



HAL
open science

Analyse de sensibilité sur un modèle hydrologique de toiture végétalisée

Axelle Hego

► **To cite this version:**

Axelle Hego. Analyse de sensibilité sur un modèle hydrologique de toiture végétalisée. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2022. Français. NNT : 2022LORR0161 . tel-03959965

HAL Id: tel-03959965

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-03959965v1>

Submitted on 27 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES
UNIVERSITAIRES**

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Analyse de sensibilité sur un modèle hydrologique de toiture végétalisée

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 21 octobre 2022

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

en **Automatique, Traitement du signal et des images, Génie informatique**

mention Génie informatique

par

Axelle HEGO

Membres du jury :

Président :	Robert FAIVRE	Directeur de recherche à l'INRA Département MIA, Toulouse
Rapporteurs :	Robert FAIVRE	Directeur de recherche à l'INRA Département MIA, Toulouse
	Thierry POINOT	Professeur à l'Université de Poitiers Directeur du LIAS, Poitiers
Examineur·trice·s :	Bertrand IOOSS	Ingénieur de recherche HDR chez EDF R&D Chatou
	Magalie THOMASSIN	Maîtresse de conférences à l'Université de Lorraine CRAN, Nancy
Invité :	Rémy CLAVERIE	Chargé de recherche au Cerema Grand-Est, Nancy
Co-encadrante :	Floriane COLLIN	Maîtresse de conférences à l'Université de Lorraine CRAN, Nancy
Directeur de thèse :	Hugues GARNIER	Professeur à l'Université de Lorraine CRAN, Nancy

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier **Floriane Collin**, mon encadrante, qui a cru en moi dès le début de cette aventure. Son soutien, sa gentillesse et sa bienveillance à mon égard m'ont permis de tenir le coup et de me remotiver durant les périodes difficiles de ces trois années de thèse. Je souhaite également exprimer ma gratitude envers **Hugues Garnier**, mon directeur de thèse, qui m'a accompagné tout au long du doctorat avec ses conseils avisés qui m'ont permis de prendre du recul sur mes travaux et de produire des résultats et présentations de qualité. Grâce à votre temps et votre patience, Floriane et Hugues, vous m'avez permis de m'épanouir en tant que chercheuse et enseignante. Je vous en suis très reconnaissante et j'espère avoir été à la hauteur de vos attentes.

Je remercie également **Rémy Claverie** du Cerema de Tomblaine pour l'opportunité qu'il nous a donné de travailler sur les données passionnantes des toitures végétalisées, pour les visites sur les toits et également pour tout le temps qu'il nous a accordé. Pour tout cela, Rémy, je te remercie énormément.

J'aimerais remercier tous mes collègues du CRAN de l'équipe iModel pour l'ambiance de travail exceptionnelle qui règne et qui m'ont permis de me sentir bien et soutenue tout au long de ma thèse. Ainsi que les enseignants de Polytech Nancy qui m'ont fait confiance pour me former à l'enseignement.

Mes remerciements vont également aux membres du jury, Thierry Poinot, Robert Faivre, Magalie Thomassin et Bertrand Iooss, d'avoir accepté d'examiner mes travaux et de participer à ma soutenance de thèse.

Enfin, je tiens à remercier le CRAN et la Région Grand Est qui ont financé mes travaux.



*Je dédie cette thèse
à ma famille,
ma moitié,
mes amis
et aux générations futures.*

*♪ ♪
Avant les arbres assassinés
Avant que tout soit emporté
Je veux retourner dans l'allée
Entendre les séquoias pleurer
♪ ♪
Quand j'ai marché dans l'allée des séquoias
J'ai respiré en entier pour une fois
♪ ♪*

Chanson de Pomme, les séquoias (2019)

Résumé

Ces dernières décennies, les surfaces imperméables des zones urbaines favorisent la saturation des systèmes d'évacuation. Dans le but de réduire l'impact de cette imperméabilité, l'installation de toitures végétalisées est une solution intéressante pour retenir et ralentir les eaux de pluie avant leur arrivée dans les réseaux. Une étude approfondie du comportement hydrique de ces structures est nécessaire pour la mise en place de toitures végétalisées performantes dans les éco-quartiers par exemple. Les performances hydriques sont caractérisées par la teneur en eau à l'intérieur des différentes couches de la toiture. Cette teneur en eau peut être simulée avec des modèles complexes qui dépendent de plusieurs paramètres difficiles à déterminer avec précision tels que des paramètres de sol, de végétation et de météorologie. Les incertitudes de ces paramètres vont se propager dans le modèle et affecter le calcul de la teneur en eau. Pour analyser et quantifier l'impact des incertitudes des paramètres sur la sortie du modèle, la teneur en eau, des méthodes d'analyse de sensibilité globale sont appliquées. Dans un premier temps, un modèle simplifié est considéré. Sa particularité est sa sortie variant au cours du temps. L'analyse de sensibilité est menée en utilisant une approche séquentielle mais aussi multivariée [1]. Ensuite, une calibration du modèle complet est réalisée en utilisant l'analyse de sensibilité [2]. Enfin, un paramètre météo incertain et variant dans le temps est ajouté à l'étude [3]. Une approche originale est proposée pour générer des échantillons cohérents et corrélés dans le temps pour ce paramètre. Les résultats de ces travaux de thèse ont mis en évidence les paramètres ayant le plus d'impact sur le teneur en eau au cours du temps parmi les paramètres de sols, de végétation et de météo. Ces résultats ont permis d'améliorer la compréhension de la dynamique de la toiture végétalisée.

Mots-clés: modèle hydrique de toiture végétalisée, analyse de sensibilité, calibration, paramètres incertains variant dans le temps

Listes des communications

- [1] Approaches for green roof dynamic model analysis using GSA. In 19th IFAC symposium on System Identification : learning models for decision and control (SYSID), Padova, Italy, IFAC-PaperOnLine, 54(7) : 613-618, 2021.
- [2] Calibration of a green roof hydrological model using global sensitivity analysis. In 10th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD), Vienna, Austria, ARGESIM Report 17 (ISBN 978-3-901608-95-7), p 17-18.
- [3] GSA of a green roof hydrological model with static and dynamic inputs and dynamic output. In 10th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output (SAMO), March 14-16, 2022 at Tallahassee, Florida (USA).

Abstract

In the last decades, soil imperviousness in urban areas have been one of the main issue because it can lead to the saturation of drainage systems and flood. In order to reduce the impact of this imperviousness, the installation of green roofs is an interesting solution to retain and slow down rainwater before it reaches the sewer system. An in-depth study of the hydric behavior of these structures is necessary for the installation of efficient green roofs in eco-districts for example. The hydric performances are characterized by the water content inside the different layers of the roof. This water content can be simulated with complex models depending on several parameters difficult to determine with precision such as soil, vegetation and meteorological parameters. The uncertainties of these parameters will propagate in the model and affect the simulation of the water content. To analyse and quantify the impact of parameter uncertainties on the model output, the water content, global sensitivity analysis methods are applied. First, a simplified model is considered. Its particularity is its time-varying output. The sensitivity analysis is conducted using a sequential but also multivariate approach [1]. Then, a calibration of the complete model is performed using the sensitivity analysis [2]. Finally, an uncertain and time-varying weather parameter is added to the study [3]. An original approach is proposed to generate consistent and time-correlated samples for this parameter. The results of this thesis work have highlighted the parameters with the highest impact on water content over time among the soil, vegetation and weather parameters. These results have improved the understanding of the green roof dynamics.

Keywords: green roof hydrological model, sensitivity analysis, calibration, time-varying uncertain parameters

List of communications

- [1] Approaches for green roof dynamic model analysis using GSA. In 19th IFAC symposium on System Identification : learning models for decision and control (SYSID), Padova, Italy, IFAC-PaperOnLine, 54(7) : 613-618, 2021.
- [2] Calibration of a green roof hydrological model using global sensitivity analysis. In 10th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD), Vienna, Austria, ARGESIM Report 17 (ISBN 978-3-901608-95-7), p 17-18.
- [3] GSA of a green roof hydrological model with static and dynamic inputs and dynamic output. In 10th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output (SAMO), March 14-16, 2022 at Tallahassee, Florida (USA).

Table des matières

Table des figures	xii
Liste des tableaux	xv
Glossaire	xvii
Acronymes	xix
Chapitre 1 Introduction	1
Chapitre 2 Présentation du modèle hydrologique de toiture végétalisée	7
2.1 Infiltration de l'eau dans le sol par l'équation de Richards	9
2.1.1 Propriétés hydrauliques du sol	10
2.1.2 Absorption d'eau par les racines	12
2.1.3 Potentiel d'évapotranspiration	14
2.1.4 Schéma des hypothèses de modélisation pour l'absorption par les racines	18
2.2 Résolution de l'équation de Richards	20
2.2.1 Conditions initiales et limites	20
2.2.2 Discrétisation spatiale et temporelle	22
2.3 Détermination des paramètres du modèle et simulation	23
2.4 Conclusion	25
Chapitre 3 Analyse de sensibilité pour l'étude de l'influence des para- mètres de sol	27
3.1 Contexte de l'étude et présentation de la TTV expérimentale	29
3.2 Analyse de sensibilité	32

3.2.1	Indices de sensibilité	33
3.2.2	Estimation des indices	36
3.2.3	Problématique de l'analyse de sensibilité pour un modèle dynamique	40
3.3	Analyse de sensibilité séquentielle	41
3.3.1	Résumé de la procédure de l'approche séquentielle	42
3.4	Analyse de sensibilité multivariée	43
3.4.1	Analyse en Composantes Principales (ACP)	43
3.4.2	Indices de sensibilité par composantes principales	44
3.4.3	Résumé de la procédure de l'approche multivariée	45
3.5	Application de l'AS pour l'étude de l'influence des paramètres de sol de la TTV	46
3.5.1	Algorithme pour l'AS avec H1D	46
3.5.2	Approche séquentielle	46
3.5.3	Approche multivariée	52
3.6	Conclusion	56
Chapitre 4 Calibration du modèle complet de toiture végétalisée		59
4.1	Contexte de l'étude	60
4.2	Procédure de calibration	63
4.3	Analyse de sensibilité des paramètres de sol et de végétation	66
4.4	Résultats de la calibration	68
4.4.1	Optimisation de l'intervalle d'incertitude	68
4.4.2	Combinaison optimale pour les paramètres	68
4.5	Conclusion	70
Chapitre 5 Étude de l'influence des paramètres de sol, de végétation et de météo		73
5.1	Contexte de l'étude	74
5.2	Génération des échantillons aléatoires pour le paramètre variant dans le temps	77
5.2.1	Caractéristiques statistiques du rayonnement	78
5.2.2	Génération des échantillons variant dans le temps	82
5.3	Analyse de sensibilité des paramètres statiques et dynamiques	87
5.3.1	Méthode d'analyse de sensibilité par permutation adaptée	87

5.3.2 Étude de l'influence des paramètres de sol, de végétation et de météorologie	89
5.4 Conclusion	93
Chapitre 6 Conclusion	95
Annexes	99
Annexe A Compléments sur le modèle et paramétrage de Hydrus	99
Annexe B Compléments sur l'analyse de sensibilité	109
Annexe C Tutoriel pour la configuration d'un projet-type Hydrus	121
Annexe D Guide d'utilisation des codes Matlab pour faire une AS Matlab et Hydrus	135
Annexe E Codes Matlab pour l'AS	143
Bibliographie	155

BIBLIOGRAPHIE

Table des figures

1.1	Photographies de toitures végétalisées	1
1.2	Schéma de la structure d’une toiture végétalisée	2
1.3	Comparaison du flux de sortie de l’eau de pluie pour une toiture conventionnelle et pour une toiture végétalisée, tiré de [Bouzouidja et al. (2018b)]	3
2.1	Schéma d’une vue en coupe d’une toiture végétalisée	8
2.2	Mesure de la teneur en eau (VWC <i>Volumetric Water Content</i> , en noir), du débit de sortie (Q_{out} , en vert) pour une toiture végétalisée pour l’année 2020 ainsi que la pluviométrie (en bleu)	9
2.3	Représentation des conditions pour la loi de Darcy-Bukingham	10
2.4	Courbe de rétention $h(\theta)$	11
2.5	Conductivité hydraulique $K(\theta)$	11
2.6	Fonction de Feddes $\alpha_s(h)$, tiré de [Šimůnek et al. (2008)]	13
2.7	Comparatif de la teneur en eau (VWC) mesurée (en noir), simulée avec Hargreaves (en orange) et avec Penman-Monteith (en rouge)	17
2.8	Schéma des hypothèses de modélisation du terme puits	19
2.9	Configuration de la structure de la toiture végétalisée – (a) Schéma de la structure à modéliser – dans H1D (b) Répartition des couches, (c) Maillage et nœud observé, (d) Condition initiale	20
2.10	Représentation des conditions aux limites (BC) pour la toiture végétalisée	22
2.11	Lien entre l’interface d’Hydrus-1D et Matlab pour la thèse	24
3.1	Photographie de la TTV de 98 m ² étudiée	29
3.2	Schéma de la structure des TTV étudiées	29
3.3	Comparaison entre les teneurs en eau (VWC) simulée (en rouge) et mesurée (en noir), la pluviométrie (en bleu) et le flux de sortie (Q_{out} , en vert)	31
3.4	Variation autour de x_0	33
3.5	Variation sur tout l’intervalle	33
3.6	Introduction des notations	33
3.7	Procédure de l’analyse de sensibilité pour une sortie statique	35
3.8	Problématique de l’AS pour un modèle dynamique	40
3.9	Présentation des approches de l’AS pour un modèle dynamique	41

3.10	$N = 500$ simulations de la teneur en eau (VWC) pour les variations des paramètres du substrat (en bas) et pluviométrie (en bleu, en haut)	48
3.11	Indices de sensibilité principaux pour l'AS séquentielle des paramètres du substrat (en bas) et pluviométrie (en haut)	48
3.12	$N = 500$ simulations de la teneur en eau (VWC) pour les variations des paramètres du drainage (en bas) et pluviométrie (en bleu, en haut)	50
3.13	Indices de sensibilité principaux pour l'AS séquentielle des paramètres du drainage (en bas) et pluviométrie (en bleu, en haut)	51
3.14	Comparaison des variances des simulations réalisées pour le substrat (en rouge) et pour le drainage (en orange)	52
3.15	Indices de sensibilité principaux pour les deux composantes principales de l'AS multivariée pour l'analyse des paramètres de drainage (en bas), corrélation entre les données de sortie et les données projetées sur les deux composantes principales (au milieu) et pluviométrie (en haut)	53
3.16	Indices de sensibilité principaux pour les trois composantes principales de l'AS multivariée pour l'analyse des paramètres de drainage (en bas), corrélation entre les données de sortie et les données projetées sur les composantes principales (au milieu) et pluviométrie (en haut)	55
4.1	Photographie de la TTV de 20 m ² étudiée	61
4.2	Schéma de la structure de TTV étudiée	61
4.3	Mesure de la teneur en eau (VWC, en noir), la pluviométrie (Prec, en bleu) et le flux de sortie (Q_{out} , en vert).	62
4.4	Indices de sensibilité principaux et totaux (en bas) et pluviométrie (en haut)	67
4.5	Indices de sensibilité d'ordre 2 (au milieu), d'ordre 3 (en bas) et pluviométrie (en haut)	67
4.6	Comparaison des teneurs en eau VWC simulée (en rouge) et mesurée (en noir), erreurs absolues entre simulée et mesurée (AE, en bas) et pluviométrie (en haut, en bleu)	69
5.1	Relation linéaire entre le rayonnement net R_n et le rayonnement global R_g pour des données de 2017 et 2018	75
5.2	Comparaison des simulations de la teneur en eau pour $R_n = R_g$ (en rouge), pour $R_n = f(R_g)$ (en orange) et des données mesurées en 2020 (en noir) .	76
5.3	Procédure de l'analyse de sensibilité sur des paramètres statiques et dynamique pour une sortie dynamique	77
5.4	Matrice $\varepsilon(\omega, t)$ comportant les corrélations temporelles $C(t, t')$ sur les lignes et l'aléa ω sur les colonnes	78
5.5	Procédure d'extraction des informations statistiques	79
5.6	Rayonnement net R_n estimé, représenté pour les années de 2013 à 2021 . .	80
5.7	Rayonnement net R_n estimé, représenté pour la période du 1 ^{er} au 30 juin des années de 2013 à 2021	80
5.8	Procédure d'extraction des informations statistiques de $R_n(t)$	81
5.9	Procédure résumée de Iman et Conover	84

5.10	Rayonnement net R_n observé pour juin 2020 (en noir en haut) et quelques exemples d'échantillons de R_n générés (en bas)	85
5.11	Comparaison du maximum, minimum et variance de R_n généré (en rouge) et des 9 années de données observées (en noir)	85
5.12	Comparaison des corrélations temporelles désirées (en haut), obtenues (au milieu) et erreurs absolues (AE, en bas)	86
5.13	Matrice $Y(\omega_Y, t)$ comportant des corrélations temporelles sur les lignes et l'aléa ω_{Y_t} sur les colonnes	89
5.14	Teneur en eau mesurée θ sur la TTV en juin 2020 (en noir), moyenne des simulations effectuées pour l'AS (en rouge) et pluviométrie (en bleu) . . .	91
5.15	Indices de sensibilité principaux pour l'AS permutée sur les paramètres de sol, végétation et météorologique (en bas) et pluviométrie (en haut)	92
A.1	Interface principale d'Hydrus-1D [©]	99
A.2	Fonction de Feddes, tiré de [Šimůnek et al. (2008)]	101
A.3	Paramètres de la fonction de Feddes	101
A.4	Fonction de S-shape, tiré de [Šimůnek et al. (2008)]	101
A.5	Onglet <i>Meteorological Parameters</i>	104
A.6	Onglet <i>Meteorological Conditions</i>	105
A.7	Choix du type de conditions aux limites et initiales	106
A.8	Définition de la fonction $\theta_i(x)$	106
A.9	Onglet <i>Time Information section - Time-variable boundary conditions</i> . .	107
B.1	Résultats AS séquentielle	117
B.2	Résultats AS multivariée basée sur l'ACP	118
B.3	Résultats AS basée sur l'ACP : Indices généralisés	119
B.4	Résultats AS basée sur la décomposition de la covariance	119

Table des figures

Liste des tableaux

2.1	Paramètres de van Genuchten pour le sable et le loam argileux (tiré du logiciel H1D)	12
2.2	Configuration pour la comparaison Penman-Monteith VS Hargreaves, représenté sur la Figure 2.7	17
3.1	Valeurs nominales pour le modèle de van Genuchten-Mualem pour les trois couches de la toiture végétalisée	30
3.2	Intervalles d'incertitude ($\pm 10\%$) pour les paramètres des couches de substrat et de drainage	31
3.3	Choix du PCE en fonction de la distribution de X_i	38
4.1	Configuration pour la calibration	62
4.2	Intervalles d'incertitude des paramètres de sol et de végétation	63
4.3	Intervalles réduits et valeurs nominales pour les paramètres de sol et de végétation	69
5.1	Configuration pour l'étude du Chapitre 5	74
5.2	Intervalles d'incertitude des paramètres de sol et de végétation	90
B.1	Temps de calcul et indicateurs pour différentes méthodes d'échantillonnage, taille d'échantillon N et ordre du PCE p	113
B.2	Intervalle d'incertitude des paramètres du substrat pour l'étude de l'Annexe B	117
B.3	Résultats obtenus avec ACP (GS_i et GST_i) et avec la décomposition de la covariance ($S_{cov,i}$ et $ST_{cov,i}$)	118

Glossaire

- [L] Dimension Longueur. 9
- [M] Dimension Masse. 9
- [T] Dimension Temps. 9
- $C(t, t')$ Fonction d'auto-corrélation. 77
- ET_p Potentiel d'évapotranspiration [LT^{-1}]. 14, 15, 74, 102
- E_p Potentiel d'évaporation [LT^{-1}]. 14
- E Taux d'évaporation [LT^{-1}]. 21, 105
- F_t Fonction de répartition empirique à l'instant t. 77
- H_q Composante principale q avec $q = 1, \dots, Q$. 44
- H_r Humidité relative [%]. 15, 24, 60, 103
- K_s Conductivité hydraulique saturée [LT^{-1}]. 10, 11, 24, 30, 46, 60
- K Fonction de conductivité hydraulique insaturée [L^3L^{-3}]. 9, 10, 100
- LAI Indice foliaire (*Leaf Area Index*) [-]. 14, 24, 25, 60, 90, 103, 104
- L_r Profondeur de la zone racinaire [L]. 13, 24, 25, 60, 102
- $M + 1$ Nombre de coefficients du PCE. 37
- N Taille de l'échantillon. 34, 40, 87
- P Précipitations [LT^{-1}]. 21, 24, 30, 60, 105
- Q Nombre de composante principale H_q . 44
- R_g Rayonnement global [MT^{-1}] ou [$MJ m^{-2} d^{-1}$]. 75
- R_n Rayonnement net [MT^{-1}] ou [$MJ m^{-2} d^{-1}$]. 15, 24, 60, 75, 90, 103
- $S(h)$ Terme "puits" [L^3L^{-3}]. 12
- S_e Saturation effective [L^3L^{-3}]. 11
- S_i Indice de sensibilité principal du paramètre X_i . 35, 66, 88, 91
- S_p Potentiel d'absorption d'eau [T^{-1}]. 12, 13, 102
- S_{T_i} Indice de sensibilité total du paramètre X_i . 35, 66
- T° Température [$^\circ C$] ou [K]. 15, 24, 60, 103
- T_p Potentiel de transpiration [LT^{-1}]. 13, 14

- T Nombre d'instant. 40, 87
- U_z Vitesse du vent [LT^{-1}]. 15, 24, 60, 103
- X_d Paramètre incertain dynamique ou variant dans le temps. 77, 87
- X Paramètre incertain (statique). 33, 87
- Y Sortie du modèle. 33
- $\alpha_s(h)$ Fonction de réponse au stress hydrique [-]. 12, 13
- α Paramètre d'ajustement du potentiel de pression [L^{-1}]. 11, 24, 30, 46, 60, 90
- ω Indicateur de l'aléa. 33, 77
- ψ_j Polynômes du PCE. 37
- θ_r Teneur en eau résiduelle. 10, 11, 24, 30, 46, 60
- θ_s Teneur en eau saturée. 10, 11, 24, 30, 46, 60, 90
- θ Teneur en eau volumétrique [L^3L^{-3}]. 9, 10, 24, 30, 47, 60, 100
- a_j Coefficients du PCE. 37
- h_A Potentiel de pression maximal autorisé à la surface du sol [L]. 21, 105
- h_c Hauteur des plantes [L]. 16, 24, 25, 60, 103
- h Potentiel de pression [L]. 9–11, 22
- k_d Nombre de paramètres dynamiques incertains. 87
- k Nombre de paramètres incertains (statiques). 33, 37, 87
- l Paramètre lié à la tortuosité du sol [-]. 11, 24, 30, 46, 60
- n Paramètre définissant la distribution de la taille des pores [-]. 11, 24, 30, 46, 60, 90
- p Degré maximal de développement du PCE. 37
- q Flux [LT^{-1}]. 10, 21
- t Indice des instants, $t = 1, \dots, T$. 9, 40, 87
- x Profondeur [L]. 9

Acronymes

nRMSD *normalized Root Mean Square Deviation* - écart moyen quadratique normalisée.

64

ACP *Analyse en Composantes Principales*. 43

AE *Absolute Error* - Erreur absolue. 16, 69

AS *Analyse de Sensibilité*. 33, 63, 74

BC *Boundary Condition* - Condition limite. 21

GSA *Global Sensivity Analysis* - Analyse de Sensibilité Globale. 32

H1D *Hydrus-1D*®. 8, 23, 29, 46, 61, 75

IC *Iman et Conover*. 82

LHS *Latin Hypercube Sampling*. 34, 47, 87, 111

MC *Monte-Carlo*. 34, 47, 111

PCE *Polynomials Chaos Expansion* - décomposition en Polynômes du Chaos. 37, 66

QMC *Quasi-Monte-Carlo*. 34, 47, 66, 111

TTV *Toiture Végétalisée*. 1, 8, 30, 60, 74

VGM *van Genuchten-Mualem*. 11, 30, 46, 61

VWC *Volumetric Water Content* - Teneur en eau volumique θ [L^3L^{-3}]. 16, 47, 61

Chapitre 1

Introduction

Durant ces dernières décennies, l'imperméabilité des sols se révèle comme l'une des problématiques majeures des zones urbaines en France. Le développement des zones urbaines et des surfaces imperméables posent de nombreux problèmes lors d'évènements de pluies intenses. En effet, cette imperméabilité favorise le ruissellement des eaux de pluies et ainsi lors d'évènements pluvieux intenses, des volumes d'eau importants se déversent et causent de la saturation des systèmes d'évacuation [Lazzarin et al. (2005)]. Dans le but de réduire l'impact de cette imperméabilité des sols et de soulager les systèmes d'évacuations, une possibilité est la végétalisation des surfaces non-exploitées telles que les toits.



FIGURE 1.1 – Photographies de toitures végétalisées

Les toitures végétalisées (TTV), représentées sur la Figure 1.1, sont des structures composées de différentes couches comme décrit sur la Figure 1.2.

La première couche d'une TTV est la couche de végétation (i). Le type de végétation choisie dépend de la pente de la TTV, de l'épaisseur du substrat et principalement du climat de la région où se situe la TTV. Les propriétés recherchées sont un recouvrement maximal de l'espace, une résistance au gel et à la sécheresse et une capacité d'auto-régénération. Les plantes prennent racines dans le substrat (ii). Celui-ci est formé par 60 à 80 % de matières minérales telles que la pouzzolane, une roche volcanique ou des billes d'argile et de 20 à 40 % de matières organiques telles que des écorces ou de la tourbe. Le substrat a pour fonctions de fournir les nutriments dont les plantes ont besoin

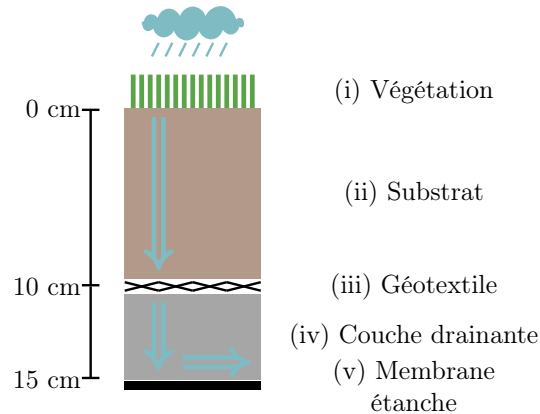


FIGURE 1.2 – Schéma de la structure d'une toiture végétalisée

et de retenir l'eau tout en étant léger. Le dimensionnement du substrat et le choix du type de végétation sont contraints par la capacité du bâtiment à supporter le poids de la structure.

Il existe des TTV dites extensives pour lesquelles les végétaux sont de petites tailles et où le substrat a une profondeur de 15 cm. Pour ce type de TTV, la végétation la plus utilisée correspond à la famille des sedums car elle est capable de se développer sur des sols rocaillieux et inhospitaliers. Il existe également des TTV dites semi-intensives ou intensives pour lesquelles les plantes sont plus décoratives et ont des racines plus importantes. Dans ce cas, le substrat a une profondeur minimale de 30 cm. Dans cette thèse, les parcelles de toiture végétalisée étudiées seront du type extensif avec les dimensions indiquées sur la Figure 1.2.

La couche suivante est un géotextile (iii) qui permet d'empêcher que les racines des plantes ainsi que les particules fines du substrat ne descendent dans la couche de drainage (iv). La couche de drainage est composée de roches argileuses expansées telles que des billes d'argile ou de la pouzzolane. Cette couche permet l'évacuation de l'eau afin d'éviter l'eau stagnante qui provoquerait de l'asphyxie racinaire. La dernière couche d'une TTV est une membrane d'étanchéité (v). Elle est composée de pare-vapeur, d'isolant et d'une membrane perméable et permet de protéger et d'isoler le bâtiment de l'humidité.

L'intérêt accru pour les TTV réside dans leurs nombreux avantages sur le plan hydrique, thermique et de la biodiversité. Concernant l'aspect hydrique, les TTV permettent de retenir et ralentir l'eau de pluie avant qu'elle arrive dans les réseaux d'évacuation. Le débit de pointe de l'eau de pluie dans le réseau peut être réduit de 22 % à 93 % et est retardé jusqu'à 30 min [Li and Badcock Jr (2014)], comme présenté sur la Figure 1.3. Les TTV permettent aussi d'isoler les bâtiments du froid et de la chaleur [Saadatian et al. (2013)]. De plus, l'apport de végétation permet un rafraîchissement naturel des villes [Susca et al. (2011)], un apport de biodiversité [Williams et al. (2014)] et contribue à la dépollution de l'air [Seidl et al. (2013)]. Cependant, en France, l'intérêt principal des TTV porte sur sa capacité à retenir les eaux pluviales et ainsi à réduire la surcharge des réseaux d'assainissement.

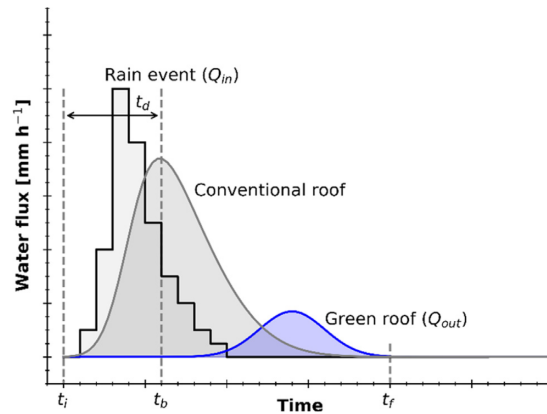


FIGURE 1.3 – Comparaison du flux de sortie de l’eau de pluie pour une toiture conventionnelle et pour une toiture végétalisée, tiré de [Bouzouidja et al. (2018b)]

Dans la construction d’éco-quartiers en zone urbaine, l’installation de TTV est de plus en plus répandue ce qui engendre des besoins au niveau des collectivités pour optimiser la mise en place ce type de structures. Une des missions du Cerema¹ est d’aider les collectivités en proposant des recommandations sur les caractéristiques des TTV pour qu’elles soient les plus performantes possibles (dimension, types de végétations, etc). Pour caractériser des TTV performantes, l’étude approfondie du comportement hydrique des TTV est nécessaire pour le Cerema. L’analyse de la dynamique des TTV est récente et de nombreuses questions restent ouvertes sur la compréhension de leur fonctionnement. Pour y répondre, la simulation de leur dynamique s’avère incontournable et passe par l’utilisation de toitures végétalisées expérimentales et de modèles.

Les performances hydriques d’une TTV sont caractérisées par la capacité de rétention liée au flux sortant qui est lui même lié à la teneur en eau volumique à l’intérieur des différentes couches de la toiture. Ces travaux de thèse vont porter sur l’analyse de la teneur en eau volumique dans les couches de la toiture végétalisée.

Les différents phénomènes hydriques présents dans une TTV sont décrits par des modèles usuels d’écoulement en milieu poreux insaturé, adaptés au cas spécifique de la structure des TTV. Pour décrire l’infiltration de l’eau dans le sol, l’équation de Richards est utilisée [Richards (1931)]. Cette équation aux dérivées partielles non linéaire permet d’obtenir la teneur en eau et le débit de sortie dans un milieu poreux non saturé. Elle dépend de paramètres liés aux caractéristiques du sol. Des modèles sont également utilisés pour estimer le volume d’eau extrait du sol par les plantes et évaporé. Ils dépendent des propriétés de la végétation et des conditions météorologiques auxquelles est soumis le système.

1. Centre d’études et d’expertises sur les risques, l’environnement, la mobilité et l’aménagement, www.cerema.fr

Les paramètres de sol et de végétation peuvent être difficiles à déterminer avec précision. En effet, les sols décrits par les modèles sont naturels et sans fond ce qui n'est pas le cas pour les toitures végétalisées dans lesquelles les couches sont fabriquées par l'Homme, non homogènes et à dimension finie. De plus, il est difficile de reproduire les processus du vivant, certains paramètres sont empiriques, difficiles à mesurer, variant dans un temps long, etc. Toutes ces problématiques induisent des incertitudes dans les simulations qui vont se propager dans le modèle et affecter le calcul de la teneur en eau. L'objectif de cette thèse est d'analyser l'impact de ces incertitudes sur la teneur en eau. Cette analyse s'avère nécessaire pour mieux comprendre la dynamique des toitures végétalisées. À terme, ces études permettraient de donner des préconisations aux collectivités pour mieux les dimensionner et tirer un meilleur profit de leurs performances.

Pour analyser l'impact des incertitudes sur la teneur en eau, les méthodes d'analyse de sensibilité globale sont appliquées. L'analyse de sensibilité permet de quantifier l'influence des incertitudes des paramètres d'un modèle sur sa sortie. De manière globale, ces analyses étudient les variations simultanées des différents paramètres avec de larges intervalles d'incertitudes ainsi que les variations liées aux interactions entre les paramètres. Ces méthodes sont basées sur la décomposition de la variance de la sortie du modèle (méthodes ANOVA, ANalysis Of VAriance) et permettent d'obtenir une mesure de la sensibilité, les indices de sensibilité ici indices de Sobol.

Dans la littérature, peu de travaux ont porté sur l'analyse de sensibilité de modèles hydriques de toitures végétalisées. On peut noter des études sur les bénéfices thermique et énergétique des toitures végétalisées ou sur la viabilité économique de ce type d'installation [Andriamamonjy-Ando (2012)], [Morau et al. (2014)], [Ulubeyli and Arslan (2017)]. Concernant l'aspect hydrique, [Bouzouidja (2014)] effectue une analyse locale pour connaître l'influence qualitative des paramètres sur la teneur en eau et le débit de sortie d'une TTV. Cette analyse est réalisée pour une très faible variation des paramètres et ne permet que la hiérarchisation des influences des paramètres. Elle est appliquée pour un cas spécifique sur un banc expérimental et dans le cadre de scénarios spécifiques.

Dans cette thèse, le modèle utilisé simule et reproduit le comportement d'une toiture végétalisée instrumentée en conditions réelles d'installation et des analyses de sensibilité globales sont appliquées. Les travaux de thèse s'articulent autour de trois études principales :

- étude de l'impact des incertitudes des paramètres de sol sur un modèle simplifié de TTV [Hégo et al. (2021)] ;
- calibration du modèle complet prenant en compte les conditions météorologiques ainsi que des phénomènes liés aux plantes [Hégo et al. (2022b)] ;
- étude de l'impact des incertitudes des paramètres de sol, de végétation et météorologiques sur un modèle complet [Hégo et al. (2022a)].

Le manuscrit est organisé comme suit. Le Chapitre 2 présente le modèle hydrologique étudié qui permet de décrire la teneur en eau présente dans le sol de la TTV. Le Chapitre 3 porte sur l'analyse de sensibilité des paramètres liés au sol sur le modèle de la toiture végétalisée présenté dans le Chapitre 2, en prenant en compte uniquement le phénomène d'infiltration de l'eau dans le sol. Après avoir rappelé les concepts de base de l'analyse de sensibilité, ce chapitre se focalise sur une approche séquentielle puis multivariée pour calculer les indices de sensibilité dans le cas où la sortie du modèle, la teneur en eau, varie au cours du temps. Le Chapitre 4 présente la calibration du modèle sur les données réelles de teneur en eau pour l'année 2020, en prenant en compte les conditions météorologiques ainsi que les phénomènes liés aux plantes. Une procédure de calibration utilisant l'analyse de sensibilité globale est proposée. Elle repose sur les périodes d'influence des paramètres. Dans le Chapitre 5, les incertitudes des paramètres liés au sol, à la végétation et à la météorologie sont analysées. Toute la difficulté de cette étude réside dans la génération d'échantillons aléatoires cohérents pour le paramètre météorologique qui est incertain et varie au cours du temps. Une approche originale basée sur l'analyse statistique des données météorologiques mesurées et la décomposition de Iman et Conover est utilisée. Enfin, la Conclusion rappelle les principaux résultats obtenus dans la thèse et ouvre sur les perspectives de futurs travaux. L'Annexe A présente le logiciel Hydrus-1D utilisé dans la thèse pour effectuer les simulations de la teneur en eau. L'Annexe B donne des compléments sur les méthodes d'analyse de sensibilité. L'Annexe C présente un tutoriel de configuration complexe du logiciel Hydrus-1D pour un projet-type de TTV. L'Annexe D décrit le lien entre Matlab et H1D pour ce projet-type et l'Annexe E contient les bases de codes Matlab les plus importants qui ont été utilisés pour les études qui suivent.

Chapitre 2

Présentation du modèle hydrologique de toiture végétalisée

Ce chapitre présente le modèle hydrologique de la toiture végétalisée qui sera étudié dans la suite de la thèse. Ce modèle permet de décrire la teneur en eau présente dans le sol de la toiture. Les différentes équations décrivant l'infiltration de l'eau dans le sol sont présentées, ainsi que les hypothèses de modélisation. Le modèle dépend de paramètres liés au sol, à la végétation et à la météorologie, qui sont difficiles à déterminer avec précision. L'objectif des Chapitres 3, 4 et 5 est d'analyser l'impact de l'incertitude de ces paramètres sur la teneur en eau dans la toiture.

Sommaire

2.1	Infiltration de l'eau dans le sol par l'équation de Richards . .	9
2.1.1	Propriétés hydrauliques du sol	10
2.1.2	Absorption d'eau par les racines	12
2.1.3	Potentiel d'évapotranspiration	14
2.1.4	Schéma des hypothèses de modélisation pour l'absorption par les racines	18
2.2	Résolution de l'équation de Richards	20
2.2.1	Conditions initiales et limites	20
2.2.2	Discretisation spatiale et temporelle	22
2.3	Détermination des paramètres du modèle et simulation . . .	23
2.4	Conclusion	25

Dans cette thèse, l'aspect hydrique des toitures végétalisées (TTV) est étudié. Comme précisé précédemment, les toitures végétalisées sont composées de différentes couches qui permettent de stocker et retenir l'eau de pluie avec pour objectif de ralentir l'arrivée de l'eau dans les réseaux urbains. Les différentes couches d'une TTV sont schématisées sur la Figure 2.1. Tout d'abord, la couche de végétation (i) prend racine dans le substrat (ii). Ensuite, le géotextile (iii) empêche les racines et le substrat, en particulier les particules fines, de descendre dans la couche de drainage (iv). Enfin, une membrane étanche (v) assure l'étanchéité de la dalle du toit.

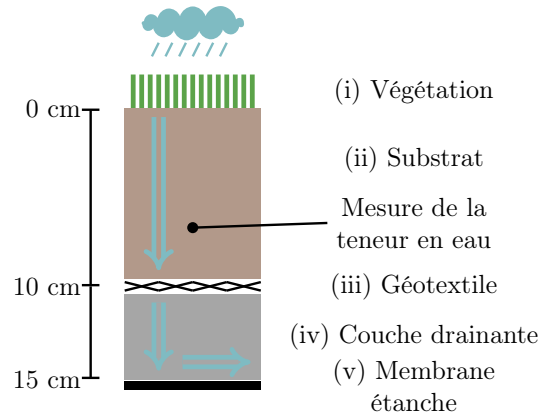


FIGURE 2.1 – Schéma d'une vue en coupe d'une toiture végétalisée

Pour étudier les performances hydriques d'une toiture végétalisée, on va chercher à décrire l'écoulement de l'eau dans la structure (flèches bleues sur la Figure 2.1) dans le but de simuler la capacité de rétention d'eau de la toiture. Cette capacité de rétention est caractérisée par la teneur en eau dans le sol et le débit d'eau sortant de la toiture. Un exemple d'évolution de la teneur en eau et du débit d'eau sortant pour une toiture végétalisée est représentée sur la Figure 2.2 (pour l'année 2020).

L'écoulement de l'eau dans le sol dépend de plusieurs caractéristiques du sol et de nombreux phénomènes naturels tels que les effets des plantes et des conditions météorologiques. Différents types de modèles peuvent être utilisés pour décrire ces phénomènes. Dans [Bouzoidja (2014)], l'auteur explique que des modèles fonctionnels (modèles conceptuels simplifiés de type réservoir) ou des modèles physiques (basés sur les lois fondamentales de la physique du type EDP) peuvent être utilisés pour décrire le comportement d'une toiture végétalisée.

Les travaux de thèse se sont focalisés sur un modèle physique usuel dans le domaine de l'hydrologie qui permet d'obtenir la teneur en eau dans le sol de la toiture végétalisée. Ce modèle est basé sur l'équation de Richards [Richards (1931)]. Ce type de modèle est très complexe à implémenter. Cependant, des logiciels existent. Pour les études présentées dans la suite, le logiciel Hydrus-1D[©] (H1D) de PC-PROGRESS sera utilisé [Szymkiewicz (2012)], [Šimůnek et al. (2008)].

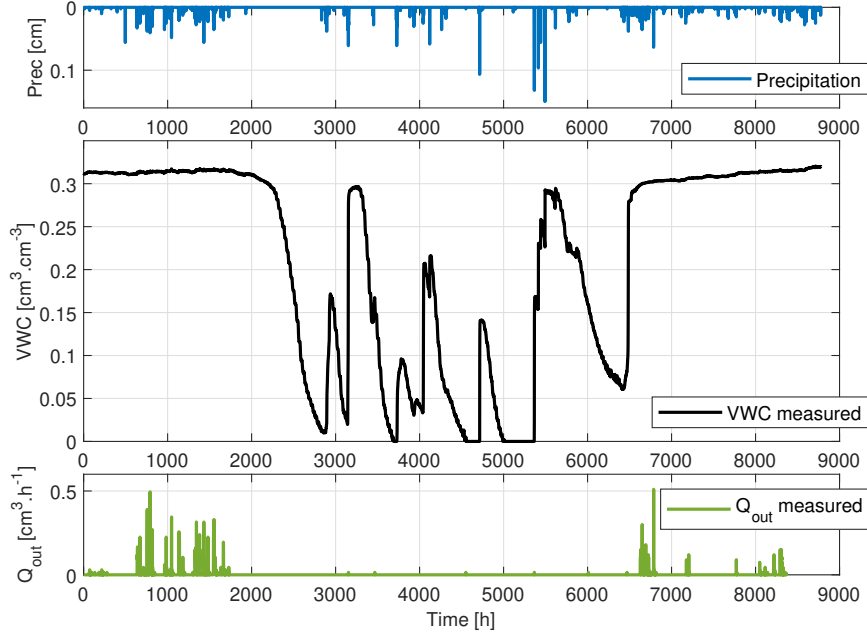


FIGURE 2.2 – Mesure de la teneur en eau (VWC *Volumetric Water Content*, en noir), du débit de sortie (Q_{out} , en vert) pour une toiture végétalisée pour l'année 2020 ainsi que la pluviométrie (en bleu)

2.1 Infiltration de l'eau dans le sol par l'équation de Richards

Le modèle usuel qui décrit l'infiltration de l'eau à travers un milieu poreux saturé ou non saturé est basé sur l'équation de Richards qui est une équation aux dérivées partielles fortement non linéaire [Richards (1931)]. Cette équation décrit, d'une part, l'eau qui s'écoule dans le sol en fonction de ses propriétés hydrauliques telles que la conductivité hydraulique du sol, la teneur en eau et le potentiel de pression et d'autre part, l'eau qui va s'évaporer ou être absorbée par les plantes dans un terme puits. Pour le cas d'une dimension verticale, l'équation de Richards est la suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial \theta(h)}{\partial t}}_{\text{Teneur en eau}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} K(\theta) \left[\frac{\partial h}{\partial x} + 1 \right]}_{\text{infiltration de l'eau dans le sol}} - \underbrace{S(h)}_{\text{terme puits}} \quad (2.1)$$

où θ est la teneur en eau volumique dans le sol [L^3L^{-3}], h est le potentiel de pression [L], K est la fonction de conductivité hydraulique insaturée [LT^{-1}], t le temps [T] et x la profondeur [L].

Remarque : Les dimensions [L], [T] et [M] seront utilisées pour caractériser les grandeurs dans ce chapitre. Elles représentent respectivement des dimensions de Longueur, Temps et Masse.

L'équation de Richards est obtenue en prenant en compte les conditions d'écoulement transitoire ((b) dans la Figure 2.3) dans la loi de Darcy-Buckingham. Cette loi décrit l'écoulement de l'eau dans un sol insaturé en état d'équilibre ((a) dans la Figure 2.3). La loi de Darcy-Buckingham permet d'obtenir le flux q [LT^{-1}] tel que pour une dimension verticale :

$$q = -K(h) \left[\frac{\partial h}{\partial x} + 1 \right] \quad (2.2)$$

(a) État d'équilibre

(b) Conditions d'écoulement transitoire
(cas de conditions naturelles)



FIGURE 2.3 – Représentation des conditions pour la loi de Darcy-Buckingham

Les propriétés hydrauliques du sol utilisées pour la première partie de l'équation de Richards seront présentées dans la Section 2.1.1. Le terme puits de la deuxième partie de l'équation de Richards sera présenté dans la Section 2.1.2.

2.1.1 Propriétés hydrauliques du sol

La teneur en eau volumique θ correspond à la quantité d'eau présente dans un volume unitaire de sol. Elle sera comprise entre une quantité minimale d'eau présente dans le sol (dans les pores des particules qui composent le sol), la teneur en eau résiduelle θ_r , et une quantité maximale, la teneur en eau saturée θ_s , et pourra également être exprimée en %.

Le potentiel de pression h représente la quantité d'énergie qu'il faut pour déplacer une quantité d'eau dans le sol par unité de volume, autrement dit, la "force" que l'on doit appliquer pour faire sortir l'eau du sol. Ce potentiel de pression est représenté comme une hauteur d'eau d'où sa dimension de longueur. Il varie de 0 à $-\infty$ et plus sa valeur absolue est grande, plus il est difficile pour l'eau de se déplacer dans le sol.

Pour se représenter les deux grandeurs θ et h , une analogie avec une éponge peut être faite. En effet, plus une éponge contient d'eau (θ proche de θ_s), moins la force à appliquer est grande pour faire sortir de l'eau (h tend vers 0). À l'inverse si l'éponge contient peu d'eau (θ proche de θ_r), il faudra une grande force pour extraire de l'eau (h tend vers $-\infty$).

La conductivité hydraulique K correspond à l'aptitude d'un milieu poreux à laisser circuler l'eau sous forme liquide. Il est compris entre 0 et K_s , la conductivité hydraulique de saturation.

Le lien entre les propriétés hydrauliques du sol insaturé $\theta(h)$ et $K(h)$ est non linéaire et peut être défini par différents modèles tels que les modèles de Brooks et Corey, de van Genuchten-Mualem, de Kosugi, etc [Šimůnek et al. (2008)]. Le modèle le plus utilisé pour les travaux sur les TTV et qui sera considéré dans cette thèse est le modèle de van Genuchten-Mualem (VGM) [van Genuchten (1980)].

La fonction de van Genuchten décrit la courbe de rétention $\theta(h)$:

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + \frac{(\theta_s - \theta_r)}{(1 + |\alpha h|^n)^m} & h < 0 \\ \theta_s & h \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

où θ_r et θ_s sont respectivement les teneurs en eau résiduelle et saturée [L^3L^{-3}], α est un paramètre d'ajustement du potentiel de pression h [L], n est un paramètre adimensionné définissant la distribution de la taille des pores dans le sol [-] et qui est relié à m par $m = 1 - 1/n$.

La fonction de conductivité hydraulique de Mualem est :

$$K(S_e) = K_s S_e^l \left[1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^m \right]^2 \quad (2.4)$$

où K_s est la conductivité hydraulique de saturation [LT^{-1}], l est un paramètre lié à la tortuosité du sol et S_e est la saturation effective [L^3L^{-3}] donnée par :

$$S_e = \frac{\theta(h) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.5)$$

La saturation effective S_e correspond au degré de saturation du sol. Compris entre 0 et 1, plus S_e est faible plus le sol s'assèche (θ tend vers θ_r) et plus il est difficile d'avoir des mouvements d'eau (h vers $-\infty$).

Les courbes de rétention $h(\theta)$ et de conductivité hydraulique $K(\theta)$ pour le sable et le loam argileux sont représentées respectivement sur les Figures 2.4 et 2.5 avec les paramètres indiqués dans la Table 2.1.

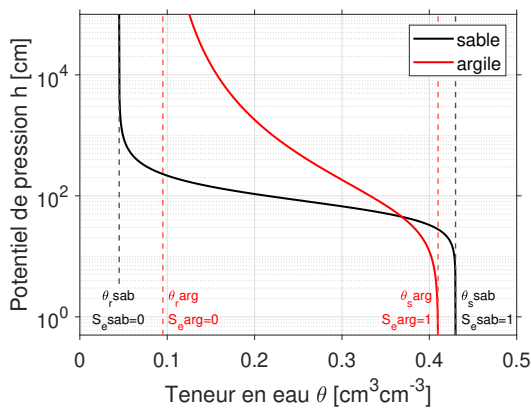


FIGURE 2.4 – Courbe de rétention $h(\theta)$

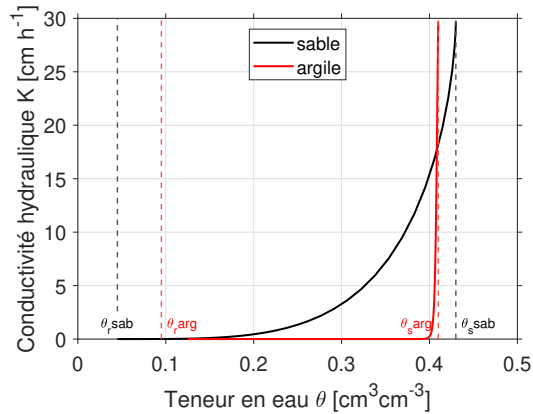


FIGURE 2.5 – Conductivité hydraulique $K(\theta)$

TABLE 2.1 – Paramètres de van Genuchten pour le sable et le loam argileux (tiré du logiciel H1D)

Paramètres	Unité	Type de sol	
		Sable	Loam argileux
θ_r	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.045	0.095
θ_s	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.43	0.41
α	m^{-1}	14.5	1.9
n	-	2.68	1.31
K_s	10^{-5} m s^{-1}	8.25	0.0722
l	-	0.5	0.5

Pour décrire et simuler le comportement hydraulique d'un sol avec le modèle VGM, il faut donc déterminer les 5 paramètres indépendants θ_r , θ_s , α , n et K_s . La courbe de rétention $\theta(h)$ (Fig. 2.4) ainsi que le paramètre K_s peuvent être obtenus par mesures sur le sol à caractériser. La courbe de rétention met en évidence directement θ_s et θ_r et les paramètres α et n sont déterminés sur cette courbe. Les techniques de mesure sont détaillées dans [Bouzouidja (2014)]. Pour des sols naturels classiques tels que le sable ou l'argile, des tables de paramètres sont disponibles [Leij et al. (1996)]. Dans le cas des toitures végétalisées, il faut caractériser les trois couches de sol : le substrat, le géotextile et la couche drainante.

Les propriétés hydrauliques $\theta(h)$ et $K(h)$ du sol peuvent être soumises à une variabilité spatiale et à une dépendance à la température. Dans notre étude, la toiture végétalisée a une profondeur de 15 cm. Cette profondeur étant peu élevée, la variabilité spatiale et la dépendance à la température ne sont pas prises en compte. Des informations supplémentaires sur ces dépendances sont cependant disponibles dans l'Annexe A, qui comportent des compléments sur le modèle de toitures végétalisées étudié ainsi que sur le logiciel H1D.

2.1.2 Absorption d'eau par les racines

Les effets d'absorption d'eau par les racines (*root water uptake*) sont pris en compte par le terme puits $S(h)$ (*sink term*) de l'équation (2.1). Ce terme représente le volume d'eau absorbé par les plantes, par unité de volume de sol et par unité de temps. Ce volume d'eau retiré peut être estimé par différentes fonctions implémentées dans H1D mais elles dépendent toujours du potentiel de pression h [L] et du potentiel d'absorption d'eau S_p [T⁻¹] telles que :

$$S(h) = \alpha_s(h)S_p \quad (2.6)$$

où $\alpha_s(h)$ est la fonction de réponse au stress hydrique [-] ($0 \leq \alpha_s(h) \leq 1$). Cette fonction est égale à 1 quand les plantes sont en capacité maximale d'absorption par les racines et égale à 0 lorsque les plantes n'absorbent pas d'eau dans le sol. S_p est le potentiel d'absorption d'eau quand il n'y a pas de stress hydrique ($\alpha_s(h)=1$).

Fonction de réponse au stress hydrique $\alpha_s(h)$: fonction de Feddes

La fonction de réponse au stress hydrique $\alpha_s(h)$ décrit la capacité des plantes à absorber de l'eau dans le sol avec ses racines. Dans la suite de la thèse, $\alpha_s(h)$ sera la fonction de Feddes. Elle prendra différentes valeurs en fonction de la pression h comme représenté sur la Figure 2.6.

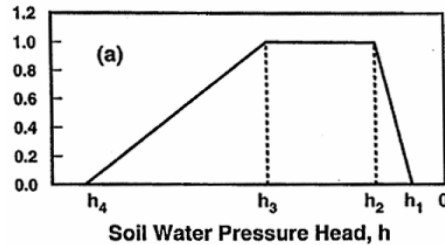


FIGURE 2.6 – Fonction de Feddes $\alpha_s(h)$, tiré de [Šimůnek et al. (2008)]

h_1 est la pression de l'eau à laquelle l'absorption par les racines commence, entre h_2 et h_3 l'absorption est maximale et à partir de h_3 l'absorption diminue jusqu'à ce que la plante se flétrisse à h_4 , c'est-à-dire que h_4 correspond à la fin de l'absorption. h_3 est dépendant du potentiel de transpiration T_p qui sera décrit dans la suite.

Les paramètres utilisés dans la thèse pour la fonction de Feddes sont donnés dans l'Annexe A. Il existe d'autres fonctions pour modéliser la réponse au stress hydrique, telles que la fonction S-shape, non détaillée ici mais présentée dans l'Annexe A.

Potentiel d'absorption d'eau S_p

Le potentiel d'absorption d'eau S_p [T^{-1}] dépend de la profondeur de la zone racinaire L_r [L] et du potentiel de transpiration T_p [LT^{-1}] ($S_p = f(x, L_r, T_p)$).

Pour un potentiel d'absorption d'eau uniformément distribué, la formule utilisée est :

$$S_p = \frac{1}{L_r} T_p \quad (2.7)$$

Pour un potentiel d'absorption d'eau non uniformément distribué, la formule est :

$$S_p = b(x) T_p$$

avec $b(x)$ qui décrit une distribution spatiale de S_p dans la zone racinaire, comme constante, linéaire ou suivant une fonction de Hoffman.

Dans la thèse, le cas de S_p uniformément distribué sera considéré. Des compléments sur les autres cas sont disponibles dans l'Annexe A.

Profondeur de la zone racinaire L_r

La profondeur de la zone racinaire L_r peut être considérée comme constante ou évoluant au cours du temps. L'évolution de $L_r(t)$ est décrite par une fonction de croissance

dépendante d'une profondeur maximale possible pour les racines L_{max} [L], d'une valeur initiale de profondeur de racines L_0 [L] et d'un taux de croissance r . Cette fonction est présentée dans l'Annexe A. Dans le cas de la thèse, cette profondeur sera considérée constante.

Potentiel de transpiration T_p

Le potentiel de transpiration T_p correspond à la quantité potentielle d'eau transpirée par les plantes. Ce potentiel peut être généré avec une variation journalière par le logiciel H1D ou calculé en fonction des conditions météorologiques et des paramètres de végétation. Dans ce cas, T_p est lié au potentiel d'évaporation E_p à travers le potentiel d'évapotranspiration ET_p . Le potentiel d'évapotranspiration ET_p représente la quantité d'eau susceptible d'être évaporée du sol ou transpirée par les plantes et le potentiel d'évaporation E_p correspond à la quantité potentielle d'eau qui va s'évaporer du sol.

Les potentiels de transpiration T_p [LT^{-1}] et d'évaporation E_p [LT^{-1}] sont définis par :

$$\begin{aligned} T_p &= ET_p \cdot (1 - e^{-r_{ext} \cdot LAI}) \\ E_p &= ET_p \cdot e^{-r_{ext} \cdot LAI} \end{aligned} \quad (2.8)$$

où ET_p est le potentiel d'évapotranspiration [LT^{-1}], r_{ext} est le coefficient d'extinction de radiation par la canopée [-] et LAI est l'indice foliaire [-] (*Leaf Area Index*).

La canopée est la partie "feuillage" de la végétation qui est exposée aux conditions atmosphériques. Le coefficient d'extinction r_{ext} permet de prendre en compte l'atténuation du rayonnement due au feuillage des plantes ($r_{ext} = 0.463$). L'indice foliaire LAI correspond à la surface de feuilles par unité de surface de sol.

ET_p peut être modélisé par l'équation de Penman-Monteith ou la formule de Hargreaves présentées dans la Section 2.1.3.

Toutes les possibilités de modélisation pour décrire le terme puits S mises à disposition dans le logiciel H1D sont résumées dans le schéma de la Section 2.1.4. Les fonctions utilisées pour l'étude sont mises en évidence en orange sur le schéma.

2.1.3 Potentiel d'évapotranspiration

Comme montré dans les sections précédentes, le terme puits dépend du potentiel d'évapotranspiration ET_p . Deux modèles peuvent être utilisés dans le logiciel H1D : la formule de Hargreaves qui dépend des températures maximale et minimale et l'équation de Penman-Monteith qui dépend de plusieurs paramètres météorologiques et qui est recommandée par les spécialistes de la *Food and Agriculture Organization of the United Nations*, FAO (1990).

Remarque : Dans cette section, les unités sont directement exprimées car les variables dépendent de constantes spécifiques. [d^{-1}] signifie par jour.

Formule de Hargreaves

En utilisant la formule de Hargreaves, le potentiel d'évapotranspiration est déterminé avec :

$$ET_p = 0.0023 \cdot R_a \cdot (T_m^\circ + 17.8) \cdot (T_{range}^\circ)^{0.5}$$

où R_a représente les radiations extraterrestres [mm d^{-1}] estimées avec des informations de latitude du site étudié et du jour de l'année. T_m° est une température journalière moyenne [$^\circ\text{C}$] et T_{range}° est l'intervalle de température entre la moyenne journalière de T_{max}° et T_{min}° [$^\circ\text{C}$].

Équation de Penman-Monteith

En utilisant l'équation de Penman-Monteith, le potentiel d'évapotranspiration est décrit par :

$$ET_p = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\Delta (R_n - G) + \rho c_p (e_a - e_d) / r_a}{\Delta + \gamma (1 + r_c / r_a)} \right] \quad (2.9)$$

où

- ET_p est le potentiel d'évapotranspiration [mm d^{-1}];
- λ est la chaleur latente de vaporisation (quantité de chaleur nécessaire pour passer de l'état liquide à gazeux) [MJ kg^{-1}] et est fonction de la température $\lambda = f(T^\circ)$;
- Δ est la pente de la courbe de pression de vapeur [$\text{kPa } ^\circ\text{C}^{-1}$] et est fonction de la température $\Delta = f(T^\circ)$;
- R_n est le rayonnement net à la surface [$\text{MJ m}^{-2} \text{d}^{-1}$];
- G est le flux de chaleur du sol (énergie reçue par le sol pour le chauffer par unité de surface et de temps) [$\text{MJ m}^{-2} \text{d}^{-1}$];
- ρ est la densité atmosphérique [kg m^{-3}] et est fonction de la température $\rho = f(T^\circ)$;
- c_p est la chaleur spécifique d'air humide (quantité de chaleur contenue dans l'air humide, $\approx 1.013 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$);
- e_d est la pression de vapeur actuelle [kPa] et est fonction de l'humidité relative $e_d = f(H_r)$;
- r_a est la résistance aérodynamique de la surface du sol [s m^{-1}] et est fonction de la vitesse du vent et de la hauteur des plantes $r_a = f(U_z, h_c)$;
- γ est une constante psychrométrique (constante du mélange air/vapeur d'eau) [$\text{kPa } ^\circ\text{C}^{-1}$] et est fonction de la température relative $\gamma = f(T^\circ)$;
- r_c est la résistance de la canopée des plantes [s m^{-1}] et est fonction de l'indice foliaire $r_c = f(LAI)$.

ET_p est donc fonction des variables météorologiques telles que la température T° , le rayonnement net R_n , l'humidité relative H_r , la vitesse du vent U_z et de paramètres de

végétation tels que la hauteur des plantes h_c et l'indice foliaire LAI :

$$ET_p = f(T^\circ, R_n, H_r, U_z, h_c, LAI).$$

Le détail des fonctions de l'équation de Penman-Monteith (2.9) est donné dans l'Annexe A.

Comparaison des modèles

Le choix du modèle à utiliser pour estimer ET_p est complexe et encore étudié actuellement [Jung et al. (2016)], [Gentilucci et al. (2021)]. L'équation de Penman-Monteith dépend de beaucoup de variables météorologiques qui ne sont pas toujours mesurées sur les sites étudiés, tandis que les mesures de température nécessaires dans la formule Hargreaves sont courantes.

Pour la thèse, une comparaison entre les deux modèles proposés a été réalisée. La Figure 2.7 présente les différences de teneur en eau simulée (VWC) quand l'équation de Penman-Monteith est utilisée (en rouge) et quand la formule de Hargreaves est utilisée (en orange). L'objectif est de reproduire au mieux les données mesurées de 2020 (en noir) avec les mêmes paramètres de sol, de végétation et les mêmes données météorologiques de températures maximale et minimale (seules variables en commun). Ces configurations sont présentées dans la Table 2.2. Les erreurs absolues (AE) entre les mesures et les simulations sont représentées sur le graphique du bas. Cette figure met en évidence l'efficacité du modèle de Penman-Monteith pour reproduire les phénomènes auxquels est soumise la toiture végétalisée. Le modèle de Hargreaves nécessiterait un calibrage pour être efficace. Dans la suite des travaux, le modèle de Penman-Monteith sera utilisé lorsqu'il faudra déterminer l'évapotranspiration pour la toiture végétalisée.

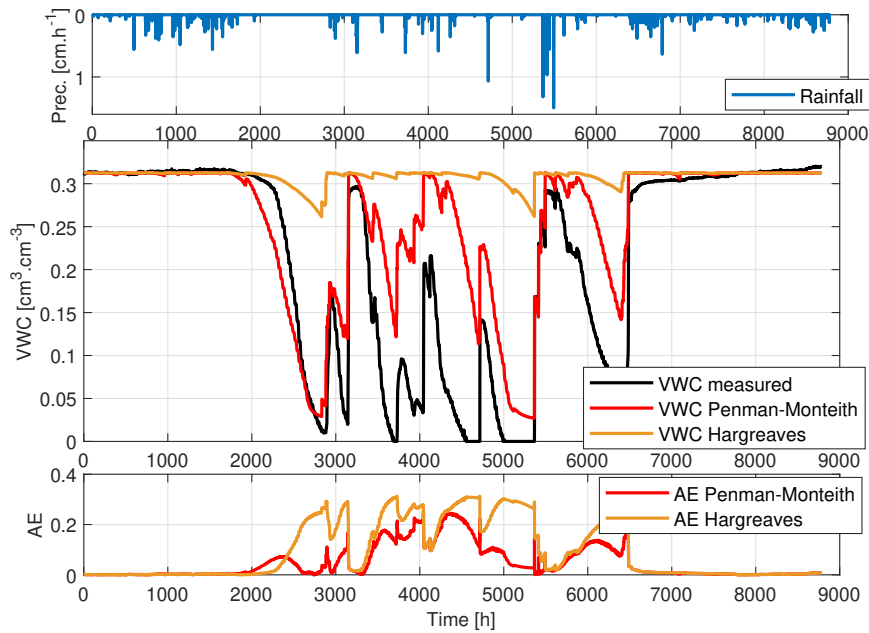


FIGURE 2.7 – Comparatif de la teneur en eau (VWC) mesurée (en noir), simulée avec Hargreaves (en orange) et avec Penman-Monteith (en rouge)

TABLE 2.2 – Configuration pour la comparaison Penman-Monteith VS Hargreaves, représenté sur la Figure 2.7

Paramètres	Unité	Propriétés hydrauliques VGM		
		Substrat	Géotextile	Drainage
θ_r	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$	0.0001	0.1	0.06
θ_s	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$	0.315	0.6	0.3
α	m^{-1}	0.53	11.1	5
n	-	1.68	1.50	1.50
K_s	10^{-3}m s^{-1}	2.167	0.145	3.611
l	-	2.87	0.1	0.1
		Végétation		
Hauteur des plantes	m	0.14		
Albedo	-	0.23		
LAI	-	2.14		
Profondeur des racines	m	0.05		
		Autres		
Latitude	deg.	+48.4 (N)		
Mesure de la vitesse du vent	m	10		
Mesure de température	m	2		

2.1.4 Schéma des hypothèses de modélisation pour l'absorption par les racines

Le schéma ci-dessous souligne la complexité de la modélisation du terme puits qui représente l'absorption de l'eau par les plantes, dans l'équation de Richards (2.1). Il met en évidence la configuration adoptée dans la thèse pour la modélisation de ce terme puits (en orange) qui est détaillée dans les sections précédentes.

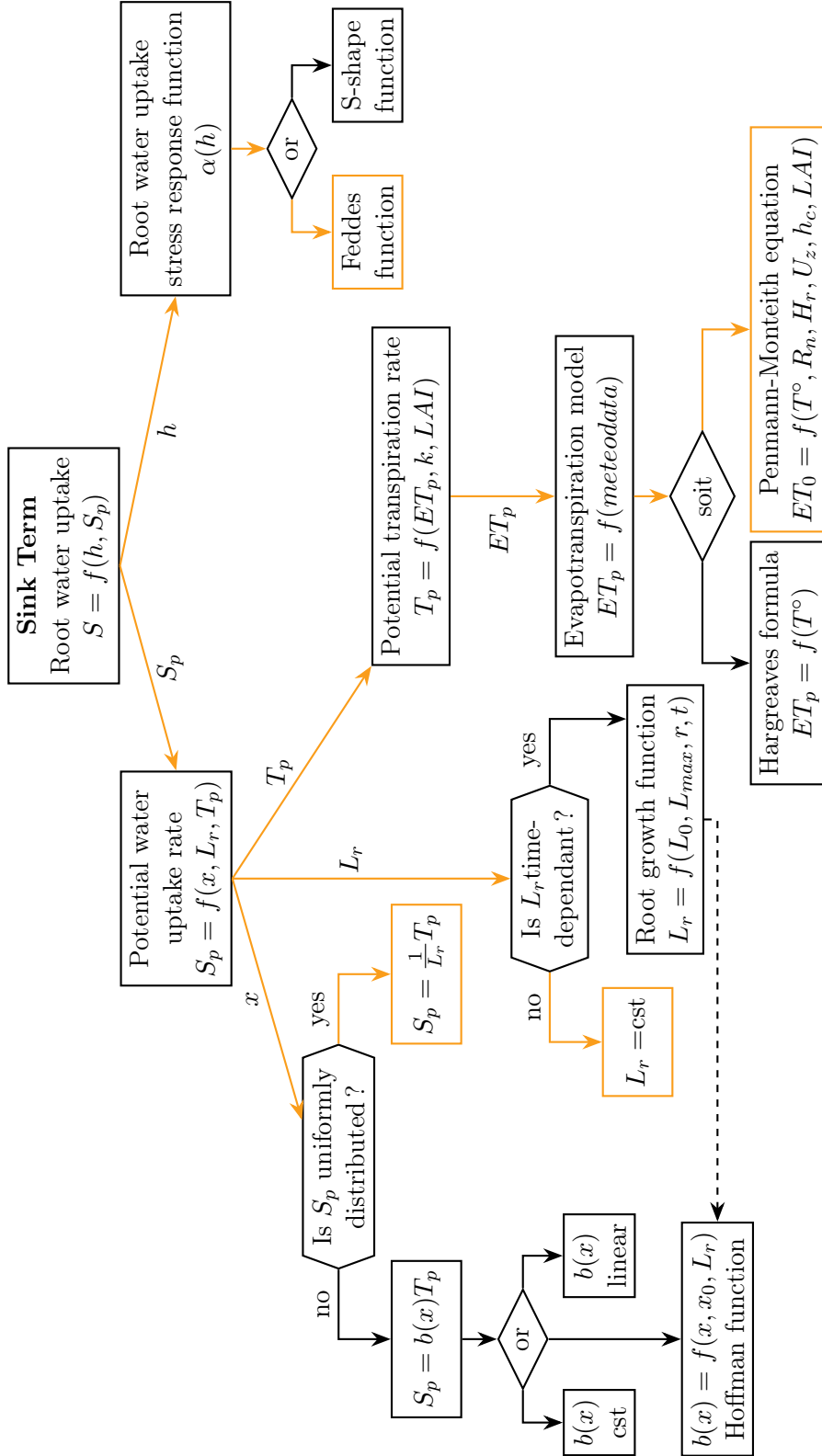


FIGURE 2.8 – Schéma des hypothèses de modélisation du terme puits

2.2 Résolution de l'équation de Richards

Dans la Section 2.1, l'équation de Richards (2.1) et les différents modèles qui permettent d'obtenir la teneur en eau dans un sol sont présentés. Pour s'approcher de la configuration réelle de la toiture végétalisée à modéliser, il faut contraindre la résolution de l'équation aux dérivées partielles avec des conditions spécifiques présentées dans cette section. De plus, la résolution numérique sera brièvement présentée.

La structure spécifique en couches de la TTV (Fig. 2.9a) doit être configurée dans le logiciel H1D. La Figure 2.9b montre la répartition des différentes couches de la TTV. La partie en rouge correspond au substrat (ii), la partie en bleu correspond au géotextile (iii) et la partie en vert correspond à la couche de drainage (iv). Pour chacune des couches, les paramètres hydrauliques de VGM sont configurés. De plus, la Figure 2.9c montre le maillage qui sera utilisé dans la Section 2.2.2 ainsi que le nœud spécifique qui sera observé et qui correspondra à la mesure de teneur en eau disponible. La Figure 2.9d montre la condition initiale paramétrée présentée dans la Section 2.2.1.

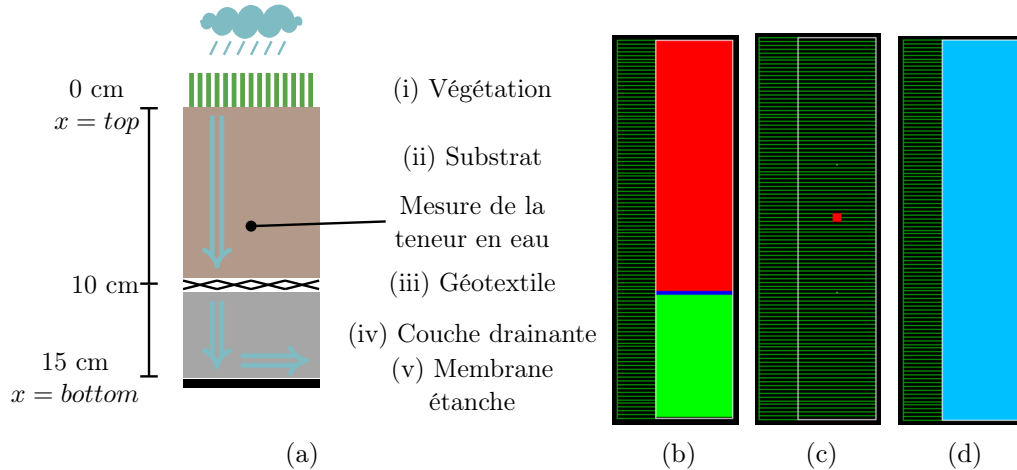


FIGURE 2.9 – Configuration de la structure de la toiture végétalisée – (a) Schéma de la structure à modéliser – dans H1D (b) Répartition des couches, (c) Maillage et nœud observé, (d) Condition initiale

2.2.1 Conditions initiales et limites

Conditions initiales

Pour pouvoir résoudre l'équation de Richards (2.1), il faut dans un premier temps définir les conditions initiales. Ces conditions initiales correspondent à la teneur en eau θ sur tout le domaine d'écoulement de l'eau à l'instant $t = t_0$ au début de la simulation. Dans le cas de l'étude, les conditions initiales sont définies pour la teneur en eau θ par :

$$\theta(x, t) = \theta_i(x) \quad t = t_0 \quad (2.10)$$

où θ_i est une fonction de x [L] avec x allant de la surface jusqu'en bas de la toiture végétalisée (voir Fig. 2.9a).

Dans les études suivantes, la fonction $\theta_i(x)$ est uniforme sur tout le domaine d'écoulement et égale à la première mesure de teneur en eau effectuée sur la TTV (voir Fig. 2.9d et détails dans l'Annexe A).

Conditions aux limites - *Boundary Conditions* (BC)

En plus des conditions initiales, des conditions à la surface du sol et en bas de la TTV doivent être prises en compte pour modéliser au mieux les conditions réelles dans lesquelles se trouve le système.

Dans le cas de la thèse, la toiture végétalisée est soumise aux conditions atmosphériques à la surface du sol. L'interface sol/air dépend uniquement des conditions externes, c'est-à-dire que la quantité potentielle d'eau qui pourra être absorbée par le sol sera définie par le flux q en fonction des précipitations $P(t)$ et de l'évaporation du sol $E(t)$ tel que :

$$q(x, t) = -K \left(\frac{\partial h}{\partial x} + 1 \right) = q_0(t) \quad \text{pour } x = \text{top} \quad (2.11)$$

où $q_0(t)$ correspond à des valeurs ou une fonction prédéfinie du flux d'eau q [LT^{-1}] au cours du temps à la surface du sol. Dans notre cas, $q_0(t)$ est le taux d'infiltration net [LT^{-1}], c'est-à-dire la différence entre les précipitations $P(t)$ et l'évaporation $E(t)$.

$$q_0(t) = P(t) - E(t) \quad (2.12)$$

La condition (2.11) est valable dans le cas où l'on considère que l'eau qui ne sera pas absorbée par le sol va immédiatement ruisseler (*Atmospheric BC with Surface Runoff*). Si une accumulation d'eau est autorisée, la condition (2.11) sera modifiée pour permettre une hauteur d'eau avant le ruissellement (*Atmospheric BC with Surface Layer*). Dans le cas de l'étude, le ruissellement est considéré immédiat.

La quantité d'eau qui sera effectivement absorbée par le sol dépend également de la teneur en eau dans le sol près de la surface. En effet, la surface du sol ne pourra pas absorber plus que sa capacité d'infiltration ou ne pourra pas évaporer plus que sa capacité d'évaporation. Pour prendre en compte ce phénomène, les conditions suivantes sont définies :

$$\left| -K \frac{\partial h}{\partial x} - K \right| \leq E \quad \text{pour } x = \text{top} \quad (2.13)$$

et

$$h_A \leq h \leq h_S \quad \text{pour } x = \text{top} \quad (2.14)$$

où E est le taux potentiel maximum d'infiltration ou d'évaporation sous les conditions atmosphériques [LT^{-1}], h_A est le potentiel de pression minimal autorisé à la surface du sol [L] et h_S est le potentiel de pression maximal autorisé à la surface du sol [L] (généralement à $h_s = 0$ cm). E et h_A sont obtenus avec les données atmosphériques telles que la température T° , l'humidité relative H_r , la vitesse du vent U_z ainsi que la hauteur

des plantes h_c et la teneur en eau à la surface du sol θ_{top} : $E = f(T^\circ, H_r, U_z, h_c, \theta_{top})$ et $h_A = f(T^\circ, H_r)$ (voir détails dans l'Annexe A).

Lorsque le potentiel de pression h atteint la valeur h_A , cela signifie que la capacité d'évaporation est dépassée. La condition (2.11) sur le flux deviendra une condition sur le potentiel de pression (2.15) qui sera fixé à h_A . De même, quand h atteint la valeur h_S cela signifie que la capacité d'infiltration est dépassée. La condition (2.11) deviendra également une condition sur le potentiel de pression (2.15) qui sera fixé à h_S .

La condition sur le potentiel de pression h est définie par :

$$h(x, t) = h_0(t) \quad \text{pour } x = top \quad (2.15)$$

où $h_0(t)$ correspond à des valeurs ou des fonctions prédéfinies du potentiel de pression h [L] au cours du temps et à la surface du sol.

De la même manière qu'à la surface du sol, il faut définir les conditions limites en bas de la toiture végétalisée. La condition de *Seepageface* est sélectionnée. Cette condition permet de décrire une surface imperméable en bas de la toiture jusqu'à ce que le potentiel de pression atteigne une valeur critique h_{Seep} . Quand cette valeur est atteinte, le sol est saturé et l'eau pourra s'écouler en dehors du domaine de saturation. Le potentiel de pression sera défini constant à h_{Seep} (souvent $h_{Seep} = 0$ cm).

La Figure 2.10 schématise les conditions limites de la toiture végétalisée et introduit la discrétisation spatiale présentée dans la section suivante.

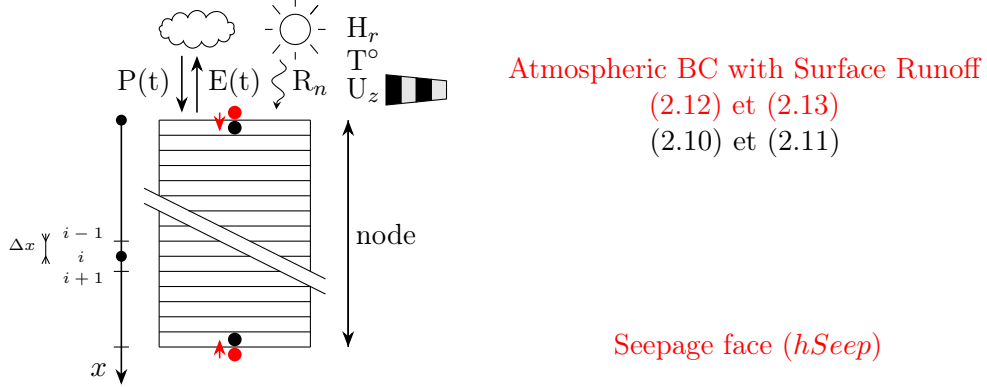


FIGURE 2.10 – Représentation des conditions aux limites (BC) pour la toiture végétalisée

2.2.2 Discrétisation spatiale et temporelle

La résolution de l'équation de Richards (2.1) est réalisée avec une discrétisation spatiale et temporelle. Comme décrit dans [Szymkiewicz (2012)], il existe plusieurs stratégies de résolution numérique pour cette équation.

Dans le logiciel H1D [Šimůnek et al. (2008)], la discrétisation spatiale est réalisée avec un schéma de différences finies. La colonne de sol est découpée en plusieurs nœuds qui forment le maillage comme représenté sur les Figures 2.9c et 2.10. Pour obtenir la valeur de θ au nœud i , le principe est de remplacer les dérivées spatiales ($\frac{\partial K}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}$) par des différences entre les valeurs aux nœuds voisins (voir (2.16)). Les compteurs $i - 1$, i et $i + 1$ indiquent les positions dans le maillage. Pour la discrétisation temporelle, la dérivée temporelle de θ devient la différence entre la valeur au nœud à l'instant précédent θ_i^j et la valeur à l'instant présent $\theta_i^{j+1,k+1}$ avec j et $j + 1$ qui représentent respectivement l'instant précédent et l'instant présent et $k + 1$ indique le niveau d'itération. La valeur de teneur en eau au nœud à l'instant présent θ_i^{j+1} est obtenue grâce à la méthode d'itération de Picard. L'objectif est de faire converger $\theta_i^{j+1,k}$ vers une valeur θ_i^{j+1} où k correspond au niveau d'itération. La différence entre les instants Δt dépend de la difficulté à converger. Elle variera entre Δt_{min} et Δt_{max} fixés par l'utilisateur ainsi que le nombre d'itérations maximum possible.

Le schéma de discrétisation est le suivant :

$$\frac{\theta_i^{j+1,k+1} - \theta_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \left(K_{i+1/2}^{j+1,k} \frac{h_{i+1}^{j+1,k+1} - h_i^{j+1,k+1}}{\Delta x_i} - K_{i-1/2}^{j+1,k} \frac{h_i^{j+1,k+1} - h_{i-1}^{j+1,k+1}}{\Delta x_{i-1}} \right) + \frac{K_{i+1/2}^{j+1,k} - K_{i-1/2}^{j+1,k}}{\Delta x} - S_i^j \quad (2.16)$$

où

$$\Delta t = t^{j+1} - t^j$$

$$\Delta x = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$$

$$K_{i+1/2}^{j+1,k} = \frac{K_{i+1}^{j+1,k} + K_i^{j+1,k}}{2} \quad K_{i-1/2}^{j+1,k} = \frac{K_i^{j+1,k} + K_{i-1}^{j+1,k}}{2}$$

2.3 Détermination des paramètres du modèle et simulation

Les sections précédentes présentent les différents modèles utilisés pour décrire le comportement hydrique de la toiture végétalisée. L'implémentation de ce type de modèle est complexe et n'est pas l'objectif de la thèse. L'utilisation du logiciel Hydrus-1D[®] permet la configuration de la structure particulière de la TTV (profondeur, répartition des types de sol, conditions aux limites). Cependant, il est important de noter que la configuration du logiciel n'est pas évidente. Les Annexes A et C donnent un aperçu de l'interface graphique de H1D. Un tutoriel pour configurer une simulation de TTV avec H1D est présenté en Annexe C. Dans les travaux de thèse beaucoup de simulations seront effectuées et le passage par l'interface graphique ne sera pas possible. Les données de simulation seront traitées à l'aide du logiciel Matlab[®] grâce à un accès aux fichiers d'entrée et de sortie de H1D. Cette procédure est schématisée sur la Figure 2.11 et sera détaillée dans les chapitres suivants. L'Annexe D décrit le lien entre Matlab et H1D pour un projet-type et l'Annexe E contient les bases de codes Matlab les plus importants qui ont été utilisés

pour les études qui suivent.

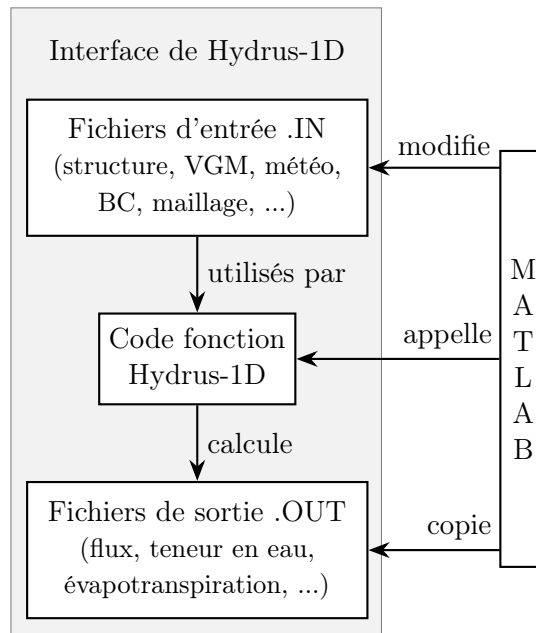


FIGURE 2.11 – Lien entre l'interface d'Hydrus-1D et Matlab pour la thèse

Une fois que la configuration du modèle est faite (via l'interface H1D ou Matlab), il est possible de simuler la teneur en eau à l'intérieur de la TTV. Pour cela, il faut donc connaître la valeur des différents paramètres de sol du modèle de van Genuchten-Mualem, les valeurs des paramètres de végétation et également l'évolution des conditions météorologiques. Le modèle peut donc être considéré comme un modèle de type "boîte grise" avec :

- 1 entrée connue : les précipitations $P(t)$;
- 1 sortie : la teneur en eau volumique $\theta(t)$;
- 6 paramètres de sol pour chaque couche : la teneur en eau résiduelle θ_r , la teneur en eau saturée θ_s , le paramètre d'ajustement α , le paramètre lié à la porosité n , la conductivité hydraulique de saturation K_s et le paramètre lié à la tortuosité l ;
- 5 variables météorologiques : les températures maximale $T_{max}^{\circ}(t)$ et minimale $T_{min}^{\circ}(t)$, le rayonnement net $R_n(t)$, la vitesse du vent $U_z(t)$ et l'humidité relative $H_r(t)$;
- 4 paramètres de végétation : la hauteur des plantes h_c , l'Albedo, l'indice foliaire LAI et la profondeur des racines L_r .

Déterminer les valeurs de tous les paramètres de ce modèle pour la toiture végétalisée est difficile. Les variables météorologiques peuvent être mesurées directement sur le site de la toiture grâce à une station météo. La valeur du paramètre Albedo est bien connue

dans la littérature [FAO]. Cependant, les autres paramètres sont difficiles à connaître avec précision. Les paramètres de sol sont connus pour des sols naturels sans végétation tels que le sable ou l'argile mais dans le cas d'une toiture végétalisée, les couches ont été fabriquées par l'Homme et les racines sont à prendre en compte. Les paramètres de sol pour la TTV ont été mesurés lors de l'installation ce qui permet d'avoir un ordre de grandeur pour les valeurs [Bouzouidja et al. (2018b)]. Cependant, ces paramètres évoluent lentement au cours du temps car le sol se tasse, les racines des plantes évoluent et tous ces phénomènes modifient la valeur des paramètres. En ce qui concerne les paramètres de végétation, la littérature sur le LAI permet d'avoir un intervalle probable pour leur valeur [Vera et al. (2017)], [He et al. (2017)]. Des mesures pour la profondeur des racines L_r et la hauteur des plantes h_c ont été réalisées [Bouzouidja et al. (2018a)]. Cependant elles évoluent au cours du temps et de l'espace, il est donc difficile d'en avoir une connaissance précise.

Pour toutes ces raisons, les paramètres du modèle sont considérés comme incertains. Ces incertitudes vont se propager à travers les différentes équations et affecter la teneur en eau simulée. Pour tenter de mieux comprendre les phénomènes en jeu dans une toiture végétalisée, l'objectif va être de simuler la teneur en eau pour pouvoir analyser la dynamique du système. Dans ce contexte, il est primordial d'analyser les incertitudes de ces paramètres et leurs impacts sur la sortie du modèle. Pour cela, différentes études de la sensibilité des paramètres seront présentées dans les chapitres suivants.

2.4 Conclusion

La toiture végétalisée est soumise à de nombreux phénomènes naturels tels que les conditions météorologiques, l'évolution du sol et des plantes au cours du temps et de l'espace. La modélisation de la teneur en eau d'une telle structure impliquant du vivant est complexe car elle nécessite la combinaison de différents modèles qui interagissent les uns avec les autres de manière indirecte. L'évolution de la teneur en eau est obtenue en résolvant l'équation de Richards combinée au modèle de van Genuchten-Mualem dépendant des paramètres de sol. Des modèles qui estiment le volume d'eau extrait par les plantes ou évaporé du sol sont également utilisés avec des dépendances aux paramètres de végétation et aux conditions météorologiques auxquelles est soumis le système. Ce chapitre a présenté ces différents modèles ainsi que les hypothèses effectuées dans cette thèse. Il apparaît que ces modèles dépendent de paramètres qui sont incertains car difficiles à déterminer avec précision. Ces incertitudes vont se propager à travers les modèles et affecter la teneur en eau simulée. Dans le but de mieux comprendre la dynamique de la toiture végétalisée, il est indispensable de prendre en compte ces incertitudes et d'analyser leurs effets sur la teneur en eau simulée.

L'enjeu de ces travaux de thèse est d'analyser les incertitudes des paramètres pour un modèle complexe dont la sortie ainsi que certains paramètres dépendent du temps. L'analyse de sensibilité permet de quantifier l'influence de l'incertitude des paramètres sur celle de la sortie du modèle. Cet outil est présenté dans le Chapitre 3 où une première analyse de sensibilité des paramètres incertains liés au sol est effectuée.

Chapitre 3

Analyse de sensibilité pour l'étude de l'influence des paramètres de sol

Les différents phénomènes hydriques présents dans une toiture végétalisée sont décrits par des modèles usuels adaptés au cas spécifique de la structure particulière. Les équations qui décrivent l'infiltration de l'eau dans le sol ainsi que l'effet des plantes et des conditions météorologiques ont été présentées dans le Chapitre 2. Le modèle décrivant la teneur en eau au sein d'une toiture végétalisée est complexe et dépend de paramètres liés aux caractéristiques du sol, de la végétation et de la météo. Ces paramètres sont difficiles à estimer avec précision et sont donc considérés incertains. L'incertitude des paramètres va se propager à travers le modèle et va affecter la teneur en eau. Dans le but de mieux comprendre la dynamique de la teneur en eau, il est indispensable d'analyser ces incertitudes. Pour cela, les méthodes d'analyse de sensibilité globale sont appliquées. L'analyse de sensibilité permet de quantifier l'influence des incertitudes des paramètres d'un modèle sur sa sortie, grâce à des indices de sensibilité. L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'impact des incertitudes des paramètres liés au sol sur la teneur en eau au cours du temps. Tout d'abord, une approche séquentielle visant à calculer les indices de sensibilité à chaque instant est appliquée. Elle permet d'obtenir l'évolution des sensibilités au cours du temps. Cependant, elle conduit à de nombreuses informations qui sont parfois redondantes et difficiles à interpréter. Ensuite, une approche multivariée est explorée. Elle consiste à diminuer la dimension du problème en composantes principales de la sortie et à calculer les indices de sensibilité uniquement sur ces composantes. Les paramètres les plus influents liés aux caractéristiques du sol sont ainsi mis en évidence [Hégo et al. (2021)].

Sommaire

3.1	Contexte de l'étude et présentation de la TTV expérimentale	29
3.2	Analyse de sensibilité	32
3.2.1	Indices de sensibilité	33
3.2.2	Estimation des indices	36
3.2.3	Problématique de l'analyse de sensibilité pour un modèle dynamique	40

3.3	Analyse de sensibilité séquentielle	41
3.3.1	Résumé de la procédure de l'approche séquentielle	42
3.4	Analyse de sensibilité multivariée	43
3.4.1	Analyse en Composantes Principales (ACP)	43
3.4.2	Indices de sensibilité par composantes principales	44
3.4.3	Résumé de la procédure de l'approche multivariée	45
3.5	Application de l'AS pour l'étude de l'influence des paramètres de sol de la TTV	46
3.5.1	Algorithme pour l'AS avec H1D	46
3.5.2	Approche séquentielle	46
3.5.3	Approche multivariée	52
3.6	Conclusion	56

3.1 Contexte de l'étude et présentation de la TTV expérimentale

Dans le Chapitre 2, les différents modèles utilisés pour reproduire le comportement de la toiture végétalisée ont été détaillés. Comme précisé dans les Sections 2.3 et 2.4, ces modèles dépendent de beaucoup de paramètres qui peuvent être considérés incertains car ils sont difficiles à déterminer avec précision. Cette première étude sera focalisée sur l'analyse de l'impact des paramètres incertains du sol sur la teneur en eau simulée avec un modèle simplifié.

Cette étude est basée sur des données réelles collectées sur une toiture végétalisée instrumentée située au Cerema de Tomblaine, dans le Nord Est de la France, près de Nancy (4840'N 613'E). Cette toiture est soumise aux conditions climatiques Cfb selon la classification Köppen-Geiger, c'est-à-dire un climat tempéré chaud sans saison sèche et à été tempéré. La parcelle étudiée est représentée sur la Figure 3.1. Elle est placée au sommet d'un bâtiment à toit plat à 6 m de hauteur. Sa surface est d'environ 98 m² et est structurée comme le montre la Figure 3.2. La végétation est composée de différents types de Sedum (album, reflexumlarix, sexangulare et floriferum). Le substrat est un milieu poreux fabriqué par l'Homme composé de 80 % de pouzzolane et de 20 % de parties organiques (10 % de poussière de pic et 10 % d'écorce de pin maritime). La profondeur du substrat est d'environ 10 cm (Fig. 3.2). Le capteur de mesure de la teneur en eau est placé au milieu du substrat (5 cm de profondeur). La couche de drainage (de profondeur 5 cm) est composée de roches argileuses expansées.



FIGURE 3.1 – Photographie de la TTV de 98 m² étudiée

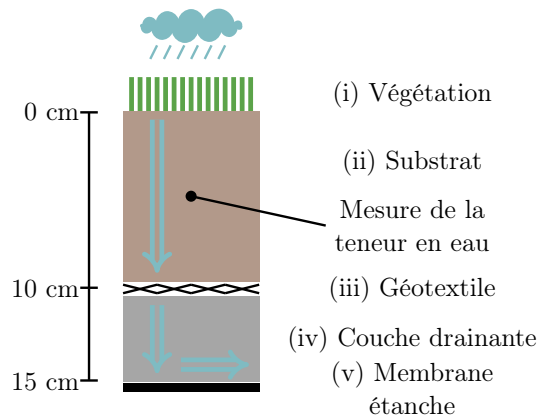


FIGURE 3.2 – Schéma de la structure des TTV étudiées

L'étude porte sur une période de 5 mois de juillet à novembre 2011 qui permet d'observer différents phénomènes hydrologiques, des périodes sèches et des périodes humides. La teneur en eau est obtenue en simulant les modèles présentés dans le Chapitre 2, à l'aide du logiciel Hydrus-1D[©]. Les données météorologiques et les paramètres de végétation de cette période n'étant pas disponibles directement et dans le but de simplifier

cette première étude, les modèles qui dépendent de ces paramètres seront alimentés par des valeurs par défaut du logiciel. Le modèle pourra donc être considéré uniquement dépendant des paramètres de sol ((2.1), (2.3) et (2.4)). Il comporte :

- 1 entrée connue : les précipitations $P(t)$;
- 1 sortie : la teneur en eau volumique $\theta(t)$;
- 6 paramètres de sol : la teneur en eau résiduelle θ_r , la teneur en eau saturée θ_s , le paramètre d'ajustement α , le paramètre lié à la porosité n , la conductivité hydraulique de saturation K_s et le paramètre lié à la tortuosité l .

Le modèle VGM ((2.3) et (2.4)) est appliqué pour chacune des trois couches de la TTV (Fig. 3.2) : le substrat, le géotextile et la couche de drainage. Ces paramètres ont été caractérisés dans [Bouzouidja (2014)]. Leurs valeurs sont données dans la Table 3.1.

TABLE 3.1 – Valeurs nominales pour le modèle de van Genuchten-Mualem pour les trois couches de la toiture végétalisée

Paramètres	Unité	Couches		
		Substrat	Géotextile	Drainage
θ_r	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.08	0.1	0.06
θ_s	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.43	0.6	0.3
α	m^{-1}	6.5	11.1	5
n	-	1.58	1.50	1.50
K_s	10^{-3} m s^{-1}	2.167	0.145	3.611
l	-	2.87	0.1	0.1

La Figure 3.3 représente l'évolution des précipitations $P(t)$ (en bleu), des teneurs en eau mesurée (en noir) et simulée (en rouge) ainsi que du flux sortant simulé (en vert) avec les paramètres de la Table 3.1.

Durant les 185 premières heures simulées, de grandes variations apparaissent dues à l'étape d'initialisation du logiciel et ne seront pas prises en compte dans les analyses suivantes. Sur les heures simulées suivantes, différents phénomènes hydrologiques peuvent être observés. Pendant les événements pluvieux, la teneur en eau augmente jusqu'à atteindre sa valeur de saturation ($\theta_s = 0.43 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$) et diminue lorsque l'eau descend vers la couche de drainage. Ce processus hydrologique est assez bien reproduit par le modèle VGM. Lorsque la pluie s'arrête, la teneur en eau diminue avec une forme linéaire jusqu'à l'événement pluvieux suivant. Certains événements tels que l'assèchement de la TTV ne sont pas exactement reproduits par la simulation. Ceci est dû à la simplification du modèle et à l'incertitude des paramètres de VGM. De plus, des phénomènes plus complexes, difficiles à modéliser comme l'évolution de la végétation [Emilsson (2008), Berretta et al. (2014)] ou l'activité biochimique [Bouzouidja et al. (2018b)], [Köhler and Poll (2010)] impactent les simulations.

Les paramètres du sol – θ_r , θ_s , α , n , K_s et l – du substrat et du drainage sont affectés par le vieillissement, le tassement du sol, le développement des racines et des plantes. Comme discuté dans [Solone et al. (2012)], la caractérisation de ces paramètres

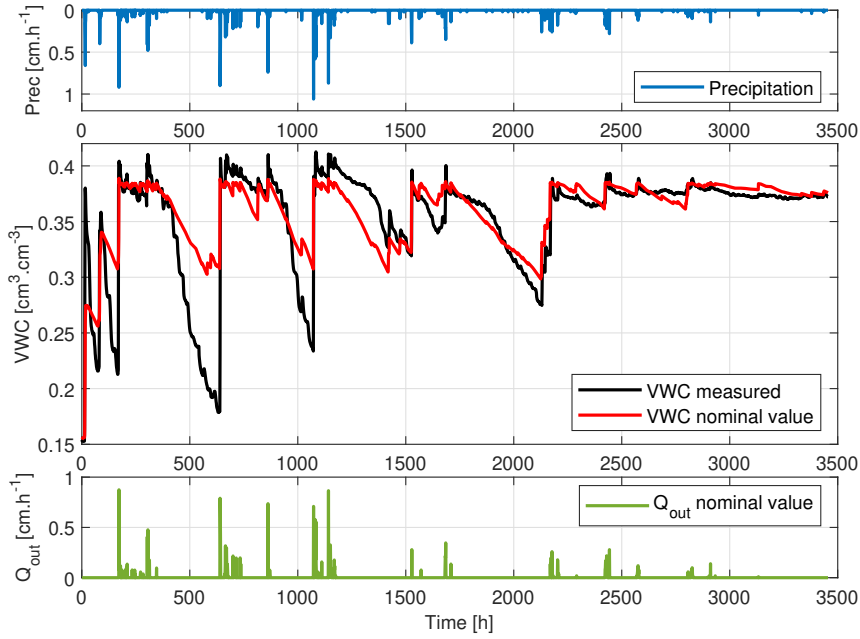


FIGURE 3.3 – Comparaison entre les teneurs en eau (VWC) simulée (en rouge) et mesurée (en noir), la pluviométrie (en bleu) et le flux de sortie (Q_{out} , en vert)

est difficile. Pour ces raisons, les paramètres de sol sont considérés comme incertains et peuvent être décrits comme des variables aléatoires définies par leur distribution. Comme aucune valeur à l'intérieur de l'intervalle d'incertitude n'est plus probable qu'une autre, une distribution uniforme est définie autour de la valeur nominale. Les intervalles pour une incertitude de $\pm 10\%$ pour le substrat et la couche de drainage sont présentés dans la Table 3.2. Dans cette étude, les paramètres du géotextile ne sont pas considérés comme incertains car ils sont bien caractérisés par les fabricants.

TABLE 3.2 – Intervalles d'incertitude ($\pm 10\%$) pour les paramètres des couches de substrat et de drainage

Paramètres	Unité	Substrat		Drainage	
		Inf	Sup	Inf	Sup
θ_r	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$	0.072	0.088	0.054	0.066
θ_s	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$	0.387	0.473	0.27	0.33
α	m^{-1}	5.85	7.15	4.5	5.5
n	-	1.422	1.738	1.35	1.65
K_s	10^{-3}m s^{-1}	1.95	2.38	3.25	3.972
l	-	2.583	3.157	0.09	0.11

L'objectif de l'étude de ce chapitre est d'utiliser l'analyse de sensibilité pour déterminer l'influence des paramètres hydrologiques incertains sur la teneur en eau.

La section suivante présente les concepts de l'analyse de sensibilité.

3.2 Analyse de sensibilité

Aujourd'hui, la modélisation est une pratique courante pour prédire, analyser ou contrôler le comportement d'un système. Qu'il soit physique, environnemental, économique ou social, le système peut être décrit par des modèles mathématiques ou numériques, plus ou moins complexes qui dépendent de nombreux paramètres, variables et/ou à entrées connues. Dans la suite, les termes paramètres et facteurs sont utilisés indifféremment pour désigner les paramètres du modèle. Certains facteurs peuvent être incertains à cause de leurs variabilités, leurs mesurabilités ou du manque de connaissances. Les conditions météorologiques ou l'évolution de la végétation en sont de bons exemples. Les incertitudes des facteurs vont se propager à travers le modèle et provoquer des incertitudes sur la sortie. Pour obtenir des modèles de qualité, il est donc essentiel d'étudier ces incertitudes.

Les méthodes d'analyse d'incertitude ou d'analyse de sensibilité sont les outils à disposition pour étudier ces incertitudes. L'analyse d'incertitude a pour objectif de quantifier l'intégralité des incertitudes de la sortie dues aux incertitudes des facteurs. Tandis que pour identifier la part de responsabilité de chaque facteur dans l'incertitude de la sortie, il faut utiliser l'analyse de sensibilité. Les notions détaillées dans ce chapitre font référence aux ouvrages suivants [Faivre et al. (2013)] et [Saltelli et al. (2008)].

L'analyse de sensibilité peut être utilisée de la phase de conception du modèle jusqu'à son utilisation. En quantifiant et hiérarchisant l'influence de chaque facteur sur la sortie du modèle, il est possible de vérifier le comportement du modèle, de le simplifier en fixant ses facteurs non influents, de le calibrer et de mieux comprendre son fonctionnement.

Il existe différents types d'analyse de sensibilité qui permettent de répondre à différentes questions sur le modèle.

Si la question est "*Comment de faibles variations des facteurs autour d'un point de référence impactent-elles la sortie du modèle ?*", il faut utiliser l'analyse de sensibilité locale [Turányi and Rabitz (2000)]. Souvent basée sur le calcul de la dérivée de la sortie par rapport au paramètre étudié, elle permet d'analyser l'impact de variations locales d'un paramètre sur la sortie du modèle. L'inconvénient de l'analyse locale est que la variation autour du point de fonctionnement n'est pas représentative de la distribution totale du facteur et ne permet pas de prendre en compte les potentielles interactions entre les facteurs. L'analyse locale s'approche d'une étude dite "One At a Time" (OAT) qui ne fait varier qu'un paramètre à la fois. Pour l'illustrer, la Figure 3.4 représente un facteur suivant une distribution normale et l'étude du point de référence égal à la moyenne est choisi. Dans cette configuration, les points les plus probables d'apparaître sont représentés mais pas les événements plus rares, l'impact de ces événements rares ne sera pas étudié.

Si la question est "*Comment l'ensemble des variations des facteurs impactent-elles la sortie du modèle ?*", c'est l'analyse de sensibilité globale qui doit être utilisée [Saltelli et al. (2008)]. En effet, l'analyse de sensibilité globale (*Global Sensitivity Analysis GSA*) permet d'étudier l'influence des facteurs sur la sortie en les faisant varier simultanément sur l'ensemble de leur domaine d'incertitude. Cette méthode est donc représentative du

comportement des facteurs et met en évidence les interactions potentielles entre ceux-ci. La Figure 3.5 illustre la prise en compte de tout l'intervalle d'incertitude du paramètre qu'il faut comparer avec l'intervalle très réduit de la Figure 3.4.

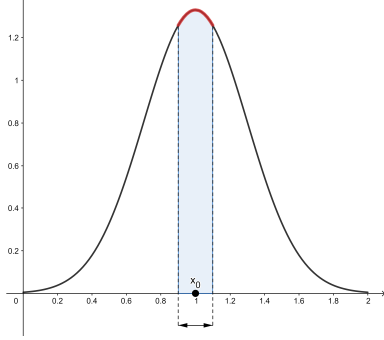


FIGURE 3.4 – Variation autour de x_0

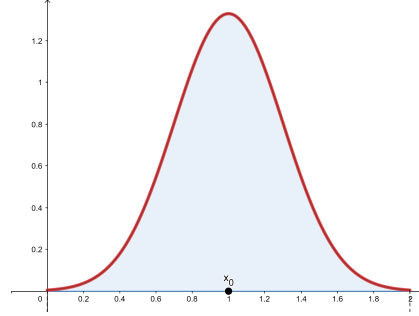


FIGURE 3.5 – Variation sur tout l'intervalle

Dans le cadre du modèle de toiture végétalisée présenté dans le Chapitre 2, la problématique traitée dans la suite est : "Comment l'ensemble des variations des paramètres de sol impactent-elles la teneur en eau simulée ?". L'analyse de sensibilité globale sera donc utilisée pour les différentes études de la thèse et détaillée dans les sections suivantes. Dans la suite du document, le terme analyse de sensibilité (AS) sera utilisé pour désigner l'analyse de sensibilité globale.

3.2.1 Indices de sensibilité

Considérons un modèle à sortie statique, c'est-à-dire indépendant du temps, représenté sur la Figure 3.6.

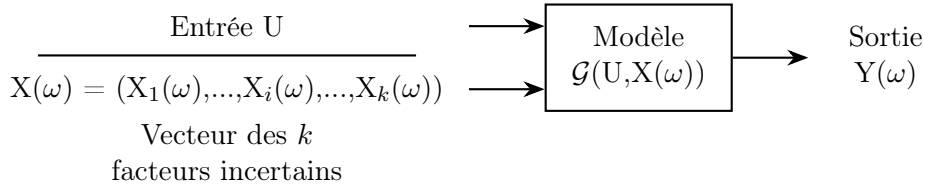


FIGURE 3.6 – Introduction des notations

Il est défini par :

$$Y(\omega) = \mathcal{G}(U, X(\omega)) \quad (3.1)$$

où $X(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_i(\omega), \dots, X_k(\omega))$ un vecteur de dimension $1 \times k$ comportant une combinaison des k facteurs incertains, $U \in \mathbb{R}^{p_1}$ le vecteur de p_1 entrées connues du modèle et $Y(\omega)$ la sortie scalaire calculée à partir de la fonction \mathcal{G} . \mathcal{G} correspond aux équations ou codes numériques du modèle. ω indique le caractère aléatoire des différentes variables. $\omega \in \Omega$ où Ω est l'espace des événements aléatoires d'un espace probabiliste.

L'indicateur de l'aléa ω ne sera pas toujours utilisé dans la suite dans le but de simplifier les notations. De plus, les entrées U du modèle sont connues et ne seront donc pas prises en compte pour l'AS, elles ne seront donc plus indiquées dans la suite.

L'objectif de l'analyse de sensibilité est de quantifier l'influence des facteurs incertains X_i sur les variations de la sortie Y du modèle. L'entrée du modèle U est connue. Elle n'est donc pas considérée comme incertaine et ne fera pas partie de l'analyse. La mesure de l'influence de X_i est définie par un indice de sensibilité S_i . Les indices de sensibilité peuvent être de différents types tels que les indices basés sur les coefficients de corrélation linéaire, les coefficients de régression ou encore les indices basés sur la décomposition de la variance. Dans cette thèse, les méthodes d'AS basées sur la décomposition de la variance ont été explorées et les indices de sensibilité choisis correspondent aux indices de Sobol [Sobol (1993)].

Les facteurs X_i correspondent à des variables aléatoires supposées indépendantes. Elles prennent différentes valeurs dans leur domaine d'incertitude en suivant leur loi de probabilité. La sortie Y est également une variable aléatoire. L'influence du paramètre X_i sur la sortie Y est mesurée par la variance conditionnelle $Y|X_i$ renormalisée par la variance totale de Y . La variance conditionnelle $Y|X_i$ représente la dispersion de la sortie obtenue quand le paramètre X_i est fixé. Ces variances permettent d'obtenir les indices de sensibilité qui quantifient la responsabilité de chaque paramètre dans la variation de Y .

Le principe de l'AS peut être décrit par les différentes étapes illustrées sur la Figure 3.7. La première étape correspond à la définition des intervalles d'incertitude et des distributions auxquelles sont soumis les facteurs X_i . L'étape suivante est de générer un nombre N d'échantillons aléatoires (matrice X) en suivant les distributions définies dans l'étape 1 pour chaque paramètre X_i . Le choix de la taille N des échantillons est très important car il détermine la qualité des indices qui seront calculés. N est lié à l'estimateur d'indices qui sera utilisé ainsi qu'à la technique d'échantillonnage. Les estimateurs d'indices seront présentés dans la Section 3.2.2. Il existe différentes techniques d'échantillonnage telles que l'échantillonnage aléatoire Monte-Carlo (MC), l'échantillonnage stratifié d'hypercube latin (*Latin Hypercube Sampling LHS*) ou encore l'échantillonnage quasi-aléatoire (*Quasi-Monte-Carlo QMC*) de la séquence de Sobol, etc [Kucherenko et al. (2015)]. L'enjeu de l'échantillonnage est de réussir à représenter l'ensemble du domaine d'incertitude avec un nombre raisonnable de points. Une fois les échantillons X générés, l'étape suivante est le calcul du vecteur de sortie Y . Pour chacune des N combinaisons, la sortie statique est déterminée (voir lignes bleu clair, orange et bleu foncé dans la Figure 3.7). La dernière étape est le calcul des indices de sensibilité S_i par décomposition de la variance de la sortie Y .

En supposant les paramètres X_i indépendants, la variance de la sortie peut se décomposer comme suit :

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} V_{ij} + \sum_{1 \leq i < j < l \leq k} V_{ijl} + \dots + V_{12\dots k} \quad (3.2)$$

où

$$\begin{aligned} V_i &= Var[E(Y|X_i)] \\ V_{ij} &= Var[E(Y|X_i, X_j)] - V_i - V_j \\ V_{ijl} &= Var[E(Y|X_i, X_j, X_l)] - V_{ij} - V_{il} - V_{jl} - V_i - V_j - V_l \\ V_{12\dots k} &= Var[Y] - \sum_{i=1}^k V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq k} V_{ij} - \dots - \sum_{i_1 < \dots < i_{k-1}} V_{i_1 \dots i_{k-1}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec Var la variance et E l'espérance.

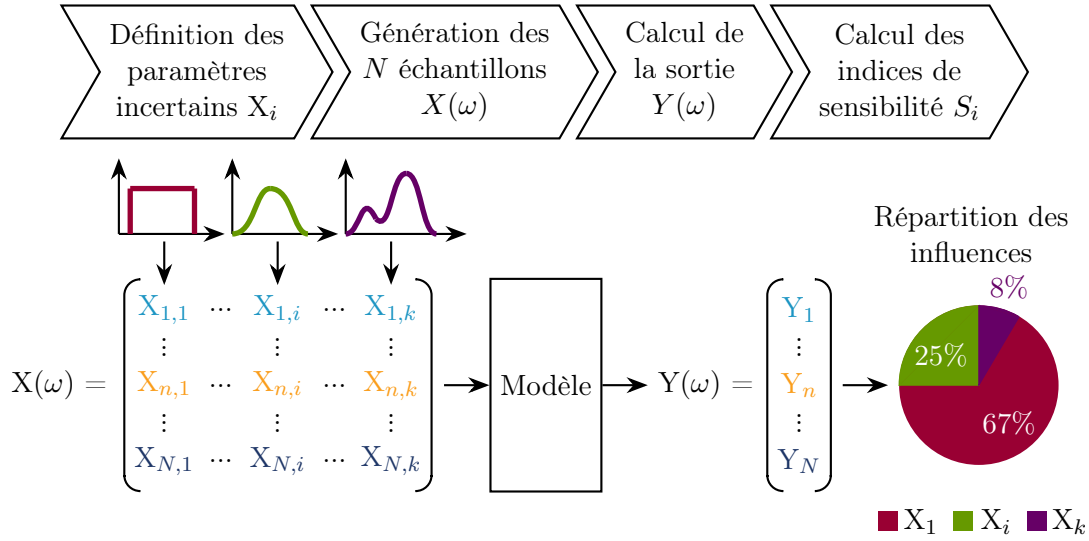


FIGURE 3.7 – Procédure de l'analyse de sensibilité pour une sortie statique

Basée sur la décomposition de Sobol de la variance (3.2), la mesure de l'influence du seul paramètre X_i sur la sortie Y est l'indice de sensibilité principal S_i :

$$S_i = \frac{V_i}{Var[Y]} \quad (3.4)$$

Pour mesurer l'influence des interactions, par exemple la part de variabilité de Y causée par les interactions de X_i et X_j ou par les interactions de X_i , X_j et X_l , les indices de sensibilité d'ordre 2 et 3 sont respectivement :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{Var[Y]} \quad S_{ijl} = \frac{V_{ijl}}{Var[Y]} \quad (3.5)$$

Pour trouver l'influence d'un paramètre ainsi que de toutes ses interactions, l'indice de sensibilité total S_{T_i} correspondra à la somme suivante :

$$S_{T_i} = \sum_{m \neq i} S_m \quad (3.6)$$

avec $\#i$ correspondant à tous les indices comprenant i .

Relatif à la variance globale de Y , l'indice de sensibilité est compris entre 0 et 1. Il sera proche de 1 si le paramètre est influent (la variance conditionnelle proche de la variance globale). Au contraire, il sera proche de 0 si le paramètre n'est pas influent sur la sortie.

Le calcul analytique des indices (3.4), (3.5) et (3.6) peut être difficile, voire impossible si les équations du modèle \mathcal{G} sont complexes. Il est donc nécessaire d'estimer les indices de sensibilité. Il existe de nombreuses méthodes pour estimer les indices de sensibilité directement telles que Sobol-Monte-Carlo ou par permutation. Il existe également des méthodes indirectes qui approximent la décomposition de la variance par construction de métamodèle tel que le développement en polynôme du chaos qui sera présenté dans la suite.

3.2.2 Estimation des indices

La méthode Sobol-Monte-Carlo ou encore appelée Sobol-Saltelli dans [Faivre et al. (2013)] est basée sur la méthode de Monte-Carlo qui permet d'estimer l'espérance de toute fonction d'une variable aléatoire de densité quelconque par la moyenne de N échantillons. L'estimation des indices de sensibilité nécessite l'estimation d'espérance de variance conditionnelle. Pour cela, l'idée est de faire varier entre les deux appels de la fonction \mathcal{G} tous les facteurs sauf le facteur X_i . Ceci nécessite deux N -échantillons de réalisations des facteurs. Cette estimation peut être réalisée grâce à la loi des grands nombres qui dit que la moyenne des N valeurs converge vers l'espérance de la population pour N tendant vers l'infini. L'estimation de Sobol-MC permet d'obtenir les indices de sensibilité de premier ordre et d'ordre supérieur des paramètres de manière intuitive. Cependant, la taille des échantillons N doit être élevée pour permettre l'estimation de l'intégrale par la somme. Le nombre de sorties conditionnelles à calculer ($N(k+2)$) devient donc très important et peut entraîner de très long temps de simulation. L'optimisation de la taille des échantillons N peut être faite en utilisant d'autres techniques d'échantillonnage, telles que par hypercube latin ou Quasi-Monte-Carlo [Kucherenko et al. (2015)] comme évoqué dans la Section 3.2.1 ce qui permettrait de réduire N mais resterait important. La méthode Sobol-MC est détaillée dans l'Annexe B.

Une alternative pour réduire la taille de l'échantillon est basée sur l'échantillonnage par hypercube latin permuté. À partir d'un N -échantillon créé selon le plan d'échantillonnage par hypercube latin, on crée un deuxième échantillon en permutant indépendamment et aléatoirement les N valeurs de chaque facteur. L'estimation des indices nécessitera ainsi deux N -échantillons [Anstett-Collin et al. (2015)]. Cette méthode sera utilisée et détaillée dans le Chapitre 5.

Une autre approche possible ne nécessitant qu'un échantillon est la méthode FAST (*Fast Amplitude Sensitivity Test*) [Cukier et al. (1978)]. L'idée de base est d'utiliser la propagation d'informations dans le modèle via les facteurs. Si l'information associée à

un facteur se retrouve dans la sortie du modèle alors celui-ci est jugé influent. En associant une information de fréquence à chaque facteur l'utilisation de l'analyse spectrale de la sortie du modèle permet d'étudier l'influence des facteurs. Autrement dit, en faisant varier chaque facteur selon une sinusoïde à une fréquence distincte, il est facile de les retrouver dans la sortie du modèle par analyse de son spectre. L'inconvénient majeur de cette approche réside dans le choix des fréquences.

L'approximation de la décomposition de la variance peut également être faite par construction d'un métamodèle. Un métamodèle est une modélisation du modèle complexe de départ qui permet de réduire le temps de calcul en s'éloignant de cette forme complexe [Faivre et al. (2013)]. Il existe de nombreux types de métamodèle tels que les polynômes du chaos, les processus gaussiens, les splines, les arbres de régression, les réseaux de neurones, etc.

Dans la suite, la métamodélisation par développement en Polynômes du Chaos (*Polynomials Chaos Expansion PCE*) [Crestaux et al. (2009)] sera détaillée. L'avantage de cette approche est que les indices de sensibilité sont directement déterminés à partir des coefficients des PCE.

Considérons le modèle (3.1).

Dans [Crestaux et al. (2009)], il est indiqué que toute variable aléatoire supposée de variance finie peut se réécrire :

$$Y(\omega) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \psi_j(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)) \approx \sum_{j=0}^M a_j \psi_j(X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)) \quad (3.7)$$

avec ψ_j des polynômes qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres $X_i(\omega)$, $a_j \in \mathbb{R}$ des coefficients à déterminer par identification, où j représente l'ordre de développement ($j = 0, \dots, M$) et $M + 1$ représente le nombre de coefficients du métamodèle.

Le nombre de coefficients M est déterminé en fonction du nombre de facteurs incertains k et du degré maximal souhaité p pour ψ_j .

$$M + 1 = \frac{(k + p)!}{k!p!} \quad (3.8)$$

Le degré maximal de développement p peut être sélectionné en incrémentant sa valeur jusqu'à la précision voulue. Cependant, cela peut mener à une taille d'échantillon N importante, car il faut que N soit supérieur à M qui est directement lié à p . Pour surmonter ce problème, un schéma adaptatif a été proposé dans [Blatman and Sudret (2010)] pour construire des *sparse*-PCE. Les coefficients déterministes des polynômes du chaos a_j sont les inconnus et plusieurs approches non intrusives sont proposées dans la littérature pour les calculer. Elles peuvent être classées en des techniques de régressions (e.g. [Berveiller et al. (2006)]) ou en techniques de projection (e.g. [Crestaux et al. (2009)]),

[Rahman (2011)]).

Construction des polynômes ψ_j

Le polynôme $\psi_j(X_1, \dots, X_k)$ correspond au produit tensoriel des polynômes du chaos $\phi_{\alpha_i^j}(X_i)$ dépendant uniquement d'un seul facteur X_i .

$$\psi_j(X_1, \dots, X_k) = \prod_{i=1}^k \phi_{\alpha_i^j}(X_i) \quad (3.9)$$

avec α_i^j est le degré du polynôme du chaos. Il doit satisfaire la règle suivante :

$$\alpha^j = \sum_{i=1}^k \alpha_i^j \leq p \quad (3.10)$$

où α^j est le degré de ψ_j et p le degré maximal souhaité pour le métamodèle.

Les polynômes du chaos $\phi_{\alpha_i^j}(X_i)$ sont de différents types en fonction de la distribution que suit X_i comme précisé dans la Table 3.3.

TABLE 3.3 – Choix du PCE en fonction de la distribution de X_i

Distribution	Famille de polynôme orthogonal
$X_i \sim \mathcal{U}(-1; 1)$	Legendre (voir Annexe (B.16))
$X_i \sim \mathcal{N}(0; 1)$	Hermite (voir Annexe (B.17))

Détermination des coefficients a_j

On pose :

$$B = (a_0 \dots a_j \dots a_M)' \quad (3.11)$$

ainsi que :

$$Z = \begin{pmatrix} \psi_0(X_{1,1}, \dots, X_{1,k}) & \dots & \psi_j(X_{1,1}, \dots, X_{1,k}) & \dots & \psi_M(X_{1,1}, \dots, X_{1,k}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_0(X_{n,1}, \dots, X_{n,k}) & \dots & \psi_j(X_{n,1}, \dots, X_{n,k}) & \dots & \psi_M(X_{n,1}, \dots, X_{n,k}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_0(X_{N,1}, \dots, X_{N,k}) & \dots & \psi_j(X_{N,1}, \dots, X_{N,k}) & \dots & \psi_M(X_{N,1}, \dots, X_{N,k}) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

avec $j = 0, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$ et $i = 1, \dots, k$.

On obtient donc la forme matricielle (3.7) :

$$Y = ZB \quad (3.13)$$

Pour obtenir les coefficients a_j , la méthode des moindres carrés est appliquée telle que :

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \arg \min_B \sum_{n=1}^N \left(Y_n - \sum_{j=0}^M a_j \psi_j(X_{n,1}, \dots, X_{n,k}) \right) \\ &= (Z'Z)^{-1} Z'Y\end{aligned}\quad (3.14)$$

Estimation des indices de sensibilité S_i

Une fois que le métamodèle est identifié, les indices seront estimés d'après les formules suivantes :

— l'espérance de la sortie :

$$\widehat{E}[Y] = a_0 \quad (3.15)$$

— la variance de la sortie :

$$\widehat{Var}[Y] = \sum_{j=1}^M a_j^2 E[\psi_j^2(X_1, \dots, X_k)] \quad (3.16)$$

— l'indice de sensibilité principal (d'ordre 1) :

$$\widehat{S}_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_i} a_j^2 E[\psi_j^2(X_i)]}{Var[Y]} \quad (3.17)$$

où \mathcal{I}_i correspond à l'ensemble des indices de polynômes ψ_j qui dépendent uniquement de X_i .

— l'indice de sensibilité d'ordre 2 :

$$\widehat{S}_{il} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_{il}} a_j^2 E[\psi_j^2(X_i, X_l)]}{Var[Y]} \quad (3.18)$$

où \mathcal{I}_{il} correspond à l'ensemble des indices de polynômes ψ_j qui ne dépendent que de X_i et X_l .

— l'indice de sensibilité total :

$$\widehat{S}_{T_i} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_{\#i}} a_j^2 E[\psi_j^2(X_i)]}{Var[Y]} \quad (3.19)$$

où $\mathcal{I}_{\#i}$ correspond à l'ensemble des indices de polynômes ψ_j qui dépendent de X_i et éventuellement d'autres facteurs.

L'estimation des indices basée sur les PCE ne nécessite que N évaluations du modèle. Le temps de calcul est donc plus faible que pour l'estimation Sobol-MC pour obtenir des indices de qualité. Cette méthode d'estimation des indices est utilisée et étendue pour des sorties variantes dans le temps dans les Chapitres 3 et 4.

3.2.3 Problématique de l'analyse de sensibilité pour un modèle dynamique

Les méthodes d'AS présentées précédemment ont été développées pour les modèles statiques. Cependant, le modèle de TTV comme la plupart des modèles sont dynamiques (ou multivariés) c'est-à-dire avec une sortie qui dépend du temps. Il est défini par :

$$Y(\omega, t) = \mathcal{G}(X(\omega), t) \quad (3.20)$$

avec $t = 1, 2, \dots, T$, le vecteur de temps échantillonné toutes les heures pour le modèle de TTV. Pour l'AS des modèles dynamiques, on considère une matrice de sortie Y de dimension $N \times T$ avec N le nombre d'échantillons du modèle et T le nombre d'instant. La problématique de l'AS pour un modèle dynamique est résumée sur la Figure 3.8.

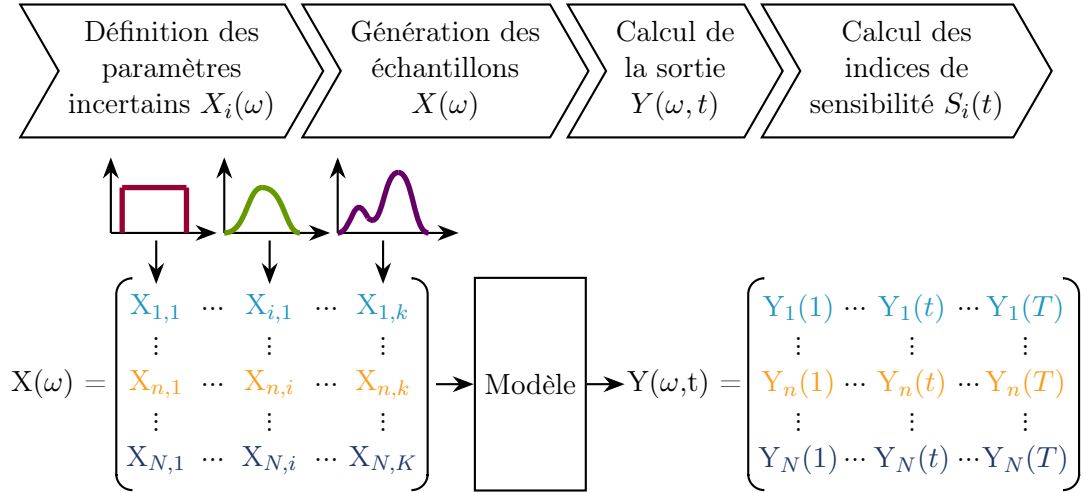


FIGURE 3.8 – Problématique de l'AS pour un modèle dynamique

Il est possible d'étudier une valeur statique de la matrice $Y(t)$ comme sa moyenne temporelle ou sa valeur en un instant donné. Cependant, les indices statiques obtenus ne seront pas représentatifs et ne permettront pas de comprendre l'évolution des influences des paramètres sur toute la période. Pour obtenir l'évolution des influences des paramètres sur la sortie tout au long de la période étudiée, une approche, dite séquentielle, consiste à calculer les indices de sensibilité à chaque instant afin d'obtenir l'évolution de l'influence des paramètres au cours du temps. Cette approche est présentée dans la Section 3.3. L'approche séquentielle génère de nombreux indices de sensibilité redondants, une analyse de sensibilité multivariée peut être réalisée comme présentée dans la Section 3.4. Elle consiste à appliquer une méthode de réduction de dimension sur la matrice de sortie afin de prendre en compte les corrélations temporelles de celle-ci et à calculer un nombre réduit d'indices qui résument l'évolution des influences. Ces deux approches sont schématisées sur la Figure 3.9.

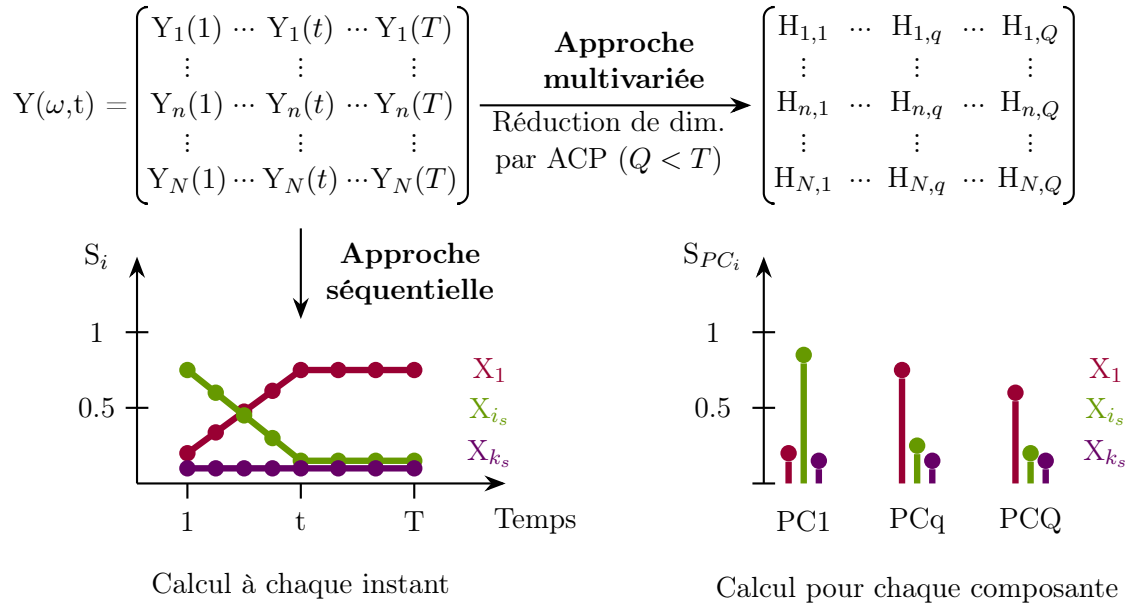


FIGURE 3.9 – Présentation des approches de l'AS pour un modèle dynamique

3.3 Analyse de sensibilité séquentielle

L'AS statique présentée dans la Section 3.2 peut être étendue au cas des sorties variant dans le temps telles que le cas du modèle de TTV décrit dans le Chapitre 2.

Dans [Haro-Sandoval et al. (2012)], l'approche d'AS basée sur les PCE est étendue pour le cas des sorties variant dans le temps. Dans ce cas, les indices de sensibilité sont déterminés à chaque instant. En effet, dans l'approche séquentielle, la sortie $Y(\omega, t)$ à chaque instant t est considérée comme une sortie statique et les indices de sensibilité (3.17) et (3.19) peuvent être calculés à chaque instant t .

Les équations (3.7), (3.17) et (3.19) deviennent donc respectivement :

$$Y(\omega, t) \approx \sum_{j=0}^M a_j(t) \psi_j(X_1(\omega_1), \dots, X_k(\omega_k)) \quad (3.21)$$

$$\widehat{S}_i(t) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_i} a_j^2(t) E[\psi_j^2(X_i)]}{\sum_{j=1}^M a_j^2(t) E[\psi_j^2(X_1, \dots, X_k)]} \quad (3.22)$$

$$\widehat{S}_{T_i}(t) = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_{\#i}} a_j^2(t) E[\psi_j^2(X_i)]}{\sum_{j=1}^M a_j^2(t) E[\psi_j^2(X_1, \dots, X_k)]} \quad (3.23)$$

3.3.1 Résumé de la procédure de l'approche séquentielle

Les différentes étapes de l'AS séquentielle sont résumées ci-dessous.

1. Détermination des paramètres incertains et de leur distribution par les experts du domaine ;
2. Génération des N échantillons des k paramètres qui suivent les distributions pré-définies en utilisant une technique d'échantillonnage spécifique (MC, LHS, QMC). La matrice X (dim. $N \times k$) est de la forme :

$$X(\omega) = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,i} & \dots & X_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{n,1} & \dots & X_{n,i} & \dots & X_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{N,1} & \dots & X_{N,i} & \dots & X_{N,k} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où $X_{n,i}$ est le n -ième échantillon du paramètre X_i .

3. Génération de la sortie $Y(\omega, t)$ correspondant aux N combinaisons de paramètres (dim. $N \times T$) :

$$Y(\omega, t) = \begin{pmatrix} Y_1(1) & \dots & Y_1(t) & \dots & Y_1(T) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_n(1) & \dots & Y_n(t) & \dots & Y_n(T) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_N(1) & \dots & Y_N(t) & \dots & Y_N(T) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

où $Y_n(t)$ est le n -ième échantillon de Y à l'instant t .

4. Calcul des indices de sensibilité des paramètres pour chaque instant (chaque colonne) de $Y(\omega, t)$ avec $t = 1, 2, \dots, T$ selon (3.17) (dim. $k \times T$) :

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(1) & \dots & S_1(t) & \dots & S_1(T) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_i(1) & \dots & S_i(t) & \dots & S_i(T) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_k(1) & \dots & S_k(t) & \dots & S_k(T) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

où $S_i(t)$ est l'indice de sensibilité de X_i , à l'instant t . De la même façon, les indices de sensibilité totaux $S_{T_i}(t)$ peuvent être calculés selon (3.19).

L'avantage de l'approche séquentielle est de mettre en évidence l'évolution des indices de sensibilité. Cependant, le calcul des T indices peut être consommateur en temps et conduit à une grande quantité d'informations parfois difficile à interpréter. De plus, l'approche séquentielle ne prend pas en compte les corrélations temporelles entre deux instants et par conséquent crée des redondances entre les indices comme c'est le cas pour le modèle de la TTV. Pour éviter ces problèmes, une analyse de sensibilité multivariée peut être réalisée comme présentée dans la section suivante.

3.4 Analyse de sensibilité multivariée

Pour éviter la redondance des indices de sensibilité de l'approche séquentielle et réduire le nombre d'indices, des méthodes d'AS multivariées [Campbell et al. (2006)] ont été développées telles que la méthode basée sur l'ACP [Lamboni et al. (2009, 2011)] ou la méthode basée sur la covariance [Garcia-Cabrejo and Valocchi (2014)]. La méthode d'AS basée sur la covariance permet de déterminer des indices de sensibilité uniques pour chaque paramètre en prenant en compte la corrélation entre les sorties. Cette méthode sera présentée brièvement dans l'Annexe B. La méthode d'AS multivariée basée sur l'Analyse en Composantes Principales (ACP) permet de considérer les corrélations temporelles de la sortie et de réduire le nombre d'indices dans le but de simplifier l'interprétation sans perte d'information. Elle permet également de calculer un indice unique qui résume l'évolution des indices en prenant en compte ces corrélations. Cet indice généralisé sera présenté dans l'Annexe B.

Le principe repose sur la décomposition de la série temporelle de la sortie par projection sur une base orthogonale de dimension inférieure. Le calcul des indices est réalisé sur les composantes de la projection qui seront en nombre réduit. Différentes bases de projection peuvent être définies telles que l'ACP ou la décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition* SVD). L'ACP est utilisée dans ces travaux car c'est une technique optimale de réduction de dimension [Jolliffe and Cadima (2016)]. Cette méthode sera présentée et utilisée dans la suite.

3.4.1 Analyse en Composantes Principales (ACP)

L'analyse en composantes principales est une technique optimale de réduction de dimension. Son objectif est de projeter les données dans une base de dimension réduite en minimisant la perte d'information lors de la projection. Cette base est déterminée par la résolution du problème d'optimisation qui est de trouver la base orthogonale de projection \hat{v} qui minimisera la perte d'information $Y_n - vv'Y_n$ lors de la projection tout en maximisant l'inertie I [Lamboni (2009)].

$$\hat{v} = \arg \min_v \sum_{n=1}^N \|Y_n - vv'Y_n\|^2 \quad \text{sous condition} \quad vv' = I \quad (3.27)$$

L'inertie I mesure la dispersion du nuage d'individus par rapport à leur centre de gravité. Si I est nulle cela signifie qu'il n'y a pas de variations entre les individus et si I est grand cela signifie que le nuage d'individus est dispersé autour du centre de gravité. I mesure donc la quantité d'information contenue dans une matrice. Pour des données ayant toutes le même poids, l'inertie est donnée par :

$$I = \text{trace}(Cov(Y)) = \text{trace}\left(\frac{1}{N}Y_c'Y_c\right) \quad (3.28)$$

où $Cov(Y)$ est la matrice de covariance de Y et Y_c est la matrice obtenue en centrant les données de chaque colonne de $Y(\omega, t)$.

Pour obtenir la base de projection, la matrice de covariance de dimension $T \times T$ est décomposée par :

$$Cov(Y) = \sum_{q=1}^T \lambda_q v_q v_q' \quad (3.29)$$

où $\lambda_q \in \mathbb{R}, q = 1, \dots, T$ les valeurs propres de $Cov(Y)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_q \geq \dots \geq \lambda_T$), $v_1, \dots, v_q, \dots, v_T$ est l'ensemble de vecteurs propres normalisés et mutuellement orthogonaux associés aux valeurs propres λ_q .

La base de projection correspond aux Q vecteurs propres v_q qui satisfont $Q \gg T$ avec le maximum de l'inertie $I = \sum_{q=1}^T \lambda_q$.

Les données projetées sont les composantes principales et auront la dimension $N \times Q$. Elles correspondent à $H_q = Y_c v_q$.

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & \dots & H_{1,q} & \dots & H_{1,Q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{n,1} & \dots & H_{n,q} & \dots & H_{n,Q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{N,1} & \dots & H_{N,q} & \dots & H_{N,Q} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

où $H_{n,q}$ est la n -ième valeur de la composante principale H_q avec $q = 1, \dots, Q$.

En d'autres termes, pour un scénario aléatoire donné ω_n , la sortie du modèle $Y(\omega_n, t)$ peut être approximée par :

$$Y(\omega_n, t) \approx \bar{Y}(t) + \sum_{q=1}^Q H_q(\omega_n) v_q(t) \quad (3.31)$$

où $\bar{Y}(t)$ est la moyenne statistique de $Y(\omega, t)$ sur le domaine d'incertitude Ω . La projection de $Y(\omega_n, t)$ dans la nouvelle base définie par les vecteurs propres v_q correspond aux composantes principales $H_q(\omega_n)$. Elles sont définies par $H_q(\omega_n) = Y_c(\omega_n, t) v_q(t)$. Selon (3.31), la variabilité de la sortie est contenue dans $H_q(\omega_n)$ avec une importance décroissante quand q diminue.

3.4.2 Indices de sensibilité par composantes principales

Le calcul des indices de sensibilité se fera pour chacune des composantes principales H_q pour obtenir Q indices qui résument la dynamique. Les indices de sensibilité peuvent être obtenus avec différents estimateurs. Dans les travaux qui suivent, les indices sont calculés selon (3.17) et (3.19) avec la méthode basée sur les PCE. Pour comprendre ce que représente chacune des composantes, il est possible de tracer la corrélation linéaire entre la composante et chaque instant de $Y(t)$.

Les indices de sensibilité principaux et totaux pour la composante principale q et pour le facteur X_i sont définis par :

$$\widehat{S}_{i,q} = \frac{Var(E(H_q(\omega)|X_i))}{Var(H_q(\omega))} = \frac{V_{i,q}}{V_q} = \frac{V_{i,q}}{\lambda_q} \quad \widehat{ST}_{i,q} = \sum_{m \neq i} S_{m,q} \quad (3.32)$$

avec $V_{i,q}$ la variance induite par X_i sur la composante principale q (vecteur propre associé à la valeur propre λ_q) et $\neq i$ correspondant à tous les indices comprenant i .

La relation entre $S_i(t)$ et $S_{i,q}$ peut être démontrée avec (3.31) telle que :

$$S_i(t) = \frac{\sum_{q=1}^T S_{i,q} v_q^2(t) \lambda_q}{\sum_{q=1}^T v_q^2(t) \lambda_q}$$

L'avantage de l'AS multivariée basée sur l'ACP est de réduire le nombre d'indices de T à Q et que chaque indice représente une tendance d'évolution d'un indice de sensibilité. La combinaison de l'AS séquentielle et l'AS multivariée par ACP peut aider pour interpréter des évolutions d'indices de sensibilité qui varient beaucoup. Dans une évolution des indices constante, l'AS multivariée par ACP permet de ne calculer qu'un seul indice qui résume l'évolution globale.

3.4.3 Résumé de la procédure de l'approche multivariée

Les différentes étapes de l'approche multivariée basée sur l'ACP pour l'analyse de sensibilité sont :

1. Les étapes 1., 2. et 3. sont identiques à celle de l'approche séquentielle
4. Décomposition de la matrice de covariance de $Y(\omega, t)$ avec les vecteurs propres v_q (dim. $T \times 1$) associés à chacune des T valeurs propres λ_q , selon (3.29).
5. Sélection des Q vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres λ_q qui représentent le maximum de l'inertie I (nouvelle base de dim. $T \times Q$)
6. Projection de $Y_c(\omega, t)$ dans la nouvelle base pour obtenir les composantes principales dans H (dim. $N \times Q$) :

$$H = \begin{pmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{q,1} & \cdots & H_{Q,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_{1,N} & \cdots & H_{q,N} & \cdots & H_{Q,N} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

7. Calcul des indices de sensibilité (3.17) et (3.19) des paramètres pour chacune des composantes principales $q = 1, 2, \dots, Q$ (dim. $k \times Q$)

$$S_{PCA} = \begin{pmatrix} S_{1,1} & \cdots & S_{1,q} & \cdots & S_{1,Q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{k,1} & \cdots & S_{k,q} & \cdots & S_{k,Q} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Les approches séquentielle et multivariée présentées dans cette section sont appliquées au modèle de toiture végétalisée présenté dans le Chapitre 2 dans les conditions précisées dans la Section 3.1. Les procédures 3.3.1 et 3.4.3 sont présentées dans le cadre spécifique du modèle dans la section suivante.

3.5 Application de l'analyse de sensibilité pour l'étude de l'influence des paramètres de sol de la TTV

3.5.1 Algorithme pour l'AS avec H1D

Pour faire une AS, il est nécessaire de faire beaucoup de simulations. Dans le cas de la thèse, il est nécessaire de passer par le logiciel [Hydrus-1D](#)[©] pour faire la simulation de la teneur en eau. Comme précisé dans la Section 2.3, l'utilisation de l'interface graphique de H1D ne sera pas possible et un passage par les fichiers d'entrée et de sortie via Matlab[©] est réalisé. La démarche mise en place pour réaliser les N simulations de l'AS via Matlab[©] est présentée :

Algorithme 1 : Démarche pour les N simulations du modèle de TTV

Entrées :

Paramètres de sol générés avec les distributions définies (N combinaisons)
 $X \leftarrow [\theta_s; \theta_r; \alpha; n, K_s; l];$ /* dim. $N \times k$ */

pour n allant de 1 à N **faire**

1. Modification des paramètres de sol dans le fichier d'entrée .IN de H1D
2. Appel au code fonction de H1D .EXE
3. Récupération de θ dans le fichier de sortie .OUT de H1D
4. Interpolation de θ à l'échelle temporelle fixe

$Y_n \leftarrow \text{interp}(\theta);$ /* dim. $1 \times T$ */

fin

Sortie :

Teneur en eau simulée pour les N combinaisons de paramètres de sol
 $Y;$ /* dim. $N \times T$ */

3.5.2 Approche séquentielle

L'analyse de sensibilité séquentielle est appliquée sur le modèle [VGM](#) (2.1), (2.3) et (2.4) pour la période de 5 mois, présentée dans la Section 3.1. Cette période représente $T = 3455$ heures en simulation pour un temps de calcul de 15 secondes par simulation (Processeur : Intel Core i5-8365U CPU 1.6 GHz 1.9 GHz RAM 16.0 Go). La procédure présentée dans la Section 3.3.1 est appliquée.

Étape 1 de l'AS : définition des paramètres incertains

Il y a $k = 6$ paramètres incertains – θ_s , θ_r , n , K_s , α et l – comme précisé dans la Section 3.1. Chaque paramètre incertain est défini par une distribution uniforme dans les intervalles donnés dans la Table 3.2.

Étape 2 de l'AS : génération des échantillons

Différentes techniques d'échantillonnage – Monte-Carlo (MC), Hypercube Latin (LHS), la séquence de Sobol (méthode QMC) – ont été testées avec différentes tailles d'échantillonnage [Kucherenko et al. (2015)] ainsi qu'avec différents degrés p de développement des PCE. Les résultats de ces tests sont présentés dans l'Annexe B. Ils mettent en évidence l'efficacité de la séquence de Sobol et de LHS face à la méthode de MC. Pour la suite des travaux, les indices de sensibilité seront calculés à partir d'un échantillon de taille $N = 500$ généré avec une séquence de Sobol et un PCE de degré $p = 3$. Cette configuration permet d'avoir un compromis satisfaisant entre temps de calcul et qualité des indices. La qualité des indices est vérifiée avec le coefficient de détermination R^2 (comparaison du modèle PCE avec les simulations de l'AS) calculée à chaque instant. Dans cette thèse, les indices de sensibilité estimés avec les PCE de degré $p = 3$ sont de bonne qualité avec des R^2 supérieurs à 95%.

Pour cette étude, deux matrices ($N \times k = 500 \times 6$) sont générées en suivant des distributions uniformes, une en utilisant l'intervalle d'incertitude des paramètres du substrat et l'autre en utilisant l'intervalle d'incertitude des paramètres du drainage donnés dans la Table 3.2.

Étude des influences des paramètres de sol de la couche de substrat

Étape 3 de l'AS séquentielle : calcul de la sortie

La teneur en eau volumique θ (aussi appelée VWC dans les figures) est obtenue par résolution de (2.1), (2.3) et (2.4) implémentées dans Hydrus-1D[©] pour chaque combinaison de paramètres. Pour réaliser $N = 500$ évaluations de la sortie, 2h de calcul sont nécessaires. Les sorties calculées par H1D sont ensuite traitées avec Matlab[©] pour obtenir deux matrices de sortie ($N \times T = 500 \times 3455$).

Les N évaluations de θ pour les variations des paramètres du substrat sont représentées sur la Figure 3.10. La superposition des simulations de la teneur en eau de cette figure met en évidence que quelles que soient les conditions de pluviométrie, les variations des paramètres du substrat vont modifier la simulation de θ . En effet, quand le sol est saturé en eau, les teneurs en eau simulée varient beaucoup avec les paramètres et c'est également le cas lorsque le sol s'assèche.

Étape 4 de l'AS séquentielle : calcul des indices de sensibilité

Les indices de sensibilité sont calculés grâce à (3.17) et (3.19) à chaque instant. La méthode séquentielle nécessite N évaluations du modèle et l'estimation de $T_x(M + 1)$ coefficients qui permettent d'obtenir les indices de sensibilité. Le choix du degré de développement p influence également le temps de calcul comme précisé dans l'étape 2 et la Section 3.2.2. Malgré le temps de calcul très long de l'AS séquentielle, elle permet d'obtenir l'évolution des indices de sensibilité au cours du temps et de mettre en évidence l'évolution des influences.

Les indices de sensibilité séquentiels pour l'analyse des paramètres du substrat sont représentés sur la Figure 3.11.

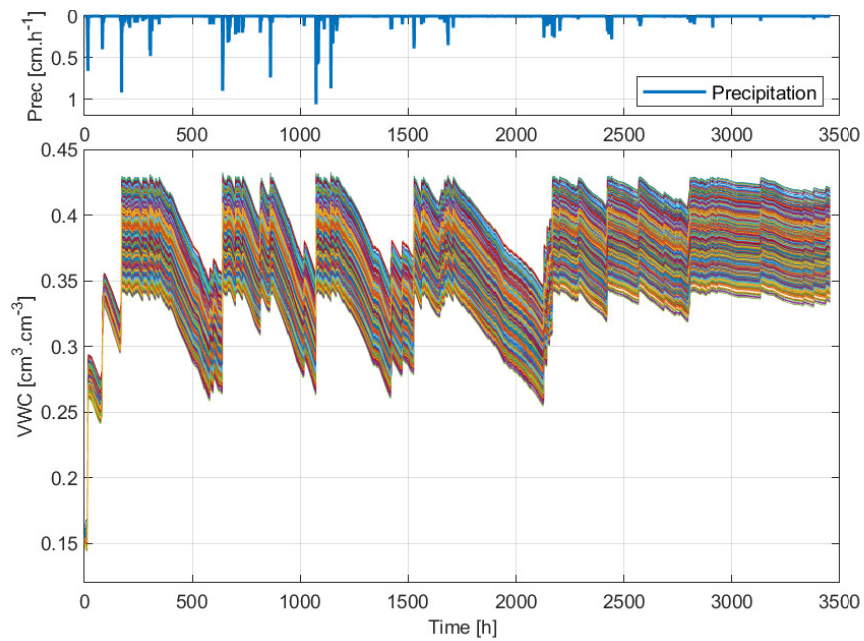


FIGURE 3.10 – $N = 500$ simulations de la teneur en eau (VWC) pour les variations des paramètres du substrat (en bas) et pluviométrie (en bleu, en haut)

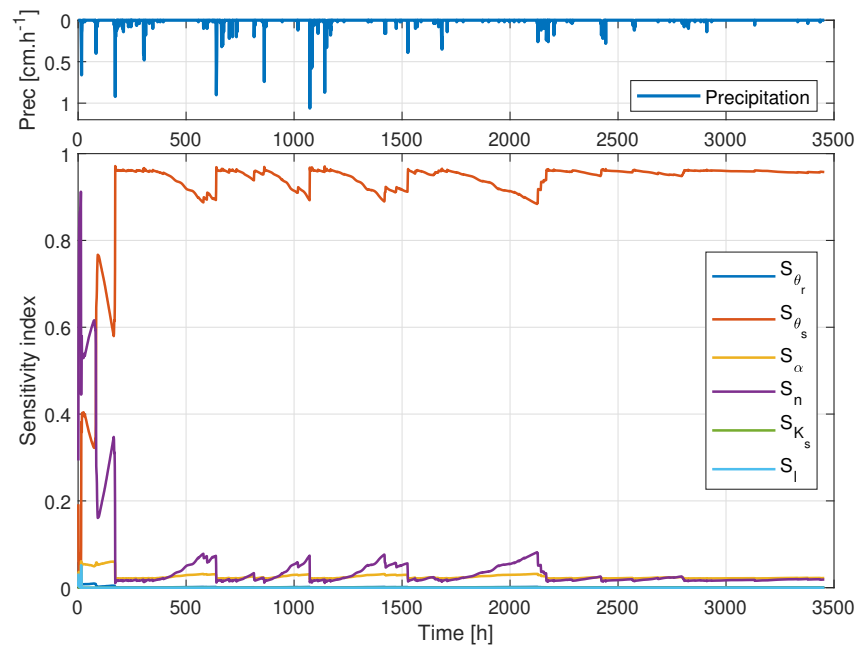


FIGURE 3.11 – Indices de sensibilité principaux pour l'AS séquentielle des paramètres du substrat (en bas) et pluviométrie (en haut)

Les indices de sensibilité au cours du temps pour les paramètres du substrat (Fig. 3.11) mettent en évidence trois paramètres influents :

- θ_s la teneur en eau saturée (indice en orange sur Fig. 3.11),
- n le paramètre lié à la porosité (indice en violet sur Fig. 3.11),
- α le paramètre d'ajustement du potentiel de pression (indice en jaune sur Fig. 3.11).

Quelle que soit la période, l'indice S_{θ_s} suit la teneur en eau et son influence augmente lorsqu'il pleut et diminue lorsque le sol s'assèche. L'indice S_{θ_s} est compris entre 0.88 et 0.97, signifiant que 88 % à 97 % des variations de la teneur en eau sont expliquées par le paramètre θ_s . Par conséquent, la capacité maximale de rétention du sol est le paramètre le plus influent pour la teneur en eau. Cette influence est plus importante quand le sol se remplit d'eau. Lorsque le sol s'assèche, son influence diminue au profit du paramètre n . En effet, l'indice S_n diminue lorsqu'il pleut et augmente lorsque le sol s'assèche. S_n est compris entre 0.082 et 0.01. Bien que ses valeurs soient faibles, son influence n'est pas négligeable. Le paramètre n représente la distribution de la taille des pores du sol et va donc devenir plus important lorsque l'eau s'écoule dans le sol. L'indice S_α possède une valeur quasi-constante au cours du temps, autour de 0.01, son influence est faible mais est intéressante à considérer. α est le paramètre d'ajustement du potentiel de pression h . Les autres paramètres expliquent moins de 0.1 % de la teneur en eau. Leurs influences peuvent être considérées comme négligeables.

Il est intéressant de noter que les indices principaux sont égaux aux indices totaux (non représentés) $S_i = S_{T_i}$. Cette égalité montre que les indices d'ordres supérieurs sont nuls, ce qui signifie que l'interaction entre les paramètres n'a aucune influence sur la teneur en eau. L'égalité entre les indices principaux et totaux est observée pour tous les résultats de ce chapitre.

Étude des influences des paramètres de sol de la couche de drainage

Étape 3 de l'AS séquentielle : calcul de la sortie

Les N évaluations de θ pour les variations des paramètres de drainage sont représentées sur la Figure 3.12. Contrairement à l'étude sur les paramètres du substrat (Fig. 3.10), la Figure 3.12 montre que les variations des paramètres du drainage ne modifient que les périodes d'assèchement du sol. Par conséquent, les indices de sensibilité pour les paramètres du drainage seront calculés uniquement pour les périodes d'assèchement.

Il est intéressant de noter que la sortie varie de manière beaucoup moins importante pour les variations des paramètres de drainage que celles pour les variations des paramètres du substrat. Cela signifie que les paramètres du substrat sont plus influents que les paramètres de drainage sur la teneur en eau ce qui tout à fait logique car la teneur en eau que l'on souhaite reproduire est mesurée au milieu du substrat.

Étape 4 de l'AS séquentielle : calcul des indices de sensibilité

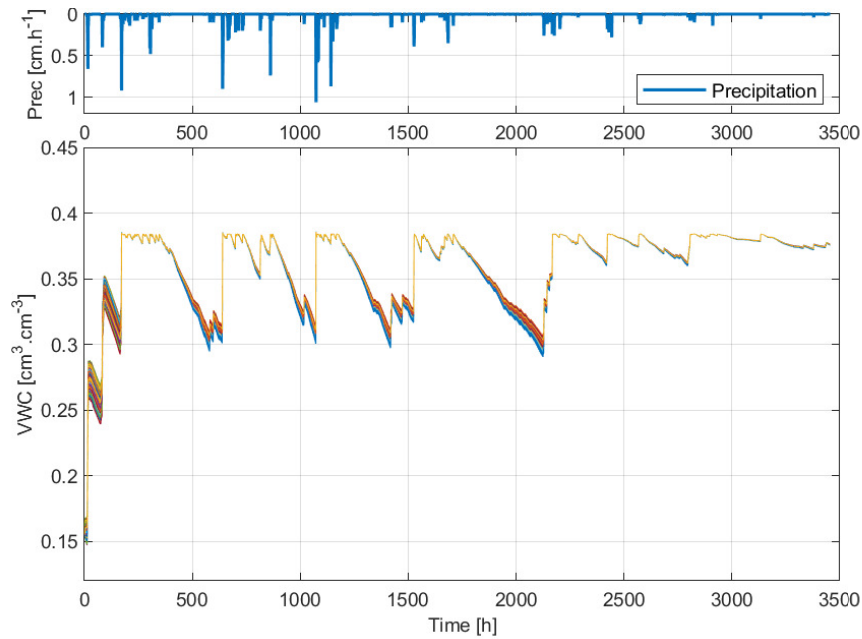


FIGURE 3.12 – $N = 500$ simulations de la teneur en eau (VWC) pour les variations des paramètres du drainage (en bas) et pluviométrie (en bleu, en haut)

De la même manière que pour les paramètres du substrat, les indices de sensibilité pour les paramètres du drainage sont déterminés et représentés sur la Figure 3.13.

Pour l'AS des paramètres du drainage pendant les périodes d'assèchement (Fig. 3.13), les trois mêmes paramètres influents sont révélés : θ_s (en orange sur Fig. 3.13), n (en violet sur Fig. 3.13) et α (en jaune sur Fig. 3.13). Les tendances d'évolution des influences pendant les périodes d'assèchement du sol sont les mêmes que pour celles du substrat.

Ces tendances correspondent à la diminution de l'influence de θ_s et à l'augmentation de l'influence de n durant l'assèchement. Il est tout de même intéressant de noter que ces augmentations ou diminutions d'influence sont plus fortes pour les paramètres du drainage. En effet, S_{θ_s} diminue de 0.40 à 0.23 soit -165% contre -9% dans le cas du substrat (S_{θ_s} de 0.97 à 0.88) et S_n augmente de 0.13 à 0.63 soit $+390\%$ contre $+7\%$ dans le cas du substrat (S_n de 0.01 à 0.082). De plus, l'influence de α suit la variation de θ_s et diminue pendant la période d'assèchement. Le S_α diminue de 0.46 à 0.12 soit -73% , contrairement au cas du substrat pour lequel S_α est constant.

Les indices pour les paramètres du drainage signifient que lorsque θ est à sa plus faible valeur (environ $0.3 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$), 64 % de sa valeur est expliquée par les variations de n , 23 % par θ_s et 12 % par α . Les autres paramètres représentent moins de 0.2 % de l'influence et leur influence est considérée négligeable comme dans le cas du substrat.

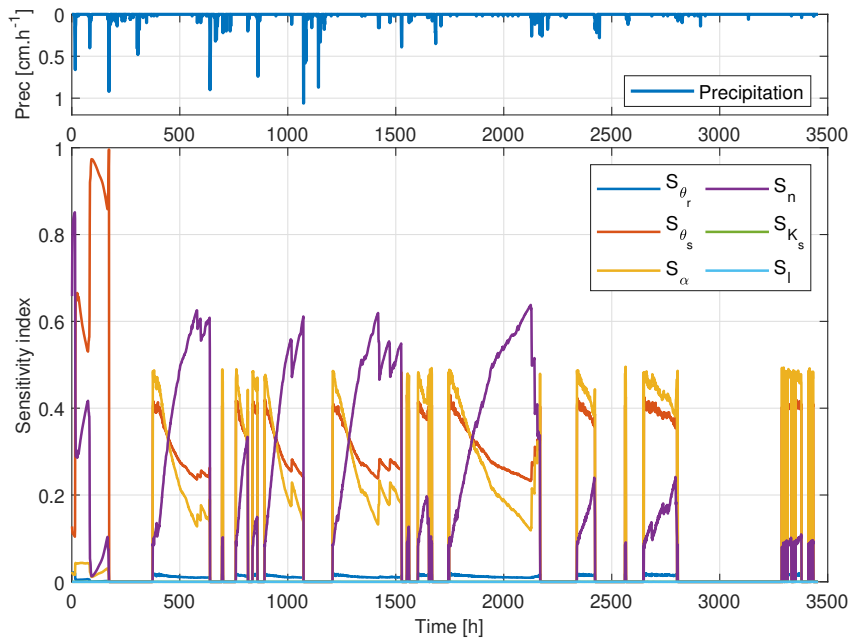


FIGURE 3.13 – Indices de sensibilité principaux pour l'AS séquentielle des paramètres du drainage (en bas) et pluviométrie (en bleu, en haut)

Conclusion sur les AS de l'approche séquentielle

Les analyses de sensibilité des paramètres de sol du substrat et du drainage mettent en évidence trois paramètres influents θ_s , n et α pour chacune des couches. Le paramètre de teneur en eau saturée θ_s est plus important lors des événements pluvieux et diminue lorsque le sol s'assèche au profit du paramètre n . Le paramètre lié à la porosité n a une influence croissante lors des périodes d'assèchement, quand l'eau s'écoule dans le sol. Le paramètre d'ajustement du potentiel de pression α a une importance différente en fonction de la couche de la TTV. Ces tendances d'évolution des influences ont été observées pour les deux couches. Il est important de mettre en comparaison les résultats entre les couches. En effet, les résultats des Figures 3.10 et 3.12 ainsi que la Figure 3.14 mettent en évidence que les paramètres du substrat seront beaucoup plus influents car ils provoquent une plus grande variabilité de la teneur en eau que les paramètres du drainage.

Comme précisé dans les sections précédentes, une approche multivariée de l'AS permet de déterminer les tendances d'évolution des influences des paramètres avec un nombre réduit d'indices. Dans la section suivante, les résultats d'une AS multivariée basée sur l'ACP sont présentés et les deux approches seront comparées.

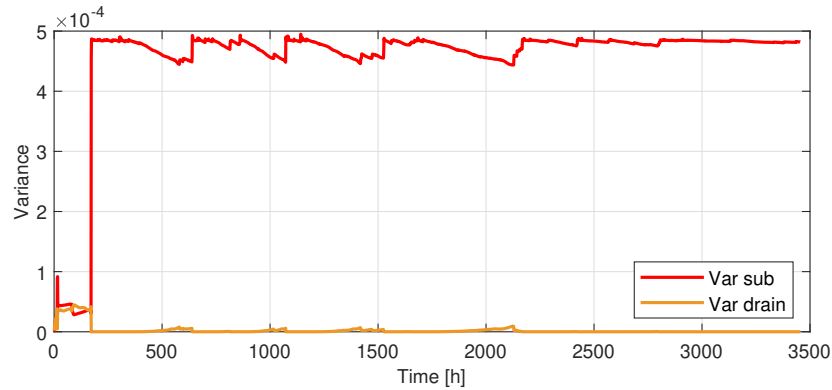


FIGURE 3.14 – Comparaison des variances des simulations réalisées pour le substrat (en rouge) et pour le drainage (en orange)

3.5.3 Approche multivariée

La procédure présentée dans le Section 3.4.3 est appliquée sur la matrice de sortie $N \times T = 500 \times 3455$ obtenue pour les variations des paramètres du substrat (Fig. 3.10). Les trois premières étapes sont identiques à celles de la procédure séquentielle décrite dans la Section 3.5.2.

Étude des influences des paramètres de sol de la couche de substrat

Étape 4 de l'AS multivariée : décomposition de la covariance

La matrice de covariance de la sortie est décomposée en utilisant (3.29). Les vecteurs propres de cette décomposition qui contiennent le plus d'informations sont sélectionnés pour créer la base de projection.

Étape 5 de l'AS multivariée : sélection de la base de projection

Deux vecteurs propres sont mis en évidence avec l'analyse de l'inertie (3.28). Le premier permettra d'obtenir la première composante principale (PC1) qui représentera 99.65 % des informations des données. Le second vecteur propre sélectionné permettra d'obtenir la seconde (PC2) qui représentera 0.35 % des informations. Les autres vecteurs propres ne représentent en cumulé que $7.25 \cdot 10^{-5}$ % des informations des données. Les vecteurs propres sélectionnés composent une base adaptée de dimension $T \times Q$ avec $Q = 2$ pour projeter les données de sortie $Y(\omega, T)$.

Étape 6 de l'AS multivariée : projection des données

La matrice de sortie $Y(\omega, T)$ contenant les teneurs en eau θ pour les variations des paramètres de sol du substrat (dim. $N \times T$) est projetée dans la base adaptée. La sortie projetée correspond à une nouvelle matrice de taille $N \times Q$ avec les Q composantes principales qu'il faut analyser. Dans le cas du substrat, deux composantes principales sont sélectionnées ce qui conduit à une matrice projetée de taille 500×2 . Deux indices de sensibilité seront suffisants pour résumer l'évolution des influences.

Étape 7 de l'AS multivariée : calcul des indices de sensibilité

Les indices de sensibilité sont déterminés pour chaque composante selon (3.17) et (3.19). Les résultats de l'AS multivariée pour les variations des paramètres du substrat sont représentés sur la Figure 3.15. Chaque colonne de la figure correspond aux informations qui concernent une composante principale. La figure du haut montre les précipitations au cours du temps. La figure du milieu représente les corrélations linéaires entre la composante principale (vecteur de dim. $N \times 1$) et chaque instant de la teneur en eau (vecteur colonne de dim. $N \times 1$). La figure du bas donne les indices de sensibilité de la composante pour chaque paramètre.

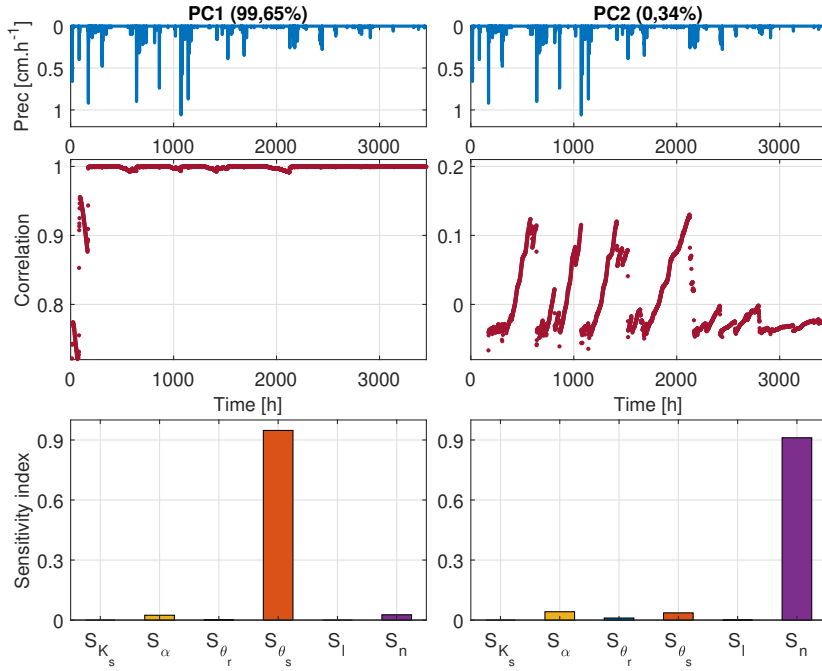


FIGURE 3.15 – Indices de sensibilité principaux pour les deux composantes principales de l'AS multivariée pour l'analyse des paramètres de drainage (en bas), corrélation entre les données de sortie et les données projetées sur les deux composantes principales (au milieu) et pluviométrie (en haut)

La courbe de corrélation de PC1 montre un lien linéaire intense entre la première composante principale et la sortie pour la plupart des instants. Pendant les périodes de saturation (θ proche de 40 %), les coefficients de corrélation sont à 1 et une légère diminution est observée quand le sol s'assèche. PC1 correspond donc à la tendance principale de l'évolution de la sortie, en particulier lors des périodes de saturation. Les indices de sensibilité principaux correspondant (en bas à gauche) montrent que le paramètre le plus influent est la teneur en eau saturée θ_s en expliquant 94.78 % des variations de la teneur en eau. Le paramètre lié à la porosité n explique 2.66 % des variations de θ et le paramètre d'ajustement du potentiel de pression α explique 2.42 %. Tous les autres paramètres sont considérés non influents car ils expliquent moins de 1 % des variations de la sortie.

La courbe de corrélation de PC2 montre une oscillation entre 0.13 et -0.06 du coefficient de corrélation linéaire. Les augmentations de corrélation correspondent aux périodes d'assèchement ce qui complète les informations apportées par PC1. Les indices correspondant (en bas à droite) montrent une perte d'influence de θ_s qui n'explique que 3.61 % des variations de la sortie sur cette composante. Cette diminution d'influence profite au paramètre n qui explique 91.11 % des variations de la sortie sur cette composante. L'influence du paramètre α explique 2.42 % des variations de la sortie. Les autres paramètres sont non influents.

Pour interpréter ces résultats, il faut les prendre en compte en intégralité. La teneur en eau saturée θ_s est le paramètre le plus influent, en particulier durant les événements pluvieux quand la teneur en eau est au maximum. Cependant, l'influence de θ_s diminue quand le sol s'assèche et l'influence du paramètre lié à la porosité n augmente. L'influence du paramètre d'ajustement du potentiel de pression α est constante quelles que soient les précipitations et les autres paramètres de sol du substrat sont non influents.

Étude des influences des paramètres de sol de la couche de drainage

La procédure présentée dans la Section 3.4.3 est appliquée sur la matrice de sortie $N \times T = 500 \times 3455$ obtenue pour les variations des paramètres du substrat (Fig. 3.12).

Étape 5 de l'AS multivariée : sélection de la base de projection

L'analyse de l'inertie met en évidence trois composantes principales. 64.27 % des informations des données sont représentées par PC1, 34.7 % par PC2 et 0.86 % par PC3. Le reste des 0,17 % d'informations des données est contenu dans les autres vecteurs propres. Les trois vecteurs propres sélectionnés composent la base adaptée de dimension $T \times Q$ avec $Q = 3$ pour projeter les données de sortie.

Étape 6 de l'AS multivariée : projection des données

La matrice de sortie contenant les teneurs en eau θ pour les variations des paramètres de sol du drainage (dim. $N \times T$) est projetée dans la nouvelle base $N \times Q$. Dans le cas du drainage, la sélection de trois composantes principales mène à une matrice projetée de taille 500×3 et trois indices de sensibilité pour résumer l'évolution des influences.

Étape 7 de l'AS multivariée : calcul des indices de sensibilité

Les résultats de l'AS multivariée pour les variations des paramètres du drainage sont représentés sur la Figure 3.16.

Comme précisé dans la Section 3.5.2, l'AS sur les paramètres de drainage n'est effectuée que sur les périodes d'assèchement. Au début de toutes les périodes d'assèchement, la corrélation linéaire entre PC1 et θ est de -0.43 et entre PC3 et θ à -0.48. Ces coefficients de corrélation deviennent respectivement -0.16 et 0.005 montrant une diminution des corrélations qui suivent θ jusqu'à l'évènement pluvieux suivant. Les indices de sensibilité principaux correspondant (en bas à gauche de Fig. 3.16) montrent que θ_s , n et α

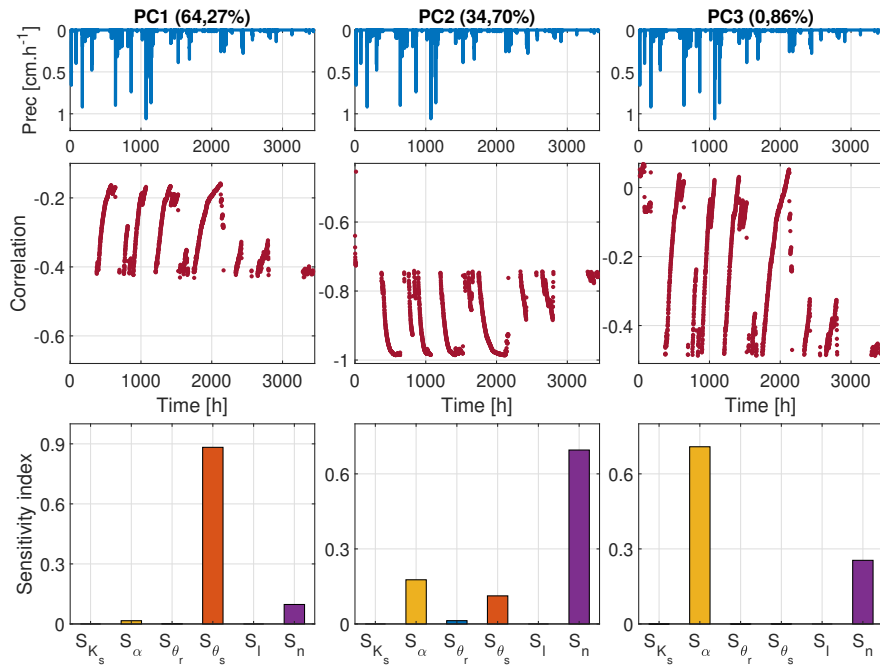


FIGURE 3.16 – Indices de sensibilité principaux pour les trois composantes principales de l'AS multivariée pour l'analyse des paramètres de drainage (en bas), corrélation entre les données de sortie et les données projetées sur les composantes principales (au milieu) et pluviométrie (en haut)

expliquent, respectivement, 88.26 %, 9.72 % et 1,61 % les variations de θ . Les indices correspondant à PC3 (en bas à droite de la Fig. 3.16) montrent que α et n expliquent 70.84 % et 25.43 % respectivement des variations de θ . Ces indices représentent les influences au début de la période d'assèchement qui diminuent jusqu'aux prochains évènements en faveur de l'influence décrite par PC2. Le coefficient de corrélation entre PC2 et θ débute à -0.75 et termine à -0.98, mettant en avant une corrélation qui augmente en suivant θ jusqu'aux évènements pluvieux suivants (courbe des corrélations de PC2 sur Fig. 3.16). Les indices correspondant à PC2 montrent que n est le paramètre le plus influent avec une explication de 69.53 % des variations de θ , suivi de α (17.66 %) et de θ_s (11.23 %). Deux tendances décroissantes sont établies pour l'influence de la teneur en eau saturée θ_s et l'influence du paramètre d'ajustement du potentiel de pression α . Comme les corrélations de PC3 diminuent moins que celles de PC1 et que la composante représente moins les données, l'influence de α sera moins diminuée que celle de θ_s . Une tendance d'influence croissante est montrée pour le paramètre lié à la porosité n . Les autres paramètres sont non influents.

Conclusion sur les AS de l'approche multivariée

Les résultats obtenus pour l'analyse de sensibilité multivariée sont cohérents avec ceux obtenus pour de l'analyse séquentielle. Ils mettent en évidence les mêmes paramètres influents θ_s , n et α pour chacune des couches de substrat et de drainage. Il est intéressant de noter que l'analyse séquentielle nécessite le calcul de 3455 indices alors que l'approche basée sur l'ACP nécessite le calcul de seulement deux ou trois indices pour représenter les mêmes influences avec un temps de calcul divisé par 4.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les effets des incertitudes des paramètres du sol sur la teneur en eau d'une toiture végétalisée ont été étudiés. Dans ce but, une analyse de sensibilité a été effectuée sur le modèle simplifié décrivant l'infiltration de l'eau dans le sol de la toiture végétalisée. Différentes approches ont été présentées pour traiter le cas de modèle à sortie variant dans le temps.

Tout d'abord, l'approche la plus intuitive pour l'analyse de sensibilité de sortie variant dans le temps est l'analyse séquentielle. Elle a été réalisée pour étudier le comportement des influences des paramètres au cours du temps. D'une part, pour les paramètres du sol du substrat, il a été montré que la teneur en eau saturée est le paramètre le plus influent, suivi par la distribution de la taille des pores. Quelle que soit la saison, l'influence de la teneur en eau saturée suit l'évolution de la teneur en eau, c'est-à-dire que son influence augmente lorsqu'il pleut et diminue lorsque le sol s'assèche. Au contraire, l'influence du paramètre de porosité diminue lorsqu'il pleut et augmente lorsque le sol s'assèche. D'autre part, pour les paramètres du sol de la couche de drainage, pendant la période d'assèchement, les mêmes paramètres influents sont révélés. Les tendances d'une influence décroissante de la teneur en eau saturée et d'une influence croissante du paramètre de porosité pendant les périodes d'assèchement du sol demeurent pour la couche de drainage. Il est intéressant de noter que les variations de la teneur en eau pour les variations des paramètres du substrat sont plus importantes que pour les variations des paramètres de drainage, ce qui signifie que les paramètres de drainage sont moins importants que les paramètres du substrat.

L'approche séquentielle ne prend pas en compte les corrélations temporelles dans le calcul des indices ce qui mène à un nombre important d'indices. Pour considérer ces corrélations, une analyse multivariée basée sur l'ACP a été réalisée. Les résultats obtenus sont cohérents avec ceux de l'analyse séquentielle et permettent de réduire le nombre d'indices de sensibilité à calculer.

Les résultats de simulations obtenus avec le modèle simplifié ont permis de reproduire en grande partie les phénomènes hydrologiques observés dans une toiture végétalisée avec un nombre restreint de paramètres. Dans la suite des travaux, l'objectif est d'analyser le modèle complet en ajoutant les variables météorologiques et les paramètres de végétation pour se rapprocher des conditions réelles de la toiture végétalisée. Le modèle complet

permettra de reproduire de manière plus fidèle le phénomène d'assèchement du sol. Pour ce modèle complet, le nombre de paramètres incertains aurait pu être important mais grâce aux résultats de ce chapitre, les incertitudes des paramètres du sol sont réduites (de 12 paramètres de sol incertains à 3). Les paramètres de la couche de drainage ne seront plus considérés comme incertains et les paramètres incertains de sol ne seront donc plus que les trois paramètres influents du substrat.

Chapitre 4

Calibration du modèle complet de toiture végétalisée

Une première étude sur l'influence des paramètres de sol sur le modèle de toiture végétalisée a été réalisée dans le Chapitre 3. Elle a permis de mettre en évidence les paramètres de sol non influents pour les différentes couches de la structure dans le modèle simplifié. Ces résultats permettent de réduire le nombre de paramètres incertains du modèle afin de se concentrer sur les paramètres influents. L'objectif de ce chapitre est d'ajouter les paramètres de végétation et les conditions météorologiques au modèle simplifié afin d'obtenir une reproduction plus fidèle des phénomènes réels de la toiture végétalisée. Le modèle complet est présenté dans le Chapitre 2. La première étape pour utiliser ce modèle complet est une étape de calibration. En effet, certains des paramètres sont difficiles à obtenir pour la configuration des données à reproduire. Ces paramètres seront donc considérés comme incertains dans un intervalle de valeurs probables. L'analyse de sensibilité peut être appliquée ici pour déterminer la valeur des paramètres en explorant leur domaine d'incertitude. Une approche de calibration pour le modèle de toiture végétalisée est proposée dans ce chapitre [Hégo et al. (2022b)].

Sommaire

4.1	Contexte de l'étude	60
4.2	Procédure de calibration	63
4.3	Analyse de sensibilité des paramètres de sol et de végétation	66
4.4	Résultats de la calibration	68
4.4.1	Optimisation de l'intervalle d'incertitude	68
4.4.2	Combinaison optimale pour les paramètres	68
4.5	Conclusion	70

4.1 Contexte de l'étude

Dans le Chapitre 3, une première étude est menée sur un modèle de toiture végétalisée simplifié. L'objectif était d'étudier l'influence des paramètres de sol des couches de substrat et de drainage. Cette étude a mis en évidence l'influence de trois paramètres de sol de la couche de substrat (θ_s , α et n) et la non influence des autres paramètres. Ce résultat permet de simplifier les études suivantes sur une TTV ayant les mêmes dimensions et les mêmes types de sol que celle du Chapitre 3, qui ne prendront en compte plus que les incertitudes sur ces trois paramètres de sol.

Il est également intéressant de noter que les simulations effectuées avec le modèle simplifié ne reproduisent pas suffisamment les phénomènes d'assèchement pour s'approcher du comportement réel de la TTV. Dans ce chapitre, le modèle complet sera utilisé pour simuler le comportement de la TTV. Le modèle complet est considéré comme suit :

- 1 entrée connue : les précipitations $P(t)$;
- 1 sortie : la teneur en eau volumique $\theta(t)$;
- 6 paramètres de sol pour chaque couche : la teneur en eau résiduelle θ_r , la teneur en eau saturée θ_s , le paramètre d'ajustement α , le paramètre lié à la porosité n , la conductivité hydraulique de saturation K_s et le paramètre lié à la tortuosité l ;
- 5 variables météorologiques : les températures maximale $T^{\circ}_{max}(t)$ et minimale $T^{\circ}_{min}(t)$, le rayonnement net $R_n(t)$, la vitesse du vent $U_z(t)$ et l'humidité relative $H_r(t)$;
- 4 paramètres de végétation : la hauteur des plantes h_c , l'Albedo, l'indice foliaire LAI et la profondeur des racines L_r .

Les différents modèles utilisés pour reproduire le comportement de la TTV sont détaillés dans le Chapitre 2.

Pour utiliser le modèle complet pour reproduire ou analyser le comportement d'une TTV réelle, il est nécessaire de déterminer les paramètres de sol et de végétation correspondant à la TTV en question. Comme expliqué dans la Section 2.3, les paramètres de sol et de végétation sont difficiles à déterminer avec précision. Ils feront donc l'objet d'une calibration expliquée dans ce chapitre.

De plus, pour utiliser le modèle complet, les données météorologiques du site sont nécessaires. Dans le cadre de l'étude du Chapitre 3, ces données ne sont pas disponibles. Une parcelle différente de TTV sera donc étudiée ici. Le Cerema de Tomblaine possède une autre parcelle instrumentée de plusieurs capteurs de teneur en eau ainsi qu'une station météo qui permet d'avoir les conditions météorologiques sur le site. Elle est représentée sur la Figure 4.1. Elle est placée au sommet d'un bâtiment à toit plat à 7.5 m de hauteur. Sa surface est d'environ 20 m² (plus petite que la précédente parcelle). La structure en couche est la même que précédemment telle que présentée sur la Figure 4.2. La végétation est composée à l'origine de différents types de Sedum des plateaux calcaires de Lorraine. Le substrat est le même que celui de l'étude précédente (80 % minéral et 20 % organique). Le capteur de mesure de la teneur en eau est placé à 7 cm de profondeur

dans le substrat. En plus de la disponibilité des données météorologiques récentes, cette parcelle est intéressante à étudier pour le Cerema qui compte étudier l'aspect thermique lié à cette parcelle dans de futurs travaux.



FIGURE 4.1 – Photographie de la TTV de 20 m² étudiée

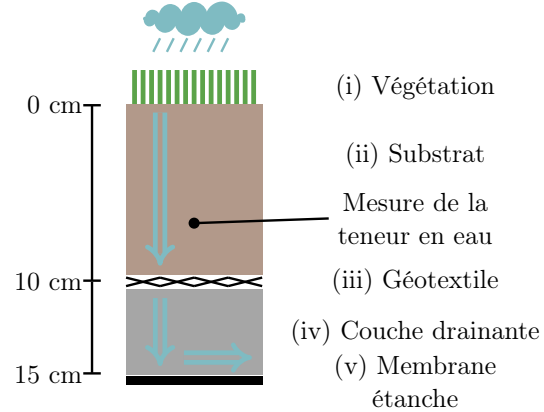


FIGURE 4.2 – Schéma de la structure de TTV étudiée

L'objectif de l'étude est de reproduire la teneur en eau dans la TTV sur une période d'un an de janvier à décembre 2020. La Figure 4.3 représente l'évolution des précipitations $P(t)$ (en bleu), de la teneur en eau mesurée VWC (en noir) ainsi que du flux sortant mesuré (en vert) pour l'année 2020. Les données météorologiques de cette période et pour cette parcelle sont disponibles et pourront être exploitées pour obtenir la teneur en eau avec le logiciel *Hydrus-1D*[©] et les modèles présentés dans le Chapitre 2.

La Table 4.1 donne les valeurs des paramètres connus. Les paramètres de sol du modèle *VGM* ((2.3) et (2.4)) des couches de géotextile et de drainage sont définis dans [Bouzouidja (2014)]. La non influence des paramètres de la couche de drainage par rapport à ceux du substrat a été démontrée dans le Chapitre 3 et les couches de la TTV sont identiques à l'étude précédente, ce qui explique que leurs valeurs soient fixées. Il en est de même pour les trois paramètres du substrat non influents θ_r , K_s et l . Le paramètre Albedo est fixé à la valeur définie dans la littérature [FAO].

Les paramètres à définir sont θ_s , α , n , la hauteur des plantes h_c , LAI et la profondeur des racines L_r . Ils seraient possible d'utiliser des méthodes d'identification paramétrique et des toolbox d'optimisation pour déterminer les valeurs de ces paramètres mais la complexité de simulation avec H1D (Sections 2.3 et 3.5.1) est à prendre en compte. Il existe dans le logiciel H1D, un algorithme d'optimisation des paramètres de sol sur un jeu de données mais le temps de calcul est long sans garantir une efficacité (problèmes de convergence ou résultats peu probants). Cet algorithme ne prend pas en compte les paramètres de végétation. De plus, les procédures de calibration dans le domaine de l'hydrologie portent généralement sur la calibration du modèle sur une période courte, pas sur une période d'un an comme celle étudiée dans ce chapitre.

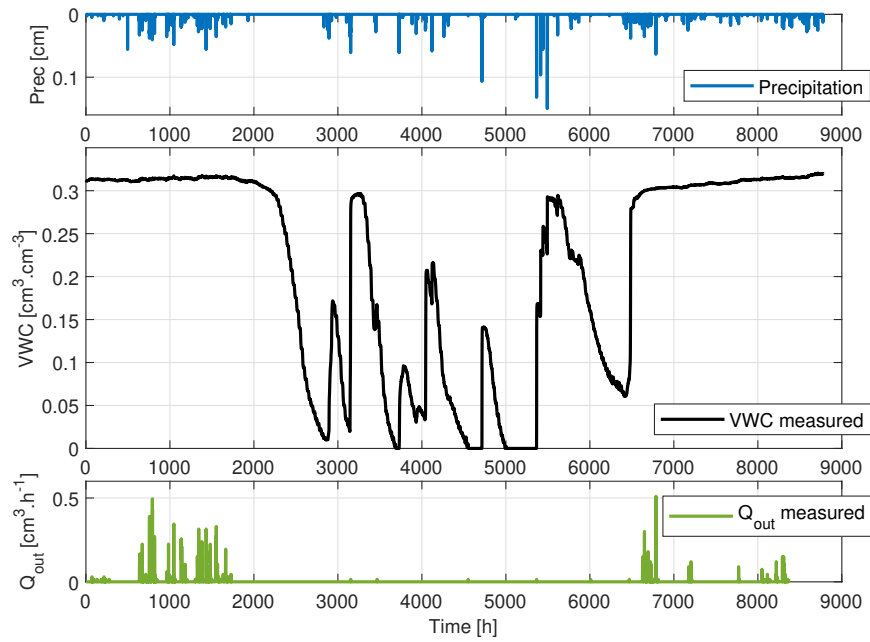


FIGURE 4.3 – Mesure de la teneur en eau (VWC, en noir), la pluviométrie (Prec, en bleu) et le flux de sortie (Q_{out} , en vert).

TABLE 4.1 – Configuration pour la calibration

Paramètres	Unité	Propriétés hydrauliques VGM		
		Substrat	Géotextile	Drainage
θ_r	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$	0.0001	0.1	0.06
θ_s	$\text{m}^3 \text{m}^{-3}$	à définir	0.6	0.3
α	m^{-1}	à définir	11.1	5
n	-	à définir	1.50	1.50
K_s	10^{-1}m s^{-1}	2.167	0.145	3.611
l	-	2.87	0.1	0.1
Végétation				
Hauteur des plantes	m	à définir		
Albedo	-	0.23		
LAI	-	à définir		
Profondeur des racines	m	à définir		
Autres				
Mesure de la vitesse du vent	m	10		
Mesure de température	m	2		

L'utilisation de l'AS pour la calibration de modèles, notamment hydrologiques, a déjà été proposée dans [Ratto et al. (2001)], [Borgonovo et al. (2017)] et [Tolley et al. (2019)]. Dans ces études, la sortie du modèle est statique et la mesure de sensibilité n'est pas toujours l'indice de Sobol. Pour ces raisons, ce chapitre propose une procédure de calibration basée sur l'analyse de sensibilité globale qui est adaptée pour la complexité de simulation de la teneur en eau avec H1D.

Pour cette procédure, les trois paramètres de sol du substrat θ_s , α et n ainsi que les paramètres de végétation h_c , LAI et L_r sont considérés incertains. Ils suivent des distributions uniformes dans les intervalles d'incertitude précisés dans la Table 4.2.

TABLE 4.2 – Intervalles d'incertitude des paramètres de sol et de végétation

Paramètres incertains		Intervalle d'incertitude	
	Unité	Inférieur	Supérieur
θ_s	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.3	0.33
α	m^{-1}	0.5	14.5
n	-	1.09	2.68
h_c	m	0.03	0.25
LAI	-	2	5
L_r	m	0.02	0.08

L'objectif de l'étude de ce chapitre est d'utiliser l'analyse de sensibilité (AS) pour calibrer le modèle afin de reproduire la teneur en eau sur l'année 2020.

4.2 Procédure de calibration

La procédure de calibration proposée est basée sur une analyse de sensibilité globale séquentielle présentée dans le Chapitre 3.

L'analyse de sensibilité globale permet de déterminer les paramètres les plus influents et les moins influents parmi les six paramètres considérés – θ_s , α , n , h_c , LAI et L_r . Les paramètres les moins influents pourront être fixés à une valeur de l'intervalle étudié, ce qui permettra la réduction du nombre de paramètres à estimer. L'étude de calibration se focalisera donc ensuite sur les paramètres les plus influents. Grâce aux indices de sensibilité obtenus au cours du temps, des périodes spécifiques d'influence de certains paramètres pourront être identifiées. Ces périodes seront nommées périodes d'intérêt. Pendant une période d'intérêt où le paramètre X_i est influent, l'idée est de chercher à déterminer la valeur de X_i pour laquelle une mesure d'erreur entre les simulations de l'AS et la teneur en eau mesurée est minimisée. Cette erreur (ou critère) à minimiser correspond à la fonction objectif à définir comme dans les procédures standards de calibration. La valeur du paramètre influent qui minimise ce critère dans la période d'intérêt correspondante constitue une information intéressante. Il est possible d'avoir différentes

valeurs pour un même paramètre entre des périodes d'intérêt distinctes. Ces différentes valeurs vont permettre, dans un premier temps, de réduire l'intervalle d'incertitude. Dans un second temps, lorsque l'intervalle sera réduit pour tous les paramètres influents, une exploration de ces intervalles réduits ainsi que la minimisation du critère sur la période globale permettra de déterminer les valeurs des paramètres.

Définition de la fonction objectif

Pour calibrer le modèle, il est nécessaire de définir une fonction objectif. L'écart moyen quadratique normalisé (*normalized Root Mean Square Deviation* $nRMSD$) est choisi comme critère à minimiser.

$$nRMSD = \sqrt{\frac{\sum_{t=t_i}^{t_f} (y_{sim}(t) - y_{obs}(t))^2}{n_t}}{y_{obs}^{max} - y_{obs}^{min}}} \quad (4.1)$$

où y_{sim} et y_{obs} sont respectivement la sortie simulée et observée pour t allant de l'instant initial t_i à l'instant final t_f d'une période d'intérêt, n_t correspond au nombre d'instant de cette période.

Pour réduire l'intervalle d'incertitude, l'objectif est de déterminer les combinaisons de paramètres qui minimisent $nRMSD$ durant différentes périodes d'intérêt. Pour une période d'intérêt entre t_i et t_f , N erreurs $nRMSD$ (4.1) sont calculées pour chacune des N simulations du modèle. La valeur des paramètres influents seuls ou en interaction durant cette période, qui minimise $nRMSD$ permettra de réduire l'intervalle. En effet, entre deux périodes qui représentent les mêmes influences de paramètres où dans le cas de la TTV le même phénomène hydrologique, les combinaisons de paramètres qui minimisent $nRMSD$ peuvent être différentes, par exemple les périodes humides de début d'année ou de fin d'année.

Pour déterminer la valeur de paramètre à partir de l'intervalle réduit, l'objectif est de minimiser $nRMSD$ sur la période globale étudiée. Pour cela, la stratégie consiste à tester toutes les combinaisons possibles entre un nombre spécifique de valeurs clés dans l'intervalle réduit. Le nombre de valeur à combiner est choisi en fonction des temps de calcul du modèle. Dans cette étude, trois valeurs sont sélectionnées : le maximum, le minimum et la moyenne. Cependant, découper l'intervalle en 10 valeurs a également été testé pour un temps de calcul beaucoup plus conséquent. Le $nRMSD$ est calculé pour toutes les combinaisons sur la période globale et la minimisation du critère révèle la combinaison optimale. Cette opération est réitérée en créant un intervalle autour des valeurs optimales jusqu'à avoir une convergence des valeurs et de l'erreur.

Résumé de la procédure de calibration proposée

La procédure de calibration proposée peut être résumée avec les étapes suivantes :

1. Application d'une analyse de sensibilité sur les larges intervalles d'incertitude en utilisant la procédure de la Section 3.3.1 ;

Cette étape permet d'obtenir une matrice de sortie Y de dimension $N \times T$ et une matrice d'indices de sensibilité S de dimension $k \times T$, ce qui permet de déterminer :

- les paramètres les moins influents qui seront fixés à une valeur nominale de leurs intervalles d'incertitude ;
- les paramètres les plus influents qui seront considérés dans la suite ;
- les périodes d'influence de certains paramètres qui seront utilisées dans la suite.

2. Calcul des erreurs $nRMSD$ (dim. $N \times 1$) entre la teneur en eau mesurée et les N simulations de l'AS contenues dans Y pour les différentes périodes d'intérêt déterminées dans l'étape 1 ;
3. Réduction de l'intervalle de variations des paramètres en cherchant les valeurs des paramètres influents qui minimisent les $nRMSD$ pour les périodes correspondantes ;

Pour une période donnée, la simulation qui minimise l'erreur $nRMSD$ est déterminée et la valeur du paramètre influent qui a permis cette simulation est retenue. Toutes les différentes périodes d'intérêt sont évaluées. Sur des périodes différentes avec les mêmes paramètres influents, les valeurs de minimisation peuvent être différentes ce qui conduit à obtenir un intervalle réduit pour chacun des paramètres. Ces intervalles réduits sont utilisés dans la suite.

4. Exploration des combinaisons de paramètres pour trouver la combinaison optimale.

Pour chaque paramètre influent, les valeurs minimale, maximale et moyenne de son intervalle réduit sont considérées. La teneur en eau est calculée pour toutes les combinaisons possibles pour ces trois valeurs de chaque paramètre. La combinaison de valeurs des paramètres correspondant à l'erreur $nRMSD$ la plus faible sur la période globale étudiée est retenue. Un intervalle réduit autour des valeurs sélectionnées est construit. La procédure est répétée jusqu'à ce que l'erreur $nRMSD$ converge vers une valeur souhaitée. Les valeurs correspondantes des paramètres seront alors considérées comme optimales.

La procédure de calibration présentée dans cette section sera appliquée sur le modèle de toiture végétalisée. La Section 4.3 présente les résultats de l'analyse de sensibilité de l'étape 1 de la procédure de calibration. La Section 4.4 présente la suite de la procédure de calibration avec la réduction d'intervalle et le résultat de la calibration (étapes 2 à 4).

4.3 Analyse de sensibilité des paramètres de sol et de végétation

L'approche séquentielle de l'AS présentée dans la Section 3.3 est appliquée sur le modèle de TTV pour l'année 2020. Cela représente $T = 8748$ instants de simulation qui correspondent aux heures de l'année pour un temps moyen de calcul de 32 secondes (Processeur : Intel Core i5-8365U CPU 1.6 GHz 1.9 GHz RAM 16.0 Go).

Étape 1 de l'AS séquentielle : définition des paramètres incertains

L'analyse de sensibilité séquentielle sera appliquée pour $k = 6$ paramètres incertains – θ_s , α , n , $CropH = h_c$, LAI et $RootD = L_r$ – définis par des distributions uniformes dans les intervalles donnés dans la Table 4.2.

Étape 2 de l'AS séquentielle : génération des échantillons

Suivant ces distributions, un échantillon de dimension $N \times k = 500 \times 6$ est généré avec la séquence de Sobol (technique d'échantillonnage QMC, voir Section B).

Étape 3 de l'AS séquentielle : calcul de la sortie

La matrice de sortie (teneur en eau simulée) de dimension $N \times T = 500 \times 8784$ est obtenue. Le temps de calcul correspondant est de 5h.

Étape 4 de l'AS séquentielle : calcul des indices de sensibilité

La matrice de sortie est décomposée sur une base de PCE selon (3.21) et les indices de sensibilité sont directement obtenus grâce à (3.22) et (3.23).

L'approche séquentielle de l'AS permet d'obtenir l'évolution des indices de sensibilité au cours du temps et donc de mettre en évidence l'évolution des influences. Les indices de sensibilité principaux S_i et totaux S_{T_i} sont représentés sur la Figure 4.4. Il convient de noter que les indices principaux et totaux ne sont pas égaux pour les paramètres α , n et LAI . Les indices d'ordre supérieur sont non nuls ce qui signifie qu'il y a une influence de l'interaction entre les paramètres sur la sortie du modèle. Les indices de sensibilité des interactions de ces trois paramètres (ordre 2 $S_{i,j}$) sont donc calculés avec (3.18) et représentés sur la Figure 4.5.

Les indices de sensibilité au cours du temps ont révélé trois paramètres influents : α le paramètre d'ajustement du potentiel de pression (en orange sur Fig. 4.4), n le paramètre lié à la porosité (en jaune sur Fig. 4.4) et LAI l'indice de surface foliaire, un paramètre de végétation (en vert sur Fig. 4.4). Pendant les périodes humides (janvier à mars c'est-à-dire $t = 0$ à 1800h et octobre à décembre c'est-à-dire $t = 6530$ à 8784h), α est responsable à 75.6 % des variations de θ ($S_\alpha = 0.756$), n explique 9.3 % des variations de θ ($S_n = 0.093$) et l'interaction entre α et n explique 9.8 % ($S_{\alpha,n} = 0.098$ Fig. 4.5). Pour la calibration du modèle, cela signifie que pendant ces périodes humides, la comparaison des évaluations du modèle et des données mesurées donneront des indications sur les valeurs des paramètres α et n . Lors des périodes sèches (en juin, juillet et août entre les événements pluvieux c'est-à-dire $t = 3560$ à 4045h, $t = 4235$ à 5290h et $t = 6000$ à 6470h),

4.3. Analyse de sensibilité des paramètres de sol et de végétation

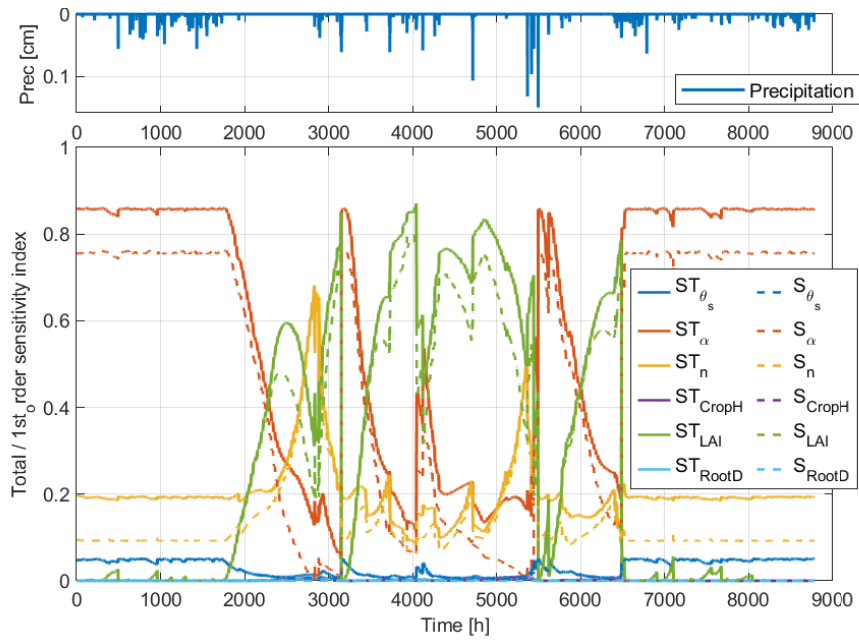


FIGURE 4.4 – Indices de sensibilité principaux et totaux (en bas) et pluviométrie (en haut)

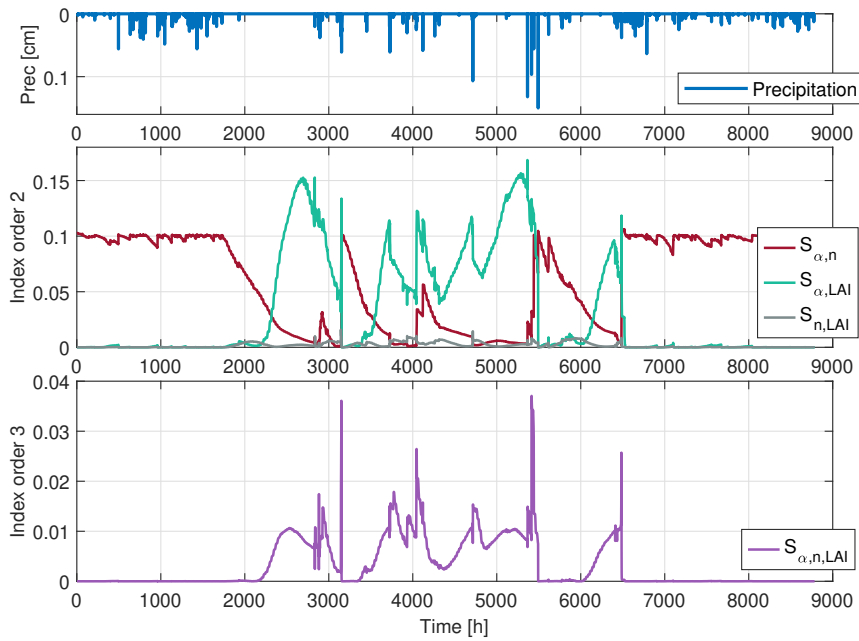


FIGURE 4.5 – Indices de sensibilité d'ordre 2 (au milieu), d'ordre 3 (en bas) et pluviométrie (en haut)

l'influence de ces paramètres diminue au profit du paramètre LAI , S_{LAI} atteint jusqu'à 0.81. Les interactions entre α et LAI sont également importantes durant ces périodes pouvant représenter jusqu'à 15 % des variations de θ ($S_{\alpha,LAI} = 0.15$ Fig. 4.5). Pour la calibration du modèle, les paramètres LAI et α doivent être étudiés. Le paramètre de la teneur en eau saturante θ_s a une influence quasi constante de 4.74 % ($S_{\theta_s} = 0.0474$) pendant les périodes humides et n'est pas influent pendant la période d'assèchement. Ce résultat est lié à l'intervalle d'incertitude exploré moins large que dans les études précédentes grâce à l'observation de la teneur en eau mesurée et aux résultats de l'AS du Chapitre 3. Sa valeur peut donc être fixée à $0.315 \text{ m}^3 \text{ m}^{-3}$. Les paramètres $CropH$ et $RootD$ ne sont pas influents, ils peuvent être fixés respectivement à 14 cm et 5 cm.

En résumé, d'après cette étude, parmi les six paramètres considérés, trois paramètres – α , n et LAI – sont considérés dans la suite pour la calibration, les autres paramètres – θ_s , $CropH$ et $RootD$ – étant fixés à une valeur nominale de leurs intervalles d'incertitude. De plus, cinq périodes d'intérêt majeurs ont été identifiées.

4.4 Résultats de la calibration

4.4.1 Optimisation de l'intervalle d'incertitude

Pendant la période humide de $t = 0$ à 1800h (janvier à mi-mars) et de $t = 6530$ à 8784h (octobre à décembre), α est le paramètre le plus influent ($S_\alpha = 0.75$, $S_n = 0.09$ et $S_{\alpha,n} = 0.09$). L'influence de α est également importante autour de $t = 3300$ h (événements pluvieux en mai) et $T = 5600$ h (événements pluvieux en août). Les évaluations du modèle qui minimisent l'erreur $nRMSD$ pendant ces périodes correspondent à des valeurs de α allant de 0.5 à 3.26 m^{-1} . L'intervalle $[0.5; 3.26]$ sera donc retenu dans la suite de la procédure de calibration pour α . Pendant la période sèche de $t = 3560$ à 4045h ou de $t = 4235$ à 5290h ou de $t = 6000$ à 6470h, LAI est le paramètre le plus influent avec des indices S_{LAI} variant entre 0.45 et 0.86. Les évaluations du modèle qui minimisent $nRMSD$ pendant ces périodes correspondent à des valeurs de LAI entre 2 et 2.79. L'intervalle $[2; 2.79]$ sera retenu pour le LAI dans la suite de la procédure de calibration. Vers $t = 2800$ h, le paramètre n devient influent ($S_n = 0.67$) et minimise $nRMSD$ avec une valeur autour de 2.354. Ce pic ne peut être pris en compte seul, son influence pendant les périodes humides ainsi que ses interactions avec α doivent être considérées. Les valeurs du paramètre n pour les simulations qui minimisent $nRMSD$ durant les périodes humides sont également prises en compte pour conclure que la valeur de n varie entre 1.14 et 2.59. L'intervalle $[1.14; 2.59]$ sera retenu pour le n .

4.4.2 Combinaison optimale pour les paramètres

Afin de trouver une combinaison optimale de paramètres dans l'intervalle réduit déterminé précédemment, la stratégie consiste à tester toutes les combinaisons possibles de trois valeurs clés dans ces intervalles réduits : les valeurs maximale, minimale et moyenne. Cela représente 3^3 combinaisons et correspond à 15 min de calcul. Il est à noter que l'étude a également été menée en divisant l'intervalle réduit en 10 valeurs. Les résultats obtenus

pour la combinaison optimale des paramètres sont similaires mais ont demandé un temps de calculs beaucoup plus conséquent. C'est pourquoi il a été décidé de diviser l'intervalle en trois valeurs. La combinaison de paramètres qui minimise le critère $nRMSD$ est sélectionnée. Cette stratégie de comparaison de 3^3 combinaisons est réitérée avec un intervalle autour de la combinaison sélectionnée précédemment jusqu'à ce qu'une convergence soit observée. Une convergence du $nRMSD$ est observée autour de $nRMSD = 0.1241$. La combinaison optimale des paramètres est donnée dans la Table 4.3 et présentée en rouge sur la Figure 4.6. L'erreur absolue (AE) entre la teneur en eau simulée et mesurée est tracée sur la Figure 4.6.

TABLE 4.3 – Intervalles réduits et valeurs nominales pour les paramètres de sol et de végétation

Paramètres incertains	Unité	Intervalles d'incertitude		Valeurs nominales
		Inférieur	Supérieur	
θ_s	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	-	-	0.315
α	m^{-1}	0.5	3.26	0.53
n	-	1.14	2.59	1.68
h_c	m	-	-	0.14
LAI	-	2	2.79	2.14
L_r	m	-	-	0.05

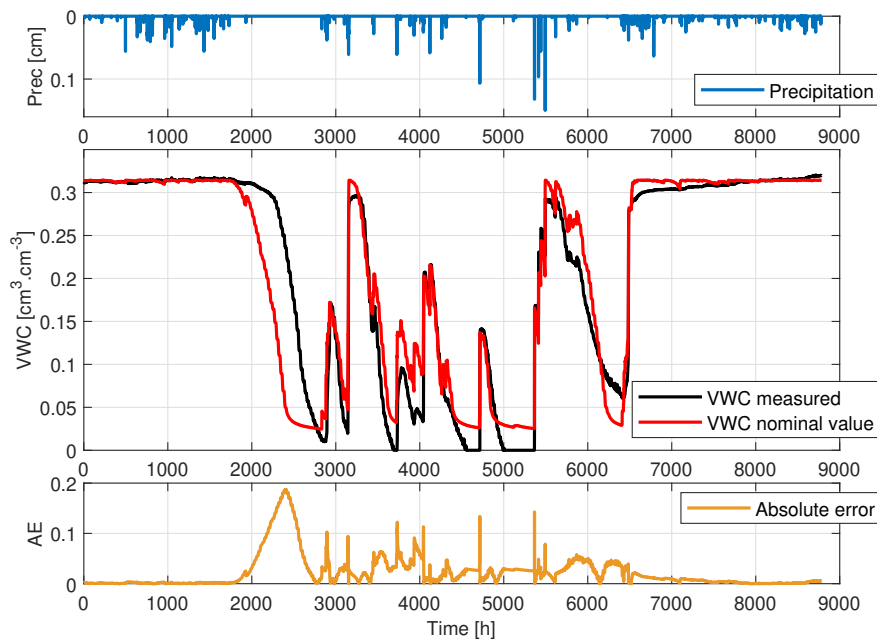


FIGURE 4.6 – Comparaison des teneurs en eau VWC simulée (en rouge) et mesurée (en noir), erreurs absolues entre simulée et mesurée (AE, en bas) et pluviométrie (en haut, en bleu)

Les données simulées sont proches des données mesurées, la calibration est satisfaisante. Le modèle complet ainsi calibré est donc capable de reproduire le comportement réel d'une TTV. On peut noter quelques décalages à t aux alentours de 2000h à 2800h ainsi que durant les périodes sèches. Ces différences peuvent avoir plusieurs sources.

Tout d'abord, l'hypothèse de paramètres de végétation qui ne varient pas dans le temps pourrait avoir un impact sur la simulation de l'assèchement du sol. Les variations temporelles des paramètres de végétation tels que le LAI peuvent être étudiées mais posent des difficultés pour la génération d'échantillons. Il est difficile de déterminer leur intervalle d'incertitude au cours du temps et de définir leur évolution sans compliquer le modèle de TTV qui est déjà complexe. Par exemple, il existe un modèle basé sur la température qui permet de définir le LAI au cours du temps indirectement [Zhou et al. (2018)].

Ensuite, une hypothèse sur la mesure du rayonnement net R_n a été faite durant la calibration. Cette hypothèse est une égalité entre le rayonnement global et le rayonnement net $R_g = R_n$. Cette égalité est erronée et l'impact du rayonnement semble être important durant la simulation de la teneur en eau. Ce constat est intéressant à étudier et permet de soulever des challenges méthodologiques en analyse de sensibilité qui feront l'objet de l'étude suivante réalisée dans le Chapitre 5.

Enfin, les différences entre les simulations et les données mesurées peuvent également mettre en évidence des problèmes de configuration ou des limites des modèles et du logiciel Hydrus-1D[®]. Les toitures végétalisées sont soumises à de nombreux phénomènes naturels du vivant qui sont impossibles à reproduire parfaitement par simulation. Par exemple, les propriétés hydrauliques $\theta(h)$ et $K(h)$ du sol peuvent être soumises à une variabilité spatiale et à une dépendance à la température. Dans notre étude, ces phénomènes n'ont pas été pris en compte.

4.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté une approche de calibration basée sur l'analyse de sensibilité globale. Cette approche a été appliquée sur le modèle complet de toiture végétalisée dans le but de reproduire la dynamique d'une toiture végétalisée réelle. L'analyse de sensibilité a mis en évidence l'influence des incertitudes des paramètres sur la sortie du modèle au cours du temps. En analysant l'évolution de ces influences, les intervalles d'incertitude des paramètres influents du modèle ont pu être réduits et des valeurs nominales ont pu être déterminées pour reproduire au mieux la dynamique de la toiture végétalisée. Les paramètres non influents peuvent être fixés à une valeur de l'intervalle exploré. La teneur en eau simulée à l'issue de la calibration du modèle a montré une bonne adéquation aux mesures réelles sur l'ensemble de l'année 2020. Les phénomènes d'assèchement du sol ont bien été reproduits, toutefois, on peut noter des décalages entre la simulation et la mesure de teneur en eau durant cette période. Différentes hypothèses concernant la variabilité au cours du temps des paramètres de végétation ou de météorologie peuvent être émises pour les expliquer. La variabilité des paramètres de végétation est difficile à prendre en compte. En revanche, il est possible de s'intéresser à celle du rayonnement. Ce paramètre

météorologique est incertain car il n'a pas été mesuré directement. De plus, l'influence de sa variabilité naturelle au cours du temps sur la teneur en eau peut être intéressante pour aider à la compréhension de la dynamique de la toiture. Cette étude fait l'objet du chapitre suivant. Les résultats de l'approche de calibration permettent de réduire le nombre de paramètres de végétation à analyser dans l'étude suivante (1 au lieu de 3 précédemment). Ils permettent également de focaliser la prochaine analyse de sensibilité sur les intervalles réduits des paramètres influents obtenus lors de la calibration.

Chapitre 5

Étude de l'influence des paramètres de sol, de végétation et de météorologie

Suite à l'ajout des conditions météorologiques et des paramètres de végétation ainsi qu'à la calibration présentée dans le Chapitre 4, une nouvelle problématique est apparue. Le modèle dépend du rayonnement net qui n'est pas mesuré directement. Il est obtenu par approximation, induisant des incertitudes qui pourraient être influentes sur la teneur en eau. De plus, l'influence de sa variabilité naturelle au cours du temps peut être intéressante à analyser pour mieux comprendre la dynamique de la teneur en eau. L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'influence des paramètres du sol, de la végétation ainsi que du rayonnement net. Le rayonnement net apparaît comme un paramètre incertain variant dans le temps. Une approche originale basée sur l'analyse statistique des données mesurées et sur la méthode de Iman et Conover est utilisée pour générer des échantillons aléatoires corrélés dans le temps pour le paramètre du rayonnement net [Hégo et al. (2022a)].

Sommaire

5.1	Contexte de l'étude	74
5.2	Génération des échantillons aléatoires pour le paramètre variant dans le temps	77
5.2.1	Caractéristiques statistiques du rayonnement	78
5.2.2	Génération des échantillons variant dans le temps	82
5.3	Analyse de sensibilité des paramètres statiques et dynamiques	87
5.3.1	Méthode d'analyse de sensibilité par permutation adaptée	87
5.3.2	Étude de l'influence des paramètres de sol, de végétation et de météorologie	89
5.4	Conclusion	93

5.1 Contexte de l'étude

Dans le Chapitre 4, une calibration du modèle complet de toiture végétalisée a été présentée. Le modèle complet utilisé permet de reproduire assez fidèlement les phénomènes hydrologiques et le comportement réel de la TTV.

La procédure de calibration basée sur l'analyse de sensibilité (AS) globale a permis de mettre en évidence l'influence des paramètres incertains sur des périodes spécifiques et différentes, ce qui a permis de déterminer des valeurs nominales pour ces paramètres.

L'étude réalisée dans le Chapitre 4 a aussi montré que l'hypothèse effectuée sur le rayonnement net pourrait expliquer les différences constatées entre les données mesurées et les données simulées en période d'assèchement. Le rayonnement net n'est pas mesuré directement mais est approximé, impliquant des incertitudes qui pourraient être influentes sur la teneur en eau. L'objectif de ce chapitre est de quantifier l'influence du paramètre rayonnement net ainsi que celle des paramètres du sol et de végétation sur la teneur en eau. Pour cette étude, la toiture étudiée est la même que celle présentée dans le Chapitre 4 (Tab. 5.1).

TABLE 5.1 – Configuration pour l'étude du Chapitre 5

Paramètres	Unité	Propriétés hydrauliques VGM		
		Substrat	Géotextile	Drainage
θ_r	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.0001	0.1	0.06
θ_s	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	incertain	0.6	0.3
α	m^{-1}	incertain	11.1	5
n	-	incertain	1.50	1.50
K_s	10^{-1} m s^{-1}	2.167	0.145	3.611
l	-	2.87	0.1	0.1
Végétation				
Hauteur des plantes	m	0.14		
Albedo	-	0.23		
LAI	-	incertain		
Profondeur des racines	m	0.05		
Autres				
Mesure de la vitesse du vent	m	10		
Mesure de température	m	2		

Problématique du rayonnement net R_n

L'étude de calibration présentée dans le Chapitre 4 a été réalisée avec une hypothèse sur le paramètre de météorologie, le rayonnement net. Les paramètres météorologiques du modèle sont utilisés dans l'équation de Penman-Monteith (2.9) qui permet d'estimer le taux d'évapotranspiration ET_p . Dans cette équation, le rayonnement considéré est le

rayonnement net R_n en $[\text{MJ m}^{-2} \text{ d}^{-1}]$. Cependant, les données mesurées sur le site de la toiture sont une mesure du rayonnement global R_g en $[\text{MJ m}^{-2} \text{ d}^{-1}]$.

Le rayonnement global R_g correspond à la somme des rayonnements solaires directs et diffus reçus par le sol. Le rayonnement net R_n est un bilan radiatif qui correspond à la différence entre les rayonnements reçus et les rayonnements émis et réfléchis par le sol.

Pour estimer le rayonnement net nécessaire pour l'équation de Penman-Monteith, il y a deux possibilités. La première consiste à utiliser une approximation de R_n disponible dans le logiciel [H1D](#) mais elle dépend de beaucoup de paramètres qu'il n'est pas possible d'obtenir dans notre cas. La deuxième possibilité consiste à déterminer la relation qui existe entre R_n et R_g comme dans [[Selirio et al. \(1970\)](#)], [[Alados et al. \(2003\)](#)] et [[Ogolo et al. \(2009\)](#)]. Cette deuxième possibilité est retenue pour l'étude. Grâce à des données mesurées sur le site de la TTV au Cerema en 2017 et 2018, représentées sur la Figure 5.1, une relation linéaire peut être établie entre R_n et R_g :

$$R_n = 0.539R_g - 2.16 \quad (5.1)$$

avec un coefficient de détermination R^2 de 0.71.

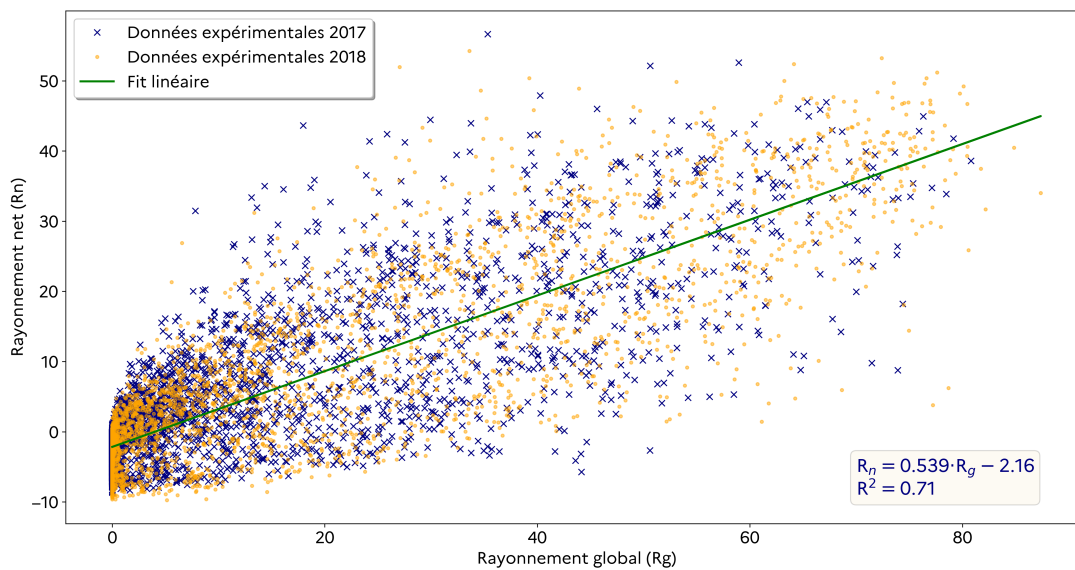


FIGURE 5.1 – Relation linéaire entre le rayonnement net R_n et le rayonnement global R_g pour des données de 2017 et 2018

L'approximation (5.1) est utilisée dans la suite, même si près de 30 % des données du rayonnement net ne sont pas représentées. Les erreurs de modélisation et les incertitudes qui sont générées sur ce paramètre avec l'approximation seront étudiées dans ce chapitre. De plus, lors de l'ajout des données météorologiques dans le modèle et lors de la calibration, l'impact du rayonnement sur la capacité à simuler l'assèchement du sol est

apparu comme jouant un rôle non négligeable. En effet, la Figure 5.2 met en évidence la différence entre des simulations à configuration identique mais avec des hypothèses différentes sur le rayonnement ($R_n = f(R_g)$ correspond à (5.1)).

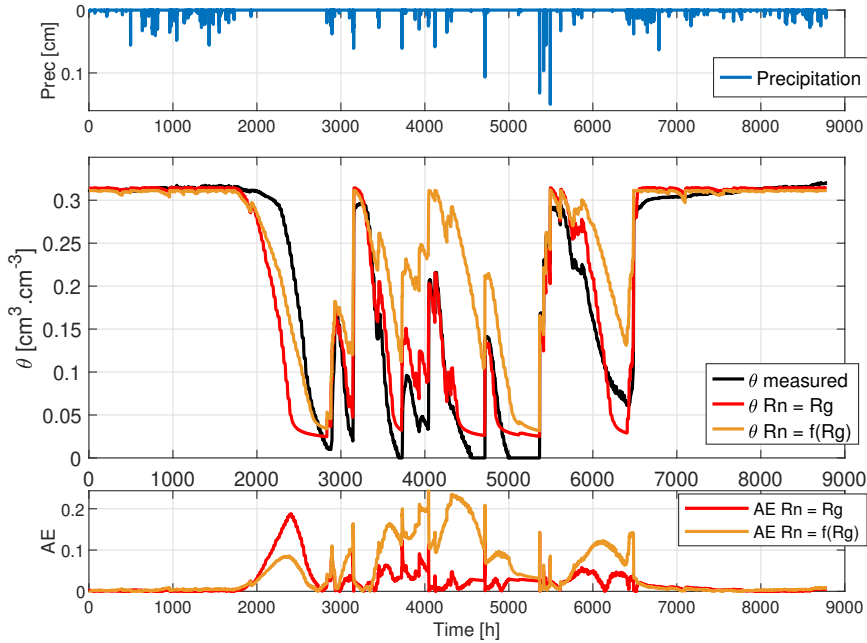


FIGURE 5.2 – Comparaison des simulations de la teneur en eau pour $R_n = R_g$ (en rouge), pour $R_n = f(R_g)$ (en orange) et des données mesurées en 2020 (en noir)

Deux sources d'incertitudes interviennent pour le rayonnement dans l'étude. D'une part, on considère l'incertitude "de mesure" sur R_n comme constante au cours du temps, c'est-à-dire que la distribution du paramètre incertain est la même à chaque instant. D'autre part, on considère l'incertitude induite par la nature du phénomène météorologique que l'on nomme "variabilité naturelle". Dans ce cas, la distribution est différente à chaque instant. L'idée de l'étude est de prendre en compte l'incertitude liée à la variabilité naturelle du rayonnement net au cours du temps. Dans ce cas, la source d'incertitude "de mesure" est implicitement prise en compte et l'étude a plus d'intérêt pour comprendre le comportement de la TTV.

Dans ce chapitre, l'étude porte sur l'analyse de sensibilité du modèle en prenant en compte les paramètres incertains liés au sol, ceux liés à la végétation ainsi que le paramètre variant dans le temps du rayonnement. La problématique réside donc dans la génération des échantillons aléatoires cohérents du rayonnement, selon une distribution donnée à chaque instant et selon une matrice de corrélation souhaitée entre deux instants. Cette problématique est mise en évidence en orange sur le schéma de procédure d'AS de la Figure 5.3.

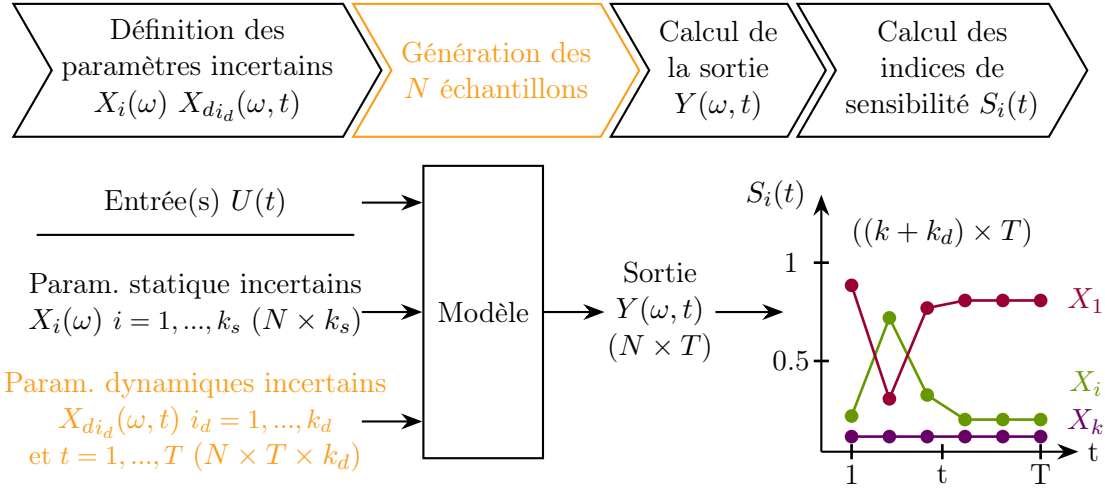


FIGURE 5.3 – Procédure de l'analyse de sensibilité sur des paramètres statiques et dynamique pour une sortie dynamique

Les termes "variations cohérentes" et "variabilité naturelle" sont utilisés ici pour indiquer qu'il est nécessaire de reproduire des phénomènes de variation probable pour le paramètre de rayonnement.

5.2 Génération des échantillons aléatoires pour le paramètre variant dans le temps

Pour déterminer l'influence de l'incertitude d'un paramètre variant dans le temps, l'étape la plus complexe est la génération des échantillons de celui-ci. En effet, il est nécessaire de générer des échantillons aléatoires suivant une distribution désirée et qui sont corrélés entre eux au cours du temps selon une matrice de corrélation donnée.

Le rayonnement net est un paramètre incertain variant dans le temps. Il sera noté $X_d(\omega, t)$, dans la suite et est décrit par un processus aléatoire :

$$X_d(\omega, t) = \bar{X}(t) + \varepsilon(\omega, t) \quad (5.2)$$

où ω représente l'aléa, $\bar{X}(t)$ est la moyenne stochastique à chaque instant de X_d (dim. $1 \times T$) et $\varepsilon(\omega, t)$ correspond à une variable stochastique (dim. $N \times T$) définie par une fonction de covariance $C(t, t')$ (dim. $T \times T$) et une fonction de répartition F_t .

La fonction de covariance $C(t, t')$ porte l'information de la corrélation dans le temps. L'objectif est de définir le lien entre les instants. Par exemple, le rayonnement à 8h est fortement corrélé avec celui à 9h et est moins corrélé avec celui à 12h. Les valeurs de ces corrélations correspondent aux composantes des lignes de la matrice $\varepsilon(\omega, t)$ (Fig. 5.4).

La fonction de répartition F_t correspond à la distribution des données à chaque instant. Elle porte l'information de l'aléa ω . ω_t désigne l'aléa spécifique à l'instant t défini par F_t . Les valeurs de l'aléa correspondent aux composantes des colonnes de la matrice $\varepsilon(\omega, t)$ (Fig. 5.4).

$$\varepsilon(\omega, t) = \begin{pmatrix} \boxed{\varepsilon_1(1)} & \cdots & \boxed{\varepsilon_1(t)} & \cdots & \boxed{\varepsilon_1(T)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n(1) & \cdots & \varepsilon_n(t) & \cdots & \varepsilon_n(T) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_N(1) & \cdots & \varepsilon_N(t) & \cdots & \varepsilon_N(T) \end{pmatrix} \begin{matrix} C(t, t') \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\omega_1 \qquad \qquad \omega_t \qquad \qquad \omega_T$

FIGURE 5.4 – Matrice $\varepsilon(\omega, t)$ comportant les corrélations temporelles $C(t, t')$ sur les lignes et l'aléa ω sur les colonnes

Ces informations statistiques sont à déterminer pour définir le processus aléatoire qui va décrire le paramètre incertain variant dans le temps. La détermination de ces informations statistiques est décrite dans la section suivante.

5.2.1 Caractéristiques statistiques du rayonnement

La fonction de corrélation temporelle $C(t, t')$ et la distribution empirique F_t pour une variable météorologique peuvent être obtenues grâce à :

- des modèles existants ;
- une extraction sur des données mesurées.

Dans cette étude, la deuxième approche est utilisée. La contrainte est qu'il faut une quantité de données suffisantes pour obtenir $C(t, t')$ et F_t représentatives des variations à reproduire.

Dans [Goffart (2013)] et [Goffart et al. (2017)], une technique est proposée pour extraire des informations consistantes d'un jeu de données contenant peu de valeurs. Le principe est de sélectionner un mois stationnaire pour lequel les journées peuvent être considérées identiques et peuvent donc être concaténées les unes aux autres. Considérons un jeu de données disponible pour un mois stationnaire de taille $An \times T_{mois}$ avec An le nombre d'années de mesures et T_{mois} le nombre de mesures pour le mois ($T_{mois} =$ nombre de jours x 24h pour une mesure horaire). La concaténation de chaque journée permet d'obtenir un jeu de données de taille $N_{obs} \times T_{jour}$ avec $N_{obs} = (An \times \text{nombre de jours})$ et $T_{jour} = 24h$ pour apprendre les variations horaires. Ce nouveau jeu de données permettra d'obtenir des informations pour générer une journée typique du mois stationnaire sélectionné.

Remarque : La mesure est considérée horaire d'où la valeur 24 dans les expressions précédentes mais il est possible de considérer un autre pas de mesure. Dans la procédure suivante, cette dimension sera notée T .

La procédure suivante d'extraction des informations statistiques pourra donc être appliquée :

- (0) Données observées X_{obs} (dim. $N_{obs} \times T$);
- (1) Calcul de la moyenne stochastique de X_{obs} à chaque instant $\bar{X}(t)$ (dim. $1 \times T$);
- (2) Extraction des variations horaires $\varepsilon_{obs}(\omega, t) = X_{obs} - \bar{X}(t)$ (dim. $N_{obs} \times T$);
- (3) Détermination de la fonction de répartition empirique F_t des variations à l'instant t avec $t = 1, \dots, T$ à partir de $\varepsilon_{obs}(\omega, t)$;
- (4) Détermination des corrélations temporelles $C(t, t')$ à partir de $\varepsilon_{obs}(\omega, t)$ (dim. $T \times T$).

La procédure d'extraction des informations statistiques est résumée sur la Figure 5.5.

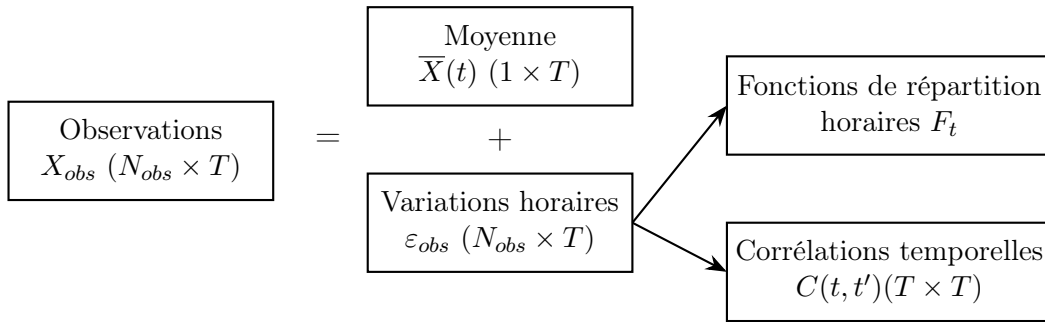


FIGURE 5.5 – Procédure d'extraction des informations statistiques

Cette procédure est appliquée sur le rayonnement net, comme expliqué dans la suite.

Sélection de la période à étudier pour le rayonnement

L'objectif final de l'étude est d'étudier l'influence des paramètres de sol, de végétation et du rayonnement sur la teneur en eau sur une période d'un an. Pour cela, les données disponibles correspondent aux données horaires de rayonnement global R_g mesurées sur la TTV entre 2013 et 2021. Les données de rayonnement global R_g sont utilisées pour obtenir le rayonnement net R_n selon (5.1), présentée dans la Section 5.1. Les données de rayonnement net estimées sont présentées sur la Figure 5.6. Ces données observées sont donc de dimension $An \times T_{an} = 9 \times 8760$ (24h x 365 jours par an). Les 29 février des années bissextiles ont été enlevés des données afin d'avoir le même nombre de jours chaque année.

Pour extraire les informations statistiques nécessaires pour générer des R_n pour une année entière, il serait possible d'utiliser directement les 9 années de données, cependant la question de la qualité de ces informations se poserait. Un élargissement de la quantité de données avec des bases de données disponibles (via Météo France) serait nécessaire, cependant au vu des changements climatiques auxquels sont soumis la région Grand-Est, cette solution ne semble pas cohérente.

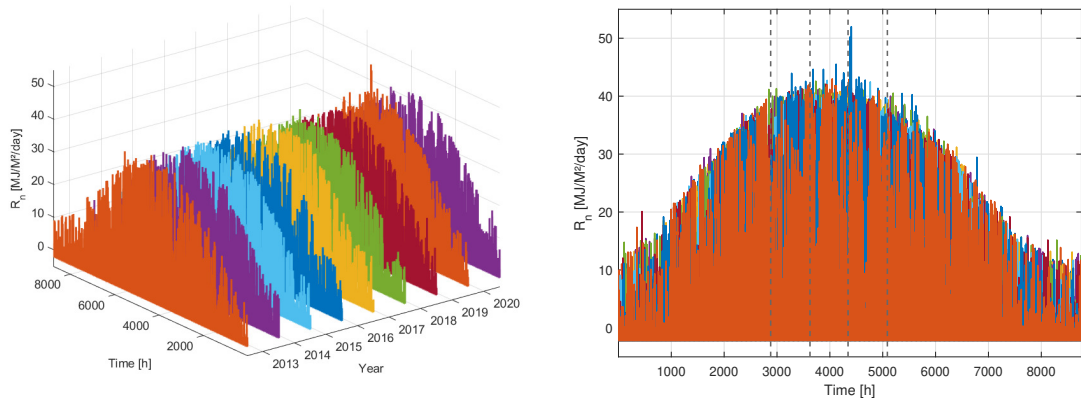


FIGURE 5.6 – Rayonnement net R_n estimé, représenté pour les années de 2013 à 2021

Le choix qui a été fait dans ces travaux est de débiter l'étude en utilisant la technique de concaténation proposée dans [Goffart (2013)] et [Goffart et al. (2017)] présentée précédemment. L'objectif est d'augmenter le nombre d'observations en concaténant les données journalières d'un mois stationnaire, ce qui réduit la période analysée mais permettra d'extraire des informations statistiques de qualité. La condition de stationnarité est nécessaire, il faut que chaque journée de la période sélectionnée puisse être considérée comme "identique" pour pouvoir ensuite générer des "journées typiques" à partir des informations extraites. Dans un premier temps, le mois de juin, mois du solstice d'été, sera sélectionné car il est stationnaire pour le rayonnement. Les conditions de sélection pour le rayonnement sont le nombre d'heures diurnes des journées et le maximum de rayonnement. De plus, le mois de juin présente quelques phénomènes d'assèchement et d'humidification de la TTV. La période hivernale (décembre - janvier) est aussi stationnaire mais dans cette période, la TTV est constamment à saturation. Pour cette raison, la période hivernale n'est pas intéressante pour l'étude et n'est pas retenue ici. La période considérée est du 1^{er} juin au 30 juin, ce qui correspond aux heures $t = 3624\text{h}$ jusqu'à $t = 4344\text{h}$. Cette période est représentée entre $t = 1\text{h}$ et $t = 720\text{h}$ sur la Figure 5.7.

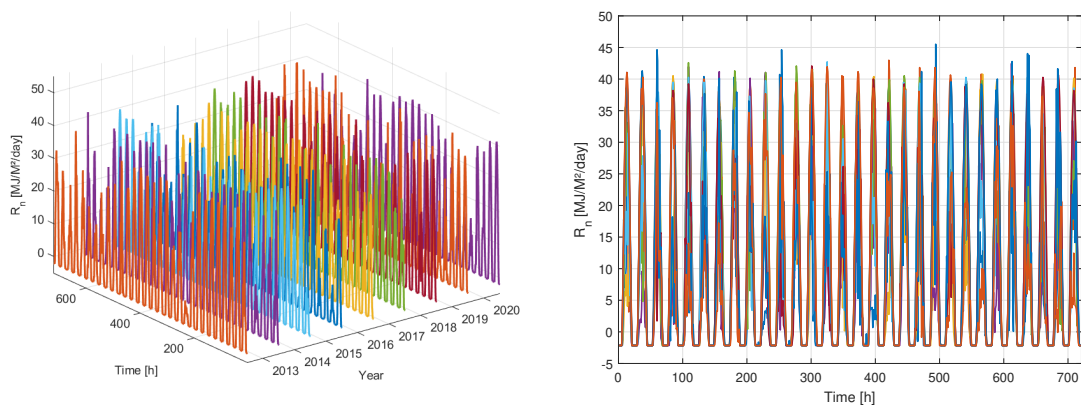


FIGURE 5.7 – Rayonnement net R_n estimé, représenté pour la période du 1^{er} au 30 juin des années de 2013 à 2021

Extraction des informations statistiques du rayonnement

Une fois la période stationnaire sélectionnée, les données sont concaténées pour obtenir une matrice de taille $N_{obs} \times T_{jour} = 270 \times 24$. Puis, la procédure décrite dans la Section 5.2.1 est appliquée. Il est important de noter que dans le cas du rayonnement, les heures diurnes (de 5h à 20h soit 15h de jour) sont les seules prises en compte. Pendant la nuit, les valeurs ne varient pas, il n'y a donc pas de variations à apprendre. Les différentes étapes de l'extraction des informations statistiques sont présentées sur la Figure 5.8. L'étape (0) correspond à toutes les données diurnes disponibles à partir desquelles il est possible de calculer la moyenne stochastique $\bar{X}(t)$ de l'étape (1) et les résidus ou variations horaires de l'étape (2). Les variations horaires portent les informations essentielles pour la génération de l'échantillon corrélé dans le temps. Les fonctions de répartition empiriques F_t , pour chaque instant t , sont tracées pour l'étape (3) (ECDF *Empirical Cumulative Distribution Function*). Le lien entre les instants est défini par les corrélations de Spearman. La matrice supérieure de corrélation de Spearman est représentée sur la Figure 5.8 pour l'étape (4). Chaque courbe de l'étape (4) représente la corrélation entre l'instant t et les instants suivants $t + 1$, $t + 2$, etc. Le rayonnement sera plus fortement corrélé entre les instants t et $t + 1$ et moins corrélé entre les instants t et $t + 15$. Par conséquent, les courbes de corrélation sont décroissantes.

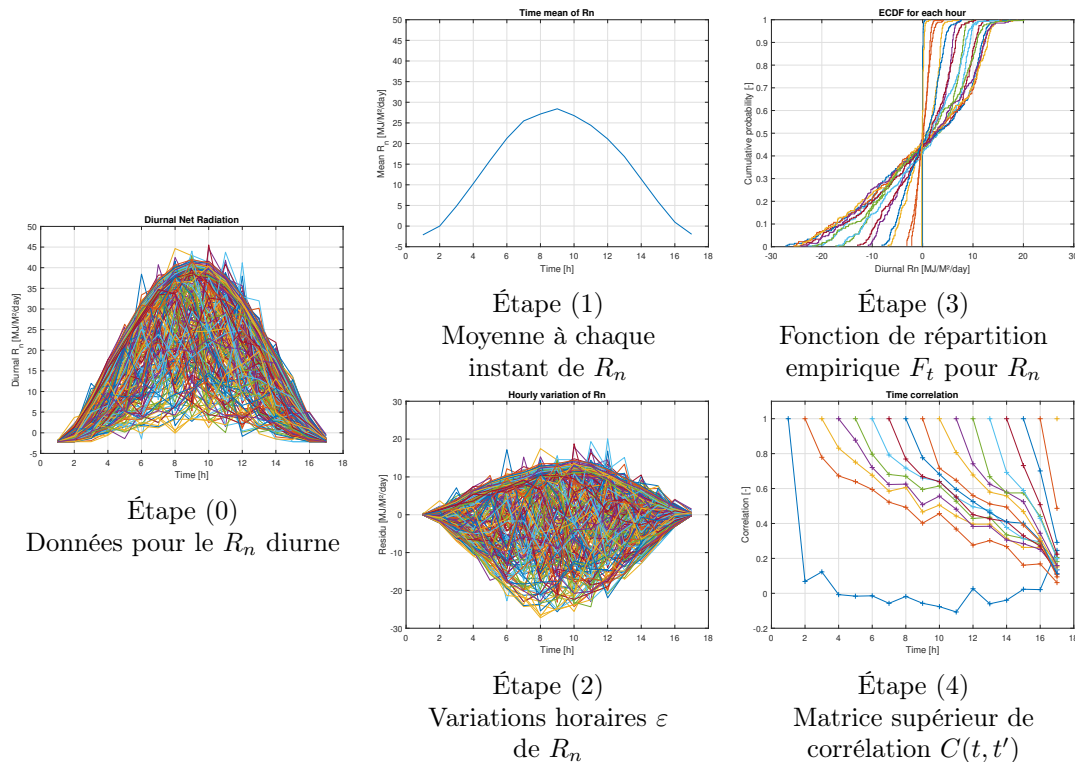


FIGURE 5.8 – Procédure d'extraction des informations statistiques de $R_n(t)$

Une fois que la matrice de corrélations souhaitée $C(t, t')$ et que la fonction de répartition à chaque instant F_t sont déterminées, il convient de générer les échantillons aléatoires selon ces fonctions de répartition et selon la matrice de corrélations désirée. Pour cela, la procédure de Iman et Conover est utilisée, comme présentée dans la section suivante.

5.2.2 Génération des échantillons variant dans le temps

La génération des échantillons aléatoires corrélés dans le temps est réalisée avec la méthode de Iman et Conover (IC) [Iman and Conover (1982)]. Le principe de cette méthode est de générer des échantillons aléatoires indépendants et de les réarranger par le rang pour y introduire les corrélations de rang désirées. Cette méthode est décrite comme indépendante de la distribution des échantillons et utilisable quelle que soit la technique d'échantillonnage employée.

La méthode de IC est basée sur la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation :

$$C = PP' \quad (5.3)$$

où P est la matrice triangulaire inférieure de la décomposition (dim. $T \times T$) et P' sa transposée. Cette décomposition est possible pour une matrice C symétrique et définie positive.

La matrice C correspond à la matrice de corrélations désirée et P porte l'information des corrélations à transmettre. La matrice P correspond à une matrice de transformation qui est utilisée pour modifier le rang de la matrice des échantillons indépendants.

La procédure de IC, résumée dans [Goffart (2013)] et [Pereira and Broed (2006)], est expliquée ci-dessous pour la génération d'échantillons aléatoires corrélés dans le temps :

- 1) Génération d'un échantillon aléatoirement indépendant X_{ind} (dim. $N \times T$) qui suit à chaque instant la distribution F_t obtenue d'après l'extraction des informations statistiques des données (Section 5.2.1) ;
- 2) Détermination de la matrice de rang de $X_{ind} : R$ (dim. $N \times T$) ;
- 3) Détermination d'une matrice de scores A (dim. $N \times T$) en appliquant la fonction de van der Waerden (5.4) sur la matrice de rang R ;

La matrice de score A est définie par :

$$a_{n,t} = \phi^{-1}(r_{n,t}/(N + 1)) \quad (5.4)$$

avec ϕ^{-1} la fonction inverse de la loi normale centrée réduite, N la taille de l'échantillon et $r_{n,t}$ les valeurs de rang R avec $n = 1, \dots, N$ et $t = 1, \dots, T$. Elle contient donc des données distribuées selon une loi normale qui ont le même rang que la matrice X_{ind} . Il existe différentes fonctions de scores qui peuvent être utilisées mais van der Waerden est recommandée dans [Iman and Conover (1982)].

- 4) Détermination de la matrice de corrélation de rang de $A : U$ (dim. $T \times T$) ;
 Il existe de faibles corrélations de rang, dites "fausses corrélations", dans les échantillons indépendants qui seront éliminées dans la suite.
 Les corrélations de rang correspondent au coefficient de corrélations de Spearman (5.5).

$$\rho_{rg_X, rg_Y} = \frac{Cov(rg_X, rg_Y)}{\sigma_{rg_X} \sigma_{rg_Y}} \quad (5.5)$$

où rg_X et rg_Y sont respectivement les rangs des matrices X et Y et σ leurs écarts-types. Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson (5.6) peut également être utilisé car souvent il est proche de celui de Spearman.

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (5.6)$$

où $Cov(X, Y)$ est la covariance entre les variables X et Y et σ leurs écarts-types respectifs.

- 5) Détermination de la matrice Q (dim. $T \times T$) issue la décomposition de Cholesky de $U : U = QQ'$;
 La matrice inverse de Q permettra d'éliminer les "fausses corrélations" de la génération des échantillons.
- 6) Définition de la matrice de corrélation désirée C (dim. $T \times T$) obtenue d'après l'extraction des informations statistiques des données (Section 5.2.1) ;
- 7) Détermination de la matrice P (dim. $T \times T$) issue de la décomposition de Cholesky de $C : C = PP'$;
 La matrice P contient les informations de corrélation désirée à transmettre.
- 8) Détermination de la matrice de transformation $\mathcal{T} = PQ^{-1}$ (dim. $T \times T$) et application de la transformation sur la matrice de scores $A : A^* = A\mathcal{T}'$ (dim. $N \times T$) ;
 La matrice de transformation \mathcal{T} permet de transmettre les informations de corrélations temporelles de P tout en supprimant les "fausses corrélations" de la génération avec la matrice Q^{-1} . La matrice A^* doit avoir une matrice de corrélation identique à celle désirée C .
- 9) Détermination de la matrice de rang de $A^* : R^*$ (dim. $N \times T$) ;
- 10) Réarrangement des valeurs des colonnes de X_{ind} en suivant le rang $R^* : \varepsilon = X_{ind}(R^*)$ (dim. $N \times T$).
 Chaque colonne de X_{ind} doit être ordonnée en suivant les colonnes de R^* .

La procédure de IC est résumée sur la Figure 5.9. Elle est appliquée pour générer des échantillons aléatoires corrélés dans le temps pour le rayonnement net R_n et les résultats sont présentés dans la section suivante.

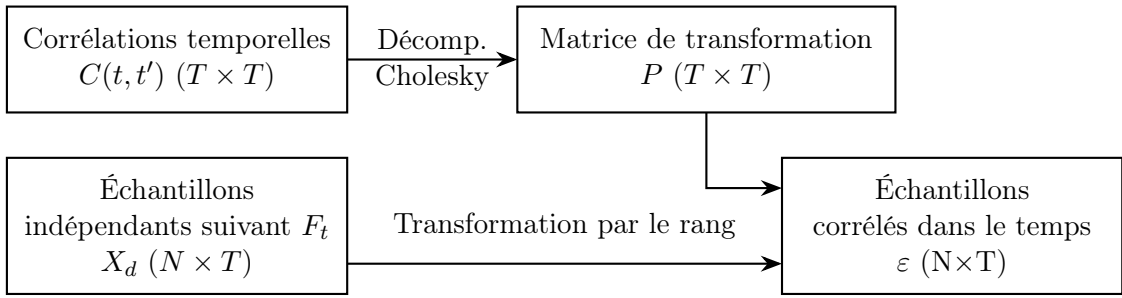


FIGURE 5.9 – Procédure résumée de Iman et Conover

Génération des échantillons du rayonnement

Une fois que les informations statistiques pour une journée typique de juin sont extraites des données disponibles, il est possible d'appliquer la procédure de IC présentée précédemment. L'objectif est de générer le rayonnement net pour 30 journées de 24h avec une cohérence dans le temps et dans les variations stochastiques.

Pour une journée, il faut utiliser la procédure avec T correspondant au nombre d'heures diurnes (ici $T = T_{diurne} = 17h$). Pour chaque heure, la fonction de répartition F_t correspondante doit être utilisée pour générer les échantillons. Ces lois empiriques peuvent être approximées par des lois de distributions usuelles telles que les lois uniformes ou normales. Dans notre cas, les lois uniformes entre le minimum et le maximum seront utilisées. La matrice de corrélation désirée C correspond à la matrice de Spearman de taille $T \times T = T_{diurne} \times T_{diurne} = 17 \times 17$ obtenue à l'étape (4) de l'extraction des informations. Cette matrice doit être définie positive pour la décomposition de Cholesky. L'étape 10) de la procédure de IC permet d'obtenir la variable stochastique $\varepsilon(\omega, t)$ du processus aléatoire (5.2). La moyenne temporelle $\bar{X}(t)$ est ajoutée à $\varepsilon(\omega, t)$ et les heures nocturnes sans variations sont ajoutées pour obtenir une matrice de taille $N \times T_{jour} = N \times 24$ (N correspondant à la taille de l'échantillon nécessaire).

Le processus est répété 30 fois pour constituer le mois de juin, l'échantillon corrélé dans le temps aura une taille de $N \times T = N \times 720$ (30 x 24 h). La Figure 5.10 représente le rayonnement net de juin 2020 (en noir) et quelques résultats obtenus pour la génération de 30 jours de juin. Ces échantillons semblent cohérents par rapport aux données mesurées (en haut).

Validation des résultats

Pour vérifier la cohérence des échantillons de rayonnement générés, il est nécessaire de comparer le maximum, le minimum et la variance générés pour chaque heure avec l'ensemble des 9 années de données utilisées, ce qui est présenté sur la Figure 5.11. Il est également important de vérifier la cohérence temporelle des échantillons, la matrice de corrélation temporelle extraite pour une journée typique et celle calculée sur les données générées sont comparées sur la Figure 5.12.

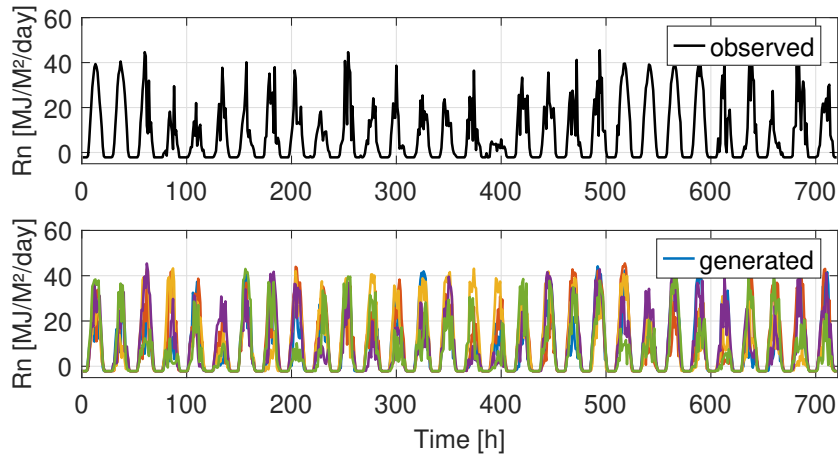


FIGURE 5.10 – Rayonnement net R_n observé pour juin 2020 (en noir en haut) et quelques exemples d'échantillons de R_n générés (en bas)

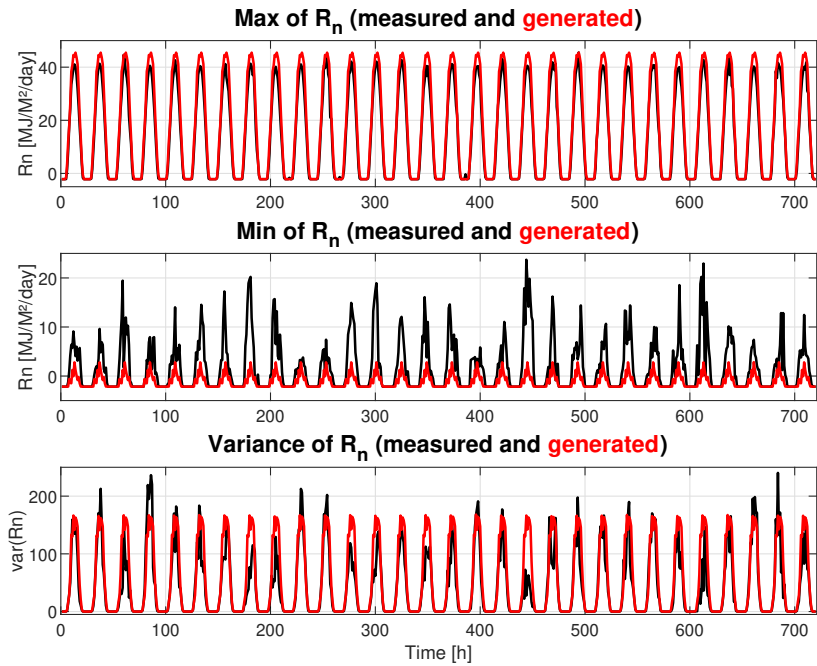


FIGURE 5.11 – Comparaison du maximum, minimum et variance de R_n généré (en rouge) et des 9 années de données observées (en noir)

Sur la Figure 5.11, on peut noter que les valeurs des minima et des maxima et des variances sont périodiquement proche de 0 qui correspondent aux heures nocturnes. Pour les heures diurnes, on peut remarquer que les maxima des échantillons générés coïncident avec ceux des données mesurées (en haut de Fig. 5.11) mais cela est moins vrai pour les minima (au milieu de Fig. 5.11). Cela s'explique par le fait que, dans notre cas, les lois de distribution F_t utilisées sont des lois uniformes entre le minimum et le maximum extraits

des données observées. Ce choix explique les différences notables entre les minima comparés. Dans ce cas, les maxima des échantillons générés correspondent au maximum des maxima des données mesurées. Comme il existe peu de variations des valeurs maximales pendant les heures diurnes, les maxima des échantillons générés correspondent bien à ceux des données mesurées. En revanche, il existe plus de variations des minima des données mesurées, d'où les écarts observés. Cela pourrait être amélioré en utilisant des lois normales tronquées. Par ailleurs, les variances des échantillons générés coïncident avec celles des données mesurées (en bas de Fig. 5.11).

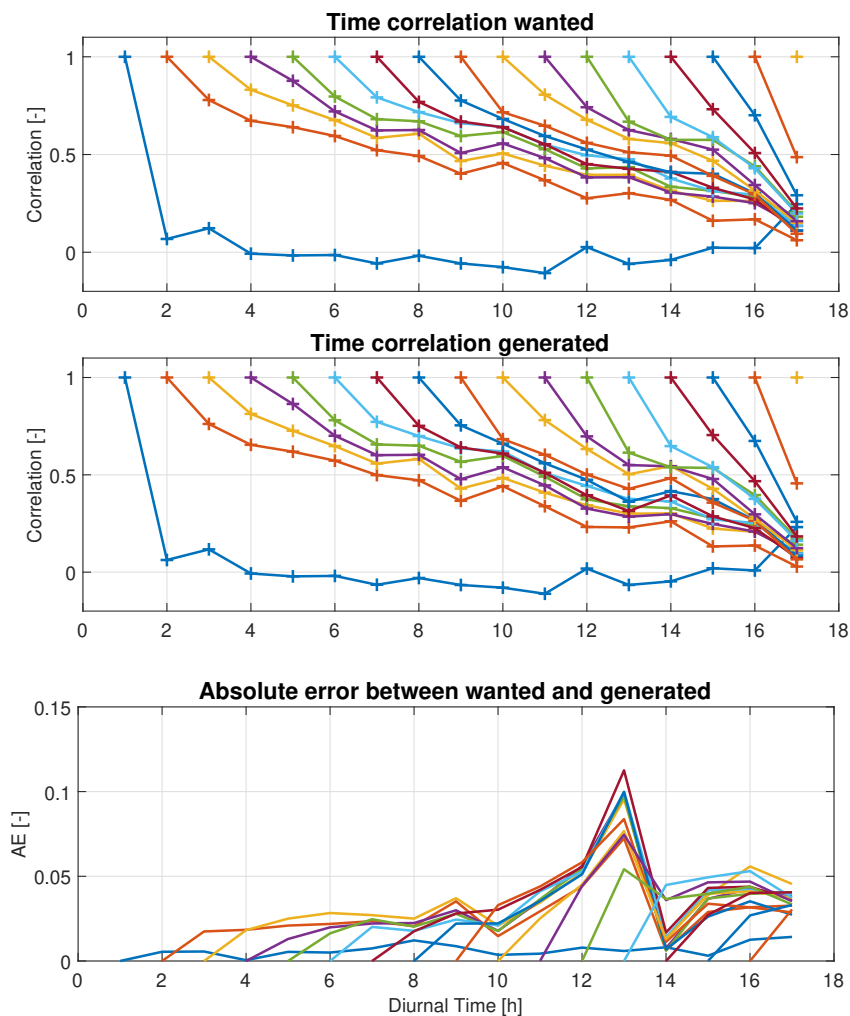


FIGURE 5.12 – Comparaison des corrélations temporelles désirées (en haut), obtenues (au milieu) et erreurs absolues (AE, en bas)

La Figure 5.12 représente les valeurs de corrélations temporelles extraites des données mesurées (en haut), celles extraites des échantillons générés (au milieu) et les erreurs absolues entre les corrélations mesurées et générées (en bas). Il apparaît que les échantillons

générés suivent bien les corrélations temporelles souhaitées. Par conséquent, les échantillons générés semblent cohérents. Ils pourront être utilisés dans la suite pour analyser l'incertitude du rayonnement sur la teneur en eau. L'analyse de sensibilité est présentée dans la section suivante.

5.3 Analyse de sensibilité des paramètres statiques et dynamiques

5.3.1 Méthode d'analyse de sensibilité par permutation adaptée

Dans cette étude, les indices de sensibilité sont estimés grâce à une technique de permutation des échantillons [Mara and Joseph (2008)], [Anstett-Collin et al. (2015)]. Cette méthode est une extension de la méthode Sobol-MC introduite dans le Chapitre 3 et dans l'Annexe B. Elle sera détaillée dans cette section.

La procédure pour la méthode d'AS basée sur la permutation est la suivante :

1. Détermination des paramètres incertains et leur distribution par les experts du domaine ;
2. Génération d'un N -échantillon avec le plan d'échantillonnage LHS pour chacun des k paramètres statiques et k_d paramètres dynamiques, respectivement $X^{(1)}$ de dim. $N \times k$ et $X_d^{(1)}(t)$ de dim. $N \times T \times k_d$.

Dans le cas d'étude de ce chapitre, un seul paramètre dynamique est considéré, le rayonnement net. Par conséquent, $k_d = 1$.

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_{1,1}^{(1)} & \dots & X_{1,k}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N,1}^{(1)} & \dots & X_{N,k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad X_d^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} X_{d1}^{(1)}(1) & \dots & X_{d1}^{(1)}(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{dN}^{(1)}(1) & \dots & X_{dN}^{(1)}(T) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

où $X_{n,i}^{(1)}$ correspond à la n -ième valeur du paramètre statique X_i pris dans l'échantillon (1) ($n = 1, \dots, N$ et $i = 1, \dots, k$). $X_{dn}^{(1)}(t)$ correspond à la n -ième valeur du paramètre dynamique X_d pris dans l'échantillon (1) à l'instant t ($t = 1, \dots, T$) obtenu avec la procédure de Iman et Conover (Section 5.2.2).

3. Permutation aléatoire des valeurs de l'échantillon (1) pour créer l'échantillon (2) $X^{(2)}$ et $X_d^{(2)}(t)$ de même dimension que précédemment

$$X^{(2)} = RP_s \left(X^{(1)} \right) \quad X_d^{(2)} = RP_d \left(X_d^{(1)}(t) \right) \quad (5.8)$$

RP_s est une $N \times k_s$ matrice qui contient les permutations aléatoires de lignes pour chacun des paramètres statiques et RP_d est une $N \times 1$ matrice qui contient les permutations aléatoires de lignes du paramètre dynamique.

Pour garder une cohérence dans les comparaisons qui suivent, les lignes entières de la matrice $X_d^{(1)}(t)$ sont permutées.

4. Génération de la sortie $Y^{(1)}(t)$ (dim. $N \times T$) en simulant le modèle avec les échantillons $X^{(1)}$ et $X_d^{(1)}(t)$

$$\begin{aligned} Y^{(1)}(t) &= \mathcal{G}\left(X_1^{(1)}, \dots, X_i^{(1)}, \dots, X_k^{(1)}, X_d^{(1)}(t)\right) \\ &= \begin{pmatrix} Y_1^{(1)}(1) & \dots & Y_1^{(1)}(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_N^{(1)}(1) & \dots & Y_N^{(1)}(T) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

5. Génération de la sortie $Y^{(2)}(t)$ (dim. $N \times T$) en simulant le modèle avec les échantillons $X^{(2)}$ et $X_d^{(2)}(t)$

$$\begin{aligned} Y^{(2)}(t) &= \mathcal{G}\left(X_1^{(2)}, \dots, X_i^{(2)}, \dots, X_k^{(2)}, X_d^{(2)}(t)\right) \\ &= \begin{pmatrix} Y_1^{(2)}(1) & \dots & Y_1^{(2)}(T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_N^{(2)}(1) & \dots & Y_N^{(2)}(T) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

6. Estimation des indices de sensibilité principaux $S_i(t)$ des paramètres statiques avec :

$$S_{perm_i}(t) = \frac{Cov(Y^{(1)}(t), Y^{(2)}(t)|X_i)}{\sqrt{Var(Y^{(1)}(t))Var(Y^{(2)}(t))}} \quad (5.11)$$

et des paramètres dynamiques avec :

$$S_{perm_d}(t) = \frac{Cov(Y^{(1)}(t), Y^{(2)}(t)|X_d(t))}{\sqrt{Var(Y^{(1)}(t))Var(Y^{(2)}(t))}} \quad (5.12)$$

La sortie conditionnelle $Y^{(2)}(t)|X_i$ correspond à la sortie pour laquelle le paramètre X_i ne varie pas et les autres paramètres varient.

$$Y^{(2)}(t)|X_i = \mathcal{G}\left(X_1^{(2)}, \dots, X_{i-1}^{(2)}, \mathbf{X}_i^{(1)}, X_{i+1}^{(2)}, \dots, X_k^{(2)}, X_d^{(2)}(t)\right) \quad (5.13)$$

Pour obtenir cette sortie conditionnelle (5.13), les permutations effectuées pour passer des échantillons (1) à (2) sont inversées uniquement pour le paramètre X_i . Pour cela, les lignes de la matrice de la sortie $Y^{(2)}(t)$ sont permutées pour correspondre à l'ordre des lignes de $X_i^{(1)}$ grâce à la colonne RP_{si} correspondante.

De la même manière, la sortie conditionnelle $Y^{(2)}(t)|X_d(t)$ correspond à la sortie pour laquelle le paramètre $X_d(t)$ ne varie pas et les autres paramètres varient.

$$Y^{(2)}(t)|X_d(t) = \mathcal{G}\left(X_1^{(2)}, \dots, X_{i-1}^{(2)}, X_i^{(2)}, X_{i+1}^{(2)}, \dots, X_k^{(2)}, \mathbf{X}_d^{(1)}(t)\right) \quad (5.14)$$

Pour obtenir cette sortie conditionnelle (5.14), la permutation effectuée pour passer des échantillons (1) à (2) sont inversées uniquement pour le paramètre X_d . Pour cela, les lignes de la matrice de la sortie $Y^{(2)}(t)$ sont permutées pour correspondre à l'ordre des lignes de $X_d^{(1)}(t)$ grâce au vecteur RP_d .

Le calcul des indices de sensibilité se fait avec une approche séquentielle similaire à celle de la Section 3.3. Cependant, l'utilisation de l'estimation des PCE est délicate dans ce contexte car elle est dépendante des valeurs des paramètres du modèle pour estimer les indices de sensibilité. Dans le cas du rayonnement, il n'y a pas de variations durant les périodes nocturnes, ce qui rend l'estimation de coefficients du PCE complexe. L'utilisation d'un estimateur indépendant des valeurs des paramètres semble plus appropriée.

Il est également intéressant de souligner que les corrélations temporelles qui ont été introduites pour la génération des échantillons ne portent pas atteintes à la condition d'indépendance nécessaire pour le calcul des indices de Sobol dans le cas séquentiel. En effet, lors de la génération des échantillons variant dans le temps, les valeurs des échantillons sont générées aléatoirement pour chaque instant en suivant les distributions horaires (aléa ω_t voir Fig. 5.4). Les corrélations temporelles sont ensuite introduites par réarrangement de rang dans les colonnes ce qui ne modifie pas la distribution à l'instant t et donc ne modifie pas l'aléa ω_t . Ensuite pour le calcul des indices de sensibilité, l'approche séquentielle permet de calculer les indices à chaque instant. Lors de la décomposition de la variance de $Y(t)$ à l'instant t , on cherche à analyser l'aléa global ω_{Y_t} (voir Fig. 5.13). Cet aléa global est composé des différents aléas des paramètres statiques ainsi que de l'aléa du paramètre dynamique à l'instant t . Tous les aléas des paramètres sont bien indépendants ce qui permettra la décomposition de la variance.

$$Y(\omega_{Y,t}) = \begin{pmatrix} \boxed{Y_1(1)} & \cdots & \boxed{Y_1(t)} & \cdots & \boxed{Y_1(T)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{Y_n(1)} & \cdots & \boxed{Y_n(t)} & \cdots & \boxed{Y_n(T)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{Y_N(1)} & \cdots & \boxed{Y_N(t)} & \cdots & \boxed{Y_N(T)} \end{pmatrix}$$

$\omega_{Y_1} \qquad \omega_{Y_t} \qquad \omega_{Y_T}$

FIGURE 5.13 – Matrice $Y(\omega_{Y,t})$ comportant des corrélations temporelles sur les lignes et l'aléa ω_{Y_t} sur les colonnes

5.3.2 Étude de l'influence des paramètres de sol, de végétation et de météorologie

Pour cette étude, l'approche présentée dans la Section 5.3.1 est appliquée sur le modèle complet de TTV identique à celui du Chapitre 4. Comme précisé dans la Section 5.2, l'étude se focalisera sur le mois de juin 2020. Cela représente $T = 720$ h de simulation avec un temps moyen de calcul de 3.8 secondes (Processeur : Intel Core i5-8365U CPU 1.6 GHz 1.9 GHz RAM 16.0 Go).

Étape 1 de l'AS basée sur la permutation : définition des paramètres incertains

L'analyse de sensibilité séquentielle sera appliquée pour $k_s = 4$ paramètres statiques incertains – θ_s, α, n, LAI – suivant des distributions uniformes dans les intervalles donnés dans la Table 5.2. Un paramètre dynamique incertain – $R_n(t)$ – est considéré, suivant à chaque instant une distribution uniforme dans un intervalle défini lors de l'extraction des informations statistiques de la Section 5.2.

TABLE 5.2 – Intervalles d'incertitude des paramètres de sol et de végétation

Paramètres incertains		Intervalle d'incertitude	
	Unité	Inférieur	Supérieur
θ_s	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.3	0.33
α	m^{-1}	0.5	2
n	-	1.68	2.68
LAI	-	2	3

Étape 2 de l'AS basée sur la permutation : génération des échantillons

Suivant ces distributions, un premier échantillon $X^{(1)}$ de dimension $N \times k = 5000 \times 4$ est généré aléatoirement avec LHS. L'échantillon du rayonnement net $R_n(t)$ correspondant à $X_d^{(1)}$ de dimension $N \times T = 5000 \times 720$ est généré avec la procédure présentée dans la Section 5.2. Un plan d'échantillonnage LHS avec $N = 5000$ points est utilisé pour générer 5000×720 échantillons indépendants suivant la distribution définie dans l'étape 1) de la procédure de Iman et Conover. Les corrélations temporelles seront ensuite introduites avec la suite de la procédure de IC, ce qui constituera l'échantillon $X_d^{(1)}$ utilisé pour les simulations.

Étape 3 de l'AS basée sur la permutation : permutation des échantillons

Les permutations aléatoires sont effectuées selon RP_s ($N \times k = 5000 \times 4$) pour obtenir $X_s^{(2)}$ et selon RP_d ($N \times 1 = 5000 \times 1$) pour obtenir $X_d^{(2)}$ en permutant les lignes entières de la matrice. Les lignes de X_d correspondent à "un scénario de rayonnement probable pour un mois de juin".

Étape 4 de l'AS basée sur la permutation : calcul de la sortie (1)

La matrice de sortie (teneur en eau simulée) $Y^{(1)}(t)$ de dimension $N \times T = 5000 \times 720$ est obtenue en simulant le modèle avec les paramètres statiques $X^{(1)}$, pris dans l'échantillon (1). Le temps de calcul nécessaire est d'environ 5.4 h.

Étape 5 de l'AS basée sur la permutation : calcul de la sortie (2)

La matrice de sortie (teneur en eau simulée) $Y^{(2)}(t)$ de dimension $N \times T = 5000 \times 720$ est obtenue en simulant le modèle avec les paramètres statiques $X^{(2)}$ et le paramètre dynamique $X_d^{(2)}$, pris dans l'échantillon (2).

La Figure 5.14 montre la teneur en eau mesurée pour le mois de juin 2020 (en noir),

la pluviométrie pour cette période (en bleu) ainsi que des informations sur les teneurs en eau simulées $Y^{(1)}(t)$ et $Y^{(2)}(t)$ (en rouge). La courbe rouge correspond à une moyenne des $2N$ simulations et la zone autour de cette courbe correspond au domaine de variations des simulations.

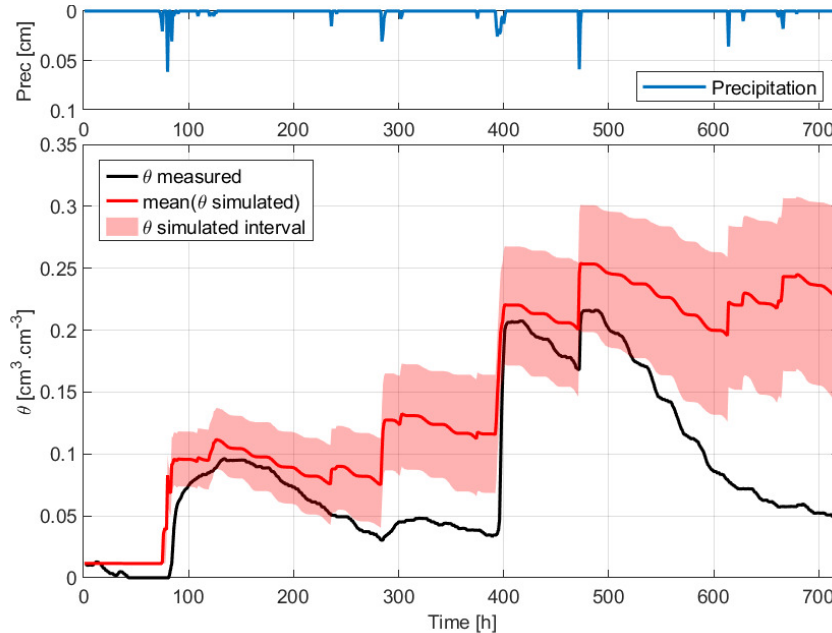


FIGURE 5.14 – Teneur en eau mesurée θ sur la TTV en juin 2020 (en noir), moyenne des simulations effectuées pour l’AS (en rouge) et pluviométrie (en bleu)

Étape 6 de l’AS basée sur la permutation : calcul des indices de sensibilité

Les indices de sensibilité principaux sont directement obtenus grâce à (5.11) et (5.12).

L’approche séquentielle de l’AS permet d’obtenir l’évolution des indices de sensibilité au cours du temps et donc de mettre en évidence l’évolution des influences. Les indices de sensibilité principaux S_i sont représentés sur la Figure 5.15.

La Figure 5.14 montre que les 80 premières heures simulées correspondent à une période sans pluie pour laquelle la teneur en eau mesurée est nulle. La simulation est donc constante sur cette période et la variation des paramètres n’a aucun effet car il n’y a pas d’apport d’eau et que la TTV est complètement asséchée. N’ayant pas de variation des paramètres durant cette période, les indices de sensibilité ne sont pas pris en compte et ne sont pas présentés sur la Figure 5.15.

Sur les cinq paramètres analysés dans cette étude, il n’y a qu’un paramètre non-influent, θ_s la teneur en eau saturée. Ce résultats est cohérent car les études précédentes ont montré que l’influence de θ_s dépend de la période de l’année étudiée. Dans le cas d’une période sèche, comme en juin, ce paramètre n’est pas influent. Les résultats de S_{θ_s} sont ceux attendus. Les autres paramètres ont une influence évoluant au cours du temps en fonction des phénomènes de réhumidification et d’assèchement entres les évènements pluvieux.

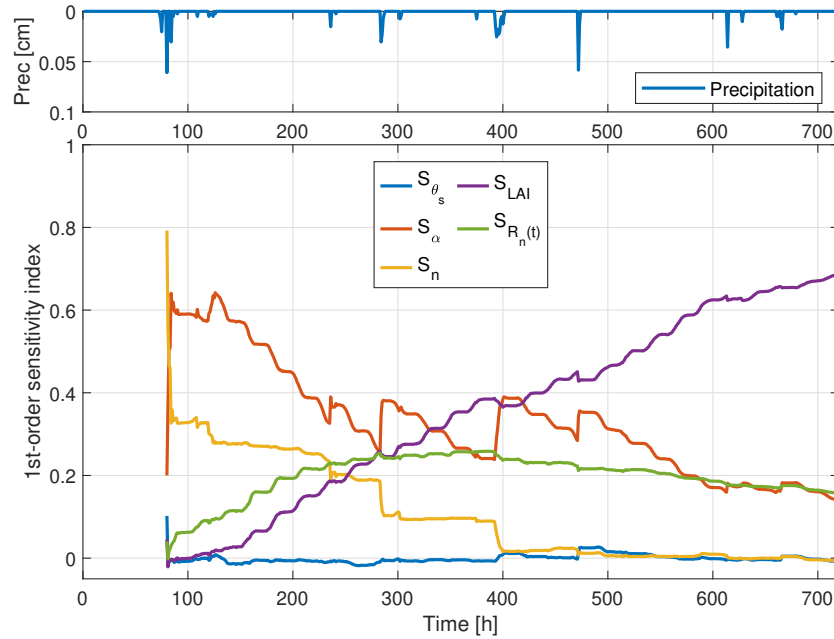


FIGURE 5.15 – Indices de sensibilité principaux pour l'AS permutée sur les paramètres de sol, végétation et météorologique (en bas) et pluviométrie (en haut)

Le paramètre d'ajustement du potentiel de pression α est le paramètre le plus influent avec $S_{\alpha} = 0.6$ (en orange sur Fig. 5.15) après le premier événement pluvieux du mois (pour $t \approx 100$ h). Son influence diminue globalement au cours du temps jusqu'à atteindre $S_{\alpha} = 0.15$ à la fin du mois. Toutefois, son influence est plus importante lors d'évènements pluvieux. Cette tendance avait également été mise en évidence lors de la calibration du chapitre précédent (Section 4.3).

Le paramètre lié à la porosité n est le second paramètre influent avec $S_n = 0.35$ (en jaune sur Fig. 5.15) après le premier événement pluvieux. Son influence diminue également tout au long du mois jusqu'à atteindre $S_n = 0$, soit ne plus être influent. On observe également une stabilisation de l'influence entre $t = 280$ à 380 h, ce qui correspond à une légère stabilisation de la teneur en eau. Cette tendance d'évolution ne correspond pas aux observations des études précédentes. En effet, lorsque le modèle de VGM était utilisé sans les conditions météorologiques et la végétation (Chapitre 3), l'influence de n augmentait lorsque le sol s'asséchait. Lorsque les conditions météorologiques et la végétation ont été ajoutées et que la calibration basée sur l'AS globale a été réalisée (Chapitre 4), cette tendance liée à l'assèchement du sol n'est pas apparue. Maintenant que l'incertitude des paramètres de sol, de végétation et de météorologie est prise en compte, cette tendance liée à l'assèchement n'apparaît pas non plus. Il est possible que l'influence du paramètre n diminue en lien avec la prise en compte du paramètre de végétation LAI .

Le paramètre de végétation LAI (indice foliaire) a une influence croissante tout au long du mois. Ce paramètre n'est pas influent ($S_{LAI} = 0$) après le premier événement pluvieux mais atteint $S_{LAI} = 0.68$ à la fin du mois.

Le paramètre du rayonnement net $R_n(t)$ a une influence croissante jusqu'au milieu du mois où il atteint $S_{R_n(t)} = 0.25$. Cette influence diminue légèrement sur la fin du mois jusqu'à $S_{R_n(t)} = 0.15$.

Pour vérifier la qualité de ces résultats, les six étapes présentées dans cette section ont été réitérées 10 fois. Les tendances et valeurs des indices de sensibilité obtenues avec ces itérations sont très proches de celles présentées.

L'interprétation de ces résultats est complexe car l'analyse porte sur une courte période et il y a peu de répétitions des phénomènes hydrologiques. L'influence du paramètre $R_n(t)$ ne montre pas de tendance nette liée à l'évolution de la teneur en eau. L'augmentation observée au début puis la légère diminution pourrait représenter une stabilisation de l'importance du rayonnement autour de $S_{R_n(t)} = 0.2$ par exemple. Pour réaliser une véritable interprétation sur les phénomènes physiques en jeu pour ces paramètres, il faudrait réaliser une étude élargie dans le temps. Une période de trois mois autour du solstice d'été est en projet pour améliorer cette étude de l'influence des paramètres de sol, de végétation et de météorologie sur la teneur en eau. Cependant, il est tout de même très intéressant de constater que le rayonnement a une influence non négligeable et que la prise en compte de sa variabilité n'efface pas l'influence des paramètres de sol et de végétation. Ces résultats permettent de certifier de l'importance du type de matériaux utilisés pour faire le substrat et du type de végétation choisi face à l'importance des conditions météorologiques sur le comportement de la TTV.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les effets des incertitudes des paramètres du sol, de végétation et météorologiques sur la teneur en eau d'une toiture végétalisée ont été étudiés. Pour ce faire le modèle hydrologique complet a été utilisé pour décrire la teneur en eau dans le sol de la toiture végétalisée. Le paramètre météorologique analysé et la teneur en eau dans le sol sont variants dans le temps ce qui a conduit à une adaptation de la méthode d'analyse de sensibilité à appliquer. La génération des échantillons pour un paramètre variant dans le temps a fait l'objet d'un processus spécifique.

Cette étude a permis de mettre en avant les paramètres influents sur la teneur en eau, pour le mois de juin, qui est un mois intéressant à analyser car il implique des phénomènes d'assèchement et de réhumidification de la toiture. L'étude a montré que les paramètres de sol liés au potentiel de pression et à la porosité jouent un rôle essentiel sur la teneur en eau présente dans la toiture. Cela signifie que ces propriétés du substrat seront importantes pour la capacité de la toiture à retenir l'eau et que les conditions météorologiques n'annulent pas ces influences. De plus, l'étude a aussi montré que l'indice foliaire des plantes est déterminant pour la teneur en eau. Cela implique que le type de végétation choisi influera également la capacité de la toiture à retenir l'eau. Enfin, l'étude a mis en

évidence le rôle non négligeable du rayonnement. Le climat et la situation géographique de la toiture sera à prendre en compte lors de la conception.

Il serait intéressant de pouvoir réaliser cette étude sur une période d'un an. Pendant les mois d'hiver (décembre à février), la toiture est à saturation. Peu de phénomènes sont observés et cette période présente peu d'intérêt pour l'analyse. Cependant, les mois de transition entre les saisons (printemps et automne) seraient pertinents à étudier car différents phénomènes peuvent être observés. Cela soulève le problème de saisonnalité pour la génération des échantillons du rayonnement. Dans ce cas, la méthode proposée pour générer les échantillons aléatoires corrélés dans le temps ne peut plus être utilisée telle quelle car l'hypothèse de stationnarité n'est plus valide.

Pour satisfaire l'hypothèse de stationnarité, étendre l'étude de ce chapitre à une période de deux ou trois mois autour du solstice d'été pourrait être une solution. Cette future étude permettrait de conforter les résultats de ce chapitre et les effets des paramètres de sol, de végétation et des conditions météorologiques à prendre en compte lors de la conception des toitures végétalisées.

Chapitre 6

Conclusion

Les impacts du dérèglement climatique de plus en plus visibles aujourd'hui poussent la société à repenser le développement des zones urbaines. L'un des enjeux majeurs en France est de gérer les eaux de pluie. L'installation de structures perméables telles que les toitures végétalisées apparaît comme une solution intéressante dans ce but. Les différentes couches d'une toiture végétalisée ralentissent l'arrivée de l'eau et soulagent ainsi les réseaux d'évacuation des villes. Pour cela, il est nécessaire que les couches de la structure soient développées et adaptées pour une efficacité de rétention optimale. L'amélioration des performances hydriques des toitures végétalisées est donc essentielle.

La modélisation de la capacité de rétention d'une telle structure impliquant du vivant est complexe car elle nécessite la combinaison de différents modèles qui interagissent les uns avec les autres de manière indirecte. Ces modèles dépendent de beaucoup de paramètres qu'il est souvent difficile de connaître avec précision et qui sont donc considérés comme incertains. Cette thèse s'inscrit dans ces objectifs globaux en se focalisant sur l'analyse de l'effet des incertitudes des paramètres de sol, de végétation et de météorologie sur la teneur en eau présente dans une toiture végétalisée. L'analyse des incertitudes de ces modèles est primordiale pour avoir une meilleure compréhension de la dynamique de ce type de structure.

Tout d'abord, une première étude a été réalisée sur un modèle simplifié de la toiture végétalisée considérant uniquement le phénomène d'infiltration de l'eau dans le sol. Elle a permis de mettre en évidence les paramètres de sol les plus influents sur la teneur en eau dans les différentes couches de la toiture. Cette étude préalable sur le modèle simplifié a permis de réduire le nombre de paramètres de sol incertains qu'il faudra prendre en compte pour le modèle complet. Elle a également permis de faire les adaptations nécessaires des méthodes usuelles d'analyse de sensibilité pour la sortie du modèle qui varie dans le temps avec les approches séquentielle et multivariée. De plus, les aspects techniques ont été traités tels que la simulation avec le logiciel, le type d'estimateur des indices de sensibilité, la technique d'échantillonnage optimale pour l'analyse, etc. Suite à ces résultats, les études suivantes ont été effectuées sur le modèle complet en prenant

en compte les paramètres de sol ainsi que les paramètres de végétation et les conditions météorologiques auxquelles est soumise la structure.

La deuxième étude a porté sur la calibration de ce modèle complet dans le but de reproduire de manière satisfaisante l'évolution de la teneur en eau de la toiture végétalisée sur l'année 2020. Cette calibration a été effectuée avec une procédure spécifique proposée basée sur une analyse de sensibilité des paramètres de sol les plus influents ainsi que les paramètres de végétation qui sont incertains. Cette étude a permis d'obtenir des valeurs de paramètres et des intervalles d'incertitude réduits pour les paramètres influents du modèle ainsi que de mettre en évidence l'effet important du paramètre météorologique de rayonnement sur la teneur en eau de la toiture. Ceci a conduit à une troisième étude.

Enfin, la troisième étude a été menée sur le modèle complet en analysant les paramètres de sol, de végétation et de météorologie. La difficulté de cette étude a été de gérer le paramètre et la sortie qui varient dans le temps. Pour cela, une approche basée sur l'analyse statistique de données mesurées ainsi que sur la méthode de Iman et Conover a été utilisée pour générer le paramètre de rayonnement variant dans le temps. L'analyse de sensibilité appliquée ensuite a permis de déterminer l'influence de paramètres de sol, de végétation et de météorologie sur la teneur en eau. Cette étude a montré que certains paramètres de sol et de végétation sont influents malgré les variations des conditions météorologiques. Cela permet de conclure que le choix des matériaux pour confectionner les couches de la toiture végétalisée et le choix des plantes que l'on va y installer est primordial. Il est donc nécessaire de chercher les configurations de sol et de plantes optimales en fonction de la région où est installée la toiture et également de prendre en compte les conditions climatiques qui vont évoluer lors de la conception des toitures végétalisées. Les informations quantifiées de l'impact des paramètres sont donc précieuses pour les différents acteurs qui développent et installent des toitures végétalisées.

Les résultats obtenus dans cette thèse vont pouvoir servir de base pour de futurs travaux sur l'analyse de la dynamique des toitures végétalisées. Par exemple, il serait intéressant de faire l'étude de l'influence des paramètres de sol, de végétation et de météorologie sur une année complète afin de prendre en compte l'effet des saisons. Pour réussir cette analyse sur une période annuelle, le challenge de génération de données météorologiques cohérentes est le plus important. La méthode employée dans cette thèse nécessite la stationnarité des données pour l'extraction d'informations statistiques sur les variations naturelles du paramètre météorologique. L'utilisation d'une décomposition en série temporelle pourrait permettre de séparer les variations aléatoires des variations liées aux saisons et ainsi permettre d'étendre la période analysée.

De plus, la comparaison des influences des paramètres sur différentes années pourrait être pertinente pour mieux comprendre l'évolution des toitures végétalisées sur un plus long terme.

Par ailleurs, l'étude pourrait être élargie en considérant d'autres paramètres météorologiques, tels que la température de l'air, l'humidité relative et la vitesse du vent. Ces paramètres pourraient être aléatoirement corrélés entre eux. Dans ce cas, l'analyse de sensibilité à mener est bien plus complexe.

Enfin, le modèle utilisé dans cette thèse permet de simuler le comportement hydrique d'une toiture végétalisée pour une dimension. Des modèles pour les surfaces (2D) ou les volumes (3D) existent pour simuler le comportement du sol. Ces modèles sont plus complets mais aussi plus complexes. Ils nécessitent davantage de paramètres incertains. L'analyse des incertitudes pourrait être pertinente pour apprécier l'évolution de l'influence des paramètres au cours de l'espace.

Les toitures végétalisées sont et resteront des outils intéressants à utiliser pour faire face aux enjeux sociétaux et environnementaux auxquels nous sommes confrontés. Pour cela, l'analyse de la dynamique de ses structures est et restera importante pour la compréhension de leur comportement et la conception de toitures végétalisées performantes.

Annexe A

Compléments sur le modèle et paramétrage de Hydrus

Dans cette annexe, des compléments sur le modèle hydrologique de la toiture végétalisée présenté dans le Chapitre 2 sont apportés. De plus, des indications sur les configurations du logiciel de simulation sont précisées. Le logiciel Hydrus-1D[©] est utilisé pour simuler le comportement hydrique d'une toiture végétalisée. Ce logiciel est un produit PC-PROGRESS. La version utilisée est le V4.17.0140.

Les compléments de cette annexe font références à [Šimůnek et al. (2008)].

L'interface principale d'Hydrus-1D[©] est présentée sur la Figure A.1. Différents onglets sont disponibles à partir de cette interface et des références à ces onglets seront faites tout au long de cette annexe.

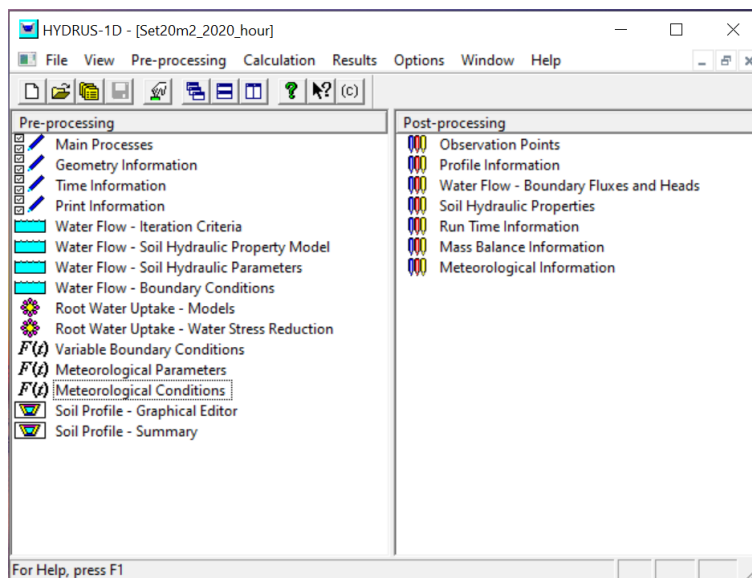


FIGURE A.1 – Interface principale d'Hydrus-1D[©]

A.1 Variabilité spatiale et dépendance à la température des propriétés hydrauliques

Les propriétés hydrauliques $\theta(h)$ et $K(h)$ ont une variabilité spatiale sur le domaine d'écoulement. Pour prendre en compte cette variabilité spatiale, des liens linéaires sont définies entre $\theta(h)$ et $K(h)$ et des caractéristiques de référence $\theta^*(h^*)$ et $K^*(h^*)$:

$$K(h) = \alpha_K K^*(h^*) \quad \theta(h) = \theta_r + \alpha_\theta (\theta^*(h^*) - \theta_r^*) \quad h = \alpha_h h^*$$

où α_K , α_θ et α_h sont les facteurs d'échelle respectifs de la conductivité hydraulique, la teneur en eau et le potentiel de pression. Les facteurs d'échelle peuvent être paramétrés sous l'onglet *Soil Profile - Graphical Editor*.

Les propriétés hydrauliques sont également dépendantes de la température. Cette dépendance peut être décrite comme précédemment par des liens linéaires entre le potentiel de pression h_T à la température T° et la conductivité hydraulique $K_T(\theta)$ à la température T° avec des caractéristiques à une température de référence h_{ref} et $K_{ref}(\theta)$:

$$h_T = \alpha_h^* h_{ref} \quad K_T(\theta) = \alpha_K^* K_{ref}(\theta)$$

où α_h^* et α_K^* sont les facteurs d'échelle de température respectivement pour la pression et pour la conductivité hydraulique.

$$\alpha_h^* = \frac{\sigma_T}{\sigma_{ref}} \quad \alpha_K^* = \frac{\mu_{ref}}{\mu_T} \frac{\rho_T}{\rho_{ref}}$$

avec σ_{ref} et σ_T la tension de surface à une température de référence ou T° [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$] μ_{ref} et μ_T la viscosité dynamique à une température de référence ou T° [$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$] et ρ_{ref} et ρ_T la densité de l'eau du sol à une température de référence ou T° [ML^{-3}].

A.2 Compléments sur le terme puits S

Le terme puits dépend de la fonction de réponse au stress de l'absorption d'eau par les racines $\alpha(h)$ et du potentiel d'absorption d'eau S_p (voir eq. (2.6) dans la Section 2.1.2).

A.2.1 Fonction de réponse au stress de l'absorption d'eau par les racines $\alpha(h)$

Fonction de Feddes

La fonction de Feddes est définie dans la Section 2.1.2. Son paramétrage se fait sous l'onglet *Root Water Uptage Water Stress Reduction*.

- $h_1 = P0$: pression proche de la saturation à laquelle il n'y a pas d'absorption / début de l'absorption
- $h_2 = POpt$: pression à partir de laquelle l'absorption est maximale
- h_3 : pression à partir de laquelle l'absorption n'est plus maximale

$$h_3 = \begin{cases} P2L & \text{pour } T_a \leq r2L \\ P2H & \text{pour } T_a \geq r2H \\ P2H + \frac{P2L - P2H}{r2H - r2L} (r2H - T_p) & \text{pour } r2L < T_p < r2H \end{cases}$$

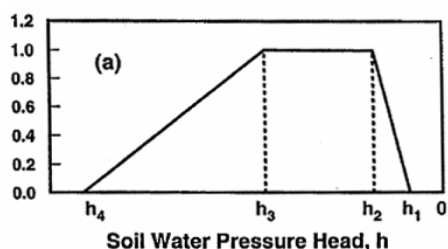


FIGURE A.2 – Fonction de Feddes, tiré de [Šimůnek et al. (2008)]

Feddes' Parameters	
P0 [cm]	-10
P0pt [cm]	-25
P2H [cm]	-240
P2L [cm]	-360
P3 [cm]	-8000
r2H [cm/hour]	0.5
r2L [cm/hour]	0.1

Database: [dropdown menu]

FIGURE A.3 – Paramètres de la fonction de Feddes

T_a est le taux de transpiration actuel et T_p est le taux de transpiration potentiel
— $h_4 = P3$: pression de flétrissement des plantes / fin d'absorption

Fonction de S-shape

L'alternative à la fonction de Feddes proposée dans le logiciel est la fonction S-shape représentée sur le figure A.4. Cette fonction est une version modifiée de la fonction de Feddes qui permet de prendre en compte le stress hydrique/osmotique subi par les plantes qui vont transpirer une plus grande quantité d'eau que ce qu'elles absorbent durant les périodes d'assèchement ou froides. Le terme puits eq. (2.6) devient donc :

$$S(h, h_\Phi) = \alpha(h, h_\Phi) S_p$$

avec

$$h_\Phi = a_i c_i \quad \text{et} \quad \alpha(h, h_\Phi) = 1 / \left(1 + \left(\frac{h + h_\Phi}{h_{50}} \right)^p \right)$$

où h_Φ est la pression osmotique, a_i est un coefficient expérimental [$L^4 M$], c_i les concentrations des solutés [$L^{-3} M^{-1}$] et h_{50} la pression d'eau à laquelle l'extraction est réduite de 50%. Cette fonction ne prend pas en compte la diminution de transpiration près de la pression de saturation contrairement à la fonction de Feddes.

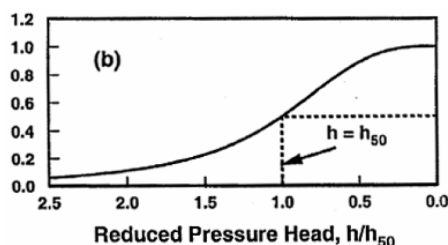


FIGURE A.4 – Fonction de S-shape, tiré de [Šimůnek et al. (2008)]

A.2.2 Potentiel d'absorption d'eau S_p

Dans le cas où le potentiel d'absorption d'eau S_p n'est pas uniformément distribué, sa distribution spatiale est définie par une fonction $b(x)$ qui peut être constante, linéaire ou suivant la fonction de Hoffman.

$$S_p = b(x)T_p$$

Dans le cas de la fonction de Hoffman, $b(x)$ est définie par :

$$b(x) = \begin{cases} 1.6667/L_r & \text{for } x > L - 0.2L_r \\ 2.0833(1 - (L - x)/L_r)/L_r & \text{for } L - L_r \leq x \leq L - 0.2L_r \\ 0 & \text{for } x < L - L_r \end{cases}$$

où L est la coordonnée x de la surface du sol [L] ($x = L = top$). Si la profondeur des racines varient dans le temps $L_r(t)$, il faut uniquement utiliser la fonction de Hoffman.

Pour modéliser l'évolution au cours du temps de la profondeur des racines, il est possible d'utiliser une fonction de croissance définie par :

$$L_r(t) = L_{max}f_r(t) \quad \text{avec} \quad f_r(t) = \frac{L_0}{L_0 + (L_{max} - L_0)e^{-rt}} \quad (\text{A.1})$$

où L_r correspond à la profondeur de la zone racinaire [L], L_{max} la profondeur maximum des racines [L] et $f_r(t)$ est une fonction croissance qui dépend de L_0 la profondeur racinaire au début de la période de croissance [L], t le temps [T] et r le taux de croissance [T⁻¹] (calculé ou fourni).

A.3 Compléments sur l'évapotranspiration ET_p

Dans la Section 2.1.3, le potentiel d'évapotranspiration ET_p peut être estimé avec la formule de Hargreaves ou l'équation de Penman-Monteith (2.9).

La formule de Hargreaves dépend des températures maximale et minimale T_{max}° et T_{min}° et d'une estimation du rayonnement extraterrestre R_a [J m⁻² s⁻¹] qui est définie par la formule suivante :

$$R_a = \frac{G_{sc}}{\pi} d_r (\omega_s \sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \sin(\omega_s))$$

où

- G_{sc} est la constante solaire (=1360 W m⁻²)
- φ est la latitude du site étudié [rad]
- d_r est la distance relative entre la Terre et le Soleil [-] estimé avec :

$$d_r = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi}{365}J\right)$$

avec J le nombre du jour de l'année [-]

— ω_s est l'angle de l'heure du coucher du soleil [rad] estimé avec :

$$\omega_s = \arccos(-\tan(\varphi)\tan(\delta))$$

— δ est la déclinaison du soleil (angle entre les rayons du Soleil et le plan de l'équateur terrestre) [rad] estimé avec :

$$\delta = 0.409 \sin\left(\frac{2\pi}{365}J - 1.39\right)$$

L'équation de Penman-Monteith (2.9) est fonction des variables météorologiques telles que la température T° , le rayonnement net R_n , l'humidité relative H_r , la vitesse du vent U_z et de paramètres de végétation tels que la hauteur des plantes h_c et l'indice foliaire LAI : $ET_p = f(T^\circ, R_n, H_r, U_z, h_c, LAI)$. Ces variables météorologiques interviennent à travers les variables suivantes :

— La chaleur latente de vaporisation λ [MJ.kg⁻¹] définie par :

$$\lambda = 2.501 - (2.361 \cdot 10^{-3})T^\circ$$

avec T° la température de l'air [°C].

— La pente de la courbe de pression de vapeur Δ [kPa.°C⁻¹] définie par :

$$\Delta = \frac{4098e_a}{T^\circ + 273.3}$$

avec e_a est la pression de vapeur saturée [kPa].

— e_a est définie par :

$$e_a = 0.611 \exp\left(\frac{17.27T^\circ}{T^\circ + 237.3}\right)$$

— La densité atmosphérique ρ [kg.m⁻³] définie par :

$$\rho = 3.486 \frac{P}{1.01(T^\circ + 273)} \quad \text{où} \quad P = 101.3 \left(\frac{293 - 0.0065z}{293}\right)^{5.26}$$

où P correspond à la pression atmosphérique [kPa] à l'altitude z [m].

— La pression de vapeur actuelle e_d [kPa] définie par :

$$e_d = \frac{H_r e_a}{100}$$

où H_r est l'humidité relative [%].

— La résistance aérodynamique r_a [s.m⁻¹] définie par :

$$r_a = \frac{\ln\left(\frac{z_m - 0.667h_c}{0.123h_c}\right) \ln\left(\frac{z_h - 0.667h_c}{0.0123h_c}\right)}{0.1681U_z}$$

où h_c est la hauteur des plantes [m], z_m est la hauteur de mesure de la vitesse du vent [m], z_h est la hauteur de mesure de la température et l'humidité [m] et U_z est la vitesse du vent mesurée [m.s⁻¹].

- Une constante psychrométrique γ [kPa.°C⁻¹] définie par :

$$\gamma = 0.00163 \frac{P}{\lambda}$$

- La résistance de la canopée des plantes r_c [s.°C⁻¹] qui est inversement proportionnelle à l'indice de surface foliaire, LAI (*Leaf Area Index*) [-], LAI correspondant à la surface de feuille par unité de surface de sol.

$$r_c = \frac{200}{LAI}$$

La définition du modèle de Penman-Monteith se fait dans l'onglet *Meteorological Parameters* (Fig. A.5) et des variables météorologiques dans l'onglet *Meteorological Conditions* (Fig. A.6).

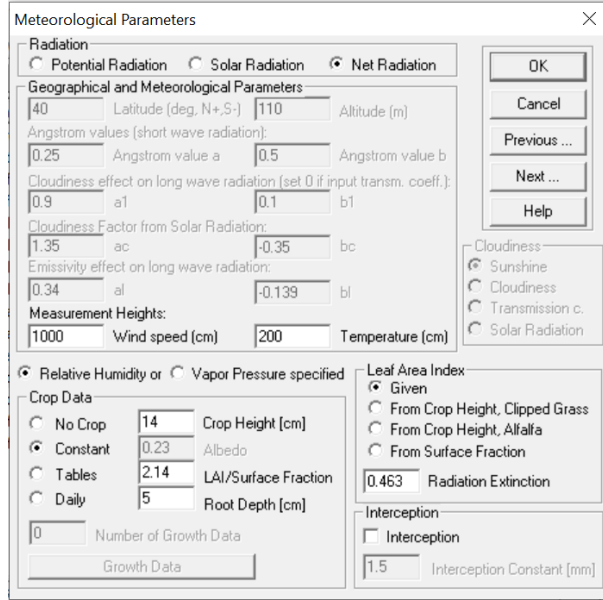


FIGURE A.5 – Onglet *Meteorological Parameters*

A.4 Définition des conditions initiales et aux limites

Les conditions initiales et aux limites présentées dans le Chapitre 2 en Section 2.2.1 sont paramétrées sous plusieurs onglets.

Pour les conditions initiales, les modifications s'effectuent sous l'onglet *Water Flow - Boundary Conditions* pour le choix entre pression et teneur en eau (Fig. A.7) et sous l'onglet *Soil Profile - Graphical Editor* pour la définition de la fonction $\theta_i(x)$ (Fig. A.8). Ici, $\theta_i(x)$ est considérée uniforme à la première valeur de teneur en eau mesurée.

Pour les conditions limites, la condition basse (en bas de la toiture) est le *Seepageface* avec un potentiel de pression $h_{Seep} = -10$ cm.

	Time [hour]	Radiation [MJ/m2/d]	T_max [°C]	T_min [°C]	Humidity [%]	Wind [km/d]	No Inform.
1	1	-2,16	-0,5	-1,55	94,875	96	4
2	2	-2,16	-0,81	-1,02	97	216	4
3	3	-2,16	-1,01	-1,16	99,05	144	4
4	4	-2,16	-1,1	-1,29	100	96	4
5	5	-2,16	0,02	-1	100	96	4
6	6	-2,16	0,58	0,27	100	120	4
7	7	-2,16	0,53	0,27	100	120	4
8	8	-2,16	0	-0,51	100	144	4
9	9	-2,0785	-0,06	-0,45	100	144	4
10	10	-1,57788	-0,09	-0,25	100	120	4
11	11	-0,727985	-0,25	-0,48	100	96	4
12	12	-0,227362	-0,33	-0,51	100	72	4
13	13	0,436255	-0,02	-0,25	100	192	4
14	14	0,715673	-0,07	-0,25	100	144	4

FIGURE A.6 – Onglet *Meteorological Conditions*

La condition limite haute (à la surface de la toiture) est *Atmospheric BC with Surface Runoff* (2.11), c'est-à-dire avec ruissellement immédiat. Lorsque la condition *Atmospheric BC with Surface Layer* est sélectionnée, la condition (2.11) est modifiée pour autoriser l'accumulation d'eau à la surface du sol. La condition devient :

$$q(x, t) = -K \left(\frac{\partial h}{\partial x} + 1 \right) = q_0(t) - \frac{dh}{dt} \quad \text{pour } x = \text{top}$$

Dans la condition (2.11), $q_0(t) = P(t) - E(t)$ avec $P(t)$ les précipitations et $E(t)$ l'évaporation. Les précipitations $P(t)$ peuvent être générées ou ajoutées par l'utilisateur dans l'onglet *Time Information section - Time-variable boundary conditions*. Cet onglet contient aussi l'information de potentiel de pression maximal autorisé h_A nécessaire pour la condition (2.13).

$$h_A = -\frac{RT^\circ}{Mg} \ln(H_r) = -47.0443T^\circ \ln(H_r) \quad (\text{A.2})$$

où R est la constante de gaz ($=8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$), M est la masse moléculaire de l'eau ($=0.018015 \text{ kg mol}^{-1}$), g est la constante gravitationnelle ($=9.81 \text{ m.s}^{-1}$), T° est la température [K] et H_r est l'humidité relative [-].

La condition (2.13) nécessite de déterminer le taux d'évaporation E avec :

$$E = \frac{\rho_s - \rho_a}{r_a + r_s} \quad (\text{A.3})$$

où ρ_s est la densité de la vapeur d'eau à la surface du sol [kg m^{-3}] ($\rho_s = f(T^\circ, H_r)$), ρ_a est la densité de la vapeur atmosphérique (définie pour ET_p) [kg m^{-3}], r_a est la résistance aérodynamique au flux de vapeur d'eau (définie pour ET_p) [s m^{-1}] et r_s est la résistance de la surface du sol au flux de vapeur d'eau [s m^{-1}].

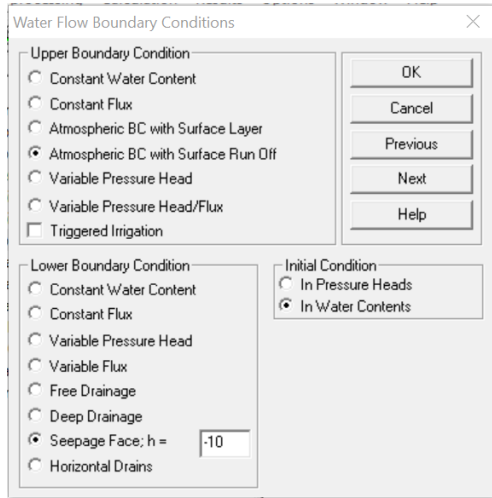


FIGURE A.7 – Choix du type de conditions aux limites et initiales

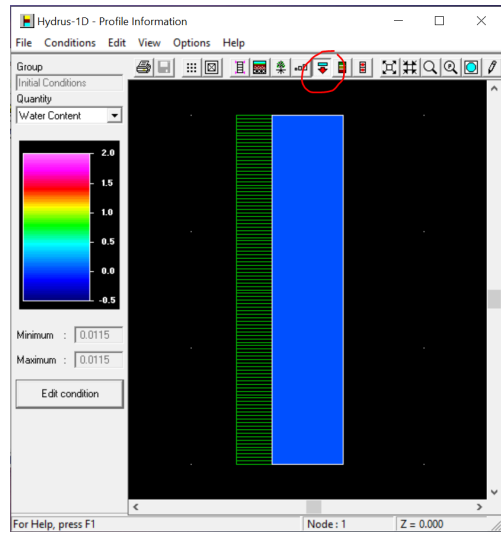


FIGURE A.8 – Définition de la fonction $\theta_i(x)$

$$\rho_s = \rho_{vs} H_r \quad \text{avec} \quad \rho_{vs} = 10^{-3} \frac{\exp(31.3716 - \frac{6014.79}{T^\circ}) - 7.922495 \cdot 10^{-3} T^\circ}{T^\circ}$$

où ρ_{vs} est la densité de la vapeur d'eau saturée [kg m^{-3}].

$$r_s = \begin{cases} r_0 \exp 35.63(0.15 - \theta_0) & \theta_0 \leq 0.15 \\ r_0 & \theta_0 > 0.15 \end{cases}$$

où r_0 est la résistance de la surface du sol [s m^{-1}] ($= 10$) et θ_0 est la teneur en eau à la surface [$\text{L}^3 \text{L}^{-3}$].

A.4. Définition des conditions initiales et aux limites

	Time [hour]	Precip. [cm/hour]	hCritA [cm]
1	1	0	-5811130
2	2	0	-5811130
3	3	0	-5811130
4	4	0	-5811130
5	5	0	-5811130
6	6	0	-5811130
7	7	0	-5811130
8	8	0	-5811130
9	9	0	-5811130
10	10	0	-5811130
11	11	0	-5811130
12	12	0	-5811130
13	13	0,0254	-5811130
14	14	0	-5811130

FIGURE A.9 – Onglet *Time Information* section - *Time-variable boundary conditions*

Annexe B

Compléments sur l'analyse de sensibilité

Cette annexe propose des compléments sur l'analyse de sensibilité présentée dans le Chapitre 3.

B.1 Estimation des indices de sensibilité avec la méthode Sobol-Monte-Carlo

La méthode de Sobol-MC consiste à introduire la variation du paramètre condition à l'aide de deux échantillons pour estimer la variance conditionnelle [Faivre et al. (2013)], [Jacques (2011)].

Considérons deux N -échantillons générés de manière aléatoire :

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} X_{1,1}^{(1)} & \dots & X_{1,k}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N,1}^{(1)} & \dots & X_{N,k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} X_{1,1}^{(2)} & \dots & X_{1,k}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N,1}^{(2)} & \dots & X_{N,k}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

avec k le nombre de paramètres et N la taille de l'échantillon. La notation $X_{n,k}^{(1)}$ représente la valeur de l'échantillon n du paramètre X_k dans l'échantillon 1.

L'espérance de la sortie Y est estimée par la moyenne des N évaluations du premier échantillon $X^{(1)}$:

$$\widehat{E}[Y] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n^{(1)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{G}(X_{n,1}^{(1)}, \dots, X_{n,k}^{(1)}) \quad (\text{B.2})$$

La variance globale de Y est estimée de la même manière telle que :

$$\widehat{Var}[Y] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(Y_n^{(1)} \right)^2 - \left(\widehat{E}[Y] \right)^2 \quad (\text{B.3})$$

Pour obtenir les indices de sensibilité, il faut également estimer :

$$V_i = Var[E[Y|X_i]] = E[E[Y|X_i]^2] - E[E[Y|X_i]]^2 = U_i - (E[Y])^2$$

où U_i est l'espérance de l'espérance de Y conditionnellement à X_i , estimée avec :

$$\widehat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n^{(1)} \cdot \mathcal{G}(X_{n,1}^{(2)}, \dots, X_{n,i-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{\mathbf{n},i}^{(1)}, X_{n,i+1}^{(2)}, \dots, X_{n,k}^{(2)}) \quad (\text{B.4})$$

où $Y^{(1)}$ est obtenu uniquement avec l'échantillon $X^{(1)}$ et le conditionnement à X_i s'exprime lorsque l'on utilise le 2^e échantillon $X^{(2)}$ sauf pour le facteur X_i qui reste dans $X^{(1)}$. L'estimation de V_i est donc :

$$\widehat{V}_i = \widehat{U}_i - \left(\widehat{E}[Y] \right)^2 \quad (\text{B.5})$$

L'estimation des indices de sensibilité principaux S_i (3.4) est donc réalisée avec (B.3) et (B.5) telle que :

$$\widehat{S}_i = \frac{\widehat{V}_i}{\widehat{Var}[Y]} \quad (\text{B.6})$$

Pour obtenir l'estimation des indices d'ordre 2 S_{ij} (3.5), il faut estimer V_{ij} (3.3) de la même manière que (B.5) avec (B.4) telle que :

$$\widehat{S}_{ij} = \frac{\widehat{V}_{ij}}{\widehat{Var}[Y]} \quad (\text{B.7})$$

$$\widehat{V}_{ij} = \widehat{Var}[E[Y|X_{ij}]] = \widehat{U}_{ij} - \left(\widehat{E}[Y] \right)^2 - \widehat{V}_i - \widehat{V}_j \quad (\text{B.8})$$

où

$$\widehat{U}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n^{(1)} \cdot \mathcal{G}(X_{n,1}^{(2)}, \dots, X_{n,i-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{\mathbf{n},i}^{(1)}, X_{n,i+1}^{(2)}, \dots, X_{n,j-1}^{(2)}, \mathbf{X}_{\mathbf{n},j}^{(1)}, X_{n,j+1}^{(2)}, \dots, X_{n,k}^{(2)}) \quad (\text{B.9})$$

L'indice d'ordre 2 représente uniquement l'influence de l'interaction entre les deux facteurs X_i et X_j sur la sortie Y . Il est important de supprimer les effets individuels des facteurs \widehat{V}_i et \widehat{V}_j .

Les indices totaux S_{T_i} (3.6) sont estimés avec :

$$\widehat{S}_{T_i} = 1 - \frac{\widehat{V}_{\sim i}}{\widehat{Var}[Y]} \quad (\text{B.10})$$

où $\sim i$ signifie la variation uniquement du paramètre X_i et en fixant les autres $X_{i \neq j}$.

$$\widehat{V}_{\sim i} = \widehat{Var}[E[Y|X_{\sim i}]] = \widehat{U}_{\sim i} - \left(\widehat{E}[Y]\right)^2 \quad (\text{B.11})$$

où

$$\widehat{U}_{\sim i} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n^{(1)} \cdot G(X_{n,1}^{(1)}, \dots, X_{n,i-1}^{(1)}, \mathbf{X}_{n,i}^{(2)}, X_{n,i+1}^{(1)}, \dots, X_{n,k}^{(1)}) \quad (\text{B.12})$$

B.2 Techniques d'échantillonnage

Pour réaliser une analyse de sensibilité, les temps de calcul peuvent devenir très grands en fonction de N le nombre de simulations nécessaires. Pour optimiser ce temps de calcul, une brève comparaison de 3 techniques d'échantillonnage est présentée :

- Monte-Carlo (MC)
- Latin Hypercube Sampling (LHS)
- Quasi-Monte-Carlo (QMC) avec la séquence de Sobol

Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo [Faivre et al. (2013)] est basée sur la loi des grands nombres qui permet d'approximer l'intégrale de l'espérance par une somme d'un échantillon de taille N tendant vers ∞ .

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E[g(X)] \quad (\text{B.13})$$

avec X , une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

Le taux de convergence de l'intégration par MC est de $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et est obtenu grâce au Théorème Central Limite.

Sachant que les indices de sensibilité sont basés sur le calcul de la variance, elle-même basée sur l'espérance, cette méthode peut-être utilisée.

Latin Hypercube

La méthode LHS a pour objectif de répartir les points plus uniformément dans l'espace que MC. Le principe est de découper l'espace en N segments de probabilité $1/N$ et de tirer aléatoirement un point par segment.

Des améliorations de cette méthode existent :

- maximisation de la distance minimale entre 2 points (*maxmin criterion*);
- minimisation de la distance entre le point d'entrée du domaine et les points du design;
- minimisation de la discrédance (mesure quantitative de la différence entre la distribution des points de l'échantillon et la distribution uniforme) [Faivre et al. (2013)], [Kucherenko et al. (2015)].

Quasi-Monte-Carlo : Séquence de Sobol

La méthode QMC est basée sur le même principe que la méthode MC. La variable X est remplacée par un ensemble de points q à discrédance faible.

Un ensemble de points ou séquence à discrédance faible (*Low Discrepancy Sequence* LDS) est une séquence de points uniformément distribués. Le taux de convergence de cette méthode est $\frac{\mathcal{O}(\ln N)^n}{N}$ et est beaucoup plus rapide que pour la méthode MC.

Selon [Faivre et al. (2013)] et [Kucherenko et al. (2015)], la meilleure LDS est la séquence de Sobol. Elle suit deux propriétés, la propriété A qui assure qu'il y ait uniquement 1 point par 2^n segments de l'espace et la propriété A' qui assure qu'il y ait uniquement 1 point par 4^n segments de l'espace. Cette séquence a la meilleure uniformité de distribution pour $N \rightarrow \infty$, une bonne répartition pour les ensembles de petites tailles et un algorithme rapide de calcul.

Génération des échantillons avec Matlab[©]

Pour la génération des échantillons, le logiciels Matlab[©] est été utilisé pour les travaux. Sur Matlab[©], la fonction `rand` permet de générer des nombres aléatoires uniformément distribués compris entre 0 et 1. La fonction `lhsdesign` permet de générer des échantillons en suivant le technique d'Hypercube Latin. La séquence de Sobol est également implémentée dans Matlab[©]. Les fonctions `sobolset` (séquence complète) et `net` (sélection de l'échantillon) seront utilisées.

B.2.1 Optimisation de l'échantillonnage sur l'AS du modèle

La Table B.1 est un tableau comparatif de résultats obtenus pour les différentes méthodes d'échantillonnage. Ces résultats correspondent à l'étude d'une période de 20 jours simulée avec le modèle simplifié de toiture végétalisée présenté dans le Chapitre 3 (Processeur : Intel Core i5-660U CPU 3.3 GHz RAM 8.0 Go). La référence correspond à l'échantillon le plus grand $N = 20000$ généré avec la méthode de MC.

Les éléments de comparaison sont :

- le temps de calcul pour réaliser les simulations et le calcul des indices
- sur le métamodèle :

TABLE B.1 – Temps de calcul et indicateurs pour différentes méthodes d'échantillonnage, taille d'échantillon N et ordre du PCE p .

Méthode d'échantillonnage	N	p	Temps de calcul	Métamodèle		Indices	
				Erreur max [10^{-4}]	R^2 min [%]	Erreur max S_i	Erreur max S_{T_i}
SobSeq	300	3	1h	5.70	95.69	0.0247	0.0253
SobSeq	300	6	1h30	$1.19 \cdot 10^{-10}$	100	0.5699	0.4614
SobSeq	500	3	2h	6.70	93.91	0.0097	0.0102
SobSeq	500	6	2h25	$9.6 \cdot 10^{-11}$	100	0.5235	0.4865
SobSeq	1000	3	4h	32	93.91	0.0077	0.0099
SobSeq	1000	6	4h30	2.16	99.63	0.6067	0.5289
LHS	500	3	2h	4.87	94.74	0.0067	0.0156
LHS	500	6	2h25	$1.07 \cdot 10^{-10}$	100	0.6294	0.4552
MC	20000	3	82h10	4.87	93.67	0.0060	0.0047
MC	20000	6	83h40	5.58	94.45	Ref	Ref

— Max error : le maximum global de l'erreur entre la sortie estimée et la sortie initiale

Pour chaque instant, on calcule l'erreur :

$$erreur = |y - \hat{y}| \quad (B.14)$$

— Min R^2 : le minimum global du coefficient de détermination R^2

Pour chaque instant, on calcule ce coefficient :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (B.15)$$

— sur les indices de sensibilité :

— S_i Max error : le maximum global de la différence entre la référence et les indices principaux calculés ;

— S_{T_i} Max error : le maximum global de la différence entre la référence et les indices totaux calculés.

Les résultats de la Table B.1 mettent en évidence l'efficacité de la séquence de Sobol et de LHS face à la méthode de MC. Pour la suite des travaux, les indices de sensibilité seront calculés avec une séquence de Sobol de taille $N = 500$ et un PCE de degré $p = 3$.

B.3 Polynômes de chaos de Legendre et Hermite

Polynômes de Legendre :

$$\begin{cases} P_0(X_i) = 1 \\ P_{q+1}(X_i) = \frac{2q+1}{q+1}X_iP_q(X_i) - \frac{q}{q+1}P_{q-1}(X_i) \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Polynômes de Hermite :

$$\begin{cases} H_0(X_i) = 1 \\ H_{q+1}(X_i) = X_iH_q(X_i) - qP_{q-1}(X_i) \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Il est nécessaire que les facteurs X_i suivent les formes normalisées des distributions pour assurer l'orthogonalité des polynômes, $E[\phi_m(X_i)\phi_n(X_i)] = 0$ pour $m \neq n$.

Pour normaliser un paramètre X_i suivant une loi uniforme $\mathcal{U}(a; b)$, il faut appliquer :

$$X_{i,norm} = \frac{X_i - E[X_i]}{\frac{b-a}{2}}$$

Pour normaliser un paramètre X_i suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, il faut appliquer :

$$X_{i,norm} = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

B.4 Méthode d'AS multivariée basée sur la covariance

Dans cette section, la sortie multivariée est notée Y_r avec $r = 1, \dots, m$. Dans le cas d'une sortie variant dans le temps, r représente le temps.

B.4.1 Décomposition de la covariance

Dans [Gamboa et al. (2013)], la matrice de covariance $C(Y_1, \dots, Y_m)$ (définie semi-positive) peut être décomposée de la même manière que la décomposition de la variance (3.2) telle que :

$$C(Y_1, \dots, Y_m) = \sum_{i=1}^k C_i(Y_1, \dots, Y_m) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} C_{i,j}(Y_1, \dots, Y_m) + \dots + C_{1,2,\dots,k}(Y_1, \dots, Y_m) \quad (\text{B.18})$$

avec $C_i(Y_1, \dots, Y_m)$ la covariance induite par X_i , $C_{i,j}(Y_1, \dots, Y_m)$ la covariance induite par les interactions entre X_i et X_j , etc.

La matrice de covariance $C(Y)$ (respectivement pour $C_i(Y)$) de dimension $m \times m$ est définie par

$$C(Y_1, \dots, Y_m) = \begin{pmatrix} Var(Y_1) & Cov(Y_1, Y_2) & \cdots & Cov(Y_1, Y_m) \\ Cov(Y_2, Y_1) & Var(Y_2) & & Cov(Y_2, Y_m) \\ \vdots & Cov(Y_3, Y_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(Y_m, Y_1) & Cov(Y_m, Y_2) & \cdots & Var(Y_m) \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

Pour obtenir une mesure de l'impact du paramètre X_i sur la sortie, la formule des indices de sensibilité (3.4) est étendue. Pour obtenir la somme des variances induites par X_i , la trace de C_i doit être calculée [Gamboa et al. (2013)]. Les indices multivariés basés sur la covariance sont donc des scalaires obtenus grâce à :

$$S_{cov,i} = \frac{Tr(C_i)}{Tr(C)} \quad ST_{cov,i} = \frac{\sum_{l \neq i} Tr(C_l)}{Tr(C)} \quad (B.20)$$

Une équivalence entre l'indice de sensibilité généralisé (B.28) et l'indice multivarié (B.20) peut être mise en évidence.

$$GS_i = \sum_{q=1}^Q \frac{\lambda_q}{V(Y)} S_{i,q} = \sum_{q=1}^Q \frac{\lambda_q}{V(Y)} \frac{V_{i,q}}{\lambda_q} = \sum_{q=1}^Q \frac{V_{i,q}}{V(Y)} = \frac{Tr(C_i)}{Tr(C)} = S_{cov,i} \quad (B.21)$$

Pour obtenir les indices de sensibilité, il est essentiel d'estimer la trace de la matrice de covariance de Y . Il existe plusieurs estimateurs décrits dans [Garcia-Cabrejo and Valocchi (2014)] et présentés dans la section suivante.

B.4.2 Estimation de l'indice multivarié

Estimateur de Monte-Carlo

L'estimation de l'indice multivarié principal proposée dans [Gamboa et al. (2013)] est basée sur un estimateur "pick-freeze" :

$$\widehat{S}_{cov,i} = \frac{\sum_{r=1}^m \left(\sum_{n=1}^N Y_{n,r} Y_{n,r} | X_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N \frac{Y_{n,r} + Y_{n,r} | X_i}{2} \right)^2 \right)}{\sum_{r=1}^m \left(\frac{(Y_{n,r})^2 + (Y_{n,r} | X_i)^2}{2} - \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N \frac{Y_{n,r} + Y_{n,r} | X_i}{2} \right)^2 \right)} \quad (B.22)$$

Proposition :

L'estimateur Sobol-Monte-Carlo (B.7) devient :

$$\widehat{S}_{cov,i} = \frac{\sum_{r=1}^m \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_{n,r}^{(1)} Y_{n,r}^{(2 \sim i)} - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_{n,r}^{(1)} \right)^2 \right)}{\sum_{r=1}^m \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(Y_{n,r}^{(1)} \right)^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_{n,r}^{(1)} \right)^2 \right)} \quad (B.23)$$

avec $Y_{n,r}^{(1)}$ la sortie calculée avec l'échantillon 1 et $Y_{n,r}^{(2 \sim i)}$ la sortie calculée avec les paramètres $X_{j \neq i}$ de l'échantillon 2 et X_i de l'échantillon 1.

Estimateur basé sur les Polynômes du Chaos (PCE)

L'estimateur basé sur les PCE utilisés dans les études précédentes peut également être utilisé pour obtenir les covariances.

La sortie multivariée peut être approximée par :

$$Y_r \approx \sum_{j=0}^M a_{j,r} \psi_j(X_1, \dots, X_k)$$

où X_i sont les paramètres normalisés, ψ_j des polynômes qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres X_i , $a_{j,r} \in \mathbb{R}$ des coefficients à déterminer par identification, j représente l'ordre de développement et $M + 1$ le nombre de coefficients.

A partir de l'approximation, la moyenne, la variance et la covariance peuvent être identifiées :

— la moyenne :

$$\widehat{Y}_r = a_{0,r} \quad (j=0) \quad (\text{B.24})$$

— la variance :

$$\widehat{Var}[Y_r] = \sum_{j=1}^M a_{j,r}^2 E[\psi_j^2] \quad (\text{B.25})$$

— la covariance :

$$\widehat{Cov}[Y_1, Y_2] = \sum_{j=1}^M a_{j,1} a_{j,2} E[\psi_j^2] \quad (\text{B.26})$$

Les indices de sensibilité multivariés peuvent donc être estimés par :

$$\widehat{S}_{cov,i} = \frac{\sum_{r=1}^m \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_i} a_{\alpha,r}^2 E[\psi_\alpha^2] \right)}{\sum_{r=1}^m \left(\sum_{j=1}^M a_{j,r}^2 E[\psi_j^2] \right)} \quad \widehat{ST}_{cov,i} = \frac{\sum_{r=1}^m \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{\#i}} a_{\alpha,r}^2 E[\psi_\alpha^2] \right)}{\sum_{r=1}^m \left(\sum_{j=1}^M a_{j,r}^2 E[\psi_j^2] \right)} \quad (\text{B.27})$$

où \mathcal{I}_i correspond à l'ensemble des indices de polynômes ψ_j qui dépendent uniquement de X_i et $\mathcal{I}_{\#i}$ correspond à l'ensemble des indices de polynômes ψ_j qui dépendent de X_i et toutes ses interactions.

B.4.3 Application de la décomposition en covariance sur le modèle de TTV

Les différentes approches vont être comparées sur le cas d'étude présenté dans le Chapitre 3. La période de 5 mois de juin à octobre 2011 est étudiée ce qui représente $T = 3455$ h en simulation, la matrice de sortie sera donc de dimension $N \times T$. Les résultats qui sont comparés dans cette section correspondent à l'étude de l'influence des paramètres du substrat avec des intervalles d'incertitudes différents que ceux dans le Chapitre 3. Ces intervalles sont donnés dans la Table B.2. La méthode d'analyse de sensibilité privilégiée est l'approximation par développement en polynôme du chaos (PCE) avec un degré maximal de $p = 3$ et un échantillon de taille $N = 500$ généré avec une séquence de Sobol. **AS séquentielle**

Les résultats de l'approche séquentielle sont représentés sur la Figure B.1.

TABLE B.2 – Intervalle d'incertitude des paramètres du substrat pour l'étude de l'Annexe B

Paramètres incertains	Unité	Intervalle d'incertitude	
		Inférieur	Supérieur
θ_r	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.04	0.06
θ_s	$\text{m}^3 \text{ m}^{-3}$	0.44	0.46
α	m^{-1}	7.6	7.9
n	-	1.3	1.4
K_s	10^{-3} m s^{-1}	1.95	2.36
l	-	2.8	3

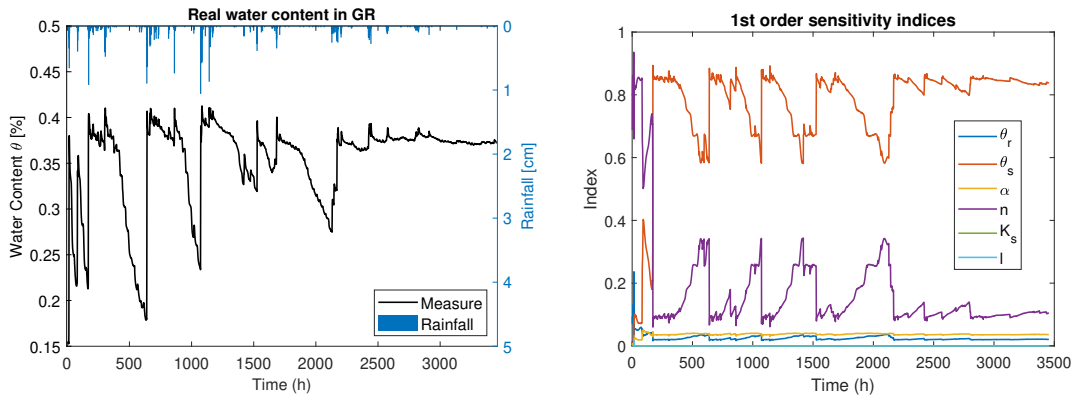


FIGURE B.1 – Résultats AS séquentielle

AS multivariée basée sur l'ACP

En appliquant l'ACP puis l'AS sur chacune des composantes, la Figure B.2 met en évidence que la dynamique des indices peut être résumée en deux indices.

Lamboni et al. (2011) introduit également des indices uniques qui donnent l'influence de X_i sur Y en prenant en compte les corrélations. Il s'agit d'indices de sensibilité généralisés définis par :

$$GS_i = \sum_{q=1}^Q \frac{\lambda_q}{V(Y)} S_{i,q} \quad GST_i = \sum_{m \neq i} GS_m \quad (\text{B.28})$$

Ces deux indices peuvent être combinés pour obtenir un indice unique dit généralisé en utilisant la formule (B.28). Les indices généralisés principaux et total sont représentés sur la Figure B.3.

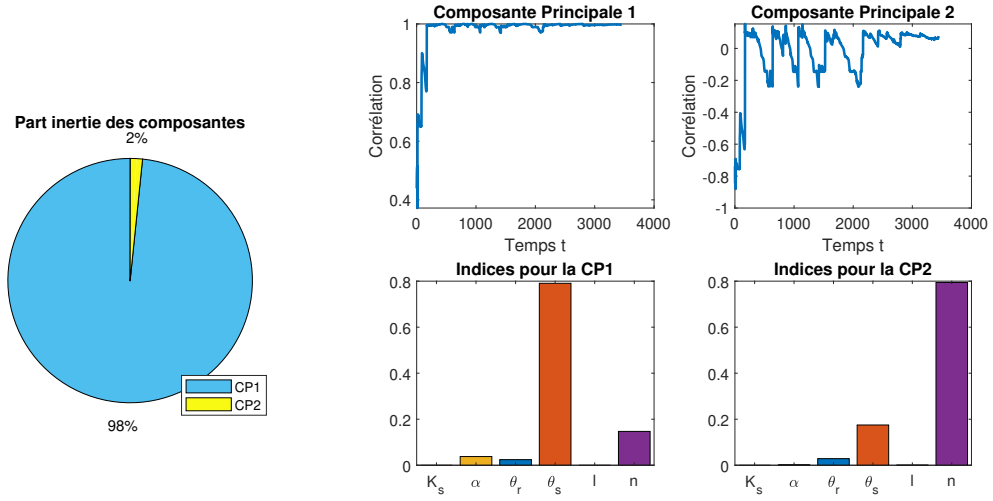


FIGURE B.2 – Résultats AS multivariée basée sur l'ACP

AS multivariée basée la décomposition de la covariance

En appliquant la méthode d'AS multivariée basée sur la décomposition de la covariance décrite dans la Section B avec l'estimateur PCE ($p = 3$, séquence de Sobol $N = 500$) (B.20), les résultats obtenus sont représentés sur la Figure B.4 ainsi que dans la Table B.3. Les résultats obtenus avec la décomposition de la covariance et l'indice de sensibilité généralisé calculé avec l'ACP sont identiques.

TABLE B.3 – Résultats obtenus avec ACP (GS_i et GST_i) et avec la décomposition de la covariance ($S_{cov,i}$ et $ST_{cov,i}$)

	GS_i	GST_i	$S_{cov,i}$	$ST_{cov,i}$
θ_R	0,0244	0,0244	0,0244	0,0245
θ_S	0,7807	0,7807	0,7808	0,7809
α	0,0371	0,0373	0,0372	0,0374
n	0,1573	0,1575	0,1573	0,1576
K_s	$5,82 \cdot 10^{-9}$	$2,36 \cdot 10^{-6}$	$4,92 \cdot 10^{-6}$	$1,62 \cdot 10^{-5}$
l	$5,49 \cdot 10^{-9}$	$3,13 \cdot 10^{-6}$	$7,27 \cdot 10^{-6}$	$2,03 \cdot 10^{-5}$

B.4.4 Conclusion

Les deux méthodes d'AS multivariée présentées dans cette section permettent d'obtenir un indice unique qui résume l'évolution des indices de sensibilité séquentielle. L'avantage de l'ACP est que l'étape de réduction de dimension met en évidence les tendances d'évolution des indices et permet d'obtenir un indice par tendance. Le nombre d'indices

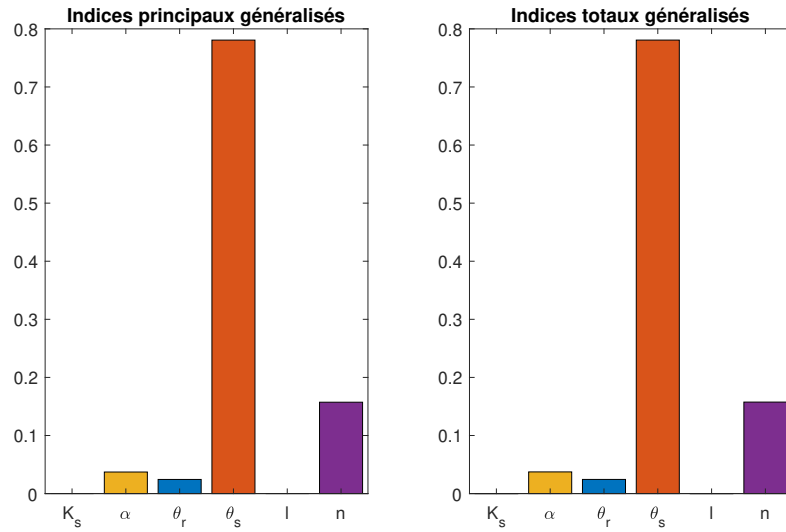


FIGURE B.3 – Résultats AS basée sur l'ACP : Indices généralisés

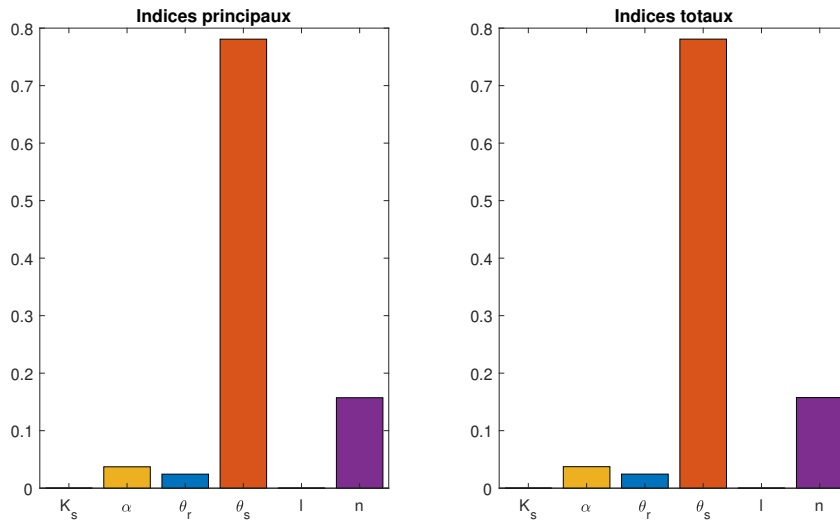


FIGURE B.4 – Résultats AS basée sur la décomposition de la covariance

est donc réduit par rapport à l'AS séquentielle mais l'évolution est résumée par tendance. La technique de décomposition de la covariance est une technique plus directe pour obtenir l'indice unique de résumé.

Annexe C

Tutoriel pour la configuration d'un projet-type Hydrus

Tutoriel Hydrus 1D[®]

Génération du dossier « projet_hydrus » de « AS_H1D_Guide.pdf »

Le logiciel Hydrus 1D[®] permet de simuler le comportement de sol. L'implémentation de l'équation de Richards, qui décrit l'infiltration de l'eau dans un milieu poreux non saturé, permet d'obtenir la teneur en eau en un point donné du sol simulé.

Ce document permet de faire le lien entre l'interface graphique et les fichiers Hydrus en indiquant les variables et les fichiers dans lesquels elles se trouvent. Pour compléter le document « AS_H1D_Guide.pdf », les indications de ce tutoriel permettront d'obtenir le dossier « projet_hydrus » (Figure 1) avec les paramètres d'une toiture végétalisée (Figure 2).

- 📁 A_Level.out
- 📁 ATMOSPH.IN
- 📁 Balance.out
- 📄 DESCRIPT.TXT
- 📁 FIT.IN
- 📁 Fit.out
- 📄 HYDRUS1D.DAT
- 📁 I_Check.out
- 📁 Nod_Inf.out
- 📁 Obs_Node.out
- 📄 PROFILE.DAT
- 📁 Profile.out
- 📁 Run_Inf.out
- 📁 SELECTOR.IN
- 📁 T_Level.out

Figure 2 : Fichiers du dossier "projet_hydrus"

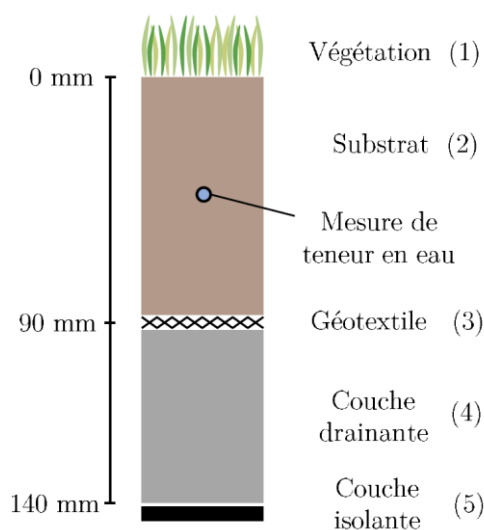
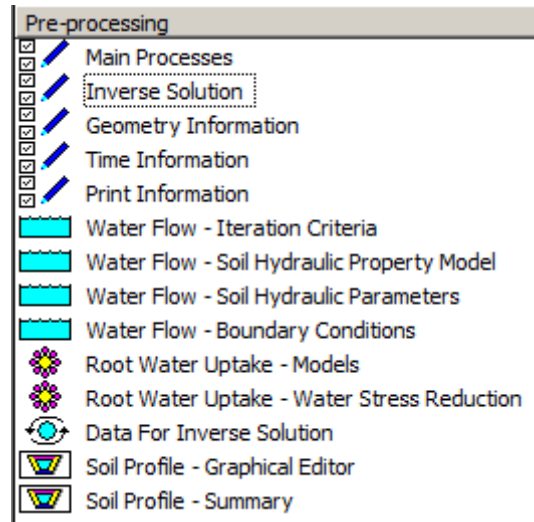
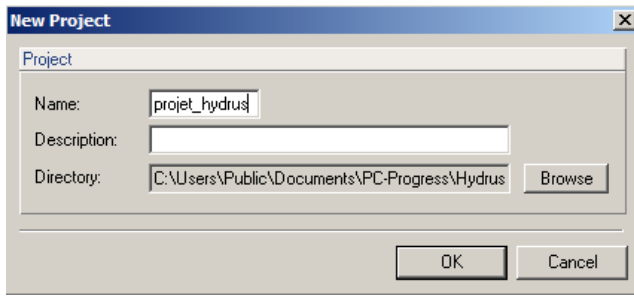


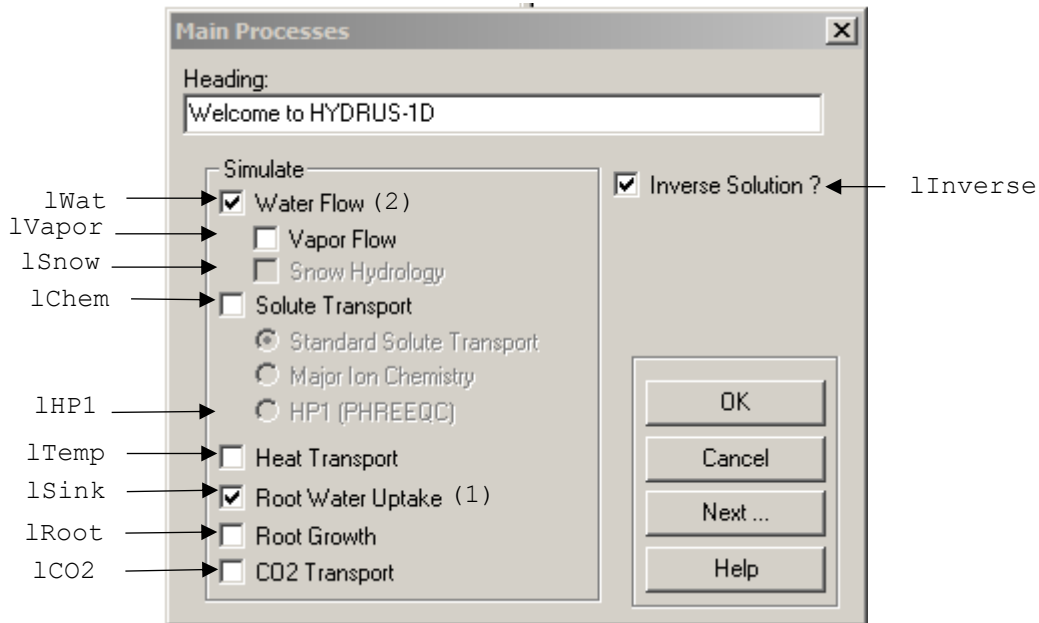
Figure 2 : Toiture végétalisée modélisée

Pour ce cas, 481 données de pluviométrie (1 par heure) ainsi que 481 mesures de teneur en eau sont à disposition (nom_fichier.csv).

0. File > New >



1. Main Processes : choix des calculs effectués (SELECTOR.IN BLOC A)



On cherche à calculer la teneur en eau dans le substrat (2) en prenant compte la végétation (1) (Figure 1).

- **Water Flow** permet de calculer la teneur en eau en utilisant l'équation de Richards qui décrit l'écoulement en milieu poreux non-saturé :

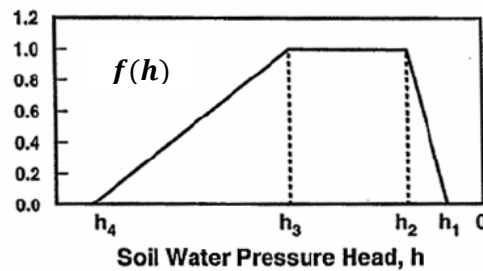
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \cos(\alpha) \right) \right] - S$$

Avec θ la teneur en eau, K la conductivité hydraulique de l'eau, h le potentiel de pression et S la source ou puit et α correspond ici à l'inclinaison de l'axe = 0 pour un axe vertical donc $\cos(\alpha) = 1$.

- **Root Water Uptake** permet de prendre en compte l'absorption de l'eau par les racines des plantes, le terme S de l'équation de Richards est dans ce cas un puit et est non nul.

$$S(h) = f(h)S_p$$

Avec S volume d'eau absorbé par les plantes, S_p potentiel d'absorption des plantes et $f(h)$ une fonction qui décrit le comportement d'absorption en fonction du potentiel de pression h .



Les paramètres h_1 , h_2 , h_3 et h_4 seront déclarés dans **11. Root Water Uptake – Water Stress Reduction**.

- **Inverse Solution** permet d'estimer les paramètres hydrauliques du sol du modèle à partir de données indiquées dans **13. Data for Inverse Solution**.

Remarques :

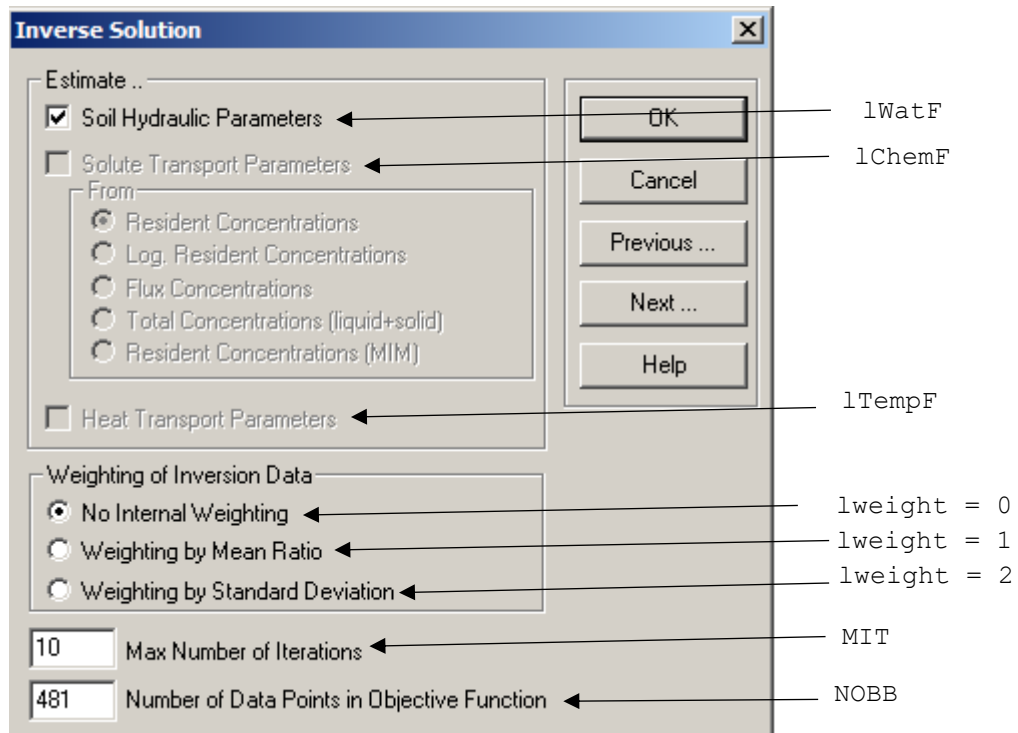
- Toutes les variables indiquées sont dans le BLOC A du fichier SELECTOR.IN et sont true ou false en fonction de ce qui est sélectionné.
- Vapor Flow correspond à l'évaporation ajoutée à l'écoulement

$$\frac{\partial \theta_T(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(K + K_{vh}) \left(\frac{\partial h}{\partial x} + \cos \alpha \right) + (K_{LT} + K_{vT}) \frac{\partial T}{\partial x} \right] - S(h)$$

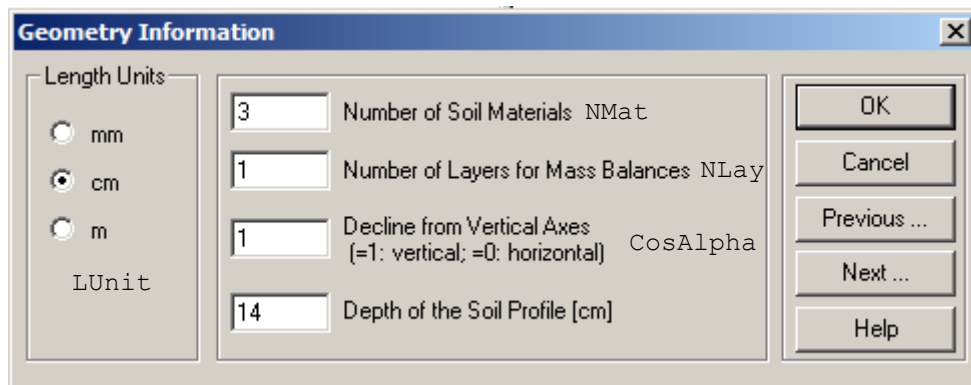
Avec $\theta_T = \theta + \theta_v$ la teneur en eau liquide et vapeur, K la conductivité isothermique hydraulique du liquide, K_{vh} la conductivité isothermique hydraulique de la vapeur, K_{LT} la conductivité thermique hydraulique du liquide, K_{vT} la conductivité thermique hydraulique de la vapeur, T la température.

- Solute Transport correspond au transport de solution liquide, solide ou gazeux.
- Heat Transport correspond aux transferts de chaleur avec ou sans évaporation.
- Root Growth permet de définir le modèle de croissance des racines (uniquement possible avec Root Water Uptake sélectionné).
- CO2 Transport permet de prendre en compte la présence de CO2 dans de substrat.

2. Inverse Solution : ajustement des paramètres hydrauliques (FIT.IN)



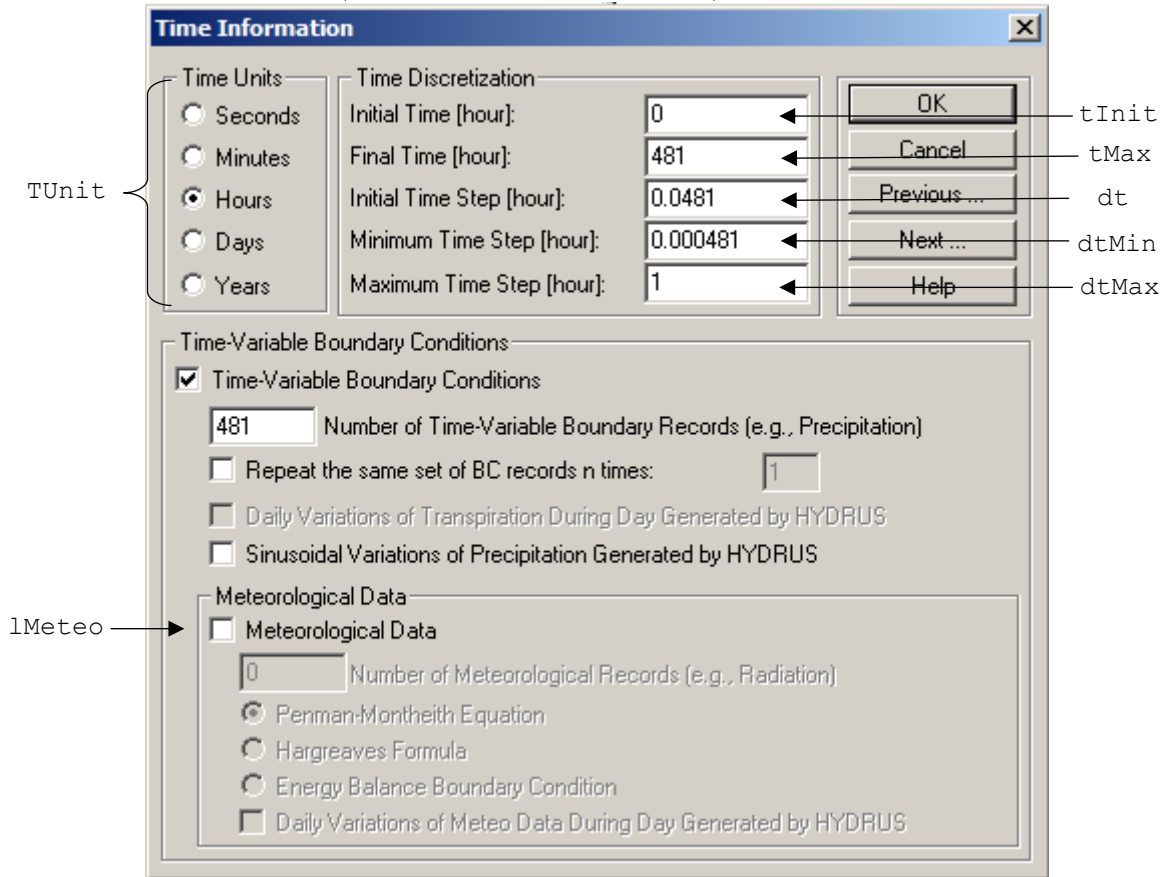
3. Geometry Information (SELECTOR.IN BLOC A et PROFILE.DAT)



Remarque :

- La spécificité de chaque matériau est définie dans **8. Water Flow – Soil Hydraulic Parameters** et sa répartition dans **14. Soil Profile – Graphical Editor**.

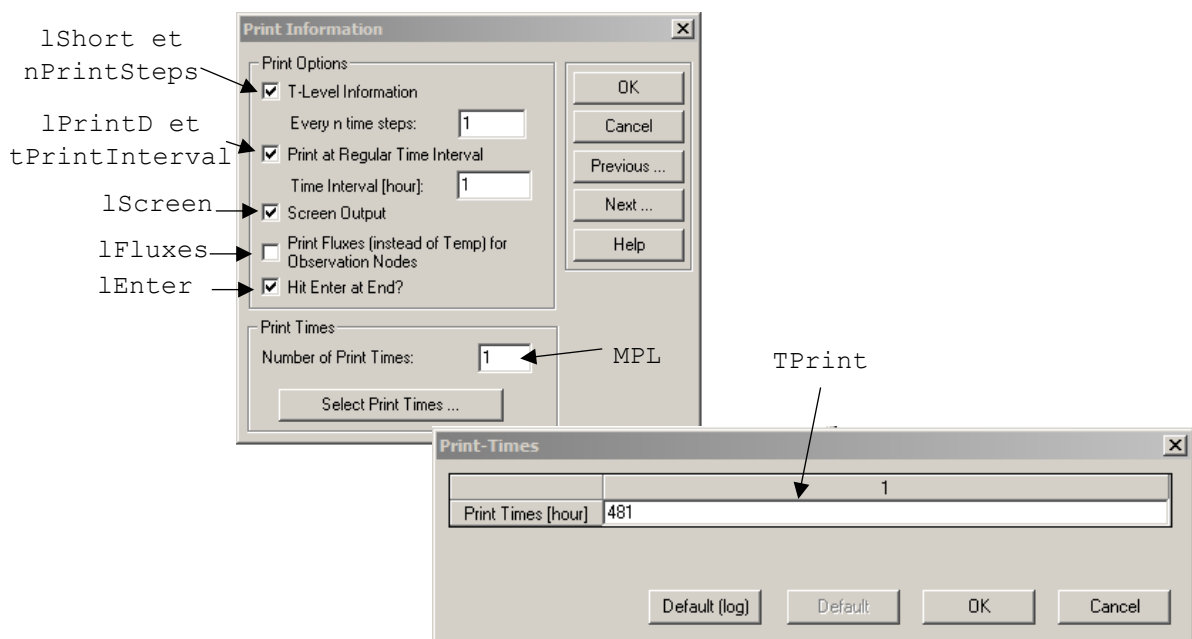
4. Time Information (SELECTOR.IN BLOC C)



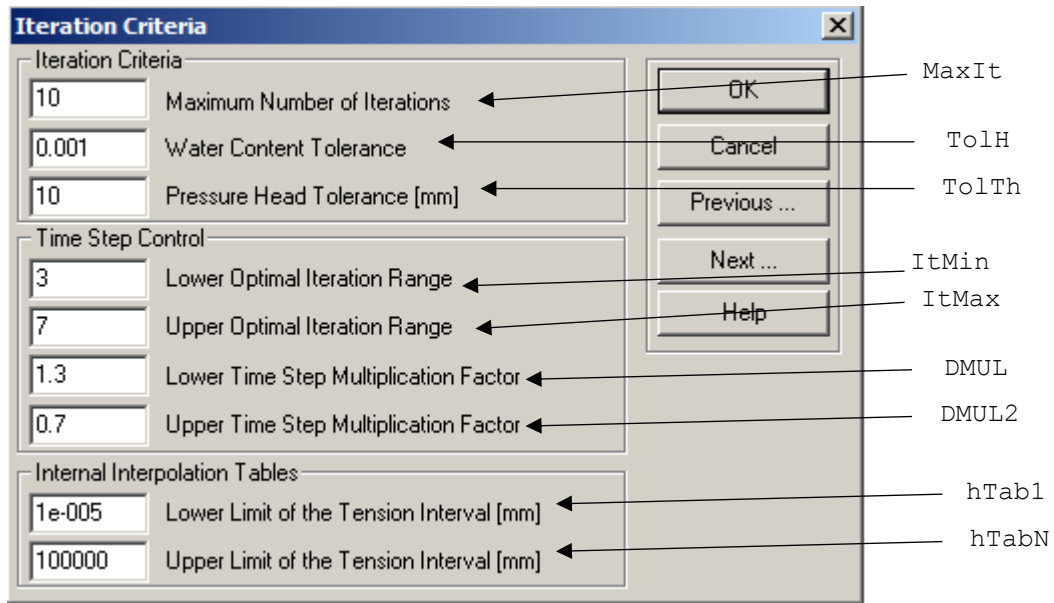
Discrétisation (voir 7.1 Doc Hydrus)

$$- dtMin \leq dt \leq dtMax$$

5. Print Information (SELECTOR.IN BLOC C)



6. Water Flow – Iteration Criteria (SELECTOR.IN BLOC B et BLOC C)



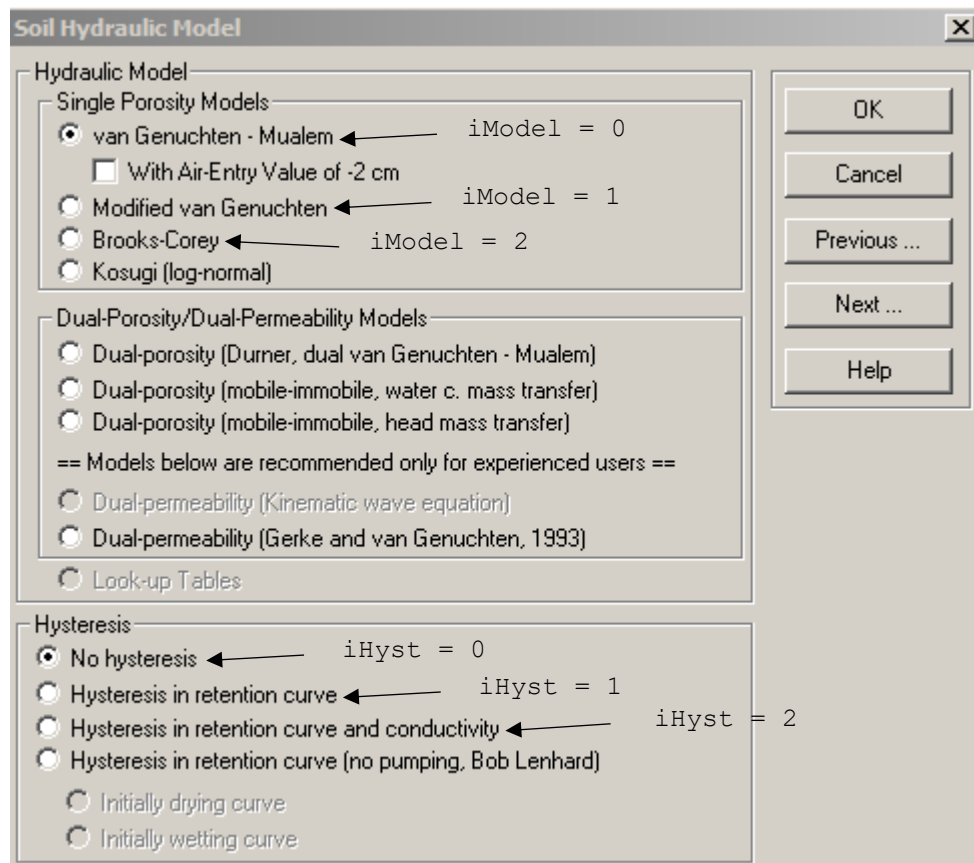
Remarques :

- Model et Hysteresis correspond au variable de Water Flow – Soil Hydraulic Property Model – SELECTOR.IN

Discretisation (voir 7.1 Doc Hydrus)

- $dmul \geq 1.0$ et $dmul2 \leq 1.0$

7. Water Flow – Soil Hydraulic Property Model (SELECTOR.IN BLOC B)



Remarque :

- Les différents types de modèle possibles sont indiqués dans la partie 2 de la Doc d'Hydrus.

8. Water Flow – Soil Hydraulic Parameters (SELECTOR.IN et FIT.IN)

Water Flow Parameters - Inverse Solution - Material 1

	Qr	Qs	Alpha	n	Ks	l
Initial Estimate	0.046	0.4536	0.077729	1.3572	778.32	0.5
Minimum Value	0.03	0	0	0	0	0
Maximum Value	0.07	0	0	0	1000	0
Fitted ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Soil Catalog for Initial Estimate:

Water Flow Parameters - Inverse Solution - Material 2

	Qr	Qs	Alpha	n	Ks	l
Initial Estimate	0	0.86	0.111	2.5	52.2	0.5
Minimum Value	0	0	0	0	0	0
Maximum Value	0	0	0	0	0	0
Fitted ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

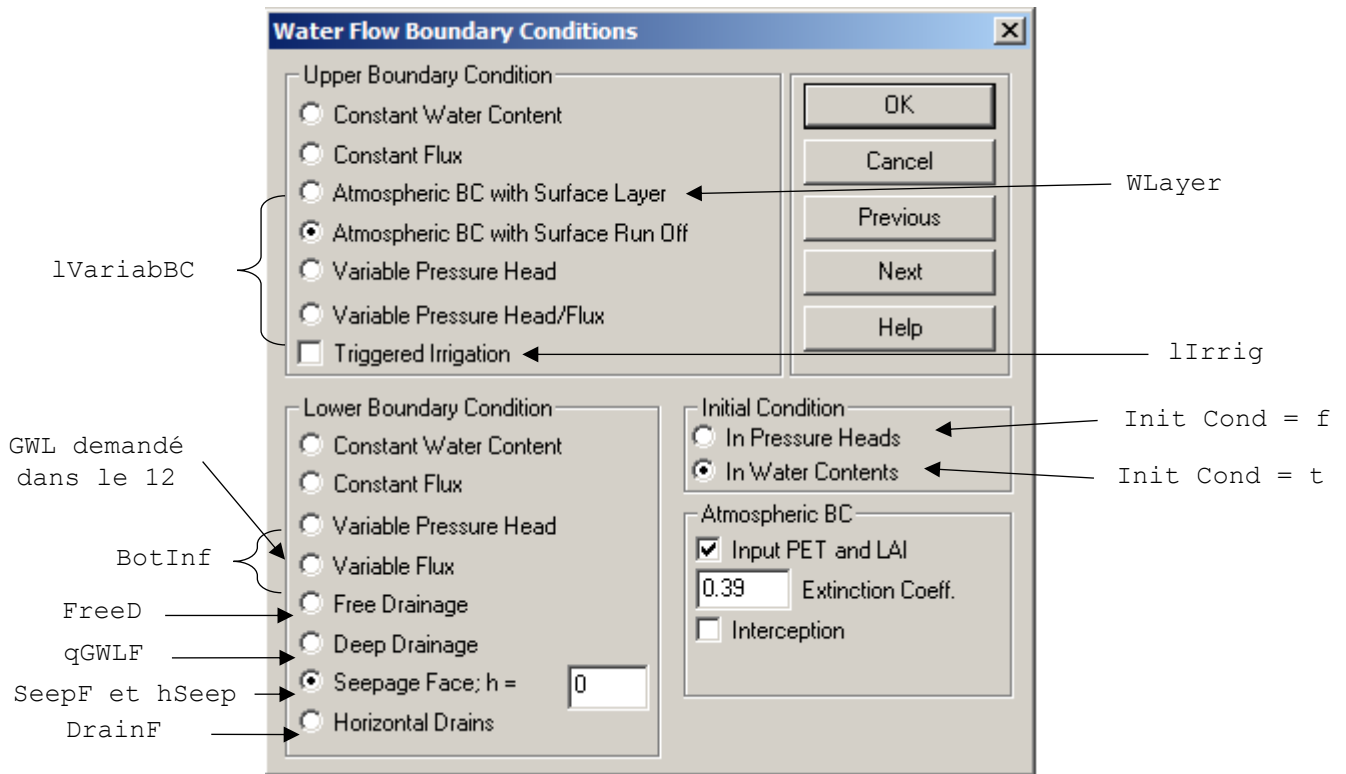
Water Flow Parameters - Inverse Solution - Material 3

	Qr	Qs	Alpha	n	Ks	l
Initial Estimate	0.05	0.24	0.059	1.48	1191.6	0.5
Minimum Value	0	0	0	0	0	0
Maximum Value	0	0	0	0	0	0
Fitted ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Remarques :

- Si le sol est composé de plusieurs matériaux, il faut cliquer sur « Next... » pour accéder aux paramètres du paramètre suivant.
- Dans le fichier FIT.IN, les lignes sont dans l'ordre suivant : « Initial Estimate », « Fitted », « Minimum Value » et « Maximum Value ». Quand la case de « Fitted ? » est décochée on a 0 et 1 si elle est cochée, permet d'ajuster les paramètres.

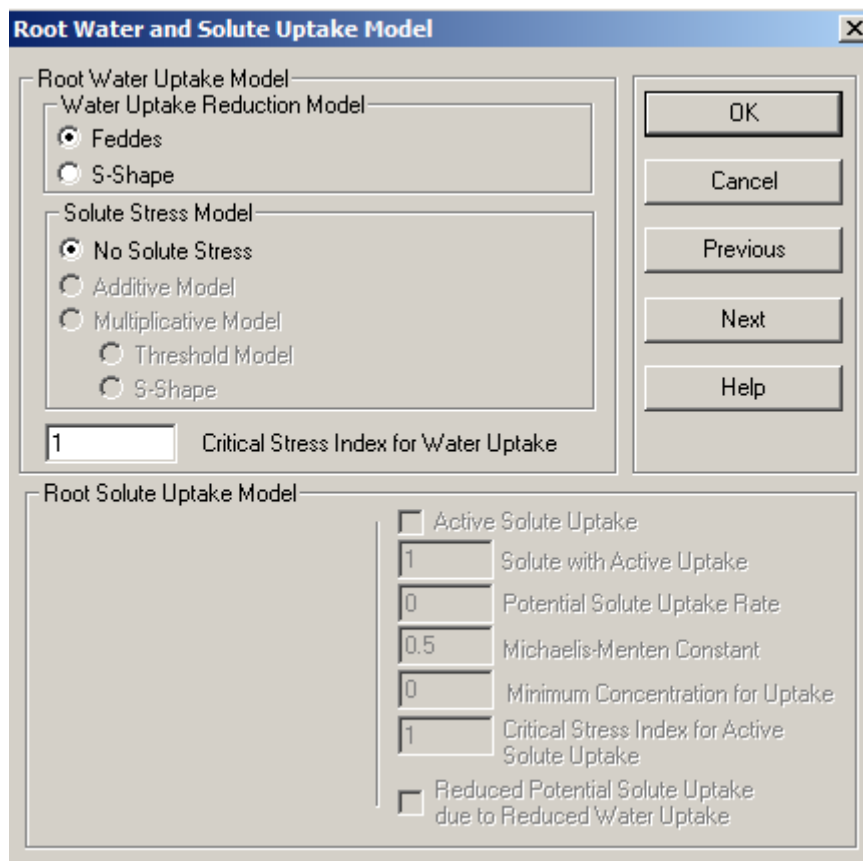
9. Water Flow - Boundary Conditions (SELECTOR.IN BLOC B)



Remarques :

- Atmospheric BC with Surface Layer permet d'appliquer directement les conditions données dans ATMOSPH.IN sans prendre en compte un ruissellement.
- Atmospheric BC with Surface Run Off prise en compte du ruissellement
- TopInf et BotInf traduisent respectivement une dépendance à une condition limite sur la surface ou à la limite basse.
- $GWL = \text{GroundWater Level}$
- Quand $qGWL = t$, 3 variables se rajoutent : $GWL0L$ Référence de GWL position, Aqh et Bqh les paramètres de la relation $q(GWL)$
- Quand $DrainF = t$, 5 variables se rajoutent : Drain System, Drain Depth, Drain Spacing, Entrance Resistance et Drains Parameters
- Input PET et LAI permettent d'indiquer dans **12. Variable Boundary conditions** le potentiel d'évapotranspiration $potET$ et l'indice de surface foliaire LAI à chaque instant.

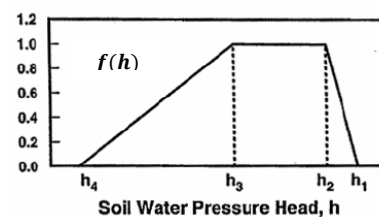
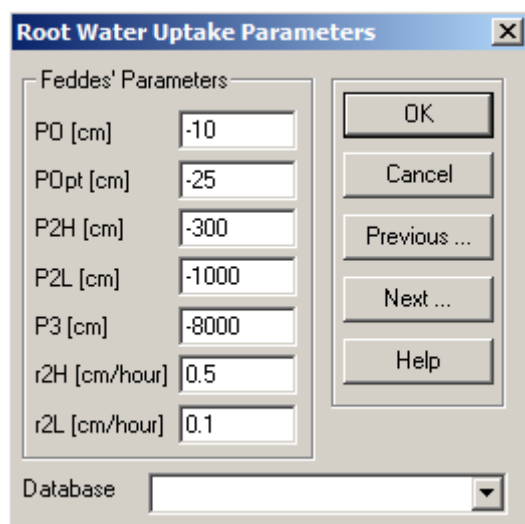
10. Root Water Uptake - Models (SELCTOR.IN BLOC G)



Remarque :

- Feddes correspond à la forme de la fonction $f(x)$ qui décrit l'absorption des plantes.

11. Root Water Uptake – Water Stress Reduction (SELECTOR.IN BLOC G)



$$h_1 = PO$$

$$h_2 = PO_{pt}$$

$$h_3 = \begin{cases} P2H \text{ pour } T_a \geq r2h \\ P2L \text{ pour } T_a \leq r2L \\ p2H + \frac{P2L - P2H}{r2H - r2L} \times (r2H - T_p) \text{ pour } r2L < T_p < r2H \end{cases}$$

$$h_4 = P3$$

Où T_a est l'actuel taux de transpiration et T_p le potentiel du taux de transpiration

(Voir p 202 Doc Hydrus)

12. Variable Boundary conditions (ATMOSPH.IN)

	Time [hour]	Precip. [cm/hour]	potET [cm/hour]	hCritA [cm]	LAI
1	1	0	0.0233333	100000	3
2	2	1.06	0.0233333	100000	3
3	3	0	0.0233333	100000	3
4	4	0	0.0233333	100000	3
5	5	0	0.0233333	100000	3
6	6	0	0.0233333	100000	3
7	7	0.12	0.0233333	100000	3
8	8	0.04	0.0233333	100000	3
9	9	0	0.0233333	100000	3
10	10	0.58	0.0125	100000	3
11	11	0.18	0.0125	100000	3
12	12	0.19	0.0125	100000	3
13	13	0.56	0.0125	100000	3
14	14	0.14	0.0125	100000	3

Remarques :

- Precip. correspond aux précipitations mesurées et fournies dans le fichier « nom_fichier.csv »
- hCritA correspond à la pression à laquelle le sol va commencer à transpirer.
- potET (rSoil) et LAI (rRoot) permettent d'évaluer l'effet des plantes sur la teneur en eau. potET et LAI sont calculés par les experts du domaine.

13. Data for Inverse Solution (FIT.IN)

	X	Y	Type	Position	Weight
1	1	0.2337	2	1	1
2	2	0.3167	2	1	1
3	3	0.3907	2	1	1
4	4	0.3846	2	1	1
5	5	0.3799	2	1	1
6	6	0.3763	2	1	1
7	7	0.3735	2	1	1
8	8	0.38	2	1	1
9	9	0.381	2	1	1
10	10	0.3854	2	1	1
11	11	0.4093	2	1	1
12	12	0.3985	2	1	1
13	13	0.4126	2	1	1
14	14	0.4079	2	1	1
15	15	0.4065	2	1	1

Show list boxes (not recommended for large data files)







Remarques :

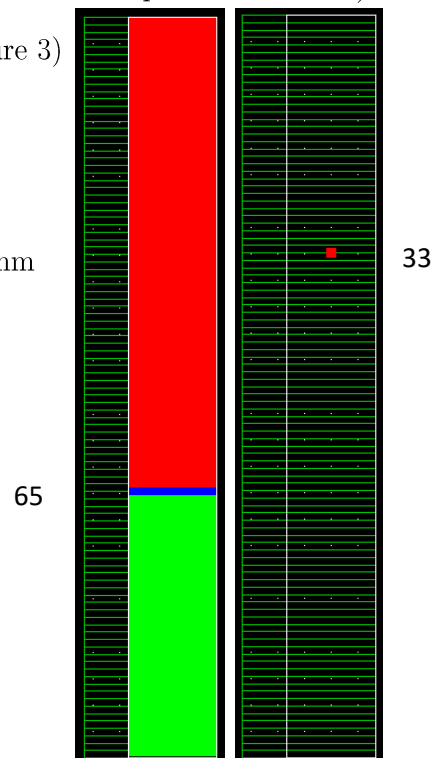
- Ces données sont celles du fichier FIT.IN avec X qui correspond à HO(N), Y à FOS, Type à ITYPE, Position à POS et Weight WTS. En fonction du type sélectionné, les colonnes ont différentes significations. Ici, le type 2 est le débit d'eau (Water Content) mesuré en certains points. Donc X correspond au temps, Y aux données observées, Position à la position du nœud observé et weight le poids associé à la donnée.
- Copier-coller possible avec Excel !


14. Soil Profile – Graphical Editor (PROFILE.DAT)

Le fichier PROFILE.DAT comprend la discrétisation spatiale du sol, les points d'observation et la répartition des matériaux.

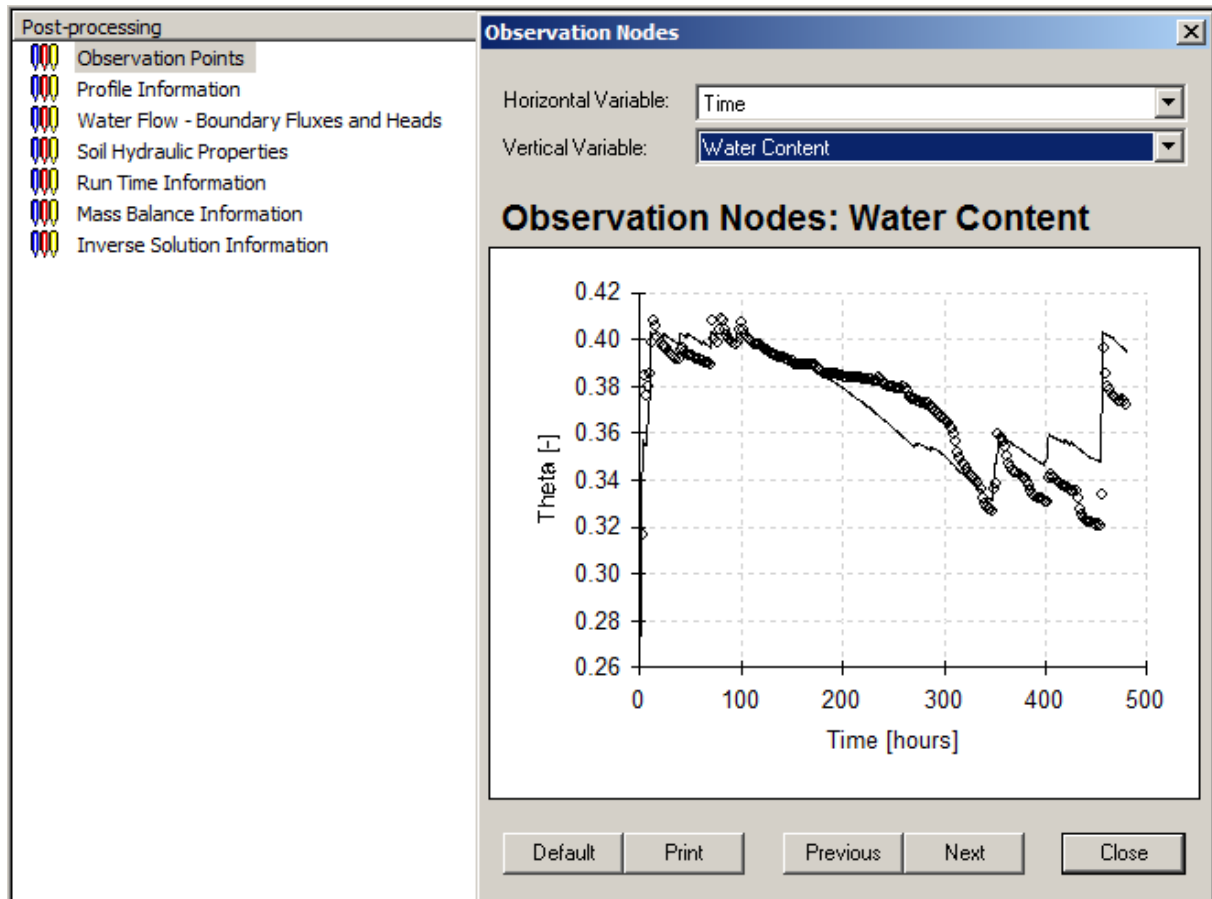
Dans le fichier PROFILE.DAT est décomposé en 3 parties :

- Définition du nombre de nœuds dans  (101 dans le cas traité)
- Définition des nœuds fixes :  (non utilisé dans le cas traité)
 - o : insertion de nœuds fixes à une certaine profondeur : surface, changement de matériaux, fond
 - o : indication sur la densité de nœud présent au-dessus et en-dessous
- Définition des Conditions Initiales dans  (0.23 en haut et en bas pour le cas traité)
- Définition de la répartition des Matériaux  (voir Figure 3)
- Définition des couches 
- Définition des nœuds observés : 
 - o 1 : nombre de nœuds observés
 - o 33 : numéro des nœuds observés correspond à 45 mm



Après avoir enregistré, il suffit de cliquer sur  pour simuler le modèle.

On obtient tous les fichiers .OUT dans le dossier « projet_hydrus » et l'on peut voir les résultats sur Hydrus dans Observation Points.



Annexe D

Guide d'utilisation des codes Matlab pour faire une AS Matlab et Hydrus

Analyse de sensibilité avec MATLAB et appel à HYDRUS

Axelle HEGO

Juin 2019

Introduction

Ce document a pour objectif d'accompagner la prise en main de l'application de l'analyse de sensibilité (AS) avec Matlab sur un modèle de toiture végétalisée (TTV). Il est accompagné du dossier "PROJET" détaillé dans la section 1.

Les documents complémentaires pour comprendre les parties théoriques sont l'étude bibliographique sur l'AS de mars 2019 et la première version de l'étude bibliographique sur les TTV de mai 2019.

Table des matières

1	Organisation des fichiers	2
1.1	Partie Hydrus	2
1.2	Partie Matlab	3
2	H1D.m	3
3	Description des fonctions de "function_AS"	4
3.1	interpolation.m	4
3.2	legendre.m	4
3.3	modifier_selector.m	4
3.4	parcours_fichier_selector.m	5
3.5	polychaos.m	5
3.6	recup_data_atmosph.m	6
3.7	recup_data_fit.m	6
3.8	recup_data_obsnode.m	7

1 Organisation des fichiers

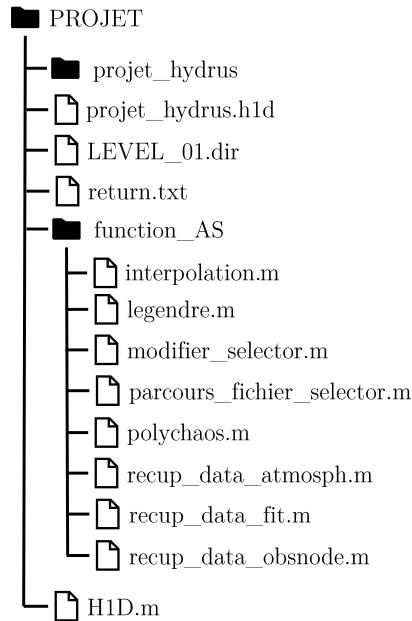


FIGURE 1 – Arborescence du projet

La figure 1 représente l'arborescence du dossier "PROJET" fourni avec ce document. Il contient une partie relative au modèle de TTV avec les fichiers de Hydrus (.h1d, .dir, .in et .out) et une partie AS avec les fichiers Matlab (.m).

1.1 Partie Hydrus

La génération et les explications détaillées sur les fichiers Hydrus sont dans le document "Tutoriel_Hydrus.pdf".

Les fichiers liés à Hydrus sont :

- projet_hydrus.h1d qui contient toutes les paramétrisations d'Hydrus au niveau de l'interface graphique. Il ne peut être ouvert d'avec Hydrus et permet de générer les fichiers du dossier "projet_hydrus".
- les fichiers du dossier "projet_hydrus" :
 - SELECTOR.IN qui contient la paramétrisation d'Hydrus pour effectuer les simulations. Les caractéristiques du sol y seront modifiée grâce à H1D.m.
 - ATMOSPHER.IN qui contient les données de pluviométrie. Ces données sont récupérées et visualisées avec H1D.m.
 - FIT.IN qui contient les données mesurées (réelles). Ces données sont récupérées et visualisées avec H1D.m.

- OBS_NODE.OUT qui contient les données simulées. Ces données sont récupérées, moyennées et visualisées avec H1D.m. Les indices de sensibilité sont calculés à partir de ces données.
- LEVEL_01.dir qui contient l'adresse du dossier "projet_hydrus", nécessaire lors de l'appel d'Hydrus avec Matlab.
- return.txt qui contient la caractère "Enter", nécessaire lors de l'appel d'Hydrus avec Matlab.

1.2 Partie Matlab

Les fichiers liés à Matlab sont H1D.m et les fichiers du dossier "fonction_AS", ils sont détaillés dans les sections suivantes.

2 H1D.m

Le fichier H1D.m est le fichier principal. Il doit être situé à la racine du projet Hydrus-1D généré au préalable.

L'objectif de ce script est d'obtenir l'évolution des indices de sensibilité principaux et totaux pour un set de données sans avoir à générer des N données de simulation à la main avec Hydrus.

Ce fichier utilise les fonctions contenues dans le dossier "fonction_AS", elles sont indiquées grâce au `addpath` au début du script. Il est essentiel de mettre à jour le nom du dossier "projet_hydrus" qui conditionne les adresses des SELECTOR.IN, ATMOSPHERE.IN, FIT.IN et OBS_NODE.OUT utilisées par Matlab.

Etapes :

- Génération d'un échantillon de taille N
- Appel d'Hydrus pour chacune des N combinaisons de paramètres (N simulations)
- Construction d'un tableau de N lignes contenant les données de sortie d'Hydrus
- En cas de besoin, traitement du tableau pour obtenir une matrice de sortie Y de dimension $N \times T$
- Calcul des indices de sensibilité à chaque instant
- Visualisation des indices

Remarque : En fonction de chaque combinaison de paramètres, Hydrus va réaliser une nouvelle discrétisation temporelle qui peut être différentes de la précédente. Or pour réaliser l'analyse de sensibilité, il faut une matrice de dimension $N \times T$ où les instants de simulations sont tous les mêmes. Donc si les sorties d'Hydrus ont des échelles temporelles différentes, il faut traiter les données en appliquant donc une interpolation, détaillée dans la section 3.1.

3 Description des fonctions de "function_AS"

3.1 interpolation.m

Etapes :

- choix de la discrétisation temporelle de référence : arbitrairement, la plus grande avec T instants
- interpolation des données de simulation sur la discrétisation de référence
- construction de la matrice de sortie de dimension $N \times T$

Entrées :

- le tableau contenant les matrices de sortie de Hydrus pour chacune des N simulations, ces matrices ont chacune une discrétisation temporelle différentes et donc une taille différente : `theta_sim_X` (X : n° du noeud)
- le tableau contenant les discrétisations temporelles de chaque simulation : `temps_sim`

Sorties :

- une matrice de dimension $N \times T$ contenant chacune des simulations interpolées : `theta_inter`
- la discrétisation temporelle de références (dim : $1 \times T$) : `temps_ref`

3.2 legendre.m

La fonction legendre.m permet de générer une matrice contenant des polynômes de Legendre de degré 1 à 8 pour la variable d'entrée

$$\begin{cases} P_0(X_i) &= 1 \\ P_{q+1}(X_i) &= \frac{2q+1}{q+1} X_i P_q(X_i) - \frac{q}{q+1} P_{q-1}(X_i) \end{cases} \quad (1)$$

Entrées :

- la variable des polynômes : `Xi_norm`
Remarque : dans notre cas, il est important pour le calcul des indices que la variable d'entrée soit le facteur incertain normalisé

Sorties :

- une matrice de dimension $N \times 8$ contenant le polynôme de degré 1 à 8 pour chaque échantillon

$$\text{polynome_legendre} = \begin{bmatrix} P_0(X_{i,1}) & \dots & P_8(X_{i,1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(X_{i,N}) & \dots & P_8(X_{i,N}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

3.3 modifier_selector.m

Etapes :

- ouverture du fichier pour lecture
- écriture dans le fichier
- fermeture du fichier

Entrée :

- l'adresse du fichier SELECTOR.IN : `adresse` ou `adresse_selector`

3.4 parcours_fichier_selector.m

Etapes :

- ouverture du fichier pour lecture
- parcours du fichier avec recherche de la ligne contenant les paramètres à modifier
- fermeture du fichier

Entrée :

- l'adresse du fichier SELECTOR.IN : `adresse` ou `adresse_selector`

Sorties :

- les données contenues dans le fichier SELECTOR.IN : `selector_data`
- la ligne à modifier (qui contient les paramètres) : `ligne_param`

3.5 polychaos.m

La fonction polychaos.m permet d'estimer les indices de sensibilité à chaque instant en utilisant la méthode de décomposition en polynôme du chaos. Cette méthode permet d'approximer le modèle complexe non-linéaire (Y) avec un polynôme particulier de degré élevé. Ce polynôme particulier est construit avec des polynômes dit du chaos de type Legendre.

$$Y \approx \sum a_j \psi_j(X_1, \dots, X_k) = \mathbf{Z} * \mathbf{B} \quad (3)$$

avec

- ψ_j : des polynômes qui dépendent d'un ou plusieurs facteurs X_i contenus dans \mathbf{Z}
- a_j des coefficients à déterminer par identification contenus dans \mathbf{B}

Les indices de sensibilité sont ensuite calculés avec :

- la variance :

$$Var[Y] = \sum E[\psi_j^2(X_1, \dots, X_k)] \quad (4)$$

- l'indice de sensibilité d'ordre 1 :

$$S_i = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_i} a_j^2 E[\psi_j^2(X_i)]}{Var[Y]} \quad (5)$$

où \mathcal{I}_i correspond à l'ensemble des indices de polynômes ψ_j qui dépendent uniquement de X_i .

- l'indice de sensibilité total :

$$S_{T_i} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}_{\#i}} a_j^2 E[\psi_j^2(X_i)]}{Var[Y]} \quad (6)$$

où $\mathcal{I}_{\#i}$ correspond à l'ensemble des indices de polynômes ψ_j qui dépendent de X_i et éventuellement d'autres facteurs.

Etapes :

- vérification des cohérences des dimensions, N simulations et T instants, et que le degré maximal des polynômes du métamodèle est inférieur à 8 (fonction adaptée jusqu'au degré 8)

- normalisation de l'échantillon
- construction de la matrice **degre** qui regroupe toutes les combinaisons de degré pour les polynômes
- construction des polynômes de Legendre
- construction de la matrice **Z** qui regroupe les combinaisons de polynômes de Legendre suivant **degre**
- sélection des combinaisons pour lesquelles 1 seul facteur est non-nul (dépendance à 1 seul facteur) : **Ii**
- sélection des combinaisons pour lesquelles le facteur **i** est non-nul et les autres sont nuls ou non-nuls (dépendance au facteur **i** et ses interactions) : **ITi**
- estimation des coefficients du métamodèle : **B**
- calcul des indices de sensibilité principaux et totaux : **Si** et **STi**

Entrée :

- l'échantillon : **Ech**
- la matrice de sortie de Hydrus de dimension $N \times T$: **Y**
- le degré maximal du polynôme désiré (max 8) : **p**
- les bornes supérieures et inférieures fixées pour la génération de l'échantillon : **bornes_ech**

Sorties :

- la matrice d'indices principaux : **Si**
- la matrice d'indices totaux : **STi**

3.6 `recup_data_atmosph.m`

Etapas :

- ouverture du fichier
- parcours du fichier
- récupération des données
- fermeture du fichier
- conversion en numérique des données pour l'exploitation hors fonction

Entrée :

- l'adresse du fichier ATMOSP.H.IN : **adresse** ou **adresse_atmosph**

Sorties :

- les données de pluviométrie du fichier ATMOSP.H.IN : **pluvio_data**
- les données temporelles du fichier ATMOSP.H.IN : **pluvio_time**

3.7 `recup_data_fit.m`

Etapas :

- ouverture du fichier
- parcours du fichier
- récupération des données
- fermeture du fichier
- conversion en numérique des données pour l'exploitation hors fonction

Entrée :

— l'adresse du fichier FIT.IN : `adresse` ou `adresse_fit`

Sorties :

— les données mesurées entrées dans fichier FIT.IN : `fit_data` ou `theta_mesure`

— les données temporelles du fichier FIT.IN : `fit_time` ou `temps_mesure`

3.8 `recup_data_obsnode.m`

Etapes :

— ouverture du fichier

— parcours du fichier

— récupération des données

— fermeture du fichier

— conversion en numérique des données pour l'exploitation hors fonction

Entrée :

— l'adresse du fichier Obs_Node.OUT : `adresse` ou `adresse_obsnode`

Sorties :

— les données simulées aux noeuds sélectionnés du fichier Obs_Node.OUT :
`theta_sim_X`

— les données temporelles du fichier Obs_Node.OUT : `temps_sim`

Remarque : Ce fichier est à modifier en fonction du nombre de noeud observé.

Annexe E

Codes Matlab pour l'AS

Cette annexe contient un exemple de code Matlab qui permet de simuler la teneur en eau avec Hydrus et de faire une analyse de sensibilité. Le code H1D.m est le code général et la fonction polychaos.m est la fonction la plus importante qui permet de calculer les indices de sensibilité avec l'estimateur PCE. Les autres fonctions de parcours de fichier et récupération des données ne seront pas données.

```
1 % -----
2 %                               SIMULER AVEC H1D
3 % -----
4
5 clearvars; close all; clc;
6
7 % -----
8 %       A MODIFIER AVEC LE NOM DE DOSSIER DU PROJET HYDRUS !
9 %       nom_projet = 'projet_hydrus';
10 % -----
11
12 % Adresses des fichiers
13 addpath('function_AS'); % acces aux fonctions appelees dans ce
14 % script
15 adresse_selector = [nom_projet '\SELECTOR.IN'];
16 adresse_obsnode = [nom_projet '\Obs_Node.OUT'];
17 adresse_fit = [nom_projet '\FIT.IN'];
18 adresse_atmosph = [nom_projet '\ATMOSPH.IN'];
19 save adresse adresse_selector adresse_obsnode adresse_fit ...
20     adresse_atmosph;
21
22 % -----
23 %                               GENERATION DES ECHANTILLONS
24 %
25 % 1 : choix de la taille de l'echantillon N
```

```

26 % 2 : definition des bornes de l'intervalle dans lequel se
27 %     trouve les 6 parametres
28 % 3 : generation aleatoire avec la fonction rand
29 %
30 %     ==> obtention de la matrice Ech dim. N x 6
31 % -----
32
33 % 1. Taille de l'echantillon
34     N = 1000; % taille de l'echantillon
35
36 % 2. Intervalle des parametres (bornes inf et sup)
37     thetaR_inf = 0.04;         thetaR_sup = 0.06;
38     thetaS_inf = 0.44;         thetaS_sup = 0.46;
39     alpha_inf = 0.076;        alpha_sup = 0.079;
40     n_inf = 1.3;              n_sup = 1.4;
41     Ks_inf = 777;             Ks_sup = 779;
42     l_inf = 0.4;              l_sup = 0.6;
43
44     bornes_ech = [thetaR_inf, thetaS_inf, alpha_inf,
45                  n_inf, Ks_inf, l_inf;
46                  thetaR_sup, thetaS_sup, alpha_sup,
47                  n_sup, Ks_sup, l_sup];
48
49 % 3. Generation avec la fonction rand de matlab
50     thetaR = thetaR_inf + (thetaR_sup - thetaR_inf)*rand(N,1);
51     thetaS = thetaS_inf + (thetaS_sup - thetaS_inf)*rand(N,1);
52     alpha = alpha_inf + (alpha_sup - alpha_inf)*rand(N,1);
53     n = n_inf + (n_sup - n_inf)*rand(N,1);
54     Ks = Ks_inf + (Ks_sup - Ks_inf)*rand(N,1);
55     l = l_inf + (l_sup - l_inf)*rand(N,1);
56
57     Ech = [thetaR, thetaS, alpha, n, Ks, l];
58
59 % -----
60 %
61 %
62 % Pour chacune des N valeurs de l'echantillons >
63 % 1 et 2 : modification du fichier selector
64 % 3 : appel de HYDRUS
65 % 4 : recuperation des donnees simulees par hydrus avec les
66 %     discretisation temporelle associees
67 %     (theta_sim_54 et temps_sim_matrix)
68 % 5 : interpolation des donnees pour avoir theta_inter dim. NxT

```

```

69 %
70 % ==> obtention d'une matrice de sortie theta_inter dim. NxT
71 % -----
72
73 temps_sim_matrix = cell(N,1);
74 theta_sim_33 = cell(N,1);
75
76 for n = 1:N
77     if mod(n,100) == 0
78         n
79     end
80
81 % 1. Recuperation des configurations du SELECTOR.IN
82 [selector_data , ligne_param] = ...
83     parcours_fichier_selector(adresse_selector);
84
85 % 2. Modification du SELECTOR.IN
86 param = num2str(Ech(n,:)); % conversion de l'echantillon
87                               % en caractere
88 selector_data{ligne_param,1} = param;
89
90 % insertion dans le fichier SELECTOR.IN
91 fichier_selector = fopen(adresse_selector , 'w'); % ouverture
92                                                         % du fichier
93 fprintf(fichier_selector , '%s\n' , selector_data{:});
94     % insertion des donnees modifiees
95     % %s : caractere
96     % \n : remet a la ligne , essentiel pour ne pas
97     % modifier la forme de SELECTOR.IN !!
98 fclose(fichier_selector); % fermeture du fichier
99
100 % 3. Appel d'HYDRUS-ID
101 % !\ ADRESSE D'ACCES A ADAPTER (voir TUTO)
102 cmd_hydrus = eval('!C:\HYDRYS~1\HID_CALC.EXE<return.txt');
103
104 % Test avant recuperation des donnees
105 if (contains(cmd_hydrus , 'Calculations have finished
106                                     successfully') == 1)
107
108 % 4. Recuperation des donnees de sorties de HYDRUS-ID
109 [theta_sim_33_n , temps_sim_n] =
110     recup_data_obsnode(adresse_obsnode);
111 temps_sim_matrix{n,:} = temps_sim_n;

```

```

112     theta_sim_33{n,:} = theta_sim_33_n;
113
114     else
115         fprintf('La simulation %d n''a pas fonctionnee.\n',n)
116     end
117
118 end
119
120 % sauvegarde des donnees
121 save data_out_N1000 Ech bornes_ech theta_sim_33 ...
122                                     temps_sim_matrix;
123
124 %% 5. Test pour application ou non de l'interpolation des
125 %     donnees pour obtenir une matrice NxT
126
127 % recuperation des donnees mesurees et de pluvio
128 [theta_mesure , temps_mesure] = recup_data_fit(adresse_fit);
129 [pluvio_data , pluvio_time] =recup_data_atmosph(adresse_atmosph);
130 save data_mesure theta_mesure theta_mesure pluvio_data ...
131                                     pluvio_time ;
132
133 for n = 1:N
134     theta_sim_33_inter(n,:) =
135         interp1(temps_sim_matrix{n},theta_sim_33{n} , temps_mesure);
136 end
137
138 % sauvegarde des donnees
139 save data_interp_N1000 Ech bornes_ech theta_sim_33_inter ...
140                                     temps_mesure ;
141
142 % -----
143 %                               ANALSYE DE SENSIBILITE
144 % Estimation des indices de sensibilite d'ordre 1 et totaux par
145 % la methode de decomposition en polynome du chaos
146 % > fonction polychaos.m
147 % -----
148
149 % Nettoyage du workspace
150 clearvars; clc;
151 load('data_interp_N1000'); load('data_mesure');
152
153 % Calcul des indices
154 p = 3; % degre maximal de le polynome du chaos

```

```

155 [Si, STi, erreur, R2] = ...
156         polychaos(Ech, theta_sim_33_inter, p, bornes_ech);
157
158 save indice_N1000_p3 Si STi temps_mesure p erreur R2 ;
159
160
161 % -----
162 %             VISUALISATION DES RESULTATS
163 % Visualisation des resultats d'HYDRUS (moyenne des N valeurs),
164 % les donnees reelles et des indices
165 % -----
166
167 % Visualisation HYDRUS
168
169 figure
170 % debit
171 plot(temps_mesure, theta_mesure, 'k', ...
172      temps_mesure, mean(theta_sim_33_inter), 'r', 'LineWidth', 1.9);
173 ylim([0.2 0.5]);
174 xlabel('Temps (h)');
175 ylabel('Teneur en eau \theta (cm^3cm^{-3})');
176
177 % precipitation
178 yyaxis right
179 bar(pluvio_time, pluvio_data, 1.5, 'b');
180 ax = gca;
181 ax.YDir = 'reverse';
182 ax.YColor = 'k';
183 ax.XTickMode = 'auto';
184 ylim([0 5]);
185 ylabel('Precipitation (cm)');
186 title('Evolution de la teneur en eau sur 20 jours');
187 legend('Teneur en eau mesuree', 'Moyenne des teneurs simulees' ...
188        , 'Precipitation', 'Location', 'southeast');
189
190 %% Visualisation des indices au cours du temps
191 figure
192 plot(temps_mesure, Si(1,:), temps_mesure, Si(2,:), ...
193      temps_mesure, Si(3,:), temps_mesure, Si(4,:), ...
194      temps_mesure, Si(5,:), temps_mesure, Si(6,:), ...
195      'LineWidth', 1.2);
196 title('Indices de sensibilite au cours du temps');
197 xlabel('Temps (h)'); ylabel('Indice');

```

```
198 legend('\theta_r', '\theta_s', '\alpha', 'n', 'K_s', 'l');
199
200 % Visualisation des indices totaux au cours du temps
201 figure
202 plot(temps_mesure, STi(1,:) ', temps_mesure, STi(2,:) ', ...
203      temps_mesure, STi(3,:) ', temps_mesure, STi(4,:) ', ...
204      temps_mesure, STi(5,:) ', temps_mesure, STi(6,:) ', ...
205      'LineWidth', 1.2);
206 title('Indices de sensibilite totaux au cours du temps');
207 xlabel('Temps (h)'); ylabel('Indice');
208 legend('\theta_r', '\theta_s', '\alpha', 'n', 'K_s', 'l');
```

```

1  % -----
2  %                               FONCTION POLYCHAOS.M
3  %
4  % Fonction qui calcule les indices de sensibilité principaux Si
5  % et totaux STi
6  % dim(Si) = dim(STi) = kxT avec k = 6
7  % Entrées : échantillon qui a permis de calculer la sortie Y,
8  % sortie, p le degré maximal désiré et les bornes fixes pour
9  % chaque facteurs incertains
10 % Sorties : indices de sensibilité d'ordre 1 et principaux
11 % -----
12
13 function [Si, STi, erreur, R2] = polychaos(Ech,Y,p,bornes_ech)
14
15 %% Informations sur les entrées de la fonctions
16 [N, k] = size(Ech) ; % N taille échantillon et k nb facteurs
17                       % incertains
18 [N1, T] = size(Y) ; % N1 doit être = a N et T nb d'instant
19
20 % Vérification des tailles de l'échantillon et de la simulation
21 if N ~= N1
22     error('La taille de l''échantillon est différent du ...
23           nombre de simulation');
24 end
25 % Vérification des tailles de l'échantillon et de la simulation
26 if p > 8
27     error('Le degré maximal des polynômes du chaos est 8 ...
28           pour cette fonction');
29 end
30
31 %% Calcul des paramètres de calcul
32 % p = 6 ; % degré max (code prévu pour max 8)
33 M = factorial(k+p)/(factorial(k)*factorial(p))-1;
34                       % ordre de développement
35
36 %% récup des facteurs incertains : dim(Xi) = Nx1
37 X1 = Ech(:,1) ; % ThetaR
38 X2 = Ech(:,2) ; % ThetaS
39 X3 = Ech(:,3) ; % Alfa
40 X4 = Ech(:,4) ; % n
41 X5 = Ech(:,5) ; % Ks
42 X6 = Ech(:,6) ; % l
43

```

```

44 %% Normalisation de l'échantillon pour orthogonalite
45 % (loi uniforme entre -1 et 1)
46 X1_inf = bornes_ech(1,1); X1_sup = bornes_ech(2,1);
47 X2_inf = bornes_ech(1,2); X2_sup = bornes_ech(2,2);
48 X3_inf = bornes_ech(1,3); X3_sup = bornes_ech(2,3);
49 X4_inf = bornes_ech(1,4); X4_sup = bornes_ech(2,4);
50 X5_inf = bornes_ech(1,5); X5_sup = bornes_ech(2,5);
51 X6_inf = bornes_ech(1,6); X6_sup = bornes_ech(2,6);
52
53 X1_norm = (X1-mean(X1))/((X1_sup-X1_inf)/2);
54 X2_norm = (X2-mean(X2))/((X2_sup-X2_inf)/2);
55 X3_norm = (X3-mean(X3))/((X3_sup-X3_inf)/2);
56 X4_norm = (X4-mean(X4))/((X4_sup-X4_inf)/2);
57 X5_norm = (X5-mean(X5))/((X5_sup-X5_inf)/2);
58 X6_norm = (X6-mean(X6))/((X6_sup-X6_inf)/2);
59
60 %% Determination des polynomes du chaos a chaque instant
61
62 for t = 1:T
63
64 % Table des degres
65 j = 0; % degre initial du polynome (combinaison) j_max = M
66 I1 = []; I2 = []; I3 = []; I4 = []; I5 = []; I6 = [];
67 for a = 0:p
68     for b = 0:p
69         for c = 0:p
70             for d = 0:p
71                 for e = 0:p
72                     for f = 0:p
73                         % construction de la matrice de combinaison des degres
74                         if a + b + c + d + e + f <= p
75                             j = j+1;
76                             degre(j,:) = [a b c d e f];
77
78                         % Selection des combinaisons ne dependants que d'un
79                         % facteur incertain
80                         if a~=0 && b==0 && c==0 && d==0 && e==0 && f==0
81                             I1 = [I1 j];
82                         end
83                         if b~=0 && a==0 && c==0 && d==0 && e==0 && f==0
84                             I2 = [I2 j];
85                         end
86                         if c~=0 && a==0 && b==0 && d==0 && e==0 && f==0

```

```

87     I3 =[I3 j];
88     end
89     if d~=0 && a==0 && b==0 && c==0 && e==0 && f==0
90         I4 =[I4 j];
91     end
92     if e~=0 && a==0 && b==0 && d==0 && c==0 && f==0
93         I5 =[I5 j];
94     end
95     if f~=0 && a==0 && b==0 && d==0 && c==0 && e==0
96         I6 =[I6 j];
97     end
98     end
99     end
100    end
101    end
102    end
103    end
104    end
105
106    % Tables des polynomes de Legendre
107    legendre1 = legendre(X1_norm);
108    legendre2 = legendre(X2_norm);
109    legendre3 = legendre(X3_norm);
110    legendre4 = legendre(X4_norm);
111    legendre5 = legendre(X5_norm);
112    legendre6 = legendre(X6_norm);
113
114    for j = 0 : M
115        alpha1 = degre(j+1,1); % recup du degre du polynome de X1
116        alpha2 = degre(j+1,2); % recup du degre du polynome de X2
117        alpha3 = degre(j+1,3); % recup du degre du polynome de X3
118        alpha4 = degre(j+1,4); % recup du degre du polynome de X4
119        alpha5 = degre(j+1,5); % recup du degre du polynome de X5
120        alpha6 = degre(j+1,6); % recup du degre du polynome de X6
121
122        poly1 = legendre1(:,alpha1+1); % recup du polynome de
123                % llegendre de degre alpha1 applique a X1
124        poly2 = legendre2(:,alpha2+1); % recup du polynome de
125                % llegendre de degre alpha2 applique a X2
126        poly3 = legendre3(:,alpha3+1); % recup du polynome de
127                % llegendre de degre alpha3 applique a X3
128        poly4 = legendre4(:,alpha4+1); % recup du polynome
129                % llegendre de degre alpha4 applique a X4

```

```

130 poly5 = legendre5(:, alpha5+1); % recup du polynome
131           % legendre de degre alpha5 applique a X5
132 poly6 = legendre6(:, alpha6+1); % recup du polynome
133           % legendre de degre alpha6 applique a X6
134
135 Z(:, j+1) = poly1 .* poly2 .* poly3 .* poly4 .* poly5 .* poly6;
136           % construction de la matrice Z
137 end
138
139 %% Estimation des coefficients aj
140 B = pinv(Z'*Z)*Z'*Y(:, t);
141
142 %% ERREUR
143 % Calcul de Y avec le developpement en polynome du chaos : Y_est
144 Y_est(:, t) = Z*B;
145
146 % Calcul de l'erreur entre estimation et reelle
147 erreur(:, t) = abs(Y(:, t) - Y_est(:, t));
148
149 % Calcul du coefficient de determination R^2
150 R2(t) = 1 - sum(erreur(t).^2)/sum((Y(:, t) - mean(Y(:, t))).^2) ;
151
152 %% Determination des ensembles d'indices
153 IT1 = find(degre(:, 1)); % ensemble des indices de polynome
154           % concernant X1
155 IT2 = find(degre(:, 2)); % ensemble des indices de polynome
156           % concernant X2
157 IT3 = find(degre(:, 3)); % ensemble des indices de polynome
158           % concernant X3
159 IT4 = find(degre(:, 4)); % ensemble des indices de polynome
160           % concernant X4
161 IT5 = find(degre(:, 5)); % ensemble des indices de polynome
162           % concernant X5
163 IT6 = find(degre(:, 6)); % ensemble des indices de polynome
164           % concernant X6
165
166 %% Estimation de la variance
167 V_est(t) = sum(B(2:M+1,1).^2 .* mean(Z(:, 2:M+1).^2) ');
168
169 %% Calcul des indices
170 Si(1, t) = sum(B(IT1, 1).^2 .* mean(Z(:, IT1).^2) ')/V_est(t);
171 Si(2, t) = sum(B(IT2, 1).^2 .* mean(Z(:, IT2).^2) ')/V_est(t);
172 Si(3, t) = sum(B(IT3, 1).^2 .* mean(Z(:, IT3).^2) ')/V_est(t);

```

```
173 Si(4,t) = sum(B(I4,1).^2 .* mean(Z(:,I4).^2)')/V_est(t);
174 Si(5,t) = sum(B(I5,1).^2 .* mean(Z(:,I5).^2)')/V_est(t);
175 Si(6,t) = sum(B(I6,1).^2 .* mean(Z(:,I6).^2)')/V_est(t);
176
177 STi(1,t) = sum(B(IT1,1).^2 .* mean(Z(:,IT1).^2)')/V_est(t);
178 STi(2,t) = sum(B(IT2,1).^2 .* mean(Z(:,IT2).^2)')/V_est(t);
179 STi(3,t) = sum(B(IT3,1).^2 .* mean(Z(:,IT3).^2)')/V_est(t);
180 STi(4,t) = sum(B(IT4,1).^2 .* mean(Z(:,IT4).^2)')/V_est(t);
181 STi(5,t) = sum(B(IT5,1).^2 .* mean(Z(:,IT5).^2)')/V_est(t);
182 STi(6,t) = sum(B(IT6,1).^2 .* mean(Z(:,IT6).^2)')/V_est(t);
183
184 end
185 end
```


Bibliographie

- I. Alados, I. Foyo-Moreno, F. Olmo, and L. Alados-Arboledas. Relationship between net radiation and solar radiation for semi-arid shrub-land. *Agricultural and Forest Meteorology*, 116 :221–227, 2003.
- L. Andriamamonjy-Ando. Mémoire de DEA : Algorithme d’automatisation de la méthode d’analyse de sensibilité globale des modèles des systèmes complexes–application sur un modèle simulant une toiture végétalisée. Université d’Antananarivo, 2012.
- F. Anstett-Collin, J. Goffart, T. Mara, and L. Denis-Vidal. Sensitivity analysis of complex models : coping with dynamic and static inputs. *Reliability Engineering & System Safety*, 134 :268–275, 2015.
- C. Berretta, S. Poë, and V. Stovin. Moisture content behaviour in extensive green roofs during dry periods : The influence of vegetation and substrate characteristics. *Journal of Hydrology*, 511 :374–386, 2014.
- M. Berveiller, B. Sudret, and M. Lemaire. Stochastic finite element : a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics*, 15(1-3) :81–92, 2006.
- G. Blatman and B. Sudret. Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 95 :1216–1229, 2010.
- E. Borgonovo, X. Lu, E. Plischke, O. Rakovec, and M. Hill. Making the most out of a hydrological model data set : Sensitivity analyses to open the model black-box. *Water Resources Research*, 53 :7933–7950, 2017.
- R. Bouzouidja. *Fonctionnement hydrique d’un Technosol superficiel–application à une toiture végétalisée*. PhD thesis, Ecole doctorale EMMA, Université de Lorraine, 2014.
- R. Bouzouidja, G. Rousseau, V. Galzin, R. Claverie, D. Lacroix, and G. Séré. Green roof ageing or isolatic technosol’s pedogenesis? *Journal of Soils and Sediments*, 18(2) : 418–425, 2018a.
- R. Bouzouidja, G. Séré, R. Claverie, S. Ouvrard, L. Nuttens, and D. Lacroix. Green roof aging : Quantifying the impact of substrate evolution on hydraulic performances at the lab-scale. *Journal of Hydrology*, 564 :416–423, 09 2018b.

- K. Campbell, M. McKay, and B. Williams. Sensitivity analysis when model outputs are functions. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(10-11) :1468–1472, 2006.
- T. Crestaux, O. Le Maître, and J. Martinez. Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7) :1161–1172, 2009.
- H. Cukier, R. Levine, and K. Shuler. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems. *Journal of Computational*, 26 :1–42, 1978.
- T. Emilsson. Vegetation development on extensive vegetated green roofs : Influence of substrate composition, establishment method and species mix. *Ecological Engineering*, 33(3) :265–277, 2008.
- R. Faivre, B. Iooss, S. Mahévas, D. Makowski, H. Monod, and éd. *Analyse de sensibilité et exploration de modèles*. Ed. Quae, 2013.
- F. Gamboa, A. Janon, T. Klein, and A. Lagnoux. Sensitivity indices for multivariate outputs. *Comptes Rendus*, 351(7-8) :307–310, 2013.
- O. Garcia-Cabrejo and A. Valocchi. Global sensitivity analysis for multivariate output using polynomial chaos expansion. *Reliability Engineering & System Safety*, 126 : 25–36, Jan 2014.
- M. Gentilucci, M. Bufalini, M. Materazzi, M. Barbieri, D. Aringoli, P. Farabollini, and G. Pambianchi. Calculation of potential evapotranspiration and calibration of the Hargreaves equation using geostatistical methods over the last 10 years in central Italy. *Geosciences*, 11(8) :348, 2021.
- J. Goffart. *Impact de la variabilité des données météorologiques sur une maison basse consommation. Application des analyses de sensibilité pour des entrées temporelles*. PhD thesis, École doctorale sciences et ingénierie des systèmes, de l’environnement et des organisations, Université de Grenoble, 2013.
- J. Goffart, T. Mara, and E. Wurtz. Generation of stochastic weather data for uncertainty and sensitivity analysis of a low-energy building. *Journal of Building Physics*, 41(1) : 41–57, 2017.
- E. Haro-Sandoval, F. Anstett-Collin, and M. Basset. Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos. *Reliability Engineering & System Safety*, 104 :15–26, 2012.
- Y. He, H. Yu, A. Ozaki, N. Dong, and S. Zheng. Influence of plant and soil layer on energy balance and thermal performance of green roof system. *Energy*, 141 :1285–1299, 2017.
- A. Hégo, F. Collin, H. Garnier, and R. Claverie. Approaches for green roof dynamic model analysis using GSA. In *19th IFAC symposium on system identification : learning models for decision and control (SYSID), Padova, Italy, IFAC-PapersOnLine*, 54(7) : 613–618, 2021.

-
- A. Hégo, F. Collin, H. Garnier, and R. Claverie. GSA of a green roof hydrological model with static and dynamic inputs and dynamic output. In *10th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output SAMO, Florida, USA, 2022a*.
- A. Hégo, F. Collin, H. Garnier, and R. Claverie. Calibration of a green roof hydrological model using global sensitivity analysis. In *10th Vienna International Conference on Mathematical Modelling MATHMOD, Austria, ARGESIM Report 17*, pages 17–18, 2022b.
- R. Iman and W. Conover. A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 11(3) :311–334, 1982.
- J. Jacques. Pratique de l’analyse de sensibilité : comment évaluer l’impact des entrées aléatoires sur la sortie d’un modèle mathématique. Technical report, Pub. IRMA Lille Vol. 71-III, 2011.
- I. Jolliffe and J. Cadima. Principal component analysis : a review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374(2065) :20150202, 2016.
- C.-G. Jung, D.-R. Lee, and J.-W. Moon. Comparison of the Penman-Monteith method and regional calibration of the Hargreaves equation for actual evapotranspiration using swat-simulated results in the seolma-cheon basin, south korea. *Hydrological Sciences Journal*, 61(4) :793–800, 2016.
- S. Kucherenko, D. Albrecht, and A. Saltelli. Exploring multi-dimensional spaces : a comparison of Latin Hypercube and quasi Monte Carlo sampling techniques. *arXiv :1505.02350 [stat.AP]*, 2015.
- M. Köhler and P. Poll. Long-term performance of selected old Berlin greenroofs in comparison to younger extensive greenroofs in Berlin. *Ecological Engineering*, 36(5) : 722–729, 2010.
- M. Lamboni. *Analyse de sensibilité pour les modèles dynamiques utilisés en agronomie et environnement*. PhD thesis, Agro Paris Tech, 2009.
- M. Lamboni, D. Makowski, S. Lehuger, B. Gabrielle, and H. Monod. Multivariate global sensitivity analysis for dynamic crop models. *Field Crops Research*, 113(3) :312–320, 2009.
- M. Lamboni, H. Monod, and D. Makowski. Multivariate sensitivity analysis to measure global contribution of input factors in dynamic models. *Reliability Engineering & System Safety*, 96 :450–459, 2011.
- R. Lazzarin, F. Castellotti, and F. Busato. Experimental measurements and numerical modelling of a green roof. *Energy & Buildings*, 37(12) :1260–1267, 2005.

- F. Leij, W. Alves, and M. van Genuchten. *The UNSODA Unsaturated Soil Hydraulic Database*. National Risk Management Research Laboratory, Office of Research and Development, U.S. Environmental Protection Agency, 1996.
- Y. Li and R. Badcock Jr. Green roof hydrologic performance and modeling : a review. *Water Science & Technology*, 69(4) :727–738, 2014.
- T. Mara and . R. Joseph. Comparison of some efficient methods to evaluate the main effect of computer model factors. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(2) :167–178, 2008.
- D. Morau, T. Rakotondramiarana-Hery, F. Ranaivoarisoa-Tojo, and L. Andriamamonjy-Ando. Thermal behavior of green roof in Reunion island : Contribution towards a net zero building. *Energy Procedia*, 57 :1908–1921, 2014.
- E. Ogolo, S. Falodun, S. Oluyamo, and E. Nymphas. Analysis of data on net long-wave, shortwave and global radiation during transition period in a tropical station in southwestern Nigeria. *Indian Journal of Radio & Space Physics*, 38 :347–352, 2009.
- A. Pereira and R. Broed. Methods for uncertainty and sensitivity analysis : review and recommendations for implementation in ecologo. Technical report, Stockholm University, Faculty of Science, Department of Physics, 2006.
- S. Rahman. Global sensitivity analysis by polynomial dimensional decomposition. *Reliability Engineering & System Safety*, 86(7) :825–837, 2011.
- M. Ratto, S. Tarantola, and A. Saltelli. Sensitivity analysis in model calibration : GSA-GLUE approach. *Computer Physics Communications*, 136 :212–224, 2001.
- L. Richards. Capillary conduction of liquids in porous mediums. *Physics 1*, pages 318–333, 1931.
- O. Saadatian, K. Sopian, E. Salleh, C. Lim, S. Riffat, E. Saadatian, A. Toudeshki, and M. Sulaiman. A review of energy aspects of greenroofs. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 23(4) :155–168, 2013.
- A. Saltelli, M. Ratto, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola. *Global Sensitivity Analysis*. John Wiley & Sons, LTD, 2008.
- M. Seidl, M. Gromaire, M. Saad, and B. De Gouvello. Effect of substrate depth and rain-event history on the pollutant abatement of green roofs. *Environmental Pollution*, 183 :195–203, 2013.
- I. Selirio, D. Brown, and K. King. Estimation of net and solar radiation. *Canadian Journal of Plant Science*, 51(1) :35–39, 1970.
- J. Šimůnek, M. Šejna, H. Saito, M. Sakai, and M. van Genuchten. *The HYDRUS-1D software package for simulating the movement of water, heat, and multiple solutes in variably saturated media, Version 4.08*, 2008.

-
- I. M. Sobol. Sensitivity analysis for non-linear mathematical models. *Mathematical modelling and computational experiment*, 1 :407–414, 1993.
- R. Solone, M. Bittelli, F. Tomei, and F. Morari. Errors in water retention curves determined with pressure plates : Effects on the soil water balance. *Journal of Hydrology*, 470–471 :65–74, 2012.
- T. Susca, S. Gaffin, and G. Dell’Osso. Positive effects of vegetation : Urban heat island and green roofs. *Environmental Pollution*, 159(8) :2119–2126, 2011.
- A. Szymkiewicz. *Modelling water flow in unsaturated porous media : Accounting for nonlinear permeability and material heterogeneity*. Springer Science & Business Media, 2012.
- D. Tolley, L. Foglia, and T. Harter. Sensitivity analysis and calibration of an itergrated hydrologic model in an irrigated agricultural basin with a groundwater-dependent ecosystem. *Water Resources Research*, 55 :7876–7901, 2019.
- T. Turányi and H. Rabitz. *Sensitivity Analysis*, chapter 5 Local Methods. John Wiley & Sons, LTD, 2000.
- S. Ulubeyli and V. Arslan. Economic viability of extensive green roofs through scenario and sensitivity analyses : Clients’ perspective. *Energy & Buildings*, 139 :314–325, 2017.
- M. van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44 :892–897, 1980.
- S. Vera, C. Pinto, P. Tabares-Velasco, W. Bustamante, F. Victorero, J. Giroás, and C. Bonilla. Influence of vegetation, substrate, and thermal insulation of an extensive vegetated roof on the thermal performance of retail stores in semiarid and marine climate. *Energy and Buildings*, 146 :312–321, 2017.
- N. Williams, J. Lundholm, and J. Maclvor. Forum : Do green roofs help urban biodiversity conservation? *Journal of Applied Ecology*, 51 :1643–1649, 2014.
- L. Zhou, Q. Wang, M. Liu, and R. Wang. Green roof simulation with a seasonally variable leaf area index. *Energy & Buildings*, 174 :156–167, 2018.