



**HAL**  
open science

# Commandes non linéaires sous contraintes pour les Robots Parallèles à Câbles

Imed Jabbari

► **To cite this version:**

Imed Jabbari. Commandes non linéaires sous contraintes pour les Robots Parallèles à Câbles. Automatique / Robotique. Université de Lorraine; Université de Carthage (Tunisie), 2022. Français. NNT : 2022LORR0186 . tel-04027030

**HAL Id: tel-04027030**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-04027030v1>**

Submitted on 13 Mar 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES  
UNIVERSITAIRES**

## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)  
*(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)*

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Commandes non linéaires sous contraintes pour les Robots Parallèles à Câbles

## Thèse

préparée à l'Université de Lorraine

présentée et soutenue publiquement le 2 décembre 2022

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Lorraine**

(spécialité Automatique, Traitement de Signal et des Images, Génie Informatique)

et

**Doctorat de l'Ecole Polytechnique de Tunisie**

(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

**Imed JABBARI**

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Rachid OUTBIB	Professeur, Université d'Aix-Marseille
<i>Rapporteurs :</i>	Rachid OUTBIB	Professeur, Université d'Aix-Marseille
	Thouraya KHARRAT	Professeure, Université de Sfax
<i>Examineurs :</i>	Maher BERZIG	Professeur, Université de Tunis
	Latifa Baddas-Boutat	Maître de conférences, Université de Lorraine
	Mohamed BOUTAYEB	Professeur, Université de Lorraine (Directeur de thèse)
	Chaker JAMMAZI	Professeur, Université de Tunis El Manar (Directeur de thèse)

Mis en page avec la classe thesul.

## Résumé

Cette étude porte sur la commande des systèmes non linéaires sous contraintes pour les robots parallèles à câbles. Ces derniers ont connu un intérêt croissant au cours des vingt dernières années. En effet, les robots à câbles présentent plusieurs avantages par rapport aux robots parallèles avec des chaînes cinématiques rigides, à savoir un très grand espace de travail, le déplacement de lourdes charges avec une vitesse et une précision élevée, une faible inertie, une reconfiguration simple et rapide, et enfin un coût de fabrication faible. Les applications sont nombreuses : dans le domaine médical, en biologie, pour étudier le comportement des insectes en vol libre, dans les activités portuaires pour déplacer des conteneurs ou pour la construction de bâtiments.

Ce type de système représente un intérêt majeur dans l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques. En effet les robots à câbles, par leur modélisation, représentent une large classe de systèmes électro-mécaniques non linéaires avec comme difficulté supplémentaire la résolution d'une contrainte algébrique sur les tensions des câbles. Il est utile de souligner que la commande des robots (à extrémité libre) a été largement traitée/résolue par des approches classiques utilisant des solutions élégantes, la commande des robots à câbles reste un problème difficile à résoudre compte tenu de cette contrainte. Il existe peu de résultats, souvent locaux et heuristiques avec des hypothèses simplificatrices, mais loin d'être une solution satisfaisante.

Il est utile de rappeler que la particularité majeure des robots à câbles est que les chaînes cinématiques ne sont pas des segments rigides, mais composés de câbles flexibles. Ces derniers sont attachés, par une extrémité, à la base mobile (ou organe terminal dans le langage industriel) et, par l'autre extrémité, à un actionneur/moteur électrique. Cette particularité introduit une contrainte forte, contrairement aux robots série à extrémité libre, sur les tensions des câbles qui doivent appartenir à une fourchette donnée et positive dans le but d'éviter des cassures ou la formation de ventre. Par conséquent, les enjeux liés au contrôle des robots parallèles à câbles sont non seulement d'amener le robot d'un point à un autre, poursuivre une trajectoire, mais également de satisfaire ces contraintes.

Dans cette thèse, on répond à cette problématique par la proposition de lois de commandes simples et efficaces selon deux approches différentes :

La première consiste à développer une loi de commande avec convergence en temps fini utilisant la méthode « mode glissant » pour un robot à huit moteurs (déplacement en 3D). Très peu de paramètres sont nécessaires à la mise en œuvre de cette technique, qui nécessite tout de même un algorithme d'optimisation. Les simulations numériques sont prometteuses et donnent des résultats très satisfaisants.

La deuxième approche est tout à fait différente et originale, après quelques transformations astucieuses, on écrit la dynamique de l'erreur sous une forme bilinéaire ensuite on a établi une loi de commande temps variant sous des contraintes de saturation. Par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov également temps variant, on démontre la convergence exponentielle de l'erreur de poursuite. Ce résultat a été appliqué avec succès aux

robots à quatre moteurs (2D) puis à huit moteurs (3D). Il est important de souligner que cette approche, contrairement à la littérature, s'affranchie de l'utilisation des algorithmes d'optimisation qui peuvent parfois poser des problèmes de convergence.

Enfin il est utile de souligner que ces résultats ont été validés à travers plusieurs simulations numériques.

**Mots-clés:** Robot parallèle à câbles, suivi de trajectoire, modélisation, commande par mode glissant, commande sous contrainte, commande basé algorithme d'optimisation, commande positive, stabilité exponentielle, stabilité en temps fini.

# Abstract

This study concerns the control of nonlinear systems under constraints for parallel robots with cables. These have grown in popularity over the past twenty years. Indeed, cable robots have several advantages over rigid robots, namely a very large workspace, moving heavy loads with high speed and precision, low inertia, simple and fast reconfiguration, and finally low manufacturing cost. The applications are numerous : in the medical field, in biology, to study the behavior of insects in free flight, in port activities to move containers or for the construction of buildings.

This type of system represents a major interest in the analysis and synthesis of dynamical systems. Indeed, cable robots, through their modeling, represent a large class of nonlinear electromechanical systems with the additional difficulty of solving an algebraic constraint on cable tensions. It is worth pointing out that the control of (free-end) robots has been largely addressed/solved by classical approaches using elegant solutions, the control of cable robots remains a difficult problem to solve given this constraint. There are few results, often local and heuristic with simplifying assumptions, but far from being a satisfactory solution.

It is useful to remember that the main feature of cable robots is that the kinematic chains are not rigid segments, but made up of flexible cables. The latter are attached, at one end, to the mobile base (or terminal device in industrial parlance) and, at the other end, to an electric actuator/motor. This particularity introduces a strong constraint, unlike series robots with free ends, on the tensions of the cables which must belong to a given and positive range in order to avoid breaks or the formation of belly. Therefore, the issues related to the control of parallel robots with cables are not only to bring the robot from one point to another, to follow a trajectory, but also to satisfy these constraints.

In this thesis, we answer this problem by proposing simple and effective control laws according to two different approaches :

The first consists in developing a control law with convergence in finite time using the “sliding mode” method for a robot with eight motors (moving in 3D). Very few parameters are required to implement this technique, which still requires an optimization algorithm. Numerical simulations are promising and give very satisfactory results.

The second approach is quite different and original, after some clever transformations, we write the dynamics of the error in a bilinear form then we establish a time control law varying under saturation constraints. By using a time-varying Lyapunov function, we demonstrate the exponential convergence of the tracking error. This result has been successfully applied to robots with four motors (2D) and then with eight motors (3D). It is important to emphasize that this approach, contrary to the literature, is freed from the use of optimization algorithms which can sometimes pose convergence problems.

Finally, it is useful to emphasize that these results have been validated through several numerical simulations.

**Keywords:** Cable Driven Parallel Robots, tracking trajectory, modeling, sliding mode control, constrained control, control based on optimization algorithm, nonnegative control, exponential stability, finite time stability.





# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Symboles et Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Modélisation et commande du Robot Parallèle à Câbles (RPC) : État de l'art</b>	
1.1 Introduction sur les RPC . . . . .	10
1.2 Modélisation du RPC . . . . .	17
1.3 Espace de travail du RPC . . . . .	19
1.4 Commande du RPC . . . . .	20
<b>Chapitre 2 Modèle Mathématique du RPC</b>	
2.1 Introduction . . . . .	34
2.2 Passage de $\mathcal{R}_O$ à $\mathcal{R}$ . . . . .	34
2.3 Modélisation géométrique inverse (MGI) . . . . .	37
2.4 Modélisation Cinématique . . . . .	40
2.5 Modèle statique . . . . .	44
2.6 Modèle dynamique . . . . .	46
2.7 Modèle dynamique des actionneurs . . . . .	47
2.8 Conclusion . . . . .	49
<b>Chapitre 3 Poursuite de trajectoire du RPC en deux dimensions</b>	
3.1 Introduction . . . . .	52
3.2 Modèle mathématique du RPC dans le plan . . . . .	53
3.3 Suivi de trajectoires et description du mouvement du RPC dans le plan . . . . .	55
3.4 Étude de la commandabilité et de la stabilisabilité . . . . .	60

3.5	Résultats de simulation . . . . .	67
3.6	Conclusion . . . . .	70

**Chapitre 4 Poursuite de trajectoires du RPC en trois dimensions**

4.1	Introduction . . . . .	74
4.2	Partie 1 : Commande basée modèle des robots à câbles . . . . .	75
4.3	Partie 2 : Commande par mode glissant basée sur un algorithme d'optimi- sation sous contraintes . . . . .	90
4.4	Conclusion . . . . .	103

**Conclusions et perspectives**

# Table des figures

1	Robot : Unimate 1961 . . . . .	1
2	Robot : Versatran 1962 . . . . .	1
3	Robot : Stanford Arm . . . . .	2
4	Architecture de robot sériel et parallèle [1] . . . . .	2
5	Robot Delta [2]. . . . .	3
6	Manipulateur parallèle sphérique [3]. . . . .	3
7	Plate-forme typique de Gough Stewart [4]. . . . .	4
8	Robot parallèle à câbles. . . . .	5
1.1	Exemple de robot parallèle à câbles, le prototype du projet RoboCrane, crée en 1989 par National Institute of Standards and Technology (NIST) [5].	10
1.2	prototype de grue à fil en deux dimensions [6]. . . . .	11
1.3	Robot parallèle à câbles pleinement contraint [7]. . . . .	12
1.4	RPC suspendu [7]. . . . .	13
1.5	Configuration sous-contrainte ( $N_c = 2, n = 3$ ) [7]. . . . .	13
1.6	Configuration incomplètement contrainte ( $N_c = 3, n = 3$ ) [7]. . . . .	14
1.7	Configuration sur-contrainte ( $N_c = 4, n = 3$ ) [7]. . . . .	14
1.8	Robot Parallèle à câbles <b>TPAD</b> [8] . . . . .	15
1.9	Robot : SkyCam [9, 10]. . . . .	16
1.10	Robot : SpiderCam [11]. . . . .	16
1.11	Robot-grue [12] . . . . .	17
1.12	Robot à câbles avec extrudeuse de béton [13]. . . . .	17
1.13	Concept de robot parallèle à câbles pour le sauvetage [14, 15]. . . . .	17
1.14	La condition de glissement [16]. . . . .	27
1.15	Interprétation des équations (1.25) et (1.27) (cas $n = 2$ ) [16]. . . . .	28
2.1	Description géométrique du RPC. . . . .	34
2.2	La rotation de l'effecteur autour de l'axe $Z_0$ avec un angle $\psi$ . . . . .	35
2.3	La rotation de l'effecteur autour de l'axe $V$ avec un angle $\theta$ . . . . .	36
2.4	La rotation de l'effecteur autour de l'axe $X$ avec un angle $\phi$ . . . . .	37
2.5	Relation géométrique entre l'effecteur et le $i^{\text{ème}}$ câble. . . . .	38
2.6	Les différentes forces appliquées au RPC. . . . .	45
2.7	Présentation de $i^{\text{ème}}$ actionneur avec le couple moteur $\tau_i$ et l'axe de rotation $x$ . . . . .	48

3.1	robot parallèle à quatre câbles dans le plan $\{O, X_0, Y_0\}$ .	52
3.2	Déplacement de l'effecteur dans le sens direct.	58
3.3	Déplacement de l'effecteur dans le sens indirect.	59
3.4	Représentation de la fonction de saturation et la fonction $\phi(x)$	65
3.5	Trajectoire désirée et réelle de l'effecteur dans le plan horizontal.	68
3.6	Comportement des trajectoires $x, x_d, y$ et $y_d$ .	68
3.7	Simulation des lois de commande $v_{11}$ et $v_{21}$ .	69
3.8	Simulations des tensions des câbles 1 et 2.	69
3.9	Simulations des tensions des câbles 3 et 4.	70
3.10	Simulations des longueurs des câbles 1 et 2.	70
3.11	Simulations des longueurs des câbles 3 et 4.	71
4.1	Robot parallèle à câbles en trois dimensions.	74
4.2	Trajectoire de référence et trajectoire réelle de l'effecteur dans l'espace de 3D.	85
4.3	Comportement des trajectoires $(x, x_r)$ et $(y, y_r)$ .	86
4.4	Comportement des trajectoires $(z, z_r)$ .	86
4.5	Simulations des longueurs des câbles $l_1$ et $l_2$ .	87
4.6	Simulations des longueurs des câbles $l_3$ et $l_4$ .	87
4.7	Simulations des longueurs des câbles $l_5$ et $l_6$ .	88
4.8	Simulations des longueurs des câbles $l_7$ et $l_8$ .	88
4.9	Simulations des tensions des câbles $T_1$ et $T_2$ .	89
4.10	Simulations des tensions des câbles $T_3$ et $T_4$ .	89
4.11	Simulations des tensions des câbles $T_5$ et $T_6$ .	90
4.12	Simulations des tensions des câbles $T_7$ et $T_8$ .	90
4.13	Diagramme de loi de commande par mode glissante pour le CDPRs.	97
4.14	Comportement des trajectoires $(x, x_d)$ et $(y, y_d)$ (commande par mode glissant).	100
4.15	Comportement des trajectoires $(z, z_d)$ et $(\phi, \phi_d)$ (commande par mode glissant).	100
4.16	Comportement des trajectoires $(\theta, \theta_d)$ et $(\psi, \psi_d)$ (commande par mode glissant).	101
4.17	Simulation des erreurs de suivi $e_1, e_2$ .	101
4.18	Simulation des erreurs de suivi $e_3, e_4$ .	102
4.19	Simulation des erreurs de suivi $e_5, e_6$ .	102
4.20	Simulation de surface de glissement $s_1, s_2$ .	103
4.21	Simulation de surface de glissement $s_3, s_4$ .	103
4.22	Simulation de surface de glissement $s_5, s_6$ .	104
4.23	Simulations des tensions des câbles $T_1$ et $T_2$ (commande par mode glissant).	104
4.24	Simulations des tensions des câbles $T_3$ et $T_4$ (commande par mode glissant).	105
4.25	Simulations des tensions des câbles $T_5$ et $T_6$ (commande par mode glissant).	105
4.26	Simulations des tensions des câbles $T_7$ et $T_8$ (commande par mode glissant).	106
4.27	Simulations des longueurs des câbles $l_1$ et $l_2$ (commande par mode glissant).	106
4.28	Simulations des longueurs des câbles $l_3$ et $l_4$ (commande par mode glissant).	107
4.29	Simulations des longueurs des câbles $l_5$ et $l_6$ (commande par mode glissant).	107

---

4.30 Simulations des longueurs des câbles  $l_7$  et  $l_8$  (commande par mode glissant). 108



# Symboles et Notations

$\mathcal{R}_O = (O, X_0, Y_0, Z_0)$  : le repère global terrestre d'origine O.

$\mathcal{R} = (P, X, Y, Z)$  : Le repère local lié à la plate-forme d'origine P : centre de gravité du "Flying frame".

-Les différents points utilisés ;

$A_i$  : point de sortie.

$B_i$  : point d'attache.

-Les différents angles utilisés ;

$\phi$  : angle de roulis, il décrit la rotation du "Flying frame" autour de l'axe (PX).

$\theta$  : angle de tangage, il décrit la rotation du "Flying frame" autour de l'axe (PY).

$\psi$  : angle de lacet, il décrit la rotation du "Flying frame" autour de l'axe (PZ).

- Les différentes paramétrisation du mouvement de la plate-forme ;

$\eta_1 = [x, y, z]^T$  : la position de la plate-forme, plus précisément celle du centre de gravité P exprimée dans le repère terrestre  $\mathcal{R}_O$ .

$\eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^T$  : l'attitude de la plate-forme par rapport au repère terrestre  $\mathcal{R}_O$ .

$\nu_2 = [w_x, w_y, w_z]^T$  : le vecteur vitesse angulaire de la plate-forme par rapport au repère terrestre  $\mathcal{R}_O$  exprimée dans le repère local  $\mathcal{R}$ .

$\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$  : matrice colonne altitude par rapport à  $\mathcal{R}_O$ .





# Introduction Générale

Un des premiers robots industriels, du nom : Unimate (Figure 1), a été développé en 1959 par la société "Unimation". En 1961, ce robot a été employé pour la première fois dans les chaînes de montage d'automobile Général Motors [17]). Un deuxième robot industriels dénommé "Versatran" (Figure 2) a été construit à l'usine de Ford par l'entreprise "American Machine and Foundry" en 1962 [18].

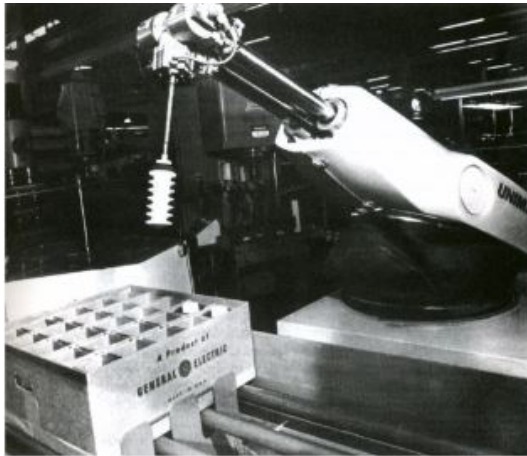


FIGURE 1 – Robot : Unimate 1961



FIGURE 2 – Robot : Versatran 1962

Les organes terminaux de ces deux robots qui sont dédiés à la manipulation ou à la saisie d'objets présentent des restrictions tels que la limitation de degré de liberté, le problème d'adaptation avec l'environnement industriel ou la difficulté à manipuler des objets fragiles.

Depuis les années 70 une large activité de recherche sur le développement et le contrôle de robots performants, dans divers domaines, a été menée par plusieurs organismes industriels et laboratoires scientifiques. On peut citer l'Association Japonaise de Robotique Industrielle ou le laboratoire RIA aux USA. Victor Scheinman [19] de l'Université de Stanford a développé le premier robot à actionneurs électriques, au lieu d'utiliser des actionneurs hydrauliques, contrôlés par des servo-contrôleurs nommé "Stanford Arm".

Depuis, selon le domaine d'application, deux types de robots ont été développés : Les robots à architecture série et les robots à architecture parallèle (voir FIGURE 4).

Ce dernier a la particularité d'avoir des bras parallèles qui sont reliés entre eux par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes [20, 21]. Suivant le type de mouvement du robot, il existe trois familles de robot parallèles :



FIGURE 3 – Robot : Stanford Arm

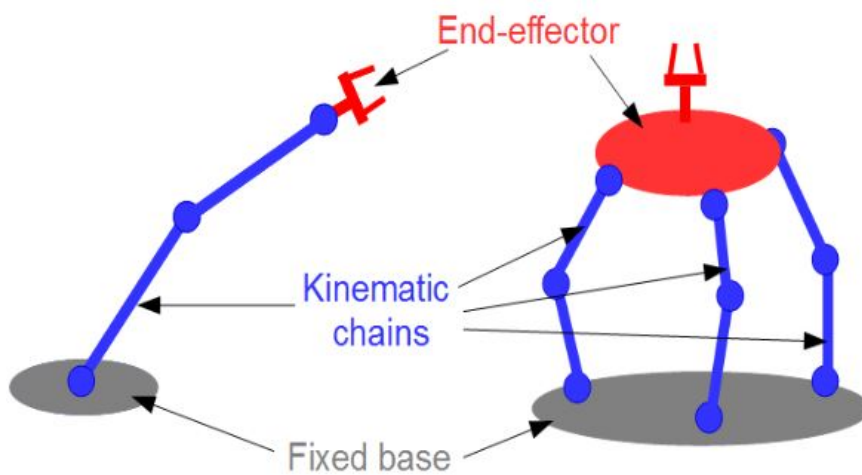


FIGURE 4 – Architecture de robot sériel et parallèle [1]

- **Le Robot DELTA (FIGURE 5)** : Ce robot ne peut faire que trois mouvements de translation. Il s'agit d'un effecteur et une base fixe reliés entre eux par trois chaînes cinématiques actionnées à la base fixe et qui permettent de translater l'organe terminal sans en changer l'orientation. Les robots de type Delta sont employés principalement dans l'industrie de l'emballage, et dans l'industrie médicale et phar-



FIGURE 5 – Robot Delta [2].

maceutique pour des applications *pick-and-place* où sa précision et sa vitesse sont mises à profit [22].

- **Le manipulateur parallèles sphérique (FIGURE 6)** : Ce robot ne peut faire que trois mouvements de rotation. Il s'agit d'un effecteur et une base fixe reliés entre eux par trois chaînes cinématiques actionnées à la base fixe qui permettent de modifier l'orientation de l'organe terminal sans en changer la position. Ce type de robot est principalement utilisé pour orienter des objets rigides [23, 24].

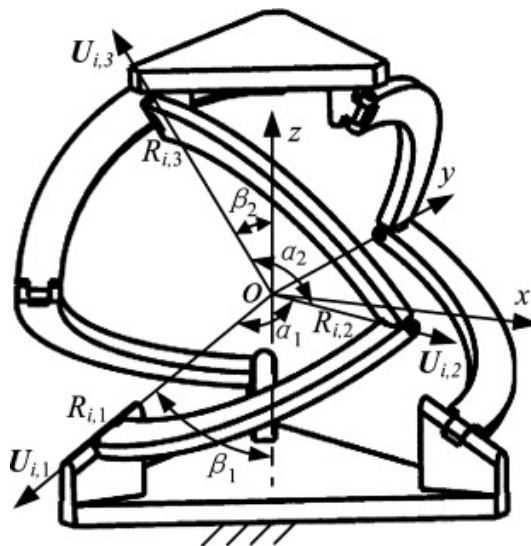


FIGURE 6 – Manipulateur parallèle sphérique [3].

- **Le robot Gough-Stewart (ou hexapode)** : C'est un robot parallèle de six degrés de liberté (trois translations et trois rotations). Il s'agit d'un effecteur et une

base fixe reliés entre eux par six actionneurs linéaires qui permettent d'orienter et de déplacer l'organe terminal. Les hexapodes ont été employés dans des applications variées comme les simulations des vols ou l'orientation d'antennes [25].



FIGURE 7 – Plate-forme typique de Gough Stewart [4].

Les robots parallèles offrent plusieurs avantages par rapport aux robots à architecture en série pour certaines applications. Parmi ces avantages :

- Les robots parallèles ont des capacités de charge plus élevées, car la charge totale peut être partagée sur le nombre de liaisons parallèles connectées à la base fixe du robot.
- Contrairement aux robots à architecture en série, les robots parallèles sont caractérisés par une grande précision.
- Le robot parallèle a une rigidité structurelle plus grande que le robot série grâce à leur architecture parallèle.
- L'effecteur du robot parallèle peut atteindre des vitesses très grandes par rapport à l'organe terminal d'un robot série.

En effet, les parties mobiles dans l'architecture parallèle ont une inertie faible. Il est noté que le robot le plus rapide du monde est un robot parallèle de type "Delta".

Cependant, l'espace de travail de tels robots est généralement assez restreint. Afin de remédier à cet inconvénient, une nouvelle conception consiste à remplacer les chaînes cinématiques rigides des robots parallèles par des câbles flexibles, d'où l'apparition du robot parallèle à câbles (ou *Cables Driven Parallel Robots (CDPRs)* en anglais).

La structure de ce type de robot présente des avantages substantiels par rapport aux robots-séries et robot parallèles conventionnels. En voici quelques uns :

- Un espace de travail très important,
- Des accélérations/vitesses de déplacement très élevées,
- Une très grande précision,
- Le poids des charges utiles à déplacer peut-être important et enfin,

— Un coût de construction faible.

Plusieurs domaines/applications font recours aux robots à câbles comme les applications : dans le domaine médical, en biologie, pour étudier le comportement des insectes, dans les activités portuaires pour déplacer des conteneurs ou pour la construction de bâtiments.

Cependant, il est important de noter que la difficulté majeure dans l'utilisation de ces robots est la conception des lois de commandes. En effet, ces dernières doivent respecter plusieurs contraintes à savoir des tensions maximales à ne pas dépasser pour ne pas casser les câbles, des tensions positives afin d'éviter leurs flexions et enfin éviter les oscillations.

L'objet de cette thèse porte sur l'analyse et la synthèse de lois de commande pour les robots parallèles à câbles garantissant un certain nombre de performances. La structure considérée dans cette étude se compose d'une cage (plate-forme ou effecteur) dont la forme géométrique est un cube de masse  $m$ , de dimension  $c \times c \times c$ , attachée à chaque sommet par des câbles pris sur des enrouleurs, dans un espace de dimension  $L \times l \times h$ , actionnés par des moteurs

La structure du robot est illustrée par la figure (Fig.8) ci-dessous.

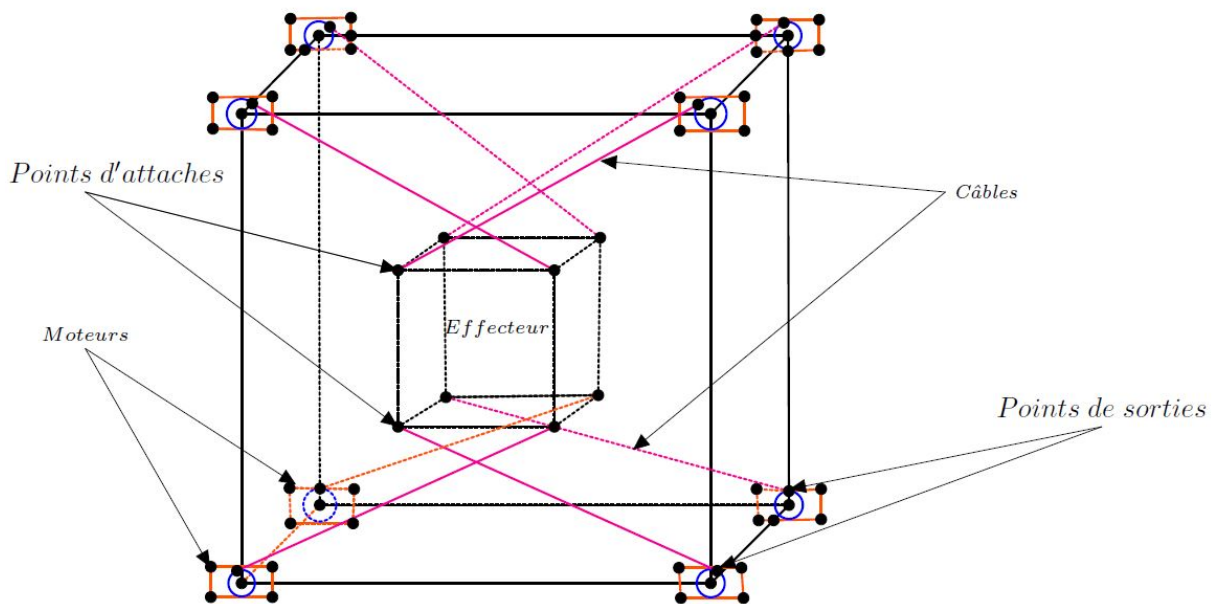


FIGURE 8 – Robot parallèle à câbles.

## Plan du manuscrit

Suite de cette introduction, ce manuscrit est organisé en quatre chapitres décrites ci-dessous :

Le **premier chapitre** présente l'état de l'art sur les robots parallèles à câbles, leurs applications dans différents domaines et leurs avantages/inconvénients. Pour terminer ce chapitre, nous avons introduit quelques notions liées à la modélisation, à la stabilité et à la contrôlabilité qui seront utiles dans les chapitres suivants.

Le **deuxième chapitre** présente la modélisation mathématique du robot parallèle à six degrés de liberté utilisant huit câbles. Cette modélisation est établie à l'aide des modèles géométrique et cinématique ainsi que la méthode d'Euler-Lagrange. Dans ce chapitre, on détermine aussi le modèle dynamique des actionneurs en utilisant la méthode d'Euler-Newton.

Le **troisième chapitre** décrit la poursuite de trajectoire du robot parallèle à câbles en deux dimensions par de nouvelles lois de commandes positives et variant dans le temps. Ces dernières ne peuvent que tirer les câbles sans pouvoir les pousser pour que l'effecteur suive une trajectoire souhaitée garantissant une convergence rapide.

La conception de la loi de commande est établie après l'étude des différents modes de mouvements du robot à câbles, et par l'utilisation de plusieurs transformations non linéaires. À partir de l'analyse de contrôlabilité, nous proposons une loi de commande simple et efficace variant dans le temps et montrons comment définir certains paramètres clés.

Nous avons également défini, dans le même esprit, une fonction de Lyapunov variant dans le temps pour montrer la stabilité avec une convergence exponentielle vers une trajectoire souhaitée. Les performances de l'approche proposée sont montrées à travers des résultats de simulation.

Le **quatrième chapitre** présente deux parties, la première étudie la poursuite de trajectoire en trois dimensions : nous proposons des lois de commandes positives, stationnaires et bornées garantissant la stabilité globale exponentielle vers une trajectoire de référence.

Dans la deuxième partie, on étudie le problème de la stabilisabilité en temps fini pour les robots parallèles à câbles par des schémas de contrôle en mode glissant basé un algorithme d'optimisation. Par cette loi de commande, les actionneurs ne peuvent que tirer, mais pas pousser la plate-forme mobile du robot vers la trajectoire désirée ou vers un point cible. Les effets d'une meilleure performance de contrôle sont montrés à travers des simulations numériques.

## Contributions

Cette thèse a permis d'apporter plusieurs contributions pour le contrôle de robot parallèles à câbles

1. Jabbari, I., Boutayeb, M., and Jammazi, C. (2020, August). *Discontinuous finite-time control for cable driven parallel robots*. In *2020 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)* (pp. 536-541). IEEE. [26].
2. Jabbari, I., Boutayeb, M., and Jammazi, C. (2022, July). *Time-Varying Nonnegative Control for Cable Driven Parallel Robots*. In *2022 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)* (pp. 1-6). IEEE. [27].
3. Jabbari, I., Boutayeb, M., and Jammazi, C. (2022, June). *Nonnegative Saturated Tracking Control for Cable Driven Parallel Robots (CDPRs)*. In *2022 30th Medi-*



---

*terranean Conference on Control and Automation (MED) (pp. 618-623). IEEE. [28].*

4. *I. Jabbari, M. Boutayeb and C. Jammazi, "Tracking control for Cable Driven Parallel Robots," Workshop on Control and Inverse Problems (CIP), 2022, May 09-11, 2022 - Hotel Monatir Center, Monastir, Tunisia.*





# Chapitre 1

## Modélisation et commande du Robot Parallèle à Câbles (RPC) : État de l'art

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction sur les RPC</b>	<b>10</b>
1.1.1	Présentation	10
1.1.2	Classification	11
1.1.3	Avantages	14
1.1.4	Applications	15
<b>1.2</b>	<b>Modélisation du RPC</b>	<b>17</b>
1.2.1	Modèle géométrique direct	18
1.2.2	Modèle géométrique inverse	18
1.2.3	Modèle cinématique direct	18
1.2.4	Modèle cinématique inverse	19
1.2.5	Modèle dynamique	19
<b>1.3</b>	<b>Espace de travail du RPC</b>	<b>19</b>
1.3.1	Contrainte de l'espace de travail	19
1.3.2	Espace des Poses Polyvalentes	20
1.3.3	Espace des Torseurs Générales	20
1.3.4	Espace des travail dynamique	20
<b>1.4</b>	<b>Commande du RPC</b>	<b>20</b>
1.4.1	L'étude de la commandabilité	21
1.4.2	Formulation du problème de commande de suivi	24
1.4.3	Commande par mode glissant	25
1.4.4	Étude Stabilité	28
1.4.5	Stabilisation par des feedbacks	32

---

## 1.1 Introduction sur les RPC

### 1.1.1 Présentation

Les robots parallèles à câbles représentent une nouvelle génération de robots industriels développés depuis les années quatre-vingt. On peut citer les travaux de *Higuchi et al.* [6], *Albus et al.* [29] et *Landsberger* [30]....

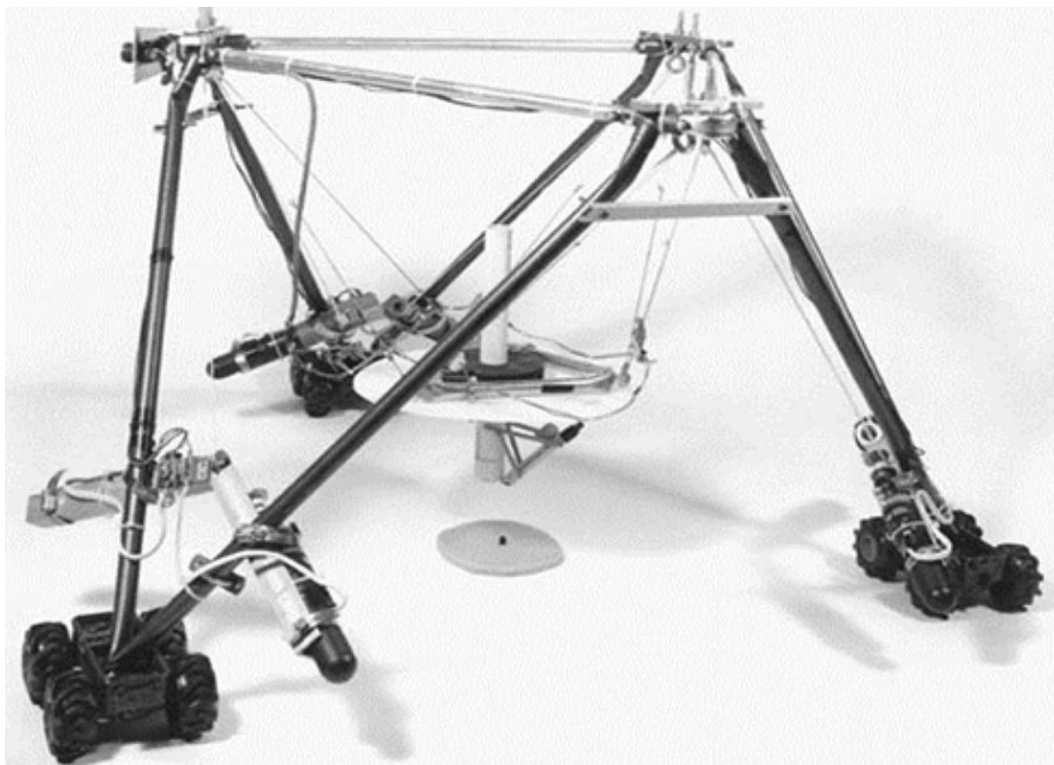


FIGURE 1.1 – Exemple de robot parallèle à câbles, le prototype du projet RoboCrane, créée en 1989 par National Institute of Standards and Technology (NIST) [5].

En 1985, *Landsberger* est l'un des premiers chercheurs à développer un robot parallèle avec des câbles où sa géométrie est inspiré de **la plate-forme Gough Stewart** [4]. Il a proposé de remplacer les segments rigides de la plate-forme Gough Stewart par des câbles flexibles. Ces câbles sont attachés à la plate-forme mobile et aux actionneurs. Généralement, un actionneur est composé d'un moteur électrique rotatif, un tambour et un enrouleur. Le rôle principal des actionneurs est d'enrouler ou de dérouler les câbles suivant les déplacements de la plate-forme mobile dans l'espace du travail. Les actionneurs ne permettent pas de contrôler directement la plate-forme mobile, cela se fait à travers des câbles des tensions positives afin que l'effecteur ne perde pas un ou plusieurs degrés de liberté.

*Higuchi et al.* [6] ont également utilisé cette idée en 1985 pour développer une grue métallique afin de construire et édifier de grands bâtiments.

En 1993, *Landsberger et al.* [31] ont introduit une analyse cinématique de leur prototype ainsi que leur modalité d'actionnement.

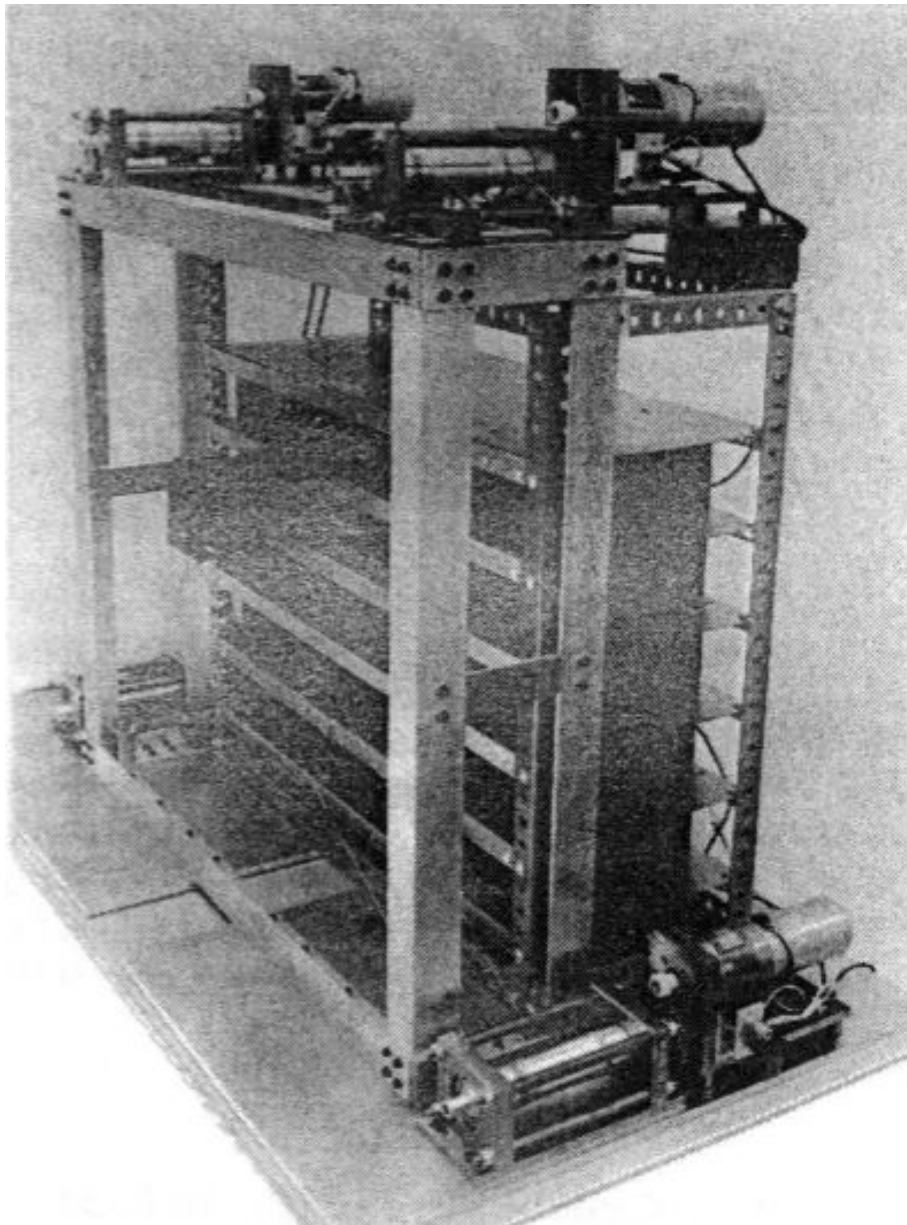


FIGURE 1.2 – prototype de grue à fil en deux dimensions [6].

## 1.1.2 Classification

### 1.1.2.1 Classification suivant l'architecture

Selon l'architecture de la base fixe et de la plate-forme mobile (l'organe terminal), la configuration géométrique d'un robot parallèle à câbles se détermine par les positions des points des sorties (les extrémités des câbles sur les actionneurs (voir figure (FIGURE 8)) et les positions des points d'attaches (les autres extrémités des câbles sur la plate-forme (voir figure (FIGURE 8))). Dans ce cas, on a deux types des configurations :

### Robot parallèle à câbles pleinement contraints

On appelle un robot parallèle à câbles pleinement contraint quand sa configuration lui permettait de le déplacer dans toutes les directions de l'espace du travail par les efforts extérieurs produits par les tensions des câbles.

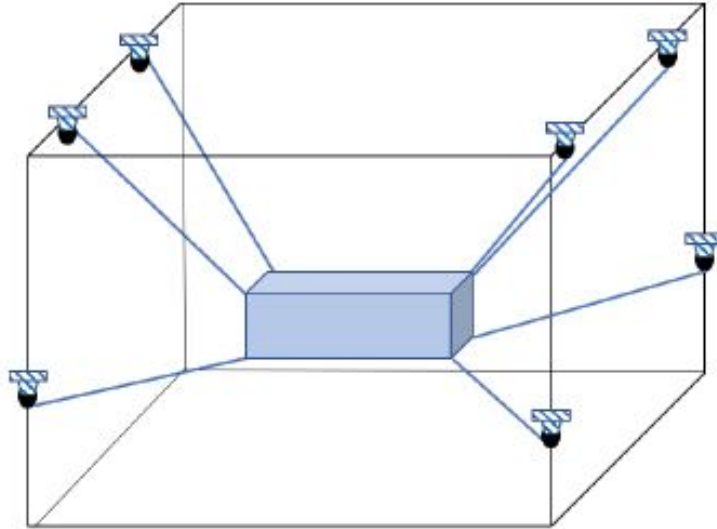


FIGURE 1.3 – Robot parallèle à câbles pleinement contraint [7].

### Robot parallèle à câbles suspendu

Un robot parallèle à câbles est dit suspendu si l'effecteur est suspendu par des câbles attachés par des actionneurs situés sur la base fixe. La plate-forme se déplace dans la direction de la gravité. En général, ce type de robot à câbles est utilisé pour porter des charges lourdes.

#### 1.1.2.2 Classification suivant le degré de redondance

Indépendamment de l'architecture géométrique du robot, les robots parallèles à câbles peuvent être classifiés suivant leur degré de redondance entre le nombre de câbles utilisés et leurs degrés de liberté (*ddl*).

Physiquement, le degré de redondance est défini par :

$$R = N_c - n, \quad (1.1)$$

avec

- $R$  : le degré de redondance.
- $N_c$  : le nombre des câbles.
- $n$  : le degré de liberté de la plate forme.

Selon le degré de redondance, on trouve trois configurations des robots parallèles à câbles [32] :

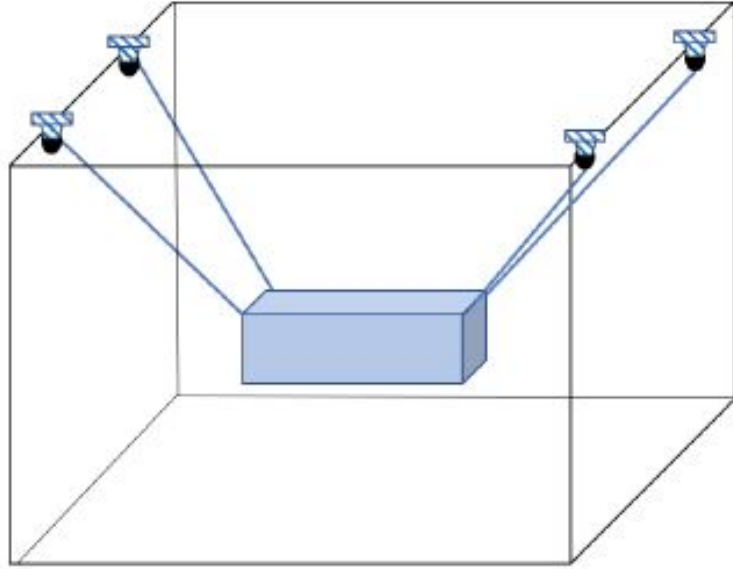
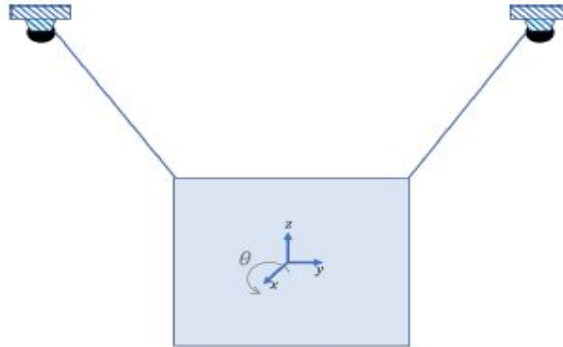


FIGURE 1.4 – RPC suspendu [7].

- **Configuration sous-contrainte** : On dit un Robot parallèle à câbles est sous-contraint, si  $R < 0$ , c'est-à-dire le robot possède moins de câbles que le nombre de  $ddl$  de l'effecteur. Dans cette configuration, la plate-forme mobile ne sera pas contrôlée que partiellement quelle que soit la modalité de travail du robot.

FIGURE 1.5 – Configuration sous-contrainte ( $N_c = 2$ ,  $n = 3$ ) [7].

- **Configuration incomplètement contrainte** : On dit un robot parallèle à câbles est incomplètement contraint, si  $R = 0$ , c'est-à-dire le robot utilise  $n$  câbles pour contrôler le  $n$   $ddl$  de la plate-forme mobile.
- **Configuration sur-contrainte** : On dit un robot parallèle à câbles est sur-contraint, si  $R > 0$ , c'est-à-dire pour contrôler l'effecteur du robot à  $n$   $ddl$  il faut que le robot utilise au moins  $n+1$  câbles.

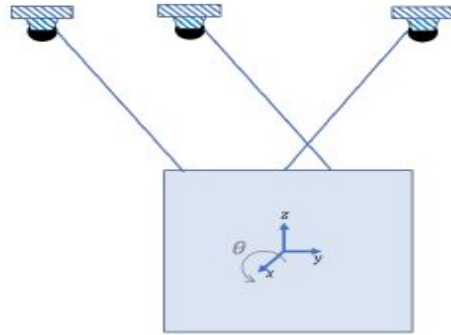


FIGURE 1.6 – Configuration incomplètement contrainte ( $N_c = 3, n = 3$ ) [7].

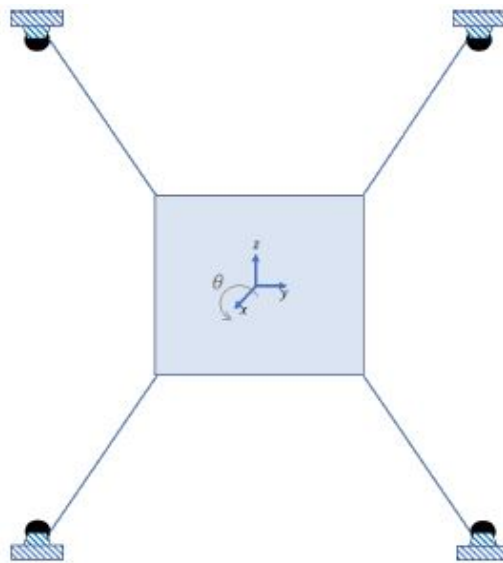


FIGURE 1.7 – Configuration sur-contrainte ( $N_c = 4, n = 3$ ) [7].

### 1.1.3 Avantages

Le robot parallèle à câbles offre plusieurs avantages, tels que :

**Grand espace de travail :**

Contrairement aux robots-séries et robots parallèles à segments rigides, le robot parallèle à câbles peut se déplacer dans un très grand volume de travail [33, 34, 35] grâce à la longueur des câbles.

**Rapidité :**

Le faible poids des câbles par rapport à l'espace de travail permet au robot parallèle à câbles de se déplacer avec des grandes vitesses [36, 5] comparativement aux autres types de robots.

**Configuration modulable :**

La reconfiguration d'un robot parallèle à câbles est plus simple que celle d'un robot conventionnel. En particulier, pour obtenir une nouvelle configuration d'un Robot

à câbles, il suffit de changer les points d'ancrage des câbles à la base fixe et sur la plate-forme ou bien d'éliminer un câble... [15] et [37].

**Coût de construction :**

Le coût de la construction d'un robot parallèle à câbles correspond principalement à celui des actionneurs, câbles et piliers. Ce coût est faible par rapport à celui des robots sériels et parallèles conventionnels de la même puissance.

**Faible consommation d'énergie :**

Par comparaison, la masse des câbles est pratiquement négligeable par rapport à la masse des corps rigides, et donc la masse à déplacer est réduite à celle de la charge ce qui permet de réduire l'énergie dépensée par les actionneurs.

### 1.1.4 Applications

Suite à ses avantages cités ci-dessus, on trouve le robot à câbles dans de nombreuses applications comme :

**La Médecine**

Les robots parallèles à câbles **TPAD** [8, 38] sont des robots destinés principalement pour étudier l'adaptation locomotrice chez les adultes en bonne santé par le contrôle d'un profil force-moment souhaité sur le bassin humain pendant un cycle de marche dans le but d'améliorer la mise en charge et la symétrie de la phase d'appui chez les personnes atteintes d'hémiplégie.

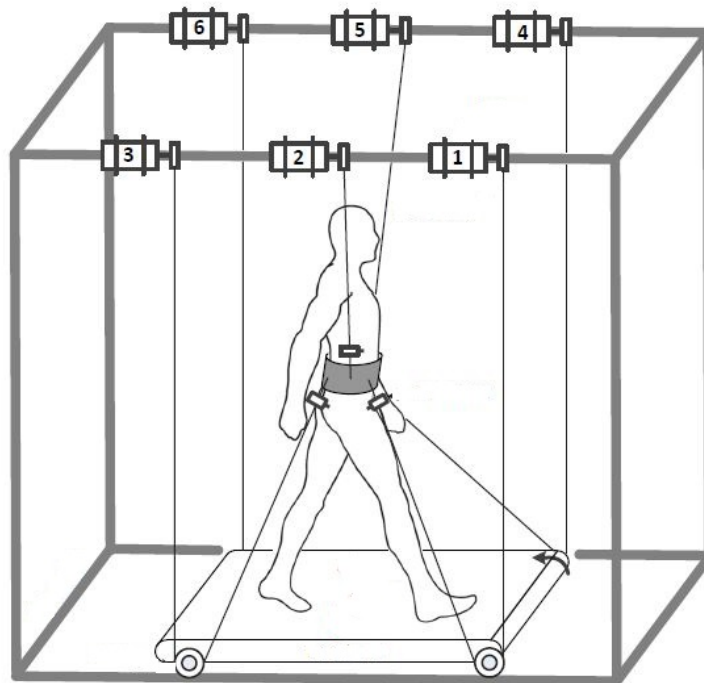


FIGURE 1.8 – Robot Parallèle à câbles **TPAD** [8]



### L'Acquisition des images

Il existe de nombreux robots parallèles à câbles utilisant une caméra pour l'acquisition d'images. Généralement, ces robots sont exploités pour filmer des événements sportifs et des tournages cinématographiques. Parmi les robots les plus connus pour ces missions, on cite les robots suivants : SkyCam [9, 10], CableCam [39] et SpiderCam [11].



FIGURE 1.9 – Robot : SkyCam [9, 10].



FIGURE 1.10 – Robot : SpiderCam [11].

### La Construction des bâtiments

Les robots parallèles à câbles ont aussi servis dans la construction des bâtiments en déplaçant de lourdes charges dans un grand espace de travail ou bien pour la construction rapide des maisons. Parmi ces robots, on trouve le premier prototype de robot parallèle à câbles suspendu développé dans les années quatre-vingt et connu sous le nom GRUE [12], ce prototype capable de déplacer une charge de masse importante d'une position à une autre sans perdre aucun degré de liberté sur tout l'espace du chantier.

Actuellement, Les industries du bâtiment commencent à utiliser les robots parallèles à câbles pour l'impression en trois dimensions des bétons afin de réduire le temps de construction de plusieurs maisons [13, 40].

### Le Sauvetage

Des robots parallèles à câbles capables de faire des recherches et de secourir des personnes lors de catastrophes naturelles à grand échelle tel que les tremblements de terre [14]. Dernièrement, les auteurs de l'article [15] ont développés un robot pa-



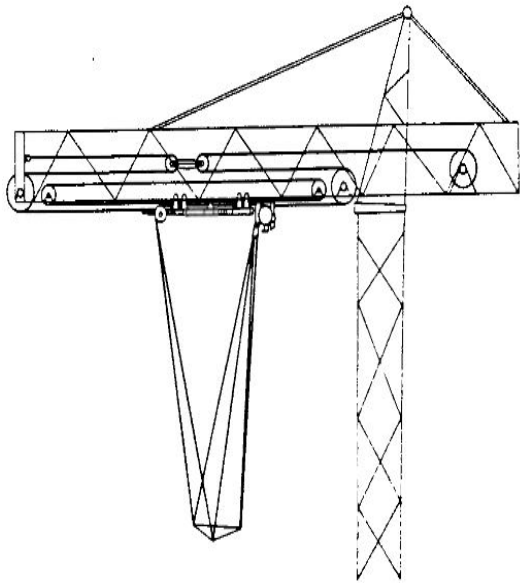


FIGURE 1.11 – Robot-grue [12]

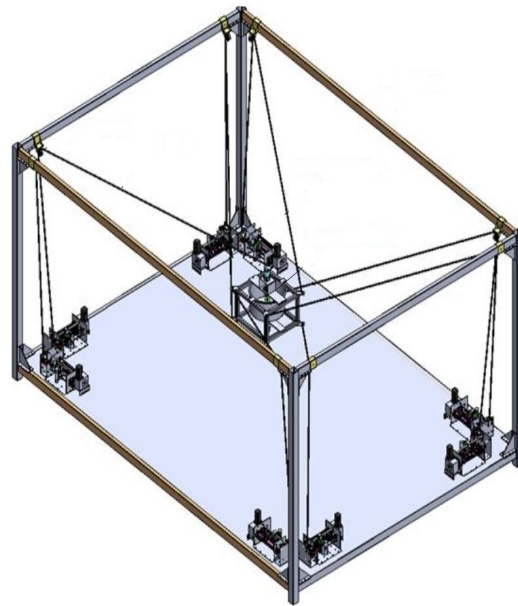


FIGURE 1.12 – Robot à câbles avec extrudeuse de béton [13].

rallèle à câbles du type grue, portable, modulable et entièrement autonome, destiné pour la détection des victimes et les extraire durant des missions de sauvetage.

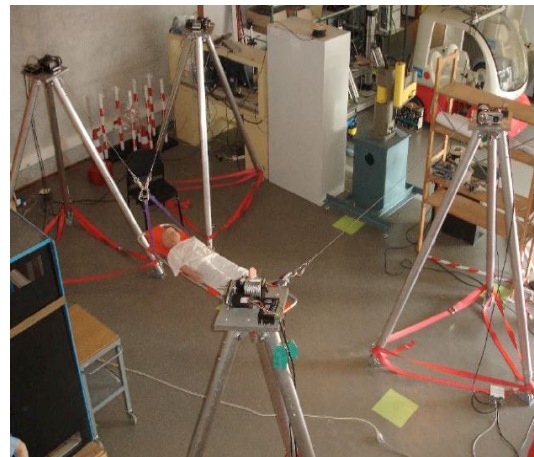
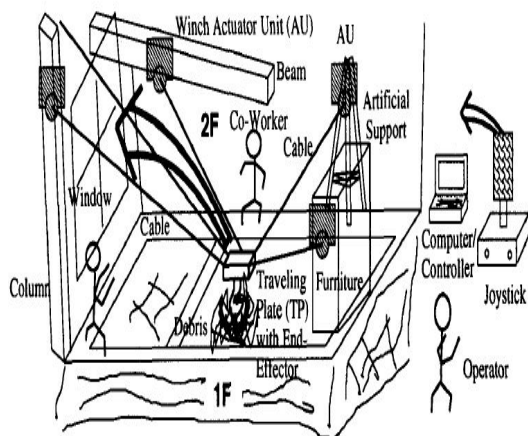


FIGURE 1.13 – Concept de robot parallèle à câbles pour le sauvetage [14, 15].

## 1.2 Modélisation du RPC

Dans le but de simplifier le modèle cinématique et dynamique du robot parallèle à câbles, plusieurs chercheurs ont considéré les câbles comme des segments rigides tels que

les auteurs des articles [41] [42].

D'autres travaux de recherche tels que les articles [43] et [44] ont proposé d'observer les câbles comme des ressorts virtuels de masse négligeable en vue d'établir les effets d'élasticité de chaque câble. Cette idée a été employée aussi dans les articles [45], [46] et [47] pour objectif de déterminer la raideur de mécanismes du robot parallèle à câbles. Les auteurs des articles [48] et [49] ont développé cette analyse par l'ajoute de la masse des câbles. De plus, Y. Suilu et al. [50] mettant une disposition d'analyse plus réaliste sur la rigidité des câbles en fonction des leurs tensions et des paramètres structurels du mécanisme du robot dans l'objectif est de diminuer les effets des vibrations dues aux élasticités des câbles.

Peut n'importe les hypothèses proposer sur les câbles, l'essentiel de la modélisation de robot parallèle à câbles est de trouver une ou des relations mathématiques et mécaniques entre les mouvements des actionneurs et le mouvement de l'organe terminal parce que les câbles ne jouent aucun rôle que de transférer les mouvements des actionnaires en mouvement de l'effecteur. Cette relation peut être déterminée à partir des notions des modélisations des robots industriels ci-dessous.

### 1.2.1 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct (MGD) permet de déterminer les positions et les rotations de la plate-forme dans l'espace opérationnel en fonction des coordonnées articulaires des actionneurs dans l'espace articulaire.

La relation MGD s'écrit formellement comme suit :

$$X_p = g(q), \quad (1.2)$$

avec

- $X_p$  : Vecteur former par les positions et les rotations de la plate-forme.
- $q$  : vecteur des cordonnées articulaires des actionneurs.

### 1.2.2 Modèle géométrique inverse

À l'opposé du MGD, le modèle géométrique inverse (MGI) permet de déterminer les coordonnées articulaires des actionneurs en fonction des positions et des rotations de la plate-forme dans l'espace opérationnel.

La relation MGI s'écrit formellement comme suit :

$$q = f(X_p). \quad (1.3)$$

### 1.2.3 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct (MCD) d'un robot à câbles permet d'exprimer la vitesse de l'organe terminal  $\dot{X}_p$  dans l'espace opérationnel en fonction du vecteur des vitesses des actionneurs  $\dot{q}$  dans l'espace articulaire.

La formulation mathématique du MCD peut être défini par :

$$\dot{X}_p = G(q)\dot{q}, \quad (1.4)$$

avec  $G \in \mathbb{R}^{n_{X_p} \times n_q}$  (où  $n_{X_p} = \dim(X_p)$ ,  $n_q = \dim(q)$ ) est la matrice jacobienne.

### 1.2.4 Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse (MCI) d'un robot à câbles permet d'exprimer le vecteur des vitesses des actionneurs  $\dot{q}$  dans l'espace articulaire en fonction de la vitesse de l'organe terminal  $\dot{X}_p$  dans l'espace opérationnel.

La formulation mathématique du MCI peut être défini par :

$$\dot{q} = F(X_p)\dot{X}_p, \quad (1.5)$$

avec  $F \in \mathbb{R}^{n_q \times n_{X_p}}$  est la matrice jacobienne.

### 1.2.5 Modèle dynamique

- **Modèle dynamique des enrouleurs (MDE)** : Le MDE exprime la relation entre les couples moteurs dans l'espace articulaire et les positions, vitesse et l'accélération articulaires  $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ .
- **Modèle dynamique de plate-forme (MDP)** : Le MDP exprime la relation entre les forces et moments exercées au centre de gravité de la plate-forme dans l'espace opérationnel et les positions, vitesse et l'accélération de la plate-forme  $(X_p, \dot{X}_p, \ddot{X}_p)$ .

## 1.3 Espace de travail du RPC

La notion de l'espace de travail est en générale abordé dans le cas de robot manipulateur tel que les robots sériels et les robots parallèles en particulière les robots parallèles à câbles. Selon Verhoeven et Hiller [51], l'espace de travail est formé par l'ensemble des états que l'effecteur peut atteindre.

### 1.3.1 Contrainte de l'espace de travail

J.P Merlet [52] a parlé de trois contraintes qui doivent être satisfaites pour qu'une pose de l'effecteur soit un élément de l'espace de travail.

**Contrainte géométrique** : c'est l'étude de la variation de longueur des câbles entre une valeur minimale et maximale. La résolution par intervalles de cette contrainte est établit dans l'article [53] pour le cas de robot parallèle de type Gough.

**Contrainte de configuration** : c'est l'étude de configuration de robot en terme des interférences entre câbles [52, 54] et les collisions entre câbles et effecteur [55].

**Contrainte statique** : c'est l'étude de la variation de tension dans les câbles qui doit être variée entre une tension minimale positive et maximale dans le but de garantir l'équilibre statique de l'effecteur.

### 1.3.2 Espace des Poses Polyvalentes

C'est un espace de travail connu sous le nom anglais « *Wrench Closure Workspace* (WCW) » regroupe l'ensemble des positions et orientations de RPC obtenus par le torseur d'effort des câbles appliquer sur l'effecteur sous la condition de positivité de tension dans les câbles [56]. La formulation mathématique de cet espace pour un RPC de  $n$  DOF et  $m$  câbles peut s'écrire sous la forme suivante :

$$WCW = \{X \in \mathbb{R}^n : \forall F \in \mathbb{R}^n, \exists (\tau, W) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}), W(X)\tau = F\} \quad (1.6)$$

Il est noté que cet ensemble est indépendant des valeurs des tensions minimales et maximales, mais il dépend de la géométrie du robot uniquement.

### 1.3.3 Espace des Torseurs Générales

C'est un espace de travail connu sous le nom anglais « *Wrench Feasible Workspace* (WFW) » regroupe l'ensemble des positions et orientations de RPC obtenus par le torseur d'effort des câbles appliqués sur l'effecteur sous la condition d'admissibilité de tension dans les câbles, c'est-à-dire la tension de chaque câble doit être variée entre une tension minimale positive et une tension maximale ce qu'on appelle la région réalisable des tensions. La formulation mathématique de cet espace pour un RPC de  $n$  DOF et  $m$  câbles peut s'écrire sous la forme suivante :

$$WFW = \{X \in \mathbb{R}^n : \forall F \in \mathbb{R}^n, \exists (\tau, W) \in \mathcal{I}^m \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}), \mathcal{I} \subset \mathbb{R}_+, W(X)\tau = F\} \quad (1.7)$$

### 1.3.4 Espace des travail dynamique

C'est un espace de travail contient des nouveaux points accessibles transitoirement que peut-être déterminés à partir de l'ancienne position de l'effecteur du robot [35]. La détermination de ces trois espaces est généralement très difficile sauf pour le cas où le nombre de degrés de liberté est inférieur ou égal à deux et le nombre de câbles est inférieur ou égal à quatre. Cependant, il existe des méthodes qu'ont été utilisé pour le calcul de l'espace de travail tel que les résolutions numériques et les méthodes graphiques. En particulier, Merlet [57] propose la méthode numérique de l'analyse par intervalle pour déterminer l'espace de travail, cette méthode a été appliquée aussi dans l'article [34] pour déterminer l'ETG, ainsi Azizian et al [58] utilise quelques outils graphiques tel le tracé de coniques pour caractériser visuellement l'EPP. De même, Goutfard et al [56] développe de résultats intéressants obtenus à l'aide des outils de calcul algébrique pour le cas du robot plan.

## 1.4 Commande du RPC

Ces dernières années, la conception de commandes pour les robots parallèles à câbles (RPC) a suscité un grand intérêt. Une première loi de commande pour le RPC a été développé dans l'article [59].

Les auteurs de cet article ont mis une proposition de générer les trajectoires de l'effecteur à partir des longueurs des câbles désirées et des longueurs des câbles mesurées. C'est-à-dire un retour d'état a été effectué à l'aide de mesures de longueur et de variation de chaque câble pour générer les poses de RPC. Une commande Proportionnelle Dérivée (PD) dans l'espace articulaire a été développée dans l'article [60] pour le contrôle d'un RPC redondant et pleinement contraint.

De même, les auteurs des articles [61] et [62] ont proposé la même loi de commande dans l'espace articulaire en ajoutant la compensation de la dynamique de l'effecteur afin de garantir l'admissibilité de tension au long de trajectoire de plate-forme. Cependant, Gholman et al. ont proposé dans [63] une commande similaire dans le but de prédire quelques corrections sur la dynamique de l'effecteur dans l'espace opérationnelle pour un RPC redondant et pleinement contraint. À côté de la commande PD, on trouve le schéma de contrôle Proportionnel-Intégral (PI) qu'a été introduite par Zi et al dans [64] sachant qu'ils intègrent la logique floue en vue d'éviter les effets des perturbations externes sur les câbles.

D'autres stratégies développées dans certains articles pour le contrôle des RPC avec des commandes avancées. Dans l'article [65], les auteurs ont parlé de l'application de la commande adaptative sur le robot parallèle à câbles dans le plan, il est effectué aussi l'analyse de l'incertitude sur les paramètres dynamique et cinématique. Malgré l'importance de cette commande dans ce travail, nous avons remarqué dans les résultats de simulation que les tensions dans les câbles sont beaucoup bavardées (chattering) malgré la simplicité de trajectoire désirée, ça signifie que le robot crée plus de vibration si on diminue de plus la borne supérieure de tension, dans ce cas le robot peut ne déplace pas dans toutes les parties de l'espace de travail et elle consomme plus d'énergie.

Alors que, les auteurs de l'article [66] sont proposés une idée de rassembler la commande adaptative avec la commande en mode glissante afin d'améliorer la convergence du robot vers la cible. Par contre l'article [67] il propose une étude de la performance d'un contrôle adaptatif robuste pour les robots parallèles à câbles soumis des incertitudes dynamiques et cinématiques conçus sur la base de la technique de fonction d'approximation c'est-à-dire les auteurs de cet article ils considèrent les incertitudes de robot comme une fonction variant dans le temps au lieu d'une fonction des différentes variables d'état.

Nous citons aussi l'article [68] que discute la réduction de la non-linéarité du robot parallèles à câbles de grandes dimensions travaillant à basse vitesse dans l'horizon de prédiction par la proposition d'un contrôle prédictif, de plus les auteurs de cet article ils sont pris l'attention de comparer cette stratégie de contrôle par le contrôle en mode glissante et le contrôle PID, alors ils sont prouvés que le contrôle proposé est plus performant que ce dernier.

### 1.4.1 L'étude de la commandabilité

D'un point de vue logique, les questions de contrôlabilité sont les premières à avoir être examinées. Pour le cas des systèmes sans dérive tel que

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad (1.8)$$

il existe un critère algébrique simple de vérification de la contrôlabilité du système (1.8), qui a été établi par Chow [69] qui a introduit une condition suffisante (et nécessaire c'est les vecteurs  $f_i$ ,  $i \in [1 \dots m]$ , sont analytiques) de contrôlabilité locale en un point du système, soit noté par  $x_0$ . Dans les années récentes, cette condition est très connue dans les littératures de théorie de contrôle, sous le nom de *condition de rang de l'algèbre de Lie*. Le théorème de Chow est énoncé comme suit

**Théorème 1.4.1.** *Supposons que les champs  $f_i$ ,  $i \in [1 \dots m]$ , sont analytiques. Si le système (1.8) est contrôlable, alors*

$$\text{Lie}\{f_1, \dots, f_m\}(x) = \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

Par contre, pour le cas des systèmes avec dérive tel que

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad (1.10)$$

l'étude de commandabilité est beaucoup plus compliquée. Cependant, il existe une caractérisation importante pour la propriété d'*accessibilité* c'est-à-dire la possibilité d'atteindre depuis d'un point quelconque  $x_0$  un ensemble d'intérieur non vide. Lobry, Sussmann et Jurdjevic ont montré dans leurs articles [70] [71] que la condition de rang est non seulement nécessaire mais aussi suffisante pour garantir la propriété d'accessibilité, dans le cas où les champs  $f_i$ ,  $i \in [1 \dots m]$ , sont analytiques.

Cependant, cette propriété d'accessibilité présente très peu d'intérêt dans la pratique parce qu'il ne s'agit pas d'une propriété de contrôlabilité locale, en particulier, cela ne signifie pas que le point  $x_0$  lui-même fait partie de l'intérieur de l'ensemble des points réalisables. Le concept de contrôlabilité locale en temps petit (*small time locally controllable (STLC) en anglais*) est beaucoup plus conforme à ce qu'on pourrait attendre d'un système contrôlable de façon intuitive de ce terme, c'est-à-dire la possibilité de rejoindre un voisinage de  $x_0$  en une courte période arbitraire. Mathématiquement la notion de STLC est donnée par la définition suivante :

**Définition 1.4.2.** (*Notion de STLC*)

On se donne  $x_0$  et  $x_1$  deux points voisins de  $x_e$ . Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est dit STLC au point d'équilibre  $(x_e, u_e)$  (c'est-à-dire  $f(x_e, u_e) = 0$ ) si  $(\forall \epsilon > 0; \exists \eta > 0$  tel que si  $\|x_0 - x_e\| < \eta$  et  $\|x_1 - x_e\| < \eta$  alors  $\exists u : [0, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tel que  $\|u(t) - u_e\| < \epsilon$  et  $\|x(t) - x_e\| < \epsilon; \forall t \in [0, \epsilon]) \implies$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \implies x(\epsilon) = x_1. \quad (1.11)$$

**Définition 1.4.3.** (*Équivalente*) [72]

Soit le système de contrôle  $\dot{x} = f(x, u)$  avec  $(x_e, u_e)$  un point d'équilibre. On désigne par  $\mathcal{A}(t)$  l'ensemble des trajectoires atteignables sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ , cet ensemble est défini par

$$\mathcal{A}(t) = \{x(t, u); u \in \mathbb{R}^m, t \in [0, T]\}. \quad (1.12)$$

On dit que le système est STLC au point  $(x_e, u_e)$  si  $x_e \in \text{int}(\mathcal{A}(t)); \forall t \in [0, T]$ . C'est à dire  $\mathcal{A}(t)$  est d'intérieur non vide.



Un autre résultat de contrôlabilité des systèmes avec dérive est donné par le théorème de *Brunovsky* en 1974 qui donne une condition suffisante de contrôlabilité des systèmes de contrôle possédant la propriété de parité par rapport à l'état et le contrôle.

**Théorème 1.4.4.** (*Théorème de Brunovsky [73]*) Soit le système de contrôle  $\dot{x} = X(x) + Y(x)u = f(x, u)$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que  $f$  est impaire en  $(x, u)$  (i.e  $f(-x, -u) = f(x, u)$ ).

Si  $\{z(0); z \in \text{lie}\{Y, X\}\} = \mathbb{R}^n$ . Alors le système sans dérive  $\dot{x}(t) = X(x) + Y(x)u$  est STLC en  $(0, 0)$ .

**Théorème 1.4.5.** Tout le système linéaire stationnaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  contrôlable est STLC au voisinage de son point d'équilibre  $(x_e, u_e)$ .

Dès les années quatre-vingt, le principal critère de commandabilité connu est celui de l'article [74], qui généralise de nombreux travaux de recherche proposés dans les articles [73] [75] [76]. De telle sorte, il fournisse une condition nécessaire et non suffisante pour vérifier la commandabilité du système de contrôle avec dérive.

Cette condition nécessaire de contrôlabilité locale due à Sussmann-Jurdjevic (1979) est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 1.4.6.** Supposons que les champs  $f_i$  sont analytiques. Si le système (1.10) est localement contrôlable en  $(0, 0)$  alors

$$\{g(0); g \in \text{Lie}\{f_0, \dots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n. \quad (1.13)$$

Enfin, il faut noter qu'en ce qui concerne les systèmes mécaniques, des définitions spécifiques de la commandabilité ont été proposé et ont également donné lieu à des condition algébriques semblables à celle de *Sussman* [77].

En revanche, les travaux sur la commandabilité citées ci-dessus sont principalement des résultats d'existence, et il est difficile d'en déduire des algorithmes ou bien des méthodes d'élaboration des schémas de contrôle en boucle ouverte capable de conduire l'état du système de contrôle d'une position à une autre. Motivé par le contrôle des systèmes dynamique non-holonomes, plusieurs études ont été faites sur la généralisation de schéma de contrôle en boucle ouverte dès les années quatre-vingt-dix, essentiellement pour le système sans dérive.

La première approche consiste à utiliser de contrôles sinusoïdaux qui sont en général multi-fréquence, permettent de générer des trajets suivant les directions des crochets de Lie des champs de contrôle. Le principe fondamental est présent dans les premières travaux des recherches sur la contrôlabilité telle que les articles [70] [78]. Notamment, cette approche a été mis au point dans les travaux [79] et [80] à l'aide de propriétés de moyenne à de fréquence élevée [81]. Pratiquement, cet algorithme ne permet d'atteindre qu'une position proche de la position cible, même quand les fréquences employées sont très élevées, sauf dans le cas où le système mis en étude est nilpotent [82]. Également, ce type d'algorithme a été utilisé pour certains types des systèmes de contrôle avec dérive [83]. Cependant, il est assez complexe de généraliser cet algorithme à tous les systèmes de contrôle. De plus, son application est très compliquée.

Un seconde type d'approche est d'utiliser les propriétés de platitude quand elles existent [84]. D'ailleurs, cette approche apporte généralement des solutions de contrôle assez simple et efficace, elle présente l'avantage de l'employer aussi aux systèmes avec dérive dans le cas où ils vérifient la propriété de platitude, sans aucune différence importante par rapport aux systèmes sans dérive. Ces deux approches sont d'intérêt très important dans la construction de lois de commande de suivi. Dans la suite on présente le problème de commande de suivi.

### 1.4.2 Formulation du problème de commande de suivi

Dans un premier temps, nous commençons par la définition de la notion de trajectoire pour un système de contrôle, ainsi que la définition de la contrôlabilité autour d'une trajectoire.

**Définition 1.4.7.** (Trajectoire) Soit  $T_0 < T_1$  et soit l'application

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{u}) : [T_0, T_1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto (\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec  $t \longmapsto \bar{x}(t) \in \mathcal{C}^0$  et  $t \longmapsto \bar{u}(t) \in L^\infty$ . On dit que  $(\bar{x}, \bar{u})$  est une trajectoire du système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ , si

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt; \forall (t_0, t_1) \in [T_0, T_1]^2. \quad (1.15)$$

En particulier, le point d'équilibre  $(x_e, u_e)$  est un exemple de trajectoire triviale.

**Définition 1.4.8.** (Contrôlabilité autour d'une trajectoire) On se donne deux positions  $x^0$  et  $x^1$  voisines de  $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ . Le système de contrôle  $\dot{x} = f(x, u)$  est dit localement contrôlable autour de  $(\bar{x}, \bar{u})$  si :  $\forall \epsilon > 0; \exists \eta > 0$  tel que si :  $\|x^0 - \bar{x}(T_0)\| < \eta$  et  $\|x^1 - \bar{x}(T_1)\| < \eta$  alors  $\exists u : [T_0, T_1] \xrightarrow{L^\infty} \mathbb{R}^m$  tel que :  $\|u(t) - \bar{u}(t)\| < \epsilon$  p.p. alors :

$$(\dot{x}(t) = f(x, u), x(T_0) = x^0) \implies x(T_1) = x^1. \quad (1.16)$$

Ensuite, d'une manière générale, le modèle dynamique d'un robot peut s'écrire sous forme d'un système de contrôle s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u), \end{aligned} \quad (1.17)$$

où

- $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur d'état du système,
- $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  est le vecteur de sortie du système,
- $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  est le vecteur de commande (ou des entrées) du système.
- $t \in \mathbb{R}_+$  est le variable du temps,
- $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}, \mathbb{R}^{n_x})$ , et  $h(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}, \mathbb{R}^{n_y})$  sont deux fonction non linéaire.



On considère la trajectoire de référence d'état noté par  $x_r(t)$  vérifié l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= f(t, x_r, u_r) \\ y_r &= h(t, x_r, u_r),\end{aligned}\tag{1.18}$$

avec  $u_r$  est correspond à l'entrée de référence et  $y_r$  et la sortie de référence résultante.

La commande de suivi de trajectoire permet à la sortie  $y(t)$  de converger vers  $y_r(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini. Dans le cas de robot parallèle à câbles, la sortie  $y(t)$  (la position et la vitesse de la plate-forme mobile) et la trajectoire  $y_r(t)$  doivent être appartient à l'espace opérationnel de robot, et par conséquent le problème de suivi de trajectoire de robot parallèle à câbles consiste à déterminer un schéma du contrôle permettant à la plate-forme de suivre une trajectoire de référence donnée dans un espace de travail réalisable. Ce schéma du contrôle peut être établie en fonction d'un retour d'état, c'est-à dire la loi de commande s'écrit sous la forme suivante :

$$u = u(t, x, x_r, u_r),\tag{1.19}$$

telle que le système (1.17)-(1.19) en boucle fermée vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - y_r(t)\| = 0.\tag{1.20}$$

Dans les formulations du problème telles que présentées, aucune contrainte sur la taille de contrôle  $u$  n'est donnée, alors qu'en pratique la loi de commande qui peut être fournie au système est limitée, c'est-à-dire qu'elle doit satisfaire la contrainte suivante

$$u_{min} \leq u \leq u_{max}.\tag{1.21}$$

Parmi les contrôles utilisés pour résoudre le problème de suivi de trajectoire on trouve les lois de commande par mode glissant et les feedbacks stabilisantes.

### 1.4.3 Commande par mode glissant

Le contrôle par mode glissant est un contrôle à structure variable initié par le mathématicien *A.F. Fillipov* [85]. Ce schéma de contrôle repose principalement sur l'analyse des équations différentielles à second membre discontinu.

La véritable progression de l'utilisation de cette approche provient de la publication des ouvrages d'*Itkis* [86] et d'*Utkin* [87]. Ensuite, la communauté des automaticiens a rapidement pris conscience de l'intérêt de cette technique qui associe a sa simplicité de développement et ses applications dans les domaines de l'automatique et de la robotique [88, 89, 90, 91, 92].

Le principe de la loi de commande par mode glissant pour un tel système de contrôle est de forcer la sortie du système à atteindre une hypersurface appelée *surface de glissement* dans un temps fini, et de la garder sur cette hypersurface tout le temps.

La détermination du schéma du contrôle par mode glissant se résume en deux étapes :

- Construction d'une surface de glissement à partir de l'objectif de schéma de contrôle et des caractéristiques de système de contrôle en boucle ouvert.
- Détermination d'une loi de commande discontinue permettre à la sortie du système de convergé en temps fini vers le surface de glissement et du rester sur cette surface.

### 1.4.3.1 Surface de glissement

Il n'existe pas une formule standard pour déterminer la surface de glissement. Il est noté aussi que cette surface peut-être présenter sous forme linéaire ou non linéaire.

Dans cette partie, on présente la méthode de construction de surface de glissement introduite par Jean-Jacques E. Slotine [16] pour le cas du système dynamique non linéaire mono-entrée d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  s'écrit sous la forme suivante

$$x^{(n)} = f(X) + g(X)u, \quad (1.22)$$

avec :

- $x \in \mathbb{R}$  présente la sortie du système.
- $u \in \mathbb{R}$  présente la loi de commande.
- $X = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  présente le vecteur d'état.
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et bornées que ne sont pas exactement connus.

Soit  $e = X - X_d$  l'erreur de suivi, avec  $X_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$  l'état désirée pour que  $X$  le suivre.

Afin que la tâche de suivi soit réalisable à l'aide d'un contrôle fini  $u$ , la valeur initiale de l'état désiré  $X_d(0)$  est choisie comme suit

$$X_d(0) = X(0). \quad (1.23)$$

La surface de glissement est défini par le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  suivant

$$S(t) := \{e \in \mathbb{R}^n : s(e, t) = 0\}, \quad (1.24)$$

avec  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction suffisamment différentiable appelée *variable de glissement*, peut-être prend la forme suivante

$$s(e, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e, \quad (1.25)$$

avec  $\lambda$  un constant positive. Par exemple :

- si  $n = 2$ , on a :  $s = \dot{e} + \lambda e$ ,
- si  $n = 3$ , on a :  $s = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e$ .

Étant donné la condition initiale (1.23), le problème de suivre  $X \equiv X_d$  est équivalent à celui de rester sur la surface  $S(t)$  pour tout  $t > 0$ ; en effet  $s = 0$  représente une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est  $e = 0$ . Ainsi, le problème du suivi de trajectoire désirée  $X_d$  peut être réduit à celui de maintenir la quantité scalaire  $s$  à zéro.

Plus précisément, le problème de suivi de trajectoire décrite par un vecteur à  $n$  dimensions  $X_d$  peut être remplacé par un problème de stabilisation d'ordre 1 en  $s$ . En effet, puisque l'expression de  $s$  de l'équation (1.24) contient  $e^{(n-1)}$ , et donc il suffit de différencier  $s$  une seule fois pour que l'entrée  $u$  apparaisse.

De plus, les limites sur  $s$  peuvent être directement traduites en limites sur le vecteur d'erreur de suivi  $e$ , et donc le scalaire  $s$  représente une vraie mesure de la performance de suivi. Plus précisément, en supposant que  $e(0) = 0$ , nous avons

$$\forall t \geq 0, |s(t)| \leq M \implies \forall t \geq 0, |e^{(i)}(t)| \leq (2\lambda)^i \epsilon, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (1.26)$$

avec  $\epsilon = \frac{M}{\lambda^{n-1}}$ .

Le problème simplifié du premier ordre consistant à maintenir le scalaire  $s$  à zéro peut maintenant être réalisé en choisissant la loi de commande  $u$  de (1.22) de telle sorte :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|, \quad (1.27)$$

où  $\eta$  est une constante strictement positive. Essentiellement, (1.27) indique que la "distance" au carré par rapport à la surface, mesurée par  $s^2$ , diminue le long de toutes les trajectoires du système. Ainsi, elle force les trajectoires à se diriger vers la surface  $S(t)$ , comme le montre la figure (1.14).

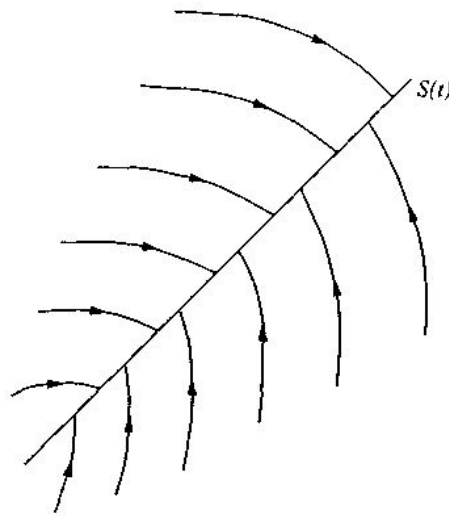


FIGURE 1.14 – La condition de glissement [16].

En particulier, la satisfaction de la condition (1.27), appelé *condition de glissement*, rend la surface de glissement  $S(t)$  un ensemble invariant. Graphiquement, cela correspond au fait que, dans la figure (1.14), les trajectoires hors de la surface peuvent "bouger" tout en restant convergées vers la surface.

L'autre aspect intéressant de l'ensemble invariant  $S(t)$  est qu'une fois sur lui, les trajectoires de système sont définies par l'équation de l'ensemble lui-même, à savoir

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} e = 0. \quad (1.28)$$

En d'autres termes, la surface  $S(t)$  est à la fois un lieu et une dynamique. Ce fait est simplement l'interprétation géométrique de notre remarque précédente selon laquelle la définition de l'équation (1.25) nous permet, en fait, de remplacer un problème d'ordre  $n$  par un problème d'ordre 1.

Enfin, la satisfaction de (1.27) garantit que si la condition (1.23) n'est pas exactement vérifiée, c'est-à-dire si  $X(t=0) \neq X_d(t=0)$ , la surface  $S(t)$  sera néanmoins atteinte en un temps fini inférieur à  $|s(t=0)|/\eta$ .

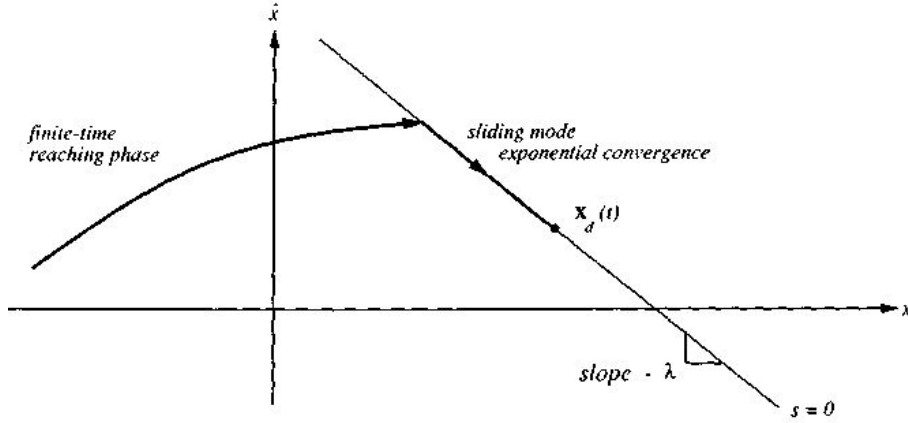


FIGURE 1.15 – Interprétation des équations (1.25) et (1.27) (cas  $n = 2$ ) [16].

En effet, supposons par exemple que  $s(t = 0) > 0$ , et que  $T_{reach}$  soit le temps nécessaire pour atteindre la surface  $S(t)$ . L'intégration de (1.27) entre  $t = 0$  et  $t = t_{reach}$  conduit à

$$0 - s(t = 0) = s(t = t_{reach}) - s(t = 0) \leq -\eta(t_{reach} - 0), \quad (1.29)$$

ce qui implique

$$t_{reach} \leq \frac{s(t = 0)}{\eta}. \quad (1.30)$$

On obtiendrait un résultat similaire dans le cas où  $s(t = 0) < 0$ , et donc

$$t_{reach} \leq \frac{|s(t = 0)|}{\eta}. \quad (1.31)$$

De plus, la définition de l'équation (1.25) implique qu'une fois sur la surface  $S(t)$ , l'erreur de suivi converge exponentiellement vers zéro, avec une constante de temps  $(n - 1)/\lambda$ , (à partir de la séquence de  $(n - 1)$  constantes de temps égales à  $1/\lambda$ ).

Le comportement typique du système impliqué par la satisfaction de la condition de glissement (1.27) est illustré à la figure (1.15) pour  $n = 2$ . La surface de glissement est une droite dans le plan de phase, de pente  $\lambda$  et contenant le point (instationnaire)  $X_d = [x_d, \dot{x}_d]^T$ .

A partir d'une condition initiale quelconque, la trajectoire de l'état atteint la surface variable dans le temps en un temps fini inférieur à  $|s(t = 0)|/\lambda$ , puis glisse le long de la surface vers  $x_d$  de manière exponentielle, avec une constante de temps égale à  $1/\lambda$ .

En résumé, l'idée derrière les équations (1.25) et (1.27) est de choisir une fonction bien conduite de l'erreur de poursuite,  $s$ , selon (1.25), puis de sélectionner la loi de commande de rétroaction  $u$  dans (1.22) de sorte que  $V(s) = \frac{1}{2}s^2$  reste une fonction de Lyapunov du système en boucle fermée, malgré la présence d'une imprécision du modèle et de perturbations.

#### 1.4.4 Étude Stabilité

Par définition, la stabilité signifie que si un système est en équilibre, il restera dans cet état quand le temps varie. L'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov consiste à

l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est proche à l'état d'équilibre.

L'objectif de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans déterminer explicitement ses trajectoires. Afin d'étudier les résultats classiques sur la notion de stabilité au sens de Lyapunov, nous devons rappeler les définitions suivantes.

On désigne par  $\Omega$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  et par  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , non borné à droite. Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, on lui associe le système autonome :

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.32)$$

Soit  $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, on lui associe le système non-autonome :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.33)$$

$x(t, t_0, x_0)$  désigne une solution  $x(t)$  du système (1.32) ou du système (1.33) telle que  $x(t_0) = x_0$

**Définition 1.4.9.** Un point  $\bar{x} \in \Omega$  est un point d'équilibre, ou point singulier du système (1.32) (resp. de (1.33)) si

$$f(\bar{x}) = 0, \text{ (resp. } f(t, \bar{x}) = 0, \forall t \in I). \quad (1.34)$$

On considère toujours l'équilibre en 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

**Définition 1.4.10.** On considère le système (1.32), et  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ayant des dérivées partielles sur  $\Omega$ . On définit la dérivée totale  $\dot{V}$  pour le système (1.32) par :

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(y) f_i(y). \quad (1.35)$$

**Définition 1.4.11.** On considère le système (1.33), et  $V : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ayant des dérivées partielles sur  $\Omega$ . On définit la dérivée totale  $\dot{V}$  pour le système (1.33) par :

$$\dot{V}(y) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, y) f_i(t, y). \quad (1.36)$$

**Définition 1.4.12.** Une fonction  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite semi-définie positive (resp. semi-définie négative) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1.  $v(0) = 0$
2.  $\forall y \in \mathcal{V}, v(y) \geq 0$  (resp.  $v(y) \leq 0$ ).

Elle est dite définie positive (resp. définie négative) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1.  $v(0) = 0$
2.  $\forall y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, v(y) > 0$  (resp.  $v(y) < 0$ ).

**Définition 1.4.13.** Une fonction  $v : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite semi-définie positive (resp. semi-définie négative) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1.  $\forall t \in I, v(t, 0) = 0$
2.  $\forall t \in I, \forall y \in \mathcal{V}, v(t, y) \geq 0$  (resp.  $v(t, y) \leq 0$ ).

Elle est dite définie positive (resp. définie négative) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1.  $\forall t \in I, v(0) = 0$
2. il existe  $v_0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  définie positive telle que :

$$\forall t \in I, \forall y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, v(t, y) \geq v_0(y) \text{ (resp. } v(t, y) \leq -v_0(y)). \quad (1.37)$$

**Définition 1.4.14.** (Étude de Stabilité)

1. **Stabilité du système autonome :** Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.32) est dit stable si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que si  $\|x(0)\| < \delta$ , alors chaque solution  $x(t)$  satisfait  $\|x(t)\| < \epsilon$  pour tout  $t \geq 0$ .
2. **Stabilité du système non autonome :** Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.33) est dit stable si pour tout  $\epsilon > 0$ , et pour tout  $t_0 \geq 0$ , il existe  $\delta(\epsilon, t_0) > 0$  tel que si  $\|x(0)\| < \delta(\epsilon, t_0)$ , alors chaque solution  $x(t)$  satisfait  $\|x(t)\| < \epsilon$  pour tout  $t \geq t_0$ .
3. **Stabilité uniforme :** Le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.33) est dit uniformément stable (au sens de Lyapunov) si :

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t_0 \geq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \\ & (\|x_0\| < \eta) \Rightarrow (\forall x(\cdot, x_0, t_0), \forall t \geq t_0, \|x(t, x_0, t_0)\| < \epsilon). \end{aligned} \quad (1.38)$$

**Définition 1.4.15.** (Stabilité asymptotique)

1. **Stabilité asymptotique du système autonome :** Le point d'équilibre  $x = 0$  du système autonome (1.32) est asymptotiquement stable si le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.32) est stable et s'il existe  $\delta_0 > 0$  tel que  $\|x(0)\| < \delta_0$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ .
2. **Stabilité asymptotique du système non autonome :** Le point d'équilibre  $x = 0$  du système autonome (1.33) est asymptotiquement stable si le point d'équilibre  $x = 0$  du système (1.33) est stable et pour tout  $t_0 \geq 0$ , il existe une constante positive  $\delta_0(t_0) > 0$  tel que  $\|x(0)\| < \delta_0(t_0)$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ .
3. **Stabilité asymptotique uniforme :** L'origine du système (1.33) est uniformément asymptotiquement stable : si l'origine est uniformément stable et s'il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\|x(t_0)\| < \delta$  alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ .

**Théorème 1.4.16.** (Théorème de Lyapunov autonome) Supposons que l'origine est un point d'équilibre du système autonome (1.32). S'il existe un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  de 0 et une fonction

$$V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (1.39)$$

de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

1.  $V$  soit définie positive.

2. La dérivée totale  $\dot{V}$  pour (1.32) soit semi définie négative, alors 0 est stable,  $V$  s'appelle une fonction de Lyapunov. De plus si la dérivée totale  $\dot{V}$  pour (1.32) est définie négative alors 0 est asymptotiquement stable,  $V$  s'appelle une fonction stricte de Lyapunov.

**Théorème 1.4.17. (Théorème de Lyapunov non autonome)** Soit 0 un point d'équilibre de (1.33), s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$  de 0 et une fonction

$$V : \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (1.40)$$

de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

1.  $V$  soit définie positive.
2. La dérivée totale  $\dot{V}$  pour (1.33) soit négative (respectivement définie négative), alors 0 est stable. Si de plus, on a :
3.  $V$  est décroissante ( $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} V(t, y) = 0$ ) alors 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).
4. Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et  $V$  est radialement non bornée ( $\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} V(t, y) = +\infty$ ) alors 0 est globalement uniformément stable (respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable).

**Définition 1.4.18. (La stabilité exponentielle)** L'origine du système dynamique (1.32) (resp.(1.32)) est dit localement exponentiellement stable s'il existe une constante  $\gamma < 0$ ,  $M > 0$  et  $r > 0$  telles que pour  $\|x_0\| < r$ , la solution  $x(\cdot)$  de (1.32)(resp.(1.32)) issue de  $x_0$  en  $t = 0$  est définie sur  $[0, \infty[$  et vérifie :

$$\|x(t)\| \leq M \|x_0\| e^{\gamma t} \quad (1.41)$$

L'origine du système dynamique (1.32)(resp.(1.32)) est dit globalement exponentiellement stable, si l'inégalité précédente est vraie pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1.4.19.** Si le système (1.32)(resp.(1.32)) est exponentiellement stable, alors il est asymptotiquement stable.

**Théorème 1.4.20.** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , telle que  $f(0) = 0$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. 0 est localement exponentiellement stable pour le système (1.32).
2. Il existe une fonction de Lyapunov  $V$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de 0, et des réels  $c_1, c_2, c_3, r$  et  $\delta > 0$ , tels que

$$\begin{aligned} (\|x\| < \delta) &\Rightarrow (c_1 \|x\|^r \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^r) \\ (\|x\| < \delta) &\Rightarrow (\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq -c_3 \|x\|^r) \end{aligned} \quad (1.42)$$

### 1.4.5 Stabilisation par des feedbacks

**Définition 1.4.21.** [93] Soit le système de contrôle  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$  où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le contrôle. On suppose que  $f(0,0) = 0$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application régulière.

On dit que le système est asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback continu s'il existe une application  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  continue tel que

$$u(0) = 0,$$

et le système en boucle fermée

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t)))$$

soit asymptotiquement stable.

**Théorème 1.4.22.** [94] On suppose  $n = m = 1$ . Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback continu si et seulement si : il existe  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue ;  $u(0) = 0$  et réalisant

$$xf(x, u(x)) < 0 \text{ pour } x \neq 0. \quad (1.43)$$

**Définition 1.4.23.** [93] Le système de contrôle linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  est dit stabilisable par feedback linéaire, s'il existe une matrice  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  dite matrice gain telle que

$$u(x) = Kx$$

est feedback stabilisante du système bouclé.

**Théorème 1.4.24.** [93] Si la paire  $(A, B)$  est contrôlable, alors le système linéaire  $\dot{x} = Ax + Bu$  est stabilisable à l'aide d'un feedback linéaire  $u(x) = Kx$  tel que  $A + BK$  soit de Hurwitz.



# Chapitre 2

## Modèle Mathématique du RPC

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>2.2</b>	<b>Passage de <math>\mathcal{R}_O</math> à <math>\mathcal{R}</math></b>	<b>34</b>
<b>2.3</b>	<b>Modélisation géométrique inverse (MGI)</b>	<b>37</b>
<b>2.4</b>	<b>Modélisation Cinématique</b>	<b>40</b>
2.4.1	Modèle Cinématique Inverse du premier ordre	40
2.4.2	Modèle Cinématique Inverse du deuxième ordre	43
2.4.3	Équation du modèle cinématique inverse	44
<b>2.5</b>	<b>Modèle statique</b>	<b>44</b>
<b>2.6</b>	<b>Modèle dynamique</b>	<b>46</b>
2.6.1	Modèle dynamique de la plate-forme	46
<b>2.7</b>	<b>Modèle dynamique des actionneurs</b>	<b>47</b>
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre décrit la mise en équation mathématique du modèle décrivant la géométrie, la statique, la cinématique et le comportement dynamique de robot parallèle à câbles en fonction du temps, de ses entrées et de ses différents paramètres.

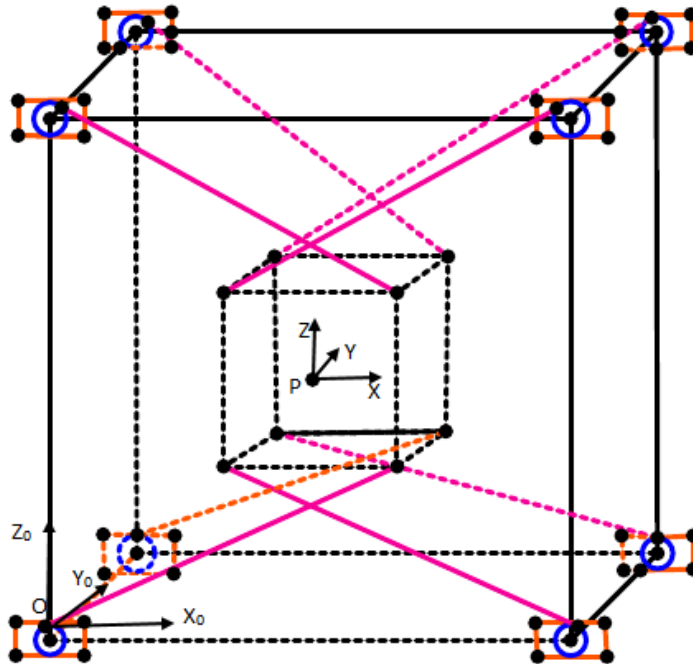


FIGURE 2.1 – Description géométrique du RPC.

Pour établir les équations décrivant le mouvement d'un robot à câble dans l'espace euclidien à trois dimensions, on utilise deux repères [95] :

- Un repère de référence global  $\mathcal{R}_O(O, X_0, Y_0, Z_0)$  lié à la base fixe de robot et orienté dans le sens direct comme indique la figure (FIGURE 2.1).
- Un repère local  $\mathcal{R}(P, X, Y, Z)$  lié à la base mobile (plate forme) ayant comme origine le centre de gravité de la plate-forme  $P = [x, y, z]^T$  dont les vecteurs de base sont liés à la géométrie de l'effecteur comme indique la figure (FIGURE 2.1).

Dans la suite on note par

$$\begin{cases} \sin \mu = s_\mu \\ \cos \mu = c_\mu \\ \tan \mu = t_\mu. \end{cases} \quad (2.1)$$

## 2.2 Passage de $\mathcal{R}_O$ à $\mathcal{R}$

En mécanique des solides, il existe plusieurs paramétrisations pour décrire le mouvement d'un corps donné qui exhibe des translations ou des rotations ou bien les deux à la fois.

Les paramétrisations en lacet, (resp. tangage et roulis) sont utilisés pour décrire la position et l'orientation de la plate-forme dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_O$ .

La configuration de la plate-forme dans l'espace est décrite par trois rotations élémentaires définies par trois angles d'orientations à savoir le lacet  $\psi$ , le tangage  $\theta$  et le roulis  $\phi$  :

$$\mathcal{B}_0(X_0, Y_0, Z_0) \xrightarrow{R_Z^\psi} \mathcal{B}_1(U, V, Z_0) \xrightarrow{R_Y^\theta} \mathcal{B}_2(X, V, W) \xrightarrow{R_X^\phi} \mathcal{B}_3(X, Y, Z) \quad (2.2)$$

Où  $\mathcal{B}_0(X_0, Y_0, Z_0)$  est la base du repère  $\mathcal{R}_O$ ,  $\mathcal{B}_3(X, Y, Z)$  la base du repère local  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{B}_1(U, V, Z_0)$  et  $\mathcal{B}_2(X, V, W)$  sont les bases intermédiaires déterminées par les vecteurs  $U$ ,  $V$ , et  $W$  et  $R_Z^\psi$ ,  $R_Y^\theta$  et  $R_X^\phi$  sont les matrices de passage de rotation.

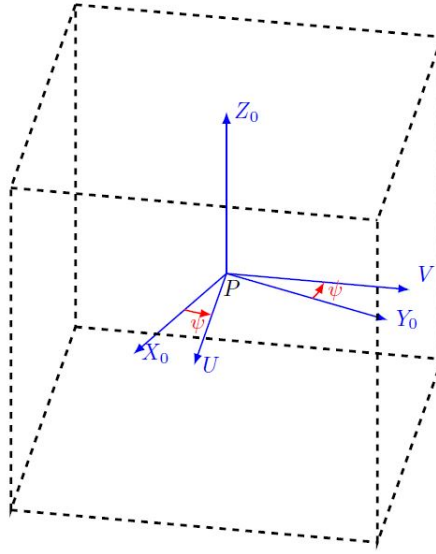


FIGURE 2.2 – La rotation de l'effecteur autour de l'axe  $Z_0$  avec un angle  $\psi$ .

### Détermination de la matrice de passage $R_Z^\psi$

Dans l'équation (2.2),  $R_Z^\psi$  présente la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_0(X_0, Y_0, Z_0)$  à la base  $\mathcal{B}_1(U, V, Z_0)$  par la rotation d'angle  $\psi$  par rapport à  $Z_0$ , qui soit orienté dans le sens direct.

Cette matrice est donnée par :

$$R_Z^\psi = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

### Détermination de la matrice de passage $R_Y^\theta$

Dans l'équation (2.2),  $R_Y^\theta$  présente la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_1(U, V, Z_0)$  à la base  $\mathcal{B}_2(X, V, W)$  par la rotation d'angle  $\theta$  par rapport à  $V$ , qui soit orienté dans le sens direct.

Cette matrice est exprimée par :

$$R_Y^\theta = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

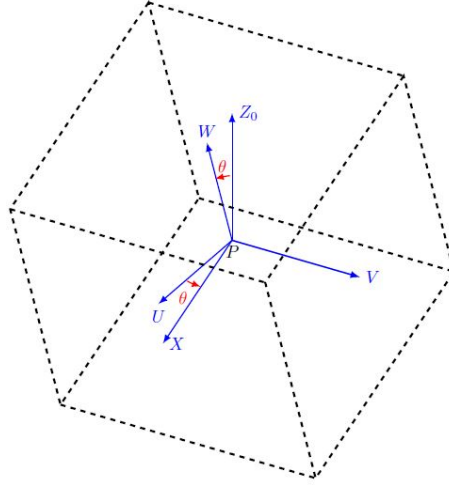


FIGURE 2.3 – La rotation de l'effecteur autour de l'axe V avec un angle  $\theta$ .

### Détermination de la matrice de passage $R_X^\phi$

Dans l'équation (2.2),  $R_X^\phi$  présente la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_2(X, V, W)$  à la base  $\mathcal{B}_3(X, Y, Z)$  par la rotation d'angle  $\phi$  par rapport à  $X_p$ , qui soit orienté dans le sens direct.

Cette matrice est exprimée par :

$$R_X^\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Par suite la matrice de passage noté par  $R_1(\eta_2)$ , qui décrit la transformation entre le repère globale  $\mathcal{R}_O$  dont la base  $\mathcal{B}_0(X_0, Y_0, Z_0)$  et le repère local  $\mathcal{R}$  lié à la plate-forme dont la base  $\mathcal{B}_3(X, Y, Z)$  est obtenue par le produit des trois matrices de rotation obtenus dans les équations (2.3), (2.4), et (2.5).

Ce qui donne :

$$R_1(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\phi + s_\phi c_\psi s_\theta & s_\phi s_\psi + s_\theta c_\psi c_\phi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\phi + s_\psi s_\phi s_\theta & -c_\psi s_\phi + c_\phi s_\theta s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Dans la suite, on définit :

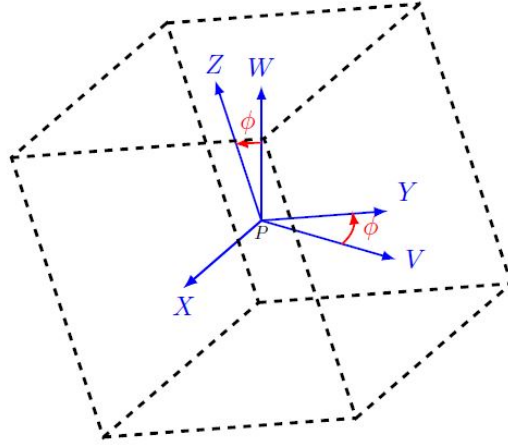


FIGURE 2.4 – La rotation de l’effecteur autour de l’axe  $X$  avec un angle  $\phi$ .

— le vecteur position de la plate-forme par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}_O$  par

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

— le vecteur d’orientation de la plate-forme par rapport au repère fixe  $\mathcal{R}_O$  par

$$\eta_2 = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

— le vecteur d’attitude (de pose) de la plate-forme exprimé dans le repère fixe  $\mathcal{R}_O$  par

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

— le vecteur des coordonnées articulaires des moteurs par

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8.$$

## 2.3 Modélisation géométrique inverse (MGI)

Le robot parallèle à câbles est un système mécanique caractérisé par la transformation du mouvement des actionneurs en mouvement de la plate-forme des câbles. Dans ce cas, l’objectif de la modélisation géométrique est de trouver une relation mathématique entre la pose de la plate-forme  $\eta$  et le vecteur de positions des moteurs  $q$ . Cette modélisation est complétée par la modélisation géométrique inverse.

Le **MGI** permet de calculer les coordonnées articulaires  $q \in \mathbb{R}^8$  connaissant les coordonnées opérationnelles de la plate-forme  $\eta$ .

Considérons le robot parallèle à huit câbles de longueur  $l_i$ ,  $i = 1 \dots 8$  illustré dans la figure (Fig.2.1).

On note par :

- $A_i$  : le point de sortie du  $i^{\text{ième}}$  câble sur la base fixe, c'est-à-dire l'extrémité du  $i^{\text{ième}}$  câble qui attache le  $i^{\text{ième}}$  enrouleur.
- $B_i$  : le point d'attache du  $i^{\text{ième}}$  câble à la plate-forme, c'est-à-dire la seconde extrémité du  $i^{\text{ième}}$  câble qui attache le  $i^{\text{ième}}$  sommet de la plate-forme (voir figure Fig.2.5).

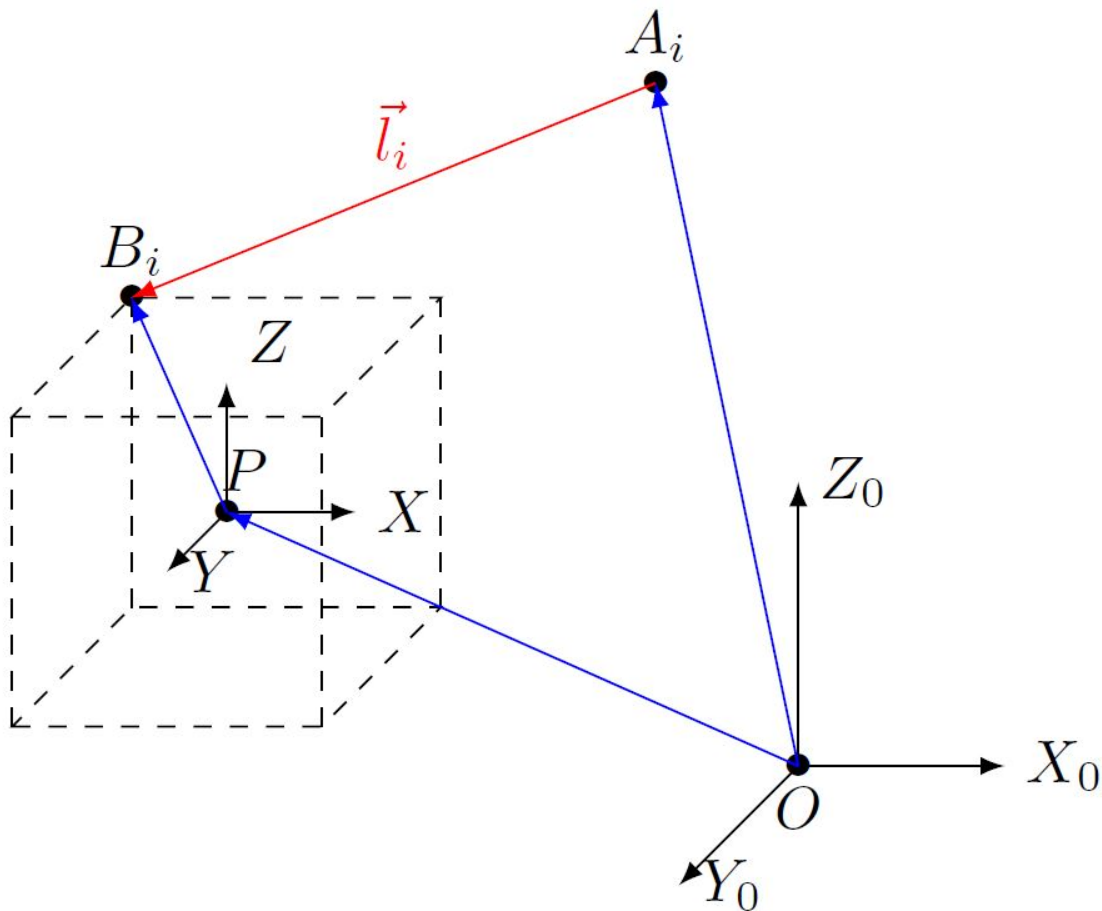


FIGURE 2.5 – Relation géométrique entre l'effecteur et le  $i^{\text{ième}}$  câble.

On suppose que les câbles sont toujours tendus, alors le  $i^{\text{ième}}$  câble est engendré par le vecteur  $\vec{l}_i$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{l}_i &= \overrightarrow{A_i B_i} \\ &= \overrightarrow{OP} + R_1(\eta_2) \overrightarrow{PB_i} - \overrightarrow{OA_i}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En arrangeant l'expression de (2.7), on aura :

$$\vec{l}_i = \eta_1 + R_1(\eta_2) b_i - a_i, \quad i = 1 \dots 8, \quad (2.8)$$

avec

—  $a_i$  : le vecteur position de  $i^{\text{ème}}$  point de sortie, c'est-à-dire

$$a_i := \overrightarrow{OA_i},$$

—  $b_i$  : le vecteur position de  $i^{\text{ème}}$  point d'attache, c'est-à-dire

$$b_i := \overrightarrow{PB_i}.$$

En suite, on définit la longueur du  $i^{\text{ème}}$  câble tendu par la distance entre la position de point d'attache  $B_i$  et la position de point de sortie  $A_i$ , ce qui nous permet d'écrire

$$l_i := \|\vec{l}_i\|_2, \quad (2.9)$$

avec :

—  $l_i$  : la longueur du  $i^{\text{ème}}$  câble tendu.

—  $\|\cdot\|_2$  : la norme euclidienne.

Par suite, on déduit que les longueurs des câbles peuvent s'écrire en fonction du vecteur d'attitude de la plate-forme comme suit

$$l_i = f_i(\eta), \quad i = 1 \dots 8. \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{M}_{6 \times 1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \eta &\longmapsto f_i(\eta) = \|\eta_1 + R_2(\eta_2) b_i - a_i\|_2, \quad i = 1, \dots, 8. \end{aligned} \quad (2.11)$$

On suppose que :

— L'angle de rotation du  $i^{\text{ème}}$  moteur  $q_i$  est dépend du sens d'enroulement du  $i^{\text{ème}}$  câble autour du  $i^{\text{ème}}$  moteur de rayon  $r_i$ .

— Les moteurs ont des rayons constants.

— La rotation initiale du  $i^{\text{ème}}$  moteur est nulle.

Dans ce cas, la relation entre l'angle de rotation  $q_i$  et la longueur  $l_i$  du  $i^{\text{ème}}$  câble peut s'exprimer par l'équation suivante :

$$q_i = \pm \frac{l_i}{r_i}, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (2.12)$$

D'après l'équation (2.10), on déduit :

$$q_i = \pm \frac{1}{r_i} f_i(\eta), \quad i = 1, \dots, 8. \quad (2.13)$$

Par suite l'équation du Modèle Géométrique Inverse (**MGI**) de robot parallèle à câbles s'écrit comme suit :

$$q = \pm R^{-1} f(\eta), \quad (2.14)$$

avec :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{M}_{6 \times 1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{M}_{8 \times 1}(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto f(X) = (f_1(X), \dots, f_8(X))^T, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_8 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

## 2.4 Modélisation Cinématique

Dans cette section, on s'intéresse à la relation entre le torseur cinétique (c'est-à-dire l'ensemble des vitesses) et le torseur dynamique (c'est-à-dire l'ensemble des accélérations) des moteurs et les torseurs cinétique et dynamique de la plate-forme.

Cette relation peut être déterminée à partir du modèle cinématique inverse (**MCI**) du premier ordre et de deuxième ordre.

### 2.4.1 Modèle Cinématique Inverse du premier ordre

On suppose que les moteurs et la plate-forme sont deux corps indéformables.

On définit :

— le vecteur de la vitesse linéaire de la plate-forme exprimé en  $\mathcal{R}_O$  par

$$\dot{\eta}_1 := \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

— le vecteur de la vitesse angulaire de la plate forme mobile exprimé dans  $\mathcal{R}_O$

$$\dot{\eta}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

— le vecteur de la vitesse angulaire de la plate forme mobile exprimé dans  $\mathcal{R}$  par :

$$\nu_2 := \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Le modèle cinématique inverse du 1<sup>er</sup> ordre permet de relier la vitesse de la plate-forme définie par

$$V_p = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

au vecteur de vitesse des moteurs

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8.$$



Afin de déterminer le modèle cinématique du robot dans le repère fixe, on va d'abord chercher une transformation des vitesses angulaires entre  $\nu$  et  $\dot{\eta}_2$ .

D'après les relations de passage de  $\mathcal{R}_O$  à  $\mathcal{R}$ , on a

$$\nu = \dot{\psi}Z_0 + \dot{\theta}V + \dot{\phi}X, \quad (2.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} Z_0 &= -s_\theta X + c_\theta W \\ W &= c_\phi Z + s_\phi Y \\ V &= c_\phi Y - s_\phi Z. \end{aligned} \quad (2.18)$$

On remplace  $V$  et  $Z_0$  par leurs expressions dans l'équation (2.17), on obtient

$$\nu = (\dot{\phi} - \dot{\psi}s_\theta)X + (\dot{\theta}c_\phi + \dot{\psi}c_\theta s_\phi)Y + (\dot{\psi}c_\theta c_\phi - \dot{\theta}s_\phi)Z, \quad (2.19)$$

par suite la relation entre  $\nu$  et  $\dot{\eta}_2$  s'exprime comme suit

$$\nu_2 = R_2(\eta_2)\dot{\eta}_2, \quad (2.20)$$

avec  $R_2(\eta_2)$  désigne la matrice de passage des vitesses de rotation entre le repère fixe  $\mathcal{R}_O$  et le repère mobile  $\mathcal{R}$ , déterminée par :

$$R_2(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

On dérive les équations de (2.7) par rapport au temps, on obtient la relation suivante :

$$\frac{d\vec{l}_i}{dt} = -\frac{d\vec{OA}_i}{dt} + \frac{d\vec{OB}_i}{dt}. \quad (2.22)$$

Puisque  $A_i$  est un point fixe, alors

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{OA}_i}{dt} &= \frac{da_i}{dt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}_i}{dt} &= \frac{d\vec{OB}_i}{dt} \\ &= \frac{d\vec{OP}}{dt} + \frac{d\vec{PB}_i}{dt} \\ &= \dot{\eta}_1 + \nu_2 \wedge b_i. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On désigne par  $n_i$  le vecteur directeur unitaire du  $i^{\text{ème}}$  câble, défini par

$$n_i := \frac{\vec{l}_i}{l_i}. \quad (2.24)$$

On dérive  $n_i$  par rapport au temps, on obtient l'équation suivante

$$\dot{\vec{l}}_i = \dot{n}_i l_i + n_i \dot{l}_i. \quad (2.25)$$

Comme  $n_i$  est un vecteur unitaire, alors

$$n_i^T \dot{n}_i = 0,$$

d'après l'équation (2.23), on déduit

$$\begin{aligned} \dot{l}_i &= n_i^T (\dot{\eta}_1 + \nu_2 \wedge b_i) \\ &= n_i^T \dot{\eta}_1 + (b_i \wedge n_i)^T \nu_2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

ou encore :

$$\dot{l}_i = J_i(\eta) V_p, \quad (2.27)$$

où

$$J_i(\eta) = \begin{bmatrix} n_i^T & (b_i \wedge n_i)^T \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

En concaténant les vitesses de translation des huit câbles, on aura :

$$\dot{l} = J(\eta) V_p, \quad (2.29)$$

avec

.  $\dot{l} = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \vdots \\ \dot{l}_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8$  : désigne le vecteur de vitesse des longueurs de câbles.

.  $J(\eta) = (J_i(\eta))_i \in \mathbb{M}_{8 \times 6}(\mathbb{R})$  : désigne la matrice Jacobienne du modèle cinématique inverse du robot parallèle à câbles.

En se basant sur les équations (2.14) et (2.29), la vitesse articulaire  $\dot{q}$  peut être s'exprimer en fonction de la vitesse de la plate-forme  $V_p$  comme suit :

$$\dot{q} = \pm R^{-1} J(\eta) V_p. \quad (2.30)$$

D'autre part, à l'aide des équations (2.20) et (2.21), on obtient aussi la relation ci-dessous :

$$V_p = L_p(\eta_2) \dot{\eta}, \quad (2.31)$$

où

$$L_p(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

En incorporant l'équation (2.31) dans l'équation (2.30), le Modèle Cinématique Inverse (**MCI**) du premier ordre de robot parallèle à câbles s'exprime de la manière suivante :

$$\dot{q} = \tilde{J}(\eta) \dot{\eta}, \quad (2.33)$$

avec

$$\tilde{J}(\eta) = \pm R^{-1} J(\eta) L_p(\eta_2). \quad (2.34)$$

### 2.4.2 Modèle Cinématique Inverse du deuxième ordre

Le modèle cinématique inverse du deuxième ordre permet de relier l'accélération de la plate-forme définie par

$$\dot{V}_p = \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6,$$

au vecteur des accélérations articulaires

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8.$$

Par calcul de la dérivée de l'équation (2.29) par rapport au temps, on obtient le vecteur des accélérations linéaire des câbles  $\ddot{l}$  qui s'exprime en fonction du vecteur d'accélération de la plate-forme, comme suit :

$$\ddot{l} = J(\eta) \dot{V}_p + \dot{J}(\eta, V_p) V_p, \quad (2.35)$$

où

$$\begin{aligned} \dot{J}(\eta, V_p) &:= \frac{\partial J}{\partial \eta}(\eta) \dot{\eta} \\ &= \frac{\partial J}{\partial \eta}(\eta) L_p^{-1}(\eta_2) V_p, \end{aligned} \quad (2.36)$$

sachant que l'angle de tangage  $\theta$  doit vérifier la propriété suivante :

$$\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}. \quad (2.37)$$

En combinant les équations (2.35) et (2.30), on obtient la relation entre le vecteur d'accélération opérationnelle  $\dot{V}_p$  et le vecteur d'accélération articulaire  $\ddot{q}$ . Ainsi  $\ddot{q}$  s'écrit de la manière suivante :

$$\ddot{q} = \pm R^{-1}(J(\eta) \dot{V}_p + \dot{J}(\eta, V_p) V_p). \quad (2.38)$$

ou encore l'expression du **MCI** de deuxième ordre est donnée par

$$\ddot{q} = \pm R^{-1} (J(\eta) L_p(\eta_2) \ddot{\eta} + [J(\eta) \dot{L}_p(\eta_2, \dot{\eta}_2) + \dot{J}(\eta, V_p) L_p(\eta_2)] \dot{\eta}), \quad (2.39)$$

avec :

$$\dot{L}_p(\eta_2, \dot{\eta}_2) = \frac{\partial L_p}{\partial \eta_2}(\eta_2) \dot{\eta}_2. \quad (2.40)$$

On calcule la dérivée de l'équation (2.33) par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{q} = \tilde{J}(\eta) \ddot{\eta} + \dot{\tilde{J}}(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta}. \quad (2.41)$$

Ainsi, par identification, on obtient :

$$\tilde{J}(\eta) = \pm R^{-1} J(\eta) L_p(\eta_2), \quad (2.42)$$

$$\dot{\tilde{J}}(\eta, \dot{\eta}) = \pm R^{-1} [J(\eta) \dot{L}_p(\eta_2, \dot{\eta}_2) + \dot{J}(\eta, V_p) L_p(\eta_2)]. \quad (2.43)$$

### 2.4.3 Équation du modèle cinématique inverse

A l'aide des équations (2.33) et (2.41), le modèle cinématique inverse général du robot parallèle à câbles peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}(\eta) & 0_{8 \times 3} \\ \dot{\tilde{J}}(\eta, \dot{\eta}) & \tilde{J}(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

## 2.5 Modèle statique

Dans cette section, on désigne par :

- $F_{ext}$  : le vecteur des forces extérieures agissant sur la plate-forme (voir figure (FIGURE 2.6)), s'exprime en  $\mathcal{R}_O$  et défini par

$$F_{ext} := \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

- $M_{ext}$  : le vecteur des moments extérieures agissant sur la plate-forme (voir figure (FIGURE 2.6)), s'exprime en  $\mathcal{R}$  et défini par

$$M_{ext} = \begin{bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

- $\vec{t}$  : le vecteur des tensions des câbles défini par

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} \vec{t}_1 \\ \vdots \\ \vec{t}_8 \end{bmatrix},$$

- $T$  le vecteur des valeurs des tensions dans les câbles défini par

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_8 \end{bmatrix},$$

où

$$T_i = \|\vec{t}_i\|.$$

Le modèle statique consiste à établir une relation mathématique entre le vecteur des tensions  $T$  et les forces des moments extérieures agissent sur la plate-forme.

Dans la suite, on suppose que les câbles sont toujours tendus et de masse négligeable et que le centre géométrique et le centre de gravité  $P$  de l'effecteur se coïncident, alors

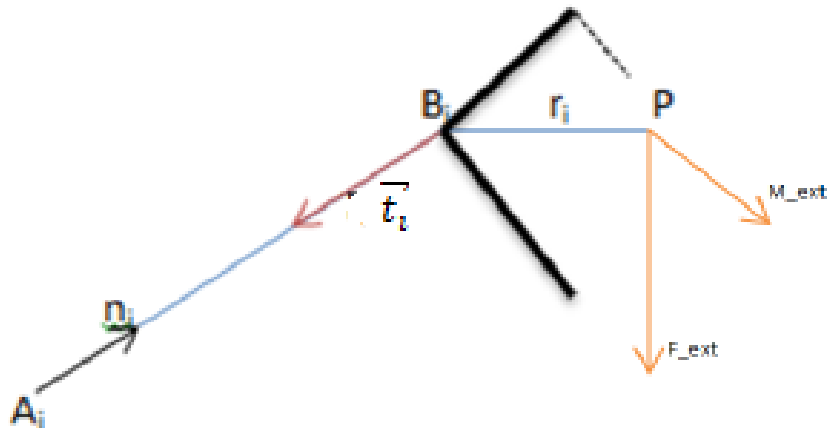


FIGURE 2.6 – Les différentes forces appliquées au RPC.

pour que le système reste en équilibre statique, il doit satisfaire l'équation suivante

$$\begin{aligned} F_{ext} &= \sum_{i=1}^8 \vec{t}_i \\ M_{ext} &= \sum_{i=1}^8 b_i \wedge \vec{t}_i, \end{aligned} \quad (2.45)$$

or

$$\vec{t}_i = \begin{cases} n_i T_i & \text{si } (n_i \text{ et } \vec{t}_i \text{ sont de même sens.)} \\ -n_i T_i & \text{sinon.} \end{cases} .$$

D'après l'expression donnée par (2.28), l'équation (2.45) donne :

$$\begin{bmatrix} F_{ext/\mathcal{R}_O} \\ M_{ext/\mathcal{R}} \end{bmatrix} = W(\eta) T, \quad (2.46)$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext} \end{bmatrix}_{/\mathcal{R}_O} = \tilde{W}(\eta) T, \quad (2.47)$$

avec

$$\begin{aligned} W(\eta) &= \pm J^T(\eta) \\ \tilde{W}(\eta) &= \pm L_p^T(\eta) J^T(\eta). \end{aligned} \quad (2.48)$$

où la matrice  $\tilde{W}(\eta)$  s'appelle matrice des torseurs du robot.

## 2.6 Modèle dynamique

### 2.6.1 Modèle dynamique de la plate-forme

Dans cette section, on s'intéresse à la mise en équation du modèle mathématique qui décrit le mouvement du robot parallèle à câbles à partir de modèle dynamique de leur organe terminal (plate-forme) indépendamment de ces actionneurs. Ces résultats seront utiles dans les chapitres suivantes.

Parmi les méthodes de modélisation de système mécanique complexe, nous avons choisi d'utiliser l'approche **d'Euler-Lagrange** [96] pour déterminer les équations du mouvement de la plate-forme.

Puisque la dynamique des câbles est négligeable, alors les coordonnées généralisées du système sont égales à  $\eta$ .

On considère l'équation d'Euler-Lagrange donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = F_{p/\mathcal{R}_O}, \quad (2.49)$$

avec  $L$  le Lagrangien défini par

$$L = E_c - E_p \quad (2.50)$$

et

$$F_{p/\mathcal{R}_O} = \begin{bmatrix} F_{ext} \\ M_{ext} \end{bmatrix}_{/\mathcal{R}_O} \quad (2.51)$$

où  $E_c$  désigne l'énergie cinétique et  $E_p$  désigne l'énergie potentielle données par

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} V_p^T M_0 V_p, \\ E_p &= -mgz, \end{aligned} \quad (2.52)$$

avec

$$M_0 = \begin{bmatrix} M_p & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_p \end{bmatrix}$$

où

—  $M_p = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$  : la matrice de masse de la plate-forme, avec  $m$  désigne la masse de la plate-forme,

—  $I_p = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$  : la matrice d'inertie de la plate-forme.

Comme l'espace de configuration de notre système est un cube, donc il existe  $k > 0$ , tel que :

$$I_p = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

D'après l'équation (2.31), l'expression de l'énergie cinétique  $E_c$  devient :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M_1(\eta) \dot{\eta}, \quad (2.53)$$

avec :

$$M_1(\eta) = L_p^T(\eta_2) M_0 L_p(\eta_2), \quad (2.54)$$

puisque  $M_1(\eta) = M_1^T(\eta)$ , alors :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\eta}} = M_1(\eta) \dot{\eta},$$

par suite, l'équation d'Euler-Lagrange donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\eta}} \right) \\ &= M_1(\eta) \ddot{\eta} + C_0(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

où

$$C_0(\eta, \dot{\eta}) = \frac{\partial M_1}{\partial \eta}(\eta) \dot{\eta}. \quad (2.56)$$

La dérivée partielle du Lagrangien  $L$  par rapport au  $\eta$  donne

$$\frac{\partial L}{\partial \eta}(\eta) = G_0(\eta), \quad (2.57)$$

avec :

$$G_0(\eta) = -\frac{\partial E_p}{\partial \eta} = m g \begin{bmatrix} Z_0 \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

En substituant les formules (2.46), (2.55) et (2.57) dans (2.49), on obtient le modèle dynamique de robot parallèle à câbles sous forme compacte comme suit :

$$M_1(\eta) \ddot{\eta} + C_0(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} + G_0(\eta) = \tilde{W}(\eta) T, \quad (2.59)$$

avec

- $M_1(\eta)$  : la matrice d'inertie.
- $C_0(\eta, \dot{\eta})$  : la matrice de Coriolis et Centrifuge.
- $G_0(\eta)$  : la matrice de gravité.

## 2.7 Modèle dynamique des actionneurs

Dans cette partie, on va utiliser l'équation de *Newton-Euler* pour le cas du mouvement de rotation d'un corps rigide pour déterminer la dynamique des actionneurs. L'équation de *Newton-Euler* est donnée par l'équation suivante :

$$\sum M_{ext} = I a, \quad (2.60)$$

avec :

- $\sum M_{ext}$  : l'ensemble des moments extérieurs agissant sur le corps.
- $I$  : la matrice d'inertie du corps.
- $a$  : l'accélération du corps.

On suppose que :

- Les actionneurs sont des matériaux homogènes.
- La forme géométrique du  $i^{\text{ème}}$  actionneur est cylindrique (voir FIGURE 2.7).

Dans ce cas, les actionneurs ne faisant qu'un seul mouvement de rotation généralisée par les accélérations angulaires qu'ils se produisent par les couples moteurs :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8.$$

On applique l'équation (2.60) sur le  $i^{\text{ème}}$  actionneur formé par le moteur et l'enrouleur,

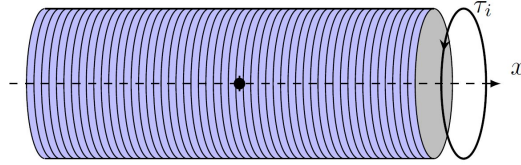


FIGURE 2.7 – Présentation de  $i^{\text{ème}}$  actionneur avec le couple moteur  $\tau_i$  et l'axe de rotation  $x$ .

on obtient :

$$\tau_i - f_i(\dot{q}_i) - T_{q_i} = I_{q_i} \ddot{q}_i, \quad (2.61)$$

avec

- $I_{q_i}$  : le moment d'inertie de  $i^{\text{ème}}$  actionneur.
- $f_i(\dot{q}_i)$  : le vecteur des couples dus aux frottements visqueux et secs, il s'exprime par

$$f_i(\dot{q}_i) = k_{v_i} \dot{q}_i + k_{s_i} \text{sgn}(\dot{q}_i), \quad (2.62)$$

$k_{s_i}$ ,  $k_{v_i}$  désignent respectivement les coefficients de frottements secs et visqueux de  $i^{\text{ème}}$  actionneur.

- $T_{q_i}$  : le moment de la tension du  $i^{\text{ème}}$  câble par rapport au rayon de  $i^{\text{ème}}$  actionneur, soit :

$$T_{q_i} = r_i T_i. \quad (2.63)$$

Avec ces expressions, l'équation (2.61), devient :

$$I_{q_i} \ddot{q}_i + k_{v_i} \dot{q}_i + k_{s_i} \text{sgn}(\dot{q}_i) + r_i T_i = \tau_i. \quad (2.64)$$

Par conséquent, le modèle dynamique de l'ensemble des actionneurs s'exprime sous la forme matricielle suivante :

$$I_q \ddot{q} + F_v \dot{q} + F_s \text{sgn}(\dot{q}) + RT = \tau, \quad (2.65)$$

avec :



—  $I_q$  : désigne la matrice d'inertie de l'ensemble des actionneurs, donnée par :

$$I_q = \begin{bmatrix} I_{q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{q_8} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

—  $F_v$  : désigne la matrice des coefficients de frottements visqueux de l'ensemble des actionneurs donnée par :

$$F_v = \begin{bmatrix} k_{v_1} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{v_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

—  $F_s$  : désigne la matrice des coefficients de frottements secs de l'ensemble des actionneurs, donnée par :

$$F_s = \begin{bmatrix} k_{s_1} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{s_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

—  $sgn(\dot{q})$  : le vecteur de signaux des rotations des moteurs ou bien

$$sgn(\dot{q}) = \begin{bmatrix} sgn(\dot{q}_1) \\ \vdots \\ sgn(\dot{q}_8) \end{bmatrix}.$$

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé la relation géométrique et statique entre la base fixe et la base mobile à travers les câbles dans le but d'établir un modèle cinématique approprié au robot permet de relier la vitesse et l'accélération entre l'organe terminal et les actionneurs.

Ensuite, nous avons utilisé la description d'*Euler-Lagrange* pour spécifier le modèle dynamique de robot parallèle à câbles où la tension des câbles correspond à leur entrée.

Pour terminer ce chapitre, nous avons caractérisé la dynamique des actionneurs en utilisant la méthode de *Euler-Newton* afin de trouver une relation entre les couples moteurs et la tension des câbles.



# Chapitre 3

## Poursuite de trajectoire du RPC en deux dimensions

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>3.2</b>	<b>Modèle mathématique du RPC dans le plan</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>3.3</b>	<b>Suivi de trajectoires et description du mouvement du RPC dans le plan</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>3.4</b>	<b>Étude de la commandabilité et de la stabilisabilité</b> . . . . .	<b>60</b>
3.4.1	Étude de la commandabilité . . . . .	60
3.4.2	Stabilisation par des commandes instationnaires positives . . . . .	63
3.4.3	Lois de commandes et étude de la stabilisation . . . . .	63
<b>3.5</b>	<b>Résultats de simulation</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>70</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le cas du robot parallèle à quatre câbles dans le plan sachant que la géométrie de la plate-forme est réduite au centre de gravité  $P$  où les câbles sont concourants en ce point. La configuration du système est présentée dans la figure (FIGURE 3.1).

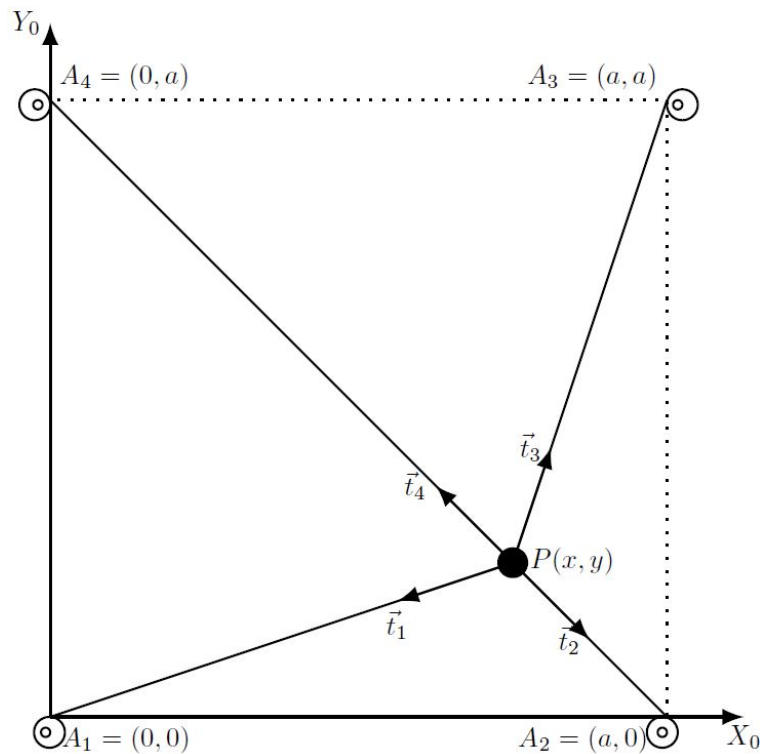


FIGURE 3.1 – robot parallèle à quatre câbles dans le plan  $\{O, X_0, Y_0\}$ .

Notre objectif est de construire un schéma de contrôle approprié permettant à l'organe terminal ( $P$ ) d'atteindre une trajectoire désirée et de garantir leur stabilité exponentielle suivant cette trajectoire.

Pour ce faire, on a procédé dans un premier temps à déterminer le modèle mathématique décrivant le mouvement du robot dans le plan horizontal, dans lequel on projette le modèle dynamique du robot à câbles en trois dimensions sur le plan formé par les vecteurs de base de repère inertiel  $X$  et  $Y$  tout en gardant les mêmes hypothèses sur les différentes composantes du robot.

Dans un second temps, on effectuera un changement de variables sur les états de système d'erreurs formé par la trajectoire désirée et la trajectoire du robot, puis, on analysera le déplacement de la plate-forme dans l'espace du travail, afin de construire une loi de commande simple et efficace pour le suivi de trajectoire de robots à câbles à partir d'un modèle d'erreur moins compliqué.

Dans un troisième temps, on traitera les problèmes de commandabilité et de stabilité en utilisant la méthode de retour de Coron [93]. L'objectif est de trouver des trajectoires convenables pour lesquelles on prouve l'existence d'une loi de commande adé-

quate qui permet de garantir la commandabilité du système autour de ces trajectoires. Ensuite, on déterminera la nature de ce schéma de contrôle à l'aide d'obstruction de **Brockett** à la stabilisation [97]. Puis on utilise la théorie de Lyapunov pour effectuer une étude de stabilité de système d'étude en boucle fermée.

## 3.2 Modèle mathématique du RPC dans le plan

Dans cette section, on s'intéresse à la mise en équation de la dynamique du mouvement du robot à câbles dans le plan horizontal  $\{P, X, Y\}$ . Physiquement, cela signifie que le mouvement de la plate-forme ne dépend que du mouvement suivant les directions des vecteurs  $\overrightarrow{PX}$  et  $\overrightarrow{PY}$ , et aussi de la rotation autour de l'axe  $(PZ)$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} z &= \text{constante (en } m) \\ \dot{z} &= 0 \text{ (en } m.s^{-1}) \\ \phi &= \psi = 0 \text{ (en } rad) \\ \dot{\phi} &= \dot{\psi} = 0 \text{ (en } rad.s^{-1}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Comme nous avons supposé que la géométrie de la plate-forme est réduite à un point, on déduit que la rotation autour de l'axe  $(PZ)$  est négligeable, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \theta &\approx 0 \text{ (en } rad) \\ \dot{\theta} &\approx 0 \text{ (en } rad.s^{-1}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dans ce cas le vecteur d'état  $\eta$ , la matrice de masse  $M_p$  et la matrice d'inertie  $I_p$  de la plate-forme deviennent comme suit

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ M_p &= \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \\ I_p &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Alors, d'après les équations (3.1), (3.2) et (3.3), on déduit que

$$\begin{aligned} M_1(\eta) &= M_p \\ C_0(\eta, \dot{\eta}) &= 0_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \\ G_0(\eta) &= 0_{\mathbb{R}^{2 \times 1}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

De plus, puisque les câbles attachent l'effecteur au point  $P$ , alors les points d'attache  $B_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ) sont confondus avec ce point, c'est-à-dire

$$B_i \equiv P, \quad i = 1, \dots, 4,$$

ce qui implique

$$b_i = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \tag{3.5}$$

On remplace les  $b_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ), par leurs valeurs dans les équations (2.8) et (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}\vec{t}_i &= \eta - a_i, \quad i = 1, \dots, 4, \\ l_i &= \|\eta - a_i\|_2, \quad i = 1, \dots, 4,\end{aligned}\tag{3.6}$$

on déduit

$$\tilde{W}(\eta) = \left( \left[ \frac{\eta - a_i}{\|\eta - a_i\|_2} \right]^T \right)_i \in \mathbb{R}^{4 \times 2}.\tag{3.7}$$

Maintenant, on remplace les éléments de l'équation (2.59) par leurs expressions déduites ci-dessus, on obtient le modèle dynamique du robot à quatre câbles suivant

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{11} & \dots & \tilde{w}_{14} \\ \tilde{w}_{21} & \dots & \tilde{w}_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_4 \end{bmatrix},\tag{3.8}$$

tel que, pour  $i = 1, \dots, 4$ , on a

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{1i} &= \frac{x - a_{ix}}{\sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2}} \\ \tilde{w}_{2i} &= \frac{y - a_{iy}}{\sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2}} \\ u_i &= T_i = \|\vec{t}_i\|_2,\end{aligned}\tag{3.9}$$

sachant que  $(a_{ix}, a_{iy})$  forme le coordonné du vecteur position  $a_i$  de  $i^{\text{ème}}$  moteur  $A_i$  c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \end{bmatrix} = a_i = \overrightarrow{OA_i},\tag{3.10}$$

et le vecteur  $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$  vérifie la contrainte des tensions des câbles donnée par

$$u_i \in [T_{min}, T_{max}] \subset \mathbb{R}_+,\tag{3.11}$$

avec  $T_{min}$  et  $T_{max}$  sont les  $i^{\text{ème}}$  éléments de  $\tau_{min}$  et  $\tau_{max}$  respectivement.

Ainsi, la forme développée du système matricielle (3.8) et l'équation (3.11) donnent le modèle mathématique du robot à quatre câbles suivant

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 \frac{x - a_{ix}}{\sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2}} u_i \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 \frac{y - a_{iy}}{\sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2}} u_i \\ u_i &\in [T_{min}, T_{max}], i = 1, \dots, 4,\end{aligned}\tag{3.12}$$

est le système d'étude de ce chapitre.

### 3.3 Suivi de trajectoires et description du mouvement du RPC dans le plan

Dans cette partie, on va écrire le système (3.12) sous forme d'un système de suivi c'est-à-dire, on détermine la dynamique de signal d'erreur entre une trajectoire désirée et la trajectoire du robot  $(x, y)$ . Ensuite, on effectue une analyse sur les différents mouvements possibles de la plate-forme  $(P)$  afin de déterminer une relation mathématique entre les tensions des câbles.

Pour cela, on commence par mettre le système dynamique du robot (3.12) sous forme d'un système de contrôle de premier ordre.

On définit le vecteur d'état du système par

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

où  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  définissent comme suit

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= y \\ x_4 &= \dot{y}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donc le système (3.12) devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 \frac{x_1 - a_{ix}}{\sqrt{(x_1 - a_{ix})^2 + (x_3 - a_{iy})^2}} u_i \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 \frac{x_3 - a_{iy}}{\sqrt{(x_1 - a_{ix})^2 + (x_3 - a_{iy})^2}} u_i \\ u_i &\in [T_{min}, T_{max}], \quad i \in \{1, \dots, 4\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où  $U = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$  présente le vecteur contrôle de ce système.

Maintenant, on définit une trajectoire désirée instationnaire  $X_d$  par

$$X_d = \begin{bmatrix} x_{1d} \\ \dot{x}_{1d} \\ x_{3d} \\ \dot{x}_{3d} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

où

$$\begin{aligned} x_{1d} &= x_d \\ x_{3d} &= y_d \end{aligned} \quad (3.17)$$

satisfont la condition suivante

$$\|(x_{1d}(t), x_{3d}(t))\|_2 \leq M, \forall t \geq 0, \quad (3.18)$$

où  $M$  est une constante positive.

On introduit le signal d'erreur entre l'état du système (3.13) et la trajectoire désirée (3.16) défini par  $e := [e_1, e_2, e_3, e_4]^T$  et s'écrit par l'équation suivante

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_{1d} \\ e_2 &= x_2 - \dot{x}_{1d} \\ e_3 &= x_3 - x_{3d} \\ e_4 &= x_4 - \dot{x}_{3d}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

La dérivation temporelle de système (3.19) donne

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \ddot{x}_{1d} \\ \dot{e}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{x}_{3d} \\ \dot{e}_4 &= \dot{x}_4 - \ddot{x}_{3d}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ensuite, on substitue l'équation (3.15) dans la dérivée temporelle du système des signaux d'erreurs (3.20), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 \frac{e_1 + x_{1d} - a_{ix}}{\sqrt{(e_1 + x_{1d} - a_{ix})^2 + (e_3 + x_{3d} - a_{iy})^2}} u_i - \ddot{x}_{1d} \\ \dot{e}_3 &= e_4 \\ \dot{e}_4 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 \frac{e_3 + x_{3d} - a_{iy}}{\sqrt{(e_1 + x_{1d} - a_{ix})^2 + (e_3 + x_{3d} - a_{iy})^2}} u_i - \ddot{x}_{3d}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

De plus, pour mieux visualiser le système (3.21), nous introduisons la transformation non linéaire suivante où la nouvelle variable d'entrée  $v_i$  est donnée par

$$v_i := \frac{1}{\sqrt{(e_1 + x_{1d} - a_{ix})^2 + (e_3 + x_{3d} - a_{iy})^2}} u_i, \quad i \in \{1, \dots, 4\}. \quad (3.22)$$

Étant donné que la géométrie de la base fixe du robot à câbles  $A_1A_2A_3A_4$  est un carré direct de côté  $a > 1$  (*en m*) (voir figure(FIGURE 3.1)), alors les coordonnées des moteurs sont exprimées dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_O$  comme suit

$$\begin{aligned} a_{1x} &= a_{4x} = a_{1y} = a_{2y} = 0, \\ a_{2x} &= a_{3x} = a_{3y} = a_{4y} = a. \end{aligned} \quad (3.23)$$



Par suite, le système (3.21) s'écrit en fonction de la nouvelle commande  $v_i$  (3.22) et les coordonnées des positions des moteurs (3.23) comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 \\
 \dot{e}_2 &= \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^4 (e_1 + x_{1d}) v_i - a v_2 - a v_3 \right) - \ddot{x}_{1d} \\
 \dot{e}_3 &= e_4 \\
 \dot{e}_4 &= \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^4 (e_3 + x_{3d}) v_i - a v_3 - a v_4 \right) - \ddot{x}_{3d}.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Enfin, on va décomposer la trajectoire de l'organe terminal (effecteur) du robot planaire de la figure (FIGURE 3.1) en plusieurs sous trajectoires afin d'identifier les moteurs qui sont actionnés. On effectue alors l'algorithme suivant :

- Pour aller d'un point A à un point B, selon le sens et l'inclinaison de la trajectoire, il y a toujours deux actionneurs qui tirent les câbles appropriés.
- Pour déplacer l'effecteur dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, nous devons augmenter  $v_3$  par rapport à  $v_1$  et lorsque la plate-forme atteint le plan  $\{(x, y) \in [0, a] \times [0, a] : y \leq \frac{a}{2}, y \leq x\}$ , on augmente  $v_4$  par rapport à  $v_1$  et  $v_2$  (voir FIGURE 3.2).
- Si nous voulons déplacer la plate-forme dans le sens des aiguilles d'une montre, nous devons augmenter  $v_1$  par rapport à  $v_3$  et lorsque nous obtenons le plan  $\{(x, y) \in [0, a] \times [0, a] : x \leq \frac{a}{2}, x \leq y\}$ , on diminue  $v_4$  par rapport à  $v_2$  et  $v_3$  (voir FIGURE 3.3).

On peut traduire cette analyse par la relation mathématique suivante :

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

sachant que

$$\begin{aligned}
 v_1 &\geq v_2 \\
 v_3 &\leq v_4.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

On remplace les quantités de  $v_3$  et  $v_4$  de la relation (3.25) dans l'équation (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 \\
 \dot{e}_2 &= \frac{1}{m} (e_1 + x_{1d} - a + 3) v_1 + \frac{1}{m} (e_1 + x_{1d} - a + 2) v_2 - \ddot{x}_{1d} \\
 \dot{e}_3 &= e_4 \\
 \dot{e}_4 &= \frac{1}{m} (e_3 + x_{3d} - 2a + 3) v_1 + \frac{1}{m} (e_3 + x_{3d} - a + 2) v_2 - \ddot{x}_{3d}.
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Afin de simplifier de plus le système d'erreur (3.27), on introduit les variables auxiliaires notées par  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_{1d}, X_{2d}, X_{3d}$  et  $X_{4d}$ , et on effectue le changement des

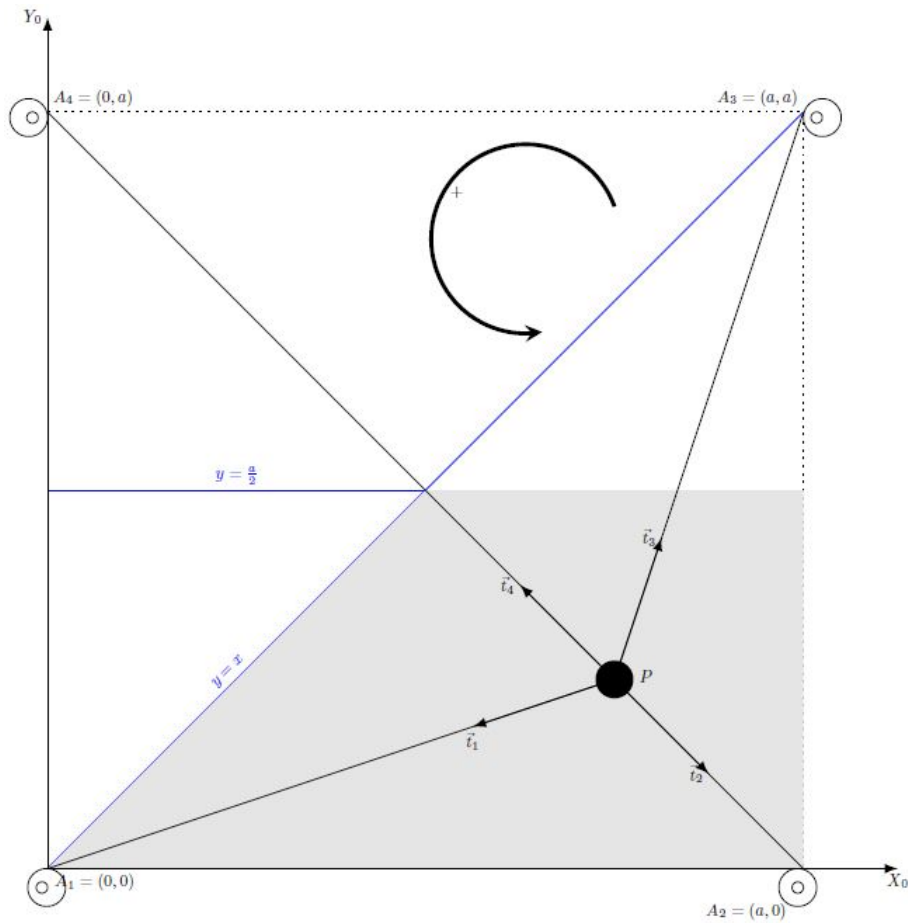


FIGURE 3.2 – Déplacement de l'effecteur dans le sens direct.

variables suivantes

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_{1d} \\ X_3 - X_{3d} \\ X_2 - X_{2d} \\ X_4 - X_{4d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m(a-1) & m \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

et

$$\begin{bmatrix} X_{1d} \\ X_{3d} \\ X_{2d} \\ X_{4d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1d} - a + 2 \\ x_{3d} - a + 2 \\ -\dot{x}_{1d} \\ -\dot{x}_{3d} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

On définit les nouveaux signaux d'erreur par

$$\begin{aligned} e_{11} &:= X_1 - X_{1d} \\ e_{21} &:= X_2 - X_{2d} \\ e_{31} &:= X_3 - X_{3d} \\ e_{41} &:= X_4 - X_{4d}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

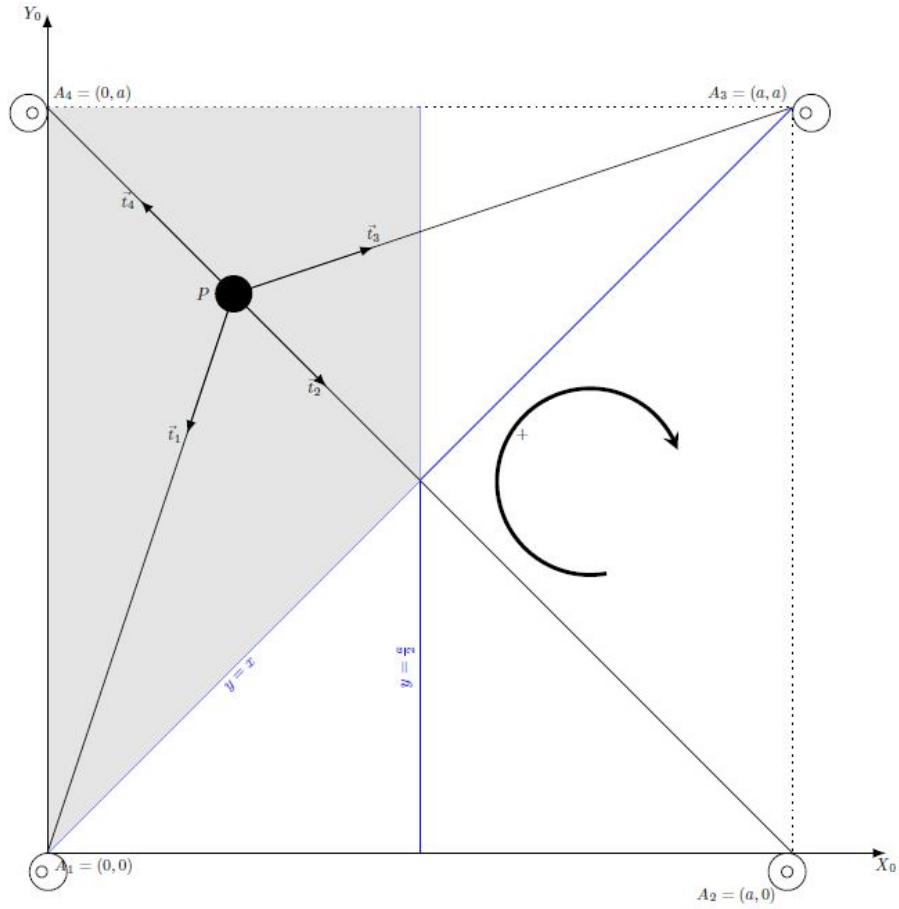


FIGURE 3.3 – Déplacement de l'effecteur dans le sens indirect.

On dérive le système (3.30) par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{11} &= \dot{X}_1 - \dot{X}_{1d} \\
 \dot{e}_{21} &= \dot{X}_2 - \dot{X}_{2d} \\
 \dot{e}_{31} &= \dot{X}_3 - \dot{X}_{3d} \\
 \dot{e}_{41} &= \dot{X}_4 - \dot{X}_{4d},
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

et comme par hypothèse  $a > 1$  et  $m \neq 0$ , alors les systèmes (3.28) et (3.29) sont inversibles, et par suite le système (3.27) s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_{11} &= \frac{1}{m} e_{21} \\
 \dot{e}_{21} &= e_{11} v_{11} \\
 \dot{e}_{31} &= \frac{1}{m} e_{41} \\
 \dot{e}_{41} &= e_{31} v_{11} + (-a + 1) v_{21},
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

où  $v_{11}$  et  $v_{21}$  sont deux contrôles positifs donnés par

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

## 3.4 Étude de la commandabilité et de la stabilisabilité

Dans cette section nous étudions la commandabilité et la stabilisabilité du modèle proposé. Nous montrons à l'aide de la méthode du retour de Coron [93] que le système (3.32)-(3.33) est localement commandable, et ne peut pas être stabilisable par des feedbacks (des retour d'états) négatifs. Car il ne vérifie pas la condition nécessaire de Brockett [97]. On construit alors des schémas de contrôles positifs appropriés  $v_{11}$  et  $v_{21}$  du système (3.12) qui sont capables de guider le robot pour suivre la trajectoire désirée  $(x_{1d}(t), x_{3d}(t))$  et de garantir la stabilité exponentielle autour de cette trajectoire.

### 3.4.1 Étude de la commandabilité

On commence tout d'abord par rappeler les théorèmes suivants

**Théorème 3.4.1.** [93] *Soit  $(\bar{x}, \bar{u}) : [T_0, T_1] \rightarrow \mathcal{O}$  (où  $\mathcal{O}$  est un sous-ensemble ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ) une trajectoire du système de contrôle  $\dot{x} = f(x, u)$  (où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande, avec  $(x, u) \in \mathcal{O}$ , et  $f \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$ ). Si le linéarisé autour de la trajectoire  $(\bar{x}, \bar{u})$  est contrôlable. Alors le système de contrôle  $\dot{x} = f(x, u)$  est localement contrôlable autour de  $(\bar{x}, \bar{u})$ .*

**Théorème 3.4.2.** (Obstruction de Brockett[97]) *Si le système*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ f(0, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

*où  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande, est localement asymptotiquement stabilisable à l'aide d'un feedback statique stationnaire et continue, alors l'image de tout voisinage de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  est un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$ .*

**Théorème 3.4.3.** (Critère de Kalman : cas instationnaire[93]) *Soient  $0 < T_0 < T_1$ ,  $A \in C^\infty([T_0, T_1], \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $B \in C^\infty([T_0, T_1], \mathbb{R}^{n \times m})$ . Soit le système instationnaire*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u. \quad (3.35)$$

*où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état de système et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le contrôle. Soit  $B_i : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  définie par la formule de récurrence :*

$$B_0(t) := B(t), \quad B_i(t) := \dot{B}_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t).$$

*Supposons qu'il existe  $\bar{t} \in [T_0, T_1] \subset \mathbb{R}_+$  tel que*

$$\text{ev}\{B_i(\bar{t})u; u \in \mathbb{R}^m, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n, \quad (3.36)$$

*alors le système (3.35) est commandable sur  $[T_0, T_1]$ .*

**Théorème 3.4.4.** (Théorème de Sussmann et Jurdjevic[93]) Supposons que les champs de vecteurs  $f_0, f_1, \dots, f_m$  sot analytiques. Si le système

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i \quad (3.37)$$

est localement commandable en  $(0, 0)$ , alors

$$\{g(0); g \in Lie\{f_0, \dots, f_m\}\} = \mathbb{R}^n. \quad (3.38)$$

Dans ce qui suit, on note par :

—  $E = [e_{11}, e_{21}, e_{31}, e_{41}]^T$  le vecteur d'état du système d'erreur (3.32).

—  $v = [v_{11}, v_{21}]^T$  le vecteur de contrôle du système d'erreur (3.32).

On a le résultat de contrôlabilité suivant.

**Théorème 3.4.5.** Soit  $T > 0$  et soit  $(\bar{E}, \bar{V})$  une trajectoire vérifiant  $(\bar{E}, \bar{V})(T) = (\bar{E}, \bar{V})(0) = (0, 0)$  et que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{T}{2}} \bar{e}_{11}(s)\bar{v}_{11}(s) ds &= 0 \\ \int_0^{\frac{T}{2}} \bar{e}_{31}(s)\bar{v}_{11}(s) ds &= 0 \\ \int_0^{\frac{T}{2}} \bar{v}_{21}(s) ds &= 0 \\ \bar{v}_{11}(T-t) &= \bar{v}_{11}(t) \\ \bar{v}_{21}(T-t) &= \bar{v}_{21}(t), \end{aligned} \quad (3.39)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

Alors, le système d'erreur (3.32) est commandable autour de la trajectoire  $(\bar{E}, \bar{V})$ .

*Preuve.* En appliquant le théorème du *Cauchy-Lipschitz*, et en utilisant l'équation (3.39), on obtient

$$\begin{aligned} \bar{e}_{11}(T-t) &= \bar{e}_{11}(t) \\ \bar{e}_{21}(T-t) &= -\bar{e}_{21}(t) \\ \bar{e}_{31}(T-t) &= \bar{e}_{31}(t) \\ \bar{e}_{41}(T-t) &= -\bar{e}_{41}(t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

Soit

$$f(E, V) = \begin{bmatrix} \frac{e_{21}}{m} \\ e_{11} v_{11} \\ \frac{e_{41}}{m} \\ e_{31} v_{11} - v_{21} (a-1) \end{bmatrix}.$$

Soient  $A(t)$  et  $B(t)$  deux matrices définies comme suit

$$\begin{aligned} A(t) &:= \frac{\partial f}{\partial E}(\bar{E}(t), \bar{V}(t)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ \bar{v}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \bar{v}_{11} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} B(t) &:= \frac{\partial f}{\partial V}(\bar{E}(t), \bar{V}(t)) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{e}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & 1-a \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

On considère la suite de matrice suivante

$$\begin{aligned} B_0 &= B(t) \\ B_1 &= \frac{dB_0}{dt} - AB_0 \\ &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} -\bar{e}_{11} & 0 \\ \bar{e}_{21} & 0 \\ -\bar{e}_{31} & (a-1) \\ \bar{e}_{41} & 0 \end{bmatrix} \\ B_2 &= \frac{dB_1}{dt} - AB_1 \\ &= \frac{1}{m^2} \begin{bmatrix} -2\bar{e}_{21} & 0 \\ -2m\bar{e}_{11}\bar{v}_{11} & 0 \\ -2\bar{e}_{41} & 0 \\ m^2\bar{e}_{31}\bar{v}_{11} - m\bar{v}_{21} + m\bar{e}_{31}\bar{v}_{11} & -\bar{v}_{11}(a-1) \end{bmatrix}, \\ B_3 &= \frac{dB_2}{dt} - AB_2. \end{aligned}$$

On suppose qu'il existe  $t^* \in [0, T]$  vérifie

$$\bar{e}_{11}(t^*) \neq 0,$$

comme

$$\det([B_0, B_1, B_2, B_3](t^*)) = \bar{e}_{11}(t^*)(a-1)/m \neq 0,$$

alors

$$\text{rang}(ev\{B_0, B_1, B_2, B_3\}(t^*)) = 4. \quad (3.43)$$

Donc d'après le Théorème (3.4.3), le système

$$\dot{\tilde{e}} = A(t)\tilde{e} + B(t)v \quad (3.44)$$

est contrôlable sur  $[0, T]$ . Et d'après le Théorème (3.4.1), on en déduit que le système d'erreur (3.32) est localement contrôlable autour de la trajectoire  $(\bar{E}, \bar{V})$ .  $\square$

### 3.4.2 Stabilisation par des commandes instationnaires positives

Nous démontrons dans ce paragraphe, le résultat suivant.

**Théorème 3.4.6.** *Le système (3.32) n'est pas stabilisable par une loi de commande stationnaire et continue.*

*Preuve.* Soient  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  deux nombres strictement positifs. On étudie la solution de l'équation ci-dessous en fonction de  $V$ .

$$f(E, V) = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_1 \\ 0 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

On suppose que  $e_{11} \neq 0$ , sinon (3.45) n'a pas de solution en  $V$ . Alors la solution de l'équation (3.45) s'écrit en fonction de  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  comme suit

$$\begin{aligned} v_{11} &= \frac{1}{e_{11}}\epsilon_1 \\ v_{21} &= -\frac{e_{31}}{e_{11}(-a+1)}\epsilon_1 + \frac{1}{-a+1}\epsilon_2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &:= \frac{1}{2}|e_{11}| \\ \epsilon_2 &:= \frac{3}{4}|e_{31}|. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dans ce cas, on suppose que  $e_{11} > 0$ , sinon on obtient  $v_{11} = -\frac{1}{2} < 0$  ce qui est en contradiction avec la contrainte de positivité du contrôle  $v_{11}$ , donc on obtient  $v_{21} = \frac{1}{1-a}(\frac{3}{4}|e_{31}| - \frac{1}{2}e_{31}) < 0$ , de même, il est en contradiction avec la contrainte de positivité du contrôle  $v_{21}$ . Alors on conclut que l'équation (3.45) n'a pas de solutions et d'après le Théorème (3.4.2), on déduit que le système (3.32) n'est pas stabilisable par un retour d'état stationnaire et continue.  $\square$

### 3.4.3 Lois de commandes et étude de la stabilisation

Dans cette sous-section, nous développons un contrôle positif qui permet au robot décrit par l'équation (3.12) de suivre la trajectoire  $(x_{1d}(t), x_{3d}(t))$  et de garantir sa stabilité exponentielle. C'est-à-dire on va développer des lois de commandes vérifiant les contraintes suivantes.

$$\begin{aligned} v_{11}(t, x, y, z) &\in [0, T_{max}] \\ v_{21}(t, x, y, z) &\in [0, T_{max}] \\ |e_{11}(t)| &\leq \alpha_1 |e_{11}(0)| e^{-\gamma_1 t} \\ |e_{21}(t)| &\leq \alpha_2 |e_{21}(0)| e^{-\gamma_2 t} \\ |e_{31}(t)| &\leq \alpha_3 |e_{31}(0)| e^{-\gamma_3 t} \\ |e_{41}(t)| &\leq \alpha_4 |e_{41}(0)| e^{-\gamma_4 t} \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec les  $\alpha_i$  et les  $\gamma_i$  ( $i = 1 \dots, 4$ ) sont des paramètres positifs.

Dans ce cas on va établir le théorème suivant.

**Théorème 3.4.7.** *Étant donné  $\epsilon > 0$ , et on considère les schémas de contrôles instationnaires suivants*

$$\begin{aligned} U_1(t, e_{11}, e_{21}) &= \frac{m}{|e_{11}| + \epsilon} \left( -e_{11}e^{-kt} - \frac{k_2}{m}e_{21} - k_1e_{11} \right) \\ U_2(t, e_{31}, e_{41}) &= \frac{m}{-a + 1} \left( -e_{31}e^{-kt} - \frac{k_4}{m}e_{41} - k_3e_{31} - \frac{1}{m}e_{31}v_{11} \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

On définit  $v_{11}$  et  $v_{21}$  par

$$\begin{aligned} v_{11}(t, e_{11}, e_{21}) &= \phi(U_1(t, e_{11}, e_{21})) \\ v_{21}(t, e_{31}, e_{41}) &= \phi(U_2(t, e_{31}, e_{41})), \end{aligned} \quad (3.50)$$

où

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} &\rightarrow [0, X_{max}] \\ x &\mapsto \text{sat}(x, 0, X_{max}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

de sorte que  $X_{max}$  vérifie la condition

$$\frac{k-1}{2} < X_{max} < \frac{k}{2}, \quad (3.52)$$

et "sat" note la fonction de saturation, définit par

$$\text{sat}(x, x_{min}, x_{max}) = \begin{cases} x_{min} & \text{si } x \leq x_{min} \\ x & \text{si } x_{min} \leq x \leq x_{max} \\ x_{max} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.53)$$

Alors, pour les paramètres suffisamment grands  $k$  et  $k_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) tels que

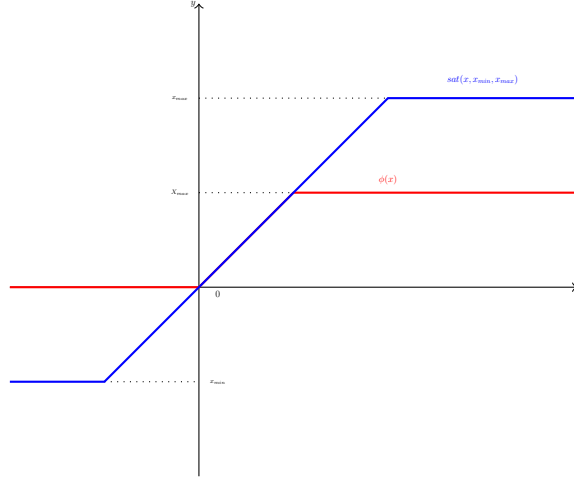
$$\begin{aligned} k &> 1 \\ k_1 &> 0 \\ k_2 &> \frac{1}{2} \\ k_3 &> k - 1 \\ k_4 &\in ]0, \frac{1+k_3}{2k}[, \end{aligned} \quad (3.54)$$

le système en boucle fermée (3.32)-(3.50) est exponentiellement stable.

*Preuve.* On considère les fonctions de Lyapunov suivantes

$$V_1(t, e_{11}, e_{21}) = P_{11}e_{11}^2(1 + e^{-kt}) + \frac{P_{22}}{m}e_{21}^2(1 + e^{-kt}), \quad (3.55)$$




 FIGURE 3.4 – Représentation de la fonction de saturation et la fonction  $\phi(x)$ 

$$V_2(t, e_{31}, e_{41}) = P_{33}e_{31}^2(1 + e^{-kt}) + \frac{P_{44}}{m}e_{41}^2(1 + e^{-kt}), \quad (3.56)$$

avec les hypothèses

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{k}P_{33} \leq P_{44} \leq \frac{k-1}{k_3+1}P_{33} \\ 0 < \frac{P_{22}X_{max}}{k-1} < P_{11} < (k - X_{max})P_{22}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les fonctions  $V_1$  et  $V_2$  sont définies positives car  $V_1(t, e_{11}, e_{21}) \geq P_{11}e_{11}^2 + \frac{P_{22}}{m}e_{21}^2$ , et  $V_2(t, e_{31}, e_{41}) \geq P_{33}e_{31}^2 + \frac{P_{44}}{m}e_{41}^2$  pour tout  $t \geq 0$ .

On calcule la dérivée de  $V_1$  et  $V_2$  par rapport au temps, cela conduit aux discussions suivantes

1<sup>ère</sup> cas :  $U_1(t, e_{31}, e_{41}) = 0$ ,  $U_2(t, e_{31}, e_{41}) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, e_{11}, e_{21}) &= 2\frac{P_{11}}{m}e_{11}e_{21}(1 + e^{-kt}) - kV_1(e_{11}, e_{21}) \\ &< -(k-1)P_{11}e_{11}^2(1 + e^{-kt}) - \frac{kP_{22} - P_{22}}{m^2}e_{21}^2(1 + e^{-kt}) \\ &< -P_{22}e_{11}^2(1 + e^{-kt}) - \frac{kP_{22} - P_{11}}{m^2}e_{21}^2(1 + e^{-kt}) \\ &< -C_{01}(k)V_1(t, e_{11}, e_{21}), \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t, e_{31}, e_{41}) &= 2\frac{P_{33}}{m}e_{31}e_{41}(1 + e^{-kt}) - kV_2(e_{31}, e_{41}) \\ &< -(k-1)P_{33}e_{31}^2(1 + e^{-kt}) - \frac{kP_{44} - P_{44}}{m^2}e_{41}^2(1 + e^{-kt}) \\ &< -P_{44}e_{31}^2(1 + e^{-kt}) - \frac{kP_{44} - P_{33}}{m^2}e_{41}^2(1 + e^{-kt}) \\ &< -C_1(k)V_2(t, e_{31}, e_{41}), \end{aligned} \quad (3.59)$$

avec

$$C_{01}(k) = \min(P_{22}, \frac{kP_{22} - P_{11}}{m^2}),$$

$$C_1(k) = \min(P_{44}, \frac{kP_{44} - P_{33}}{m^2}).$$

2<sup>ème</sup> cas :  $U_1(t, e_{11}, e_{21}) = X_{max}$ ,  $U_2(t, e_{31}, e_{41}) = X_{max}$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, e_{11}, e_{21}) &< -(kP_{11} - P_{11} - P_{22}X_{max})e_{11}^2(1 + e^{-kt}) \\ &\quad - \frac{(kP_{22} - P_{11} - P_{22}X_{max})}{m^2}e_{21}^2(1 + e^{-kt}) \\ &< -C_{02}(k, X_{max})V_1(t, e_{11}, e_{21}), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t, e_{31}, e_{41}) &< ((1 - k)P_{33}e_{31}^2 + \frac{P_{33} + 2P_{44}X_{max}}{m^2})(1 + e^{-kt}) - kV \\ &< -C_2(k, X_{max})V(t, e_{31}, e_{41}), \end{aligned} \quad (3.61)$$

avec

$$C_{02}(k, X_{max}) = \min\{(k - 1)P_{11} - P_{22}X_{max}, P_{22}(k - X_{max}) - P_{11}\}.$$

$$C_2(k, X_{max}) = \min\{(k - 1)P_{33}, kP_{44} - P_{33} - 2P_{44}X_{max}\}.$$

3<sup>ème</sup> cas :  $U_1(t, e_{11}, e_{21}) \in ]0, X_{max}[$ ,  $U_2(t, e_{31}, e_{41}) \in ]0, X_{max}[$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t, e_{11}, e_{21}) &< -(P_{11} - \frac{1}{2k}(P_{11} + P_{22}X_{max}))e_{11}^2(1 + e^{-kt}) \\ &\quad - \frac{1}{m^2}(P_{22} + \frac{2k_2}{2k}(P_{11} + P_{22}X_{max}))e_{21}^2(1 + e^{-kt}) \\ &< -C_{03}(k, k_2)V_1(t, e_{11}, e_{21}), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t, e_{31}, e_{41}) &< -[-P_{44}(1 + k_3) + (k - 1)P_{33}]e_{31}^2(1 + e^{-kt}) \\ &\quad - \frac{1}{m^2}[-P_{44}(1 + k_3) + (2k_4 + k)P_{44} \\ &\quad - P_{33}]e_{41}^2(1 + e^{-kt}) \\ &< -C_3(k, k_3, k_4)V(t, e_{31}, e_{41}), \end{aligned} \quad (3.63)$$

avec

$$C_{03}(k, k_2, X_{max}) = \min(P_{11} - \frac{1}{2k}(P_{11} + P_{22}X_{max}), P_{22} + \frac{2k_2}{2k}(P_{11} + P_{22}X_{max})),$$

$$C_3(k, k_3, k_4) = \min(-P_{44}(1 + k_3) + (k - 1)P_{33}, \frac{1}{m^2}(-P_{44}(1 + k_3) + (2k_4 + k)P_{44} - P_{33})).$$

Sous les conditions (3.52) et (3.57) et (3.54), on déduit que les nombres  $C_{0i}$ ,  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  sont strictement positifs.

Ainsi, on conclut que le système (3.32)-(3.50) en boucle fermée est exponentiellement stable.  $\square$

### 3.5 Résultats de simulation

Dans cette section, on va effectuer des tests de simulation pour objectif de valider les performances des lois des commandes  $v_{11}$  et  $v_{21}$  de l'équation (3.50) sur le modèle dynamique du robot à câbles dans le plan horizontal (3.12).

On présente dans le tableau (3.1) les paramètres spécifiques des schémas des contrôles et du robot sachant que la position initiale de la plate-forme est  $P_0 = (x_0, y_0)$ .

Paramètres	Valeurs
$x_0$	0.7344
$y_0$	9.518
a	16
m	1.5
$k$	5
$k_1$	3
$k_2$	4
$k_3$	4.5
$k_4$	0.5
$X_{max}$	2.25
$\epsilon$	0.001

TABLE 3.1 – Paramètres du robot à câbles.

La figure (FIGURE 3.5) montre la suivi de trajectoire de la plate-forme dans le plan horizontal (XY) sachant que l'effecteur est positionné initialement au point  $P_0$ .

On remarque que le robot se dirige vers la trajectoire désirée et reste sur cette trajectoire à partir du point (7, 735, 11, 29) jusqu'à la fin.

Ensuite, la figure (FIGURE 3.6) démontre les performances des lois des commandes  $v_{11}$  et  $v_{21}$  donnée par l'équation (3.50) sur la dynamique du robot dans le plan horizontal (XY).

On peut voir que l'effecteur présenté par  $x(t)$  par rapport à l'axe des abscisses, s'approche de la trajectoire désirée nommé par  $x_d$  dans une période  $t_1 = 5.85$  secs, puis les deux trajectoires  $x(t)$  et  $x_d(t)$  sont confondues, c'est-à-dire

$$\forall t \geq t_1, x(t) = x_d(t).$$

Également, l'effecteur qui est présenté par  $y(t)$  par rapport à l'axe des ordonnées, s'approche de la trajectoire souhaitée nommé par  $y_d$  dans une période  $t_2 = 2.765$  secs, ensuite les deux trajectoires sont confondues, c'est-à-dire

$$\forall t \geq t_2, y(t) = y_d(t).$$

Les résultats de la simulation dans la figure (3.7) montrent la convergence exponentielle de la plate-forme vers la trajectoire désirée.

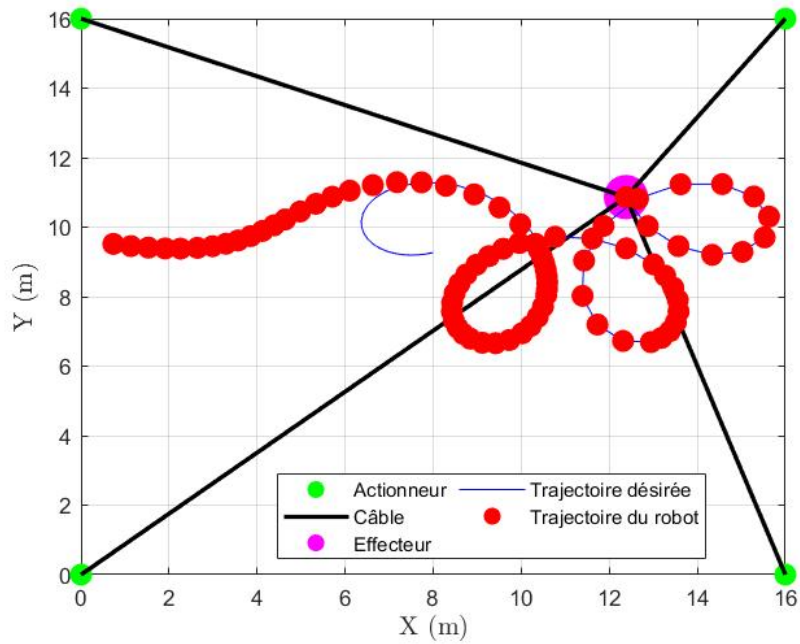


FIGURE 3.5 – Trajectoire désirée et réelle de l'effecteur dans le plan horizontal.

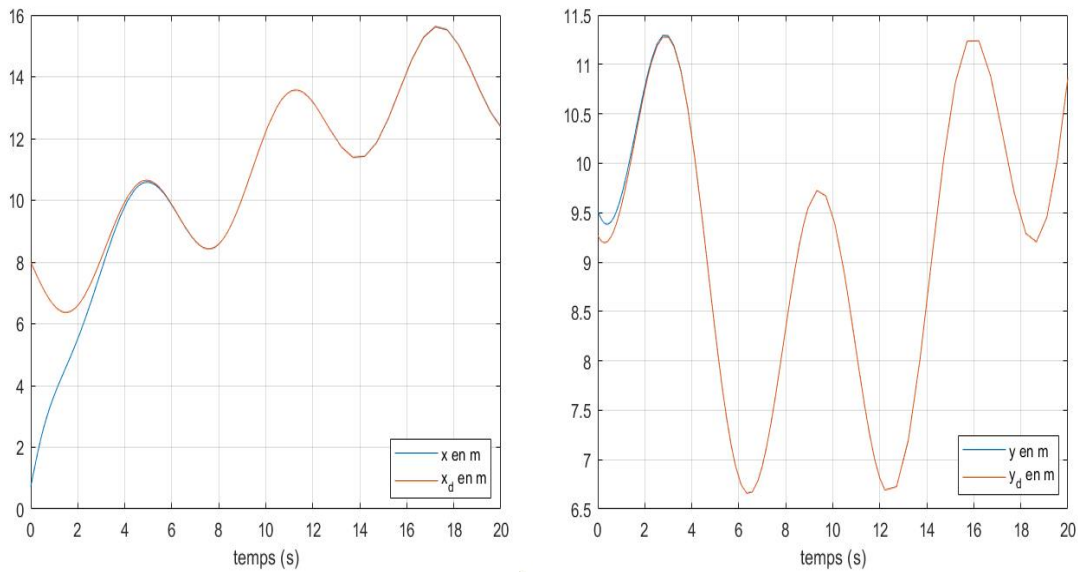


FIGURE 3.6 – Comportement des trajectoires  $x$ ,  $x_d$ ,  $y$  et  $y_d$ .

On peut observer aussi la positivité des schémas de contrôle  $v_{11}$  et  $v_{21}$ , ce qui montre l'efficacité de l'application  $\phi$  sur les contrôles  $U_1$  et  $U_2$ .

De plus, les simulations des figures (FIGURE 3.8) et (FIGURE 3.9) montrent la positivité des différentes tensions dans tous les câbles lors du mouvement de la plate-forme, on peut remarquer que les valeurs de toutes les tensions décroissent vers la tension minimale

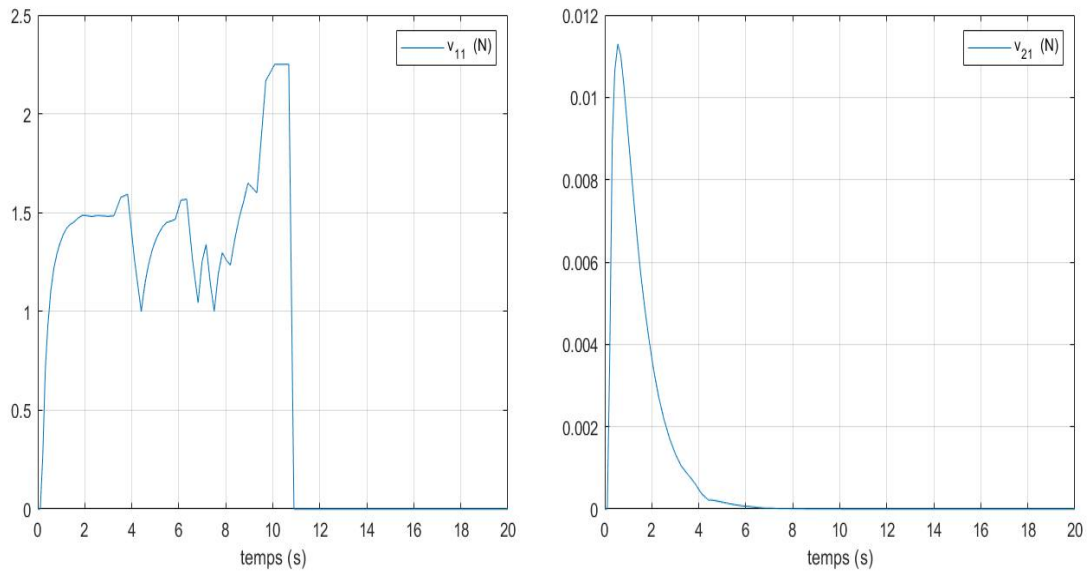
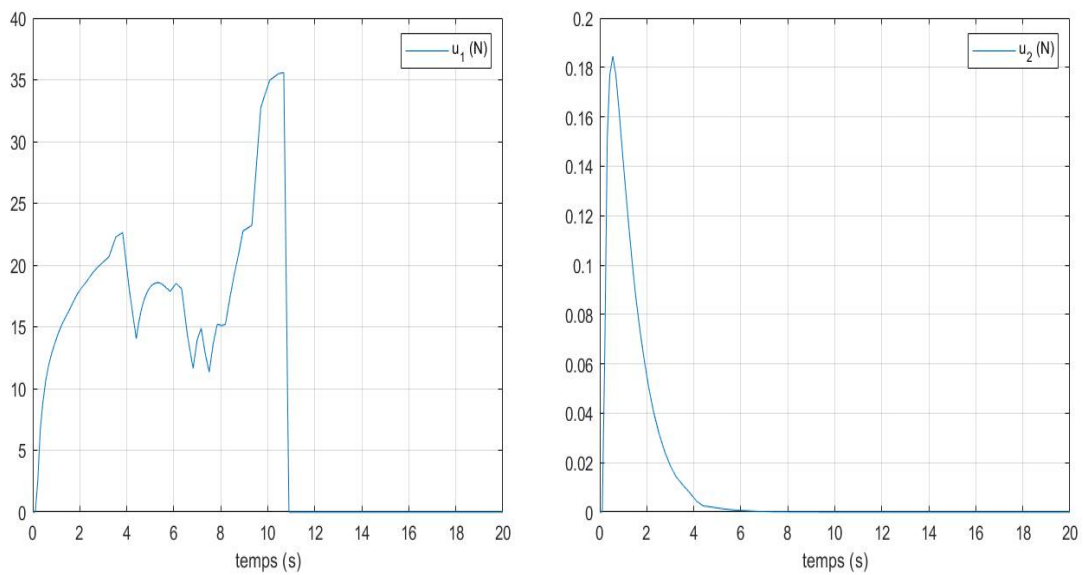
FIGURE 3.7 – Simulation des lois de commande  $v_{11}$  et  $v_{21}$ .

FIGURE 3.8 – Simulations des tensions des câbles 1 et 2.

lorsque l'effecteur est stable sur la trajectoire.

Enfin, les figures (FIGURE 3.10) et (FIGURE 3.11) montrent la variation des longueurs des différents câbles dans le temps.

Ainsi, en comparant les différents signaux présentés dans les figures (FIGURE 3.8), (FIGURE 3.9), (FIGURE 3.10) et (FIGURE 3.11) montrent l'efficacité de l'analyse du mouvement de l'effecteur dans la section (3.3).

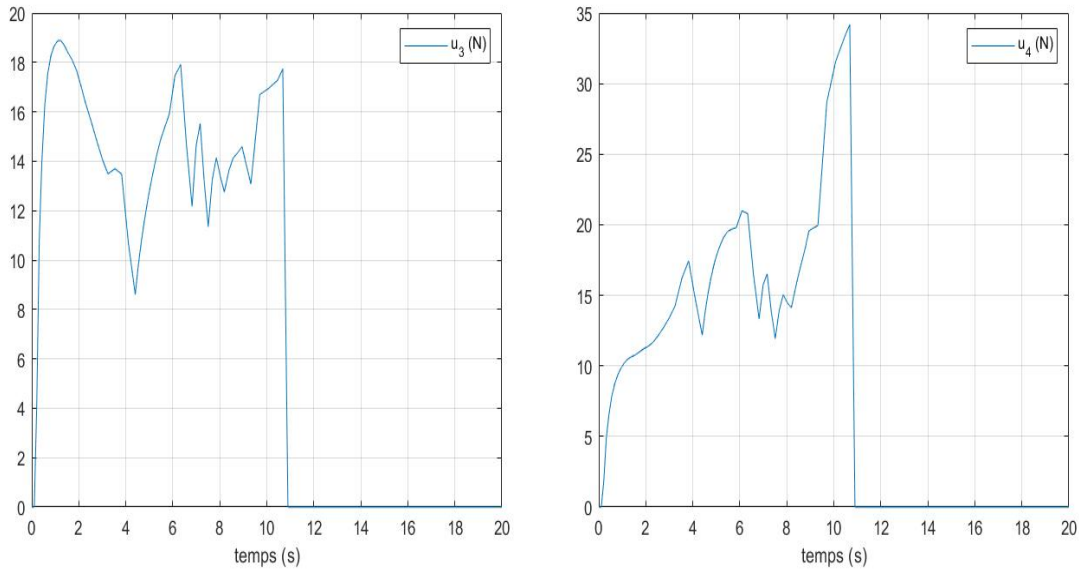


FIGURE 3.9 – Simulations des tensions des câbles 3 et 4.

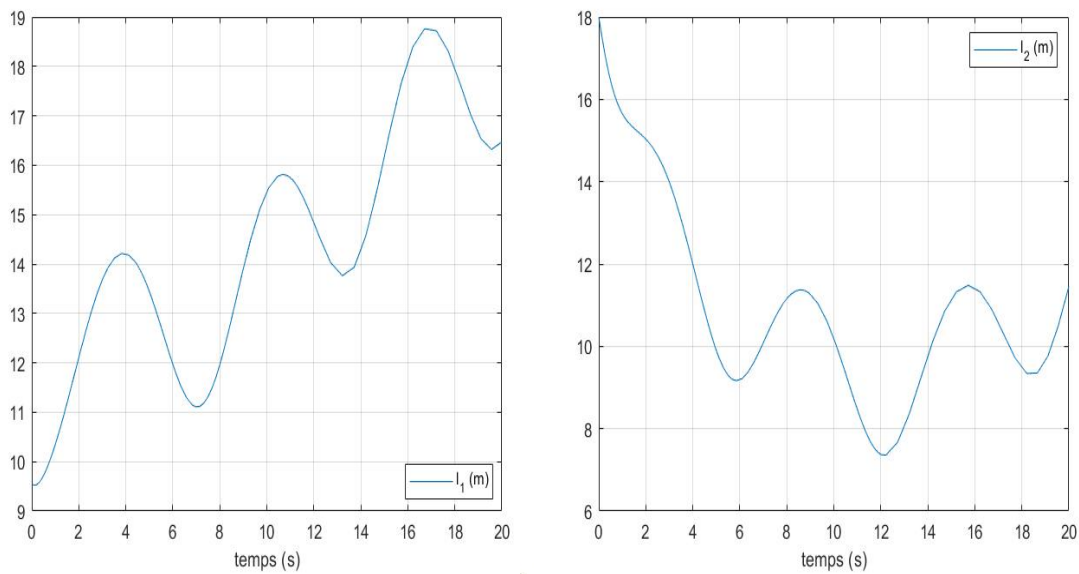


FIGURE 3.10 – Simulations des longueurs des câbles 1 et 2.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme de conception de feedbacks stabilisants le système robot parallèle soumis à quatre actionneurs. La stratégie de conception est basée en premier lieu sur l'étude de suivi du mouvement du système (mouvement d'ensemble) créé par les directions des câbles afin d'établir une relation entre les quatre tensions des câbles ; et permet par un changement de variables de déterminer de nouvelles entrées. Le système, d'erreur, non linéaire obtenu est localement contrôlable grâce à la

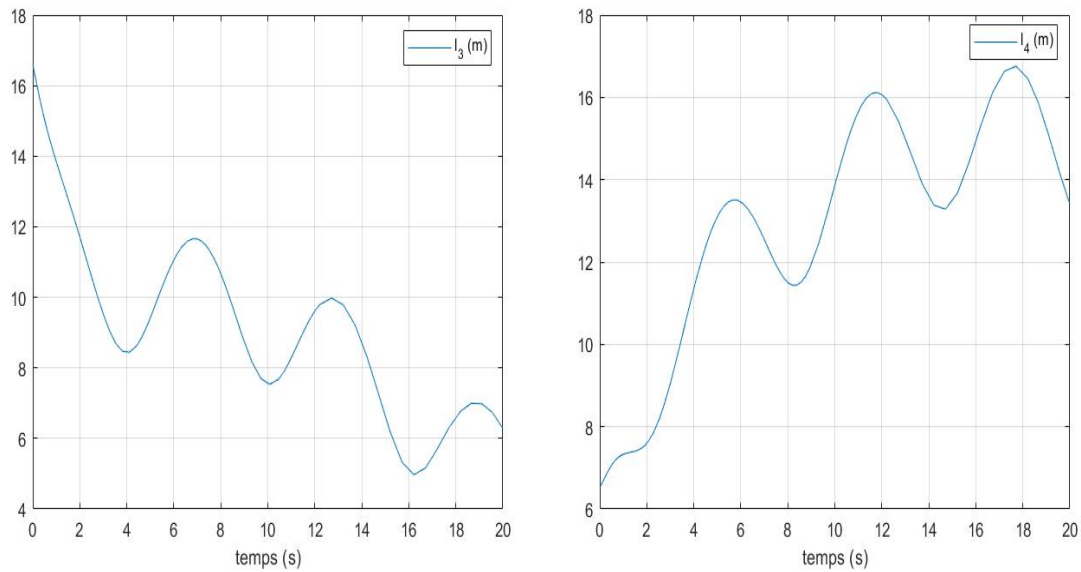


FIGURE 3.11 – Simulations des longueurs des câbles 3 et 4.

méthode du retour de Coron, mais il ne satisfait pas la condition nécessaire à la stabilisation de Brockett. Pour contourner à la fois l'obstruction de Brockett et satisfaire aux contraintes physiques imposées par le système ; à savoir stabilisation par des feedbacks positifs qui sont bornés, nous avons pensé d'utiliser les feedbacks instationnaires qui sont à la fois positifs et bornés qui conduisent par l'approche de Lyapunov à une stabilisation rapide au sens exponentielle.

Enfin, nous avons validé les résultats obtenus par des simulations numériques pour montrer l'efficacité des feedbacks proposés. Une investigation sur l'étude des robustesses de feedbacks établis pourrait être l'objet d'un futur travail.





# Chapitre 4

## Poursuite de trajectoires du RPC en trois dimensions

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>74</b>
<b>4.2</b>	<b>Partie 1 : Commande basée modèle des robots à câbles</b>	<b>75</b>
4.2.1	Modèle mathématique du robot en 3D de la figure (Fig.4.1)	75
4.2.2	Modèle d'erreur	78
4.2.3	Commande de suivi de trajectoires	82
4.2.4	Simulations numériques	84
<b>4.3</b>	<b>Partie 2 : Commande par mode glissant basée sur un algorithme d'optimisation sous contraintes</b>	<b>90</b>
4.3.1	Preuve du Théorème 4.3.1	95
4.3.2	Simulation des Résultats	98
<b>4.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre contient deux parties. Dans chaque partie on donne le schéma de construction des contrôleurs qui assurent le suivi des trajectoires du robot parallèle à câbles en trois dimensions.

Dans la première partie, on donne une extension du chapitre précédent où l'architecture du robot est en trois dimensions, et porte les mêmes hypothèses géométriques que le robot à câbles dans le plan. Sa configuration géométrique est dans la FIGURE 4.1.

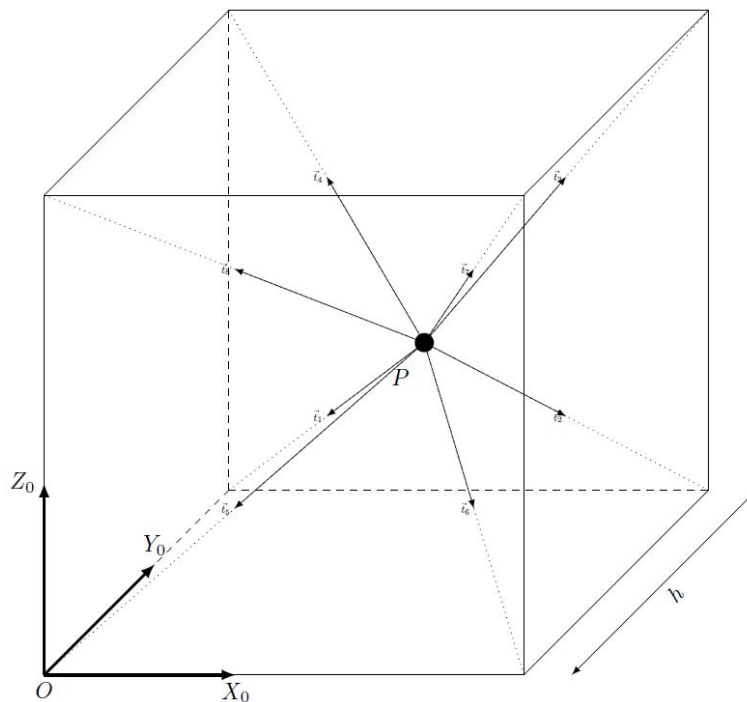


FIGURE 4.1 – Robot parallèle à câbles en trois dimensions.

Dans ce but, on commence en premier lieu par la détermination du modèle mathématique du robot présenté par la configuration de FIGURE 4.1. Cette modélisation est obtenue grâce au système dynamique du robot en général.

Ensuite, on détermine le système d'erreur en forme cascade entre les sorties de robot à câbles et une trajectoire de référence. Cette dernière forme est obtenue via des transformations bijectives (feedback d'équivalence) faisant intervenir l'état et les contrôles. Puis, on construit à partir de ce modèle d'erreur des lois des commandes instationnaires, saturantes et continues permettant à la plate-forme du robot de suivre la trajectoire de référence dans l'espace et assure leur stabilité exponentielle. Finalement, on présente de simulations numériques pour voir l'efficacité des feedbacks sur le robot à câbles.

Dans la deuxième partie, on reprend le modèle général du robot (2.59) dans l'espace opérationnel et on étudie la stabilité en temps fini de robot parallèle à câbles par des lois de commandes en mode de glissement, en se basant sur un algorithme d'optimisation afin que les actionneurs ne puissent que tirer, mais pas pousser la plate-forme mobile du robot vers la trajectoire désirée. Pour ses raisons, on propose en premier temps un surface de

glissement qui sera définie par les équations d'erreurs entre les états du plate-forme et la trajectoire désirée.

Ensuite, on construit à partir de cette surface de glissement un schéma de contrôle  $u \in \mathbb{R}^8$ , déterminé par le minimum d'une programmation d'optimisation sous contrainte.

Les performances des feedbacks construits sont testés par des simulations numériques.

## 4.2 Partie 1 : Commande basée modèle des robots à câbles

### 4.2.1 Modèle mathématique du robot en 3D de la figure (Fig.4.1)

Dans cette section, nous nous intéressons au problème du robot à câbles de la FIGURE 4.1 sous les hypothèses suivantes :

- Les câbles s'attachant au point  $P$ .
- La géométrie de l'effecteur est négligeable c'est-à-dire la plate-forme est présentée par leur masse au centre de gravité.
- les moteurs du robot sont positionnés sur une forme géométrique de cube de dimension  $h$  exprimée en mètre (m).

Dans ce cas le mouvement de la plate-forme ne dépend que des mouvements suivant les directions des vecteurs  $\overrightarrow{PX}$ ,  $\overrightarrow{PY}$  et  $\overrightarrow{PZ}$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} \phi &= \psi = \theta = 0 \text{ (en rad)} \\ \dot{\phi} &= \dot{\psi} = \dot{\theta} = 0 \text{ (en rad.s}^{-1}\text{)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Par suite le vecteur de position  $\eta$ , la matrice de masse  $M_p$  et la matrice d'inertie  $I_p$  de la plate-forme deviennent comme suit

$$\begin{aligned} \eta &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ M_p &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \\ I_p &= 0_{\mathbb{R}^{3 \times 3}}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

ainsi les matrices  $M_1(\eta)$ ,  $C_0(\eta, \dot{\eta})$  et  $G_0$  deviennent

$$\begin{aligned} M_1(\eta) &= M_p \\ C_0(\eta, \dot{\eta}) &= 0_{\mathbb{R}^{3 \times 3}} \\ G_0(\eta) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

et comme la géométrie de la plate-forme est supposée négligeable et puisque les câbles attachent l'effecteur au point  $P$ , alors on déduit

$$B_i \equiv P, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Ce qui implique

$$b_i = 0, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (4.4)$$

On remplace les  $b_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ), par leurs valeurs dans les équations (2.8) et (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{l}_i &= \eta - a_i, \quad i = 1, \dots, 8. \\ l_i &= \|\eta - a_i\|_2, \quad i = 1, \dots, 8. \end{aligned} \quad (4.5)$$

On déduit

$$\tilde{W}(\eta) = \left( \left[ \frac{\eta - a_i}{\|\eta - a_i\|_2} \right]^T \right)_i \in \mathbb{R}^{8 \times 3}. \quad (4.6)$$

Ensuite, on remplace les éléments de l'équation (2.59) par leurs expressions déduites ci-dessus, on obtient le modèle mathématique du robot à huit câbles suivant

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{11} & \dots & \tilde{w}_{18} \\ \tilde{w}_{21} & \dots & \tilde{w}_{28} \\ \tilde{w}_{31} & \dots & \tilde{w}_{38} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_8 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

tel que, pour  $i = 1, \dots, 8$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{1i} &= \frac{x - a_{ix}}{\sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2 + (z - a_{iz})^2}} \\ \tilde{w}_{2i} &= \frac{y - a_{iy}}{\sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2 + (z - a_{iz})^2}} \\ \tilde{w}_{3i} &= \frac{z - a_{iz}}{\sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2 + (z - a_{iz})^2}} \\ T_i &= \|\vec{t}_i\|_2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec :

- $\vec{t}_i$  est le vecteur tension du  $i^{\text{ème}}$  câble,
- $(a_{ix}, a_{iy}, a_{iz})$  forme le coordonné du vecteur position  $a_i$  de  $i^{\text{ème}}$  moteur  $A_i$ , c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a_{ix} \\ a_{iy} \\ a_{iz} \end{bmatrix} = a_i = \overrightarrow{OA_i}, \quad (4.9)$$

- Le vecteur  $T$  définie par

$$T := \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_8 \end{bmatrix},$$

vérifie la contrainte des tensions des câbles suivante

$$\begin{bmatrix} T_{1min} \\ T_{2min} \\ \vdots \\ T_{8min} \end{bmatrix} \leq T \leq \begin{bmatrix} T_{1max} \\ T_{2max} \\ \vdots \\ T_{8max} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

où  $T_{imin}$  et  $T_{imax}$  sont deux réels positive vérifient l'inégalité suivante

$$T_{imax} - T_{imin} \geq 0, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (4.11)$$

On développe l'équation (4.7), on obtient le système de contrôle dynamique du robot

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= (2h - x) \sum_{i \in \{3,4,6,7\}} \frac{T_i}{v_i} - x \sum_{j \in \{1,2,5,8\}} \frac{T_j}{v_j} \\ m \ddot{y} &= (h - y) \sum_{i \in \{2,3,6,8\}} \frac{T_i}{v_i} - y \sum_{j \in \{1,4,5,7\}} \frac{T_j}{v_j} \\ m \ddot{z} &= (h - z) \sum_{i \in \{1,2,3,4,6\}} \frac{T_i}{v_i} - z \sum_{j \in \{5,7,8\}} \frac{T_j}{v_j} - gm, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

— Le scalaire  $v_i$  définit par

$$v_i := \sqrt{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2 + (z - a_{iz})^2}, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (4.13)$$

— Le scalaire  $h$  définit la longueur de l'arête de la base fixe (voir figure (FIGURE 4.1)).

On considère le vecteur  $X$  suivant

$$X := \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

et on introduit les nouvelles variables suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= y \\ x_4 &= \dot{y} \\ x_5 &= z \\ x_6 &= \dot{z} \\ u_i &= \frac{T_i}{m v_i}, \quad i = 1 \dots 8. \end{aligned} \quad (4.15)$$

tel que

$$\begin{bmatrix} \frac{T_{1min}}{m v_1} \\ \frac{T_{2min}}{m v_2} \\ \vdots \\ \frac{T_{8min}}{m v_8} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \frac{T_{1max}}{m v_1} \\ \frac{T_{2max}}{m v_2} \\ \vdots \\ \frac{T_{8max}}{m v_8} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

sont les nouvelles variables entrées.

Par suite, le modèle (4.12) s'écrit sous forme d'un système de contrôle de première ordre comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= (2h - x_1) \sum_{i \in \{3,4,6,7\}} u_i - x_1 \sum_{j \in \{1,2,5,8\}} u_j \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= (h - x_3) \sum_{i \in \{2,3,6,8\}} u_i - x_3 \sum_{j \in \{1,4,5,7\}} u_j \\
 \dot{x}_5 &= x_6 \\
 \dot{x}_6 &= (h - x_5) \sum_{i \in \{1,2,3,4,6\}} u_i - x_5 \sum_{j \in \{5,7,8\}} u_j - g,
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

c'est le système d'étude de cette partie.

### 4.2.2 Modèle d'erreur

On considère la trajectoire de référence  $(x_r, y_r, z_r)^T$  satisfait l'équation dynamique suivante

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_r + \frac{1}{2h} x_r w_{51}^r &= w_{31}^r \\
 \ddot{y}_r + \frac{1}{2h} y_r w_{51}^r &= w_{21}^r \\
 \ddot{z}_r + \frac{1}{2h} z_r w_{51}^r &= w_{71}^r \\
 \sqrt{x_r^2 + y_r^2 + z_r^2} &< h.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

où les paramètres  $w_{21}^r$ ,  $w_{31}^r$ ,  $w_{51}^r$  et  $w_{71}^r$  sont positifs et bornés liés aux valeurs de tension dans les câbles.

Dans cette section, on va décrire le système d'erreur entre le modèle dynamique du robot (4.12)-(4.17) et le modèle mathématique de trajectoire de référence (4.18) sous forme de structure en cascade, afin de faciliter la construction des schémas de contrôles positifs.

On considère les deux vecteurs suivants

$$\begin{aligned}
 X_r &:= \begin{bmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \\ x_{3r} \\ x_{4r} \\ x_{5r} \\ x_{6r} \end{bmatrix} \\
 U &:= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_8 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

et on effectue le changement de variables suivant

$$\begin{aligned}
 x_{1r} &= x_r \\
 x_{2r} &= \dot{x}_r \\
 x_{3r} &= y_r \\
 x_{4r} &= \dot{y}_r \\
 x_{5r} &= z_r \\
 x_{6r} &= \dot{z}_r
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$U = A(h) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{bmatrix},$$

avec

—  $w_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) présentent les nouvelles lois de commandes qui satisfont les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
 w_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 8. \\
 w_1 &> w_2 \\
 w_2 &> \frac{1}{2}w_3 \\
 w_4 &> w_6.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

—  $A(h)$  est défini par

$$A(h) = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -\frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Dans ce cas la trajectoire de référence prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_{1r} &= x_{2r} \\
 \dot{x}_{2r} &= w_{31}^r - \frac{1}{2h}x_r w_{51}^r \\
 \dot{x}_{3r} &= x_{4r} \\
 \dot{x}_{4r} &= w_{21}^r - \frac{1}{2h}y_r w_{51}^r \\
 \dot{x}_{5r} &= x_{6r} \\
 \dot{x}_{6r} &= w_{71}^r - \frac{1}{2h}z_r w_{51}^r,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

où

$$\sqrt{x_{1r}^2 + x_{3r}^2 + x_{5r}^2} < h. \quad (4.24)$$

On introduit les feedbacks préliminaires  $w_i$ ,  $i = 1 \dots 8$ , comme suit

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{4}w_{31} - \frac{1}{3}w_{21} + \frac{1}{10}w_{51} \\ w_2 &= \frac{1}{3}w_{21} \\ w_3 &= \frac{1}{2}w_{31} \\ w_4 &= \frac{1}{2}w_{31} + \frac{2}{3}w_{21} + 2w_{71} - \frac{1}{5}w_{51} \\ w_5 &= \frac{2}{5}w_{51} \\ w_6 &= \frac{1}{3}w_{21} \\ w_7 &= -\frac{2}{3}w_{21} - 2w_{71} + \frac{1}{5}w_{51}. \\ w_8 &= \frac{1}{3}w_{21}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

avec  $w_{i1} \geq 0$ ,  $i = 2, 3, 5, 7$  sont de nouvelles entrées soumises à l'inégalité suivante

$$W_{min} \leq w_{51} \leq W_{max}, \quad (4.26)$$

avec

$$\begin{aligned} W_{min} &= \max\left(\frac{5}{2}w_{31} + \frac{10}{3}w_{21}, \frac{10}{3}w_{21} + 10w_{71}\right) \\ W_{max} &= \frac{5}{2}w_{31} + \frac{10}{3}w_{21} + 10w_{71}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Par suite, le système (4.17) devient

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2h w_{31} - w_{51} x_2}{2h} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{2h w_{21} - w_{51} x_4}{2h} \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= -\frac{2gh - 2h w_{71} + w_{51} x_6}{2h}. \end{aligned} \quad (4.28)$$



Nous définissons les signaux d'erreur suivants

$$\begin{aligned}
 e_1 &:= x_1 - x_{1r} \\
 e_2 &:= x_2 - x_{2r} \\
 e_3 &:= x_3 - x_{3r} \\
 e_4 &:= x_4 - x_{4r} \\
 e_5 &:= x_5 - x_{5r} \\
 e_6 &:= x_6 - x_{6r} \\
 U_1 &:= w_{31} - w_{31}^r \\
 U_2 &:= w_{21} - w_{21}^r \\
 U_3 &:= w_{71} - w_{71}^r \\
 U_4 &:= w_{51} - w_{51}^r.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

On dérive les  $e_i$  ( $i = 1 \dots 8$ ) par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1r} \\
 \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_{2r} \\
 \dot{e}_3 &= \dot{x}_3 - \dot{x}_{3r} \\
 \dot{e}_4 &= \dot{x}_4 - \dot{x}_{4r} \\
 \dot{e}_5 &= \dot{x}_5 - \dot{x}_{5r} \\
 \dot{e}_6 &= \dot{x}_6 - \dot{x}_{6r}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ensuite, en substituant les équations (4.28) et (4.23) dans le système (4.30), on obtient la dynamique de l'erreur de suivi

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 \\
 \dot{e}_2 &= (U_1 - \frac{1}{2h}e_1w_{51}^r - x_{1r}U_4) - \frac{1}{2h}e_1U_4 \\
 \dot{e}_3 &= e_4 \\
 \dot{e}_4 &= (U_2 - \frac{1}{2h}e_3w_{51}^r - x_{3r}U_4) - \frac{1}{2h}e_3U_4 \\
 \dot{e}_5 &= e_6 \\
 \dot{e}_6 &= (U_3 - \frac{1}{2h}e_5w_{51}^r - x_{5r}U_4 - g) - \frac{1}{2h}e_5U_4.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Afin de simplifier le système (4.31), on considère les nouvelles variables de contrôles  $U_{11}$ ,  $U_{21}$ ,  $U_{31}$  et  $U_{41}$  définissent par le système suivant

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= U_1 - \frac{1}{2h}e_1w_{51}^r - x_{1r}U_4 \\
 U_{21} &= U_2 - \frac{1}{2h}e_3w_{51}^r - x_{3r}U_4 \\
 U_{31} &= U_3 - \frac{1}{2h}e_5w_{51}^r - x_{5r}U_4 - g \\
 U_{41} &= \frac{1}{2h}U_4.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Par suite, le système dynamique des erreurs prend la structure en cascade en fonction des nouvelles variables comme suit

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 \\
 \dot{e}_2 &= U_{11} - e_1 U_{41} \\
 \dot{e}_3 &= e_4 \\
 \dot{e}_4 &= U_{21} - e_3 U_{41} \\
 \dot{e}_5 &= e_6 \\
 \dot{e}_6 &= U_{31} - e_5 U_{41}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

### 4.2.3 Commande de suivi de trajectoires

Dans cette section, on propose des feedbacks de saturations, instationnaires, et positifs ayant la forme suivante

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= U_{11}(t, x, y, z) \\
 U_{21} &= U_{21}(t, x, y, z) \\
 U_{31} &= U_{31}(t, x, y, z) \\
 U_{41} &= U_{41}(t, x, y, z)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

permettent de stabiliser exponentiellement le système (4.33).

Ces feedbacks garantissent les résultats suivants

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x_r(t)| &= 0 \\
 \lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y_r(t)| &= 0 \\
 \lim_{t \rightarrow +\infty} |z(t) - z_r(t)| &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

ainsi que les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
 u_i(t, x, y, z) &\in [u_{imin}, u_{imax}], \quad i = 1 \dots 8 \\
 |x(t) - x_r(t)| &\leq \alpha_1 |x(0) - x_r(0)| e^{-\gamma_1 t} \\
 |y(t) - y_r(t)| &\leq \alpha_2 |y(0) - y_r(0)| e^{-\gamma_2 t} \\
 |z(t) - z_r(t)| &\leq \alpha_3 |z(0) - z_r(0)| e^{-\gamma_3 t},
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

avec  $\alpha_i > 0$  et  $\gamma_i > 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ , et

$$\begin{aligned}
 u_{imin} &= \frac{\tau_{min}}{m_p v_i} \\
 u_{imax} &= \frac{\tau_{max}}{m_p v_i}.
 \end{aligned}$$

On donne le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1.** *On considère les schémas de contrôles instationnaires suivants*

$$\begin{aligned}
 U_{11}(t, x) &= \phi(-e_1 e^{-kt} - k_2 e_2 - k_1 e_1) \\
 U_{21}(t, x) &= \phi(-e_3 e^{-kt} - k_4 e_4 - k_3 e_3) \\
 U_{31}(t, x) &= \phi(-e_5 e^{-kt} - k_6 e_6 - k_5 e_5) \\
 U_{41}(t, x) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

où :  $\phi(x) = \text{sat}(x, 0, X_{max})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , tel que  $X_{max}$  satisfait la condition suivante

$$\frac{k-1}{2} < X_{max} < \frac{k}{2}, \tag{4.38}$$

et la fonction de saturation est définie comme suit

$$\text{sat}(x, \underline{x}, \bar{x}) = \begin{cases} \underline{x} & \text{si } x \leq \underline{x} \\ x & \text{sinon si } \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \\ \bar{x} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.39}$$

Alors, pour tous paramètres suffisamment grands  $k > 1$ ,  $k_i > k - 1$  et  $k_{i+1} \in (0, \frac{1+k_i}{2k})$  (avec  $i = 1, 3, 5$ ), le système en boucle fermée (4.33)-(4.37) est exponentiellement stable.

*Preuve.* Nous considérons les fonctions candidates de Lyapunov suivantes

$$\begin{aligned}
 V_1(t, e_1, e_2) &= P_1 e_1^2 (1 + e^{-kt}) + P_2 e_2^2 (1 + e^{-kt}) \\
 V_3(t, e_3, e_4) &= P_3 e_3^2 (1 + e^{-kt}) + P_4 e_4^2 (1 + e^{-kt}) \\
 V_5(t, e_5, e_6) &= P_5 e_5^2 (1 + e^{-kt}) + P_6 e_6^2 (1 + e^{-kt}),
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
 0 < \frac{1}{k} P_1 &\leq P_2 \leq \frac{k-1}{k_1+1} P_1. \\
 0 < \frac{1}{k} P_3 &\leq P_4 \leq \frac{k-1}{k_3+1} P_3. \\
 0 < \frac{1}{k} P_5 &\leq P_6 \leq \frac{k-1}{k_5+1} P_5.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Les fonctions  $V_1$ ,  $V_3$ , et  $V_5$  sont définies positives car  $V_1(t, e_1, e_2) \geq P_1 e_1^2 + P_2 e_2^2$  et  $V_3(t, e_3, e_4) \geq P_3 e_3^2 + P_4 e_4^2$  pour tout  $t \geq 0$ .

Nous calculons la dérivée temporelle de  $V_1$ ,  $V_3$ , et  $V_5$ , nous obtenons les estimations

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(t, e_1, e_2) &< -\hat{c}_1 V_1(t, e_1, e_2), \\
 \dot{V}_3(t, e_3, e_4) &< -\hat{c}_3 V_3(t, e_3, e_4), \\
 \dot{V}_5(t, e_5, e_6) &< -\hat{c}_5 V_5(t, e_5, e_6),
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_1 &= \min\{P_2, kP_2 - P_1, (k-1)P_1, kP_2 - P_1 - 2P_2 X_{max}, \\
 &\quad -P_2(1+k_1) + (k-1)P_1, -P_2(1+k_1) + (2k_2+k)P_2 - P_1\}. \\
 \hat{c}_3 &= \min\{P_4, kP_4 - P_3, (k-1)P_3, kP_4 - P_3 - 2P_4 X_{max}, \\
 &\quad -P_4(1+k_3) + (k-1)P_3, -P_4(1+k_3) + (2k_4+k)P_4 - P_3\}. \\
 \hat{c}_5 &= \min\{P_6, kP_6 - P_5, (k-1)P_5, kP_6 - P_5 - 2P_6 X_{max}, \\
 &\quad -P_6(1+k_5) + (k-1)P_5, -P_6(1+k_5) + (2k_6+k)P_6 - P_5\}.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Sous les conditions (4.38) et (4.41), et par définition des paramètres  $k$  et  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , nous déduisons que les coefficients  $\hat{c}_i$ ,  $i = 1, 3, 5$  sont strictement positifs.

Alors, nous concluons que le système en boucle fermée (4.33)-(4.37) est exponentiellement stable.  $\square$

#### 4.2.4 Simulations numériques

Dans cette section, nous présentons les simulations numériques que ont été effectuées à l'aide de Matlab pour illustrer l'efficacité des schémas de contrôle proposés dans ce chapitre.

Les paramètres du robot et les lois de commande sont listés dans le tableau suivant

Paramètre	Valeur
$h$	20
$m$	1.5
$g$	9.8
$\tau_{imin}$	0
$\tau_{imax}$	10
$k$	5
$k_1$	4.5
$k_2$	0.5
$k_3$	4.5
$k_4$	0.5
$k_5$	4.5
$k_6$	0.5

TABLE 4.1 – Paramètres de simulation.

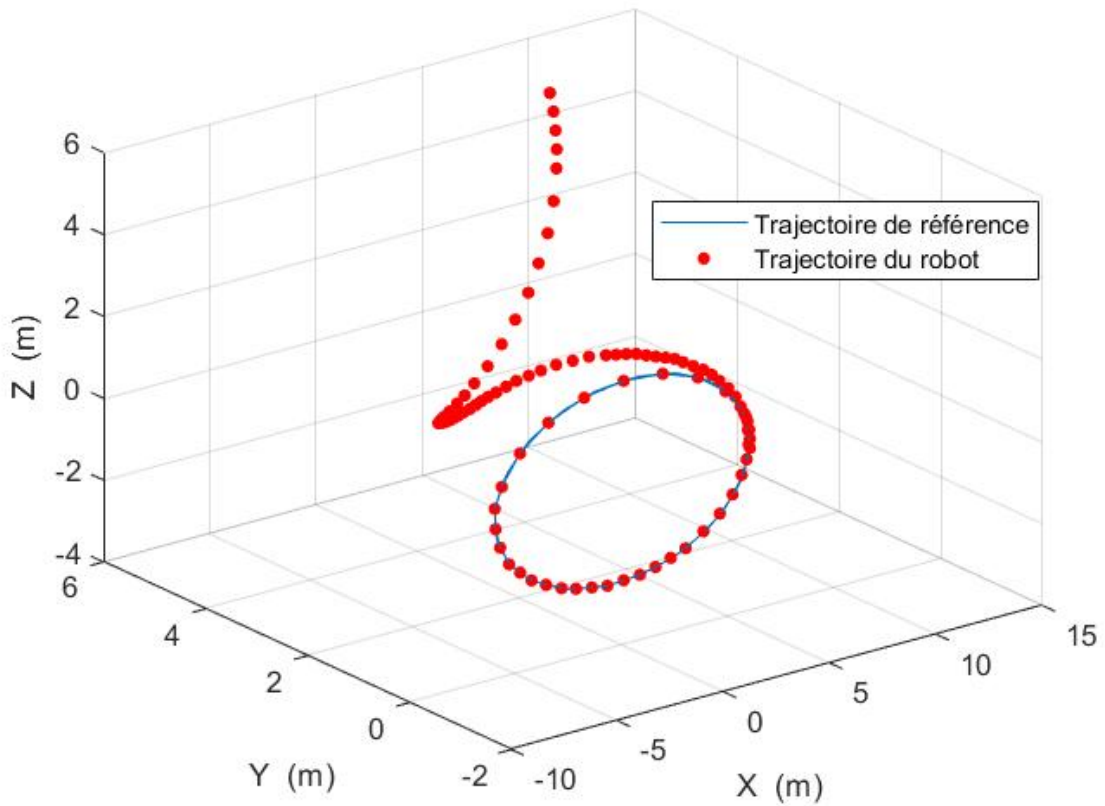


FIGURE 4.2 – Trajectoire de référence et trajectoire réelle de l’effecteur dans l’espace de 3D.

La FIGURE 4.2 montre le suivi de trajectoire de l’effecteur de robot dans l’espace 3D. Initialement, la plate-forme est positionnée au point  $P_0(11, 6, 4.5)$ , et nous remarquons que l’effecteur se dirige vers la trajectoire de référence, puis les deux trajectoires finissent d’être confondues.

Ensuite, les FIGURE 4.3 et FIGURE 4.4 montrent la bonne performance des schémas de contrôles sur les sorties du système de robot. Nous pouvons voir que l’effecteur se rapproche de la trajectoire de référence dans une période  $t_1 = 10$  secs et reste ensuite stable dans la direction de cette trajectoire, c’est-à-dire pour tout  $t > t_1$ , on a

$$x(t) = x_r(t),$$

$$y(t) = y_r(t),$$

$$z(t) = z_r(t).$$

De plus, les FIGURE 4.5–FIGURE 4.8 montrent la variation des longueurs des câbles par rapport au temps.

Enfin, les résultats de simulations des figures (FIGURE 4.9)–(FIGURE 4.12) montrent la positivité des différentes tensions dans tous les câbles pendant que le robot suivre la trajectoire de référence.

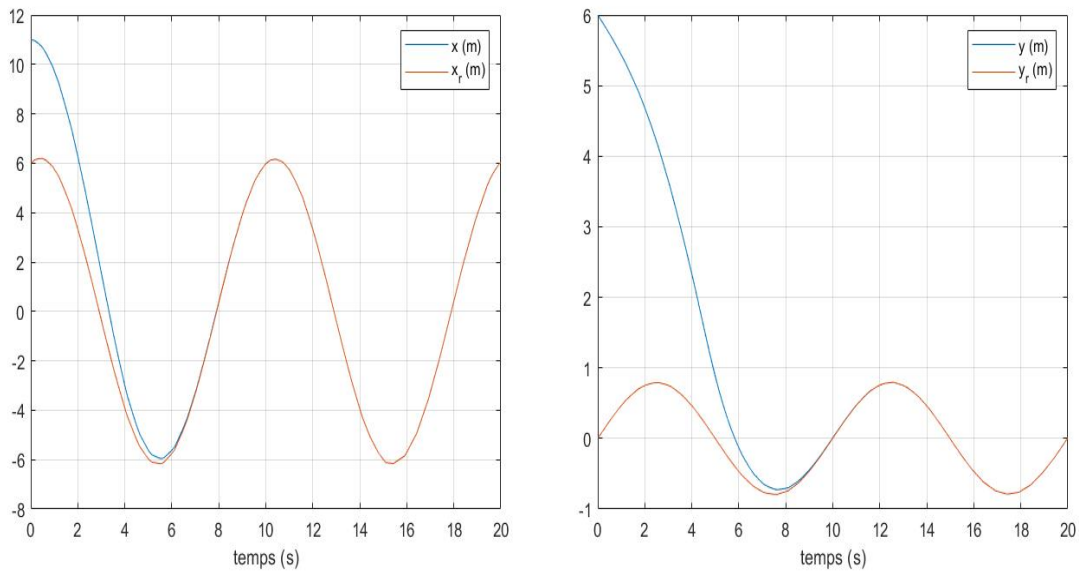


FIGURE 4.3 – Comportement des trajectoires  $(x, x_r)$  et  $(y, y_r)$ .

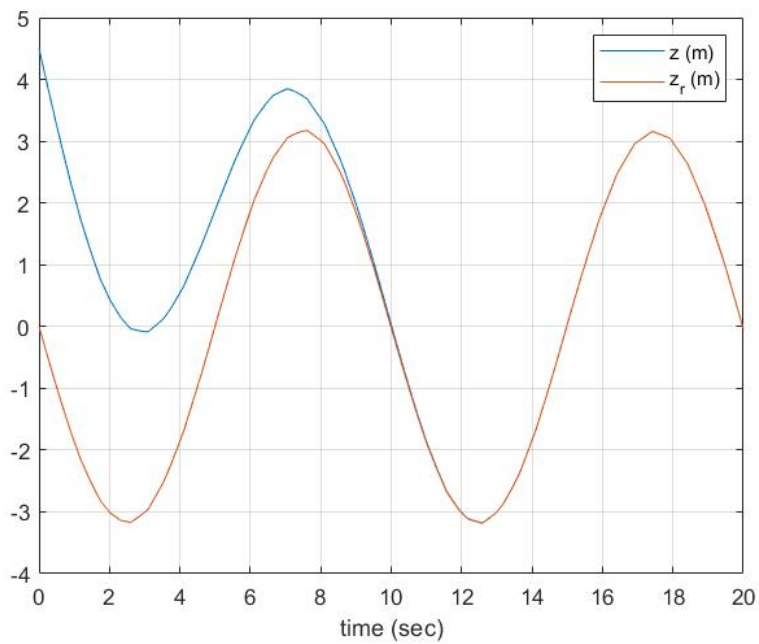


FIGURE 4.4 – Comportement des trajectoires  $(z, z_r)$ .

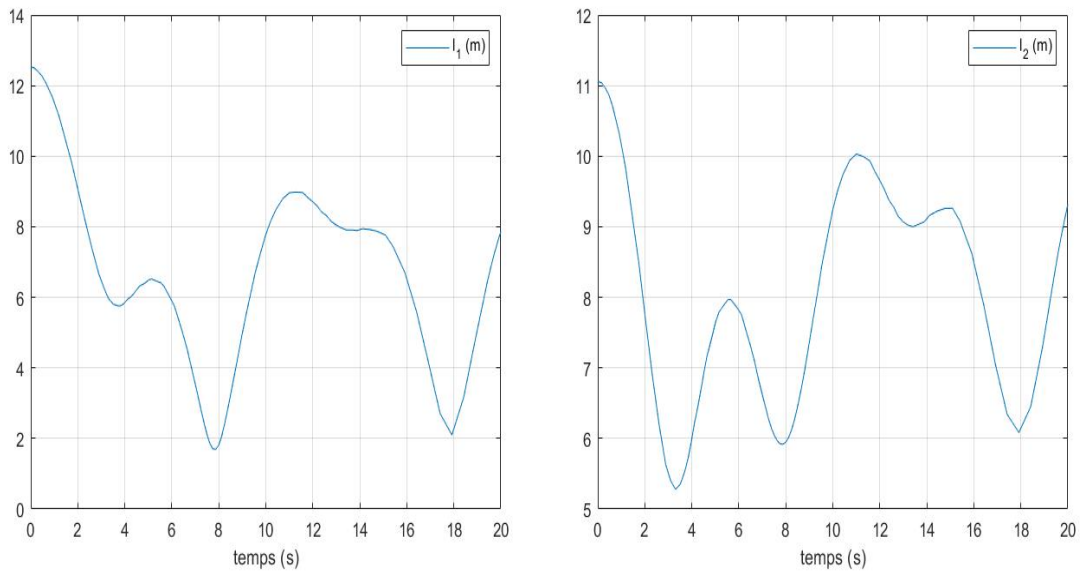


FIGURE 4.5 – Simulations des longueurs des câbles  $l_1$  et  $l_2$ .

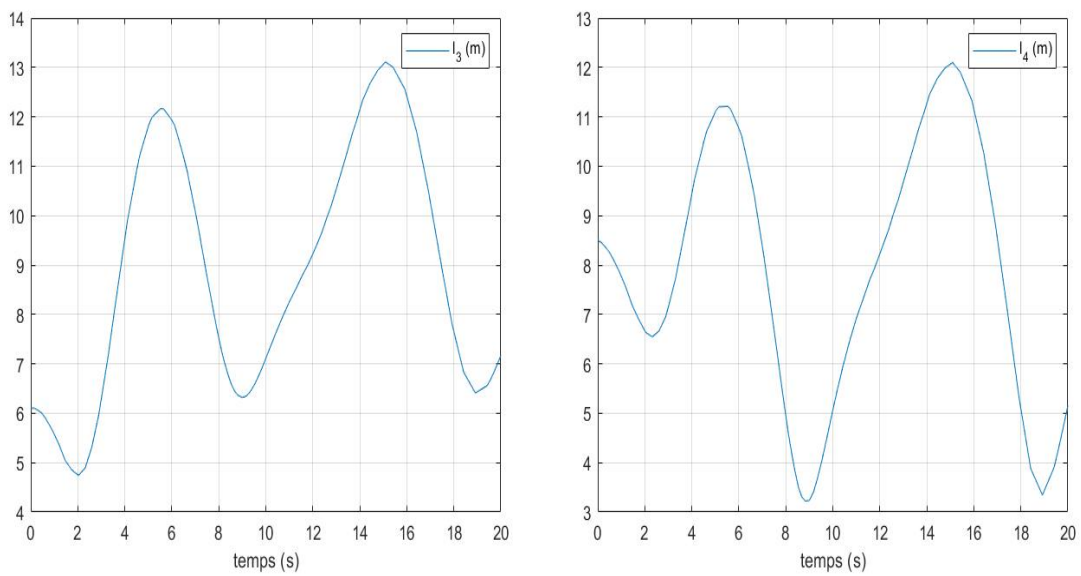


FIGURE 4.6 – Simulations des longueurs des câbles  $l_3$  et  $l_4$ .

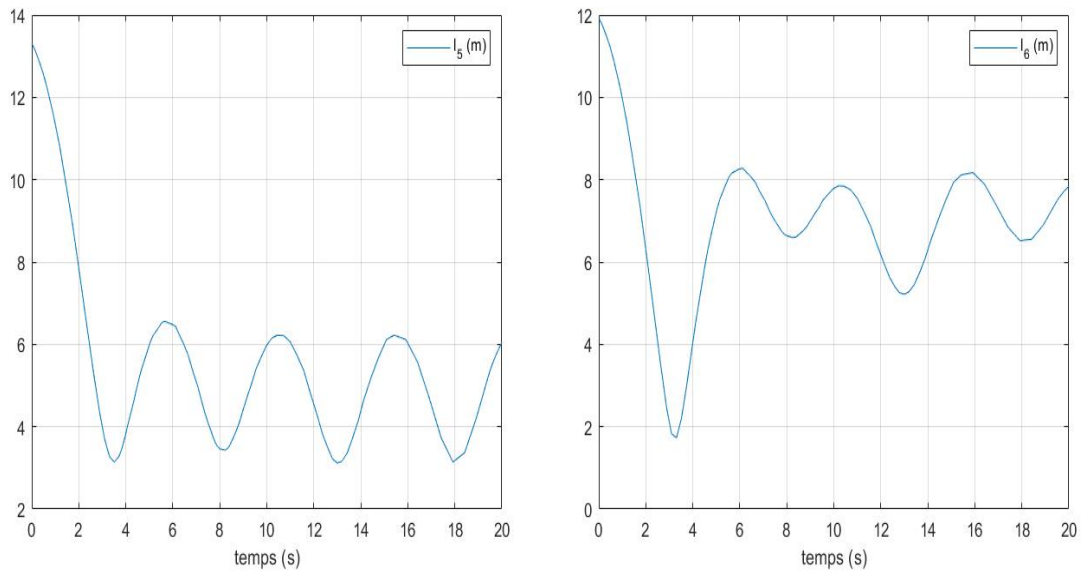


FIGURE 4.7 – Simulations des longueurs des câbles  $l_5$  et  $l_6$ .

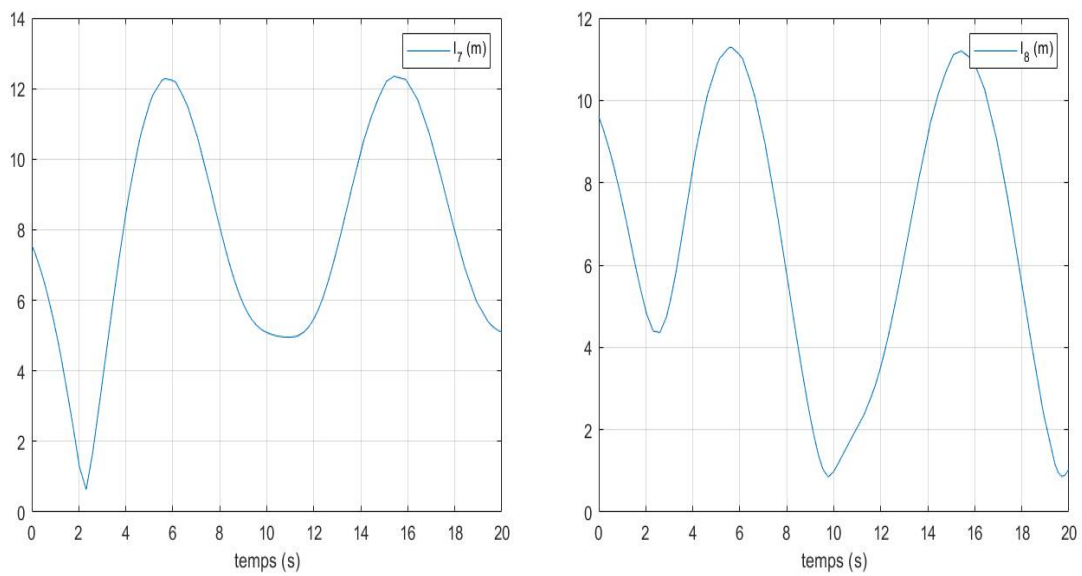


FIGURE 4.8 – Simulations des longueurs des câbles  $l_7$  et  $l_8$ .



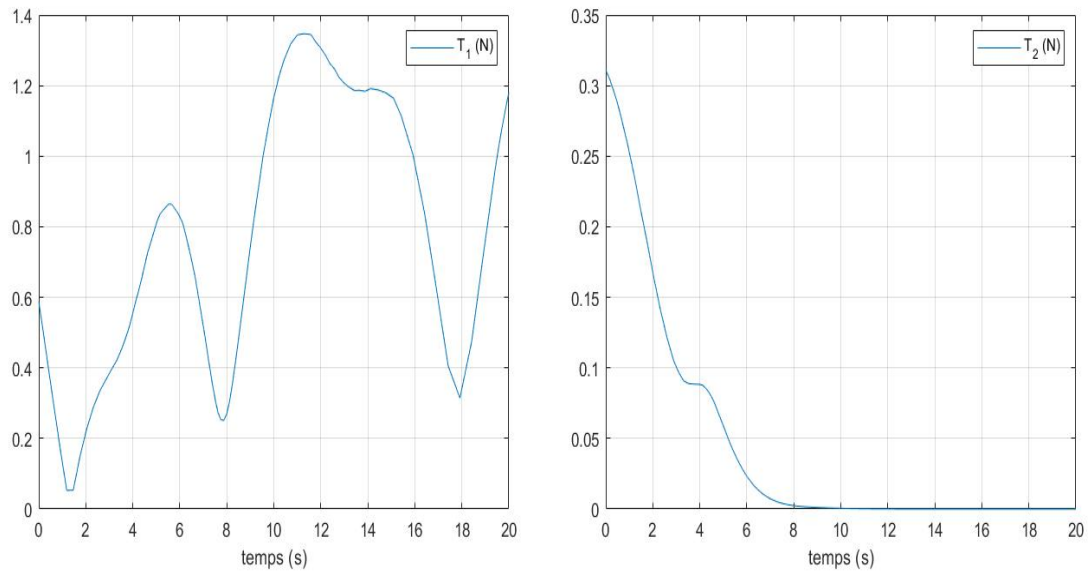


FIGURE 4.9 – Simulations des tensions des câbles  $T_1$  et  $T_2$ .

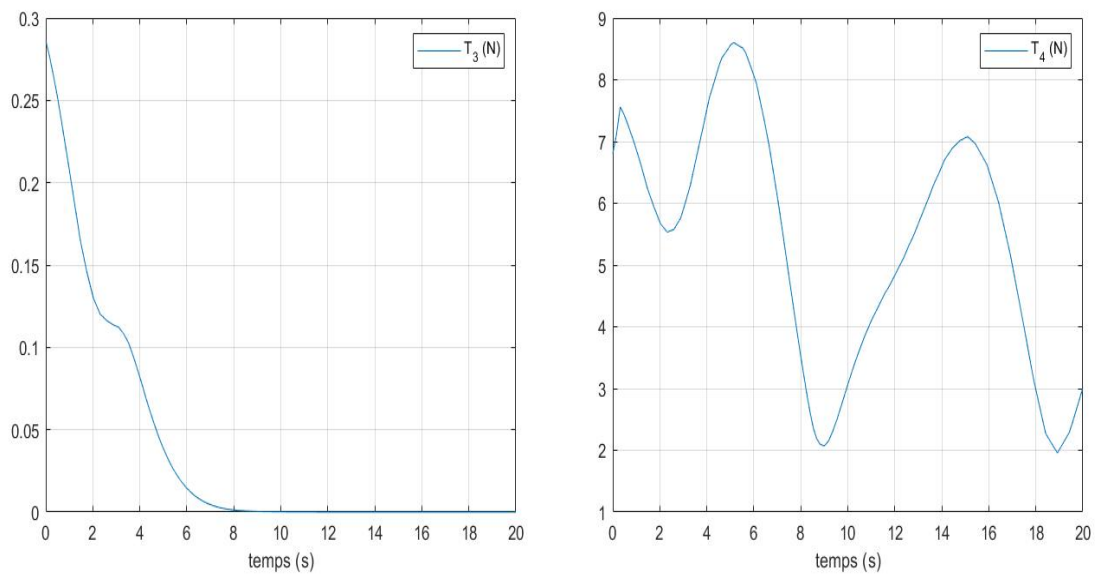


FIGURE 4.10 – Simulations des tensions des câbles  $T_3$  et  $T_4$ .

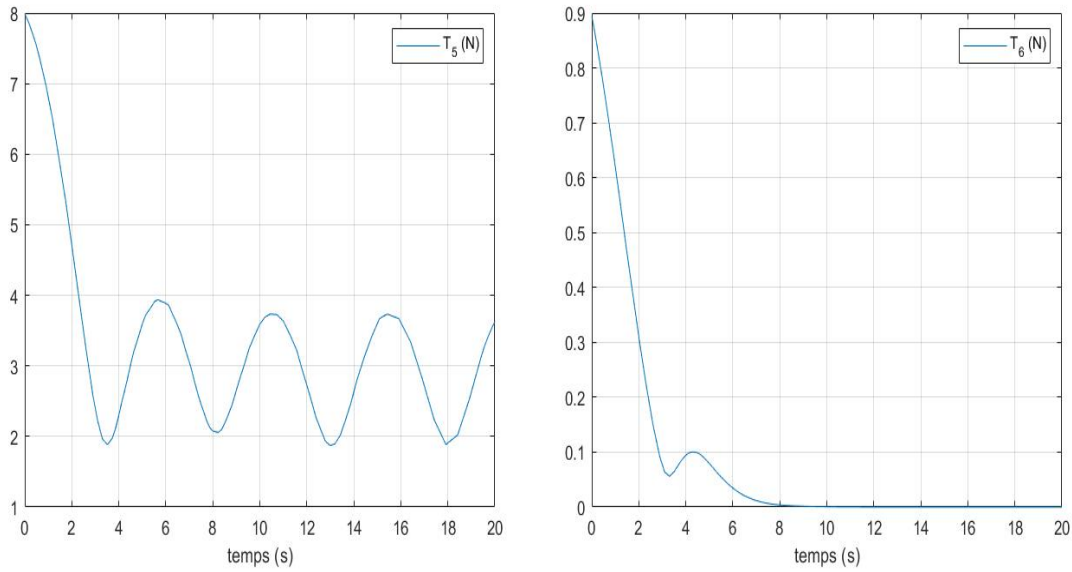


FIGURE 4.11 – Simulations des tensions des câbles  $T_5$  et  $T_6$ .

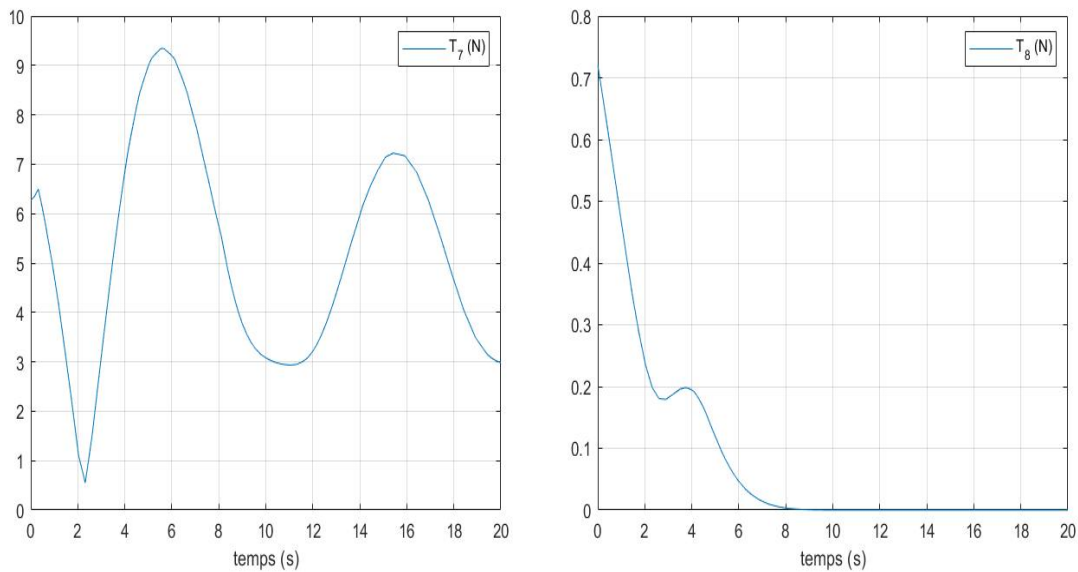


FIGURE 4.12 – Simulations des tensions des câbles  $T_7$  et  $T_8$ .

### 4.3 Partie 2 : Commande par mode glissant basée sur un algorithme d'optimisation sous contraintes

Dans cette partie, on développe une stratégie de contrôle en temps fini à partir du modèle statique du robot à câbles dans l'espace opérationnel (2.47) pour le suivi de trajectoires en prenant en compte les contraintes physiques sur les tensions des câbles.

Dans ce contexte, on choisit d'utiliser la commande par mode de glissant parce que le

comportement mathématique du modèle dynamique du robot à câbles peut être adaptable au choix de surface de glissement, ce qui permet de réduire l'ordre du modèle du robot. De plus la réponse du système robot avec cette loi de commande en boucle fermée devient entièrement insensible au comportement géométrique du robot.

On rappelle que le modèle mathématique du robot dans l'espace opérationnel est donné par

$$\begin{aligned} M_1(\eta)\ddot{\eta} + C_0(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G_0(\eta) &= \tilde{W}(\eta)u \\ u_{min} &\leq u \leq u_{max}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

et on considère la trajectoire désirée définie par

$$\eta_d = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \\ \phi_d \\ \theta_d \\ \psi_d \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

supposée deux fois différentiable, et on désigne par

$$\begin{aligned} e &:= \eta - \eta_d \\ &= \begin{bmatrix} x - x_d \\ y - y_d \\ z - z_d \\ \phi - \phi_d \\ \theta - \theta_d \\ \psi - \psi_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

le vecteur d'erreur.

Afin de faciliter l'écriture, on définit les deux vecteurs suivants

$$\begin{aligned} e_1 &:= \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \vdots \\ e_{61} \end{bmatrix} \\ e_2 &:= \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \vdots \\ e_{62} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

avec

- $e_{i1}$  le  $i^{\text{ème}}$  élément de vecteur  $e$ .
- $e_{i2}$  le  $i^{\text{ème}}$  élément de vecteur  $e$ .

Notre objectif est de déterminer un feedback  $u$  de manière que

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow t(e_0)} e_1(s) = 0 \\ \lim_{s \rightarrow t(e_0)} e_2(s) = 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

tout en respectant la contrainte suivante :

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \quad (4.48)$$

où

- $e_0$  : le vecteur d'erreur initial entre l'état du robot et la trajectoire désirée à l'instant  $t = 0$ .
- $t(e_0)$  : le temps fini de convergence que peut s'exprimer en fonction de  $e_0 = [e^T(0), \dot{e}^T(0)]^T$ .

Le résultat principal de cette section est présenté dans le théorème suivant.

**Théorème 4.3.1.** *Soit la surface de glissement dans l'espace d'erreurs définie par*

$$s = e_2 + K_1 \text{diag}(\text{sign}(e_1)) |e_1|^\alpha, \quad (4.49)$$

avec

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61} \end{bmatrix}$$

$$\text{diag}(\text{sign}(e_1)) = \begin{bmatrix} \text{sign}(e_{11}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sign}(e_{21}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sign}(e_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sign}(e_{41}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sign}(e_{51}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sign}(e_{61}) \end{bmatrix}$$

$$|e_1|^\alpha = \begin{bmatrix} |e_{11}|^{\alpha_1} \\ |e_{21}|^{\alpha_2} \\ \vdots \\ |e_{61}|^{\alpha_6} \end{bmatrix},$$

où

- $k_{i1} > 0, i = 1, \dots, 6$ .
- $\alpha_i \in (0, 1)$ .
- $\text{sign}(x)$  présente la fonction signe définie par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On considère la loi de commande définie par

$$\begin{aligned} u &= \arg \min \quad \|\hat{u}\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{W}(\eta)\hat{u} - u_0(e_1, e_2) = M_1(\eta)u_s(e_1, e_2) \\ & 0 \leq u_{min} \leq \hat{u} \leq u_{max}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

avec :

$$\begin{aligned} u_0(e_1, e_2) &= C_0(\dot{\eta}, \eta)\dot{\eta} + G_0(\eta) + M_1(\eta)\ddot{\eta}_d \\ u_s(e_1, e_2) &= \begin{cases} -K(I_6 + \text{diag}(|e_1|))\text{sign}(s) & \text{if } s \neq 0_{\mathbb{R}^6} \\ 0_{\mathbb{R}^6} & \text{else.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix} \\ \text{diag}(|e_1|) &= \begin{bmatrix} |e_{11}| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |e_{21}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |e_{31}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |e_{41}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |e_{51}| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |e_{61}| \end{bmatrix} \\ \text{sign}(s) &= \begin{bmatrix} \text{sign}(s_1) \\ \text{sign}(s_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(s_6) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

avec

$$- k_i > 0, i = 1, \dots, 6$$

Alors, l'équilibre  $(\eta_d, 0)$  du système en boucle fermée composé par la dynamique du robot (4.44) et la loi de commande (4.50)(4.51) est globalement stable en temps fini.

Avant de commencer la preuve, on va rappeler quelque notion utile sur la commande par mode de glissement ainsi que la théorie d'optimisation.

**Définition 4.3.2.** [98] On considère le système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.53)$$

où  $f(0) = 0$  et  $g(0) \neq 0$ . Le feedback  $u = u(x)$  stabilise en temps fini (4.53) si l'équilibre  $x = 0$  du système en boucle fermée (4.53) stable en temps fini, c'est-à-dire, pour toute condition initiale  $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un temps de stabilisation  $T > 0$ , qui satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow T} x(t; 0, x^0) = 0, \quad (4.54)$$

et

$$x(t; 0, x^0) = 0, \text{ si } t > T \quad (4.55)$$

pour toute solution  $x$  du système en boucle fermée (4.53).

De plus, si la commande est obtenue par mode glissant, elle est appelée une commande par mode glissant terminal.

**Lemme 4.3.3.** [98] Pour tout  $0 < \alpha < 1$  and  $M_0 > 0$ , il existe un nombre  $M_1 > 0$  tel que

$$\|z\|^\alpha \leq M_0 + M_1\|z\| \quad (4.56)$$

est valable pour tout  $z \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 4.3.4.** [98] Supposons que  $a$ ,  $b$ , et  $m > 1$  sont tous des nombres positifs. Alors

$$(a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \leq a + b. \quad (4.57)$$

**Théorème 4.3.5.** [98] Soit le système de contrôle mono-entré suivant

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x) \\ \dot{x}_n &= f_n(x) + u, \end{aligned} \quad (4.58)$$

avec  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , les  $f_i(x)$  sont continues, et  $f_i(0) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

On considère la surface de glissement  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$  avec la variable de glissement  $s$  est défini par l'équation suivante

$$s(x) = x_n - h(x_1, \dots, x_{n-1}), \text{ avec } h(0, \dots, 0) = 0, \quad (4.59)$$

où  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto h(x_1, \dots, x_{n-1})$  est une fonction continue.

Si la fonction  $h$  satisfaisant l'inégalité suivante

$$|h(x_1, \dots, x_{n-1})| < K_0 + L_0 \sum_{i=1}^{n-1} |x_i|, \quad (4.60)$$

pour des nombres positifs adéquats  $K_0$  et  $L_0$ . Alors la loi de commande

$$u = -f_n(x) + v, \quad (4.61)$$

où

$$\begin{aligned} v &= -K \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} |f_i(x)|\right) \text{sgn}(s), \\ K &> \max\{L_0, 1\}, s \neq 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

permettra au système (4.58) d'atteindre  $S$  en un temps fini.

### 4.3.1 Preuve du Théorème 4.3.1

*Preuve.*

On commence de vérifier que le problème suivant

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\hat{u}\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{W}(\eta)\hat{u} - u_0(e_1, e_2) = M_1(\eta)u_s(e_1, e_2) \\ & 0 \leq u_{min} \leq \hat{u} \leq u_{max}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

admet une solution.

Le problème (4.63) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \min_x & f(x) \\ & g(x) = 0 \\ & u_{min} \leq h(x) \leq u_{max} \end{cases} \quad (4.64)$$

avec

$$\begin{aligned} f(x) &= \|x\|_2 = x.x^T, \quad x \in \mathbb{R}^8 \\ g(x) &= \tilde{W}(\eta)x - u_0(e_1, e_2) - M_1(\eta)u_s(e_1, e_2), \quad x \in \mathbb{R}^8 \\ h(x) &= x, \quad x \in \mathbb{R}^8, \end{aligned}$$

et comme la partie de  $\mathbb{R}^8$

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^8 : g(x) = 0, u_{min} \leq h(x) \leq u_{max}\}$$

est convexe et compact, et l'application  $x \mapsto f(x)$  est strictement convexe et continue sur  $\mathcal{E}$ . Alors le problème (4.64) admet une solution unique et par suite, le problème d'optimisation (4.63) admet une seule solution  $u \in \mathbb{R}^8$  s'écrit sous la forme de l'équation (4.50).

Ensuite, on dérive  $e_1$  et  $e_2$  par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{e} \\ &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \ddot{e} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}(\eta - \eta_d) \\ &= \ddot{\eta} - \ddot{\eta}_d, \end{aligned} \quad (4.65)$$

or

$$\begin{aligned} M_1(\eta)\ddot{\eta} + C_0(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G_0(\eta) &= M_1(\eta)(\ddot{\eta} - \ddot{\eta}_d) + C_0(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G_0(\eta) + M_1(\eta)\ddot{\eta}_d \\ &= M_1(\eta)\ddot{e} + C_0(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G_0(\eta) + M_1(\eta)\ddot{\eta}_d \\ &= M_1(\eta)\dot{e}_2 + C_0(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G_0(\eta) + M_1(\eta)\ddot{\eta}_d, \end{aligned} \quad (4.66)$$

d'après les équations (4.44) et (4.66), on trouve la relation suivante

$$\tilde{W}(\eta)u = M_1(\eta)\dot{e}_2 + C_0(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G_0(\eta) + M_1(\eta)\ddot{\eta}_d. \quad (4.67)$$

L'application de loi de commande (4.50), donne

$$M_1(\eta)\dot{e}_2 + C_0(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + G_0(\eta) + M_1(\eta)\ddot{\eta}_d = M_1(\eta)u_s(e_1, e_2) + u_0(e_1, e_2), \quad (4.68)$$

ce qu'implique

$$M_1(\eta)\dot{e}_2 = M_1(\eta)u_s(e_1, e_2), \quad (4.69)$$

et comme  $M_1(\eta)$  est inversible, alors

$$\dot{e}_2 = u_s(e_1, e_2). \quad (4.70)$$

Par suite, le système dynamique (4.44) en boucle fermée prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= u_s(e_1, e_2), \end{aligned} \quad (4.71)$$

Il ne reste qu'à montrer la stabilité en temps fini du système de contrôle en boucle fermée (4.71) pour conclure que la plate-forme atteint la trajectoire en temps fini.

On a :

$$\begin{aligned} \|s - \dot{e}\|_2 &= \|s - e_2\|_2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^6 (s_i - e_{i2})^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

où  $s_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $s$ .

On calcule  $(s_i - e_{i2})$  à partir de l'équation (4.49), on obtient

$$s_i - e_{i2} = k_{i1} \text{sign}(e_{i1}) |e_{i1}|^{\alpha_i}, \quad (4.73)$$

et par suite

$$\|s - \dot{e}\|_2 \leq \sum_{i=1}^6 k_{i1}^{1/2} |e_{i1}|^{\alpha_i}. \quad (4.74)$$

Puisque  $\alpha_i \in (0, 1)$ , alors par l'application du Lemme 4.3.3, on déduit qu'il existe  $c_{i0}$  et  $c_{i1}$  tels que

$$\sum_{i=1}^6 k_{i1}^{1/2} |e_{i1}|^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^6 k_{i1}^{1/2} (c_{i0} + c_{i1} |e_{i1}|). \quad (4.75)$$

Ensuite, on définit les constantes :

$$C_0 := \sum_{i=1}^6 k_{i1}^{1/2} c_{i0}$$

$$C_1 := \max_{1 \leq i \leq 6} k_{i1}^{1/2} c_{i1},$$

alors l'inégalité (4.72) devient

$$\|s - \dot{e}\|_2 \leq C_0 + C_1 \sum_{i=1}^6 |e_{i1}|, \quad (4.76)$$



### 4.3. Partie 2 : Commande par mode glissant basée sur un algorithme d'optimisation sous contraintes

qui satisfait le Théorème 4.3.5, alors, le système (4.71) atteint l'ensemble  $\{(e_1, e_2) : s(e_1, e_2) = 0_{\mathbb{R}^6}\}$  en temps fini.

Par suite, on conclut que le robot parallèle à câbles suit la trajectoire désirée  $\eta_d$  en temps fini.

Le schéma global du contrôle est reflété dans le diagramme de bloc dans la FIGURE 4.13.  $\square$

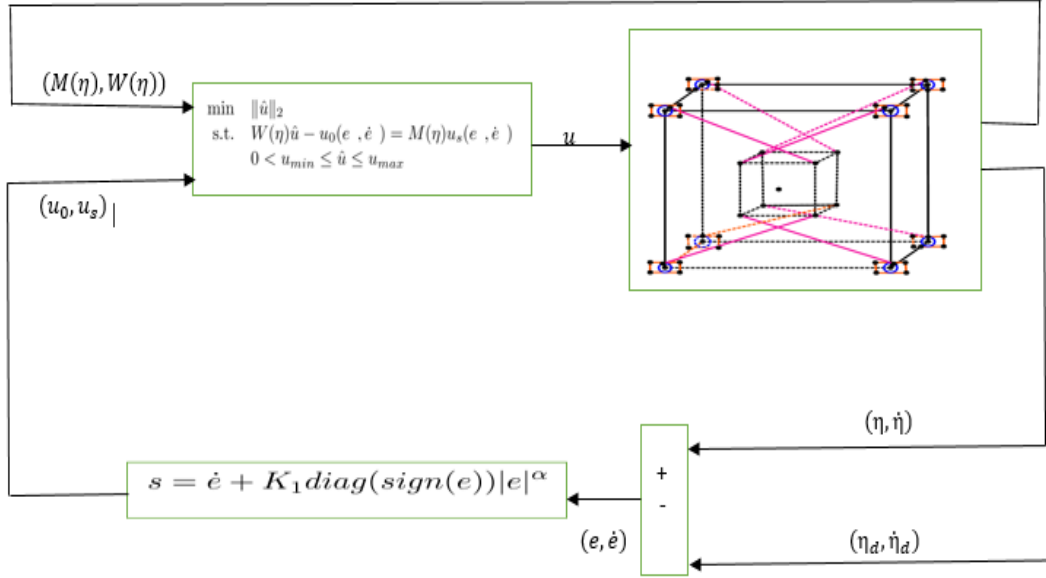


FIGURE 4.13 – Diagramme de loi de commande par mode glissant pour le CDPRs.

#### Remarque 4.3.6.

Le vecteur de contrôle  $u(e_1, e_2)$  défini par (4.50) peut s'écrire comme suit

$$u(e_1, e_2) = u_p + N\lambda^*, \quad (4.77)$$

où

- $u_p$  : est la solution particulière de la contrainte d'égalité du problème d'optimisation (4.63) s'écrit en fonction de pseudo-inverse de Moore Penrose de la matrice  $\tilde{W}$  comme suit

$$u_p = \tilde{W}^+(u_0(e_1, e_2)). \quad (4.78)$$

sachant que  $A^+$  désigne la pseudo inverse de la matrice  $A$ , s'exprimer par

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T.$$

- $N$  : la base de noyau de la matrice  $\tilde{W}$  défini par

$$N = \ker(\tilde{W}).$$

—  $\lambda^*$  : un vecteur bidimensionnel vérifie

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \|\lambda\|_2, \quad (4.79)$$

et soumis à la contrainte d'inégalité

$$u_{min} - u_p \leq N\lambda \leq u_{max} - u_p.$$

Le calcul numérique (4.50)-(4.77) est basé sur l'algorithme du point intérieur, de sorte que la structure de cet algorithme est organisée comme suit

1. Les entrées : l'état initiale et les caractéristiques paramétriques de la plate-forme.
2. Calcul de la trajectoire désirée.
3. Calcul des matrices  $M(\eta)$ ,  $C(\dot{\eta}, \eta)$  et  $G(\eta)$ .
4. Calcul du surface de glissement  $s$ .
5. Calcul des matrices  $W(\eta)$ ,  $W^+(\eta)$  et  $N(\eta)$ .
6. Résolution du problème quadratique (4.63).
7. Sortie : la solution  $u$ .

### 4.3.2 Simulation des Résultats

Dans la présente section, on procède à des simulations numériques pour illustrer le rendement du contrôleur proposé.

Pour réaliser cette simulation, nous choisissons la trajectoire désirée suivante

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \frac{3}{4} \cos(t) \\ y_d(t) &= -\frac{3}{2} \cos(t) \\ z_d(t) &= \frac{3}{2} \cos(t) \\ \phi_d(t) &= \frac{\pi}{6} \cos(t) \\ \theta_d(t) &= \frac{\pi}{4} \cos(t) \\ \psi_d(t) &= -\frac{\pi}{12} \cos(t) \end{aligned} \quad (4.80)$$

Les paramètres de simulation sont donnés ci-dessous :

— Matrice de gain  $K$

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}$$

4.3. Partie 2 : Commande par mode glissant basée sur un algorithme d'optimisation sous contraintes

---

— Matrice de gain  $K_1$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

— Le vecteur des paramètres  $\alpha$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.75 \\ 0.75 \\ 0.70 \\ 0.70 \\ 0.70 \end{bmatrix}.$$

— Les paramètres géométriques de robot :

Paramètre	Valeur
h	20
c	0.2
m	1.5
g	9.8
$T_{imin}$	0.1
$T_{imax}$	3.8

TABLE 4.2 – Paramètres géométrique de robot de simulation.

— Le vecteur de position initiale  $X_0$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

— Le vecteur d'orientation initiale  $X_0$

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{9} \\ \frac{\pi}{12} \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

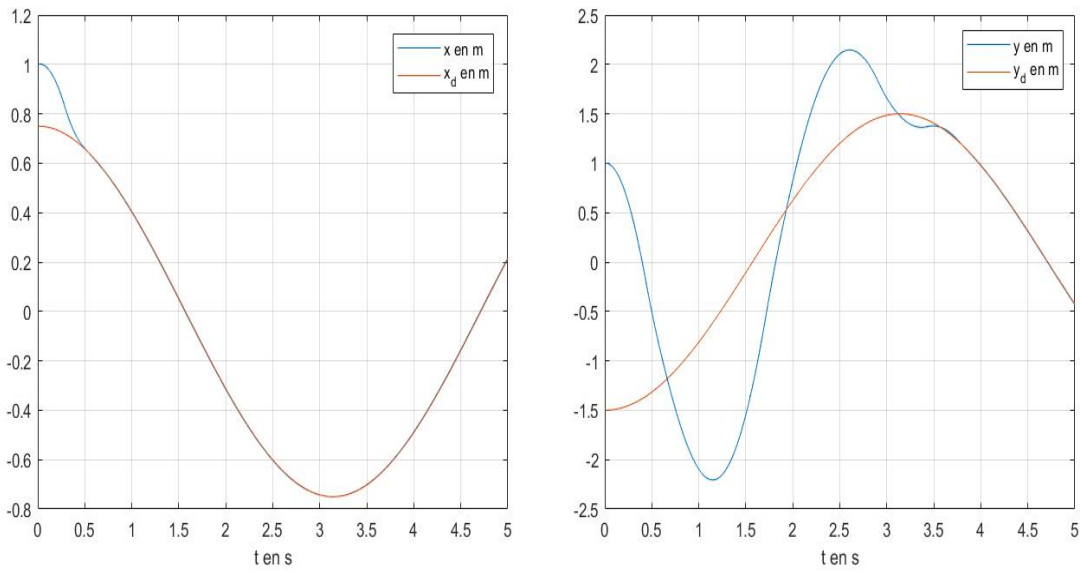


FIGURE 4.14 – Comportement des trajectoires  $(x, x_d)$  et  $(y, y_d)$  (commande par mode glissant).

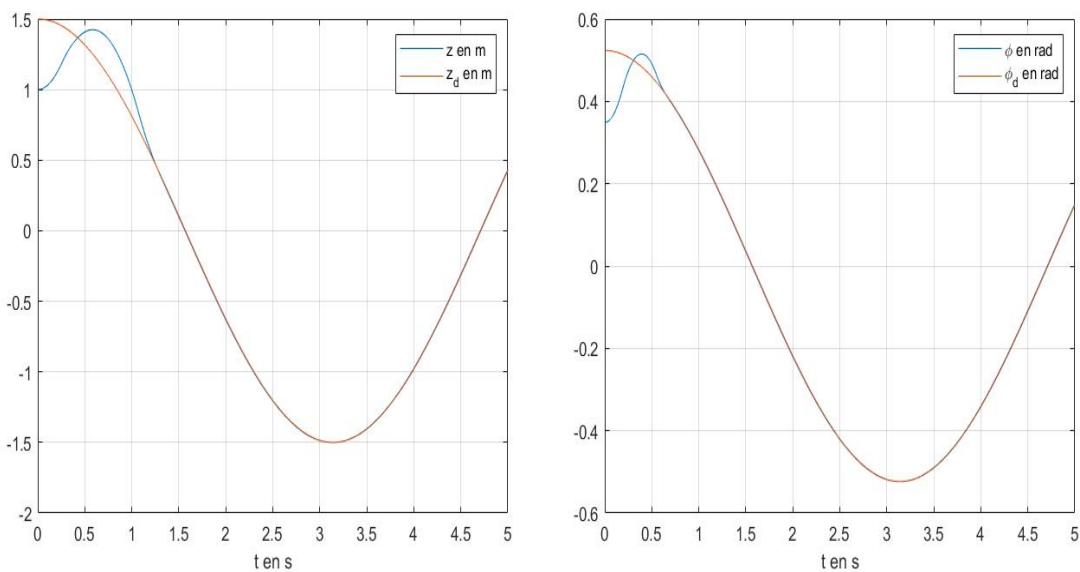


FIGURE 4.15 – Comportement des trajectoires  $(z, z_d)$  et  $(\phi, \phi_d)$  (commande par mode glissant).

Les FIGURE 4.14–FIGURE 4.16 présentent le comportement des variables de sorties de robot  $(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$  et les états de trajectoire désirée  $((x_d, y_d, z_d, \phi_d, \theta_d, \psi_d)$ . On remarque que les sorties  $x, z$  et  $\phi$  rejoignent respectivement les positions  $x_d, z_d$  et l'orientation désirée  $\phi_d$  dans un temps inférieur à 1.5 s, alors que les sorties  $y, \theta$  et  $\psi$  prennent plus de temps pour converger respectivement vers les états désirés  $y_d, \theta_d$  et  $\psi_d$ .

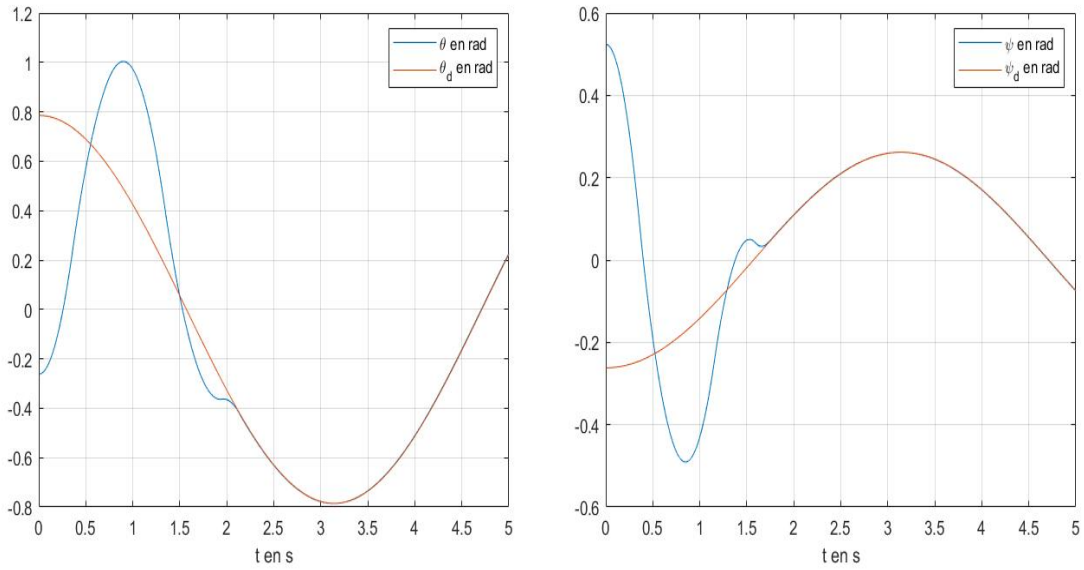


FIGURE 4.16 – Comportement des trajectoires  $(\theta, \theta_d)$  et  $(\psi, \psi_d)$  (commande par mode glissant).

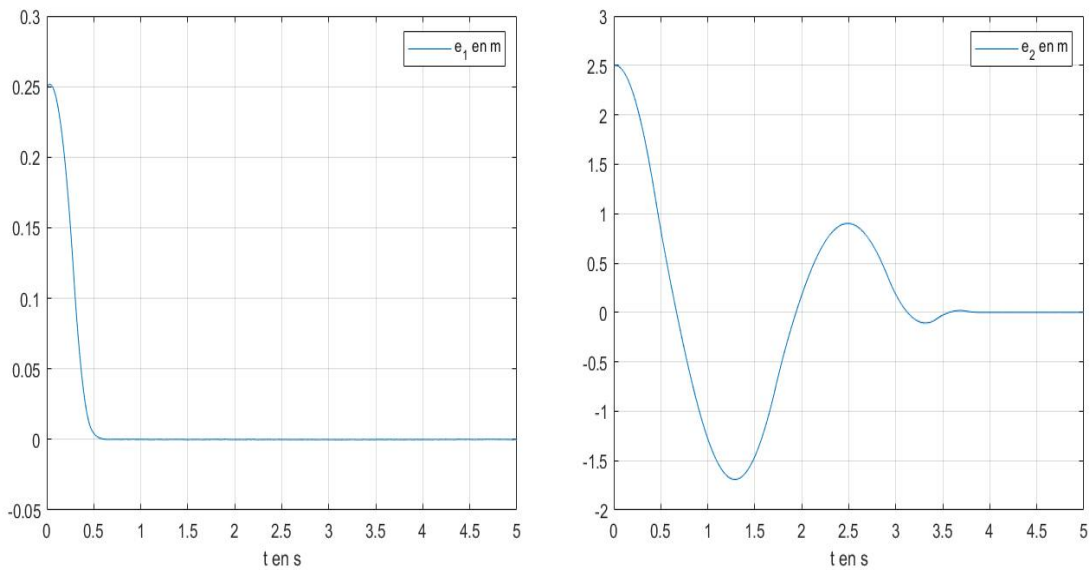


FIGURE 4.17 – Simulation des erreurs de suivi  $e_1, e_2$ .

Les figures FIGURE 4.17–FIGURE 4.19 montrent que le temps de convergence du robot vers la trajectoire désirée est  $t^* = 3.5$  s. De plus, on observe que les erreurs de suivi diminuent d'une manière monotone.

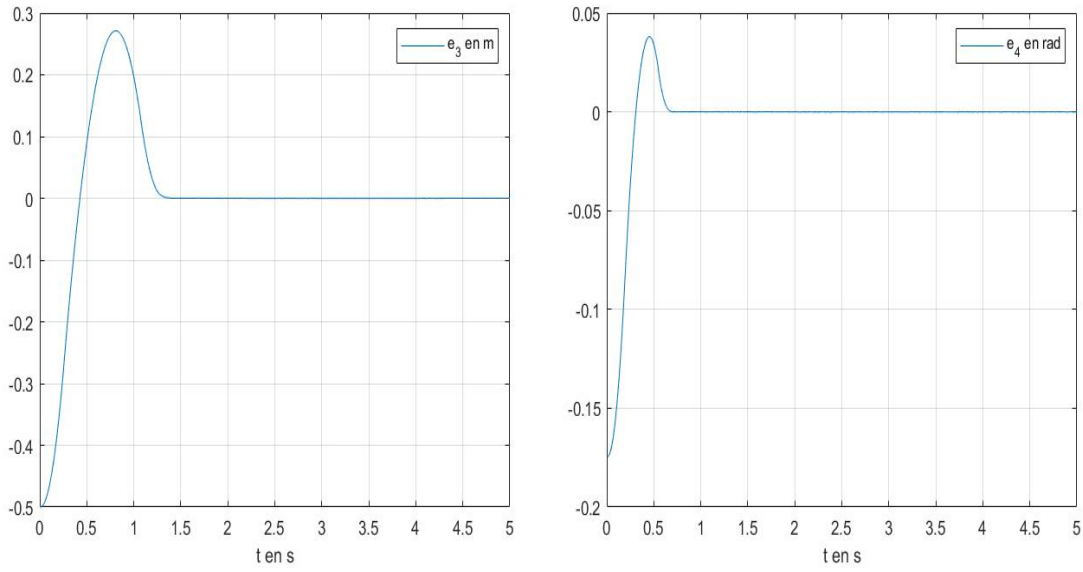


FIGURE 4.18 – Simulation des erreurs de suivi  $e_3$ ,  $e_4$ .

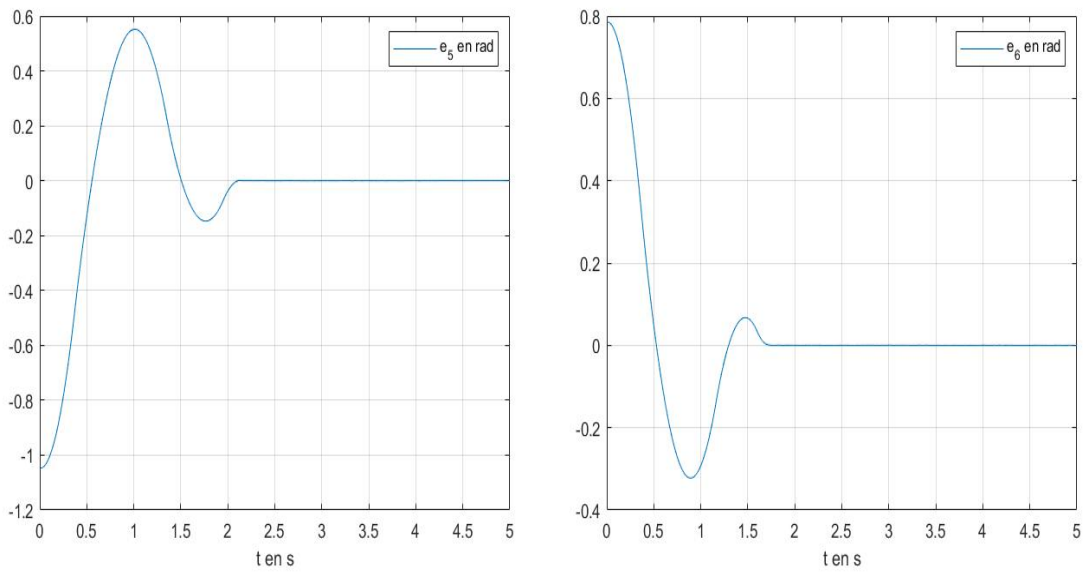
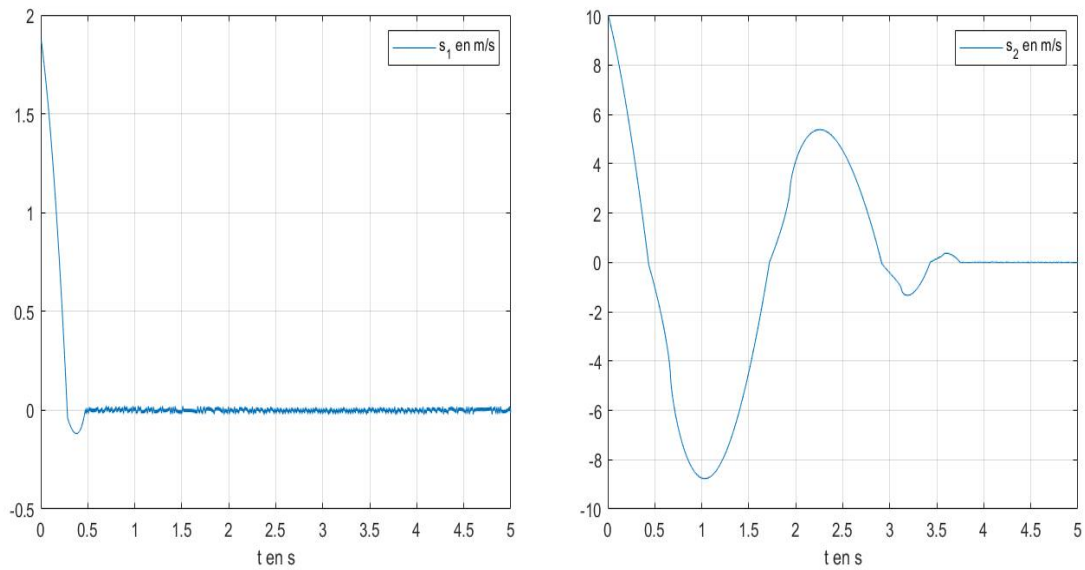
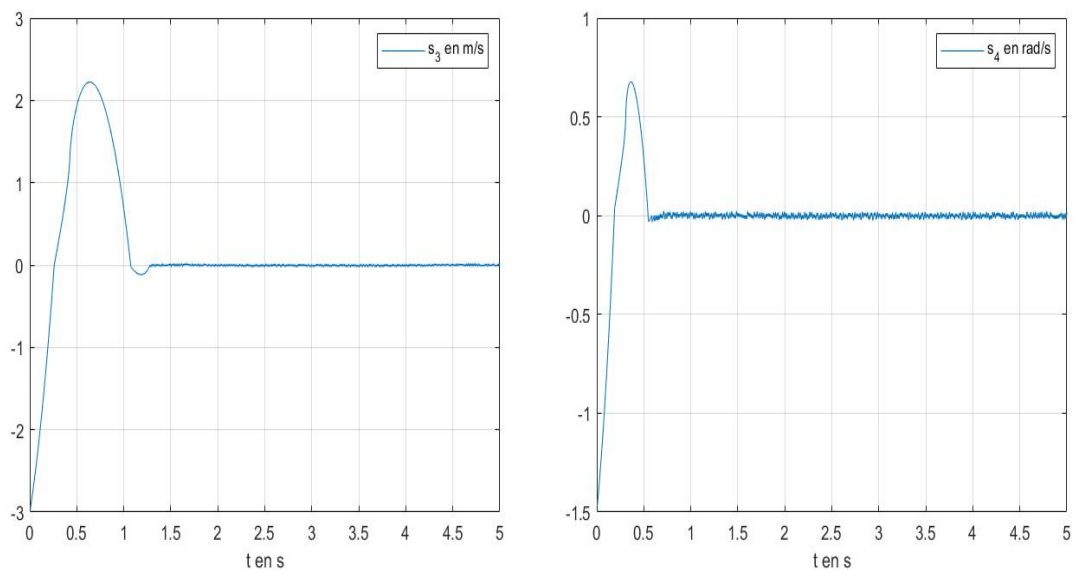


FIGURE 4.19 – Simulation des erreurs de suivi  $e_5$ ,  $e_6$ .

Les figures FIGURE 4.20–FIGURE 4.22 présentent les simulations des variables de glissement  $s_1, \dots, s_6$ .

FIGURE 4.20 – Simulation de surface de glissement  $s_1$ ,  $s_2$ .FIGURE 4.21 – Simulation de surface de glissement  $s_3$ ,  $s_4$ .

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème du suivi de trajectoires de robot parallèle à câbles en dimensions trois. Le système est contrôlé à travers les huit moteurs et les tensions de câbles sont toujours positives et saturées.

Nous avons introduit dans la première partie des transformations non linéaire et bi-jective des variables qui conduisent à la construction des schémas de contrôles positive et instationnaire garantissant la positivité des tensions des câbles ainsi que la stabilité

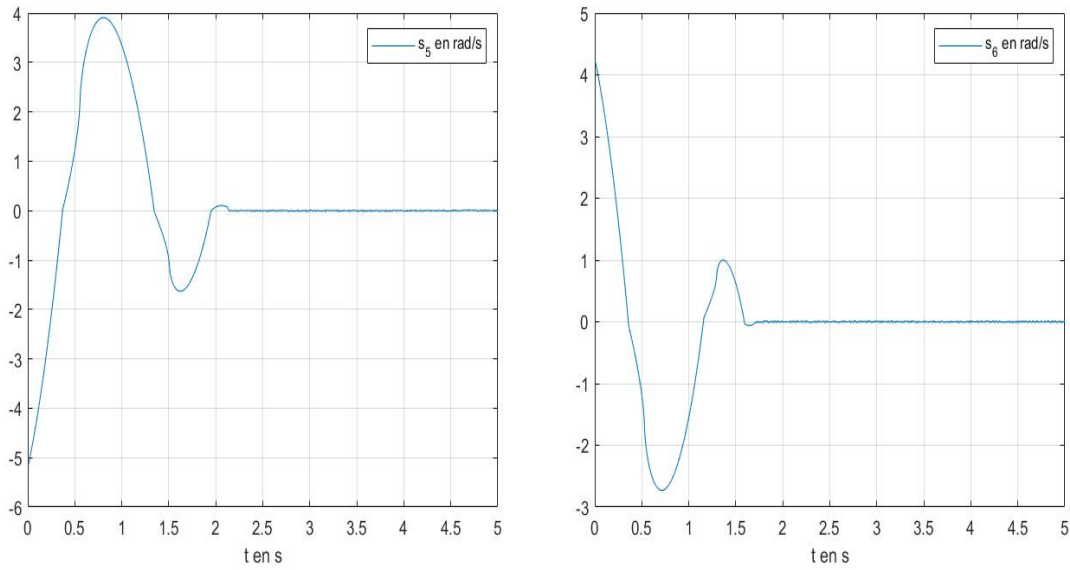


FIGURE 4.22 – Simulation de surface de glissement  $s_5$ ,  $s_6$ .

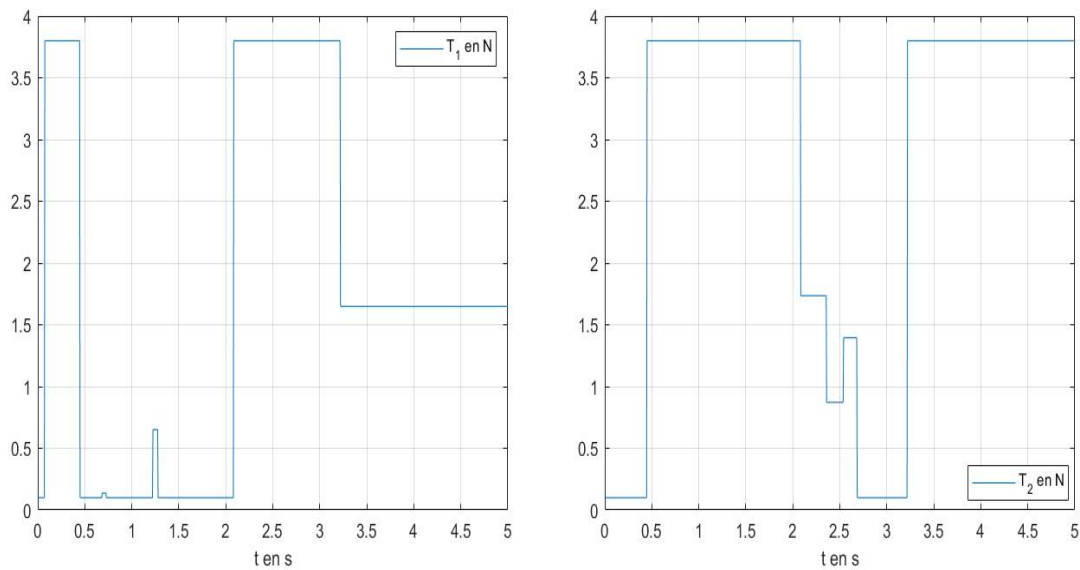


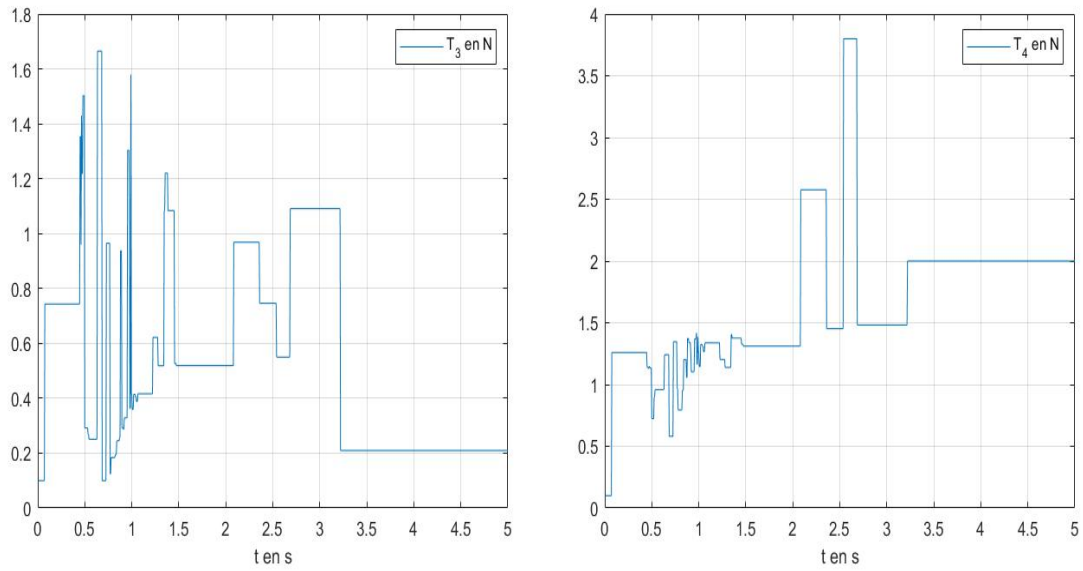
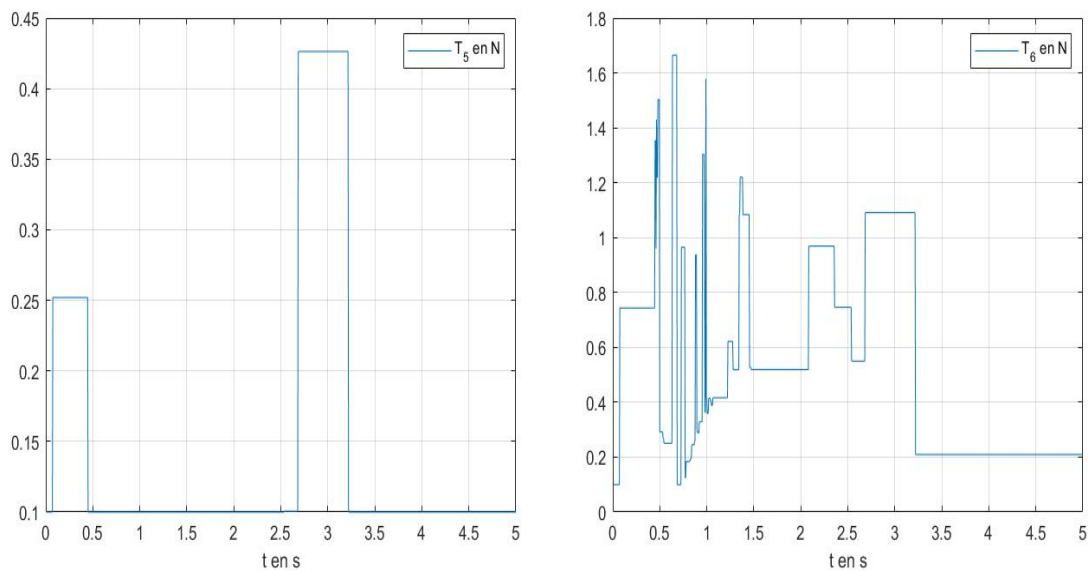
FIGURE 4.23 – Simulations des tensions des câbles  $T_1$  et  $T_2$  (commande par mode glissant).

exponentielle de robot sur une trajectoire de référence.

De plus, nous avons établi dans la deuxième partie un schéma de contrôle en mode de glissement basé sur un algorithme d'optimisation capable d'amener le robot à suivre une trajectoire désirée en temps fini.

Les résultats des simulations numériques montrent l'efficacité de différentes stratégies de contrôles proposée.



FIGURE 4.24 – Simulations des tensions des câbles  $T_3$  et  $T_4$  (commande par mode glissant).FIGURE 4.25 – Simulations des tensions des câbles  $T_5$  et  $T_6$  (commande par mode glissant).

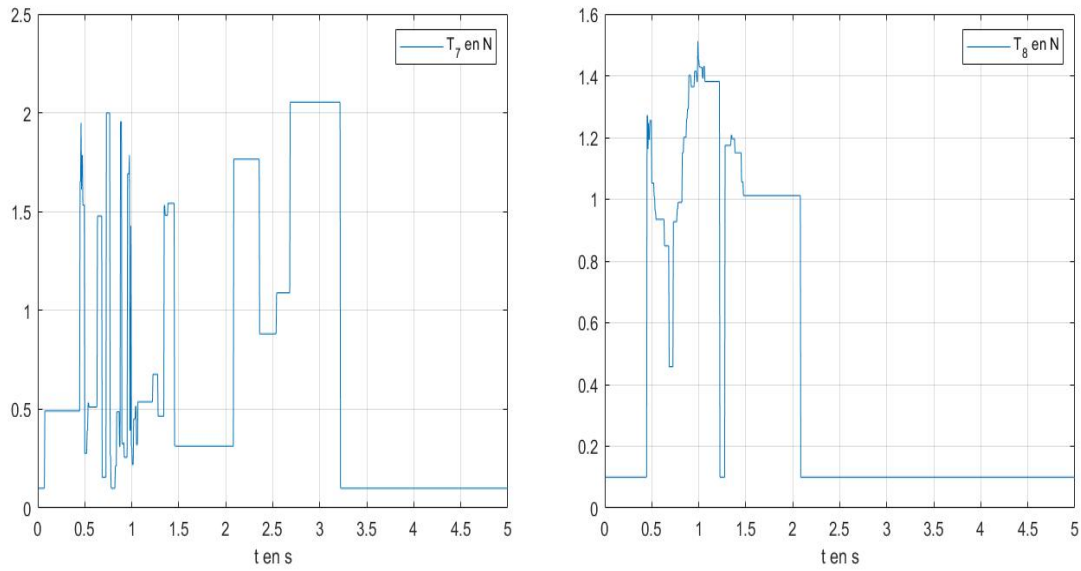


FIGURE 4.26 – Simulations des tensions des câbles  $T_7$  et  $T_8$  (commande par mode glissant).

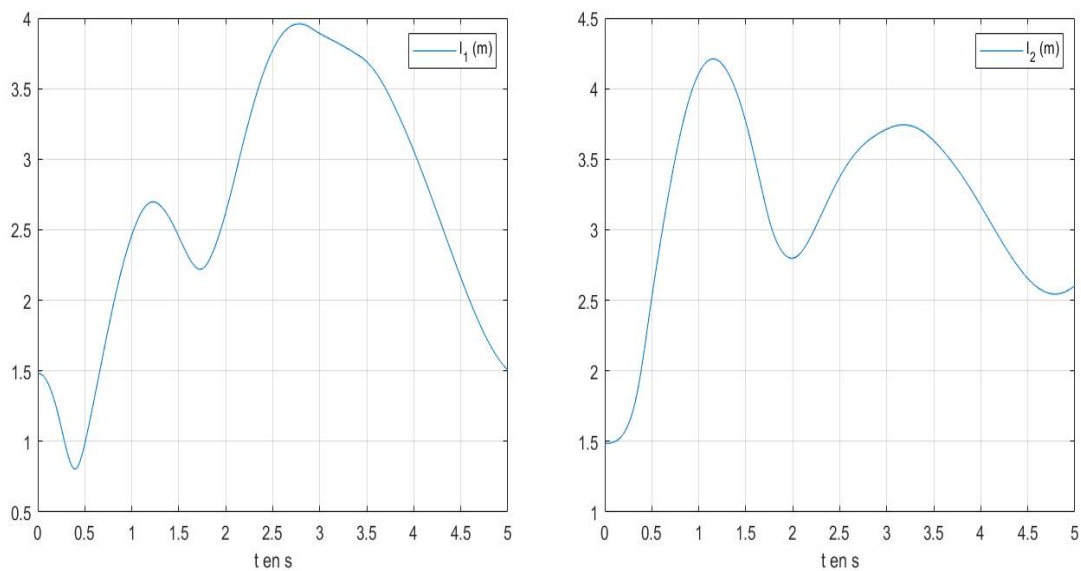
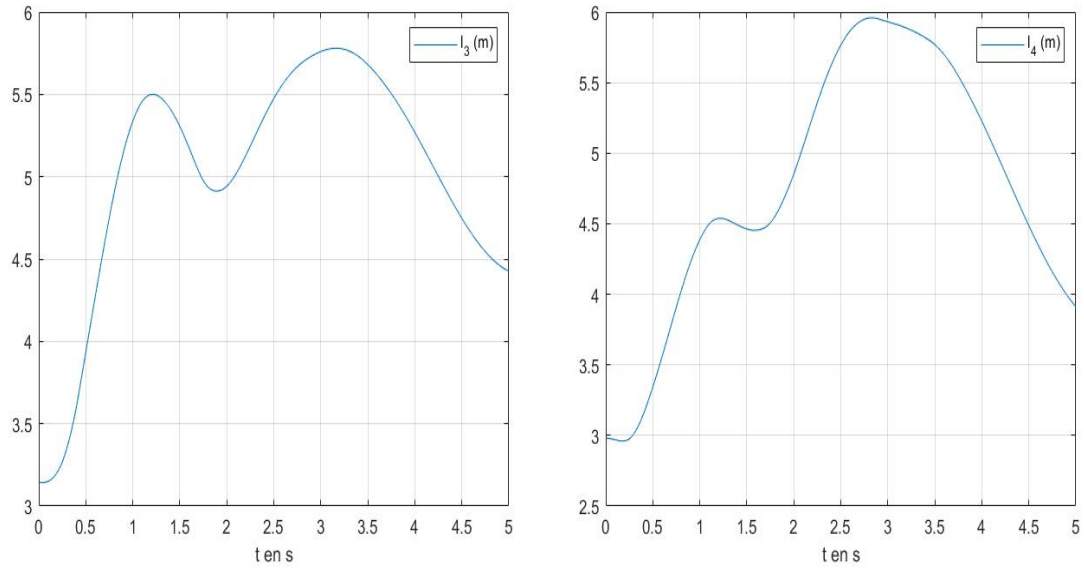
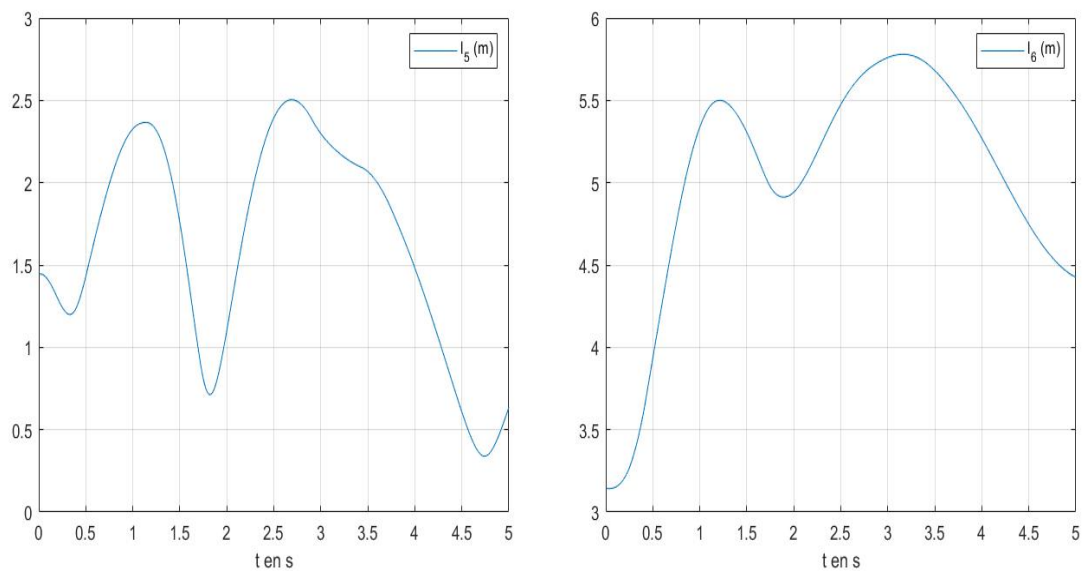


FIGURE 4.27 – Simulations des longueurs des câbles  $l_1$  et  $l_2$  (commande par mode glissant).

FIGURE 4.28 – Simulations des longueurs des câbles  $l_3$  et  $l_4$  (commande par mode glissant).FIGURE 4.29 – Simulations des longueurs des câbles  $l_5$  et  $l_6$  (commande par mode glissant).

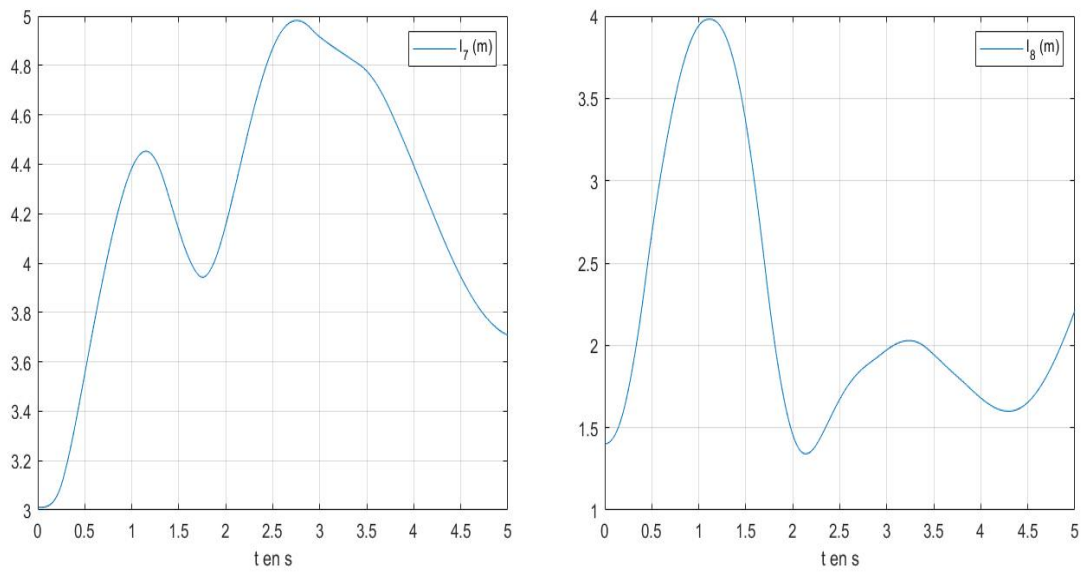


FIGURE 4.30 – Simulations des longueurs des câbles  $l_7$  et  $l_8$  (commande par mode glissant).

# Conclusions et perspectives

Le présent travail mettait les points sur les problématiques de la commandabilité et de la stabilisabilité des robots industriels. En particulier, on s'est intéressé à la construction des lois de commandes non-linéaires sous contraintes pour les robots parallèles à câbles. Les robots parallèles à câbles offrent plus d'avantages que d'autres robots industriels tels que les robots parallèles conventionnels, c'est-à-dire les robots parallèles dotés de chaînes cinématiques rigides. Parmi ces avantages, on trouve : le grand espace de travail, coût de construction réduit, modularité, légèreté et rapidité.

Dans ce contexte, on a développé des lois de commandes instationnaires basées modèles et d'autres lois des commandes stationnaires basées algorithme d'optimisation. Ces lois de commandes prennent en compte la contrainte physique des tensions des câbles où ces derniers ne peuvent que tirer la plate-forme sans le pousser. En plus, ils permettent au robot de suivre des trajectoires planifiées et de garantir leur stabilité autour de ces trajectoires dans l'espace opérationnel. Afin de clarifier ces résultats, on a présenté cette thèse en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on a réalisé une étude bibliographique couvrant une grande variété d'aspects relatif au robots parallèle à câbles tel que sa présentation dans les robotiques industrielles, ainsi que leurs aspects mécaniques et géométriques permet de caractériser un robot à câble par rapport à un autre. Dans les littératures on trouve plusieurs configurations de robot à câbles tels que les robots en mode suspendu, les robots sous-contraints, les robots sur contraints et les robots incomplètement contraints. Également, les notions de la commandabilité et de la stabilisabilité ont été présenté dans cette étude.

Dans le deuxième chapitre, on a déterminé le modèle géométrique, statique, cinématique et dynamique décrivent le mouvement d'un type de robot parallèle à câbles à six degrés de libertés et à huit câbles. Il appartient à la classe des robots parallèles à câbles sur-contraints où la forme géométrique de ces bases est un parallélépipède rectangulaire. Ce prototype expérimental est présent au sein des laboratoires CRAN et LORIA.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à découpler les phases de navigation du robot suivant les dimensions de l'espace de travail pour objectif de comprendre la relation entre le mouvement de la plate-forme et les tensions des câbles afin de construire des schémas de commandes plus performants. À cet égard, nous avons présenté le troisième et le quatrième chapitre comme suit :

- Dans le troisième chapitre, nous avons construit des lois de commandes instationnaires, positives, saturantes permet au robot à câbles en deux dimensions de suivre une trajectoire prédéfinie dans le plan de deux dimensions. Dans ce contexte, nous avons réfléchi dans un premier temps à projeter la dynamique du robot sur le plan

horizontal en réduisant la géométrie de la plate-forme en un point afin de déterminer le modèle mathématique du mouvement du robot dans le plan horizontal inférieur de la base fixe.

Puis, nous avons utilisé l'approche de la méthode de retour de Coron pour déterminer la trajectoire pour laquelle le robot est commandable, puis avec l'obstruction de Brockett et la théorie de Lyapunov nous avons prouvé la stabilité exponentielle du robot sur une trajectoire avec des schémas de commandes instationnaire.

- Dans le quatrième chapitre, nous avons proposé dans une première partie des lois des commandes basées modèles pour le robot à câbles en trois dimensions. Ces commandes garantissent la propriété physique de tension des câbles et permettent à l'organe terminal de suivre une trajectoire de référence avec une stabilité exponentielle.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons combiné la loi de commande par mode glissant et les techniques d'optimisation pour garantir la positivité des tensions des câbles et permettre au robot de suivre des trajectoires prédéfinies en temps fini.

Enfin, nous avons examiné les différentes approches de contrôles par des simulations numériques. Nous sommes parvenus à garder les câbles tendus durant le déplacement du robot vers une trajectoire cible dans l'espace opérationnel.

## Perspectives

Même si les travaux présentés dans le présent document ont atteint nos principaux objectifs, il reste plusieurs voies peuvent être explorées pour résoudre ou bien pour approfondir certains problèmes rencontrés durant cette thèse.

Parmi ces voies, on trouve les points suivants :

- L'amélioration de la modélisation à partir de la prise en compte des différentes caractéristiques mécaniques de différentes chaînes cinématiques.
- Développement des schémas de contrôles robustes par rapport aux erreurs de modélisation et prennent en compte les perturbations externes qui peuvent être arrivées dans l'espace du travail, ainsi que les incertitudes des paramètres géométriques du robot.

# Bibliographie

- [1] Azamat Yeshmukhametov, Maksat Kalimoldayev, Orken Mamyrbayev, and Yedilhan Amirgaliev. Design and kinematics of serial/parallel hybrid robot. In *2017 3rd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR)*, pages 162–165. IEEE, 2017. [vii, 2](#)
- [2] Christine Connolly. Abb high-speed picking robots establish themselves in food packaging. *Industrial Robot : An International Journal*, 2007. [vii, 3](#)
- [3] Jinsong Wang, Chao Wu, and Xin-Jun Liu. Performance evaluation of parallel manipulators : Motion/force transmissibility and its index. *Mechanism and Machine Theory*, 45(10) :1462–1476, 2010. [vii, 3](#)
- [4] Davoud Karimi and Mohammad Javad Nategh. A statistical approach to the forward kinematics nonlinearity analysis of gough-stewart mechanism. *Journal of Applied Mathematics*, 2011, 2011. [vii, 4, 10](#)
- [5] Roger Bostelman, James Albus, Nicholas Dagalakis, Adam Jacoff, John Gross, et al. Applications of the nist robocrane. In *Proceedings of the 5th International Symposium on Robotics and Manufacturing*, volume 5, 1994. [vii, 10, 14](#)
- [6] Toshiro Higuchi. Application of multi-dimensional wire crane in construction. In *Proc. 5th Int. Symp. on Robotics in Construction*, volume 661, 1988. [vii, 10, 11](#)
- [7] Imane Khayour. Commande des robots parallèles à câbles avec actionneurs embarqués. 2021. [vii, 12, 13, 14](#)
- [8] Vineet Vashista, Xin Jin, and Sunil K Agrawal. Active tethered pelvic assist device (a-tpad) to study force adaptation in human walking. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 718–723. IEEE, 2014. [vii, 15](#)
- [9] Lawrence L Cone. Skycam-an aerial robotic camera system. *Byte*, 10(10) :122, 1985. [vii, 16](#)
- [10] SKYCAM. <http://www.skycam.tv>. [vii, 16](#)
- [11] SPIDERCAM. <http://www.spidercam.org/en>. [vii, 16](#)

- [12] Nicholas G Dagalakis, James S Albus, B-L Wang, Joseph Unger, and James D Lee. Stiffness study of a parallel link robot crane for shipbuilding applications. 1989. [vii](#), [16](#), [17](#)
- [13] Tuong Phuoc Tho and Nguyen Truong Think. Using a cable-driven parallel robot with applications in 3d concrete printing. *Applied Sciences*, 11(2) :563, 2021. [vii](#), [16](#), [17](#)
- [14] Satoshi Tadokoro, Richard Verhoeven, Manfred Hiller, and Toshi Takamori. A portable parallel manipulator for search and rescue at large-scale urban earthquakes and an identification algorithm for the installation in unstructured environments. In *Proceedings 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human and Environment Friendly Robots with High Intelligence and Emotional Quotients (Cat. No. 99CH36289)*, volume 2, pages 1222–1227. IEEE, 1999. [vii](#), [16](#), [17](#)
- [15] Jean-pierre Merlet and David Daney. A portable, modular parallel wire crane for rescue operations. In *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2834–2839. IEEE, 2010. [vii](#), [15](#), [16](#), [17](#)
- [16] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. [vii](#), [26](#), [27](#), [28](#)
- [17] Shimon Y Nof. *Handbook of industrial robotics*. John Wiley & Sons, 1999. [1](#)
- [18] IFR. *History of industrial robots*. Milestones of technology and commercialization, 2012. [1](#)
- [19] Victor David Scheinman. Design of a computer controlled manipulator. Technical report, Stanford Univ Calif Dept of Computer Science, 1969. [1](#)
- [20] JP Merlet. Les robots parallèles (paris). 1997. [1](#)
- [21] Jean-Pierre Merlet. *Parallel robots*, volume 128. Springer Science & Business Media, 2005. [1](#)
- [22] O Company and F Pierrot. Modelling and design issues of a 3-axis parallel machine-tool. *Mechanism and Machine Theory*, 37(11) :1325–1345, 2002. [3](#)
- [23] Haruhiko Asada and J Granito. Kinematic and static characterization of wrist joints and their optimal design. In *Proceedings. 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 244–250. IEEE, 1985. [3](#)
- [24] Clement Gosselin and Jorge Angeles. The optimum kinematic design of a spherical three-degree-of-freedom parallel manipulator. 1989. [3](#)
- [25] Eugene F Fichter. A stewart platform-based manipulator : general theory and practical construction. *The international journal of robotics research*, 5(2) :157–182, 1986. [4](#)



- 
- [26] Imed Jabbari, Mohamed Boutayeb, and Chaker Jammazi. Discontinuous finite-time control for cable driven parallel robots. In *2020 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pages 536–541. IEEE, 2020. 6
- [27] Imed Jabbari, Mohamed Boutayeb, and Chaker Jammazi. Time-varying nonnegative control for cable driven parallel robots. In *2022 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, pages 1–6. IEEE, 2022. 6
- [28] Imed Jabbari, Mohamed Boutayeb, and Chaker Jammazi. Nonnegative saturated tracking control for cable driven parallel robots (cdprs). In *2022 30th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 618–623. IEEE, 2022. 7
- [29] Albus James, Bostelman Roger, and Dagalakakis Nicholas. The nist robocrane. *Journal of Robotic Systems*, 10(5) :709–724, 1993. 10
- [30] Samuel Ernest Landsberger. A new design for parallel link manipulators. In *Proc. of the IEEE International Conference on Systems*, pages 812–814, 1985. 10
- [31] Samuel E Landsberger. A minimal, minimal linkage : the tension-compression parallel link manipulator. *Robotics Mechatron Manufact. Syst.*, 2 :81–88, 1993. 10
- [32] Andreas Pott. Classification and architecture. In *Cable-Driven Parallel Robots*, pages 15–43. Springer, 2018. 12
- [33] Marc Gouttefarde, Jean-Pierre Merlet, and David Daney. Wrench-feasible workspace of parallel cable-driven mechanisms. In *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1492–1497. IEEE, 2007. 14
- [34] Marc Gouttefarde, David Daney, and Jean-Pierre Merlet. Interval-analysis-based determination of the wrench-feasible workspace of parallel cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics*, 27(1) :1–13, 2010. 14, 20
- [35] Guillaume Barrette and Clément M Gosselin. Determination of the dynamic workspace of cable-driven planar parallel mechanisms. *Journal of mechanical design*, 127(2) :242–248, 2005. 14, 20
- [36] Sadao Kawamura, Hitoshi Kino, and Choe Won. High-speed manipulation by using parallel wire-driven robots. *Robotica*, 18(1) :13–21, 2000. 14
- [37] Lorenzo Gagliardini, Stéphane Caro, Marc Gouttefarde, and Alexis Girin. A reconfiguration strategy for reconfigurable cable-driven parallel robots. In *2015 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*, pages 1613–1620. IEEE, 2015. 15
- [38] Vineet Vashista, Dario Martelli, and Sunil K Agrawal. Locomotor adaptation to an asymmetric force on the human pelvis directed along the right leg. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 24(8) :872–881, 2015. 15
- [39] CABLECAM. <http://www.cablecam.com>. 16

- [40] Jean-Baptiste Izard, Alexandre Dubor, Pierre-Elie Hervé, Edouard Cabay, David Culla, Mariola Rodriguez, and Mikel Barrado. On the improvements of a cable-driven parallel robot for achieving additive manufacturing for construction. In *Cable-driven parallel robots*, pages 353–363. Springer, 2018. [16](#)
- [41] Manfred Hiller, Shiqing Fang, Sonja Mielczarek, Richard Verhoeven, and Daniel Frantitza. Design, analysis and realization of tendon-based parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 40(4) :429–445, 2005. [18](#)
- [42] Cong Bang Pham, Guilin Yang, and Song Huat Yeo. Dynamic analysis of cable-driven parallel mechanisms. In *Proceedings, 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics.*, pages 612–617. IEEE, 2005. [18](#)
- [43] Jean-Pierre Merlet. Kinematics of the wire-driven parallel robot marionet using linear actuators. In *2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3857–3862. IEEE, 2008. [18](#)
- [44] Jean-Pierre Merlet. Analysis of wire elasticity for wire-driven parallel robots. In *Proceedings of EUCOMES 08*, pages 471–478. Springer, 2009. [18](#)
- [45] Saeed Behzadipour and Amir Khajepour. Stiffness of cable-based parallel manipulators with application to stability analysis. 2006. [18](#)
- [46] Mojtaba Azadi, Saeed Behzadipour, and Garry Faulkner. Antagonistic variable stiffness elements. *Mechanism and Machine Theory*, 44(9) :1746–1758, 2009. [18](#)
- [47] Dragoljub Surdilovic, Jelena Radojicic, and Jörg Krüger. Geometric stiffness analysis of wire robots : A mechanical approach. In *Cable-driven parallel robots*, pages 389–404. Springer, 2013. [18](#)
- [48] Marc Arsenaault. Stiffness analysis of a planar 2-dof cable-suspended mechanism while considering cable mass. In *Cable-Driven Parallel Robots*, pages 405–421. Springer, 2013. [18](#)
- [49] Dinh Quan Nguyen and Marc Gouttefarde. Stiffness matrix of 6-dof cable-driven parallel robots and its homogenization. In *Advances in Robot Kinematics*, pages 181–191. Springer, 2014. [18](#)
- [50] Yue Suilu, Wang Zhao, Lin Qi, and Chen Yixin. Stiffness analysis of a wire-driven parallel manipulator. In *2012 IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering (CSAE)*, volume 3, pages 31–34. IEEE, 2012. [18](#)
- [51] Richard Verhoeven and Manfred Hiller. Estimating the controllable workspace of tendon-based stewart platforms. In *Advances in Robot Kinematics*, pages 277–284. Springer, 2000. [19](#)
- [52] Jean-Pierre Merlet. Analysis of the influence of wires interference on the workspace of wire robots. In *On Advances in Robot Kinematics*, pages 211–218. Springer, 2004. [19](#)

- [53] J-P Merlet. Determination of 6d workspaces of gough-type parallel manipulator and comparison between different geometries. *The International Journal of Robotics Research*, 18(9) :902–916, 1999. [19](#)
- [54] Dinh Quan Nguyen and Marc Gouttefarde. On the improvement of cable collision detection algorithms. In *Cable-Driven Parallel Robots*, pages 29–40. Springer, 2015. [19](#)
- [55] Martin J-D Otis, Simon Perreault, Thien-Ly Nguyen-Dang, Patrice Lambert, Marc Gouttefarde, Denis Laurendeau, and Clément Gosselin. Determination and management of cable interferences between two 6-dof foot platforms in a cable-driven locomotion interface. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A : Systems and Humans*, 39(3) :528–544, 2009. [19](#)
- [56] Marc Gouttefarde and Clément M Gosselin. Analysis of the wrench-closure workspace of planar parallel cable-driven mechanisms. *IEEE Transactions on Robotics*, 22(3) :434–445, 2006. [20](#)
- [57] Jean-Pierre Merlet. Wire-driven parallel robot : open issues. In *Romansy 19–Robot Design, Dynamics and Control*, pages 3–10. Springer, 2013. [20](#)
- [58] Kaveh Azizian, Philippe Cardou, and Brian Moore. Classifying the boundaries of the wrench-closure workspace of planar parallel cable-driven mechanisms by visual inspection. 2012. [20](#)
- [59] Aiguo Ming and T. Higuchi. Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires. i : Concept, design and control. *International Journal of The Japan Society for Precision Engineering*, 28 :131–138, 1994. [20](#)
- [60] Sadao Kawamura and Ken Ito. A new type of master robot for teleoperation using a radial wire drive system. In *Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'93)*, volume 1, pages 55–60. IEEE, 1993. [21](#)
- [61] Abdullah B Alp and Sunil K Agrawal. Cable suspended robots : design, planning and control. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 02CH37292)*, volume 4, pages 4275–4280. IEEE, 2002. [21](#)
- [62] So-Ryeok Oh and Sunil Kumar Agrawal. Cable suspended planar robots with redundant cables : Controllers with positive tensions. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(3) :457–465, 2005. [21](#)
- [63] Pooneh Gholami, Mohammad M Aref, and Hamid D Taghirad. On the control of the kntu cdrpm : A cable driven redundant parallel manipulator. In *2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2404–2409. IEEE, 2008. [21](#)
- [64] Bin Zi, BY Duan, JL Du, and Hong Bao. Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot. *Mechatronics*, 18(1) :1–12, 2008. [21](#)

- [65] Reza Babaghasabha, Mohammad A Khosravi, and Hamid D Taghirad. Adaptive control of kntu planar cable-driven parallel robot with uncertainties in dynamic and kinematic parameters. In *Cable-driven parallel robots*, pages 145–159. Springer, 2015. [21](#)
- [66] Etienne Picard, Stéphane Caro, Franck Plestan, and Fabien Claveau. Control solution for a cable-driven parallel robot with highly variable payload. In *ASME 2018 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2018. [21](#)
- [67] Alireza Izadbakhsh, Hamed Jabbari Asl, and Tatsuo Narikiyo. Robust adaptive control of over-constrained actuated cable-driven parallel robots. In *International Conference on Cable-Driven Parallel Robots*, pages 209–220. Springer, 2019. [21](#)
- [68] João Cavalcanti Santos, Ahmed Chemori, and Marc Gouttefarde. Model predictive control of large-dimension cable-driven parallel robots. In *International Conference on Cable-Driven Parallel Robots*, pages 221–232. Springer, 2019. [21](#)
- [69] W.L. Chow. Über systeme von linearen partiellen differentialgleichungen erster ordnung. *Mathematische Annalen*, 117 :98–105, 1940/1941. [22](#)
- [70] Claude Lobry. Contrôlabilité des systèmes non linéaires. *SIAM Journal on Control*, 8(4) :573–605, 1970. [22](#), [23](#)
- [71] Héctor J Sussmann and Velimir Jurdjevic. Controllability of nonlinear systems. *Journal of Differential Equations*, 12, 1972. [22](#)
- [72] Matthias Kawski. High-order small-time local controllability. In *Nonlinear controllability and optimal control*, pages 431–467. Routledge, 2017. [22](#)
- [73] PAVOL Brunovsky. Local controllability of odd systems. *Banach Center Publ., Warsaw*, 1 :39–45, 1974. [23](#)
- [74] Hector J Sussmann. A general theorem on local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(1) :158–194, 1987. [23](#)
- [75] Henry Hermes. On local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 20(2) :211–220, 1982. [23](#)
- [76] PE Crouch and CI Byrnes. Symmetries and local controllability. In *Algebraic and geometric methods in nonlinear control theory*, pages 55–75. Springer, 1986. [23](#)
- [77] Andrew D Lewis and Richard M Murray. Configuration controllability of simple mechanical control systems. *SIAM Journal on control and optimization*, 35(3) :766–790, 1997. [23](#)
- [78] H Hermes. On the synthesis of a stabilizing feedback control via lie algebraic methods. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 18(4) :352–361, 1980. [23](#)

- 
- [79] Héctor J Sussmann and Wensheng Liu. Limits of highly oscillatory controls and the approximation of general paths by admissible trajectories. In *[1991] Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 437–442. IEEE, 1991. [23](#)
- [80] Wensheng Liu. An approximation algorithm for nonholonomic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(4) :1328–1365, 1997. [23](#)
- [81] Jaroslav Kurzweil and Jiří Jarník. Iterated lie brackets in limit processes in ordinary differential equations. *Results in Mathematics*, 14(1) :125–137, 1988. [23](#)
- [82] Richard M Murray and S Shankar Sastry. Nonholonomic motion planning : Steering using sinusoids. *IEEE transactions on Automatic Control*, 38(5) :700–716, 1993. [23](#)
- [83] Francesco Bullo and Richard M Murray. Tracking for fully actuated mechanical systems : a geometric framework. *Automatica*, 35(1) :17–34, 1999. [23](#)
- [84] Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples. *International journal of control*, 61(6) :1327–1361, 1995. [24](#)
- [85] Aleksei Fedorovich Filipov. Differential equations with discontinuous right-hand side. In *Amer. Math. Soc*, pages 191–231, 1988. [25](#)
- [86] U. Itkis. Control systems of variable structure. 1976. [25](#)
- [87] Vadim Ivanovich Utkin. Sliding modes and their applications in variable structure systems. *Mir, Moscow*, 1978. [25](#)
- [88] Jong-Min Yang and Jong-Hwan Kim. Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on robotics and automation*, 15(3) :578–587, 1999. [25](#)
- [89] J-j E Slotine, JK Hedrick, and EA Misawa. Nonlinear state estimation using sliding observers. In *1986 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 332–339. IEEE, 1986. [25](#)
- [90] Jean-Jacques E Slotine. Sliding controller design for non-linear systems. *International Journal of control*, 40(2) :421–434, 1984. [25](#)
- [91] Hebertt Sira-Ramirez. On the dynamical sliding mode control of nonlinear systems. *International journal of control*, 57(5) :1039–1061, 1993. [25](#)
- [92] Christopher Edwards and Sarah K Spurgeon. Robust output tracking using a sliding-mode controller/observer scheme. *International Journal of Control*, 64(5) :967–983, 1996. [25](#)
- [93] Jean-Michel Coron. *Control and nonlinearity*. Number 136. American Mathematical Soc., 2007. [32](#), [52](#), [60](#), [61](#)

- [94] Eduardo Sontag and Hector Sussmann. Remarks on continuous feedback. In *1980 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, pages 916–921. IEEE, 1980. [32](#)
- [95] S-R Oh and Sunil Kumar Agrawal. A reference governor-based controller for a cable robot under input constraints. *IEEE transactions on control systems technology*, 13(4) :639–645, 2005. [34](#)
- [96] Ahmed A Shabana. *Dynamics of multibody systems*. Cambridge university press, 2013. [46](#)
- [97] Roger W Brockett et al. Asymptotic stability and feedback stabilization. *Differential geometric control theory*, 27(1) :181–191, 1983. [53](#), [60](#)
- [98] Yiguang Hong, Guowu Yang, Daizhan Cheng, and Sarah Spurgeon. Finite time convergent control using terminal sliding mode. *Journal of Control Theory and Applications*, 2(1) :69–74, 2004. [93](#), [94](#)