz]$	83	51	15	15	11
$20.2[GHz]$	133	83	17	19	13

TABLE 5.5 – Nombre d'itérations GMRES pour le couplage faible FEM-BEM selon la configuration paramétrique choisie

cette table, nous pouvons directement conclure que comme attendu, la paire (5.2) conduit à une amélioration nette de la convergence de GMRES, comparativement à la paire (5.1). Nous constatons que les configurations paramétriques  $T_3^4(10^{-4})$ ,  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$  ont une vitesse de convergence qui est du même ordre de grandeur. Ainsi, pour la paire (5.2), le fait de diminuer le nombre  $N_p$ , les ordres éléments finis de certaines inconnues et la tolérance GMRES n'altère pas la précision et quasiment pas la convergence du couplage faible FEM-BEM. La Table 5.6 résume le nombre d'inconnues introduites par la discrétisation du couplage faible FEM-BEM et du problème intérieur selon la configuration paramétrique choisie. Nous constatons que les configurations paramétriques  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$  ont un nombre d'inconnues du même ordre de grandeur que la paire (5.2). Dans la Table 5.7,

Type	$T_3^0(10^{-4})$	$T_2^0(10^{-3})$	$T_3^4(10^{-4})$	$T_{(2,2)}^2(10^{-4})$	$T_{(2,2)}^2(10^{-3})$
Cas à $30[GHz]$					
Inconnues $\Gamma$	386880	224640	2184008	361924	361924
Inconnues $\Omega_-$	3268029	3268029	5065157	3555073	3555073
Cas à $20.2[GHz]$					
Inconnues $\Gamma$	386880	224640	2184008	361924	361924
Inconnues $\Omega_-$	3268029	3268029	5065157	3555073	3555073

TABLE 5.6 – Nombre d'inconnues introduites par la formulation du couplage faible FEM-BEM (Inconnues  $\Gamma$ ) et nombre d'inconnues associées au problème intérieur (Inconnues  $\Omega_-$ )

nous reportons le temps de calcul total pour la convergence du couplage faible FEM-BEM, ainsi que le temps de factorisation, pour les différentes configurations paramétriques. Nous constatons dans un premier temps que le choix  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$  implique un temps de calcul bien plus faible que le couplage fort BEM-BEM  $AD^{raff}$ . En d'autres termes, nous obtenons une résolution du couplage faible FEM-BEM bien plus rapide que le couplage fort BEM-BEM  $AD^{raff}$  pour une précision quasi-similaire. D'autre part, nous observons que pour la paire (5.1), la configuration  $T_3^0(10^{-4})$  mène à un temps de calcul plus long que  $T_2^0(10^{-3})$  car non seulement nous diminuons l'ordre éléments finis de  $\mathbf{g}_-$  mais aussi la tolérance GMRES. En

Cas	$T_3^0(10^{-4})$	$T_2^0(10^{-3})$	$T_3^4(10^{-4})$	$T_{(2,2)}^2(10^{-4})$	$T_{(2,2)}^2(10^{-3})$
30[GHz]	3329[s](813[s])	2457[s](810[s])	3862[s](2841[s])	1826[s](1129[s])	1737[s](1137[s])
20.2[GHz]	4437[s](816[s])	3175[s](815[s])	3846[s](2803[s])	1913[s](1136[s])	1712[s](1130[s])

TABLE 5.7 – Temps de calcul total (et de la factorisation du problème intérieur) pour la convergence du couplage faible FEM-BEM selon la configuration paramétrique choisie

se basant sur les résultats dans la Table 5.7, nous pouvons nous demander pourquoi la configuration  $T_3^4(10^{-4})$  mène à un temps de calcul total plus long (dans le cas à 30[GHz]) ou quasiment du même ordre de grandeur (dans le cas à 20[GHz]) que la paire (5.1). Comme effectivement nous pouvons le constater dans la formulation faible de l’opérateur de transmission de Padé (2.98), un nombre d’inconnues auxiliaires non négligeable est introduit (cf. Table 5.6), ce qui augmente le coût computationnel de la factorisation du problème intérieur. À titre d’exemple, pour le cas à 30[GHz], nous obtenons une durée de factorisation de 2841[s] pour la configuration  $T_3^4(10^{-4})$  contre 813[s] pour  $T_3^0(10^{-4})$ . Par conséquent, même si la configuration  $T_3^4(10^{-4})$  conduit à une convergence plus rapide du GMRES, le temps de calcul total peut être plus important. Remarquons que la factorisation de la matrice éléments finis associées au problème volumique intérieur est la partie la plus coûteuse pour le couplage faible FEM-BEM (soit 73% du temps de calcul total pour la configuration  $T_3^4(10^{-4})$ ). C’est la raison pour laquelle nous avons dans un premier temps diminué l’ordre de Padé  $N_p$  et l’ordre éléments finis de certaines inconnues avec la configuration  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$ , diminuant ainsi drastiquement le nombre d’inconnues (cf. Table 5.6) et le temps de factorisation du problème intérieur (par exemple, 1129[s] pour le cas à 30[GHz]). Dans un second temps, nous avons diminué la tolérance GMRES avec la configuration  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$ , donnant un temps de calcul optimal pour les cas à 20.2[GHz] et à 30[GHz]. Notons que même si la factorisation du problème intérieur a un coût de calcul plus faible lorsque la paire (5.1) est choisie, le nombre d’itérations élevé a pour conséquence de faire durer le calcul par rapport aux configurations  $T_{(2,2)}^2(10^{-4})$  et  $T_{(2,2)}^2(10^{-3})$ . Comme mentionné à la fin de la section 5.3, les temps de calculs pourraient probablement encore être réduits en utilisant l’implémentation ”découplée” introduite dans [31].

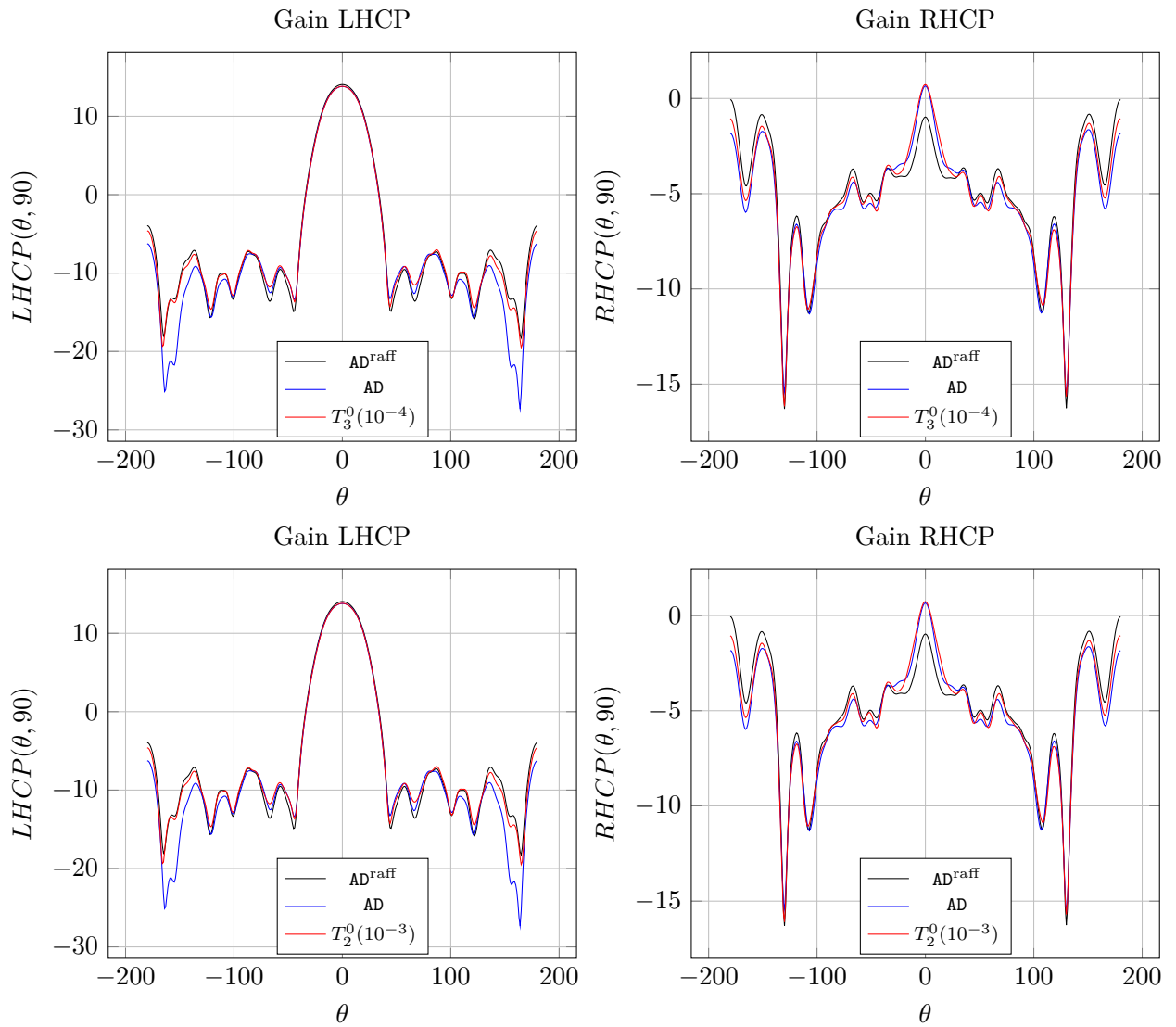


FIGURE 5.13 – Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à 30[GHz] lorsque la paire (5.1) est utilisée

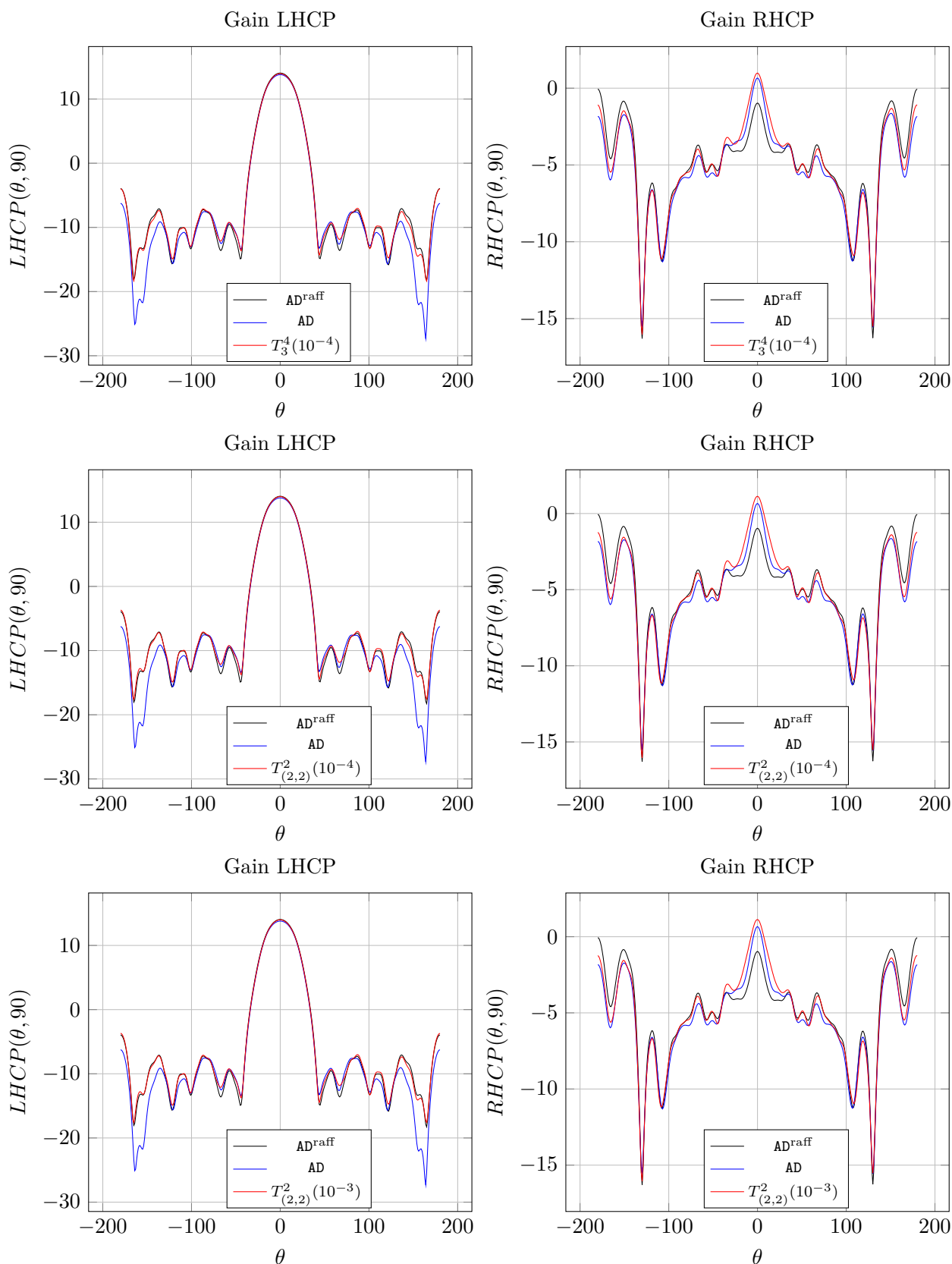


FIGURE 5.14 – Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à 30[GHz] lorsque la paire (5.2) est utilisée

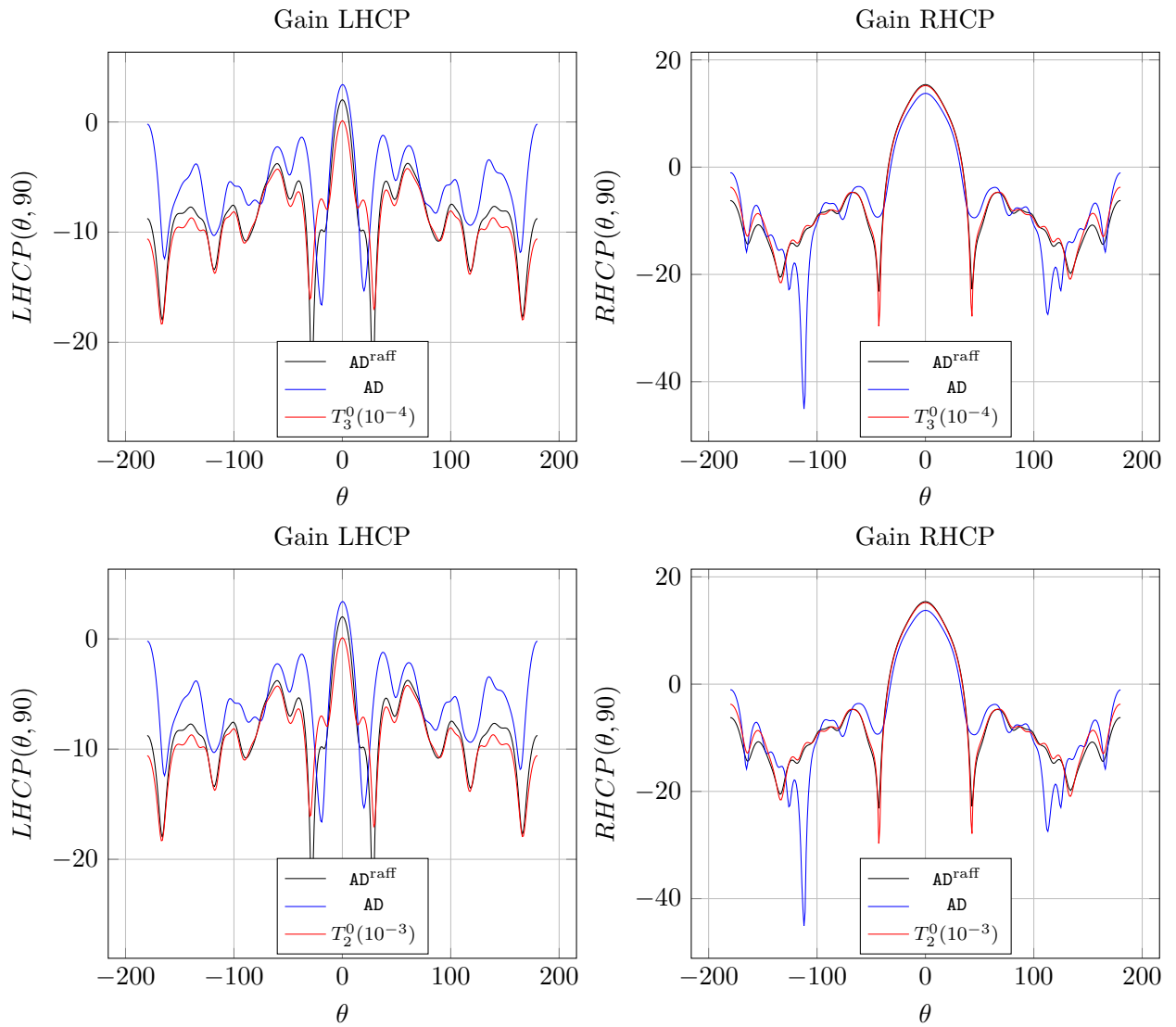


FIGURE 5.15 – Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à  $20.2[GHz]$  lorsque la paire (5.1) est utilisée

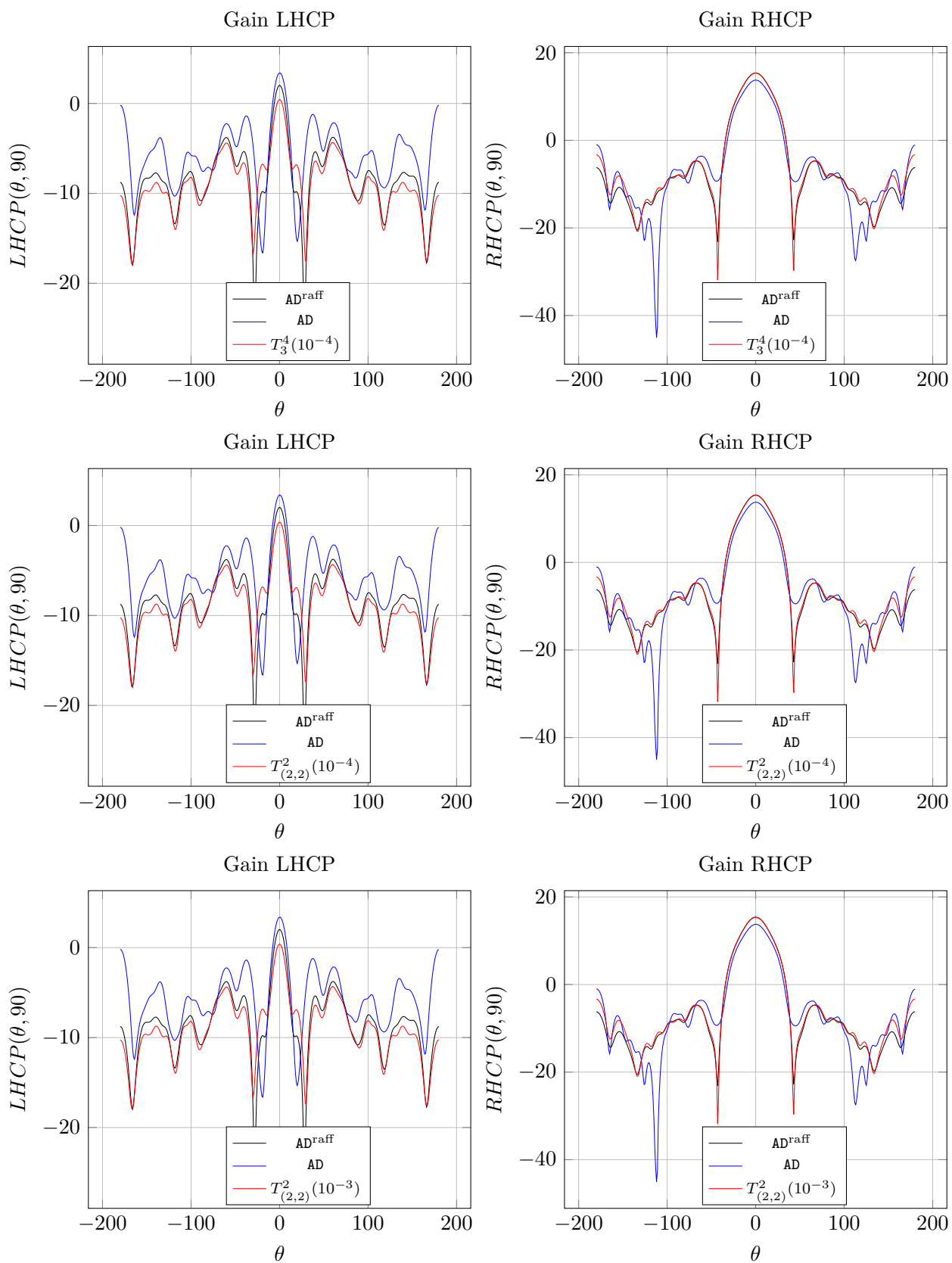


FIGURE 5.16 – Gain LHCP et RHCP du couplage faible FEM-BEM pour le cas à  $20.2[GHz]$  lorsque la paire (5.2) est utilisée



# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressé à la résolution d'un problème de diffraction électromagnétique tridimensionnel en régime harmonique. Nous avons d'abord passé en revue l'état de l'art des méthodes de résolution standards tout en soulignant leurs inconvénients. Au regard de tous les éléments énumérés, il nous est apparu clairement qu'une méthode bien adaptée serait de combiner faiblement une formulation variationnelle volumique pour la partie hétérogène du domaine de calcul (objet diffractant), discrétisée par la FEM, avec une équation intégrale pour le problème extérieur, discrétisée par la BEM. Cette approche peut être interprétée concrètement comme une méthode de décomposition de domaine de Schwarz optimisée, itérant entre les domaines intérieur et extérieur. Chaque sous-problème est résolu de manière directe. Cette méthode, appelée couplage faible FEM-BEM électromagnétique, présente l'avantage de pouvoir tirer parti des points forts à la fois de la FEM et de la BEM. La nature faible de l'approche nous permet d'utiliser des solveurs préexistants efficaces afin de construire un solveur global optimisé.

Le couplage faible ne peut être résolu efficacement que de manière itérative. Dans ce travail de recherche, nous avons choisi de recourir à la procédure GMRES afin de le résoudre. La convergence de l'algorithme dépend fondamentalement du choix des opérateurs de transmission. Nous avons montré que les opérateurs de transmissions optimaux reposent sur les opérateurs Magnetic-to-Electric (MtE) suivants :

$$\mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}, \quad \mathbf{T}_+ = \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,z_-}.$$

L'évaluation de ces opérateurs requiert néanmoins des ressources en temps de calcul et en mémoire importantes. Afin de réduire le coût d'évaluation du couplage faible, nous avons plutôt considéré des approximations localisées des opérateurs MtE. Ainsi, en adoptant un point de vue issu de l'analyse microlocale, nous avons pu introduire les approximations dites de Padé et d'ordre zéro, notées respectivement  $\mathbf{\Lambda}_{\pm,k_{\pm},z_{\pm}}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$  et  $\mathbf{\Lambda}_{\pm,k_{\pm},z_{\pm}}^0$ .

Afin de juger de la qualité des approximations localisées des opérateurs MtE, nous avons dans un premier temps réalisé une étude spectrale du couplage faible. Cette étude nous a permis de démontrer la viabilité de l'approche et d'observer que la paire la plus intéressante est  $(\mathbf{T}_-; \mathbf{T}_+) = (-\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}; \mathbf{\Lambda}_{-,k_-,z_-}^0)$ . Dans un second temps, nous nous sommes concentrés sur les aspects numériques du couplage faible FEM-BEM. De manière similaire à l'étude spectrale, l'étude numérique du couplage faible FEM-BEM sur des cas académiques confirme que le meilleur choix est  $\mathbf{T}_- = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ . De plus, pour atténuer le problème de résonance dont souffre le couplage faible pour certains couples  $(\delta, k_+)$ , nous avons proposé un choix alternatif de  $\mathbf{T}_+$  qui consiste à étendre de manière fictive le problème extérieur en  $\Omega_-$  en fixant  $\mathbf{T}_+ = -\mathbf{\Lambda}_{+,k_+,z_+}^0$ . Ces premiers résultats numériques ont permis de valider notre nouvelle approche tant au niveau de la précision que de la convergence, pour des obstacles homogènes et inhomogènes. Notamment, le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le

couplage faible FEM-BEM ne dépend que très peu de la configuration géométrique, de la fréquence, du maillage et du contraste entre les sous-domaines.

Enfin, nous nous sommes intéressés à l'application de la méthode pour des cas plus complexes et à un exemple réaliste proposés par Thales. Ceux-ci ont permis de confirmer les bonnes performances et la précision du couplage FEM-BEM avec des opérateurs de transmission d'ordre élevé.

## Perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit ouvre à de nombreuses perspectives. Tout d'abord, remarquons que lorsque les objets diffractants sont homogènes, nous pouvons facilement étendre ce travail au couplage faible BEM-BEM. Par ailleurs, les cas tests nous ont montré qu'en général, les approximations de Padé induisent un coût important pour la factorisation du problème intérieur. Une première perspective de recherche serait de réécrire la formulation variationnelle de l'approximation de Padé en découplant en partie les inconnues auxiliaires [31]. Une autre alternative serait plutôt d'utiliser des approximations du second ordre des opérateurs MtE. En guise d'exemple, nous présentons brièvement quelques résultats lorsque nous choisissons des approximations du second ordre avec et sans rotation de branche pour  $\mathbf{T}_-$ , notées respectivement  $\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\mathcal{O}_2,\theta}$  et  $\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\mathcal{O}_2}$ , telles que

$$\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\mathcal{O}_2,\theta} = -\frac{e^{-\frac{\theta}{2}}}{z_+} \left( \frac{3 - e^{-\theta}}{2} \mathbf{Id} - \frac{3}{2} \mathbf{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{(k_+ + i\epsilon)^2} \mathbf{rot}_\Gamma \right) \right) (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}),$$

et

$$\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\mathcal{O}_2} = -\frac{1}{z_+} \left( \mathbf{Id} - \mathbf{rot}_\Gamma \left( \frac{1}{(k_+ + i\epsilon)^2} \mathbf{rot}_\Gamma \right) \right) (\mathbf{Id} \wedge \mathbf{n}).$$

La Table 8 résume une comparaison de la performance du couplage faible entre les ap-

$\mathbf{T}_-$	Itérations GMRES	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{H}}^{\text{BEM}}$	$e_{\gamma_t^- \mathbf{E}}^{\text{analy}}$
$-\Lambda_{+,k_+,z_+}^0$	29	0.9%	1.0%	7.4%
$-\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\mathcal{O}_2}$	15	1.0%	1.9%	7.7%
$-\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\mathcal{O}_2,\theta}$	11	1.4%	2.1%	7.6%
$-\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$	9	0.9%	0.9%	7.5%

TABLE 8 – Convergence et précision du couplage faible FEM-BEM pour différentes approximations de  $\mathbf{T}_-$  avec  $\mathbf{T}_+ = -\Lambda_{+,k_+,z_+}^0$  (sphère,  $k_+ = 2$ ,  $\delta = 2$  et  $n_\lambda = 10$ )

proximations étudiées dans ce travail de recherche et les approximations du second ordre. Par rapport à l'approximation d'ordre zéro, nous constatons une amélioration du nombre d'itérations GMRES sans dégradation de la précision pour le choix  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\mathcal{O}_2}$ . La convergence est d'autant plus rapide (très proche de  $\mathbf{T}_- = -\Lambda_{+,k_+,z_+}^{\text{sq},N_p,\theta_p}$ ) lorsque nous rajoutons la rotation de branche. D'autre part, une autre question relative aux conditions de transmission pour le couplage faible FEM-BEM reste ouverte. Pouvons-nous garantir d'une part le caractère bien posé des sous-problèmes et d'autre part la convergence de la méthode ?

Pour une industrialisation efficace de la méthode, il est primordial de décomposer le domaine intérieur. Cela-dit, la présence problématique des jonctions est en général inévitable si un partitionneur automatique est utilisé. Ce point non trivial nécessite à la fois des développements théoriques et numériques. Remarquons que des travaux ont déjà été réalisés

---

en ce sens pour l'équation de Helmholtz [52, 53]. Une alternative serait d'appliquer une DDM [9, 33] au problème intérieur à chaque itération de la résolution du couplage faible FEM-BEM.

Il serait intéressant d'appliquer le couplage faible FEM-BEM aux objets diffractants anisotropes et à des problèmes faisant intervenir une source physique dans le problème intérieur. Ajouté à cela, nous mentionnons qu'une possible perspective de recherche serait de réfléchir à l'extension de l'approche faible à d'autres domaines d'application, comme par exemple la vibro-acoustique.





# Bibliographie

- [1] T. Abboud and D. Barbier. Hi-box : A generic library of fast solvers for boundary element methods. In *IEEE Conference on Antenna Measurements Applications (CAMA)*, pages 1–4, 2016.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [3] A. Alonso-Rodriguez and L. Gerardo-Giorda. New nonoverlapping domain decomposition methods for the harmonic Maxwell system. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(1) :102–122, 2006.
- [4] X. Antoine and M. Darbas. An introduction to operator preconditioning for the fast iterative integral equation solution of time-harmonic scattering problems. *Multiscale Science and Engineering*, 3(1) :1–35.
- [5] X. Antoine, M. Darbas, and Y. Y. Lu. An improved surface radiation condition for high-frequency acoustic scattering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33-36) :4060–4074, 2006.
- [6] A. Bachelot and V. Lange. Time dependent integral method for Maxwell’s system with impedance boundary condition. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 11, 1995.
- [7] A. Bendali, Y. Boubendir, and M. B. Fares. A FETI-like domain decomposition method for coupling finite elements and boundary elements in large-size problems of acoustic scattering. *Computers & Structures*, 85(9) :526–535, 2007.
- [8] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2) :185–200, 1994.
- [9] M. Bonazzoli, V. Dolean, I. Graham, E. Spence, and P-H Tournier. Domain decomposition preconditioning for the high-frequency time-harmonic Maxwell equations with absorption. *Mathematics of Computation*, 88(320) :2559–2604, 2019.
- [10] M. Born and E. Wolf. *Principle of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Pergamon Press, 2013.
- [11] Y. Boubendir, A. Bendali, and M. B. Fares. Coupling of a non-overlapping domain decomposition method for a nodal finite element method with a boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(11) :1624–1650, 2008.
- [12] A. Buffa and S. H. Christiansen. A dual finite element complex on the barycentric refinement. *Comptes Rendus Mathématique*, 340(6) :461–464, 2005.
- [13] A. Buffa and P. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part II : Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 24(1) :31–48, 2001.

- [14] A. Buffa, R. Hiptmair, T. von Petersdorff, and C. Schwab. Boundary element methods for Maxwell transmission problems in Lipschitz domains. *Numerische Mathematik*, 95(3) :459–485, 2003.
- [15] S. Börm. *Efficient Numerical Methods for Nonlocal Operators : H2-matrix Compression, Algorithms and Analysis*, volume 14. European Mathematical Society, 2010.
- [16] B. Caudron. *Couplages FEM-BEM faibles et optimisés pour des problèmes de diffraction harmoniques en acoustique et en électromagnétisme*. PhD thesis, Université de Lorraine, France and Université de Liège, Belgique, 2018.
- [17] B. Caudron, X. Antoine, and C. Geuzaine. Optimized weak coupling of boundary element and finite element methods for acoustic scattering. *Journal of Computational Physics*, 421(3) :109737, 2020.
- [18] W. Chew and W. Weedon. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell’s equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7(13) :599–604, 1994.
- [19] S. H. Christiansen and J.-C. Nédélec. A preconditioner for the electric field integral equation based on calderon formulas. *SIAM journal on numerical analysis*, 40(3) :1100–1135, 2002.
- [20] X. Claeys and R. Hiptmair. Electromagnetic scattering at composite objects : a novel multi-trace boundary integral formulation. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 46(6) :1421–1445, 2012.
- [21] X. Claeys, R. Hiptmair, and E. Spindler. Second-kind boundary integral equations for electromagnetic scattering at composite objects. *Computers & Mathematics with Applications*, 74(11) :2650–2670, 2017.
- [22] F. Collino, F. Millot, and S. Pernet. Boundary-integral methods for iterative solution of scattering problems with variable impedance surface condition. *Progress In Electromagnetics Research*, 80 :1–28, 2008.
- [23] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. SIAM, 2013.
- [24] A. de La Bourdonnaye. Some formulations coupling finite element and integral equation methods for Helmholtz equation and electromagnetism. *Numerische Mathematik*, 69(3) :257–268, 1995.
- [25] B. Després, P. Joly, and J. E. Roberts. A domain decomposition method for the harmonic Maxwell equations. In *Iterative methods in linear algebra*, pages 475–484, 1991.
- [26] B. Després. *Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d’ondes en régime harmonique. Le théorème de Borg pour l’équation de Hill vectorielle*. PhD thesis, 1991.
- [27] V. Dolean, M. J. Gander, and L. Gerardo-Giorda. Optimized Schwarz methods for Maxwell’s equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(3) :2193–2213, 2009.
- [28] V. Dolean, P. Jolivet, and F. Nataf. *An introduction to domain decomposition methods : algorithms, theory, and parallel implementation*. SIAM, 2015.
- [29] M. Eiermann. Fields of values and iterative methods. *Linear Algebra and its Applications*, 180 :167–197, 1993.
- [30] M. Eiermann and O. G. Ernst. Geometric aspects of the theory of Krylov subspace methods. *Acta Numerica*, 10 :251–312, 2001.
- [31] M. El Bouajaji, X. Antoine, and C. Geuzaine. Approximate local magnetic-to-electric surface operators for time-harmonic Maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 279 :241–260, 2014.

- 
- [32] M. El Bouajaji, V. Dolean, M. J. Gander, and S. Lanteri. Optimized schwarz methods for the time-harmonic Maxwell equations with damping. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(4) :A2048–A2071, 2012.
- [33] M. El Bouajaji, B. Thierry, X. Antoine, and C. Geuzaine. A quasi-optimal domain decomposition algorithm for the time-harmonic Maxwell’s equations. *Journal of Computational Physics*, 294 :38–57, 2015.
- [34] M. Embree. How descriptive are GMRES convergence bounds? *NA Report 99*, 8, 1999.
- [35] N. Engheta, W. D. Murphy, V. Rokhlin, and M. S. Vassiliou. The fast multipole method (fmm) for electromagnetic scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(6) :634–641, 1992.
- [36] O. G. Ernst and M. J. Gander. *Why it is Difficult to Solve Helmholtz Problems with Classical Iterative Methods*, pages 325–363. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [37] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [38] I. G. Graham, E. A Spence, and J. Zou. Domain decomposition with local impedance conditions for the Helmholtz equation with absorption. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 58(5) :2515–2543, 2020.
- [39] W. Hackbusch. *Hierarchical Matrices : Algorithms and Analysis*, volume 49. Springer, 2015.
- [40] C. Hazard and M. Lenoir. On the solution of time-harmonic scattering problems for Maxwell’s equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 27 :1597–1630, 1996.
- [41] R. Hiptmair. Coupling of finite elements and boundary elements in electromagnetic scattering. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(3) :919–944, 2003.
- [42] R. Hiptmair and P. Meury. Stabilized FEM–BEM coupling for Maxwell transmission problems. In *Modeling and Computations in Electromagnetics*, pages 1–38. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [43] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part I : The h-version of the FEM. *Computers & Mathematics with Applications*, 30(9) :9–37, 1995.
- [44] F. Ihlenburg and I. Babuska. Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number Part II : The hp version of the FEM. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(1) :315–358, 1997.
- [45] J.-M. Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 2015.
- [46] V. Levillain. *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1991.
- [47] P.-L. Lions et al. On the schwarz alternating method. i. In *First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, volume 1, page 42, 1988.
- [48] J. Liu and J. M. Jin. A highly effective preconditioner for solving the finite element-boundary integral matrix equation of 3-D scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 50(9) :1212–1221, 2002.
- [49] Y. Liu. *Fast multipole boundary element method : theory and applications in engineering*. Cambridge University Press, 2009.

- [50] P. Marchner, X. Antoine, C. Geuzaine, and H. Bériot. Construction and numerical assessment of local absorbing boundary conditions for heterogeneous time-harmonic acoustic problems. *Preprint HAL-03196015, submitted*, 2021.
- [51] F. A. Milinazzo, C. A. Zala, and G. H. Brooke. Rational square-root approximations for parabolic equation algorithms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(2) :760–766, 1997.
- [52] A. Modave, C. Geuzaine, and X. Antoine. Corner treatments for high-order local absorbing boundary conditions in high-frequency acoustic scattering. *Journal of Computational Physics*, 401 :109029, 2020.
- [53] A. Modave, A. Royer, X. Antoine, and C. Geuzaine. A non-overlapping domain decomposition method with high-order transmission conditions and cross-point treatment for helmholtz problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 368 :113162, 2020.
- [54] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell’s equations*. Oxford University Press, 2003.
- [55] P. B. Monk and A. K. Parrott. A dispersion analysis of finite element methods for Maxwell’s equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 15(4) :916–937, 1994.
- [56] P. Naseri, S.A. Matos, J. Costa, C.A. Fernandes, and N.J.G. Fonseca. Dual-band dual-linear-to-circular polarization converter in transmission mode application to  $k/ka$ -band satellite communications. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 66(12) :7128–7137, 2018.
- [57] J.-C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations : Integral Representations for Harmonic Problems*, volume 144. Springer-Verlag, 2001.
- [58] Z. Peng and J.-F. Lee. Non-conformal domain decomposition method with second-order transmission conditions for time-harmonic electromagnetics. *Journal of Computational Physics*, 229(16) :5615–5629, 2010.
- [59] Z. Peng, V. Rawat, and J.-F. Lee. One way domain decomposition method with second order transmission conditions for solving electromagnetic wave problems. *Journal of Computational Physics*, 229(4) :1181–1197, 2010.
- [60] P. A. Raviart and J. M. Thomas. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, page 292–315. Springer, 1977.
- [61] V. Rawat and J.-F. Lee. Nonoverlapping domain decomposition with second order transmission condition for the time-harmonic Maxwell’s equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(6) :3584–3603, 2010.
- [62] A. Royer, E. Béchet, and C. Geuzaine. Gmsh-Fem : an efficient finite element library based on Gmsh, 14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) & ECCOMAS Congress, 2021.
- [63] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear systems*. SIAM, 2003.
- [64] Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES : A Generalized Minimal Residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3) :856–869, 1986.
- [65] M. W. Scroggs, T. Betcke, E. Burman, W. Śmigaj, and E. van ’t Wout. Software frameworks for integral equations in electromagnetic scattering based on Calderón identities. *Computers and Mathematics with Applications*, 74(11) :2897–2914, 2017.



- 
- [66] X.-Q. Sheng, J.-M. Jin, J. Song, C.-C. Lu, and W. C. Chew. On the formulation of hybrid finite element and boundary-integral methods for 3-D scattering. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(3) :303–311, 1998.
- [67] J. A. Stratton. *Electromagnetic theory*. International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, New York, NY, 1941.
- [68] A. Toselli and O. B. Widlund. *Domain decomposition methods : algorithms and theory*, volume 34. Springer, 2005.
- [69] L. N. Trefethen. Pseudospectra of matrices. *Numerical analysis*, 91 :234–266, 1991.
- [70] P. Šolín, K. Segeth, and I. Doležel. *Higher-order Finite Element Methods*. Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [71] M. Vouvakis, K. Zhao, S.-M. Seo, and J.-F. Lee. A domain decomposition approach for non-conformal couplings between finite and boundary elements for unbounded electromagnetic problems in  $\mathbb{R}^3$ . *Journal of Computational Physics*, 225(1) :975–994, 2007.
- [72] P. Yla-Oijala and M. Taskinen. Well-conditioned Müller formulation for electromagnetic scattering by dielectric objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(10) :3316–3323, 2005.
- [73] X. Yuan. Three-dimensional electromagnetic scattering from inhomogeneous objects by the hybrid moment and finite element method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 38(8) :1053–1058, 1990.
- [74] S. Zaglmayr. *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. PhD thesis, 2006.