HAL open science

Le défi de Sophie Germain : ses travaux sur les vibrations des surfaces élastiques

Nathalie Grun

To cite this version:

Nathalie Grun. Le défi de Sophie Germain : ses travaux sur les vibrations des surfaces élastiques. Histoire, Philosophie et Sociologie des sciences. Université de Lorraine, 2022. Français. NNT : 2022LORR0221 . tel-04052603

HAL Id: tel-04052603

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-04052603

Submitted on 30 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE | BIBLIOTHÈQUES UNIVERSITAIRES

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

École doctorale Sociétés, Langages, Temps, Connaissances

Thèse présentée et soutenue publiquement en vue de l'obtention du titre de
Docteure de l'Université de Lorraine

Spécialité :
Épistémologie, Histoire des sciences et des techniques
72e section

Le défi de Sophie Germain : ses travaux sur les surfaces élastiques

par Nathalie Grun

Soutenance le 13 décembre 2022 devant le jury composé de :

Président du jury :		
M. Laurent Rollet	Professeur	Lorraine Université
Rapporteurs :		
Mme Rossana Tazzioli	Professeure	Lille Université
Mme Caroline Ehrhardt	Maîtresse de conférences HDR	Paris 8 Université
Examinateurs :		
Mme Jenny Boucard	Maîtresse de conférences	Nantes Université
Mme Isabelle Lemonon	Ingérieure d'études, docteure	CNRS
Mme Erika Luciano	Professeure	Turin Université (Italie)
Encadrants :		
M. Philippe Nabonnand	Professeur	Lorraine Université
M. Olivier Bruneau	Maître de conférence HDR	Lorraine Université

Archives Henri-Poincaré – Philosophie et Recherches sur les Sciences et les Technologies

« Certaines personnes, des hommes, bien sûr - m'ont découragé en disant que la science n'était pas une bonne carrière pour les femmes, ce qui m'a poussé encore plus à persévérer. »
Françoise Barré-Sinoussi

Résumé

Sophie Germain débute ses recherches sur la théorie des vibrations des surfaces élastiques en 1809 suite à un concours proposé par l'Académie des sciences de Paris. Les trois mémoires qu'elle envoie à l'Académie en 1811, 1813 et 1815 pour répondre à la question du concours n'ont jamais été publiés malgré des résultats importants qui y figurent. Les originaux se trouvent aux Archives de l'Académie des sciences de Paris. L'objectif de mon travail est l'étude et la réception de ces trois mémoires ; en annexe, nous en trouverons une transcription.

Cette thèse nous mène, dans un premier temps, à travers le parcours particulier et la vie de Germain en tant que femme scientifique, plus particulièrement en tant que mathématicienne, à une étude des contextes académiques et sociaux et du fonctionnement du champ scientifique à Paris au début du XIXe siècle.

Une grande partie de mon travail est ensuite consacrée à une description des trois mémoires envoyés par Germain à l'Académie, à une analyse de leur contenu et à leur réception auprès des membres du jury chargés de faire un rapport sur les mémoires remis au concours. Suit un examen des autres textes publiés par Germain ayant poursuivi ses recherches théoriques et expérimentales sur la notion d'élasticité durant un certain nombre d'années.

Cette étude aborde enfin le questionnement sur la réception des travaux de Germain et de ses résultats par certains de ses contemporains et successeurs proches, mais aussi sur la façon dont ses travaux ont orienté, à la fin de sa vie, sa vision concernant la société.

Mots-clés : surfaces élastiques, vibrations, modélisation, réception, la vie scientifique parisienne au XIXe siècle

Abstract

Sophie Germain began her research on the theory of vibrations of elastic surfaces in 1809 following a competition proposed by the Académie des Sciences de Paris. The three essays she sent to the Academy in 1811, 1813 and 1815 in response to the competition question were never published despite the important results they contained. The originals are preserved in the Archives of the Paris Academy of sciences. The objective of my work is the study and reception of these three essays ; in the appendix, we will find a transcription of them. This thesis leads us, first of all, through Germain's life and career as a woman scientist, and more particularly as a mathematician, to a study of the academic and social contexts and of the functioning of the scientific field in Paris at the beginning of the 19th century. A large part of my work is then devoted to the description of the three essays sent by Germain to the Academy, to the analysis of their content and to their reception by the members of the jury responsible for reporting the essays submitted to the competition. This is followed by an examination of the other texts published by Germain, who has continued her theoretical and experimental research on the notion of elasticity for several years. Finally, this study addresses the question of the reception of Germain's work and its results by some of her contemporaries and close successors, but also the way in which her work influenced her vision of society at the end of her life.

KeyWords : elastic surfaces, vibrations, modeling, reception, the scientific life in the 19th century

Remerciements

La réalisation de ce mémoire de thèse a été possible grâce au concours de plusieurs personnes auxquelles je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mes deux Directeurs de thèse, Philippe Nabonnand et Olivier Bruneau, sans qui faire une thèse ne m'aurait jamais effleuré l'esprit. Je tiens à leur manifester toute ma gratitude pour m'avoir soutenue durant mon Master 2 et toutes mes années de recherche qui ont abouti à ce mémoire de thèse. Je les remercie pour la formation et les connaissances en histoire des mathématiques qu'ils m'ont permis d'acquérir. Un grand merci pour leur confiance, leur investissement, leur écoute, leur disponibilité et leurs encouragements dans les moments opportuns. Leurs judicieux conseils ont contribué à orienter et ordonner ma réflexion. La pertinence de leurs observations, de leurs remarques et de leurs questions a été d'une aide précieuse pour structurer ma rédaction.

Je veux également remercier les deux membres du Comité de suivi, Christophe Eckes et Nicolas Gregori qui ont pris le temps, chaque année, de faire le point sur l'avancée de mes travaux et pour leurs précieux conseils.
Merci aux membres du jury qui ont pris le temps de lire mon travail.
J'ai aussi une pensée pour les bibliothécaires et archivistes qui m'ont accueillie et aidée dans mes recherches.
J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont invitée à participer aux conférences qu'elles ont organisées, en particulier pour la conférence au Musée de l'Histoire du Fer à Jarville-la-Malgrange et celle au 17ème Forum des Jeunes Mathématicien-ne-s. Ces interventions m'ont permise de progresser dans mes travaux et de recentrer mes recherches.
Je souhaite aussi adresser mes remerciements à mon neveu Elliot pour son aide sur des notions de physique, et à un professeur du lycée Louis Vincent de Metz qui a pris le temps de réaliser avec moi des expériences avec un générateur et avec un archet.

Parallèlement à mon doctorat, j'ai poursuivi mon enseignement au Collège Barbot de Metz. Je tiens à remercier les élèves qui se sont montrés attentifs et intéressés lors de mes interventions en classe pour leur parler de mon sujet de recherche, pour promouvoir les sciences auprès des élèves, et plus particulièrement auprès des filles. Merci à mes collègues et à l'équipe de direction pour leurs encouragements et leur soutien.

Merci à Sylvie Dodeller qui n'a pas hésité à me demander des conseils, qui m'a fait confiance pour l'aider dans ses recherches, qui m'a permise de participer à l'élaboration d'un livre pour la jeunesse. Travailler avec elle fut un plaisir et son optimisme un soutien.

Un grand merci à ma famille pour leur patience, leur soutien dans les moments de doute, leur compréhension durant ces années passées à travailler et donc à ne pas être toujours disponible pour elle.

Sommaire

1 Introduction **1**

2 Le corpus du contexte **7**

2.1 Les premières lectures 7

2.2 Des sources ciblées et générales 8

2.3 Des sources spécifiques 10

3 Le contexte scientifique et social **15**

3.1 Son milieu social 16

3.1.1 Sa famille 16

3.1.2 Sa formation, son statut 17

3.2 Germain et la société scientifique 20

3.2.1 Attitude de Germain et des contemporains 20

3.2.2 L'Académie des sciences 26

3.2.3 Chladni et ses expériences 29

3.3 Biographie de Germain 37

4 Les premiers travaux de Germain **41**

4.1 Les principales références de Germain 42

4.1.1 Principaux résultats d'Euler 42

4.1.2 Cas unidimensionnel et bidimensionnel 47

4.2 La première tentative de Germain 49

4.2.1 La première équation 51

4.2.2 Étude de sa solution 57

4.2.3 Les remarques de la commission 69

5 La persévérance de Germain **75**

5.1 La poursuite de la recherche 75

5.1.1 Les brouillons 75

5.1.2 Les expériences de Germain 81
5.2 La rédaction finale 84
5.2.1 Les résultats théoriques 84
5.2.2 Le rôle et l'importance des expériences 95
5.2.3 La réaction des membres du jury 100

6 L'ultime participation 103
6.1 La démonstration de son hypothèse 104
6.2 Poursuite de l'étude 106
6.2.1 La théorie des surfaces élastiques 106
6.2.2 Des expériences délicates 114
6.2.3 La décision de la commission 117

7 Les publications de Germain 123
7.1 Le premier mémoire publié de Germain 123
7.1.1 La nécessité de justifier l'hypothèse 126
7.1.2 Un récapitulatif de ses résultats théoriques 128
7.1.3 L'omniprésence des expériences 136
7.1.4 Une reprise du mémoire primé de 1815 ? 138
7.2 Ses autres publications 144
7.2.1 L'importance de l'épaisseur de la surface 145
7.2.2 Réflexion des surfaces et solides 149
7.2.3 La notion de courbure 152
7.3 L'équation au fil des mémoires 154
7.3.1 L'équation du mouvement 154
7.3.2 Remarques sur les démarches de justification 157
7.4 Justification omniprésente 158

8 La réception de ses travaux 161
8.1 Les savants contemporains 161
8.1.1 L'intervention de Lagrange 161
8.1.2 La divergence entre Germain et Poisson 163
8.1.3 La réaction des autres savants 171
8.1.4 L'hypothèse au centre des débats 178
8.2 Réaction de certains successeurs 180
8.2.1 Le point de vue de Kirchhoff 180
8.2.2 L'analyse de Todhunter 183

8.2.3 Le nom de Germain tout de même évoqué 186

9 L'influence sur sa réflexion philosophique 189

9.1 Vision philosophique 190

9.2 Pensées philosophiques 193

10 Conclusion 195

Annexes 198

A Prix de mathématique 199

B Lettres, correspondances 203

C Comparaison des mémoires 215

D Transcription des trois mémoires 227

Index des noms de personnes 382

Index des mots-clés 385

Bibliographie 388

Chapitre 1

Introduction

Sophie Germain, mathématicienne française de la fin du XVIIIe siècle et du début du XIXe siècle, a été et est encore aujourd'hui l'objet d'articles, de livres, de conférences. Elle fait partie des femmes qui ont consacré leur vie à la science et en ont fait leur passion. Ses travaux se scindent en trois parties. Germain s'est tout d'abord intéressée à la théorie des nombres, et plus particulièrement au théorème de Fermat. En essayant de démontrer ce théorème, elle a introduit des nombres premiers particuliers, appelés les *nombres premiers de Sophie Germain*, ainsi qu'un théorème qui porte son nom. À l'occasion de ses travaux sur la théorie des nombres, Germain commence à communiquer avec un scientifique renommé en particulier, Carl Friedich Gauss. Des lettres témoignent de leurs échanges. D'après cette correspondance, celui-ci est impressionné par son travail [1]. Cette partie de ses recherches mathématiques, en particulier les nombres de Sophie Germain figurant dans certains manuels mathématiques de lycée sous forme d'exercices, est sûrement aujourd'hui la plus connue. Germain n'abandonnera jamais l'étude de la théorie des nombres, même si elle se tourne par la suite vers d'autres centres d'intérêt.

À partir de 1809, Germain se penche sur un domaine d'étude tout à fait différent, la théorie des vibrations des surfaces élastiques. Elle consacre une vingtaine d'années à cette étude.

Pendant les deux-trois dernières années de sa vie, Germain se livre à une réflexion philosophique. Elle écrit un dernier ouvrage, *Considérations générales sur l'état des sciences et des lettres aux différentes époques de leur culture*. Cet ouvrage n'est apparemment qu'une prise de notes plus ou moins aboutie, Germain n'ayant pas eu le temps

1. Des lettres entre Gauss et Germain se trouvent dans *Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le gendre, d'Ansse de Villoison, etc*, 1801-1900, p.35-36 et 39-40

de parfaire sa rédaction. Il n'est publié qu'après sa mort, en 1833, par son neveu et exécuteur littéraire Armand-Jacques Lherbette.

N'ayant entendu parler de Germain qu'à propos de ses essais sur la démonstration du théorème de Fermat, j'ai choisi de me lancer, comme elle, dans l'étude d'un domaine tout à fait inconnu pour moi, l'étude de ses travaux sur les vibrations des surfaces élastiques. J'ai commencé cette étude pour mon mémoire de Master de Logique, épistémologie et histoire des sciences à l'université de Nancy, soutenu en 2015. Certes, d'autres scientifiques et historiens s'étaient déjà intéressés à cette période de la vie de Germain. Mais les études faites sur les mémoires de Germain concernant les vibrations des surfaces n'ont pas fait complètement le tour de la question. Je me suis donc plus particulièrement intéressée aux trois premiers mémoires de Germain, d'autant qu'il n'existe que les originaux conservés aux Archives de l'Académie des sciences de Paris. Dès ma première année d'étude, j'ai eu la chance de pouvoir lire ces mémoires et décrire les premiers résultats obtenus par Germain sur les vibrations des surfaces élastiques lors de ses six premières années d'étude sur le sujet.
Un des premiers objectifs de ma thèse est la transcription de ces trois premiers mémoires pour les rendre plus accessibles. Elle se trouve à la fin de ce mémoire.

Pour comprendre la façon dont Germain est parvenue à ses résultats, une recherche plus élargie et plus approfondie sur sa biographie s'est imposée. Cette recherche m'a permis de constituer un corpus en rassemblant les mémoires du concours et ceux publiés par Germain, ainsi que des ouvrages, des articles concernant son travail. La plus étonnante publication est les *Papiers de Sophie GERMAIN - Recueil de dissertations et problèmes mathématiques et physiques* (Germain, 2013). Dans ce manuscrit figurent des brouillons de certains mémoires de Germain. Ces brouillons dévoilent un travail plus ou moins abouti et permettent de révéler certaines démarches et la rigueur dont elle fait preuve.

Une autre partie du corpus est constituée de livres et documents centrés sur Germain. Mais pour pouvoir mieux comprendre le travail et l'attitude de Germain, il m'a fallu élargir mes recherches pour m'intéresser au contexte social et scientifique à Paris au début du XIXe siècle. Cette étude m'a amenée à découvrir le monde scientifique parisien à travers les yeux de Germain. Plusieurs questions se sont posées, une en entraînant une autre. Comment vivaient les scientifiques à cette époque ? Comment les connaissances étaient transmises, comment circulaient les textes, les ouvrages, les mémoires ? Comment fonctionnait l'Académie des sciences ? Les principales questions concernaient Germain. Comment s'était-elle intégrée dans cette société, et plus particulièrement dans cette société scientifique essentiellement masculine ? Quels contacts avait-elle réussi à

établir ? Quelles étaient ses correspondances et quels étaient leurs contenus ? Pourquoi Germain a-t-elle plus ou moins délaissé ses recherches sur la théorie des nombres pour s'intéresser à la modélisation des vibrations des surfaces élastiques ? Quelle est l'origine de ce soudain centre d'intérêt ? A-t-elle obtenu des résultats concluants concernant la modélisation des vibrations des surfaces élastiques ? D'autant plus que l'étude des outils nécessaires pour résoudre ce problème, à savoir la géométrie différentielle, le calcul des variations, n'est qu'à ses débuts. Les outils mathématiques ne sont pas encore suffisamment développés pour se concentrer uniquement sur le sujet du problème. Avant de pouvoir modéliser les vibrations des surfaces élastiques, il faut encore travailler et faire progresser le domaine mathématique concerné. Ainsi l'analyse et la résolution de cette question sont considérées par plusieurs de ses contemporains comme très difficiles, comme en général beaucoup de questions de physique mathématique à cette époque.

Mes différentes lectures m'ont également permis de découvrir Germain à travers les yeux d'autres savants et historiens, et non seulement à travers ses productions. Plusieurs articles décrivent sa vie et son ressenti. Mais quelle est la part de mythe, quelle est la part de réalité dans ces différentes descriptions ?

Un autre objectif de ce mémoire de thèse est l'étude des productions de Germain sur les vibrations des surfaces élastiques. Dans un premier temps, il a fallu rechercher les références de Germain, les connaissances, les travaux déjà réalisés dans le domaine et sur lesquels elle s'est appuyée pour les siens. Ces précisions sont naturellement suivies par une étude des trois premiers mémoires écrits par Germain. Il s'agit de s'intéresser aux textes aux-mêmes, à leurs contenus. Comment valide-t-elle les résultats théoriques qu'elle obtient ? Ces mémoires ont-ils atteint l'objectif fixé du point de vue de Germain ou du point de vue des savants chargés de lire et faire un rapport à la Première Classe de l'Institut sur ces trois premiers mémoires ? Germain est-elle restée fidèle à sa façon de concevoir, résoudre le problème tout au long de ces quatre mémoires ? Cette dernière question m'a amenée à faire une comparaison entre les trois premiers mémoires [2]. Mais ces trois mémoires ne sont pas les seuls écrits de Germain sur ce sujet. Elle poursuit ses travaux et rédige encore cinq autres textes, qui contrairement aux trois premiers, sont publiés.

Les trois mémoires du concours ainsi que les publications de Germain sur la théorie des vibrations des surfaces élastiques ont été lus et analysés, pour certains, par d'autres mathématiciens et historiens. Une partie de ce mémoire de thèse s'emploie à découvrir les travaux de Germain, principalement ses premiers résultats, à travers les yeux d'autres savants, à dévoiler leur réception au cours du XIXe siècle. À nouveau, un certain nombre

2. Cette comparaison se trouve en annexe C.

de questions se sont posées. Les mathématiciens citent-ils Germain ? Si oui, en quels termes ? Font-ils allusion à ses travaux ? Si oui, qu'en pensent-ils ? Les savants, qui par la suite se sont aussi penchés sur le sujet, ont-ils pris les travaux de Germain comme point de départ ?

Deux périodes se dégagent. La première correspond à la première moitié du XIXe siècle. Les quelques lettres retrouvées font percevoir des réactions mitigées et la plupart du temps assez brèves, de la part des mathématiciens. Un mathématicien, Siméon Denis Poisson, se détache plus particulièrement. Il est un des savants contemporains de Germain, à s'intéresser aux vibrations des surfaces élastiques. De ce fait, une comparaison entre leurs recherches a été intéressante à faire.

En revanche, les mathématiciens de la seconde moitié du XIXe siècle étudient davantage les trois premiers mémoires de Germain en s'attardant plus particulièrement sur le premier et rapidement sur le deuxième. Ils analysent point par point la résolution mathématique faite par Germain. Leurs propos et conclusions sont sans doute à l'origine de l'opinion qu'ont aujourd'hui les historiens sur les travaux de Germain et de la pérennité de ses recherches et résultats.
Après avoir consacré une vingtaine d'années à la théorie de l'élasticité, Germain s'intéresse à un troisième domaine, la philosophie. La lecture de cet ouvrage qu'elle a écrit dans ce nouveau domaine d'intérêt nous amène à une nouvelle question : quelles influences ont eu ses recherches mathématiques, et plus particulièrement ses travaux concernant la théorie de l'élasticité, sur sa réflexion philosophique ?

Diverses questions, plus ou moins liées, sont donc apparues au fur et à mesure que j'avançais dans mes recherches. La principale qui m'a guidée tout au long de ces années d'étude est la place qu'occupent Germain et ses travaux sur la théorie de l'élasticité au sein de la société scientifique. Pour tenter d'y répondre, trois grands thèmes structurent ce mémoire de thèse. Le premier est centré sur Germain, sa vie, son parcours marginal, sa vision de la société scientifique parisienne, sa façon de s'imposer dans cette société, ses relations. Il s'agit de décrire et d'essayer de comprendre comment, avec une formation autodidacte, elle s'est intégrée à sa manière dans un monde scientifique essentiellement masculin. Et réciproquement, comment ce monde si particulier a réagi envers Germain. Les relations entre elle et les autres mathématiciens permettent de mieux connaître le fonctionnement de la société scientifique, de mieux saisir l'état d'esprit de cette société dans laquelle elle évolue. Le deuxième thème est consacré à une autre facette importante de ce travail de thèse. Ce thème est axé sur les écrits de Germain. Il s'agit d'examiner non seulement les trois mémoires que Germain a envoyés à l'Académie des sciences de Paris suite au concours, mais aussi ses autres productions publiées sur la

théorie de l'élasticité. Cette étude se complète d'une analyse de certains brouillons, certains papiers plus ou moins ordonnés qui permettent de mieux percevoir sa façon de travailler et de découvrir des recherches qu'elle n'a pas divulguées. Ces différents écrits révèlent également comment Germain perçoit ses propres travaux et résultats ainsi que ceux d'autres mathématiciens. Ils nous dévoilent les points dans la modélisation mathématique de l'élasticité que Germain considère comme importants. Le troisième et dernier grand thème a pour sujet la reconnaissance ou méconnaissance de Germain à travers la réception de ses résultats par d'autres savants contemporains ou de la deuxième moitié du XIXe siècle. Ses travaux on-ils eu une influence quelconque sur les recherches en théorie de l'élasticité menées par les scientifiques contemporains ? Cette question peut aussi se poser pour Germain elle-même : ses travaux sur la théorie de l'élasticité ont-ils eu un impact sur sa réflexion philosophique ? Une analyse succincte du dernier ouvrage qu'elle a écrit permet de se rendre compte de l'influence qu'ont eu ses recherches mathématiques sur sa façon de concevoir la société. Cette étude est l'occasion de comprendre davantage le caractère de Germain, sa façon de raisonner, de percevoir la manière dont elle conçoit le fonctionnement d'un esprit scientifique, la science et son appréciation sur la société.

Chapitre 2

Le corpus concernant le contexte social et scientifique

Le choix et la diversité des sources orientent et permettent de faire évoluer un point de vue, la façon de percevoir une personne, sa vie, de cerner sa personnalité, son intégration dans la société. Ce choix est donc déterminant. Les sources doivent être les plus diverses possible pour permettre aux lecteurs d'apprécier à sa juste valeur un individu, de distinguer la partie mythique de sa vie, de pouvoir faire la part des choses entre légende et réalité. Cela est possible en étudiant la vie d'un personnage à travers son propre regard, à travers le regard d'une tierce personne mais également à travers les relations qu'il entretient aussi bien avec ses contemporains qu'avec la société [1].

2.1 Les premières lectures

Certaines sources secondaires ont constitué les premiers éléments du corpus. Il s'agit de différents articles écrits sur Germain relatant sa vie, ses centres d'intérêt et donnant des indications sur sa famille. Ainsi Germain a été le premier « mot clé » utilisé lors de mes recherches. Sont apparus entre autres l'article d'Anne Boyé, *Sophie Germain une mathématicienne face aux préjugés de son temps* (Boyé, 2017), les écrits d'Amy Dahan-Dalmedico, dans la Bibliothèque pour la science *Sophie Germain une femme aux marges de la communauté scientifique* (Dahan Dalmédico, 1987b), *Sophie Germain* (Dahan Dalmédico, 1996),ou encore *Mathématisations : Augustin Louis Cauchy et l'Ecole française* (Dahan Dalmédico, 1992b). Ces publications donnent un aperçu général

1. Même si je me suis intéressée à la vie de Germain, la biographie de celle-ci n'est pas l'objet de cette thèse. Faire référence à sa vie est un moyen de cerner le contexte social, culturel et scientifique à l'origine de son choix d'étudier la théorie de l'élasticité, étude au centre de ce mémoire.

de la vie de Germain et abordent de façon plus ou moins détaillée ses travaux. D'autres ouvrages, un peu plus complets, ont été cités lors de mes recherches. Il s'agit de *An Essay in the History of the Theory of Elasticity* (Bucciarelli et Dworsky, 2012) de Louis L. Bucciarelli et Nancy Dworsky, ou *Sophie Germain Revolutionary Mathematician* (Musielak, 2020) de Dora Musielak. Ces deux ouvrages sont consacrés à Germain, sa vie, ses travaux et ses résultats. On y trouve une étude plus ou moins approfondie concernant la période pendant laquelle Germain s'est penchée sur la modélisation des vibrations des surfaces élastiques, période qui est l'objet de mes recherches.

Durant la lecture de ces différentes productions, d'autres auteurs et leur article relatant la vie de Germain ont été évoqués, comme les *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain suivies de pensées et de lettres inédites et précédées d'une étude sur sa vie et ses oeuvres* d'Hippolyte Stupuy (Stupuy et Germain, 1896) et la notice nécrologique écrite par Guglielmo Libri (Germain, 1833, p. 11-16). Le premier est né l'année suivant la mort de Germain, tandis que l'autre est un ami de Germain. Ces deux « biographes » n'ont pas le recul qu'ont les historiens de nos jours. Mais il est intéressant d'avoir une image de Germain datant de son époque et une plus contemporaine.

Une autre source importante est constituée des écrits de Germain. Dans certains de ses articles publiés, particulièrement celui publié en 1821 (Germain, 1821), elle dévoile son état d'esprit, son ressenti par rapport au sujet du concours. Manquant de discernement, ses propos peuvent certes être exagérés, mais ils ne sont pas déformés par un tiers.

Ainsi toutes ces productions donnent un aperçu général de la vie de Germain, parfois « romancé » ou « encensé », de sa famille, de ses idées. En effet s'y entremêlent des faits réels et des anecdotes, des histoires relevant plus d'une légende.

Cette première approche ne se focalisait sur Germain qu'en tant que personne individuelle et ne la considérait pas en tant que personne au sein d'une société, plus particulièrement au sein d'un monde scientifique. Il a donc fallu élargir les lectures pour apprendre à connaître le monde dans lequel elle évoluait.

2.2 Des sources à la fois ciblées et générales

Pour comprendre le monde auquel Germain voulait appartenir, il m'a fallu m'intéresser à d'autres types d'ouvrages. Il y a ceux qui donnent une vision générale de la vie parisienne à la fin du XVIIIe siècle, au début du XIXe siècle, comme par exemple *Paris savant* (Belhoste, 2011) ou *Histoire de la science moderne : De la Renaissance aux lumières* (Belhoste, 2016) de Bruno Belhoste, *Naissance d'un nouveau*

pouvoir : Sciences et savants en France, 1793-1824 (N. Dhombres et J. Dhombres, 1989) de Nicole et Jean Dhombres, *Fourier, créateur de la physique mathématique* (J. G. Dhombres et Robert, 1998) de Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert, *Les Sciences mathématiques 1750-1850 : Continuités et rupture* (Gilain et Guilbaud, 2015) sous la direction de Christian Gilain et Alexandre Guilbaud. Ces livres décrivent la vie des savants, nous plongent au sein de la société parisienne mais aussi au sein de la société scientifique. Ils nous amènent à nous documenter sur des groupes, des rassemblements particuliers comme les salons, les sociétés « privées ». Pour cela, les articles *La Société Philomatique de Paris et les Sciences exactes : premier tiers du* XIXe *siècle* (Taton, 1990) de René Taton, *Le monde des salons : sociabilité et mondanité à Paris au* XVIIIe *siècle* (Lilti, 2005) d'Antoine Lilti, ou encore *Savoirs mondains, savoirs savants : les femmes et leurs cabinets de curiosités au siècle des Lumières* (Gargam, 2009) d'Adeline Gargam, *French salons - High Society and Political Sociability from the Old Regime to the Revolution of 1848* (Higgs, 2007) de Steven Kale, ont été instructifs et ont permis de donner quelques éléments sur le sujet. Ces lectures sur les salons parisiens ont amené une autre interrogation, à savoir le rôle joué par les femmes à l'époque au sein de la communauté scientifique.

Mais le point important sur lequel il m'a fallu me renseigner est l'Académie des sciences, son fonctionnement et les concours organisés. Comme nous le verrons, l'Académie des sciences tient une place particulière au sein de la communauté scientifique. La lecture concernant cette Académie a été importante et les sources monopolisées nombreuses. Les ouvrages consultés sont, entre autres, *Science under control : The French Academy of Sciences 1795-1914* (Crosland, 2002) de Maurice Crosland, *Une compagnie en son siècle : 350 ans de l'Académie des sciences* (Griset et Greffe, 2016) de Pascal Griset et Florence Greffe, *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences* (Brian et Demeulenaere-Douyère, 1996) sous la direction d'Eric Brian et de Christiane Demeulenaere-Douyère, *L'Académie des sciences : Histoire de l'Académie, fondation de l'Institut national, Bonaparte membre de l'Institut national* (Maindron, 1888, p. 141-310) d'Ernest Maindron. Tous ces ouvrages décrivent le fonctionnement de l'Académie des sciences, son histoire, son rôle. Ils contiennent énormément de renseignements mais le thème est traité de façon générale. Pour pousser davantage l'étude, d'autres lectures concernant les concours organisés par l'Académie et abordant donc un sujet plus particulier ont été nécessaires. Les écrits consultés à cet effet sont par exemple, *A history of prizes in mathematics* (Gray, 2006) de Jeremy Gray, ou *Antoine-Laurent Lavoisier et Michel Adanson rédacteurs de programmes du Prix à l'Académie des Sciences* (Scheler, 1961) de Lucien Scheler, ou encore *Les fondations de prix à l'Académie des*

Sciences : les lauréats de l'Académie, 1714-1880 (MAINDRON, 1881) d'Ernest Maindron, ou *Prendre part au siècle des Lumières. Le concours académique et la culture intellectuelle au* XVIIIe *siècle* (CARADONNA, 2009) de Jérémy L. Caradonna. Ces lectures permettent de comprendre l'objectif de ces concours, leur organisation, leur création, leur importance pour les savants et pour la société. Découvrir la liste des lauréats donne un aperçu du type de scientifiques qui participent à ces concours et de l'intérêt qu'ils y portent. Les noms des lauréats indique également le prestige de ces concours.

Je me suis intéressée plus particulièrement au concours qui est à l'origine des travaux de Germain sur la théorie de l'élasticité. L'intitulé détaillé de ce concours se trouve dans le *Traité acoustique* (CHLADNI, 1809) d'Ernst Chladni, ouvrage en partie à l'origine du concours. Par la suite, j'ai découvert que son énoncé ne se trouve pas uniquement dans cet ouvrage puisqu'à l'époque ce dernier n'était pas forcément accessible à tous les amateurs des sciences. Mais aujourd'hui, en recherchant l'intégralité du programme, nous sommes directement dirigés vers l'ouvrage de Chladni.

L'étude du fonctionnement du monde scientifique a fait apparaître un autre aspect de la vie des savants : la communication de leurs résultats, de leurs recherches. Celle-ci s'opère entre autres par l'intermédiaire des journaux, plus particulièrement des journaux spécialisés. Certains historiens se sont penchés sur le sujet comme Norbert Verdier qui a écrit par exemple l'article suivant : *L'édition mathématique en France 1750-1850 : héritages et reconfigurations* (GILAIN et GUILBAUD, 2015, p. 207-231), ou Christian Gérini qui a étudié un journal scientifique particulier : *Les annales de mathématiques pures et appliquées de Gergonne* (GÉRINI, 2008). Ces moyens de diffusion étaient importants pour les scientifiques. L'Académie des sciences avait d'ailleurs également son propre journal, ainsi que d'autres société savantes, même si leurs publications n'étaient pas toujours fréquentes ou régulières. Les savants se tournaient souvent vers ce moyen de transmission des connaissances.

Les différentes lectures on été très variées, certaines en entrainant d'autres. Parmi les ouvrages consultés figurent des écrits concernant des textes plus particuliers.

2.3 Des sources spécifiques

Les correspondances jouent également un rôle important lors de la recherche d'informations. Elles permettent de connaître les échanges entre les différents acteurs de la vie scientifique. Même si les auteurs des lettres peuvent parfois un peu exagérer la description de leur situation, ils dévoilent tout de même leur état d'esprit, leur ressenti. Les savants utilisent aussi la correspondance pour poser des questions, interroger

leurs homologues sur des points obscurs, leur donner leur point de vue sur des notions particulières, pour affirmer leur désaccord. Les correspondances constituent des écrits originaux, les propos ne sont pas déformés, arrangés ou mal transcrits par une tierce personne. Malheureusement, peu de lettres écrites par Germain ont été retrouvées. La plupart des lettres figurant dans les archives ont été écrites par des savants à Germain, soit pour répondre aux questions de celle-ci, soit pour l'inviter à un dîner chez eux ou lui demander l'autorisation de se rendre chez elle. Les lettres concernant Germain ne sont pas toutes conservées au même endroit. On peut consulter *Letters of Sophie Germain preserved in Florence* (Del Centina, 2005) publiées par Andrea Del Centina, les *Œuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de lettres inédites. Et précédées d'une notice sur sa vie et ses oeuvres* (Stupuy et Germain, 1896) d'Hippolyte Stupuy, ou encore la *Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le gendre, d'Ansse [...]* (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d.). Elles ne sont pas toujours facile à déchiffrer du fait de leur conservation ou que ce sont des écrits manuscrits.

Vers la fin de mes recherches, j'ai découvert un ensemble de manuscrits numérisés très intéressant ayant pour titre *Les papiers de Sophie GERMAIN. - Recueil de dissertations et problèmes mathématiques et physiques* (Germain, 2013). Sur la première page, il est indiqué « Manuscrit de mémoires imprimés ». Il contient divers articles, mémoires et brouillons. Ainsi, y figurent des mémoires de Legendre, Lagrange, D'Alembert, Euler, un papier sur les nombres premiers de la forme $2^{2^i} + 1$ écrit par Germain.

Mais les documents les plus importants pour notre étude figurant dans cet ensemble de documents sont des brouillons de Germain. Malheureusement, les feuilles des brouillons ne sont pas toujours classées correctement, ne sont pas datées ou ne sont pas forcément numérotées. Certains articles sont incomplets. Les pages contenant la suite de ces articles ont-elles été perdues ? Ou Germain n'a-t-elle pas terminé de les écrire passant à autre chose ? En les analysant, nous pouvons reconnaître des brouillons de certains mémoires et articles de Germain. Ces brouillons, comme nous le verrons, nous permettent de comprendre comment Germain travaille, de la cerner davantage. Ils nous dévoilent également qu'elle n'a pas uniquement étudié la théorie de l'élasticité. Elle a fait d'autres recherches dans le domaine de la physique mathématique, recherches qu'elle a rapidement évoquées mais jamais publiées.

Une autre source intéressante est constituée des journaux de l'époque. Plusieurs titres de journaux sont apparus lors des différentes lectures des procès verbaux de

l'Académie des sciences et des ouvrages sur Germain. Trois journaux en particulier sont ressortis ; il s'agit de la *Revue de la Gazette musicale de Paris*, du *Journal de l'Empire* et *Le Moniteur universel*. Le titre de ces journaux est cité mais malheureusement la plupart du temps, la date de publication du journal n'est pas précisé, seul le contenu de l'article est indiqué. Il faut donc parcourir tous les journaux sur une année, voire sur deux ans. La lecture de ces journaux doit être faite avec rigueur pour ne pas omettre un article intéressant. Ces publications, accessibles à la population dont il est question dans cette thèse, permettent de connaître les différents événements, comme des expériences présentées en des lieux particuliers. Elles relatent aussi des rencontres comme celle entre Chladni et Napoléon. Ainsi un article de la *Revue de la Gazette musicale de Paris* de 1838 reproduit les propos de Chladni sur cette rencontre, propos qui d'après les dires de l'auteur de l'article « *sont dignes de confiance, pas exagérés ; Chladni est honnête, humble, n'embellit pas la vérité* » [2]. On peut aussi trouver dans ces journaux les programmes des concours de l'Académie des sciences, certains rapports de la Classe qui sont donc rapportés à l'ensemble des scientifiques et pas seulement aux savants faisant partie de l'Académie des sciences et pouvant accéder aux procès verbaux des séances de l'Académie.

Il est également très instructif de parcourir ces procès verbaux. Ils nous renseignent sur le déroulement des séances de l'Académie, sur les thèmes abordés, sur les concours annoncés et les résultats correspondants, sur les dernières publications. Ils permettent de suivre l'évolution de la recherche scientifique.

Enfin, pour apprendre à décrire le contexte social et scientifique au début du XIXe siècle à travers un personnage, il m'a fallu acquérir quelques méthodes de rédaction. À cet effet, le compte-rendu de Jacques Revel *Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience* (Fabiani, 1998, p. 444-447) et l'article *Définir, classer, compter : biographie et prosopographie en histoire des sciences* de Laurent Rollet et Philippe Nabonnand, contenu dans l'ouvrage *Les uns et les autres ... Biographies et prosopographies en histoire des sciences* (Rollet et Nabonnand, 2012, p. 11-25) rédigé sous la direction de Laurent Rollet et Philippe Nabonnand m'ont permis de découvrir la microhistoire. Deux articles de ce dernier ouvrage m'ont particulièrement intéressée : l'article de Liliane Alfonsi intitulé *Un « savant » du siècle des Lumières : Étienne Bézout (1730-1783), mathématicien, académicien et enseignant* (Rollet et Nabonnand, 2012, p. 29-48) et l'article de Caroline Ehrhardt, *Approche biographique et biographie en histoire des mathématiques : le cas d'Évariste Galois* (Rollet et Nabonnand, 2012, p. 95-118). En m'intéressant

2. Cet article reproduisant les propos de Chladni est écrit par G.E. Anders. Il est publié dans la *Revue de la Gazette musicale de Paris* du dimanche 14 octobre 1838.

à la biographie d'autres savants, en particulier celle d'Évariste Galois, scientifique au destin particulier tout comme celui de Germain, l'ouvrage *Évariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique* (Ehrhardt, 2011) de Caroline Ehrhardt m'a servi de référence et guide. Tous ces articles et ouvrages m'ont permis de découvrir une autre façon d'écrire une biographie.

Cette liste de sources consultées lors de l'écriture de cette thèse n'est pas exhaustive. Elle ne signale que les principales références exploitées dans la partie suivante.

Chapitre 3

Le contexte scientifique et social au début du XIXe siècle

Pour essayer de comprendre l'intérêt de Germain pour les sciences, plus particulièrement pour les mathématiques, la raison pour laquelle elle a entrepris une étude sur les vibrations des surfaces élastiques, la réception de ses résultats, il faut d'abord s'intéresser à la vie de Germain au sein de sa famille, au milieu social et scientifique du début du XIXe siècle. Les recherches, les publications faites par un individu ne peuvent être isolées du contexte dans lequel cet individu évolue.

La première question concerne la famille de Germain. Le niveau social, les relations, les lieux fréquentés par ses parents permettent de définir la situation, l'ambiance dans laquelle elle a grandi. Cette question en amène d'autres, plus ciblées sur Germain elle-même. Par exemple, comment elle se comporte au sein de sa famille ? Respecte-t-elle les convenances dues à son rang, que ce soit par rapport à ses centres d'intérêt, ses occupations ou son statut de femme ? Quelle est la réaction de sa famille, plus particulièrement de ses parents, vis-à-vis de son choix de vie ? Le niveau social de sa famille est-il un frein à ses ambitions ? Ou au contraire, peut-elle bénéficier de certains avantages ? La formation qu'elle a suivie est-elle une formation classique, c'est-à-dire l'enseignement réservé aux filles ?
Les réponses à toutes ces questions nous donneront un aperçu de sa jeunesse, nous permettront de mieux cerner son caractère, de connaître les occupations qui rythmaient ses journées, des journées pas toujours faciles à vivre pour une jeune fille qui entend le tumulte dans les rues de Paris dû à la Révolution.

Ayant appris à connaître un peu la jeunesse de Germain, sa famille, ses centres d'intérêt, une question vient alors à l'esprit est : a-t-elle pu vivre sa passion pour les mathématiques ? Cette question étant trop générale, il fallait cibler davantage en exami-

nant cette fois, non plus les relations et fréquentations de ses parents, mais les relations et fréquentations qu'elle s'est elle-même faites, notamment parmi la société scientifique. Pour cela, il faut inventorier les lieux dans lesquels elle se rend, les personnes qu'elle côtoie. Nous pouvons également nous intéresser aux moyens de communication qu'elle utilise pour correspondre avec ses contemporains, pour diffuser, faire connaître ses productions aux savants. Les habitudes, l'entourage, le parcours atypique de Germain nous permettent d'en apprendre davantage sur le milieu scientifique, en particulier le monde plus restreint formé par les académiciens, sa conception de la pratique scientifique. Comment les savants académiciens accueillent-ils une personne qui s'intéresse aux sciences, qui montre certaines aptitudes, un certain intérêt pour les sciences ? Se montrent-ils abordables ? Forment-ils en général un monde ouvert ou fermé ?
La participation de Germain à un concours proposé par l'Académie des sciences de Paris nous éclaire sur le fonctionnement de l'Académie des sciences, sur la conception de ces concours, leur objectif, leur importance pour la communauté scientifique.
La vie singulière de Germain, sa façon de s'intégrer au sein du milieu scientifique parisien nous permettront de mieux cerner non seulement l'attitude des savants, en particulier des académiciens, vis à vis d'une personne méconnue mais dévoilant un esprit vif, une inclination pour les mathématiques, mais aussi leur intégration au sein de la société.

Après avoir analysé la perception de Germain par ses contemporains, on peut la comparer à celle d'aujourd'hui. En effet, on peut lire de plus en plus de biographies sur Germain. De plus, une partie de sa vie est souvent narrée sous la forme d'une légende, que ce soit au XIXe siècle ou de nos jours. Quelle est donc la part de légende dans ces biographies ?

3.1 Le milieu social dans lequel évolue Sophie Germain

3.1.1 Sa famille

Marie Sophie Germain est née le 1er avril 1779 à Paris. Elle est issue d'une famille bourgeoise. Son grand-père paternel, Thomas Germain, est orfèvre, sculpteur et architecte. Son père, Ambroise-François Germain, est mercier ; il tient un magasin de fils et de soie, le Cabas d'or, rue Saint-Denis. Il s'investit en politique, est élu député du Tiers-État à l'Assemblée constituante de 1789. Il défend les intérêts des commerçants. Il reçoit chez lui pour parler stratégie et lutte contre les servitudes de l'Ancien Régime, pour parler économie et défendre les intérêts des commerçants. Son père appartenait à une

bourgeoisie libérale, s'intéressant à la philosophie des auteurs du XVIIIe siècle (STUPUY et GERMAIN, 1896, p. 2-5). Il possède une bibliothèque apparemment très bien fournie ; on y trouve différents types de livres parmi lesquels des ouvrages philosophiques ou scientifiques comme par exemple l'*Histoire des mathématiques* de Jean-Étienne Montucla ou le cours de mathématiques d'Étienne Bezout(BOYÉ, 2017). Le contenu de la bibliothèque révèle donc un bon niveau d'instruction de son père, une position culturelle et sociale élevée.

Marie Sophie Germain est la deuxième de trois filles. L'aînée, Marie-Madeleine (1770-1804), s'est mariée le 21 avril 1790 à Charles Lherbette (1752-1836), un notaire. Le couple a eu deux enfants : une fille, Honorine-Marie (1795-1817) qui s'est mariée à Antoine Henri Amable Trutat, également notaire, et un fils, Armand-Jacques (1791-1864). Ce dernier sera l'exécuteur littéraire de Sophie Germain. La plus jeune des filles, Angélique, (née en 1779), se marie d'abord le 31 juillet 1809 avec René-Claude Geoffroy (1767-1831), médecin et membre de la section de médecine de l'Académie de médecine (1820). Ils ont un fils, Ernest Louis (1803-1859) un homme politique. Deux ans après la mort de son mari, Angélique se marie à nouveau avec Henri Dutrochet le 7 juin 1833, également médecin, mais aussi botaniste, physiologiste et membre de l'Académie des Sciences (1828), membre de l'Académie nationale de médecine et Chevalier de la Légion d'honneur [1]. Après leurs mariages, ses deux sœurs évoluent donc encore dans un milieu social aisé, instruit. Grâce aux fonctions de leur mari, les deux sœurs de Sophie ont la possibilité de côtoyer le milieu scientifique, et en particulier le milieu des académiciens. Elles organisent probablement des dîners où sont conviés des savants et certainement aussi Sophie.

Germain est donc née dans une famille de moyenne bourgeoisie, cultivée. Son père, commerçant et politicien, ses beaux-frères, notaire, médecins et académiciens, ont pu tisser des liens avec des personnes importantes que ce soit au niveau social ou scientifique et en faire bénéficier Germain.

3.1.2 Sa formation, son statut

Sa formation

La jeunesse de Germain et l'instruction donnée par ses parents sont peu connues. A-t-elle eu la possibilité d'aller à l'école pour suivre l'enseignement réservée aux filles ?

1. Ces informations sont issues de différentes sources :
https ://gw.geneanet.org ; https ://mathshistory.st-andrews.ac.uk ; https ://wikimonde.com ; https ://data.bnf.fr

Comment a-t-elle appris à lire ? Est-ce à la maison ? Aucune indication dans les différents articles la concernant nous permet de répondre à ces questions. Quoi qu'il en soit, en 1789 la population parisienne se révolte et défile dans la rue. Germain, alors âgée de 13 ans, entend et voit cette agitation désordonnée. Pour échapper à la fois à ce tumulte et aux discussions politiques animées entre son père et ses différents invités, elle se serait réfugiée dans la bibliothèque familiale (Stupuy et Germain, 1896, p. 6-8). Comme nous l'avons déjà vu, cette bibliothèque contient des ouvrages variés parmi lesquels des livres de mathématiques. Germain décide de se plonger dans la lecture pour essayer d'oublier les événements. Ainsi elle aurait lu l'*Histoire des mathématiques* de Montucla. Cet ouvrage aurait éveillé sa curiosité concernant cette discipline, les mathématiques, dont elle n'avait probablement encore jamais entendu parler. Pour en apprendre davantage sur cette science, livrée à elle-même, sans pouvoir bénéficier de conseils et sans aucune formation scientifique, elle parcourt les livres qu'elle trouve et rédigés par des mathématiciens chevronnés comme Bezout, Léonhard Euler ou encore Isaac Newton (Gillispie, 1980, p. 375). Son intérêt pour les mathématiques est donc vraisemblablement né à cette époque. Ses parents, remarquant le temps passé par leur fille à étudier une discipline normalement réservée aux garçons, auraient, comme tous les parents à cette époque, tenté de la dissuader de poursuivre avant de la laisser s'adonner à sa passion (Stupuy et Germain, 1896, p. 6-8). Germain a donc eu la chance d'avoir des parents ayant une certaine culture, ayant apparemment une ouverture d'esprit telle qu'ils ont accepté de passer outre les préjugés de l'époque.

En 1795, l'École polytechnique ouvre ses portes. Germain a alors 19 ans. Mais les filles n'y sont pas admises, et de manière générale n'ont pas accès à un enseignement des sciences institutionnalisé. Ainsi Germain ne peut intégrer cette école pour pouvoir apprendre de façon plus méthodique les mathématiques. Elle n'abandonne pas pour autant. Elle utilise une ruse pour pouvoir se procurer certains cours donnés à l'École polytechnique. Elle se fait passer pour un certain Monsieur Antoine-Auguste Leblanc. Ce dernier est (ou n'était déjà plus à cette époque) un élève [2] de l'École polytechnique (Bucciarelli et Dworsky, 2012, p. 11). Germain se fait donc envoyer, sous le pseudonyme de Monsieur Leblanc les cahiers de chimie d'Antoine-François Fourcroy et ceux d'analyse de Joseph-Louis Lagrange. Les élèves de Lagrange pouvaient lui envoyer leurs observations. C'est ce que fait Germain, toujours sous le pseudonyme de Monsieur Leblanc. Lagrange, impressionné par la qualité des remarques, recherche leur auteur. Germain reprend son vrai nom et Lagrange devient alors son premier mentor (Stupuy

2. Antoine-Auguste Leblanc a un an de plus que Germain. Il aurait démissionné de l'École polytechnique pour intégrer l'École des Ponts et Chaussées. Il est mort à l'âge de 22 ans juste avant d'intégrer cette école.

et Germain, 1896, p. 12). Elle continue à apprendre et à travailler mais elle n'est plus isolée.

Ayant étudié des ouvrages sur l'arithmétique, notion ne nécessitant pas forcément un apprentissage très structuré, Germain commence « sa carrière scientifique » en s'intéressant au théorème de Fermat. À cette occasion, elle formule un théorème concernant les nombres premiers.

À partir de 1809, à l'occasion d'un concours proposé par l'Académie des sciences, elle se concentre sur un domaine d'étude totalement différent : la modélisation des vibrations des surfaces élastiques. Elle envoie trois mémoires successifs pour participer au Prix de mathématiques organisé par l'Académie des sciences de Paris. Elle poursuit ses recherches sur l'élasticité tout en reprenant son étude sur la théorie des nombres.

Elle tombe malade en 1829. À la fin de sa vie, trop fatiguée et trop faible pour s'adonner entièrement et totalement à l'étude des mathématiques, elle rassemble quelques idées philosophiques. Elle n'arrive pas à finaliser cette dernière production philosophique, la maladie l'emportant.
Germain s'éteint le 27 juin 1831.

Son statut

À 19 ans, Germain est déjà une jeune femme. Et pour une femme de son âge, le mariage est une perspective normale. Les femmes célibataires n'ont pas le privilège d'être indépendantes. Soit ce sont des domestiques et vivent alors chez leur maître, soit elles vivent chez leurs parents. La situation de la femme célibataire dépend donc de son statut social, de la fortune de ses parents. Germain se retrouve dans la deuxième situation ; elle est restée célibataire toute sa vie et a vécu chez ses parents. De plus les femmes célibataires pouvaient être suspectées de chercher à changer l'ordre social(Beauvalet-Boutouyrie, 2000). Le célibat de Germain aurait donc pu ne pas être accepté par sa famille. D'autant plus que ses parents ont déjà dû accepter le fait qu'elle s'investisse dans une branche scientifique essentiellement masculine.

Germain, célibataire et rentière toute sa vie, se conforme à son statut particulier. Elle ne peut pas travailler sous couvert d'un mari, ne peut pas se servir du nom de celui-ci pour se procurer des ouvrages scientifiques dont elle a besoin pour se former et pour s'instruire. Elle n'abandonne pas pour autant sa passion et trouve un subterfuge comme nous l'avons vu, en se faisant passer pour l'étudiant Leblanc. Ce qui démontre une certaine force de caractère. D'autre part, elle est considérée comme une mathématicienne amatrice au sens qu'elle ne vit pas de l'exercice ou de l'enseignement des sciences. Elle apparaît donc comme une marginale parmi la société et le monde scientifique.

3.2 Germain et la société scientifique

3.2.1 L'attitude de Germain et de ses contemporains

Quand Joseph-Louis Lagrange apprend que c'est Germain qui lui envoie des observations pertinentes, il la contacte. Dans une lettre du 17 germinal c'est-à-dire avril mais sans préciser l'année [3], il lui propose de se mettre à sa disposition. Il lui soumet les dates des jours où il est disponible soit pour se rendre chez elle, soit pour la recevoir. Ainsi Lagrange est certainement impressionné par les capacités de Germain puisqu'il n'hésite pas à lui proposer ses disponibilités pour la rencontrer. Le fait que Germain est une femme ne le dérange apparemment pas, il ne se soucie pas du genre.

De plus, il ne se contente pas de créer une relation avec elle, de l'aider dans son apprentissage des mathématiques. Il parle aussi d'elle autour de lui à d'autres savants. Certains désirent également s'entretenir avec elle et demandent à lui rendre visite, comme par exemple Jacques Antoine Joseph Cousin par l'intermédiaire du libraire Bernard, apparemment une connaissance de la famille, qui envoie à la mère de Sophie (Stupuy et Germain, 1896, p. 249) une lettre datée du 4 novembre sans que l'année y soit précisée [4]. Dans cette correspondance, Bernard annonce le souhait de Jacques Antoine Joseph Cousin de la rencontrer ainsi que sa fille Sophie. Bernard s'adresse donc à sa mère et non à Sophie elle-même. De plus, même s'il lui propose une date et une heure, Cousin et lui-même se rendront chez elles quand elles le souhaiteront. Ainsi, tout comme Lagrange, Cousin se plie aux convenances. Le libraire précise aussi que Cousin « se met au service » de Germain, c'est-à-dire il se propose « de lui offrir toutes les facilités qui dépendront de lui dans la carrière des sciences qu'elle cultive avec tant de succès » (Stupuy et Germain, 1896, p. 249). Cette affirmation peut signifier qu'il a la possibilité de lui faire parvenir par exemple son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégrale*, ce type de calculs intervenant en théorie de l'élasticité. Il reconnaît ainsi le niveau mathématique de Germain et la considère comme son homologue. D'autres savants renommés feront également la démarche, comme Joseph Fourier ou encore Jérôme Lalande.

Mais Germain reçoit aussi des lettres d'invitation à des dîners. Ceux-ci permettent, à toutes les personnes présentes, d'échanger de vive voix, de discuter, de débattre. Dans ces dîners se trouvent également des savants de renom, comme le rapporte une

3. *Manuscrits de Sophie Germain. Documents inédits*, article de Charles Henry dans Revue philosophique, t.8, p.633

4. Cette lettre doit être postérieure à la découverte par Lagrange que les travaux envoyés par Leblanc sont en fait envoyés par Germain. Avant que Cousin ne manifeste sa volonté de rendre visite à celle-ci, elle a déjà dû rencontrer Lagrange qui en a sûrement parler autour de lui.

lettre de Tessier [5] adressée à Germain et datant du 17 pluviose [6] (Stupuy et Germain, 1896, p. 247-248). Celui-ci l'invite à un dîner organisé chez lui : « Duodi, c'est-à-dire dimanche prochain, il y aura chez moi un dîner (...). La majeure partie des convives ne vous est point étrangère. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 247) Parmi les invités, il y aura donc sûrement des savants qui ne sont pour la plupart pas des inconnus pour Germain. Il lui semble important de préciser qu'elle n'est brouillée avec aucun d'eux puisqu'il rajoute « Point de M*** [7], puisque vous ne vous êtes pas encore raccommodée avec lui. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 247) Tessier précise également qu'elle sera ramenée chez elle « en sûreté, à l'heure » (Stupuy et Germain, 1896, p. 248) que son père aura décidé. D'après cette lettre, Germain a la possibilité de se déplacer sans chaperon, sous certaines conditions.
Ces lettres nous permettent de déduire que Germain, grâce à son audace, a réussi à créer des liens avec certains scientifiques, et pas les moindres. D'ailleurs, d'après une lettre de remerciement de Fourier à Germain (J. G. Dhombres et Robert, 1998, p. 389-390), celle-ci a soutenu et parlé en faveur de la candidature de Fourier au poste de secrétaire perpétuel de la section mathématique en 1822. Elle n'hésite donc pas à intervenir auprès de la société scientifique. Non seulement elle est accueillie avec bienveillance par la plupart des savants, mais elle est aussi écoutée. En est-il de même de la part de Germain ? Accepte-t-elle de discuter avec tous les savants ainsi que leurs propositions, leur aide ?

En 1795, Lalande [8] publie la deuxième édition de son ouvrage l'*Astronomie des dames*. Avec cet ouvrage, il veut rendre l'astronomie plus abordable et montrer que l'astronomie est accessible aux femmes. Or d'après une lettre écrite le 4 novembre 1797 par Lalande [9] , ce dernier a également rendu visite à Germain. Mais elle n'a pas apprécié ses propos ni son désir de lui offrir son livre l'*Astronomie des Dames*. Germain, étant encore jeune et communiquant déjà avec d'autres académiciens, doit imaginer qu'il sous-estime son niveau mathématique. D'autre part, Lalande propose à des femmes ayant des capacités scientifiques de les employer dans son atelier pour effectuer des calculs astronomiques contraignants et qui prennent beaucoup de temps (Lémonon,

5. Alexandre-Henri Tessier est né à Angerville en 1741 et mort à Paris en 1837. Il est médecin et agronome, membre de la société de médecine (1776) et de l'Académie des sciences (1783).

6. Le 17 pluviose correspond au 6 février.

7. Suivant l'année à laquelle se déroule ce dîner, la personne dont Tessier fait allusion peut être soit Jérôme Lalande avec qui nous le verrons elle aura un différent en 1795, soit d'Ansse de Villoison qu a écrit en 1802 des vers grecs en son honneur, poème qu'elle n'a pas apprécié.

8. Jérôme Lalande est un astronome renommé, membre de l'Académie des sciences, Inspecteur du Collège de France, Directeur de l'Observatoire.

9. Cette lettre est reproduite en annexe B.

2019, p. 444). Et donc Dora Musielak présume que « when Lalande visited Germain (...) perhaps the astronomer was implying that she could assist in the Paris Observatory, since she understood numbers, and thus that she could « calculate » » (Musielak, 2020, p. 28). Cela reste une supposition. En effet, rien dans la lettre de Lalande ne laisse penser que celui-ci a l'intention de lui proposer de travailler avec lui. Au contraire, il connaît le niveau mathématique de Germain. Cette dernière se considère comme une mathématicienne au même titre que Gauss ou Lagrange. Elle poursuit une réflexion et elle maîtrise la démarche scientifique. La nature de son travail s'inscrit vraiment dans la recherche. Elle s'appuie sur les connaissances déjà acquises pour étudier un nouveau sujet, pour expliquer un nouveau phénomène (Germain, 1826, p. 2). De plus, Lalande a déjà ses collaborateurs ou collaboratrices, comme par exemple Nicole Reine Lepaute [10], qui habitent dans la même demeure que lui, qui joue à la fois le rôle d'habitation et d'atelier (Lémonon, 2021, p. 25-30).

Le désaccord entre Germain et Lalande n'est pas isolé. Une tension a aussi existé entre Germain et Poisson. Mais dans ce cas, ce n'est pas Germain qui refuse le dialogue, c'est Poisson. Nous reviendrons plus tard sur le refus de la part de Poisson de communiquer et de travailler avec Germain.

Les relations de Germain avec d'autres scientifiques se limitent aux savants de renoms : quelques académiciens et professeurs de l'École polytechnique. Elle se montre donc très sélective. Est-ce également le cas concernant les lieux qu'elle fréquente ?

Nous avons vu que Germain est invitée à des dîners auxquels participent également d'autres savants. Ces dîners sont une occasion pour elle de se faire de nouvelles relations, de se tenir au courant des dernières découvertes, des derniers travaux. Mais n'y a-t-il pas d'autres endroits dans lesquels elle peut se rendre et qui peuvent jouer le même rôle ?

On trouve dans Paris, comme dans la province, des salons. Ces derniers sont un lieu d'échange, de communication entre les scientifiques qui s'y rendent. Ils peuvent intervenir dans l'orientation des travaux scientifiques grâce à la diffusion d'informations. Tous types de sujets y sont abordés, comme par exemple la politique de l'Académie, les prochaines élections à l'Académie (Crosland, 2002, p. 47-48). Mais Isabelle Lémonon précise aussi qu'il est assez « difficile de documenter la construction des savoirs au travers des discussions mondaines, qui peuvent impliquer des Savantes » (Lémonon, 2019, p. 364). Cependant les salons contribuent au développement de réseaux ou d'alliances.

10. Nicole Reine Lepaute (1723-1788), astronome française, est la femme de Jean André Lepaute, horloger. Elle travaille avec son mari et rencontre alors Lalande. Elle devient une de ses collaboratrices en tant que calculatrice et intendante scientifique.

De part son statut social, Germain n'a donc peut-être pas accès aux salons parisiens. En revanche, les relations qu'elle a parmi les savants pourraient lui ouvrir les portes de ces lieux. Mais apparemment, elle a choisi de ne pas fréquenter les salons. Ce choix n'est cependant pas un frein à sa formation mathématique ni à son travail de recherche. En effet, Germain a la possibilité de suivre « des cours publics de science à Paris au Jardin du roi par exemple » (Lémonon, 2019, p. 360). Elle peut aussi se rendre dans des maisons où sont effectuées des démonstrations payantes ou non figurant dans des annonces de certains journaux, comme le *Moniteur universel*, le *Journal de l'Empire* ou le *Journal des débats*. Elle a l'opportunité de se rendre à certaines de ces démonstrations publiques d'après ce qu'elle écrit dans l'*Avertissement* du mémoire qu'elle a publié en 1821 : « *A l'époque du séjour à Paris de M. Chladni [Ernst Chladni], la vue de ses expériences excita de nouveau ma curiosité.* » (Germain, 1821, p. v). Mais elle ne peut se rendre à d'autres démonstrations d'expériences, comme celles faites par Félix Savart [11], d'après l'extrait d'une lettre qu'elle a écrite en 1826 à son ami Guglielmo Libri [12]. Savart a pu éventuellement montrer ses expériences lors des réunions de la Société d'Arcueil. Créée par Pierre-Simon Laplace et Claude-Louis Berthollet, cette société est fréquentée par des scientifiques, principalement des chimistes et physiciens qui peuvent utiliser le laboratoire mis à leur disposition, mais aussi le mathématicien Poisson. Or Biot, un des membres participant régulièrement aux réunions, connait Savart. Il aurait donc pu l'y introduire pour qu'il présente ses travaux.

Certes Germain ne peut pas fréquenter tous les lieux dans lesquels les sciences sont présentes. Ce constat peut expliquer en partie la raison pour laquelle elle a étudié les mathématiques. Cependant elle arrive tout de même à alterner des moments pendant lesquels elle travaille seule et des moments où elle échange avec ses collègues. Elle bénéficie donc de possibilités que des scientifiques amateurs n'ont pas. Parmi ces possibilités, il y a bien sûr la correspondance. Nous savons déjà que certains savants lui envoient une lettre soit pour l'inviter, soit pour demander l'autorisation de lui rendre visite. Mais il y a aussi les correspondances qui servent à communiquer des résultats, à poser des questions, à exposer un problème, à échanger sur des notions scientifiques.

11. Félix Savart (1791-1841) est né dans les Ardennes. Médecin, il s'intéresse à la physique moléculaire. En 1819, il rencontre Jean-Baptiste Biot à Paris qui lui obtient une place de professeur dans une institution. Il est présenté à l'Académie des sciences et à l'Académie des Beaux-Arts. Il fait des expériences en acoustique en utilisant les méthodes et figures de Ernst Chladni pour mesurer l'anisotropie de divers matériaux. Il lit plusieurs mémoires sur les vibrations à l'Académie. Fin 1827, il est élu membre de l'Académie des sciences dans la section Physique générale. En 1828, il est nommé conservateur du cabinet de physique du Collège de France. En 1836, il obtient la chaire de Physique au Collège de France. En 1839, il est élu membre étranger à la Royal Society de Londres. (Houssay, 2009) et (Ségal, 2015)

12. Cette lettre se trouve en annexe B.

Germain a déjà utilisé cette façon de communiquer quand elle a envoyé ses observations à Lagrange sous le pseudonyme de Leblanc. Elle continue, tout au long de « sa carrière » d'écrire à ses contemporains. Ainsi certaines lettres échangées avec Gauss, Adrien-Marie Legendre[13], Poisson, Fourier (Stupuy et Germain, 1896, p. 254-331) ou encore Libri (Del Centina, 2005, p. 4-15) ont été retrouvées. Ces correspondances sont importantes pour Germain et la majorité des mathématiciens prennent le temps de lui répondre. Beaucoup de lettres écrites par Germain n'ont malheureusement pas été retrouvées, seules des réponses à ses lettres figurent dans les archives.

Pour transmettre leurs résultats, les savants utilisent aussi les journaux. Mais Germain ne fait pas usage de ce type de communication. Elle ne cherche pas à publier par exemple dans le *Journal des savants* (créé en 1665) ou les *Annales de mathématiques pures et appliquées* plus connues sous le nom des Annales de Gergonne (1810-1832). D'ailleurs lit-elle seulement ce journal ? Aucun élément de réponse ne permet de le savoir. Quoi qu'il en soit, concernant ses résultats sur les vibrations des surfaces élastiques, elle ne commence à publier dans des revues scientifiques qu'à partir de 1828 avec la parution d'un article dans le tome 38 des *Annales de Chimie et de Physique*. Mais ce n'est pas la première fois que le nom de Germain est cité dans cette revue. Déjà en 1816, dans le tome 1, il est précisé que lors de la séance publique de l'Académie du 8 janvier le prix correspondant au concours concernant la théorie des vibrations des lames élastiques est remis à Germain. Ce fait est à nouveau rappelé dans les *Annales* de 1860 (tome 60). En 1823 (tome 24), dans les rapports des séances de l'Académie, on signale la lecture d'une lettre de Germain, et en 1824 (tome 26) l'article qu'elle a remis à l'Académie. Dans les *Annales* de 1829 (tome 40), 1879 (tome 17) et 1881 (tome 22), le nom de Germain est évoqué par d'autres savants. Ainsi son nom apparaît à maintes reprises dans cette revue scientifique que ce soit de son vivant ou à titre posthume. Les revues scientifiques ne se limitent donc pas à la publication d'articles, d'annonces concernant les savants renommés. Ils s'intéressent au contenu, aux informations et ce quel que soit l'auteur. Les travaux de Germain restent dans la mémoire des savants durant tout le XIXe siècle.

En 1831, elle envoie un article au *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Pour faire connaître ses premiers résultats, elle préfère publier ses mémoires de 1821 et 1826 sous la forme d'un ouvrage auprès de l'imprimerie « de la rue du Jardinet fief de la maison Huzard-Courcier ». La maison Courcier s'inscrit dans une tradition familiale et commerciale ancienne. La direction est d'abord assumée par J.-B.-M. Duprat, puis par Louis Courcier. La maison porte le titre de « imprimeur-éditeur pour les mathématiques,

13. Les lettres échangées avec Legendre sont reproduites en annexe B.

les sciences et les arts ». À la mort de ce dernier, sa veuve, Victoire-Félicité Courcier, prend la direction et la maison porte alors le titre de « imprimeur-libraire pour les mathématiques ». Lui succèdent Démophile Huzard, son gendre, Alfred Courcier, puis Charles Bachelier. Les titres donnés à la maison Courcier témoignent d'une spécialisation dans les ouvrages de sciences et de mathématiques. « Courcier édite entre 1800 et 1811 (...) environ deux cents ouvrages dont la moitié relève directement des mathématiques (Verdier, 2017, p. 395-407). » Cette maison publie des ouvrages de Lagrange, Laplace, Gaspard Monge, Sylvestre-François Lacroix, Jean-Baptiste Joseph Delambre, Poisson, Antoine-André-Louis Reynaud, Josef Wronski (Verdier, 2015, p. 223-224). Mais on y trouve aussi entres autres un ouvrage d'Ambroise Dominique Delarue [14], de Louis Puissant [15] ou d'Ami Boué [16]. La maison Courcier devient Bachelier au début des années 1820. Elle fabrique et vend des journaux scientifiques français et allemands comme le Journal de Crelle et le Journal de Liouville, les deux principaux journaux de la première moitié du XIXe siècle. On y trouve aussi la *Correspondance sur l'École royale polytechnique, à l'usage des élèves* instaurée par Jean-Nicolas-Pierre Hachette en 1804. Grâce aux innovations techniques permettant l'amélioration des signes et des caractères mathématiques, les imprimeurs-libraires peuvent éditer de plus en plus d'ouvrages mathématiques. La maison Courcier, puis Bachelier, est le principal éditeur des ouvrages mathématiques. Les ouvrages pour l'enseignement sont essentiellement édités par Louis Hachette. Les autres imprimeurs-libraires diversifient davantage leurs ouvrages (Verdier, 2017, p. 395-407). Elle a donc choisi une imprimerie-librairie spécialisée ayant une grande notoriété et fréquentée par des académiciens. Elle adapte sa manière d'agir à celle des professionnels et ne se comporte pas comme une amatrice en sciences.

Germain ne cherche apparemment pas à communiquer le plus largement possible ses travaux. De même qu'elle a choisi de restreindre son cercle de connaissances, elle sélectionne les supports de diffusion de ses articles et mémoires. Elle reste fidèle à sa vision du monde mathématique qui se limite à l'Académie des sciences.
La singularité de Germain provient de sa conception du monde scientifique réduite au monde académique.

14. Ambroise Dominique Delarue était professeur au Collège de Séez puis professeur particulier de mathématiques à Falaise dans le département du Calvados. Il a écrit *Notions de Chronologie Historique Et Mathématique* en 1813.

15. Louis Puissant (1769-1843) est un ingénieur géographe et mathématicien. Il écrit des ouvrages de géodésie et de mathématiques. Il a publié chez Courcier un *Traité de topographie, d'arpentage et de nivellement* en 1820.

16. Ami Boué (1794-1881) a fait des études de médecine, chimie, botanique, minéralogie et paléontologie. Il est en 1830 l'un des principaux fondateurs de la Société géologique de France. Il a publié chez Courcier *Essai géologique sur l'Écosse*.

3.2.2 L'Académie des sciences et ses concours

En 1803, l'Institut [17], installé au Louvre, est composé de quatre classes : la classe des sciences, la classe de la littérature française, la classe de l'histoire et de la littérature ancienne, et enfin la classe des beaux-arts. La classe des sciences, aussi appelée la première classe, est formée de deux divisions : les sciences mathématiques (les mathématiques sous l'appellation « géométrie », la mécanique, l'astronomie, la physique générale) et les sciences physiques (la chimie, la minéralogie, la botanique, l'économie rurale et l'art vétérinaire, l'anatomie et la zoologie, la médecine et la chirurgie). Les séances tenues par chaque classe permettent aux savants d'exposer leurs recherches et résultats. La première Classe étudie les articles et propositions, et écrit un rapport donnant leurs conclusions. Pascal Griset et Florence Greffe précisent que « Elle [la première Classe] devient une instance respectée de la communauté scientifique nationale et internationale. » Parmi ces séances figurent des séances publiques auxquelles tous les membres de l'Institut peuvent assister ; elles permettent de garder une certaine cohésion entre les différentes classes. Durant ces séances, les lauréats des prix et de nouveaux sujets d'études sont annoncés (Griset et Greffe, 2016, p. 94 & 98).

En 1805, l'Institut déménage au Collège des Quatre-Nations ; il constitue un cercle fermé. En effet, seuls les académiciens sont présents, le public ne peut y rentrer. En 1809, l'Institut commence à ouvrir ses portes. Ainsi sont aussi admis aux séances les savants de l'Institut d'Égypte, de la Société de médecine par exemple, ainsi que ceux étant primés par l'Académie. Puis les membres des principales Académies d'Europe et enfin les journalistes ont la possibilité d'assister à ces séances (Griset et Greffe, 2016, p. 98).

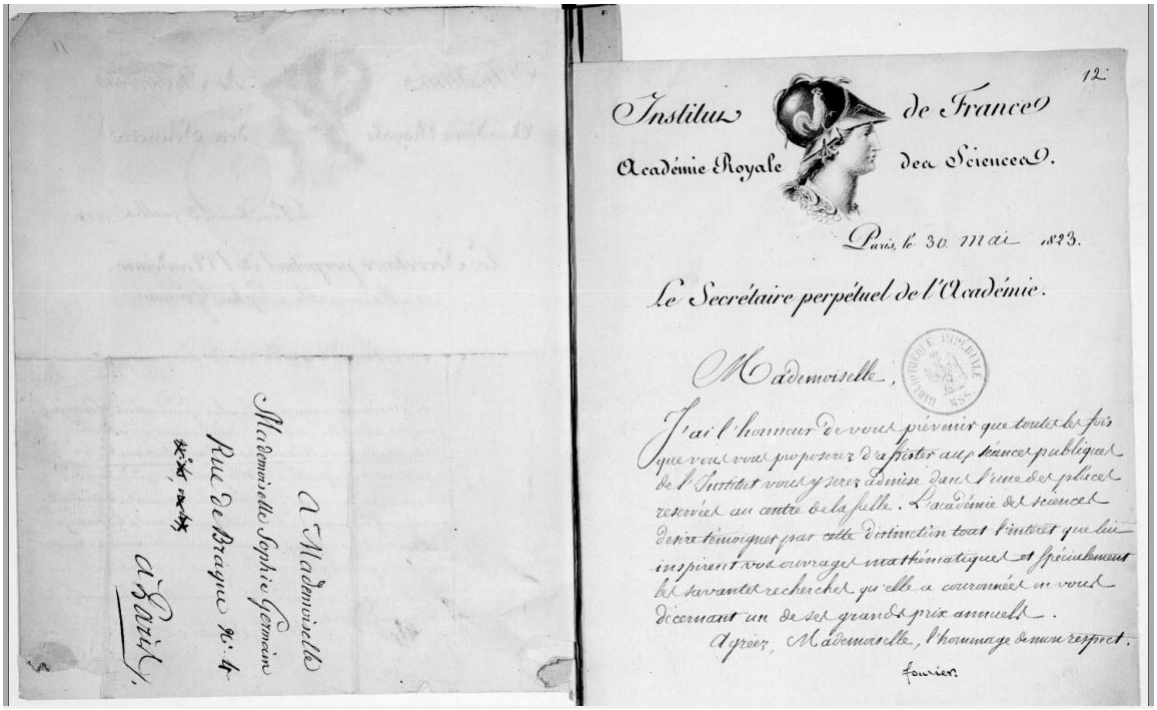
Germain, ayant pourtant remporté le Grand prix de mathématiques en 1816, devait donc pouvoir assister aux séances. Aucune information à ce sujet n'a été retrouvée. Néanmoins une invitation datant de fin mai 1823 de la part de son ami Fourier alors secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, a été retrouvée :

> « Mademoiselle,
>
> J'ai l'honneur de vous prévenir que toutes les fois que vous vous proposez d'assister aux séances publiques de l'Institut vous y serez admise dans l'une des places réservées au centre de la salle. L'académie des sciences désire témoigner par cette distinction tout l'intérêt que lui inspirent vos ouvrages mathématiques et spécialement les savantes recherches qu'elle a couronnées en vous décernant un de ses grands prix annuels.

17. Entre 1795 et 1816, l'Académie porte le nom d'Institut.

Agréez, Mademoiselle, l'hommage de mon respect.

fourier »


12

Institut de France
Académie Royale des Sciences.

Paris, le 30 Mai 1823.

Le Secrétaire perpétuel de l'Académie.

Mademoiselle,

J'ai l'honneur de vous prévenir que toutes les fois que vous vous proposerez de assister aux séances publiques de l'Institut vous y serez admise dans l'une des places réservées au centre de la salle. L'académie des sciences veut témoigner par cette distinction tout l'intérêt que lui inspirent vos ouvrages mathématiques et spécialement les savantes recherches qu'elle a couronnées en vous décernant un de ses grands prix annuels.

Agréez, Mademoiselle, l'hommage de mon respect.

fourier.

A Mademoiselle
Mademoiselle Sophie Germain
Rue de Bragne n°. 4
A Paris.

FIGURE 3.1 – Lettre de Fourier à Germain (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 12)

D'après cette lettre, Germain bénéficie du privilège d'avoir une place réservée au centre de la salle avec les autres personnes invitées à assister à ces séances publiques ; elle n'a donc plus besoin de se mêler au public. Ces séances publiques ont lieu quatre fois par an, les 15 vendémiaire (6 ou 7 octobre), nivôse (5 ou 6 janvier), germinal (4 ou 5 avril) et messidor (4 juillet) (MAINDRON, 1888, p. 164). Tout comme les savants non membres de l'Académie, pour connaître les dernières parutions signalées aux séances, pour faire lire un article lors d'une séance hebdomadaire, elle doit passer par un intermédiaire, un académicien. A-t-elle profité de cette invitation ? Rien dans les documents retrouvés ne laissent penser que cela a été le cas. Avait-elle vraiment besoin d'assister à toutes ces séances ? Elle a suffisamment de contacts auprès des académiciens qui peuvent lui transmettre les informations.

L'Académie n'est pas seulement reconnue pour ses séances. En 1714, Jean-Baptiste Rouillé de Meslay [18], conseiller au Parlement, donne une somme d'argent à l'Académie

18. Jean-Baptiste Rouillé de Meslay (1656-1715), comte de Meslay, est un magistrat français.

des sciences afin de permettre à celle-ci de proposer des prix sur des sujets et rétribuer les lauréats (Demeulenaere-Douyère, 1996, p. 69). Ces prix constituent les concours récompensés par une médaille d'or, celle-ci est ensuite remplacée par une somme d'argent, ce qui permet de partager le prix si nécessaire. Une loi, datant du 4 avril 1796, est établie afin de définir le nombre, le rythme des annonces et des remises des prix : six prix sont décernés par an, c'est-à-dire deux pour chaque classe (Crosland, 2002, p. 271).

Pour la première Classe, les deux prix sont attribués en alternance entre les Sections des Sciences mathématiques et les Sections des Sciences physiques ou naturelles (Maindron, 1881, p. 53). À partir de 1803, les deux prix sont transformés en un « Grand prix » annuel de 3 000 f (Demeulenaere-Douyère, 1996, p. 69). D'après Maurice Crosland, ce « Grand prix » devient le prix le plus prestigieux de l'Académie, même si les autres prix sont aussi renommés (Crosland, 2002, p. 273). Tous les prix n'ont donc pas la même considération.

Ces concours sont importants pour l'Académie des sciences. Ils permettent d'orienter, de diriger la recherche, de superviser les progrès scientifiques et techniques. La qualité des sujets soumis par l'Académie lui permet d'acquérir une certaine renommée et de se placer au centre de la vie scientifique. Ainsi le choix des sujets des concours est important. Il dépend de l'objectif fixé : soit l'Académie veut mettre à l'honneur et faire progresser un thème déjà à l'étude par certains savants, soit elle fixe un thème « inédit » qui peut intéresser les savants et faire progresser les sciences. La rédaction est confiée à des académiciens dont les identités ne figurent pas sur le sujet. Leur nom peut éventuellement apparaître dans des correspondances ou dans des rapports de l'Académie des sciences (Scheler, 1961, p. 257).

Le sujet étant approuvé par la Classe, le concours est proposé à l'ensemble de la communauté par l'intermédiaire d'annonces dans les journaux. Par exemple le *Moniteur universel* du mercredi 29 mars 1809 annonce le programme du Prix des mathématiques auquel Germain participe. Ainsi, le fait que le programme soit visible et donc accessible non seulement aux savants parisiens mais aussi aux savants provinciaux et étrangers, en fait une particularité des concours de l'Académie des sciences. De plus, l'Académie revendique l'égalité en imposant l'anonymat pour chaque pièce reçue lors d'un concours. En effet, chaque participant écrit une devise latine au haut de la première page de son mémoire, devise reprise sur une enveloppe contenant le nom et l'adresse de l'auteur. Cette enveloppe n'est officiellement ouverte que si le candidat est primé. Cependant le nombre de savants participant à ces concours n'étant pas si important, les noms des auteurs des travaux rendus pouvaient être connus. Germain, en participant à un

concours de l'Académie, se plie à cette exigence et écrira à trois reprises une devise latine. Si le prix n'est pas décerné, ou si la commission juge que la question n'est pas complètement résolue, elle peut être remise au concours. Par exemple, pour le sujet de 1770, *Perfectionner les méthodes sur lesquelles est fondée la théorie de la Lune, fixer par ce moyen celles des équations de cette planète qui sont encore incertaines et examiner en particulier si on peut rendre raison par cette théorie de l'équation séculaire du mouvement de la lune*, le prix a été partagé entre Léonhard Euler et Jean-Albert Euler. Mais la question a tout de même été remise au concours pour 1772 (Maindron, 1881, p. 21).

Ces concours jouent un rôle majeur pour l'Académie des sciences de Paris, mais aussi pour les participants. Si certains savants sont guidés par une motivation financière, d'autres recherchent la notoriété. Pour un jeune savant, être primé par l'Académie des sciences de Paris correspond à la plus grande distinction qu'elle peut lui faire. Cette récompense peut lui ouvrir les portes de l'Académie. Quelles que soient leurs raisons, tous les participants sont motivés par le symbole que ces concours représentent.

Germain, qui ne communique qu'avec certains académiciens et savants renommés, doit avoir la même vision qu'eux concernant les concours de l'Académie des sciences d'autant plus qu'elle considère qu'elle fait partie de leur monde. S'intéresser aux sujets proposés par l'Académie doit donc être une évidence pour elle. Et c'est ce qu'elle fait vraisemblablement puisqu'en 1809 elle oriente ses recherches vers un domaine complètement inconnu pour elle, l'élasticité, après avoir apparemment lu le nouveau sujet du Grand prix de mathématiques. D'après ses dires dans la partie *Avertissement* du mémoire qu'elle a publié en 1821, son intérêt au début n'était pas de concourir, mais seulement de se confronter à un problème annoncé difficile. Seul le défi l'a poussée à étudier le problème proposé au concours par l'Académie, problème dont le sujet diffère totalement des travaux qu'elle a menés jusqu'à cette date.

Quel est donc l'origine et le sujet de ce concours qui intrigue Germain ?

3.2.3 Chladni et ses expériences

L'origine du concours

Un allemand, Ernst Chladni (1756-1827), juriste de formation, musicien, physicien passionné par l'acoustique, fait des recherches expérimentales sur les sons émis par les vibrations des plaques (Ullmann, 1996). En visite à Paris depuis décembre 1808, le lundi 19 il présente aux membres de la Classe des sciences physiques et mathématiques et à ceux de la Classe des beaux-arts, un nouvel instrument de musique qu'il a

lui-même fabriqué, le clavicylindre (Stöckmann, 2007, p. 15-23). Un article qui est extrait du procès-verbal et écrit par Gaspard Prony figure dans le journal le *Moniteur universel* datant du jeudi 12 janvier. Ce rapport contient une description détaillée du clavicylindre. Mais comme Chladni ne veut dévoiler le mécanisme, seul l'effet musical est décrit. On ne peut y lire que des éloges sur l'instrument de musique et la confiance qu'ont les savants parisiens en Chladni. À la fin du rapport il est précisé que Chladni fera des démonstrations publiques du clavicylindre. En effet, des annonces de sa présentation sont visibles dans deux journaux : le *Journal de l'Empire* du lundi 23 janvier et du vendredi 27 janvier 1809 et le *Moniteur universel* dans lequel la première annonce apparaît le 22 janvier 1809, puis du 24 janvier au 4 février, du 9 au 11 février, du 13 au 16 février et le 19 et 20 février 1809 (Fig. 3.2, p. 30).

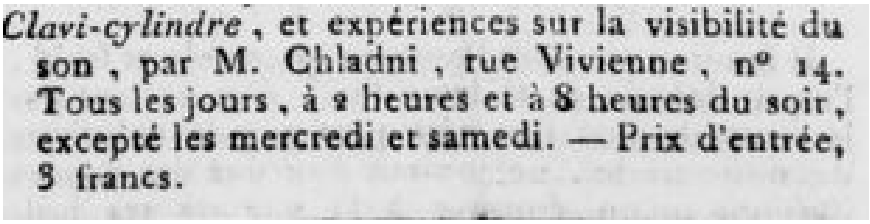

Clavi-cylindre, et expériences sur la visibilité du son, par M. Chladni, rue Vivienne, n° 14. Tous les jours, à 2 heures et à 8 heures du soir, excepté les mercredi et samedi. — Prix d'entrée, 3 francs.

Figure 3.2 – Extrait du Journal le *Moniteur universel*

Une publicité importante autour de son invention est faite dans les journaux. Apparemment les représentations de Chladni forment l'évènement du moment, du moins auprès de la communauté scientifique. La présentation de l'instrument de musique est suivie d'une démonstration d'expériences mettant en évidence des figures représentant différents sons émis par des plaques vibrantes de formes différentes. Le principe de ces expériences consiste à faire vibrer de fines plaques recouvertes de sable fin, en donnant un coup d'archet sur les bords, et en variant le point d'appui de la plaque. Chladni explique, dans la préface de son *Traité d'acoustique* comment il est arrivé à imaginer ses expériences. En 1785, il réalise des expériences encore imprécises sur des plaques de verre ou de métal. Il remarque qu'il obtient différents sons mais ne trouve aucune indication ni aucune explication sur la nature des vibrations de la plaque correspondant à chaque son. L'idée d'utiliser un archet de violon pour faire vibrer différents corps sonores lui vient en lisant des journaux. Il y découvre un article sur un instrument de musique formé de cloches et fabriqué en Italie par l'abbé Alexis-Symmaque Mazzocchi [19]. Ce

19. L'abbé Alexis-Symmaque Mazzocchi (1684-1771) est un savant antiquaire italien. Il fait des études de théologie à Naples, est ordonné prêtre en 1709 dans son bourg natal, le bourg de Sainte-Marie. Il retourne à Naples où il enseigne le grec et l'hébreu dans le séminaire de l'Archevêché. Il est nommé chanoine de la Cathédrale de Capoue, puis de la Cathédrale de Naples. Il étudie l'Écriture

dernier applique un archet de violon sur les cloches pour les faire vibrer et obtenir des sons. D'autre part, il s'inspire aussi des expériences réalisées par Georg Christoph Lichtenberg[20] et publiées dans les *Mémoires de la Société Royale de Göttingue* (Chladni, 1809, vij). Celui-ci obtient des figures électriques sur une plaque de résine saupoudrée. Chladni suppose que le même phénomène se produit pour les vibrations d'une plaque de verre ou de métal : à chaque son doit correspondre une figure particulière. Comme Lichtenberg, Chladni va faire apparaître les différentes figures en saupoudrant sur la plaque du sable ou une autre matière (Chladni, 1809, vj-vij).

Chladni a donc adapté à son cas d'étude des méthodes utilisées lors d'expériences réalisées par d'autres savants avant lui. Ces expériences lui ont permis d'améliorer les siennes. Il a combiné les outils utilisés dans deux types d'expériences pour découvrir, grâce à ses propres expériences, un nouveau phénomène (Fig. 3.3, p. 31).

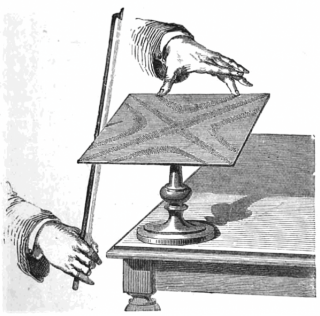


Figure 3.3 – Image issue de l'ouvrage de William Henry Stone, *Elementary Lessons on Sound*, 1879, p.25

Les grains de sable se concentrent sur des courbes ou des lignes de points immobiles, appelées lignes nodales. Celles-ci forment des figures géométriques, plus ou moins compliquées, symétriques et dépendent des vibrations imposées à la plaque (Fig. 3.4, p. 32).

Ce phénomène n'a jamais été observé auparavant. Chladni évoque le fait que les courbes obtenues répondent à des lois mathématiques constantes dont on ne connaît pas encore de modèle.

Ces expériences, qui ouvrent un champ nouveau à l'acoustique, intriguent les académiciens parisiens dont Laplace. Ce dernier, accompagné de Étienne Lacépède, Berthollet, Alexandre Humbolt, Poisson, Claude-Louis Navier, Jean-Baptiste Biot et Savart présente Chladni à Napoléon Bonaparte un soir de février 1809 (Musielak, 2020,

sainte et fait connaître les tables d'Héraclée peu après leur découverte en 1732. (*Histoire de l'Académie royale des inscriptions et belles-lettres* 1777, p. 283-290)

20. Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799) est un philosophe, écrivain et physicien allemand.

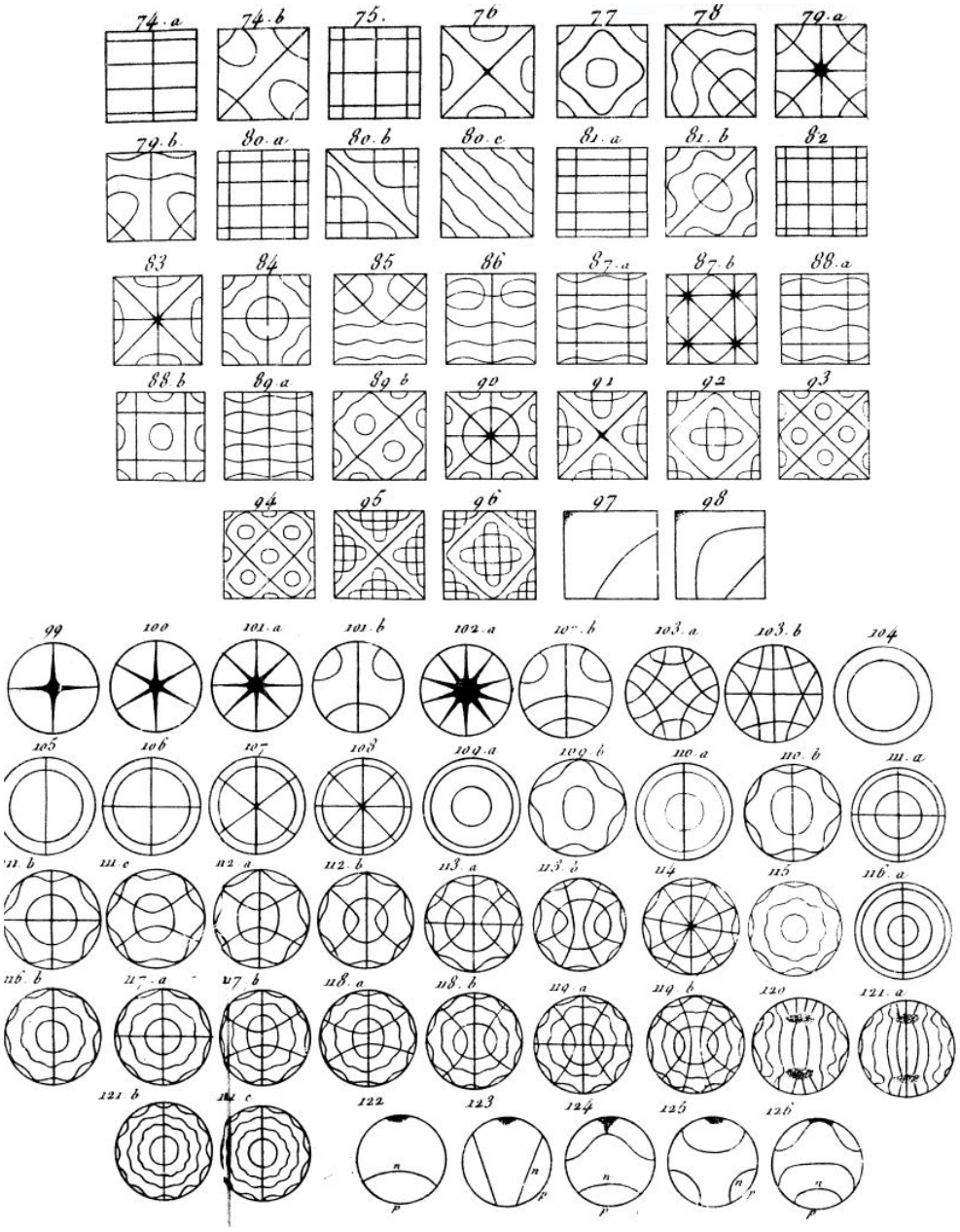


FIGURE 3.4 – Différentes figures de Chladni obtenues sur des surfaces carrées et circulaires (CHLADNI, 1809, planches 5 et 6)

p. 54). Cette rencontre est rapportée dans la *Revue et Gazette Musicale de Paris* du dimanche 14 octobre 1838. Chladni raconte lui-même le déroulement de la soirée. Chladni renouvelle donc devant Napoléon sa représentation (Fig. 3.5, p. 33).

Chladni est donc chaleureusement accueilli à Paris par les savants. Non seulement il est invité à participer aux séances de l'Académie des sciences, mais il est également invité par Napoléon. Ses travaux et son ouvrage intéressent au plus haut point la

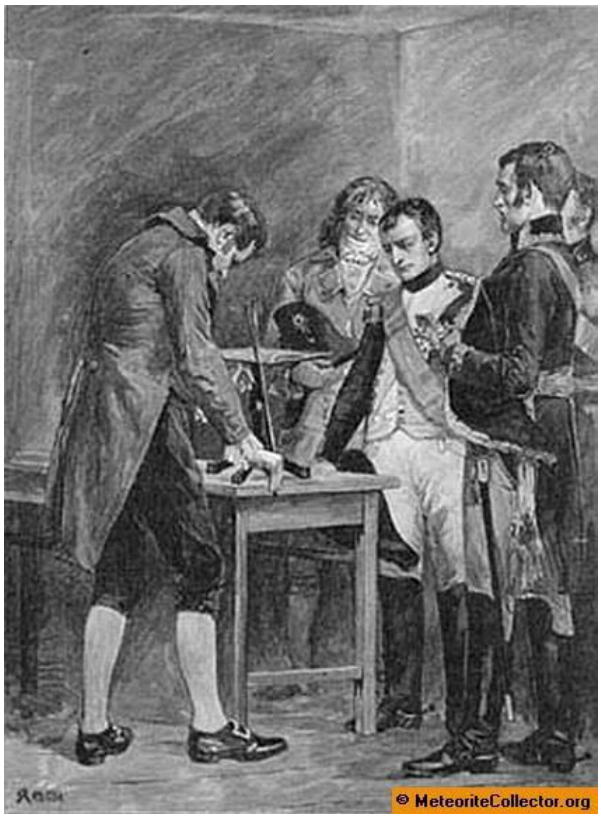


FIGURE 3.5 – Image provenant de l'ouvrage *The correspondance between Sophie Germain and Gauss* d'Alessandra Fiocca » (FIOCCA, 2014)

communauté scientifique. Ses instruments de musique et ses expériences intriguent et impressionnent l'Empereur. Le lendemain de la rencontre, Chladni reçoit la somme de 6 000 francs et une demande de traduction en français de son ouvrage *Die Akustik* publié en 1802. Chladni accepte et va lui-même traduire son ouvrage en y faisant quelques modifications :

> « Mon Ouvrage allemand ne pouvait pas être traduit dans une autre langue, sans quelques changemens convenables ; un autre traducteur quelconque y aurait peut-être mélé du sien, et m'aurait fait dire quelque chose que je n'ai pas dit ; c'est pourquoi j'ai entrepris moi-même ce travail. » (CHLADNI, 1809, iij)

En 1809, le prix en galvanisme n'a pas été décerné. Legendre propose alors de doubler le prix. Mais les expériences de Chladni ont impressionné les savants à tel point que, lors de la réunion de la Classe du lundi 13 février 1809, une autre proposition est faite : utiliser les 3 000 francs pour encourager l'analyse mathématique des expériences présentées par Chladni sur les vibrations des plaques résonnantes :

> « La Commission du galvanisme propose de demander à S. M. I. que les 3000F qui n'ont pu être donnés cette année pour une découverte sur le galvanisme, soient destinés à un travail sur l'analyse mathématique des expériences faites par Chladni sur les *vibrations* des plaques sonores. » (*Procès-verbaux* 1808-1811, p. 162)

Cette proposition est approuvée lors de la séance publique de l'Académie des sciences du lundi 27 février 1809 :

> « M. Delambre annonce que S. M. I. a approuvé l'idée de proposer cette année un prix de 3000F pour la théorie mathématique des expériences de M. Chladni ; cette somme sera celle qui avoit été destinée pour le galvanisme en 1808 et qui n'avoit pas été employée. » (*Procès-verbaux* 1808-1811, p. 170)

Durant cette même séance, une commission est nommée pour établir un programme pour ce prix, alors même que Chladni n'a pas encore présenté son ouvrage en français : « MM. Lagrange, Laplace, Legendre, Prony, René Just Haüy sont nommés au scrutin pour rédiger le programme sur les expériences de M. Chladni ». (*Procès-verbaux* 1808-1811, p. 173)

Le sujet du concours

Le lundi 13 mars 1809, lors de la séance publique de la Classe, Prony annonce le programme qui est validé : « M. Prony, au nom d'une Commission, lit le programme du prix extraordinaire sur la théorie mathématique des expériences de M. Chladni. Ce programme est adopté. » (*Procès-verbaux* 1808-1811, p. 175)

Ce programme, figurant à la fin de l'ouvrage *Traité d'acoustique* de Chladni,décrit de façon détaillée le sujet de ce Prix de mathématiques. Il rappelle dans un premier temps l'époque à partir de laquelle la théorie sur l'élasticité a vraiment été développée, à savoir la fin du XVIIe siècle. Plusieurs noms de savants et leurs contributions à cette théorie sont évoqués : Joseph Sauveur, Brook Taylor, Daniel Bernoulli, Jean Le Rond D'Alembert, Euler, Lagrange, Poisson. Les travaux de certains d'entre eux sont davantage détaillés. Ainsi les expériences menées par Joseph Sauveur sont qualifiées d'« ingénieuses ». Elles ont permis de matérialiser « la division de la corde sonore en plusieurs *ondes* séparées par des *nœuds* ou *points de repos* ». Il est également mentionné sa comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux, comparaison qui sera d'ailleurs aussi demandée dans le cas bidimensionnel pour ce concours. Le programme s'attarde ensuite sur l'ordre de l'équation différentielle modélisant les vibrations de la corde sonore et du ressort. Il

est précisé que l'étude devient plus complexe dans le cas bidimensionnel. Deux classes de phénomènes acoustiques sont proposées. Le premier type de phénomènes est obtenu par les vibrations des membranes ou des peaux tendues de tambours, des timbales, une corde tendue et sans rigidité naturelle. Le deuxième type de phénomènes acoustiques peut être obtenu par les vibrations des plans ou lames métalliques, des verges à ressort. Les principaux travaux d'Euler sur cette théorie sont décrits. Deux de ses ouvrages sont cités.

Il est aussi indiqué que tous les travaux existants ne peuvent s'appliquer aux vibrations des surfaces élastiques. Les seules connaissances sur ce sujet sont celles fournies par Chladni. Ce dernier, grâce à des expériences, a permis de visualiser les vibrations des surfaces élastiques. Une correspondance avec le cas unidimensionnel est précisée : les *nappes vibrantes* des lames correspondent aux *ondes* des cordes, les lignes *d'équilibre* ou de *repos* correspondent aux *nœuds* ou *points de repos* des cordes. Le problème du cas bidimensionnel est encore à étudier. La Classe propose donc comme sujet pour le prix : « *donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, et la comparer à l'expérience* ». La date de remise des travaux est fixée au premier octobre 1811.

Les références concernant la théorie de l'élasticité relatées dans le programme du Prix de mathématiques ne sont plus les mêmes pour les historiens d'aujourd'hui. Les premières recherches évoquées dans le programme du Prix de mathématiques sont celles de Galilée. Suivent ensuite les travaux de Robert Hooke et Edme Mariotte. Joseph Sauveur ni Brook Taylor ne sont évoqués. Les autres mathématiciens, en particulier Euler, figurent également dans leur historique. Mais pour les historiens d'aujourd'hui, la théorie de l'élasticité commence la plupart du temps avec Henri Navier. L'approche historique n'est donc pas tout à fait similaire.

Le programme du Prix de mathématique donne beaucoup d'informations. Il permet d'avoir une base pour démarrer les recherches. Les savants intéressés par ce thème peuvent s'appuyer sur les références citées, les travaux et résultats du cas unidimensionnel et les expériences de Chladni. D'autre part, la séance de la Classe durant laquelle le programme est lu est publique. Toute personne présente à cette séance est donc informée de l'organisation de ce prix extraordinaire, le Prix de mathématiques. De plus, le programme de ce Prix de mathématiques [21] est intégralement publié dans le journal le *Moniteur universel* du mercredi 29 mars 1809. Dans ce même journal du lundi 3 avril 1809, un rapport, à nouveau écrit par Prony sur l'ouvrage *Acoustique* de Chladni adopté par la classe des sciences mathématiques et physiques et des beaux-arts lors des séances des 13 février et 18 mars 1809 est publié. Une description détaillée, partie par

21. Le programme du Prix de mathématique est reproduit en annexe A.

partie, de la traduction française que Chladni a lui-même faite de son ouvrage y est relatée. Un petit rappel historique concernant les travaux sur les vibrations et les sons déjà réalisés figure aussi dans ce compte-rendu. Il y est également précisé les difficultés qui persistent encore dans l'étude de ce domaine, domaine qui devrait intéresser encore beaucoup de mathématiciens. Ce rapport reprend quelques points figurant dans le programme du Prix de mathématiques.

Huit mois après l'annonce du programme du Prix de mathématiques, on peut lire, dans le procès-verbal de la séance du lundi 27 novembre 1809 : « M. Chladni présente sont *Traité d'acoustique* en français, in-8^0, Paris 1809 ». (*Procès-verbaux* 1808-1811, p. 162)

Ainsi la venue de Chladni à Paris est médiatisée. Ses recherches, ses expériences sont largement diffusées, plusieurs articles sur le sujet apparaissent dans le journal le *Moniteur universel*. Cette communication traduit une volonté de faire progresser la science dans ce domaine, d'inciter les savants à travailler et à se confronter à cette étude.

Ayant eu connaissance du sujet du concours, Germain peut donc s'appuyer à la fois sur les différents rapports figurant dans les journaux, sur le *Traité d'acoustique* de Chladni et sur le contenu du programme du Prix de mathématiques. Ces supports lui donnent des indications sur les travaux déjà réalisés. Ainsi avant d'étudier le sujet, elle analyse certains travaux antérieurs, comme ceux de Riccati ou de Lagrange qui sont cités dans l'ouvrage de Chladni. Mais elle se penche surtout sur les travaux d'Euler, nom qui apparaît à maintes reprises à la fois dans le *Traité d'acoustique* et dans le programme du Prix de mathématiques.

L'organisation du concours

Laplace est désigné pour organiser le concours. Il pense que Poisson, qui n'est pas encore membre de l'Académie des sciences à cette époque, pourrait faire connaître ses talents de mathématiciens et asseoir ainsi sa réputation (Bucciarelli et Dworsky, 2012, p. 6). Et effectivement, Poisson a déjà travaillé sur le son avant que le sujet soit mis au concours. Il a déjà eu la possibilité de lire le 17 août 1807 dans une séance de l'Institut son mémoire intitulé la *Théorie du son*. Concernant la vitesse de propagation du son dans l'air, il a également étudié la différence entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques de Newton. Il a donc déjà une certaine expérience dans la comparaison des différents résultats, comparaison aussi demandée dans le sujet du Prix de mathématiques. De plus, tout comme Laplace, Poisson s'est intéressé aux planètes. Lors de cette étude, il a eu l'occasion de montrer ses capacités mathématiques, son

adresse concernant les calculs et a écrit un mémoire à ce sujet *Sur la pluralité des intégrales dans le calcul*. Poisson est donc le candidat idéal pour résoudre le problème posé au concours, même si les outils mathématiques nécessaires ne sont pas encore complètement développés.

Cette présentation de l'organisation du concours contribue, entre autres, à entretenir une certaine légende autour de Germain. Mais que nous apprend le parcours encore aujourd'hui parfois romancé de Germain sur le monde scientifique du XIXe siècle ? Sur les savants eux-mêmes, leurs pratiques ?

3.3 Biographie de Germain : hier et aujourd'hui

Certains éléments des récits biographiques sur Germain contribuent à enjoliver sa vie, relèvent plus de la légende que de la réalité. Quelques anecdotes, déjà relatées par les contemporains de Germain, perdurent dans le temps. Ainsi deux histoires, relatées par Libri et reprises dans pratiquement tous les ouvrages et articles encore aujourd'hui, font partie de la légende concernant sa vie. La première est celle de la fin tragique d'Archimède qu'elle aurait lu dans l'*Histoire des mathématiques* de Montucla. Ce mythe aurait éveillé la curiosité de Germain sur un domaine lui étant totalement inconnu. Il serait à l'origine de sa passion pour les mathématiques. Ce récit révèle l'intérêt que portent en général les savants à leurs recherches. Les thèmes qu'ils abordent les captivent. Ils lisent les productions de leurs contemporains, s'informent des dernières découvertes. Les traces écrites sont très importantes. Elles peuvent permettre aussi de revendiquer la primauté d'un résultat.

Cet enthousiasme pour les mathématiques chez Germain est également mis en avant par une deuxième histoire relevant davantage de la légende que d'un récit réel. Il s'agit de l'épisode décrivant la première réaction de ses parents quand ils voient Germain passer tout son temps à étudier les mathématiques, et comment ils essaient de l'en dissuader. Cette anecdote nous renseigne sur le type de personnes ayant la possibilité de suivre un enseignement scientifique, le type de personnes admises dans les institutions scientifiques comme les universités, les écoles d'ingénieurs, l'École polytechnique. Le fait de décrire Germain seule chez elle à étudier les mathématiques, le fait qu'elle utilise le nom d'Antoine-Auguste Leblanc pour se procurer certains cours permettent de considérer que la formation scientifique est réservée aux jeunes hommes. Les filles ne peuvent intégrer ces instituts. Pour pouvoir bénéficier d'une instruction scientifique, les jeunes femmes ont la possibilité d'apprendre chez elle, ou comme nous l'avons déjà vu, de suivre des cours publics, des démonstrations scientifiques présentées par exemple

dans les rues, des salons. Elles peuvent avoir connaissance des lieux et dates de ces démonstrations grâce aux annonces faites dans certains journaux. Il s'agit d'une instruction scientifique superficielle, le destin des jeunes femmes n'étant pas de faire une carrière scientifique. Le type d'initiation à la science qui est réservé aux femmes est aussi illustré par le récit, certes sûrement idéalisé, de la rencontre de Germain avec Lalande, rencontre déjà évoquée auparavant. Bien qu'aucun document relatant cette altercation n'a été retrouvé, il y a bien eu un malentendu entre eux. Une lettre d'excuse de Lalande [22] peut en témoigner. D'après cette confrontation, racontée uniquement en se basant sur la lettre d'excuse de Lalande, il existe des livres spécialement écrits pour les femmes. Ces ouvrages ne font qu'aborder les notions scientifiques. Même si, comme nous l'avons déjà vu, certaines femmes collaborent avec certains savants en tant que calculatrices, assistantes, elles n'ont pas le titre de « mathématiciennes »(Le Lay, 2004). La plupart du temps, elles ne sont pas reconnues, elles restent dans l'ombre des mathématiciens avec lesquels elles travaillent(Boucard et Lémonon, 2018). Ce manque de reconnaissance du milieu scientifique en tant que femme et mathématicienne peut aussi être sous-entendu dans le fait que Germain choisit, au début de sa correspondance avec Lagrange puis avec Gauss, un pseudonyme masculin Antoine-Auguste Leblanc(Stupuy et Germain, 1896). Cet emprunt est bien réel puisque des lettres signées Leblanc et écrites par Germain ont été retrouvées ; Leblanc ne les lui a pas dictées. Une lettre dans laquelle Germain révèle à Gauss sa supercherie le confirme [23]. Cette ruse utilisée par Germain encore racontée aujourd'hui, est déjà mentionnée par Libri dans la notice qu'il a écrite, mais ce dernier n'indique pas le nom d'emprunt qu'elle avait utilisé(Germain, 1833, p. 12). Les savants avec qui elle correspondait à cette époque n'auraient-ils pas lu sa correspondance si elle avait signé de son propre nom ? C'est apparemment ce que Germain pense. Mais son parcours permet d'affirmer le contraire. En effet, comme nous l'avons déjà évoqué, Lagrange et Gauss, en apprenant sa véritable identité, continuent à s'entretenir avec elle, à collaborer, à l'encourager à poursuivre, à approfondir ses travaux(Germain, 1833, p. 12-13). D'autres savants n'hésitent pas à vouloir la rencontrer, discuter « mathématiques » avec elle, lui proposer leur aide. Ils l'intègrent dans leur milieu, la considèrent comme une collègue. Ces mathématiciens ne font aucune différence. Ils se comportent avec elle comme avec n'importe quel scientifique masculin : pour preuve, les invitations à dîner, les visites à son domicile, la correspondance, les

22. Cette lettre est reproduite en annexe B.

23. Extrait de la lettre écrite le 20 février 1807 par Germain à Gauss dans laquelle elle lui fait par de son subterfuge : « cette circonstance me détermine à vous avouer que je ne vous suis pas aussi parfaitement inconnue que vous le croyez ; mais que, craignant le ridicule attaché au titre de femme savante, j'ai autrefois emprunté le nom de M. Le Blanc pour vous écrire et pour vous communiquer des notes ». (Stupuy et Germain, 1896, p. 271-273)

échanges d'ouvrages et grâce à Fourier les invitations aux séances publiques de l'Académie. Le milieu scientifique du début du XIXe siècle n'est apparemment pas un milieu aussi fermé, même si Germain peut sous-entendre qu'elle est écartée du monde des mathématiciens, qu'elle n'arrive pas toujours à se procurer les mémoires de certains savants qui lui seraient utiles. D'autres savants doivent sûrement rencontrer les mêmes difficultés. En s'affichant parfois en « victime », Germain n'est pas étrangère à ce mythe qui s'est créé autour d'elle. Certes, comme cela a déjà été évoqué précédemment, il y a des savants qu'elle n'a pu rencontrer. D'après une des lettres qu'elle a envoyée à Libri et datée du 15 septembre 1826 [24], Savart fait partie des scientifiques avec lesquels elle ne s'est jamais entretenue mais avec lequel elle aurait bien aimé coopérer. Mais est-ce parce que ce dernier ne voulait pas la rencontrer ? En arrivant à Paris, Savart rencontre rapidement Biot avec lequel il va travailler et qui va l'introduire dans les salons (Houssay, 2009, p. 3). Or nous n'avons retrouvé aucune correspondance, aucune évocation d'une rencontre entre Biot et Germain. Cette dernière et Savart ne fréquentent donc ni les mêmes lieux, ni forcément les mêmes personnes. De plus, Savart n'arrive à Paris qu'en 1819, donc bien après l'organisation du concours et la remise de son prix à Germain (Ségal, 2015, p. 82) . Il n'a donc pas eu connaissance des réactions de la part de certains savants, Biot y compris, sur les mémoires qu'elle a soumis au concours. Toutes ces circonstances peuvent expliquer le fait que Germain et Savart ne se soient jamais rencontrés. Il ne s'agit pas forcément d'un refus de la part de ce dernier.

Les différentes difficultés que Germain évoque sont également rencontrées par bien d'autres scientifiques. Germain ne représente pas une exception ni un cas isolé. Au contraire, elle a bien mieux été intégrée et s'est bien mieux intégrée au sein de ce milieu scientifique que certains de ses contemporains masculins. Par exemple Joseph-Diaz Gergonne a créé les *Annales de Gergonne* pour permettre aux mathématiciens peu connus n'ayant pas la possibilité de publier leurs articles dans d'autres journaux, lui-même n'ayant pas accès, d'après Christian Gérini, au *Journal de l'École polytechnique* et à la *Correspondance* de Hachette. (Gérini, 2008) Le mathématicien Christian Kramp [25] publie également dans ces annales.

Les remarques que Germain glisse dans une lettre ou un ouvrage et relevées dans les biographies faites au XXe siècle et au XXIe siècle ne sont qu'une occasion supplémentaire pour la marginaliser davantage, l'idéaliser, pour légitimer les témoignages sur sa mise à la marge de la société scientifique, pour faire d'elle un personnage mythique. Ces

24. Cette lettre figure en annexe B.

25. Christian Kramp (1760-1826) est un mathématicien alsacien. Il a travaillé sur les factorielles, est le premier à utiliser la notation $n!$ dans son ouvrage « Éléments d'Arithmétique Universelle » en 1808.

anecdotes qui illustrent son parcours ne font qu'entretenir une certaine part de légende autour d'elle.

Chapitre 4

Les premiers travaux et résultats de Germain sur la vibration des surfaces élastiques

Alors que, jusqu'en 1809, Germain travaillait sur la théorie des nombres et obtenait des résultats encourageants, elle change radicalement de sujet d'étude. Elle se met à étudier la vibration des surfaces élastiques suite à un concours mis en place par l'Académie des sciences.

Qu'est-ce qui a fait qu'elle se lance dans une nouvelle aventure ? N'ayant pas retrouvé d'explications vraiment concrètes de la part de Germain, seules quelques conjectures peuvent être énoncées. Durant ses recherches concernant la théorie des nombres, elle entretenait une correspondance avec Gauss. Or, vers 1809, ce dernier interrompt son étude sur la théorie des nombres pour s'intéresser aux mathématiques appliquées. À partir de cette date, plus aucune lettre envoyée par Gauss à Germain n'est retrouvée. Il semblerait qu'il ait arrêté de s'entretenir avec elle sur leur sujet d'étude commun. Cela pourrait expliquer le changement d'orientation de Germain.

Mais pourquoi a-t-elle choisi ce sujet d'étude ? Apparemment, comme beaucoup de savants, Germain s'intéresse aux sujets mis aux concours par l'Académie des sciences. De plus, les expériences de Chladni impressionnent les mathématiciens et elle en entend probablement parler, elle a peut-être même pu assister à une démonstration faite par Chladni. D'autre part, ce domaine, totalement différent de la théorie des nombres lui permet sans doute d'oublier ses travaux antérieurs et de recommencer sur de nouvelles bases. Elle avait peut-être aussi tout simplement envie de changement dans ses recherches et se sentait attirée par ce nouveau thème d'étude.

Avant d'aborder cette notion totalement inédite pour elle, Germain étudie, dans un premier temps, des travaux sur les vibrations dans le cas unidimensionnel. Cette étude lui a été soufflée par le sujet du programme qui dévoile les importants et remarquables travaux réalisés par Euler. D'autre part le journal le *Moniteur universel* du 3 avril 1809 communique un rapport [1] lu lors d'une séance de la Classe dans lequel sont signalés les expériences de Chladni ainsi que son ouvrage traduit en français sous le titre *Acoustique*. On y signale également des expériences réalisées par Giovanni Paradisi, ainsi que l'étude réalisée par Biot sur le mouvement des surfaces vibrantes planes. Mais il est aussi précisé qu'on ne peut pas aborder la modélisation des expériences de Chladni de la même façon que Biot. Ce dernier a privilégié l'étude analytique au détriment du sens physique des expériences de Chladni. Cela pourrait expliquer le fait que Germain ne s'est pas appuyée sur les travaux de Biot et qu'elle a préféré ceux d'Euler ?

Dans ses écrits, elle cite deux mémoires de ce dernier, *Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudente, sive solutio problematis isoperimetrici Latissimo sensu accepti* (Euler, 1744) et *Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt* (Euler, 1779) qu'elle a consultés. Elle s'est particulièrement intéressée au deuxième, le plus récent. Germain précise que, dans ce mémoire, Euler a fait la même étude et obtenu les mêmes résultats que dans le premier mémoire, mais son étude est plus méthodique (Germain, 2013, p. 220). Quels sont les résultats d'Euler qui ont intéressé Germain ? Comment a-t-elle relié le cas unidimensionnel au cas bidimensionnel ?

4.1 Les principales références de Germain

4.1.1 Les principaux résultats d'Euler dans le cas unidimensionnel

Quand Euler rédige le mémoire *Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt*, il travaille sur le problème des lames élastiques depuis plusieurs décennies. Dès le début de son mémoire, Euler détermine l'équation traduisant l'équilibre d'une lame élastique.

OV est un axe fixe, Y est un point quelconque de la lame, $OX = x$ et $XY = y$ sont les coordonnées orthogonales, $EY = s$ est une portion de la lame.

On a : $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

1. Ce rapport est signé par de Lacépède, Haüy, Nicolas Mérul, François-Joseph Gossec, André Grétry, Joachim Le Breton et Prony. Ce dernier est nommé rapporteur.

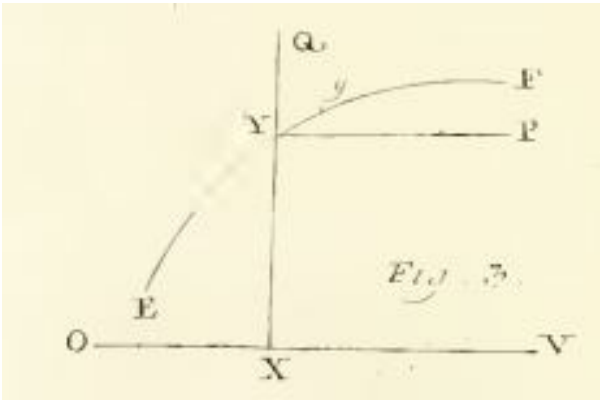


FIGURE 4.1 – Schéma réalisé par Euler

Pour l'élément $Yy = ds$, sa masse est donnée par Sds où S est l'épaisseur de la lame.
Il pose V l'élasticité absolue, r le rayon de courbure.
Il exprime, sans aucune indication, le moment d'élasticité par la formule $\frac{V}{r}$.
Si l'élément Yy est sollicité, alors $YP = Pds$ et $YQ = Qds$.

Il parvient à l'équation d'équilibre suivante :

$$\int dy \int Pds - \int dx \int Qds = \frac{V}{r}$$

où P et Q sont des forces élémentaires appliquées à la partie $EY = s$ de la lame.

Il obtient le membre de gauche en calculant le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point M se trouvant sur la partie $EY = s$:
$\overrightarrow{\mathfrak{M}}(\overrightarrow{F}) = \int d\overrightarrow{\mathfrak{M}}(\overrightarrow{df})$ avec $\overrightarrow{F} = \int \overrightarrow{df}$ et $\overrightarrow{df}\ (-YP; -YQ)$ soit $\overrightarrow{df}\ (-Pds; -Qds)$.
$\overrightarrow{\mathfrak{M}}(\overrightarrow{F}) = \int (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{df})$ avec $\overrightarrow{OM}\ \left(\int dx; \int dy\right)$ [2]
$\overrightarrow{\mathfrak{M}}(\overrightarrow{F}) = \int \left(-Qds \int dx + Pds \int dy\right)$
d'où $\overrightarrow{\mathfrak{M}}(\overrightarrow{F}) = -\int dx \int Qds + \int dy \int Pds$.

L'équation d'équilibre obtenue par Euler sera l'équation de référence de Germain.

En considérant la notion de temps t, la pesanteur g, et après quelques calculs, Euler obtient l'équation du mouvement d'une lame élastique :

$$E\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) + \frac{cc}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -bc^4\left(\frac{d^4y}{ds^4}\right)$$

où E est la tension au point y, cc est l'épaisseur de la lame, b est l'élasticité dépendant du matériau de la lame.

2. Les notations ne sont pas celles utilisées par Euler. Je les ai modernisées.

Il étudie quelques cas particuliers comme par exemple le cas où l'élasticité b est négligeable. Il compare aussi le mouvement de la lame élastique à celui d'un pendule simple.

Nous verrons que Germain suivra le même plan.

Euler regarde aussi différents cas, plus précisément six cas, suivant le point d'attache de la lame : extrémités libres ou appuyées ou fixées [3]. L'équation traduisant les vibrations d'une lame obtenue par Euler est :

$$0 = 2\left(1 - e^{2\omega}\right) - \left(e^{\lambda\omega} - e^{(2-\lambda)\omega}\right)\left(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}\right)\frac{\sin\omega}{\sin\lambda\omega\sin\left(1-\lambda\right)\omega}$$

où λ est l'endroit où le stylet est appliqué sur la lame et $\omega = \frac{a}{f}$, a étant la longueur de la lame et f est la fréquence de vibration.

Ces cas intéressent Germain. Elle traduit la partie du mémoire d'Euler traitant le cas où la lame est appuyée à ses extrémités, et celle où la lame est appuyée non seulement à ses extrémités mais aussi au milieu de la longueur. Elle analyse aussi en détails deux autres cas : le premier où la lame est fixée à ses deux extrémités et le deuxième où la lame est appuyée à une extrémité et fixée à l'autre (Germain, 2013, p. 220-396).

Ne comprenant pas tous les calculs d'Euler, elle sollicite l'aide de Legendre comme le signalent les lettres [4] de ce dernier qui contiennent des explications adressées à Germain. Malheureusement les lettres écrites par Germain n'ont pas été retrouvées, seules existent encore les réponses de Legendre. Ces trois lettres sont envoyées successivement, durant une période assez courte. Elles indiquent aussi que Legendre ne connaît pas vraiment les travaux d'Euler sur les vibrations des lames élastiques. Mais il fait l'effort de les consulter pour pouvoir répondre au mieux aux interrogations de Germain.

Non seulement, Germain se penche sur des études particulières menées par Euler dans son mémoire, mais elle n'hésite pas à donner son point de vue (Germain, 2013, p. 230-396).

Elle reprend tout d'abord le cas où la lame est simplement appuyée à l'une et l'autre de ses extrémités et le stylet appliqué en un point quelconque le long de la lame. Mais

3. Une extrémité est dite fixée quand « elle est encastrée dans un mur ou serrée dans un étau. »

Une extrémité est dite appuyée quand « on fait appuyer par un étau ou par une machine une planche (ou un corps immobile) contre laquelle repose l'extrémité de la lame. »

Deux extrémités sont dites appuyées quand « des planches (ou d'autres corps assez immobiles) sont pressées contre les deux extrémités de façon à ce qu'elles ne puissent pas se déplacer. » Germain définit le mot « appuyé » de façon analytique. Elle emploie ce terme pour désigner le positionnement des extrémités quand les deux conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0$ sont vérifiées.

4. Ces lettres sont en annexe B.

Euler se contente d'étudier les différents cas lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, c'est-à dire lorsque le stylet est appliqué au milieu de la lame.

L'équation obtenue par Euler s'écrit donc :

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - \left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{3}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\frac{\sin\omega}{\sin^2\frac{1}{2}\omega}.$$

Après quelques calculs, cette équation devient :

$$0 = \sin\frac{1}{2}\omega\left[(1+e^{\omega})\sin\frac{1}{2}\omega - (e^{\omega}-1)\cos\frac{1}{2}\omega\right].$$

Euler obtient donc deux solutions à cette équation.

La première solution est $\sin\frac{1}{2}\omega = 0$.

La deuxième solution s'écrit $(1+e^{\omega})\sin\frac{1}{2}\omega - (e^{\omega}-1)\cos\frac{1}{2}\omega = 0$.

Germain pense que la deuxième solution donnée par Euler ne convient pas. Cette solution suppose, d'après elle, que la lame ne vibre pas. Elle reprend l'étude dans le cas général, c'est-à-dire quel que soit λ. Elle cherche à prouver que cette deuxième solution ne peut traduire ce qui est observé, aussi bien par rapport aux mouvements que par rapport aux sons (Germain, 2013, p. 230-246).

Germain, bien que novice dans ce domaine d'étude, n'hésite pas à donner son sentiment, à infirmer un résultat d'Euler. Le fait qu'elle discute, rectifie les résultats, les travaux d'Euler peut être dû au fait qu'elle a déjà communiqué auparavant avec des scientifiques, des académiciens comme par exemple avec Gauss ou avec Lagrange. Sa correspondance avec Gauss, ses relations avec certains savant lui ont permis de côtoyer le milieu scientifique. L'insertion dans cette société assez restreinte lui permet apparemment de profiter de certaines opportunités : par exemple échanger avec des savants en étant considérée comme quasiment une des leurs ou reprendre certains résultats, les commenter. Ainsi le cas de Germain rappelle un mode de fonctionnement du milieu scientifique. Si le travail d'un scientifique encore inconnu, quel qu'il soit, est remarqué par un savant, ce dernier peut l'introduire au sein du monde scientifique. Il a alors la possibilité de faire d'autres connaissances, de discuter, de débattre sur des travaux déjà existants avec d'autres savants. Intégrer ce milieu lui permet aussi d'acquérir le droit de revenir sur les résolutions de certains problèmes et de les interpréter. L'attitude de Germain nous fait découvrir une autre facette de la société scientifique. Quelle que soit la personne, qu'elle soit renommée ou non, qu'elle ait beaucoup d'expériences ou non, à partir du moment où elle a réussi à entrer dans le milieu, elle accède à certains avantages comme participer à des débats que ce soit par oral ou par écrit grâce à des

lettres, des articles. D'après certaines correspondances, publications ou controverses, les savants ont l'habitude d'analyser les études de leurs homologues. Germain étant déjà introduite auprès de certains scientifiques, sa réflexion sur des résultats d'Euler ne les étonnent donc pas.

Elle analyse ensuite le cas où la lame a ses deux extrémités libres. Elle rejette à nouveau la deuxième solution émise par Euler. Elle en déduit une analogie entre ces deux cas, à savoir celui où les extrémités de la lame sont appuyées et celui où elles sont libres. Mais cette analogie n'est qu'apparente. Il y a de grandes différences. Pour le cas où les extrémités de la lame sont libres, la seule possibilité est de placer le stylet au milieu de la lame, contrairement à l'autre cas où le stylet peut être appliqué en un point quelconque de la longueur de la lame.

Elle précise enfin que le cas où les extrémités sont libres et celui où les extrémités sont fixées sont semblables. Les résultats obtenus pour ces deux cas sont identiques. Mais elle ne refait pas les calculs par rapport aux mouvements ni par rapport aux sons (Germain, 2013, p. 248-264).

Elle se pose aussi la question suivante :

> « Mais, si dans un cas quelconque qui est celui ou le stilet est appuié au milieu de la lame primitive, la théorie permet de considerer cette lame comme reellement separées en deux autres lames qui auroient une de leurs extremités appuiées par l'effet de l'application du stilet, ~~pour~~ comment se peut-il que la même supposition ne soit plus applicable à aucun autre cas ? » (Germain, 2013, p. 266)

Elle en donne une solution dans les pages suivantes.

Elle ne se contente donc pas de reprendre l'étude d'Euler, elle poursuit cette étude à des cas que ce dernier n'a pas analysés. Pour cela, elle raisonne par analogie, applique les calculs d'Euler à d'autres cas. Ce qui lui permet de s'imprégner de la méthode d'Euler, de s'entraîner à faire des types de calculs qu'elle n'avait peut-être pas l'habitude de faire. Elle continue d'ailleurs en examinant les six cas donnés par Euler et conclut qu'ils peuvent être ramenés à quatre cas indépendants. Le premier cas correspond à celui d'une lame où les deux extrémités sont libres, le deuxième est celui d'une lame dont une extrémité est libre et l'autre fixée, le troisième concerne les lames avec les deux extrémités appuyées et enfin le dernier et quatrième cas étudie les lames ayant ses deux extrémités fixées (Germain, 2013, p. 306).

Elle termine enfin cet examen en faisant une comparaison entre les lames et les plaques élastiques. Pour cela, elle s'appuie sur les figures de Chladni. Elle reconnaît

que le cas des plaques est beaucoup plus difficile que celui des lames (Germain, 2013, p. 312-318).

Cette analyse du mémoire d'Euler faite par Germain est un brouillon ; il y a des ratures, des paragraphes rayés, barrés d'un long trait. Elle correspond à une phase d'apprentissage. Germain a besoin de se familiariser avec un domaine totalement inconnu pour elle. En effet, ce domaine fait partie de la physique mathématique et elle n'a jusqu'à présent travaillé que sur les nombres donc les mathématiques pures. Elle écrit ces feuilles avant de passer vraiment à l'étude du sujet du concours. Les deuxième et troisième lettres de Legendre [5] datant des 19 et 28 janvier 1811 révèlent qu'elle a passé beaucoup de temps, environ les deux tiers du temps imparti au concours, à travailler sur le mémoire d'Euler ou qu'elle travaille sur le sujet du concours tout en continuant à étudier les travaux d'Euler. En effet, le sujet du concours est annoncé le 1er avril 1809 et la date limite de dépôt des productions est fixée au 1er octobre 1811. Ainsi d'après la date de ces deux lettres, celles-ci sont écrites pratiquement à la fin du temps imparti pour déposer la réponse à la question posée au concours. De plus, ces lettres ont probablement été rédigées pour répondre à des interrogations de Germain sur certains résultats obtenus par Euler puisqu'elles contiennent des explications, des indications par rapport aux recherches et aux calculs de ce dernier. D'ailleurs, Legendre termine la lettre du 19 janvier par ces mots : « J'ai cru, Mademoiselle, ne pas devoir vous faire attendre jusqu'à lundi ces explications que votre discernement appréciera à leur valeur. » Il répond donc rapidement à Germain pressée par le temps, la date limite pour le concours étant assez proche.

Dans les dernières pages de cet écrit, elle commence à faire une analogie entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel.

4.1.2 Relation entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel

Le programme du Prix de mathématiques [6] signale l'existence d'un lien entre les membranes tendues et la corde tendue, lien déjà repéré par Euler. En effet, ce dernier, dans son mémoire intitulé *Motu vibratorio tympanorum*, cherche une correspondance entre les vibrations des membranes tendues et celles d'une corde non rigide. Pour cela, il suppose que les membranes peuvent être assimilées à des tissus composés de fils formant des angles droits entre eux.

5. Ces lettres de Legendre figurent en annexe B.
6. Le programme du Prix de mathématique est donné en annexe A.

Cette remarque a pu influencer Germain dans son choix de prendre les travaux d'Euler comme référence. Elle a pu apercevoir une correspondance entre les lames élastiques vibrantes et les surfaces élastiques vibrantes, comme Euler en a fait une entre la membrane tendue et la corde.

De plus, le programme du Prix de mathématique précise aussi que « il [Chladni] a découvert et rendu perceptibles, d'une manière très ingénieuse, dans ces lames, des *nappes vibrantes* analogues aux *ondes* des cordes de Sauveur, et des courbes d'*équilibre* ou de *repos* auxquels correspondent les *nœuds* ou *points de repos* des mêmes cordes. »(CHLADNI, 1809, p. 357) Germain a pu s'inspirer de ce passage pour établir une corrélation entre les nœuds d'une corde vibrante et les lignes nodales d'une surface élastique vibrante, ou entre les courbes d'équilibre d'une lame élastique et les lignes nodales d'une surface élastique.

Le rapport écrit par la Classe sur les expériences de Chladni est aussi publié dans le journal le *Moniteur universel* du 3 avril 1809. Ce rapport précise que Chladni a réussi à visualiser les sons grâce aux vibrations d'une surface élastique partagée alors en plusieurs nappes différentes selon le son émis. Ces nappes équivalent à celles des ondes d'une corde sonore. Elles sont séparées par des courbes d'équilibre qui correspondent aux nœuds ou points stationnaires de la corde. Ainsi, si, contrairement à notre supposition, Germain n'a pas eu accès au programme, elle a pu lire, dans ce rapport, la similitude qui peut être faite entre les nœuds d'une corde vibrante et les lignes nodales d'une surface élastique vibrante. Ce journal avait aussi annoncé les expériences réalisées par Chladni, rue Vivienne, en janvier et février 1809. On peut penser que Germain lit ce journal qui comprend une rubrique *les sciences et arts et les annonces et avis*. Ce journal peut être un lien entre elle et ce qui se passe à l'Académie des sciences.

Une autre analogie apparaît entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel : l'importance de l'endroit où sont appliqués l'archet ou le stylet. Euler se contente de placer le stylet au milieu de la lame élastique dans toute son étude. Germain essaie de généraliser l'étude quel que soit l'endroit où le stylet est appliqué sur la lame. Elle fait de même avec l'archet sur les surfaces élastiques.

De plus, pour prouver la légitimité de considérer l'élasticité nulle, elle remarque, dans la partie *Avertissement* de son mémoire de 1811, une autre correspondance entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel. Dans le cas unidimensionnel, d'après Euler, quand l'élasticité est nulle, l'équation de la lame soumise à l'action d'une force de tension correspond à celle d'une corde simplement tendue. De même, dans le cas bidimensionnel, en supposant les forces de tensions dirigées suivant les axes x et y et

l'élasticité nulle, l'équation de la surface tendue devient celle d'une surface inégalement tendue.

Il existe donc un certain nombre de similitudes entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel. Celles-ci dont certaines sont énoncées par la Classe dans le programme détaillé du sujet du concours, ont pu conforter Germain d'utiliser les raisonnements et les résultats obtenus par Euler dans le cas unidimensionnel pour les appliquer et les adapter au cas bidimensionnel. Les indications annoncées dans le programme du concours ont donc guidé Germain au début de ses recherches.

Mais les deuxième et troisième lettres de Legendre de janvier 1811 indiquent qu'il ne lui reste plus beaucoup de temps pour répondre à la question du concours. En effet, les travaux doivent être rendu pour octobre 1811. Alors comment a-t-elle fait ? A-t-elle réussi à faire cette adaptation et à obtenir des résultats satisfaisants ?

4.2 La première tentative de Germain

Ce mémoire que nous nommerons « mémoire 1811 » commence par une partie *Avertissement* dans laquelle Germain annonce le déroulement de son raisonnement. Elle précise qu'elle a utilisé les simplifications usuelles déjà appliquées dans le cas unidimensionnel pour pouvoir analyser et résoudre l'équation qui modélise les vibrations des surfaces élastiques. Elle juge aussi nécessaire de définir la notion de « vibration ». Elle regrette enfin de ne pas avoir eu assez de temps pour faire toutes les comparaisons qu'elle aurait aimé réaliser. Elle espère tout de même que les membres du jury apprécieront son travail et qu'elle est prête à donner des explications, des justifications supplémentaires.

Germain travaille par analogie avec le cas unidimensionnel. Elle suit pas à pas le raisonnement d'Euler sur la vibration des lames et le transporte à la vibration des surfaces élastiques, aussi bien pour obtenir l'équation que pour la résoudre. Elle s'aide également de la *Mécanique analytique*[7] de Lagrange. Enfin les expériences de Chladni vont être importantes pour elle, comme elle le signale dans les *Observations préliminaires* de son « article 1826 »[8]. Elle écrit : « Lorsque, pour la première fois, je me suis occupée de rechercher, par rapport aux surfaces, l'expression des forces d'élasticité, je travaillais,

7. La *Mécanique analytique* de Lagrange a été publiée en 1788 chez l'imprimeur-libraire Mme Vve Courcier. Germain a pu soit l'acheter, soit comme Lagrange fait partie de ses relations assez proches, ce dernier a pu lui donner son ouvrage.

8. L'« article 1826 » est un article que Germain publie en 1826 et sur lequel nous reviendrons par la suite.

pour ainsi dire, sous la dictée de l'expérience. » Ces expériences lui permettent de cerner l'étude, de la restreindre, de ne s'intéresser qu'à certaines vibrations.

Germain intègre dans ce « mémoire 1811 » beaucoup de calculs plus ou moins détaillés. Ceux-ci contiennent des erreurs qui montrent des lacunes non seulement dans le domaine calculatoire, mais aussi dans son raisonnement.

Enfin, à la fin de ce « mémoire 1811 », figure une note qu'elle a envoyée, environ trois mois après la date de clôture, à Legendre. Dans cette note, Germain présente une justification de l'équation de l'équilibre d'une surface élastique, équation qu'elle a obtenue à partir du cas unidimensionnel et admise au début de son « mémoire 1811 ». Pour cela, elle s'appuie sur des formules issues de la mécanique et extraites de la *Mécanique analytique* de Lagrange. Pour attester de l'analogie entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel, elle applique tout d'abord ces formules dans le cas de la simple lame élastique. En utilisant les mêmes simplifications qu'Euler, elle obtient alors l'équation donnée par ce dernier. Elle passe ensuite au cas de la surface élastique. Comme dans le cas de la lame, elle utilise les formules de mécanique pour obtenir un membre de l'équation. Concernant l'autre membre, elle a recours à la géométrie. Elle reprendra cette idée lors de ses réflexions ultérieures. Elle considère quatre points de la surface et fait passer par deux triplets de points différents deux plans qui se coupent en formant un angle dépendant de l'élasticité de la surface. Elle étudie l'angle extérieur formé par un des plans et le prolongement de l'autre et aboutit, toujours par analogie avec le cas unidimensionnel, à l'expression désirée. Elle conclut cette note en montrant qu'en appliquant son équation pour une surface élastique au cas unidimensionnel, elle obtient une équation qui ne se différencie de celle d'Euler que par des constantes. Elle précise, sans le faire, que celles-ci peuvent être facilement exprimées sous une forme analogue à celles contenues dans l'équation d'Euler. Elle sollicite Legendre pour qu'il la rajoute au « mémoire 1811 ». En faisant cette démarche, elle lui demande une grande faveur. En effet, ce dernier n'est pas censé connaître le nom de l'auteur du « mémoire 1811 ». Legendre, ami de Germain, fait en sorte que cette note soit lue par les commissaires chargés de relire le travail de Germain, comme en témoigne une lettre de Legendre à Germain :

> « Paris, ce 10 novembre 1811.
>
> Mademoiselle, votre Mémoire est en circulation. M. Lacroix l'avait entre les mains lundi dernier. Je m'informerai demain à qui il l'a remis et j'y ferai joindre le supplément. Les commissaires jugeront ensuite s'ils doivent tenir compte ou non de ce supplément. Je ferai en sorte d'ailleurs que M.

de Lagrange ne tarde pas à lire le tout. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 299-300)

4.2.1 La première équation

Pour étudier et trouver l'équation des vibrations des surfaces élastiques, Germain est amenée à formuler une hypothèse. Elle la calque sur celle utilisée par Euler dans le cas unidimensionnel. Ce dernier suppose que la force élastique en un point de la corde est proportionnelle à la courbure de la corde en ce point. Ainsi Euler traduit le moment de la force élastique par l'expression $\frac{V}{r}$ où V représente l'élasticité absolue et r le rayon de courbure.

Toujours par analogie, Germain suppose que la force élastique en un point d'une surface, qui compense l'effet des forces extérieures appliquées, est proportionnelle à la somme des courbures principales (la courbure maximale et la courbure minimale). Cette hypothèse pour exprimer la force élastique est appelée par Germain « mon hypothèse ». Elle traduit cette hypothèse par la formule $V\left(\frac{1}{(r)}+\frac{1}{(r')}\right)$ où V est une constante relative à l'élasticité liée à la nature du matériau et r, r' sont les principaux rayons de courbure de la surface déformée [9]. Elle n'explique pas comment elle a eu l'idée de sommer les courbures principales. Elle écrit seulement une petite note au bas de la première page :

> « On voit que je prends $V\left(\frac{1}{(r)}+\frac{1}{(r')}\right)$ pour le moment de cette force [la force élastique], il serait trop long de discuter ici les considérations qui m'ont déterminé à choisir cette fonction des rayons osculateurs ; mais au reste, il est aisé de sentir que lors même que l'expression du moment de l'élasticité devrait contenir d'autres fonctions de ces rayons osculateurs que celle que j'ai adoptée, tels que les produits ou les puissances des mêmes quantités, le résultat applicable à la question ne serait pas changé, puisque comme on le verra par la suite $\frac{1}{(r)}\frac{1}{(r')}$, par exemple, pourra toujours être négligé vis-à-vis de $\frac{1}{(r)}$ et $\frac{1}{(r')}$. » (Germain, 1811, p. 5)

La façon dont elle obtient exactement son hypothèse reste floue. Dans l'éloge fait à Euler par le marquis de Condorcet [10] dans l'*Histoire de l'Académie des sciences 1783* (*Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les mémoires dec mathématiques et*

9. Dans son article écrit en 1831, Germain parle de plans moyens pour définir les plans contenant les courbures égales à la demi-somme des courbures principales. Elle nomme alors ces courbures, les courbures moyennes (Germain, 1831, p. 6-7). C'est Germain qui la première a appelé courbure moyenne, la moyenne arithmétique des courbures principales.

10. Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (1743-1794) est un mathématicien, philosophe, encyclopédiste, homme politique français. Il est nommé à l'Académie des sciences en 1769 et devient secrétaire perpétuel en 1773. Il est élu à l'Académie française en 1782.

de physiques,1783 1786, p. 37-68), on peut lire un passage dans lequel le marquis de Condorcet cite les travaux d'Euler sur la théorie des surfaces courbes : « il [Euler] parvint à cette conclusion singulière, que la courbure d'un élément de surface est déterminée par deux des rayons osculateurs des courbes formées par l'intersection de la surface et d'un plan qui passe par la perpendiculaire au point donné ; que ces rayons sont le plus grand et le plus petit de tous ceux qui appartiennent à la suite des courbes ainsi formées » (*Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les mémoires dec mathématiques et de physiques,1783* 1786, p. 48). Germain a-t-elle eu accès et lu cet éloge ? Si oui, elle a pu être influencée par ces propos quand elle considère la somme de la courbure maximale et de la courbure minimale. Aucune indication ne permet de confirmer ou infirmer cette supposition.

Germain fait confiance à son intuition. Pour respecter les délais du concours, elle rend son « mémoire 1811 » sans avoir eu le temps d'expliquer vraiment le choix de son hypothèse. Comme nous l'avons déjà évoqué, elle fait parvenir une note, grâce à Legendre, aux membres du jury après la date limite de remise des mémoires pour le concours. Dans cette note, elle tente de justifier non seulement son hypothèse, mais aussi la justesse de l'équation de l'équilibre. Pour cela, elle essaie dans un premier temps de justifier l'hypothèse d'Euler, à savoir la force élastique est proportionnelle à la courbure. Puis dans un deuxième temps, elle adapte ce raisonnement pour tenter de confirmer son hypothèse : la force élastique est proportionnelle à la somme des courbures principales, hypothèse calquée sur celle d'Euler.

Pour ces justifications, elle utilise directement des équations obtenues par Lagrange dans sa *Mécanique analytique* grâce au fait que la somme des moments des forces extérieures et des forces élastiques est égale à zéro. Ces équations (8.1) sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda\frac{dx}{ds} - d\left(Id^2x\right) &= A + \int Xdm \\ \lambda\frac{dy}{ds} - d\left(Id^2y\right) &= B + \int Ydm \\ \lambda\frac{dz}{ds} - d\left(Id^2z\right) &= C + \int Zdm \end{aligned} \tag{4.1}$$

où λ est une constante, A, B, C sont des constantes arbitraires, dm est un élément du fil, X, Y, Z sont des forces extérieures et $I = \frac{E}{ds\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2}}$ avec E une force qui s'oppose à l'inflexion du fil, et donc une force élastique.

Ces équations (8.1) proviennent des égalités :

$$\lambda\frac{dx}{ds} - d\left(Id^2x\right) - A - \int Xdm = 0$$

$$\lambda\frac{dy}{ds} - d\left(Id^2y\right) - B - \int Ydm = 0$$
$$\lambda\frac{dz}{ds} - d\left(Id^2z\right) - C - \int Zdm = 0$$

chaque terme de gauche des égalités précédentes représente respectivement le coefficient de $\delta x, \delta y$ et δz dans l'expression représentant la somme des moments de toutes les forces, où $\delta x, \delta y$ et δz est la distance suivant respectivement x, y et z parcourue par un point du fil.

À partir de ces équations (8.1), elle s'intéresse et retrouve tout d'abord le membre de gauche de l'équation de l'équilibre d'une lame obtenue par Euler qui est :

$$\int dy \int Pds - \int dx \int Qds = \frac{V}{r}.$$

Après un certain nombre de calculs pour aboutir à ce membre de gauche, elle étudie le membre de droite qu'elle a alors obtenu et montre que la force élastique est proportionnelle à la courbure.

Pour parvenir à l'expression attendue concernant le membre de gauche, elle réduit les équations (8.1) en utilisant les mêmes simplifications qu'Euler. Elle suppose que la lame élastique est supportée par un axe fixe. Ainsi les deux coordonnées x et y suffisent. Elle ne travaille donc qu'avec les deux premières équations. De plus, elle observe que dans ce cas $d^2x = 0$, $ds = dx$ et $A = B = 0$. Les deux premières équations s'écrivent alors :

$$\lambda\frac{dx}{ds} = \int Xdm$$
$$\lambda\frac{dy}{ds} - d\left(Id^2y\right) = \int Ydm$$

Ensuite, elle multiplie la première par dy, la deuxième par dx, puis soustrait membre à membre pour éliminer l'indéterminée λ et obtient :

$$dxd\left(Id^2y\right) = dy\int Xdm - dx\int Ydm.$$

Elle intègre cette dernière égalité :

$$Id^2ydx = \int dy \int Xdm - \int dx \int Ydm.$$

En divisant par l'épaisseur Γ qui est constante et comme $dm = \Gamma ds$, elle affirme qu'elle obtient l'équation d'Euler :

$$\frac{V}{r} = \int dy \int Pds - \int dx \int Qds$$

avec P et Q des forces identiques aux forces X et Y.

Concernant le membre de gauche, elle obtient :

$$\frac{I}{\Gamma} d^2 y dx = \frac{I}{\Gamma} d^2 y ds = \frac{E}{\Gamma ds d^2 y} d^2 y ds = \frac{E}{\Gamma}.$$

On a donc, en comparant avec le membre de droite de l'équation d'Euler :

$$\frac{E}{\Gamma} = \frac{V}{r}, \quad \text{soit} \quad E = \frac{\Gamma V}{r}.$$

La force élastique E est donc proportionnelle à la courbure dans le cas unidimensionnel.

Germain se penche ensuite sur l'équation modélisant l'équilibre de la surface vibrante, écrite à partir de celle d'Euler :

$$\int dydz \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2 \int dxdy \int Zdm = V \left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')} \right).$$

Toujours à partir des équations (5.1), elle fait à nouveau un certain nombre de calculs pour aboutir au membre de gauche de l'équation. Puis elle travaille sur l'expression du membre de droite obtenue.

Elle fait le même raisonnement et des simplifications et suppositions analogues à celles pour le cas unidimensionnel précédent : $d^2y = d^2x = 0, ds = dxdy$ et $A = B = C = 0$. Elle reprend les trois équations (5.1) de Lagrange. Elle multiplie cette fois la première par $dydz$, la deuxième par $dzdx$ et la troisième par $2dxdy$. Elle additionne les deux premières et soustrait la troisième membre à membre pour éliminer l'indéterminée λ, et comme $ds = dxdy$, elle obtient :

$$dydz \int Xdm + dzdx \int Ydm - 2dxdy \int Zdm = 2dxdyd \left(Id^2 z \right).$$

Comme dans le cas unidimensionnel, elle suppose $ds = dxdy$, mais n'utilise pas cette condition, du moins elle n'en a pas encore besoin ici. Cette supposition n'interviendra que plus tard.

Elle intègre cette égalité :

$$\int dydz \int Xdm + \int dzdx \int Ydm - 2\int dxdy \int Zdm = 2Id^2zdxdy.$$

En divisant à nouveau par l'épaisseur constante Γ et en considérant que $dm = \Gamma ds$, elle obtient pour le membre de gauche :

$$\int dydz \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int Rds.$$

Concernant le membre de droite, l'étude est plus complexe.

Elle considère quatre points de la surface. Elle définit un premier plan passant par le premier point, le deuxième et le quatrième, et un deuxième plan passant par le premier point, le troisième et le quatrième. Tout comme Lagrange, elle signale que l'angle entre les deux plans est variable. L'élasticité a pour effet de diminuer l'angle extérieur e formé par un des plans et le prolongement de l'autre, et d'augmenter l'autre angle $180 - e$.

Elle suit pas à pas le raisonnement et les calculs qu'a fait Lagrange dans la *Mécanique analytique*. Elle cherche donc la valeur de l'angle e. Pour cela, elle nomme C l'ordonnée verticale d'un plan à son origine, A, B les tangentes des angles que les traces du plan dont il s'agit, sur les plans coordonnées verticaux, font avec l'horizon, A', B' les quantités analogues pour le deuxième plan. Elle exprime $-\cos e$:

$$\cos(180 - e) = -\cos e = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

d'où

$$\sin^2 e = \frac{(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2}.$$

Elle exprime ensuite les coordonnées des quatre points qu'elle avaient considérés tout au début de son raisonnement. Pour cela, elle suppose qu'en passant d'un point à un point infiniment voisin, une des coordonnées peut être considérée comme constante et les deux autres variables. Ainsi, si $x' = x, y' = y, z' = z$ sont les coordonnées du premier point, le second point aura pour coordonnées $x, y + dy, z + dz$, le troisième point $x + dx, y, z + dz$ et le quatrième point $x + dx, y + dy, z + 2dz + d^2z$.

Après quelques calculs, elle obtient :

$$\sin^2 e = \frac{\rho^2 dx^2 dy^2 (d^2z)^2}{ds^4} = \frac{\rho^2 (d^2z)^2}{ds^2}$$

où $ds = dxdy$ et ρ est la distance entre le premier et le quatrième point, distance très petite ou constante.

De plus, l'angle e étant supposé très petit, on a donc $\sin e = e$. Ainsi

$$e = \frac{\rho d^2 z}{ds} \quad \text{et} \quad \int e = \frac{\rho \int d^2 z}{ds}.$$

En notant E l'élasticité, Γ l'épaisseur et ρ la distance entre le premier et le quatrième point pris sur la surface, Germain écrit que $\frac{Id^2z}{\Gamma} = \frac{\rho E}{\Gamma ds}$.

Pourquoi a-t-elle introduit la distance ρ dans l'expression ? A-t-elle fait une erreur de raisonnement ou de calculs ? Elle ne donne aucune explication et ne détaille pas tous les calculs.

En reprenant le membre de droite obtenu après les différents calculs faits pour obtenir le membre de gauche désiré, elle obtient alors :

$$\frac{2Id^2zdxdy}{\Gamma} = \frac{2\rho Edxdy}{\Gamma ds} = \frac{2\rho E}{\Gamma}.$$

Comme $\frac{2\rho E}{\Gamma}$ est proportionnel à l'élasticité E, cette expression peut être décomposée en un produit de deux facteurs. L'un de ces facteurs est constant et dépend de l'élasticité absolue V. Le deuxième de ces facteurs est déterminé par la façon dont la force est supposée agir, c'est-à-dire qu'il peut être supposé égal à $\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}$ par analogie avec le cas linéaire, où (r) et (r') sont les rayons de courbures principales. Elle conclut donc que la force élastique est proportionnelle à la somme des courbures principales.

Au bas de la première page de ce « mémoire 1811 », elle précise que les produits ou les puissances de $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ sont négligeables devant $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$. Elle n'écrit donc pas ces produits ou puissances. Mais elle n'explique toujours pas comment elle a eu l'idée de prendre la somme $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$.

D'après la théorie de l'équilibre, la somme des moments de toutes les forces est égale à zéro. Dans la situation présente, la somme des moments de toutes les forces extérieures et de la force d'élasticité est donc nulle. Ainsi la somme des moments de toutes les forces extérieures et le moment de la force d'élasticité ont la même valeur absolue. En réalité, ce que Germain essaie de calculer dans le membre de droite, est le moment d'élasticité, et non la force d'élasticité. Avec le calcul de l'angle e, elle commence donc à calculer le moment d'élasticité, mais elle ne termine pas ce calcul. Elle reprend l'expression de droite qu'elle a obtenue auparavant, et sans faire intervenir l'angle e qu'elle a calculé, elle conclut en affirmant que cette expression s'écrit bien sous la forme voulue.

Dans ce cas, pourquoi a-t-elle calculé la valeur de l'angle e ? Encore une fois, nous n'avons aucune indication.

Louis L. Bucciarelli et Nancy Dworsky précisent que Germain analyse le problème sous un point de vue mathématique en occultant l'aspect physique. Ils se demandent si elle a vraiment compris la conception d'Euler (Bucciarelli et Dworsky, 2012, p. 55-56). Amy Dahan-Dalmedico remarque qu'il y a une certaine confusion chez Germain (Dahan Dalmédico, 1987a, p. 352). Concernant la notion d'élasticité, cette dernière ne fait pas la différence entre « la notion eulérienne de *force* élastique et la notion lagrangienne de *moment* élastique [...] quantité scalaire »(Dahan Dalmédico, 1987a, p. 352).

Lagrange exprime le moment d'une force par le calcul $\int E\delta e$, où E est une force qui s'oppose à l'inflexion du fil et qui tend à diminuer l'angle extérieur e suivant lequel la force s'exerce, et δ est une différentielle indépendante de la position du point et représentant l'espace infiniment petit que le point parcourt en supposant que la situation du corps varie infiniment peu. Quand à Euler, concernant le moment de la force d'élasticité qui tend à ramener la lame à sa position initiale, il l'exprime sous la forme $\frac{V}{r}$ où V est l'élasticité absolue, et r le rayon de courbure. C'est le produit de deux quantités « constantes ». Et concernant le calcul du moment de la force appliquée à la lame, le terme ds utilisé dans l'intégrale représente une distance infiniment petite sur la lame. Mener des calculs d'intégrales dans lesquelles le terme ds est considéré comme infinitésimal n'est pas inhabituel à cette époque.

Certains calculs de Germain ne sont pas expliqués. Comme elle connaît le résultat qu'elle veut obtenir, les calculs donnent l'impression qu'ils sont faits uniquement pour arriver au résultat voulu. Sans autre preuve formelle, seule son intuition semble la guider pour passer de l'hypothèse faite par Euler dans le cas unidimensionnel à l'hypothèse qu'elle a faite dans le cas bidimensionnel. Elle n'a pas justifié son hypothèse. Sa conclusion n'est qu'une supposition. Il reste trop de points obscurs et de suppositions dans la tentative de légitimation de son hypothèse.

4.2.2 Description et analyse de la réponse au problème posé au concours

Germain suit la méthode utilisée par Euler dans sa théorie mathématique du mouvement vibratoire d'une lame ; elle essaie de l'adapter aux surfaces élastiques. À partir de l'équation de l'équilibre d'une surface élastique, Germain déduit l'équation différentielle du mouvement de la même surface. Elle n'étudie que les surfaces planes, la position de

chaque point est alors déterminée par rapport à un plan supposé fixe. Elle prend pour ce plan fixe, la position naturelle de la plaque élastique.

L'équation bidimensionnelle qu'elle considère comme celle de l'équilibre de la surface élastique est :

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int Rds = V\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \tag{4.2}$$

où x, y, z sont les coordonnées orthogonales d'un point quelconque de la surface, $ds = dxdy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$ exprime l'élément (partie de la surface comprenant le point de cordonnées x, y, z), $\int ds$ est la masse de l'élément, r et r' sont les principaux rayons de courbure de la surface déformée, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ est la somme des courbures principales, V est une constante relative à l'élasticité liée à la nature du matériau (élasticité uniforme dans tous les sens car la surface est une plaque de verre ou de métal).

Le membre à gauche de l'égalité représente l'effet des forces extérieures appliquées, dont les composantes sur les trois axes orthogonaux sont P, Q et R.

Le membre à droite de l'égalité représente le moment de la force élastique.

Germain considère ensuite la surface élastique en mouvement. En s'appuyant sur sa compréhension de la *Mécanique analytique* de Lagrange et toujours par analogie avec le raisonnement d'Euler, elle pose, d'après les principes de la mécanique classique pour les forces élémentaires appliquées dans chacun des points de cette surface :

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right), Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

où t est le temps et g est l'espace parcouru en une seconde par un corps soumis à l'action de la pesanteur.

En utilisant l'équation 4.2 qu'elle a donnée pour l'équilibre de la surface élastique vibrante, elle obtient l'équation du mouvement de la même surface :

$$\int dzdy \int P'ds + \int dzdx \int Q'ds - 2\int dxdy \int R'ds = V\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \tag{4.3}$$

Elle cherche à simplifier cette équation 4.3. Pour cela, elle « observe qu'en conservant aux lettres p, q, r, s, t, etc, la signification que l'usage a consacré, savoir $p = \left(\frac{dz}{dx}\right) Q'$ et faisant $g = rt - s^2, h = (1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t, K^2 = 1 + p^2 + q^2$, on a comme l'on sait »

$$(r) = \frac{-2K^3}{h + \sqrt{h^2 - 4K^2 g}}, \quad (r') = \frac{-2K^3}{h - \sqrt{h^2 - 4K^2 g}}$$

d'où,

$$\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')} = -\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Tout comme Euler et d'autres mathématiciens qui ont travaillé sur cette notion de vibrations des lames élastiques, Germain fait des hypothèses sur les déplacements de la plaque pour simplifier la situation. Elle considère que la plaque vibrante ne s'éloigne que très peu du plan des x, y. Ainsi p et q sont alors très petits et elle peut négliger leurs carrés et produits. De plus, le mouvement de la plaque se fait dans la direction des z. Ce qui permet d'avoir $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{ddy}{dt^2} = 0$, et donc $P' = P, \quad Q' = Q$.

La somme des courbures principales devient alors :

$$\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')} = -\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$$

En introduisant toutes ces simplifications dans l'équation 4.3, elle obtient l'équation 4.4 suivante :

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int R'ds = -V\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right) \tag{4.4}$$

En posant E pour l'épaisseur de la surface qu'elle suppose constante, Eds représente à la fois la masse de l'élément de la surface et le volume de matière qu'il contient et par conséquent, $R' = R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$.

Puis elle fait à nouveau référence à un résultat d'Euler concernant l'élasticité. Ce dernier considère que l'élasticité d'une lame est proportionnelle au produit du carré de son épaisseur par un coefficient dépendant de la matière de la lame. Pour exprimer l'élasticité d'une surface, Germain adapte l'hypothèse d'Euler au cas de la surface. Elle fait également intervenir le carré de l'épaisseur de la surface et un coefficient dépendant de la matière de la lame. Mais comme la surface en mouvement se plie dans deux directions perpendiculaires x et y dans toute la surface jusqu'à ses extrémités, elle rajoute pour exprimer la valeur de l'élasticité un coefficient supplémentaire dépendant de l'épaisseur et de l'étendue de la surface. Ainsi, pour elle, la valeur de l'élasticité s'exprime sous la forme $V = E^2bc$ où E représente l'épaisseur, b est une quantité dépendant de la matière de la surface et c le coefficient qu'elle rajoute par rapport au cas de la corde et qu'il reste à déterminer.

Elle continue à suivre son intuition en prolongeant le lien établi entre les cordes et les surfaces élastiques vibrantes. Elle reste fidèle à la vision d'Euler.

Elle poursuit l'étude de l'équation en remarquant que $\int$ représente une double intégration, l'une par rapport à x et l'autre par rapport à y. Pour ne pas confondre, elle utilise des notations différentes suivant que l'intégration est par rapport à x ou à y. Elle suppose aussi que P et Q sont de simples forces de tensions agissant suivant les directions des x et des y. Elle pose P'' l'intégration de P par rapport à x, Q'' l'intégration de Q par rapport à y. Elle introduit toutes ces notations dans l'équation 4.4. Après avoir différencié et divisé respectivement et successivement la dernière équation obtenue par x et dx, y et dy, x et dx, y et dy, elle obtient une équation différentielle du 6ème ordre pour une surface élastique soumise à l'action d'une force quelconque dirigée suivant les z et à celle de deux forces de tension peuvant être inégales entre elles et agissant suivant les x et les y :

$$P''\frac{d^2z}{dx^2} + Q''\frac{d^2z}{dy^2} - 2\{R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\} = -E^2bc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right) \tag{4.5}$$

Les différentiations ne sont pas justifiées. Pourquoi différentie-t-elle dans cet ordre et pas dans un autre ? Les dérivations faites par Germain mettent en évidence son manque de formation mathématique, le fait qu'elle ne maîtrise pas tout à fait les différentes méthodes de calculs.

Elle passe ensuite à l'étude de cas particuliers. Le premier cas, également étudié par Euler, est celui où l'élasticité est nulle c'est-à-dire $b = 0$. L'équation 4.5 traduit alors une équation pour une surface tendue par des forces dont les résultantes perpendiculaires l'un à l'autre seraient inégales entre elles et serait soumise à l'action d'une force quelconque agissant dans la direction de la pesanteur, c'est-à-dire suivant les z :

$$P''\frac{d^2z}{dx^2} + Q''\frac{d^2z}{dy^2} = 2\left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right).$$

Dans le deuxième cas particulier qu'elle considère, elle suppose que les forces agissent suivant les z et néglige la pesanteur. Dans ce cas, R doit être nul. De plus, si les deux forces de tension P'' et Q'' sont égales entre elles, comme les mathématiciens l'ont toujours supposé, l'équation 4.5 s'écrit :

$$P''\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) = -\frac{E}{g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

En négligeant la pesanteur et en regardant la direction de la force de tension P'', elle pose $-\frac{P''}{E} = K^2$. Elle obtient alors l'équation pour les surfaces tendues :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = K^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

Grâce à ses suppositions, cette équation qu'elle obtient est également celle donnée par Biot dans un mémoire du quatrième tome de la Classe [11].

Pour obtenir la même équation que Biot, elle fait des suppositions. Elle pose, entre autres, $-\frac{P''}{E} = K^2$. Cela donne la sensation qu'elle s'arrange pour que son équation coïncide avec celle de Biot. Elle valide son équation en la faisant concorder avec celle de Biot. Mais bien d'autres savants utilisent cette méthode pour confirmer leurs résultats. Nous verrons par exemple que Poisson fera de même lorsqu'il cherchera à déterminer cette équation ; il montrera qu'il retrouve bien celle déjà connue et validée. Ainsi Germain a déjà acquis les habitudes de travail des savants, les codes du milieu scientifique.

Germain considère ensuite le cas où la surface élastique est libre de toutes forces. Dans ce cas, $P'' = Q'' = R = 0$. Par conséquent, l'équation 4.5 s'écrit :

$$\frac{1}{g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -Ebc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2} \tag{4.6}$$

ou en simplifiant :

$$\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -E^2bc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right).$$

Elle applique à cette équation 4.6 la méthode utilisée par Euler concernant la lame élastique. Elle se limite donc aux cas où le mouvement de la surface devient régulier et donc comparable au mouvement d'un pendule simple quelconque de longueur K. L'équation de ce mouvement est :

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \frac{-z}{K}.$$

Elle précise que dans cette équation seul le temps est considéré comme une variable. Sans reproduire les calculs, en indiquant seulement qu'elle a fait une double intégration,

11. Le mémoire de Biot dont parle Germain est intitulé *Recherches sur l'intégration des équations différentielles partielles, et sur les vibrations des surfaces.* Il est publié dans les *Mémoires de l'Institut national des sciences et arts. Sciences mathématiques et physiques. Tome quatrième*, p.21-111. L'équation à laquelle fait référence Germain se trouve à la page 91. Biot souligne qu'Euler a aussi donné cette équation. Cette remarque de Biot ne peut que conforter Germain dans son choix de suivre le raisonnement d'Euler.

elle donne la solution de cette équation :

$$z = M \sin\left(\xi + \frac{\sqrt{2g}}{K}t\right)$$

où M contient des constantes et une fonction quelconque des coordonnées x et y supposées constantes.

Voici la résolution de l'équation permettant d'obtenir la solution donnée par Germain :

en multipliant les deux membres par $2(\frac{dz}{dt})dt$, on obtient : $2\frac{dz}{dt}.\frac{d^2z}{dt^2}.dt = -\frac{4g}{K}zdz$
ce qui s'écrit encore : $d\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -\frac{4g}{K}zdz$
on intègre : $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\frac{2g}{K}z^2 + C_1$ où C_1 est une constante
soit $\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{C_1 - \frac{2g}{K}z^2}$
en séparant les variables, l'équation s'écrit : $\pm\frac{dz}{\sqrt{C_1 - \frac{2g}{K}z^2}} = dt$
soit : $\pm\frac{dz}{\sqrt{C_1}\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2g}{C_1K}}z\right)^2}}$
on intègre une deuxième fois : $\pm\sqrt{\frac{K}{2g}}\arcsin\sqrt{\frac{2g}{C_1K}}z = t + C_2$ avec C_2 une constante
soit : $\pm\arcsin\sqrt{\frac{2g}{C_1K}}z = \sqrt{\frac{2g}{K}}t + \xi$ avec $\xi = \sqrt{\frac{2g}{K}}C_2$
on obtient la solution :
$z = M\sin\left(\xi + \sqrt{\frac{2g}{K}}t\right)$ où $M = \pm\sqrt{\frac{2gC_1}{K}}$.
On remarque une petite différence avec la solution de Germain. Celle-ci a écrit dans sa solution $\frac{\sqrt{2g}}{K}t$ et non $\sqrt{\frac{2g}{K}}t$. Il s'agit probablement seulement d'une erreur d'écriture.

L'équation 4.6 de la surface s'écrit alors :

$$\frac{z}{K} = Ebc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2}$$

Et en posant $KEbc = f^6$, l'équation du mouvement de la surface élastique s'écrit :

$$z = f^6\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2} \tag{4.7}$$

où seules x et y sont des variables.

Germain fait un changement de variables : $f^6 = \frac{1}{\lambda^6}$ (elle a écrit $f = \frac{1}{\lambda^6}$ mais cette erreur n'est qu'une erreur d'écriture). Elle obtient une équation en λ.

Dans ce cas, $z = e^{\lambda(x+y)}$ est une solution de l'équation 4.7.

En résolvant l'équation $f^6 = \frac{1}{\lambda^6}$, elle obtient six valeurs pour λ :
$\lambda = \frac{1}{f}$; $\lambda = -\frac{1}{f}$; $\lambda = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2f}$; $\lambda = \frac{1+\sqrt{-3}}{2f}$; $\lambda = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2f}$ et $\lambda = \frac{1-\sqrt{-3}}{2f}$.

En remplaçant λ par ces valeurs dans la solution $z = e^{\lambda(x+y)}$ et en additionnant les six expressions obtenues, on obtient encore une solution de l'équation 4.7. Cette solution s'écrit [12] :

$$z = ae^{\frac{x+y}{f}} + be^{\frac{-(x+y)}{f}} + ce^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}} + de^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}} + ge^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}} + he^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}}.$$

Elle précise ensuite qu'elle veut supprimer les imaginaires de cette expression en y substituant les sinus et les cosinus de l'angle réel $\sqrt{3}.\dfrac{x+y}{2f}$. Mais elle n'écrit pas les calculs qu'elle a faits. Elle obtient pour l'expression de z :

$$z = N\{Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}} + \left\{C\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\right\}e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$+\left\{G\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + H\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\right\}e^{\frac{-(x+y)}{2f}}\}.$$

avec N un facteur fonction du temps t constant.

Or la somme des deux termes $ce^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}} + ge^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}}$ peut aussi s'écrire $ce^{\frac{-1+\sqrt{3i^2}}{2}\frac{x+y}{f}} + ge^{\frac{-1-\sqrt{3i^2}}{2}\frac{x+y}{f}}$ soit $ce^{\frac{-1+i\sqrt{3i}}{2}\frac{x+y}{f}} + ge^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\frac{x+y}{f}}$.
En voulant supprimer les imaginaires et donc ne conserver que les termes réels, elle obtient une expression du type :

$$\left\{\alpha\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + \beta\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\right\}e^{\frac{-(x+y)}{2f}}.$$

Mais en écrivant cette dernière expression, elle a occulté le fait que les deux termes sont multipliés chacun par une constante différente.
De même pour la somme des deux autres termes $de^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}} + he^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}}$. Elle ne se montre apparemment pas très rigoureuse. Mais comme elle ne détaille pas ses calculs, on ne peut pas savoir comment elle a géré les constantes c, d, g, h. Il semblerait qu'elle organise ses calculs selon le résultat qu'elle désire obtenir.

En se rappelant que le mouvement de la lame est régulier, il est alors comparable à celui d'un pendule simple dont la longueur est K. Les expressions de z solutions des équations modélisant ces deux mouvements doivent donc correspondre. Pour cela, elle pose :

$$N = \sin\left(\xi + \sqrt{\frac{2g}{K}}t\right)$$

12. Nous pouvons remarquer qu'elle utilise encore la notation $\sqrt{-3}$ et non $i\sqrt{3}$ qui commence à être l'usage à son époque.

et

$$M = F\{Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}} + \{C\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}$$

$$+D\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\}e^{\frac{x+y}{2f}} + \{G\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + H\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\}e^{\frac{-(x+y)}{2f}}\}.$$

La solution de l'équation 4.7 s'écrit alors :

$$z = F\sin\left(\xi + t\frac{\sqrt{2g}}{K}\right)\{Ae\frac{x+y}{f} + Be\frac{-(x+y)}{f} + \{C\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}$$

$$+D\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\}e\frac{x+y}{2f} + \{G\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + H\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\}e\frac{-(x+y)}{2f}\}$$

où $A, B, ...$ et l'angle ξ sont des constantes arbitraires choisies de manière que, quelles que soient leurs valeurs, le mouvement de la lame correspond à celui du pendule simple.

Elle poursuit l'analogie avec le pendule simple en précisant à la fin de ce paragraphe que le temps d'une vibration, c'est-à-dire la période, est donné par la formule $\pi\frac{\sqrt{K}}{2g}$, et le nombre de vibrations par seconde, c'est-à-dire la fréquence, est formulé par $\frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{K}}$.

Elle a fait une erreur dans l'écriture de la période. Celle-ci devrait s'écrire $\pi\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2g}}$. Elle a donc oublié la racine carrée pour $2g$. Elle a déjà fait ce type d'erreur, à savoir oublier une racine carrée, en écrivant la solution de l'équation du mouvement d'un pendule simple ; à ce moment là, elle a oublié de la racine carrée pour le K. Dans les deux cas, il manque la racine carrée au dénominateur. S'agit-il seulement d'un oubli, d'une erreur d'écriture ? Il semblerait que oui. L'étude du pendule simple n'étant l'objet du concours, elle n'a sûrement pas vérifié que le produit de la période par la fréquence n'est pas égal à 1. Cette erreur n'affecte pas le reste de son travail sur la modélisation des vibrations des surfaces élastiques.

Germain a fait exactement les mêmes types de calculs qu'Euler quand ce dernier a comparé le mouvement de la lame à celui d'un pendule simple. Elle suit pas à pas l'analyse d'Euler. Elle a confiance en son jugement et en son intuition. Aucune trace écrite n'indique si elle se pose la question de savoir si le raisonnement utilisé dans le cas unidimensionnel peut effectivement s'appliquer au cas bidimensionnel.

Dans son « mémoire 1811 » suit ensuite un paragraphe concernant ses « réflexions sur l'emploi de la théorie » qu'elle vient de présenter. Elle remarque qu'elle aurait pu faire la même étude en remplaçant y par $-y$ (et donc prendre $x - y$ au lieu de $x + y$, étant donné qu'elle a fait un nombre pair de différentiations par rapport à y).

Elle écrit alors une solution combinant la somme et la différence de x et de y :

$$\begin{aligned} z = F\sin\left(\xi + t\frac{\sqrt{2g}}{K}\right)\{Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}} + \left(C\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}} \\ + A'e^{\frac{x-y}{f}} + B'e^{\frac{-(x-y)}{f}} + \left(C'\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + D'\cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}} \\ + \left(G'\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + H'\cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

où A', B', C', D', G', H' sont des constantes arbitraires différentes de A, B, C, D, G, H.

En faisant des dérivations successives de cette dernière expression 4.8 de z, Germain montre que cette expression vérifie l'équation 4.7 qui représente l'équation du mouvement de la surface élastique.

Il lui reste à déterminer les constantes $A, B, C, D.G, H, A',\ B', C', D', G', H'$. Pour cette nouvelle tâche, elle s'aide des expériences faites par Chladni.

Comparaison avec l'expérience

Il ne reste que peu de temps à Germain pour répondre à la deuxième partie du concours : « comparer la théorie mathématique à l'expérience ». Avec cette comparaison, elle essaie de simplifier la solution de son équation en exprimant des relations entre les différentes constantes qui restent à déterminer.

Pour faire correspondre ses résultats théoriques aux expériences de Chladni, elle doit faire des suppositions supplémentaires. Elle estime qu'il y a forcément une force qui agit sur les surfaces vibrantes. La direction de cette force d'appui ou de pression est celle de z. Son origine se situe au point de maintien de la plaque c'est-à-dire entre les doigts comme dans les expériences réalisées par Chladni ou entre deux tiges métalliques utilisées par Paradisi. Elle place aussi, toujours suivant son intuition, l'origine des coordonnées x, y et z au point d'origine de cette force. Elle considère cette hypothèse comme naturelle et ne justifie donc pas davantage cette supposition. Elle raisonne non seulement par analogie avec le cas unidimensionnel mais aussi en suivant souvent son intuition.

Elle reprend des équations différentielles obtenues précédemment et pose $P'' = 0, Q'' = 0$ et $\int Rdxdy = \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ représente la force d'appui. Elle obtient dix égalités entre les coefficients $A, B, C, D, G, H, A', B', C', D', G', H'$. Mais pour pouvoir définir tous ces coefficients, il lui manque encore deux équations. Or les calculs étant longs, Germain n'a pas eu assez de temps pour les déterminer. Elle précise aussi qu'elle de-

vrait supposer d'autres conditions ou considérer un plus grand nombre de points pris sur le périmètre de la surface. Elle se rend alors compte que les opérations sont plus compliquées que ce qu'elle prévoyait.

Finalement, en examinant de près les dix équations, elle remarque qu'elle peut en satisfaire sept si elle pose $A = -A', B = -B', C = -C', D = -D', G = -G', H = -H'$. En substituant A', B', C', D', G', H' par leur expression en fonction de A, B, C, D, G, H dans l'équation 4.8, elle obtient une équation qui « convient suivant l'hypothèse générale à une surface élastique de forme quelconque soumise à l'action d'une force de pression appliquée au centre de la figure, centre qui est l'origine des coordonnées de la surface. De plus, les valeurs particulières qui viennent d'être adoptées pour les coefficients semblent devoir appartenir à une surface qui serait partagée par une ligne passant par l'origine et tracée dans le sens des x. (...) L'expérience et le raisonnement montrent également que lorsqu'une surface vibrante est partagée par une ligne nodale, les deux positions séparées par cette ligne exécutent leurs vibrations dans des sens opposés, de sorte que si l'une se trouve au dessus du plan naturel de la plaque, l'autre sera au dessous du même plan » (Germain, 1811, p. 19). Elle remarque qu'en remplaçant y par $-y$, dans la dernière équation qu'elle a écrite, « la valeur de z reste la même et change de signe seulement » (Germain, 1811, p. 19).

Ainsi Germain constate que son équation et les observations faites lors des expériences correspondent.

Elle refait le même travail pour une surface « partagée par deux lignes nodales passant par l'origine et dirigées l'une suivant les x et l'autre suivant les y » (Germain, 1811, p. 19). Elle retrouve le résultat annoncé par Chladni dans son *Traité d'acoustique* sur la façon dont les plaques vibrent.

Germain se contente de décrire rapidement les figures de Chladni qu'elle considère. En consultant la page du *Traité d'acoustique* donnée par Germain, Chladni fait référence, entres autres, aux figures suivantes :

Les figures obtenues dans ces cas « appartiennent à la classe des figures nodales symétriques dont Mr Chladni a observé un grand nombre d'exemples » (Germain, 1811, p. 21).

Germain poursuit en précisant qu'elle n'a considéré que les cas où « l'origine des coordonnées était prise à un point situé dans le milieu de la plaque vibrante, mais rien n'empêcherait de placer cette origine à un point quelconque du périmètre de la même plaque » (Germain, 1811, p. 21). Elle justifie son affirmation en prenant l'exemple de la plaque carrée.

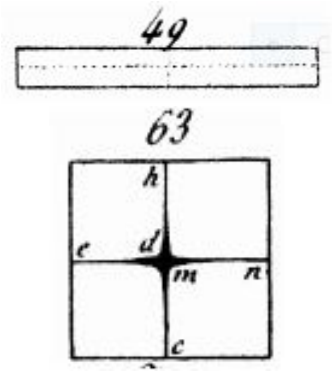


FIGURE 4.2 – Figures de Chladni (CHLADNI, 1809, planche 3)

Elle applique à nouveau le même raisonnement que dans les précédents cas particuliers. Elle obtient alors l'équation d'une surface élastique vibrante partagée par une ligne nodale diagonale :

$$z = ...A(e^{\frac{x-y}{f}} - e^{\frac{-(x-y)}{f}} - \left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + \cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}).$$

Elle remarque également que cette équation traduit le fait que « le mouvement de cette surface sera symétrique autour de la ligne nodale diagonale, de sorte que la figure entière sera partagée par cette ligne en deux figures nodales exactement semblables entre elles » (GERMAIN, 1811, p. 23).

Elle rajoute que c'est effectivement ce que l'on observe d'après les expériences réalisées par Chladni dans son *Traité d'acoustique*.

Elle étudie de même le cas d'un nombre pair de lignes nodales tracées diagonalement. Et elle s'autorise à ne pas faire de figures pour illustrer ses propos puisque *Le traité d'acoustique* de Chladni en contient.

Les figures de Chladni dont Germain fait allusion sont par exemple :

Germain n'indique que le strict nécessaire afin de donner un exemple d'application de la méthode qu'elle a développée. Elle est consciente qu'il reste encore beaucoup de cas à étudier et qu'elle n'a pas eu assez de temps pour réfléchir « sur le choix convenable à faire des points que l'on peut considérer sur les surfaces vibrantes et sur les conditions auxquelles on peut les supposer assujéties pour être en état d'entreprendre une discussion complète de toutes les circonstances du mouvement des surfaces élastiques » (GERMAIN, 1811, p. 25).

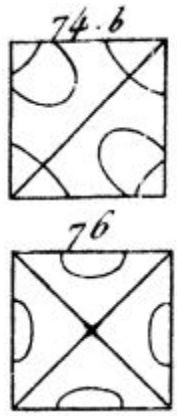


FIGURE 4.3 – Figures de Chladni (CHLADNI, 1809, planche 4)

La première partie du « mémoire 1811 » est écrit par analogie avec un mémoire d'Euler. Par rapport aux expériences, elle s'ingénie à ajuster son raisonnement aux figures obtenues par Chladni. Elle se sert des expériences pour justifier certains calculs, certaines suppositions, certaines valeurs qu'elle choisit. Cette deuxième partie répond partiellement à la deuxième partie du problème posé au concours de l'Académie tout en la rassurant sur les résultats théoriques qu'elle a obtenus.

Certains calculs contiennent de petites erreurs. Nous avons déjà vu qu'elle peut faire des erreurs d'écriture, comme avec l'oubli d'une racine carrée. Elle peut aussi oublier un coefficient dans un calcul alors qu'elle l'écrit dans la ligne suivante. Par exemple, dans le calcul suivant, il manque le coefficient $\sqrt{3}$ devant le deuxième terme en sin :

$$Ae^{\frac{a}{f}} + Be^{\frac{-a}{f}} - B\{\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} + \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\}e^{\frac{a}{2f}}$$

$$+A\{\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\}e^{\frac{-a}{2f}}$$

$$= -\{Ae^{\frac{-a}{f}} + Be^{\frac{a}{f}} + B\{\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\}e^{\frac{-a}{2f}}$$

$$-A\{\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\}e^{\frac{a}{2f}}\}.$$

alors qu'elle l'a bien écrit dans la ligne suivante :

$$A(e^{\frac{a}{f}}e^{\frac{-a}{f}} + \left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{-a}{2f}}$$

$$+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{a}{2f}})$$

$$= -B(e^{\frac{a}{f}} + e^{\frac{-a}{f}} + \left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{-a}{2f}}$$

$$+ \left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f} + \cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{a}{2f}}).$$

Elle a aussi fait des erreurs de signes, comme par exemple :

$$z = ...(Ae^{\frac{x-y}{f}} + Be^{\frac{-(x-y)}{f}} - B\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + \cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+A\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} - \cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$

en prenant ensuite $A = -b$, elle écrit :

$$z = \{e^{\frac{x-y}{f}} - e^{\frac{-(x-y)}{f}} - \left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + \cos sqrt3\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} - \cos sqrt3\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}\}$$

or le deuxième signe « $-$ » devrait être un signe positif.

Ce sont de petites erreurs probablement dues au fait que les lignes de calculs sont très longues et qu'elle n'a pas l'habitude de manipuler de tels calculs.

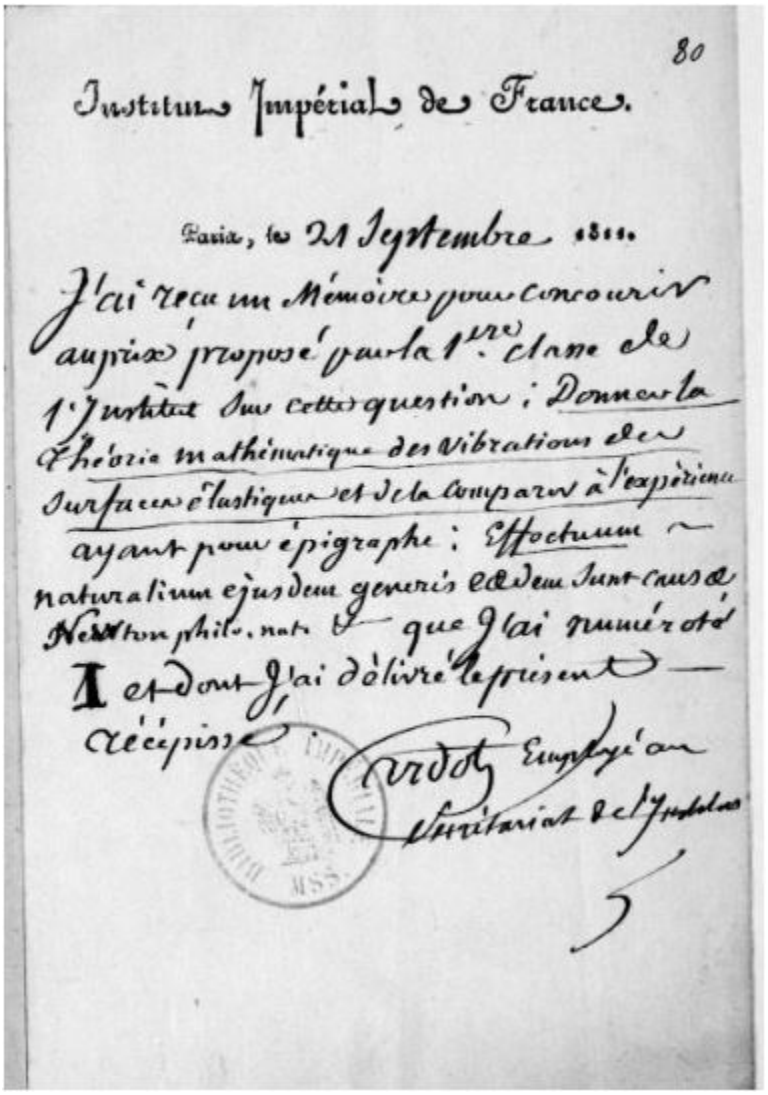
Mais elle a aussi écrit, comme nous l'avons déjà remarqué, des résultats de calculs sans donner les calculs intermédiaires. Mais comment a-t-elle réussi à obtenir les résultats qu'elle énonce ? Elle adapte quelquefois ses résultats pour obtenir des résultats antérieurs qu'elle connaît comme pour obtenir l'équation de Biot.

Il y a donc des erreurs de manipulations des calculs que l'on peut qualifier d'erreurs de « débutants ». Mais il y a aussi des erreurs de calculs plus importantes dues à un manque de maîtrise du sujet. D'ailleurs l'interprétation physique des calculs dans ce « mémoire 1811 » est encore floue. Elle raisonne essentiellement d'un point de vue géométrique. Elle travaille par analogie à partir de formules et d'équations du cas unidimensionnel. Sa rédaction donne le sentiment qu'elle s'est évertuée à faire correspondre ses résultats théoriques aux résultats expérimentaux.

Le sujet est abordé d'un point de vue plus mathématique que physique.

4.2.3 Les remarques de la commission

Elle envoie son « mémoire 1811 » à l'Académie des sciences le 21 septembre 1811.


80

Institut Impérial de France.

Paris, le 21 Septembre 1811.

J'ai reçu un Mémoire pour concourir au prix proposé pour la 1re classe de l'Institut sur cette question : Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques et de la comparer à l'expérience ayant pour épigraphe : Effectuum naturalium ejusdem generis eadem sunt causæ Newton philo. nat. & que j'ai numéroté I et dont j'ai délivré le présent récépissé

Cordot Employé au Secrétariat de l'Institut

FIGURE 4.4 – Lettre du secrétaire de l'Académie des sciences (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 80)

Une commission est désignée pour étudier les travaux envoyés à l'Institut en réponse à la question posée au concours. Cette commission est élue lors de la séance publique du 7 octobre 1811. Les commissaires sont Legendre, Laplace, Lagrange, Lacroix et Étienne Louis Malus.

Germain est la seule à avoir envoyé un mémoire. On peut lire dans le procès verbal de la séance du lundi 7 octobre 1811 : « La Classe reçoit [...] une [pièce] seulement pour le Prix extraordinaire de mathématique. » (*Procès-verbaux* 1808-1811, p. 544)

Quelque temps après avoir envoyé ce texte, Germain doit écrire à Legendre pour savoir si l'Institut avait bien reçu ses travaux. Cette lettre de Germain n'a pas été

retrouvée, mais une lettre de Legendre, datée du 22 octobre 1811, correspondant à une réponse destinée à Germain nous révèle l'impatience de cette dernière :

> « Mademoiselle,
>
> Votre Mémoire n'est pas perdu ; il est le seul qu'on ait reçu sur la question des vibrations des surfaces. On a nommé hier cinq commissaires pour l'examiner. J'ai l'honneur d'en être un. Mrs Laplace, Lagrange, Lacroix et Malus sont les quatre autres. Je n'ai rien dit ; je vous conseille également de garder le silence jusqu'au jugement définitif.
>
> Je suis, avec tous les sentiments que vous connaissez, votre dévoué serviteur.
>
> Legendre » (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 46)

Legendre recommande à Germain de ne rien dire à propos de leur correspondance, les travaux rendus à la commission devant rester anonymes tant qu'ils ne sont pas primés. Legendre, faisant partie de la commission chargée d'analyser le mémoire reçu n'était pas censé connaître le nom de son auteur. D'après la lettre précédente, on peut supposer que si cela venait à se savoir, Legendre ne pourrait plus être commissaire, ou même pire, le concours pourrait être annulé. La correspondance entre Germain et Legendre à propos du devenir du mémoire de Germain, montre la confiance qu'elle lui accordait, et réciproquement. De plus, le fait que Legendre ait tenu informé Germain et le silence à propos de leurs lettres, peut aussi signifier qu'il considérait que c'était moins facile pour Germain d'entendre les nouvelles, étant donné qu'elle ne pouvait pas fréquenter les séances de l'Académie des sciences. Elle n'avait pas non plus, à cette époque, la possibilité de discuter avec certains mathématiciens réputés. Les quelques informations qu'ils lui donnent auraient très bien pu se glisser dans une conversation informelle entre deux savants, sans qu'il n'y ait donc aucune trace.

Après plusieurs semaines d'attente, Lagrange se manifeste. Il signale aux autres membres de la commission désignée par l'Académie que l'équation proposée dans le seul mémoire reçu pour le Prix n'est pas exacte. Il déclare « que la manière dont on cherche à la déduire de celle d'une lame élastique en passant d'une ligne à une surface lui paraît peu juste. » (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 34)

Germain a supposé qu'une surface d'épaisseur négligeable peut être considérée comme une somme des lignes qui la composent. Dans ce cas, le mouvement imprimé à cette

surface peut être considéré comme la superposition des mouvements que les lignes prendraient si elles étaient vraiment séparées. Or Lagrange n'adhère pas à cette vision physico-géométrique. De plus, il a lui-même trouvé une tout autre équation : « je trouve [...] une équation (...) qui est bien différente. » (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 34).

Legendre n'a donc pas beaucoup d'espoir concernant la décision du jury de primer le mémoire de Germain. D'après la réaction des autres savants, il est pessimiste. Dans une lettre datant du 4 décembre 1811 [13], il exprime ses doutes et les raisons de son ressenti. Il lui annonce que l'équation qu'elle a obtenue n'est pas correcte. Pour justifier ses propos, il signale que Lagrange, en utilisant la même hypothèse qu'elle à savoir « l'élasticité en chaque point peut être représentée par $\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}$ », parvient à une autre équation. Legendre précise qu'on ne peut douter de la véracité de l'équation obtenue par Lagrange. En effet, pour confirmer son affirmation, il indique que, en considérant le cas particulier où la surface vibrante est réduite à une lame d'une largeur constante, l'équation est alors celle donnée par Euler pour les lames élastiques vibrantes. Ce qui n'est pas le cas concernant l'équation obtenue par Germain. Legendre lui signale que son erreur ne vient pas de son hypothèse mais des calculs lui permettant d'aboutir à partir de l'équation d'une lame, à celle qu'elle pense être celle des surfaces vibrantes. Il lui donne des indications pour pouvoir rectifier ses erreurs. Il prend donc le temps de la guider, de la conseiller, même si, d'après cette lettre, il n'étudie pas la théorie des surfaces élastiques vibrantes. De plus, il lui indique également que Biot, ayant entendu parler de son « mémoire 1811 » et de ses résultats, affirme avoir lui-même déjà trouvé une équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques qui est différente de celle de Lagrange. Mais il ne détaille pas davantage cette information puisqu'il considère que la bonne équation est celle de Lagrange. Il se contente uniquement ici de faire passer une information à Germain. Legendre essaie d'aider au mieux Germain. Il lui signale que ses erreurs sont à la fois d'origine physique et mathématique. Il lui suggère de mieux suivre la démarche de Lagrange, de consulter la nouvelle version de la *Mécanique analytique* de celui-ci. Il la conseille et l'incite à poursuivre ses efforts, ainsi qu'à continuer à taire leurs correspondances.

La Classe ne décerne pas le prix.

Elle considère que la question n'a pas été complètement résolue. De plus, étant donnée la complexité du concours, elle estime que le temps accordé n'a pas été suf-

13. Cette lettre est reproduite en annexe B.

fisant pour pouvoir modéliser et développer correctement la théorie correspondant au problème posé.

Le sujet, à savoir « Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, et la comparer à l'expérience », est remis au concours pour octobre 1813.

La Classe l'annonce lors de sa séance du lundi 16 décembre 1811 : « La Commission chargée de l'examen des pièces sur la question relative aux vibrations des surfaces élastiques, est d'avis de ne point décerner le prix et de remettre ce sujet. Cette proposition est adoptée. » (*Procès-verbaux* 1808-1811, p. 562)

Germain a conclu la partie *Avertissement* de son « mémoire 1811 » en formulant l'espoir d'avoir une certaine reconnaissance de son travail : « Son approbation [de la Classe] qui est le plus grand encouragement que je puisse recevoir sera pour moi un motif puissant d'apporter tous mes soins à perfectionner cette théorie, et à la justifier par des applications plus nombreuses et surtout plus détaillées » (Germain, 1811, p. 4).

Or la Classe n'émet aucune remarque positive à l'encontre de son « mémoire 1811 ». Seul Legendre, par son soutien tout au long des deux ans de recherche, l'encourage à poursuivre et à rectifier son analyse. En effet, Germain présente des lacunes concernant les outils utilisés en théorie de l'élasticité par manque de formation et de pratique. Jenny Boucard rappelle que les mathématiques appliquées sont enseignées à l'École polytechnique par exemple, ainsi que les outils nécessaires. (Boucard, 2020, p. 198) Or Germain ne peut assister aux cours contrairement à ses homologues masculins. Elle n'a pas été confrontée à cette difficulté quand elle travaillait auparavant sur la théorie des nombres. Aucun savant n'avait la possibilité de se former à l'école puisqu'il n'y a pas de cours sur la théorie des nombres. La formation est donc la même pour tout le monde. Ainsi la formation autodidacte de Germain qui n'a donc pas été un frein pour son travail sur la théorie des nombres, l'a été pour ses recherches sur la théorie de l'élasticité, les programmes d'enseignement étant davantage tournés vers l'ingénierie mathématique (Boucard, 2020, p. 191-192).

En 1809, quand le sujet du concours est annoncé par l'Académie des sciences, Germain passe environ les trois quarts du temps imparti à étudier les travaux réalisés dans le domaine de l'élasticité par Euler dans le cas unidimensionnel. En effet, n'ayant travaillé que sur les nombres, ce domaine est tout à fait inconnu pour Germain. Elle n'a donc pas vraiment le temps nécessaire pour se pencher suffisamment sur le cas bidimensionnel cité par le sujet du concours et aborder ce cas avec sérénité. Elle n'a d'ailleurs pas l'occasion de faire la comparaison entre ses résultats théoriques et les résultats des expériences de Chladni, comme l'intitulé du sujet le stipulait. De plus, les outils mathématiques nécessaires à la résolution de ce problème n'étant pas encore assez

développés et ses connaissances étant trop partielles, superficielles, aléatoires, l'étude mathématique de Germain contient des erreurs. Elle n'obtient pas l'équation modélisant la situation. Ainsi son « mémoire 1811 » ne pouvait être primé.

Chapitre 5

La persévérance de Germain

Sans attendre la décision du jury à l'issue du concours de 1811, Germain continue à travailler sur le sujet puisque, non contente d'elle-même, elle envoie une note à joindre à son mémoire pour compléter son analyse. De plus, Legendre n'hésite pas à l'encourager à prolonger son étude et la conseille sur la bibliographie.

Il semblerait que Germain travaille toute seule durant les deux années allouées à nouveau pour le concours. Aucune correspondance n'a été retrouvée. Dans le mémoire précédent, elle n'a pas obtenu l'équation qui modélise les vibrations des surfaces élastiques. Mais, grâce à Legendre, elle connaît maintenant l'équation qu'elle doit trouver.

Pour le concours de 1811, elle applique pas à pas le raisonnement d'Euler et les mêmes simplifications que ce dernier, et se base principalement sur les expériences déjà existantes [1].

Germain a-t-elle raison de persévérer ? Continue-t-elle de suivre l'analyse d'Euler et donc de continuer à raisonner comme dans le cas unidimensionnnel ?

5.1 La poursuite de la recherche

5.1.1 Les brouillons

Il existe plusieurs brouillons du « mémoire 1813 » [2] dans les *Les papiers de Sophie Germain. - Recueil de dissertations et problèmes de mathématiques et physiques* [3]. Cer-

1. Dans son mémoire publié en 1826, *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation générale de ces surfaces*, Germain précise que les simplifications qu'elle avait faites en 1811 par analogie lui apparaissent « comme une conséquence nécessaire de la nature même de la question. »

2. Le « mémoire 1813 » est le deuxième mémoire écrit par Germain pour répondre à la même question posée au concours en 1813.

3. Ces brouillons se trouvent entre les pages 398 et 615.

taines versions ne contiennent que quelques pages voire une seule, l'introduction. Le classement de ces brouillons est tout à fait aléatoire. Il n'y a aucune organisation. Est-ce Germain qui a regroupé les différentes feuilles après avoir terminé d'écrire le mémoire final, sans faire attention à l'ordre ? Ou les feuilles ont-elles été mélangées au fil des années ? De plus, la numérotation des pages est, à un moment donné, barrée et remplacée par une autre. Il s'agit tout d'abord de certaines pages impaires, puis de pages paires. Ce changement ne provient probablement pas de Germain, même si elle s'est trompée une fois en donnant le même numéro à deux pages consécutives. Quoiqu'il en soit, il est très difficile de trouver l'ordre dans lequel les feuilles en plusieurs exemplaires ont été écrites. Il arrive qu'il y ait une page insérée entre deux pages consécutives, cette page insérée intervenant dans la suite du mémoire. Il peut également y avoir une feuille intercalée dans les brouillons mais dont le contenu n'apparaît pas dans le mémoire final. Il peut y figurer une partie d'une rédaction d'un écrit ultérieur, des calculs. Se trouve aussi, au milieu de ces brouillons, un morceau d'une feuille déchirée sur laquelle figurent quelques lignes d'un mémoire différent.

L'introduction du « mémoire 1813 » est écrite à trois reprises avant la rédaction finale remise à l'Académie. C'est la seule page qui apparaît trois fois. Dans la première version, elle indique qu'elle a obtenue une « équation différentielle du quatrième ordre ». Cette précision n'est plus écrite dans les deux versions suivantes. Elle a sûrement voulu tout d'abord le préciser puisque dans son mémoire précédent, le « mémoire 1811 », elle avait donné une équation erronée du sixième ordre. Elle s'est ravisée, la Classe connaissant déjà l'équation qui a été donnée entre temps par Lagrange. Ce n'est donc plus le résultat qui intéresse les académiciens, mais plutôt le raisonnement et la façon de l'obtenir, Lagrange n'ayant pas donné de détails. Certaines formulations sont maladroites. Elle écrit par exemple « les géomètres sentiront aisément que la simplification à laquelle donne lieu la supposition de z très petit pourrait se transporter aux surfaces d'une courbure quelconque ». Cette allusion n'apparaît plus dans les versions suivantes. Elle pense que les académiciens qui vont lire son travail n'ont pas besoin de cette précision. Elle a encore des difficultés à formuler les aboutissements de son travail, à savoir ce qu'elle doit mettre dans cette introduction. Ainsi la première version contient beaucoup de ratures. Des mots sont barrés, mais aussi des expressions et un paragraphe. Au-dessus de certaines ratures se trouve une correction. Des rajouts sont aussi intégrés dans la marge. Ces ratures se retrouvent encore beaucoup dans la version suivante. Elle écrit : « équation ~~fort simple~~ différentielle dont les intégrales particulières sont facilement applicables ». Elle se montre minutieuse dans le choix des mots, elle se veut être le plus clair possible dans ses formulations. Elle cherche à être précise dans ces propos tout

en essayant de traduire sa pensée de façon « positive », sans jugement. Par exemple, quand elle a écrit « cet habile physicien n'a fait qu'un petit nombre d'essais sur le son des surface courbes », elle peut sous-entendre que les expériences menées par Chladni sont insuffisantes pour pouvoir en déduire une théorie. Cette formulation peut être perçue de façon « négative » voire offensante. Cette remarque barrée explique le fait qu'elle a ressenti la nécessité de faire encore elle-même d'autres expériences. La troisième et dernière version de l'introduction dont nous disposons ne contient pratiquement plus de ratures. Seule la fin est reprise. C'est la deuxième fois qu'elle écrit la même chose, barre et reprend la même modification pour conclure son introduction. Elle est très hésitante dans sa rédaction. Recommencer à plusieurs reprises la première page traduit le fait que Germain soigne tout particulièrement le début de son mémoire. La version finale de son introduction est plus générale. Les académiciens doivent attendre un exposé clair de ses résultats et de ses méthodes. Ils ne sont pas intéressés de savoir s'ils vont comprendre facilement ou non ses suppositions, si les expériences à l'origine de la question posée au concours sont suffisants.

Les autres pages du brouillon sont également parsemées de mots ou de phrases barrés, d'expressions rayées, de paragraphes lignés, remplacés au-dessus ou pas par d'autres mots, phrases, expressions ou paragraphes. Tout au long de sa rédaction, elle ne cesse de choisir avec soin ses mots, comme par exemple, elle préfère la formulation « diverses entre elles » à « différentes » quand elle parle de figures nodales, ou elle remplace « pour rendre compte » par « expliquer ». Toujours dans un souci de précision, elle peut barrer une partie de la phrase pour la réécrire ensuite après avoir rajouté une précision : « avoir pratiqué les réductions convenables ~~on trouvera aura enfin l'équation~~ et divisé par r^β on aura enfin l'équation ». Certaines rectifications nous révèlent qu'elle est d'abord prudente dans ses propos avant d'être plus affirmative : « J'ai fait un grand nombre d'expériences qui ~~tendent toutes a etablir~~ donnent le même son ». Elle veut montrer qu'elle a confiance en ses résultats. Ou au contraire elle atténue ses propos : « son équation ~~seroit alors la mem~~ conviendroit également alors à la surface tendue de même forme », ou « ~~Il est également facile de concevoir~~ L'analyse montre également que ». Certaines modifications lui permettent aussi de rectifier des erreurs. Par exemple elle barre et remplace « le rapport $\frac{145}{128}$ donné par la théorie est $<$ que $\frac{9}{8}$ » par « le rapport donné par la théorie savoir $\frac{145}{128}$ est $>$ que $\frac{9}{8}$ ». Elle a corrigé son erreur en remplaçant $<$ par $>$. Les autres ratures concernant des erreurs de calculs qui apparaissent dans ces brouillons et qu'elle a directement rectifiées sont essentiellement des erreurs de signes. Certains calculs sont repris deux fois, le deuxième est barré. Les deux calculs sont identiques, elle n'en a pas détaillé un plus que l'autre. Elle a sans

doute voulu seulement faire une vérification. Quoi qu'il en soit, plusieurs calculs ne sont pas développés. Soit il existe des brouillons antérieurs, soit elle a fait des calculs sur d'autres feuilles qui n'ont pas été conservées. Les deux hypothèses peuvent être probablement retenues.

Certains paragraphes, barrés d'un grand trait, ne figurent pas dans le mémoire final envoyé à l'Académie des sciences. Par exemple, figure dans le brouillon et le « mémoire 1813 » la description des différences remarquées entre les sons produits et théoriques, différences qui précise Germain n'a pas empêché Chladni de constater l'équivalence des figures correspondantes aux divers sons. Suit ensuite dans le brouillon un paragraphe qu'elle barre entièrement et qui n'apparaît donc pas dans le « mémoire 1813 ». Ce paragraphe concerne une description et citation d'un extrait de l'ouvrage de Chladni : « Après avoir donné les différentes tables des sons produis sur les plaques rectangulaires $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni rassemble n°124 diverses réflexions générales sur la loi que suivent ces sons on lit que "dans les vibrations ou une ligne longitudinale est coupée par des transversales 111, 211, 311, etc les sons d'une plaque quarrée sont a peu près dans le rapport des nombres 6, 15, 30, etc." Il ajoute que "l'un des diamètres etant peu a peu diminué, les sons se rapprochent de plus en plus de la série des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc". » Germain a dû penser que cette précision donnée par Chladni n'est pas nécessaire pour la compréhension de son étude. D'autre part, dans le « mémoire 1813 » n'apparaît pas tout un paragraphe dans lequel sont décrites certaines comparaisons entre les sons correspondants à des figures particulières alors qu'il figure dans le brouillon. La comparaison dont il s'agit concerne les sons produits pour les figures 79b et 63. Un extrait de ce paragraphe barré est : « A la vérité la différence entre les nombres qui appartiennent à ces deux figures savoir $\frac{26}{25}$ est beaucoup moins qu'un demi ton ; et considérée en elle même, elle pourroit être négligée ; mais elle contribue encore à éloigner la théorie de l'expérience lorsque l'on prend le son de la fig. 63 pour terme de comparaison ». La conclusion qu'elle y fait n'est pas favorable à une validation de la théorie. Cette constatation peut également être faite dans la suite de ce paragraphe barré dans laquelle on peut lire une comparaison entre les sons entendus lorsque l'on a les figures 63 et 86. Elle remarque que « le son de la fig. 86 comparé a celui de la fig. 63 est donc plus aigu d'un ton et $\frac{1}{2}$ ton majeur que ne le veut la théorie. » Elle préfère éviter d'ajouter dans la rédaction finale des observations qui contredisent la théorie et qui ne sont pas forcément significatives car isolées. Et ce long paragraphe barré se termine ainsi : « Au reste on se souvient que l'explication que j'ai crû pouvoir donner des fig. 79b et 86, n'est qu'hypothétique, ensorte que les nombres qui y correspondent, ne sont que probables. » La conclusion de ce paragraphe n'est pas catégorique. Germain

ne peut pas être affirmative dans ces propos. Nous pouvons aussi remarquer une phrase rayée présente dans le brouillon et ne figurant pas dans le « mémoire 1813 ». Cette phrase contient une allusion à la Classe. Germain demande l'opinion de celle-ci : « la classe jugera que je ne me sois pas tout a fait ajuré mépris sur la route qu'il fallait tenir dans la carrière ouverte par cet illustre auteur. géomètre. » En écrivant cette phrase dont deux mots ont été changés mais n'ont pas été barrés, elle se montre interrogative sur sa réflexion. Or elle se veut plutôt affirmative dans ses propos. Les paragraphes supprimés ne donnent que des informations conjecturales. Ils ne peuvent pas confirmer davantage grâce aux expériences les résultats théoriques qu'elle obtient et énonce dans le « mémoire 1813 ». Pour Germain, ils n'apportent pas plus de clarté à son exposé. Elle ne veut donc pas semer le doute dans la tête des académiciens qui vont lire son mémoire.

Cependant tous les paragraphes rayés ne sont pas censurés. Un autre cas se présente. Elle commence à rédiger un nouveau paragraphe quand, toujours à la recherche de la précision, elle décide de donner d'autres détails, explications concernant le paragraphe précédent. Ainsi le paragraphe suivant a été rayé pour être réécrit par la suite : « Après avoir exposé les conséquences générales de la périodicité des surfaces, je vais examiner en particulier celles qui resultent de l'intégrale (D). » (Germain, 2013, p. 473-474)

Germain a elle-même dessiné quelques figures traduisant des résultats expérimentaux. La page sur laquelle se trouve toutes les figures réunies fait partie des brouillons, tout comme dans le « mémoire 1813 ». Mais dans les brouillons, elle a aussi fait figurer trois d'entre elles quand elle étudie les cas représentés par celles-ci. Elle regroupe donc la figure observée et l'explication correspondante. Elle illustre ainsi directement les cas et n'a donc pas besoin d'aller chercher la figure sur une autre feuille. Cette méthode facilite son travail. Ce qu'elle ne fait pas dans la version finale. Elle a non seulement barré des mots, des phrases et des paragraphes, mais également une figure. Elle a donc sûrement rencontré quelques désagréments pour représenter les résultats expérimentaux. Ces difficultés peuvent nous dévoiler que les conditions dans lesquelles elle a réalisé les expériences ne sont pas optimales. Les figures qu'elle obtient lors de ses expériences sont instables.

Dans ses brouillons, elle fait allusion pour la première fois à Giordano Riccati, et ceci à deux reprises. Chladni dans son ouvrage *Traité d'Acoustique* traduit en français et imprimé chez Courcier pour le concours cite Riccati ainsi que certains de ses ouvrages dont *Delle Vibrazioni Sonore dei Cilindri*[4], mémoire écrit en italien, publié dans le

4. Le mémoire *Delle Vibrazioni Sonore dei Cilindri* de Riccati est consacré à la modélisation des vibrations du cylindre. Il détermine l'équation traduisant les vibrations du cylindre et analyse les sons émis. À différentes étapes de sa recherche, il fait une analogie avec les résultats d'Euler concernant les

premier tome des *Memorie di matematica e fisica della societa italiana* à Vérone en 1782. Germain rappelle quelques résultats sur la position des nœuds que Riccati a observés lors des vibrations de la lame dans le cas où les extrémités sont libres. Elle mentionne également que celui-ci « suit d'ailleurs les principes d'Euler » (Germain, 2013, p. 244). Ce qui peut la conforter davantage dans son choix de continuer à suivre les traces d'Euler.

Comment s'est-elle procurée l'ouvrage de Riccati ? Nous savons que Libri faisait partie de ses relations ; mais ce dernier n'étant né qu'en 1802 ne pouvait pas encore lui envoyer entre 1811 et 1813 les mémoires dans lesquels se trouve celui de Riccati. Est-ce par l'intermédiaire de Lagrange ou Legendre qu'elle connaissait déjà à cette époque ? L'un de ceux-ci a pu se faire envoyer l'ouvrage de Riccati. Nous avons vu qu'elle a appris le latin au début de son apprentissage pour pouvoir lire certains ouvrages comme ceux d'Euler par exemple, elle a pu également essayer de lire le mémoire en italien de Riccati.

Germain ne se limite donc pas à ce qu'elle a appris sur le sujet avant de commencer à écrire le « mémoire 1811 ». Elle continue à s'informer, à s'initier, à diversifier ses sources.

Ces différents brouillons sont des jets successifs d'écriture du « mémoire 1813 ». La dernière version est pratiquement la version finale. Les principales différences sont les ratures qui y figurent encore et la présence de quelques pages qu'elle n'a pas recopiées. La principale modification entre la dernière version des brouillons que nous avons et la rédaction ultime est la partie sur la cloche hémisphérique. Cette partie est différente dans le mémoire rendu à l'Académie. A-t-elle changé cette partie directement en écrivant le mémoire qu'elle enverra, sans faire un autre brouillon ? Aucune trace d'une éventuelle réécriture de cette partie n'apparaît dans *Les papiers de Sophie Germain* (Germain, 2013).

Pendant la période située entre la remise du « mémoire 1811 » et la nouvelle date limite fixée par l'Académie pour répondre à la même question posée au concours, Germain ne s'est pas, cette fois-ci, contentée d'utiliser les résultats expérimentaux d'autres savants, surtout ceux de Chladni. Nous avons vu que dans un brouillon elle a fait allusion au nombre insuffisant d'expériences réalisées par ce dernier. Elle a donc ressenti la nécessité d'en avoir d'autres. Elle s'est alors évertuée à faire elle-même certaines expériences.

---

plaques élastiques. Il n'est pas forcément d'accord avec les solutions données par ce dernier, comme par exemple la puissance de l'épaisseur qui apparaît dans l'équation (nous verrons que les différents savants ayant travaillé sur la théorie de l'élasticité n'obtiennent pas la même puissance). Vers la fin du mémoire, il évoque également les vibrations de la corde sur lesquelles il a également travaillé et rédigé un mémoire intitulé *Delle vibrazioni delle corde sonore*.

5.1.2 Les expériences de Germain

Reproduction des expériences de Chladni

Germain fait elle-même un certain nombre d'expériences variées, malgré des conditions peu propices pour les réaliser ne disposant certainement pas de laboratoire : « l'on ne s'étonnera pas de la difficulté que j'ai trouvée à faire l'expérience dont il s'agit si on fait attention à l'influence qu'ont les moindres circonstances physiques » (Germain, 1813, p. 17). Elle commence par faire des expériences déjà réalisées par Chladni afin d'obtenir les mêmes figures. Faire des expériences dont les résultats sont connus lui permet de s'entraîner et maîtriser la technique. Elle indique l'endroit où elle tient la plaque, où elle applique l'archet. Cela lui donne la possibilité de voir comment se forment les lignes nodales, et surtout de pouvoir entendre le son émis suivant la position de l'archet et des doigts. C'est un moyen de s'initier, de se familiariser plus facilement avec cette nouvelle notion. Contrairement à certains savants comme par exemple Poisson qui s'appuient uniquement sur des expériences réalisées par leurs collègues, la description faite par Chladni de ses expériences et résultats, les figures qu'il a faites ne lui suffisent pas. Elle a besoin de manipuler, de tester. Elle refait non seulement des expériences avec des plaques carrées, des plaques rectangulaires de dimensions différentes, mais aussi avec des surfaces courbes comme l'anneau. En revanche, elle ne joint au « mémoire 1813 » que six figures.

Non seulement, Germain n'hésite pas à reproduire des expériences de Chladni, mais elle les modifie aussi. Ainsi à la place de prendre comme Chladni des bandes rectilignes capables de changer de formes, elle préfère utiliser des lames de verre de diverses courbures. Et pour obtenir des résultats expérimentaux les plus fiables possibles, elle précise que le verre dans lequel elle se fait tailler les lames est un verre « bien choisi ». Elle ne cesse d'essayer de les améliorer pour obtenir des figures, des sons de plus en plus précis.

Les expériences sont importantes. Elles permettent de confirmer ou d'infirmer une théorie ; leurs choix et leurs réalisations sont donc essentiels. Germain passe apparemment beaucoup de temps à en faire. Elle a sûrement dû acquérir une certaine technicité et confiance en ses résultats expérimentaux. Cette assurance la pousse non seulement à remanier, à perfectionner les expériences existantes, mais aussi à imaginer et tenter des expériences inédites.

De nouvelles expériences

Germain ne se contente pas de reconstituer des expériences existantes. Elle en tente également d'autres. Elle les décrit, donne les résultats qu'elle obtient concernant les

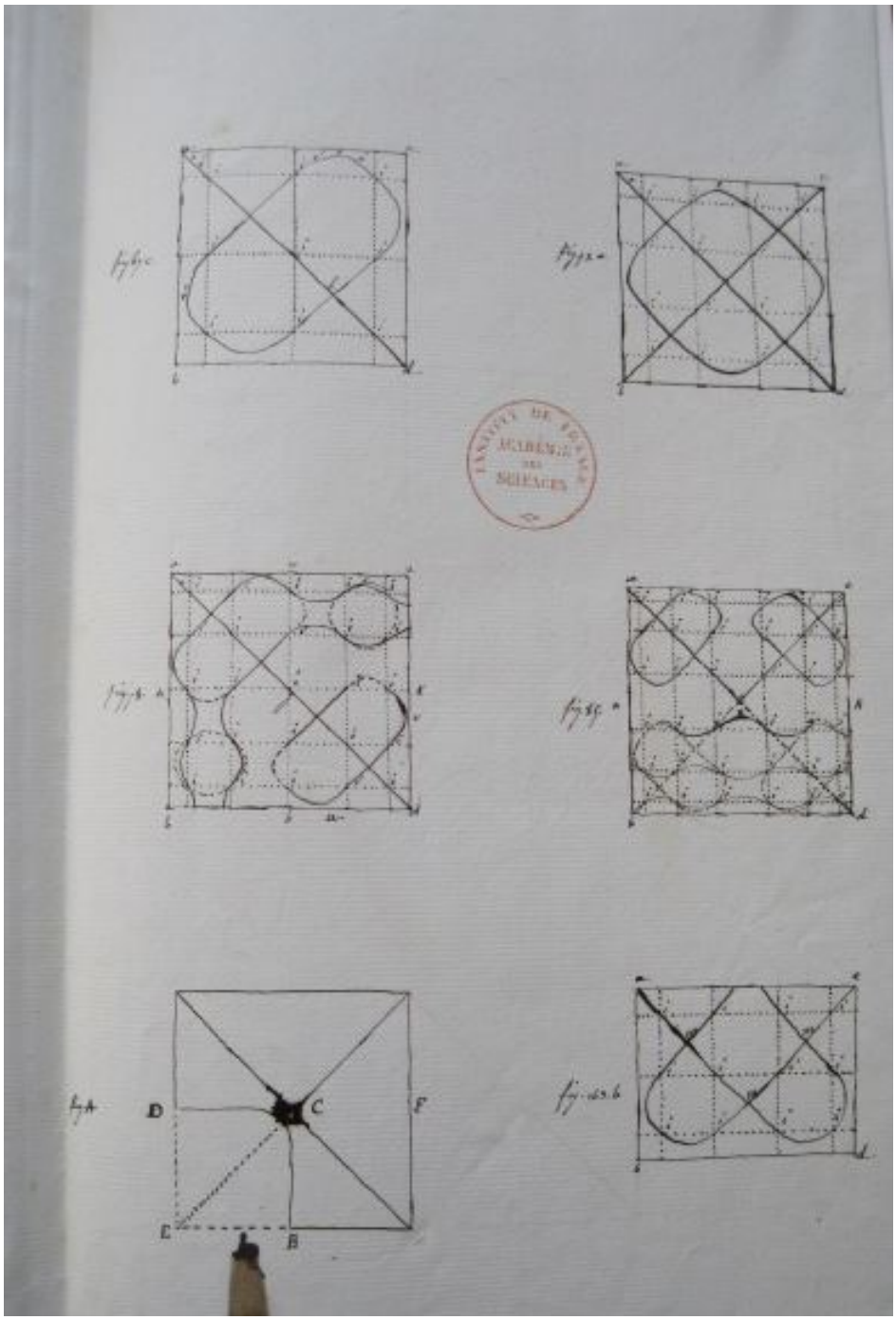


FIGURE 5.1 – Figures dessinées par Germain (GERMAIN, 1813, p. 117)

lignes modales et les sons, ainsi que les modifications faites d'après les observations théoriques pour obtenir la figure qu'elle pense être la bonne. Pour ces nouvelles expériences, elle se base donc aussi sur des hypothèses émises grâce à la théorie. Elle réalise ainsi beaucoup d'expériences mais ne juge pas nécessaire de les décrire toutes. Elle n'en

évoque qu'un certain nombre, celles qui sont facilement réalisables pour permettre aux mathématiciens de les refaire si nécessaire. Elle estime que les expériences qu'elle expose suffisent pour illustrer les phénomènes qu'elle a observés et qu'elle veut mettre en évidence.

L'objectif de certaines de ces expériences « inédites » est de chercher à « gêner » une des lignes nodales qui sont proches du bord d'une surface carrée. Pour cela, Germain cale la surface dans un morceau de bois dans lequel elle a fait « une raînure destinée à recevoir un millimètre environ du côté de cette surface » (Germain, 1813, p. 86). Elle pense ainsi reproduire pour la ligne nodale les mêmes « effets analytiques d'un simple appui » (Germain, 1813, p. 86), c'est-à-dire obtenir un son plus aigu que si la surface était libre. Or elle obtient le résultat contraire, le son produit est légèrement plus grave. Elle pense que ce résultat est dû au poids du morceau de bois. Pour vérifier son hypothèse, elle colle uniformément de la cire le long d'un ou plusieurs côtés de différentes plaques rectangulaires. Elle a ainsi réussi à réduire la gravité du son, mais a également obtenu des lignes nodales plus floues. Elle remarque que les changements dus au poids de la cire rajoutée sont équivalents à ceux qu'elle aurait obtenus si elle avait utilisé une plaque plus grande ayant le même poids que la plaque chargée de cire, c'est-à-dire, dans les deux cas elle obtient le même son. Elle souligne aussi que, conformément au prolongement fictif de la plaque, les lignes nodales ont changé de place.

Elle renouvelle ces expériences avec des plaques de verre carrées. Elle détaille les observations qu'elle a faites à propos des lignes nodales et des sons produits avant et après l'ajout de la cire à différents endroits. Elle remarque que la plaque initialement carrée, est fictivement transformée en une plaque rectangulaire dont elle précise les dimensions. Elle relève les sons pour la plaque chargée de cire et ceux pour celle non chargée de cire. Elle constate que le rapport des deux sons correspond avec celui calculé par la théorie. Elle note aussi qu'avec un poids supplémentaire placé sur la plaque, une très petite partie « comprise entre le côté chargé et la ligne nodale parallèle la plus voisine de ce côté » se comporte comme une partie plus grande de la plaque « comprise entre deux lignes également parallèles au côté chargé », c'est-à-dire que les deux parties rendent le même son. Elle innove en faisant ces expériences. Et elle ne se contente pas de faire des observations, elle explique ce phénomène de façon physique : les conditions sont les mêmes que la plaque soit prolongée de manière fictive, ou qu'une matière pesante capable de faire équilibre à la portion dont la plaque devrait être prolongée soit ajoutée.

Elle manque malheureusement toujours de temps pour poursuivre ses expériences avec des plaques de formes plus compliquées.

Les expériences sont importantes pour visualiser les situations, pour servir de base à une étude. La difficulté est de modéliser ensuite ces expériences. Germain arrive-t-elle à une modélisation correcte ?

5.2 La rédaction du mémoire envoyé à l'Académie

5.2.1 Les résultats théoriques

Le moment des forces élastiques

Pour déterminer l'équation du mouvement des surfaces élastiques, Germain reprend son hypothèse, à savoir la force élastique en un point d'une surface qui compense l'effet des forces extérieures appliquées est proportionnelle à la somme des courbures principales. En effet, Lagrange a obtenu, sans indiquer de calculs, la bonne équation en appliquant cette même hypothèse. Celle-ci permet de calculer le moment des forces élastiques et d'obtenir un membre de l'équation, l'autre membre étant exprimé par le moment des forces extérieures. Dans son « mémoire 1811 », Germain n'avait pas évoqué cette notion de moment des forces d'élasticité et n'était pas arrivée au bout de son calcul. En donnant l'équation correcte, Lagrange lui montre la voie.

Pour calculer ce moment des forces élastiques, elle réinvestit les calculs qu'elle a faits dans la note jointe au « mémoire 1811 » pour justifier son hypothèse. Elle utilise les mêmes suppositions géométriques. Elle considère à nouveau quatre points de la surface et deux plans passant par trois des quatre points. Un des deux plans passe par les premier, deuxième et quatrième points ; l'autre plan passe par les premier, troisième et quatrième points. En passant d'un point à un point infiniment voisin, une des coordonnées peut être considérée comme constante et les deux autres variables. Donc si $(x; y; z)$ sont les coordonnées du premier point, $(x; y+dy; z+dz)$ sont celles du deuxième point, $(x+dx; y; z+dz)$ celles du troisième point et $(x+dx; y+dy; z+2dz+d^2z)$ celles du quatrième point. Elle note ρ l'intersection des deux plans, à nouveau E la force d'élasticité et e l'angle extérieur formé par les deux plans. Elle suppose que la surface a déjà été déformée par des forces extérieures.

Pour calculer la somme des moments des forces élastiques $\int E\rho\delta e$, elle doit calculer $\delta e, \rho$ et E.

Elle commence par déterminer δe. Elle refait les calculs qu'elle avait faits dans la note jointe au mémoire de 1811 et obtient :

$$\sin e = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}d^2z}{ds}.$$

Cette expression de $\sin e$ est différente de celle de son « mémoire 1811 ». Elle progresse dans la manipulation des calculs. Elle suppose toujours, « comme l'ont fait tous les auteurs qui ont traité le mouvement de vibration, que les différens points de cette surface s'éloignent peu de leur situation naturelle pendant le mouvement, lequel s'exécute tout entier dans la direction des z » (Germain, 1813, p. 4). L'angle e est donc petit, d'où $\sin e \sim e$. Ainsi

$$e = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2} d^2 z}{ds} \quad \text{et} \quad \delta e = \sqrt{dx^2 + dy^2} \frac{\delta d^2 z}{ds}.$$

Elle calcule ensuite ρ, la distance entre le premier point et le quatrième, points ayant pour coordonnées $(x; y; z)$ et $(x + dx; y + dy; z + 2dz + d^2 z)$ et communs aux deux plans introduits pour calculer le moment de la force élastique. Elle néglige $(dz)^2$ et $(d^2 z)^2$ et obtient :

$$\rho^2 = (z''' - z')^2 + (y''' - y')^2 + (z''' - z')^2 = dx^2 + dy^2.$$

La somme des moments des forces d'élasticité est donc égale à :

$$\iint E\rho\delta e = \iint E\rho^2 \frac{\delta d^2 z}{ds}.$$

Il lui reste à calculer la force élastique E. Elle utilise l'hypothèse suivante : « Cette force [la force élastique E] peut être supposée proportionnelle à la somme des raisons inverses de l'un et l'autre rayons de courbure, de plus, elle doit contenir un facteur constant dépendant de la matière de la surface et de l'épaisseur de la même surface » (Germain, 1813, p. 5).

Elle pose donc $E = b\Gamma^3 \left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')} \right)$ où Γ est l'épaisseur de la surface, b est un facteur dépendant de la rigidité naturelle, (r) et (r') sont les rayons de courbure de la surface.

Germain ne revient plus sur le fait qu'il suffit de prendre la somme des raisons inverses des rayons de courbure, ses calculs servent uniquement à trouver l'équation. Elle avait fait une vague allusion dans le « mémoire 1811 » à la raison qui l'avait poussée à ne considérer que la somme et non le produit des raisons inverses des rayons de courbure. C'est apparemment maintenant une évidence pour elle. Elle n'a donc toujours pas justifié la validité de son hypothèse qu'elle avait formulée par analogie avec le cas unidimensionnel.

La surface s'écartant très peu de sa position naturelle, elle considère les quantités $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ comme étant très petites ; leurs carrés et produits peuvent donc aussi être

négligés. Elle reprend un résultat qu'elle a donné dans son précédent mémoire :

$$\frac{1}{(r)}+\frac{1}{(r')}=-\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right).$$

Elle calcule enfin la somme des moments des forces d'élasticité en faisant une double intégration par parties et obtient :

$$\iint E\rho^2\delta\frac{d^2z}{ds}=\int E\rho^2\frac{d\delta z}{ds}-\int d\left(E\rho^2\right)\frac{\delta z}{ds}+\iint dd\left(E\rho^2\right)\frac{\delta z}{ds}.$$

Comme les termes $\int E\rho^2\frac{d\delta z}{ds}$ et $\int\frac{d\left(E\rho^2\right)}{ds}\delta z$ appartiennent aux limites qu'elle étudiera plus tard, elle les néglige. Donc

$$\iint E\rho^2\delta\frac{d^2z}{ds}=\iint\frac{dd\left(E\rho^2\right)}{ds}\delta z$$

$$=\iint\frac{dd\left(-\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)\left(dx^2+dy^2\right)\right)b\Gamma^3}{dxdy}\delta z$$

$$=-\iint b\Gamma^3\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)dxdy\delta z.$$

Germain ne précise pas dans son « mémoire 1813 » les calculs pour obtenir la dernière égalité. A-t-elle fait les calculs suivants ?

$$\frac{dd\left(\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)\left(dx^2+dy^2\right)\right)}{dxdy}$$

$$=\frac{dd\left(\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)dx^2+\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)dy^2\right)}{dxdy}$$

$$=dd\left(\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)\frac{dx}{dy}+\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=d\left(\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}+\frac{d^3z}{dy^3}\right)dx+\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)dy\right)$$

$$=d\left(\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}+\frac{d^3z}{dy^3}\right)\frac{dxdy}{dy}+\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)\frac{dydx}{dx}\right)$$

$$=\left(\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)dxdy+\left(\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{d^4z}{dy^2dx^2}\right)dydx$$

$$= \left(\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) dxdy.$$

La dernière égalité représente le moment des forces élastiques. Le poids étant négligé et le mouvement se faisant suivant les z, ce moment est égal à

$$\iint \frac{ddz}{dt^2} dm\delta z = \iint \frac{ddz}{dt^2} \Gamma dxdy\delta z.$$

Elle obtient donc l'égalité suivante :

$$-\iint b\Gamma^3 \left(\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) dxdy\delta z = \iint \frac{ddz}{dt^2} \Gamma dxdy\delta z.$$

Elle différencie cette égalité deux fois puis divise par $\Gamma dxdy\delta z$ pour obtenir l'équation du mouvement des surfaces élastiques que Lagrange avait obtenue :

$$b\Gamma^2 \left(\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) + \frac{ddz}{dt^2} = 0 \tag{5.1}$$

Connaître l'équation à obtenir peut aider pour la gestion des calculs. C'est apparemment le cas pour Germain. Elle n'écrit pas toujours tous les calculs, elle se contente de décrire le type de calculs qu'elle fait pour parvenir au résultat.

De même que dans son « mémoire 1811 » mais sans préciser cette fois-ci pourquoi, Germain considère à nouveau le cas particulier où le mouvement de la surface est régulier et donc comparable à celui d'un pendule simple de longueur K. Et « en prenant pour unité des espaces parcourus la hauteur dont un corps abandonné à lui-même tombe dans une seconde » (Germain, 1813, p. 6), en négligeant la pesanteur, elle écrit l'équation correspondant à cette situation :

$$\frac{ddz}{dt^2} = \frac{-z}{K}.$$

En remplaçant $\frac{ddz}{dt^2}$ par son expression dans l'équation (A), elle obtient l'équation du mouvement régulier d'une surface élastique :

$$Kb\Gamma^2 \left(\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) = z \tag{5.2}$$

Germain considère cette situation particulière pour pouvoir résoudre l'équation. Les notions mathématiques qu'elle utilise, plus précisément la géométrie analytique et différentielle, ne sont pas encore suffisamment développées pour qu'elle puisse résoudre l'équation générale 5.1 (Dahan Dalmédico, 1987a, p. 348). Il faudra attendre encore

quelques années pour voir se développer le calcul variationnel nécessaire à la modélisation des vibrations des surfaces élastiques.

Elle indique que cette équation 5.2 se réduit à deux équations du second degré. Elle n'explique pas comment elle obtient ces deux équations. Elle se contente d'écrire qu'en posant $\zeta^4 = Kb\Gamma^2$, les deux équations du second degré sont :

$$\zeta^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) = z \text{ et } \zeta^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) = -z.$$

Or si nous détaillons un peu les calculs, en posant $\zeta^4 = Kb\Gamma^2$, l'équation 5.2 s'écrit :

$$\zeta^4 \left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = z$$

c'est-à-dire :

$$\left\{\zeta^2 \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right)\right\}^2 = z.$$

Pour obtenir les deux solutions données par Germain, il faudrait avoir

$$\zeta^4 \left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = z^2.$$

Cette erreur, comme certaines erreurs qu'elle a commises y compris dans le « mémoire 1811 », peut être considérée comme une erreur de « débutant ». Ce sont des calculs souvent très longs et d'un type nouveau pour Germain. Elle n'effectuait pas ce genre de calculs en théorie des nombres. Elle apprend en calculant.

Germain remarque que la deuxième équation correspond à celle des mouvements réguliers des surfaces tendues. Elle ne peut donner une intégrale générale en termes finis de l'équation 5.2. Mais elle précise qu'elle espère trouver des intégrales particulières des deux équations du second degré et en combinant les deux, obtenir une intégrale correspondant à la surface tendue, intégrale que l'on pourra aussi prendre pour la surface élastique.

Comme dans le « mémoire 1811 », Germain restreint sa recherche aux surfaces tendues. Elle fait une correspondance entre une surface tendue et une surface élastique. Elle conclut que si les surfaces sont renfermées dans les mêmes limites données, qu'elles soient tendues ou élastiques, on retrouve les mêmes figures.

Recherche d'intégrales particulières

Germain commence par rappeler que la solution de l'équation $\frac{ddz}{dt^2} = -\frac{z}{K}$ du mouvement d'un pendule simple est $z = M \sin\left(\sqrt{\frac{1}{K}}t + \xi\right)$, où ξ est une constante, M est

une fonction de x, y et de constantes, fonction qui détermine les différentes intégrales particulières de l'équation 5.2. Nous avons vu lors de l'étude du « mémoire 1811 » comment obtenir cette solution que Germain donne avec vraiment très peu d'indications. Elle précise que ce facteur en sinus de cette solution, relatif au temps, figurera dans toutes les solutions de l'équation 5.2, mais qu'elle ne l'écrira pas.

Elle recherche ensuite des intégrales particulières comprenant des exponentielles, des cosinus et des sinus. Pour cela, elle considère différentes conditions entre les variables x et y.

Par exemple, il existe une périodicité dans les valeurs des coordonnées x et y, c'est-à-dire elles augmentent l'une et l'autre d'une quantité constante, pas forcément la même, par contre la valeur de z reste la même. Cette condition a pour équation $\frac{ddz}{dx^2} = \frac{n^2}{m^2}\frac{ddz}{dy^2}$, équation de la même forme que celle des cordes vibrantes. Sous cette condition, une solution est :

$$z = ...\mathcal{A}\sin\left(\frac{Mnx}{A}\right)\sin\left(\frac{Mmy}{A}\right).$$

À chaque solution correspond une figure nodale et un son concordant. Pour la solution précédente où $\mathcal{A}$ est constant, le son est donné par la formule

$$\sqrt{\frac{1}{K}\frac{1}{M}} = \frac{M\left(m^2+n^2\right)\Gamma\sqrt{6}}{A^2}.$$

Elle envisage encore d'autres conditions comme une surface périodique dans le sens des x et des y, ou alors seulement dans le sens des x.

Germain remarque que toutes les intégrales obtenues, à l'exception d'une, correspondent à l'équation différentielle d'une surface tendue et élastique. Les intégrales qui conviennent seulement aux surfaces élastiques sont plus compliquées, et donc impossibles à trouver.

Les équations de surfaces courbes élastiques

Dans ce « mémoire 1813 », Germain s'est aussi intéressée à la modélisation des vibrations de la plaque élastique circulaire.

Pour cela, elle utilise l'équation différentielle 5.2 des surfaces élastiques vibrantes dans le cas où le mouvement de la surface est régulier :

$$Kb\Gamma^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = z$$

Elle considère le plan des x et y parallèle au plan de la plaque au repos, nomme r le rayon du cercle et φ l'angle qu'un rayon passant par le point de coordonnées $(x; y)$ fait avec un des axes. Alors

$$\frac{dr}{dx} = \cos\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \qquad \frac{dr}{dy} = \sin\varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Elle donne directement les dérivées de z par rapport à x et y :

$$\frac{dz}{dx} = \cos\varphi\frac{dz}{dr} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{dz}{d\varphi} \qquad et \qquad \frac{dz}{dy} = \sin\varphi\frac{dz}{dr} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{dz}{d\varphi}.$$

Après des dérivations successives, elle obtient en posant $Kb\Gamma^2 = \frac{e^4}{n^4}$, l'équation pour les vibrations d'une surface élastique circulaire :

$$\frac{n^4}{e^4}z = ...\{\frac{1}{r^3}\frac{dz}{dr} - \frac{1}{r^2}\frac{ddz}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d^3z}{dr^3} + \frac{d^4z}{dr^4} - \frac{2}{r^3}\frac{d^3z}{d\varphi^2 dr} + \frac{2}{r^2}\frac{d^4z}{dr^2 d\varphi^2} + \frac{4}{r^4}\frac{ddz}{d\varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}\} \quad (5.3)$$

Elle remarque qu'en faisant $r = a$ avec a constant dans l'équation 5.3 de la surface élastique circulaire, celle-ci s'écrit alors :

$$\frac{n^4}{e^4}z = ...\frac{1}{a^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}.$$

Cette dernière équation représente l'équation différentielle de l'anneau élastique.

Pour compléter son étude, Germain fait rapidement allusion aux vibrations de la cloche hémisphérique. D'après elle, l'équation obtenue pour la surface circulaire peut aussi s'appliquer à la cloche hémisphérique.

Enfin pour conclure ce « mémoire 1813 », elle précise que l'équation traduisant les vibrations de la corde tendue, peut aussi traduire, dans certains cas, les vibrations de la lame droite, de l'anneau circulaire élastique, du tambour circulaire, de la plaque élastique circulaire et de la cloche hémisphérique.

Germain a donc fait une étude plus poussée dans ce « mémoire 1813 ». Non seulement, elle a travaillé sur la modélisation des vibrations des surfaces planes élastiques, mais aussi sur la modélisation des surfaces courbes élastiques. Son travail contient certes des erreurs dans certains de ses calculs qui la plupart peuvent être considérées comme des oublis, oubli d'une racine carrée, oubli d'un coefficient, etc. N'est-ce pas ainsi lorsqu'on pratique des calculs d'un genre nouveau ? Ces erreurs de calculs peuvent être considérées comme des erreurs d'apprentissage. Germain est une personne qui se forme et s'initie à ce type de calculs. De plus, elle ne reporte pas forcément ses erreurs dans

la ligne de calculs suivante. Ayant fait des brouillons avant de rédiger le texte final, elle a peut-être tout simplement oublié de recopier l'un ou l'autre coefficient qui n'apparaît pas dans le « mémoire 1813 ». Nous avons aussi vu qu'elle peut faire des suppositions, elle préfère employer le mot « hypothèse » (dans son brouillon, elle barre le mot « supposition » pour le remplacer par le mot « hypothèse ») pour arriver au résultat désiré. Mais là encore, elle ne fait ni plus, ni moins que ce que font également les autres mathématiciens. D'un autre côté, sa réflexion a évolué par rapport à son « mémoire 1811 ». Elle ne s'est pas seulement contentée de reprendre, de rectifier les points obscurs de son mémoire précédent. Et son étude ne s'arrête pas là. Elle poursuit sa recherche, étudie des points particuliers de la surface.

Étude des points du contour

Germain étudie les conditions que doivent remplir les points du contour d'une surface élastique. Jusqu'à présent, elle avait occulté ces points. Or cette étude est importante puisque ce sera, entre autres, un sujet de discorde entre Germain et Poisson comme nous le verrons plus tard. De plus, elle n'avait pas eu le temps d'analyser ces points du contour d'une surface élastique dans son « mémoire 1811 ».

L'équation du mouvement des surfaces élastiques s'écrit sous forme d'intégrales. À propos de ces intégrales, Germain signale qu'il y a les conditions satisfaites par « tous les points renfermés dans l'étendue des intégrales », mais il y a aussi celles qui doivent être satisfaites par « les limites de ces intégrales » c'est-à-dire par les points du contour du corps sonore considéré. Ces conditions sont appelées conditions des limites des intégrales ou conditions des extrémités. Ainsi les conditions diffèrent selon que les points se situent sur le contour ou dans le corps sonore. « Il suit de là qu'aucun point ou ligne ne pourront jamais être considérés comme limite d'une partie vibrante s'ils ne satisfont aux conditions analytiques qui distinguent les points du contour des autres points du corps sonore ; et qu'au contraire il suffira toujours qu'un point ou ligne satisfasse à ces mêmes conditions pour qu'il soit permis de le considérer comme limite analytique des parties vibrantes qu'il sépare. » Elle prend le cas de la corde vibrante pour illustrer ses propos. Dans ce cas là, les points de repos sont de « véritables limites des corps sonores » (Germain, 1813, p. 14). Mais d'autres points peuvent vérifier les mêmes conditions des extrémités que les points de repos. Il s'agit des points situés au milieu des ventres des vibrations.

Elle remarque qu'on peut voir quelque chose d'identique pour les surfaces tendues, c'est-à-dire qu'il existe des points ou des lignes autres que les points ou lignes de repos qui vérifient les conditions des extrémités.

Germain fait une nouvelle fois référence au cas unidimensionnel, cas déjà étudié et sur lequel elle reviendra par la suite. Il constitue toujours et encore pour elle un modèle. Elle ne cesse de faire un parallèle entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel.

En revanche, elle constate que la situation est différente pour les lames et les surfaces élastiques. Dans ces cas, « il existe dans leurs mouvemens deux genres différens de points ou lignes de repos » (Germain, 1813, p. 15). Elle considère les conditions des extrémités données par Lagrange dans la *Mécanique analytique*[5] à propos des fils élastiques. Ces conditions se traduisent par quatre couples d'équations : $z = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$; $z = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$; $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$; $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$.

Euler n'a étudié, pour la lame élastique, que les trois premiers couples. Le premier correspond au cas où la lame a ses extrémités fixes, le deuxième aux extrémités appuyées et le troisième aux extrémités libres[6]. Ce dernier cas convient aussi au quatrième couple d'équations.

Germain observe aussi que les conditions analytiques des lames droites peuvent convenir également aux fourches. Elle relève, d'après des résultats de Chladni, que les fourches donnent les mêmes sons que les lames droites appuyées aux extrémités. Or les extrémités de la fourche sont libres et devraient donc être associées au troisième cas.

Après avoir fait cette constatation, elle tient à revenir sur l'étude des six cas faite par Euler à propos des points de repos d'une lame, selon que les extrémités de la lame sont libres, fixées ou appuyées. Elle s'était déjà penchée sur cette étude dans son « mémoire 1811 ».

Euler reste une référence pour Germain. Pour mieux comprendre la théorie développée par celui-ci, elle reprend toute sa démarche.

Elle conclut que « les points de repos des lames élastiques ne doivent pas être assimilés aux nœuds de vibration des cordes tendues » (Germain, 1813, p. 21). De plus, la longueur qui sépare deux points de repos d'une lame « doit être d'autant plus étendue qu'elle est plus éloignée de l'extrémité et plus voisin du milieu de la lame quoique pourtant les différences soient plus grandes entre les parties [longueurs] qui sont près des extrémités qu'entre celles qui s'en éloignent davantage » (Germain, 1813, p. 22). Elle s'étonne que personne n'avait encore fait cette observation. Elle note également

5. Le volume 1 d'une nouvelle édition revue et augmentée par Lagrange est publiée en 1811 chez l'imprimeur-libraire Mme Vve Courcier. Le volume 2 ne sera publié qu'en 1815.

6. Une extrémité est dite fixée quand « elle est encastrée dans un mur ou serrée dans un étau ». Une extrémité est dite appuyée quand « on fait appuyer par un étau ou par une machine une planche (ou un corps immobile) contre laquelle repose l'extrémité de la lame. » Deux extrémités sont dites appuyées quand « des planches (ou d'autres corps assez immobiles) sont pressées contre les deux extrémités de façon à ce qu'elles ne puissent pas se déplacer. » Germain définit le mot « appuyé » de façon analytique. Elle emploie ce terme pour désigner le positionnement des extrémités quand les deux conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}$ sont vérifiées.

qu'un « obstacle qui laisse subsister la communication du mouvement entre les deux portions de la lame (...) peut être placé dans un point de repos quelconque, et qu'il arrive même toujours, lorsque les extrémités sont libres ou fixes, que ce n'est pas dans un point d'appui au sens d'Euler qu'il convient de serrer la lame pour obtenir les différens sons dont elle est susceptible » (Germain, 1813, p. 22). Ce qui la conduit à dire que les définitions des mots « libre » et « appuyé » ne sont pas claires.

Après ce rappel, Germain analyse les conditions auxquelles sont contraints les points du contour des plaques élastiques vibrantes, c'est-à-dire les conditions des limites des intégrales. Celles-ci se traduisent par les deux équations :

$$\int \left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right) \delta.\frac{dz}{dxdy} = 0 \quad \text{et} \quad \int \frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)\delta z}{dxdy} = 0$$

À nouveau, elle ne donne pas les calculs. Elle se contente de préciser la formule qu'elle reprend et les différentes opérations qu'elle entreprend. Cette constatation est récurrente dans son mémoire. Elle considère qu'il est inutile de remplir des pages de calculs à la portée des académiciens qui vont lire son travail. Seul l'enchainement des différentes étapes de son raisonnement les intéresse.

Elle commence par étudier la signification de ces deux équations pour les surfaces élastiques vibrantes rectangulaires. Pour simplifier la situation, elle suppose que le plan de ce type de surfaces au repos est celui des x et des y, prend pour origine des coordonnées un point de repos de la surface pour que chacun des côtés de la surface soit parallèle à un axe des x et y.

Elle considère les points de la plaque qui se trouvent sur les côtés parallèles à l'axe des y et qui satisfont aux deux conditions suivantes :

$$\int \frac{1}{dy}\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)\delta\left(\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

$$\int \frac{1}{dy} d\left\{\frac{\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}\right\}\delta z = 0.$$

Ces conditions sont déterminées d'après quatre couples d'équations. Ces couples sont :

$$z = 0 \quad et \quad \frac{dz}{dx} = 0 \quad ; \quad z = 0 \quad et \quad \frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0 \quad ;$$

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0 \quad et \quad \frac{dz}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx^2} = 0 \quad et \quad \frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0.$$

Germain note une similitude entre les résultats obtenus pour la plaque rectangulaire et ce qui se passe pour les extrémités de la simple lame. Elle précise que l'on peut faire la même analyse pour les points de la plaque rectangulaire qui se trouvent sur les côtés parallèles à l'axe des x. Enfin, concernant les points aux quatre angles, comme ils appartiennent à la fois aux côtés parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, ils doivent satisfaire quatre équations traduisant quatre conditions des limites.

Elle poursuit en définissant certaines notions. Elle appelle « point de double limite tout point qui remplira à la fois les conditions des limites des valeurs de x et celles des valeurs de y » (Germain, 1813, p. 25). Par exemple, un point sera un point de double limite s'il satisfait au couple d'équations $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0$. Elle nomme « ligne de limite analytique, une ligne formée par des points satisfaisant aux conditions des limites. » Elle spécifie aussi les conditions des points d'origine afin de pouvoir choisir l'origine des coordonnées. Ces conditions sont au nombre de quatre :

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0 \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0 \quad et \quad z = 0.$$

Germain précise ensuite, que les conditions des limites doivent être adaptées quand il s'agit d'autres types de surfaces. Elle prend comme exemple une surface ronde et refait l'analyse dans ce cas là. Elle reviendra sur l'étude des points du contour d'une surface circulaire un peu plus loin dans son « mémoire 1813 ». Elle calculera à nouveau les quatre couples d'équations provenant des conditions des limites. Elle montrera qu'à chaque couple d'équations correspond une situation particulière et décrira les figures nodales concordantes.

Elle termine en soulignant que « la considération des conditions auxquelles les points du contour doivent satisfaire, est de la plus grande importance pour déterminer le choix des intégrales particulières qui peuvent convenir dans chaque cas, et qu'elle fournit aussi le moyen de renfermer dans les mêmes formules l'analyse de divers cas qui sembleroient, au premier coup d'œil, devoir etre calculés à part. » Pour justifier cette remarque, elle précise que les points satisfaisants aux conditions des limites forment des lignes de limites analytiques. Celles-ci séparent la plaque en surfaces partielles. Les points de contour de ces surfaces partielles ne sont pas forcément dans le même état que les points de contour de la plaque. Cependant l'équation modélisant le mouvement de la plaque sera toujours applicable aux surfaces partielles.

Germain réutilise ces notions de conditions des limites, de lignes de limites analytiques pour pouvoir décrire théoriquement les figures nodales, et les comparer à celles obtenues lors des expériences.

5.2.2 Le rôle et l'importance des expériences

Pour son « mémoire 1811 », Germain n'avait pas eu assez de temps à accorder à la comparaison entre les résultats théoriques et ceux issus des expériences, comme l'intitulé du concours le demandait. Elle remédie à ce manque dans ce « mémoire 1813 ». La partie consacrée aux expériences est deux fois plus importante que celle consacrée à l'analyse mathématique pure. Non seulement des paragraphes entiers sont réservés aux expériences et à leurs rôles, mais elle en parle aussi tout au long de ce mémoire. Les expériences jouent trois rôles différents dans ce « mémoire 1813 ».

La réduction des cas d'étude

Les expériences avaient déjà joué un rôle de simplification de situations dans le « mémoire 1811 » de Germain. Elle rappelle donc que les expériences de Chladni ne concernent uniquement que les mouvements réguliers comparables aux mouvements du pendule simple. Ce qui réduit le domaine d'étude. Cela lui permet de trouver des intégrales aux équations correspondantes aux différents cas particuliers étudiés.

La vérification des résultats théoriques

La deuxième fonction des expériences est de valider ou invalider les modélisations. C'est cette deuxième fonction des expériences qui prend le plus de place dans le « mémoire 1813 ». Pour ce faire, elle utilise bien entendu les expériences et figures obtenues par Chladni, mais elle a également fait elle-même un certain nombre d'expériences variées, malgré la difficulté pour les réaliser.

Germain commence par comparer sa théorie aux expériences dans le cas des vibrations régulières des plaques carrées. Elle s'attarde sur cette comparaison. Grâce aux différentes équations qu'elle a calculées précédemment et en considérant diverses conditions sur les constantes et angles, elle décrit précisément les figures nodales théoriques pour chaque cas particulier. Elle explicite le nombre de lignes nodales, leurs formes, leurs positions entre elles. Elle détermine le nombre de points invariables de repos, c'est-à-dire les points d'intersection des lignes nodales. Elle n'expose qu'une partie de la figure, l'autre partie s'obtenant par symétrie. Sa description est très détaillée, rigoureuse. Elle précise également le numéro des figures expérimentales correspondantes à consulter dans le *Traité d'acoustique* de Chladni. Elle fait référence, par exemple, aux figures 69, 72a :

À propos de cette comparaison, elle écrit : « Il est aisé de voir maintenant combien la théorie que j'ai exposée est conforme à l'expérience » (Germain, 1813, p. 40). Mais

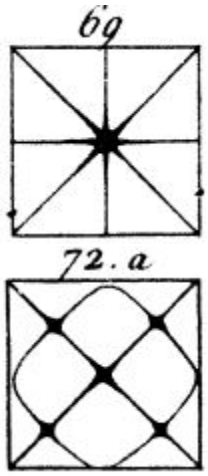


FIGURE 5.2 – Figures obtenues expérimentalement par Chladni (CHLADNI, 1809, planche 3)

elle rajoute que l'on pourrait être tenté de croire, dans un premier temps, que la théorie et l'expérimentation de Chladni ne correspondent pas. Or il n'en est rien. Elle regarde la manière dont Chladni a obtenu les figures et constate que les différences observées sont naturelles. Elles sont dues à la position des « points de rebroussement », par exemple s'ils sont situés dans chacune des parties séparées par des lignes de limites. Ainsi, elle ne se contente pas seulement de faire une comparaison, mais elle explique aussi pourquoi les figures théoriques correspondent avec les figures obtenues lors des expériences, comme par exemple pour une plaque carrée partagée en quatre parties égales.

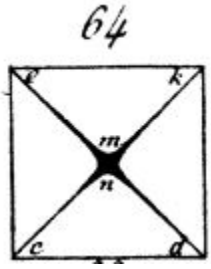


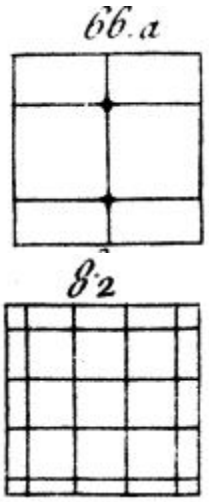
FIGURE 5.3 – Figure obtenue expérimentalement par Chladni (CHLADNI, 1809, planche 3)

Elle utilise pour faire sa comparaison « plus de la moitié des figures observées par Mr Chladni, dans le mouvement des plaques quarrées » (GERMAIN, 1813, p. 57).

Germain s'intéresse aussi aux surfaces triangulaires isocèles rectangles, par exemple celles dont l'hypoténuse serait appuyée et les côtés adjacents à l'angle droit libres. Elle

ne fait pas l'étude, mais remarque que les mouvements de ces surfaces sont compris dans les équations qui traduisent les mouvements de la plaque carrée.

Elle se penche ensuite sur le cas des surfaces (carrées) périodiques. Elle indique à nouveau les positions des lignes nodales données par l'équation et les associe aux figures de Chladni.



Figures obtenues expérimentalement par Chladni (Chladni, 1809, planches 3 et 4)

Elle rappelle que la théorie est encore une fois en accord avec les expériences sur la disposition des lignes nodales. Elle trouve le travail de Chladni remarquable. En effet, bien que ne connaissant pas encore la théorie, Chladni a su reconnaître les lignes nodales qui ne sont dues qu'aux imperfections de la surface élastique vibrante.

Germain confronte également sa théorie aux expériences en prenant encore des plaques rectangulaires différentes des plaques carrées. Elle essaie d'élargir au maximum sa comparaison en utilisant des plaques de dimensions différentes. Elle remarque qu'elle peut utiliser les intégrales obtenues à partir des calculs effectués en étudiant les plaques carrées pour expliquer les figures formées de simples lignes nodales droites et parallèles entre elles que l'on trouve sur les plaques rectangulaires. L'analyse de la formation des lignes nodales dans le cas des plaques rectangulaires est identique à celle des plaques carrées. Elle précise qu'elle ne va donc pas refaire toute l'étude.

Elle n'oublie pas les surfaces circulaires. Et là encore, elle a recours aux expériences et aux figures obtenues par Chladni pour associer une figure à l'équation correspondante.

Elle ne peut toutefois pas décrire toutes les figures que l'on peut obtenir à partir d'une équation. Dans certains cas, elle se contente d'indiquer comment on peut faire pour y parvenir. Les expériences de Chladni et les siennes lui permettent aussi de valider ses remarques.

Elle ne s'arrête pas à une comparaison des figures nodales. Elle pousse davantage l'analogie entre la théorie et les expériences en s'intéressant aux sons émis par les surfaces vibrantes. Elle signale qu'il est très difficile, dans certains cas plus que dans d'autres, d'avoir une concordance parfaite entre la théorie et les expériences. Il est nécessaire d'accepter, dans cette étude, une marge d'erreur. Germain prend celle utilisée par Chladni, à savoir « un semi ton ». En effet, sachant que l'épaisseur d'une plaque, qui n'est pas toujours homogène, influence les intervalles des sons correspondant aux différentes figures formées sur la plaque, il est pratiquement impossible d'avoir un accord parfait entre les sons obtenus par les résultats théoriques et ceux donnés par les résultats expérimentaux.

Pour faire cette comparaison, elle reprend certaines figures de Chladni, et se sert de la table donnée par celui-ci dans son *Traité d'acoustique* concernant les sons qu'il a obtenus pour chaque figure. Elle conclut que les rapports indiqués par la théorie diffèrent toujours d'un demi-ton de ceux donnés par les expériences. C'est ce qu'avait prévu Chladni. Ces différences sont du même type que celles pour les plaques carrées et rectangulaires. En revanche, elles diffèrent suivant les figures. Ces écarts sont plus importants pour les plaques ayant des figures périodiques que pour celles ayant des figures non-périodiques. La différence est maximale quand la surface périodique ne présente pas de demi-périodes, tant dans le sens des x que dans celui des y.

Concernant les plaques rectangulaires, elle effectue pas moins de dix-huit comparaisons entre les sons produits par une plaque de longueurs données et les sons corrigés qui doivent correspondre à la figure désirée. Elle note des sons plus aigus d'un demi-ton sur une plaque rectangulaire que sur une plaque carrée. Elle estime que cet écart provient des circonstances physiques, étant donné que les expériences ont été réalisées à des époques différentes. Elle précise les différences notées entre les observations expérimentales et théoriques. Néanmoins, dans certains cas, la différence étant en-dessous d'un demi-ton, la théorie et les expériences correspondent exactement, c'est le cas pour la figure 64 reproduite p. 96. Germain fait des comparaisons pour plusieurs sons concernant cette figure. Mais, parmi les différentes études qu'elle a faites, elle trouve aussi des cas pour lesquels il y a une différence plus grande qu'un ton. Elle rappelle que cela « n'a pas empêché Mr Chladni de regarder les figures qui y correspondaient, comme équivalentes » (Germain, 1813, p. 85).

Elle signale aussi que les sons de la surface tendue sont proportionnels à de simples nombres et les sons de la surface élastique sont proportionnels au carré des mêmes nombres. Elle refait ici, une analogie avec le travail d'Euler, puisqu'elle évoque le fait

que ce dernier avait le même rapport entre la lame appuyée à ses deux extrémités et la corde tendue.

Germain réalise aussi une comparaison des sons entre la théorie et les expériences pour les surfaces courbes. Pour cela, elle a recours à la théorie de l'anneau donnée par Euler et les observations faites par Chladni. Elle constate que les résultats théoriques et expérimentaux ne correspondent pas. Pour réussir à concilier les deux, elle fait elle-même des expériences avec l'anneau. Ses résultats expérimentaux concordent avec la théorie d'Euler. Elle montre que l'effort de la torsion diminue l'élasticité et abaisse les sons. Elle précise aussi qu'une élasticité constante dans tous les points de l'anneau, est tout de même diminuée par l'effet de la courbure. La différence que Chladni a notée entre ses expériences et la théorie d'Euler provient de la variation de l'élasticité. Ainsi dans le cas de la fourche, comme dans le cas de l'anneau, elle a obtenu des résultats différents que ceux obtenus expérimentalement par Chladni, elle parle même de résultats contraires. Elle remarque que ses résultats « font voir que la fourche d'une élasticité constante, vibre absolument de la même manière qu'une lame droite ».

Parmi les expériences qu'elle étudie figurent également celles faites avec une cloche hémisphérique. Sa comparaison entre la théorie d'Euler et les mouvements de la cloche observés par Chladni est très brève. Elle mentionne que la théorie des surfaces élastiques et les expériences permettent de dire qu'il y a une ressemblance entre les mouvements de l'anneau et ceux de la cloche.

Ainsi, les expériences jouent plusieurs rôles essentiels au sein d'une étude. Voici ce que Germain écrit à la fin de sa vie à propos du rôle des expériences et de la théorie :

« L'expérience est consultée : on veut d'abord multiplier les faits, en variant les circonstances dans lesquelles ils peuvent se manifester. Le sentiment intime de l'analogie avertit de l'existence des lois qui n'apparaissent pas encore : et l'on s'attache à séparer les circonstances qui compliquent les résultats, en observant pour chacune d'elles les plus grandes et les moins grandes influences. Alors les faits se classent ; ils offrent un enchaînement, un ordre ; des lois dont l'existence avait été pressentie se manifestent ; et une branche nouvelle de la science s'ajoute à des connaissances plus anciennes. A cette période, on ne possède cependant que la partie expérimentale. La théorie est créée lorsque, la nature des faits s'étant prêtée à une expression analytique, on est parvenu à tirer de cette expression des conséquences conformes à l'expérience. Les formules nées des premières observations révèlent ensuite l'existence de faits encore ignorés » (Germain, 1833, p. 64-65).

Dans ce « mémoire 1813 », très long puisqu'il comprend une centaine de pages, Germain montre que chacune de ses intégrales correspond à une forme particulière de

plaque présentant une certaine configuration et un certain nombre de lignes nodales lorsqu'elle vibre régulièrement. Son étude indique également que les sons émis par la plaque dépendent généralement du nombre de lignes nodales. Elle s'intéresse aussi aux cas de la plaque circulaire, de l'anneau et de la cloche hémisphérique. Elle souligne que sa théorie correspond avec les expériences de Chladni. De plus durant les deux années de recherche, elle réalise elle-même un certain nombre d'expériences pour vérifier ses propos. Elle fait une analyse beaucoup plus complète que dans son « mémoire 1811 ». Quelques points communs persistent entre le « mémoire 1813 » et le « mémoire 1811 » comme ses principales références qui restent Euler et Lagrange. Elle affiche une meilleure maîtrise du sujet. Elle considère plusieurs types de surfaces, de sons émis et vérifie la correspondance entre la théorie et les expériences réalisées. Elle pense avoir complètement répondu à la question du concours.

5.2.3 La réaction des membres du jury

Germain envoie ce « mémoire 1813 » à l'Institut le 21 septembre 1813.

La commission est nommée à la séance publique de l'Académie des sciences du lundi 4 octobre 1813 : « La Classe va au scrutin pour le prix des lames élastiques.

MM. Legendre, Laplace, Lacroix, Poisson, Lazare Carnot sont nommés Commissaires. » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 250-251)

À nouveau, seule Germain a répondu à la question et a adressé son mémoire à l'Institut. La réception de son « mémoire 1813 » par la Classe est signalée à la séance du lundi 11 octobre 1813 :

> « La Classe reçoit les ouvrages suivants : (...)
> Un Mémoire pour le prix relatif aux *Vibrations des surfaces élastiques*, qui avait été retardé à la poste par un malentendu, est envoyé aux commissaires nommés dans la dernière Séance. » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 251)

Apparemment, Germain redoute que les propos de Lagrange sur la difficulté du problème ne découragent les juges. N'ayant pas de réponse de l'Institut et sûrement impatiente, elle se tourne à nouveau vers Legendre. Seule une lettre [7] de ce dernier, écrite le 4 décembre 1813, témoigne de cette correspondance. Le ton employé par Legendre dans cette lettre est différent de celui des lettres précédentes. Il lui reproche son manque de maîtrise des calculs qui peuvent être faits sur les intégrales doubles dans le calcul des variations. Il critique sa façon de calculer. Il précise que non seulement il y a des erreurs dans l'application des outils mathématiques, mais aussi au niveau du raisonnement

7. Cette lettre est reproduite en annexe B.

qu'il ne comprend pas. Il fait à nouveau référence à la méthode employée par Lagrange. On le sent peut-être un peu agacé puisqu'il souligne encore une fois que la théorie des vibrations des surfaces élastiques n'est pas son domaine d'étude. De plus, il indique que ce n'est pas la peine qu'il rencontre Germain pour discuter du sujet avec elle. Cette remarque implique que jusqu'à présent, il acceptait de la retrouver pour l'éclairer sur des points obscurs, pour répondre à ses questions, pour lui expliquer certaines notions mathématiques. Mais cette remarque révèle aussi qu'il ne veut plus prendre du temps pour lui apporter son aide. De plus, comme elle a déjà rendu son « mémoire 1813 », il considère que de toute façon il est trop tard. Après avoir pointé du doigt la défaillance de l'analyse de Germain, Legendre termine tout de même par deux points positifs : l'exactitude de l'équation qu'elle a obtenue dans ce mémoire et la justesse de son explication des phénomènes physiques observés.

Il présume que le « mémoire 1813 » de Germain n'aura pas le prix, mais seulement la mention honorable. Il estime tout de même qu'elle a fait un travail admirable et l'encourage à le diffuser en imprimant son « mémoire 1813 » après avoir fait quelques rectifications (Stupuy et Germain, 1896, p. 303-306).

En effet, le jury signale qu'il reste un point obscur dans l'analyse faite par Germain, et n'est pas d'accord avec la dérivation de l'équation. Cependant, il reconnaît que son équation est correcte. De plus, la confrontation qu'elle fait entre les résultats de la théorie et ceux des expériences de Chladni, impressionne le jury.

Germain reçoit, comme l'avait annoncé Legendre, la mention honorable pour ce « mémoire 1813 » :

> « Séance du lundi 27 décembre 1813.
>
> La Commission chargée d'adjuger le prix extraordinaire sur les oscillations des lames élastiques est d'avis que l'auteur de la pièce N^{0}1 a mérité une mention honorable pour la comparaison de sa formule avec les observations, quoique son analyse ait parue défectueuse.
>
> La question sera proposée de nouveau. » (*Procès-verbaux* 1812-1815)

Cette décision est à nouveau annoncée lors de la séance publique du 3 janvier 1814, d'après le procès verbal de cette séance :

> « l'analyse que l'auteur de cette pièce a employée pour parvenir à son équation fondamentale a été jugée entièrement inexacte, et cette équation même a paru ne résulter en aucune manière de cette analyse ; mais la partie de ce mémoire qui renferme la comparaison de la théorie avec les expériences de M.Chladny étant fait avec soin et conduisant en général à des résultats satis-

> faisants, la classe a pensé que cette pièce méritait une mention honorable. »
> (Dahan Dalmédico, 1988, p. 426)

Ainsi le jury ne valide pas le raisonnement mathématique de Germain. Il signale même que l'équation qu'elle a obtenue ne peut être déduite de son étude. Elle n'est arrivée à cette équation seulement parce qu'elle la connaissait. Le jury se montre donc sévère dans ses propos, malgré sa reconnaissance de la partie concernant la comparaison entre les résultats théoriques et les résultats obtenus avec les expériences effectuée par Germain.

Soutenue par Legendre après l'échec de son premier mémoire et malgré les difficultés rencontrées, Germain poursuit ses travaux, toujours avec la même ardeur. Après deux ans de recherches, elle envoie à nouveau un mémoire beaucoup plus complet à l'Académie des sciences. Son équation est correcte, même s'il y a toujours des erreurs de calculs. Elle consacre aussi un certain temps à faire elle-même des expériences et réalise une importante comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux. Ce deuxième mémoire de Germain reçoit, grâce à cette comparaison, la mention honorable en 1813. Le « mémoire 1813 » de Germain n'est donc toujours pas primé. Pourtant, durant ces quatre années, seule Germain a eu l'audace d'envoyer à l'Académie son travail sur ce sujet délicat proposé au concours par L'institut. L'Académie des sciences, toujours insatisfaite du traitement mathématique, propose pour la troisième fois le même sujet au Prix de mathématique. La Classe remet au concours pour octobre 1815 le même sujet, en conservant les mêmes termes ainsi que les mêmes conditions, à savoir : Donner la théorie mathématique de la vibration des surfaces élastiques et comparer les résultats à l'expérience.

Germain va donc devoir encore poursuivre son travail afin d'améliorer la partie théorique.

Chapitre 6

L'ultime participation de Germain au concours

Quelques pages d'un brouillon figurant dans *Les papiers de Sophie Germain. - Recueil de dissertations et problèmes de mathématiques et physiques*(Germain, 2013, p. 622-628) indiquent que Germain continue et approfondit son travail sur la modélisation des surfaces élastiques vibrantes et ne perd pas espoir de remporter le prix.

Ce morceau de brouillon ne contenant que quatre pages seulement est une toute petite partie d'un troisième mémoire, que nous noterons « mémoire 1815 » et qui comporte cinquante-trois pages. C'est une esquisse des paragraphes n°14 et n°15 de ce « mémoire 1815 » qui en contient dix-sept.

On y trouve beaucoup de ratures, des lignes barrées avec ou sans modification, des paragraphes entièrement rayés, un rajout dans la marge. Nous avons déjà fait et interprété ce genre de remarques dans le « mémoire 1813 ». Mais il y a aussi certaines phrases qui apparaissent dans ce morceau de brouillon et qui ne sont pas reprises dans le mémoire final c'est-à-dire le « mémoire 1815 ». Inversement, dans la version finale figurent des phrases qui ne sont pas dans ce brouillon. Les numéros des paragraphes ne sont pas précisés et ne sont pas forcément au même endroit. La fin du paragraphe n°14 et le début du paragraphe n°15 ne sont pas identiques.

Ce brouillon dont nous ne disposons que quelques pages seulement n'est sûrement pas le dernier qu'elle a fait avant l'écriture du « mémoire 1815 », trop de différences apparaissant entre les deux versions. En effet, d'après les divers brouillons du « mémoire 1813 », Germain apparaît comme une personne très minutieuse, faisant bien attention à choisir soigneusement ses mots et ses formulations. Ses rédactions successives lui permettent de mieux de structurer sa pensée, son raisonnement, de rajouter ou au contraire supprimer des précisions, des explications. Elle n'a donc pas pu rédiger le

reste du « mémoire 1815 » sans faire de brouillon. Comme tout scientifique, elle a besoin de faire plusieurs ébauches, essais avant de pouvoir écrire la version finale de ce « mémoire 1815 » qu'elle va envoyer à l'Académie des sciences, qui sera lu et jugé par des académiciens. Quel est le contenu de ce « mémoire 1815 » ?

6.1 La démonstration de son hypothèse

Germain apporte une attention particulière à son hypothèse, à savoir *la force élastique en un point d'une surface, qui compense l'effet des forces extérieures appliquées, est proportionnelle à la somme des courbures principales*. Elle pense que son hypothèse est à l'origine du problème évoqué par le jury pour son « mémoire 1813 ». Elle va donc consacrer beaucoup de temps et d'énergie à la justifier.

Pour ce faire, Germain introduit une nouvelle notation. Elle appelle I la figure initiale ou naturelle du corps élastique et E sa surface élastique, c'est-à-dire la même surface ayant une autre forme à la suite de l'action d'une force extérieure. Elle note C un coefficient constant, et conserve dm pour un élément du corps élastique. Elle affirme alors que la force élastique qui agit sur l'élément dm est proportionnelle au produit $C(E - I)$. Elle cherche donc à déterminer cette différence $E - I$.

Elle considère dans un premier temps un cas particulier pour simplifier la situation. Elle considère que le corps élastique est une simple lame. La mesure de la courbure de I est donc $\frac{1}{R}$ où R est le rayon de la courbure initiale. De même, la mesure de la courbure de E est $\frac{1}{r}$, avec r le rayon de courbure élastique. Ce cas particulier lui permet de faire à nouveau référence au cas unidimensionnel, de s'appuyer sur les travaux et résultats des mathématiciens qui ont déjà travaillé sur la lame élastique. Ces derniers avaient admis R infini et l'hypothèse que la force élastique est proportionnelle à la raison inverse du rayon de courbure.

Germain s'intéresse ensuite à une surface courbe. Dans ce cas, elle remarque que la différence $E - I$ est plus difficile à établir. Pour déterminer cette différence, elle considère un point quelconque de la surface naturelle par lequel elle fait passer un plan. Elle suppose que ce plan coupe successivement la surface initiale suivant des directions et des inclinaisons différentes. Elle prend ensuite le même point sur la surface élastique et y fait passer un autre plan en changeant à nouveau ses directions et inclinaisons. Elle avait déjà utilisé ce type de raisonnement dans le « mémoire 1813 », à savoir les deux plans coupant la surface élastique. Mais elle n'avait pas considéré toutes les inclinaisons et directions possibles.

Elle note :

$r, (r), ((r)), etc$ les rayons de courbures des sections normales de la surface élastique,

r', r'', r''', etc les rayons de courbures des sections obliques de la même surface qui ont une tangente commune avec la section normale dont le rayon et r,

$(r'), (r''), (r'''), etc; ((r')), ((r'')), ((r''')), etc$ les rayons de courbures des sections obliques de la même surface qui ont avec les sections normales dont les rayons sont $(r), ((r)), etc$ les mêmes rapports que les sections obliques dont les rayons sont r', r'', r''', etc ont avec la section normale dont le rayon est r. Elle pose de même « R, R', R'', R''', etc; $(R), (R'), (R''), etc; ((R)), ((R')), ((R''')), etc$ les valeurs relatives à la surface initiale correspondantes à celles qui sont désignées par les lettres minuscules pour la surface élastique. » (Germain, 1815, p. 3)

Elle affirme que la différence $E - I$ est « comprise dans l'ensemble des différences entre les courbures des lignes de sections respectives de ces deux surfaces » (Germain, 1815, p. 3). $E - I$ s'exprime alors par la formule :

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}+etc+\frac{1}{(r)}+\frac{1}{(r')}+\frac{1}{(r'')}+\frac{1}{(r''')}+etc+\frac{1}{((r))}+\frac{1}{((r'))}+\frac{1}{((r''))}+\frac{1}{((r'''))}+etc$$

$$-\{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}+\frac{1}{R'''}+etc+\frac{1}{(R)}+\frac{1}{(R')}+\frac{1}{(R'')}+\frac{1}{(R''')}+etc$$

$$+\frac{1}{((R))}+\frac{1}{((R'))}+\frac{1}{((R''))}+\frac{1}{((R'''))}+etc\}.$$

Elle explique que les termes qui correspondent aux sections obliques figurant dans la formule ci-dessus s'annulent entre eux. Ce qui lui permet de négliger ces surfaces obliques. Cette formule s'écrit alors :

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{(r)}+\frac{1}{((r))}+etc-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{(R)}+\frac{1}{((R))}+etc\right).$$

Elle rappelle que la somme des quantités $\frac{1}{r}, \frac{1}{(r)}, \frac{1}{((r))}, etc$ appartenant à deux sections perpendiculaires entre elles est constante. Ainsi si f et g sont les rayons des courbures principales de la surface élastique, alors $\frac{1}{r}+\frac{1}{(r)}+\frac{1}{((r))}+etc$ est égal à la somme $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$ répétée un nombre infini de fois. De même pour la surface initiale, si F et G sont les rayons de courbures principales, alors $\frac{1}{R}+\frac{1}{(R)}+\frac{1}{((R))}+etc$ est égal à la somme $\frac{1}{F}+\frac{1}{G}$ répétée un nombre infini de fois. Elle poursuit son raisonnement en expliquant que le coefficient infini qui multiplie donc la différence $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)$ ne provient que de la méthode utilisée pour calculer $E - I$ et pourra être négligé dans ce calcul. En effet, si pour chaque surface on considère un système de deux plans perpendiculaires entre eux et à la surface dont on veut connaître la figure, et si ce système prend toutes les

positions possibles, alors on ne fait que répéter les mêmes opérations un nombre infini de fois. La différence $E - I$ s'écrit alors :

$$E - I = \frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right).$$

Au début de son explication, elle avait souligné que la force élastique qui agit sur l'élément dm est proportionnelle à $E - I$. Cette force élastique est donc proportionnelle à $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)$.

Germain s'efforce, ici, de préciser l'origine de son hypothèse, de donner davantage de détails dans ses explications. Elle continue, comme dans les deux mémoires précédents, c'est-à-dire le « mémoire 1811 » et le « mémoire 1813 », à recourir à des résultats et productions de grands mathématiciens, à savoir Euler et la *Mécanique analytique* de Lagrange. Elle reste fidèle à ses lectures, à ses références et à ses idées.

6.2 Poursuite de l'étude du sujet proposé au concours

6.2.1 La théorie des surfaces élastiques

Pour déterminer l'équation des vibrations des surfaces élastiques, Germain considère toujours la force élastique qui agit sur l'élément dm de la surface. Mais elle suppose maintenant que cette force est proportionnelle à $C(E - I)$, où C est un coefficient constant, I représente la figure initiale ou naturelle du corps élastique et E sa surface élastique. Elle a montré précédemment que cette différence $E - I$ est proportionnelle à $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)$, où f et g sont les rayons de courbures principales de la surface élastique, F et G ceux de la surface initiale. Et donc la force élastique est aussi proportionnelle à $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)$.

Cette dernière remarque lui permet d'expliciter le moment de la force d'élasticité agissant sur l'élément dm de la surface élastique :

$$\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right) \delta \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right) dm.$$

La somme des moments de toutes les forces d'élasticité qui agissent dans toute l'étendue de la surface s'écrit alors :

$$-\iint \left\{ C \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right) \delta \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right) dm \right\}.$$

Pour obtenir la formule du mouvement propre à la surface élastique, elle exprime le moment de toutes les forces :

$$\iint C\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{G}\right)\right)\delta\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{G}\right)\right)dm+\iint \mathcal{F}\delta dm$$

$$=\iint\left(\frac{d^2z}{dt^2}\delta x+\frac{d^2z}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dm.$$

Dans le membre de gauche de l'égalité, le premier terme représente le moment des forces élastiques, et le deuxième terme le moment d'une force $\mathcal{F}$ qui contracte l'élément de surface. Le membre de droite de cette égalité représente le moment des forces accélératrices qui agissent en même temps sur tous les points.

Germain considère que toutes les forces qui agissent sur la surface peuvent être rapportées « à trois directions perpendiculaires entr'elles » (Germain, 1815, p. 5). Elle affirme qu'elle peut alors écrire :

$$-C\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{G}\right)\right)\delta\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{G}\right)\right)-X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=\delta\pi$$

avec $\pi=\mathcal{F}+a$ où a est une constante négative.

Pour donner le signe de la constante a, elle s'appuie toujours sur la *Mécanique analytique* de Lagrange. La constante a doit avoir le même signe que π.

Elle suppose qu'une force extérieure dirigée suivant l'axe des z agit sur la surface élastique. Ainsi, si (x,y,z) sont les coordonnées d'un point de la surface avant l'action de la force extérieure, alors (x,y,z') sont les coordonnées du même point de la surface après l'action de la force extérieure. Elle pose :

$$P=\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\quad,\qquad Q=\frac{1}{FG}\quad,\qquad P'=\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\quad,\qquad Q'=\frac{1}{fg}\quad,$$

$$K'=\sqrt{1+p'+q'}\quad avec\quad p'=\frac{dz'}{dx}\quad,\quad q'=\frac{dz'}{dy}\quad,$$

$C=\varepsilon b^2$ où ε est l'épaisseur de la surface et b^2 un coefficient dépendant de la rigidité naturelle de la surface,

$dm=\varepsilon K'dxdy$,

$\delta\pi=-\varepsilon b^2(P'-P)\delta(P'-P)=\frac{\varepsilon b^2}{2}\delta(P'-P)^2$,

d'où $\pi=-\frac{\varepsilon b^2}{2}\delta(P'-P)^2$,

et donc $\mathcal{F}=-\frac{\varepsilon b^2}{2}\delta(P'-P)^2+a$.

Dans cette dernière égalité, Germain a fait une erreur de signe : elle a écrit $+a$ au lieu de $-a$. Ce n'est peut être qu'une erreur d'écriture puisque, par la suite, elle écrira bien $-a$.

Avec ces notations, l'égalité des moments de toutes les forces s'écrit :

$$-\iint (\varepsilon^2 b^2 (P'-P)\delta(P'-P))K'dxdy - \iint \left(\frac{\varepsilon}{b}^2 2(P'-P)^2 - a\right)\varepsilon\delta(K'dxdy)$$

$$= \iint \left(\frac{d^2z'}{dt^2}\delta x + \frac{d^2z'}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z'}{dt^2}\delta z'\right)\varepsilon K'dxdy.$$

Cette équation est celle du mouvement des surfaces élastique.

P est invariable, donc $\delta(P'-P) = \delta P'$.

Germain calcule ensuite le membre de gauche de l'équation précédente, à savoir :

$$\iint \left(\varepsilon^2 b^2 (P'-P)K'\delta P' + \left(\frac{\varepsilon^2 b^2}{2}(P'-P)^2 - a\varepsilon\right)\delta K'\right)dxdy$$

ce qu'elle écrit aussi :

$$\iint \left(\varepsilon^2 b^2 (P'-P)\delta(K'P') - \left(\frac{\varepsilon^2 b^2}{2}(P'^2 - P^2) + a\varepsilon\right)\delta K'\right)dxdy$$

Elle fait cinq pages de calculs.

Finalement, elle obtient « l'équation d'une surface élastique de figure quelconque forcée de changer de forme par l'action d'une force extérieure dirigée suivant l'axe des z et qui abandonnée à elle-même ne sera plus animée, dans toute son étendue, que par les seules forces intérieures qui résultent de la tendance d'une telle surface à reprendre sa figure naturelle ; mais qui de plus sera soumise à l'action d'une force de tension uniforme et représentée par la constante a :

$$\begin{aligned} b^2\varepsilon(&\left(\frac{d^2P'}{dx^2} - \frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2} - \left(\frac{d^2P'}{dxdy} - \frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2} \\ &+ \left(\frac{d^2P'}{dy^2} - \frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2} - \frac{p'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx} - \frac{dP}{dx}\right) \\ -\frac{q'P'}{K'}&\left(\frac{dP'}{dy} - \frac{dP}{dy}\right) + \frac{(P'-P)}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx} + q'\frac{dP}{dy}\right) + \frac{P'}{2}\left(P'^2 - P^2\right) \\ &-2(P'-P)Q') + aP' + \frac{d^2z'}{dx^2}K' = 0 \text{ »} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Elle pose $z' = z + z''$, d'où $\frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{d^2z''}{dt^2}$.

Si $z'' = 0$, alors $K = K'$ et $P = P'$.

D'après l'équation 6.1, elle obtient : $-aP = \frac{d^2z}{dx^2}K$. En retranchant cette dernière égalité à l'équation précédente, elle obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} b^2\varepsilon(&\left(\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2}-\left(\frac{d^2P'}{dxdy}-\frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2}\\ &+\left(\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}-\frac{p'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)\\ -\frac{q'P'}{K'}&\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)+\frac{(P'-P)}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx}+q'\frac{dP}{dy}\right)+\frac{P'}{2}\left(P'^2-P^2\right)\\ &-2(P'-P)Q')+(P'-P)a+\frac{d^2z}{dt^2}(K'-K)+\frac{d^2z''}{dt^2}K'=0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Germain étudie ensuite cette dernière équation en considérant des hypothèses particulières à la théorie du son.

Elle considère les trois plans coordonnées tels que le plan des x et y soit parallèle au plan tangent à la surface initiale en un point donné. Elle suppose aussi, comme elle l'a déjà fait dans les mémoires de 1811 et de 1813 et d'autres mathématiciens avant elle, que le mouvement est très léger, c'est-à-dire que la position des points de la surface est peu différente de leur position initiale. Ainsi pour un point donné de la surface, le plan tangent s'éloigne également très peu de celui de la surface initiale.

Sous ces conditions particulières, elle obtient :

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}=\frac{d^2z}{dxdy}=0 \quad , \quad K=1 \quad , \quad P=\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2} \quad , \quad Q=\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2z}{dy^2} \quad ,$$

$$p'=\frac{dz'}{dx}=\frac{dz''}{dx} \quad , \quad q'=\frac{dz'}{dy}=\frac{dz''}{dy} \quad , \quad \frac{d^2z'}{dxdy}=\frac{d^2z''}{dxdy}.$$

De plus, pouvant négliger les quantités du second ordre par rapport aux différentielles de z', elle a $K'=1$.

Après un certain nombre de calculs, de simplifications sur l'équation précédente, cette dernière s'écrit alors :

$$b^2\varepsilon\left\{\frac{d^4z''}{dx^4}+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}+P^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)-2Q\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right\}$$

$$+a\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)+\frac{d^2z''}{dt^2}=0.$$

Germain remarque que « La quantité $P^2-2Q=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)^2$ qui, comme on le voit, n'est autre chose que la somme des quarrés des raisons inverses des deux

rayons principaux de courbure de la surface initiale, est essentiellement une quantité invariable » (Germain, 1815, p. 20). Elle note $\square$ cette quantité invariable. L'équation pour les surfaces élastiques vibrantes s'écrit alors :

$$\begin{aligned} b^2\varepsilon\left\{\frac{d^4z''}{dx^4}+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}+\square\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right\} \\ +a\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)+\frac{d^2z''}{dt^2}=0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Comme dans son « mémoire 1813 » et contrairement au « mémoire 1811 », elle n'omet pas de préciser les conditions des extrémités [1].

Elle remarque ensuite que dans le cas où la surface élastique est naturellement plane, son équation 6.1 correspond à celle publiée par Poisson dans un bulletin de la Société philomatique puis dans la correspondance de l'École polytechnique. Dans ce cas particulier, l'équation (b) s'écrit :

$$b^2\varepsilon(\frac{1+q'^2}{K'^2}\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{2p'q'}{K'^2}\frac{d^2P'}{dxdy}+\frac{1+p'^2}{K'^2}\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{p'P'}{K'}\frac{dP'}{dx}-\frac{q'P'}{K'}\frac{dP'}{dy}$$

$$+\frac{P'}{2}\left(P'^2-4Q'\right))+aP'+K'\frac{d^2z'}{dt^2}=0.$$

On voit que dans ce cas, $P=0$ [2]. Ensuite elle précise qu'il suffit de remplacer le terme représentant les forces accélératrices à savoir $K'\frac{d^2z'}{dt^2}$ par la quantité $-(K'Z-\frac{p'}{K'}X-\frac{q'}{K'}Y-P'\square)$. Cette dernière quantité traduit l'action des forces extérieures Z, X, Y sur la surface plane et $\square$ contient les forces de tensions qu'elle note a. Connaissant l'équation de Poisson, elle adapte la sienne en y remplaçant un terme par une quantité adéquate pour obtenir celle de ce dernier. Germain n'est pas la seule à utiliser cette technique. Augustus Love, ayant étudié entre autres les travaux de Poisson, écrit à propos d'une équation obtenue par celui-ci : « When terms above a certain order (fourth power of the radius) are neglected, the equations for flexural vibrations are identical with Euler's equations of lateral vibration. »(Love, 1944, p. 25) Le fait de négliger certains termes d'une équation pour en obtenir une autre consiste également à faire une adaptation d'un résultat pour arriver au résultat voulu. La volonté de Germain de montrer que son équation est équivalente à celle de Poisson donne l'impression qu'elle éprouve le besoin de confirmer la justesse de son raisonnement, de ses résultats.

1. Les « conditions des extrémités » ou conditions aux extrémités ou conditions aux limites sont les conditions qui doivent être satisfaites par les points du contour du corps sonore considéré.

2. Rappel : $P=\frac{1}{F}+\frac{1}{G}$ avec F et G les rayons de courbures principales de la surface initiale qui est ici plane. On a donc bien $P=0$.

Elle poursuit l'étude de l'équation 6.3 représentant les vibrations des surfaces élastiques. Elle néglige les forces de tension désignées par a et pose $a = 0$. L'équation s'écrit alors :

$$b^2\varepsilon\left\{\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4} + \square^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right\} + \frac{d^2z''}{dt^2} = 0.$$

Dans cette équation, on peut relever une différence par rapport à l'équation 6.3. On peut remarquer que dans cette dernière équation apparaît le facteur $\square^2$ alors que dans l'équation 6.3 elle écrit $\square$. Ce n'est certainement qu'une simple erreur d'écriture, d'inattention, car elle inscrit $\square^2$ dans les équations figurant dans la suite de son étude. Ainsi elle reprend à chaque fois la forme de la dernière équation qu'elle a écrite pour appliquer les simplifications successives ; elle ne recherche pas l'expression de l'équation 6.3 qu'elle applique dans certains cas particuliers. Cette erreur peut révéler qu'elle ne refait pas systématiquement ses calculs, qu'elle ne les relit pas forcément pour vérifier leur exactitude.

Comme dans son « mémoire 1811 » et dans son « mémoire 1813 », elle réduit ensuite son champs de recherche au cas des mouvements réguliers, simplification également faite par les autres mathématiciens qui se sont intéressés à la théorie des corps sonores. Elle compare donc à nouveau les mouvements de la surface élastique vibrante à ceux d'un pendule simple. Elle note toujours K la longueur du pendule et choisit « pour unité des espaces la hauteur dont un corps abandonné à lui-même tombe dans une seconde »(Germain, 1815, p. 25). Dans ce cas, l'équation modélisant les mouvements du pendule est $\frac{d^2z''}{dt^2} = -\frac{z''}{K}$.

Elle donne alors l'équation pour la surface élastique vibrante :

$$Kb^2\varepsilon\left\{\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4} + \square^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right\} = z''. \tag{6.4}$$

Cette équation dépend du choix des plans coordonnées pour un point de la surface et non du point choisi si on considère que le plan tangent change de position. z'' est alors fonction « des courbes formées sur la surface par les intersections de deux plans coordonnés qui passeroient par l'axe des z ; en sorte que, dans l'équation 6.4, x et y représentent véritablement des axes de courbes dépendantes de la figure initiale de la surface » (Germain, 1815, p. 25).

Germain passe à l'étude de quelques cas particuliers suivant la valeur de $\square$. Elle étudie tout d'abord le cas où le corps élastique est au repos et la figure du corps entièrement comprise dans le plan. La valeur de $\square$ vaut alors 0 dans l'équation 6.4. Elle suppose de plus que si x et y représentent les intersections entre la figure initiale de la surface et deux plans coordonnées passant par l'axe des z'', alors x et y sont des

lignes droites. Elle précise aussi qu'en supposant y constante, l'équation 6.4 de la plaque élastique permet de retrouver celle de la lame élastique. Cette équation s'écrit :

$$Kb^2\varepsilon\frac{d^4z''}{dx^4} = z''.$$

Si la figure naturelle de la lame est droite, alors x représente une ligne droite.

Si la figure naturelle de la lame est courbe et si le mouvement de la lame se fait dans une direction perpendiculaire au plan comprenant cette figure, l'équation précédente est toujours valable. Les différentes valeurs de x modélisent les axes de la figure initiale.

Ensuite si z'' est fonction de deux coordonnées rectilignes, alors l'anneau plan est un cas particulier de la plaque circulaire. Germain ne donne pas davantage de détails puisqu'elle précise qu'elle a déjà évoqué ce fait dans le « mémoire 1813 ».

Deuxième cas particulier que Germain considère, est celui où $\square$ prend une valeur indéterminée dans l'équation 6.4. Par contre, elle considère x ou y comme étant une constante. Dans ce cas, l'équation (e) s'écrit, si y est constante :

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + \square^2\frac{d^2z''}{dx^2}\right) = z''. \tag{6.5}$$

Cette équation est celle d'une lame élastique naturellement courbe qui vibre dans le plan de sa figure naturelle.

Elle souligne aussi que « l'anneau qui sert de limite à la cloche hémisphérique peut être considéré comme un cas particulier de cette surface »(Germain, 1815, p. 27). Ainsi il peut arriver que la cloche et l'anneau produisent les mêmes sons et que l'on observe dans ce cas le même nombre de lignes nodales.

En posant $\square = \frac{1}{a}$ dans l'équation 6.5 qui donne alors :

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + \frac{1}{a^2}\frac{d^2z''}{dx^2}\right) = z''$$

elle obtient l'équation qui modélise les vibrations d'une cloche hémisphérique et celles de l'anneau servant de base à la cloche. L'intégrale de cette équation est « $z'' = B\sin .n.\frac{x}{a}$ ». Ainsi, « les sons qui accompagnent les figures nodales composées de n lignes sur la cloche, et de $2n$ points sur l'anneau, seront proportionnels aux nombres $\frac{n}{a^2}\sqrt{(n^2-1)}$ » (Germain, 1815, p. 29).

Germain considère ensuite le cas d'une calotte sphérique et l'anneau qui lui sert de base. L'équation convenant à ces deux types de surfaces est :

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4}+\frac{1}{A^2}\frac{d^2z''}{dx^2}\right)=z''$$

où A est le rayon de la sphère à laquelle la calotte appartient.

Elle pose a le rayon de la base, et φ l'arc compris entre le point le plus élevé de la surface et la base. Alors $a = A\sin\varphi$ et $A^2 = \frac{a^2}{\sin^2\varphi}$.

L'équation précédente devient :

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4}+\frac{\sin^2\varphi}{a^2}\frac{d^2z''}{dx^2}\right)=z''.$$

Comme pour le cas précédent, « les sons qui accompagneront les figures nodales composées de n lignes sur la calotte, et de $2n$ sur l'anneau seront proportionnels aux nombres $\frac{n}{a^2}\sqrt{(n^2-\sin^2\varphi)}$ » (Germain, 1815, p. 30).

Elle souligne que dans ce cas, « Chaque direction du mouvement de l'anneau est correspondante, sous certaines conditions, aux mouvemens d'une calotte sphérique dont les limites sont d'une part la plaque circulaire et de l'autre la cloche hémisphérique » (Germain, 1815, p. 30).

Dernier cas particulier que Germain étudie à partir de l'équation 6.4, est celui d'une surface cylindrique à base circulaire. Il s'agit du cas le plus simple. Elle pose $\square = \frac{1}{R}$, où R est le rayon de la base circulaire.

L'équation pour la surface entière s'écrit alors :

$$Kb^2\varepsilon\left\{\frac{d^4z''}{dx^4}+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}+\frac{1}{R^2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right\}=z''.$$

Puis elle considère une portion quelconque de la surface cylindrique à base circulaire. En notant A l'arc de la portion et a l'arc correspondant à A dans le cercle dont le rayon est pris pour unité, le rayon R de la base circulaire est alors égal à $\frac{A}{a}$.

L'équation correspondante à cette portion de la surface cylindrique à base circulaire s'écrit :

$$Kb^2\varepsilon\left\{\frac{d^4z''}{dx^4}+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}+\frac{a^2}{A^2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right\}=z''. \tag{6.6}$$

Elle signale que $z'' = e^{\pm\frac{\omega}{A}(x+y)}$ et $z'' = e^{\pm\frac{\omega'}{A}(x+y)\sqrt{-1}}$ satisfont l'équation générale des surfaces cylindriques.

Comme pour les cas précédents, elle évoque les sons correspondants.

Germain signale qu'il faudrait encore faire une étude concernant la combinaison de ces deux intégrales. Mais elle est à nouveau rattrapée par le temps : « c'est avec regret que je me vois forcé de terminer ici mes recherches. Je sens combien elles laissent encore à désirer » (Germain, 1815, p. 46).

Contrairement au « mémoire 1813 », Germain utilise, dans ce « mémoire 1815 », des résultats qu'elle a déjà obtenus. De plus, elle compare son équation à celle de Poisson, ce dernier critiquant son travail. Et surtout, elle applique son équation à diverses surfaces courbes. Elle fait donc une étude théorique conséquente, beaucoup plus ouverte à d'autres surfaces, plus complète, même si tous ses calculs ne sont toujours pas tout à fait corrects. À nouveau elle ne néglige pas la comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux observés, pour la plupart, grâce à ses propres expériences.

6.2.2 Des expériences délicates

Germain utilise et étudie à nouveau les expériences et les conclusions de Chladni. Concernant la théorie d'Euler sur la cloche et l'anneau qui sert de limite à la cloche hémisphérique, elle remarque que bien qu'elle soit similaire à la sienne, les résultats théoriques sur les sons ne sont pas confirmés par les résultats expérimentaux obtenus par Chladni. Ce dernier ne confirme donc pas la théorie d'Euler. Mais Germain donne une explication à propos de cette différence constatée par Chladni. Cette discordance est due au matériel utilisé par Chladni. Celui-ci a fait ses expériences sur des cloches qui n'avaient pas une épaisseur constante sur toute la surface. De plus, les résultats de Chladni correspondent à une cloche d'harmonica[3] ou un vase semblable. Si la forme des surfaces courbes change, par exemple si les expériences sont faites avec une calotte sphérique ou un autre type de cloches, alors les résultats vont également différer. Néanmoins, en faisant les moyennes des extrêmes des erreurs relevées lors des expériences, ces moyennes correspondent aux résultats théoriques. Germain est donc en désaccord avec Chladni. Elle précise que celui-ci n'a pas repéré « qu'Euler a donné deux équations différentes pour l'anneau élastique »(Germain, 1815, p. 29). Il a alors appliqué l'équation des mouvements de l'anneau plan donnée par Euler aux mouvements des cloches. Cette erreur de Chladni relevée par Germain conforte sa confiance dans les résultats théoriques d'Euler. Elle estime que les résultats théoriques et expérimentaux ne sont pas aussi différents que ne l'affirme Chladni.

3. Un harmonica de verre est formé de cloches de verre de différentes tailles emboîtées les unes dans les autres sur un axe horizontal. Le musicien fait tourner l'ensemble tout en posant les doigts mouillés sur le bord plus précisément le côté des cloches qui se mettent en vibration par frottement.

Germain trouve important de réaliser elle-même des expériences avec les cloches ; cette manipulation lui permet peut-être de s'approprier plus facilement le sujet, de visualiser les résultats. Mais ces expériences se révèlent très compliquées à faire. Elle rencontre non seulement beaucoup de difficultés pour réaliser dans de bonnes conditions ses expériences avec les cloches et les surfaces cylindriques, mais elle est aussi pressée par le temps. Elle tient tout de même à décrire ses expériences et les constatations qu'elle a faites.

Pour visualiser les lignes nodales, elle remplace le sable fin par de la poussière. Pour obtenir la figure entière, elle signale qu'il faut répéter l'expérience plusieurs fois. D'autre part, si un son étranger vient troubler le déroulement de l'expérience, celle-ci est faussée puisque la poussière tombe alors de la surface. Il convient donc de recommencer l'expérience et pour cela, il faut remettre de la poussière sur la cloche ou la surface cylindrique. Il est alors difficile de replacer la main exactement au même endroit qu'avant l'intervention du son étranger. Il est donc très compliqué, voire infaisable de reformer une figure à l'identique. Mais Germain a rencontré un obstacle encore plus important. Il s'agit du concours des sons. Les figures nodales obtenues dépendent alors du son le plus important, du son qui domine. De plus, elles sont vagues, imprécises et éphémères ; ce qui rend l'étude incertaine. Cependant avec du temps, elle réussit tout de même à faire un nombre suffisant d'expériences avec la calotte sphérique pour que les résultats obtenus sur les sons soient fiables et comparables aux résultats théoriques. Elle constate que l'intervalle entre les sons pour les figures qu'elle a étudiées, est légèrement plus grand que la théorie ne l'indique. Cette légère différence ne l'empêche pas de conclure à un accord entre les résultats théoriques et expérimentaux surtout dans cette étude qui est délicate. Chladni a lui-même précisé qu'une marge minime d'erreur est acceptable. Elle a donc confiance en son travail qui complète celui d'Euler puisqu'elle affirme que « la théorie d'Euler sur l'anneau qui vibre dans le plan même de sa courbure, et la théorie plus générale que j'ai exposée n^{0}12, rendoient un compte satisfesant des vibrations correspondantes des cloches sphériques » (Germain, 1815, p. 34).

Par conséquent, elle se montre satisfaite des résultats des expériences qu'elle a réalisées puisqu'elles lui permettent de faire une comparaison entre la théorie et les observations expérimentales. En revanche, elle signale qu'elle a aussi essayé de faire des expériences avec l'anneau. Mais elle n'est pas parvenue à obtenir une conclusion satisfaisante.

Germain fait également un nombre assez important d'expériences avec des plaques carrées ; elle utilise environ quarante plaques qu'elle fait incurver en utilisant différentes

courbures [4]. Son objectif est de déterminer l'influence de la courbure d'une plaque sur le son. La difficulté rencontrée avec les plaques courbées, c'est-à-dire avec les surfaces cylindriques, est la régularité de l'épaisseur. En effet, avant de ployer la plaque, l'épaisseur semble être constante ; or cela n'est plus le cas une fois la plaque incurvée. Malgré cette complication, les expériences sont tout de même beaucoup plus aisées à réaliser qu'avec les cloches sphériques puisqu'il est plus facile d'éviter que des sons différents se forment simultanément. Germain avoue qu'elle a obtenu quelques résultats ne correspondant pas à la théorie. Mais elle précise que ces discordances proviennent des conditions dans lesquelles elle a fait les expériences. Quand elle fait cette remarque, elle doit penser à la qualité des plaques. Tout comme beaucoup de savants, nous pouvons supposer qu'elle ne dispose pas d'un laboratoire et fait les expériences chez elle. Seuls quelques scientifiques ont la possibilité de disposer d'un laboratoire comme ceux faisant partie de la Société d'Arcueil.

Elle s'évertue aussi à comparer les observations concernant les vibrations des surfaces cylindriques à celles faites sur des surfaces carrées. Elle constate que les deux types de surfaces ne présentent pas les mêmes phénomènes lorsqu'on les fait vibrer.

Elle prend le temps de décrire les résultats qu'elle obtient dans les différentes expériences qu'elle réalise avec les surfaces cylindriques. Elle expose les figures nodales formées et analyse l'intervalle des sons associés. Mais elle considère que le nombre d'expérimentations n'est pas suffisant pour pouvoir « entreprendre entre la théorie des surfaces cylindriques et l'expérience une comparaison détaillée » (Germain, 1815, p. 42 & 43). En revanche, elle explique qu'il y a une correspondance entre la théorie et les expériences quand y qui représente l'ordonnée courbe de la surface est constante. Dans ce cas, cela « revient à faire abstraction de la dimension à laquelle appartient la courbure, cette surface pourroit se mouvoir comme une simple lame droite, ou, ce qui est la même chose, comme un assemblage de pareilles lames disposées autour du centre de courbure de la dimension dont on fait abstraction » (Germain, 1815, p. 44). Germain signale enfin que la théorie est validée par les expériences à propos des sons qui résultent des deux intégrales qu'elle a obtenues à partir de l'équation générale des surfaces cylindriques.

Concernant les figures nodales sur les surfaces cylindriques, Germain ne fait pratiquement que des suppositions, n'ayant pas assez de recul et ne pouvant pas s'appuyer sur un nombre suffisant d'expériences. Elle peut toutefois confirmer un résultat concernant certaines figures nodales. Il s'agit des figures nodales formées de lignes perpendiculaires entre elles. Dans le cas où il y a le même nombre de lignes dans chaque direction, les figures nodales qui apparaissent sur la surface élastique sont des parallélogrammes dont

4. Germain ne précise jamais où elle se procure les plaques, ni où elle les fait incurver.

« l'allongement » dépend de la courbure de la surface. Ainsi, plus la courbure de la surface est importante, plus « l'allongement » du parallélogramme est aussi important.

Elle prend du temps pour réaliser beaucoup d'expériences afin de pouvoir faire des constations intéressantes, concluantes, qui peuvent la guider dans sa démarche. Elle est persuadée que les expériences jouent un rôle important dans sa recherche. Germain est consciente qu'il reste encore beaucoup de travail et d'expériences à faire sur les surfaces cylindriques pour être en mesure de certifier les résultats, comme ces derniers l'ont été faits concernant l'étude des surfaces planes c'est-à-dire non courbe.

Les expériences avec les cloches et surfaces cylindriques, bien que difficiles à réaliser, ont encore, comme dans le « mémoire 1813 », pris une place importante dans les travaux de Germain. Dans ce « mémoire 1815 », elle ne dessine aucune figure. Elle ne représente ni les expériences, ni les figures nodales observées. Elle n'a sûrement pas jugé nécessaire de matérialiser les figures nodales. Elle pense qu'une description précise est suffisante pour permettre éventuellement à d'autres mathématiciens de les reproduire.

Germain prend à nouveau soin de répondre le plus précisément possible à l'intitulé du concours. Non seulement, elle essaie de modéliser au mieux les vibrations des surfaces élastiques, mais elle s'attarde aussi sur la comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux, résultats étant très souvent en accord quand la comparaison était possible.

Ce « mémoire 1815 » contient moins de pages que le deuxième. Il ne reprend pas ce qu'elle avait déjà démontré, mais fait référence à plusieurs reprises au « mémoire 1813 ».

6.2.3 La décision de la commission

Germain envoie ce « mémoire 1815 » à l'Académie le 30 septembre 1815. En envoyant à nouveau son « mémoire 1815 » à la Classe, elle montre qu'elle a confiance en son travail et en ses résultats.

La commission chargée de se pencher sur les travaux remis à l'Institut est constituée :

« Séance du lundi 2 octobre 1815.

La Classe va au scrutin pour le prix des lames élastiques.

MM. Poisson, Laplace, Legendre, Louis Poinsot et Biot Commissaires » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 556).

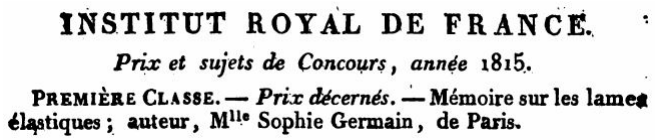
Pour la troisième fois, Germain est la seule à concourir : « La Classe reçoit pour les différents concours les ouvrages suivants : (..) Pour le prix des lames élastiques un Mémoire avec cette épigraphe :

Felix qui potuit rerum cognoscere causas » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 556)

Le jury décide de lui décerner le prix :

> « Séance du mardi 26 décembre 1815.
>
> La Commission chargée de faire un Rapport sur les Mémoires relatifs aux vibrations des surfaces, propose d'accorder le prix à la seule pièce qui ait concouru.
>
> Le billet joint à ce Mémoire est ouvert et l'on y trouve le nom de Mademoiselle **Sophie Germain**, rue Ste Croix de la Bretonnerie, N°23, à Paris. » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 595)

Le prix est proclamé lors de la séance publique de l'Académie des sciences du 8 janvier 1816. L'attribution du prix à Germain est aussi annoncé dans le Journal de l'École polytechnique :


INSTITUT ROYAL DE FRANCE.

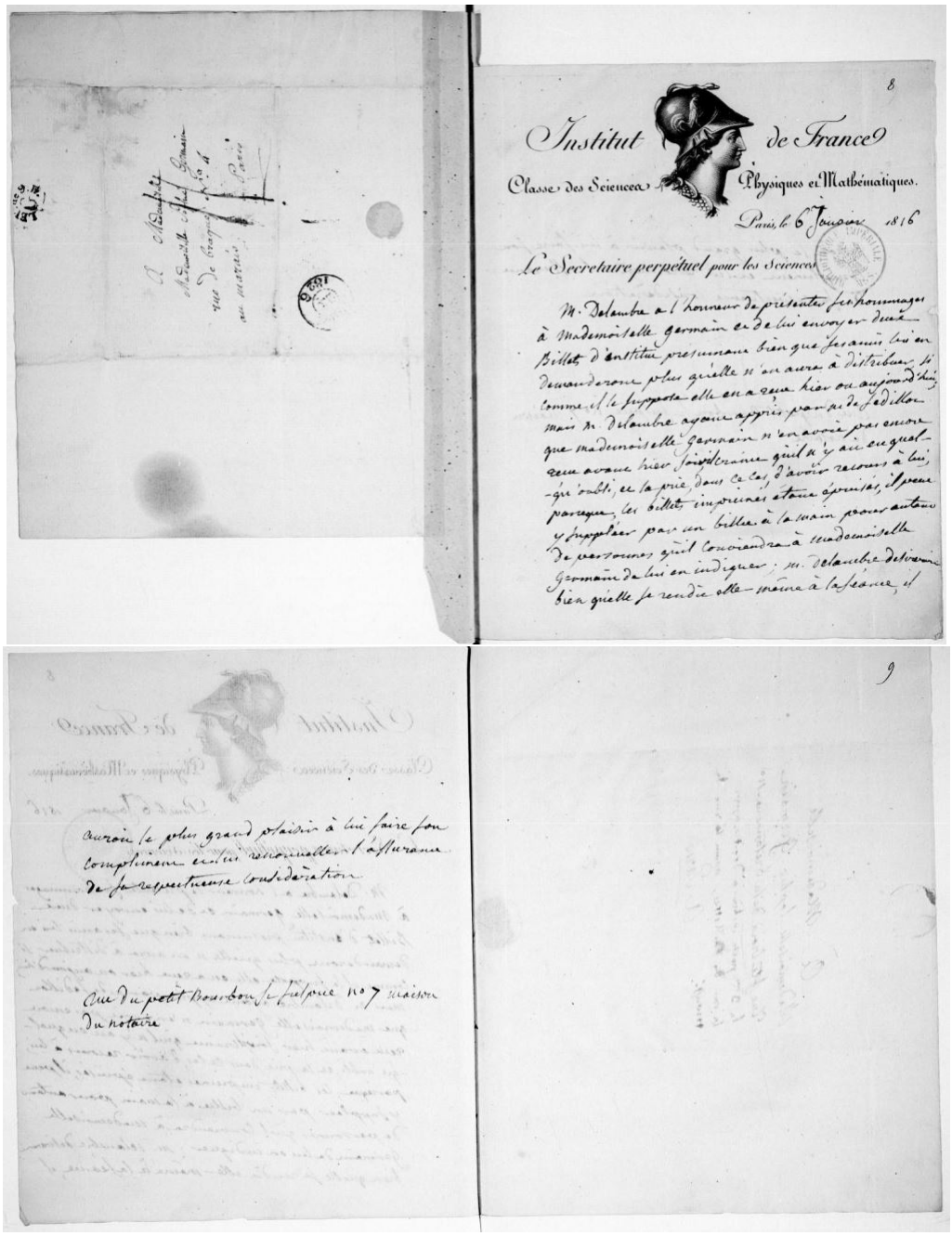
Prix et sujets de Concours, année 1815.

PREMIÈRE CLASSE. — *Prix décernés.* — Mémoire sur les lames élastiques ; auteur, Mlle Sophie Germain, de Paris.

FIGURE 6.1 – Correspondance sur l'École royale polytechnique (*Correspondance sur l'École Royale Polytechnique* 1816, p. 410)

L'annonce de la remise du prix est également publiée dans les Annales de chimie et physique : « La question de la *Théorie mathématique des vibrations des lames élastiques* avait été remise au concours en 1814 : cette année, la Classe a décerné le prix au seul mémoire qui lui soit parvenu, et dont l'auteur est mademoiselle Sophie Germain, de Paris » (*Annales de chimie et physique* 1816, p. 84).

Germain est la première femme à recevoir un prix d'une telle importance. Elle est bien sûr invitée à cette séance publique pour recevoir son prix.



8

Institut de France

Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.

Paris, le 6 Janvier 1816

Le Secrétaire perpétuel pour les Sciences

M. Delambre a l'honneur de présenter son hommage à Mademoiselle Germain et de lui envoyer deux Billets d'entrée, présumant bien que Jeramis lui en demandera plus qu'elle n'en aura à distribuer, si comme il le suppose elle en a eu hier ou aujourd'hui, mais M. Delambre ayant appris par M. de Jadillon que Mademoiselle Germain n'en avoit pas encore eu avant hier soir, craint qu'il n'y ait eu quelque oubli, et la prie, dans ce cas, d'avoir recours à lui, parce que les billets imprimés étant épuisés, il peut y suppléer par un billet à la main pour autant de personnes qu'il conviendra à Mademoiselle Germain de lui en indiquer ; M. Delambre désirerait bien qu'elle se rendît elle-même à la séance, et

9

auroit le plus grand plaisir à lui faire son compliment et lui renouveller l'assurance de sa respectueuse considération

Rue du petit Bourbon St Sulpice N° 7 maison du notaire

FIGURE 6.2 – Extrait de *Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc - 1801-1900*

« INSTITUT DE FRANCE
CLASSE DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
Paris, janvier 1816.

M. Delambre [Jean-Baptiste Joseph Delambre] a l'honneur de présenter ses hommages à Mlle Germain et de lui envoyer deux billets d'Institut, présumant bien que ses amis lui en demanderont plus qu'elle n'en aura à distribuer, si, comme il le suppose, elle en a reçu hier ou aujourd'hui. Mais M. Delambre ayant appris par M. Sedillot [Charles-Émmanuel Sedillot] que Mlle Germain n'en avait pas encore reçu hier soir, il craint qu'il n'y ait eu quelque oubli, et la prie, dans ce cas, d'avoir recours à lui, parce que les billets imprimés étant épuisés, il peut y suppléer par un billet à la main pour autant de personnes qu'il conviendra à Mlle Germain de lui en indiquer. M. Delambre désirerait bien qu'elle se rendit elle-même à la séance, il aurait le plus grand plaisir à lui faire son compliment et à lui renouveler l'assurance de sa respectueuse considération. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 306-307)

Mais Germain ne se rend pas à la séance publique afin d'y recevoir son prix. Voici un extrait du *Journal des Débats*, datant du 9 janvier 1816 :

> « La classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut a tenu aujourd'hui, 8, sa séance publique, devant une assemblée fort nombreuse qu'avait attirée sans doute le désir de voir une virtuose d'un genre nouveau, Mlle Sophie Germain ; à qui le prix des lames élastiques devait être donné. L'attente du public a été trompée : cette dernière n'est point venue recevoir une palme que son sexe n'avait pu encore cueillir en France. » (*Journal des débats politiques et littéraires* 1816, p. 2).

Même si la Commission est impressionnée par les nouvelles expériences faites par Germain, elle juge que son équation, qu'elle considère correcte, n'est pas encore clairement exprimée. Voici ce qui est rapporté lors de la séance publique du 8 janvier 1816 :

> « La classe n'a reçu qu'un seul mémoire faisant suite à celui qui avait obtenu une mention honorable en 1814, et que l'auteur a représenté cette fois avec de nouveaux développements. L'équation différentielle donnée par l'auteur est exacte, quoiqu'il n'ait pas réussi à la démontrer ; mais la manière dont il a discuté les intégrales particulières qui y satisfont, les comparaisons qu'il en fait avec les résultats obtenus par M. Chladni ; enfin les expériences nouvelles qu'il a tentées sur des surfaces planes et courbes pour réaliser les indications du calcul, ont paru mérité qu'on lui décernit le prix proposé. La devise était :

Felix quit potuit rerum cognoscere causas. L'auteur est mademoiselle Sophie Germain, de Paris. » [5]

Bien que primé, le « mémoire 1815 » de Germain n'est pas publié par l'Académie des sciences. Cette situation n'est pas inédite, Il y a déjà eu au moins un précédent. En septembre 1811, Fourier fait parvenir à l'Académie, par l'intermédiaire d'un ami, un ouvrage répondant à la question mise à prix suivante « *Donner la théorie mathématique des lois de la propagation de la chaleur et comparer les résultats de cette théorie à des expériences exactes* » (J. G. Dhombres et Robert, 1998, p. 341). Le mémoire de Fourier est primé le 16 décembre 1811. Mais comme cela s'est produit pour Germain, le jury n'est qu'en partie satisfait de sa lecture. Certes, il reconnaît le travail de Fourier en primant son mémoire, en faisant des remarques élogieuses et en reconnaissant la véracité des équations différentielles de transmission de la chaleur à l'intérieur et à la surface d'un corps. Mais il fait part aussi des problèmes qu'il a relevés concernant l'analyse mathématique, l'application des outils mathématiques comme l'intégration des équations ou le manque de rigueur (J. G. Dhombres et Robert, 1998, p. 344). L'Académie ne publiera pas le mémoire de Fourier. Germain et Fourier vivent exactement la même situation à quatre ans d'intervalle. Dans les deux cas, les juges couronnent le mémoire tout en étant en désaccord avec certains points figurants dans le mémoire. Pour justifier leur décision de décerner le prix malgré quelques réserves, le jury fait valoir la nouveauté, la difficulté du sujet et son importance. Les mémoires remis lors d'un concours proposé par l'Académie étant anonymes, on peut légitimement penser que les académiciens qui ont étudié et jugé le « mémoire 1815 » de Germain n'ont pas émis des réserves sur ce « mémoire 1815 » primé parce qu'elle est une femme. On peut donc supposer qu'ils ont été impartiaux dans leur conclusion et leurs jugements.

Après trois tentatives, Germain est parvenue à obtenir le Prix de mathématiques. Ce prix est une reconnaissance de tout le travail qu'elle a produit, de toutes les difficultés qu'elle a surmontées pour parvenir à des résultats remarquables, bien que la commission ait encore formulé quelques réserves sur sa pratique mathématique.

Ce « mémoire 1815 » dévoile une étude plus approfondie de la part de Germain sur les vibrations des surfaces élastiques. Elle ne considère plus uniquement les surfaces planes, mais analyse aussi les surfaces courbes. Ce « mémoire 1815 » et les suivants montrent toute la détermination de Germain, sa volonté de faire progresser la science et de s'impliquer encore davantage dans une toute nouvelle recherche.

Legendre, qui appréciait le travail réalisé par Germain, voulait déjà imprimer le « mémoire 1813 » de celle-ci. Mais elle avait refusée. Après avoir rédigé son « mémoire

5. Institut de France II classe, Travaux divers, tome II (1811-1816)

1815 », elle réexamine la situation. Mais elle ne publiera aucun des trois mémoires du concours, du moins dans l'état où elle les a envoyés à l'Académie des sciences.

Chapitre 7

Les publications de Germain et sa réflexion au fil du temps

Dans l'étude précédente des mémoires du concours de Germain, la méthode d'analyse utilisée est une approche génétique des textes. Cette approche est décrite entre autres par Pierre-Marc de Biasi dans son ouvrage *Sciences : des archives à la genèse. Pour une contribution de la génétique des textes à l'histoire des sciences*, est de plus en plus utilisée en histoire des mathématiques. Par exemple, Thierry Joffredo a appliqué cette démarche dans sa thèse *Approches biographiques de l'Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques de Gabriel Cramer* pour l'étude d'un ouvrage du mathématicien Gabriel Cramer. L'analyse des brouillons de Germain dévoile ses interrogations, ses allers-retours dans sa recherche, la précision apportée à sa rédaction. L'étude des mémoires est une étude plus linéaire des textes. La recherche de Germain est aboutie. D'une part, nous suivons pas à pas l'avancée de son raisonnement qui nous amène à l'équation désirée. D'autre part, nous nous intéressons plus particulièrement aux notions importantes pour elle. Nous allons maintenant faire une approche génétique plus modeste des textes publiés par Germain.

7.1 Le premier mémoire publié de Germain

Germain publie par ses propres moyens son premier ouvrage en 1821 que l'on nommera « ouvrage 1821 ». Il est intitulé *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*. Cette publication est imprimée chez « Mme Ve Courcier, Libraire pour les sciences » qui se situe au n°12 rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs à Paris. Dans *Les papiers de Sophie Germain. - Recueil de dissertations et problèmes de mathématiques et physiques*

se trouvent deux manuscrits que nous nommerons « manuscrit 1 » et « manuscrit 2 » [1]. Nous disposons donc de quatre textes : le dernier mémoire du concours que nous avons appelé « mémoire 1815 », le « manuscrit 1 », le « manuscrit 2 » et l'« ouvrage 1821 ». Ces quatre textes dévoilent des similitudes mais n'ont pas le même statut. Le « manuscrit 1 » et le « manuscrit 2 » non datés ont sûrement été écrits après le « mémoire 1815 » pour préparer un texte devant être publié et qui sera l'« ouvrage 1821 ». L'étude de ces quatre textes permettra de suivre l'évolution du travail de Germain. En particulier, le « manuscrit 1 » et le « manuscrit 2 » qui sont des brouillons peuvent révéler des hésitations qui n'apparaissent pas dans les deux autres textes destinés à être lus par les autres savants.

Le « manuscrit 1 »(Germain, 2013, p. 5-13), intitulé *Exposition des principes qui servent de base à la théorie des surfaces élastiques*, porte le titre du premier paragraphe de l'« ouvrage 1821 » et correspond dans une certaine mesure à l'« Avertissement » de celui-ci. Dans l'« ouvrage 1821 », Germain évoque les trois mémoires qu'elle a envoyés pour le concours, alors que dans le « manuscrit 1 » elle ne cite que les mémoires de 1813 et de 1815. En revanche, le mémoire de Poisson est évoqué dans les deux écrits. On y trouve donc des paragraphes identiques, des paragraphes plus ou moins modifiés et enfin des paragraphes qui ne figurent pas dans l'« ouvrage 1821 ». La première page de l'« ouvrage 1821 » est identique au début du « manuscrit 1 » à quelques mots près. Dans le « manuscrit 1 », elle détaille davantage en évoquant la chronologie de son travail. Elle ne décrit pas exactement de la même façon la réception de ses résultats par les membres du jury chargés de lire les mémoires envoyés pour répondre à la question posée au concours. D'autre part, elle précise dans l'« ouvrage 1821 » que grâce à Fourier elle a découvert une démonstration géométrique qu'a faite Jacques Bernoulli pour le cas unidimensionnel et sur laquelle elle peut s'appuyer pour démontrer son hypothèse. Elle ne fait aucune allusion à ces deux mathématiciens dans le « manuscrit 1 ». Les quelques pages de l'« ouvrage 1821 » évoquées correspondent à une introduction, elles donnent un plan détaillé de l'ouvrage. Quand au « manuscrit 1 », elle l'a probablement écrit avant l'intervention de Fourier et n'avait peut-être pas encore l'intention de publier l'« ouvrage 1821 ». Le « manuscrit 1 » devait probablement être un article comme en écrivent les mathématiciens et non un brouillon pour l'« article 1821 ».

Le « manuscrit 2 » (Germain, 2013, p. 14-43) a pour titre *Examen a priori, de la nature des deux hypothèses proposées comme devant servir de bases à la théorie des surfaces élastiques*. Le début du « manuscrit 2 » coïncide avec le début du premier paragraphe de l'« ouvrage 1821 ». Germain donne la définition de D'Alembert d'une

1. Le « manuscrit 1 » correspond aux pages 5-13, et le « manuscrit 2 » aux pages 14-43 de l'ouvrage.

force élastique [2] et sa conséquence. Une différence apparaît ensuite entre les deux écrits. Dans l'« ouvrage 1821 », elle commence par évoquer les rayons de courbures pour démontrer de deux façons différentes son hypothèse. Alors que dans le « manuscrit 2 », elle aborde immédiatement la notion de forces répulsives. Cette notion est également étudiée dans l'« ouvrage 1821 » puisqu'elle est utilisée par son « rival » Poisson. Mais dans le « manuscrit 2 », elle détaille davantage son ressenti par rapport au raisonnement de Poisson.

Une autre différence entre le « manuscrit 2 » et l'« ouvrage 1821 » est le type de surfaces examinées. Dans le « manuscrit 2 », elle n'étudie ni la surface cylindrique, ni l'anneau circulaire. Mais elle refait les calculs pour obtenir l'équation de la plaque élastique vibrante à partir de l'autre hypothèse c'est-à-dire celle de Poisson.

Ensuite, elle compare les résultats expérimentaux et les résultats analytiques, aussi bien dans le « manuscrit 2 » que dans l'« ouvrage 1821 ». Mais alors que dans dans ce dernier elle fait une simple comparaison, dans le « manuscrit 2 » son objectif est de mettre en concurrence les deux hypothèses, la sienne et celle de Poisson. Ces deux manuscrits ont donc été écrits avant l'« ouvrage 1821 ». Quelques ratures apparaissent, essentiellement dans le « manuscrit 2 ». Elle y corrige son orthographe, toujours la même erreur : « Quelques soit » est corrigé en « Quelle que soit ». Elle rajoute un mot, une expression au-dessus d'une ligne : par exemple « le choix sera parfaitement », elle écrit au-dessus entre « choix » et « sera » le mot « hypothèse ». Elle reformule une phrase ou un mot. Nous avons déjà observé lors de l'étude des brouillons du « mémoire 1813 » qu'elle cherche à être la plus précise possible dans le choix de ses mots, de ses formulations pour qu'il n'y ait aucune d'ambigüité. Concernant les quelques calculs dans le « manuscrit 2 », elle a simplement rectifié des signes. Quand au « manuscrit 1 », elle a seulement rajouté un mot dans la marge, toujours par souci de rigueur : au moment où elle écrit « de concourir au prix que l'institut proposa », elle note dans la marge « extraordinaire » pour préciser de quel type de prix il s'agissait.

Ce n'est sans doute pas la première fois que Germain écrit les « manuscrit 1 » et « manuscrit 2 » puisqu'ils sont rédigés correctement, pratiquement sans aucune rectification, ni correction. Avant d'insérer ces deux manuscrits dans l'« ouvrage 1821 », elle a pu dans un premier temps les écrire pour faire une petite mise au point sur les bases servant à l'étude du problème des vibrations des surfaces élastiques suite aux reproches faits par les membres du jury pour son « mémoire 1815 ». En effet, le « manuscrit 1 », comme son titre l'indique, rappelle les éléments de base servant à la résolution du pro-

2. La définition de D'Alembert d'une force élastique sera rappelée dans le paragraphe 10.1. du développement de ce chapitre.

blème. Dans le « manuscrit 2 », elle analyse et évalue son hypothèse et celle de Poisson. Elle revient sur un point controversé. Avait-elle déjà à l'esprit de rédiger et d'imprimer l'« ouvrage 1821 » quand elle a écrit ces deux manuscrits ? Ce n'est pas sûr puisqu'elle avait déjà refusé d'imprimer le « mémoire 1813 » jugeant que le contenu n'était pas assez abouti. Mais nous pouvons aussi penser qu'elle retravaille les points délicats pour les clarifier en vue d'une prochaine publication.

7.1.1 La justesse de l'hypothèse : encore une nécessité pour Germain en 1821

Dans le premier paragraphe de l'« ouvrage 1821 », Germain rappelle la définition d'une force élastique donnée par D'Alembert dans l'*Encyclopédie* : « propriété ou puissance des corps naturels, au moyen de laquelle ils se rétablissent dans la figure & l'étendue que quelque cause extérieure leur avoit fait perdre. » (Diderot et D'Alembert, 1755, p. 444) Germain reprend pratiquement mot à mot cette définition : elle omet le mot « naturel » et remplace « quelque cause » par « une cause ». Jusqu'à présent elle n'avait encore jamais fait allusion à l'*Encyclopédie* de D'Alembert et à sa définition. Pourtant les travaux de D'Alembert sur la vibration des cordes sonores sont évoqués dans le programme détaillé du concours [3]. N'a-t-elle pas jugé nécessaire d'y faire référence dans les mémoires du concours ou peut-être ne disposait-elle pas suffisamment de temps pour les étudier ? Toujours est-il que, au début de son « ouvrage 1821 », Germain précise que suite au conseil et l'aide apportés par Fourier, elle a consulté des écrits de Jacques Bernoulli. Or ce dernier cite le nom de D'Alembert. Elle a pu être influencé et prendre le temps de se pencher sur le contenu de l'*Encyclopédie* de D'Alembert. Nous avons remarqué dans les études précédentes de ses écrits qu'elle cherche à connaître les travaux existants sur la théorie de l'élasticité. Elle déduit de la définition donnée par D'Alembert l'existence d'une force élastique dans certains corps et la raison d'être de cette force à savoir elle intervient quand le corps est modifié sous l'action d'une force extérieure. Elle considère alors deux surfaces : l'une correspondant à celle avant l'action d'une force extérieure sur la surface et qu'elle appelle « figure naturelle » de la surface, et l'autre nommée « figure élastique » de la surface considérée après l'action de la force extérieure sur la même surface. Puis elle rappelle qu'elle considère que cette force élastique est proportionnelle à la quantité $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ où R et R' sont les rayons de principales courbures naturelles de la surface, et r, r' les rayons de princi-

3. Ce programme se trouve dans l'annexe A.

pales courbures élastiques de la même surface [4]. D'après la définition de D'Alembert, la force élastique intervient lorsqu'il y a une déformation de la figure prise par la surface ; Germain exprime cette déformation à l'aide des courbures de la surface.

Dans cet « ouvrage 1821 », Germain expose deux justifications différentes de son hypothèse ; ce qui montre l'importance qu'elle y apporte. En outre, elle se penche aussi sur l'hypothèse moléculaire émise par Poisson.

Point de vue de Germain sur l'hypothèse de Poisson

Germain évoque le mémoire de Poisson sans toutefois citer son nom. Elle désapprouve l'hypothèse moléculaire qu'il utilise. Elle explique que, pour Poisson, les molécules se repoussent sous l'influence d'une force répulsive. Cette force ne permet pas à une surface qui aurait changé de figure de revenir à sa figure initiale. D'après Germain, cette qualité du corps décrite par Poisson traduit l'expansibilité d'un corps et non son élasticité. Elle pense donc qu'il fait une confusion entre l'expansibilité et l'élasticité d'un corps. Elle explique que les forces répulsives qu'il considère agencent les molécules de façon à ce que la distance entre chacune d'elles soit la même. Pour avoir ce phénomène, la surface considérée doit être soit sphérique, soit plane et infinie. Si l'on exclut ces deux cas, d'après Germain, la force considérée ne peut pas être élastique et ne peut pas rétablir une surface à sa surface initiale qu'une cause extérieure lui aura forcé de perdre.

Elle montre ensuite que, dans le cas d'une surface sphérique ou d'une surface plane et infinie, c'est-à-dire des surfaces à courbure constante, pour déterminer les conditions auxquelles les points intérieurs de la surface sont soumis, les deux hypothèses, c'est-à-dire la sienne et celle de Poisson, peuvent s'appliquer. Mais il n'en est pas de même concernant les points qui se situent sur les extrémités de la surface. En admettant l'hypothèse de Poisson, et donc l'existence de forces répulsives, Germain considère, comme cela a été dit ci-dessus, que la surface plane doit être infinie. La recherche des conditions des extrémités pose donc problème. Elle remarque d'ailleurs que Poisson n'a pas caché cette difficulté qu'il remet à plus tard. Germain considère que l'étude des points du contour de la surface est aussi importante que celle des points intérieurs de la surface. Elle rappelle que son hypothèse tient compte des deux types de points. Elle estime donc que son hypothèse peut être considérée comme une définition de la force élastique.

4. Elle a donné et justifié cette proportionnalité dans le « mémoire 1815 ».

Elle relève une autre situation que l'hypothèse de Poisson ne permet pas d'expliquer. Il s'agit d'un cas qu'elle a elle-même expérimenté et décrit dans son « mémoire 1813 ». En évoquant cette expérience, elle peut faire allusion à une différence de pratiques entre elle et Poisson. Ce dernier ne se consacre qu'à la modélisation du problème, alors qu'elle expérimente également. Elle travaille à la fois la partie mathématique et la partie expérimentale de la question, Poisson se concentre davantage sur la partie mathématique.

Elle termine cette réflexion en signalant qu'elle n'a consenti à publier cet « ouvrage 1821 » qu'après avoir levé les doutes qu'elle avait encore concernant son hypothèse. Comme nous l'avons vu précédemment, Legendre lui avait déjà recommandé de publier son « mémoire 1813 » ; elle n'avait pas suivi son conseil, son « mémoire 1813 » contenant encore trop d'imprécisions. Nous pouvons à nouveau remarquer, comme nous l'avons déjà fait au cours de l'étude des brouillons du « mémoire 1813 », que Germain est très minutieuse, fait attention aux détails, tient à être précise dans ces propos, rigoureuse dans ses justifications. Elle reconnaît la dextérité de Poisson dans la manipulation des différentes notions mathématiques intervenant dans ce nouveau domaine puisqu'elle affirme « qu'il appartient bien plus à lui qu'à moi de fixer l'opinion dans une matière si difficile » (Germain, 1821, p. 12). Elle précise également qu'elle est prête à abandonner sa théorie si Poisson la trouve incorrecte. À travers cette réflexion, Germain essaie-t-elle d'engager à nouveau une discussion avec Poisson ? Nous avons vu qu'elle avait déjà fait une tentative à l'issue de la réaction du jury concernant son « mémoire 1815 ».

7.1.2 Un récapitulatif de ses résultats théoriques

Une reprise générale de ses résultats théoriques

Pour commencer cet « ouvrage 1821 », Germain présente rapidement, dans la partie « Avertissement », les contenus de ses trois mémoires du concours. Elle reconnaît qu'elle s'est trompée dans les calculs du « mémoire 1811 ». Dans le « mémoire 1813 », elle a étudié les conditions des extrémités et rectifié l'équation modélisant les vibrations des surfaces planes, équation validée par les expériences. Quand à son « mémoire 1815 », il contient une étude plus élargie puisqu'elle y évoque ses recherches concernant l'équation des surfaces cylindriques vibrantes.

Dans cet « ouvrage 1821 », elle ne donne pas explicitement l'équation du mouvement des surfaces élastiques planes. Elle explicite les bases permettant d'aboutir à cette équation. Elle se penche entre autres sur l'épaisseur qui intervient dans un coefficient de l'équation, plus précisément sur la puissance de l'épaisseur. Les mathématiciens qui

ont travaillé sur la théorie de l'élasticité ne sont pas en accord sur cet exposant. D'autre part, elle ne connaît aucune réelle justification du choix fait par les mathématiciens concernant cette puissance de l'épaisseur. Elle veut combler cette lacune. À nouveau, Germain cherche à justifier son choix, se montre rigoureuse. Nous avons déjà fait cette constatation à plusieurs reprises. D'autre part, elle revient aussi sur l'expression qui traduit l'action des forces élastiques.

Le moment des forces d'élasticité qui agissent dans chacun des points de la surface est exprimé par :

$$-\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]\delta\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

où R, R' sont les rayons de principales courbures naturelles (avant l'action d'une force extérieure), r, r' sont les rayons de principales courbures élastiques (après l'action d'une force extérieure), $\delta\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$ signifie que dans l'expression seule la quantité $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ varie.

Si l'épaisseur est constante, le moment des forces d'élasticité est multiplié par un coefficient N^2 qui dépend de l'élasticité naturelle de la surface et de son épaisseur élevée à la puissance quatre.

L'action des forces d'élasticité sur l'élément dm de la surface s'écrit :

$$-N^2\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]\delta\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)dm.$$

L'action des forces d'élasticité sur la surface entière est donnée par la formule :

$$-\iint N^2\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]\delta\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)dm.$$

L'action de la force avec laquelle l'élément tend à se contracter est :

$$+\iint\frac{N^2}{2}\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)^2-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)^2\right]\delta dm.$$

Elle obtient les termes généraux qui vont servir à obtenir l'équation générale d'épaisseur constante :

$$-\iint N^2\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]\delta\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)dm$$
$$+\iint\frac{N^2}{2}\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)^2-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)^2\right]\delta dm.$$

Nous avons vu qu'elle est en désaccord avec Poisson concernant la définition de ces forces. Elle continue à défendre son point de vue et veut montrer que sa vision de

cette notion correspond à ce qui se passe lors des vibrations des surfaces. Elle préfère réexaminer les parties sur lesquelles il y a divergence entre le point de vue géométrique et le point de vue moléculaire, étant donné que l'équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques est connue et validée. Elle se concentre sur la manière d'obtenir cette équation. Elle continue à préférer un modèle mathématico-géométrique du XVIIIe siècle à la théorie moléculaire.

En publiant cet « ouvrage 1821 », son objectif serait-il de faire réagir les autres mathématiciens en désaccord avec elle sur l'hypothèse ? Elle désire probablement tout simplement diffuser plus largement la justification de son hypothèse puisque jusqu'à présent seuls les académiciens qui ont jugé les « mémoire 1813 » et « mémoire 1815 » du concours en ont connaissance. Elle affirme que « il ne sera peut-être pas inutile d'avoir appelé l'attention sur une question qui n'a pas encore été suffisamment examinée ; car les mathématiciens qui penseront que je n'ai pas réussi à justifier les principes que j'ai admis, seront naturellement portés à leur en substituer de plus lumineux » (GERMAIN, 1821, p. 18). Sa réflexion concerne-t-elle plus particulièrement Poisson qui, comme nous le verrons, est adepte du modèle moléculaire et non géométrique ? Avec ce commentaire, elle dévoile qu'elle est ouverte à toute proposition, à toute remarque constructive concernant sa justification. Elle est prête à dialoguer avec Poisson [5] ou tout autre mathématicien travaillant sur le sujet.

Après avoir précisé les bases de son raisonnement concernant les vibrations des surfaces, Germain consacre le paragraphe suivant à l'obtention de l'équation des surfaces cylindriques vibrantes et à celle de l'anneau.

Cas de l'anneau et des surfaces cylindriques vibrantes

De même que l'équation de la lame élastique peut se déduire de l'équation de la surface élastique, l'équation de l'anneau circulaire peut être obtenue à partir de l'équation de la surface cylindrique à base circulaire. Germain commence donc par exprimer l'équation de la surface cylindrique vibrante. Elle suppose toujours, comme elle le fait depuis le début de son étude et comme le font les autres mathématiciens, que la surface s'écarte très peu de sa position initiale.

Elle prend « pour plans coordonnés ceux qui, pour un point donné de la surface, contiennent les lignes de principales courbures. (...) il conviendra de prendre le centre du cercle qui sert de base à la surface pour origine des coordonnées ; elles seront alors mesurées à compter du point pour lequel z est égal au rayon R de ce cercle » (GERMAIN,

5. Nous constaterons dans la partie intitulée « La réception des premiers travaux de Germain » qu'elle essayera en vain de communiquer avec Poisson à propos de leur divergence sur l'hypothèse.

1821, p. 20). Le rayon R est constant, elle pose alors $R = a$. Elle admet, comme pour une plaque vibrante, que le mouvement ne se fait que dans la direction perpendiculaire au plan tangent en chaque point de la surface cylindrique.

Pour pouvoir utiliser les termes généraux rappelés ci-dessus, elle doit calculer $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ et $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$, où R, R' sont les rayons de principales courbures naturelles, r, r' sont les rayons de principales courbures élastiques. Pour cela, elle considère le cercle de rayon de plus grande courbure d'un point donné. Par le centre de ce cercle, elle considère un plan perpendiculaire à ce rayon et qui coupe le plan des x et y. Elle note x'' la ligne d'intersection qui se situe entre le centre et l'axe des y. Elle pose $r = R + (r)$, (r) représente la différence entre les rayons de plus grandes courbures naturelle et élastique. (r) est une quantité qui varie.

Après quelques calculs, les termes généraux précédents sont égaux à :

$$-\iint N^2 \left(\frac{d^2(r)}{dx''^2} + \frac{d^2(r)}{ds^2}\right) \delta \left(-\frac{1}{a} + \frac{d^2(r)}{dx''^2} + \frac{d^2(r)}{ds^2}\right) dm$$

$$+\iint \frac{N^2}{2} \left(\frac{d^2(r)}{dx''^2} + \frac{d^2(r)}{ds^2}\right) \left(\frac{d^2(r)}{dx''^2} + \frac{d^2(r)}{ds^2} - \frac{2}{a}\right) \delta dm$$

où ds est un élément de la courbe comprise dans le plan des z et y c'est-à-dire $ds = \sqrt{dy^2 + dz^2}$ et $dm = dxds$.

Elle remplace la notation (r) par r tout en précisant que r représente alors la différence entre les rayons de plus grandes courbures naturelle et élastique et non plus le rayon de principale courbure élastique. La somme des deux termes généraux s'écrit alors :

$$-\iint N^2 \left(\frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right) \delta \left(-\frac{1}{a} + \frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right) dxds$$

$$+\iint \frac{N^2}{2} \left(\frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right) \left(\frac{d^2(r)}{dx''^2} + \frac{d^2(r)}{ds^2} - \frac{2}{a}\right) \delta dm.$$

Elle intègre par parties le premier terme de cette somme à savoir

$$\iint N^2 \left(\frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right) \delta \left(-\frac{1}{a} + \frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right) dxds.$$

Avant de calculer le deuxième terme de la somme, elle fait des suppositions liées à la situation comme la somme $\frac{d^2(r)}{dx''^2} + \frac{d^2(r)}{ds^2}$ est négligeable par rapport à $\frac{2}{a}$ ou la différence $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ est constante. Il lui reste alors à intégrer

$$-\iint \frac{N^2}{a} \left(\frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right) \delta dm.$$

Après d'autres suppositions et remarques, elle obtient l'équation de la surface cylindrique vibrante :

$$N^2\left[\frac{d^4r}{dx''^4}+2\frac{d^4r}{dx''^2ds^2}+\frac{d^4r}{ds^4}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\right]+\frac{d^2r}{dt^2}=0. \tag{7.1}$$

En prenant a infini, c'est-à-dire le rayon de courbure naturelle R infini, elle remarque alors que $r = z$, $x'' = x$ et $s = y$.

L'équation précédente s'écrit alors :

$$N^2\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)+\frac{d^2z}{dt^2}=0. \tag{7.2}$$

Elle retrouve l'équation d'une surface plane que Lagrange a trouvé en utilisant la même hypothèse qu'elle dans le « mémoire 1811 ».

Germain remarque que l'équation d'une surface plane peut être obtenue de deux façons. Elle peut être déduite soit de l'hypothèse faite dans le cas de la surface plane, soit en adaptant l'équation obtenue grâce à une hypothèse plus générale. De même, l'équation des surfaces cylindriques s'obtient en appliquant les méthodes qu'elle emploie dans son étude. Mais elle ne peut se déduire des principes qu'elle a « combattus dans les numéros précédens »(Germain, 1821, p. 2-28). Elle doit faire allusion aux principes intervenant en appliquant la méthode moléculaire.

Germain se rassure à la fois sur la véracité de l'équation générale qu'elle obtient pour les cylindres et sur l'hypothèse qu'elle utilise depuis le début de ses travaux. Elle fait à nouveau allusion à la théorie moléculaire utilisée par Poisson pour obtenir l'équation des plaques élastiques.

Pour passer d'une surface cylindrique à base circulaire au cas particulier de l'anneau circulaire, elle considère x'', la ligne d'intersection entre le centre du cercle de rayon de plus grande courbure d'un point donné et l'axe des y, constante. Dans ce cas la valeur de x représentant la distance entre le point auquel elle appartient et le plan des y et z, reste également constante. Elle considère qu'il existe une ligne parallèle à l'axe du cylindre pour laquelle x'' ne varie pas en se déplaçant sur cette ligne. Comme x ne doit pas varier, cette ligne parallèle à l'axe du cylindre doit être réduite à un point. La surface cylindrique se transforme en un anneau circulaire. Ce dernier est donc un cas particulier de la surface cylindrique puisque c'est un cylindre de hauteur finie. Comme l'anneau circulaire est un cas particulier de la surface cylindrique à base circulaire, elle reprend l'équation (A) obtenue pour une surface cylindrique à base circulaire pour déterminer

celle de l'anneau circulaire. L'équation (A) s'écrit alors, x'' et x étant constantes :

$$N^2\left(\frac{d^4r}{ds^4}-\frac{1}{a^2}\frac{d^2r}{ds^2}\right)+\frac{d^2r}{dt^2}=0. \tag{7.3}$$

Cette dernière équation est donc celle de l'anneau circulaire.

Germain précise qu'elle avait explicité dans son « mémoire 1815 » du concours l'équation de la surface cylindrique, ainsi que celle de l'anneau circulaire. Pour rappel, en 1815, l'équation modélisant les vibrations d'une surface cylindrique était :

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}+\frac{1}{R^2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right)=z''$$

où R est le rayon de la base circulaire et celle de l'anneau :

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{1}{a^2}\frac{d^2z}{dx^2}\right)=z''.$$

Elle reconnaît que les équations qu'elle avait alors obtenues n'étaient pas les mêmes et qu'elles étaient erronées.

Tout comme dans ses trois mémoires qu'elle a envoyés à la Classe pour répondre au concours, Germain restreint son étude aux cas des mouvements réguliers qui sont associés à la théorie du son. Ces cas sont assimilables à ceux du pendule simple, dont l'équation est $\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{r}{k}$ où k est la longueur du pendule [6].

En remplaçant $\frac{d^2r}{dt^2}$ par $-\frac{r}{k}$ dans les équations 7.1 et 7.3, elle obtient respectivement l'équation 7.4 des mouvements réguliers de la surface cylindrique et l'équation 7.5 des mouvements réguliers de l'anneau circulaire :

$$N^2\left[\frac{d^4r}{dx''^4}+2\frac{d^4r}{dx''^2ds^2}+\frac{d^4r}{ds^4}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\right]=\frac{k}{r} \tag{7.4}$$

$$N^2\left(\frac{d^4r}{ds^4}-\frac{1}{a^2}\frac{d^2r}{ds^2}\right)=\frac{r}{k}. \tag{7.5}$$

Il y a une erreur dans l'équation 7.4. Germain a écrit $\frac{k}{r}$. Or c'est l'inverse, c'est-à-dire $\frac{r}{k}$. Il s'agit sûrement d'une simple erreur d'écriture. Mais elle ne la rectifie pas et la reporte dans les calculs suivants. Elle ne relit pas et ne refait pas forcément ses calculs. Nous avons déjà fait ce constat dans le « mémoire 1815 ». Elle a davantage confiance

6. Elle fait référence au pendule simple, tout comme les autres mathématiciens ayant travaillé sur la théorie de l'élasticité, dès le début de son étude. Elle donne la solution de cette équation dans le « mémoire 1811 ».

dans ses calculs que dans le choix des mots pour exprimer sa pensée, sa démarche, ses explications.

Comme les mouvements sont toujours comparés à ceux d'un pendule simple de longueur k, elle rappelle que $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{r}{k}$ correspond à l'équation des mouvements du pendule simple et que $r = M \sin\left(\xi + t\sqrt{\frac{1}{k}}\right)$ est l'intégrale de cette équation [7], avec ξ un angle pris pour constante arbitraire, et M une quantité constante fonction de x'' et de s pour la surface cylindrique, et uniquement de s pour l'anneau circulaire.

En omettant le coefficient relatif au temps, elle donne l'intégrale complète de l'équation 7.5, équation de l'anneau circulaire :

$$r = ... \left(Ae^{\alpha s} + Be^{-\alpha s} + C \sin \beta s + D \cos \beta s\right) \tag{7.6}$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires à déterminer et α, β sont des coefficients tels que $\alpha^4 - \frac{\alpha^2}{a^2} = \beta^4 - \frac{\beta^2}{a^2} = \frac{1}{k.N^2}$ ou $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{a^2}$.

Germain étudie ensuite l'équation de l'anneau, étude comparable à celle déjà réalisée avec une lame droite. Elle analyse aussi les sons, ainsi que les figures nodales. Pour cela, elle s'appuie, comme elle le fait depuis son « mémoire 1811 » pour le concours, sur les travaux d'Euler, mais aussi sur ceux de Riccati.

Suivent alors des pages de calculs et de descriptions, dans lesquelles elle précise l'influence qu'ont les différentes courbures sur les lignes nodales et sur les sons ainsi que sur les intervalles des sons. Elle montre par exemple que le nombre de lignes nodales sur une lame courbe ne dépend pas de la courbure contrairement à leur disposition (Germain, 1821, p. 36). Elle rajoute que seule la position de la ligne nodale se trouvant au milieu de la longueur de la lame est indépendante de la courbure de cette lame (Germain, 1821, p. 40).

Germain cherche ensuite à intégrer l'équation 7.4 de la surface cylindrique, à savoir :

$$N^2 \left[\frac{d^4r}{dx''^4} + 2\frac{d^4r}{dx''^2 ds^2} + \frac{d^4r}{ds^4} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right)\right] = \frac{k}{r}$$

avec les conditions relatives aux limites suivantes :

$$-\int N^2 \left(\frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}\right) \delta \left(\frac{dr}{dx''}\right) ds + \int N^2 d \left(\frac{\frac{d^2r}{dx''^2} + \frac{d^2r}{ds^2}}{dx''}\right) \delta r ds$$

7. Elle a déjà évoqué cette équation dans le « mémoire 1811 ». La résolution de cette équation a été faite au cours de l'étude de ce mémoire.

$$+\int \frac{N^2}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(\frac{dr}{dx''}\right)\delta r ds = 0$$

et

$$-\int N^2\left(\frac{d^2r}{ds^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\delta\left(\frac{dr}{ds''}\right)dx + \int N^2 d\left(\frac{\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}}{ds}\right)\delta r dx$$

$$+\int \frac{N^2}{a^2}\left(\frac{d^2r}{dx''^2}+\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left(\frac{dr}{ds}\right)\delta r dx = 0.$$

Elle a déjà utilisé cette expression de conditions aux limites à maintes reprises. Ces conditions aux limites désignent les conditions que doivent vérifier les points qui se trouvent aux extrémités de la surface considérée. Ces conditions aux extrémités, comme nous l'avons déjà vu, n'ont pas été étudiées par Poisson dans le cas d'une plaque élastique alors qu'elles sont considérées comme importantes pour Germain.

À propos de la deuxième condition, elle a écrit dans la première parenthèse $\frac{d^2r}{ds^2}$ au lieu de $\frac{d^2r}{dx''^2}$, et $\delta\left(\frac{dr}{ds''}\right)$ au lieu de $\delta\left(\frac{dr}{ds}\right)$. Il s'agit certainement à nouveau de simples erreurs d'écriture, d'inattention.

Pour intégrer l'équation 7.4, elle fait une analogie comme pour la théorie de l'anneau. Elle précise que cette équation 7.4 modélise non seulement les vibrations d'une surface cylindrique entière, mais aussi ceux « d'une surface terminée dans un sens par des arcs de cercles quelconques parallèles à la base du cylindre, et dans l'autre par des lignes droites parallèles à l'axe même du cylindre. » Ces lignes droites n'existent pas dans le cas d'une surface entière. Mais il est possible de « supposer qu'il existe pourtant sur cette surface une ou plusieurs pareilles lignes analytiques » (Germain, 1821, p. 58). Ne pouvant trouver une intégrale complète, Germain doit se contenter de déterminer deux intégrales particulières qui satisfont à l'équation 7.4 et aux conditions des limites. Elle doit encore faire une autre restriction dans cette étude. Elle se limite au cas « dans lequel on peut concevoir qu'une plaque carrée ait été ployée suivant une de ses dimensions, à une courbure circulaire d'un nombre donné de degrés » (Germain, 1821, p. 58). Elle obtient donc deux intégrales qui satisfont à l'équation de la surface cylindrique et aux conditions des extrémités :

$$r = \ldots \cos\pi\frac{ns}{A}\cos\pi\frac{mx''}{A'} \tag{7.7}$$

avec $x = x''\cos\nu$ où ν est l'angle entre le rayon du cercle de base de la surface et un rayon mené du centre au point donné de la surface

$$r = \ldots \cos\pi\frac{nx''}{A'}\left(ae^{\pi\alpha''\frac{s}{A}} + be^{-\pi\alpha''\frac{s}{A}} + c\sin\Sigma\pi\beta''\frac{s}{A} + d\cos\pi\beta''\frac{s}{A}\right) \tag{7.8}$$

avec a, b, c, d des constantes arbitraires qu'elle déterminera.

Comme pour l'anneau circulaire, plusieurs pages sont ensuite consacrées à l'étude théorique des sons, des lignes nodales, de l'influence de la courbure sur la disposition des lignes nodales et sur les intervalles des sons. Elle conclut :

> « On voit que plus la courbure de la surface est considérable, plus aussi le son qui accompagne la formation des deux lignes parallèles aux côtés droits, comparé au son qui correspond au même cas de vibration sur la plaque carrée, est aigu.
>
> On voit encore que les intervalles entre les sons correspondans à deux cas de vibration donnés, sont d'autant moins grands, que la surface a plus de courbure. » (Germain, 1821, p. 74-75)

Tout comme dans ses « mémoire 1813 » et « mémoire 1815 » envoyés à l'Institut, Germain ne s'est pas contentée de faire une analyse théorique. Elle a aussi fait elle-même des expériences, ainsi qu'une comparaison entre ses résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Non seulement elle y consacre un paragraphe, mais elle y fait allusion tout au long de son « ouvrage 1821 ».

7.1.3 L'omniprésence des expériences

Dans les écrits de Germain, le paragraphe relatant les expériences est le dernier. Il vient toujours après son étude théorique. Pour elle, les expériences permettent de valider ou invalider une théorie, de justifier des résultats analytiques. Mais, la théorie ne doit pas non plus influencer les expériences qui ne sont pas toujours faciles à réaliser. Ainsi, Germain utilise souvent des expériences effectuées avant la finalisation de la théorie.

L'importance des expériences l'a poussée à en faire elle-même, malgré la difficulté de trouver du matériel adéquat et la complexité des expériences. Tous les savants ne ressentent pas le besoin de faire leurs propres expériences. Par exemple, Poisson n'en réalise aucune. Il s'appuie sur celles de Chladni et demande à d'autres scientifiques comme Savart d'en réaliser. Nous avons déjà observé cette nécessité de manipuler ressentie par Germain lors de l'étude des mémoires de 1813 et de 1815. Elle persévère donc et continue à en faire. Elle est toutefois consciente que pour que des expériences puissent valider une théorie, il faut en faire un nombre conséquent. Non seulement Germain prend le temps de réaliser des expériences, mais elle consacre aussi plusieurs pages à les décrire, à expliciter les résultats obtenus et à les comparer aux résultats théoriques. Elle s'est intéressée aux sons et aux lignes nodales correspondantes. Elle expose ses observations concernant des lames de différentes courbures.

Elle a tout d'abord étudié le cas avec deux lignes nodales, cas qu'elle appelle premier cas de vibration. Elle remarque un désaccord, suivant la courbure de la lame, entre les sons émis et les sons prévus par la théorie, ainsi que pour les lignes nodales. Mais si les figures sont composées de trois lignes nodales, quatre lignes nodales, etc, la différence remarquée auparavant entre les résultats théoriques et expérimentaux s'estompe.

Germain n'hésite pas à expliciter les résultats obtenus pour différentes courbures. Elle ne cache pas que les résultats théoriques et ceux obtenus grâce aux expériences pour les lames courbes ne sont pas toujours en accord, contrairement au cas des lames droites. Mais elle a tout de même confiance dans sa théorie, les conditions d'expérimentation n'étant pas optimales et une marge d'erreur étant admise.

Elle étudie ensuite l'effet des courbures sur un autre type de surfaces courbes. Elle considère les « surfaces dont le côté courbe était égal en longueur au côté droit » (Germain, 1821, p. 85). L'observation expérimentale qu'elle fait est en accord avec la théorie.

Elle précise aussi qu'elle a d'abord testé les plaques avant de les incurver et d'effectuer les expériences avec différentes courbures afin d'analyser l'effet de la courbure. Elle rajoute qu'elle a fait les expériences avant de déterminer la théorie. Elle présente quelques unes de ses observations à propos des sons et des lignes nodales. Elle remarque que « la quantité dont il [le son] diffère du rapport donné par la théorie, est (...) d'autant plus grande, que la courbure est plus considérable » (Germain, 1821, p. 92). Concernant les lignes nodales, « l'augmentation de la courbure détermine leur rapprochement dans une proportion plus grande que celle indiquée par la théorie » (Germain, 1821, p. 92).

Germain est consciente que les expériences ne permettent pas toujours de confirmer la théorie. Mais la différence remarquée à propos des sons et des lignes nodales est normale pour elle. Elle précise que les surfaces courbes vibrent beaucoup plus facilement que les surfaces planes. Elles peuvent se mettre en mouvement avant que le savant n'ait appliqué l'archet. Les expériences avec des lames courbes sont donc beaucoup plus sensibles aux conditions dans lesquelles elles sont réalisées. Cette sensibilité accroît la difficulté d'obtenir un accord "parfait" entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Néanmoins, les expériences restent importantes dans le processus de validation d'une théorie puisqu'elle précise que « Les différences dont je viens de parler [différences entre les résultats théoriques et expérimentaux] n'ont pas empêché l'Institut de regarder la comparaison à l'expérience comme favorable à la théorie »(Germain, 1821, p. 77).

7.1.4 Une reprise du mémoire primé de 1815 ?

Dès le début du « mémoire 1815 » et de l'« ouvrage 1821 », Germain revient sur son hypothèse. Elle tient à justifier son choix. Elle commence par donner les définitions des notions de base, définitions qu'elle a d'ailleurs déjà données dans le « mémoire 1815 ».

Nous allons comparer certaines notions communes abordées dans les deux textes. Pour mieux visualiser leurs ressemblances ou dissemblances, elles sont écrites parallèlement.

1815	**1821**
« les forces d'élasticité tendent à rétablir les corps qui en sont doués, dans l'état qu'une cause extérieure quelconque leur aurait fait perdre. »	« l'élasticité ne se manifeste dans les corps qui sont doués de cette force, que quand leur figure naturelle a été changée par l'action d'une cause extérieure. »
La figure naturelle est la figure initiale du corps élastique	La figure naturelle est la figure d'une surface avant l'action supposée
La figure élastique est la figure qu'une force extérieure l'a forcée à prendre.	La figure élastique est la figure qu'une cause extérieure l'aura forcée de prendre.

Germain utilise donc les mêmes définitions des notions de base dans le « mémoire 1815 » et l'« ouvrage 1821 ».

Elle étudie l'action des forces.

1815	**1821**
« La différence entre l'état naturel des divers points du corps élastique et l'état des mêmes points après l'action de la cause extérieure est donc la mesure des forces d'élasticité. Cette différence est exprimée par la différence entre la figure naturelle ou initiale du corps élastique et sa figure élastique. »	Les forces d'élasticité sont proportionnelles à la différence entre la figure élastique et la figure naturelle d'un même corps. « la difficulté se réduit à trouver dans chaque cas la mesure de cette différence. »

Elle garde toujours le même point de vue. Pour pouvoir étudier cette différence entre la figure élastique et la figure initiale ou naturelle, elle indique les plans qu'elle considère. Elle utilise les mêmes plans dans le « mémoire 1815 » et l'« ouvrage 1821 ». Elle considère tout d'abord la surface courbe initiale. Par un point de cette surface,

elle étudie les sections d'un plan coupant successivement la surface dans toutes les directions et dans chacune de ces directions sous toutes les inclinaisons possibles. Elle fait de même avec le même point de la surface élastique. Elle remarque que les sections obliques s'annulent entre elles. Seules les sections normales interviennent dans l'étude. Elle ne retient donc que les deux plans normaux contenant les sections considérées et les deux plans contenant les principales courbures.

Toutefois dans son « ouvrage 1821 », elle rajoute que ces deux plans normaux peuvent former des angles différents avec les deux plans contenant les principales courbures.

Elle y évoque alors un cas particulier, celui où les deux plans normaux forment chacun un angle de 45° avec les plans qui contiennent les principales courbures de la surface. Elle considère ce cas « remarquable » puisqu'alors « les plans de principales courbures naturelles de la surface » coïncident « avec ceux de principales courbures élastiques de la même surface, les poids qui pourraient être appliqués aux extrémités des deux courbes élastiques dont les rayons de courbures sont ρ et ρ', devraient être égaux entre eux » (Germain, 1821, p. 6-7).

Elle précise qu'en général la courbure d'une surface ne se compare pas à celle d'une sphère comme on peut le faire entre la courbure d'une courbe et celle d'un cercle. Mais dans ce cas particulier, la quantité de courbure de la surface est égale à celle d'une sphère. Germain indique que cette vision de la courbure est nouvelle et elle laisse le soin aux mathématiciens de vérifier si on peut la conserver.

Elle explicite la différence entre la figure élastique et la figure naturelle avec la même expression.

1815	**1821**
Elle montre alors que : $E - I = \frac{1}{r} + \frac{1}{(r)} + \frac{1}{((r))} + etc - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{(R)} + \frac{1}{((R))} + etc\right)$ sont les rayons de courbures des sections normales de la surface élastique et $R, (R), ((R)), etc$ sont les rayons de des sections normales de la surface initiale correspondante. Elle pose f et g les rayons de courbures principales, F et G les rayons de courbures principales	Elle pose r et r' les rayons de courbures principales, ρ et ρ' les rayons de courbures produites par deux sections normales perpendiculaires entre elles. Elle montre que $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ « Ainsi la somme des raisons inverses des rayons de courbures de toutes les courbes produites par les différentes sections de la surface se réduit à la somme des raisons inverses des deux rayons de

1815	**1821**
de la surface initiale. Comme la somme des quantités $\frac{1}{r}, \frac{1}{(r)}, etc$ qui appartiennent à 2 sections perpendiculaires entre elles est constante, elle obtient finalement que : $\frac{1}{r} + \frac{1}{(r)} + \frac{1}{((r))} + etc$ est égale à $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ prise un nombre infini de fois ; de même $\frac{1}{R} + \frac{1}{(R)} + \frac{1}{((R))} + etc$ est égale à $\frac{1}{F} + \frac{1}{G}$ prise un nombre infini de fois. Elle explique que le coefficient infini qui multiplie $f + g - (F + G)$ provient de la méthode utilisée pour obtenir la quantité $E - I$ et n'appartient pas à celle-ci. Ainsi $E - I = \frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)$.	principales courbures de la même surface prise une infinité de fois ». La différence entre la courbure élastique et la courbure naturelle de la même surface est donc : $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ Ainsi « Conformément à l'hypothèse proposée, les forces d'élasticité sont donc proportionnelles à la quantité $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ ».

Germain a reproduit dans son « ouvrage 1821 » le même raisonnement que dans son « mémoire 1815 ». Reprenant une justification déjà faite, certains passages sont moins détaillés, moins développés. N'ayant pas écrit cet « ouvrage 1821 » pour participer à un concours, ses objectifs sont différents. Elle prend davantage de temps pour défendre son hypothèse. Elle ne s'adresse plus essentiellement aux académiciens, mais à un public de savants plus large.

L'hypothèse retenue en début d'étude étant un point de désaccord avec d'autres savants, elle développe dans l'« ouvrage 1821 » une nouvelle justification de son hypothèse. Celle-ci, inspirée de celle de Jacques Bernoulli faite dans le cas linéaire, est une explication s'appuyant sur la géométrie. Dans cette justification, elle considère le moment où une force extérieure fait changer la surface élastique de figure. Alors que dans la justification de son hypothèse qu'elle avait faite dans son mémoire de 1815, elle se place au moment juste après que la surface élastique ait été déformée. Les moments étudiés diffèrent donc dans les deux justifications.

Germain n'a pas changé sa manière de concevoir la situation entre 1815 et 1821. Dans son « ouvrage 1821 », elle rapporte que les deux justifications sont liées. Elles conduisent toutes les deux à la même remarque : « quelle que soit, par rapport aux plans de principales courbures, la situation des deux plans normaux dont on voudra considérer les sections, on obtiendra toujours, dans la première, la mesure d'une force égale à celle qui fait équilibre à la somme des momens de toutes les forces qui agissent

sur la surface, et dans la seconde, une mesure pareillement égale de la différence entre la figure élastique et la figure naturelle de la surface » (Germain, 1821, p. 6).

Elle complète son « ouvrage 1821 » en y insérant une observation sur le travail réalisé par Poisson plus précisément par rapport à l'hypothèse moléculaire adoptée par celui-ci comme nous l'avons signalé dans le paragraphe « Point de vue de Germain sur l'hypothèse de Poisson ». Elle pointe aussi la limite de cette hypothèse qui ne peut s'appliquer aux points du contour d'une surface. Elle ne pouvait le faire dans son « mémoire 1815 » puisqu'elle n'avait pas encore pu prendre connaissance des résultats de celui-ci, ne pouvant assister aux séances de l'Académie des sciences durant lesquelles Poisson avait lu en 1814 son mémoire.

Elle se penche ensuite sur l'équation de la surface élastique. Mais elle ne la cite pas dans son « ouvrage 1821 ». Elle ne présente que la manière d'y parvenir. Pour cela, elle reste toujours fidèle à l'étude menée dans le « mémoire 1815 ». Elle utilise à nouveau le moment des forces élastiques. Mais elle fait une analyse plus détaillée dans le sens où elle donne plus d'explications et écrit moins de calculs « basiques ». Par exemple, elle détermine explicitement le coefficient par lequel il faut multiplier le moment des forces d'élasticité, coefficient qui dépend de la résistance de la surface c'est-à-dire de l'élasticité naturelle, et de l'épaisseur de la surface. En revanche, dans le « mémoire 1815 », elle étudie tout de suite le cas qui s'applique à la théorie des corps sonores, c'est-à-dire le cas des mouvements réguliers. Elle n'étudie ce cas que plus tard dans l'« ouvrage 1821 », après l'étude de l'anneau.

Dans le « mémoire 1815 », Germain évoque tout d'abord la notion d'anneau plan, celui-ci étant analytiquement un cas particulier de la plaque circulaire. Puis elle examine l'anneau qui sert de limite à la cloche hémisphérique. Enfin, elle mentionne l'anneau qui sert de base à la calotte sphérique. En considérant ces trois descriptions de l'anneau, celui-ci aurait la forme d'une plaque circulaire trouée en son centre.

Dans son « ouvrage 1821 », elle étudie l'anneau circulaire qui est un cas particulier de la surface cylindrique à base circulaire. Cet anneau peut donc être perçu comme dans le « mémoire 1815 » sous forme d'une plaque circulaire ayant un trou en son centre.

Elle ne définit pas d'une manière unique un anneau. Elle donne plusieurs visions de cette surface élastique suivant l'étude du solide qu'elle fait ; mais ces différents aperçus de l'anneau nous ramènent finalement à la même forme.

Quelle que soit la description de l'anneau qu'elle donne dans les deux écrits, elle s'intéresse à l'équation de l'anneau.

1815	**1821**
Elle donne directement l'équation de l'anneau sans démonstration (elle justifie simplement son équation en disant que Euler avait trouvé la même, mais elle ne correspond pas aux expériences menées par Chladni.)	Elle cherche, dans un premier temps, l'équation de la surface cylindrique à base circulaire pour en déduire ensuite celle de l'anneau circulaire.

L'étude faite dans l'« ouvrage 1821 » est complétée et elle est davantage détaillée. Germain reconnaît d'ailleurs dans cet « ouvrage 1821 » que cette démonstration manquait et qu'elle n'avait alors pas vu une erreur de signe qui explique la différence qu'il y avait entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux obtenus par Chladni. En 1821, Germain tient à expliquer cette différence. Elle prend également du temps pour expliquer les expériences de Chladni et la théorie développée par Euler en 1779. L'étude faite dans cet « ouvrage 1821 » est donc beaucoup plus précise.

Dans le « mémoire 1815 », Germain ne s'attarde pas sur l'étude de l'anneau. Elle passe très rapidement à la cloche et à la calotte sphérique, sûrement par manque de temps. En revanche, elle n'évoque pas ces deux corps sonores dans son « ouvrage 1821 ». Elle occulte complètement cette étude.

Après avoir détaillé davantage l'étude de l'anneau dans son « ouvrage 1821 », Germain se penche alors seulement sur les cas qui s'appliquent à la théorie des corps sonores, à savoir les cas des mouvements réguliers. Elle étend cette étude à la surface cylindrique et à l'anneau circulaire. Encore une fois, elle explicite davantage en 1821 le cas des mouvements réguliers.

L'analyse faite dans le « mémoire 1815 » par Germain est plus succincte que celle faite dans son « ouvrage 1821 ». Le temps imposé par le concours en 1815 a limité ses recherches. Cet « ouvrage 1821 » ne correspond pas à un type de bilan des résultats qu'elle a obtenus durant les travaux entrepris dans le but de répondre au sujet du concours, mais à un bilan qu'elle complète.

Comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux

1815	**1821**
	Elle se sert des expériences de Savart [8]

8. Germain évoque les expériences et les observations faites par Savart. (Germain, 1821, p. 75) Elle les connaît grâce à un Mémoire de celui-ci. (*Annales de chimie et physique* 1820, p. 113-172)

1815	**1821**
	et utilise les résultats expérimentaux qu'elle avait obtenus pour son « mémoire 1813 ».
Elle décrit les trois expériences qu'elle a faites avec les cloches et calottes sphériques, ainsi que les résultats obtenus. Elle précise qu'elle n'a pas réussi ses expériences avec l'anneau.	
Elle refait des expériences avec des plaques carrées avant de les courber (elle a utilisé une quarantaine de plaques). Elle étudie l'effet de la courbure. Elle fait des expériences avec des surfaces cylindriques (mais pas en nombre suffisant).	Elle fait des expériences avec des lames droites, des lames courbes, des surfaces cylindriques. Elle fait d'abord les expériences avec des corps à l'état de plaques avant de les courber. Elle étudie l'effet des courbures.
Elle fait une comparaison pour les sons et les lignes nodales.	Elle fait une comparaison pour le son, les lignes nodales, entre les sons et la distance des lignes nodales suivant le point d'appui.
	Elle précise qu'elle a fait certaines expériences avant l'étude de la théorie, pour ne pas être influencée. Elle précise encore qu'elle a fait beaucoup d'expériences, mais elles sont difficiles à réaliser. De plus, il lui faudrait encore plus de temps pour être certaine que l'expérience valide la théorie qu'elle a déduite de son hypothèse.

Des similitudes apparaissent dans le « mémoire 1815 » et l'« ouvrage 1821 ». La première est l'utilisation des expériences et le type de comparaisons. Mais dans l'« ouvrage 1821 », Germain a davantage détaillé et a pu réaliser plus de comparaisons puisqu'elle a continué à faire des expériences. Nous avons pu d'une part le constater dans le paragraphe précédent et d'autre part, elle le signale dans la partie « Avertissement » au

début de son « ouvrage 1821 ». La deuxième similitude qui ressort en lisant les deux écrits est la difficulté qu'elle rencontre parfois pour réaliser les expériences.

Il y a aussi des différences entre ces deux mémoires. Par exemple, pour le « mémoire 1815 », Germain réalise des expériences sur les cloches et les calottes sphériques. Dans son « ouvrage 1821 », elle ne se réfère jamais à ces deux corps sonores. Dans l'« ouvrage 1821 », elle fait allusion aux expériences effectuées par Savart et ses propres expériences relatées dans son « mémoire 1813 » du concours. Enfin, toujours dans l'« ouvrage 1821 », elle précise qu'elle a réalisé certaines expériences délicates avant de faire l'étude théorique correspondante pour éviter d'essayer d'obtenir les figures nodales décrites par la théorie. Mais effectuer des expériences avant de développer une théorie est un fait exceptionnel puisqu'à la fin de cet « ouvrage 1821 », elle remarque que le nombre d'expériences n'est pas suffisant pour qu'elles puissent corroborer la véracité de la théorie qu'elle a exposée à partir de son hypothèse. Les expériences permettent donc de confirmer ou d'infirmer une étude.

L'« ouvrage 1821 » est en partie une reprise du « mémoire 1815 ». Mais Germain n'a pas tout à fait gardé le même plan dans les deux écrits. Entre 1815 et 1821, elle a affiné ses recherches et donc modifié et complété certains points. Elle est encouragée et soutenue par Fourier. Nous verrons par la suite qu'elle a rencontré Fourier grâce à Legendre. Dans le chapitre 2, nous avons déjà vu que Germain et Fourier entretenaient une correspondance. Celle-ci nous apprend que Fourier se rendait chez elle pour travailler. Il lui a fourni une aide précieuse en lui permettant de découvrir et comprendre d'autres travaux sur les vibrations, de rectifier certaines erreurs, des erreurs de calculs par exemple. Dans cet « ouvrage 1821 », elle s'est davantage concentrée sur le raisonnement, les explications, les justifications que sur les calculs.

7.2 Ses autres publications

Même si Germain n'a pas toujours le soutien et la reconnaissance de certains mathématiciens qui travaillent aussi sur les vibrations des surfaces élastiques, ou éprouve parfois quelques difficultés à être mise au courant des dernières expériences, et à obtenir les compte-rendus des dernières avancées sur le sujet, elle continue à améliorer ses premières rédactions, à clarifier et approfondir ses résultats. Elle écrit, entre 1821 et 1831, quatre autres articles dont trois seront publiés de son vivant.

7.2.1 L'importance de l'épaisseur de la surface

En 1824, Germain termine un autre article intitulé *Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques*, que nous nommerons « article 1824 ». Il n'est publié qu'en 1880 en supplément dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*. (*Journal des mathématiques pures et appliquées]* 1880, p. 3-64) Elle le confie à son ami Fourier, Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, pour qu'il le fasse parvenir aux membres de l'Académie, comme en témoigne une lettre [9] que ce dernier lui a fait parvenir le 8 mars 1824, le jour même de l'approbation du procès-verbal de la séance du 5 mars. Dans cette lettre, il lui confirme avoir bien reçu et présenté son « article 1824 » à la Classe lors de la séance du 5 mars 1824, et que Georges Cuvier, en charge de la correspondance l'a bien lu. Ainsi Germain, grâce à ses relations, arrive à faire parvenir à la Classe son « article 1824 » comme le veut le règlement de l'Académie. Tous les savants n'ont pas forcément parmi leurs connaissances, un académicien pouvant jouer le rôle de médiateur. De plus, les académiciens ne se sont pas opposés à la lecture de son « article 1824 ». Au contraire, Fourier précise que dès lors que le nom de Germain est évoqué, leur attention est « excitée ». Ses travaux et les résultats de sa réflexion suscitent leur intérêt. En effet, Fourier relate dans cette lettre qu'il a discuté à propos de ce texte avec d'autres académiciens. La discussion a même été poursuivie chez Laplace. Germain est reconnue comme une mathématicienne au même titre que ses homologues masculins.

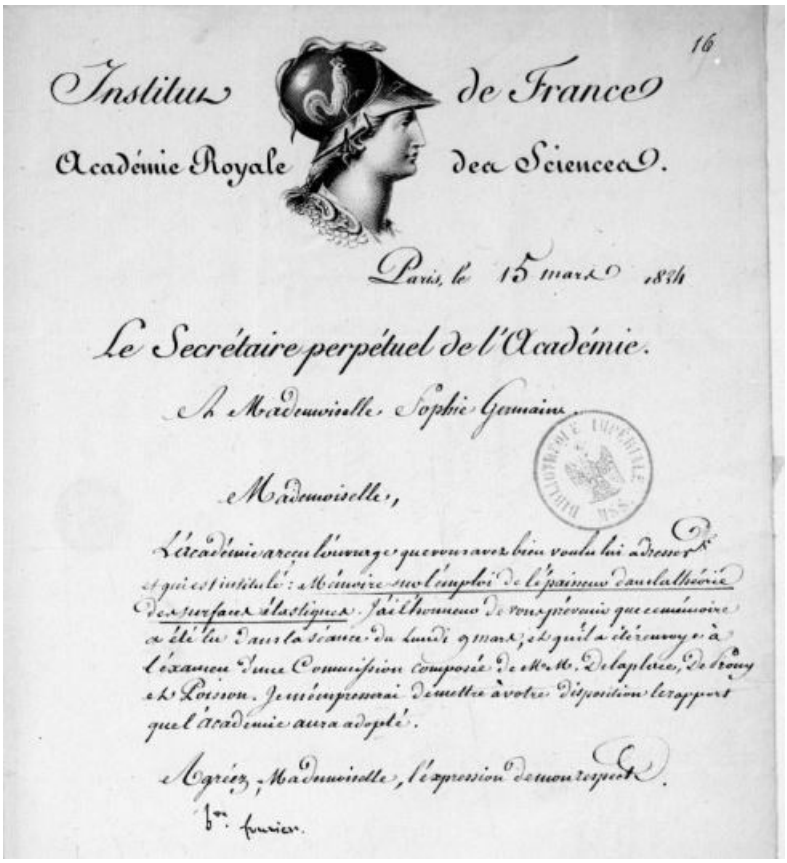
Alors que le procès-verbal n'est pas encore adopté, Fourier lui divulgue les noms des académiciens chargés de faire un rapport concernant son « article 1824 ». Il la rassure également sur le fait que Poisson, un des commissaires, ne pourra que reconnaître son travail. Nous verrons par la suite que Germain et Poisson ont des opinions divergentes concernant le modèle utilisé dans la théorie de l'élasticité.

Fourier termine sa lettre en lui précisant qu'elle va en recevoir une officielle dans laquelle figure les noms des commissaires chargés de la relecture de son « article 1824 » et du rapport.

La lecture de la correspondance par Cuvier dont parle Fourier, faite lors de la séance du lundi 8 mars 1824, est relatée dans le communiqué suivant :

> « Melle Sophie Germain, auteur de *Recherches analytiques et expérimentales sur les vibrations des surfaces sonores*, adresse un Mémoire manuscrit

9. Cette lettre est reproduite en annexe B.


Institut de France
Académie Royale des Sciences.

Paris, le 15 mars 1824

Le Secrétaire perpétuel de l'Académie.

A Mademoiselle Sophie Germain.

Mademoiselle,

L'Académie a reçu l'ouvrage que vous avez bien voulu lui adresser et qui est intitulé : Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques. J'ai l'honneur de vous prévenir que ce mémoire a été lu dans la séance du lundi 9 mars, et qu'il a été renvoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. Delaplace, Prony et Poisson. Je m'empresserai de mettre à votre disposition le rapport que l'Académie aura adopté.

Agréez, Mademoiselle, l'expression de mon respect.

Bon Fourier.

FIGURE 7.1 – Lettre de Fourier à Sophie (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 6-7)

> concernant les *Effets dus à l'épaisseur plus ou moins grande des plaques élastiques* [10].
>
> L'examen de cet ouvrage est renvoyé à une Commission composée de MM. de Laplace, Prony et Poisson. » (*Procès-verbaux des séances de l'Académie, 1824-1827* 1918, p. 35)

Une semaine après l'accord de la nomination des membres de la commission pour la lecture de l'« article 1824 » de Germain, un autre savant s'ajoute aux membres de cette commission ; il s'agit de Lacépède, comme le signale le compte-rendu de la séance du lundi 22 mars :

> « M. Poisson est invité à s'adjoindre à la Commission chargée de l'examen d'un Mémoire sur les *Vibrations des plaques sonores de différentes épais-*

10. On peut remarquer que le titre du mémoire de Sophie cité dans ce communiqué n'est pas correct, puisque le titre exact est « *Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques* ».

> *seurs*. M. de Lacepède est désigné pour faire partie de cette Commission. » (*Procès-verbaux des séances de l'Académie, 1824-1827* 1918, p. 43)

On peut noter une petite confusion dans cette communication puisqu'il y est annoncé que Poisson rejoint aussi cette commission, alors qu'il avait été déjà nommé lors de la séance du 8 mars.

Germain attend le rapport de la commission pour publier cet « article 1824 », mais il n'y a aucune trace d'un quelconque rapport écrit ou oral dans les procès-verbaux de l'Académie. Nous pouvons uniquement lire sur la couverture de ce mémoire le mot « Vu » écrit par Poisson.

Germain précise, dans les préliminaires, que les différents savants qui ont travaillé sur les vibrations des surfaces élastiques, ne proposent pas la même valeur concernant la puissance de l'épaisseur intervenant dans l'équation. Par exemple, pour Euler, ainsi que pour Chladni, la puissance est deux ; pour Poisson, la puissance est un et pour Navier, elle est de trois. Quand à Germain, elle observe que cette puissance est quatre. Elle avait déjà fait allusion dans son « ouvrage 1821 » à ce désaccord sur l'exposant de l'épaisseur. En écrivant cet « article 1824 », nous retrouvons cette volonté de sa part de justifier la légitimité de ses choix, comme nous avons déjà pu le remarquer concernant le modèle utilisé et l'hypothèse retenue dans l'étude de la théorie de l'élasticité. D'autre part, elle considère important d'étudier les effets de l'épaisseur des surfaces élastiques surtout quand cette épaisseur n'est plus constante. Elle indique que la théorie des effets dus à l'épaisseur des surfaces fait partie de la théorie de l'élasticité. Les différents facteurs intervenant dans l'équation pouvant être séparés facilement, l'étude de l'exposant de l'épaisseur ne nécessite pas de connaître réellement les valeurs des autres facteurs. Les savants ne s'attardent alors pas sur cette analyse et préfèrent se pencher sur le calcul des variations ou le calcul différentiel. Germain estime au contraire cette étude importante puisque l'épaisseur d'une surface a une influence sur les résultats expérimentaux. Nous avons pu remarquer à plusieurs reprises l'intérêt qu'elle porte aux expériences. Elle continue d'ailleurs à en faire puisqu'elle décrit les expériences qu'elle a faites, sans cacher les difficultés qu'elle rencontre, précise le matériel qu'elle utilise en justifiant ses choix et relate la façon dont elle se l'est procuré.

Mais elle utilise également des résultats expérimentaux obtenus par d'autres scientifiques. Elle cite, pour la première fois, les expériences réalisées par Charles Wheats-

tone[11]. Ce dernier n'utilise pas du sable déposé sur la lame élastique pour visualiser les vibrations ; il la couvre d'eau et observe les ondes formées lorsque la lame vibre.

Quelles que soient les expériences réalisées, elle arrive à une conclusion positive, à savoir les résultats théoriques et les résultats expérimentaux coïncident. Cette concordance la rassure et est pour elle une preuve de la validité de son travail.

Concernant l'étude de l'exposant de l'épaisseur de la surface intervenant dans l'équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques, Germain commence par le cas de la surface plane d'épaisseur constante. Comme ce cas peut s'identifier à celui de la lame simple, elle se limite à l'étude de la lame simple, étude moins complexe qu'avec la surface plane. Ainsi elle peut à nouveau s'appuyer sur les travaux réalisés auparavant dans le cas linéaire, entre autres sur les résultats obtenus par Euler. Ce dernier est, dès le début de ses recherches en 1809, une référence pour Germain. Elle s'intéresse également aux résultats de ses contemporains, comme par exemple Riccati, son « rival » Poisson, ou encore Navier qu'elle cite pour la première fois. Pour connaître les avancées des travaux des autres savants, elle peut se procurer par l'intermédiaire de quelques savants qu'elle côtoie, des revues mathématiques comme les *Annales de Chimie et de Physique*, les *Annales de Gergonne*. Mais elle peut aussi se référer à certains journaux comme le *Moniteur* qui joue un rôle important pour la diffusion d'informations scientifiques, d'informations académiques comme nous l'avons déjà évoqué dans la deuxième partie à propos des sujets des concours.

Pour démontrer que l'exposant de l'épaisseur est quatre, elle reprend les principes que Jacques Bernoulli a appliqué aux lames élastiques. Elle mentionne qu'elle a développé cette étude dans son « ouvrage 1821 ». Elle se contente alors dans cet « article 1824 » de retracer sa démarche.

Ayant davantage de connaissances, de recul sur la théorie de l'élasticité, Germain pousse l'étude de l'exposant de l'épaisseur à une surface d'épaisseur variable. Cette supposition rend la situation plus compliquée puisque l'épaisseur intervenant dans l'équation n'est plus une constante. L'analyse de ce cas plus complexe est inédite. Pour cela, elle se limite à deux cas d'étude, les cas les plus simples mais suffisants pour comprendre son choix concernant l'exposant. Elle analyse dans un premier temps une lame

11. Charles Wheatstone (1802-1875) est un physicien et inventeur anglais. Fabricant d'instrument de musique, il s'installe en 1823 à Londres comme luthier. Il réalise diverses expériences sur la vibration des colonnes d'air, la transmission des sons à travers les solides et l'analyse prismatique de la lumière électrique. En 1833, il étudie la formation des figures de Chladni. En 1834, il abandonne sa profession de luthier pour devenir professeur de philosophie naturelle au King's College. Il étudie la propagation du courant électrique. IL est l'inventeur de plusieurs appareils : le télégraphe, le Pont de Wheatstone, le chronoscope, un cryptogramme et une horloge polaire. En 1836, il est élu membre de la Société royale de Londres et en 1873, associé étranger de l'Académie des sciences de Paris (il fait plusieurs séjours à Paris). (Aylmer, 1876)

droite dont l'épaisseur est différente à ses deux extrémités. Puis, en raisonnant de la même manière, elle examine les vibrations d'une plaque carrée. Elle a déjà travaillé avec ces formes auparavant. Elle connaît donc les résultats dans le cas où l'épaisseur est constante. Elle peut donc s'appuyer sur une étude et des observations qu'elle a elle-même faites.

Bien que cet « article 1824 » soit apparemment destiné aux seuls académiciens, y figurent plusieurs références à d'autres savants renommés et à leurs résultats. Germain utilise la réputation, l'autorité de certains savants dans ses écrits pour crédibiliser la validité de son étude. Et pourtant, en écrivant cet « article 1824 », elle montre davantage de confiance en elle en affirmant son point de vue concernant l'exposant de l'épaisseur entrant dans un coefficient de l'équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques. Elle élargit son étude en examinant le cas des surfaces d'épaisseur variable. Son « article 1824 » ne laisse plus la place au doute. En le confiant à Fourier pour le faire lire à une séance de la Classe, elle se considère comme une scientifique au même titre que les académiciens, mais cherche aussi l'approbation de ceux-ci. Va-t-elle soumettre tous ses résultats à la Classe ?

7.2.2 Réflexions sur les vibrations des surfaces et des solides

Germain poursuit son étude sur la théorie de l'élasticité. Elle publie deux textes à deux ans d'intervalle. Le premier, édité en 1826 par l'intermédiaire de l'imprimerie Huzard-Courcier, est intitulé *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question générale de ces surfaces* ; nous le nommerons « ouvrage 1826 ». Elle le confie encore une fois à son ami Fourier pour qu'il le remette à l'Académie des sciences. Dans le procès-verbal de la séance du 17 juillet 1826, il est écrit :

> « L'Académie reçoit les ouvrages suivants : (...)
> *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation générale de ces surfaces*, par **Melle Sophie Germain**
> M. Cauchy est prié de faire un rapport verbal au sujet de cet ouvrage. »
> (*Procès-verbaux des séances de l'Académie, 1824-1827* 1918, p. 403)

Le procès-verbal étant validé, Fourier, en tant que secrétaire perpétuel de l'Académie, envoie le 24 juillet 1826 une lettre à Germain pour l'en informer :

> « Mademoiselle, l'académie a reçu l'ouvrage que vous avez bien voulu lui adresser et qui est intitulé : Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces.

> J'ai l'honneur de vous remercier au nom de l'académie de l'envoi de cet ouvrage. M. Cauchy a été désigné pour en faire un rapport verbal. Ce volume sera déposé dans la bibliothèque de l'Institut. » (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 18)

Augustin Louis Cauchy, nommé pour relire le mémoire de Germain et en faire un compte-rendu verbal, n'en fait apparemment pas. Les procès-verbaux des séances suivantes ne font aucune allusion à un tel rapport.

Le deuxième texte publié en 1828 dans le trente-huitième tome des *Annales de chimie et de physique*, s'intitule *Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides*. Nous le désignerons par la suite « article 1828 ».

Que ce soit dans l'« ouvrage 1826 » ou dans l'« article 1828 », Germain fait référence à certaines de ses productions antérieures. Ainsi, elle cite à plusieurs reprises certains points qu'elle a développés dans son « ouvrage 1821 ». Dans l'« ouvrage 1826 », elle fait référence à son « article 1824 » consacré à l'épaisseur d'une surface. Elle revient sur l'invariabilité de l'épaisseur, également ou inégalement répartie. Cette épaisseur est une notion intervenant entre autres dans le coefficient de l'équation des vibrations. Dans l'« article 1828 », elle s'appuie sur l'« ouvrage 1826 » pour rappeler la définition d'un solide. Ce dernier est formé d'un nombre infini de couches très minces « qui affecteraient toutes, durant le mouvement, des figures semblables entre elles et également semblables aux figures que les diverses couches réellement séparées prendraient si, toutes choses égales d'ailleurs, elles étaient ébranlées isolément. » (Germain, 1828, p. 123). Elle reprend également, de façon moins détaillée, le paragraphe sur l'équation de la surface cylindrique de l'« ouvrage 1821 ».

Germain revient aussi sur des idées élémentaires, des notions de base mais essentielles. Par exemple, dans l'« ouvrage 1826 », elle redonne la définition d'une surface élastique ou celle d'un solide rappelée ci-dessus. Dans l'« article 1828 », elle indique à nouveau les bases de la théorie de l'élasticité : « Dans la question des forces d'élasticité, le fait général, spécial et caractéristique est la tendance que les corps doués e telles forces ont à se rétablir dans la forme qu'une cause extérieure peut leur avoir fait perdre » (Germain, 1828, p. 125). Dans ces deux productions, Germain reprend donc certains points qu'elle considère importants. Elle ne détaille plus autant et se contente souvent d'exemples.

Une notion qui revient non seulement dans dans ces deux publications mais aussi dans tous ses écrits est le mouvement effectué par une surface courbe élastique ou un solide élastique lorsqu'ils vibrent. Dans son « ouvrage 1826 », elle rappelle que le mouvement des points d'une surface courbe se fait dans des directions perpendiculaires aux plans tangents à chacun des points de la surface, et donc le long de la normale. Dans l'« article 1828 », elle évoque la direction du mouvement d'un solide élastique et étudie plus précisément le mouvement des molécules. Cette notion de mouvement n'est pas, comme elle le pensait au début, une simplification faite pour étudier la théorie. Elle précise que la direction du mouvement imprimé à la surface ou au solide est « une condition essentielle ». Cette direction est donc plus qu'une hypothèse aux yeux de Germain.

Concernant les notions abordées dans son « article 1828 », il y a également le modèle moléculaire utilisé par Poisson pour étudier la théorie de l'élasticité. Elle ne cite toutefois pas le nom de l'auteur dont elle évoque les travaux. Maîtrisant de plus en plus la théorie de l'élasticité, ayant une idée de plus en plus précise de ce qui se passe, elle essaie d'adapter ce modèle à son raisonnement, à sa façon de concevoir la théorie. Elle a acquis suffisamment de connaissances, arrive à prendre assez de recul pour essayer d'adapter un autre modèle que le sien afin d'expliquer les observations faites lors des expériences. Elle se montre de plus en plus confiante.

Dans ces deux productions, Germain fait donc référence aux travaux antérieurs. Elle précise qu'elle s'est limitée jusqu'à présent au sujet du concours proposé par l'Académie [12]. Dans l'« ouvrage 1826 », elle mentionne que toutes les nouvelles manières d'examiner la théorie de l'élasticité ne font que corroborer ces résultats. Dans celui de 1828, elle signale le succès de sa méthode et de son hypothèse. Elle affiche une confiance absolue dans sa méthode.

Germain, dans ces deux écrits, revient sur un certain nombre de notions essentielles pour elle dans la théorie de l'élasticité. Elle aborde à nouveau ces notions, mais avec plus de maturité. Nous avons vu que l'« ouvrage 1826 » est dans un premier temps destiné aux académiciens et n'est imprimé que plus tard par Germain elle-même, alors que l'« article 1828 » est directement publié dans un journal scientifique. Et pourtant, elle rédige ces deux publications de la même manière. Elle y cite certains de ses travaux, certains de ses écrits antérieurs. Que ce soit dans l'une ou dans l'autre production, elle ne détaille plus les notions abordées. Elle fait ce choix non en considérant le type de lecteurs, mais par rapport au fait qu'elle a déjà étudié ces thèmes primordiaux pour

12. Pour rappel, le sujet du concours était : *Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, et la comparer à l'expérience.*

elle. Nous pouvons remarquer qu'elle a gagné en d'assurance et acquis suffisamment de connaissances sur cette théorie pour pouvoir s'affirmer. Son comportement, sa façon de s'exprimer s'apparentent à ceux d'un savant professionnel.

7.2.3 La notion de courbure

Germain écrit un dernier article sur les vibrations des surfaces élastiques, *Mémoire sur la courbure des surfaces*. Nous le nommerons « article 1831 ». Il est publié dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* en 1831. Il s'agit du deuxième article seulement qu'elle publie directement dans un journal mathématique.

Un brouillon de cet « article 1831 » figure dans les *Les papiers de Sophie Germain. - Recueil de dissertations et problèmes de mathématiques et physiques* (Germain, 2013, p. 40-44). Comme dans tous les autres brouillons, il y a des ratures, des rajouts dans la marge. Certaines phrases, certains paragraphes sont reformulés dans l'« article 1831 ». Dans le brouillon apparaît une alternance entre des parties qui sont modifiées dans l'« article 1831 » et des parties qui s'y retrouvent intégralement. D'une part, certaines parties ont été rajoutées dans l'« article 1831 ». D'autre part, le brouillon contient des passages davantage détaillés que dans l'article final. Étant publié dans un journal spécialisé, elle a pu penser qu'il n'était pas nécessaire de donner autant de précisions sur certaines notions admises dans la théorie de l'élasticité. L'ordre des paragraphes et l'organisation des notions abordées y sont différents. Avant d'écrire ce brouillon, Germain a écrit bien d'autres pages sur le sujet principal de son « article 1831 », la courbure. Plusieurs pages concernant cette notion de courbure figurent dans *Les papiers de Sophie Germain. - Recueil de dissertations et problèmes de mathématiques et physiques*[13]. Les notions abordées sont exposées de façon plus ou moins floues. Les idées ne sont pas encore bien claires, bien ordonnées dans l'esprit de Germain. Les pages contiennent beaucoup de ratures, des paragraphes barrés, inachevés. La suite d'un raisonnement commencé sur une page ne figure pas forcément sur la page suivante. Les pages bien que numérotées ne se suivent pas de façon logique. Les pages concernant cette notion de courbure sont dispersées dans tout le recueil. Est-ce Germain qui les avait numérotées ? Ou ont-elles été numérotées par la suite, dans l'ordre dans lequel elles étaient placées sans tenir compte du contenu ?

Dans cet « article 1831 », Germain ne cite qu'une seule de ses productions, son mémoire primé de 1815. Mais, pour valider les notions abordées dans l'« article 1831 », elle s'appuie encore sur la notoriété d'autres savants comme Euler, Gauss et Fourier

13. Ces pages sont dispersées dans le recueil. Un article figure dans les pages 45 à 55, puis il y a plusieurs pages isolées : 93, 95, 102, 116, 652.

non seulement en mentionnant leur nom, mais aussi leurs travaux et ouvrages qu'elle a pris pour référence. Concernant les travaux d'Euler qu'elle prend pour référence dès le début de ses recherches en 1809, elle cite dans cet article le mémoire qu'il a écrit en 1760 intitulé *Recherches sur la courbure des surfaces.* (EULER, 1767) Par rapport aux recherches et résultats de Gauss, elle ne cite aucun nom d'ouvrage. Elle précise que le mémoire qui l'intéresse mais qu'elle n'a pu que rapidement lire a été publié depuis peu. Il doit s'agir des *Disquisitiones generales circa superficies curvas* que Gauss a rédigé en 1828 [14]. Germain admet que les recherches de celui-ci sont différentes des siennes au premier abord. Mais il lui semble que dans certains cas des résultats semblables aux siens pourraient être obtenus à partir des formules de Gauss. [15] Ce qui permettrait de confirmer sa nouvelle étude. Cette remarque dévoile d'une part le fait qu'elle pense encore que ses nouvelles recherches ne seront acceptées que sous l'autorité d'un savant de renom. D'autre part, elle nous révèle aussi une assurance qu'elle a acquise tout au long de ses années de recherche. Cette confiance dans son travail et ses connaissances l'amène à définir de nouvelles notions, à approfondir la recherche sur la courbure d'une surface. Pour cela, elle raisonne, comme dans le « mémoire 1811 » par analogie avec le cas unidimensionnel. Elle reste fidèle à ses convictions, à sa façon de travailler.

Il y a une certaine contradiction. D'une part, elle ressent la nécessité de corroborer son étude en faisant référence aux travaux de savants renommés. Elle pense que ses travaux n'ont pas le même impact sur le monde scientifique que ceux des savants cités. Elle ressent aussi toujours le besoin de justifier sa façon de raisonner basée sur un modèle géométrique différent du modèle moléculaire. D'autre part, elle a acquis suffisamment de confiance en elle et d'expérience pour mener une étude inédite sur cette notion de courbure qu'elle considère pas encore suffisamment approfondie.

Germain étudie dans cet « article 1831 » certaines applications concernant les vibrations des surfaces élastiques. Pour la première fois, elle se penche sur les mêmes sujets que les mathématiciens qui s'intéressent à l'ingénierie. Quelques pages d'étude sur la notion de voûte apparaissent dans *Les papiers de Sophie Germain. - Recueil de dissertations et problèmes de mathématiques et physiques.* Il s'agit de quelques notes griffonnées, de quelques recherches pour essayer de comprendre comment la notion de courbure peut servir pour comparer différents types de voûtes évoqués dans son « article 1831 ». Elle fait une autre analogie dans cet article. Mais cette fois, ce n'est pas une

14. Ce mémoire de Gauss écrit en latin n'a été traduit en français et publié chez Bachelier qu'en 1852. Germain l'a donc lu en latin. Mais nous avons déjà vu qu'elle a appris le latin et a déjà lu des travaux d'Euler en latin quand elle a débuté son étude en 1809.

15. En survolant le texte de Gauss, le sentiment de Germain quand à une certaine analogie de leurs résultats peut être légitime. La façon de ces deux mathématiciens d'aborder ces notions communes présentent des similitudes.

nouvelle analogie avec le cas unidimensionnel, il s'agit d'une analogie avec la théorie de la chaleur. À cette occasion, elle fait tout naturellement référence aux travaux de Fourier. Ce dernier l'avait aidée pour la rédaction de son « ouvrage 1821 ». Dans *Les papiers de Sophie Germain. - Recueil de dissertations et problèmes de mathématiques et physiques* figurent des pages indiquant son intérêt pour la théorie de la chaleur. A-t-elle été influencée par Fourier ? Quoi qu'il en soit, les brouillons contiennent des pages non numérotées, très désordonnées. Ces pages comportent des calculs incomplets, des prémisses de son étude, des reprises de pages de brouillon. Germain tâtonne encore sur la théorie de la chaleur. Elle lit les travaux de Fourier, note des idées, fait des essais. Ce n'est que le début de son étude, de son intérêt pour cette théorie. Elle arrive tout de même à énoncer une relation entre la théorie de l'élasticité et celle de la chaleur. Mais elle n'ira pas plus loin, elle ne publiera rien sur la théorie de la chaleur.

Ces pages de brouillons ne sont pas datées. Mais d'après les notions qui y sont abordées, elles ont été écrites aux alentours de l'année 1831. Son état de santé ne lui a malheureusement pas permis de poursuivre ses recherches mathématiques, d'approfondir ces notions concernant la théorie de la chaleur.

L'« article 1831 » est la dernière production de Germain sur la théorie de l'élasticité. Elle a écrit huit textes sur cette notion. Contrairement aux cinq ouvrages et articles, les trois mémoires du concours n'ont jamais été publiés.

7.3 L'équation du mouvement d'une surface élastique à travers les différents mémoires

Ce chapitre est un récapitulatif concernant la modélisation des vibrations des surfaces élastiques proposée par Germain. Nous allons suivre l'évolution des équations qu'elle a formulées tout au long de son étude et leur justification.

7.3.1 L'équation du mouvement d'une plaque élastique vibrante

Dans le « mémoire 1811 », pour obtenir l'équation du mouvement d'une plaque élastique vibrante, Germain prend comme point de départ l'équation de l'équilibre de la lame vibrante obtenue par Euler et l'adapte à la surface élastique vibrante :

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2 \int dxdy \int Rds = V \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

où x, y, z sont les coordonnées orthogonales d'un point quelconque de la surface, P, Q, R sont les composantes sur les 3 axes orthogonaux des forces extérieures appliquées, V est une constante relative à l'élasticité liée à la nature du matériau et $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$ est la somme des courbures principales de la surface.

Elle considère ensuite les forces élémentaires appliquées dans chacun des points de la surface. En considérant les principes de la mécanique, en faisant les simplifications d'usages et par analogie avec le cas unidimensionnel, elle obtient l'équation de la surface élastique libre de toutes forces :

$$\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -E^2bc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2}$$

où E est l'épaisseur de la surface, b est une quantité dépendante de la matière de la plaque et c est un coefficient qu'il reste à déterminer.

Cette équation peut se simplifier et s'écrire :

$$\frac{ddz}{dt^2} = -Ebcg\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right).$$

Germain parvient donc à une équation du sixième degré. Son raisonnement est essentiellement basé sur les expériences réalisées par Chladni et une analogie avec l'étude d'Euler dans le cas unidimensionnel.

Dans son deuxième mémoire, celui de 1813, pour déterminer l'équation du mouvement des surfaces élastiques vibrantes, Germain calcule la somme des moments des forces d'élasticité. Elle n'a pas utilisé cette notion dans son travail précédent. En revanche, elle utilise la même hypothèse mais ne justifie toujours pas pourquoi elle ne considère que les courbures principales.

Finalement elle obtient l'équation du mouvement d'une surface élastique vibrante, équation de degré 4 :

$$b\Gamma\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) + \frac{ddz}{dt^2} = 0$$

où Γ est l'épaisseur de la surface, b est un facteur dépendant de la rigidité naturelle de la surface.

Elle obtient cette fois la bonne équation. En introduisant la notion de moment des forces élastiques, elle appréhende davantage le sujet d'un point de vue physique.

Dans le troisième essai terminé en 1815, Germain aborde les forces élastiques d'une manière encore différente. Ces forces élastiques, des forces intérieures, rétablissent un

corps dans son état initial après l'action d'une force extérieure. Mais pour la première fois dans son raisonnement, Germain explique pourquoi elle ne tient pas compte de toutes les courbures dans ses expressions, mais seulement des courbures principales.

Elle exprime l'équation modélisant les vibrations d'une surface élastique vibrante par la formule :

$$b^2\varepsilon\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}+\square\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)\right)+\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

où $\square$ est la somme des carrés des raisons inverses des deux rayons principaux de courbure, cette somme représentant une quantité invariable et ε est l'épaisseur de la surface.

Elle considère le sujet de plus en plus sous un point de vue physique pour déterminer l'équation des surfaces élastiques vibrantes. Ici, non seulement elle utilise la notion de moment de la force d'élasticité, mais elle tient aussi compte des figures de la surface avant et après l'action d'une force extérieure.

Dans l'« ouvrage 1821 », Germain précise que les forces élastiques dépendent de la résistance qu'une surface lorsqu'elle doit changer de forme. Cette résistance diffère avec l'épaisseur et la nature de la surface considérée. Pour la première fois, Germain parle de la notion de résistance de la surface. Elle traduit cette résistance par un coefficient constant dans lequel elle fait intervenir une puissance de l'épaisseur. Jusqu'à présent, elle n'avait jamais fait allusion à une puissance de l'épaisseur. Elle démontre que cette puissance est quatre.

Elle regarde aussi de plus près l'aspect de la surface quand celle-ci est courbée. Elle remarque qu'une partie de la surface est dilatée alors que l'autre est comprimée. Elle cherche à déterminer la force nécessaire à contracter la partie dilatée de la surface. Une autre force intervient donc encore dans son raisonnement.

Germain n'avait pas encore introduit ces forces accélératrices. Elle ne redonne pas l'équation du mouvement des surfaces élastiques. Elle considère qu'elle n'a plus besoin de le faire puisqu'elle est connue depuis un certain temps. Elle préfère consacrer son étude sur l'équation traduisant le mouvement d'une surface cylindrique et d'un anneau circulaire.

L'« ouvrage 1826 » récapitule les réflexions de Germain sur la détermination de l'équation des surfaces élastiques vibrantes. Elle y relate comment elle a perçu le sujet tout au long de ses années d'étude.

Quand Germain s'est penchée pour la première fois sur le sujet des vibrations des surfaces élastiques, ses recherches ont été orientées par les expériences et des liens avec les études déjà existantes. Certaines suppositions, comme le mouvement des points qui

s'effectue dans des directions perpendiculaires aux plans tangents à chacun des mêmes points considérés sur la surface au repos, sont devenues une condition essentielle et non plus seulement une simplification particulière. Certaines analogies faites entre les plaques vibrantes et les surfaces courbes, voire les surfaces cylindriques, apparaissent, après réflexion, comme une conséquence de la nature de la question. Ainsi, certaines intuitions qui l'ont tout d'abord guidée deviennent des certitudes. Le sujet, à l'origine restreint, se précise et s'étoffe.

Dans cet ouvrage, elle considère qu'une surface élastique est un solide d'épaisseur très petite par rapport à ses autres dimensions, capable de se déformer et de revenir à son état initial. Elle suppose alors que chaque couche formant l'épaisseur du solide est indépendante. Ainsi, durant la vibration d'une surface, chaque couche réagit comme si elle était séparée des autres.

Pour déterminer l'équation des vibrations des surfaces élastiques, il faut alors connaître et exprimer le changement subi par le solide sur lequel une force extérieure est appliquée. Ce changement se traduit par une variation de la courbure, une partie de la surface étant dilatée.

Germain écrit l'équation de la surface courbe élastique vibrante sous la forme :

$$N^2\left[\frac{d^4\rho}{ds^4}+2\frac{d^4\rho}{ds^2ds'^2}+\frac{d^4\rho}{ds'^4}-\frac{4}{S^2}\left(\frac{d^2\rho}{ds^2}+\frac{d^2\rho}{ds'^2}\right)\right]+\frac{d^2\rho}{dt^2}=0$$

où N^2 est un coefficient constant ayant pour facteur la quatrième puissance de l'épaisseur, s et s' sont les lignes respectivement de plus grande courbure et de moindre courbure, ρ est l'ordonnée d'un point de la surface par rapport au plan tangent et S est le rayon de la sphère de moyenne courbure qui appartient à un des points de la figure naturelle de la surface.

Cette équation traduit le mouvement d'une surface élastique, quelle que soit la courbure de la surface. Elle est donc générale et s'applique à toutes les surfaces.

7.3.2 Quelques remarques concernant les démarches de justification de l'équation du mouvement des surfaces élastiques

Dans les brouillons contenus dans les *Papiers de Sophie Germain.-Recueil de dissertations et problèmes mathématiques et physiques*, Germain, dans sa démarche pour obtenir l'équation du mouvement des surfaces élastiques, fait allusion à l'irrégularité de la surface. Elle rajoute alors des forces qui détruisent cette irrégularité et qui doivent ramener la régularité dans la surface. Elle les appellent des forces répulsives. Mais elle

ne les introduira dans aucun de ses mémoires ni dans aucun de ses textes publiés. (Germain, 2013, p. 15 & 752)

Dans son dernier ouvrage intitulé *Considérations générales sur l'état des sciences et des lettres* que l'on peut considérer comme philosophique, Germain rappelle qu'en sciences, les expériences et les études précédentes servent de base pour aborder des sujets nouveaux. Elles permettent de trouver des idées pour trouver des méthodes permettant de résoudre des problèmes inédits. Ces méthodes peuvent être révélées par analogie, en faisant un lien entre les différentes notions abordées. Il faut ensuite bien délimiter le sujet d'étude pour pouvoir introduire de nouvelles conditions. Un autre aspect intervenant dans la résolution de problèmes est la qualité de l'analyse. Cette dernière doit être la plus simple possible. La clarté de l'explication, de la justification a également son importance.

Elle résume comment elle conçoit une démarche scientifique. Les différentes étapes d'un raisonnement scientifique précisées dans ce recueil sont celles qu'elle a suivies pour obtenir l'équation des surfaces élastiques vibrantes.

7.4 Pourquoi Germain justifie-t-elle sans cesse sa théorie ?

Germain se montre très pointilleuse que ce soit dans ses mémoires pour le concours ou les articles publiés. Elle s'efforce d'expliquer et de justifier de la façon la plus complète, la plus détaillée possible, aussi bien ses résultats théoriques qu'expérimentaux. Certaines justifications apparaissent même dans plusieurs écrits. Pour quelles raisons trouve-t-elle nécessaire d'insister sur certaines explications ?

À l'époque à laquelle Germain commence à travailler sur les vibrations des surfaces élastiques, il n'y a que très peu de travaux sur cette étude. Elle s'appuie essentiellement sur les résultats obtenus par Euler concernant les vibrations des cordes élastiques. Elle utilise alors un modèle mathématico-géométrique du XVIIIe siècle qu'elle conserve tout au long de ses recherches. Or, au début du XIXe siècle, un autre modèle s'oppose à ce modèle mathématico-géométrique, le modèle moléculaire. Cette nouvelle approche pour étudier des problèmes physiques se développe particulièrement à partir de la fin du XVIIIe siècle avec Laplace. (Gilain et Guilbaud, 2015, p. 91) Ce dernier introduit cette mentalité moléculaire au sein de la Société d'Arcueil dont Poisson est membre. (Bucciarelli et Dworsky, 2012, p. 69) Nous verrons que celui-ci appliquera le modèle moléculaire à la théorie de l'élasticité. Ce modèle s'appuie davantage sur des hypo-

thèses physiques que sur des hypothèses géométriques. Germain peut vouloir chercher à légitimer sa méthode, son raisonnement face à ce modèle moléculaire de plus en plus en vogue. Elle montre que son étude est plus complète et répond davantage au problème posé en pouvant s'adapter à tous les cas.

Germain exploite la physique mathématique du XVIIIe siècle basée principalement sur l'analyse mathématique des problèmes physiques souvent restreints à la mécanique. Le rôle des expériences est accessoire. Elles servent à valider ou invalider une théorie mathématique pas toujours très rigoureuse. Au XIXe siècle, la physique mathématique évolue. Ce changement de la physique mathématique tout au long de la fin du XVIIIe siècle et du début du XIXe siècle est dû entre autres à la professionnalisation de l'enseignement et à la création de l'École polytechnique. (Gilain et Guilbaud, 2015, p. 24) La physique mathématique s'intéresse à de nouveaux domaines de la physique comme la théorie de la chaleur ou l'optique. Les démonstrations mathématiques vont gagner en précision, en justesse ; les outils mathématiques se développent. Les mathématiques pures gagnent en autonomie d'après Felix Klein. « Selon lui, les mathématiques du XVIIIe siècle, très largement dominées par l'application du calcul différentiel et intégral en mécanique et en astronomie, sont caractérisées par « the powerful creations in which pure and applied mathematics united to answer the demands of the times », laissant à l'inverse peu de place au développement de travaux de mathématiques pures autonomes. Il affirme alors que : « The 19th century shows a totally different chararcter. » » (Gilain et Guilbaud, 2015, p. 16) Le rapport à l'expérience est moins ténu. Les expériences ne sont plus seulement un moyen pour vérifier une preuve et un raisonnement mathématique. (Gilain et Guilbaud, 2015, p. 15-31)

En restant fidèle à la physique mathématique du XVIIIe siècle, Germain peut vouloir montrer que la façon d'aborder un problème physique est tout autant, voire plus efficace que la nouvelle manière de raisonner. Elle précise, comme nous l'avons vu dans son « article 1828 », que le raisonnement issu de la physique mathématique du XVIIIe siècle s'adapte à toutes les situations, quelles que soient les conditions, rencontrées dans la théorie de l'élasticité. Ce qui n'est pas forcément le cas avec les nouveaux développements engendrés par la physique mathématique du XIXe siècle.

Cette volonté de la part de Germain de justifier constamment ses résultats peut être liée à son insertion dans la société scientifique. Elle n'a pas la notoriété d'Euler, de Lagrange ou de Legendre, ... D'autre part, ses publications sont trop rares pour que la communauté scientifique entende suffisamment parler d'elle. Ses mémoires et articles sont examinés par des savants qui maîtrisent les notions utilisées par Germain. Aucune erreur ne leur échappe. Or elle a à cœur que ses travaux soient reconnus par

cette société assez fermée. D'autant plus que, comme nous l'avons vu dans le chapitre deux, elle limite elle-même ses relations au sein de cette communauté. Elle restreint son cercle de connaissances aux académiciens. Elle désire faire partie de ce groupe de savants considérés comme des élites. Elle ne laisse donc rien au hasard, ni dans ses écrits, ni dans ses fréquentations.

Instaurer un lien ou une discussion avec certains académiciens n'est pas toujours aisé pour Germain. Nous avons déjà vu auparavant, toujours dans le chapitre deux, qu'elle n'arrive pas à communiquer avec Poisson. Ce dernier, ne raisonnant pas de la même façon qu'elle pour l'obtention de l'équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques, met un terme à la tentative de communication de Germain. Celle-ci, sans doute frustrée, peut vouloir prouver que son raisonnement est digne d'attention. D'autre part, au fur et à mesure qu'elle avance dans ses travaux, elle acquière de l'expérience, développe ses connaissances du sujet et des outils mathématiques. Cela lui permet non seulement de rectifier les erreurs qui pouvaient lui être reprochées mais aussi de préciser davantage son analyse. Elle doit penser que présenter ses résultats de la façon la plus complète, la plus précise possible va lui permettre de faire valider son raisonnement, ses justifications par un maximum d'académiciens, d'avoir leur soutien.

Les relations qu'elle entretient avec les autres savants peuvent donc jouer un rôle dans sa manière de travailler et influencer ses recherches et ses écrits. La rigueur des justifications que Germain apporte dans ses productions écrites est-elle appréciée par les autres savants ? La précision, le soin qu'elle apporte à ses explications sont-ils reconnus ? Quelle est la réaction de ses contemporains par rapport au contenu de ses mémoires et articles ?

Chapitre 8

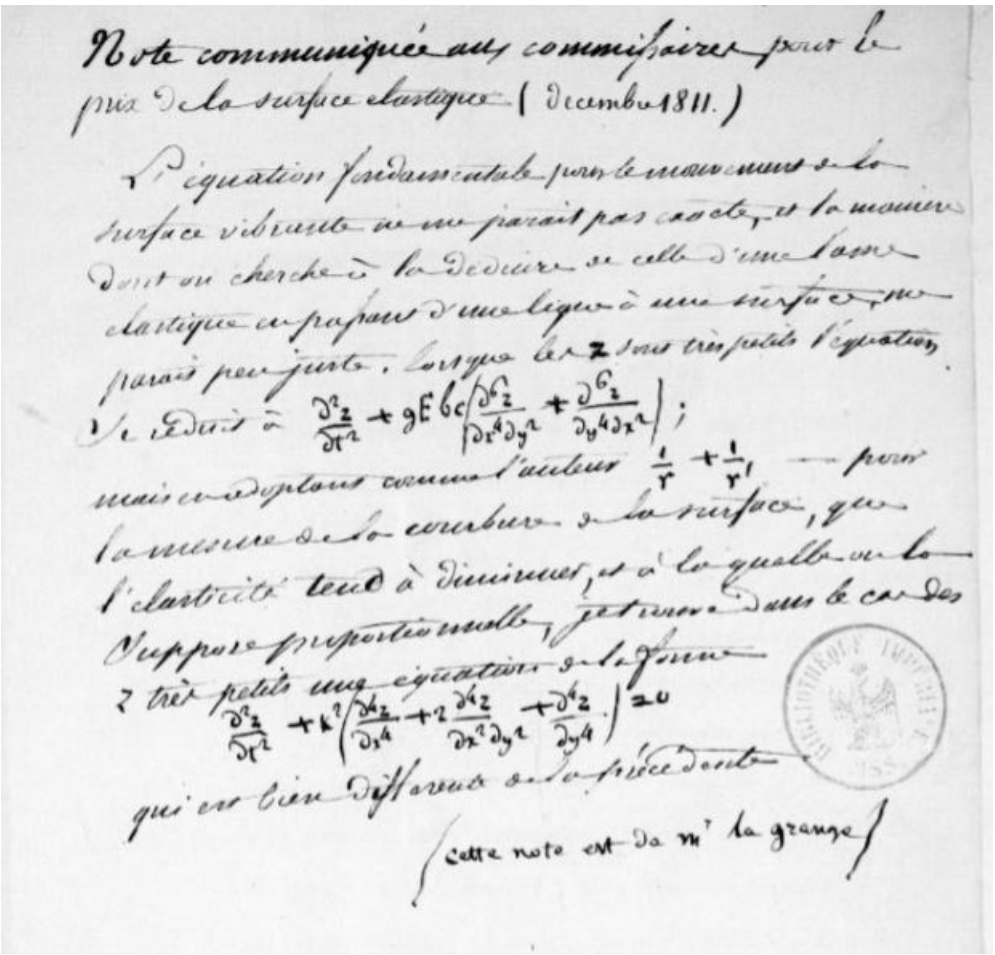
La réception des premiers travaux de Germain

Germain envoie son premier texte publié en 1821 à différents savants qu'elle côtoie ou pas. Mais elle ne l'expédie qu'à des mathématiciens contemporains français, et plus précisément à des mathématiciens qui sont à Paris. Elle ne le transmet pas à Gauss avec lequel elle a pourtant entretenu une importante correspondance. Est-ce parce que ce dernier ne s'intéressait pas encore vraiment au sujet ? Apparemment elle n'a envoyé sa première publication qu'à des scientifiques qui, soit l'ont aidée dans ses recherches, soit ont déjà travaillé ou travaillent sur les vibrations des surfaces élastiques. Elle ne transmet pas son ouvrage à d'autres scientifiques et à la bibliothèque de l'Académie des sciences sans raison. En effet, quel est l'intérêt de faire des recherches et d'obtenir des résultats s'ils ne sont pas communiqués à un plus grand nombre de personnes, si l'auteur ne peut échanger ses points de vue avec d'autres individus et améliorer ses écrits, si ses résultats ne peuvent pas inspirer d'autres scientifiques et être à l'origine de nouvelles découvertes ?
Ainsi Germain se pose encore beaucoup de questions ; elle cherche des réponses, des confirmations ou des infirmations. Mais comment ses mémoires, ses résultats sont-ils perçus par d'autres mathématiciens plus éclairés ?

8.1 Les savants contemporains

8.1.1 L'intervention de Lagrange

Quand le sujet est proposé au concours en 1809, aucun savant ne se lance dans l'aventure. Seule Germain rend en 1811 un mémoire contenant les quelques résultats


Note communiquée aux commissaires pour le prix de la surface élastique (decembre 1811.)

L'équation fondamentale pour le mouvement de la surface vibrante ne me paraît pas exacte, et la manière dont on cherche à la déduire de celle d'une lame élastique en passant d'une ligne à une surface me paraît peu juste, lorsque les z sont très petits l'équation se réduit à $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + gEbc\left(\frac{\partial^6 z}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{\partial^6 z}{\partial y^4 \partial x^2}\right)$;

mais en adoptant comme l'auteur $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ — pour la mesure de la courbure de la surface, que l'élasticité tend à diminuer, et à laquelle on la suppose proportionnelle, je trouve dans le cas des z très petits une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + k^2\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) = 0$$

qui est bien différente de la précédente

(cette note est de m^r la grange)

FIGURE 8.1 – Note de Lagrange destinée aux membres du jury (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 34)

obtenus durant le peu de temps qu'il lui restait pour se consacrer au sujet même du concours. Lagrange, faisant partie du jury chargé d'étudier les mémoires déposés à l'Académie des sciences, lit donc le « mémoire 1811 » de Germain. Il ne se contente pas de lire et de remarquer qu'il y a des erreurs, il l'étudie de près. Dans une note destinée aux membres du jury, Lagrange donne son opinion et les résultats de sa réflexion :

> « *L'équation fondamentale pour le mouvement de la surface vibrante ne me paraît pas exacte, et la manière dont on cherche à la déduire de celle d'une lame élastique, en passant d'une ligne à une surface me paraît peu juste.*

Lorsque des z sont très-petits, l'équation se réduit à

$$\frac{d^2z}{dt^2} + gEbc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right);$$

mais en adoptant, comme l'auteur, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ *pour la mesure de la courbure de la surface, que l'élasticité tend à diminuer, et à laquelle on la suppose proportionnelle, je trouve dans le cas de z très-petit une équation de la forme*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + K^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0$$

qui est bien différente de la précédente. » (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 34)

Ainsi Lagrange rejette la supposition de Germain, à savoir qu'une surface d'épaisseur négligeable peut être considérée comme une somme des lignes qui la composent et que le mouvement imprimé à cette surface peut être considéré comme la superposition des mouvements que les lignes prendraient si elles étaient vraiment séparées. Mais il conserve son hypothèse concernant la proportionnalité entre l'élasticité liée à la nature du matériau et la somme des courbures principales. Le point de vue de Lagrange n'est donc pas tout à fait opposé à celui de Germain. En reprenant son hypothèse, il parvient à obtenir une autre forme d'équation qui est, à cette époque, reconnue comme celle modélisant les vibrations des surfaces élastiques. Il n'interviendra apparemment plus par la suite sur ce sujet, aucun autre écrit n'ayant été retrouvé.

Lagrange n'est pas le seul savant qui a lu les travaux de Germain sur les vibrations des surfaces élastiques. Parmi les membres du jury chargés de relire et analyser le « mémoire 1813 » de Germain figure un jeune scientifique, Siméon Denis Poisson.

8.1.2 La divergence entre Germain et Poisson

Siméon Denis Poisson (1781-1840) entre en 1798 à l'École polytechnique. Brillant calculateur, Poisson est repéré par ses professeurs Lagrange et Laplace. D'abord répétiteur puis professeur à l'École polytechnique, il est nommé professeur de mécanique à la Faculté des sciences de Paris en 1816 et entre au Conseil royal de l'Instruction publique en 1820. Il est soutenu par Laplace, côtoie à la Société d'Arcueil, les autres « disciples » de Laplace et joue au sein de cette Société le rôle de conseiller mathématique. En 1812, Poisson, bien intégré dans la société scientifique et occupant plusieurs postes d'ensei-

gnement, est élu à l'Académie des sciences dans la section de physique. Il a écrit plus de trois cents mémoires. (Lapparent, 1895)

Quand le jury présente le sujet du Prix en 1809, Laplace assume l'organisation du concours. Louis L. Bucciarelli et Nancy Dworsky relate qu'il pensait que Poisson, qu'il soutenait, réaliserait des prodiges mathématiques qui lui permettraient d'assoir sa célébrité et glorifieraient l'École d'Arcueil (Bucciarelli et Dworsky, 2012, p. 35). En effet, Poisson avait déjà écrit un article sur les équations aux différences finies en 1800, article publié dans le *Recueil des savants étrangers*. Ses travaux portent entre autres sur les intégrales définies. Mais tout comme d'autres mathématiciens contemporains de l'époque, Poisson ne participe pas au concours et avant 1814 aucun travail le concernant sur ce sujet n'a été retrouvé.

En 1813, alors que le sujet sur les vibrations des surfaces élastiques est à nouveau remis au concours, Poisson est élu membre du jury ayant pour mission d'étudier et de rédiger un rapport. Une annonce et non un rapport est faite lors de la séance du lundi 27 décembre 1813 : « La Commission chargée d'adjuger le prix extraordinaire sur les oscillations des lames élastiques est d'avis que l'auteur de la pièce N°1 a mérité une mention honorable pour la comparaison de sa formule avec les observations, quoique son analyse ait parue défectueuse.

La question sera proposée de nouveau. » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 292)
Cette décision est davantage détaillée lors de la séance publique du 3 janvier 1814 :

> « ... l'analyse que l'auteur de cette pièce a employée pour parvenir à son équation fondamentale a été jugée entièrement inexacte, et cette équation même a paru ne résulter en aucune manière de cette analyse ; mais la partie de ce mémoire qui renferme la comparaison de la théorie avec les expériences de M. Chladny étant fait avec soin et conduisant en général à des résultats satisfaisants, la classe a pensé que cette pièce méritait une mention honorable. » (Dahan Dalmédico, 1988, p. 426)

Le seul mémoire envoyé à l'Académie est à nouveau celui de Germain, le « mémoire 1813 ». Poisson prend donc connaissance des travaux et résultats de Germain concernant le mouvement des surfaces élastiques.

Il présente à la Classe, le 1er août 1814, sa façon d'aborder le sujet. Durant la séance de l'Académie des Sciences, il commence à lire son mémoire sur les surfaces élastiques. Mais comme Poisson fait à nouveau partie du jury pour le concours de 1815 concernant

toujours la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, Adrien-Marie Legendre, présent à la séance et ami de Germain, intervient :

> « M. Poisson demande à lire un Mémoire sur la *Théorie mathématique des surfaces élastiques*.
>
> M. Legendre fait la proposition que la Classe ne puisse entendre de mémoire sur une question proposée au concours avant que le prix de ce concours ait été décerné.
>
> M. Poisson déclare que le mémoire qu'il va lire n'est pas de nature à empêcher le prix mis au concours d'être décerné. En conséquence, il continue sa lecture. Néanmoins la proposition de M. Legendre, paraissant digne d'examen sous le rapport général, est renvoyée à une Commission qui sera nommée au scrutin dans la Séance prochaine. » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 385)

Ainsi, Poisson poursuit sa lecture devant les membres de la Classe présents ce jour là. Mais pour éviter qu'une situation semblable se présente à nouveau, la Classe décide de nommer à la séance du lundi 8 août 1814, un comité devant réfléchir à la remarque faite par Legendre : « On va au scrutin pour nommer la Commission chargée d'examiner la question élevée dans la dernière Séance par M. Legendre.

MM. de La Place, Legendre, Cuvier, Carnot et Delambre obtiennent la majorité. » (*Procès-verbaux* 1812-1815, p. 386)

On ne connaît pas la décision prise par ce comité, aucune allusion sur le résultat de la réflexion n'apparaissant dans les procès-verbaux des séances suivantes.

Poisson semble donc être le seul à faire part aux membres de l'Académie des sciences de ses résultats obtenus lors de ses recherches sur les vibrations des surfaces élastiques. Ainsi, dans le mémoire qu'il lit devant la Classe, Poisson fait référence, dès le début, aux résultats de Germain sans toutefois la nommer. Il reconnaît que l'équation fondamentale obtenue par cette dernière est vérifiée par les expériences réalisées. Il signale simplement le fait qu'elle n'a pas, d'une part indiqué comment elle a obtenu l'équation, et qu'elle a, d'autre part, utilisé des intégrales particulières de l'équation générale, cette dernière étant compliquée à intégrer.

Au début de son mémoire, Poisson annonce que son objectif est d'obtenir l'équation d'équilibre d'une surface élastique soumise à des forces en ne faisant aucune hypothèse. Il considère que celle formulée par Germain, à savoir « la force élastique en un point d'une surface, qui compense l'effet des forces extérieures appliquées, est proportionnelle à la somme des courbures principales », est illégitime. En effet, il n'adhère pas au raisonnement utilisé par Germain, c'est-à-dire un raisonnement physico-géométrique.

(Poisson, 1816, p. 170) On verra plus loin que Poisson utilisera tout de même une hypothèse, mais elle n'est pas de même nature que celle de Germain.

Dans le premier paragraphe, Poisson s'intéresse aux surfaces flexibles et non élastiques. Il obtient l'équation suivante :

$$Z - pX - qY + \frac{T}{k^2}\left[\left(1+q^2\right)\frac{d^2z}{dx^2} + \left(1+p^2\right)\frac{d^2z}{dy^2} - 2pq\frac{d^2z}{dxdy}\right] = 0 \tag{8.1}$$

Il précise que Lagrange donne dans la nouvelle édition de sa *Mécanique analytique* la même équation, mais d'une façon différente. Et en effet, Lagrange avait déjà donné cette équation. Mais comme Germain n'avait pas encore en ce temps là montré qu'elle traduisait effectivement les expériences de Chladni, cette équation n'avait sans doute pas retenu toute l'attention nécessaire. Poisson poursuit l'étude de cette équation et l'applique dans un premier temps à une surface flexible qui recouvre un corps solide de forme quelconque. Dans ce cas là, il signale qu'il faut que « tous les points du contour libre soient tirés par des forces égales, tangentes à la surface, et perpendiculaires à ce contour. » (Poisson, 1816, p. 184) L'équation s'écrit alors :

$$N + \frac{T}{k^3}\left[\left(1+q^2\right)\frac{d^2z}{dx^2} - 2pq\frac{d^2z}{dxdy} + \left(1+p^2\right)\frac{d^2z}{dy^2}\right] = 0$$

où $p = \frac{dz}{dx}, q = \frac{dz}{dy}, k = \sqrt{1+p^2+q^2}, T$ est une tension constante qu'éprouve un élément quelconque de la surface , N est la pression exercée par la surface en un point du corps solide qu'elle recouvre, sa direction est normale à la surface.
Poisson précise que le coefficient de T, sans tenir compte du signe, est la somme $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ où ρ et ρ' sont les deux rayons de courbure principaux de la surface au point considéré. Il en déduit que cette somme $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}$ est égale au rapport de la force N à la force T. Cette dernière phrase se traduit par l'égalité $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{N}{T}$, soit $N = T\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$.
Il utilise aussi la somme des courbures principales. Il n'explique pas pourquoi cette somme représente le coefficient de T. Contrairement à Germain, il ne peut pas supposer cette somme proportionnelle à la force élastique puisqu'il considère le cas où les surfaces sont non élastiques. Il applique encore l'équation 8.1 à d'autres cas particuliers de surfaces.

Il se penche, dans un deuxième paragraphe, sur le cas des surfaces élastiques d'épaisseur constante et naturellement planes. Son objectif est d'obtenir leur équation d'équilibre à partir des équations du premier paragraphe. Mais l'équation à laquelle il parviendra ne peut s'appliquer aux surfaces élastiques comme les cloches dont la forme naturelle

est courbe ; pour obtenir leur équation, il devrait modifier sa théorie. En utilisant les principes de la mécanique, il déduit de l'équation d'équilibre celle du mouvement d'une surface élastique.

Pour cette étude, Poisson rejette le modèle utilisé par Germain, c'est-à-dire il ne considère pas qu'un solide élastique de petite épaisseur est formé d'une somme de lignes indivisibles simples ou de deux systèmes de lignes perpendiculaires qui vibrent comme s'ils étaient collés l'un à l'autre sans se gêner mutuellement. Il refuse la décomposition géométrique d'une surface, cette tradition géométrique de la mécanique eulérienne.
Il préfère appliquer le modèle moléculaire. À cette époque, beaucoup de scientifiques adhèrent à l'hypothèse corpusculaire. Ils considèrent que la matière est un assemblage de particules discrètes. De plus, « la loi moléculaire régissant les phénomènes terrestres, se trouvant ainsi constituée, est appliquée pour la première fois à ceux de l'élasticité dans les recherches relatives aux plaques élastiques par Poisson. » (Messaoudi, 2012, p. 50) Cette vision est innovante dans ce domaine.
La théorie de l'élasticité doit prendre en compte le déplacement des particules et des forces attractives ou répulsives entre celles-ci. Lorsqu'on plie une surface, les distances entre les molécules varient ; ce changement de distance crée des forces d'élasticité, et celles-ci permettent à la surface de revenir à sa position d'origine. Poisson précise cette notion et fixe les conditions dès le début du paragraphe. Il suppose que les forces répulsives entre les molécules des corps n'existent que lorsque les molécules sont infiniment proches les unes des autres. Contrairement à ce qu'il annonce au début de son mémoire, il émet donc une hypothèse que l'on peut qualifier d'hypothèse « physique ». De plus, si les molécules ou points de la surface se trouvent à égale distance, la force répulsive entre deux points de la surface est proportionnelle au produit des épaisseurs de la partie de la surface contenant les deux points. Ainsi, dans le cas particulier considéré par les mathématiciens, c'est-à-dire le cas où l'épaisseur de la surface est constante, la force répulsive entre deux molécules est proportionnelle au carré de l'épaisseur. Ce dernier point est un autre point de désaccord entre Poisson et Germain. En effet, celle-ci considère que la valeur de l'épaisseur intervenant dans l'équation est élevée à la puissance quatre.
Pour son étude, Poisson utilise aussi le système de coordonnées composé de trois axes. Conformément à la théorie moléculaire, il considère donc un point de la surface de coordonnées x, y et z. Ce point est repoussé par une infinité de forces provenant de tous les points compris dans sa sphère d'activité. Pour déterminer ces forces répulsives, il les décompose suivant les trois axes puis additionne ces décompositions grâce au calcul intégral. Il intègre alors la somme formée par les valeurs de ces forces répulsives et les

valeurs d'autres forces dans les équations qu'il a obtenues dans le premier paragraphe afin d'obtenir l'équation d'équilibre de la surface élastique. (Poisson, 1816, p. 190-192) Après un certain nombre de calculs et de suppositions, il obtient finalement l'équation suivante, équation permettant de déterminer les vibrations de la surface :

$$\epsilon\frac{d^2z}{dt^2} - V\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) + \frac{\epsilon^2 b^2\pi}{32}\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0$$

où t est le temps, ϵ est l'épaisseur de la surface, V est la force agissant sur un point du contour, tangentiellement à la surface, et dans une direction perpendiculaire au contour, π est une constante arbitraire, b^2 est un coefficient dépendant de l'élasticité naturelle de la surface ; il varie avec la matière dont la surface est formée, et devra donc être donné pour chaque surface en particulier.
Si $b^2 = 0$, il retrouve l'équation qu'il a obtenue précédemment pour une surface non-élastique, mais tendue par une force V.
Si $V = 0$, il obtient l'équation suivante, qui est la plus simple dans le cas de l'élasticité :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0$$

où n^2 est un coefficient constant, positif, proportionnel à l'épaisseur ϵ et à la quantité b^2.
Dans cette dernière équation, on ne retrouve plus celle de la surface non-élastique, celle-ci ne pouvant pas vibrer car tendue par une force appliquée à ses extrémités.
Poisson retrouve ici l'équation de Germain. Mais il considère que son raisonnement pour obtenir l'équation est plus fiable. Il affirme que, contrairement à Germain, il a réussi à la justifier.
Ces deux scientifiques n'abordent pas le problème de la même manière. Germain, qui n'adhère pas au modèle moléculaire, critique le travail de Poisson. Elle remarque que ce dernier aurait dû considérer une surface plane infinie.
Une autre différence entre le travail de Germain et celui de Poisson est l'étude des conditions aux extrémités. Apparemment le raisonnement moléculaire ne permet pas cette analyse, il ne tient pas compte de la répartition des molécules lors de l'étirement, de la courbure de la plaque. Poisson repousse d'ailleurs cette difficulté à plus tard.
Bien que Germain doit apprécier et respecter le travail réalisé par Poisson, elle a suffisamment confiance en elle pour rendre compte des limites du raisonnement de celui-ci et pour le signaler à deux reprises dans son « ouvrage 1821 ». Elle rajoute qu'elle regrette qu'il n'ait pas pris le temps d'essayer de résoudre ce problème concernant les conditions

aux extrémités. Cette difficulté rencontrée par Poisson conforte davantage la confiance de Germain en son étude puisqu'elle remarque que l'hypothèse qu'elle considère répond à toutes les situations.

Le « mémoire 1813 » de Germain qu'a eu en main Poisson a obtenu la mention honorable grâce à la comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux. Germain a accordé une place importante aux expériences dans ses recherches. Elle en a elle-même fait un certain nombre, malgré les difficultés qu'elle a pu rencontrer.
Contrairement à Germain, Poisson ne consacre pas un paragraphe sur les expériences et la comparaison avec la théorie dans son *Mémoire sur les surfaces élastiques* qu'il a lu à l'Académie en 1814. Il se contente de signaler dans son introduction l'accord entre les résultats théoriques de Germain et les résultats expérimentaux de Chladni. Il a, certes, décrit certaines situations dans son développement, mais il n'évoque aucune expérience et ne fait aucune comparaison entre la théorie et les expériences. Est-ce parce que Sophie a abordé le sujet avec succès ? Il n'a alors pas trouvé nécessaire de faire l'étude. Est-ce parce que cette analyse ne l'intéresse pas ? Est-ce parce qu'il ne veut pas perdre de temps à faire des expériences plus ou moins complexes ?
En examinant d'autres productions de Poisson sur les vibrations des corps élastiques ou des fluides, on peut remarquer qu'il s'intéresse à la comparaison entre la théorie et les expériences. Pour cela, il utilise les résultats des expériences faites par d'autres savants, comme Joseph Louis Gay-Lussac, Charles Cagniard-Latour, Chladni ou Savart. Il ne fait jamais allusion à des expériences qu'il aurait lui-même réalisées. Il apparaît qu'il préfère consacrer son temps à la modélisation des problèmes, à la partie mathématique, aux calculs. D'ailleurs, depuis la fin du XVIIIe siècle, la physique mathématique est davantage basée sur le calcul grâce au développement du calcul différentiel et des séries de Fourier. Concentrée sur la mécanique au XVIIIe siècle, la physique mathématique se développe au XIXe siècle en intervenant dans des domaines comme la théorie de l'élasticité, la théorie de la chaleur, l'optique ou encore l'électricité et le magnétisme. Elle est toujours présente en mécanique, mais une mécanique repensée par les ingénieurs. (Grattan-Guinness, 1990, p. 1290) La théorie de la chaleur prend d'ailleurs une place importante en physique mathématique comme le signale Grattan-Guinness : « how much heat theory dominated the scene among the new areas of mathematique physics. » (Grattan-Guinness, 1990, p. 1220) Ce changement au XIXe siècle est également lié au développement de la théorie moléculaire. À ce propos, Grattan-Guinness écrit : « We turn now the mechanics and mathematical physics of "continuous" media, which means usually molecular theorising of one kind or another, either concerning the punctiform either or the molecules of matter. » (Grattan-Guinness, 1990, p. 1237)

La façon de travailler de Poisson est celle des mathématiciens du XIXe siècle qui s'intéressent aux problèmes de la nouvelle ère de la physique mathématique. Alors que Germain continue à appliquer davantage des méthodes mathématico-géométriques du XVIIIe siècle.

À la suite de la lecture de son mémoire à la Classe, Poisson en publie un extrait dans le journal *Correspondance de l'École Polytechnique*. Il pensait que son texte pourrait être utile aux mathématiciens concourant pour le Prix. Il désire partager et faire connaître sa façon d'aborder les vibrations des surfaces élastiques pour que d'autres mathématiciens puissent s'appuyer sur ses résultats.
Germain est probablement mise au courant par Legendre que Poisson a obtenu la même équation qu'elle. En revanche, elle n'a pas eu en main une copie du mémoire de Poisson puisque dans le « mémoire 1815 », elle écrit : « J'ai vivement regretté de ne pas connaître le mémoire de Poisson. J'ai passé à en attendre la publication un temps qui m'eût été précieux » (Germain, 1815, p. 24).
Ce passage nous dévoile qu'elle aurait aimé lire le mémoire de Poisson. Elle s'intéresse donc à ce qu'il a fait même s'ils n'utilisent pas la même méthode d'approche. Mais seuls les académiciens présents à la séance du 1er août 1814 ont pu entendre la lecture de la totalité du mémoire. Elle n'est donc pas la seule à ne pouvoir en lire qu'un extrait. Et même si elle avait pu lire le mémoire de Poisson, aurait-elle changé sa manière d'aborder le sujet ?
Germain communique avec Poisson au début de l'année 1816, quand elle apprend que la Commission a émis quelques objections vis-à-vis de son mémoire. Elle envoie dans la première quinzaine de janvier 1816 une lettre à Poisson, membre de la commission chargé d'étudier le mémoire remis au concours [1]. Dans sa lettre, Germain lui demande de l'éclairer sur les erreurs qu'elle aurait commises dans sa démonstration. Mais elle est persuadée ne pas s'être trompée dans la façon d'obtenir l'équation générale à partir de son hypothèse. Elle pense donc que le problème vient de son hypothèse elle-même qu'elle n'aurait pas suffisamment justifiée. Elle joint à sa lettre une note [2] afin de l'expliquer de façon plus détaillée. Dans sa réponse du 15 janvier 1816, Poisson lui signale que le problème ne vient pas de l'hypothèse elle-même, mais des calculs qu'elle a faits. Son étude ne correspond qu'à un seul cas, celui où la surface ne s'éloigne que très peu d'un plan. Il précise également que, dans ce cas, ils obtiennent tous les deux le même résultat. Il lui propose même de lui envoyer son mémoire dès qu'il sera imprimé pour qu'elle puisse étudier les calculs qu'il a faits. (Stupuy et Germain, 1896, p. 307-310)

1. La correspondance entre Germain et Poisson se trouve en annexe B.
2. Cette note est reproduite en annexe B.

Ces deux savants n'ont pas la même vision concernant la notion d'hypothèse que chacun utilise dans leur étude sur les vibrations des surfaces élastiques comme nous l'avons déjà évoqué auparavant. Germain reste fidèle à une tradition géométrique de la mécanique du XVIIIe siècle. Poisson, quand à lui, adhère au modèle corpusculaire en voie de développement dans la première moitié du XIXe siècle. D'autre part, Germain apparaît plus « obnubilé » par cette notion d'hypothèse que Poisson. Ce dernier ne fait aucune remarque à ce sujet. Il attire son attention uniquement sur les calculs dans lesquels des erreurs ont été relevées. Il semble donc qu'elle n'interprète pas correctement les commentaires faits par la classe.

Germain et Poisson approchent donc la théorie de l'élasticité de deux manières différentes. Un débat aurait pu naître entre eux s'ils s'étaient rencontrés dans des salons, lors de dîners. Qu'en est-il des autres mathématiciens ? Comment ont-ils perçu les travaux de Germain ?

8.1.3 La réaction des autres savants ayant reçu le mémoire de Germain

Les critiques de Biot

Biot s'était déjà penché sur l'étude des vibrations des surfaces élastiques. Il a écrit et lu à la Classe le 21 mai 1800 un mémoire *Recherches sur l'intégration des équations différentielles, et sur les vibrations des surfaces* (BIOT, 1802). Il signale donc qu'il a lui-même déjà trouvé une équation. Legendre en informe Germain :

> « M. Biot, qui a eu communication de votre Mémoire, prétend avoir trouvé la vraie équation de la surface élastique vibrante. Il m'en a communiqué une qu'il dit avoir montrée il y a longtemps à M. de Laplace, et qui n'est pas la même que celle qu'a trouvé M. de Lagrange d'après votre hypothèse » (STUPUY et GERMAIN, 1896, p. 302-303).

Biot donne l'équation du mouvement des surfaces vibrantes dans le mémoire intitulé *Recherches sur l'intégration des équations différentielles partielles, et sur les vibrations des surfaces* qu'il a lu le 21 mai 1800 devant la Classe (BIOT, 1802). Cette équation est :

$$\int \left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z \right) Dm - g \int Dm.\delta z + \int E\delta Ds = 0$$

où Dm est la masse de l'élément Ds, E est l'élasticité.

Comme les mathématiciens précédents qui ont étudié la théorie des cordes vibrantes, Biot fait quelques suppositions : la surface vibrante s'écarte très peu du plan des x, y, la gravité est nulle. Il parvient à l'équation suivante :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = K^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

où $K^2 = \frac{E}{\varepsilon}$, ε est supposée constante. Cette équation est la même que donne Germain, dans son « mémoire 1811 », équation qui s'avère être inexacte. Biot n'utilise pas l'hypothèse de Germain, mais certaines suppositions sont identiques comme le fait que le mouvement de la surface se fait dans le sens des z tout en s'éloignant très peu du plan des x, y. Quel que soit l'auteur des recherches, on retrouve chez chacun d'eux des conditions communes.

D'autre part, en mars 1817, Biot publie un article dans le *Journal des Savants* concernant les expériences de Chladni et le concours proposé par l'Académie des sciences :

> « la première classe de l'Institut en fit-elle, deux fois de suite, le sujet d'un prix. Le premier concours n'offrit qu'un seul Mémoire où les véritables équations du mouvement de la surface n'étoient pas posées ; mais la partie expérimentale offroit des recherches ingénieuses. Le concours fut remis. (...) J'avois, depuis long-temps, trouvé aussi cette même équation, et je l'avois donnée dans mes cours publics. (...) Quoi qu'il en soit, au second concours, la pièce qui avoit été déjà présentée, reparut avec de nouveaux développemens d'expériences, et aussi avec cette même équation qui, toutefois, n'y étoit pas encore démontrée rigoureusement. Cependant on dut donner le prix aux applications adroites que l'auteur en avoit faites, et aux expériences ingénieuses dont il les avoit appuyées. L'ouverture du billet cacheté, fit connoître le nom d'une femme, Mlle Germain (...). Malgré ce succès mérité, on voit que la base fondamentale de la théorie restoit encore à établir. (*Journal des sçavans* 1817, p. 146)

Dans cette partie de l'article, Biot ne fait allusion qu'aux concours de 1813 et 1815. Il omet le « mémoire 1811 » pour lequel aucune récompense n'avait été accordée. Il reconnaît l'importance des résultats obtenus lors des expériences réalisées par Germain, ainsi que les applications qu'elle a étudiées dans son « mémoire 1815 ». Mais il conteste la modélisation et le cheminement mathématique emprunté par Germain dans lequel il considère qu'il y a des erreurs. Il admet tout de même qu'une partie du travail réalisé

par Germain mérite d'être reconnue. Son avis concernant les travaux de Germain est assez mitigé.

Germain envoie aussi son « ouvrage 1821 » à certains membres de l'Académie des sciences. Parmi ces membres figure Legendre.

Le soutien de Legendre

Legendre a essayé d'apporter au mieux son aide à Germain depuis 1809. Tout au long des six années du concours, Legendre répond ou tente de répondre à ses questions, la guide parfois dans son travail et la renseigne sur certains résultats d'autres savants comme le confirme la correspondance entre Germain et Legendre [3]. Il l'encourage à poursuivre ses travaux, ainsi qu'à publier le « mémoire 1813 » après l'avoir un peu retravaillé, comme on peut le lire dans l'extrait d'une lettre de Legendre adressée à Germain le 4 décembre 1813 : « Dans tous les cas, vous aurez la ressource de faire imprimer vos recherches en rétablissant la vraie analyse ou en la supprimant, et votre travail vous fera encore honneur. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 305).

Germain ne publie pas ce mémoire. Elle se montre très minutieuse dans l'emploi des mots pour rédiger ses articles, ses mémoires ; elle ne veut donc sûrement pas éditer un travail pour lequel elle a reçu des remarques négatives et qu'elle considère inachevé. Alors quand elle lui envoie son « article 1821 », Legendre ne peut qu'exprimer sa satisfaction comme le souligne l'extrait suivant d'une lettre qu'il lui adresse le 23 juillet 1821 :

> « Mademoiselle, j'ai reçu mardi dernier le Mémoire que vous avez bien voulu m'envoyer, avec beau papier, belle couverture et une petite lettre fort obligeante, mais trop modeste. Je vous fais mon compliment bien sincère d'avoir enfin triomphé de votre répugnance à rendre publiques des recherches qui vous ont coûté tant de travaux. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 313-314)

Legendre a toujours soutenu Germain. Il n'hésite pas à parler d'elle et de son ouvrage à d'autres savants, en particulier à Joseph Fourier.

L'aide de Fourier

3. La correspondance entre Germain et Legendre confirme les différentes attitudes de Legendre. Nous avons reproduit cet échange épistolaire en annexe B pages 246-253. Seules les lettres de Legendre ont été retrouvées.

À la demande de Legendre, Fourier prend connaissance du « mémoire 1815 » écrit par Germain pour le concours de 1815, et accepte de l'aider dans son analyse, comme le révèle l'extrait suivant de la lettre de Fourier à Germain du 1er juin 1820 :

> « Monsieur Legendre a bien voulu m'engager de votre part à prendre connaissance d'un Mémoire sur les propriétés des surfaces élastiques. J'ai lu fort attentivement cet écrit, et j'y ai trouvé de nouvelles preuves de l'importance et du succès de vos recherches sur cette question difficile. Je me propose d'avoir l'honneur de me rendre chez vous après-midi samedi à huit heures et demie du soir, et de vous rendre compte de mes réflexions sur l'objet de ce Mémoire. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 312)

Ainsi, bien que Fourier ne travaille pas exactement sur la théorie des surfaces élastiques, du moins pas à cette date là, il prend du temps pour rencontrer et travailler avec Germain. Il reconnaît d'ailleurs dans les travaux de celle-ci « la trace de son épistémologie des modes propres de la chaleur, interrogée par leur problématique mise en évidence physique » (J. G. Dhombres et Robert, 1998, p. 26). Fourier suit le travail de Germain avec intérêt et l'encourage à faire connaître plus largement ses recherches, ses résultats, comme l'indique la lettre suivante de Fourier à Germain du 19 septembre 1820 :

> « Mademoiselle,
>
> Je regrette extrêmement de partir pour la campagne sans avoir eu l'honneur de vous voir. J'y demeurerai quinze jours environ, et à mon retour je me présenterai chez vous si vous voulez bien me le permettre. Je suis persuadé que vous aurez donné de nouveaux développements à la théorie dont vous vous occupez, et que je vous incite à publier. Personne ne peut traiter avec plus de succès cette difficile et intéressante question. » (Bucciarelli et Dworsky, 2012, p. 91)

Fourier soutient Germain, notamment dans son désaccord avec Poisson :

> « Autant que j'ai pu prendre connaissance de la discussion dont vous vous êtes occupée, il m'a paru que vous mettez dans tout son jour l'insuffisance de l'hypothèse théorique dont il [Poisson] a voulu déduire l'équation du quatrième ordre que vous avez trouvée. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 321)

Cette correspondance n'est pas datée. Mais d'après le contenu, elle a sûrement été écrite le 8 mars 1824.

N'ayant apparemment pas beaucoup de considérations pour la gente féminine, Fourier fait une exception pour Germain et reconnaît la valeur des travaux de celle-ci :

> « Quand même, il y en eut une, et apparemment une seule avec laquelle il échangea une correspondance assez régulière et qu'il rencontra à plusieurs reprises. Elle est mathématicienne, et ils échangent des problèmes scientifiques. C'est avec Sophie Germain qu'il s'est lié d'amitié. » (J. G. Dhombres et Robert, 1998, p. 410)

Fourier doit s'identifier à Germain. Ils doivent avoir le même type de tempérament (J. G. Dhombres et Robert, 1998, p. 412). Fourier est une personne assez solitaire tout comme Germain. Il la considère comme une scientifique à part entière. Il continuera à entretenir une correspondance avec elle et à lui rendre visite.

Les autres académiciens retenus par Germain pour l'envoi de son mémoire

Germain envoie également son « article 1821 » à Navier. Ce dernier lui envoie le 2 août 1821 une lettre de remerciement élogieuse :

> « Mademoiselle, j'ai reçu avec reconnaissance l'ouvrage que vous avez bien voulu m'adresser. La lecture que j'en ai faite m'a inspiré beaucoup d'intérêt, et j'apprécie autant qu'il le mérite un écrit aussi remarquable, que bien peu d'hommes peuvent lire, et qu'une seule femme pouvait faire.
>
> J'ai l'honneur d'être avec respect, Mademoiselle, votre très humble et très obéissant serviteur. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 317)

Navier apprécie à sa juste valeur le travail et les résultats de Germain. Par la suite, il étudie lui aussi les mouvements des surfaces élastiques et n'hésite pas à citer Germain dans un de ses mémoires :

> « Les curieuses expériences de Mr Chladni sur les vibrations des plaques, ont donné l'idée d'appliquer le calcul aux lois des mouvements qui se manifestaient dans ces expériences : ce fut le sujet d'un prix proposé par la première classe de l'Institut, et remporté par mademoiselle Germain. Les recherches couronnées étaient fondées sur une hypothèse ingénieuse, qui consiste à admettre que la flexion fait naître, en chaque point d'un plan élastique, une force proportionnelle à la somme des valeurs inverses des deux rayons de courbure principaux. Mademoiselle Germain donna les équations différentielles de l'équilibre et des mouvements d'un plan élastique, et des intégrales de ces équations, analogues à celles qu'Euler avait données pour la lame élastique. » (Navier, 1823, p. 92-93)

Navier ne dément pas l'hypothèse de Germain, à savoir, « la force élastique en un point d'une surface qui compense l'effet des forces extérieures appliquées est proportionnelle à la somme des courbures principales ». Cette hypothèse, rejetée par Poisson puisqu'il utilise un modèle corpusculaire et non géométrique, Germain n'a cessé d'essayer de la justifier dans ses différents mémoires et articles. Pour Navier, cette hypothèse est non seulement correcte, mais aussi astucieuse. Il sous-entend aussi qu'elle n'a pas réussi à démontrer l'équation, alors que son rival Poisson y est parvenu. Navier relève le fait que Germain n'a travaillé que par analogie avec le cas unidimensionnel étudié par Léonhard Euler (Navier, 1823, p. 93). Il apprécie l'effort réalisé par Germain mais il n'hésite pas à pointer les points faibles, les lacunes de son raisonnement, de ses résultats. D'ailleurs Navier préfère appliquer l'hypothèse moléculaire. Il s'est rangé à côté des mathématiciens dits « modernes », c'est-à-dire des mathématiciens qui utilisent la théorie corpusculaire. Amy Dahan Dalmedico rapporte que « Navier peut être considéré comme un des véritables initiateurs de la théorie moderne de l'élasticité. » (Dahan Dalmédico, 1992b, p. 223)

Une autre lettre de remerciement a été retrouvée. Elle est écrite par Cauchy et date du 24 juillet 1821 :

> « Mademoiselle, j'ai reçu l'ouvrage que vous avez eu la bonté de m'adresser, ouvrage que le nom de son auteur et l'importance du sujet recommandent également à l'attention des géomètres. Je n'ai pour le moment à vous offrir en revanche qu'un volume [*Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique, 1ère partie.* Analyse algébrique,1821, in-8] dans lequel j'ai cherché à éclairer les principales difficultés de l'analyse algébrique. Veuillez bien l'agréer, je vous prie, avec l'hommage de ma considération distinguée et de mes très humbles respects. » (Stupuy et Germain, 1896, p. 316-317)

Dans cette lettre, Cauchy précise que le sujet étudié par Germain est important et mérite qu'il retienne l'attention des autres savants. Il lui propose son ouvrage contenant les leçons qu'il donne à l'École Polytechnique pour qu'elle puisse améliorer et rectifier l'analyse mathématique qu'elle a faite. Il fait donc allusion aux erreurs de calculs qu'elle a commises, à son manque de formation et d'habileté pour la manipulation des différents calculs. Mais il considère qu'elle a suffisamment de connaissances et les capacités nécessaires pour lui conseiller de lire son ouvrage.
Par la suite, Cauchy s'intéressera aussi à la théorie des vibrations des surfaces élastiques.

Il remarquera que l'équation qu'il obtient, à savoir :

$$r^2\frac{\epsilon^2}{3}\left(\frac{d^4\zeta}{dx^4}+2\frac{d^4\zeta}{dx^2dy^2}+\frac{d^4\zeta}{dy^4}\right)+\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0$$

« a la même forme que celle qui a été trouvée sans démonstration dans les papiers de M. Lagrange, et qui a servi de base aux recherches publiées par Melle Sophie Germain dans un Mémoire sur les plaques élastiques couronné par l'Institut en 1815. » (Cauchy, 1887, p. 402).

Par ces quelques mots, Cauchy sous-entend que Germain a pu profiter de l'équation obtenue par Lagrange. Sans la connaissance de cette équation, elle ne serait pas parvenue à l'obtenir elle-même. Or cette façon de travailler est commune à chaque scientifique. Pour parvenir à un résultat inédit, un savant s'appuye sur les connaissances déjà acquises. Il ne fera pas d'autres allusions aux travaux réalisés par Germain sur la théorie des surfaces élastiques. Ce ne sont d'ailleurs pas les travaux de Germain qui ont poussé Cauchy à étudier les vibrations des surfaces élastiques : « Cauchy était examinateur du mémoire de Navier sur l'élasticité des solides et ce mémoire fut incontestablement à l'origine de son propre travail, comme Cauchy le reconnaît lui-même. » (Dahan Dalmédico, 1992b, p. 235). Les recherches de Germain n'ont pas impressionné Cauchy. Germain n'est pas une référence pour celui-ci. Quand il marque, dans sa lettre de remerciement, une attention particulière concernant le nom de l'auteur ayant publié le mémoire, ce n'est apparemment que par politesse. D'ailleurs Louis L. Bucciarelli et Nancy Dworsky font la même constatation :

> « Cauchy had given her on oral explanation of a complicated matter, probably in passing at some social gathering, since they were not really friends and there is no indication that he made a real effort to explain his work to her. Much more likely she had him trapped behind a tea table ; he was forced to talk a bit of mathematics in order to extricate himself. » (Bucciarelli et Dworsky, 2012, p. 7)

D'autre part, après avoir utilisé une méthode physico-géométrique, Cauchy se rallie peu à peu à la théorie moléculaire et l'utilise dans la suite de ses recherches.

En communiquant ses travaux, Germain espérait probablement avoir la possibilité de pouvoir bénéficier des remarques des autres savants sur ses résultats. Elle n'a d'ailleurs pas choisi n'importe quels mathématiciens pour leur envoyer son ouvrage. Elle ne fait part de son travail qu'à des savants renommés, elle considère que son « ouvrage 1821 » est digne d'attirer l'attention des plus grands mathématiciens. Cependant, à part quelques-uns comme Legendre, Fourier, les savants qui se sont également intéressés aux

vibrations des surfaces élastiques ne répondent pas favorablement à la tentative de Germain de communiquer avec eux directement ou par correspondance. Ils ne prennent pas le temps de discuter, de débattre avec elle ou d'échanger avec elle leur point de vue et leurs résultats. D'ailleurs, la plupart des savants, même s'ils lisent son travail et y font parfois allusion, ne se sont pas appuyés sur ses travaux pour leurs propres recherches. Ils ont pu tout de même être influencés par les méthodes et les résultats de Germain, soit en utilisant le même type de raisonnement physico-géométrique, soit au contraire en refusant d'appliquer ce type d'argumentation et en s'y opposant. Mais son argumentation datant plus du XVIIIe siècle que du XIXe siècle n'a pas forcément séduit les mathématiciens. Ne l'ont-ils pas alors considérée davantage comme une « amatrice », une mathématicienne dont la formation autodidacte est trop sommaire ?
Les envois de son « ouvrage 1821 » sur les vibrations des surfaces élastiques n'ont donc pas eu l'effet certainement escompté par Germain. Ils ne lui ont pas permis de nouer de nouvelles relations pour travailler sur cette notion et avoir la possibilité de discuter des points positifs et négatifs des différentes méthodes employées. Sophie a-t-elle visé trop haut en n'envoyant son mémoire qu'à d'illustres mathématiciens ? Se considérant comme une scientifique à part entière, il était donc logique pour elle d'envoyer son mémoire aux savants les plus renommés, aux académiciens. De plus, les aboutissements de ses recherches sont dignes d'être lus et étudiés par les mathématiciens contemporains. Alors a-t-elle été déçue par la réaction de ces savants ? C'est apparemment le cas puisqu'elle se plaint de temps en temps dans certains mémoires de son isolement, de son manque d'informations. Avec cette publication, elle espérait probablement entrer dans le cercle des académiciens, faire partie intégrante de leur groupe.

8.1.4 L'hypothèse au centre des débats

D'après les diverses publications sur les vibrations des surfaces élastiques, les savants ne considèrent pas la notion d'hypothèse de la même manière. Nous avons vu dans les publications de Germain que celle-ci revient à plusieurs reprises sur la justification de son hypothèse. Comment cette notion d'hypothèse est-elle perçue par les savants contemporains à Germain ?

Dès le premier mémoire que Germain envoie à l'Académie des sciences de Paris suite au concours en 1811, nous avons vu qu'elle adapte au cas bidimensionnel l'hypothèse qu'Euler a considéré dans le cas unidimensionnel. Elle conserve cette hypothèse tout au long de ses recherches. Elle va la justifier par le calcul, mais aussi par l'expérience. En effet, elle arrive à une concordance quand elle compare sa théorie obtenue grâce à

son hypothèse aux résultats expérimentaux. Son hypothèse devient alors pour elle une vérité. Dans son « ouvrage 1821 » elle considère son hypothèse comme équivalente à la définition de la force élastique. Qu'en est-il concernant d'autres savants contemporains à Germain ? Donnent-ils la même définition au mot « hypothèse » que Germain ?

Certains mathématiciens n'utilisent pas le mot « hypothèse » dans leurs publications. Biot, Cauchy emploient le mot « conditions ». Ils donnent des conditions sur la lame, sur la plaque. Navier parle de « principe ». Ces différents termes n'ont pas tout à fait le même sens. Un « principe » est une proposition admise sans démonstration, qui ne peut être contestée. Utiliser ce mot signifie que le doute n'est pas possible. Une « hypothèse » est une proposition que l'on présente comme une donnée d'un problème, qui est posée comme vraie. On peut donc remettre en question la proposition. Les « conditions » sont des propositions qui sont nécessaires mais qui ne peuvent être démontrées. Un doute peut donc subsister. Ainsi ces savants utilisent des mots ayant une signification plus ou moins forte.
Concernant Poisson, même si au début de son mémoire de 1814 il affirme ne pas faire d'hypothèse pour obtenir l'équation des vibrations des surfaces élastiques, il utilisera tout de même le mot « hypothèse » dans la suite de son mémoire. Il fait une hypothèse moléculaire donc par rapport à un phénomène physique. Cette hypothèse lui permet, comme Cauchy et Navier, de fixer les idées. Contrairement à Germain, il ne juge pas nécessaire de la justifier. Il l'admet puisqu'il la considère comme naturelle.
Poisson et Biot utilisent aussi des hypothèses, ou suggèrent un caractère hypothétique, dans leurs calculs. Ils donnent des conditions, font des suppositions sur certains termes, variables, fonctions intervenant dans les équations, les calculs. Ces conditions leur permettent de valider un calcul, un raisonnement.

Nous pouvons remarquer que tous les mathématiciens font des hypothèses, même s'ils évitent parfois ce mot. Ne donnant pas toujours le même sens à ce mot, ils préfèrent sans doute le remplacer par d'autres termes pour éviter une incompréhension.
Qu'en pensent certains successeurs ayant étudié les travaux de Germain ? S'attardent-ils autant sur son hypothèse ou mettent-ils davantage l'accent sur d'autres divergences ?

8.2 Réaction de certains successeurs

8.2.1 Le point de vue de Kirchhoff

Gustav Robert Kirchhoff[4], contrairement à d'autres scientifiques, reconnaît dès les premiers mots de son mémoire *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastichen Scheibe* imprimé en 1850 dans le *Journal für die Reine und angewandte Mathematik* que les premières recherches sur la notion des vibrations des surfaces élastiques sont le fait de Germain. (Kirchhoff, 1850, p. 51-54)
Il précise ensuite dans quelle circonstance Germain a débuté ses travaux. Il remarque qu'elle a obtenu en 1811 une équation différentielle pour les vibrations des surfaces élastiques ; mais comme elle a commis des erreurs de calculs, son équation est fausse. Il souligne aussi que Lagrange, après avoir refait les calculs, obtient l'équation correcte (Kirchhoff, 1850, p. 51). Or même si la lettre de Lagrange dans laquelle figure l'équation ne contient pas les calculs, Kirchhoff ne fait aucune remarque à ce propos. Il ne remet pas en cause le travail de Lagrange. L'expérience de ce dernier, ses remarquables recherches et ses nombreuses publications lui permettent d'acquérir une importante notoriété. Son autorité suffit donc à valider ses résultats. Contrairement à Lagrange, Germain ne bénéficie pas d'un tel renom. Ses travaux, ses écrits ne sont pas suffisamment considérables et reconnus pour qu'elle puisse jouir d'une réputation suffisante pour que Kirchhoff excuse les erreurs qu'elle a commises par manque d'expérience, de pratique d'un type de calculs qu'elle n'avait pas encore utilisé dans ses études antérieures. Toutefois, il indique tout de même que Lagrange a utilisé la même hypothèse que Germain. Il reconnaît donc que cette hypothèse permet d'obtenir l'équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques.
Kirchhoff décrit très rapidement le contenu des mémoires de 1813 et de 1815 de Germain. Il souligne que ces trois mémoires n'ont pas été publiés. Il cite également les deux premiers textes qu'elle a publiés, à savoir l'« ouvrage 1821 » et l'« ouvrage 1826 ». Ne trouvant aucune trace d'un séjour de Kirchhoff à Paris, comment a-t-il eu connaissance de ces productions de Germain ? Il a enseigné et donc étudié la théorie mathématique de l'élasticité. À cette occasion, il s'est penché sur les travaux de Navier[5]. Or nous avons vu que ce dernier cite Germain dans un de ses mémoires comme la lauréate d'un Prix sur ce sujet proposé par l'Académie des sciences. Nous savons que l'annonce de la

4. Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) est un physicien allemand. Il enseigne la théorie mathématique de l'élasticité. Il est connu pour ses lois relatives au courant électrique dans les circuits et pour être le fondateur, avec Robert Bunsen, de la spectroscopie. Il travaille sur le phénomène de rayonnement thermique et la lumière.

5. Dictionnaires et Encyclopédies sur Academic (https ://fr-academic.com).

remise des trois mémoires du concours, les conclusions du jury et l'annonce de la remise à l'Académie des deux ouvrages publiés par Germain elle-même et que Kirchhoff a cités figurent dans les procès-verbaux de l'Académie des sciences. Mais il n'y a aucune indication s'il a pu lire une copie de ces rapports ou s'il connaissait un académicien qui aurait pu le renseigner et lui envoyer les ouvrages de 1821 et de 1826. Quoi qu'il en soit, il s'intéresse aux résultats obtenus par Germain sur les vibrations des surfaces élastiques.

Il analyse l'argumentation, les calculs de Germain et affirme qu'ils comportent encore des erreurs bien qu'elle ait montré que ses résultats théoriques sont validés par les résultats des expériences. Il déclare que certains points de la théorie de Germain peuvent être interprétés de telle façon qu'ils contredisent les résultats expérimentaux. Kirchhoff veut rétablir la situation, montrer que le raisonnement de Germain, ses aboutissements ne sont pas toujours exacts. Pour cela, il reprend une toute petite partie de la démonstration de celle-ci pour appuyer ses dires. Il rappelle qu'elle a essayé d'adapter le cas unidimensionnel au cas bidimensionnel. Ainsi, il mentionne que, dans le cas unidimensionnel, une force est proportionnelle à l'inverse du rayon de courbure. Parallèlement, Germain considère que cette même force est, dans le cas bidimensionnel, proportionnelle à la somme des inverses des rayons de courbure principaux (Kirchhoff, 1850, p. 52).

Il applique alors la méthode de Germain et obtient l'équation de l'équilibre d'une plaque suivante :

$$\delta P - N^2 \int \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \delta \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) df$$

où δP est le moment des forces extérieures, N^2 est une constante dépendant de la nature et de l'épaisseur de la plaque, df est un élément de la surface.

Kirchhoff relève une autre erreur ; il considère un cas particulier pour lequel le raisonnement de Germain ne convient pas :

> « Um zu zeigen, dass diese Bedingung unmöglich die richtige sein kann, wende ich sie auf den Fall an, wo eine Scheibe unendlich wenig aus ihrer ursprüngligen Gestalt gebracht ist, durch Kräfte, die auf ihr Inneres senkrecht zu ihrer Mittelfläche wiken ; den Rand der Scheibe nehme ich dabei der Einfachheit wegen als frei an [6]. » (Kirchhoff, 1850, p. 53)

6. Pour montrer que cette condition ne peut pas être la bonne, je l'applique au cas où un disque s'éloigne infiniment peu de sa position initiale mu par des forces agissant perpendiculairement au centre de la surface ; le bord du disque est supposé libre pour des raisons de simplicité.

Il se place dans les mêmes conditions que Germain et obtient l'équation différentielle partielle suivante :

$$N^2\left(\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}\right)=Z.$$

Il tient compte des conditions aux limites qui sont au nombre de deux : $u=0$ et $\frac{\delta u}{\delta n}=0$ où n est la normale au contour. Il observe que la solution de l'équation différentielle est complètement déterminée par la première condition aux limites. Il n'est donc pas possible de trouver un u qui satisfasse aussi à la deuxième condition aux limites. Dans ces conditions, la plaque ne peut pas être en équilibre.

Kirchhoff veut montrer que cette analyse est erronée. Pour cela, il examine le cas où on peut trouver une telle fonction u qui vérifie les deux conditions aux limites. Il obtient alors une infinité de fonctions qui vérifient l'équation différentielle et donc une infinité de positions d'équilibre de la plaque (Kirchhoff, 1850, p. 53). Il donne un exemple pour lequel ce cas, s'il n'y avait aucune force, pourrait se rencontrer :

> « wäre die Platte in irgend welche Gestalt gebracht, für die u ist, und dann sich selbst überlassen, so müsste sie in dieser Gestalt verharren, ohne das Bestreben zu zeigen, in ihre ursprüngliche Gestalt surückzukehren. Jener Gleichgewichtsbedingung zufolge müsste die Platte, auch wenn sie endliche Krümmungen erlitten hat, ohne Mitwirkung äufserer Kräfte im Gleichgewichte sich befinden, sobald für alle Puncte ihrer Mittelfläche die Summe der reciproken Hauptkrümmungsradien verschwindet [7]. » (Kirchhoff, 1850, p. 53-54)

Or cette situation n'est pas observée dans la réalité.

Ainsi, tout en reconnaissant que l'équation différentielle obtenue par Germain est correcte, les conditions aux limites [8] ne sont par contre pas exactes. Ces conditions aux limites sont, entre autres, à l'origine d'un différent entre Germain et Poisson qui avait remis cette étude à plus tard. Il juge donc nécessaire de revenir sur ces conditions et de montrer le problème rencontré par celles proposées par Germain lorsqu'on les applique. Il ne se contente pas d'analyser simplement le travail de Germain, il s'attarde sur des points qui ont pu créer des conflits entre différents savants. Il doit considérer important de comprendre les erreurs qui ont été faites, surtout quand elles sont à l'origine de

7. si la plaque était amenée à prendre une forme quelconque pour laquelle on a $\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}$, puis laissée à elle-même, elle devrait rester dans cette forme sans montrer aucun effort pour revenir à sa forme initiale. Selon cette condition d'équilibre, la plaque, même si elle a subi des courbures finies, devrait être en équilibre sans la participation d'autres forces dès que la somme des rayons de courbure principaux réciproques disparaît pour tous les points intérieurs de sa surface.

8. Les conditions aux limites correspondent aux conditions que doivent vérifier les points qui se trouvent sur les bords de la surface.

désaccords, pour pouvoir avancer dans les recherches et arriver à une théorie exacte. Il ne manque pas de signaler qu'il est difficile de donner une équation générale de l'état d'équilibre de la plaque.
À la fin de son mémoire, Kirchhoff consacre un paragraphe sur la comparaison entre des résultats théoriques et expérimentaux. Mais il ne reprend pas les comparaisons effectuées par Germain. Il confronte ses propres résultats théoriques aux expériences. Les comparaisons antérieures ne l'intéressent pas. Seules lui importent les modélisations des vibrations des surfaces élastiques faites par ses prédécesseurs. En effet, il a étudié l'étude mathématique faite par Germain, mais aussi les résultats théoriques obtenus par Poisson. Il a analysé le travail de ce dernier avec la même rigueur que celle employée pour le travail de Germain.

Kirchhoff considère Germain comme une mathématicienne au même titre que les autres mathématiciens contemporains. Il ne se préoccupe que du raisonnement mathématique exposé par les différents savants. Il ne se focalise pas sur la personne même qui est à l'origine des résultats et articles publiés. Son seul objectif est d'examiner les travaux déjà réalisés afin de pouvoir faire progresser les connaissances sur la théorie de l'élasticité. D'autre part, le fait que Kirchhoff évoque en 1850 donc trente-cinq ans plus tard les trois mémoires du concours, mémoires qui n'ont pas été publiés, ainsi que certains articles de Germain indique que ceux-ci ne sont pas totalement oubliés. Et Kirchhoff n'est pas le seul scientifique à s'être penché, plusieurs années plus tard, sur les écrits de Germain.

8.2.2 L'analyse de Todhunter

Isaac Todhunter[9], dans *A History of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time, vol.1, Galilei to Saint-Venant 1639 - 1850*, analyse les travaux et les productions des différents scientifiques qui ont travaillé sur la théorie de l'élasticité. Il se penche donc sur les recherches et résultats de Germain concernant les vibrations des surfaces élastiques. Il étudie en particulier l'« ouvrage 1821 » de Germain. Avant d'examiner ce texte, il a lu celui de Kirchhoff cité dans le paragraphe précédent. En effet, il relève le ressenti de ce dernier par rapport aux résultats théoriques de Germain : « It is shewn by Kirchhoff in Crelle's Journal Vol.40,

9. Isaac Todhunter (1820-1884) est un mathématicien anglais. Il est professeur au St John's College une université de Cambridge, et professeur privé. Il est connu pour ses livres sur les mathématiques et sur l'histoire des mathématiques. Il est membre de la Royal Society et de la Société de Mathématiques de Londres.

page 53, that the solution given by Mdlle Germain is untenable. » (TODHUNTER, 1886, p. 151)

Todhunter analyse, paragraphe par paragraphe, l'« ouvrage 1821 » de Germain. Bien que celle-ci ait essayé de justifier de deux façons différentes son hypothèse, il l'estime trop vague. Il reproche à Germain de considérer son hypothèse comme absolument vraie ; or pour lui, cette hypothèse peut seulement être envisagée comme une approximation. D'autre part, Todhunter reprend les calculs de Germain et pointe du doigt à plusieurs reprises ce qui ne va pas, indique les erreurs qu'elle a commises qu'il qualifie de sérieuses. Il ne manque pas de souligner qu'elle ne maîtrise pas le calcul des variations alors qu'elle a eu la chance d'avoir Lagrange pour mentor. Il insiste aussi sur le fait que Germain s'est contentée de copier la méthode de Lagrange. De plus, il précise encore qu'elle applique le raisonnement de ce dernier mais de façon maladroite, peu rigoureuse. Elle commet d'ailleurs des erreurs que Lagrange n'avait pas faites.
Il note des incohérences, ne comprend pas toujours le raisonnement de Germain. Par exemple à propos de l'expression

$$-\iint N^2 \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right\} \delta \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) dm$$

$$+ \iint \frac{N^2}{2} \left\{ \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})^2 - (\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)^2 \right\} d\delta m,$$

il déclare ne pas saisir comment elle parvient à la signification des différents termes. Il dénonce un procédé appliqué par Germain « très arbitraire et très obscur » (TODHUNTER, 1886, p. 151). Ses dires peuvent insinuer qu'elle raisonne par tâtonnement, que son analyse n'est ni fiable, ni crédible.

Il précise que les résultats qu'elle a obtenus, plus particulièrement une équation générale qui lui permet d'obtenir l'équation des vibrations des surfaces élastiques n'ont été trouvés par aucun autre mathématicien. Il ne comprend d'ailleurs à nouveau pas la méthode qu'elle applique pour parvenir à cette équation générale intermédiaire. Il estime cette méthode artificielle et n'ayant été conçue que pour atteindre l'objectif fixé. Il pense qu'elle arrange ses calculs afin de pouvoir obtenir l'équation des plaques élastiques vibrantes déjà connue. Il emploie encore une fois le mot « obscur » pour qualifier la démonstration de Germain. Ce terme apparait d'ailleurs à maintes reprises dans les propos de Todhunter. Il va même plus loin dans ses affirmations : « It is not too much to say that the whole of the rest of the work is ruined by these mistakes, as almost every formula will have to be corrected » (TODHUNTER, 1886, p. 156). Todhunter fait

un "catalogue" des erreurs qu'elle a commises, des faiblesses qui apparaissent dans son raisonnement. Il ne prend pas en compte les difficultés qu'elle a pu rencontrer par exemple pour la résolution des équations différentielles, notion en cours d'étude à l'époque de Germain. Quand il écrit cette histoire de la théorie de l'élasticité en 1886, plusieurs années se sont écoulées depuis les travaux de Germain et bien d'autres mémoires sur le sujet ont été publiés. Ne pas faire l'impasse sur toutes ces confusions permet de montrer la difficulté de cette théorie.

Il trouve tout de même dans cet « ouvrage 1821 » de Germain des démonstrations, des justifications sur lesquelles il n'a rien à redire. Le contenu de quelques pages lui parait correct, sans les fautes déjà relevées auparavant. Mais toutes les erreurs dans les calculs de variations, les faiblesses dans les raisonnements de Germain découragent Todhunter. Il ne prend pas la peine d'examiner tout son mémoire, de vérifier les résultats qu'elle énonce à propos des sons. Il reconnait aussi qu'il n'a pas examiné en profondeur le paragraphe concernant la comparaison faite par Germain entre les résultats théoriques et expérimentaux. Il émet toutefois son opinion concernant la valeur de sa comparaison théorie-expériences :

> « It does not appear that the authoress [Germain] found any very close agreement between her theory and her experiments. It is curious that the deviations were all in one direction ; she states on her page 76 that in a large number of cases the sound obtained was graver than it should have been according to theory, and she never observed the inverse phenomenon. » (Todhunter, 1886, p. 158)

Il se montre à nouveau sceptique vis à vis des constatations et des conclusions émises par Germain. Il n'approuve pas l'obstination de celle-ci, ne valide pas son travail. Il a une vision négative concernant ses recherches et ses aboutissements (Todhunter, 1886, p. 149-158).

La perception des travaux de Germain est différente selon les mathématiciens. Pour pouvoir avoir un aperçu de son évolution, il faut poursuivre l'étude. Nous pouvons seulement constater que les mathématiciens de la première moitié du XIXe siècle se contentent de lire éventuellement ses productions. Ils ne les utilisent pas et ne s'appuient pas sur ses résultats pour leurs propres recherches. Seuls les trois mémoires de Germain envoyés à l'Académie en réponse au concours ont été analysés plus en détail par les membres du jury. Il faut noter qu'à cette époque, la recherche sur la théorie de l'élasticité est en plein essor. Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, la modélisation les vibrations

des surfaces élastiques est déjà bien avancée. La finalité de l'analyse des travaux de Germain n'est alors pas la même. Les scientifiques qui s'intéressent à ses écrits font une étude plus détaillée, une analyse plus poussée. Ils cernent les erreurs, font des remarques concernant la pratique de l'outil mathématique, jugent davantage. Leur objectif est de citer les différents savants qui ont exploré la théorie de l'élasticité et de décrire leurs productions.
Ainsi l'importance des travaux réalisés et des résultats obtenus, la notoriété du nom jouent un rôle important concernant la visibilité d'un scientifique.

8.2.3 Le nom de Germain tout de même évoqué

Les travaux et productions de Germain sont cités mais perçus différemment dans le monde scientifique. Ce qui est souvent le cas pour la plupart des découvertes :

> « Il est toujours difficile d'évaluer la portée d'un travail dans le développement des théories scientifiques. D'abord parce qu'un travail importe parfois plus par ses méthodes que par ses résultats positifs. Ensuite parce que le point de vue des contemporains et de leurs suivants est souvent biaisé lorsque le temps passe et que s'édifient des théories toujours plus efficaces. Alors les nouveautés théoriques font écran aux méthodes du passé et occultent en quelque sorte le cheminement qu'il a fallu parcourir avant d'y parvenir. » (Le Ru, 2001, p. 299)

Nous pouvons cependant remarquer qu'à partir de Kirchhoff qui a vraiment mis le doigt sur les erreurs de calculs commises par Germain et qui les a mises par écrit et corrigées, les savants qui ont analysé son travail ont remarqué son manque de rigueur, son manque d'explications. La théorie de Germain avec toutes ses erreurs de calculs et ayant été rectifiée par Kirchhoff est rarement considérée comme une référence. Elle n'a obtenu que des résultats partiels qui peuvent être expliqués en partie par une formation autodidacte et du fait qu'elle a été la première à se confronter au sujet. Les scientifiques préfèrent mettre en avant les travaux réalisés par Navier, Cauchy sur les vibrations des surfaces élastiques et les considérer comme référence, même s'ils ne sont pas toujours en accord ensemble et leurs résultats pas forcément très rigoureux et aboutis. Ils optent plutôt de retenir les noms de mathématiciens plus connus que celui d'une mathématicienne considérée parfois comme une marginale bien qu'ayant reçu le Prix extraordinaire de mathématique en 1816, prix concernant les travaux sur les vibrations des surfaces élastiques mis au concours par l'Académie des sciences en 1809 en sus du Prix de mathématique mis au concours la même année.

Quoi qu'il en soit, Germain a participé activement à l'avancée des connaissances sur la théorie de l'élasticité, comme le signale Libri :

> « Mais la manière dont elle avait appris l'analyse, en suivant son seul instinct, sans faire jamais un cours régulier et complet, ne lui permit pas, malgré toute sa sagacité, de résoudre complètement la question. Cependant elle avait ouvert le champ aux recherches. » (Germain, 1833, p. 3 & 14)

Les propos de Libri, un ami de Germain, sont élogieux. Ils ont entretenu une correspondance assez importante, ils se rendaient mutuellement des services. À chacun de ses séjours à Paris, Libri rendait visite à Germain.

Nous pouvons aussi rencontrer le nom de Germain ainsi qu'une évocation de ses travaux sur les vibrations des surfaces élastiques dans des ouvrages qui relatent l'histoire de la théorie de l'élasticité ou de la théorie de l'acoustique : « The first attempt to solve the problem with which we have just been occupied is due to Sophie Germain, who succeeded in obtaining the correct differential equation, but was led to erroneous boundary conditions. » (Strutt, 1877, p. 369)

Ainsi, son nom est évoqué par certains historiens pour signaler qu'elle fait partie des premiers savants à étudier les vibrations des plaques élastiques, pour rappeler rapidement ses résultats, qu'ils soient corrects ou incorrects, complets ou incomplets. Germain a effectivement obtenu l'équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques. Mais elle n'est pas parvenue à donner la solution générale de cette équation, à l'intégrer dans le cas général. Elle n'a apporté des solutions que dans des cas particuliers, des cas simplifiés. Ces auteurs ne font donc que la citer brièvement et passent très vite aux résultats obtenus après elle. Ce fait n'est pas une exception, c'est le devenir habituel de la plupart des premières recherches scientifiques sur un sujet nouveau, comme le signale Pierre-Marc Biasi :

> « le texte qui fixe la découverte scientifique et, avec lui, les éventuelles applications techniques qui en découlent, peuvent accomplir une véritable rupture avec le passé, mais leur destin est de se périmer : une autre découverte, plus englobante et d'une plus vaste portée, relèguera vite la conception antérieure au rang des souvenirs émouvants ; une nouvelle technique chassera la précédente en ne lui offrant, tôt ou tard, pour tout avenir, que la vitrine des musées. » (Biasi, 2003, p. 29)

Germain a publié et diffusé elle-même l'« ouvrage 1821 » qui est en partie une reprise de son « mémoire 1815 ». Cet « ouvrage 1821 » a été accueilli de façon mitigée par les mathématiciens.

Parmi les savants contemporains, il y a, d'un côté, ceux qui ont toujours soutenu Germain, comme Legendre et Fourier. Il y a aussi Navier qui reconnaît la valeur de son travail, mais qui émet tout de même quelques réserves. De l'autre côté, il y a un groupe de mathématiciens contemporains qui sont en désaccord avec elle, comme Biot, et surtout Poisson qui n'utilise pas le même modèle qu'elle.

Un peu plus tard, à partir du milieu du XIXe siècle, les quelques mathématiciens qui évoquent les travaux de Germain sur les vibrations des surfaces élastiques, analysent ses calculs et son raisonnement. Ils s'intéressent davantage à la partie mathématique développée par Germain. Elle ne sera que peu citée par les savants de la fin du XIXe siècle. Ainsi, la plupart des savants qui ont consacré une partie de leurs recherches à la modélisation des vibrations des solides ne retournent pas à « la source » de l'étude. Ils s'appuient uniquement sur les derniers résultats qui vont leur servir de base pour leurs propres investigations. Cependant, Germain reste tout de même dans l'esprit de certains historiens qui s'intéressent à l'origine réelle des théories et qui n'omettent pas son nom dans l'histoire de l'acoustique.

Chapitre 9

Influence de ses travaux concernant la vibration des surfaces élastiques sur sa réflexion philosophique

Atteinte par la maladie à la fin de sa vie, trop faible pour poursuivre ses recherches mathématiques, Germain entreprend une réflexion philosophique, publiée en 1833 sous le titre *Considérations générales sur l'État des Sciences et des Lettres, aux différentes époques de leur culture*. Voici ce qu'écrit Lherbette, le neveu et l'exécuteur littéraire de Germain, en préambule du mémoire de Germain :

> « Ces feuilles, trouvées dans les papiers de mademoiselle Germain, n'étaient pas destinées à l'impression. (...) Uni à elle par les liens de l'affection, plus encore que par ceux d'une proche parenté, nous avons cru, en publiant cet opuscule, remplir un devoir pieux envers sa mémoire. » (Germain, 1833, p. 5)

Stupuy fait un commentaire en ce sens. Il pense que Germain n'avait pas l'intention de publier les remarques, les réflexions qu'elle s'est faites tout au long de ses différentes études. Cette pensée philosophique est emprunte de la variété de ses recherches. Il évoque le fait que les feuilles ne sont pas datées, qu'elles ne sont apparemment pas classées et ont l'air de n'avoir aucun lien entre elles (Stupuy et Germain, 1896, p. 59-60). Pourtant l'ouvrage diffusé grâce à Lherbette contient des chapitres et donc un plan, les idées sont tout de même plus ou moins ordonnées, certaines notions étant reprises dans différents endroits. Connaissant le souci de perfection dont fait preuve Germain, il peut y avoir quelques maladresses dans l'écriture. Lherbette a préféré laisser, si possible, en l'état dans lequel il a retrouvé le « manuscrit ».

Ainsi, nous allons voir que les recherches concernant la théorie sur les vibrations des surfaces élastiques que Germain a faites, sa façon de raisonner et d'aborder la notion ont influencé sa réflexion philosophique.

9.1 Vision philosophique sur les sciences et la société

Dans ce texte, Germain souligne à plusieurs reprises l'importance de la précision de la justification, de relater clairement les réflexions, productions et démonstrations, de respecter l'ordre et la simplicité dans les raisonnements (Germain, 1833, p. 18).
Ce désir et ce besoin de précision se retrouvent aussi dans les mémoires qu'elle a écrits sur la théorie des vibrations des surfaces élastiques. Pour exemple, il suffit de considérer le nombre de fois qu'elle reprend la démonstration de son hypothèse. Elle ressent le besoin de l'expliciter le plus rigoureusement et simplement possible pour la faire accepter auprès des autres mathématiciens. Elle exprime aussi cette volonté d'ordre, de clarté, de rigueur dans son ouvrage les *Considérations générales sur l'État des Sciences et des Lettres, aux différentes époques de leur culture* quand elle compare la littérature à la science. Pour elle, les deux domaines sont régis par l'ordre (Germain, 1833, p. 20). Ce souci de précision est omniprésent dans les rédactions de Germain.

Germain pense que le raisonnement se forme tout d'abord dans l'esprit, dans la pensée d'un savant. Cette idée se retrouve également dans sa réflexion philosophique. En effet, elle déclare, qu'après avoir analysé les notions qui peuvent aider un savant à traiter un nouveau sujet, ce dernier imagine déjà les nouveaux résultats qu'il peut obtenir. Certes il arrive qu'il se trompe, mais il recommence et finit par reconnaître parmi toutes les idées, les pensées, celle qui lui permettra de résoudre son problème (Germain, 1833, p. 21). Elle décrit le cheminement d'une idée, depuis son origine jusqu'à sa formulation finale. Et pour cela, elle peut s'appuyer sur sa propre expérience, sur la façon dont elle a mené ses travaux sur les surfaces élastiques. L'origine, le déclenchement d'une preuve, d'une argumentation se situent dans un premier temps dans l'esprit du savant. Et l'idée initiale, qui est à la source de la démonstration, reste toujours, dans la tête du mathématicien, le fil directeur du raisonnement. Le savant ne cherche alors qu'à exploiter cette idée initiale (Germain, 1833, p. 22).

Mais Germain remarque aussi que cette idée première qui naît dans l'esprit des mathématiciens, peut être influencée par la connaissance ou la prévision des résultats qu'ils doivent expliquer (Germain, 1833, p. 20). En observant cela, elle peut faire référence aux expériences réalisées par Chladni, Paradisi et elle-même sur les vibrations des sur-

faces élastiques. Ces expériences donnent les résultats que les sciences mathématiques doivent traduire, exprimer analytiquement.
Germain peut également évoquer les travaux entrepris par Poisson en 1813-1814 sur les vibrations des surfaces élastiques après qu'il ait lu son deuxième mémoire envoyé à l'Institut pour le concours. Ainsi Poisson connaissait déjà l'équation du mouvement des surfaces élastiques qu'il devait obtenir.
Par conséquent, pour démontrer certains résultats ou pour découvrir de nouvelles notions, les mathématiciens peuvent aussi s'appuyer sur les savoirs déjà explicités grâce à la publication de ceux-ci. Ils disposent d'un support de travail, ils peuvent s'appuyer sur des théories, des observations déjà faites. Ces travaux antérieurs qui paraissaient compliqués deviennent alors plus simples, plus évidents et peuvent être à l'origine d'une théorie plus générale (Germain, 1833, p. 26).
Germain fait à nouveau allusion à la simplification des travaux, des résultats. Elle a déjà évoqué cette notion auparavant. D'autre part, ses propos peuvent aussi faire allusion au fait que, dans le premier mémoire qu'elle a écrit pour répondre à la question du concours, elle reprend les résultats d'Euler. Ce dernier a travaillé sur la théorie de l'élasticité dans le cas unidimensionnel. Elle a adapté la méthode d'Euler au cas bidimensionnel. Elle n'a pas eu à faire « les premiers pas » comme elle le dit, Euler les a faits avant elle. Elle peut s'appuyer sur une théorie déjà existante.

Le fait de pouvoir s'aider des connaissances antérieures permet alors de se concentrer davantage sur le développement d'outils nécessaires à la résolution de nouveaux problèmes, problèmes que « les sciences exactes ne paraissaient pas devoir aborder » (Germain, 1833, p. 52). En écrivant cela, Germain pense sûrement aux développements de la géométrie différentielle et du calcul différentiel qui ont été permis grâce aux études sur les vibrations des surfaces élastiques. Et ces développements ont eux-mêmes servi dans l'étude de la théorie de l'élasticité et la modélisation des phénomènes physiques observés lors des expériences. Elle met l'accent sur le cheminement emprunté par la science et le fait que les progrès réalisés sur la science permettent à celle-ci de dévoiler certains aspects de la nature (Germain, 1833, p. 53). En faisant allusion aux observations, Germain peut faire référence aux expériences de Chladni et Paradisi qui ont permis d'observer les figures nodales issues des vibrations des surfaces élastiques, phénomènes pour lesquelles aucune loi mathématique n'était encore connue. Ainsi, pour elle, les expériences permettent, en les modélisant, d'étendre les connaissances mathématiques voire de les clarifier.

Germain pense qu'il y a un double processus. Les mathématiciens disposent en premier lieu des expériences. Ces dernières sont modélisées. Et de cette modélisation sont déduites « des conséquences conformes à l'expérience » (Germain, 1833, p. 64-65). En faisant cette réflexion, Germain peut à nouveau évoquer ses travaux sur la théorie de l'élasticité. Le point de départ est la modélisation des expériences de Chladni. Cette modélisation étant faite, elle utilise alors les résultats expérimentaux pour valider ses résultats analytiques traduisant le mouvement des surfaces élastiques.

Durant son étude sur la théorie de l'élasticité, Germain ne cesse de faire des allers et retours entre le domaine physique et le domaine mathématique, utilisant l'un pour justifier l'autre et vice et versa. Cette façon de travailler n'est pas nouvelle, comme elle le signale dans sa réflexion philosophique : « C'est de cette époque [celle d'Isaac Newton], à jamais mémorable, que doit dater l'alliance entre les sciences mathématiques et les sciences physiques » (Germain, 1833, p. 49). Cette alliance a permis de réaliser des progrès dans chacun des domaines, et lui a permis de se lancer dans l'étude des vibrations dans le cas bidimensionnel. Elle a pu, non seulement modéliser les figures nodales, mais aussi les comparer et les associer aux sons émis lors des vibrations des surfaces planes et des cloches. Germain évoque le fait que, grâce aux progrès de la science, des phénomènes qui semblaient n'avoir aucun lien entre eux peuvent être en réalité liés (Germain, 1833, p. 58).
La théorie de l'élasticité permet d'associer des observations visuelles aux observations auditives, et modéliser ces phénomènes avec de nouveaux outils mathématiques. C'est ce qui lui a sans doute, entre autres, inspiré la phrase suivante : « Il se dévoile des liaisons multipliées entre des branches qu'on avait jugées séparées ; et des lois sont observées là où l'on n'avait encore vu que des faits accidentels » (Germain, 1833, p. 60). Elle peut souligner ici l'introduction des mathématiques dans les études physiques ou dans les sciences naturelles.

Enfin, Germain fait aussi une comparaison entre un phénomène physique qu'elle a étudié sans préciser lequel (il peut s'agir du mouvement des surfaces élastiques) et la société. Elle décrit le phénomène physique qui peut être assimilé au fonctionnement d'une société. Elle rapproche l'équilibre non stable d'un système aux révolutions dans une société, et l'équilibre stable du système à un état de paix dans la société (Germain, 1833, p. 68). Elle introduit une sorte de corrélation entre un phénomène physique et l'état dans lequel se trouve une société.
Germain se sert de ses recherches sur les vibrations des surfaces élastiques pour décrire, expliquer le fonctionnement de la société, sa façon d'agir. Elle arrive à faire une analogie

entre les observations qu'elle a faites concernant la théorie de l'élasticité et l'ordre social. Le rapprochement entre deux domaines apparemment très différents qui au début n'était qu'une possibilité est confirmé.

Germain termine sa réflexion en remarquant que la société intervient dans l'évolution de la science. En effet, elle observe que « comme l'éducation des sociétés consiste moins à propager les connaissances déjà anciennes qu'à en acquérir de nouvelles » (Germain, 1833, p. 101), les théories ainsi créées légitiment le rapprochement de certains domaines qui semblaient n'avoir aucun lien entre eux. Cette évolution des connaissances et les nouvelles découvertes permettent de concrétiser ce rapprochement entre différents domaines d'étude. Germain fait ici non seulement allusion aux avancées dans la théorie de l'élasticité, mais aussi dans la théorie des nombres, domaines sur lesquels elle a elle-même travaillé.

À travers cette réflexion philosophique, Germain essaie de faire comprendre comment travaille un savant, comment fonctionne l'esprit d'un savant. Elle explique que les progrès permettent de créer une unité entre des domaines scientifiques au premier abord différents entre eux. Mais elle ne se contente pas de conjecturer des liens uniquement au sein des sciences, elle élargit ses observations pour combiner les sciences et la société. Non seulement elle note une correspondance entre le fonctionnement des sciences et celui de la société, mais elle exprime aussi le fait que la société guide la science et a une influence sur les progrès réalisés par la science.

9.2 Rapprochement avec certaines pensées philosophiques

La pensée philosophique de Germain présente certaines similitudes avec le positivisme d'Auguste Comte [1]. Nous avons vu que Germain met en évidence une corrélation entre le fonctionnement des sciences et celui de la société. De même, dans le « positivisme », les sciences de la nature et les sciences sociales présentent des bases logiques communes. La pensée positiviste applique la méthode scientifique pour étudier la société. Mais contrairement à Germain qui considère que la société guide la science, les « positivistes » énoncent l'inverse : les progrès réalisés par la science contribuent au changement de la société, ils doivent être utiles à la société. D'autre part, que ce soit

1. Auguste Comte (1798-1857) est un philosophe et sociologue français. Il rentre à 16 ans à l'École polytechnique. Il enseigne les mathématiques tout en développant sa philosophie, le « positivisme » ou « philosophie positive ».

dans la pensée philosophique exprimée par Germain ou dans le positivisme, les notions de précision, de clarté et de rigueur sont importantes. Nous y retrouvons aussi la notion d'« idée ». Pour Germain, l'idée initiale est le fil directeur du raisonnement et le savant cherche à exploiter cette idée. Dans le positivisme, les idées régissent le monde. Dans les deux pensées, les « idées » jouent donc un rôle important dans le domaine dans lequel elles interviennent. (Pickering, 2011)
Le point de vue philosophique de Germain se rapproche aussi un peu de l'empirisme par rapport à l'observation et à l'expérience. Pour John Locke [2], les idées qui permettent de construire les raisonnements mathématiques proviennent de l'expérience et de l'observation. Ces dernières jouent un rôle important dans l'apprentissage scientifique. Mais pour les « empiristes », l'expérience n'est pas suffisante pour constituer les connaissances. (Bandini, s. d.) Nous retrouvons ces mêmes points de vue chez Germain, même si pour elle, le mot « expérience » est davantage lié à la physique et employé au pluriel. Mais faire des expériences en physique permet d'acquérir une certaine expérience.

Ce chapitre ne fait qu'aborder la réflexion philosophique de Germain. L'étude se limite à un rapprochement avec ses travaux sur l'élasticité. Une étude plus approfondie reste à faire.

2. John Locke (1632-1704) est un philosophe anglais. Il fait des études à Oxford. Après la médecine et les sciences naturelles, il s'intéresse à la philosophie.

Chapitre 10

Conclusion

Germain, mathématicienne française de la fin du XVIIIe siècle et du début du XIXe siècle, est davantage connue pour ses travaux concernant la théorie des nombres, ayant donné son nom à des nombres particuliers et à un théorème. Mais ses recherches ne se limitent pas à ce domaine. Elle a également contribué au développement de la théorie de l'élasticité. En effet, en 1809, à l'âge de 33 ans, elle aborde cette théorie tout à fait inconnue pour elle. Elle passe environ vingt ans à analyser les vibrations des surfaces élastiques. Cette période de la vie de Germain, ses recherches et résultats, en particulier ses premiers résultats concernant la théorie de l'élasticité, constituent le sujet de réflexion de cette thèse.

Ayant eu connaissance du sujet du concours proposé par l'Académie des sciences, sûrement poussée par l'attrait d'un nouveau challenge, Germain se lance dans l'étude des vibrations des surfaces élastiques. Avait-elle, dès le début, l'intention de participer au concours ? Elle affirme que non dans son « ouvrage 1821 ».
Fréquentant essentiellement des académiciens très concernés par les différents concours proposés par l'Académie des sciences, elle s'y intéresse donc aussi. Pour relever ce défi, elle a pu non seulement s'appuyer sur les résultats des expériences réalisées par Chladni, mais aussi sur celles qu'elle a elle-même tentées et menées à bien avec plus ou moins de réussite. De plus, l'intitulé détaillé du sujet du concours indique l'historique des travaux déjà réalisés dans ce domaine d'étude, notamment dans le cas unidimensionnel.
Pour se familiariser avec cette nouvelle notion, Germain commence par étudier les travaux d'Euler concernant les vibrations des cordes. Les travaux d'Euler sur l'élasticité lui servent de fil rouge tout au long de ses recherches.
Encouragée et épaulée par Legendre, Germain envoie, à trois reprises, en 1811, 1813 et 1815, des mémoires à l'Académie des sciences en réponse au sujet du concours. Ses

mémoires sont les seuls que l'Académie reçoit, aucun autre savant n'ayant osé en 1809 se pencher sur la question mise au concours. Non seulement, Germain parvient à obtenir une équation modélisant les vibrations des surfaces élastiques, mais elle compare aussi avec succès ses résultats théoriques aux résultats expérimentaux de Chladni et à ses propres résultats expérimentaux. Elle pousse plus loin son investigation en étudiant également les vibrations de certains solides.
Son troisième mémoire, le « mémoire 1815 » est primé même si le jury émet encore quelques réserves. Germain est la première femme à recevoir le Prix de mathématiques de l'Académie des sciences de Paris. Elle succède à une petite dizaine de savants récompensés pour ce Prix. Mais le Prix auquel a participé Germain est un Prix extraordinaire proposé par l'Académie à la suite des expériences de Chladni. Il ne remplace pas le Prix de mathématiques décerné tous les deux ans depuis 1796, Cauchy étant également primé la même année pour le Prix de mathématique concernant un autre sujet.
Bien que lauréate, elle n'arrête pas ses recherches et n'a de cesse de justifier son hypothèse. Elle écrit plusieurs textes sur le sujet, certains qu'elle fait parvenir à l'Académie, d'autres sont publiés soit par ses propres moyens, soit dans différentes revues scientifiques.

Outre l'intérêt qu'apportent la lecture et l'étude des écrits de Germain sur les vibrations des surfaces élastiques, cette analyse permet aussi, à travers les relations qu'elle établit lors de ses recherches, de révéler non seulement une partie de sa vie et de sa personnalité, mais aussi le fonctionnement de la société scientifique au XIXe siècle. Cette réflexion dévoile notamment l'importance pour les savants des concours proposés par l'Académie des sciences de Paris, elle fait apparaître une certaine concurrence entre les scientifiques. Elle nous renseigne également sur l'attitude des mathématiciens envers Germain, et réciproquement, ainsi que sur la réception de ses travaux.
Germain apparaît, pour certains de ses contemporains comme une scientifique au même titre que les autres mathématiciens, et pour d'autres comme une « scientifique amateur » n'étant pas rémunérée pour son travail de recherche. Quand à Germain, elle se considère comme une mathématicienne. Elle choisit des journaux bien spécifiques pour publier ses articles. Par exemple, elle préfère publier dans les *Annales de Chimie et de Physique* plutôt que dans le *Journal de Gergonne* dans lequel figurent pourtant des articles écrits par des professeurs de collège voire même de l'école Polytechnique, mais aussi par certains académiciens. Les journaux sont un moyen de plus en plus important pour les scientifiques pour diffuser rapidement leurs résultats. Elle sélectionne également ses relations et ses lieux de fréquentation. Par exemple elle ne fréquente pas les salons pari-

siens. Elle se concentre sur l'Académie des sciences. Elle privilégie les correspondances, les rencontres avec des académiciens, des scientifiques de renoms comme Gauss, Legendre, Lagrange ou Fourier. Elle restreint intentionnellement le cercle de ses relations. Ses communications avec le monde scientifique se limitent en général à quelques académiciens. Ses relations lui ouvrent cependant certaines possibilités importantes comme le privilège d'avoir une place parmi les savants aux séances publiques de l'Académie des sciences ; elle n'a donc plus besoin de se mêler aux personnes désireuses d'assister à ces séances publiques debout au fond de la salle. D'autre part, Gauss a plaidé en sa faveur pour que lui soit décerné le diplôme de l'Université de Göttingen. Ainsi, bien que considérée comme marginale par certaines personnes, Germain a réussi à s'intégrer au sein de la communauté scientifique en tant que mathématicienne.
La société des savants apparaît comme une société à part, une grande famille, mais une famille divisée. Ses membres, y compris Germain, n'ont pas toujours la même conception sur leurs capacités scientifiques et sur les capacités scientifiques de leurs collègues. Dans ce monde scientifique, l'attitude de Germain fait d'elle une mathématicienne marginale. Certains historiens la présentent comme une femme, une mathématicienne assez isolée, écartée du monde scientifique. Ce n'est pourtant pas le cas puisqu'elle est en contact avec d'illustres savants et est sollicitée. Le fait d'être isolée à certains moments quand elle travaille ne signifie pas qu'elle est rejetée par la communauté scientifique. Elle ressent sans doute le besoin de se couper de la société pour pouvoir se consacrer pleinement à ses recherches.

Aujourd'hui, nous pouvons observer que Germain a consacré sa vie à l'étude des mathématiques. Nous pouvons considérer qu'elle a fait carrière dans la recherche scientifique. Il ne faut pas seulement s'arrêter aux résultats qu'elle a obtenus en modélisant les vibrations des surfaces et solides élastiques, mais il faut retenir la démarche utilisée, le fait qu'elle ait osé se confronter à une question jugée très difficile, trop difficile par certains de ses contemporains, les outils mathématiques nécessaires n'étant pas encore suffisamment développés. D'autres mathématiciens contemporains, comme Poisson, Navier ou Cauchy se sont aussi intéressés à la théorie de l'élasticité mais légèrement après elle. Cet intérêt pour cette théorie très complexe est encore d'actualité bien des années après le début des travaux de Germain.

L'étude des travaux de Germain sur la théorie de l'élasticité a pour objectif non seulement de faire connaître les résultats qu'elle est parvenue à obtenir, mais aussi à en apprendre davantage sur la façon dont elle est perçue aussi bien par ses contemporains

que par les historiens, à redécouvrir la personnalité, le caractère de Germain.
Les différentes traces écrites laissées par Germain contiennent non seulement des mémoires, ouvrages et articles, mais aussi des brouillons. Ces derniers nous dévoilent sa façon de travailler, des facettes de son caractère, mais également un autre thème sur lequel elle s'est penchée. En effet, on y lit une réflexion sur la théorie de la chaleur, réflexion qu'elle n'a jamais publiée. Elle évoque succinctement cette théorie dans l'« article 1831 ». Ce sera sa seule référence à la théorie de la chaleur dans ses écrits publiés. Est-ce Fourier qui l'a influencée et poussée à se lancer dans cette étude ? Ne l'a-t-elle pas trouvée assez aboutie pour davantage partager sa recherche grâce aux journaux scientifiques ? Et à quel moment s'est-elle intéressée à cette théorie ? Beaucoup de questions restent encore sans réponse et méritent une attention toute particulière.

Annexe A

Programme intégral du Prix de mathématique

Ce Programme intégrale du Prix de mathématique figure à la fin du *Traité acoustique* de Chladni (pages 353 - 357).

« Les premières recherches sur le son datent d'une haute antiquité ; on attribue à Pythagore la découverte des rapports entre les longueurs des cordes qui rendent différens tons ; mais cette partie des sciences physico-mathématiques n'a acquis des développemens et n'a fait des progrès remarquables que depuis la fin du 17e siècle.

C'est à Sauveur [Joseph], élu membre de l'Académie des Sciences de Paris en 1696, qu'est due la gloire d'avoir fait de la théorie des cordes vibrantes et de son application à la musique, une des branches importantes de la physique, et de l'avoir liée à la mécanique. Ce savant a trouvé, ou du moins rendu sensible par des expériences très-ingénieuses, la division de la corde sonore en plusieurs *ondes* séparées par des *nœuds* ou points de repos, qui a lieu dans certaines circonstances ; il a ajouté à la connaissance qu'on avait des relations entre les nombres absolus de vibrations qui constituent chaque ton, conclue d'abord d'expériences fines et curieuses, et comparée ensuite avec des formules analytiques qu'il a déduites de la théorie des centres d'oscillations [*Mémoires de l'Académie*, année 1713].

Taylor [Brook] dans son *Méthodus incrementorum*, publié en 1717, a traité le problème d'une manière plus approfondie, sous le point de vue analytique, en supposant que les forces qui animent les points matériels du système sont proportionnelles à leurs distances à la droite menée entre les points fixes, et que, par conséquent, ces points arrivent tous ensemble à cette droite. Vingt ou trente ans après, Daniel Bernoulli a ajouté beaucoup de développemens à la théorie de Taylor ; mais la solution générale

et rigoureuse du problème est due à d'Alembert [Jean Le Rond] et Euler ; ces grands mathématiciens ont les premiers employé l'équation différentielle du mouvement de la corde sonore qui est aux différences partielles et du deuxième ordre. Cette équation a été trouvée d'abord et intégrée par d'Alembert ; mais Euler a mieux senti que lui toute la généralité de l'intégrale : un des mathématiciens de la Classe a ensuite publié sur le même sujet, des mémoires où la matière est traitée avec la clarté et la profondeur qui caractérisent toutes ses productions.

Une équation de même nature et de même ordre que celle de la corde vibrante, s'applique aux oscillations de l'air dans les tuyaux ; l'ordre de l'équation ne change pas lorsque du cas linéaire, traité d'abord par Lagrange, et qu'Euler semble avoir ensuite épuisé, on passe au cas des deux et trois dimensions, dont Euler et d'autres grands mathématiciens se sont aussi occupés, et sur lequel M. Poisson a lu récemment à la Classe un très-beau mémoire qu'elle a couronné de son suffrage.

L'ordre de l'équation différentielle du mouvement tient, dans les problèmes dont nous venons de parler, à la manière dont on envisage les effets de l'élasticité dans les corps qui sont animés de ce mouvement. Ainsi, par exemple, s'il s'agit de la corde sonore à laquelle on a donné une certaine tension entre deux de ses points rendus immobiles, l'élasticité de cette corde, qu'on suppose sans rigidité naturelle, ne peut avoir lieu que dans le sens de sa longueur, et alors l'effet de cette élasticité lorsqu'on alonge un peu la corde en l'infléchissant, consiste à lui donner une tendance continuelle à se remettre dans la situation rectiligne entre les deux points fixes. Si on suppose qu'un de ces points d'immobile est rendu libre, la corde parfaitement flexible n'est plus capable de produire aucun phénomène acoustique.

Les choses se passent tout autrement, si la corde devient un *ressort* proprement dit, tel qu'affectant naturellement une certaine forme, lorsque tous ses points sont libres, ils reviennent toujours à cette même forme, lorsqu'elle aura été changée par des forces extérieures et que le ressort n'aura pas plus qu'un point fixe.

Dans ce dernier cas, et en se bornant si on veut à un seul point fixe, la verge ou lame à ressort, mise en vibration, rendra un son perceptible, si le nombre des oscillations est au moins de vingt-cinq par seconde ; mais l'équation différentielle du mouvement, qui était du deuxième ordre dans le cas de la corde flexible et tendue, se trouve être dans celui de la verge à *ressort* du quatrième ordre ; le premier problème peut être regardé comme un cas particulier du deuxième, en faisant abstraction du *ressort*, mais l'inverse n'a pas lieu.

Cette différence essentielle entre les questions de mouvement, considérées sous chacun de ces points de vue, dans le simple cas linéaire, fait concevoir sur-le-champ qu'on

doit trouver des différences de même espèce, et surtout une grande augmentation de difficultés, lorsqu'on veut introduire deux dimensions dans le calcul. Les phénomènes acoustiques qu'offrent les membranes ou les peaux tendues des tambours et des timbales, se rapportent à ceux de la corde tendue, et sans rigidité naturelle, les vibrations des plans ou lames métalliques sont dans la classe des celles des verges à ressort.

Euler, dans son mémoire de *Motu vibratorio tympanorum*, a cherché à ramener le mouvement vibratoire des *membranes* tendues à celui de la corde non rigide, en considérant ces membranes comme des tissus composés de fils qui se croisent à angle droit. Un des mathématiciens de la Classe a publié dans un de nos volumes, des recherches sur cette matière où il envisage la question sous ce même point de vue ; l'équation différentielle du mouvement, partielle du deuxième ordre, ne peut pas s'intégrer, du moins en termes finis.

Le même Euler, dans son mémoire de *Sono campanarum*, a aussi tenté de ramener les vibrations des surfaces rigides de révolution à celles des anneaux ou lignes circulaires à ressort, en considérant ces surfaces comme des assemblages de pareils anneaux situés dans des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, et en supposant que l'effet des vibrations consiste dans les variations de longueurs de leurs diamètres. Il arrive à une équation aux différences partielles du quatrième ordre, ainsi que le comporte la nature de la question,qui ne peut pas s'intégrer en termes finis.

Voilà tout ce que les mathématiciens ont pu faire sur les problèmes des corps sonores, considérés dans le cas de deux dimensions, et en y introduisant même des simplifications qui, on ne peut se le dissimuler, changent l'état naturel des choses, de manière que les résultats de l'analyse n'y peuvent point être applicables.

Ces simplifications hypothétiques sont surtout inadmissibles lorsqu'il s'agit des surfaces vibrantes métalliques, ou jouissant d'une élasticité naturelle ; prenant le cas le plus simple qui est celui du plan, il est manifeste qu'on ne peut pas lui appliquer la supposition d'Euler sur les surfaces de révolution qui réduirait les vibrations à de simples changemens de formes des courbes qu'on peut tracer sur ce plan.

On n'a donc pas même les équations différentielles du mouvement pour cette espèce de vibrations, en envisageant leurs phénomènes tels que la nature les donne, et la seule recherche de ces équations offrirait aux mathématiciens un sujet de méditation très-intéressant, qui pourrait également contribuer aux progrès de la physique et à ceux de l'analyse.

On se trouve heureusement, relativement aux vibrations des surfaces élastiques, dans une position pareille à celle où Sauveur a mis les physiciens et les mathématiciens, au commencement du 18e siècle, relativement aux vibrations de la corde tendue. M.

Chladni s'est occupé depuis plusieurs années de l'examen des phénomènes acoustiques qu'offrent les lames élastiques ; il a découvert et rendu perceptibles, d'une manière très ingénieuse, dans ces lames, des *nappes vibrantes* analogues aux *ondes* des cordes de Sauveur, et des courbes *d'équilibre* ou de *repos* auxquels correspondent les *nœuds* ou *points de repos* des mêmes cordes.

Sa Majesté l'EMPEREUR ET ROI qui a daigné appeler M. Chladni auprès d'elle et voir ses expériences, frappée de l'influence qu'aurait sur les progrès de la physique et de l'analyse, la découverte d'une théorie rigoureuse qui expliquerait tous les phénomènes rendus sensibles par ces expériences, a désiré que la classe en fit le sujet d'un prix qui serait proposé à tous les savans de l'Europe. Cette nouvelle conception du génie bienfaisant qui anime et dirige les vues grandes et profondes de Sa Majesté pour le progrès et la propagation des lumières, sera reçue avec reconnaissance par tous les peuples qui honorent et cultivent les sciences.

La classe propose donc pour sujet de prix de *donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, et de la comparer à l'expérience*.

Le prix sera une médaille d'or de la valeur de 3000 francs ; il sera décerné dans la séance publique du premier lundi de Janvier 1812.

Les ouvrages ne seront reçus que jusqu'au premier Octobre 1811, ce terme est de rigueur ».

Annexe B

Lettres, correspondances

Lettre écrite par Lalande à Germain (Stupuy et Germain, 1896, p. 392)

Au Collège de France, 4 novembre 1797.

Il était difficile, Mademoiselle, de me faire sentir plus que vous ne l'avez fait hier, l'indiscrétion de ma visite et l'improbation de mes hommages, mais il m'était difficile de le prévoir. Je ne puis même encore le comprendre, et le concilier avec les talents que mon ami Cousin m'a annoncés. Il me reste a vous faire des excuses de mon imprudence ; on apprend à tout âge, et les leçons d'une personne aussi aimable et aussi spirituelle que vous, se retiennent plus que les autres. Vous m'avez dit que vous aviez lu le Système du monde de Laplace, mais que vous ne vouliez pas lire mon Abrégé d'astronomie comme je crois que vous n'auriez pas entendu l'un sans l'autre, je n'y vois d'autre explication que le projet formé de me témoigner l'indignation la plus prononcée, et c'est l'objet de mes excuses et de mes regrets.

Salut et respect, Lalande

Extraits d'une lettre écrite par Germain à Libri (Del Centina, 2005, p. 8-10)

Paris 15 7^{embre} 1826

(...) Je ne suis pas etonné de votre empressement à renouver les conversations qu'on ne peut trouver ailleurs qu'à Paris, toutes les portes vous étaient ouvertes, pour moi qui ne peut aller aux séances je me trouve presqu'aussi étrangère au mouvement des sciences que si j'habitais un autre pays, cependant j'aime encore mieux être ici qu'ailleurs par-

cequ'enfin il m'arrive quelquefois de trouver pour hasard une occasion de m'instruire.
(...)

Vous ne croiriez peut-être pas qu'etant au milieu de Paris je ne puisse reussir à voir un Monsieur Savart qui a fait mille espèriences curieuses, il les montre a des gens qui n'en peuvent tirer aucun parti. Ces faits sont de mon domaine et c'est a moi seule qu'ils restent cachés. Voilà le privilege des dames elles obtennent des compliments et aucun avantages réels. Ce Monsieur Savart auroit pu m'aider beaucoup s'il en voulu employer le genre de sagacité dont il est doué à faire des bonnes experiences sur les surfaces courbes, je seroi bien heureuse si j'avois sur ce genre de surface des esperiences aussi sures que celles de Chladni, ces tables m'ont beaucoup servies.

A defaut de secours etrangers je me suis mise a l'oeuvre, j'ai fait bien peu de choses et je suis déjà obligée de suspendre ce travail parce que j'ai la poitrine abimée de fatigue. Je tiens les sons jus'qu'à ce que je puisse les comparer à ceux d'un instrument, cette methode est bonne en elle même mais il n'y a pas de grand air d'opera qui soit plus fatigant que cette tenue repetée pendant plusieurs heures de suite.
(...)

S. Germain

Trois lettres qu'a écrit Legendre à Germain lors de ses recherches pour le premier mémoire, afin de l'aider à comprendre les travaux d'Euler

Première lettre de Legendre à Germain, non datée (Stupuy et Germain, 1896, p. 287-298)

L'équation $\sin \frac{1}{2}\omega = 0$ n'est pas une conséquence nécessaire de l'équation à résoudre ; elle vient d'un facteur qui a été introduit par la multiplication, et qui est étranger à la solution du problème.

En effet, la première forme de l'équation générale (page 154) étant :

$$0 = 2 - 2e^{2\omega}\left(e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}\right)\left(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}\right)\left(\cos\lambda\omega + \cos\left(1-\lambda\right)\omega\right)$$

Si on y fait $\lambda = \frac{1}{2}$, elle devient

$$0 = 2 - 2e^{2\omega} - \left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{\frac{3}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right) 2\cos\frac{1}{2}\omega$$

Or, celle-ci n'est pas satisfaite par la supposition $\sin \frac{1}{2}\omega = 0$; elle le serait seulement par la supposition $\frac{1}{2}\omega = 0$, ou $\frac{1}{2}\omega$ égal à un infiniment petit, cas dont on fait abstraction.

La solution $\sin \frac{1}{2}\omega = 0$ ou $\frac{1}{2}\omega = K\pi$ est d'ailleurs inadmissible, puisqu'elle donne des valeurs infinies pour les coefficients $\lambda, \lambda', \delta'$, page 153 (et toujours en faisant $\lambda = \frac{1}{2}$). C'est ce qu'aurait dû remarquer Euler, lorsqu'il dit, page 156 : *Multiplicemus omnes coefficientes per* $\sin \frac{1}{2}\omega$. On peut bien multiplier l'ordonnée d'une courbe par une constante, afin de rendre cette courbe sensible par une construction géométrique, mais on ne peut pas multiplier par zéro. Il n'y a donc que la seconde solution qui soit légitime, et quant à celle-ci je ne vois rien à lui objecter.

Lorsque m^lle^ Sophie a voulu considérer le cas général elle est, ce me semble, tombée dans la même erreur qu'Euler, en faisant $\sin \omega = 0$. Cette solution est illusoire, elle résulte d'un facteur donné mal à propos à l'équation et elle aurait, comme dans le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, l'inconvénient de rendre infinis les coefficients $\lambda, \lambda', \delta'$, etc., de la courbe.

Au reste, excepté la première solution qui demande quelque tâtonnement, pour avoir la valeur précise de ω, il est facile de résoudre généralement l'équation d'Euler, page 154, savoir :

$$0 = 2 - 2e^{2\omega}\left(e^{\lambda\omega} - e^{2\lambda\omega}\right)\left(e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}\right)\left(\cos\lambda\omega + \cos\left(1-\lambda\right)\omega\right)$$

En effet, si on a bien saisi l'esprit de la résolution des six cas principaux, on verra que, passé la première solution, et quelque fois même dans la première solution, la quantité e^{ω} devient si grande, qu'on peut négliger en toute sûreté $e^{-\omega}$ par rapport à e^{ω}, de même que $e^{-\lambda\omega}$ par rapport à $e^{\lambda\omega}$. D'après ce principe, l'équation précédente se réduit à celle-ci :

$$0 = 2e^{2\omega} + e^{2\omega}\left(\cos\lambda\omega + \cos\left(1-\lambda\right)\omega\right)$$

ou simplement :

$$\cos\lambda\omega + \cos\left(1-\lambda\right)\omega = 2$$

Or, ayant fait $\cos\lambda\omega = x, \cos\left(1-\lambda\right)\omega = y$ on trouvera aisément, suivant les différentes valeurs de λ, une équation algébrique entre x et y, laquelle combinée avec l'équation $x + y = 2$, donnera un nombre déterminé de solutions, par exemple :

$$\lambda\omega = \alpha, \quad \lambda\omega = \beta, \quad \lambda\omega = \gamma$$

. De ces solutions on formera ensuite les solutions générales :

$$\lambda\omega = \alpha + k\pi, \quad \lambda\omega = \beta + k\pi, \quad \lambda\omega = \gamma + k\pi, etc$$

k étant un nombre à volonté.

Ainsi il y aura pour ω autant de fois de valeurs que l'équation en x aura de racines.

Soit, par exemple, $\lambda = \frac{1}{3}$, il faudra satisfaire à l'équation

$$2 = \cos\frac{1}{3}\omega + \cos\frac{2}{3}\omega$$

, Or si l'on fait $\cos\frac{1}{3}\omega = x$, on aura

$$\cos\frac{2}{3}\omega = x + \frac{-1+xx}{2x},\ \text{d'où}\ x + \frac{x^2-1}{2x} = 2, ou 3x^2 - 1 = 4x$$

. Et enfin $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$: appelons α et β les deux angles compris entre 0 et 180^0, qui donnent $\cos\alpha = \frac{2+\sqrt{7}}{3}, \cos\beta = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ et nous aurons généralement

$$\frac{1}{3}\omega = \alpha + k\pi$$

$$\frac{1}{3}\omega = \beta + k\pi$$

C'est-à-dire que les valeurs de ω formeront deux suites distinctes

$$3\alpha, 3\alpha + 3\pi, 3\alpha + \beta\pi, etc$$

$$3\beta, 3\beta + 3\pi, 3\beta + \beta\pi, etc$$

chacune donnant lieu à une manière d'osciller de la lame.

Dans l'application, il faudrait rechercher plus exactement les deux premiers termes $3\alpha, 3\beta$; mais les autres seront toujours suffisamment approchés.

Deuxième lettre de Legendre à Germain, Paris, ce 19 janvier 1811

La multiplication par $\sin\frac{1}{2}\omega$, contre laquelle je m'étais élevé dans ma première note, s'explique en examinant les choses de plus près, et voici comment.

Avant de faire aucune supposition sur la valeur de ω, l'auteur (page 154) trouve le rapport $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}}{e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}}$ d'où il conclut $\alpha = e^{\lambda\omega} - e^{\omega(2-\lambda)}; \alpha' = e^{\lambda\omega} - e^{-\lambda\omega}$; parce qu'en effet il peut multiplier tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, par un même nombre, puisqu'il reste encore un coefficient arbitraire C qui multiplie le tout. Mais comme par suite la valeur $\frac{1}{2}\omega = 0$, on trouve $\alpha = 0$, et $\alpha' = 0$, il s'en suit qu'on a mal à propos multiplié tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, par une quantité infinie, puisqu'un coefficient α, qui, sans cette multiplication aurait été zéro, est devenue une quantité finie.

Pour rectifier cette erreur, il faut donc supprimer le facteur infini, ou multiplier par $\sin \frac{1}{2}\omega$.

Cette explication laisserait encore quelque obscurité, et il est bien plus simple de refaire le calcul des coefficients dans la supposition de $\sin \frac{1}{2}\omega = 0$ ou $\frac{1}{2}\omega = i\pi$, λ étant $\frac{1}{2}$.

Soit donc $\sin \frac{1}{2}\omega = 0$ et alors en remontant tout simplement aux équations primitives de la page 152, on trouve sans aucune difficulté $\alpha = 0, \beta = 0, \delta = 0, \alpha' = 0, \beta' = 0, \gamma' = 0$. Il ne reste que γ et γ' qui ne s'anéantissent pas. Mais les équations dont il s'agit n'en déterminent pas la valeur, et on trouve simplement $\gamma = \gamma'$. A cause du multiplicateur commun C, on peut faire $\gamma = 1$ et on aura $\gamma' = 1$. Euler dans son analyse (mal ordonnée) trouve $\gamma' = -\gamma$, mais c'est une erreur manifeste, et les équations III et IV de la page 152 donnent évidemment $\gamma = \gamma'$.

Voilà une difficulté très vraie et très grave, et voyez les conséquences qui en résultent. Si on a $\gamma = \gamma'$, alors l'équation de la portion de courbe LF (page 157) n'est plus $y = -C \sin(3 + \alpha)$, mais bien $y = +C \sin(3 + \alpha)$ comme celle de la portion EL.

Il reste dons à chercher laquelle de ces équations est la vraie. On pourrait croire, au premier coup d'œil, que c'est celle d'Euler qui semble indiquer tout de suite des ordonnées négatives pour la portion LF. Eh bien, point du tout. Euler s'est trompé dans cette équation par suite de son erreur sur le signe de γ' et la vraie équation de la portion LF est :

$$y = C \sin\left(3 + \frac{\omega^2 c\sqrt{23\beta}}{aa}\right) \sin \mu\omega$$

absolument comme celle de la portion EL, c'est-à-dire que ces deux portions ne font qu'une seule et même courbe désignée par la même équation. Résultat qui se rapproche entièrement de la théorie que Mlle Sophie voulait adopter, même en dépit des équations d'Euler et de ma note première.

Il suffit pour s'en convaincre de remarquer puisque $\sin \mu\omega$ est zéro lorsqu'on fait $\mu = \frac{1}{2}$, les deux suppositions $\mu < \frac{1}{2}, \mu > \frac{1}{2}$ donneront deux résultats de signes contraires pour $\sin \mu\omega$, de sorte qu'avant et après le point L, les ordonnées seront de signes différents.

Voilà donc la difficulté entièrement résolue pour ce point ; elle venait de l'erreur de signe qu'a faite Euler dans l'équation $\gamma = \gamma'$.

Je dois aussi ajouter, contre l'opinion que j'avais avancée dans ma première note, que le facteur $\sin \frac{1}{2}\omega$, donne la solution admissible $\sin \frac{1}{2}\omega = 0$, ou $\frac{1}{2}\omega = \alpha\pi$. Quant à l'autre solution contre laquelle je ne vois pas d'objection, il me semble qu'on ne peut la rejeter par cette seule raison que les sons rendus par la lames dans les deux portions

ne s'accorderaient pas entre eux. Les oscillations peuvent très bien avoir lieu sans être harmoniques.

J'ai cru, Mademoiselle, ne pas devoir vous faire attendre jusqu'à lundi ces explications que votre discernement appréciera à leur valeur. Je vous les envoie comme une preuve de mon zèle et de mon dévouement.

***Troisième lettre de Legendre à Germain*, 28 janvier 1811**

Euler n'a traité qu'en passant et par forme d'exemple son problème § 47 ; il peut s'y être mépris tant en fait de calcul qu'en fait de raisonnement. Il s'est mépris certainement dans le calcul lorsqu'il a trouvé $\gamma = -\gamma'$, puisqu'on doit avoir $\gamma' = \gamma$. Il se peut aussi que la seconde solution soit purement analytique et ne satisfasse pas aux circonstances physiques du problème. C'est ce que je ne déciderai pas, n'ayant pas assez réfléchi sur ces sortes de questions et n'ayant pas le loisir ni le goût de me livrer à un examen plus approfondi. J'aime donc mieux donner cause gagnée à Mlle Sophie que de lutter avec elle sur un sujet qu'elle a beaucoup médité. Voici seulement ce qui me paraît le plus probable.

Avant toute discussion, il faudrait avoir bien fixer le sens du mot *Simpliciter fixus* qu'emploie Euler. Comme dans ce point, y est toujours zéro, il faut, ce me semble, regarder le stylet comme une aiguille fixe qui traverse la verge au milieu de sa largeur, et autour duquel elle peut tourner dans tous les sens. Je ne vois pas que le mot d'Euler puisse avoir une autre signification.

Cela posé, si l'on a bien déterminé dans le problème IV tous les mouvements que peut prendre une verge élastique dont les extrémités sont *simplement fixes*, parmi tous les mouvements réguliers possibles il y en aura un certain nombre dans lesquels le point milieu de la verge demeurera en repos. Ces derniers mouvements satisferont au problème du § 47, il ne s'agira donc que de retrancher de la solution générale du problème IV, toutes les solutions qui ne satisfont pas à cette condition.

Pareil raisonnement s'applique à tous les autres cas généraux depuis le problème 1 jusqu'au problème VI, et il s'applique encore au cas où le stylet serait appliqué à un autre point que le milieu, ou même aux cas où plusieurs stylets seraient appliqués en différents points de la verge, au moins suivant des distances qui seront dans un rapport rationnel avec la longueur entière de la verge.

Cette explication peut faire disparaître beaucoup de difficultés, mais je ne me dissimule pas qu'elle est sujette à une objection.

Quand on considère dans les problèmes successifs I, II ... VI, les différents mouvements de la verge, on suppose qu'elle est entièrement libres dans les points intermédiaires, et qu'ils n'éprouvent dans leurs mouvements aucune résistance. Le cas n'est plus le même lorsqu'on conçoit un ou plusieurs stylets appliqués en différents points. Si ces stylets ne supportent aucune pression dans aucun sens, la solution telle que nous venons de la concevoir pourra être appliquée ; mais s'ils en supportent une, il faudra y avoir égard. Les solutions des problèmes I, II ... VI ne sont plus applicables, et tout notre édifice croule.

Permettez, Mademoiselle, que je vous laisse vous dégager comme vous pourrez de ces ruines, moi je me sauve, en vous faisant ma très humble révérence.

Lettre de Legendre à Germain, datant du 4 décembre 1811 (*Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900* s. d., p. 300-303)

Mademoiselle, je n'ai pas de bonnes nouvelles à vous donner de l'examen du Mémoire. On trouve que votre équation principale n'est pas exacte, même en admettant l'hypothèse que l'élasticité en chaque point peut être représentée par $\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}$. M. de Lagrange a trouvé que, dans cette hypothèse, la vraie équation devrait être de la forme $\frac{d^2z}{dt^2} = k^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right)$ en supposant d'ailleurs z très petit. Je n'ai point vérifié ce calcul on peut s'en rapporter à son auteur. Mais ce qui du premier coup d'œil confirme son exactitude, c'est qu'en supposant la surface vibrante réduite à une lame d'une largeur constante, ce qui peut s'exprimer en faisant $\frac{dz}{dy} = 0$, on retombe sur l'équation $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + k^2\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) = 0$ qui est, autant qu'il m'en souvient (car je n'ai pas le volume sous la main), l'équation donnée par Euler pour les lames élastiques vibrantes. Votre équation ne donnerait pas ce résultat. La source de votre erreur paraît être dans la manière dont vous avez cru pouvoir déduire l'équation de la surface vibrante de l'équation d'une simple lame ; c'est dans les doubles intégrales que vous vous êtes égarée. Elles ne se prêtent nullement aux substitutions que vous avez employées. Il fallait, pour l'équation de la surface, suivre la méthode indiquée par Lagrange dans la nouvelle édition, page 148, en ajoutant le terme convenable pour représenter la force due à l'élasticité. Au reste, ces choses sont sujettes à des difficultés particulières, qui n'ont pas été encore bien éclaircies, et il y aurait même des objections à faire contre l'analyse de l'article même que je cite.

M. Biot, qui a eu communication de votre Mémoire, prétend avoir trouvé la vraie équation de la surface élastique vibrante. Il m'en a communiqué une qu'il dit avoir

montrée il y a longtemps à M. de Laplace, et qui n'est pas la même que celle qu'a trouvée M. de Lagrange d'après votre hypothèse.

Je n'en rends pas moins justice à des efforts qui sont louables en eux-mêmes, quoiqu'ils n'aient pas l'issue que j'aurais désirée ; mais c'est une raison de plus de garder l'incognito, et je vous promets de mon côté de garder le plus profond silence.

J'imagine que la même question sera posée avec un nouveau délai ; ainsi miséricorde n'est pas perdue. Au contraire, il faut plus que jamais songer à emporter la palme.

Agréez, Mademoiselle, les sentiments affectueux de votre dévoué serviteur.

Legendre

Lettre de Legendre à Germain, datant du 4 décembre 1813 (Stupuy et Germain, 1896, p. 303-306)

Mademoiselle, je ne comprends pas du tout l'analyse que vous m'envoyez ; il y a certainement erreur, ou dans l'écriture, ou dans le raisonnement et je suis porté à croire que vous n'avez pas une idée bien nette des opérations qu'on fait sur les intégrales doubles dans le calcul des variations. Votre explication des quatre points ne me satisfait pas davantage.
Lagrange a eu raison de considérer deux éléments consécutifs dans la courbe élastique, et de mesurer l'élasticité par l'angle compris entre les deux éléments. On n'a pas d'éléments analogues dans les surfaces, ou du moins ceux que nous avons considérés ne sont pas dans le signe de l'analogie. Un élément de la surface a pour projection

$$(dx + ddx)(dy + ddy) \quad ;$$

ces deux projections font deux carrés séparés. Ensuite l'idée des plans ne s'accommode pas avec ces projections, parce qu'un plan ne passe pas par quatre points. Il y a donc dans tout cela beaucoup d'obscurité.
Je ne me charge pas de vous lever toutes les difficultés dans une matière que je n'ai pas cultivée spécialement, et qui n'a pas d'attrait pour moi ; ainsi, il est inutile que je vous donne un rendez-vous pour en causer. D'ailleurs le sort en est jeté, il n'y a plus rien à changer au Mémoire, et avec toute ma bonne volonté je n'y pourrais rien faire.
Il paraît reconnu cependant que votre équation est réellement celle de la surface vibrante. En mettant l'analyse à part, le reste peut être bon, en ce qui concerne l'explication des phénomènes. Si la commission de l'Institut était de cet avis, vous pourriez

au moins être mentionnée honorablement ; mais je crains bien que l'analyse manquée ne nuise beaucoup au Mémoire, malgré ce qu'il peut contenir de bon.
Dans tous les cas, vous aurez la ressource de faire imprimer vos recherches en rétablissant la vraie analyse ou en la supprimant, et votre travail vous fera encore honneur. C'était peut-être le parti qu'il fallait prendre à l'origine. Mais je vous promets toujours le plus profond secret, et, si vous n'avez pas commis d'ailleurs quelque indiscrétion, la chose sera comme non avenue.
Agréez, je vous prie, mes hommages et mon entier dévouement

Correspondance entre Poisson et Germain, datant de 1816 (Stupuy et Germain, 1896, p. 307-310)

Le jugement prononcé par la classe m'a appris que je m'étais abusée sur la démonstration qui vous a été soumise mais il ne m'a pas fait connaître quelle est la nature de l'erreur que j'ai commise. M. Hallé, à qui j'ai témoigné combien je serais curieuse de savoir en quoi pèche ma démonstration, a bien voulu se charger de vous prier d'éclaircir mes doutes. Je ne crois pas m'être trompée dans la manière dont l'équation générale a été déduite de l'hypothèse ; il faut donc que ce soit l'hypothèse elle-même qui n'ait pas été justifiée d'une manière satisfaisante.

Dans la vue de vous éviter la peine de revoir la démonstration, j'ai reproduit dans la note ci-jointe les raisonnements sur lesquels elle est fondée. Je les ai écrits à mi-marge, afin qu'il vous soit plus facile de marquer l'endroit où vous avez jugé que la chaîne du raisonnement est interrompue.

Plus j'ai de respect pour votre jugement, plus je dois attacher d'importance à obtenir les éclaircissements que je sollicite de votre complaisance.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

S.GERMAIN

Voici la note dont parle Germain :

Quelles que soient les forces que l'on considère, elles sont proportionnelles à l'effet qu'elles produisent ou tendent à produire. - Les forces d'élasticité tendent à détruire la différence entre la forme naturelle des corps qui en sont douées et la forme que les mêmes corps ont été forces de prendre par l'action d'une cause extérieure. - Les forces d'élasticité qui agissent sur un corps élastique quelconque, ont donc pour mesure la différence, entre la forme naturelle de ce corps et la forme qu'une cause extérieure la force

de prendre. L'effet produit par une force est explicitement ou implicitement l'ensemble des effets produits par la même force. - Explicitement si on considère successivement tous les divers effets sans exprimer qu'il permet de les considérer comme un fait unique. - L'effet des forces d'élasticité qui agissent sur une surface est de détruire la différence entre la courbure naturelle de la surface et la courbure que la même surface a été forcée de prendre par l'action d'une cause extérieure. Mais la question sur la courbure d'une surface n'est pas susceptible d'une réponse simple ; elle se compose de l'ensemble des questions relatives à la courbure des courbes résultantes de sections de la même surface faites dans toutes les directions et sous toutes les inclinaisons possibles. - L'ensemble des différences entre les courbures des courbes résultantes des diverses sections de la surface, considérées avant et après l'action de la cause extérieure, est donc explicitement la mesure des forces d'élasticité, qui agissent sur cette surface. - Il existe entre les courbures des courbes formées par les diverses sections de la surface une liaison telle qu'il est permis d'exprimer leur somme par celle des seules sections principales. - L'effet des forces d'élasticité est donc implicitement exprimé par la somme des seules différences entre les courbures principales de la surface, considérées avant et après l'action de la cause extérieure.

Réponse de Poisson à la lettre ci-dessus envoyée par Germain :

Paris, ce 15 janvier 1816.

Mademoiselle, M. Hallé vient de me remettre une lettre que vous me faites l'honneur de m'adresser et qui contient plusieurs questions relatives à votre Mémoire. Le reproche que la commission lui a fait porte moins sur l'hypothèse dont vous êtes partie, que sur la manière dont vous avez appliqué le calcul à cette hypothèse. Le résultat auquel ce calcul vous a conduite, ne s'accorde avec le mien que dans le seul cas où la surface s'écarte infiniment peu d'un plan, soit dans l'état d'équilibre, soit dans l'état de mouvement. On imprime succinctement mon mémoire, et je me propose de vous en offrir un exemplaire, aussitôt que l'impression sera achevée.

Permettez donc, Mademoiselle, que nous ajournions la discussion à l'époque où vous aurez pu comparer mes résultats aux vôtres.

Agréez l'hommage de mon respect et de ma haute considération. POISSON

Lettre de Fourier envoyée à Germain le 8 mars 1824 (*Journal des mathématiques pures et appliquées]* 1880, p. 6 & 7)

Mademoiselle, Je regrette extrêmement de n'avoir pu répondre aussi promptement

que je l'aurais désiré au sujet du Mémoire de Mathématique que vous nous avez envoyé. Je me suis acquitté fidèlement de la commission que vous m'aviez donnée en m'adressant cette pièce. M. Cuvier était chargé lundi dernier de la lecture de la correspondance. Je l'ai prié de présenter votre Mémoire et j'en ai indiqué l'objet. Après la lecture, on a nommé MM. Laplace, Prony et Poisson commissaires. J'insisterai autant qu'il sera nécessaire pour qu'ils fassent le Rapport que vous désirez. Si M. Poisson a le dessein de montrer quelque opposition au résultat de vos recherches, il ne pourra s'empêcher de céder à l'autorité de l'expérience que personne ne sait mieux consulter que vous. Autant que j'ai pu prendre connaissance de la discussion dont vous vous êtes occupée, il m'a paru que vous mettez dans tout son jour l'insuffisance de l'hypothèse théorique dont il a voulu déduire l'équation du quatrième ordre, que vous avez trouvée. Je n'aurais pu concourir moi-même à l'examen et au Rapport de ce Mémoire sans me détourner des occupations instantes dont je me trouve chargé. Toutes les personnes présentes à la séance ont entendu avec le plus grand intérêt l'annonce de votre Mémoire. La difficulté du sujet, la célébrité des auteurs qui l'ont traité et votre nom ne pouvaient manquer d'exciter l'attention. Nous nous en sommes entretenus avec plusieurs personnes à l'Académie et chez M. de Laplace. Je vous remercie, Mademoiselle, des nouvelles marques d'intérêt que vous me donnez en vous occupant de ma santé et de mes travaux. C'est une obligation fâcheuse que celle des discours publics, et les personnes dont j'estime le plus les suffrages sont celles que je crains le plus d'avoir pour auditeur.

J'aurais préféré de vous rendre compte de vive voix au sujet de la présentation de votre Mémoire, et je profiterai d'une autre occasion pour vous en parler. Je suis présentement retenu par des occupations beaucoup moins agréables.

Agréez, Mademoiselle, avec l'hommage de mes remercîments, celui de mon respect.

J^{h} Fourier

Vendredi matin

P.S. - Le procès-verbal que j'ai rédigé contient la mention de la lecture de votre Mémoire, et la lettre, par laquelle je vous informe des noms des commissaires, ne vous est point encore parvenue, parce qu'on n'a coutume de les expédier qu'après que le procès-verbal a été lu et adopté. J^{h}

Annexe C

Déroulement du raisonnement dans les trois mémoires et mise en évidence des points communs

Code couleur :
violet : notion abordée dans les mémoires mais exposée différemment
bleu : notion identique dans les mémoires
rouge : nouvelle notion abordée dans le mémoire

1811

Introduction (Avertissement)

Précise qu'elle donnera dès le début de son mémoire et sans détails l'équation différentielle de l'équilibre d'une surface élastique soumise à l'action de forces quelconques

→ déduction de celle du mouvement de la même surface

Simplification de cette équation grâce à des suppositions déjà faites par d'autres mathématiciens contemporains auparavant lors de l'étude des sons

Élasticité nulle et suppositions → **son équation est alors identique à celle d'Euler** et à celle de Biot

Avec d'autres suppositions → équation d'une surface inégalement tendue (pas encore étudiée à sa connaissance) : équation différentielle du 6^0 degré

Pour l'intégrer : cas des mouvements réguliers dont la plaque est susceptible

Mot vibration s'applique au cas où les vibrations donnent lieu à l'existence d'un son proprement dit (et non pas du bruit-cf expériences de Chladni → mouvements réguliers

Applique la méthode d'Euler pour l'intégration du mouvement de la lame

Quelques comparaisons entre les résultats de la théorie et des expériences cas où les figures présentent une sorte de régularité)

Demande à la classe son avis

1813

Introduction

Si étude générale : calculs très compliqués

→ mouvement régulier des surfaces planes, comparable à celui d'un pendule simple

→ équation différentielle dont les intégrales particulières sont facilement applicables

simplification dans les formules

expériences de Chladni : comprises dans les cas des mouvements réguliers (seuls appartenant à l'acoustique)

1815

Introduction

Parle directement de son hypothèse

Son hypothèse mène directement à l'équation de la surface élastique

Son hypothèse n'est que l'expression analytique de la manière d'agir des forces d'élasticité

Demande à la classe son avis

1811

1. Commence par donner l'équation de l'équilibre de la surface vibrante élastique **(d'après Euler)**

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds$$

$$-2\int dxdy \int Rds = V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

(moment de la force d'élasticité donné en bas de page sans trop d'explications :

$$V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

et sens de chaque « terme » intervenant dans cette équation)

2. Plaque mise en mouvement et donne d'après les principes de la mécanique l'équation du mouvement de la surface vibrante élastique :

$$\int dzdy \int P'ds + \int dzdx - \int Q'ds$$

$$-2\int R'dxdy = V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

3. Introduit dans cette équation des simplifications convenables et calcule la somme

$$V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

Suppose que la surface s'écarte très peu du plan des x et y et que le mouvement se fait suivant la direction des z (supposition analogue à celles adoptées par les mathématiciens contemporains qui ont traité des mouvements vibratoires des différentes espèces de corps sonores)

1813

1. Commence par calculer la somme des moments des forces d'élasticité qui agissent dans toute l'étendue de la surface :

$$\iint E\beta\delta_e$$

elle va calculer δ_e, β puis E (considérations géométriques : plans passant par certains points – ce qu'elle a déjà fait dans la note qui suit le 1er mémoire ; elle va refaire des calculs qui apparaissent dans cette même note) en supposant que le mouvement des vibrations s'écarte très peu de sa position naturelle et se fait dans la direction des z Après plusieurs calculs, elle aboutit à la somme des moments d'élasticité qui agissent dans toute l'étendue de la surface :

$$\iint \frac{dd\left(E\beta^2\right)}{ds}\delta z = -\iint b\Gamma^3\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right.$$

$$\left.+2\frac{d^4z}{dy^2dx^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right)dxdy\delta z$$

Équation du mouvement de la surface soumise à la seule force d'élasticité (abstraction du poids)

$$b\Gamma^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dy^2dx^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) + \frac{ddz}{dt^2} = 0 \qquad (A)$$

2. Mouvement régulier, comparable à celui d'un pendule simple de longueur k (en prenant pour unité des espaces parcourus la hauteur dont un corps abandonné à lui-même tombe dans une seconde, on a $\frac{ddz}{dt^2} = -\frac{z}{k}$ → équation de la surface élastique vibrante :

1815

1. Commence par rappeler que les forces « sont proportionnelles à l'effet qu'elles produisent ou tendent à produire » Détermine la mesure des forces d'élasticité : différence entre l'état naturel des divers points du corps élastique et l'état des mêmes points après l'action de la cause extérieure Définition d'un corps élastique Force d'élasticité qui agit sur l'élément dm est proportionnelle à la quantité $C(E-I)$ où C est une constante, E est la figure élastique, I est la figure initiale Formule pour déterminer le moment de la force d'élasticité :

$$-C(E-I)\iint (E-I)dm$$

Elle va chercher la valeur de la différence $E-I$ **2.** corps élastique = simple lame → moment de la force d'élasticité qui agit sur l'élément dm :

$$-C\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\int\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)ds$$

(le moment $E\int e$ se ramène aisément à la forme $-C\frac{1}{r}\int\frac{1}{r}ds$)

3. Surface courbe : plus difficile d'exprimer la différence $E-I$ Pour y parvenir, elle utilise à nouveau des considérations géométriques (plans), fait un certain nombre de calculs en utilisant les rayons des courbures des 2 surfaces

1811

→ équation du mouvement de la surface vibrante élastique :

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx - \int Qds$$

$$-2\int R'dxdy = -V\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$$

4. Elle désigne par E l'épaisseur supposée constante ; Eds est alors la masse de l'élément de surface et aussi le volume de matière qu'il contient
d'où $R' = R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$
Analogie avec **Euler** : $V = E^2bc$
où $b =$ quantité dépendant de la matière de la plaque élastique vibrante
$c =$ autre coefficient qu'un examen permettra sans doute de déterminer Travaille (calculs : différentie par rapport à x et à y, divise par dx et dy) sur l'équation différentielle du mouvement donnée au n^{0}3 pour obtenir l'équation de la surface élastique soumise à l'action d'une force quelconque dirigée suivant les z et de deux forces de tension inégales entre elles dirigées suivants les x et les y :

$$P''\frac{d^2z}{dx^2} + Q''\frac{d^2z}{dy^2} - 2\left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right) =$$

$$-E^2bc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)$$

5. Analogie avec **Euler** (si élasticité nulle, équation de la lame élastique soumise à l'action d'une force de tension = équation d'une corde flexible) → idem pour la surface : si élasticité $b = 0$, l'équation ci-dessus s'écrit

1813

$$kb\Gamma^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dy^2dx^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = z \qquad (B)$$

Cette équation donne en faisant $kb\Gamma^2 = b^4$:
$b^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) = z$ et $b^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) = -z$
La 2ème équation est l'équation des mouvements réguliers des surfaces tendues : cette équation n'a pas d'intégrale générale en termes finis ; on peut seulement trouver les intégrales particulières de l'une et l'autre équation du second degré Elle va chercher à intégrer l'équation différentielle de la surface élastique vibrante **3.** La condition $\frac{ddz}{dt^2} = -\frac{z}{k}$ donne

$$z = M\sin\left(t\sqrt{\frac{1}{k} + \zeta}\right)$$

où ζ est une constante et M est une fonction de x, y
la nature de cette fonction détermine les différentes intégrales particulières de (B)
Dans les valeurs de z données par (B), on aura le facteur $\sin\left(t\sqrt{\frac{1}{k} + \zeta}\right)$ qu'elle n'écrira pas par la suite Cherche les intégrales de (B) :
pour cela, elle a recours à différentes conditions comme $\frac{ddz}{dxdy} = 0$ (i.e. $z =$ somme de deux fonctions séparées des variables x et y) → Donne une intégrale de (B) :

1815

→ moment de la force d'élasticité qui agit sur l'élément d'une surface élastique :

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\int\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right)dm$$

où f et g sont les rayons des courbures principales de la surface élastique
F et G sont les rayons des courbures de la surface initiale
Somme des moments de toutes les forces d'élasticité qui agissent dans toute l'étendue de la surface :

$$-\iint C\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right)$$

$$\int\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right)dm$$

4. Quelle que soit la nature des forces auxquelles les différents points de la surface sont supposés soumis, on peut toujours rapporter ces forces à trois directions perpendiculaires entre elles →

$$-C\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right)\delta\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} - \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{G}\right)\right)$$

$$= X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta\pi$$

5.6. Action d'une force extérieure suivant l'axe des z sur une surface élastique de forme quelconque, après un certain nombre de calculs (intégrations, divisions) → équation d'une surface élastique de figure quelconque qui aura été forcée de changer de forme par l'action d'une force extérieure dirigée suivant l'axe des z et qui abandonnée à elle-même ne sera plus animée, dans toute son étendue, que par les seules forces intérieures qui résultent de la tendance d'une telle surface à reprendre sa figure naturelle ; mais qui

1811

$$P''\frac{d^2z}{dx^2}+Q''\frac{d^2z}{dy^2}=2\left(R-\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

qui est alors l'équation pour une surface tendue par des forces et soumise à l'action d'une force agissant dans la direction de la pesanteur.
Si force selon la pesanteur nulle, alors $R=0$, et si de plus $P''=Q''$, alors l'équation s'écrit

$$P''\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-\frac{E}{g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

et pour la rendre identique à celle de Biot : en considérant la direction de la force de tension P'', on a $-\frac{P''}{E}=K^2$, on obtient

$$\frac{d^2z}{dt^2}=K^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

qui est l'équation d'une surface tendue **6.** Dernière équation du n^{0}4 avec $P''=Q''=R=0$:

$$\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-E^2bc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2}+\frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)$$

équation de la surface élastique libre de toute force Va appliquer à cette équation la méthode suivie par **Euler** :
cas où le mouvement de la surface est régulier (donc comparable à celui d'un pendule simple de longueur k → équation

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-\frac{z}{k}$$

où t est une variable
x, y sont des constantes

1813

$$z=\ldots\mathcal{A}(aexp\frac{x+y}{2}+bexp\frac{-(x+y)}{2}+c\sin\frac{x+y}{2}+$$

$$d\cos\frac{x+y}{2})+\mathcal{B}(aexp\frac{x-y}{2}+bexp\frac{-(x-y)}{2}$$

$$+c\sin\frac{x-y}{2}+$$

$$d\cos\frac{x-y}{2})\quad(C)$$

et la formule du son correspondant **4.5.6.** Certaines suppositions → donnent les différentes expressions de z et les formules des sons correspondants.
Ces expressions de z (sauf la 1ère) conviennent à l'équation différentielle des surfaces tendues. **7.** Elle montre que quel que soit le corps sonore considéré, les points ou lignes de repos ne sont pas les seuls points ou lignes qui satisfont aux conditions des extrémités et qui sont de véritables limites analytiques des parties vibrantes qu'ils séparent. **8.** Étudie les conditions aux extrémités (utilise les simplifications faites par **Euler** et les conditions aux extrémités données par Lagrange) – a fait elle-même des expériences (difficultés liées au matériau et à l'influence des circonstances physiques) et comparaison sons émis par les fourches et les lames selon leurs points d'attache Elle étudie 6 cas donnés par **Euler** concernant la lame élastique, selon que les extrémités sont libres ou fixées → les points de repos des lames élastiques ne peuvent être assimilés aux nœuds de vibrations des cordes tendues ; mais personne n'avait encore vu que les intervalles qui séparent les points de repos sont inégaux entre eux (expériences à l'appui).

1815

de plus sera soumise à l'action d'une force de tension uniforme et représentée par la constante a :

$$b^2c^2(\left(\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2}$$

$$-\left(\frac{d^2P'}{dxdy}-\frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2}+\left(\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}$$

$$-\frac{p'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)-\frac{q'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)$$

$$+\frac{P'-P}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx}+q'\frac{dP}{dy}\right)+\frac{p'}{2}\left(P'^2-P^2\right)$$

$$-2(P'-P)Q')+aP'+\frac{d^2z}{dx^2}K'=0$$

7 Continue de travailler sur cette dernière équation, puis fait des suppositions particulières par rapport à la théorie du son : plan des x et y parallèle au plan tangent à la surface initiale dans le point considéré et dans leur mouvement les points de la surface s'éloignent très peu de leur position initiale, de même le plan tangent au point considéré dans la surface élastique s'éloigne très peu du plan tangent à la surface initiale : →

$$b^2c(\frac{d^4}{z}^{''}dx^4+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}$$

$$+\square\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right))+a\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)+\frac{d^2z''}{dt^2}=0$$

dans cette équation qui appartient à la surface vibrante élastique le terme qui dépend de la figure initiale de cette surface se présente sous la même forme que celui qui est dû aux forces de tensions supposées uniformes.

1811

double intégration $\rightarrow z = M \sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)$
équation de la surface libre de toute force s'écrit
(avec $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -\frac{z}{K}$ et $KEbc = f^6$)
Si $\frac{1}{\lambda^6} = f^6$, alors $z = exp\,(\lambda(x+y))$ satisfait l'équation ci-dessus, ainsi que la combinaison des 6 valeurs obtenues à partir de $\frac{1}{\lambda^6} = f^6$
$\rightarrow$ elle obtient une valeur pour z qu'elle doit accorder à $z = M \sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)$ et obtient alors l'équation

$$z = F \sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)(A \exp \frac{x+y}{f} + B \exp\,(-\frac{x+y}{f})$$

$$+(C \sin \sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + D \cos \sqrt{3}\frac{x+y}{2f}) \exp \frac{x+y}{2f}$$

$$+\left(G \sin \sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + H \cos \sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\right) \exp\left(-\frac{x+y}{2f}\right))$$

où A, B, C, D, G, H et l'angle ζ sont des constantes arbitraires telles que quelles que soient leurs valeurs, le mouvement de la plaque élastique est toujours comparable aux oscillations du pendule simple de longueur K **7.** Ce raisonnement montre que l'on peut échanger y en $\breve{}y$, et donc prendre la différence de x et y au lieu de leur somme :

1813

Signification des mots « libre » et « appuyé » : vague **9.** Étudie les conditions auxquelles sont assujettis les points du contour des plaques élastiques vibrantes : pour cela elle va considérer une plaque vibrante rectangulaire (plan de la surface au repos = celui des x et y infini et origine = un des points de repos de la surface pour que chacun des côtés soit parallèle à un des axes des x et y)
$\rightarrow$ définition de points de double limite, des conditions des limites
$\rightarrow$ application à une plaque ronde **10.** Étude des lignes nodales sur la plaque carrée : **utilise des résultats d'Euler pour le cas des extrémités libres**

$$z = \ldots (\mathcal{A}(\exp \frac{\omega x}{A} \pm \exp \frac{(A-x)\omega}{A} +$$

$$(1 \mp \exp \omega) \sin \frac{\omega x}{A} + (1 \pm \exp \omega) \cos \frac{\omega x}{A})$$

$$+\mathcal{B}(\exp \frac{\omega y}{A} \pm \exp \frac{(A-y)\omega}{A} +$$

$$(1 \mp \exp \omega) \sin \frac{\omega y}{A} + (1 \pm \exp \omega) \cos \frac{\omega y}{A})$$

les signes supérieurs appartiennent au cas où il y a un nombre pair de points de repos sur la simple lame, et les signes inférieurs conviennent à celui où il y a un nombre impair de pareils points sur la même lame Si $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B} = 0$, alors il y a autant de lignes nodales droites sur la plaque carrée qu'il y a de points de repos sur la simple lame dont la plaque ne diffère alors que par l'étendue d'une dimension qui n'entre plus dans le calcul

1815

8. Exprime les conditions aux extrémités **9.** Reprend l'équation obtenue au n^{0}6 :
identiquement semblable à celle obtenue par Poisson dans le cas où la surface élastique est naturellement plane :

$$b^2c(\frac{1+q'}{K'^2}\frac{d^2P'}{dx^2} - 2\frac{p'q'}{K'^2} + \frac{1+p'}{K'^2}\frac{d^2P'}{dy^2}$$

$$-\frac{p'P'}{K'}\frac{dP'}{dx} - \frac{q'P'}{K'}\frac{dP'}{dy} + \frac{P'}{2}\left(P'^2 - 4Q'\right))$$

$$-\left(K'Z + \frac{p'}{K'}X - \frac{q'}{K'}Y - P'\pi\right) = 0$$

10. Abstraction des forces de tension dans l'équation de la surface élastique vibrante du n^{0}7

$$\rightarrow b^2c\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4} + \pi^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right)$$

$$+\frac{d^2z''}{dt^2} = 0$$

Mouvement régulier de la surface vibrante (théorie du son) comparable à celui du pendule de longueur K
$\rightarrow$ équation de la surface vibrante :

$$Kb^2c(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4}$$

$$+\pi^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)) = z''$$

(obtention de cette équation à partir des plans coordonnées)
Cette équation renferme tous les cas que peut présenter le corps élastique vibrant.

1811

$$z = F\sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)(A\exp\frac{x+y}{f} + B\exp\left(-\frac{x+y}{f}\right)$$

$$+(C\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f})\exp\frac{x+y}{2f}$$

$$+(G\sin\sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + H\cos\sqrt{3}\frac{x+y}{2f})\exp\left(-\frac{x+y}{2f}\right)+$$

$$A'\exp\frac{x-y}{f} + B'\exp\left(-\frac{x-y}{f}\right)$$

$$+(C'\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + D'\cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f})\exp\frac{x-y}{2f}$$

$$+\left(G'\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + H'\cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)\exp\left(-\frac{x-y}{2f}\right))$$

En utilisant cette expression de z, elle exprime les valeurs de $\frac{1}{2}\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{ddz}{dx^3} + \frac{ddz}{dy^3}\right)$, ... dans lesquelles elle enlève le coefficient constant $F\sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)$ **8.** Elle veut appliquer les formules qu'elle a obtenues aux cas donnés par les expériences faites par Chladni (comparaison théorie – expériences).

Dans ces cas, il faut supposer que les plaques sont soumises à l'action d'une force quelconque d'appui ou de pression dirigée suivant les z,cette force s'appliquant au point où la plaque est soutenue (origine des coordonnées = point de pression).

Elle retravaille sur l'équation obtenue au n^{0}4 → 5 autres équations (elle en a déjà 5) qui lui permettront de déterminer les coefficients A, B, ... , A', B' , ... avec 2 autres équations : mais pas assez de temps pour le faire.

Elle utilise 3 des 5 équations qu'elle vient d'écrire pour obtenir l'équation d'une surface élastique de forme quelconque soumise à l'action d'une force de pression appliquée au centre de la figure, centre considéré comme l'origine de la surface :

1813

Elle va étudier le cas des signes supérieurs et celui des signes inférieurs (avec $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$) → en déduit le nombre de lignes nodales diagonales, mais il y a d'autres lignes nodales qui dépendent de l'angle ω hypothèse : égalité d'étendue et des courbures entre les différentes portions de la simple lame terminées par 2 points de repos consécutifs

→ si $2n$ points de repos sur la simple lame, alors $n-1$ lignes nodales parallèles à la 1ère diagonale et $n-1$ lignes nodales parallèles à la 2ème

si $2n+1$ points de repos sur la simple lame, alors n lignes nodales parallèles à la diagonale et n autres lignes nodales perpendiculaires aux 1ères et qui les coupent aux limites de la surface

(ces résultats ne sont pas valables dans l'hypothèse déduite de la théorie d'Euler) 11.12. Elle décrit ensuite les lignes nodales obtenues dans les différents cas suivant 5 valeurs de l'angle ω (reprend l'équation du n^{0}10) et donne les figures correspondantes obtenues par Chladni (comparaison expériences et théorie, elle a elle-même fait des expériences avec des plaques carrées) L'équation du n^{0}10 ne peut s'appliquer dans toute sa généralité qu'aux plaques rectangulaires.

On peut cependant retrouver dans les équations pour les plaques carrées, des cas particuliers de mouvements de plaques triangulaires isocèles rectangles. **13.** Conséquences générales de la périodicité des surfaces :

— sens analytique du mot « appuyé » = équivalent aux 2 conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0$

1815

11. Rappelle qu'elle a donné les conséquences de l'équation des plaques élastiques vibrantes dans le mémoire de 1813 → ne revient pas sur cette notion Rappelle comment on peut déduire l'équation de la lame élastique à partir de celle de la plaque élastique vibrante. Rappel d'un autre résultat obtenu dans le mémoire de 1813 : en appliquant avec les restrictions convenables l'équation d'une plaque circulaire à l'anneau plan, on constate que ce dernier n'est qu'un cas particulier de la plaque circulaire Équation de l'anneau = cas particulier de l'équation $Kb^2c\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + \pi^2\frac{d^2z''}{dx^2}\right) = z''$

L'anneau sert de limite à la cloche hémisphérique → anneau = cas particulier de la cloche hémisphérique → dans certains cas, anneau et cloche même nombre de lignes nodales et mêmes sons : théorie **déjà donnée par Euler** mais en désaccord avec les expériences de Chladni, mais Chladni explique ce désaccord (forme de l'objet et épaisseur non constante)

Elle signale que Chladni n'est pas d'accord avec **l'hypothèse d'Euler**. Cette dernière n'est sûrement pas générale ; mais en considérant le cas où la cloche présente d'autres lignes que celles qui résultent de la section de cette surface par un plan perpendiculaire à la base, la théorie générale donne le même résultat que **l'hypothèse d'Euler**.

Euler a donné 2 équations différentes pour l'anneau élastique : pas remarqué par Chladni et Golovin.

Chladni a contredit **la théorie d'Euler** et pourtant les expériences donnent un résultat conforme à cette théorie

1811

$$z = \ldots (A \exp \frac{x+y}{f} + B \exp \left(-\frac{x+y}{f}\right)$$

$$+ \left(C \sin \sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + D \cos \sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\right) \exp \frac{x+y}{2f}$$

$$+ \left(G \sin \sqrt{3}\frac{x+y}{2f} + H \cos \sqrt{3}\frac{x+y}{2f}\right) \exp \left(-\frac{x+y}{2f}\right)$$

$$- \left(A \exp \frac{x-y}{f} + B \exp (-\frac{x-y}{f}\right)$$

$$+C \sin \sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + D \cos \sqrt{3}\frac{x-y}{2f}) \exp \frac{x-y}{2f}$$

$$+ \left(G \sin \sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + H \cos \sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right) \exp \left(-\frac{x-y}{2f}\right))$$

(mouvement de la surface symétrique autour de la ligne nodale diagonale → figure partagée par une ligne en deux figures nodales semblables entre elles)
conformément à l'expérience : quand la surface vibrante est partagée par un nombre impair de lignes nodales tracées dans une direction diagonale, le mouvement des 2 parties de cette surface partagée par la diagonale est symétrique et s'exécute dans le même temps pour l'une au-dessus du plan naturel de la plaque et pour l'autre au-dessous du même plan
Si nombre pair de lignes diagonales → équation

$$z = \ldots A(\exp \frac{x-y}{f} + \exp \left(-\frac{x-y}{f}\right) - (\sqrt{3} \sin \sqrt{3}\frac{x-y}{2f}$$

$$+ \cos \sqrt{3}\frac{x-y}{2f}) \exp \frac{x-y}{2f} + (\sqrt{3} \sin \sqrt{3}\frac{x-y}{2f}$$

$$-cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} \exp \left(-\frac{x-y}{2f}\right))$$

→ les points placés symétriquement par rapport à la diagonale fictive exécutent leur mouvement de manière qu'ils se trouvent à la fois au-dessus ou au-dessous du plan naturel de la plaque figures de Chladni

1813

→ ligne d'appui = suite des points qui satisfont aux conditions fixant la valeur du mot « appuyé »

— application des intégrales données aux n^{0}4 et 5 dont la forme générale est reprise par la formule

$$z = \ldots \sin \frac{x+y}{A} \sin \frac{x-y}{A}$$

donne les cas d'existence de cette formule pour les plaques carrées
→ il y a toujours sur la plaque carrée à laquelle cette formule est appliquée, n lignes nodales parallèles à l'axe des y, c'est-à-dire à un des côtés de la plaque, et m lignes nodales parallèles à l'axe des x et donc à l'autre côté de la plaque. De plus, ces lignes nodales sont parallèles entre elles, se trouvent à égale distance les unes des autres, et cette distance est le double de celle entre la dernière ligne et le côté libre auquel elle sera parallèle ; chaque intervalle de 2 lignes nodales parallèles est partagé par une ligne de limite analytique, enfin tout point d'intersection des lignes nodales droites qui terminent les périodes peut être pris pour origine.

— étude des conséquences de l'équation du n^{0}4 :

$$z = \ldots \mathcal{A} \sin \left(\frac{x+y}{A}\right) \sin \left(\frac{x-y}{A}\right)$$

Les surfaces carrées dont les mouvements sont compris dans cette intégrale ne présentent que des lignes nodales qui terminent les périodes

— donne les figures correspondantes observées par Chladni ; pour chaque figure, donne les lignes nodales et les sons
comparaison expériences – théorie)

1815

12. Cite **un autre résultat d'Euler** (analogie entre les sons et les figures sur la cloche hémisphérique et l'anneau lui servant de base)
Germain montre de même qu'il existe une analogie entre les figures et les sons de la calotte sphérique, comparée sous les mêmes conditions, à l'anneau qui lui sert de base. Donne ensuite l'équation contenant la théorie des mouvements de l'anneau élastique vibrant dans sa plus grande généralité :

$$Kb^2 c \left(\frac{d^4 z''}{dx^4} + \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} \frac{d^2 z''}{dx^2}\right) = z''$$

où φ est l'angle que la direction d'un quelconque de ces mouvements fait avec la perpendiculaire au plan de l'anneau
Chaque direction du mouvement de l'anneau est correspondante, sous certaines conditions, aux mouvements d'une calotte sphérique dont les limites sont d'une part la plaque circulaire et de l'autre la cloche hémisphérique. **13.** Manque de temps pour une comparaison plus détaillée entre les résultats de la théorie et ceux des expériences **13.** Elle décrit les expériences qu'elle a faites avec les cloches (poussière jetée sur la surface) : expériences difficiles à réaliser (si un son étranger est émis, la poussière est jetée hors de la surface et il faut en remettre → difficile d'obtenir à nouveau la même figure car la main a changé de position)
Même difficulté pour les cloches hémisphériques. Autre problème : le concours des sons (figure différente selon que l'un ou l'autre son domine)

1811

expériences de Chladni : cas où les plaques vibrantes sont libres dans tous les points de leur périmètre Précise que si sa théorie est exacte, elle peut aussi s'appliquer au cas où un nombre déterminé de points pris sur le périmètre est soumis à l'action d'une force susceptible de gêner leur mouvement, comme si ces points étaient par exemple appuyés contre un obstacle fixe

Euler a fait de même pour les extrémités de la lame élastique vibrante

Analogie entre la théorie d'Euler dans le cas linéaire et sa théorie pour le mouvement des plaques Notes

Elle a envoyé ces notes après la date limite du concours Dans cette note elle va montrer comment obtenir l'équation de l'équilibre d'une surface élastique qu'elle a donnée dès la 1ère page de son mémoire à partir de certaines formules de mécanique. Elle veut montrer l'analogie entre le cas de la lame élastique et le cas de la surface élastique ; pour cela, elle va encore utiliser des simplifications qu'a déjà faites **Euler**. Elle retrouve dans un premier temps l'équation donnée par Euler pour la lame élastique. Puis elle passe à l'obtention de l'équation pour la plaque élastique : elle utilise toujours une considération géométrique (deux plans) et fait un certain nombre de calculs que l'on retrouvera au début de son 2ème mémoire. Enfin elle montre encore comment l'équation du paragraphe n^{0}4 du 1er mémoire s'applique au cas d'**Euler**.

1813

14. Les figures nodales dépendent de la relation entre les constantes contenues dans les intégrales, contrairement aux sons qui sont indépendants de cette relation.

Plusieurs figures nodales peuvent accompagner un seul et même son.

Étudie les sons correspondants à différentes intégrales. **15.** Étude des différentes intégrales selon les relations entre les constantes : sons, figures nodales, figures correspondantes obtenues par Chladni lors de ses expériences

Elle précise qu'elle a étudié plus de la moitié des figures observées par Chladni dans le mouvement des plaques carrées. Va compléter la comparaison entre la théorie et les expériences en comparant les sons :

influence de la moindre inégalité d'épaisseur sur les intervalles des sons correspondants aux différentes figures sur les plaques élastiques vibrantes → pas d'accord rigoureux entre les sons donnés par la théorie et les sons donnés par les expériences → elle fixe la limite acceptable pour cette différence : 1 ton (limite fixée par Chladni) et cette différence doit être rare. Plaques carrées : elle va d'abord comparer entre eux les sons donnés par les vibrations tournantes (seulement des demi-périodes) pour les figures de Chladni qu'elle a déjà étudiées ; puis considère les figures formées d'une ou plusieurs périodes complètes ; et enfin les cas pour lesquels Chladni n'a pas donné de figures ou pour les figures qu'elle n'a pas étudiées

→ les rapports donnés par la théorie diffèrent de moins d'un demi-ton de ceux donnés par les expériences

1815

Elle décrit les résultats qu'elle a obtenus avec différentes calottes sphériques (figures nodales et sons correspondants) Comparaison entre les résultats donnés par la théorie et ceux donnés par les expériences : accord entre théorie et expériences Aucun succès avec les expériences qu'elle a faites avec l'anneau **14.** Elle applique l'équation de la surface vibrante qu'elle a obtenue au n^{0}10 à la surface cylindrique à base circulaire. Elle détermine l'équation pour une portion de surface :

$$Kb^2c(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4}$$

$$+\frac{a^2}{A^2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)) = z''$$

où A est l'arc de cette portion

a = arc correspondant à A dans le cercle dont le rayon est pris pour unité

D'après elle, ce genre de surface n'a pas encore été l'objet d'aucunes expériences (pas de comparaison possible) **15.** Elle précise qu'qu'elle a fait des expériences avec des plaques carrées ployées aux différentes courbures qu'elle voulait étudier. Elle fait une comparaison avec les résultats obtenus par Chladni : même son avant et après la courbure

Pour les surfaces cylindriques, leurs vibrations donnent des phénomènes contraires à ceux que l'on a dans les mouvements des plaques carrées. **15.** Elle donne quelques détails sur les expériences qu'elle a faites sur différentes surfaces cylindriques (de différentes grandeurs et en grand nombre).

1813

Mais problème quand il s'agit de figures périodiques qui renferment des périodes complètes : son réel plus grave d'environ 1 ton que celui indiqué par la théorie
Mêmes résultats pour les plaques rectangulaires.
Elle explique cette différence. **17.** L'intégrale (C) du n^3 obtenue pour les plaques carrées peut aussi s'appliquer à une partie des figures que l'on voit sur les plaques vibrantes rectangulaires (différentes du carré). Elle va comparer les résultats donnés par la théorie à ceux donnés par les expériences pour les plaques rectangulaires différentes du carré concernant les figures nodales observées par Chladni et les sons. **18.** Elle étudie les surfaces périodiques Elle expose d'abord sa théorie (lignes nodales et sons) puis l'explique et la compare aux figures observées par Chladni.
Elle précise que son étude des figures obtenues par Chladni n'est pas détaillée mais pense que cela suffit pour prouver que la théorie correspond. **19.** Elle compare aussi les sons rendus par différentes plaques rectangulaires.
Accord entre la théorie et les expériences de Chladni (sur les 18 cas qu'elle a étudiés, il n'y a qu'un seul cas où la différence est supérieure à un demi ton)
Étude de 6 autres cas : accord entre théorie et expériences. Elle remarque aussi que les figures vues sur les plaques rectangulaires et qui résultent des intégrales périodiques sont également visibles sur les surfaces tendues (petite comparaison) **19.** Autres expériences qu'elle a faites : Surface carrée serrée dans un morceau de bois (similaire à un simple appui) : son obtenu ne correspond pas à son attente → pense que cela est dû à la pièce de bois qu'elle va alors remplacer par de la cire collante : son un peu moins affaibli et identique à celui produit par une plaque plus grande d'une portion capable de faire équilibre à la quantité de cire ajoutée (de même pour les lignes nodales : changement de place).
Elle réalise des expériences pour montrer cela (elle n'en décrit qu'un petit nombre, les plus faciles à décrire) :
plaque de verre carrée : description de ses observations puis explications.

1815

Elle précise tout d'abord les figures nodales qu'elle va retenir puis donne les sons correspondants suivant la valeur de l'arc Pour de telles surfaces, le choix du matériel est important puisqu'une plaque qui paraît d'épaisseur constante, lorsqu'elle est courbée, révèle ses défauts.
Elle précise que les expériences sont encore plus difficiles à réaliser pour les cloches sphériques.
Les observations qu'elle a faites ne correspondent pas vraiment à ses attentes par rapport aux figures nodales (cela peut s'expliquer par le fait que certaines figures nodales remplacent celles qui ne peuvent pas se former sur une surface cylindrique) Elle décrit aussi les sons obtenus selon les courbures.
Elle déplore le fait qu'elle n'a pas pu faire assez d'expériences pour que ses conclusions puissent être fiables (c'est pour cela qu'elle a donné tant de détails). **17.** Elle précise qu'il faut « rassembler un grand nombre de faits » pour pouvoir « entreprendre entre la théorie des surfaces cylindriques et les expériences une comparaison détaillée. » Elle ne peut donner de façon certaine l'intégrale correspondant à une figure nodale, et va donc ne faire que « de simples considérations générales » : l'intégrale qu'elle a obtenue pour ce genre de figure nodale ne satisfait pas l'équation de la surface cylindrique → on ne peut donc obtenir la figure nodale correspondante sur les surfaces cylindriques.
Mais en considérant l'ordonnée courbe de la surface constante, la surface cylindrique bouge comme un assemblage de lames droites disposées autour du centre de courbure de la dimension qui est négligée : accord entre expériences et théorie Elle donne une dernière description de lignes nodales. Elle doit terminer ses recherches mais est consciente que le nombre d'expériences réalisées n'est pas suffisant pour être certaine des conclusions qu'elle a faites (contrairement aux surfaces planes pour lesquelles Chladni a fait un très grand nombre d'expériences).

1813

Phénomène dont elle vient de rendre compte : « au moyen d'un poids ajouté, on peut obtenir d'une partie très petite comprise entre le côté chargé et la ligne nodale parallèle la plus voisine de ce côté, le même son que rend en même tems une partie beaucoup plus grande prise sur la même plaque et comprise entre deux lignes également parallèles au côté chargé »
(refait les expériences avec une lame de verre dont elle précise les dimensions).
Elle explique ce phénomène **21.22.** Elle recherche une intégrale applicable au cas de la plaque élastique circulaire.

Elle commence par transformer l'équation différentielle des plaques élastiques vibrantes (calculs, contour libre, appuyé, lignes nodales). **23.** Donne l'équation différentielle de la circonférence

de la plaque circulaire ou ce qui revient au même de l'anneau élastique, puis l'intégrale correspondante (et selon la valeur d'une constante, l'équation de l'anneau est alors un cas particulier de celle de la plaque circulaire) : **en accord avec les résultats d'Euler**. Par contre, **elle n'est pas d'accord avec Euler concernant les sons** (elle précise sa pensée). **24.** Les

expériences menées par Chladni ne confirment pas la théorie de l'anneau d'Euler :
donne les 2 résultats (elle explique pourquoi elle doute que les expériences réalisées correspondent au cas étudié par Euler). Elle pense que cela est dû au fait que ployer une bande de fer lui a fait diminuer son élasticité (utilise le son comme preuve).
De même la différence des sons donnés par l'anneau et la lame droite s'explique par cette diminution de l'élasticité pour l'anneau. **25.** Cette remarque lui a permis de concilier la théorie

d'Euler et les résultats des expériences de Chladni.
Question qu'elle se pose : la courbure d'un corps sonore permet-elle de lui appliquer l'analyse faite pour le même corps supposé rectiligne ?
L'opinion qu'elle émet à ce sujet n'est pas en accord avec celle **d'Euler**. Elle revient sur ses expériences (lame de verre de différentes formes) : les résultats qu'elle obtient pour la fourche

sont contraires à ceux de Chladni.
Elle décrit ensuite ses expériences avec l'anneau et les résultats obtenus (sons et lignes nodales) : confirment et infirment certaines théories d'Euler. Autre théorie de Germain : plaque

circulaire = anneau dont la largeur est mesurée par le rayon de la plaque circulaire : a fait plusieurs expériences pour valider sa théorie : description des figures et des sons. Elle donne une équation qui convient pour les deux corps, mais aussi pour la cloche hémisphérique dont les mouvements ont été étudiés par Chladni (ce dernier avait déjà remarqué la similitude qui existe entre les manières de vibrer de la cloche hémisphérique et de la plaque circulaire.
Par contre, la théorie d'Euler n'est pas conforme aux expériences. La ressemblance entre les mouvements de l'anneau et de la cloche, dans les cas les plus simples, est vérifiée par la théorie

et les expériences. L'équation de la corde tendue peut aussi être celle, dans certains cas, de la lame droite, l'anneau circulaire élastique, du tambour circulaire, de la plaque élastique

circulaire et de la cloche hémisphérique.
Elle donne encore un petit résultat sur les sons pour les corps élastiques. Elle est obligée d'arrêter son étude qui est incomplète. **Elle précise qu'elle a été guidée par les travaux de**

Chladni et d'Euler.

Annexe D

Transcription des trois mémoires

Ces mémoires sont consultables aux Archives des prix à la Bibliothèque de l'Institut à Paris.

Premier Mémoire
Sophie GERMAIN
21 septembre 1811

Mémoire sur cette question proposée par la première classe de l'Institut :

Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience.

Effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ

Avertissement

En réfléchissant sur la question qui fait le sujet des recherches que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'institut, j'ai été conduite à une équation différentielle, que je crois être celle de l'équilibre d'une surface élastique soumise à l'action de forces quelconques. Je me contente de la donner au commencement de mon mémoire, sans entrer dans aucun détails sur la manière dont je l'ai trouvée. Cette équation une fois posée, j'en déduis celle du mouvement de la même surface, et je la simplifie au moyen de suppositions parfaitement

analogues à celles qui ont été adoptées par tous les géomètres qui ont traité jusqu'ici de la théorie du son. Je montre ensuite que la même équation différentielle peut appartenir à une surface qui seroit à la fois élastique et soumise à l'action de forces de tensions rapportées aux directions perpendiculaires entre elles des x et des y, ces forces pouvant être inégales ou égales entre elles. On peut voir n° 5 du mémoire ci-joint, que dans le dernier cas et en faisant l'élasticité nulle, mon équation est entièrement identique à celle qu'Euler a trouvée autrefois, en considérant la surface tendue comme composée de fils qui se croisent à angles droits, et qu'elle est par conséquent également semblable à celle que Mr Biot a donnée depuis, sans avoir recours à cette supposition.

Il est clair qu'en faisant toujours l'élasticité nulle, et supposant les forces de tensions dirigées suivant les x et les y, inégales entre elles, on auroit l'équation d'une surface inégalement tendue, équation dont on ne s'est pas occupé jusqu'à présent, au moins que je sache.

L'identité qui fait le sujet de la remarque précédente pouvoit être prévue, car elle est entièrement analogue à ce qui a lieu pour le cas linéaire, on sait en effet, d'après la remarque d'Euler, que l'équation de la lame considérée à la fois comme élastique et soumise à l'action d'une force de tension donne l'équation de la corde simplement tendue, lorsque l'on suppose l'élasticité nulle.

L'équation différentielle du mouvement que j'ai obtenue monte au sixième degré et je ne verrois aucun moyen de l'intégrer s'il n'étoit permis de se borner au cas où il s'agit de déterminer uniquement les mouvements réguliers dont la plaque élastique est susceptible. Je crois au reste que le mot vibration employé dans l'énoncé du programme doit être entendu dans le sens le plus restreint, comme s'appliquant seulement au cas où les vibrations donnent lieu à l'existence d'un son proprement dit, par opposition à celui où les mêmes vibrations ne peuvent produire que du bruit. Cette restriction est d'autant plus naturelle que les belles expériences de Mr Chladni, expériences qui ont été l'occasion du prix proposé, appartiennent toutes à ce cas, qui exige seulement que le mouvement soit régulier et non pas qu'il donne lieu à la formation de figures nodales symétriques ou régulières.

L'exemple d'Euler apporte un nouveau degré de probabilités à cette interprétation, on sait en effet qu'en traitant du mouvement de lame élastique vibrante, ce grand géomètre s'est borné au cas où le mouvement de cette lame devient régulier, je pense donc être suffisamment autorisé à adopter une restriction que je crois être dans l'intention de la classe.

Le méthode qu'Euler a suivie pour l'intégration de l'équation du mouvement de la lame est je crois applicable à l'équation du mouvement des plaques élastiques vibrantes ; la classe jugera si je ne me suis pas égaré dans l'emploi que j'ai cru pouvoir en faire.

(partie non lisible) la théorie que j'ai essayé d'établir : j'avoue qu'il m'auroit fallu plus de temps que ne m'en laissoit l'époque du concours pour parvenir à déterminer toutes les circonstances possibles du mouvement régulier des plaques élastiques vibrantes, et pour être par conséquent en état d'entreprendre une comparaison entièrement satisfaisante entre les résultats de cette théorie et ceux de l'expérience. Cependant on verra que je n'ai pas tout à fait négligé cette comparaison qui est une condition essentielle du programme, et que je suis parvenu au moins à rendre compte d'une partie des propriétés de certaines figures nodale. J'ai choisi le cas où ces figures présentent une sorte de régularité soit par rapport à une ou deux lignes nodales diamétrales, soit par rapport à une ligne nodale diagonale.

J'espère en avoir dit assez pour mettre la classe en état de prononcer sur la théorie que je lui présente, si elle ne la juge pas entièrement indigne de son attention. Son approbation qui est le plus grand encouragement que je puisse recevoir sera pour moi un motif puissant d'apporter tous mes soins à perfectionner cette théorie, et à la justifier par des applications plus nombreuses et surtout plus détaillées.

1°. La position de chacun des points d'une telle surface peut être déterminée par rapport à un plan supposé fixe, et comme il ne s'agira dans ce mémoire que des seules surfaces planes, on peut prendre la position naturelle de la plaque elastique pour le plan fixe dont on a besoin.

L'auteur a envoyé supplément sur c équation

L'équation

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int Rds = V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

Ce supplément est taché à la feuille titre

que je propose comme étant celle de l'équilibre de la surface vibrante élastique suppose que pour un point quelconque de cette surface on ait établi trois coordonnées orthogonales savoir $\underline{x}$ $\underline{y}$ $\underline{z}$ de sorte que l'élément soit exprimé suivant l'usage par l'équation

$$ds = dxdy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

la masse de cet élément le sera alors par $\int ds$:

la même équation suppose aussi que (r) et (r') désignant les deux rayons osculateurs, l'élasticité absolue dans le lieu auquel appartiennent les coordonnées $\underline{x}$ $\underline{y}$ et $\underline{z}$ soit représenté par $\underline{V}$ et que conformément à la nature des plaques de verre et de métal, cette élasticité soit uniforme dans tous les sens (*) [1]. Cela posé je dois dire (partie non lisible) a l'élément de la surface, décomposées et ramenées aux directions des coordonnées orthogonales $\underline{x}$ $\underline{y}$ et $\underline{z}$ sont exprimées comme à l'ordinaire par Pds, Qds, et Rds.

2°. Si on veut avoir la situation et la figure de la surface élastique mise en mouvement au bout de la durée du temps désigné par t, on trouve d'après les principes de la mécanique pour les forces élémentaires appliquées dans chacun des points de cette

1. (*) On voit que je prends

$$V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

pour le moment de cette force, il seroit trop long de discuter ici les considérations qui m'ont déterminé à choisir cette fonction des rayons osculateurs ; mais au reste, il est aisé de sentir que lors même que l'expression du moment de l'élasticité devroit convenir d'autres fonctions de ces rayons osculateurs que celle que j'ai adoptée, tels que les produits ou les puissances des mêmes quantités, le résultat applicable à la question ne seroit pas changé, puisque comme on le verra par la suite $\left(\frac{1}{(r)}\right)\left(\frac{1}{(r')}\right)$, par exemple, pourra toujours être négligé vis à vis de $\frac{1}{(r)}$ et $\frac{1}{(r')}$.

surface

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right), \quad Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \quad R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

$\underline{g}$ représentant l'espace parcouru en une seconde par un corps soumis à l'action de la pesanteur, et pour l'équation du mouvement de la même surface

$$\int dzdy \int P'ds + \int dzdx \int Q'ds - 2\int dxdy \int R'ds = V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

$\mathfrak{N}$°(3). Il s'agit maintenant d'introduire dans cette équation les simplifications convenables à l'état de la question : pour cela j'observe qu'en conservant aux lettres p, q, r, s, t, etc, la signification que l'usage a consacré, savoir $p = (\frac{dz}{dx})Q'$ et faisant $g = rt - s^2$, $\quad h = (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t$
$K^2 = 1 + p^2 + q^2$. On a comme l'on sait $(r) = \frac{-2K^3}{h+\sqrt{(h^2-4K^2g)}}$

$(r') = \frac{-2K^3}{h^2-\sqrt{(h-4K^2g)}}$ d'où il résulte $\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')} = -\frac{h+\sqrt{(h^2-4K^2g)}+h-\sqrt{(h^2-4K^2g)}}{2K^3} = -\frac{h}{K^3} =$

$-\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Si on suppose donc que la surface vibrante s'écarte très peu du plan des $\underline{x}$ et $\underline{y}$, $\underline{p}$ et $\underline{q}$ seront des quantités très petites dont on pourra négliger les quarrés et les produits, on aura $\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')} = -(r+t) = -\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$, $ds = dxdy$, et parce que dans cette hypothèse le mouvement se fait tout entier suivant la direction des $\underline{z}$ on aura encore $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 0$ d'où il suit que P' et Q' se réduisent respectivement à P et Q.

Il est facile de voir que la supposition dont il s'agit est parfaitement analogue à celles qui ont été adoptées par tous les géomètres qui ont traité des mouvements vibratoires des différentes especes de corps sonores soumis jusqu'à présent à l'analyse. Je crois donc être suffisamment autorisé à en transporter les résultats dans mon équation et au moyen des substitutions convenables elle se réduit à

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int R'ds = -V\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$$

4°. Si on désigne l'épaisseur de la surface élastique par E, cette épaisseur étant supposée constante, E remplacera S, la masse et le volume seront exprimés par la même notation, de sorte que Eds qui représente la masse de l'élément de la surface représentera aussi le volume de matière qu'il contient ; la quantité R' ($\mathfrak{N}$°.2) sera donc $R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$. à l'égard de la valeur de l'élasticité, on sait qu'Euler la suppose dans la lame élastique, proportionnelle au quarré de l'épaisseur multiplié par un coefficient dépendant de la nature de la matière de cette lame. il me semble que lorsqu'au lieu d'une simple lame il s'agit d'une surface il doit encore entrer dans la valeur de cette force un autre coefficient dépendant peut-être de l'épaisseur et de l'étendue de la surface vibrante car alors cette surface dans son mouvement se plie à la fois dans les deux directions perpendiculaires entre elles des $\underline{x}$ et y, et cette inflexion se fait sentir jusqu'aux limites de son étendue, je propose donc de faire $V = E^2bc$, $\underline{b}$ étant la quantité dépendante de la matière de la plaque élastique vibrante, et $\underline{c}$ un autre coefficient qu'un examen plus approfondi permettra sans doute de déterminer.

il faut encore observer que dans l'équation différentielle ci dessus le signe $\int$ est relatif à une double intégration, l'une qui a rapport à $\underline{x}$, l'autre qui ne regarde que $\underline{y}$. pour éviter toute confusion à cet égard, je marquerai d'un accent placé en haut le signe qui se rapporte à $\underline{x}$, d'un accent placé en bas le signe relatif à $\underline{y}$ et d'un double accent celui qui renfermera cette double signification. Cela posé si on veut que P et Q représentent de simples forces de tensions qui seroient supposées agir suivant les directions des x et des y, on peut faire$\int' Pdx = P''$ $\int_{,} Qdy = Q''$ et par conséquent

$$\int Pdxdy = \int_{,}' Pdxdy = \int_{,} P''dy, \int Qdxdy = \int_{,}' Qdxdy = \int' Q''dx$$

en ayant donc égard aux déterminations et aux remarques précédentes l'équation différentielle du mouvement donnée ($\mathfrak{N}$°3) se réduit à

$$\int_{,}' dzdy \int_{,} P''dy + \int_{,}' dzdx \int' Q''dx - 2\int_{,}' dxdy \int_{,}' dxdy \left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

$$= -E^2bc\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$$

Cette équation différentiée par rapport à $\underline{x}$ et divisée par $\underline{dx}$ devient

$$\int_{,} \frac{dz}{dx}dy \int_{,} P''dy + \int_{,} dz \int' Q''dx - 2\int_{,} dy \int_{,}' dxdy \left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

$$= -E^2bc\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^3z}{dy^2dx}\right)$$

Celle-ci différentiée par rapport à $\underline{y}$ et divisée par dy devient

$$\frac{dz}{dx}\int_{,} P''dy + \frac{dz}{dy}\int^{'} Q''dx - 2\int_{,}^{'} dxdy\left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

$$= -E^2bc\left(\frac{d^4z}{dx^3dy} + \frac{d^4z}{dy^3dx}\right)$$

Cette dernière différentiée par rapport à $\underline{x}$ et divisée par dx donne

$$\frac{d^2z}{dx^2}\int_{,} P''dy + \frac{dz}{dy}Q'' - 2\int_{,} dy\left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right) = -E^2bc\left(\frac{d^5z}{dx^4dy} + \frac{d^5z}{dy^3dx^2}\right)$$

enfin on a en différenciant encore une fois par rapport à $\underline{y}$ et divisant par $\underline{dy}$

$$P''\frac{d^2z}{dx^2} + Q''\frac{d^2z}{dy^2} - 2\left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right) = -E^2bc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)$$

Cette dernière appartient si je ne me trompe à une surface élastique soumise à l'action d'une force quelconque dirigée suivant les $\underline{z}$, plus à celle de deux forces de tension qui peuvent être inégales entre elles et qui agissent suivant les $\underline{x}$ et les $\underline{y}$.

$\mathfrak{N}$°.(5) il est facile de voir l'analogie qui existe entre l'équation que je viens de trouver et celle qui a été donnée par Euler dans la première partie des mémoires de Pétersbourg pour 1779 (Acta Academiæ) P.110 $\mathfrak{N}$°.7. Ce grand géomètre montre que lorsque l'élasticité est supposée nulle dans l'équation qui convient au mouvement de la lame élastique soumise à l'action d'une force de tension, cette équation donne immédiatement celle de la corde parfaitement flexible, et de même ici en faisant $b = 0$, c'est à dire l'élasticité nulle, la dernière équation ($\mathfrak{N}$°4) se réduit à $P''\frac{d^2z}{dx^2} + Q''\frac{d^2z}{dy^2} = 2\left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$, équation qui conviendroit à une surface tendue par des forces dont les résultantes perpendiculaires l'un à l'autre seroient inégales entre elles et qui seroit en outre soumise à l'action d'une force quelconque agissant dans la direction de la pesanteur. Si donc on admet des forces agissant suivant les z que la seule pesanteur, et que l'on regarde son action comme pouvant être entièrement négligée il faudra faire $R = 0$, et en prenant les forces de tensions P'' et Q'' égales entre elles, comme on l'a toujours supposé jusqu'ici,

l'équation précédente se réduira à

$$P''\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-\frac{E}{g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

Pour rendre cette dernière parfaitement identique à celle que $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Biot a donnée dans son mémoire inséré dans le tome 4eme de la classe, il faut remarquer qu'en ayant égard à la direction de la force de tension P'' on doit faire $-\frac{P''}{E}=K^2$, et que l'auteur en partant des formules de la mécanique analytique a pris conformément à ce qui a été pratiqué dans tout le cours de ce bel ouvrage, la gravité représentée ici par $\underline{g}$, (partie non lisible), au moyen des substitutions indiquées on trouve en dernière analyse $\frac{d^2z}{dt^2}=K^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ qui est l'équation généralement adoptée pour les surfaces tendues.

$\mathfrak{N}^\circ$.(6) En reprenant la dernière équation $\mathfrak{N}^\circ$.4 et en y faisant P'', Q'' et R nulles on a $\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-E^2bc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2}+\frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2}$ pour l'équation de la surface élastique libre de toutes forces et c'est cette équation à laquelle je vais appliquer la méthode suivie par Euler dans son mémoire sur le mouvement de la lame élastique (investigatio motuum quibus luminæ... contremiscunt, acta academiæ... Petropolitanæpour 1779 ; Pars prior ; p.112 et seq.). En se bornant donc aux cas dans lesquels le mouvement de la surface devient régulier ; et par conséquent comparable à celui d'un pendule simple quelconque, on trouve, K étant la longueur du pendule, $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-\frac{z}{K}$, dans cette équation le tems seul est regardé comme variable, mais les coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont supposées constantes et l'on parvient par une double intégration à la formule générale $z=M\sin\left(\zeta+\frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)$ dans laquelle M renferme non seulement des constantes mais encore une fonction quelconque des coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$.

L'équation du mouvement de la surface devient ainsi

$$\frac{z}{K}=Ebc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2}+\frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2}$$

, et si on fait $KEbc=f^6$, elle prend la forme plus simple

$$z=f^6\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2}+\frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2}$$

dans laquelle les coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$sont supposées seules variables.

il est clair que si on fait $\frac{1}{\lambda}=f^6$, la supposition $z=e^{\lambda(x+y)}$ satisfera à cette équation, car on aura

$$\frac{dz}{dx} = \lambda e^{\lambda(x+y)} \qquad \frac{dz}{dy} = \lambda e^{\lambda(x+y)}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda(x+y)}$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{array} \qquad \begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

$$\frac{d^6 z}{dx^4 dy^2} = \lambda^6 e^{\lambda(x+y)} \qquad \frac{d^6 z}{dy^4 dx^2} = \lambda^6 e^{\lambda(x+y)}$$

et par conséquent $\frac{1}{2} f^6 \left(\frac{d^6 z}{dx^4 dy^2} + \frac{d^6 z}{dy^4 dx^2} \right) = \lambda^6 f^6 e^{\lambda(x+y)} = z$.
L'équation $\frac{1}{\lambda^6} = f^6$ donne six valeurs différentes pour la lettre λ, savoir $\lambda = \frac{1}{f}$;, $\lambda = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2f}$; $\lambda = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2f}$; $\lambda = -\frac{1}{f}$; $\lambda = \frac{1+\sqrt{-3}}{2f}$; $\lambda = \frac{1-\sqrt{-3}}{2f}$ et puisque la combinaison de ces six valeurs doit aussi satisfaire à l'équation précédente on peut prendre

$$z = ae^{\frac{x+y}{f}} + be^{\frac{-(x+y)}{f}} + ce^{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}}$$
$$+de^{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}} + ge^{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}} + he^{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\frac{x+y}{f}}$$

Si on veut faire disparoitre les imaginaires de cette expression de $\underline{z}$, en y substituant les sinus et cosinus de l'angle réel $\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}$, on trouvera en multipliant le second membre de l'équation par le commun facteur N, qui à cause que le tems $\underline{t}$ est pris pour constant peut être supposé fonction quelconque du tems

$$z = N(Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}} + \left(C \sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} \right) e^{\frac{x+y}{2f}}$$
$$+ \left(G \sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} + H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} \right) e^{\frac{-(x+y)}{2f}})$$

Pour accorder la présente valeur de z avec celle qui a été donnée plus haut savoir, $z = M \sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)$, il suffira de faire $N = F \sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)$ et

$$M = F \times (Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}} + \left(C \sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} \right) e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$+\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}})$$

il en résultera l'équation suivante

$$z=F\sin\left(\zeta+\frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)(Ae^{\frac{x+y}{f}}+Be^{\frac{-(x+y)}{f}}+\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$+\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}})$$

dans laquelle les lettres A, B, etc aussi bien que l'angle ζ sont des constantes arbitraires prises de manière que quelles que soient leurs valeurs, le mouvement de la plaque élastique ne cesse pas d'être comparable aux oscillations du pendule simple dont la longueur $= K$.

Le tems d'une vibration sera comme à l'ordinaire égal à $\Pi\frac{\sqrt{K}}{2g}$ et par conséquent le nombre de vibrations dans une seconde sera également exprimé par $\frac{\sqrt{2g}}{\Pi\sqrt{K}}$

$\mathfrak{N}^{\circ}$.(7) En réfléchissant sur la manière dont j'ai obtenu la valeur de z que je viens d'indiquer, on voit qu'elle satisferoit également aux conditions de la question si on y changeoit $\underline{y}$ en -$\underline{y}$, c'est à dire si on prenoit la différence des coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$, au lieu de leur somme, car il est clair que puisqu'il y a un nombre pair de différentiations par rapport à y, le signe de cette variable n'influe pas alors le résultat. je crois donc qu'en prenant pour A', B', C', D', etc, des constantes arbitraires différentes de A, B, C, D, etc, on peut faire

$$z = F\sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)(Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}} + \left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$+\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} + H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}} + A'e^{\frac{x-y}{f}} + B'e^{\frac{-(x-y)}{f}}$$

$$+\left(C'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f} + D'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\left(G'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f} + H'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$

Cette supposition permettra, ce me semble, d'assujettir la surface vibrante à un nombre de conditions suffisant, pour rendre compte de la singuliere variété que l'on remarque dans les circonstances des différents mouvements dont l'expérience a appris qu'elle était susceptible. Si au contraire on n'employoit que la somme ou la différence des coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$ on seroit mené à conclure que la valeur de z reste la même lorsque cette somme ou cette différence ne change pas, quoique les valeurs particulieres de chacune des coordonnées puissent varier et il est vrai que cette conclusion peut en effet convenir à quelques cas particuliers, comme je le dirai dans la suite de ce mémoire, mais elle ne peut être regardée comme générale, car indépendamment de tout calcul, l'expérience indique assez, par la seule inspection des figures nodales, que le contraire a lieu le plus souvent.

En adoptant donc cette dernière expression de z, je vais ici ecrire les valeurs de $\frac{1}{2}\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^3z}{dy^2dx}\right)$, ... dans lesquelles je supprime le coefficient constant $F\sin\left(\zeta + \frac{t\sqrt{2g}}{K}\right)$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right) = ...\frac{1}{f^2}(Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}-D\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(G\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}-H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$+A'e^{\frac{x-y}{f}}+B'e^{\frac{-(x-y)}{f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(C'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+D'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(G'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+H'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}-D'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(G'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}-H'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)=...\frac{1}{f^3}(Ae^{\frac{x+y}{f}}-Be^{\frac{-(x+y)}{f}}$$

$$-\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$+\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$+A'e^{\frac{x-y}{f}}-B'e^{\frac{-(x-y)}{f}}$$

$$-\left(C'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+D'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\left(G'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+H'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^4z}{dx^3dy}+\frac{d^4z}{dy^3dx}\right)=...\frac{1}{f^4}(Ae^{\frac{x+y}{f}}+Be^{\frac{-(x+y)}{f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}-D\sqrt{3}.\sin\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(G\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}-H\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$-(A'e^{\frac{x-y}{f}}+B'e^{\frac{-(x-y)}{f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(C'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+D'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(G'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+H'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}-D'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(G'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}-H'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}))$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^5z}{dx^4dy}+\frac{d^5z}{dy^4dx}\right)=...\frac{1}{f^5}(Ae^{\frac{x+y}{f}}-Be^{\frac{-(x+y)}{f}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}-D\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(G\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}-H\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$-(A'e^{\frac{x-y}{f}}-B'e^{\frac{-(x-y)}{f}}$$

$$+\frac{1}{2}\left(C'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+D'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$-\frac{1}{2}\left(G'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+H'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}-D'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}(\left(G'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}-H'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}))$$

Et on voit que cette dernière équation ramène à celle-ci

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2}+\frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)=...\frac{1}{f^6}(Ae^{\frac{x+y}{f}}+Be^{\frac{-(x+y)}{f}}$$
$$+\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$
$$+\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}+H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$
$$+A'e^{\frac{x-y}{f}}+B'e^{\frac{-(x-y)}{f}}$$
$$+\left(C'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+D'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$
$$+\left(G'\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}+H'\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$
$$=\frac{1}{f^6}z$$

$\mathfrak{N}^\circ$.(8) Si on veut appliquer les formules précédentes aux cas que les expériences de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni ont fait connaître il faut observer que les plaques vibrantes ne peuvent être considérées alors comme libres de toutes forces et qu'il semble plus naturel de les supposer soumises à l'action d'une force quelconque d'appuy ou de pression dirigée suivant les z, cette force devant être censée appliquée au point où la plaque est soutenue, soit entre les doigts comme l'a pratiqué $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, soit entre deux pointes métalliques suivant la méthode employée par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Paradisi. Je crois qu'il seroit également naturel de regarder ce point de pression comme l'origine des coordonnées x y et z.

Cela posé je reprends les équations différentielles $\mathfrak{N}$.4 en observant d'y faire $P''=0$ $Q''=0$ et de remplacer $\int_{,}^{'} Rdxdy$ par la force d'appuy$=\mathcal{A}$. elles deviennent ainsi

$$-x\int_{,}dy\mathcal{A}+\int_{,}^{'}dxdy\int_{,}^{'}dxdy.\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-E^2bc\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)\frac{1}{2}.....(1)$$

$$-y\mathcal{A}+\int_{,}dy\int_{,}^{'}dxdy.\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-E^2bc\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dy^2dx}\right)\frac{1}{2}.....(2)$$

$$-\mathcal{A}+\int_{,}^{'}dxdy.\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-E^2bc\left(\frac{d^4z}{dx^3dy}+\frac{d^4z}{dy^3dx}\right)\frac{1}{2}.....(3)$$

$$\int_{,}dy.\frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=-E^2bc\left(\frac{d^5z}{dx^4dy}+\frac{d^5z}{dy^3dx^2}\right)\frac{1}{2}.....(4)$$

enfin $-\frac{z}{K} = \frac{1}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -Ebc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)\frac{1}{2}$.....(5)

La considération de ces équations rapportées à des points déterminés de la plaque élastique vibrante pourra servir, je crois, à trouver les valeurs des coefficients A, B, etc, A', B', etc qui entrent dans l'expression de $\underline{z}$, on parviendroit ainsi au moyen de la combinaison. Voila déjà dix équations entre les deux coefficients A, B, etc, A', B', etc. il semble par conséquent qu'il ne faudroit plus qu'en trouver deux autres pour être en état de déterminer toutes les circonstances du mouvement de cette plaque, mais il est aisé de voir que les calculs nécessaires pour parvenir à un pareil résultat doivent être longs, et l'on ne s'étonnera pas que je n'aye pas eu assez de temps pour les entreprendre, surtout si on réfléchit que parmi les dix équations que je viens d'indiquer, il y en a peut-être quelques unes qui seroient en dernière analyse une suite inévitable des autres. Ce qui exigeroit que l'on eut recours à quelques nouvelles conditions aux quelles la surface vibrante pourroit être supposée soumise, ou à la considération d'un plus grand nombre de points pris sur le périmètre de la même surface, de sorte que les opérations nécessaires à la détermination de toutes les quantités qu'il s'agit de connoitre, seroient encore plus compliquées qu'elles ne semblent d'abord devoir l'être.

Mais sans avoir égard au calcul, on peut, par la simple inspection des dix équations dont je viens de parler, trouver un moyen de satisfaire à sept d'entre elles, savoir aux six équations (1) et (2) et à l'équation (5) il suffit en effet de prendre $A = -A', B = -B', C = -C', D = -D', G = -G', H = -H'$ pour que ces équations ayant lieu d'elles mêmes. La valeur de z devient ainsi

$$z = ...Ae^{\frac{x+y}{f}} + Be^{\frac{-(x+y)}{f}}$$

$$+\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f} + D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{x+y}{2f}}$$

$$+\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2g} + H\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\right)e^{\frac{-(x+y)}{2f}}$$

$$-(Ae^{\frac{x-y}{f}} + Be^{\frac{-(x-y)}{f}}$$

$$+\left(C\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f} + D\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\left(G\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f} + H\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$

et cette équation convient suivant l'hypothèse g^le^ à une surface élastique de forme quelconque soumise à l'action d'une force de pression appliquée au centre de la figure, centre

qui est regardé comme l'origine des coordonnées de la surface. de plus les valeurs particulières qui viennent d'être adoptées pour les coefficients semblent devoir appartenir à une surface qui seroit partagée par une ligne passant par l'origine et tracée dans le sens des x. On voit en effet que lorsque $y = 0$, $z = 0$, quelle que soit d'ailleurs la valeur de x.

L'expérience et le raisonnement montrent également que lorsqu'une surface vibrante est partagée par une ligne nodale, les deux positions séparées par cette ligne exécutent leurs vibrations dans des sens opposés, de sorte que si l'une se trouve au dessus du plan naturel de la plaque, l'autre sera au dessous du même plan ; or il est aisé de voir que l'équation ci dessus rend compte de cette circonstance, car si on prend $\underline{y}$ au lieu de $\underline{-y}$ et vice versa, la valeur de z reste la même et change de signe seulement. Si on vouloit que la surface soit partagée par deux lignes nodales passant par l'origine et dirigée l'une suivant les x et l'autre suivant les y, il semble que l'on pourroit encore supposer $A = B, C = -G$ et $D = H$. dans cette hypothèse, la première des équations (4) a lieu d'elle même, les deux autres équations (4) se réduisent à une seule, et la valeur de z est

$$z = ...A\left(e^{\frac{x+y}{f}} + e^{\frac{-(x+y)}{f}}\right)$$

$$+C\sin\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\left(e^{\frac{x+y}{2f}} - e^{\frac{-(x+y)}{2f}}\right)$$

$$+D\cos\sqrt{3}.\frac{x+y}{2f}\left(e^{\frac{x+y}{2f}} + e^{\frac{-(x+y)}{2f}}\right)$$

$$-(A\left(e^{\frac{x-y}{f}} - e^{\frac{-(x-y)}{f}}\right)$$

$$+C\sin\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\left(e^{\frac{x-y}{2f}} - e^{\frac{-(x-y)}{2f}}\right)$$

$$+D\cos\sqrt{3}.\frac{x-y}{2f}\left(e^{\frac{x-y}{2f}} + e^{-\frac{x-y}{2f}}\right))$$

Cette valeur dis je est égale à zero lorsque l'une des coordonnées est supposée nulle, l'autre ayant une valeur quelconque. La surface vibrante est donc alors partagée en quatre portions égales qui executent leur mouvement de maniere que deux parties séparées par une des lignes nodales étant dans des situations opposées, celles qui ne se tiennent que par l'angle formé à l'origine par l'intersection des lignes nodales se trouvent à la fois au dessus et au dessous du plan naturel de la plaque. Cette manière de vibrer qui a été expliquée par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni dans plusieurs endroits de son traité d'acoustique et notamment (p.132 §.98) est entièrement décrite par la présente valeur de $\underline{z}$, car il est clair que si on change dans la derniere équation ci dessus le signe d'une seulement des

coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$, la valeur de $\underline{z}$ restant la même, prend pourtant un signe opposé, tandis que si on change à la fois le signe de deux coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$, z conservera la même valeur et le même signe. On voit que les figures nodales dont j'ai parlé jusqu'ici sont régulieres, dans le premier cas par rapport à la ligne nodale dirigée dans le sens des $\underline{x}$, laquelle sépare la figure entière en deux portions exactement semblables, et dans le second par rapport aux deux lignes nodales passant par l'origine et qui partage la figure entière en quatre portions exactement semblables entre elles, de sorte que ces figures appartiennent à la classe des figures nodales symétriques dont $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni a observé un grand nombre d'exemples.

$\mathfrak{N}$°.9. J'ai supposé jusqu'à présent que l'origine des coordonnées était prise à un point situé dans le milieu de la plaque vibrante, mais rien n'empêcheroit de placer cette origine à un point quelconque du périmètre de la même plaque, par exemple s'il s'agissoit d'une plaque quarrée, on pourroit pour fixer les idées prendre l'un des angles qui serviroit de limite à la surface pour l'origine. Cela posé si on vouloit se borner à la considération de la différence des coordonnées dans l'évaluation de la valeur de z, ce qui revient à supposer tous les coefficients A, B, etc nuls, les équations (1), (2), (4) et (5) $\mathfrak{N}$°.8, dont les seconds membres sont zéro à l'origine, c'est à dire lorsqu'elles sont rapportées au point dont les coordonnées $\underline{x}$, $\underline{y}$ et $\underline{z}$ sont zéros, donneroient d'après les formules $\mathfrak{N}$°.7 et en observant que l'on peut effacer les accents des coefficients A', B' restés seuls dans les formules, les équations suivantes

$$A + B - \frac{1}{2}(D + H) + \frac{\sqrt{3}}{2}(C - G) = 0 \text{.....}(1)$$

$$A - B - D + H = 0 \text{.....}(2)$$

$$A - B + \frac{1}{2}(D - H) - \frac{\sqrt{3}}{2}(C + G) = 0 \text{.....}4$$

$$A + B + D + H = 0 \text{.....}5$$

de ces équations il résulte les valeurs suivantes pour les coefficients,

$$C = -\sqrt{3}B \qquad D = -B \qquad G = \sqrt{3}A \qquad H = -A$$

et par conséquent la valeur de z seroit donnée par l'équation

$$z = ...Ae^{\frac{x-y}{f}} + Be^{\frac{-(x-y)}{f}} - B\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+A\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}-\cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}}$$

On peut concevoir que la surface à la quelle l'équation précédente est supposée appartenir se meuve de façon que les valeurs de z qui se rapportent aux angles les plus voisins de l'angle pris pour origine soient égales entre elles mais de signes différents, et comme il est clair que dans cette hypothèse $\underline{a}$ étant la longueur du côté de la plaque quarrée, $\underline{0}$ et $\underline{a}$ sont les valeurs de $\underline{x}$ et $\underline{y}$ pour l'un des angles dont il s'agit, et $\underline{a}$ et $\underline{0}$ les valeurs des mêmes coordonnées pour l'autre angle, on aura pour satisfaire à l'équation ci dessus indiquée, l'équation

$$Ae^{\frac{a}{f}}+B\ e^{-\frac{a}{f}}-B\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}+\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{a}{2f}}$$

$$+A\left(\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}-\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{-\frac{a}{2f}}$$

$$=$$

$$-(Ae^{-\frac{a}{f}}+Be^{\frac{a}{f}}+B\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}-\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{-\frac{a}{2f}}$$

$$-A\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}-\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{a}{2f}})$$

ou

$$A(e^{\frac{a}{f}}+e^{-\frac{a}{f}}+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}-\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{-\frac{a}{2f}}$$

$$+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}+\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{a}{2f}})$$

$$=-B(e^{\frac{a}{f}}+e^{-\frac{a}{f}}+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}-\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{-\frac{a}{2f}}$$

$$+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{a}{2f}+\cos\sqrt{3}\frac{a}{2f}\right)e^{\frac{a}{2f}})$$

laquelle mene à conclure $A=-B$. Cette valeur de B mise dans la précédente expression de z donnera

$$z=....A(e^{\frac{x-y}{f}}-e^{\frac{-(x-y)}{f}}-\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}+\cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}-\cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$

et on voit que cette dernière équation semble convenir à une surface élastique vibrante qui seroit partagée par une ligne nodale diagonale, car il est clair que z sera zéro toutes

les fois que les coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$ seront égales entre elles ; de plus le mouvement de cette surface sera symétrique autour de la ligne nodale diagonale, de sorte que la figure entière sera partagée par cette ligne en deux figures nodales exactement semblables entre elles, et c'est ce qui résulte de la présente expression de $\underline{z}$. il est clair en effet, qu'un point placé d'une certaine manière résultante de la valeur des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ dans l'un des triangles dont la ligne nodale diagonale est l'hypoténuse, est symétrique à un autre point placé dans l'autre triangle par suite de la valeur des $\underline{y}$ et $\underline{x}$, de la même manière que le premier l'est, en raison de celle des $\underline{x}$ et $\underline{y}$. Si on change donc $\underline{x}$ en $\underline{y}$ et y en x dans la même expression de $\underline{z}$, on trouvera que la valeur reste la même et que son signe seulement change, et on conclura conformément à l'expérience, que lorsque la surface vibrante est partagée par un nombre impair de lignes nodales tracée dans une direction diagonale, c'est à dire lorsque l'une de ces lignes est une véritable diagonale décrite d'un angle à l'autre de la surface vibrante ; le mouvement des deux parties de cette surface partagée par la diagonale est symétrique, et s'exécute dans le même temps pour l'une au dessus du plan naturel de la plaque, et pour l'autre au dessous du même plan.
à l'égard du cas où il y a un nombre pair de lignes tracées diagonalement, on peut imaginer pour se représenter les circonstances du mouvement une diagonale fictive, et prendre pour origine des coordonnées, celle de la ligne nodale la plus voisine de l'angle par lequel passe la diagonale que l'on a supposée. les quatre équations qui dans le cas précédent ont servi à chasser quatre coefficients auront aussi lieu dans celui ci, seulement il faudra supposer que les valeurs de z qui appartiendront aux angles que la diagonale fictive ne traverse pas, seront non seulement les mêmes comme dans l'autre cas, mais encore qu'elles seront affectées des mêmes signes ; cette supposition mènera à conclure $A = B$ et on aura par conséquent

$$z = ...A(e^{\frac{x-y}{f}} + e^{\frac{-(x-y)}{f}} - \left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} + \cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{x-y}{2f}}$$

$$+\left(\sqrt{3}sin\sqrt{3}\frac{x-y}{2f} - cos\sqrt{3}\frac{x-y}{2f}\right)e^{\frac{-(x-y)}{2f}})$$

Cette équation montre que les points placés symétriquement par rapport à la diagonale fictive exécutent leur mouvement de manière qu'ils se trouvent à la fois au dessus ou au dessous du plan naturel de la plaque, car $\underline{z}$ reste de même signe et de même valeur quelles que soient $\underline{x}$ et $\underline{y}$ lorsque l'on permute celle de ces deux coordonnées.

Je me suis dispensé de tracer les figures aux quelles se rapportent les remarques précédentes, parceque le traité d'acoustique de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni fournit plusieurs exemples pour chaque cas, et en général j'ai négligé de donner des explications que j'ai dû re-

garder comme inutiles en songeant que j'ai pour juges des savants illustres aux quels la théorie du son est très familiere et qui en trouvent la plus belle partie dans leurs propres ouvrages. Au reste les détails dans les quels je viens d'entrer sur différents cas particuliers que les belles expériences de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni ont fait connaître sont uniquement destinées à donner une idée de l'emploi que l'on peut faire de la méthode que j'ai l'honneur de présenter à la classe ; mais, comme je l'ai déja dit, ils ne m'ont été fournis que par des considérations générales sur les formules auxquelles j'étais parvenu et je n'ai pas assez réfléchi sur le choix convenable à faire des points que l'on peut considérer sur les surfaces vibrantes et sur les conditions aux quelles on peut les supposer assujeties pour être en état d'entreprendre une discussion complète de toutes les circonstances du mouvement des surfaces élastiques. Les expériences de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni appartiennent toutes, sauf une ou deux exceptions, au cas où les plaques vibrantes sont libres dans tous les points de leur périmètre ; mais il est clair que si la méthode que je soumets au jugement de la classe est exempte d'erreurs, elle peut également s'appliquer au cas où un nombre déterminé de points pris sur le périmètre seroient supposés soumis à l'action d'une force susceptible de gêner leur mouvement comme si par exemple ces points étoient appuyés contre un obstacle fixe, ainsi qu'Euler l'a supposé pour les extrémités de la lame élastique vibrante. L'analogie qui existe entre la théorie que ce grand géomètre a donnée pour le cas linéaire et celle que j'ai taché d'établir pour le mouvement des plaques, pourroient fournir de matière à beaucoup de remarques ; mais je les supprime ici afin de ne rien dire d'étranger à la question proposée par la classe, et je m'estimerai heureuse si elle juge que j'en ai bien saisi l'esprit et l'étendue.

---

fin

N.1

Concours de 1811

Mathématiques

Note sur l'équation de la surface élastique donnée dans le mémoire numéroté 1.

Je me propose de montrer que l'équation

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int Rds = V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

qui appartient à la surface élastique, peut être déduite des formules ordinaires de la mécanique.

Pour y parvenir, j'aurai recours aux équations (1) :

$$\lambda\frac{dx}{ds} - d(Id^2x) = A + \int Xdm$$

$$\lambda\frac{dy}{ds} - d(Id^2y) = B + \int Ydm$$

$$\lambda\frac{dz}{ds} - d(Id^2z) = C + \int Zdm$$

extraites de la meca.anal. δ150, n°42 2ème session

mais, afin de faire voir l'analogie qui règne entre le cas de la simple lame élastique et celui de la surface élastique, je vais commencer par examiner ce que deviennent les équations (1), lorsqu'on y introduit les simplifications adoptées par Euler (s m. de Petr. 1779)

La position de la lame étant alors supportée sur un axe fixe, on n'a besoin que des seules coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$; ainsi on n'a plus à considérer que les deux premières des équations (1) et en observant qu'ici $d^2x = 0 \qquad ds = dx$, et que l'on peut faire $A = B = 0$, elles se réduisent à $\lambda\frac{dx}{ds} = \int Xdm$ et $\lambda\frac{dy}{ds} - d(Id^2y) = \int Ydm$. En multipliant donc la première par dy et la seconde par dx, on en tire $\int dy \int Xdm - \int dx \int Ydm = Id^2ydx$, équation qui est la même que celle ci $\int dy \int Pds - \int dx \int Qds = \frac{V}{r}$ donnée par Euler, ainsi qu'il est aisé de voir en observant que P et Q représentent les mêmes forces que X et Y et qu'en ayant égard à la notation de la mécanique analytique $dm = ds.\Gamma$, $\frac{I}{\Gamma}d^2ydx = \frac{E}{\Gamma} = \frac{K}{r\Gamma} = \frac{V}{r}$; car la valeur de I δ152 se réduit ici à $\frac{E}{dsd^2y} = \frac{E}{dxd^2y}$. Si on eut eu recours à la valeur de δe même δ152 que l'on eut trouvé $= \frac{\delta d^2y}{ds} = \frac{\delta d^2y}{dx}$ on auroit eu tout de suite E au lieu du terme Id^2ydx.

Pour appliquer présentement les équations (1) à la recherche de l'équation de la surface vibrante, il faut observer que l'on a pour ce cas $d^2y = 0$, $d^2x = 0$, $ds = dxdy$ et que, rien n'empêchant de faire $A = B = C = 0$, ces équations se réduisent à

$$\lambda \frac{dx}{ds} = \int Xdm$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} = \int Ydm$$

$$\lambda \frac{dz}{ds} - d(Id^2z) = \int Zdm$$

desquelles on tire, après avoir multiplié la première par $dydz$, la seconde par $dzdx$ et la troisième par $2dxdy$:

$$\int dydz \int Xdm + \int dxdz \int Ydm - 2\int dxdy \int Zdm = 2Id^2zdxdy$$

Il est clair que, si on divise le premier membre de cette équation par l'épaisseur de la surface qui est une quantité constante, il sera absolument identique avec le premier membre de l'équation

$$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int Rds = V\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$$

A l'égard de la valeur du second membre, elle ne peut être tirée immédiatement des formules de mécanique analytique, puisque les valeurs de x et de I données dans ce bel ouvrage, se rapportent uniquement aux cas linéaires ; mais on peut calculer celles qui conviennent au cas présent, pour des considérations parfaitement analogues à celles dont $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ La Grange a fait usage (non lisible). Pour cela, il faut prendre quatre points sur la surface, imaginer deux plans, l'un passant par le premier, le second et le quatrième de ces points, l'autre passant par le premier, le troisième et le quatrième des mêmes points, et supposer que la surface est élastique dans tous ses points qui appartiennent à la ligne d'intersection des deux plans, de façon que l'angle qu'ils forment entre eux soit variable, et que l'effet de l'élasticité consiste à augmenter cet angle, et par conséquent à diminuer l'angle extérieur formé par un des plans et le prolongement de l'autre. On peut représenter ce dernier angle par $\underline{e}$ afin que l'angle entre les deux plans soit exprimé par $180 - e$

Il ne s'agira plus que de trouver la valeur de $\underline{e}$, or, on sait qu'en représentant par C l'ordonnée verticale d'un plan à son origine, par A, B les tangentes des angles que les traces du plan dont il s'agit, sur les plans coordonnés verticaux font avec l'horizon, et en désignant par C', A', B' les quantités analogues relatives à un second plan, les cosinus de l'angle entre ces deux plan sont exprimés par

$$\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

de sorte que l'on trouve ici,

$$\cos(180^0 - e) = -\cos e = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

d'où on tire

$$\sin^2 e = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (AA' + BB' + CC')^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}$$

$$= \frac{(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}$$

On a d'ailleurs, par les formules connues

$$A = z'(y'' - y''') + z"(y''' - y') + z'''(y' - y'')$$

$$B = x'(z'' - z''') + x''(z''' - z') + x'''(z' - z'')$$

$$C = y'(x'' - x''') + y''(x''' - x') + y'''(x' - x'')$$

équations dans lesquelles $x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''$ sont les coordonnées des trois points par lesquels le plan est supposé passer. Pour avoir les valeurs de ces coordonnées dans le cas présent, rien n'empêche de supposer qu'en passant d'un point pris sur la surface à un autre point infiniment voisin du premier, une des coordonnées soit regardée comme constante, tandis que les deux autres seraient supposées variables. Cela posé, prenant x, y, z pour les coordonnées du premier point, supposons que x reste constante en passant à un second point dont les coordonnées seront par conséquent x, $y+dy$, $z+dz$; supposons de même qu'en passant du premier point à un autre que nous nommerons le troisième, $\underline{y}$ reste constante, les coordonnées de ce troisième point seront y, $x + dx$, $z + dz$; enfin supposons que l'on passe du troisième point au quatrième en faisant varier $\underline{y}$ et $\underline{z}$ et prenant $\underline{x}$ constante, on pourra également passer du second point à ce

quatrième point, en faisant varier $\underline{x}$ et $\underline{z}$ et prenant $\underline{y}$ constante, ses coordonnées seront donc $x + dx$, $y + dy$, $z + 2dz + d^2z$.

On a supposé que le premier plan passait par le premier, le second et le quatrième point, aussi on a pour ce plan $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$; $x'' = x$, $y'' = y + dy$, $z'' = z + dz$; $x''' = x + dx$, $y''' = y + dy$, $z''' = z + 2dz + d^2z$

$$A = z'(y'' - y''') + z''(y''' - y') + z'''(y' - y'')$$

$$= z.0 + (z + dz)dy - (z + 2dz + d^2z)dy$$

$$= -(dz + d^2z)dy$$

$$B = x'(z'' - z''') + x''(z''' - z') + x'''(z' - z'')$$

$$= -x(dz + d^2z) + x(2dz + d^2z) - (x + dx)dz$$

$$= -dzdx$$

$$C = y'(x'' - x''') + y''(x''' - x') + y'''(x' - x'')$$

$$= -ydz + (y + dy)dx + (y + dy).0$$

$$= dxdy$$

on trouve de même pour le second plan $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$; $x'' = x + dx$, $y'' = y$, $z'' = z + dz$; $x''' = x + dx$, $y''' = y + dy$, $z''' = z + 2dz + d^2z$

$$A' = -zdy + (z + dz)dy + (z + 2dz + d^2z) \times 0 = dzdy$$

$$B' = -x(dz + d^2z) + (x + dx)(2dz + d^2z) - (x + dx)dz = dx(dz + d^2z)$$

$$C' = y \times 0 + ydx - (y + dy)dx = -dydx$$

et par conséquent, en observant que d^2z doit être négligé vis à vis de dz

$$A^2 + B^2 + C^2 = dy^2(dz + d^2z)^2 + dz^2dx^2 + dx^2dy^2$$

$$= dy^2dz^2 + dz^2dx^2 + dx^2dy^2 = ds^2$$

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = dz^2dy^2 + dx^2(dz + d^2z)^2 + dy^2dx^2$$

$$= dz^2dy^2 + dx^2dz^2 + dx^2dy^2 = ds^2$$

$$(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2$$
$$= (-dxdy(dz + d^2z)^2 + dz^2dxdy)^2 + (dy^2dx(dz + d^2z) - dy^2dxdz)^2$$
$$+(dx^2dydz - dx^2dy(dz + d^2z))^2$$
$$= dx^2dy^2\{([2dz + d^2z]d^2z)^2 + (dyd^2z)^2 + (dxd^2z)^2\}$$
$$= d^2z^2dx^2dy^2\{(2dz + d^2z)^2 + dy^2 + dx^2\}$$

et on voit que

$$(zdz + d^2z)^2 + dy^2 + dx^2 = (z''' - z')^2 + (y''' - y')^2 + (x''' - x')^2 = \rho^2$$

ρ étant la distance entre le premier et le quatrième point pris sur la surface distincte ou infiniment très petite et constante. En substituant à présent à la place des quantités qui entrent dans l'équation de $\sin^2 e$ leurs valeurs données par les calculs précédents, on trouve

$$\sin^2 e = \frac{\rho^2dx^2dy^2dz^2}{ds^4} = \frac{\rho^2d^2z}{ds^2}$$

d'où on tire, à cause de e fort petit $e = \frac{\rho d^2z}{ds}$, $\int e = \frac{\rho \int d^2z}{ds}$; de sorte qu'en représentant l'élasticité par E et l'épaisseur par Γ conformément à la notation de la mécanique analytique, $\frac{\rho E}{\Gamma ds}$ remplacera $\frac{Id^2z}{\Gamma}$ dans l'équation

$$\int dydz \int Xds + \int dxdz \int Yds - 2\int dydx \int Zds = \frac{2Id^2zdxdy}{\Gamma}$$

et le second membre se réduira à $\frac{2\rho E}{\Gamma}$. Cette quantité qui est proportionnelle à l'élasticité peut être décomposée en deux facteurs, l'un constant et dépendant uniquement de l'élasticité absolue, l'autre déterminé par la manière dont cette force est supposée agir ; c'est le premier de ces facteurs que j'ai représenté par V, à l'égard du second, j'ai supposé qu'il était exprimé par la somme des raisons inverses des deux rayons osculateurs de la surface, c'est à dire par $\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}$; à la vérité, ce n'est là qu'une hypothèse, mais lorsqu'on suppose, pour le cas linéaire, que la force d'élasticité agit en raison inverse du rayon osculateur, il est clair que l'on fait une supposition du même genre que celle à laquelle j'ai eu recours ; aussi trouve-t-on en repassant du cas de la surface que j'ai considéré à celui de la lame élastique, sous les conditions analogues admises par Euler, une équation de même forme que celle donnée par ce grand géomètre à δ.109 des m.de

Petersb P.Iere 1779. Il est clair que cette dernière équation renferme par conséquent celle de la corde tendue que l'on pourrait également conclure de l'équation de la surface inégalement tendue ; et il est assez remarquable que l'équation que j'ai proposée, comme étant celle de la surface élastique soumise à des forces quelconques, contienne, au moyen des simplifications successives, l'équation de la lame élastique, l'équation connue de la surface tendue, l'équation de la surface inégalement tendue et enfin celle de la corde tendue.

Pour montrer comment les équations du mémoire numéroté I peuvent s'appliquer au cas d'Euler, je reprends l'équation $\mathfrak{N}$.4 savoir

$$\int_{,}^{'} dzdy \int_{,} P''dy + \int_{,}^{'} dzdx \int^{'} Q''dx - 2\int_{,}^{'} dxdy \int_{,}^{'} dxdy \left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

$$= -E^2bc\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$$

et, en conservant $\underline{z}$ à la place $\underline{b'y}$ d'Euler, j'ai supposé $\underline{b'y}$ dans la présente équation égale à la constante $\underline{a}$, il est clair que la force appliquée suivant les $\underline{y}$ doit être nulle aussi bien que la différentielle partielle seconde relative à cette variable considérée présentement comme constante, il est d'ailleurs inutile de conserver l'accent du signe $\int$, puisque $\underline{z}$ n'est plus fonction que de x seulement. L'équation ci dessus se trouve donc déjà réduite à la forme

$$a^2 \int dzP'' - 2a^2 \int dx \int dx \left(R - \frac{E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right) = -E^2bc\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

Ainsi en prenant, comme l'a fait Euler $\int dxR =$ à une constante, en différentiant deux fois de suite, et en divisant deux fois par dx on trouve

$$a^2P''\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2a^2E}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -E^2bc\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

équation qui ne diffère de celle d'Euler que par les constantes qu'il serait facile de ramener aussi à la même forme.

Deuxième Mémoire

Sophie GERMAIN

reçu le 21 septembre 1813

N.I

reçu le 21 septembre 1813

Mémoire sur la question proposée par la première classe de l'institut

Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience.

Sed longe maximum progressibus scientiarum, et novis pensis ac provinciis in iisdem suscipiendis, obstaculum deprehenditur in desperatione hominum et suppositions impossibilis. Raco Novum viguum, libre, n.XCII, tom.I p.298, edit. in f.o London 1740

Si on vouloit examiner d'abord la question dans toute sa généralité, on tomberoit dans des calculs extrèmement compliqués ; mais en se bornant à considérer le mouvement des surfaces planes dans le cas où il est régulier et comparable à celui d'un pendule simple, on parvient aisément à une équation différentielle dont les intégrales particulières sont facilement applicables. J'ose esperer que, malgré les simplifications que, d'après cette remarque, j'ai crû pouvoir introduire dans mes formules la classe trouvera la théorie que je soumets a son jugement, aussi générale que le demande l'état de la question, car, d'une part, les expériences de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni sont toutes comprises dans le cas des mouvemens réguliers, les seuls en effet qui appartiennent a l'acoustique, puisqu'une seule presentent des lois déterminables ; et de l'autre les simplifications auxquelles la supposition de $\underline{z}$ très petit donne lieu, peuvent aisément se transporter au petit nombre de mouvemens que cet habile physicien a observé dans les surfaces courbes : car,

comme je le dirai dans la suite, ces mouvemens se trouvent compris dans une équation fort simple qui convient à plusieurs genres de corps sonores, et dans laquelle z exprime, comme dans le cas du plan, la quantité dont chaque point des mêmes surfaces s'eleveroit pendant leur mouvement au dessus de sa situation naturelle.

§.1 Recherche de l'équation différentielle de la surface élastique vibrante

$\mathfrak{N}$°1 Pour trouver cette équation, il faut d'abord déterminer quelle doit être la somme des momens des forces d'élasticité qui agissent dans toute l'étendue de la surface. Pour cela, je prens quatre points sur cette surface ; j'imagine deux plans, l'un passant par le premier, le troisième et le quatrième de ces points, l'autre passant par le premier, le second et le quatrième des mêmes points ; je nomme $\underline{e}$ l'angle extérieur formé par un de ces plans et le prolongement de l'autre ; je représente par β la petite ligne d'intersection des deux plans et par E la force qui agit suivant $\underline{\beta}$ en s'opposant à l'inflexion de la surface et en tendant par conséquent à diminuer l'angle $\underline{e}$.

Ainsi je trouve que la somme des momens est exprimée par $\int\int E\beta\ \delta e$; et il ne s'agit plus, pour avoir sa valeur, que de connaître celles de δe, $\underline{\beta}$ et E.

Je commence par la recherche de la valeur de e.

On sait qu'en représentant par C l'ordonnée verticale d'un plan à son origine, par A et B les tangentes des angles que les traces du plan dont il s'agit font avec l'horizon, et par C', A' et B' les quantités analogues relatives a un second plan, le cosinus de l'angle que ces deux plans forment entr'eux , est exprimé par $\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$.

On a donc ici $\cos(\pi - e) = -\cos e = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$ d'où on tire

$$\sin^2 e = \frac{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2) - (AA'+BB'+CC')^2}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}$$
$$= \frac{(AB'-A'B)^2 + (AC'-A'C)^2 + (BC'-B'C)^2}{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}$$

On a encore par les formules connues

$$A = z'(y''-y''') + z''(y'''-y') + z'''(y'-y'')$$

$$B = x'(z'' - z''') + x''(z''' - z') + x'''(z' - z'')$$

$$C = y'(x'' - x''') + y''(x''' - x') + y'''(x' - x'')$$

équations dans lesquelles $x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''$, sont les coordonnées des trois points par lesquels le plan est supposé passer. Pour déterminer les valeurs de ces coordonnées dans le cas présent, rien n'empêche de supposer qu'en passant d'un point pris sur la surface à un autre point infiniment voisin du premier, une des coordonnées soit regardée comme constante, tandis que les deux autres seront supposées variables. Ainsi on pourra prendre x, y, z : pour les coordonnées du premier point,

$x, y + dy, z + dz$: pour les coordonnées du second point,

$x + dx, y, z + dz$: pour les coordonnées du troisième point, enfin

$x + dx, y + dy, z + 2dz + d^2z$: pour les coordonnées du quatrième point.

J'ai supposé que le premier plan passoit par le premier, le second et le quatrième point. On a donc pour ce plan

$$x' = x, y' = y, z' = z; x'' = x, y'' = y + dy, z'' = z + dz; x''' = x + dx,$$

$$y''' = y + dy, z''' = z + 2dz + d^2z$$

$$A = z'(y'' - y''') + z''(y''' - y') + z'''(y' - y'')$$

$$= z.0 + (z + dz)dy - (z + 2dz + d^2z)dy = -(dz + d^2z)dy$$

$$B = x'(z'' - z''') + x''(z''' - z') + x'''(z' - z'')$$

$$= x(-dz - d^2z) + x(2dz + d^2z) - (x + dx)dz = -dzdx$$

$$C = y'(x'' - x''') + y''(x''' - x') + y'''(x' - x'')$$

$$= -ydx + (y + dy)dx + (y + dy).0 = dxdy$$

on a de même pour le second plan que j'ai supposé passer par le premier, le troisième et le quatrième point : $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$; $x'' = x + dx$, $y'' = y$, $z'' = z + dz$; $x''' = x + dx$, $y''' = y + dy$, $z''' = z + 2dz + d^2z$ et on trouve $A' = dzdy$, $B' = dx(dz + d^2z)$, $C' = -dydx$.

Par conséquent, en se bornant au cas de la surface plane, et en supposant, comme l'ont fait tous les auteurs qui ont traité des mouvemens de vibration, que les différens points de cette surface s'eloignent peu de leur situation naturelle pendant le mouvement, lequel s'exécute tout entier dans la direction des z, il est permis de négliger dz vis a vis

de dy et de dx, l'élement ds de la surface se réduit à $dxdy$, et on trouve

$$A^2 + B^2 + C^2 = dy^2(dz + d^2z)^2 + dz^2dx^2 + dx^2dy^2 = dx^2dy^2 = ds^2$$

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = dz^2dy^2 + dx^2(dz + d^2z)^2 + dy^2dx^2 = dx^2dy^2 = ds^2$$

$$(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2 = (-dxdy(dz + d^2z)^2 + dz^2dydx)^2$$

$$+(dy^2dx(dz + d^2z) - dy^2dxdz)^2 + (dx^2dydz - dx^2dy(dz + d^2z))^2$$

$$= dx^2dy^2(((2dz + d^2z)d^2z)^2 + (dyd^2z)^2 + (dxd^2z)^2)$$

$$= ds^2(dx^2 + dy^2)(d^2z)^2$$

$$\sin^2 e = \frac{(AB' - A'B)^2 + (AC' - A'C)^2 + (BC' - B'C)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}$$

$$= \frac{ds^2(dx^2 + dy^2)(d^2z)^2}{ds^4} = \frac{(dx^2 + dy^2)(d^2z)^2}{ds^2}$$

$\sin e = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}d^2z}{ds}$; et parce que l'angle $\underline{e}$ est fort petit

$$e = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}d^2z}{ds}, \delta e = \sqrt{dx^2 + dy^2}.\frac{\delta d^2z}{ds}$$

On voit aisément que la petite ligne β doit être égale à la distance entre le premier et le quatrième point, de sorte que l'on a

$$(z''' - z')^2 + (y''' - y')^2 + (x''' - x')^2 = (2dz + d^2z)^2 + dy^2 + dx^2 = dy^2 + dx^2 = \beta^2$$

ainsi $\int\int E\beta\delta e = \int\int E\beta^2\frac{\delta d^2z}{ds}$; et pour connaître la valeur de la somme des momens, il ne s'agit plus que de déterminer celle de la force E.

Cette force peut être supposée proportionnelle à la somme des raisons inverses de l'un et l'autre rayons de courbures, de plus, elle doit contenir un facteur constant dépendant de la nature de la matière de la surface et de l'épaisseur de la même surface. En adoptant cette hypothèse que je crois être la plus convenable, on pourra donc faire $E = b\Gamma^2\left(\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')}\right)$ équation dans laquelle b représente le facteur dépendant de la rigidité naturelle, Γ l'épaisseur, et (r) , (r') les deux rayons de courbure de la surface. J'ai déjà dit que, pendant le mouvement, la surface vibrante s'écartoit très peu de la position naturelle, ainsi, puisqu'il ne s'agit ici que des surfaces planes, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ seront des quantités très petites dont on pourra toujours négliger les quarrés et les produis, et que l'on trouvera $\frac{1}{(r)} + \frac{1}{(r')} = -\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)$.

En intégrant par parties on a

$$\int\int E\beta^2\frac{\delta d^2z}{ds}=\int E\beta^2\frac{d\delta z}{ds}-\int\int d(E\beta^2)\frac{d\delta z}{ds}$$

$$=\int E\beta^2\frac{d\delta z}{ds}-\int\frac{d(E\beta^2)}{ds}.\delta z+\int\int\frac{dd(E\beta^2)}{ds}\delta z$$

et comme les termes qui ne sont affectés que d'un seul signe d'intégration appartiennent aux limites, la somme des momens des forces d'élasticité qui agissent dans toute l'étendue de la surface se réduit enfin à

$$\int\int\frac{dd(E\beta^2)}{ds}.\delta z=\int\int\frac{dd\left(-\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)(dx^2+dy^2)\right)b\Gamma^3}{dxdy}.\delta z$$

$$=-\int\int b\Gamma^3\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dy^2dx^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)dxdy.\delta z$$

En se bornant à la recherche de l'équation du mouvement de la surface soumise à la seule force d'élasticité, fesant abstraction du poids de cette surface, prenant la gravité pour unité des forces accélératrices et se souvenant que le mouvement s'exécute tout entier suivant les z, on aura

$$-\int\int b\Gamma^3\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)dxdy\delta z=\int\int\frac{ddz}{dt^2}dm\delta z$$

$$=\int\int\frac{ddz}{dt^2}\Gamma dxdy\delta z$$

équation qui différenciée deux fois et divisée par $\Gamma dxdy.\delta z$ donnera

$$b\Gamma^2\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)+\frac{ddz}{dt^2}=0.....(A)$$

pour l'équation cherchée.

$\mathfrak{N}$°2. Lorsque le mouvement est régulier et comparable à celui du pendule simple dont la longueur est K, on a, comme l'on sait, en prenant pour unité des espaces parcourus la hauteur dont un corps abandonné a lui même tombe dans une seconde, $\frac{ddz}{dt^2}=-\frac{z}{K}$

ainsi l'équation de la surface élastique vibrante se réduit alors à

$$Kb\Gamma^2\left(\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}\right)=z.....(B)$$

Elle peut s'abaisser au second degré ; et, en fesant $Kb\Gamma^2=b^4$, elle fournit les deux équations

$$b^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)=z \quad , \qquad b^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-z$$

dont la dernière est comme l'on voit, l'équation des mouvemens réguliers des surfaces tendues. Cette équation n'a point d'intégrale générale en termes finis ; ainsi tout ce que l'on peut esperer, est de trouver les intégrales particulières de l'une et l'autre équations du second degré. En joignant les deux intégrales correspondantes, on auroit pour l'équation de la surface élastique, une intégrale particulière de la même étendue que celle dont jouit l'intégrale correspondante, qui appartient à l'équation de la surface tendue.

Il est clair que l'intégrale de l'équation de la surface tendue emploiée seule, peut également convenir à l'equation de la surface élastique. On peut conclure delà que quelle que soit la figure que puisse prendre une surface tendue renfermée dans des limites données, la même figure peut appartenir également à une surface elastique renfermée dans les mêmes limites.

§.2 Intégration de l'équation différentielle de la surface élastique vibrante

$\mathfrak{N}$°3 La condition $\frac{ddz}{dt^2}=-\frac{z}{k}$ donnée au $\mathfrak{N}$°2, fournit l'équation

$$z=M\sin\left(t\sqrt{\frac{1}{k}}+\zeta\right)$$

dans laquelle ζ représente une constante et M une fonction de $\underline{x}$, $\underline{y}$, des constantes. C'est la nature de cette fonction qui détermine les différentes intégrales particulières de l'équation (B). Il est clair que cette équation qui est une suite de l'équation (A), doit fournir pour $\underline{z}$ des valeurs qui contiendront toutes le facteur $\sin\left(t\sqrt{\frac{1}{k}}+\zeta\right)$ relatif au tems. Ainsi je me dispenserai, dans la suite, d'écrire ce facteur qui devra toujours être sous entendu dans chaque valeur de z.

Pour trouver les intégrales de l'équation (B), il est permis d'avoir recours à différentes conditions que l'on peut imaginer entre les variables z, y et x.

Je supposerai d'abord que l'équation $\frac{ddz}{dxdy} = 0$ soit satisfaite, c'est-à-dire que z se compose de la somme de deux fonctions séparées des variables x et y. On pourra prendre alors

$$z = ...\mathcal{A}(a \exp \frac{\omega x}{A} + b \exp \frac{-\omega x}{A} + c \sin \frac{\omega x}{A} + d \cos \frac{\omega x}{A})$$
$$+\mathcal{B}(a \exp \frac{\omega y}{A} + b \exp \frac{-\omega y}{A} + c \sin \frac{\omega y}{A} + d \cos \frac{\omega y}{A}).....(C)$$

les sons simples qui se rapportent aux manières de vibrer renfermés dans cette intégrale, seront exprimés par la formule $\sqrt{\frac{1}{k}}.\frac{1}{M} = \frac{\omega\omega\Gamma\sqrt{b}}{M.AA}$, M représentant, comme à l'ordinaire, la demi-circonférence.

Dans l'équation précédente, je n'ai écrit que le premier terme de la valeur de $\underline{z}$, et j'en userai de même pour toutes les valeurs de $\underline{z}$ que je donnerai par la suite, car le but de mes recherches étant la détermination des différentes figures nodales et des sons qui leur correspondent, je n'ai pas à traiter de la constance des sons qui empêcheroit la formation de ces figures et qui ne présente d'ailleurs pour les surfaces élastiques aucune difficulté de plus que pour les différens corps sonores dont les géomètres se sont occupés jusqu'à présent.

$\mathfrak{N}$°4 On peut encore supposer qu'il existe une périodicité dans les valeurs des coordonnées x et y, c'est-a-dire que ces variables augmentent l'une et l'autre d'une quantité constante, mais qui peut etre différente pour chacune d'elles, redonnent les mêmes valeurs de $\underline{z}$. Cette condition peut être exprimée par l'équation $\frac{ddz}{dx^2} = \frac{n^2}{m^2}.\frac{ddz}{dy^2}$ de la forme de celle aux cordes vibrantes. Il en résultera

$$z = ...\mathcal{A} \sin \frac{Mnx}{A} \sin \frac{Mny}{A}.....(D)$$

et les sons simples qui se rapportent aux manières de vibrer renfermés dans cette intégrale seront exprimés par la formule

$$\sqrt{\frac{1}{K}}.\frac{1}{M} = \frac{M(m^2+n^2)\Gamma\sqrt{b}}{A^2}$$

La supposition de $\mathcal{A}$ constant n'est pas la seule qui puisse satisfaire à la condition $\frac{ddz}{dx^2} = \frac{n^2}{m^2}.\frac{ddz}{dy^2}$. On peut encore faire

$$z = ... \sin \frac{Mnx}{A}. \sin \frac{Mmy}{A} \{a'(\cos \frac{Mnx}{A} + \frac{M+3}{2.3} \cos^3 \frac{Mnx}{A}$$

$$+\frac{(M+3)(M+3.5)}{2.3.4.5}\cos\frac{Mnx}{A}+\infty)+b'(\frac{2}{M}+\cos^2\frac{Mnx}{A}$$

$$+\frac{M+8}{3.4}\cos^4\frac{Mnx}{A}+\frac{(M+8)(M+9.8)}{3.4.5.6}\cos^6\frac{Mnx}{A}+\infty)\}$$

$$\times\{A'(\cos\frac{Mmy}{A}+\frac{M+3}{2.3}\cos^3\frac{Mmy}{A}$$

$$+\frac{(M+3)(M+3.5)}{2.3.4.5}\cos^5\frac{Mmy}{A}+\infty)$$

$$+B'(\frac{2}{M}+\cos^2\frac{Mmy}{A}+\frac{M+8}{3.4}\cos^4\frac{Mmy}{A}$$

$$+\frac{(M+8)(M+9.8)}{3.4.5.6}\cos^6\frac{Mmx}{A}+\infty)\}.....(E)$$

et les sons simples qui correspondent aux manières de vibrer renfermés dans cette intégrale seront exprimés par la formule $\sqrt{\frac{1}{K}}.\frac{1}{M}=\frac{M(M-1)(m^2+n^2)\Gamma\sqrt{b}}{A^2}$

Mais si on fait

$$z=....\sin\frac{Mmx}{A}.\sin\frac{Mmy}{A}\{a'(\cos\frac{Mmx}{A}+\frac{M+3}{2.3}\cos^3\frac{Mmx}{A}$$

$$+\frac{(M+3)(M+3.5)}{2.3.4.5}\cos\frac{Mmx}{A}+\infty)+b'(\frac{2}{M}+\cos^2\frac{Mmx}{A}+\frac{M+8}{3.4}\cos^4\frac{Mmx}{A}$$

$$+\frac{(M+8)(M+9.8)}{3.4.5.6}\cos^6\frac{Mmx}{A}+\infty)\}$$

$$\times\{A'(\cos\frac{Mmy}{A}+\frac{M+3}{2.3}\cos^3\frac{Mmy}{A}$$

$$+\frac{(M+3)(M+3.5)}{2.3.4.5}\cos^5\frac{Mmx}{A}+\infty)+B'(\frac{2}{M}+\cos^2\frac{Mmx}{A}+\frac{M+8}{3.4}\cos^4\frac{Mmx}{A}$$

$$+\frac{(M+8)(M+9.8)}{3.4.5.6}\cos^6\frac{Mmx}{A}+\infty)\}.....(F)$$

Les sons simples seront exprimés par la formule

$$\sqrt{\frac{1}{K}}\frac{1}{M}=\frac{Mm^2(M+M'-2)\Gamma\sqrt{b}}{A^2}$$

et au lieu de la condition

$$\frac{ddz}{dx^2}=\frac{n^2}{m^2}\frac{ddz}{dy^2}$$

on aura celle-ci : $\frac{ddz}{dx^2}=\frac{M-1}{M'-1}\frac{ddz}{dy^2}$

$\mathfrak{N}$°5 En prenant $z=z'z''$, la surface sera encore periodique dans le sens des $\underline{x}$ et dans celui des $\underline{y}$ lorsque l'on aura la condition $\frac{ddz'}{dx^2}=\frac{n^2}{m^2}\frac{ddz'}{dy^2}$ et alors les différentes valeurs de z'' détermineront la nature des périodes.

Ainsi, lorsque l'on fera $z'=\sin(\frac{Mmx}{A})\sin(\frac{Mmy}{A})$ on pourra prendre

$$z=....\sin\frac{(Mmx)}{A}\sin\frac{(Mmy)}{A}[\{a'(\cos\frac{(Mmx)}{A}+\frac{M+3}{2.3}\cos\frac{Mmx}{A}+....$$

$$...\frac{(M+3)(M+3.5)...(M+4n^2-1)}{2.3.4.5...2n+1}\cos^{2n+1}\frac{Mmx}{A}+\infty)$$

$$+b'(\frac{2}{M}+\cos^2\frac{Mmx}{A}+\frac{M+8}{3.4}\cos^4\frac{Mmx}{A}+.....$$

$$...\frac{(M+8)(M+9.8)...(M+(2n-1)^2-1)}{3.4.5.6...2n}\cos^{2n}\frac{Mmx}{A}+\infty)\}$$

$$\times\{A'(\cos\frac{(Mmy)}{A}+\frac{M'+3}{2.3}\cos\frac{Mmy}{A}+....$$

$$...\frac{(M'+3)(M'+3.5)...(M'+4n^2-1)}{2.3.4.5...2n+1}\cos^{2n+1}\frac{Mmy}{A}+\infty)$$

$$B'(\frac{2}{M'}+\cos^2\frac{M'mx}{A}+\frac{M'+8}{3.4}\cos^4\frac{Mmx}{A}+.....$$

$$...\frac{(M'+8)(M'+9.8)...(M'+(2n-1)^2-1)}{3.4.5.6...2n}\cos^{2n}\frac{Mmx}{A}+\infty)\}$$

$$+a''(\cos\frac{(Mmx)}{A}+fracM''+32.3\cos\frac{Mmx}{A}+....$$

$$...\frac{(M''+3)(M''+3.5)...(M''+4n^2-1)}{2.3.4.5...2n+1}\cos^{2n+1}\frac{Mmx}{A}+\infty)$$

$$b''(\frac{2}{M''}+\cos^2\frac{Mmx}{A}+\frac{M''+8}{3.4}\cos^4\frac{Mmx}{A}+.....$$

$$...\frac{(M''+8)(M''+9.8)...(M''+(2n-1)^2-1)}{3.4.5.6...2n}\cos^{2n}\frac{Mmx}{A}+\infty)$$

$$A''(\cos\frac{(Mmy)}{A}+\frac{M''+3}{2.3}\cos\frac{Mmy}{A}+....$$

$$...\frac{(M''+3)(M''+3.5)...(M''+4n^2-1)}{2.3.4.5...2n+1}\cos^{2n+1}\frac{Mmy}{A}+\infty)$$

$$+B''(\frac{2}{M''}+\cos^2\frac{M''my}{A}+\frac{M''+8}{3.4}\cos^4\frac{Mmy}{A}+.....$$

$$...\frac{(M''+8)(M''+9.8)...(M''+(2n-1)^2-1)}{3.4.5.6...2n}\cos^{2n}\frac{Mmy}{A}+\infty)].....(G)$$

pourvu que M, M', M'' ayant entr'elles la relation exprimée par l'équation $M+M'=M''$

Les sons simples seront comme dans les cas compris dans l'intégrale (F), c'est a dire que l'on aura toujours $\sqrt{\frac{1}{K}\frac{1}{M}}=\frac{Mm^{2(M+M'-2)}}{A^2}$

$\mathfrak{N}$°6 En prenant encore $z=z'z''$, et fesant $z'=\sin\left(t\sqrt{\frac{1}{K}}+\zeta\right)\sin\frac{Mnx}{A}$ on aura toujours une équation de la forme de celle aux cordes vibrantes savoir $\frac{ddz'}{dt^2}=\frac{K}{n^2}\frac{ddz'}{dx^2}$. Elle indique que la surface sera periodique dans le sens des $\underline{x}$. On pourra faire

$$z = ... \sin \frac{Mnx}{A} \{a'(\cos \frac{Mnx}{A} + \frac{2 - m^2 + 3}{2.3} \cos^3 \frac{Mnx}{A}$$

$$+ \frac{(2 - m^2 + 3)(2 - m^2 + 15}{2.3.4.5} \cos^5 \frac{Mnx}{A} + \infty + \mathfrak{a} \sin \frac{Mmny}{A} \} .....(H)$$

mais cette surface ne jouira pas de la même propriété dans le sens des $\underline{y}$, puisque cette dernière variable n'entre pas dans l'équation aux cordes vibrantes. Les sons simples seront exprimés par la formule $\sqrt{\frac{1}{K}\frac{1}{M}} = \frac{Mn^2m^2\Gamma\sqrt{b}}{A^2}$

Les différentes intégrales que je viens de donner, conviennent toutes, excepté la première, à l'equation différentielle des surfaces tendues, et c'est a quoi elles doivent leur simplicité, car si on vouloit avoir les intégrales qui n'appartiennent qu'à l'equation différentielle des surfaces élastiques on trouveroit non seulement les termes contenant $\exp t\sqrt{-1}\omega$ mais encore des termes où intervient de la même manière, les exponentielles quantités $\exp t\omega$; et alors l'angle $\underline{\omega}$ ne pourroit etre déterminé que par des calculs d'aproximation, de sorte que non seulement les intégrales seroient beaucoup plus compliquées que les précédentes ; mais encore elles seroient d'une application moins facile que celles-ci. Avant de m'occuper de la comparaison entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience, je vais présenter quelques remarques que je crois importantes.

§.3 Observations sur les propriétés analytiques des différents points des corps sonores

$\mathfrak{N}$°7 Indépendamment des conditions auxquelles doivent satisfaire tous les points renfermés dans l'étendue des intégrales, il en existe d'autres auxquelles les limites de ces intégrales sont assujetties, et qui par conséquent appartiennent à tous les points du contour des corps sonores, à l'exclusion des autres points des mêmes corps. Il suit de là qu'aucun point ou ligne ne pourront jamais être considérés comme limite d'une partie vibrante s'ils ne satisfont aux conditions analytiques qui distinguent les points du contour des autres points du corps sonore ; et qu'au contraire il suffira toujours qu'un point ou ligne satisfasse a ces mêmes conditions pour qu'il soit permis de le considérer comme limite analytique des parties vibrantes qu'ils separent.

Lorsqu'il s'agit de la corde vibrante on sait depuis toujours que tous les points de repos peuvent être considérés comme de véritables limites du corps sonore ; mais ces points ne sont pas les seuls qui satisfassent aux conditions des extrémités, et il est aisé

de voir que tous les points dans lesquels la tangente est parallèle à l'axe, c'est-a-dire tous les points situés au milieu des ventres de vibration, jouissent de la même propriété. En effet, d'après les suppositions admises dans la théorie du son on peut conclure de la formule P.332 de la 1ère edition de la mec. analy. que les conditions des limites se reduisent à l'équation $R\frac{dz}{dx}\delta z = 0$ à laquelle on peut également satisfaire par l'une ou l'autre des équations $z = 0, \frac{dz}{dx} = 0$. A la vérité il y a une impossibilité physique à vérifier ce résultat pour la corde tendue ; mais il existe une parfaite confirmation dans la théorie des instrumens a vent ; car on peut voir dans le second volume des mémoires de Turin que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ De la Grange a conclu l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$ de la necessité que l'elasticité de l'air dans le tuyau soit la même à l'extrémité ouverte que celle de l'atmosphère. Ainsi, tandis que les extrémités de la corde tendue fournissent une manière de satisfaire a la condition $R\frac{dz}{dx}.\delta z = 0$, l'autre est donnée par les extrémités de la flûte ouverte aux deux bouts, de sorte qu'en prenant de part et d'autre le cas le plus simple, l'un est exactement le renversement de l'autre, car lorsque la corde vibre dans toute son étendue en ne formant qu'une seule période, il existe trois points de limites savoir : les deux points d'extrémités effectives pour lesquels on a $z = 0$, et le point de milieu pour lequel $\frac{dz}{dx} = 0$, tandis que pour la manière de vibrer la plus simple dont soit susceptible une flûte ouverte aux deux bouts, les extrémités effectives satisfont à la condition $\frac{dz}{dx} = 0$, et le point de milieu, auquel se réunissent les deux demi périodes, remplit la condition $z = 0$.

Quelque chose de semblable a lieu pour les surfaces tendues ; et c'est ce que l'on peut voir aisement en introduisant dans les formules données par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Biot p.87 de son mémoire t.4 de l'institut, les simplifications admises dans la théorie du son, car les conditions des extrémités se réduisent alors à $\int Edx\frac{dz}{dy}\delta z = 0$ et $\int Edy\frac{dz}{dx}\delta z = 0$. Or dans le cas des surfaces rectangulaires un des côtés peut toujours etre supposé parallèle à l'axe des $\underline{x}$ ou a celui des $\underline{y}$, de sorte qu'une des conditions ci dessus est toujours satisfaite par l'une ou l'autre des deux suppositions $dx = 0, dy = 0$, tandis que l'autre doit l'être par l'une des conditions $z = 0$,ou $\frac{dz}{dy} = 0$; $z = 0$ ou $\frac{dz}{dx} = 0$. L'équation $z = 0$ appartient aux extremités effectives ou aux lignes de repos dont $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Biot a demontré l'existence ; et les equations $\frac{dz}{dy} = 0, \frac{dz}{dx} = 0$ montrent qu'il n'est pas toujours necessaire de faire $E = 0$, pour satisfaire aux conditions des limites dans des points qui ne sont pas supposés fixes.

On voit donc que, quelque soit le corps sonore que l'on considère, les points ou les lignes de repos ne sont pas les seuls points ou lignes qui satisfassent aux conditions des extremités, et qui soient par conséquent de veritables limites analytiques des parties vibrantes qu'ils séparent. On voit d'ailleurs que, tant qu'il ne s'agit que des surfaces

tendues, il est toujours permis de considerer, ainsi que l'indique le programme publié par la classe, les nappes vibrantes comme analogues aux ondes des cordes de Sauveur, et les courbes d'équilibre ou de repos comme correspondant aux nœuds ou points de repos des mêmes cordes, puisque de part et d'autre l'equation $z = 0$, suffit pour remplir les conditions des extremités. Il n'en est pas de même pour les lames et les surfaces elastiques ; car il existe dans leurs mouvemens deux genres differens de points ou lignes de repos ; les uns qui, parce qu'ils satisfont aux conditions des extrémités, sont de la même nature que ceux qui se forment sur les cordes et les surfaces tendues, les autres qui, par la raison contraire, separent des espaces qui, s'ils etoient isolés, ne pourroient, dans aucun cas, se ployer aux courbures qu'ils prennent comme parties intégrantes du corps vibrant ni par conséquent rendre le même son que lui.

Quoique la remarque que je viens d'exposer n'ait pas encore été faite, elle se présente naturellement en examinant la théorie qu'Euler a donnée pour la lame Acta academiæ..... Petropolitanæ, pro anno 1779 Pars prior : c'est ce que je vais établir dans le $\mathfrak{N}^\circ$ suivant.

$\mathfrak{N}^\circ$8 Pour y parvenir, en adoptant les simplifications admises par Euler, je prens les conditions des extrémités données par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ De la Grange p.159 de la nouvelle édition de sa meca. Elles se réduisent dans cette synthèse aux deux équations $K\frac{d^3z}{dx^3}\delta z = 0$ et $K\frac{d^2z}{dx^2}\delta\frac{dz}{dx} = 0$.

Je remarque que l'on doit avoir pour y satisfaire l'un ou l'autre des quatre couples suivans d'équations, $z = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$; $z = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$; $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$; $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$; et je conclus deja que la condition $z = 0$ ne suffit pas pour que le point auquel elle appartient puisse être considéré comme une véritable limite.

On peut voir p.116 du mémoire cité, qu'Euler n'a examiné que trois de ces couples, l'un $z = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$, qu'il attribue aux extrémités fixées, l'autre $z = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ qui appartient aux extrémités appuyées, et le troisième $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ qu'il regarde comme formant le caractère des extrémités libres ; cependant il est clair que les extremités seroient egalement libres lorsqu'elles appartiendroient au quatrième couple $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$. A la vérité, lorsque l'on fait vibrer une lame physiquement libre à ses extrémités on obtient bien plus aisément les figures et les sons qui se rapportent aux conditions $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$ que ceux qui conviennent aux conditions $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$. Cependant je crois etre parvenue à obtenir ces derniers, mais la lame qui se prêtoit plus aisément que les autres à cette manière de vibrer, s'est brisée trop tôt pour que je puisse constater et mesurer ce résultat. On verra plus bas que j'ai été plus

heureuse par rapport a un fait du même genre qui pourroit servir de preuve a celui dont je n'ai pû m'assurer directement ; et l'on ne s'etonnera pas de la difficulté que j'ai trouvée à faire l'experience dont il s'agit si on fait attention a l'influence qu'ont les moindres circonstances physiques pour inclure une partie des mouvemens que l'analyse montre possibles et pour les remplacer par d'autres mouvemens pris également au nombre de ceux que l'analyse indique possibles, mais qui n'ont lieu pourtant qu'à l'aide de la condition physique qui n'entre pas dans le calcul. C'est ainsi que les fourches métalliques qui doivent être assujetties aux mêmes conditions analytiques que les lames droites, quoique la courbure ait pourtant un effet que j'expliquerai dans la suite, donnent des sons qui suivent la même loi que ceux qui appartiennent à la lame appuyée a ses deux extrémités, quoique celles de la fourche soient l'une et l'autre physiquement libres (ν. de Chladni n° 88 p.115) ; de sorte qu'il paroit que les extrémités de la fourche satisfont veritablement au couple d'équations $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$, et que l'experience refuse de présenter pour elles le cas $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, qui sur la lame droite exclut presque toujours le cas premier, par la facilité que cette lame paroit avoir à se ployer aux courbures qui appartiennent au second.

Quoiqu'il en soit de la possibilité d'obtenir les figures et les sons résultant des extrémités assujetties aux conditions $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$, il est impossible de ne pas admettre les points qui y satisfont au nombre des limites analytiques des lames vibrantes ; et rien ne seroit plus aisé que d'obtenir, presque sans calcul, les valeurs de $\underline{z}$ et de l'angle $\underline{\omega}$ qui conviendroient aux quatre cas que la considération de pareils points ajouteroit aux six autres cas examinés par Euler. C'est à regret, et pour ne pas m'écarter trop du sujet que j'ai a traiter, que j'abandonne cette recherche ; mais je ne puis me dispenser de considérer au moins les six cas dont Euler a donné l'analyse.

Je prens donc d'abord l'équation p.120 du mémoire d'Euler. En n'écrivant pas le coefficient relatif au tems, et en changeant y en z, elle devient

$$z = ...e^{u\omega} \mp e^{(1-u)\omega} + (1 \pm e^{\omega}) \sin u\omega + (1 \mp e^{\omega}) \cos u\omega$$

Cette équation appartient au cas où les extrémités satisfont aux conditions $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$; elle présente elle même deux cas selon qu'il y a un nombre pair ou un nombre impair de points de repos. Le premier se rapportent aux signes inférieurs, et les signes supérieurs conviennent au second.

Je prouverai d'abord que, lorsque l'on a

$$z = ...e^{u\omega} + e^{(1-u)\omega} + (1 - e^{(1-u)\omega}) \sin u\omega + (1 + e^{\omega}) \cos u\omega$$

aucun point de repos ne peut être considéré comme point d'appui au sens d'Euler, ni même comme extrémité analytique. En effet, pour qu'un tel point satisfit aux conditions des limites, il faudrait que l'un ou l'autre des couples d'équations $z = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$; $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} = o$ lui convient, or le premier indiqué caractérise le point fixé ; et suivant la remarque d'Euler p.191 n° 49 de son mémoire, toute communication de mouvement est impossible entre les deux portions séparées par un tel point.

A l'égard du second couple, il se réduit aux deux équations

$$e^{u\omega} + e^{(1-u)\omega} + (1 - e^{\omega}) \sin u\omega + (1 + e^{\omega}) \cos u\omega = 0$$

$$e^{u\omega} + e^{(1-u)\omega} - \{(1 - e^{\omega}) \sin u\omega + (1 + e^{\omega}) \cos u\omega\} = 0$$

desquelles on tire celles-ci : $e^{u\omega} + e^{(1-u)\omega} = 0$, $(1 - e^{\omega}) \sin u\omega + (1 + e^{\omega}) \cos u\omega = 0$ dont la première est visiblement impossible et dont la seconde ne peut s'accorder, dans aucun cas, avec l'équation qui, dans l'analyse d'Euler, sert à déterminer l'angle ω.

Néanmoins dans la manière de vibrer dont je m'occupe en ce moment, un des points de la lame satisfait aux conditions des limites et peut par conséquent etre considéré comme une extremité analytique. Ce point est situé au milieu de la lame ; car des conditions $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$ qui se réduisent aux deux équations

$$e^{u\omega} - e^{(1-u)\omega} + (1 - e^{\omega}) \cos u\omega + (1 + e^{\omega}) \sin u\omega = 0$$

$$e^{u\omega} - e^{(1-u)\omega} - \{(1 - e^{\omega}) \cos u\omega + (1 + e^{\omega}) \sin u\omega\} = 0$$

ou $e^{u\omega} - e^{(1-u)\omega} = 0$, $(1 - e^{\omega}) \cos u\omega + (1 - e^{\omega}) \sin u\omega = 0$, l'une devient identique pour la supposition $u = \frac{1}{2}$, tandis que l'autre est précisément l'équation qui sert à déterminer l'angle ω.

On doit conclure de là que lorsqu'il y a un nombre pair de points de repos sur la lame élastique dont les extrémités sont libres en vertu des équations $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, elle vibre comme deux lames séparées de moitié moins longues qui auroient chacune une de leurs extrémités assujetties aux mêmes conditions que celles de la lame entière, tandis que leur autre extrémité seroit libre en vertu des conditions $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ et $\frac{dz}{dx} = 0$.

Lorsqu'il y a un nombre impair de points de repos, la valeur z est donnée par l'équation

$$z = ...e^{u\omega} - e^{(1-u)\omega} + (1 + e^{\omega}) \sin u\omega + (1 - e^{\omega}) \cos u\omega$$

et d'après ce que j'ai dit pour le cas précédent, on voit qu'un point de repos ne peut être point d'appui au sens d'Euler que lorsqu'il satisfait aux deux conditions

$$e^{u\omega} - e^{(1-u)\omega} + (1+e^{\omega})\sin u\omega + (1-e^{\omega})\cos u\omega = 0$$

$$e^{u\omega} - e^{(1-u)\omega} - \{(1+e^{\omega})\sin u\omega + (1-e^{\omega})\cos u\omega\} = 0$$

ou

$$e^{u\omega} - e^{(1-u)\omega}) = 0$$

$$(1+e^{\omega})\sin u\omega + (1-e^{\omega})\cos u\omega = 0$$

c'est a dire que lorsque $u = \frac{1}{2}$

On doit donc conclure que, lorsqu'il y a un nombre impair de points de repos sur la lame elastique dont les extrémités sont libres au sens d'Euler, elle vibre comme deux lames séparées, de moitié moins longue, qui auroient chacune une de leurs extremités libre tandis que leur autre extremité seroit appuyée. Et en effet la condition $\frac{e^{\omega}-1}{e^{\omega}+1} = \tan\frac{1}{2}\omega$, qui resulte pour ce cas de l'équation $\frac{2}{e^{\omega}+e^{-\omega}} = tang\frac{1}{2}\omega$ laquelle sert a déterminer l'angle ω lorsque les deux extremités sont libres, n'est autre chose, en mettant ω au lieu de $\frac{1}{2}\omega$, que l'équation qui détermine le même angle $\underline{\omega}$ dans le second cas examiné par Euler, c'est a dire lorsqu'une extremité est libre et l'autre appuyée. Il en est de même de l'expression de $\underline{z}$, de sorte qu'il est visible que ce grand géomètre auroit pû se dispenser de calculer a part le cas dont il s'agit, puisque ce cas est expressement contenu dans le premier.

Dans le troisième cas d'Euler qui est celui d'une extremité fixée et l'autre libre, on peut s'assurer, en employant des raisonnemens semblables à ceux dont j'ai fait usage pour le premier cas, que de quelque manière que la lame se meuve, il ne peut exister aucun autre point qui satisfasse aux conditions des limites que les extremités reelles et physiques de cette lame. Ainsi elle ne peut jamais etre considerée comme séparée en plusieurs autres lames vibrant séparement.

Le quatrième cas d'Euler est celui des deux extremités appuyées. Il est fort remarquable en ce que, suivant l'observation de cet illustre auteur, la lame se ploye alors aux mêmes courbures que la corde tendue. Aussi est-il visible que, dans ce cas, tous les points de repos sont de véritables limites, puisqu'ils satisfont tous aux conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} = 0$, et que, de plus, s'il y a, par exemple $n-1$ points de repos, on aura entre les $n+1$ points d'extrémités résultans des conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} = 0$, n autres limites analytiques assujetties aux conditions $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$; de sorte que $2n+1$ exprimera le nombre des points qui pourront, dans ce cas etre considérés comme de veritables limites des parties qu'ils separent.

Les deux derniers cas savoir, ceux d'une extrémité fixée, l'autre appuyée, et des deux extrémités fixées, ont entr'eux le même rapport que celui que j'ai remarqué entre les deux premiers cas ; et Euler auroit encore pû se dispenser de calculer à part le Vème qui se trouve compris dans le VIeme. A la verité, la valeur de $\underline{z}$ qui appartient au Veme se presente sous une autre forme que celle qui seroit déduite du VIème ; mais cette différence vient uniquement de ce que c'est l'extrémité $x = 0$ qu'Euler suppose appuyée dans l'analyse de son Veme cas, tandis que dans le VIeme cas ce ne peut jamais etre que le point $x = \frac{1}{2}a$ qui soit censé appuyé. Au reste, dans ce VIeme cas, on trouve, comme dans le premier, qu'il ne peut jamais y avoir qu'une seule extrémité purement analytique, laquelle est toujours au milieu de la lame, et que lorsqu'il y a un nombre impair de points de repos, cette extrémité est appuyée en vertu des conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} = 0$, tandis que, lorsqu'il y a un nombre pair de pareils points, l'extremité analytique est libre en vertu des conditions $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$.

D'après les remarques précédentes, il est maintenant hors de doute que les points de repos des lames élastiques ne doivent pas etre assimilés aux nœuds de vibration des cordes tendues ; mais puisque la vraie théorie du mouvement de ces lames ait été donnée depuis longtems par Euler, que le cas des extrémités libres ait été le sujet d'un excellent mémoire de Giordano Ricati (Delle vibrazioni dei cilindri T.I des m. de la Société Italiana) dans lequel cet auteur a calculé avec beaucoup d'exactitude les différentes valeurs de l'angle ω, et qu'en dernier lieu $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni ait confirmé par l'expérience les résultats de la théorie qu'il reconnaît pour entièrement satisfesante, il est étonnant que, ni l'un ni l'autre de ces savans auteurs ne se soient aperçus que les intervalles qui separent les points de repos sont inégaux ent'eux.

En effet Giordano Ricati n'auroit eu qu'a comparer entr'elles les valeurs qu'il a calculées pour remarquer qu'une partie comprise entre l'extremité et le point de repos le plus voisin doit etre moins grande que la moitié de l'espace compris entre le même nœud et le suivant, que la partie comprise entre le second nœud et le troisième doit être moins grande que celle qui est limitée par les deux premiers nœuds, et ainsi de suite ; de sorte qu'en général une partie comprise entre deux nœuds doit être d'autant plus étendue qu'elle est plus éloignée de l'extrémité et plus voisine du milieu de la lame quoique pourtant les différences soient beaucoup plus grandes entre les parties qui sont près des extrémités qu'entre celles qui s'en éloignent davantage.

On ne peut douter que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni n'est remarqué aussi les mêmes différences, s'il eut employé des lames suffisamment longues ; car je me suis assurée que l'expérience les confirme avec la plus grande exactitude.

Euler lui-même n'a sans doute pas fait la remarque dont je viens de parler ; car en voulant donner, $\mathfrak{N}$°47 de son mémoire déjà cité, un exemple des effets de l'application d'un stilet dans un point quelconque d'une lame dont les extremités seroient libres, fixées ou appuyées, il établit une équation entre les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ qui conviennent aux deux branches séparées par l'application qu'il suppose. Or, cette équation qui a lieu en effet pour le cas des extrémités appuyées qu'il a choisi pour exemple, ne sauroit subsister lorsque les deux branches ont des courbures différentes ; de sorte que toute cette analyse, qui d'ailleurs seroit sujette à quelqu'objection, ne pourroit s'appliquer, en general, aux autres etats des extremités. Au reste on jugera peut-être cette recherche surabondante si on observe que l'effet de l'application d'un obstacle qui laisse subsister la communication du mouvement entre les deux portions de la lame, doit toujours se borner à déterminer une des manières de vibrer dont elle est susceptible à l'exclusion des autres, qu'un pareil obstacle peut être placé dans un point de repos quelconque, et qu'il arrive même toujours, lorsque les extremités sont libres ou fixées, que ce n'est pas dans un veritable point d'appui au sens d'Euler qu'il convient de serrer la lame pour obtenir les differens sons dont elle est susceptible.

D'après ce que je viens de dire, on voit que rien n'est plus vague que la signification des mots "libre" et "appuyé" appliqués aux differens points de la lame elastique ; car après avoir remarqué qu'il existe deux manières d'etre analytiquement différentes qui peuvent appartenir aux extrémités libres, je trouve encore que l'appui physique est souvent placé dans un point qui ne peut etre consideré comme appuyé au sens d'Euler.

$\mathfrak{N}$°9. Je passe enfin à l'examen des conditions auxquelles sont assujettis les points du contour des plaques élastiques vibrantes. Si dans la formule n°1 résultante de la differenciation par parties, on prend les termes qui ne sont affectés que d'un seul signe d'intégration, que l'on y mette pour E sa valeur, et que l'on divise par β^2 et par les facteurs dépendans de l'épaisseur et de la nature de la matière, quantités dont aucune ne peut etre supposée nulle, on trouvera que les conditions des limites se réduisent aux deux équations

$$\int \left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right) \delta . \frac{dz}{dxdy} = 0, \qquad \int \frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right) \delta z}{dxdy} = 0$$

Afin de démêler plus aisément ce que signifient ces équations, j'examinerai les conséquences que l'on peut en tirer dans les hypothèses les plus simples. Je supposerai donc

d'abord que la surface vibrante soit rectangulaire, que le plan de cette surface au repos soit pris pour celui des x et y à fin que l'origine soit en un des points de repos de la même surface, enfin que chacun des côtés soit parallèle a un des axes des x et y. Cela posé, la suite des points qui servent de limites aux valeurs des x, c'est-à-dire ceux qui appartiennent aux côtés parallèles à l'axe des y devront satisfaire aux conditions

$$\int \frac{1}{dy}\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)\delta\left(\frac{dz}{dx}\right)=0, \qquad \int \frac{1}{dy}d\left\{\frac{\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}\right\}.\delta z=0$$

en vertu de l'un ou l'autre des quatre couples d'équations :

$$z=0 \quad et \quad \frac{dz}{dx}=0; \qquad z=0 \quad et \quad \frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0;$$

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}=0 \quad et \quad \frac{dz}{dx}=0; \qquad \frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}=0 \quad et \quad \frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0$$

L'analogie est frapante entre ce que l'on trouve ici et ce qui a lieu pour les extrémités de la simple lame. On voit en effet, que les deux derniers couples ne peuvent appartenir qu'aux points libres du contour, tandis que les deux premiers conviennent aux points de repos du même contour. Cependant on ne peut plus regarder le point auquel appartiendroient les conditions $z=0$ et $\frac{dz}{dx}=0$ comme fixé parce qu'elles ne suffisent pas pour que le plan tangent tombe dans le plan des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ et qu'il faudroit pour cela que l'on ait encore $\frac{dz}{dy}=0$.

On voit de même que la suite des points qui servent de limites aux valeurs des y, c'est-a-dire ceux qui appartiennent aux côtés parallèles a l'axe des x doivent satisfaire aux conditions :

$$\int \frac{1}{dx}\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)\int\left(\frac{dz}{dy}\right)=0, \qquad \int \frac{1}{dx}d\left\{\frac{\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy}\right\}.\delta z=0$$

en vertu de l'un ou l'autre des quatre couples d'équations :

$$z=0 \quad et \quad \frac{dz}{dy}=0; \qquad z=0 \quad et \quad \frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0;$$

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy}=0 \quad et \quad \frac{dz}{dy}=0; \qquad \frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy}=0 \quad et \quad \frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0$$

Puisqu'il s'agit ici des surfaces rectangulaires, on voit que les points situés aux quatre angles sont assujettis à quatre conditions : car ils appartiennent également aux côtés parallèles à l'axe des x et aux côtés parallèles à l'axe des y. Je nommerai points de double limite tout point qui remplira à la fois les conditions des limites des valeurs de x et celles des valeurs de y. Ainsi les équations $z=0$ et $\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0$ qui forment le caractère analogue à celui qu'Euler attribue aux points d'appui, ne pourront appartenir qu'aux points de double limite.

On aura encore un point de double limite, si on peut satisfaire à la fois aux deux couples d'equations $z=0$ et $\frac{dz}{dx}=0$; $\quad z=0$ et $\frac{dz}{dy}=0$, et le plan tangent a ce point tombera dans le plan des x et y. Au contraire le plan tangent sera seulement parallèle au plan des x et y lorsque les conditions du point de double limite seront les deux couples d'équations :

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy}=0 \quad et \quad \frac{dz}{dy}=0$$

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}=0 \quad et \quad \frac{dz}{dx}=0$$

Il est clair que tout point qui satisfera aux conditions des limites appartiendra à une ligne de limite analytique ; mais de plus on peut observer que si une pareille ligne de limite satisfait, par exemple, aux conditions

$$\int \frac{1}{dy}\left\{\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)\right\}\delta\left(\frac{dz}{dx}\right)=0, \qquad \int \frac{1}{dy}\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}\delta z=0$$

et que pour un ou plusieurs de ses points on ait $dy=0$, il faudra que les quatre conditions $\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0$, $\frac{dz}{dx}=0$, $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}=0$ et $z=0$ soient remplies à la fois pour les mêmes points : ce qui donnera le caractère des points d'origine, de sorte que l'on

pourra prendre indifferemment sur les plaques rectangulaires tout point qui satisfera à ces quatre conditions pour l'origine des coordonnées de la surface.

Lorsque l'on veut appliquer les conditions des limites à d'autres figures que les rectangles, il doit être souvent plus commode de les transformer suivant les cas : par exemple, si on veut considérer une plaque ronde, on peut prendre $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; et on trouvera, en désignant par $\underline{z'}$ et $\underline{z''}$ les valeurs de $\underline{z}$ qui conviendroient à chacune des équations du second degré auxquelles peut s'abaisser celle de la surface elastique et observant qu'aux limites le rayon $\breve{}r$ étant constant on peut faire $r = a$:

$$z = z' + z'', \frac{dz}{dx} = -\frac{sin\varphi}{a}\left(\frac{dz'}{d\varphi} + \frac{dz''}{d\varphi}\right), \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\cos\varphi}{a}\left(\frac{dz'}{d\varphi} + \frac{dz''}{d\varphi}\right),$$

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = ...(z' - z''), \quad \frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = ...\frac{\sin\varphi}{a}\left(\frac{dz'}{d\varphi} - \frac{dz''}{d\varphi}\right),$$

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = ...\frac{\cos\varphi}{a}\left(\frac{dz'}{d\varphi} - \frac{dz''}{d\varphi}\right).$$

Ainsi les conditions auxquelles sont assujettis les points qui servent de limites aux valeurs de $\underline{x}$ seront

$$\int \frac{d}{dy}\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)\delta\frac{dz}{dx} = ... - \int \frac{d}{d\varphi}(z' - z'')\frac{tang\varphi}{a}\delta\left(\frac{dz'}{d\varphi} + \frac{dz''}{d\varphi}\right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dy}\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx}.\delta z = ... + \int \frac{d}{d\varphi}\frac{tang\varphi}{a}\delta\left(\frac{dz''}{d\varphi} - \frac{dz'}{d\varphi}\right)\delta(z' + z'') = 0$$

Les mêmes substitutions donneront pour les conditions auxquelles sont assujettis les points qui servent de limites aux valeurs de $\underline{y}$

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)\delta\frac{dz}{dy} = ... - \int \frac{d}{d\varphi}(z' - z'')\frac{cot\varphi}{a}\delta\left(\frac{dz'}{d\varphi} + \frac{dz''}{d\varphi}\right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dx}\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy}.\delta z = ... \int \frac{d}{d\varphi}\frac{cot\varphi}{a}\delta\left(\frac{dz'}{d\varphi}-\frac{dz''}{d\varphi}\right)\delta(z'+z'')=0$$

Les premières seront donc remplies par la supposition $tang\varphi = 0$, et les secondes par la supposition équivalente $cot\varphi = 0$, c'est-a-dire que ces points seront aux extremités des axes des $\underline{x}$ et des $\underline{y}$, et par conséquent à angles droits les uns des autres ; c'est ce que l'on auroit pû conclure immédiatement de la figure de cette plaque, qui ne permet pas qu'un seul et même point remplisse à la fois les deux systèmes de conditions qui caractérisent ce que j'ai nommé point de double limite.

Pour tout autre point du contour que ceux dont je viens de parler, les conditions des limites se réduisent à

$$\int (z'-z'')\delta\left(\frac{dz'}{d\varphi}+\frac{dz''}{d\varphi}\right)=0, \quad \int\left(\frac{dz''}{d\varphi}-\frac{dz'}{d\varphi}\right)\delta(z'+z'')=0$$

et on peut y satisfaire par l'un ou l'autre des couples d'équations $z'-z''=0$ et $z'+z''=0$; $z'-z''=0$ et $\frac{dz'}{d\varphi}\varphi-\frac{dz''}{d\varphi}=0$; $z'+z''=0$ et $\frac{dz'}{d\varphi}+\frac{dz''}{d\varphi}=0$; $\frac{dz'}{d\varphi}-\frac{dz''}{d\varphi}=0$ et $\frac{dz'}{d\varphi}+\frac{dz''}{d\varphi}=0$.

Je ne m'étendrai pas davantage sur ce sujet ; mais je ne puis m'empêcher d'observer que la considération des conditions auxquelles les points du contour doivent satisfaire, est de la plus grande importance pour déterminer le choix des intégrales particulières qui peuvent convenir dans chaque cas, et qu'elle fournit aussi le moyen de renfermer dans les mêmes formules l'analyse de divers cas qui sembleroient, au premier coup d'œil, devoir etre calculés à part. En effet, d'après ce que j'ai dit plus haut, on voit que la suite des points qui satisfont aux conditions des extrémités forme sur la surface, des lignes de limites analytiques, et que l'on peut par conséquent concevoir ces surfaces comme reellement séparées en autant de surfaces partielles dont les points "de contour" peuvent etre dans un état different de ceux de la plaque entière, sans que pour cela l'équation qui convient au mouvement de cette plaque entière, cesse d'etre applicable aux portions dans lesquelles elle est analytiquement séparée.

§.4 Comparaison de la théorie *à* l'expérience dans le cas des plaques quarrées

$\mathfrak{N}$°10 En prenant d'abord la valeur de $\underline{z}$ donnée par l'équation (C) $\mathfrak{N}$°3, et en y introduisant les coefficiens déterminés par Euler(ν 118 et suiv. de son m.) pour le cas

des extrémités libres, en vertu des conditions $\frac{ddz}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3z}{dy^3} = 0$ ou $\frac{ddz}{dy^2} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$, on trouvera la formule

$$z = ...\{\mathcal{A}\left(e^{\frac{\omega x}{A}} \pm e^{\frac{(A-x)\omega}{A}} + (1 \mp e^{\omega}) \sin \frac{\omega x}{A} + (1 \pm e^{\omega}) \cos \frac{\omega x}{A}\right)$$
$$+\mathcal{B}\left(e^{\frac{\omega y}{A}} \pm e^{\frac{(A-y)\omega}{A}} + (1 \mp e^{\omega}) \sin \frac{\omega y}{A} + (1 \pm e^{\omega}) \cos \frac{\omega y}{A}\right)\}$$

dans laquelle les signes supérieurs appartiennent au cas où il y a un nombre pair de points de repos sur la simple lame, et où les signes inférieurs conviennent à celui où il y a un nombre impair de pareils points sur la même lame.

Dans l'un et l'autre cas il est visible qu'en fesant $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B} = 0$, il devra y avoir autant de lignes nodales droites sur la plaque quarrée qu'il y auroit de points de repos sur la simple lame dont la plaque ne diffère alors que par l'étendue d'une dimension qui n'entre plus dans le calcul.

Il faut à présent distinguer le cas des signes supérieurs de celui des signes inférieurs. Pour cela, en fesant d'abord $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$, j'écris

$$z = ...\mathcal{A}\{e^{\frac{\omega x}{A}} + e^{\frac{(A-x)\omega}{A}} + (1 - e^{\omega}) \sin \frac{\omega x}{A} + (1 + e^{\omega}) \cos \frac{\omega x}{A}$$
$$-\left(e^{\frac{\omega y}{A}} + e^{\frac{(A-y)\omega}{A}} + (1 - e^{\omega}) \sin \frac{\omega y}{A} + (1 + e^{\omega}) \cos \frac{\omega y}{A}\right)\}....(C')$$

On voit que le plan des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sera alors celui de la plaque en repos, car $\underline{z}$ sera nulle toutes les fois que $\underline{x}$ egalera $\underline{y}$; ce qui déterminera une première ligne nodale diagonale sur la surface quarrée ; $\underline{z}$ sera également nulle toutes les fois que l'équation $y = A - x$ aura lieu, car à cause de la condition $tang\frac{1}{2}\omega = \frac{1-e^{\omega}}{1+e^{\omega}}$ qui appartient à ce cas, l'équation (C') se réduit à :

$$z = ...\mathcal{A}\{(1 - e^{\omega})2 \cos \frac{\omega}{2} \sin \frac{(A - 2x)\omega}{2A}$$
$$-(1 - e^{\omega})2 \sin \frac{\omega}{2} \sin \frac{(A - 2x)\omega}{2A}\} = 0$$

Il y aura donc une seconde ligne nodale diagonale sur la plaque quarrée, lorsque la valeur de l'angle $\underline{\omega}$ indiquera un nombre pair de points de repos sur la simple lame.

En continuant de faire $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$ mais prenant les signes inférieurs qui conviennent au cas d'un nombre impair de points de repos dans la simple lame, on trouve qu'il n'y

a alors qu'une ligne nodale diagonale, savoir celle qui est formée de la suite des points pour lesquels $x = y$.

Les lignes nodales diagonales ne sont pas les seules lignes nodales qui doivent exister sur les plaques quarrées dont les mouvemens appartiennent à l'intégrale (C) dans la supposition $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$; et il est visible que leur nombre et leur disposition dependent des valeurs de l'angle $\underline{\omega}$.

En général, quel que soit le rapport entre les valeurs de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, on voit, à la simple inspection de l'équation (C), que la figure nodale doit passer par tous les points d'intersection des lignes nodales qui conviendroient aux suppositions successives $\mathcal{A} = 0, \mathcal{B} = 0$; de sorte que, si on représente par $\underline{n}$ le nombre de ces lignes, il y aura $\underline{n^2}$ intersections fictives, et on pourra etre sûr que quelles que soient les distorsions dont les figures nodales renfermées dans l'intégrale (C) puissent être susceptibles, il y aura toujours sur la surface $\underline{n^2}$ <u>points de repos invariables</u>.

Je reviens à la supposition $\mathcal{B} = -\mathcal{A}$, mais avant d'entrer dans l'examen des différens cas qui appartiennent à chaque valeur particulière de l'angle $\underline{\omega}$, je vais encore presenter une remarque générale qui m'aidera beaucoup dans les recherches suivantes.

Si on adoptoit pour un instant l'hypothèse de l'égalité d'étendue et de courbure entre les différentes portions de la simple lame terminées par deux points de repos consécutifs (hypothèse dont on n'auroit pas encore remarqué l'inexactitude) on trouveroit qu'en conservant à $\underline{x}$ une valeur correspondante à un des points de la ligne nodale diagonale, il y aurait dans l'espace séparé de ce point par 2, 4, 6 ... lignes nodales fictives, deux valeurs de $\underline{y}$ qui, parce qu'elles donneroient, pour le cas $\mathcal{A} = 0$, chacune une valeur de $\underline{z}$ egale et de même signe que celle qui appartiendroit au point pris sur la diagonale, devroient pour la presente valeur de $\mathcal{A}$ rendre $\underline{z}$ nulle. Il est clair que pour la valeur de $\underline{x}$ qui appartiendroit au point d'origine de la diagonale, les deux valeurs de $\underline{y}$ dont il s'agit se reduiroient à une seule qui conviendroit au point egalement éloigné de l'une et l'autre lignes de repos fictives consécutives. Ainsi, dans le cas ou il y auroit $2n$ points de repos sur la simple lame, la suite des points de repos qui resulteroient de la supposition ci dessus, formeroit $n - 1$ lignes nodales parallèles à la première diagonale et $n - 1$ lignes nodales parallèles à la seconde ; et lorsqu'il y auroit $2n + 1$ points de repos sur la simple lame, on trouveroit de même n lignes nodales parallèles à la diagonales et n autres lignes nodales perpendiculaires aux premières, et qui les couperoient aux limites de la surface.

Les mêmes résultats ne peuvent subsister dans l'hypothèse déduite de la théorie d'Euler, théorie qui est entierement confirmée par l'expérience, et à laquelle l'application aux cas que je crois pouvoir y ramener, ajoute encore un nouveau degré d'évidence. D'abord il n'est plus vrai en general que les systèmes des lignes droites parallèles et perpendiculaires aux diagonales, ou plutôt les courbes nodales qui les remplacent, ayant leurs origines aux points de limites de la surface : car il est aisé de prouver qu'alors les valeurs de $\underline{z}$ aux extrémités de la simple lame, sont plus grandes que dans aucun autre point de la même lame ; et on voit que plus la difference est grande entre la valeur de $\underline{z}$ à l'origine de la diagonale et la plus grande valeur de $\underline{z}$ dans l'intervalle des deux lignes fictives de repos, où se trouvoit, dans la première hypothèse, l'origine d'une ligne nodale parallèle à cette diagonale et d'une autre ligne nodale perpendiculaire à la même diagonale ; plus aussi l'origine de la courbe qui, dans la vraie hypothèse, remplace le système de ces deux droites, doit être éloigné du bord de la surface.

$\mathfrak{N}$°.11 Je viens enfin à l'examen detaillé des differens cas auxquels donnent lieu les valeurs successives de l'angle $\underline{\omega}$

1ere <u>valeur de l'angle ω</u>. En commençant donc par le cas le plus simple, je suppose qu'en fesant $\mathcal{B} = 0$, il n'y ait que deux nœuds dans le mouvement de la simple lame. Il est clair qu'alors, en partant du point de double extrémité origine de la diagonale due à la supposition $x = y$, on trouve dans l'espace separé de ce point par deux lignes fictives, un autre point pour lequel la valeur de $\underline{z}$, dans la lame, est la même qu'a l'origine, et que ce point est la seconde extrémité de la lame. Il doit donc y avoir, dans ce cas, une seconde ligne nodale ayant son origine à la limite de la surface ; de plus cette ligne doit être droite et perpendiculaire à la première diagonale, c'est a dire, de même figure et de même direction que dans la première hypothèse : car quelle que soit celle des valeurs de l'angle $\underline{\omega}$ qui en permette l'existence de la seconde diagonale, cette ligne traversera, dans ses differentes parties, des intervalles égaux à ceux que traversent les portions correspondantes de la première diagonale qu'elle rencontrera à angle droit au centre de la plaque.

Ces deux diagonales nodales sont les seules lignes lignes de repos qui restent les mêmes en passant de première hypothèse à celle qui rend compte des phénomènes. Dans le cas présent, elles composent, à elles seules, la figure nodale ; et il est clair que chacune d'elles rencontre deux intersections fictives. Cette figure passe donc, comme le veut la théorie, par les $n^2 = 4$ <u>points invariables de repos</u>.

2eme valeur de l'angle ω. Afin de simplifier l'examen du cas present et de ceux qui vont suivre, je representerai par $f(x)$ et $f(y)$ les deux fonctions separées de x et de y qui entrent dans la valeur de z donnée par l'équation (C) ; et pour suivre la formation des lignes de repos qui se multiplient à mesure que l'angle ω augmente, je serai forcée d'avoir recours a l'emploi des figures.

J'indiquerai toujours par des lignes ponctuées les lignes nodales qui se formeroient sur la plaque quarrée dans les suppositions successives $\mathcal{A} = 0 \quad \mathcal{B} = 0$; par i les points invariables de repos resultans des intersections de ces lignes ; je prendrai le point a pour origine, la ligne ab pour l'axe des x, la ligne ac pour celui des y ; je supposerai tracée la diagonale qui independamment des valeurs particulières de l'angle ω resulte toujours de la supposition $y = x$, lorsque $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$; et je désignerai, dans la planche jointe a ce mémoire, chaque figure par le chiffre que porte son analogue dans l'ouvrage de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni.

Cela posé, pour décrire dans le cas présent, le reste de la figure nodale, (2e pl. ci jointe fig 67a) à partir de l'origine je passe au delà de la seconde ligne nodale fictive parallèle à ab ; et je cherche dans l'intervalle compris entre la seconde et la troisième lignes fictives, a quel point repond la plus grande valeur de $f(y)$. Ce point e sera l'origine d'une ligne de repos, pour lequel les valeurs de $f(x)$ et $f(y)$ seront les mêmes que pour le point e de la diagonale ; et il est clair que le même point e sera d'autant plus près de la limite de la surface, que la valeur de $f(y)$ sera plus grande : on trouvera dans l'intervalle des seconde et troisième lignes fictives, et de part et d'autre du point e, des points e' pour lesquels $f(y)$ et $f(x)$ auront les mêmes valeurs que pour le point e' de la diagonale, et la suite des points qui auront la même relation avec les points suivans de la diagonale, formera une ligne courbe $ie'ee'i$ qui passera par deux des points invariables de repos. En deca d'un de ces points et de la seconde ligne fictive, la courbe nodale se trouvera dans un seul et même intervalle avec la ligne nodale diagonale qu'elle traversera sous une ligne presque droite, parce que les valeurs successives de $f(y)$ prises pour les points de la diagonale et pour les points correspondans de la ligne nodale, ne peuvent differer beaucoup entr'elles appartenant l'une et l'autre à une seule et même branche de la courbe à laquelle se plieroit la simple lame ; de sorte même que ces valeurs seroient égales, si la courbure des deux portions d'une partie de la simple lame comprise entre deux nœuds, étoit symétrique par rapport au point qui repond à la plus grande valeur de $f(y)$. Cette remarque est generale : ainsi je me contenterai de la rappeller dans les cas semblables qui se rencontreront en examinant les figures relatives aux valeurs suivantes de l'angle ω.

Je reviens à la description de la courbe nodale ; après avoir coupé la première ligne fictive parallèle à $\underline{ab}$ dans un des points $\underline{i}$, cette courbe s'eloignera de la ligne fictive, en se rapprochant de la limite de la surface jusqu'au point $\underline{e''}$ pour lequel $f(x)$ aura la plus grande valeur que cette même fonction puisse atteindre dans l'intervalle entre la seconde et le troisième lignes fictives : car pour ce point e'' $f(x)$ et $f(y)$ devront avoir les mêmes valeurs que pour le point correspondant de la diagonale.

Il est inutile d'achever la description de la figure, puisqu'à cause de la symétrie de ses parties on retourneroit dans les raisonnemens que j'ai esposés plus haut. On voit au reste que l'ensemble de la ligne nodale diagonale et de la courbe rentrante qui forme la figure nodale, passe, comme le veut la théorie par les $n^2 = 9$ points invariables de repos.

3eme valeur de l'angle ω. Pour décrire la figure qui convient a ce cas, (ν la plaque ci jointe fig 72a) à partir de l'origine je passe au dela de la seconde ligne fictive parallèle à $\underline{ab}$, jusqu'au point $\underline{e}$ qui donne la plus grande valeur de $f(y)$ comprise entre la seconde et la troisième lignes fictives ; par les raisons exposés dans le cas precedent, ce point sera l'origine d'une ligne de repos ; et de part et d'autre de cette origine se trouveront des suites de points de repos qui formeront les deux branches d'une courbe qui joindra deux points invariables de repos. De même encore au dela de celui de ces points qui se raproche de l'origine, la ligne nodale se trouvera comprise dans un seul et même intervalle avec la première ligne nodale diagonale qu'elle coupera, en formant dans cet intervalle une ligne presque droite. La courbe nodale se raprochant toujours de la ligne $\underline{ab}$ elle passera par un troisième point de repos invariable. Au dela de ce point elle n'atteindra pas tout a fait la plus grande valeur de $f(y)$; mais elle arrivera à son sommet, et changera par conséquent de direction lorsqu'elle sera parvenue a une valeur de $f(y)$ égale à la plus grande valeur que la même fonction puisse recevoir entre la seconde et la troisième lignes fictives. A partir de ce point, elle ira joindre diagonalement et par une ligne peu différente de la droite, un nouveau point invariable de repos. Mais a cause de la symétrie de la figure, il est inutile de suivre plus loin sa description, et il suffira d'indiquer la formation de la seconde ligne nodale diagonale. A partir de l'origine $\underline{a}$, je passe au delà de la quatrième ligne fictive parallèle à $\underline{ab}$ puisqu'au point $\underline{e}$ qui donne une valeur de $f(y)$ égale à celle de la même fonction au point $\underline{a}$. Ce point sera donc l'origine d'une ligne nodale ; et parce que pour chaque point de la même ligne les valeurs de $f(y)$ seront toujours égales aux valeurs correspondantes de la même fonction pour la première diagonale, cette ligne sera nécessairement la seconde diagonale dont j'ai déjà prouvé l'existence au moyen de l'analyse.

En joignant le système des deux diagonales à la courbe nodale rentrante dont j'ai indiqué la formation, on voit que la figure nodale passe, comme le veut la théorie, par les $n^2 = 16$ points invariables de repos.

4eme valeur de l'angle ω. Pour décrire la figure qui convient a ce cas, (ν pl ci jointe fig 78) a partir de l'origine a je passe au dela de la seconde ligne fictive parallèle à ab jusqu'au point e auquel appartient la plus grande valeur de $f(y)$ comprise entre la seconde et la troisième lignes fictives. Ce point sera le sommet d'une ligne courbe nodale qui joindra deux points de repos invariables.

En deça de celui de ces points qui appartient à la seconde ligne fictive, la courbe nodale se trouvera dans un seul et même intervalle avec la diagonale qu'elle coupera par conséquent, en formant, dans cette portion de son cours, une ligne peu différente d'une droite. A la limite de cet intervalle, elle coupera la première ligne fictive, en un point i et s'éloignera ensuite de cette ligne en se rapprochant du bord de la plaque jusqu'au point pour lequel $f(y)$ aura la plus grande valeur que puisse atteindre la même fonction entre la seconde et la troisième lignes fictives. Au delà de ce point, la courbe nodale changera de direction et se raprochera de la première ligne fictive qu'elle coupera une seconde fois dans un point i. A partir de ce point, la courbe nodale s'avancera dans l'intervalle entre la première et la seconde lignes fictives et parallèles à ab jusqu'a ce qu'elle ait atteint la plus grande valeur que $f(y)$ puisse recevoir entre la troisième et la quatrième lignes fictives, où, ce qui est la même chose, entre la seconde et la troisième des mêmes lignes. Elle tournera sa convexité vers la quatrième ligne fictive parallèle à ac ; et à partir du point auquel appartient la plus grande valeur de $f(y)$, elle se rapprochera de la troisième qu'elle coupera encore dans un second point invariable de repos.

Afin de saisir plus aisément la cause des distorsions des lignes nodales, on peut observer qu'en général il y a trois relations possibles entre la valeur de $f(y)$ dans l'intervalle où l'on considère la courbe nodale, et la valeur de la même fonction dans l'intervalle où se trouve la partie correspondante de la diagonale nodale. En effet on peut supposer que la première valeur de $f(y)$ est $<, =$, ou $>$ que la seconde. On sait que pour les points de la diagonale $f(y) = f(x)$ et que, pour les différens points de la courbe nodale, les valeurs de $f(x)$ sont les mêmes que pour ceux qui leur correspondent dans la diagonale. On voit donc que les relations dont il s'agit existent egalement entre les valeurs de $f(y)$ et celles de $f(x)$ qui appartiennent à la portion que l'on considère dans la courbe nodale. Cela posé, on voit aisément que si la plus grande valeur de $f(y)$ dans l'intervalle où l'on examine le cours de la courbe nodale est $<$ que la plus grande valeur de $f(x)$ dans le même intervalle, la courbe nodale changera de direction, avant d'avoir atteint le point

auquel appartient la plus grande valeur de $f(x)$, point qui se trouve vers le milieu de l'intervalle limité par les deux lignes fictives consécutives parallèles a l'axe des $\underline{y}$. Cette ligne tournera donc sa concavité vers une des lignes parallèle a l'axe des $\underline{y}$. Si la plus grande valeur de $f(y)$ est égale à la plus grande valeur de $f(x)$ dans le même intervalle, la courbe nodale sera formée du système de quatre branches qui se couperont vers le centre de l'intervalle. Enfin si la plus grande valeur de $f(x)$ est $>$ que celle de $f(y)$, la courbe nodale tournera sa concavité vers une des lignes fictives parallèle à l'axe des $\underline{x}$.

Je reviens à la description de la figure nodale. Après avoir coupé la troisième ligne fictive parallèle à $\underline{ac}$ dans un des points $\underline{i}$, la courbe nodale se trouvera dans un même intervalle avec la diagonale qu'elle traversera par une ligne presque droite. En sortant de cet intervalle, la courbe nodale passera par un point $\underline{i}$ et se trouvera dans l'intervalle entre la première et la seconde lignes fictives parallèles à ac. Dans cet intervalle, la plus grande valeur de $f(y)$ sera $>$ que la plus grande valeur de $f(x)$. Ainsi, d'après ce que j'ai dit plus haut, il est clair que la courbe nodale changera de direction et se prolongera parallèlement à l'axe des $\underline{x}$. Elle sortira de l'intervalle où je la considère à présent pour rentrer dans celui où se trouve le point e de départ. On voit donc que cette partie de la figure nodale sera une courbe rentrante. A partir du point a, je passerai au dela de la quatrième ligne fictive parallèle à $\underline{ab}$ jusqu'a un second point $\underline{e}$ qui sera le sommet d'une nouvelle courbe nodale, et auquel appartiendra par conséquent la plus grande valeur de $f(y)$ entre la première et la seconde lignes fictives parallèles à $\underline{ab}$. La courbe après avoir passé par un point i se trouvera dans l'intervalle entre la troisième et la quatrième lignes fictives ; et la portion renfermé dans cet intervalle, sera semblable a celle qui, dans le même intervalle, appartient a la première courbe nodale. En sortant de cet intervalle, la courbe repassera dans celui qui est formé par la quatrième et la cinquième ligne fictive, parce que cette courbe doit toujours être separée par un nombre pair de lignes fictives, des points de la diagonale auxquels elle correspond ; et elle sera dirigée parallèlement à l'axe des $\underline{y}$, parce que dans cet intervalle, la plus grande valeur de $f(y)$ est $<$ que la plus grande valeur de $f(x)$. Après avoir passé par un point i la courbe nodale se trouve entre la cinquième ligne fictive parallèle a $\underline{ab}$ et le bord de la plaque. Il est clair qu'alors la plus grande valeur de $f(y)$ est $>$ que celle de $f(x)$, de sorte que la courbe doit se diriger parallèlement à l'axe des $\underline{x}$ pour rentrer dans l'intervalle où se trouve le point $\underline{e}$ de départ.

On voit que cette seconde courbe nodale est beaucoup plus resserée que la première, puisqu'elle ne passe que par 4 points i, tandis que la première passe par six des mêmes points.

Je ne m'arrêterai pas plus longtems à la description de la presente figure nodale, parce que la seconde partie de la même figure est entièrement semblable a la première. C'est ce qui a toujours lieu quelle que soit la valeur de l'angle $\underline{\omega}$; et même si cette valeur donne lieu à un nombre pair de lignes fictives, la figure nodale est composée de quatre parties égales et semblables entr'elles, de sorte qu'il suffit alors de decrire le quart de la figure.

Il est clair que l'ensemble des quatre courbes rentrantes et de la diagonale qui forme la figure nodale complette, passe comme le veut la théorie par les $n^2 = 25$ points de repos invariables.

5eme valeur de l'angle ω. A partir du point $\underline{a}$, je passe comme à l'ordinaire au dela de la seconde ligne fictive parallèle à $\underline{ab}$ jusqu'au point $\underline{e}$ auquel appartient la plus grande valeur de $f(y)$ dans cet intervalle ; et, parce que cette valeur est $<$ que celle de $f(x)$, la portion de la courbe qui y est comprise, est dirigée parallèlement à l'axe des $\underline{y}$. En sortant de cet intervalle, la courbe traverse celui où elle rencontre la diagonale qu'elle coupe, par une ligne presque droite. Après avoir passé par un point i elle se trouve en deça de la première ligne fictive ; et comme alors la plus grande valeur de $f(y)$ est $>$ que celle de $f(x)$, la courbe se dirige parallèlement a l'axe des $\underline{x}$. Elle rentre ensuite dans l'intervalle entre la première et la seconde lignes fictives ; et elle se dirige parallèlement à l'axe des y, parce que la plus grande valeur de $f(y)$ est $<$ que celle de $f(x)$. Après avoir encore passé par un nouveau point $\underline{i}$, la courbe se trouve une seconde fois dans un même intervalle avec la diagonale qu'elle coupe par une ligne presque droite. En sortant de cet intervalle elle se trouve entre la troisième et la quatrième lignes fictives, et elle se dirige parallèlement à l'axe des $\underline{y}$ pour rentrer dans l'intervalle où est situé le point de départ.

D'après la remarque que j'ai faite dans le cas précédent, il est inutile de pousser plus loin la description de la figure nodale, et il est clair qu'elle doit être formée de quatre courbes rentrantes semblables à la première. On voit que l'ensemble de ces quatre courbes et des deux diagonales nodales qui forme la figure nodale complette passe, comme le veut la théorie, par les $n^2 = 36$ points de repos invariables.

Les cas suivants n'ayant pas été soumis a l'expérience je ne m'y arreterai pas ; mais il est aisé de voir que l'on parviendroit à décrire très exactement les figures qui leur conviendroient, si on prenoit la peine de comparer entr'elles les différentes valeurs de $f(x)$ et de $f(y)$ qui appartiennent, dans chaque cas, aux points renfermés dans les différens intervalles des lignes fictives, valeurs qui ne sont autre chose que celles de $\underline{z}$

pour la lame dont les extrémités sont libres au sens d'Euler. Il est clair, au reste, que chacune de ces figures, exceptée pourtant celle qui se rapporte a la troisième valeur de l'angle $\underline{\omega}$ contiendra une courbe nodale rentrante assujettie aux conditions suivantes.

Le sommet sera dans l'intervalle entre les seconde et troisième lignes fictives et la courbe se dirigera, dans cet intervalle, parallèlement à l'axe des $\underline{y}$ parce que la plus grande valeur de $f(y)$ est alors $<$ que celle de $f(x)$; la même courbe traversera diagonalement l'intervalle dans lequel elle rencontrera la diagonale parce que, dans cet intervalle la plus grande valeur de $f(y) =$ celle de $f(x)$; ensuite elle se prolongera dans une direction parallèle a l'axe des $\underline{x}$ parce que la plus grande valeur de $f(y)$ sera $>$ que celle de $f(x)$; dans l'intervalle entre la première et la seconde lignes fictives la courbe dont il s'agit se dirigera parallèlement a l'axe de $\underline{y}$, elle traversera une seconde fois, dans une direction diagonale, un intervalle où elle rencontrera la diagonale nodale, et elle changera encore une fois de direction avant de rentrer dans l'intervalle où se trouve son sommet. Cette courbe passera par six des points invariables de repos.

Lorsqu'il s'agit de la troisième valeur de l'angle $\underline{\omega}$, la courbe rentrante passe par 8 des mêmes points i (ν. pl. ci jointe fig 72a) parce que, dans ce cas seulement, elle rencontre les deux diagonales nodales.

$\mathfrak{N}$°12 Independamment des figures qui viennent d'etre décrites, il peut en exister plusieurs autres qui soient comprises dans la même intégrale (C) et appartiennent aux mêmes valeurs de l'angle $\underline{\omega}$. Il suffit, pour les expliquer de changer le rapport entre les constantes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui multiplient $f(x)$ et $f(y)$ dans la valeur de $\underline{z}$. On voit en effet que, pour tout autre rapport que celui exprimé par l'équation $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$, il ne peut y avoir de ligne nodale diagonale et que la figure et la situation des autres lignes nodales que l'on a trouvées dans cette supposition, doivent changer en même tems qu'elle. On voit aussi que les points invariables de repos etant les seuls qui soient communs à toutes les figures nodales qui se rapportent a une même valeur de l'angle $\underline{\omega}$, ces figures peuvent etre composées de lignes sinueuses auxquelles les lignes fictives serviront d'axes, et qui couperont ces mêmes lignes dans les points invariables de repos.

Si on nomme avec $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni (ν n°105 de son traité d'acoustique) flexion : « toute la deviation d'une ligne nodale vers un côté, consistant dans un éloignement et un rapprochement de la ligne droite laquelle on peut s'imaginer comme forme originaire » [2]

2. en s'en tenant a cette définition la ligne dont il s'agit ne seroit autre chose que celle que j'ai nommé ligne fictive, mais $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, qui n'a imaginé cette ligne que comme un moyen de faire entendre la formation des figures, la suppose tacitement tirée par les points les plus hauts ou les plus

on trouvera qu'il doit y avoir une flexion pour la première valeur de l'angle $\underline{\omega}$, une flexion $+\frac{1}{2}$ pour la seconde, 2 flexions pour la troisième, 2 flexions $+\frac{1}{2}$ pour la quatrième et enfin 3 flexions pour la 5ème valeur du même angle ω ; car dans le premier cas il y a deux points de repos invariables sur la ligne fictive, dans le second il existe 3 points semblables, dans le troisième il y en a 4, dans le quatrième 5, enfin dans le cinquième cas il se trouve six des mêmes points et, d'après la position attribuée par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni a la ligne qu'il regarde comme forme originaire, l'addition d'un point de repos invariable donne une demie flexion.

Il est aisé de voir maintenant combien la théorie que j'ai exposée est conforme a l'expérience. En effet la fig.64 de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni est précisément celle que j'ai trouvée pour la première valeur de l'angle $\underline{\omega}$ dans la supposition $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$. La fig.65 qui appartient a la même valeur de l'angle $\underline{\omega}$ (pour ce cas et les suiv. voyez la table p 150 de Chladni, dans laquelle s'intègre les sons qui repondent a chaque fig) montre une seule flexion avec cette particularité que les deux lignes infléchies auxquelles les deux lignes fictives servent d'axes se rejoignent très près du bord de la plaque pour former une courbe rentrante. Il est clair que c'est du rapport entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ que dépend l'élévation de chaque sinuosité au dessus des lignes fictives, de sorte que cette ligne même est une limite tandis que la courbe rentrante est l'autre limite de l'écartement de la ligne nodale de sa situation primitive.

La fig 67 appartient à la seconde valeur de l'angle $\underline{\omega}$, dans la supposition $\mathcal{B} = 0$. La fig 67c est très exactement celle que j'ai decrite pour la même valeur de $\underline{\omega}$ dans la supposition $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$; et la fig 67b qui appartient encore à la même valeur de l'angle $\underline{\omega}$, montre une flexion $+\frac{1}{2}$ autour de la position de chacune des lignes qui sont droites dans la figure primitive fig 67.

La fig 72a est celle que j'ai décrite pour la troisième valeur de l'angle $\underline{\omega}$, la fig 72b qui appartient à la même valeur de l'angle $\underline{\omega}$ montre 2 flexions autour de chacune des lignes fictives, c'est a dire autour des lignes qui seroient droites dans la supposition $\mathcal{B} = 0$. La fig 73a qui appartient aussi à la même valeur de l'angle $\underline{\omega}$ montre egalement 2 flexions ; mais il arrive ici comme dans la fig 65 que les lignes sinueuses se rejoignent. Enfin la fig 73b qui appartient encore a la troisième valeur de l'angle $\underline{\omega}$, montre aussi 2 flexions. On voit qu'il peut exister un très grand nombre de figures differentes pour chaque valeur de l'angle $\underline{\omega}$; mais l'experience n'en a montré jusqu'ici qu'une petite partie et même les plus simples manquent dans la plus part des cas, car, la fig. primitive, par exemple, ne se réalise que pour la 2ème valeur de l'angle $\underline{\omega}$ (ν T. d'acoustique fig 67).

---

bas de la ligne sinueuse tandis que, d'après la théorie, la ligne fictive doit passer par les points moyens et servir d'axe a cette courbe

A l'égard des fig 78 et 88 qui se rapportent aux 4ème et 5ème valeurs de l'angle $\underline{\omega}$, on voit que j'ai marqué une partie des lignes nodales que j'ai trouvé devoir composer les figures nodales, par des lignes pleines tandis que les autres sont indiquées par des lignes ponctuées, qu'une portion de ces lignes ponctuées est traversée par des lignes pleines qui rejoignent les lignes pleines des figures que j'ai decrites et qui composent avec elles des figures nodales semblables a celles que $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni a trouvées et qu'il a numérotées des mêmes chiffres.

Au premier coup d'œil, on seroit tenté de croire que, dans les cas dont il s'agit ici, la théorie et l'experience ne sont pas d'accord ; mais un instant de réflexion suffit pour les concilier. En effet, si on se rappelle ce que j'ai cherché a établir §. 3 on verra que toute ligne qui satisfait aux conditions des limites, pouvant être considérée comme une veritable extrémité analytique, les parties qu'elle sépare peuvent vibrer comme si elles étoient reellement isolées ; pourvu toutefois que le son de l'une soit le même que celui de l'autre ; car, sous cette condition, le mouvement qui dans la plaque entière se communique d'une partie a l'autre, deviendroit impossible. Or, si les portions de la plaque étoient isolées, elles rendroient toujours le même son lorsque leurs mouvemens se rapporteroient à la même valeur de l'angle $\underline{\omega}$; mais elles pourroient présenter des figures différentes entr'elles, si on établissoit, pour chacune d'elles, des rapports différens entre les constantes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. La même chose a donc lieu ici ; et parce que quelle que soit la valeur de l'angle $\underline{\omega}$, le point du milieu de la simple lame satisfait toujours aux conditions des limites (ν n°.8), les lignes que l'on peut imaginer par le milieu de chacun des côtés de la plaque quarrée, satisferont aussi aux mêmes conditions en n'ayant egard qu'a une seule des variables $\underline{x}$ et $\underline{y}$; et cette plaque se trouvera partagée en quatre portions égales qui pourront présenter chacune des figures dépendantes de rapports différens entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Lorsque l'on fait attention à la manière dont $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni a formé les figures qu'il a obtenues, il semble tout naturel que les différences dont il s'agit se réalisent en effet ; car cet habile physicien prescrit de toucher a la fois plusieurs des points des figures nodales. S'il arrive donc que les points de <u>touchement</u> qui se trouvent dans chacune des portions séparées par des lignes de limites, appartiennent a des figures différentes, la plaque sera forcée de se ployer, dans ces différentes parties aux figures dans lesquelles les points de <u>touchement</u> appartiennent aux lignes nodales. Dans la fig 78 qui se rapporte à la quatrième valeur de l'angle $\underline{\omega}$, ce sont les parties de la fig. comprise dans les quarrés $anmg$, $gkhd$, réunis au point y, qui conservent les mêmes lignes nodales que dans la figure que j'ai trouvée appartenant a la condition $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$. A l'égard de la situation

de continuité de la courbe nodale dans les points que j'ai remarqué v et n, elle ne peut etre qu'accidentelle ; et on rencontre bien des exemples semblables dans d'autres cas. Dans les deux autres quarrés les couronnes ponctuées sont remplacées par deux lignes sinueuses. Il se trouve aussi dans ces quarrés une partie courbe $\underline{ii}$ que j'ai ponctuée quoiqu'elle appartienne a la fig. que j'ai décrite parce qu'elle peut en même tems être considérée comme partie d'une troisième ligne sinueuse parallèle aux deux autres qui, si la plaque entière vibroit en presentant la même figure, continueroit son cours dans une direction parallèle aux deux premières.

J'ai dit plus haut que, pour la quatrième valeur de l'angle $\underline{\omega}$, lorsque la figure nodale était composée de lignes sinueuses, chacune de ces lignes devrait présenter 2 flexions $+\frac{1}{2}$. On doit donc avoir dans les portions de lignes sinueuses qui appartiennent a deux des quarts de la plaque quarrée une flexion $+\frac{1}{4}$. En se rappellant qu'une flexion est composée, d'après la définition de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, d'un éloignement et d'un raprochement de la ligne droite qu'il suppose, c'est-a-dire, comme je j'ai deja remarqué de deux sinuosités l'une supérieure et l'autre inférieure a la ligne fictive, on voit en effet, que les lignes dont il s'agit ici presentent chacune une flexion complette formée des sinuosités entre la troisième et la quatrième, et entre la quatrième et la cinquième lignes fictives, et d'un quart de flexion pris entre la cinquième ligne fictive et le bord de la plaque.

A l'égard de la fig 85, il est visible que la moitié supérieure est entièrement conforme a celle que j'ai décrite pour ce cas, dans la supposition $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$; et que dans la moitié inférieure les lignes nodales ponctuées qui conviendroient à la même supposition, sont remplacées par des lignes sinueuses qui, conformément a la théorie, presentent 3 flexions complettes, et passent par conséquent chacune par les six points de repos invariables situés sur la ligne fictive qui lui sert d'axe. La distance entre les points C et J est insensible a cause de la plus grande largeur des lignes nodales dans les points d'intersection.

Quoique je regarde comme suffisamment prouvé que les lignes par lesquelles on peut concevoir la plaque quarrée partagée en quatre portions égales, sont, dans le cas de l'intégrale (C), des limites analytiques parfaitement equivalentes a des extrémités effectives, j'ai désiré confirmer encore ce résultat, en le soumettant à l'experience.

Pour cela, après avoir formé sur une plaque quarrée la fig 64 de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, laquelle appartient a la première valeur de l'angle $\underline{\omega}$, et est composée de deux lignes nodales diagonales, j'ai fait couper la partie $\mathcal{ACBE}$, c'est-à-dire le quart de la plaque, en fesant pourtant reserver l'espace $\mathcal{C}$ auquel les doigts avoient été appliqués pour former la fig 64 sur la plaque entière. En plaçant donc les doigts en $\mathcal{C}$ et l'archet en $\mathcal{E}$ le son est resté

le même que sur la plaque entière, et la figure s'est montrée aussi nette que sur cette même plaque.

Dans la fig A (ν pl ci jointe) les lignes pleines terminent la partie de la plaque que j'ai conservée aussi bien que les lignes nodales qui se sont formées sur cette partie, tandis que les lignes ponctuées indiquent le contour de la partie enlevée et la figure nodale qui s'y seroit formée si elle eut continué a faire partie de la plaque vibrante.

La première valeur de l'angle $\underline{\omega}$ est au nombre des cas où les points du milieu sont libres en vertu des conditions $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$. Ainsi on voit que l'existence d'extremités soumises à de pareilles conditions que je n'avois pû constater pour des experiences décrites sur la simple lame (ν §.3 n° 8) serait ici une entière confirmation.

L'intégrale (C) dont je viens d'examiner les conséquences, ne peut s'appliquer dans toute sa généralité qu'aux seules surfaces rectangulaires car ces surfaces sont en effet les seules pour les points d'extrémités desquels une des variables $\underline{x}$ et $\underline{y}$ puisse toujours être regardée comme constante, en sorte que, par exemple, les conditions $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0$ qui conviennent a la plaque soient parfaitement équivalentes à celles-ci $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ qui appartiennent a la simple lame.

Cependant il peut exister sur la plaque quarrée dont les mouvemens sont compris dans l'intégrale (C), d'autres lignes de limites que celles qui passent par le milieu de cette plaque et sont par conséquent parallèles aux axes des $\underline{x}$ ou $\underline{y}$.

Les diagonales nodales, par exemple, jouissent de cette propriété, car elles remplissent les conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0$. Si donc il s'agit des cas où les valeurs de l'angle $\underline{\omega}$ donnent un nombre pair de nœuds sur la simple lame, on peut conclure que les mouvemens d'une surface triangulaire isocèle dont les deux côtés adjacens à l'angle droit seroient appuyés au sens d'Euler et l'hypothénuse libre au sens du même géomètre, seront compris, pour les mêmes valeurs de l'angle $\underline{\omega}$ et pour les mêmes rapports entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, dans les équations qui conviendront a la plaque quarrée.

On peut conclure de même que les mouvemens d'une plaque triangulaire isocèle rectangle dont l'hypothénuse seroit appuyé, un des côtés adjacent a l'angle droit libre en vertu des conditions $\frac{dz}{dx} = o$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0$ et l'autre côté adjacent au même angle libre en vertu des conditions $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy} = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0$, seront compris également dans les équations qui appartiennent, pour les différens cas respectifs, aux mouvemens de la plaque quarrée. Il faut conclure encore que les mouvemens d'une pareille surface triangulaire dont l'hypothénuse et un des côtés adjacent a l'angle droit seroient libres au sens d'Euler et l'autre appuyé seroient aussi compris dans les équations qui déterminent

les mouvemens de la plaque quarrée. Il faudra seulement, pour transporter à ces différens triangles l'analyse qui appartient a la plaque quarrée, avoir soin de changer, dans les coefficients, $\underline{x}$ en $\frac{1}{2}x$ en suivant le rapport qui existe entre le côté du triangle que l'on considère et celui de la plaque entière. J'ai déja fait une remarque semblable en parlant de la simple lame et des rapports qui existent entre les différens cas qu'Euler a calculés a part.

Je ne m'arrêteroi pas à appuyer et à développer les observations que je viens de presenter j'ai voulu seulement les indiquer afin de donner un exemple du parti que l'on peut tirer de la considération des points et des lignes de limites pour déterminer, au moyen d'équations déjà connues, le mouvement de surfaces qui, au premier aperçu, ne semblait pas devoir y être compris.

Je ne puis terminer cet article sans rendre hommage à l'étonnante sagacité de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni qui, sans avoir connu la théorie ni par conséquent l'étendue de l'intégrale (C), s'est pourtant décidé à regarder les figures, en apparence si bizarres, qui y sont comprises, comme parfaitement équivalentes à de simples lignes droites parallèles entr'elles ; j'avoue même que j'avois d'abord envisagé le rapport que l'habile physicien indique entre les figures dont il s'agit comme une simple classification fondée uniquement sur la possibilité d'obtenir successivement plusieurs de ces figures sans que le son varie. J'étois alors bien loin de prévoir qu'un simple changement de rapport entre des constantes, peut rendre compte de la variété des figures, tandis que la constance de l'angle $\underline{\omega}$ dans celles de ces figures que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni avoit jugé équivalentes, expliqueroit naturellement l'uniformité des sons qu'il avoit obtenus.

$\mathfrak{N}$°13 Surfaces périodiques. Je passe à présent à l'application des intégrales données n° 4 et 5. Leur forme générale est reprise par la formule $z = \ldots\ldots\ldots \sin\left(\frac{Mnx}{A}\right) \sin\left(\frac{Mny}{A}\right)$; et cette formule n'existe que, si en l'appliquant à une surface quarrée, on prend l'origine à un des angles de la surface, la même surface sera appuyée dans tous les points de son contour ; sur une extrémité c'est-a-dire lorsque l'on aura une des quatre conditions $x = A, x = 0, y = A, y = 0$ les deux équations $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0$ seront satisfaites.

J'ai dit que le mot appuyé ne devoit être pris que dans un sens analytique et comme équivalent aux deux conditions $z = 0$ et $\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = 0$. Ainsi je l'emploirai dorénavant sans revenir davantage sur sa signification ; et je nommerai ligne d'appui la suite des points qui satisferont aux conditions qui fixent la valeur de ce mot.

Cela posé, une période complette, tant dans le sens des x que dans celui des y, sera comprise entre quatre lignes d'appui ; ainsi, en prenant toujours l'origine à un des angles de la plaque, lorsque l'on aura $m = n = 1$, la courbure de cette surface sera composée d'une seule période ; mais dans un grand nombre de cas, cette période sera partagée par deux lignes de limites analytiques qui se couperont en angle droit au centre de la surface, et satisferont aux conditions $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0$ ou $\frac{dz}{dy} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy} = 0$ qui pourroient également appartenir aux extrémités libres.

Il suit delà que l'équation qui, dans les cas dont j'ai parlé, appartient à la surface quarrée dont les quatre côtés sont appuyés, appartiendroit également, et sous les mêmes conditions, à une surface quarrée dont les quatre côtés seroient libres.

En effet les deux cas ne diffèrent que par la disposition des portions de périodes dans lesquelles se trouvent les points de contour de la surface ; en sorte que, par exemple, lorsqu'il s'agit d'une seule période, la position des quatre quarts de période, dans un des cas, est exactement le renversement de la disposition qui a lieu dans l'autre ; et qu'en supposant ces quatre portions de période isolées, elles doivent être rapprochées par leurs côtés libres, pour former la surface dont les quatre côtés sont appuyés ; et par leurs côtés appuyés, pour former la surface dont les quatre côtés sont libres. J'ai déjà remarqué un rapport semblable à celui que je viens d'indiquer, entre la corde tendue et la flûte ouverte aux deux bouts.

L'équation générale $z = \ldots\ldots\ldots \sin\left(\frac{Mnx}{A}\right)\sin\left(\frac{Mmy}{A}\right)$ montre encore qu'il y aura toujours sur la plaque quarrée a laquelle elle sera appliquée, $\underline{n}$ lignes nodales parallèles à l'axe des y, c'est-a-dire a un des côtés de la plaque, et $\underline{m}$ lignes nodales parallèles a l'axe des x, et par conséquent à l'autre côté de la plaque. Elle montre aussi que celles de ces lignes qui seront parallèles entr'elles, se trouveront toujours à égale distance les unes des autres ; que cette distance sera double de celle entre la dernière des mêmes lignes et le côté libre auquel elle sera parallèle ; que chaque intervalle de deux lignes nodales parallèles sera partagé par une ligne de limite analytique qui satisfera à l'un ou l'autre des couples d'équations $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0$ ou $\frac{dz}{dy} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy} = 0$; et enfin que tout point pour lequel on aura à la fois $\sin\left(\frac{Mnx}{A}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{Mmy}{A}\right) = 0$, c'est-a-dire tout point d'intersection des lignes nodales droites qui terminent les périodes, pourra être pris pour origine, puisque, conformement a ce que j'ai dit n°9, il satisfait aux quatre conditions $z = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0$.

Après avoir exposé les conséquences générales de la périodicité des surfaces, je vais examiner en particulier celles qui résultent de l'intégrale (D) n°4.

On voit d'abord que les surfaces quarrées dont les mouvemens seront compris dans cette intégrale, ne pourront présenter d'autres lignes nodales que celles qui terminent les périodes ; car aucune autre supposition que $\sin\left(\frac{Mnx}{A}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{Mmy}{A}\right) = 0$ on pourra alors rendre $z = 0$.

Parmi les cas observés par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, ce sont auxquels appartiennent les figures 63, 66a, 68a, 71a, 74a, 75a, 80a, 81a et 82 (ν T d'acoustique) qui sont renfermés dans l'équation (D).

Pour la fig. 63 $m = n = 1$: il ne doit donc y avoir, conformement a l'expérience, que deux lignes nodales parallèles : l'une à l'axe des $\underline{x}$, l'autre a celui des $\underline{y}$, et ces lignes doivent se couper au centre de la surface dans un point d'origine.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 2$ (ν n° 4).

pour la fig. 66a $m = 2, n = 1$: conformement a l'expérience il doit donc y avoir deux lignes nodales parallèles a l'axe des $\underline{x}$ et une seule parallèle a l'axe des $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 5$.

Pour la fig 74$\underline{\mathrm{a}}$ $m = 4, n = 1$: conformement a l'expérience il doit donc y avoir 4 lignes nodales parallèles a l'axe des $\underline{x}$ et une seule parallèle a l'axe des $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 17$.

Les trois valeurs précédentes de $\underline{n}$ étant 1, elles appartiennent a un cas que $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni a cru devoir distinguer, et qu'il a même proposé sous le nom de <u>vibrations tournantes</u>, comme pouvant aider à déterminer le reste des mouvemens dont les plaques élastiques sont susceptibles (ν T d'acoustique n°84 ...87 et n° 98). D'après la théorie, il est clair que les <u>vibrations tournantes</u> ne diffèrent des autres vibrations comprises dans l'intégrale (D) qu'en ce que les surfaces auxquelles elles appartiennent n'ont qu'une seule période dans le sens des $\underline{x}$, période qui pour les plaques dont les côtés sont libres, est composée de deux demies périodes reunies dans la ligne de repos parallèle a l'axe des y. Cette différence n'est pas analytiquement importante ; cependant j'aurai occasion de remarquer, en traitant de la comparaison entre les sons indiqués par la théorie et les sons donnés par l'expérience, que le cas des vibrations tournantes présente une singularité digne d'attention.

Pour la fig. 68a $m = 2, n = 2$: conformément à l'expérience il doit donc y avoir 2 lignes nodales parallèles à l'axe des $\underline{x}$ et deux lignes nodales parallèles à l'axe des $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 8$.

Pour la fig. 71a $m = 2, n = 3$: conformément à l'expérience il doit donc y avoir 2 lignes nodales parallèles a l'axe des $\underline{x}$ et 3 lignes nodales parallèles a l'axe des $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 13$.

Pour la fig. 75a $m = 3, n = 3$: conformément à l'expérience il doit donc y avoir 3 lignes nodales parallèles a chacun des axes $\underline{x}$ et $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 18$.

Pour la fig. 80a $m = 3, n = 4$: conformément à l'expérience il doit donc y avoir 3 lignes nodales parallèles à l'axe des $\underline{x}$ et quatre lignes nodales parallèles a l'axe des $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 25$.

Pour la fig. 81a $m = 2, n = 5$: conformément a l'expérience il doit donc y avoir 2 lignes nodales parallèles à l'axe des $\underline{x}$ et 5 lignes nodales parallèles a l'axe des $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 29$.

Enfin pour la fig. 82 $m = n = 4$: et conformement à l'expérience il doit y avoir 4 lignes nodales parallèles a chacun des axes $\underline{x}$ et $\underline{y}$.

Le son doit être proportionnel au nombre $m^2 + n^2 = 32$.

Je vais m'occuper à présent des valeurs de z qui donnent lieu à l'existence de figures nodales plus compliquées que celles qui appartiennent à la formule (D).

$\mathfrak{N}$°14 Les intégrales (E) et (F) n°4 contiennent, outre le facteur dépendant de la périodicité, un autre facteur, sous forme de series, lequel détermine la figure nodale comprise dans chaque période ou partie de période. Dans ce facteur, les constantes a', b', A' et B' sont indépendantes entr'elles, en sorte que, pourvu qu'on ne fasse pas à la fois $a' = 0, b' = 0$, ou $A' = 0, B' = 0$, suppositions qui donneroient $z = 0$, on peut imaginer entre ces constantes telle relation qu'il plaira de supposer. Il est clair que la figure nodale comprise dans chaque période, dependra de la relation établie entre les constantes a', b', A' et B' ; mais les sons seront au contraire indépendans de cette relation. Ainsi on voit qu'ici, comme dans les cas renfermés dans l'intégrale (C), plusieurs figures différentes peuvent accompagner un seul et même son.

Pour les cas qui appartiennent à l'intégrale (E), le son est proportionnel au nombre $(M - 1)(n^2 + m^2)$ (ν n°4), ainsi, en observant que dans les formules qui expriment les sons, tant dans la présente intégrale (E) que dans les suivantes, $M - 1$ vient de $\sqrt{(M-1)^2}$, et qu'on peut par conséquent changer le signe de ce nombre ; on voit qu'en prenant $M = 1 - p^2$, le son devient proportionnel au nombre $p^2(n^2 + m^2)$ qui est de la même forme que celui qui exprime les sons appartenant aux manières de vibrer renfermées dans l'intégrale (D).

De même, pour les sons qui appartiennent à l'intégrale (F), le nombre $m^2(M+M'-2)$ auquel le son est proportionnel devient $m^2(p^2+q^2)$, en prenant $M = 1-p^2, M' = 1-q^2$

et changeant les signes. On voit donc que le son est alors proportionnel à un nombre de même forme que pour les cas renfermés dans l'équation (D).

Si dans l'équation (E) on prend $M = 1 - p^2$, et que l'on fasse à la fois $b' = 0$ et $B' = 0$ ou $a' = 0$ et $A' = 0$, suivant que p est pair ou impair, non seulement les sons appartenant aux manières de vibrer renfermées dans cette intégrale seront exprimés par les mêmes nombres que lorsqu'il s'agit de l'intégrale (D), mais encore ces deux formules deviendront identiques.

En effet si dans le facteur

$$\sin\left(\frac{Mnx}{A}\right)\{\cos\left(\frac{Mnx}{A}\right) + \frac{4-p^2}{2.3}\cos^3\left(\frac{Mnx}{A}\right)$$

$$+\frac{(4-p^2)(16-p^2)}{2.3.4.5}\cos^5\left(\frac{Mnx}{A}\right) + \infty\}$$

on change sin en cos et vice versa, c'est-a-dire, si on met $\frac{1}{2}A - x$ à la place de x, on trouvera, après avoir multiplié par la constante p, que le même facteur ne sera autre chose que l'expression de $\sin\left(\frac{Mnpx}{A}\right)$ donnée par la formule p.143 Des lecons sur le calcul des fonctions in.8 an 1806 et de même si dans le facteur $\sin\left(\frac{Mnx}{A}\right)\left\{\frac{2}{1-p^2} + \cos^2\left(\frac{Mnx}{A}\right) + \frac{9-p^2}{3.4}\cos^4\left(\frac{Mnx}{A}\right) + \infty\right\}$ on change x en $\frac{1}{2}A - x$ et que l'on multiplie par $\frac{1-p^2}{2}$ on trouvera qu'il n'est autre chose que l'expression de $\cos\left(\frac{Mnpx}{A}\right)$ donnée p.143 des lecons. On aura donc alors $z = \ldots.\cos\left(\frac{Mnpx}{A}\right)\cos\left(\frac{Mnpy}{A}\right)$;

A l'égard de l'intégrale (F), on trouvera également en prenant $M = 1 - p^2, M' = 1 - q^2$, et fesant à la fois $b' = 0$ et $B' = 0$ ou $a' = 0$ et $A' = 0$, qu'elle se réduit a l'une ou l'autre des formes équivalentes $z = \ldots.\sin\left(\frac{Mmpx}{A}\right)\sin\left(\frac{Mmqy}{A}\right)$ ou $z = \ldots\ldots.\cos\left(\frac{Mmpx}{A}\right)\cos\left(\frac{Mmqy}{A}\right)$. Pour toute autre supposition que celle qui convient à l'intégrale (E), les series constantes dans les intégrales (E) et (F) ne se trouvant pas, il faudroit donc calculer à part chaque cas, pour déterminer la figure qui lui convient. Cependant les valeurs de A et A' feront connaître tout de suite le nombre des lignes nodales qui devront composer ces figures. Je ne m'arrêterai pas à ces considérations, il me suffira d'avoir présenté quelques unes des conséquences générales de la forme des intégrales (E) et (F), et je passerai à l'examen de l'intégrale (G) qui est susceptible, dans certains cas, d'une application indépendante de tout calcul.

$\mathfrak{N}$°15 Si dans l'équation (G) on fait $a'' = 0, b'' = 0, A'' = O$ et $B'' = 0$, elle se réduira à l'équation (F). Ce cas est le seul où la même équation (G) puisse devenir identique à l'intégrale (D).

Si au contraire dans l'intégrale (D) on fait $a' = a, b' = a, A' = 0$ et $B' = 0$, z'' sera la somme de deux fonctions séparées des variables $\underline{x}$ et $\underline{y}$ et tandis que z' satisfera à l'équation $\frac{ddz'}{dx^2} = \frac{n^2}{m^2}\frac{ddz'}{dy^2}$, z'' remplira la condition $\frac{ddz''}{dxdy} = 0$.

Si on veut appliquer l'intégrale (G) ainsi réduite, aux cas où les côtés de la plaque quarrée sont libres en vertu des conditions $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = 0$ ou $\frac{dz}{dy} = 0$ et $\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy} = 0$ on trouvera qu'il faut encore faire $a'' = 0$ et $A'' = 0$, car sans cette condition, elle ne conviendroit qu'une plaque dont les côtés seroient appuyés.

Cela posé, en prenant $M'' = 1 - q$, l'équation (G) deviendra
$z = \ldots\ldots. \sin\left(\frac{Mmx}{A}\right)\sin\left(\frac{Mmy}{A}\right)\left(b\cos^2\left(\frac{Mmx}{A}\right) + B\cos^2\left(\frac{Mmy}{A}\right) - \frac{b+B}{4}\right)$.

Parmi les figures observées par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni celles qui doivent être rapportées à cette intégrale sont les fig 69, 70, 87a, 87b, 88a et 88b.

Pour la fig 69 $a = 0, b = -B$; conformement a l'expérience il doit y avoir outre les deux lignes nodales dépendantes de facteurs périodiques, deux autres lignes nodales diagonales dépendantes du facteur $\cos^2\left(\frac{Mx}{A}\right) - \cos^2\left(\frac{My}{A}\right) = 0$.

Pour la fig 70 $m = 1$ mais il existe entre b et B une nouvelle relation que je n'aurais pu déterminer qu'en répétant l'experience examinant avec soin la fig, la mesurant, et tenant compte des valeurs de $\underline{x}$ et $\underline{y}$ pour les points de limites auxquels se terminent les quatre lignes nodales qui remplacent ici le système des deux diagonales nodales.

Tout ce que l'on peut voir sans calcul, est que lorsque l'on aura ni $b = -B$, ni $b = 0$, ni $B = 0$, la figure nodale devra être composée de quatre lignes placées à une distance de l'origine, dépendante de la relation particulière établie entre b et B. En effet, si on fait, par exemple, $\cos\left(\frac{My}{A}\right) = 0$, une ligne nodale commencera sur le côté parallèle a l'axe des $\underline{y}$ lorsque l'équation $\cos^2\left(\frac{Mx}{A}\right) = \frac{b+B}{4b}$ sera satisfaite ; et comme on a une même valeur de $\underline{x}$ depart et d'autre de l'axe des $\underline{y}$, et que les valeurs négatives de $\underline{x}$ sont pareillement doubles, il est clair que l'on aura quatre points qui satisferont à la même condition. On verra pareillement que la condition $\cos^2\left(\frac{My}{A}\right) = \frac{b+B}{4B}$ pourra être remplie par quatre autres points pris sur le côté parallèle à l'axe des $\underline{x}$.

Lorsque $b = -B$, les points qui satisfont aux conditions $\cos^2\left(\frac{Mx}{A}\right) = 0$ et $\cos^2\left(\frac{My}{A}\right) = 0$ se confondent, et il ne doit y avoir, comme il n'y a en effet, que deux lignes nodales diagonales.

Lorsqu'une des conditions est impossible c'est-a-dire, lorsque b et B sont de signes différens sans que leur somme soit nulle, et aussi lorsque l'un de ces coefficiens est $<$

que le tiers de l'autre, il ne doit y avoir que deux lignes nodales sinuseuses dans une direction parallèle à un des axes.

Lorsque l'un des coefficients b ou B est nul, les lignes nodales sont de simples droites elles passent par la suite des points qui remplissent l'une des conditions $\cos\frac{Mx}{A} = \frac{1}{A}$, ou $\cos\frac{My}{A} = \frac{1}{2}$, c'est-a-dire qu'elles se trouveront distantes du côté le plus proche auquel elles sont parallèles d'un tiers de l'intervalle entre une extrémité et l'origine. Les lignes dont il s'agit remplissent les conditions des lignes fictives que j'ai emploiées dans l'application de l'intégrale (C) ; car, en les supposant tracées, elles serviroient d'axes aux lignes sinusales qui passeroient par leurs intersections, en sorte que ces intersections seront de véritables points invariables de repos.

Dans tout autre cas, c'est-a-dire lorsque les deux équations $\cos^2\left(\frac{Mx}{A}\right) = \frac{b+B}{4b}, \cos^2\left(\frac{My}{A}\right) = \frac{b+B}{4B}$ seront satisfaites, il y a nécessairement quatre lignes nodales, de directions plus ou moins inclinées à l'un et l'autre des axes. On voit donc que la théorie est parfaitement d'accord avec l'experience sur la disposition des lignes nodales qui composent la fig 70.

Les sons qui accompagnent les fig 69 et 70 doivent être proportionnels au nombre $-m^2(M'' - 2) = 10$.

Pour la fig 87b, $m = 2, b = -B$; conformément à l'experience il doit y avoir quatre lignes nodales dépendantes du facteur périodique, et parce que les quatre intersections formées par ces lignes, sont, comme on sait, autant de points d'origine ; le facteur $\cos^2\left(\frac{M2x}{A}\right) - \cos^2\left(\frac{M2y}{A}\right)$ doit donner, comme il donne en effet, deux lignes nodales diagonales passant par chacun de ces points. Parmi les lignes nodales diagonales, il y en a deux qui passent chacune par deux des points d'origine ; de sorte que leur nombre se réduit a six ; les quatre autres forment un quarré parfait comme le montre la figure donnée par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni.

Pour les fig 87a et 88a $m = 2$, comme je l'ai expliqué à l'occasion de la figure 70, la relation entre b et B donne lieu à la formation de lignes sinueuses. Ces fig renferment deux périodes complettes dans le sens des deux axes ; ainsi il doit y avoir, comme il y a en effet, quatre lignes sinueuses, et chacune de ces lignes devant passer par quatre points invariables de repos, doit éprouver deux flexions complettes, c'est aussi ce que l'experience a donné comme le montrent les fig dont il s'agit.

Pour la fig 88b $m = 2$. La relation entre b et B permet de remplir les deux équations $\cos^2\left(\frac{M2x}{A}\right) = \frac{b+B}{4b}$ et $\cos^2\left(\frac{M2y}{A}\right) = \frac{b+B}{4A}$, ainsi il doit y avoir, comme il y a en effet, autour de chaque point d'origine 4 lignes nodales dépendantes du facteur $\cos^2\left(\frac{M2x}{A}\right) - \cos^2\left(\frac{M2y}{A}\right) = 0$; et parce que cette fig renferme comme les précédentes deux périodes complettes dans le sens des deux axes, ce qui fait en tout 4 périodes puisque chacune

est prise deux fois, il doit y avoir 16 lignes dues à ce facteur. Il est clair que quatre d'entr'elles doivent former une courbe rentrante autour du centre de la figure, et que deux seulement doivent s'unir dans les parties de la figure qui sont à ses limites et ne sont composées par conséquent que d'une demie période dans le sens d'un axe, puisqu'elles renferment une période complette dans le sens de l'autre axe.

Tout ce que je viens de dire, est independant des valeurs particulières de $\underline{b}$ et $\underline{B}$, et se trouve parfaitement d'accord avec l'experience dans le cas de la fig 88b. Je serois même tentée de croire que cette fig est due a la relation $b = B$; car alors $\cos^2\left(\frac{M2x}{A}\right)$ et $\cos^2\left(\frac{M2y}{A}\right) = 0$ seroient égaux entr'eux, et à $\sqrt{\frac{1}{2}}$; ce qui donneroit des lignes nodales semblablement situées par rapport a l'un et l'autre des axes, d'une courbure uniforme dans leur deux moitiés, et dont l'origine seroit égal à la moitié du côté compris entre la ligne nodale due au facteur périodique et l'extrémité à laquelle elle est parallèle ; circonstances qui paraissent d'accord avec la fig observée par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni.

Les sons qui accompagnent les fig 87$\underline{\text{b}}$, 87a, 88$\underline{\text{a}}$ et 88$\underline{\text{b}}$ doivent être proportionnels au nombre $-m^2(M'' - 2) = 40$.

Si en considérant les suppositions précédentes, on fait pourtant $M'' = 1 - 25$ au lieu de $M'' = 1 - 9$, l'intégrale (D) deviendra

$$z = \ldots. \sin\left(\frac{Mxm}{A}\right)\sin\left(\frac{Mym}{A}\right)\{b\left(\cos^2\left(\frac{Mmx}{A}\right) - \frac{16}{3.4}\cos^4\left(\frac{Mmx}{A}\right)\right)$$

$$+B\left(\cos^2\left(\frac{Mmy}{A}\right) - \frac{16}{3.4}\cos^4\left(\frac{Mmy}{A}\right)\right) - \frac{b+B}{12}\}$$

de sorte qu'en prenant $m = 1, b = -B$, on aura

$$z = \ldots. \sin\left(\frac{Mxm}{A}\right)\sin\left(\frac{Mym}{A}\right)\{\left(\cos^2\left(\frac{Mxm}{A}\right) - \cos^2\left(\frac{Mym}{A}\right)\right)$$

$$(1 - \frac{4}{3}\left(\cos^2\left(\frac{Mxm}{A}\right) + \cos^2\left(\frac{Mym}{A}\right)\right)\}$$

Il est visible que le facteur $\cos^2\left(\frac{Mxm}{A}\right) - \cos^2\left(\frac{Mym}{A}\right)$ doit donner, comme je l'ai dit plus haut, deux lignes nodales diagonales ; et l'on voit également que le facteur $1 - \frac{4}{3}\left(\cos^2\left(\frac{Mxm}{A}\right) + \cos^2\left(\frac{Mym}{A}\right)\right)$ devra donner quatre lignes nodales courbes terminées à chaque limite dans les points pour lesquels $\cos\left(\frac{Mxm}{A}\right)$ et $\cos\left(\frac{Mym}{A}\right)$ seront $= \pm\sqrt{3}.\frac{1}{2}$.

La fig 79a paroit appartenir à ce cas. Le son qui l'accompagne doit donc être proportionnel au nombre $-m^2(M'' - 2) = 26$.

Je ne m'arreterai pas plus longtems à la recherche des cas renfermés dans l'intégrale (G), mais je ne puis me dispenser de faire remarquer encore que $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni semble avoir deviné dans les figures composées de lignes dues à un facteur périodique et de lignes provenant d'un facteur différent que ces dernières devroient être regardées comme équivalentes à des lignes parallèles et susceptibles de plusieurs formes différentes. Cet aperçu est d'autant plus digne d'éloges que ce n'est qu'après des experiences mille fois répétées que cet habile physicien a pû apprendre à démêler, parmi les distorsions des figures, celles qui doivent être rapportées à quelqu'inégalités physiques souvent inappréciables et celles que la théorie doit expliquer.

En effet j'ai vu bien des fois les lignes dus aux facteurs périodiques, se séparer et se courber, mais $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni s'est bien gardé de tenir compte de cet accident ; et malgré l'ignorance où il étoit de la théorie, il a deviné parmi les distorsions qui sembloient être de même nature quelles étoient celles que l'on ne devoit attribuer qu'a quelqu'imperfection de la plaque vibrante.

L'intégrale (H) qui appartient aux surfaces qui ne sont périodiques que dans le sens des $\underline{y}$ referme une serie qui ne peut jamais se terminer et il est par conséquent impossible de déterminer les figures qu'elle peut expliquer sans avoir recours au calcul.

A l'égard des sons qui accompagneroient ces figures on voit qu'ils peuvent être les mêmes que ceux qui sont donnés par les intégrales périodiques dans le sens des $\underline{x}$ et dans celui des $\underline{y}$; car les nombres $(M-1)(m^2+n^2), m^2(M+M'-2)$ se réduisent, en prenant pour M et M' des valeurs convenables, a la forme $M^2(m^2+1)$, qui convient a la présente intégrale.

On voit que j'ai rendu compte de plus de la moitié des figures observées par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, dans le mouvement des plaques quarrées et que celles qui n'ont pas été expliquées ne sont ni plus bizares ni plus compliquées que les autres. Peut-être seroit-il également facile de les expliquer aussi, soit en mettant de nouvelles valeurs dans les intégrales que j'ai données, soit en employant a la fois plusieurs des mêmes intégrales, comme je le dirai en parlant des plaques rectangulaires différentes du quarré, soit enfin a l'aide de quelqu'autre intégrale qui ne s'est pas encore présentée.

Pour compléter la comparaison entre la théorie et l'experience, je vais m'occuper de la comparaison des sons, et quoique je n'ai pas encore expliqué la totalité des figures, et que ce ne soit par conséquent que pour une partie d'entr'elles que je puisse affirmer l'équivalence entre les lignes nodales de figures variées et les lignes nodales parallèles à un des axes, je suivrai à cet égard l'indication de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, encore que, lorsqu'une figure n'aura pas été expliquée, je regarderai le son qu'elle produit comme devant être

proportionnel au nombre que la théorie donneroit s'il s'agissoit de la figure composée de simples lignes droites, a laquelle ce savant physicien la croit équivalente.

𝔑°16 Comparaison des sons Si on réfléchit à l'influence que peut avoir la moindre inégalité d'épaisseur sur les intervalles des sons qui correspondent aux différentes figures que peuvent présenter les plaques élastiques vibrantes, on ne pourra exiger un accord rigoureux entre les sons indiqués par la théorie et les sons donnés par l'experience. Pour fixer la limite des différences qui devront être négligées entre les résultats de la théorie et ceux de l'experience, j'observerai que 𝔐r Chladni a déterminé lui-même la quantité de l'erreur possible dans les experiences les mieux faites : car on lit p.154 de son livre " les differences que l'on puisse trouver dans les experiences bien faites n'excéderont jamais un demi ton tout au plus ". Ainsi lorsqu'il s'agira de comparer entr'eux deux sons donnés par l'experience, le rapport ne pourra jamais differer du rapport entre les nombres auquel la théorie veut que ces sons soient proportionnels, de plus d'un ton ; encore cette différence pour n'être pas hors des limites de la probabilité, doit-elle être rare, puisqu'elle suppose que chacune des experiences comparées, est affectée de la plus grande erreur possible, et que cette erreur influe, pour chacune d'elles, dans des sons opposés.

Cela posé je vais commencer par comparer entr'eux les sons donnés par les vibrations tournantes, c'est-à-dire par celles qui ne contiennent pas une période complette, mais seulement deux demies périodes dans le sens d'un des axes.

D'après la table donnée p.152 du traité d'acoustique les fig qui, parmi celles que j'ai expliqués appartiennent a ce cas, sont les suivantes : fig 63, 66a, 69, 70, 74a et 79a.

J'ai trouvé n° 19 que le son de la fig 63 devait être proportionnel au nombre 2

.....66a.....5

n° 15.....69.70.....10

n° 19.....74a.....17

n° 15.....79a.....26

La différence entre les sons des fig 63 et 66a doit être $\frac{5}{2}$

63 et 69-70.....5

63 et 74 ..... $\frac{17}{2}$

63 et 79a.....19

La table p.152 du traité d'acoustique donne :

son de la fig 63 ..... sol 1

66a .... si 2

69 ..... si 3

son de la fig 70 ..... ut$^{\#}$4

74a ..... si^{b}4+grave

79a ..... fa$^{\#}$+grave

La différence des sons qui accompagne les fig 63 et 66a est de un octave 1 ton majeur et 1 ton mineur. Cet intervalle est exprimé, comme on sait, par $\frac{5}{2}$, c'est-a-dire qu'il est entièrement conforme au résultat de la théorie.

La différence des sons qui accompagnent les fig 63 et 69, est 2 octaves 1 ton majeur et 1 ton mineur ; elle est donc exprimée, comme le veut la théorie, par le nombre 5.

le son qui accompagne la fig 70, devroit, d'après la théorie, (ν n° 05), être le même que celui qui appartient à la fig 69. Cependant ces sons different entr'eux de l'intervalle d'un ton. J'ignore la cause de cette difference et je ne puis m'empêcher de remarquer combien il est singulier que $\mathfrak{M}^{r}$ Chladni ait pu se décider à regarder comme equivalentes, deux figures dont il sembleroit que la théorie seule put indiquer le rapport, puisque, par une circonstance sans doute accidentée l'experience donne, pour chacune d'elles, des sons notables différens.

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 63 et 74, est de 3 octaves et un peu moins d'un ton et $\frac{1}{2}$ ton c'est-à-dire qu'elle est $<$ que $\frac{75}{8}$. En effet $\frac{75}{8}$ est $>$ que $\frac{17}{2}$ donné par la théorie. Ces deux rapports different entr'eux de moins d'un ton et de plus d'un demi ton. Ainsi le son de la fig 74 semble trop aigu, mais ce cas est pourtant renfermé dans la limite de l'erreur que l'on peut attribuer aux experiences.

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 63 et 79a est de 3 octaves et un peu moins de 5 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-à-dire, $<$ que 15 ; le nombre donné par la théorie est 13 qui est beaucoup trop petit ; car la différence entre les deux rapports est entre 1 ton et 1 ton et $\frac{1}{2}$ ton, tandis qu'elle devroit être moindre qu'un demi ton. Ainsi le son qui accompagne la fig 79a semble être trop aigu d'environ 1 ton.

Je vais m'occuper à présent de comparer les sons qui appartiennent aux cas où les figures sont composées d'une ou de plusieurs périodes complettes dans le sens de chacun des deux axes.

Je commencerai par celles de ces fig dont j'ai rendu compte dans les n^{o} précédens, et je prendrai pour terme de comparaison la fig 68a qui est la plus simple de cette classe.

J'ai trouvé n° 13

que le son de la fig 68a devroit être proportionnel au nombre 8

.....71.....13

.....75.....18

.....80a.....25

.....81a.....29

.....82.....32

J'ai trouvé n° 15 que le son des fig 87a, 87b, 88a et 88b devrait être proportionnel au nombre 40.

La différence entre les sons des fig 68 et 71 doit donc être $\frac{13}{8}$

68 et 75.....$\frac{9}{4}$

68 et 80a.....$\frac{25}{8}$

68 et 81a.....$\frac{29}{8}$

68 et 82.....4

68 et 87-88.....5

La table p.152 du traité d'acoustique donne

son de la fig 68.....si^{b}9 − aigu

71.....fa$^{\sharp}$4

75.....ut 5

80.....fa$^{\sharp}$5

81.....sol$^{\sharp}$5 + aigu

82.....si^{b}5

87-88...ut$^{\sharp}$6+aigu à ré b−aigu

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 68 et 71 est donc un peu plus de 4 tons, c'est-à-dire > que $\frac{8}{5}$, la théorie donne $\frac{13}{8}$ qui est en effet > que $\frac{8}{5}$.

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 68 et 75, est une octave et un peu plus d'un ton c'est-à-dire > que $\frac{9}{4}$ qui est précisement le nombre donné par la théorie.

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 68 et 80, est d'une octave et un peu plus de 4 tons, c'est-à-dire > que $\frac{16}{5}$. La théorie donne au contraire $\frac{25}{8}$ qui est < que $\frac{16}{5}$; mais la différence entre les deux rapports est bien au dessous de la limite des erreurs puisqu'elle est juste un comma.

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 68 et 81 est notablement plus grande qu'un octave et 5 tons c'est-à-dire > que $\frac{32}{9}$; et en effet le rapport donné par la théorie savoir $\frac{29}{8}$ surpasse $\frac{32}{9}$ de plus d'un comma.

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 68 et 82 est un peu > que 2 octaves, c'est-à-dire > que 4 qui est le nombre donné par la théorie.

La différence entre les sons qui accompagnent les fig 68 et 87-88, lesquels different entr'eux de moins d'un demi ton, est, en adoptant le plus favorable a la théorie, d'un octave et de deux tons ; elle est donc exprimée par le nombre 5 donné en effet par la théorie.

Les cas suivans sont ceux pour lesquels $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni n'a pas donné de figures et aussi ceux dont les figures n'ont pas été expliquées dans les n° précédens. Pour les désigner j'emploirai la notation imaginée par cet auteur, suivant laquelle m/n signifira qu'il devra y avoir $\underline{m}$ lignes droites nodales parallèles à un des axes et $\underline{n}$ pareilles lignes parallèles a l'autre axe. Je continurai de comparer les sons des autres cas à celui qui accompagne la fig 68$\underline{\text{a}}$, c'est-à-dire a celui du cas 2/2.

Cela posé, la théorie montre que

pour 2/2 le son doit être proportionnel au nombre 8
4/2.....20
5/9.....34
6/9.....45
5/4.....41
6/4.....52
5/5.....50
6/5.....61

La différence entre 2/2 et 4/2 doit donc être $\frac{5}{2}$
2/2 et 5/9 ..... $\frac{17}{4}$
2/2 et 6/9 ..... $\frac{45}{8}$
2/2 et 5/4 ..... $\frac{41}{8}$
2/2 et 6/4 ..... $\frac{19}{2}$
2/2 et 5/5 ..... $\frac{25}{4}$
2/2 et 6/5 ..... $\frac{61}{8}$

La table p.152 donne : son de 2/2 ..... si $^{\mathrm{b}}3$ + grave
4/2 ..... ut$^{\sharp}5$ et re 5

5/9 ..... si 5−aigu et ut 6−aigu
6/9 ..... mi 6
5/4 ..... re $^{\sharp}$6
6/4 ..... sol 6+aigu
5/5 ..... fa$^{\sharp}$6+aigu
6/5 ..... si^{b}−aigu

On voit que les deux cas qui appartiennent à 4/2 diffèrent entr'eux d'un demi ton, si on prend re 5−aigu, ce qui rapproche d'ut$\sharp$ 5, on trouvera que la différence entre les sons de 2/2 et de 4/2, sera d'un octave et 2 tons, c'est a dire qu'elle sera exprimée, comme le veut la théorie, par $\frac{5}{2}$.

Pour 5/9 les deux cas different entr'eux d'un ton environ. Le plus favorable a la théorie, savoir si 5−aigu, donne dans la comparaison à 2/2, une différence de deux octaves et $\frac{1}{2}$ ton. Elle est donc exprimée par $\frac{25}{6}$ ou par $\frac{64}{15}$; et $\frac{17}{4}$ qui est le rapport indiqué par la théorie, est en effet $>$ que $\frac{25}{6}$ et $<$ que $\frac{64}{15}$.

La différence entre les sons qui appartiennent à 2/2 et et à 6/3 est d'un peu plus de deux octaves et 3 tons, c'est-à-dire $>$ que $\frac{50}{9}$; et en effet le rapport donné par la théorie savoir $\frac{45}{8}$ est de fort peu $>$ que $\frac{50}{9}$.

La différence entre les sons qui appartiennent à 2/2 et et à 5/4 est d'un peu plus de 2 octaves 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-à-dire $>$ que $\frac{16}{9}$, au contraire le rapport donné par la théorie savoir $\frac{11}{8}$ est $<$ que $\frac{16}{9}$, soit d'une quantité moindre qu'un demi ton mineur.

La différence entre les sons qui appartiennent à 2/2 et et à 6/4 est plus de 2 octaves 4 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-à-dire $>$ que $\frac{20}{3}$. Au contraire le rapport donné par la théorie savoir $\frac{13}{2}$ est $<$ que $\frac{20}{3}$; mais la différence entre ces deux rapports est fort petite, puisqu'elle surpasse le comma d'une quantité inappréciable a l'oreille.

La différence entre les sons qui appartiennent à 2/2 et et à 5/5 est un peu plus grande que 2 octaves et 4 tons, c'est-à-dire $>$ que $\frac{2}{5}$. Au contraire le rapport donné par la théorie savoir $\frac{25}{4}$ est $<$ que $\frac{92}{5}$; mais la différence entre ces deux nombres est bien petite, puisqu'elle se trouve juste d'un comma.

La différence entre les sons qui appartiennent à 2/2 et et à 6/5 est de 3 octaves ; elle est donc exprimée par le nombre 8 qui diffère de moins d'un demi ton majeur du nombre $\frac{61}{8}$ donné par la théorie.

Il est impossible d'esperer plus d'accord entre la théorie et l'experience, que n'en présente la comparaison des sons qui accompagnent celles des figures que j'ai expliquées, dans lesquelles il y a une ou plusieurs périodes complettes, tant dans le sens des $\underline{x}$ que dans celui des $\underline{y}$.

Les mêmes accords se trouvent aussi dans la comparaison des sons que, d'après l'autorité de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, j'ai attribués aux cas des périodes complettes. En effet en prenant dans cette dernière classe, qui présente d'assez grandes differences de sons rapportés aux mêmes cas, ceux de ces sons qui s'accordent le mieux avec la théorie, j'ai trouvé que les rapports indiqués par la théorie, differoient toujours de moins d'un demi ton de ceux donnés par l'experience. On voit que cette différence est bien au dessous de celles dont les erreurs possibles pourroient rendre compte ; et que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni a plusieurs fois regardé comme équivalentes des figures qui donnaient des sons differens entr'eux d'un demi ton, d'un ton, ou moins d'une octave (ν la table p.152 du traité d'acoustique).

Cependant il se présente ici une difficulté, lorsqu'au lieu de comparer entr'eux les sons donnés par les figures qui renferment des périodes complettes dans le sens des $\underline{x}$ et dans celui des $\underline{y}$, on prend pour terme de comparaison les sons qui accompagnent les figures qui appartiennent à l'intégrale (C) et qui, tant d'après l'opinion de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni que d'après la théorie que j'ai cherchée a établir, doivent être les mêmes que les sons donnés par la simple lame dont les extrémités sont libres en vertu des conditions $\frac{ddz}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$, on trouve que le son de toutes les figures périodiques qui renferment des périodes complettes, est plus grave d'environ 1 ton que la théorie ne l'indique. C'est ainsi, par exemple, que le son de $\frac{0}{4}$ fig 72.73 est sol$^\sharp$3 et que celui de $\frac{4}{3}$ fig 80 est fa$^\sharp$5, tandis qu'il ne devroit y avoir que 2 octaves entre ces deux sons, puisque, d'après la théorie d'Euler, le premier est proportionnel au nombre $\frac{25}{4}$, et que d'après la théorie des surfaces périodiques, le second est proportionnel au nombre 25.

Mais le son des figures qui contiennent, ou sont censées contenir une ou plusieurs périodes complettes, ne sont pas seulement plus grave d'un ton environ que ne semble l'exiger la comparaison aux sons donnés par la simple lame ; cette différence doit encore être considérée comme un minimum dont se rapprochent d'autant plus les sons produis par les vibrations <u>tournantes</u> que les figures qui leur appartiennent contiennent un plus grand nombre de lignes nodales. C'est ainsi que d'une part les sons qui accompagnent les fig 63 et 68, bien qu'ils ne devroient différer que de deux octaves puisqu'ils sont entr'eux, d'après la théorie : : 2 : 8 different pourtant de 2 octaves 1 ton et $\frac{1}{2}$ ton que ne le veut la comparaison aux sons de la simple lame ; et que les sons qui accompagnent les fig 66$\underline{\text{a}}$ et 69, produisent les mêmes differences ; tandis que, d'autre part le son de la fig 74 est moins éloigné du rapport donné par la théorie ; et que le son de la fig 79$\underline{\text{a}}$ se rapproche encore davantage du rapport donné par la même théorie puisqu'il n'en diffère plus que de l'intervalle d'un ton et $\frac{1}{2}$ ton.

Des différences du même genre se font remarquer dans la comparaison des sons des figures qui se forment sur les plaques rectangulaires differentes du quarré, de sorte que les figures qui sur ces diverses plaques présentent une ou plusieurs périodes complettes donnent toujours, au moins en prenant un resultat moyen des sons un peu plus graves qu'il ne le faudroit pour établir l'accord de la théorie et de l'experience dans la comparaison au son des figures qui se rapportent aux mouvemens de la simple lame, et que les figures qui sur les mêmes plaques ne contiennent point de périodes complettes, donnent des sons qui dans la même comparaison se trouvent de beaucoup trop graves.

On pourroit à la rigueur regarder les différences dont il s'agit ici comme peu importantes, puisqu'il est rare qu'elles excèdent un tierce, distance qui n'a pas empêché $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni de considérer comme équivalentes les fig 64 et 65 que la théorie montre aussi devoir appartenir à une même valeur de l'angle $\underline{\omega}$. Cependant la constance du phénomène le rend remarquable, et ne permet guère de la regarder comme produit par les causes physiques qui influent sur les experiences les mieux faîtes ; car s'il en étoit ainsi, les differences devroient en quelque sorte se balancer tandis qu'au contraire elles sont toutes, ou presque toutes, dans le même sens.

Puisqu'il semble inévitable de conclure de ce qui précède l'existence d'une courbe tournante à rendre les sons qui accompagnent les figures périodiques plus graves que la comparaison avec les sons qui accompagnent les figures non périodiques ne semble l'exiger, il me sera permis de présenter a cet égard une conjecture qui ne me paroît pas entièrement dénuée de probabilité.

On se rappelle que les differences dont il s'agit d'expliquer sont à leur <u>maximum</u> lorsque la surface périodique ne présente que des demies périodes tant dans les sens des x que dans celui des y, c'est ce que j'ai déjà nommé quart de période en réservant la dénomination de demie période pour les parties composées d'une période dans le sens d'un des axes et d'une demie période seulement dans le sens de l'autre axe. Cela posé, on se souvient encore que les differences, en prenant toujours un résultat moyen entre plusieurs faits, sont d'autant moindres que la surface périodique qui ne comprend pas de période complette est composée d'un plus grand nombre de demies périodes, et qu'enfin lorsqu'entre les quarts de périodes et les demies périodes qui se trouvent dans les figures périodiques dont les extrémités sont libres, la figure renferme des périodes complettes les mêmes differences diminuent encore de sorte, qu'alors elles sont même souvent au dessous d'un ton qui peut être considéré comme leur mesure moyenne.

En réfléchissant sur la gradation du phénomène, il paraîtra peut-être vraisemblable qu'il ait pour cause l'existence de ces quarts de périodes et demies périodes dans les figures qui se forment sur les plaques dont tous les côtés sont libres. En effet on voit que

si les quarts de périodes sont seuls leur inflexion doit être a leur maximum, qu'elle doit diminuer par l'addition de demies périodes qui comprennent des périodes entières dans le sens d'un des axes, et qu'enfin elle doit se trouver en partie contrebalancée et par conséquent réduite à son minimum lorsque la figure contient des périodes complettes ; en sorte que dans cette hypothèse on ne devroit obtenir un accord parfait entre les sons donnés par l'experience et les sons indiqués par la théorie que dans le seul cas des surfaces appuyées de tout côté.

Malheureusement $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni ne s'est pas occupé de ce genre de surfaces, qui ne peuvent être soumises à l'experience qu'avec beaucoup de difficultés. Le cas des lames libres à leurs extrémités en vertu des conditions $\frac{dz}{dx} = o$ et $\frac{d^3z}{d^3x} = 0$, s'il avoit été essayé avec succès m'auroit fourni un fait analogue à celui des surfaces périodiques libres ; et il est donné un son plus grave que le cas correspondant dans la lame dont les extrémités sont appuyées, j'avois été autorisée à regarder l'effet des demies périodes comme constantes. Mais l'experience n'ayant rien décidé à ce égard, je suis réduite à présenter l'explication que je viens de donner comme une simple conjecture.

En effet quoique les cas de la corde tendue et de la flûte ouverte aux deux bouts semblent présenter deux faits comparables et susceptibles, par conséquent, de fournir au moins des inductions, sur l'objet présent, ils ne peuvent pourtant être d'aucun secours ; car la détermination du son dans les instrumens à vent ne peut encore être regardée comme parfaitement rigoureuse.

Voilà, ce me semble, ici la difficulté. L'ingénieuse hypothèse que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ De la Place a imaginée et que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Poisson a ensuite introduite dans le calcul, suffit à la vérité pour expliquer comment la vitesse reelle du son surpasse celle que l'analyse indique, parce que cette vitesse qui n'a guère été mesurée que sur des sons graves, est regardée tacitement par les physiciens comme independante de la place que le sons transmis occupe dans l'échelle diatomique ; en sorte que considérant d'une part cette vitesse comme uniforme et de l'autre l'influence du dégagement de la chaleur comme également uniforme, on peut satisfaire aux conditions de la question.

Mais s'il s'agissoit de démêler dans la correction à appliquer au son d'une flûte, l'influence du coefficient proportionnel à la chaleur dégagée, et celle de l'existence de demies périodes, on seroit d'autant plus embarrassé que l'on ne peut affirmer la constance d'un coefficient qui est fondé sur un fait variable dans son amplitude et dans sa fréquence et que, par conséquent, deux effets dont on auroit pas de mesure exacte, se trouveroient confondus.

Quoiqu'il en soit du degré de confiance que mérite l'explication que je viens de soumettre au jugement de la classe, je n'ai pas crû devoir dissimuler la difficulté qui en

est l'objet ; mais il me sera permis d'observer qu'avant l'explication proposée par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ De la Place, la théorie des instrumens à vent et celle de la transmission du son, qui donnoient des résultats fort éloignés de ceux de l'experience, n'en étoient pas moins regardée par les géomètres et les physiciens comme entièrement satisfesantes, que d'ailleurs la difference que j'ai essayé d'expliquer est bien peu considérable puisque, dans son maximum, elle excède a peine celles dont $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni n'a pas tenu compte dans la formation de sa table p.152 et qu'elle n'est vraiment remarquable que par sa constance.

Je vais m'occuper à présent des plaques rectangulaires differentes du quarrée.

§.5 Comparaison de la théorie *à* l'expérience dans le cas des plaques rectangulaires différentes du quarré

$\mathfrak{N}$°17. L'intégrale (C) n° 3, dont j'ai longuement développé l'application aux plaques quarrées, (ν § 4, n° 10, 11 et 12) peut aussi servir à rendre compte d'une partie des figures qui se montrent sur les plaques vibrantes rectangulaires différentes du quarré et en même tems aussi des sons qui accompagnent chacune des mêmes figures.

Cependant, en fesant attention a la nature de la question, on verra aisément qu'elle exige que la valeur de l'angle $\underline{\omega}$ soit la même pour chacune des fonctions de $\underline{x}$ et $\underline{y}$ qui entrent dans la formule (C). Ainsi, dans la plupart des cas, on aura necessairement $\mathcal{B} = 0$, ou $\mathcal{A} = 0$, c'est-a-dire qu'il ne pourra se former sur les plaques rectangulaires dont les mouvemens sont compris dans l'intégrale (C), que de simples lignes nodales droites et parallèles entr'elles. On ne trouvera de figures susceptibles de distorsions que pour les valeurs de l'angle $\underline{\omega}$ qui auront entr'elles le rapport necessaire pour compenser la différence entre la grandeur des côtés des plaques que l'on considère. Je vais éclaircir ceci par des exemples : Si on a une plaque dont les côtés soient entr'eux : : 5 : 7 on verra aisément que le nombre auquel le son doit être proportionnel dans le cas de trois lignes nodales droites parallèles entr'elles, étant $\frac{45}{4}$, et le nombre auquel le son doit être proportionnel dans le cas de quatre lignes nodales droites parallèles entr'elles, étant $\frac{49}{4}$, 3 lignes nodales parallèles entr'elles et transversales au côté qui est comme 7, doit donner le même son que 4 lignes nodales parallèles entr'elles et transversales au côté qui est comme 5. Il suit dela que la valeur de l'angle $\underline{\omega}$ est la même pour l'un et l'autre de ces cas et qu'il peut exister alors différentes figures equivalentes puisque les suppositions $\mathcal{A} = 0$ ou $\mathcal{B} = 0$ cessent d'être necessaires.

Independament de la considération de l'intégrale (C) $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni paroit avoir senti que ce ne doit être que dans le cas de la compensation dont j'ai parlé plus haut, qu'il pouvoit exister sur les plaques rectangulaires differentes du quarré, des figures nodales diverses entr'elles, mais toutes equivalentes à un certain nombre de points de repos dans la simple lame dont les extrémités sont libres. On peut voir n° 156 du traité d'acoustique, que dans le cas que j'ai pris pour exemple, parce qu'il repond a la première des figures observées sur les plaques rectangulaires, l'auteur regarde en effet les figures qui se sont montrées, comme intermédiaires entre les deux especes de vibrations, qu'il atribue à la plaque partagée par 4 lignes nodales parallèles suivant une de ses dimensions, et par 9 pareilles lignes suivant l'autre de ses dimensions. N°121 du traité d'acoustique, on peut voir encore que la plaque dont les côtés sont entr'eux : : 9 : 7 presente aussi des figures intermédiaires aux deux manières de vibrer qui repondent aux suppositions successives $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$, dans l'intégrale (C). Car alors, suivant la remarque de l'auteur, 3 lignes nodales dans un des sens doivent donner le même son que 4 pareilles lignes dans l'autre sens. De même encore sur la plaque dont les côtés sont entr'eux : : 9 : 1, les suppositions successives $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$ qui repondent, en suivant la notation de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, aux cas $\frac{5}{0}$ et $\frac{0}{2}$ donnant les deux figures auxquelles les fig 177 sont equivalentes (ν T. d'acoustique n.122).

Parmi les fig pl 6 du traité d'acoustique, celles qui repondent aux trois cas dont j'ai parlé, et les différentes fig 170 sont les seules qui presentent plusieurs formes dépendantes toutes de l'intégrale (C). Rien ne seroit plus aisé que de suivre de point en point, pour chacune d'elles, la formation des différentes lignes nodales qui les composent ; mais j'auroi a répéter des détails fastidieux qui peut-être n'ont déjà été que trop rabattus dans la description des figures que la même intégrale (C) donne sur la plaque quarrée. Ainsi je me contenterai de présenter a cet égard quelques reflexions générales et de les appliquer, par forme d'exemple, a la fig n° 169b que supposerai tracée.

Lorsque les suppositions successives $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$ donnent lieu, l'une et l'autre, à la formation de nombres pairs de lignes nodales droites parallèles entr'elles, les valeurs de $f(x)$ et de $f(y)$ prises a l'origine a peuvent être égales entr'elles parce que toutes deux sont de la forme $2(1+\exp\omega)$; ces deux valeurs peuvent encore être égales entr'elles lorsque les suppositions $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$ donnent lieu l'une et l'autre à la formation de nombres impairs de lignes nodales droites ; car alors ces deux fonctions sont de la forme $2(1-\exp\omega)$. Mais si les mêmes suppositions, savoir $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$, donnent lieu, l'une a la formation d'un nombre impair de lignes nodales parallèles entr'elles, l'autre a la formation d'un nombre pair de pareilles lignes, on ne pourra plus regarder $f(x)$ et $f(y)$ comme égales entr'elles à l'origine, quoique la valeur de ω soit égale de part et d'autre.

Il résulte de ce que je viens de dire que la supposition $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$ qui dans aucun cas, excepté celui du quarré, ne peut donner lieu à la formation de lignes nodales diagonales sur les plaques rectangulaires, ne peut même expliquer la formation d'une ligne nodale ayant son origine au point $\underline{a}$ que dans le seul cas où les suppositions $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$ entraînent l'une et l'autre la formation de nombres pairs ou celle de nombre impair de lignes nodales droites. La fig 175$\underline{\text{b}}$ présente un exemple de ce cas ; et les suppositions $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$ donnent en effet $\frac{2}{0}$ et $\frac{0}{4}$.

Si dans le cas où les suppositions successives $\mathcal{A} = 0$ et $\mathcal{B} = 0$ donnent lieu, l'une à un nombre pair, l'autre a un nombre impair de lignes nodales droites, on vouloit avoir une figure dont une des lignes nodales commençant au point $\underline{a}$ d'origine, au lieu de la supposition $\mathcal{A} = -\mathcal{B}$, il faudroit faire celle-ci $\mathcal{A}(1 - \exp\omega) = -(1 + \exp\omega)\mathcal{B}$. La fig 169$\underline{\text{b}}$ (ν la table ci-jointe) paroît appartenir à cette hypothèse ; et en la supposant tracée on voit qu'elle satisfait a toutes les conditions que la théorie exige. En effet à partir du point $\underline{a}$ la ligne nodale s'avance diagonalement vers le point i qui lui est opposé parce que les quantités $(1 - e^{\omega})f(x)$ et $(1 + e^{\omega})f(y)$ qui étoient égales au point $\underline{a}$ diminuent en même tems jusqu'a ce qu'elles deviennent nulles à la fois au point i. A partir de ce point la ligne entre dans un intervalle où les plus grandes valeurs des mêmes quantités $(1 - e^{\omega})f(x)$ et $(1 + e^{\omega})f(y)$ sont égales, ou ce qui revient au même quant a l'effet physique, presqu'egales entr'elles et c'est pour cela que, suivant ce que j'ai expliqué n° 15, à l'occasion de la quatrième valeur de l'angle $\underline{\omega}$, la figure nodale montre quatre branches autour du point $\underline{m}$ de cet intervalle. Il en est de même pour les autres intervalles où se trouvent de semblables points $\underline{m}$; et quant au changement de direction de la courbe, j'ai eu occasion tant de fois d'en expliquer la cause que je me contenterai de renvoyer au passage du n° 15 que j'ai cité plus haut. Il me suffira donc de remarquer que, conformement à la théorie, la présente figure nodale passe par les 12 points de <u>repos invariables</u>.

Il est évident que les autres figures 169 données par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni remplissent également cette condition, car l'une d'elles montre quatre lignes nodales sinueuses ayant chacune une <u>flexion</u> et $\frac{1}{2}$, l'autre presente 3 lignes nodales sinueuses ayant chacune 2 flexions complettes ; et on se rappelle qu'une flexion et $\frac{1}{2}$ passe par 3 points de <u>repos invariables</u> tandis que deux flexions complettes passent par quatre pareils points de <u>repos invariables</u>.

On peut établir comme une règle générale pour juger a quelle valeur de l'angle $\underline{\omega}$ se rapporte une figure nodale composée de lignes sinueuses, que si $\underline{m}$ est le nombre des lignes droites nodales auxquelles la supposition $\mathcal{A} = 0$ donne lieu ; et que $\underline{n}$ soit le nombre des lignes droites nodales qu'entraîne la supposition $\mathcal{B} = 0$, la figure sera

necessairement composée de $\underline{m}$ lignes sinueuses ayant chacune $\frac{n}{2}$ flexions, ou de $\underline{n}$ lignes également sinueuses dirigées dans le sens opposé aux premières, et presentant chacune $\frac{m}{2}$ flexions.

On voit donc que la considération des points de repos invariables à laquelle j'ai déja eu recours plusieurs fois, est du plus grand secours pour l'explication des figures qui sont assujetties à passer par chacun d'eux ; mais je me dispenserai de faire de nouvelles applications de la regle précédente, et je passerai tout de suite à la considération des intégrales périodiques.

$\mathfrak{N}$°18 Surfaces périodiques. Pour appliquer les intégrales données n° 4 et 5 au cas des surfaces rectangulaires differentes du quarré, il faut multiplier les ordonnées parallèles au plus petit côté par la fraction renversée qui exprime le rapport entre la longueur des deux côtés de la plaque rectangulaire, de sorte que si, par exemple, les longueurs des deux côtés sont entr'elles : : s : t, t étant $<$ que s, la forme générale de ces équations sera $z = ...sin\left(\frac{Mtmx}{+A}\right) sin\left(\frac{Msny}{+A}\right)$. Cette formule montre qu'il y aura $\underline{m}$ lignes nodales parallèles à l'axe des $\underline{y}$ et $\underline{n}$ lignes nodales parallèles à l'axe des $\underline{x}$, et que, si on changeoit $\underline{m}$ en $\underline{n}$, la figure seroit alors fort différente de la première.

Elle montre aussi que le son doit en général être proportionnel au nombre $\frac{t^2m^2+s^2n^2}{t^2}$.

$\mathfrak{M}$r Chladni n'a pas jugé necessaire de faire connaître la totalité des figures qu'il a observées sur les plaques rectangulaires différentes du quarré ; mais celles qu'il a données presentent un caractere important pour vérifier la théorie, et je regrette de n'avoir pas assez de tems pour entrer dans le détail de la description individuelle. Cependant, en me bornant même à des généralités, j'espère pouvoir rendre un compte suffisant des singularités que présentent les divers groupes d'équations que $\mathfrak{M}$r Chladni regarde comme équivalentes.

Jusqu'ici je n'ai employé, pour expliquer les distorsions des figures nodales que la considération d'une seule forme d'intégrale, de sorte que ça a toujours été par des changemens effectués dans une seule et même équation que j'ai crû pouvoir expliquer le changement des lignes nodales lorsque le son restoit le même.

Mais par la nature du genre de calcul qui convient à la question que je traite, non seulement les differentes valeurs de z qui resultent des diverses intégrales particulières, satisfont à l'équation differentielle, mais la somme de plusieurs de ces valeurs y satisfont également ; et rien n'empêche de supposer en effet que z soit ainsi composé. Cependant, comme il ne s'agit que des mouvemens qui doivent produire un son mesurable, les valeurs de z composées comme je viens de le dire, ne peuvent être employées que dans

les cas où le son des différens termes produits par l'addition des diverses valeurs de z qui viennent des intégrales particulières correspondantes, est le même pour chacune d'elles.

Pour effectuer l'application des formules composées d'après les principes que je viens d'établir il suffira de multiplier chacun des termes par une constante arbitraire, et de tracer les figures qui conviendront à la supposition de toutes ces constantes nulles, exceptée une seule. La rencontre des différentes figures produites par les suppositions successives des divers coëfficiens nuls, donnera un certain nombre de points invariables de repos, qui, comme je l'ai dit ailleurs, devront appartenir à toutes les figures renfermées dans la valeur composée de z, et non seulement il existera des points invariables de repos, comme dans les cas qui ont été expliqués jusqu'ici, mais on pourra trouver alors de véritables lignes de repos invariables. Par exemple, si, pour plus de simplicité, on se borne au cas où la valeur $\underline{z}$ ne seroit formée que de la somme de deux termes donnés par deux intégrales particulières différentes, on sentira aisément qu'il pourra arriver en effet que les deux figures appartenantes à chacune de ces deux valeurs ayant une ligne nodale commune, et qu'alors cette ligne sera une veritable ligne invariable de repos, en sorte qu'elle sera commune à toutes les distorsions des figures appartenantes à la valeur de $\underline{z}$ ainsi composée.

A l'égard des conditions des limites, on voit ici une nouvelle preuve de la necessité de distinguer l'état analytique des extrémités physiquement libres ; car rien n'empêche de composer la valeur de $\underline{z}$ de termes qui satisferont aux conditions des limites en vertu de différens couples d'équations, de sorte que le mot libre n'aura a proprement parler ni l'une ni l'autre des significations que je lui ai reconnues jusqu'ici, mais que sa valeur sera composée des deux premières.

Pour appliquer la théorie que je viens d'établir a un cas observé par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, je reprendrai la formule $\frac{t^2m^2+s^2n^2}{t^2}$ à laquelle j'ai trouvé que le son qui accompagne les figures nodales des plaques rectangulaires, devait être proportionnel. En fesant $s = 6$ et $t = 5, m = 4$ et $n = 1$ cette formule devient $\frac{16.25+36}{25} = \frac{4(109)}{25}$. En fesant toujours $s = 6$ et $m = 5$ mais prenant $m = 2$ et $n = 3$ on a par la même formule $\frac{4.25+9.36}{25} = \frac{4(106)}{25}$. L'intervalle entre les sons qui appartiennent à ces deux cas, est donc $\frac{109}{106}$ c'est-a-dire beaucoup moindre qu'un demi ton mineur et guere plus grand qu'un comma. La limite des erreurs possibles dans les experiences les mieux faites, et par conséquent aussi l'influence des causes physiques inappréciables, est donc plus grande que la distance entre les sons des deux cas dont j'ai parlé, et ces cas peuvent par conséquent produire des

figures résultantes de la somme des termes qui composent les valeurs de $\underline{z}$, convenables a chacun d'eux[3].

C'est ce que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni a observé (ν $\mathfrak{N}$°114 fig 157) et parce que l'une et l'autre valeur de $\underline{n}$ donne une ligne droite nodale parallèle au plus grand côté de la plaque et passant par le centre de la figure, cette ligne sera une veritable ligne invariable de repos et devra se trouver, comme elle se trouve en effet, dans toutes les figures qui appartiennent a la même forme de $\underline{z}$.

Dans le cas précédent les deux termes de $\underline{z}$ étoient donnés par une même equation périodique mais ils peuvent être produis également, comme je l'ai déjà dit, par des intégrales entièrement differentes entr'elles.
C'est ainsi, par exemple, que suivant la remarque de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni (ν $\mathfrak{N}$ 115), lorsque les côtés de la plaque sont entr'eux : : 5 : 4 les sons qui accompagnent les figures 5/0 et 1/4 sont les mêmes et que ces figurent montrent des variations que l'auteur a représentées par les fig 158. En effet en mettant $s = 5t = 4, m = 1$ et $n = 4$ dans la formule $\frac{t^2m^2+s^2n^2}{t^2}$, elle donne $\frac{16+25.16}{16} = 26$ pour le nombre auquel le son de 1/4 doit être proportionnel. D'après la théorie d'Euler, le nombre auquel le son de 5/0 est proportionnel est $\frac{81}{4}.\frac{25}{16}$, et par conséquent les sons qui appartiennent a l'un ou l'autre cas, doivent être entr'eux : : 2025 : 1664 c'est-a-dire à peu près : : 5 : 4. Le rapport précédent indique une différence de 2 tons environ entre les sons que l'on compare ; et en se rappelant que les vibrations tournantes sont toutes plus graves d'un intervalle qui a pour l'unite d'une part 1 ton et de l'autre 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton, que ne semble l'exiger leur comparaison avec les sons de la simple lame, on sentira que la réunion des termes qui conviennent à 5/0 et a 1/4 doit donner lieu à des figures compliquées par leur influence simultanée.

Ici le terme dû à 5/0 donneroit, s'il etait seul, 5 lignes nodales droites parallèles entr'elles et au plus grand côté de la plaque, de sorte qu'une de ces lignes passeroit par le milieu de la même plaque. Le terme périodique, s'il étoit seul, donneroit une figure composée de quatre lignes nodales droites parallèles au plus petit côté de la plaque et d'une seule ligne droite dans l'autre sens. Cette dernière ligne passeroit necessairement par le milieu de la même plaque et seroit par conséquent une véritable ligne invariable de repos. Les figures 158 montrent en effet l'existence de cette ligne qui dans la fig 158a reste seule droite, tandis que les quatre autres sont sinueuses par l'influence du terme périodique. $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni a donné aussi plusieurs figures qui répondent à des cas où le rapport entre les côtés des plaques ont été un peu altérés. Ainsi je ne m'arreterai pas à

3. A la vérité le son de 4/2 qui appartient au cas des vibrations tournantes, peut, comme on sait être plus grave que ne l'indique le nombre donné par la théorie, mais la différence entre 109 et 106 est dans ce sens puisqu'en effet le dernier nombre est < que le 1er

les considérer, parce que ne sachant pas dans quel sens ont été apréciés les altérations des dimensions, je ne puis aprécier leur influence.

Les cas 2/1 et 9/0 donnent lieu, sur la plaque dont les côtés sont entr'eux : : 2 : 1 aux fig 179 (ν n 120 du Traité d'acoustique), on pourra voir, comme dans le cas des fig 158, que les nombres auxquels les sons des deux termes séparés doivent etre proportionnels, different entr'eux de moins de 2 tons et $\frac{1}{2}$, limite dont cette difference approche, par exemple la figure qui appartiendroit à 2/1 ne présenteroit qu'un petit nombre de lignes nodales. On voit aisément que dans le cas présent il ne doit pas y avoir de lignes invariables de repos. Aussi les fig 179 n'ont elles aucune lignes nodales communes entr'elles.

A l'égard des fig 174, la largeur doit être comme l'observe $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, (ν n° 120) un peu plus grande que $\frac{1}{2}$ pour que les nombres auxquels les sons qui repondent aux cas 5/1 et 1/9 dont la combinaison explique ces figures, soient egaux entr'eux. Je n'entreprendrai pas de déterminer la mesure de l'altération et je me contenterai de faire observer que quelque soit le rapport des côtés, le cas 5/1 et celui de 1/9 donnent l'un et l'autre des figures nodales dans lesquelles deux lignes de repos parallèles à chacun des côtés de la plaque se croisent au centre de cette plaque, et que par conséquent les figures qui résultent de la combinaison de ces deux cas doivent présenter, comme elles présentent en effet, deux lignes nodales droites disposées comme je viens de le dire, et qui sont de véritables lignes invariables de repos.

Quoique je n'ai pas entrepris une explication détaillée des differentes figures dont je viens de parler, j'espere en avoir dit assez pour prouver que la théorie s'y applique parfaitement. Je vais à présent m'occuper de la comparaison des sons que rendent différentes plaques rectangulaires. J'exclurai les sons qui appartiennent aux vibrations tournantes, parce que, comme je l'ai souvent répété, ces cas présentent des différences considérables dans leur comparaison tant entr'eux qu'avec ceux où il y a plusieurs périodes complettes dans l'un et l'autre sens.

Dans ces comparaisons, je prendrai pour premier terme le son qui accompagne la fig 68 auquel j'ai également comparé les différens sons qui accompagnent les autres figures qui se montrent sur la plaque quarrée ; je suivrai aussi, comme je l'ai fait alors, l'indication de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni d'après laquelle je regarderai les figures comme equivalentes au système de lignes droites parallèles a chacun des axes, et, parce qu'il ne s'agit ici que de cas compris dans les intégrales périodiques, les nombres auxquels les sons seront proportionnels seront donnés par la formule $\frac{t^2m^2+s^2n^2}{t^2}$.

$\mathfrak{N}$°19 Comparaison des sons. Lorsque les longueurs des côtés de la plaque sont entr'elles : : 9 : 8 la formule qui donnent les nombres auxquels les sons sont proportionnels devient $\frac{64m^2+81n^2}{64}$ on trouvera donc en notant, avec $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, par n/m la figure qui seroit composée de $\underline{n}$ lignes transversales et de $\underline{m}$ lignes longitudinales

que le son de 2/2 doit être proportionnel au nombre $\frac{4.64+4.81}{64} = \frac{145}{16}$

2/3 ..... $\frac{4.64+9.81}{64} = \frac{985}{64}$

2/4 ..... $\frac{4.64+16.81}{64} = \frac{97}{4}$

2/5 ..... $\frac{4.64+25.81}{64} = \frac{2281}{64}$

3/2 ..... $\frac{9.64+4.81}{64} = \frac{225}{16}$

3/3 ..... $\frac{9.64+9.81}{64} = \frac{1305}{64}$

3/4 ..... $\frac{9.64+16.81}{64} = \frac{117}{4}$

3/5 ..... $\frac{9.64+25.81}{64} = \frac{2601}{64}$

4/2 ..... $\frac{16.64+4.81}{64} = \frac{337}{16}$

4/3 ..... $\frac{16.64+9.81}{64} = \frac{1753}{64}$

4/4 ..... $\frac{16.64+16.81}{64} = \frac{145}{4}$

4/5 ..... $\frac{16.64+25.81}{64} = \frac{3049}{64}$

5/2 ..... $\frac{25.64+4.81}{64} = \frac{481}{16}$

5/3 ..... $\frac{25.64+9.81}{64} = \frac{2329}{64}$

5/4 ..... $\frac{25.64+16.81}{64} = \frac{181}{4}$

5/5 ..... $\frac{25.64+25.81}{64} = \frac{3625}{64}$

6/2 ..... $\frac{36.64+4.81}{64} = \frac{657}{16}$

6/3 ..... $\frac{36.64+9.81}{64} = \frac{3033}{64}$

ainsi, en se rappelant que le son qui accompagne la fig 68 doit, suivant la théorie, être proportionnel au nombre 8, on trouvera que la différence entre les sons qui repondent à la fig 68 est à 2/2 doit être exprimée par $\frac{345}{328}$

fig 68 est à 2/3 ..... $\frac{984}{512}$

fig 68 est à 2/4 ..... $\frac{97}{32}$

fig 68 est à 2/5 ..... $\frac{2281}{512}$

fig 68 est à 3/2 ..... $\frac{225}{128}$

fig 68 est à 3/3 ..... $\frac{1305}{512}$

fig 68 est à 3/4 ..... $\frac{117}{32}$

fig 68 est à 3/5 ..... $\frac{2601}{512}$

fig 68 est à 4/2 ..... $\frac{337}{128}$

fig 68 est à 4/3 ..... $\frac{1759}{512}$

fig 68 est à 4/4 ..... $\frac{145}{32}$

fig 68 est à 4/5 ..... $\frac{3049}{512}$

fig 68 est à 5/2 ..... $\frac{481}{128}$
fig 68 est à 5/3 ..... $\frac{2329}{512}$
fig 68 est à 5/4 ..... $\frac{181}{32}$
fig 68 est à 5/5 ..... $\frac{3625}{512}$
fig 68 est à 6/2 ..... $\frac{657}{128}$
fig 68 est à 6/3 ..... $\frac{3033}{512}$

Avant de comparer les résultats que je viens de trouver à ceux de l'experience, il faut observer que, suivant la remarque de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni (ν T. d'acoustique p.161), les sons qui repondent aux mouvemens de la simple lame, sont plus aigus, sur la plaque dont les longueurs des côtés sont entr'elles : : 9 : 8, environ d'un demi ton que sur la plaque quarrée. Cette différence, à la verité, n'est pas grande, et considérée dans un petit nombre de cas, elle pourroit être négligée, mais sa constance la rend remarquable : car toutes les plaques rectangulaires soumises à l'experience presentent le même phénomène (ν les tables données par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni). Pour l'expliquer, il me semble naturel de croire que quelque circonstance physique inapréciable a donné pour la plaque quarrée des sons qui sont tous plus graves d'environ un demi ton que si on avoit employé le même verre dont on a taillé les plaques rectangulaires. Cette conjecture est d'autant plus plausible qu'il suffit que l'auteur se soit occupé à des époques differentes de ses experiences sur les plaques quarrées et sur les plaques rectangulaires, pour qu'il n'ait pu se procurer du verre exactement de la même nature.

Conformement à l'observation que je viens de faire, au lieu de prendre pour le son qui accompagne la fig 68 si^{b}3 − aigu que donne la table p.152, je prendrai au contraire si^{b}3 + aigu.

La table p.160 de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni donne pour le son de 2/2 ..... ut 4
2/3 ..... la 4+aigu
2/4 ..... fa 5
2/5 ..... ut 6
3/2 ..... sol$^{\sharp}$4+aigu
3/3 ..... re$^{\sharp}$5+aigu
3/4 ..... la 5+aigu
3/5 ..... re$^{\sharp}$6
4/2 ..... re$^{\sharp}$5+aigu
4/3 ..... sol$^{\sharp}$...la 5
4/4 ..... sol$^{\sharp}$...re 6
pour le son de 4/5 ..... fa $^{\sharp}$6
5/2 ..... si^{b}5

5/3 ..... ut$^\sharp$4 re 6
5/4 ..... fa 6
5/5 ..... si^{b}6
6/2 ..... mi 6
6/3 ..... fa$^\sharp$6

En attribuant donc si^{b}3 + aigu a la fig 68, la difference entre ce son et celui de 2/2 sera moindre qu'un ton majeur. Au contraire le rapport donné par la théorie savoir $\frac{145}{128}$ est > que $\frac{9}{8}$, mais d'une quantité inapréciable puisque l'on a d'une part 145 et de l'autre 144.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 2/3 est 5 tons et $\frac{1}{2}$ ton. Elle est donc exprimée par $\frac{15}{8}$. Le rapport donné par la théorie savoir $\frac{987}{512}$ diffère très peu de celui là puisque l'on trouve en multipliant par 512 d'une part 960 et de l'autre 987.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 2/4 est un peu moindre qu'un octave 3 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-a-dire < que 3. Au contraire le rapport $\frac{97}{32}$ donné par la théorie est > que 3 mais d'une quantité inapréciable à l'oreille puisque l'on a d'une part 97 et de l'autre 96.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 2/5 est un peu moindre que deux octaves et 1 ton, c'est-a-dire < que $\frac{9}{2}$. En effet le rapport $\frac{2281}{512}$ donné par la théorie est < que $\frac{9}{2}$ de moins d'un demi ton, car on trouve d'une part 2281 et de l'autre 2304.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 3/2 est environ 5 tons ; elle est donc exprimée par $\frac{16}{9}$. En effet le rapport $\frac{225}{128}$ donné par la théorie ne differe de $\frac{16}{9}$ d'une quantité insensible a l'oreille, puisque l'on trouve d'une part 2025 et de l'autre 2048.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 3/4 est environ 1 octave 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-à-dire qu'elle est exprimée par $\frac{8}{3}$. Le rapport $\frac{1305}{512}$ donné par la théorie est < que $\frac{8}{3}$; mais la différence entre ces deux rapports est bien moindre qu'un demi ton mineur, car on a $\frac{3905}{8512}$ < que $\frac{25}{24}$, $\frac{783}{512}$ < que $\frac{5}{3}$, 2349 < que 2560.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 3/4 est environ 1 octaves 5 tons et $\frac{1}{2}$ ton, elle est donc exprimée par $\frac{15}{4}$. Le rapport $\frac{117}{32}$ donné par la théorie diffère très peu de $\frac{15}{4}$;car $\frac{120}{117}$ n'est guère plus grand que le comma.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 3/5 est un peu moindre que 2 octaves 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-à-dire < que $\frac{16}{3}$. Le rapport donné par la théorie, savoir $\frac{2609}{512}$ est en effet > que $\frac{16}{3}$, et la difference entre ces deux rapports qui est exprimée par $\frac{8192}{7803}$ est environ $\frac{1}{2}$ ton.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 4/2 est, environ, 1 octave 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton ; elle peut donc être exprimée par $\frac{8}{3}$. Le rapport $\frac{337}{128}$ donné par la théorie differe en effet très peu de $\frac{8}{3}$; car on trouve d'une part 1011 et de l'autre 1024.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 4/3 est, en prenant un résultat moyen entre les deux notes qui appartiennent a ce cas, environ 1 octave et 5 tons, c'est-à-dire qu'elle peut être exprimée par $\frac{32}{9}$. le rapport $\frac{1753}{512}$ donné par la théorie diffère de $\frac{32}{9}$ d'un peu plus d'un demi ton, car on trouve d'une part 15777 et de l'autre 16384. Cette différence qui est dans la limite de la variation de l'experience, seroit comme on voit presque nulle, si au lieu de prendre un résultat moyen entre les deux sons on choisisois celui qui s'accorde le mieux avec l'experience.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 4/4, est, en prenant la note la plus basse qui est la plus favorable à la théorie, 2 octaves 1 ton et près d'un demi ton. Le rapport $\frac{145}{32}$ donné par la théorie n'est que de fort peu $>$ que $\frac{9}{2}$ qui exprime un intervalle de 2 octaves et 1 ton ; car on a d'une part 145 et de l'autre 144. Ainsi le rapport $\frac{145}{32}$ est un peu $<$ que ne le veut l'experience ; mais la différence est beaucoup moindre qu'un demi ton, en prenant toutefois la note la plus convenable.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 4/5, est moins de 2 octaves et 4 tons, c'est-à-dire $<$ que $\frac{32}{5}$. En effet le rapport $\frac{3049}{512}$, donné par la théorie est $<$ que $\frac{32}{5}$; car on trouve d'une part 15245 et de l'autre 16384 ; en sorte que les deux rapports diffèrent d'un peu plus d'un demi ton.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 5/2, est un peu moins de 2 octaves, par conséquent $<$ que 4. Le rapport $\frac{481}{128}$, donné par la théorie est effectivement $<$ que 4 ; car on trouve d'une part 481 et de l'autre 512. La différence entre les deux rapports est donc environ un demi ton.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 5/3, est, en prenant la note la plus basse, 2 octaves 1 ton et près d'un demi ton. Le rapport $\frac{2329}{512}$, donné par la théorie diffère à peine de $\frac{9}{2}$ qui exprime un intervalle de 2 octaves et 1 ton ; car on a d'une part 2329 et de l'autre 2304 ; en sorte que la difference entre la théorie et l'experience, est, en prenant a la vérité la note la plus convenable, $<$ que $\frac{1}{2}$ ton.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 5/4, est un peu moins de deux octaves 3 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-à-dire $<$ que 6. En effet le rapport $\frac{181}{32}$, donné par la théorie est $<$ que 6, et la différence de ces deux nombres savoir $\frac{192}{181}$ est environ un demi ton.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 5/5, est un peu moindre que 3 octaves intervalle exprimé par 8. Le rapport $\frac{3625}{512}$ est à la vérité $<$ que 8, mais l'excès d'un de ces nombres sur l'autre étant de près d'un ton mineur, puisque l'on a d'une part 3625 et que l'on trouve de l'autre 4096, il y a ici plus d'un demi ton de différence entre la théorie et l'experience.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 6/2, est un peu moindre que 2 octaves et 3 tons, c'est-à-dire $<$ que $\frac{50}{9}$. En effet le rapport $\frac{657}{128}$, donné par l'experience est $<$

que $\frac{50}{9}$; car on trouve d'une part 5913 et de l'autre 6400. L'intervalle entre ces deux rapports est environ un demi ton.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 6/3, est un peu moindre que 2 octaves et 4 tons, c'est-à-dire < que $\frac{32}{5}$. Le rapport $\frac{3033}{512}$, donné par la théorie est effectivement < que $\frac{32}{5}$; et ces deux rapports indiquent une distance d'environ $\frac{1}{2}$ ton, car on trouve d'une part 15165 et 16384 de l'autre.

Je ne crois pas que l'on puisse esperer plus d'accord entre une théorie et les faits auxquels elle s'applique, qu'il ne s'en trouve ici entre celle que je cherche à établir et les experiences de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni. On voit en effet que parmi les 18 comparaisons que j'ai calculées entre les sons de la plaque rectangulaire dont les côtés sont : : 9 : 8 et le son corrigé qui correspond a la fig 68, il ne se trouve qu'un seul cas où la différence entre les résultats de la théorie et ceux de l'experience excède un demi ton.

Il me semble inutile d'effectuer, par rapport aux autres plaques rectangulaires, des comparaisons semblables à celles j'ai faites pour la première de ces plaques, cependant, à cause de la simplicité du rapport, je m'occuperai aussi de celles dont les côtés sont entr'eux : : 2 : 1.

En fesant donc $s = 2, t = 1$, la formule qui donne les nombres auxquels les sons doivent être proportionnels est $n^2 + 4m^2$, de sorte que le son
de 2/2 doit être proportionnel au nombre $4 + 4.4 = 20$
2/3 ..... $4 + 4.9 = 40$
3/2 ..... $9 + 4.4 = 25$
3/3 ..... $9 + 4.9 = 45$
4/2 ..... $16 + 4.4 = 32$
4/3 ..... $16 + 4.9 = 52$
5/2 ..... $25 + 4.4 = 41$
5/3 ..... $25 + 4.9 = 61$

En se rappelant donc que le son qui accompagne la fig 68 doit être proportionnel au nombre 8, on trouvera que la différence des sons qui répondent a cette fig 68 et à 2/2 doit être exprimé par $\frac{5}{2}$

fig 68 et à 2/3 5
fig 68 et à 3/2 ..... $\frac{25}{8}$
fig 68 et à 3/3 ..... $\frac{45}{8}$
fig 68 et à 4/2 4
fig 68 et à 4/3 ..... $\frac{13}{2}$
fig 68 et à 5/2 ..... $\frac{41}{8}$

fig 68 et à 5/3 ..... $\frac{61}{8}$

La table p.168 du traité d'acoustique donne
pour le son de 2/2 ..... ut 5
3/2 ..... ut 6
3/2 ..... fa$^\sharp$ 5
3/3 ..... re$^\sharp$6
4/2 ..... si 5
4/3 ..... fa$^\sharp$ 5
son de 5/2 ..... re$^\sharp$ 6
5/3 ..... si^b 6

On voit que l'intervalle entre 2/2 et 2/3 est exactement le même du côté de la théorie que du côté de l'experience ; ainsi il suffira de comparer le son de 2/2 a si^{b}3 + aigu. La différence est 1 octave et un peu moins d'un ton. Le rapport $\frac{5}{2}$ est trop grand d'un peu plus d'un ton que l'experience ne le donne.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 3/2, est 1 octave et un peu moins de 4 tons, c'est-à-dire $<$ que $\frac{16}{5}$. Le rapport $\frac{25}{8}$, donné par la théorie, est en effet $<$ que $\frac{16}{5}$ exactement d'un comma.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 3/3, est un peu moindre que 2 octaves, 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton, par conséquent $<$ que $\frac{16}{3}$. Au contraire $\frac{45}{8}$ est $>$ que $\frac{16}{3}$; mais la difference entre ces deux rapports est plus petite qu'un demi ton majeur.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 4/2, est un peu plus grande que 2 octaves ; elle est donc à fort peu près exprimée par 4 qui est aussi le nombre indiqué par la théorie.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 4/3, est un peu moindre que 2 octaves et 4 tons, c'est-à-dire $<$ que $\frac{32}{5}$. Au contraire le rapport $\frac{13}{2}$ est $>$ que $\frac{32}{5}$, mais d'une quantité inapréciable a l'oreille.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 5/2, est un peu moindre que 2 octaves 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton, c'est-à-dire $<$ que $\frac{16}{3}$. En effet le rapport $\frac{41}{8}$ est un peu $<$ que $\frac{16}{3}$, car on a d'une part 128 et de l'autre 129.

La difference entre si^{b}3 + aigu et le son de 5/3, est un peu moindre que 3 octaves, c'est-a-dire $<$ que 8. En effet le rapport $\frac{61}{8}$ donné par la théorie est $<$ que 8 d'environ un demi ton ; car on a d'une part 61 et de l'autre 64.

On voit que, sur les 8 comparaisons auquel le cas présent donne lieu, il y en a six dont l'accord avec la théorie est entièrement satisfesant, puisque la difference entre le rapport qu'elle indique et l'intervalle donné par l'experience est au dessous d'un demi ton ; mais on voit en même tems qu'il y a deux cas où la difference atteint son maximum

puisqu'elle est même un peu plus grande qu'un ton, avant j'ai deja remarqué qu'une pareille difference, qui en effet est peu considérable, n'a pas empêché Mr Chladni de regarder les figures qui y correspondaient, comme équivalentes.

Parmi les figures qui se forment sur les differentes plaques rectangulaires, on sent aisément que celles qui resultent des seules équations périodiques, se montreroient également sur les surfaces tendues, en observant pourtant que s'il s'agissoit d'une plaque rectangulaire dont les côtés fussent libres, une partie de ces figures se trouveroit renversée sur la surface tendue, et qu'il n'y auroit de ressemblance parfaite qu'entre les figures de la même surface et celles qui se formeroient sur la plaque élastique appuyée de tout côté. Il est également clair, d'après l'ordre des équations differentielles qui conviennent à chacun de ces corps sonores, que, tandis que les sons de la surface tendue seront proportionnels à la suite des simples nombres qui leur conviennent respectivement, les sons de la plaque élastique seront proportionnels aux quarrés des mêmes nombres. Euler a remarqué un semblable rapport entre la simple lame appuyée à ses deux extrémités et la corde tendue.

J'aurois désiré faire quelques experiences sur les plaques élastiques dont un ou plusieurs côtés eussent été appuyés. Je n'ai pu atteindre le but que je me proposais ; mais les tentatives que j'ai faites à cet égard m'ont donné occasion d'observer et de montrer un phénomène à l'exposition duquel la classe me pardonnera peut être de m'arrêter un instant.

§ 6 Des effets de l'application d'un corps sonore aux côté d'une plaque rectangulaire élastique vibrante

$\mathfrak{N}$°20 Je cherchais à géner le mouvement d'une des lignes de limite d'une surface quarrée, en la serrant dans un morceau de bois auquel j'avois pratiqué une raînure destinée à recevoir un millimètre environ du côté de cette surface. J'espérois produire ainsi pour cette ligne de limite, les effets analytiques d'un simple appui. Si j'eusse atteint ce but, le son produit pour une même figure devait devenir plus aigu que sur la plaque entièrement libre. Bien loin delà, il arriva au contraire que le son étoit sensiblement plus grave que dans ce dernier cas. Je ne tardai pas a penser que j'avois compliqué l'effet que je voulois produire, d'un autre tout contraire et que c'était au poids de ma pièce de bois que je devois attribuer le singulier resultat de ma tentative.

Pour vérifier ce soupçon, j'ai employé de la cire verte collante que j'ai distribuée uniformément dans toute l'étendue d'un ou de plusieurs côtés de différentes plaques rectangulaires. J'ai réduit ainsi l'effet de la gène à affaiblir un peu le son, et a rendre par conséquent les figures nodales un peu moins nettes qu'elles ne l'eussent été sur une surface non chargée de cire. J'ai reconnu que les changemens produits par l'addition du poids de cette même cire, étoient entièrement équivalens à ceux que produiroit le prolongement effectif de la plaque vibrante, c'est-a-dire que le son étoit le même que si la plaque eut été réellement plus grande d'une portion capable de faire équilibre à la quantité de cire ajoutée. Les lignes nodales changent aussi de place conformément à ce prolongement fictif, de manière que la figure ne pouvoit être supposée la même que sur la plaque non chargée, qu'en ayant egard au prolongement fictif des lignes qui la composent, sur la portion dont l'addition de la cire tient lieu.

J'ai fait un grand nombre d'experiences qui donnent toutes le même résultat ; mais je me contenterai d'en rapporter un petit nombre, et je choisirai les plus aisées a répéter, parce qu'elles suffisent pour mettre le phénomène dans tout son jour.

Experiences

J'ai pris une plaque de verre quarrée dont le côté avoit un décimètre 6 millimètres, cette plaque pesait 1 once 18 grains ; et en prenant pour premier octave celui auquel appartient le la du diapason dont on se sert ordinairement pour accorder les instrumens, le son qui accompagne la figure composée de deux lignes nodales parallèles, l'une a l'axe des $\underline{x}$, l'autre a celui des $\underline{y}$, s'est trouvé très près de sol 1 mais un peu plus bas que cette note.

Après avoir collé à une des lignes d'extrémités de la même plaque, 1 once 2 gras de cire également distribuée sur tous les points de cette ligne, j'ai continué de tirer le son, comme avant l'addition de la cire, d'un des angles non chargé de la plaque. Le son s'est trouvé plus bas de plus d'un ton qu'avant cette addition car il était entre mi 1 et fa 1.

A l'égard de la figure, j'ai vu la ligne nodale parallèle au côté chargé se raprocher de ce côté, de sorte qu'en suivant cette indication, il falloit aussi remonter les doigts afin d'obtenir la figure aussi nette qu'elle peut se former. la ligne nodale parallèle au côté chargé s'est alors montrée à 45 millimètres de ce côté ; elle occupoit près de deux millimètres, parce que, comme on sait, les lignes nodales sont d'autant plus larges que

les sons sont plus faibles. Il y a toujours 1 millimètre, environ, d'engagé dans la cire ; ainsi il restait 58 millimètres entre la ligne nodale et l'extrémité opposée au côté chargé.

En laissant toujours mon premier côté chargé de cire, j'en ai ajouté une égale quantité, savoir 1 gras 2 grains, que j'ai collé dans toute l'étendue d'un second côté contigu au premier. Le son émis de l'angle libre s'est trouvé entre re et re$^\sharp$ 1.

La ligne nodale parallèle au second côté chargé s'est rapprochée de ce côté, de manière que l'intersection des deux lignes nodales s'est faite à environ 45 millimètres de l'un et l'autre côtés chargés.

En laissant encore mon premier côté chargé comme je l'ai expliqué plus haut, au lieu d'appliquer la seconde dose de cire à un des côtés contigu à ce premier côté, j'ai fait la même application au côté opposé à ce même premier côté. Le son s'est trouvé alors un peu plus grave que dans le cas précédent car il était exactement re 1.

La figure nodale est restée absolument la même que sur la plaque non chargée ; seulement les lignes nodales occupoient plus d'espaces, parce que le son étoit plus faible qu'avant l'addition de la cire.

Une précaution indispensable dans les experiences de ce genre est de laver souvent la plaque avec une liqueur spiritueuse, parce qu'à cause de la faiblesse des sons la moindre trace de cire empêcheroit les figures de se former.

Explication

Pour se rendre compte des résultats des experiences précédentes, il faut remarquer que le poids de la plaque non chargée étant 1 once 18 grains, 1 gras 2 grains que pèse chaque portion de cire ajoutée, est aussi exactement qu'il convient à l'experience, la huitième partie de ce poids, de sorte qu'en se rappelant que la longueur du côté de la même plaque est 106 millimètres, on trouve que chaque portion de cire ajoutée doit équivaloir à $\frac{106}{8}$ millimètres ou environ 13 millimètres, de prolongement du côté auquel l'application a été faite.

Cela posé, il est aisé de voir ce qui doit arriver dans chacun des cas que j'ai soumis a l'experience.

D'abord en fesant une seule addition, la plaque qui étoit de 106 millimètres quarrés, est fictivement transformée en une plaque rectangulaire dont les côtés sont entr'eux : :

106 : 119 à très peu près : : 8 : 9. Le son doit donc être proportionnel au nombre $\frac{9^2+8^2}{64} = \frac{145}{64}$ tandis que dans la plaque non chargée le son qui accompagne la même figure est proportionnel au nombre 2. Le rapport de ces deux sons sera exprimé par $\frac{145}{128}$ qui diffère a peine de $\frac{144}{128} = \frac{9}{8}$, c'est-a-dire d'un ton majeur. L'experience est ici parfaitement d'accord avec la théorie, en effet tandis que le son de la plaque non chargée est un peu plus bas que sol 1, celui de la plaque dont un des côtés est chargé est entre mi 1 et fa 1.

A l'égard de la figure, la ligne nodale parallèle au côté chargé, doit être à $\frac{119}{2} = 59+\frac{1}{2}$ millimètres du côté opposé, et a $59 + \frac{1}{2} - 13 = 46 + \frac{1}{2}$ millimètres du côté chargé. L'experience ne donne, a la vérité, que 58 millimètres pour une de ces distances et 45 pour l'autre ; mais il faut observer qu'il y a environ 3 millimètres d'occupés tant par la ligne nodale que par l'application de la cire.

En fesant une seconde addition au côté contigu au premier, la plaque, qui non chargée était de 106 millimètres quarrés est fictivement transformée en une plaque de 119 millimètres quarrés ; le rapport des sons de ces deux plaques est donc exprimé par $\frac{9^2}{8^2} = 2$ tons majeurs. En effet j'ai trouvé un de ces sons plus bas que <u>sol</u> 1 et l'autre entre <u>re</u> 1 et <u>re</u>$^\sharp$ 1.

Par la même raison que dans le cas précédent, chacune des lignes nodales doit être à $59 + \frac{1}{2}$ millimètres du côté chargé ; et l'experience y est conforme, en ayant toujours égard à l'espace occupé par ces lignes et par l'application de la cire.

Enfin, lorsque l'on fait l'addition à deux des côtés opposés, la plaque est fictivement augmentée de 13 millimètres à chacune de ses extrémités ; de sorte qu'elle est transformée en une plaque rectangulaire dont les côtés sont entr'eux à fort peu près : : 10 : 8.

Ainsi le son doit être proportionnel au nombre $\frac{10^2+8^2}{8^2} = \frac{41}{16}$ et la différence de ce son à celui de la plaque non chargée est exprimée par $\frac{41}{32}$, c'est-à-dire qu'elle est un peu $>$ que 2 tons majeurs. L'experience donne en effet de re 1 a sol 1 $-$ aigu plus de 2 tons majeurs.
Dans le cas présent l'addition se fesant de part et d'autre d'une des lignes nodales celle-ci ne doit pas se déplacer ; et c'est aussi ce que montre l'experience.

Une chose fort remarquable dans le phénomène dont je viens de rendre compte, est qu'au moyen d'un poids ajouté, on peut obtenir d'une partie très petite comprise entre le côté chargé et la ligne nodale parallèle la plus voisine de ce côté, le même son que rend en même tems une partie beaucoup plus grande prise sur la même plaque et comprise entre deux lignes egalement parallèles au côté chargé.

Ainsi, par exemple, j'ai pris une lame de verre longue de 20 centimètres et large de 23 millimètres. Cette lame pésoit 4 gras 12 grains. La figure composée d'une seule ligne nodale suivant la longueur, et de 2 suivant la largeur, s'y est formée très régulièrement, c'est-à-dire que l'espace entre les deux lignes transversales, étoit exactement double à celui entre l'une de ces lignes et l'extrémité la plus voisine.
Après avoir ajouté 1 gras 3 grains à une des lignes d'extrémité de la même lame, la ligne nodale la plus voisine parallèle au côté chargé s'est formée à 12 millimètres de ce côté, et la seconde ligne parallèle, a 121 millimètres de la première. Il restoit 6 millimètres environ entre cette seconde ligne transversale et l'extrémité opposée au côté chargé, de sorte qu'a peu près 6 millimètres étoient occupés par la cire, la première ligne transversale et par la seconde des mêmes lignes bien plus large que la première a cause de l'accumulation de la poussière autour du point d'application des doigts.

Je ne m'arreterai pas a l'explication de cette experience, je veux seulement faire remarquer que, dans le cas présent, 12 millimètres pris entre le côté chargé et la ligne parallèle la plus voisine, donnent le même son que les 121 millimètres compris entre les deux lignes transversales, et que pourtant un de ces espaces est dix fois plus étendu que l'autre.

J'ai reconnu qu'en général, on peut toujours, en employant l'addition d'une matière non élastique, tirer d'une portion aussi petite que l'on voudra d'une plaque élastique, le même son que d'une autre portion de longueur donnée, prise sur la même plaque.

L'explication physique de ce phénomène me paraît facile ; en effet on conçoit qu'en fesant abstraction de la gêne qui nuit à l'intensité du son, les différens points de la plaque vibrante doivent être soumis absolument aux mêmes conditions, soit que le prolongement de cette plaque soit effectif, soit que l'addition d'une matière pesante et capable de faire équilibre à la portion dont la plaque devroit être prolongée, tienne lieu de cette prolongation. Si ces deux cas doivent être considérer comme entièrement équivalens, on peut concevoir la substitution de la matière non élastique à la portion de surface élastique qu'elle remplace comme effectuée à une distance quelconque de la ligne nodale ; de sorte que, comme je l'ai dit plus haut, une partie aussi petite que l'on voudra soit équivalente a une autre partie prise sur la même surface et d'une étendue donnée.

L'analyse montre également que l'addition de la cire peut être faite à une distance quelconque de l'origine. En effet, si on se rappelle que les termes qui doivent être nuls aux limites de la surface, sont tous les deux multipliés par un facteur dependant de la rigidité naturelle de la matière supposée elastique, on concevra que tout point dans

lequel ce facteur sera nul, satisfera aux conditions des extrémités, indépendamment des valeurs des coordonnées de la surface, c'est-à dire que cette surface pourra se terminer alors partout ou on voudra.

Les applications que j'ai faites jusqu'ici, ne regardent généralement que les plaques rectangulaires, ou, si elles comprennent aussi d'autres figures, ce n'est en quelque sorte qu'accidentellement et sous certaines conditions particulières, dépendantes de l'état des extrémités.

Il faudrait encore beaucoup de tems et de travail pour déterminer également les manières de vibrer dont sont susceptibles des plaques de formes plus compliquées. Je ne prétends pas épuiser une matière si abondante, cependant, avant de terminer ce mémoire, je vais encore présenter quelques recherches relatives au cas des plaques circulaires.

§ 7 Recherche d'une intégrale particulière immédiatement applicable au cas de la plaque elastique circulaire

$\mathfrak{N}$°21 Il faut commencer par transformer l'équation differentielle des surfaces élastiques vibrantes. En prenant donc le plan des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ parallèle au plan de la plaque au repos, designant par $\underline{r}$ le rayon du cercle et par $\underline{\varphi}$ l'angle qu'un rayon passant par le point auquel appartiennent les coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$ fait avec un des axes, on pourra toujours faire $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ et a cause de $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \frac{dr}{dx} = \cos\varphi, \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos\varphi}{r}, \frac{dr}{dy} = \sin\varphi$ on trouvera :

$$\frac{dz}{dx} = \cos\varphi\frac{dz}{dr} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{dz}{d\varphi}$$

$$\frac{dz}{dy} = \sin\varphi\frac{dz}{dr} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{dz}{d\varphi}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{dz}{dr} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{rr}\frac{dz}{d\varphi} + \cos^2\varphi\frac{ddz}{dr^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{ddz}{drd\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{ddz}{d\varphi^2}$$

$$\frac{ddz}{dy^2} = \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{dz}{dr} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{rr}\frac{dz}{d\varphi} + \sin^2\varphi\frac{ddz}{dr^2} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{ddz}{drd\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{ddz}{d\varphi^2}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = \frac{1}{r}\frac{dz}{dr} + \frac{ddz}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{ddz}{d\varphi^2}$$

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx} = -\frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{dz}{dr} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{ddz}{dr^2} - \frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{ddz}{drd\varphi} + \cos\varphi\frac{d^3z}{dr^3}$$
$$-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{d^3z}{dr^2d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{d^3z}{drd\varphi^2} - \frac{\sin\varphi}{r^3}\frac{d^3z}{d\varphi^3} - \frac{2\cos\varphi}{r^3}\frac{ddz}{d\varphi^2}$$

$$\frac{dd\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dx^2} = -\left(\frac{\sin^2\varphi}{r^3} - \frac{2\cos^2\varphi}{r^3}\right)\frac{dz}{dr} + \left(\frac{\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{2\cos^2\varphi}{r^2}\right)\frac{ddz}{dr^2} + \frac{4\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\frac{ddz}{drd\varphi}$$
$$+\left(\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\right)\frac{d^3z}{dr^3} - \left(\frac{2\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{6\cos^2\varphi}{r^2}\right)\frac{ddz}{d\varphi^2} + \frac{6\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{d^3z}{d\varphi^3}$$
$$+\left(\frac{2\sin^2\varphi}{r^3} - \frac{4\cos^2\varphi}{r^3}\right)\frac{d^3z}{d\varphi^2dr} + \cos^2\varphi\frac{d^4z}{dr^4} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{d^4z}{dr^3d\varphi}$$
$$+\left(\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right)\frac{d^4z}{d\varphi^2dr^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\frac{d^4z}{d\varphi^3dr} + \frac{\sin^{2\varphi}}{r^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}$$

$$\frac{d\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy} = -\frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{dz}{dr} + \frac{\sin\varphi}{r}\frac{ddz}{dr^2} + \frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{ddz}{drd\varphi} + \sin\varphi\frac{d^3z}{dr^3}$$
$$+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{d^3z}{dr^2d\varphi} + \frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{d^3z}{drd\varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{r^3}\frac{d^3z}{d\varphi^3} - \frac{2\sin\varphi}{r^3}\frac{ddz}{d\varphi^2}$$

$$\frac{dd\left(\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2}\right)}{dy^2} = \left(\frac{\cos^2\varphi}{r^3} - \frac{2\sin^2\varphi}{r^3}\right)\frac{dz}{dr} + \left(\frac{\cos^2\varphi}{r^2} - \frac{2\sin^2\varphi}{r^2}\right)\frac{ddz}{dr^2} - \frac{4\cos\varphi\sin\varphi}{r^3}\frac{ddz}{drd\varphi}$$
$$+\left(\frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\right)\frac{d^3z}{dr^3} - \left(\frac{2\cos^2\varphi}{r^2} - \frac{6\sin^2\varphi}{r^2}\right)\frac{ddz}{d\varphi^2} - \frac{6\sin\varphi\cos\varphi}{r^4}\frac{ddz}{d\varphi^2}$$
$$+\left(\frac{2\cos^2\varphi}{r^3} - \frac{4\sin^2\varphi}{r^3}\right)\frac{d^3z}{d\varphi^2dr} + \sin^2\varphi\frac{d^4z}{dr^4} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{d^4z}{dr^3d\varphi}$$

$$+\left(\frac{\sin^2\varphi}{r^2}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right)\frac{d^4z}{d\varphi^2dr^2}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\frac{d^4z}{d\varphi^2dr^2}+\frac{\cos^{2\varphi}}{r^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}+2\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}=\frac{1}{r^3}\frac{dz}{dr}-\frac{1}{r^2}\frac{ddz}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d^3z}{dr^3}+\frac{4}{r^4}\frac{ddz}{d\varphi^2}$$

$$-\frac{2}{r^3}\frac{d^3z}{d\varphi^2dr}+\frac{d^4z}{dr^4}+\frac{2}{r^2}\frac{d^4z}{dr^2d\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}$$

En fesant donc $Kb\Gamma^2=\frac{e^4}{n^4}$ l'équation differentielle (B) (ν n°2) sera de la forme

$$\frac{n^4}{e^4}z=...\left(\frac{1}{r^3}\frac{dz}{dr}-\frac{1}{r^2}\frac{ddz}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d^3z}{dr^3}+\frac{d^4z}{dr^4}-\frac{2}{r^3}\frac{d^3z}{d\varphi^2dr}+\frac{2}{r^2}\frac{d^4z}{dr^2d\varphi^2}+\frac{4}{r^4}\frac{ddz}{d\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}\right)$$

Cette équation ne contient que des differentielles partielles d'un ordre pair de l'angle φ, ainsi on peut faire $z=...u\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})$, u étant une fonction de $\underline{r}$ seul.

Si, après avoir substitué cette valeur de $\underline{z}$ dans l'équation précédente, on la divise par $\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})$, elle deviendra :

$$\frac{n^4}{e^4}u=\frac{1+2\beta\beta}{r^3}\frac{du}{dr}-\frac{1+2\beta\beta}{r^2}\frac{ddu}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d^3u}{dr^3}+\frac{d^4u}{dr^4}-\frac{4\beta\beta u}{r^4}+\frac{\beta^4u}{r^4}.....(B')$$

A présent on peut représenter par s une série formée des puissances ascendantes de $\underline{r}$ et supposer $u=r^\beta s$, cette supposition donnera

$$\frac{du}{dr}=\beta r^{\beta-1}s+r^\beta\frac{ds}{dr}$$

$$\frac{ddu}{dr^2}=\beta(\beta-1)r^{\beta-2}s+2\beta r^{\beta-1}\frac{ds}{dr}+r^\beta\frac{dds}{dr^2}$$

$$\frac{d^3u}{dr^3}=\beta(\beta-1)(\beta-2)r^{\beta-3}s+3\beta(\beta-1)r^{\beta-2}\frac{ds}{dr}+3\beta r^{\beta-1}\frac{dds}{dr^2}+r^\beta\frac{d^3s}{dr^3}$$

$$\frac{d^4u}{dr^4}=\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)r^{\beta-4}s+4\beta(\beta-1)(\beta-2)r^{\beta-3}\frac{ds}{dr}$$

$$+6\beta(\beta-1)r^{\beta-2}\frac{dds}{dr^2}+4\beta r^{\beta-1}\frac{d^3s}{dr^3}+\frac{d^4s}{dr^4}$$

Après avoir substitué ces differentes valeurs dans l'équation (B'), avoir pratiqué les réductions convenables et divisé par r^β on aura enfin l'équation

$$\frac{n^4}{e^4}s = \frac{d^4s}{dr^4} + (1+2\beta)\left\{\frac{2}{r}.\frac{d^3s}{dr^3} + (2\beta-1)\left(\frac{1}{r^2}.\frac{dds}{dr^2} - \frac{1}{r^3}\frac{ds}{dr}\right)\right\} .....(B'')$$

La valeur la plus générale que l'on puisse attribuer à s, est

$$s = \vartheta + \mathcal{B}r + \mathcal{C}r^2 + \mathcal{D}r^3 + \infty$$

car si on prenait

$$s = \sin\frac{n}{e}r(a + br + cr^2 + dr^3 + er^4 + \infty) + \cos\frac{n}{e}r(A + Br + Cr^2 + Dr^3 + Er^4 + \infty)$$

le developpement des valeurs de $\sin\frac{n}{e}r$ et $\cos\frac{n}{e}r$ en série rameneroit à la première forme attribué à s.

Pour déterminer les coëfficiens des differentes puissances de $\underline{r}$ dans le développement de la valeur de s, il faudra, après avoir substitué aux differentielles de s leurs valeurs en $\underline{r}$, égaler à zéro la somme de chacun des coëfficiens des différentes puissances de $\underline{r}$ dans l'équation (B''), on trouvera ainsi, en fesant $1 + 2\beta = n$,

$$s = \vartheta\left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \frac{\frac{n^6}{e^6}r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \frac{\frac{n^6}{e^6}r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \infty\right)$$

formule dans laquelle ϑ et ϑ' sont deux constantes arbitraires.

La valeur de z sera donc

$$z = ... \sin(\beta\varphi + \mathcal{B}) r^\beta \{\vartheta \left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2} r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4} r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \frac{\frac{n^6}{e^6} r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \infty\right)$$

$$+\vartheta' \left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2} r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4} r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \frac{\frac{n^6}{e^6} r^6}{2.4.6(n+1)(n+3)(n+5)} + \infty\right)\}$$

et on aura, après les réductions convenables :

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{ddz}{dy^2} = ... \frac{n^2}{e^2} r^\beta \sin(\beta\varphi + \mathcal{B}) \{\vartheta' \left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2} r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4} r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty\right)$$

$$-\vartheta \left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2} r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4} r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right))\}$$

Si on représente par z' et z'' les valeurs de $\underline{z}$ qui satisfont respectivement aux deux équations du second degré trouvées n° 2, ces valeurs seront ici

$$z' = r^\beta \vartheta \left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2} r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4} r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right)$$

$$z'' = r^\beta \vartheta' \left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2} r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4} r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty\right)$$

et les quatre couples d'équations donnés n° 9 comme devant appartenir aux points du contour savoir :
$z' - z'' = 0$ et $z' + z'' = 0$; $z' - z'' = 0$ et $\frac{dz'}{d\varphi} - \frac{dz''}{d\varphi} = 0$;
$z' + z'' = 0$ et $\frac{dz'}{d\varphi} + \frac{dz''}{d\varphi} = 0$;
$\frac{dz'}{d\varphi} - \frac{dz''}{d\varphi} = 0$ et $\frac{dz'}{d\varphi} + \frac{dz''}{d\varphi} = 0$;
deviendront après avoir été divisés par r^β, qui ne peut jamais être nul

$$\{\vartheta \left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2} r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4} r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right)$$

$$-\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

et

$$\{\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

$$\{\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$-\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

et

$$\{\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty)\right)$$

$$-\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\cos(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

$$\{\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

et

$$\{\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\cos(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

$$\{\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$-\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\cos(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

et

$$\{\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)\}\cos(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$$

le premier couple appartient aux points d'extrémités appuyés. On peut y satisfaire de plusieurs manières : et, d'abord, en fesant $\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})=0$, cette condition montre que lorsque $\mathcal{B}=0$, c'est-à-dire lorsque le plan des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ se confond avec celui de la plaque en repos, il y a 2β points de repos à la circonference. Il est clair que la condition dont il s'agit ici est entièrement indépendante de la valeur de $\underline{r}$, et que, par conséquent, les 2β points de repos de la circonference ne sont autre chose que les extrémités de β lignes d'appui diamétrales ; ces lignes satisferont donc dans toute leur étendue aux conditions des limites, et elles pourroient également exister sur les surfaces tendues.

Les surfaces circulaires qui sont comprises dans la présente intégrale jouissent, comme on voit, d'une sorte de périodicité relative aux valeurs de l'angle φ ; car la valeur de $\underline{z}$ donne alors, entre r et φ, l'équation $\frac{ddz}{dr^2}=\frac{ddz}{d\varphi^2}\frac{nn}{\beta\beta}$ de la forme de celle aux cordes vibrantes, et en effet les différens secteurs formés par les lignes nodales diamétrales peuvent être superposés, puisqu'ils sont parfaitement égaux entr'eux.

Lorsque $\beta=0$, c'est-à dire lorsqu'il n'y a pas de lignes nodales diamétrales, on ne peut faire $r=0$; car il resulteroit de cette superposition que la plaque ne pourroit se mouvoir. Le plan des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ ne peut donc se confondre alors avec celui de la plaque au repos.

On peut encore satisfaire au premier couple d'équations par la double supposition

$$\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$-\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)=0$$

et

$$\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)=0$$

qui se réduit à

$$\mathcal{A}\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)=0$$

et

$$\mathcal{A}'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)=0$$

Si on fait $\vartheta'=0$ et $1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty=0$ on aura le cas où la surface seroit appuyée dans tous les points de son contour ; son équation conviendroit également alors à la surface tendue de même forme ; et elle seroit en effet la même qu'Euler a donnée dans le tome X de Petersbourg (ν n° 13 du m <u>De motu vibratorio tympanorum</u>). Les figures nodales seroient par conséquent semblables sur les deux genres de surfaces ; et, conformement à l'ordre des équations differentielles qui leur appartiennent respectivement, les sons, qui pour l'une d'elles, seroient proportionnels aux valeurs de $\underline{u}$, suivroient pour l'autre la proportion des quarrés des mêmes valeurs.

$\mathfrak{N}$°22 Le second couple d'équations convient dans le cas où les points de contour sont libres en vertu des conditions $\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0$ et $\frac{d(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2})}{dx}=0$, ou, ce qui est la même chose $\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2}=0$ et $d(\frac{ddz}{dx^2}+\frac{ddz}{dy^2})=0$; on peut y satisfaire par la supposition

$$\vartheta\left(1-\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}-\infty\right)$$

$$-\vartheta'\left(1+\frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)}+\frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)}+\infty\right)=0$$

.

Lorsque les valeurs de ϑ et ϑ' seront données, en fesant dans cette équation $r=a$, c'est-à-dire $\underline{r}$ égal au rayon du cercle dont la circonference est à la limite de la

surface, elle pourra servir à déterminer les différentes valeurs de $\underline{n}$ qui correspondront aux mouvemens dont la plaque sera susceptible.

Quelles que soient les valeurs de $\underline{u}$ il est visible que

$$1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty \neq 0$$

et

$$1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty \neq 0$$

seront des quantités constantes ; on pourra donc toujours prendre

$$\vartheta = 1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty$$

et

$$\vartheta' = 1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty$$

Mais dans cette supposition les conditions des extrémités auront lieu d'elles mêmes, et ne pourront plus servir, par conséquent, à connaître les valeurs de $\underline{u}$ qui devront être données d'ailleurs. Le cas dont je viens de parler, sera celui où dans la plaque circulaire, on n'auroit pas égard à la variabilité du rayon ; ce cas est absolument analogue à celui où, dans les plaques rectangulaires, on ne regarde qu'une des deux coordonnées $\underline{x}$ et $\underline{y}$ comme variable.

En général, si pour une valeur quelconque de $\underline{u}$, on peut satisfaire à l'équation

$$\vartheta\left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty\right) = 0$$

il y aura autant de lignes nodales circulaires qu'il se trouvera de valeurs de $\underline{r}$ convenables à cette équation. Les lignes nodales circulaires seront de simples lignes de repos ; car la supposition d'une ligne circulaire d'appui entraîne la condition $\vartheta' = 0$ qui ne peut convenir qu'au seul cas où les points du contour sont eux mêmes appuyés.

Dans le cas présent des points de contour libres, il peut donc y avoir sur la plaque circulaire deux genres de lignes nodales, savoir les lignes nodales diamétrales qui seront

des lignes d'appui, et les lignes nodales circulaires qui seront de simples lignes de repos et ne satisferont pas aux conditions des extrémités.

Ces deux genres de lignes nodales peuvent exister ensemble ou séparément sur la plaque dont le contour est libre, ainsi les suppositions

$$\vartheta = 1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty$$

ou

$$\vartheta' = 1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty$$

appartiennent au cas où il n'y a pas de lignes nodales circulaires ; la supposition $\beta = 0$ à celui où il n'y a pas de lignes nodales diamétrales, et dans toute notre hypothèse il y aura à la fois sur la plaque circulaire vibrante, des lignes nodales diamétrales et des lignes nodales circulaires.

Le troisième couple d'équations conviendroit au cas où les points du contour seroient fixés, et on pourroit y satisfaire par la condition

$$\vartheta\left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty\right) = 0$$

Enfin le quatrième couple donne les deux conditions :

$$\vartheta\left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right)$$

$$-\vartheta'\left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty\right) = 0$$

$$\vartheta\left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty\right) = 0$$

ou celle-ci $\cos(\beta\varphi + \mathcal{B}) = 0$. Les premières ont déjà été examinées à l'occasion du premier couple d'équations. Quand à la seconde qui est entièrement indépendante des valeurs de $\underline{r}$, elle montre que lorsque la surface est périodique par rapport aux valeurs de l'angle $\underline{\varphi}$, chaque secteur formé par deux lignes d'appui consécutives, est partagé en deux autres secteurs égaux entr'eux par une ligne de limite analytique ; de sorte que l'on peut concevoir ces secteurs comme réellement séparés en deux autres surfaces de pareille figure qui auroient chacune un de leur côté appuyé, l'autre libre en vertu des conditions $\frac{dz}{d\varphi} = 0$ et $\frac{d^3z}{d\varphi^3} = 0$, et dont les sons seroient les mêmes que ceux de la plaque entière.

$\mathfrak{N}$°22 La difficulté de déterminer les valeurs de $\underline{u}$ m'empêche d'entreprendre d'appliquer l'intégrale donnée dans le n° précédent à l'experience ; mais sans s'occuper des sons qui accompagnent chaque figure nodale, on peut toujours remarquer que

les fig 104 et 109 de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni appartiennent au cas où β =0

105,110$\underline{\text{a}}$ et 116$\underline{\text{a}}$ ..... $\beta = 1$

99,106 et 111 ..... $\beta = 2$

100 et 107 ..... $\beta = 3$

101$\underline{\text{a}}$ et 108 ..... $\beta = 4$

enfin que la fig 102$\underline{\text{a}}$ ..... $\beta = 5$

Si dans l'équation differentielle

$$\frac{n^4}{e^4}z = ...\frac{1}{r^3}\frac{dz}{dr} - \frac{1}{r^2}\frac{ddz}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d^3z}{dr^3} + \frac{4}{r^4}\frac{ddz}{\varphi^2}$$

$$-\frac{2}{r^3}\frac{d^3z}{d\varphi^2 dr} + \frac{2}{r^2}\frac{d^4z}{d\varphi^2 dr^2} + \frac{d^4z}{dr^4} + \frac{1}{r^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}$$

on fait $r = a$, on doit trouver l'équation differentielle de la circonference de la plaque circulaire, ou, ce qui est la même chose, l'équation differentielle de l'anneau élastique. Il est clair que la supposition de r constant fera disparaître toutes les differentielles partielles relatives à $\underline{r}$, et aussi le terme $\frac{4}{r^4}\frac{ddz}{d\varphi^2}$ dans lequel des differentielles du même genre n'ont été effacées qu'à l'aide des substitutions (ν n° 21). Ainsi l'équation de l'anneau se réduira à

$$\frac{n^4}{e^4}z = ...\frac{1}{r^4}\frac{d^4z}{d\varphi^4}$$

dont l'intégrale sera

$$z = \mathcal{A}\sin(\beta\varphi + \mathcal{B})$$

$\mathcal{A}$ étant une constante arbitraire rien n'empêche de prendre

$$\mathcal{A} = a^{\beta}\{\vartheta\left(1 - \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} - \infty\right)$$

$$+\vartheta'\left(1 + \frac{\frac{n^2}{e^2}r^2}{2(n+1)} + \frac{\frac{n^4}{e^4}r^4}{2.4(n+1)(n+3)} + \infty\right)\}$$

et l'équation de l'anneau se présentera alors sous la forme d'un cas particulier de l'équation de la plaque circulaire.

Il est aisé de voir que les équations données par Euler à la fin de son mémoire sur la lame élastique ne different de celles que je viens de trouver, qu'en ce que les arcs remplacent dans mes formules les ordonnées auxquelles elles sont égales mais que cet illustre auteur a continué de désigner de la même manière que s'il s'agissoit encore d'une simple lame droite.

On voit donc que soit que l'on applique immédiatement à l'anneau l'analyse de la lame droite dont les deux extrémités sont appuyées, en se contentant, ainsi que l'a fait Euler, de considérer ces deux extrémités comme reunies en un seul point, soit que l'on cherche la même equation en employant les trois coordonnées qui doivent déterminer la courbure, on est toujours conduit a la même équation. Cette équation montre que les sons qui accompagnent chaque figure nodale, doivent être proportionnels aux quarrés des nombres 2, 4, 6, etc. Euler indique la suite des nombres 4, 9, 16, 25, etc, mais ce grand géomètre ne paroît pas avoir remarqué qu'il ne peut y avoir qu'un nombre pair de nœuds sur l'anneau élastique vibrant a la manière d'une lame droite appuyée a ses extrémités, et qu'un nombre pair de nœuds dans l'anneau équivaut à un nombre impair de nœuds dans la lame droite.

En traitant des conditions auxquelles sont assujettis les points du contour des plaques libres (ν n° 22), j'ai eu occasion de remarquer que dans le cas où il n'y avoit sur ces plaques que des lignes nodales diamétrales, la valeur de u restoit indéterminée. Rien n'empêche donc de faire $\frac{u}{e} = \beta$, et cette valeur conviendra en effet toutes les fois que l'on fera abstraction de la variabilité de $\underline{r}$; les sons seront alors proportionnels aux quarrés des différentes valeurs de β ; β indique, comme je l'ai déjà dit, le nombre des lignes diamétrales de la plaque, et par conséquent, 2β exprime celui des nœuds de l'anneau elastique correspondant.

𝔑°24 On peut voir p.118 du traité d'acoustique, que 𝔐r Chladni observe que la théorie de l'anneau donnée par Euler n'est pas confirmée par l'experience. En effet cet habile physicien a trouvé que les sons simples rendus par l'anneau partagé en 4, 6, 8, etc parties vibrantes, sont proportionnels aux quarrés des nombres 3, 5, 7, etc tandis que la théorie veut que les mêmes sons seroient proportionnels aux quarrés des nombres 4, 6, 8, etc. Cependant on ne peut guère douter que le cas soumis à l'experience ne soit veritablement celui qui repond au cas des deux extrémités appuyées dans la lame droite ; car un caractère particulier de cette manière de vibrer, est l'égalité parfaite des parties séparées par des points ou lignes d'appui ; et on peut voir n° 89 du traité d'acoustique, que l'auteur fait une remarque expresse de cette égalité.

Pour concilier des expériences sur l'exactitude desquelles on ne peut élever aucun doute, avec une théorie donnée par un des géomètres dont l'autorité a le plus de poids, il faut avoir recours à la considération de quelques circonstances qui n'entrent pas dans le calcul.

On peut voir section VI p.113 du traité d'acoustique, que plus la courbure d'une bande droite de fer représentée fig 37, étoit augmentée, plus aussi les sons baissoient par comparaison à ce qu'ils eussent été dans la même manière de vibrer de la bande droite ; et qu'en même tems les nœuds de vibration situés dans la partie infléchie, se rapprochoient de plus en plus.

Dans la fig 44 qui est celle a laquelle se rapporte les experiences fig 38, 39 ...45, la fourche, en donnant les mêmes sons qu'une lame droite dont les extrémités eussent été appuyées, présentoit toujours deux nœuds fort voisins, placés dans la portion courbe de la fourche ; et l'intervalle entre deux nœuds n'étoit constant que dans les parties entièrement droites des branches de la fourche.

Il est clair que la circonstance de la courbure considérée analytiquement ne peut rendre compte des faits observés par 𝔐r Chladni ; car, dans le calcul, on suppose toujours la rigidité naturelle constante dans toutes les parties du corps sonore ; et la courbure considérée en elle même ne pouvant altérer ce coëfficient, les formules doivent rester les mêmes, soit que le corps vibrant ait une forme rectiligne, soit que le même corps affecte toute autre forme. Et en effet, lorsqu'il s'agit des instrumens à vent, l'experience montre que la courbure n'influe pas sur les sons.

Il en est tout autrement dans les experiences de 𝔐r Chladni et on ne peut supposer qu'une bande de fer ait conservé sa rigidité naturelle, lorsqu'elle s'est trouvée ployée aux différentes formes que ce physicien lui a fait prendre. Le resultat des experiences que je me propose d'expliquer, montre que l'effet de la torsion a été de diminuer l'élasticité, et les deux circonstances observées, savoir l'abaissement des sons et le rapprochement des

nœuds, concourent egalement a prouver cette diminution. En effet, toutes choses égales d'ailleurs, le son est d'autant plus aigu que l'élasticité est plus grande ; aussi, lorsque tout est constant, excepté ce coëfficient, le son ne peut baisser sans que l'élasticité diminue. Si le son reste le même quoique l'élasticité diminue, lorsque le poids et l'épaisseur seront constants, il faudra que l'étendue de la partie vibrante soit diminuée. On peut conclure delà que si le changement d'élasticité n'a lieu que dans quelques points d'une lame élastique, il doit arriver à la fois deux choses, l'une que le son baisse, l'autre que les parties vibrantes séparées par des nœuds de vibration soient d'autant moins grandes que leur élasticité est plus diminuée, c'est-à-dire qu'elles se trouvent dans des portions de la fourche plus fortement inflechies, et rien n'est plus conforme en effet à ce que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni a observé dans les différens cas du mouvement des fourches.

Les mêmes principes peuvent servir à prévenir ce qui doit arriver lorsque la torsion, au lieu de se faire dans un espace circonscrit pris sur la bande élastique, a lieu uniformément dans toutes les parties de la même bande. Alors, il ne peut se manifester qu'un seul des deux effets qui se montrent dans le cas des fourches, car l'élasticité qui est proportionnelle a la courbure, est également constante dans l'étendue de la fourche lorsque la courbure est nulle, comme dans la bande droite, et lorsque sa courbure est uniforme, comme dans la bande ployée à la forme d'anneau circulaire. Mais l'élasticité, quoique constante dans tous les points de l'anneau, doit être diminuée par l'effet de la courbure. Ainsi l'anneau doit se partager en un certain nombre de parties égales entr'elles ; mais les sons correspondans doivent être plus graves que ceux de la bande ramenée à la forme rectiligne. La différence des sons donnés par l'anneau et par la bande droite, doit être proportionnelle à l'amplitude de l'arc terminé par deux points de repos consécutifs, parce que la courbure est d'autant moindre qu'il s'agit d'un arc plus petit.

Rien n'est encore plus conforme aux phénomènes rapportés par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni n° 89 de son traité d'acoustique ; car ce physicien a observé que les longueurs des parties vibrantes sont égales entr'elles ; et les nombres auxquels il a trouvé que les sons doivent être proportionnels sont à ceux indiqués par la théorie d'Euler : : $2\beta - 1 : 2\beta$. On voit donc que la difference, savoir $\frac{(2\beta)^2}{(2\beta-1)^2}$, finit par être insensible, lorsque β est très grand.

$\mathfrak{N}$°25 Quelque satisfesante que me paroisse la manière dont j'ai cru pouvoir concilier la théorie d'Euler et le résultat des experiences de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, l'importance d'une question dans laquelle il ne s'agit de rien moins que de décider si la courbure du corps sonore permet de lui appliquer encore l'analyse qui convient au cas où le même corps

est supposé rectiligne, m'a engagé à consulter moi même l'experience , mais en écartant la cause que je supposois avoir influé sur les faits observés par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni.

Avant d'entrer en matière, il faut observer que, si les effets de la courbure sont nuls, le cas de la courbe rentrante ne peut differer des cas dans lesquels la lame affecte toute autre forme qu'en ce que les deux extrémités reunies alors dans un seul et même point, sont nécessairement dans un état semblable.

On pourra donc regarder le point d'application des doigts sur la lame elastique circulaire, tantôt comme un point fixé où seront reunies les deux extrémités également fixées, tantôt comme un point d'appui où seront reunies les deux extrémités appuyées. Rien m'empêchera même, en cessant de prendre l'origine au point d'application, de considérer ce point comme un simple point de repos appartenant au cas des deux extrémités libres, extrémités qui pourront être censés reunies dans un des points mobiles de l'anneau.

Je ne puis dissimuler pourtant qu'Euler paroît être, à l'égard des effets de la courbure considérés dans l'anneau, d'une opinion toute contraire à celle que je viens d'exposer ; car ce grand géomètre, en prenant successivement $s = a, s = 2a, s = 3a$ etc arrive à conclure $u = 0, \beta = 0$, et $\delta = 0$, c'est-à-dire qu'il exclut tout autre cas que celui des extrémités appuyées (ν n°54 de son m. sur la lame).

Malgré le respect dû à l'autorité de ce savant auteur, je ne puis m'empêcher d'observer que les suppositions $s = a, s = 2a$ etc doivent être regardées comme purement mathématiques ; qu'exceptée la première, elles n'ont aucune existence réelle et physique, et qu'elles sont par conséquent étrangères a la question. S'il en étoit autrement, il faudroit qu'un anneau tel petit qu'on voulut le supposer, pût être équivalent à une lame droite d'une longueur infinie, c'est-à dire qu'il faudroit que l'intensité du son, qui, toutes choses égales d'ailleurs, dépend du nombre des parties vibrantes à la fois, fut égal de part et d'autre.

Je reviens aux experiences que j'ai tentées.

Dans la vue d'écarter l'influence physique de la courbure, et d'obtenir une élasticité constante dans tous les points de la lame, au lieu d'employer, comme l'a fait $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, une bande métallique susceptible de prendre différentes formes, j'ai fait tailler dans un morceau de verre bien choisi des lames de diverses courbures.

J'ai d'abord essayé les lames composées de deux branches droites réunies par une partie circulaire, j'ai reconnu que, dans ce cas, qui est celui des fourches, les points de repos étoient d'autant plus distants les uns des autres, qu'ils étoient plus voisin du milieu de la lame qui est en même tems le milieu de la partie courbe de cette lame.

La mesure doit être prise sur les parties extérieures de la courbe ; car, la largeur de la lame n'influant pas sur le son, il dépend uniquement de l'étendue de son contour extérieur ; cette observation s'applique a tous les cas suivans, ainsi elle sera toujours sous entendue.

Le résultat que j'ai obtenu est, comme voit, entièrement contraire à celui qu'ont donné les experiences de Mr Chladni. Les miennes font voir que la fourche d'une élasticité constante, vibre absolument de la même manière qu'une lame droite, et par conséquent c'est le cas des extrémités libres en vertu des conditions $\frac{ddz}{dx^2} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$ qui s'y montrent le plus aisément.

Au contraire, lorsque l'élasticité n'est pas la même dans tous les points de la lame, non seulement la distance entre les points d'appui varie en raison de ce coëfficient, mais encore, suivant l'observation de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, cette fourche vibre alors comme une lame dont les deux extrémités seroient appuyées, ou, ce qui revient au même, comme une lame dont les extrémités seroient libres en vertu des conditions $\frac{dz}{dx} = 0$ et $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$. Peut-être ce cas ne se montre-t-il sur la fourche soumise a l'experience par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, qu'a cause du grand nombre de points de limites auxquels il donne lieu, et qui, en mettant chaque partie qu'ils séparent dans la même position analytique que si elles étoient réellement isolées, permet de considérer l'élasticité comme uniforme dans chacune d'elles.

A l'égard du cas de l'anneau, j'ai fait également tailler des lames de verre de formes circulaires et de grandeurs variées. La première que j'ai essayée, étoit large de 9 millimètre environ, et son diamètre étoit de 83 millimètres. J'ai aisément obtenu trois figures différentes : la première présentoit trois points de repos inégalement espacés, et au nombre desquels étoit compris le point d'application des doigts. Le son qui accompagnoit cette figure étoit Si 1. La seconde figure étoit composée de quatre points de repos situés à égale distance, les uns des autres. Le son qui l'accompagnoit étoit mi 2. Enfin la troisième figure étoit formée de 6 points de repos pareillement situés à égale distance, les uns des autres, et le son correspondant étoit fa$^\sharp$ 3.

Il est aisé de voir que les deux dernières figures appartiennent au cas des extrémités appuyées ; car on les explique en fesant pour l'une $u = 4$, pour l'autre $u = 6$; et les sons qui doivent être alors entr'eux : : 16 : 36 donnent effectivement $\frac{9}{4}$, c'est-à-dire, 1 octave et 1 ton pour les intervalles, précisément comme l'indique l'experience.

A l'égard de la première figure, puisqu'elle présente un nombre impair de points de repos, et que ces points sont inégalement distans les uns des autres, elle ne peut appartenir au cas des extrémités appuyées. Le son qui l'accompagne annonce qu'elle doit être rapportée au cas des extrémités fixées. En effet, d'après la théorie d'Euler, le nombre auquel le son doit être proportionnel lorsqu'il y a deux points de repos dans la

lame droite dont les deux extrémités sont fixées, est $\frac{49}{4}$; $\frac{64}{49}$ doit donc exprimer l'intervalle entre les sons qui conviennent à ce cas et à celui de 3 points de repos dans la lame droite dont les extrémités sont appuyées ou de quatre points de repos dans l'anneau élastique ; or $\frac{64}{49}$ diffère à peine de $\frac{4}{3}$, c'est-à-dire de 2 tons et $\frac{1}{2}$ ton qui est en effet l'intervalle que donne l'experience puisqu'un de ces sons étant si 1, l'autre est mi 2.

Le petit nombre d'experiences que je viens de rapporter suffit pour prouver que, conformément à la doctrine d'Euler, la courbure n'influe pas sur les manières de vibrer dont une lame élastique est susceptible et que ce n'est qu'en la circonstance étrangère de la variation de l'élasticité, qu'il faut attribuer les différences que Mr Chladni a remarquées entre ses experiences et la théorie de cet illustre géomètre. Les mêmes experiences montrent aussi qu'Euler n'auroit pas dû déroger à son assertion générale sur la non influence de la courbure et que c'est à tort qu'il a exclu le cas des extrémités fixés de ceux qui peuvent appartenir à l'anneau.

Je n'ai pas vû de manière de vibrer que je puisse rapporter, dans l'anneau, au cas des extrémités libres, mais ce n'est pas là une raison suffisante de la rejetter ; car même en supposant qu'il refuse toujours de le montrer, il suffiroit pour l'exclure que des figures appartenant à d'autres cas, se formassent plus facilement, sans que pourtant le cas dont il s'agit fut analytiquement impossible.

Lorsque l'on n'a pas égard a la variation du rayon (ν n° 22 et 23), la plaque circulaire peut être considérée comme un simple anneau dont la largeur est mesurée par le rayon de la même plaque, et parce que les sons que peuvent rendre l'anneau sont indépendans de sa largeur [4], la plaque doit vibrer alors de la même manière que si elle étoit véritablement réduite aux proportions d'un simple anneau.

Pour vérifier cette théorie, j'ai fait tailler plusieurs lames circulaires dont le diamètre étoit toujours = 83 millimètres, mais dont la largeur étoit pour les uns 20 millimètres, et pour les autres 35 millimètres. J'ai aussi fait tailler des plaques circulaires de même diamètre que les anneaux, voici ce que j'ai observé :

Les lames larges de 20 millimètres ne m'ont pas donné le cas que j'avois obtenu avec les lames plus étroites et qui appartient aux extrémités fixées. Au reste elles ont donné aisément les deux figures qui sur les lames étroites se rapportent au cas des extrémités appuyées. L'une d'entr'elles a même donné le cas de deux nœuds, qui repond, comme on sait, à celui d'un seul nœud sur la lame droite. Ce dernier cas n'a pas été observé

4. bien entendre qu'il ne s'agit ici que des cas où l'anneau vibre comme une simple lame, car il es susceptible de mouvemens différens dans lesquels la largeur ne peut être négligée

par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni sur l'anneau métallique, et je ne l'ai moi même obtenu que d'une seule des lames circulaires.

Le son qui accompagnoit la formation des deux nœuds étoit près du sol plus bas de deux octaves que l'octave 1. Le son de la figure qui sur la même lame, se composoit de deux nœuds étoit sol$\sharp$ 1, enfin le son qui repondoit a la figure formée de six nœuds étoit si 3. On voit que, si les sons ne sont pas rigoureusement conformes à la théorie, ils ne s'en éloignent pourtant pas d'une quantité plus grande que celle qui peut être attribuée aux causes physiques inappréciables, et qu'il est permis par conséquent de regarder les mouvemens de la lame circulaire large de 20 millimètres comme parfaitement semblables a ceux d'une lame circulaire plus étroite.

Par un hasard heureux, j'ai obtenu absolument les mêmes sons et les mêmes figures d'une plaque circulaire et d'un anneau de même diamètre que la plaque qui ne differoit d'elle, que par un espace circulaire vide, de 11 millimètres de diamètre. L'une des figures étoit composée de quatre nœuds ou lignes diamétrales, l'autre montroit six semblables nœuds ou lignes. Le son étoit ut$^{\sharp}$2 dans le premier cas ; dans le second le son était mi.3.

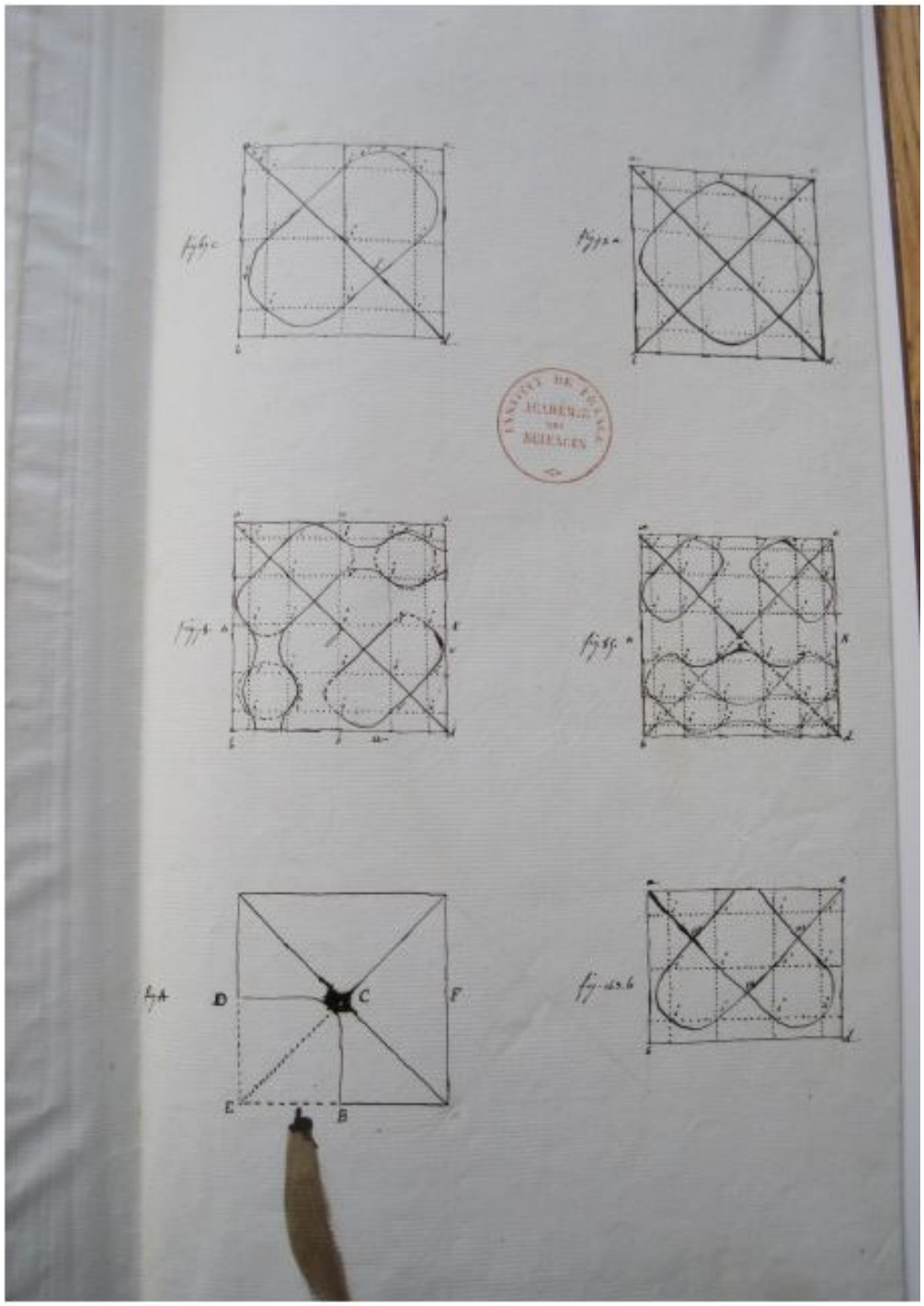
Les sons présentent, comme on voit, un intervalle plus grand d'un demi ton que ne l'indique la théorie, mais dans d'autres experiences l'intervalle s'est trouvé juste, et quelque fois aussi trop grand d'un ton, ainsi il doit être considéré comme suffisamment exacte, et on ne peut douter que l'équation $z = ...\mathcal{A}\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})$ qui est celle de l'anneau équivalent a une lame droite dont les extrémités sont appuyées, ne convienne également, et dans les mêmes conditions, a la plaque circulaire.

Il y a plus, les mouvemens de la cloche hémisphérique observés par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni peuvent encore être expliqués par la même équation. En effet, si on imagine deux courbes passant par le point le plus élevé de la cloche et se coupant a angle droit, ces deux courbes seront par rapport a l'hémisphère ce que sont les axes des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ par rapport a la plaque circulaire. Ainsi, pour déterminer la position de chaque point de l'hémisphère, on pourra, comme dans le cas de la plaque, employer la considération de l'angle φ, la seule différence est que le rayon $\underline{r}$, qui dans la plaque représente une ligne droite, sera remplacé ici par un arc de courbe. Lorsqu'il s'agissoit de la plaque, il étoit permis de regarder $\underline{r}$ comme constant et l'équation se trouvoit alors réduite à la forme indiquée ci dessus ; rien n'empêche, ce me semble, de regarder également l'arc qui remplace $\underline{r}$ comme constant et il est évident que, dans cette hypothèse, l'équation doit conserver la forme qui convient au cas de la plaque car en fesant comme a l'ordinaire abstraction du facteur relatif au tems, le facteur $\sin(\beta\varphi+\mathcal{B})$ ne peut être multiplié, de part et d'autre, que par un facteur constant et de (non lisible) la quantité dont chaque point de la surface s'élève pendant le mouvement, au dessus de sa situation naturelle.

$\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni a lui même remarqué la ressemblance qui existe entre les manières de vibrer de la cloche hémisphérique et de la plaque circulaire. Ainsi je ne puis rien faire de mieux que de remarquer la (non lisible) son dans laquelle on trouvera des obstacles qu'il seroit trop long (non lisible). J'observeroi seulement que (non lisible) la théorie qu'Euler a donné dans son mémoire De sono Companarum, théorie qui a la vérité n'est pas conforme a l'experience, contredit également l'opinion de ce grand géomètre sur le rapport entre les manières de vibrer dont l'anneau et la cloche sont susceptibles. Cependant, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'anneau dont l'élasticité est constant vibre en effet de la même manière que la plaque dans laquelle il n'y a pas de lignes nodales circulaires, de sorte que, quoique la théorie du mouvement des cloches ne soit pas conforme a celle qu'Euler avoit imaginée, (non lisible) sur la ressemblance entre les mouvemens de l'anneau et ceux de la cloche se trouvent vérifiés, comme dans les cas les plus simples, tant par l'experience que par la théorie des surfaces élastiques.

De tout ce que je viens de dire on peut conclure que l'équation $z = ...\mathcal{A}\sin(\beta\varphi + \mathcal{B})$ qui n'est autre chose que celle de la corde tendue peut donc appartenir, dans certains cas, à la lame droite, a l'anneau circulaire élastique, au tambour circulaire, a la plaque élastique circulaire, et enfin a la cloche hémisphérique. Dans ceux de ces corps qui sont élastiques, les sons doivent donc être proportionnels à β^2, c'est-à dire aux quarrés des nombres de la suite naturelle. $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni trouve en effet (ν table p.185) que, dans le cas où il n'y a sur les plaques circulaires que des lignes diamétrales, les sons répondent aux quarrés des nombres 2, 3, 4, 5, 6 etc. Il trouve aussi que la cloche d'harmonium donne, dans les cas analogues, des sons également proportionnels a la suite des mêmes nombres (ν table p.236).

Je termine enfin ce long mémoire dans lequel je n'ai pourtant examiné qu'une partie des différens cas que l'experience présente et des cas plus nombreux encore que la théorie montre possibles. Je m'estimerai heureuse si guidé par l'excellent travail de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni et par la manière dont Euler a traité un des cas des corps sonores élastiques je suis parvenue a remplir au gré de mes juges les conditions du programme proposé par la classe.


D
C
F
E
B

Troisième Mémoire

Sophie GERMAIN

reçu le 30 septembre 1815

Mémoire sur la question proposée par la première classe de l'institut

Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience.

Felix qui potuit rerum cognoscere causas, Virg.

En réfléchissant davantage sur le sujet que j'ai entrepris de traiter, j'ai cru voir que l'hypothèse que j'ai déjà proposée, hypothèse qui mène, comme on sait, à l'équation de la surface élastique, n'est autre chose que l'expression analytique de la manière d'agir des forces d'élasticité. L'exposé suivant mettra la classe à même de juger si je ne me suis pas fait illusion.

$\mathfrak{N}$°1. En général quelle que soit la nature des forces que l'on considère, il est évident qu'elles sont proportionnelles à l'effet qu'elles produisent ou tendent à produire. Il est également incontestable que les forces d'élasticité tendent à rétablir les corps qui en sont doués, dans l'état qu'une cause extérieure quelconque leur auroit fait perdre. La différence entre l'état naturel des divers points du corps élastique et l'état des mêmes points après l'action de la cause extérieure est donc la mesure des forces d'élasticité ; et il est clair que la destruction de cette différence absorberoit en effet la totalité des mêmes forces.

L'effet que l'action d'une cause extérieure produit sur un corps élastique, se réduit à faire changer sa forme naturelle ; et a proprement parler un tel corps n'est véritablement élastique, c'est-à-dire doué de forces intérieures qui lui soient propres, que lorsqu'il a subi un changement de forme. La différence qui sert de mesure aux forces d'élasticité est donc exprimée par la différence entre la figure naturelle ou initiale du corps élastique et sa figure élastique c'est-à-dire celle qu'une force extérieure l'a forcé de prendre. Je

représenterai par I la première de ces figures, par E la seconde, par C un coefficient constant et par $\underline{dm}$ l'élément du corps élastique. La force d'élasticité qui agit sur l'élément $\underline{dm}$ sera proportionnelle à la quantité $C(E-I)$ et puisque cette force tend a diminuer la différence $E-I$, le moment de la même force sera $-C(E-I)\delta(E-I)dm$.

La seule chose qui reste à déterminer est, comme on le voit, la valeur de la différence $E-I$.

$\mathfrak{N}$°2 Supposons d'abord que le corps élastique soit une simple lame, prenons R pour le rayon de la courbure initiale, et $\underline{r}$ pour le rayon de la courbure <u>élastique</u> de la même lame ; $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{r}$ seront les mesures exactes des courbures de I et E, et en mettant ici, parce qu'il est question de l'élément d'une corde $\underline{ds}$ au lieu de dm, le moment de la force d'élasticité qui agit sur cet élément, sera $-C(\frac{1}{r}-\frac{1}{R})\delta(\frac{1}{r}-\frac{1}{R})ds$.

Les différents géomètres qui ont traité de la lame élastique, ont supposé R infini, et ils n'ont admis la proportionnalité de la force d'élasticité a la raison inverse du rayon osculateur que comme une simple hypothèse. Mais au reste leurs résultats sont entièrement d'accord avec celui que je viens de présenter. Par exemple, on peut voir, ($\mathfrak{M}$ analytique nouv. edition p.151 et suivantes) que le moment $E\delta e$ se ramène aisément à la forme $-C\frac{1}{r}\delta\frac{1}{r}ds$. Pour cela il suffit d'observer que, conformément à la notation de l'auteur, on doit mettre $\frac{1}{r}$ a la place de E, $\frac{ds}{r}$ à la place de $\underline{e}$; et que, dans le terme $E\delta e$, l'élément ds étant regardé comme inextensible, $\delta\frac{ds}{r}$ est la même chose que $\delta\frac{1}{r}.ds$.

$\mathfrak{N}$.°3 Lorsqu'il s'agit d'une surface courbe, il semble d'abord plus difficile d'exprimer la différence $E-I$.

Pour y parvenir, nous supposerons que par un point quelconque de la surface initiale, on fasse passer un plan qui coupe successivement cette surface dans toutes les directions et sous toutes les inclinaisons possibles, et que par le point correspondant de la surface élastique, on fasse passer un autre plan qui coupe également cette dernière surface dans toutes les directions et sous toutes les inclinaisons possibles. Il est évident que, quelle que puisse être la valeur de la différence $E-I$, elle sera toute entière comprise dans l'ensemble des différences entre les courbures des lignes de sections respectives de ces deux surfaces. En nommant donc $\underline{r}$, (r), $((r))$, ∞ les rayons de courbures des sections normales de la surface <u>élastique</u> ; $\underline{r'}$, $\underline{r''}$, $\underline{r'''}$, ∞ les rayons de courbure des sections obliques de la même surface qui ont une tangente commune avec la section normale dont le rayon est $\underline{r}$; (r'), (r''), (r''') ∞ . $((r'))$, $((r''))$, $((r'''))$ ∞ les rayons de courbures

des sections obliques qui ont avec les sections normales dont les rayons sont (r) et $((r))$, les mêmes rapports que les sections dont les rayons sont r', r'', r''' ∞, ont avec la section dont le rayon est $\underline{r}$. Enfin en désignant par R, R', R'', R''' ∞. (R), (R'), (R''), (R''') ∞. $((R))$, $((R'))$, $((R''))$, $((R'''))$ ∞ les valeurs relatives à la surface initiale correspondantes à celles qui sont désignées par les lettres minuscules pour la surface <u>élastique</u> ; on sera sûr que la différence $E - I$ ne renfermera aucune valeur qui ne soit comprise dans la différence

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}+\infty+\frac{1}{(r)}+\frac{1}{(r')}+\frac{1}{(r'')}+\frac{1}{(r''')}+\infty$$
$$+\frac{1}{((r))}+\frac{1}{((r'))}+\frac{1}{((r''))}+\frac{1}{((r'''))}+\infty\ -(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}+\frac{1}{R'''}+\infty$$
$$+\frac{1}{(R)}+\frac{1}{(R')}+\frac{1}{(R'')}+\frac{1}{(R''')}+\infty+\frac{1}{((R))}+\frac{1}{((R'))}+\frac{1}{((R''))}+\frac{1}{((R'''))}+\infty)$$

on peut observer que dans cette formule les quantités qui dépendent des sections obliques se détruisent d'elles mêmes. En effet si θ , par exemple, est l'angle que la section oblique dont le rayon de courbure est $\underline{r'}$, fait avec la section normale dont le rayon de courbure est $\underline{r}$ on aura $r' = \frac{r}{\cos\theta}$, $\frac{1}{r'} = \frac{\cos\theta}{r}$. Or dans la serie des rayons r', r'' etc se trouvera nécessairement le rayon r'' qui appartient a la section oblique qui fait avec la même section normale l'angle $\pi-\theta$, π représentant comme à l'ordinaire la demie circonférence, et a cause de $\frac{1}{r''} = \frac{\cos(\pi-\theta)}{r} = -\frac{\cos\theta}{r}$ la formule ci-dessus sera réduite à

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{(r)}\frac{1}{((r))}+\infty-\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{(R)}\frac{1}{((R))}+\infty\right)$$

Mais parmi les quantités $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{(r)}$, ∞ on sait que la somme de celles qui appartiennent à deux sections perpendiculaires entr'elles, est constante. En prenant donc $\underline{f}$ et g pour les rayons des courbures principales de la surface élastique, la somme $\frac{1}{r}+\frac{1}{(r)}+\frac{1}{((r))}+\infty$ sera égale a la somme $\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$ prise un nombre infini de fois. Par les mêmes raisons, en prenant F et G pour les rayons des courbures principales de la surface initiale, la somme $\frac{1}{R}+\frac{1}{(R)}+\frac{1}{((R))}+\infty$ sera égale à la somme $\frac{1}{F}+\frac{1}{G}$ prise un nombre infini de fois.

Il est évident que le coefficient infini qui semble devoir multiplier ici la différence $f+g-(F+G)$ n'appartient pas réellement à la différence $E-I$, mais qu'il est dû uniquement à la méthode emploiée pour obtenir la valeur de cette quantité ; en effet si au lieu d'imaginer un seul plan, on conçoit pour chaque surface le système de deux plans perpendiculaires entr'eux et à la surface dont on veut connoître la figure, on voit qu'en fesant prendre à ce système toutes les positions possibles, on ne fait autre chose

qu'une suite d'opérations parfaitement équivalentes, ce qui revient a répéter la même opération un nombre infini de fois.

De tout ce qui précède il résulte que l'on aura

$$-C\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)\delta\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)dm$$

pour le moment de la force d'élasticité qui agit sur l'élement dm d'une surface élastique et que par conséquent

$$-\iint C\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)\delta\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)dm$$

sera la somme des momens de toutes les forces d'élasticité qui agissent dans toute l'étendue de la surface.

$\mathfrak{N}$°4 En supposant actuellement que la surface élastique ne soit soumise à l'action d'aucune force extérieure et que son élément tende à se contracter avec une force que je nommerai $\mathcal{F}$, il faudra, pour trouver la formule de mouvement qui lui est propre, égaler la somme des termes

$$-\iint C\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)\delta\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)dm$$

et $\iint \mathcal{F}\delta dm$ à la somme

$$\iint\left(\frac{d^2z}{dt^2}\delta x+\frac{d^2z}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dm$$

des forces accélératrices qui agissent en même tems sur tous les points.

Quelle que soit la nature des forces auxquelles les différens points de la surface sont supposés soumis, on peut toujours rapporter ces forces a trois directions perpendiculaires entr'elles. Il est donc permis de prendre

$$\begin{aligned}-C\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)\delta\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}-\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{G}\right)\right)\\ = X\delta x+Y\delta y+Z\delta z\\ = \delta\Pi\end{aligned}$$

sous cette forme il est facile d'appliquer aux termes qui conviennent au cas présent l'analyse donnée p. 124 et suivantes du premier $\mathfrak{V}$ de la mécanique analytique à l'occasion des surfaces qui sont supposées soumises à des forces extérieures. On aura, par conséquent, comme dans l'endroit cité $\Pi = \mathcal{F} + a$, a étant une constante arbitraire rien n'empêche de la prendre avec le signe $-$ et il est aisé de se convaincre que le signe négatif est en effet celui qui convient ici, car les forces de tensions que la constante $\underline{a}$ représente concourrent avec le terme Π qui vient des forces d'élasticité, a la contraction de l'élément de la surface ; cette constante doit donc être affectée du même signe que Π.

$\mathfrak{N}$°5 Cela posé, supposons qu'une surface élastique de figure quelconque ait subi l'action d'une force extérieure toute entière dirigée suivant l'axe des $\underline{z}$, en sorte que $\underline{x}$ $\underline{y}$ et $\underline{z}$ étant les coordonnées d'un des points de cette surface avant l'action de la force extérieure, $\underline{x}$ $\underline{y}$ et $\underline{z'}$ soient les coordonnées du même point après l'action.

fésons $P = \frac{1}{F} + \frac{1}{G}$, $Q = \frac{1}{FG}$, $P' = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}$, $Q' = \frac{1}{fg}$, $\frac{dz'}{dx} = p'$, $\frac{dz'}{dy} = q'$, $\sqrt{(1 + p'^2 + q'^2)} = K'$, $P' = \frac{1+q'^2}{K'^2}.\frac{d^2z'}{dx^2} - \frac{2p'q'}{K'^2}\frac{d^2z'}{dxdy} + \frac{1+p'^2}{K'^2}.\frac{d^2z'}{dy^2}$, $C = \varepsilon b^2$, b^2 représentant un coefficient dépendant de la rigidité naturelle de la surface et $\underline{\varepsilon}$ l'épaisseur de la même surface. On aura $dm = \varepsilon K' dxdy$,
$\delta\Pi = -\varepsilon b^2(P' - P)\delta(P' - P) = -\frac{\varepsilon b^2}{2}\delta(P' - P)^2$, $\Pi = -\frac{\varepsilon b^2}{2}(P' - P)^2$,
$\mathcal{F} = -\frac{\varepsilon b^2}{2}(P' - P)^2 + a$
la formule qui convient au mouvement de cette surface sera

$$\iint (\varepsilon^2 b^2(P' - P)\delta(P' - P))K' dxdy - \iint \left(\frac{\varepsilon b^2}{2}(P' - P)^2 - a\right)\varepsilon\delta(K' dxdy)$$

$$= \iint \left(\frac{d^2z'}{dt^2}\delta x + \frac{d^2z'}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z'}{dt^2}\delta z'\right)\varepsilon K' dxdy \text{.....}(a)$$

et pour avoir l'équation de la même surface, il ne s'agira plus que de connaître le terme qui, dans le premier membre de l'équation ci dessus, se trouve multiplié par $\delta z'$ et de l'égaler au terme qui, dans le second membre de la même équation, se trouve pareillement multiplié par $\delta z'$.

Suivant l'hypothèse P représente une quantité invariable, en sorte que $\delta(P' - P)$ se réduit à $\delta P'$. Le terme qui reste à calculer sera donc, en prenant la variation de P' et celle de K' par rapport a z' ,

$$\iint \left(\varepsilon^2 b^2 (P'-P)K'\delta P' + \left(\frac{\varepsilon^2 b^2}{3}(P'-P)^2 - a\varepsilon\right)\delta K'\right) dxdy$$

ou, ce qui revient au même

$$\iint \left(\varepsilon^2 b^2 (P'-P)\delta(K'P') - \left(\frac{\varepsilon^2 b^2}{2}(P'^2 - P^2) + a\varepsilon\right)\delta K'\right) dxdy$$

J'emploirai par préférence cette dernière expression qui m'a paru plus simple.

$\mathfrak{N}$°6 A cause de $\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx} = \frac{2q'p'^2\frac{d^2z'}{dxdy} - 2(1+q'^2)p'\frac{d^2z'}{dx^2}}{K'^4}$

$$\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dy} = \frac{2(1+q'^2-p'^2)q'\frac{d^2z'}{dxdy} + 2(1+p'^2-q'^2)p'\frac{d^2z'}{dy^2}}{K'^4}$$

$$\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dx} = \frac{2(1+q'^2-p'^2)q'\frac{d^2z'}{dx^2} + 2(1+p'^2-q'^2)p'\frac{d^2z'}{dxdy}}{K'^4}$$

$$\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy} = \frac{2p'q'^2\frac{d^2z'}{dxdy} - 2(1+p'^2)q'\frac{d^2z'}{dy^2}}{K'^4}$$

On aura $\iint b^2\varepsilon^2(P'-P)\delta(K'P')dxdy$

$$= \iint b^2\varepsilon^2(P'-P)(\frac{1+q'^2}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dx^2} - \frac{2p'q'}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dxdy} + \frac{1+p'^2}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dy^2}$$

$$+\frac{2p'^2q'\delta\frac{dz'}{dy} - 2(1+q'^2)p'\delta\frac{dz'}{dx}}{K'^4}.\frac{d^2z'}{dx^2}$$

$$-\frac{2q'^2p'\delta\frac{dz'}{dx} - 2(1+p'^2)q'\delta\frac{dz'}{dy}}{K'^4}.\frac{d^2z'}{dxdy}$$

$$+\frac{2q'^2p'\delta\frac{dz'}{dx} - 2(1+p'^2)q'\delta\frac{dz'}{dy}}{K'^4}.\frac{d^2z'}{dy^2})dxdy$$

$$= \iint b^2\varepsilon^2(P'-P)(\frac{1+q'^2}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dx^2} - \frac{2p'q'}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dxdy} + \frac{1+p'^2}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dy^2}$$

$$+\left(\frac{d(\frac{1+q'^2}{K'^2})}{dx}-\frac{d(\frac{2p'q'}{K'^2})}{dy}-\frac{d(\frac{1+p'^2}{K'^2})}{dy}\frac{p'}{q'}\right)\delta\frac{dz'}{dx}$$

$$+\left(\frac{d(\frac{1+p'^2}{K'^2})}{dy}-\frac{d(\frac{2p'q'}{K'^2})}{dx}-\frac{d(\frac{1+q'^2}{K'^2})}{dx}\frac{q'}{p'}\right)\delta\frac{dz'}{dy})dxdy$$

En intégrant par parties on trouvera

$$\iint b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{1+q'^2}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dx^2}dxdy$$

$$=\int b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{1+q'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dx}dy-\int b^2\varepsilon^2\frac{d\left(\frac{(P'-P)1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\delta z'dy$$

$$+\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{d^2P}{dx}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2}+2\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}$$

$$+(P'-P)\frac{dd\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx^2})\delta z'dxdy$$

$$-\iint b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{2p'q'}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dxdy}.dxdy=-b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{2p'q'}{K'^2}\delta z'$$

$$+\int b^2\varepsilon^2\frac{d\left(\frac{(P'-P)2p'q'}{K'^2}\right)}{dx}\delta z'dx+\int b^2c^2\frac{d\left(\frac{(P'-P)2p'q'}{K'^2}\right)}{dy}\delta z'dy$$

$$-2\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d^2P'}{dxdy}-\frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{p'q'}{K'^2}+\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dy}$$

$$+\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dx}+(P'-P)\frac{d^2\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy})\delta z'dxdy$$

$$\iint b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{1+p'^2}{K'^2}\delta\frac{d^2z'}{dy^2}dxdy=\int b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{1+p'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dy}dx$$

$$-\int b^2\varepsilon^2\frac{d\left((P'-P)\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\delta z'dx+\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}$$

$$+2\left(\frac{P'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)\frac{d(\frac{1+p'^2}{K'^2})}{dy}+(P'-P)\frac{dd\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy^2})\delta z'dxdy$$

$$\iint b^2\varepsilon^2(P'-P)\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}\right)\delta\frac{dz'}{dx}dxdy$$

$$=\int b^2\varepsilon^2(P'-P)\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}\right)\delta z'dy$$

$$-\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}\right)\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)$$

$$+\left(\frac{d^2\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx^2}-\frac{d^2\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy}-\frac{d\left(\frac{d\frac{1+q'^2}{K'^2}}{dy}\frac{p'}{q'}\right)}{dx}\right)(P'-P))\delta z'dxdy$$

$$\iint b^2\varepsilon^2(P'-P)\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}\right)\delta\frac{dz'}{dy}dxdy$$

$$=\int b^2\varepsilon^2(P'-P)\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}\right)\delta z'dx$$

$$-\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}\right)\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)$$

$$+\left(\frac{d^2\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy^2}-\frac{d^2\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy}-\frac{d\left(\frac{d\frac{1+q'^2}{K'^2}}{dx}\frac{p'}{q'}\right)}{dy}\right)(P'-P))\delta z'dxdy$$

Par conséquent $\iint b^2\varepsilon^2(P'-P)\delta(K'P')dxdy$

$$=b^2\varepsilon^2\left(-(P'-P)\frac{2p'q'}{K'^2}\right)$$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{(P'-P)1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}dy+\int\frac{d\left(\frac{(P'-P)2p'q'}{K'^2}\right)}{dy}dy$$

$$-\int\frac{d\left(\frac{(P'-P)1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}dx+\int\frac{d\left(\frac{(P'-P)2p'q'}{K'^2}\right)}{dx}dx$$

$$+\int(P'-P)(\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}\right)dy$$

$$+\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}\right)(dx))$$

$$+\int b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{1+q'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dx}.dy+\int b^2\varepsilon^2(P'-P)\frac{1+p'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dy}.dx$$

$$+\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2}-\left(\frac{d^2P'}{dxdy}-\frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2}$$

$$+\left(\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}+2\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dy}\right)$$

$$+2\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dx}\right)$$

$$+(P'-P)\left(\frac{d^2\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx^2}-\frac{2d^2\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy}+\frac{d^2\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy^2}\right)$$

$$-\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{2d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}.\frac{p'}{q'}\right)$$

$$-\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{2d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}.\frac{q'}{p'}\right)$$

$$-(P'-P)\left(\frac{d^2\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx^2}-2\frac{d^2\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy}-\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}.\frac{p'}{q'}\right)}{dx}\right)$$

$$-(P'-P)\left(\frac{d^2\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy^2}-2\frac{d^2\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy}-\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}.\frac{p'}{q'}\right)}{dy}\right))\delta z'dxdy$$

La somme des termes affectés du double signe se réduira donc à :

$$\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2}-\left(\frac{d^2P'}{dxdy}-\frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2}$$

$$\left(\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}+\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}.\frac{p'}{q'}\right)$$

$$+\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}+\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}.\frac{q'}{p'}\right)$$

$$+(P'-P)\left(\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}\right)}{dx}+2\frac{d^2\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy}+\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}\right)}{dy}\right)\delta z'dxdy$$

et enfin en observant que l'on a $\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}=-\frac{2P'p'}{K'}$

$$\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}+\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}=-\frac{2P'q'}{K'}$$

$$\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}\right)}{dx}+2\frac{d^2\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dxdy}+\frac{d\left(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}\right)}{dy}$$

$$=\frac{2(p'^2q'\frac{d^2z'}{dxdy}-(1+p'^2)p'\frac{d^3z'}{dy^2dx}+(1+q'^2-p'^2)q'\frac{d^3z'}{dx^2dy}}{K'^4}$$

$$+\frac{q'^2p'\frac{d^3z'}{dxdy^2}-(1+q'^2)q'\frac{d^3z'}{dxdy^2})}{K'^4}$$

$$+\frac{2((1+2q'^2-p'^2)\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dy^2}-2p'q'\frac{d^2z'}{dydx}.\frac{d^2z'}{dx^2}}{K'^4}$$

$$+\frac{(1+2p'^2-q'^2)\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)^2-2p'q'\frac{d^2z'}{dy^2}.\frac{d^2z'}{dxdy})}{K'^4}$$

$$+\frac{2\left(2p'q'.\frac{d^2z'}{dy^2}.\frac{d^2z'}{dxdy}+q'^2\left(\frac{d^2z'}{dydx}\right)^2-(2q'^2+1)\frac{d^2z'}{dy^2}.\frac{d^2z'}{dx^2}\right)}{K'^4}$$

$$+\frac{2\left(2p'q'.\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dxdy}+p'^2\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)^2-(2p'^2+1)\frac{d^2z'}{dy^2}.\frac{d^2z'}{dx^2}\right)}{K'^4}$$

$$-\frac{4((1+q'^2-p'^2)p'q'\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dxdy}+(1+p'^2-q'^2)p'^2\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)^2}{K'^4}$$

$$+\frac{(1+q'^2-p'^2)q'^2\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dy^2}+(1+p'^2-q'^2)p'q'\frac{d^2z'}{dxdy}.\frac{d^2z'}{dy^2})}{K'^4}$$

$$-\frac{4(p'^2q'^2\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)^2-(1+q'^2)p'q'\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dxdy}}{K'^4}$$

$$+\frac{q'^2p'\frac{d^2z'}{dxdy}.\frac{d^2z'}{dy^2}-(1+q'^2)q'^2.\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dy^2})}{K'^4}$$

$$-\frac{4(p'^2q'.\frac{d^2z'}{dxdy}.\frac{d^2z'}{dx^2}-(1+p'^2)p'^2\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dy^2}}{K'^4}$$

$$+\frac{p'^2q'^2\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)^2-(1+p'^2)p'q'.\frac{d^2z'}{dy^2}.\frac{d^2z'}{dxdy})}{K'^4}$$

quantité qui en effaçant ce qui se détruit, et réduisant, peut être mise sous la forme $\frac{2}{K'^4}\left(\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2z'}{dx^2}.\frac{d^2z'}{dy^2}\right)$ ou, ce qui est la même chose, $-2Q'$; la même somme des termes affectés du double signe se réduira à la forme très simple :

$$\iint b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2}-\left(\frac{d^2P'}{dxdy}-\frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2}$$

$$+\left(\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}-\frac{2P'p'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx}-\frac{dP}{dx}\right)$$

$$-\frac{2P'q'}{K'}\left(\frac{dP'}{dy}-\frac{dP}{dy}\right)-2(P'-P)Q')\delta z'.dxdy$$

Il reste encore à calculer la valeur de la quantité :

$$\iint\left(\frac{b^2\varepsilon^2}{2}(P'^2-P^2)+a\varepsilon\right)\delta z'.dxdy$$

On trouve $\iint\left(\frac{b^2\varepsilon^2}{2}(P'^2-P^2)+a\varepsilon\right)\delta z'.dxdy$

$$=-\iint\left(\frac{b^2\varepsilon^2}{2}(P'^2-P^2)+a\varepsilon\right).\frac{p'\delta\frac{dz'}{dx}+q'\delta\frac{dz'}{dy}}{K'}.dxdy$$

$$=\int\left(\frac{b^2\varepsilon^2}{2}(P'^2-P^2)+a\varepsilon\right).\frac{p'dy+q'dx}{K'}\delta z'$$

$$=\iint\left(\left(\frac{b^2\varepsilon^2}{2}(P'^2-P^2\right)+a\varepsilon\right)\frac{\frac{d^2z'}{dx^2}(1+p'^2+q'^2)-p'(p'\frac{d^2z'}{dx^2}}{K'^3}$$

$$+\frac{q'\frac{d^2z'}{dxdy})+\frac{d^2z'}{dy^2}(1+p'^2+q'^2)-q'(q'\frac{d^2z'}{dy^2}+p'\frac{d^2z'}{dxdy})}{K'^3}$$

$$+b^2\varepsilon^2\left(\frac{p'}{K'}\left(P'\frac{dP'}{dx}-P\frac{dP}{dx}\right)+\frac{q'}{K'}\left(P'\frac{dP'}{dy}-P\frac{dP}{dy}\right)\right))\delta z'dxdy$$

en négligeant les termes qui se rapportent aux limites on a donc

$$\iint\left(\frac{b^2\varepsilon^2}{2}(P'^2-P^2)+a\varepsilon\right)\delta z'.dxdy$$

$$=-\iint(\left(\frac{b^2\varepsilon^2}{2}(P'^2-P^2)+a\varepsilon\right)P'$$

$$+b^2\varepsilon^2\left(\frac{p'P'}{K'}\frac{dP'}{dx}+\frac{q'P'}{K'}\frac{dP'}{dy}-\frac{p'P}{K'}\frac{dP}{dx}-\frac{q'P}{K'}\frac{dP}{dy}\right))\delta z'dxdy$$

$$\iint \left(\varepsilon^2 b^2 (P' - P)\delta(K'P') - \left(\frac{\varepsilon^2 b^2}{2}(P'^2 - P^2) + a\varepsilon\right)\right)\delta z' dxdy$$

$$= \iint (b^2\varepsilon^2 (\left(\frac{d^2P'}{dx^2} - \frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2} - \left(\frac{d^2P'}{dxdy} - \frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2}$$

$$+\left(\frac{d^2P'}{dy^2} - \frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2} - \frac{p'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx} - \frac{dP}{dx}\right)$$

$$-\frac{q'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dy} - \frac{dP}{dy}\right) + \frac{(P'-P)}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx} + q'\frac{dP}{dy}\right)$$

$$+\frac{P'}{2}(P'^2 - P^2) - 2(P'-P)Q') + a\varepsilon P')\delta z' dxdy$$

enfin en égalant a zéro les termes qui dans la formule (a) n°5 sont multipliés par $\delta z'$, et divisant par $\varepsilon dxdy$, on trouvera

$$b^2\varepsilon(\left(\frac{d^2P'}{dx^2} - \frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2} - \left(\frac{d^2P'}{dxdy} - \frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2} + \left(\frac{d^2P'}{dy^2} - \frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}$$

$$-\frac{p'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx} - \frac{dP}{dx}\right) - \frac{q'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dy} - \frac{dP}{dy}\right) + \frac{(P'-P)}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx} + q'\frac{dP}{dy}\right)$$

$$+\frac{P'}{2}(P'^2 - P^2) - 2(P'-P)Q') + aP' + \frac{d^2z'}{dt^2}K' = 0 \text{.....}(b)$$

L'équation (b) sera l'équation d'une surface élastique de figure quelconque qui aura été forcée de changer de forme par l'action d'une force extérieure dirigée suivant l'axe des $\underline{z}$ et qui abandonnée a elle même ne sera plus animée, dans toute son étendue, que par les seules forces intérieures qui résultent de la tendance d'une telle surface a reprendre sa figure naturelle ; mais qui de plus sera soumise a l'action d'une force de tension uniforme et représentée par la constante a.

$\mathfrak{N}$°7 Rien n'empêche de prendre $z' = z + z''$, on a alors $\frac{d^2z'}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dx^2}$; en représentant donc par $\underline{K}$ ce qui devient $\underline{K'}$ lorsque $z'' = 0$, et en observant que la

supposition $z'' = 0$ entraîne la condition $P = P'$, on voit que l'équation (b) donne $-aP = \frac{d^2z}{dt^2}K$.

Si on retranche cette dernière équation de la même équation (b) elle prendra la forme :

$$b^2\varepsilon^2(\left(\frac{d^2P'}{dx^2} - \frac{d^2P}{dx^2}\right)\frac{1+q'^2}{K'^2} - \left(\frac{d^2P'}{dxdy} - \frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'^2} + \left(\frac{d^2P'}{dy^2} - \frac{d^2P}{dy^2}\right)\frac{1+p'^2}{K'^2}$$

$$-\frac{p'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx} - \frac{dP}{dx}\right) - \frac{q'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dy} - \frac{dP}{dy}\right) + \frac{(P'-P)}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx} + q'\frac{dP}{dx}\right)$$

$$+\frac{P'}{2}(P'^2 - P^2) - 2(P'-P)Q') + (P'-P)a + \frac{d^2z}{dt^2}(K'-K) + \frac{d^2z''}{dt^2}K' = 0.....(c)$$

Voyons a présent ce que devient l'équation (c) dans les suppositions particulières qui conviennent a la théorie du son.

Il est toujours permis de choisir les trois plans coordonnés de manière que celui des $\underline{x}$ et $\underline{y}$ soit parallèle au plan tangent à la surface initiale dans le point que l'on considère. Dans cette supposition on aura $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$, $K = 1$, $\frac{d^2z}{dxdy} = 0$, $P = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}$, $Q = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}$; $p' = \frac{dz'}{dx} = \frac{dz''}{dx}$, $q' = \frac{dz'}{dy} = \frac{dz''}{dy}$, $\frac{d^2z'}{dxdy} = \frac{d^2z''}{dxdy}$; par conséquent, si l'on admet que dans leur mouvement les différens points de la surface s'éloignent très peu de leur position initiale, le plan tangent au point que l'on considère dans la surface <u>élastique</u> s'écarte aussi très peu du plan tangent a la surface initiale et il sera permis de négliger les quantités du second ordre par rapport aux différentielles de z''.

Cela posé on trouvera $K' = 1$, $P' = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}$

$$= P + \frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}$$

$$Q' = \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z''}{y^2}\right) - \left(\frac{d^2z''}{dxdy}\right)^2$$

$$= \frac{d^2z}{dx^2}.\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dy^2}.\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2}.\frac{d^2z''}{dy^2}$$

$$= Q + \frac{d^2z}{dy^2}.\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2}.\frac{d^2z''}{dy^2}$$

$$\frac{P'}{2}(P'^2 - P^2) = \frac{\left(P + \frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)}{2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\left(2P + \frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)$$

$$= P^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)$$

$$2(P' - P)Q' = 2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)Q$$

Dans l'équation (c) les quantités

$$-\frac{p'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dx} - \frac{dP}{dx}\right) = \frac{dz''}{dx}.\frac{P'}{K'}\left(\frac{d^3z''}{dx^3} + \frac{d^3z''}{dxdy^2}\right)$$

$$-\frac{q'P'}{K'}\left(\frac{dP'}{dy} - \frac{dP}{dy}\right) = \frac{dz''}{dy}.\frac{P'}{K'}\left(\frac{d^3z''}{dy^3} + \frac{d^3z''}{dxdy^2}\right)$$

$$\frac{(P' - P)}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx} + q'\frac{dP}{dy}\right) = \frac{\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)}{K'}\left(p'\frac{dP}{dx} + q'\frac{dP}{dy}\right)$$

qui sont du second ordre devront être négligées aussi bien que le terme $\left(\frac{d^2P'}{dxdy} - \frac{d^2P}{dxdy}\right)\frac{2p'q'}{K'}$ qui est du troisième ordre ; elle se réduira par conséquent à la forme

$$b^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4} + P^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right) - 2Q\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right)$$

$$+a\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right) + \frac{d^2z''}{dt^2} = 0$$

La quantité $P^2 - 2Q = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)^2$ qui, comme on le voit, n'est autre chose que la somme des quarrés des raisons inverses des deux rayons principaux de courbure de la surface initiale, est essentiellement une quantité invariable. Si on la représente par

$\square$ on remarquera que dans l'équation

$$b^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4}+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}+\square\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right)$$

$$+a\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)+\frac{d^2z''}{dt^2}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(d)$$

qui appartient a la surface vibrante élastique le terme qui dépend de la figure initiale de cette surface se présente sous la même forme que celui qui est dû aux forces de tensions supposées uniformes.

$\mathfrak{N}$°8 En rassemblant tous les termes qui ne sont affectés que d'un seul signe d'intégration, leur donnant les signes qui leur conviennent, divisant par le facteur constant $b^2\varepsilon^2$ et observant que la quantité

$$\left((P'-P)\frac{2p'q'}{K'^2}-\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)2p'q'}{K'^2}\right)dx}{dx}-\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)2p'q'}{K'^2}\right)dy}{dy}\right)\delta z'$$

peut se mettre sous la forme

$$\int(P'-P)\frac{p'q'}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dx}dx+\int(P'-P)\frac{p'q'}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dy}dy$$

$$-\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)q'p'}{K'^2}\right)dx}{dx}\delta z'-\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)q'p'}{K'^2}\right)dy}{dy}\delta z'$$

on trouvera que les conditions des extrémités sont exprimées comme il suit :

$$-\int(P'-P)\frac{1+q'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dx}dy+\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)1+q'^2}{K'^2}\right)dy}{dx}\delta z'$$

$$-\int(P'-P)\frac{1+p'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dy}dx+\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)1+p'^2}{K'^2}\right)dx}{dy}\delta z'$$

$$+\int(P'-P)\frac{p'q'}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dx}dx-\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)p'q'}{K'^2}\right)dx}{dx}\delta z'$$

$$+\int(P'-P)\frac{p'q'}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dy}dy+\frac{\int d\left(\frac{(P'-P)p'q'}{K'^2}\right)dy}{dy}\delta z'$$

$$-\int(P'-P)(\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}.\frac{p'}{q'})dy\delta z'$$

$$-\int(P'-P)(\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{2p'q'}{K'^2}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}.\frac{q'}{p'})dx\delta z'$$

$$+\frac{\int\left(\frac{1}{2}(P'^2-P^2)+\frac{a}{b^2\varepsilon^2}\right)}{K'}\left(\frac{dz'}{dx}dy+\frac{dz'}{dy}dx\right)\delta z'$$

$$=\left(\int(P'-P)\frac{p'q'}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dx}-\int(P'-P)\frac{1+p'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dy}\right)dx$$

$$+\left(\int(P'-P)\frac{p'q'}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dy}-\int(P'-P)\frac{1+q'^2}{K'^2}\delta\frac{dz'}{dx}\right)dy$$

$$+\left(\int\frac{1+p'^2}{K'^2}\frac{d(P'-P)}{dy}-\int\frac{p'q'}{K'^2}\frac{d(P'-P)}{dx}\right)\delta z'dx$$

$$+\left(\int\frac{1+q'^2}{K'^2}\frac{d(P'-P)}{dx}-\int\frac{p'q'}{K'^2}\frac{d(P'-P)}{dy}\right)\delta z'dy$$

$$+\int(P'-P)\left(\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}.\frac{q'}{p'}\right)\delta z'dx$$

$$+\int(P'-P)\left(\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dy}+\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}.\frac{p'}{q'}\right)\delta z'dy$$

$$+\frac{\int\left(\frac{1}{2}(P'^2-P^2)+\frac{a}{b^2\varepsilon^2}\right)}{K'}\frac{dz'}{dy}\delta z'dx+\frac{\int\left(\frac{1}{2}(P'^2-P^2)+\frac{a}{b^2c^2}\right)}{K'}\frac{dz'}{dx}\delta z'dy$$

Il est clair que les quantités $\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{1+q'^2}{K'^2}\right)}{dx}\frac{q'}{p'}$ et $\frac{d\left(\frac{p'q'}{K'^2}\right)}{dy}+\frac{d\left(\frac{1+p'^2}{K'^2}\right)}{dy}\frac{p'}{q'}$ sont du second ordre par rapport aux différentielles de z'. Si donc on néglige les quantités de cet ordre, les conditions des extrémités se réduiront à

$$-\int(P'-P)\delta\frac{dz'}{dy}dx \qquad -\int(P'-P)\delta\frac{dz'}{dx}dy$$

$$+\int d\left(\frac{P'-P}{dy}\right)\delta z'dx \qquad +\int d\left(\frac{P'-P)}{dx}\right)\delta z'dy$$

$$+\int\left(\frac{1}{2}(P'^2-P^2)+\frac{a}{b^2\varepsilon^2}\right)\frac{dz'}{dy}dx \qquad +\int\left(\frac{1}{2}(P'^2-P^2)+\frac{a}{b^2\varepsilon^2}\right)\frac{dz'}{dx}dy$$

En fin, en adaptant ici les dénominations adaptées $\mathfrak{N}$°**7**, les mêmes conditions pourront s'écrire ainsi

$$-\int\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\delta\frac{dz''}{dy}dx \qquad -\int\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\delta\frac{dz''}{dx}dy$$

$$+\int\frac{d\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)}{dy}\delta z''dx \qquad +\int\frac{d\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)}{dx}\delta z''dy$$

$$+\int\left(P\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)+\frac{a}{b^2\varepsilon^2}\right)\frac{dz''}{dy}dx+\int\left(P\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)+\frac{a}{b^2\varepsilon^2}\right)\frac{dz''}{dx}dy$$

$\mathfrak{N}$°**9** Revenons à l'équation générale donnée $\mathfrak{N}$°6. Il est aisé de voir que cette équation est entièrement d'accord avec celle que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Poisson a publiée, d'abord dans un des bulletins de la société philomatique, et depuis dans la correspondance de l'école polytechnique. En effet, si on se borne, comme l'a fait ce savant auteur, au cas où la surface élastique est naturellement plane, l'équation (b) se réduira à

$$b^2\varepsilon(\frac{1+q'^2}{K'^2}\frac{d^2P'}{dx^2}-\frac{2p'q'}{K'^2}\frac{d^2P'}{dxdy}+\frac{1+p'^2}{K'^2}\frac{d^2P'}{dy^2}-\frac{p'P'}{K'}\frac{dP'}{dx}-\frac{q'P'}{K'}\frac{dP'}{dy}$$

$$+\frac{P'}{2}\left(P'^2-4Q'\right))+aP'+K'\frac{d^2z'}{dt^2}=0$$

Il suffira alors, pour obtenir une équation identiquement semblable à celle de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Poisson, de remplacer le terme $K'\frac{d^2z'}{dt^2}$ qui est dû aux forces accélératrices, par la quantité $-(K'Z - \frac{p'}{K'}X - \frac{q'}{K'}Y - P'\square)$ qui vient de la supposition que la surface est soumise à l'action des forces extérieures Z, X et Y. Il est clair que dans cette supposition les forces de tensions que j'ai dénotées par $\underline{a}$ se trouvent comprises dans la quantité $\square$.

J'ai vivement regretté de ne pas connaître le mémoire de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Poisson. J'ai passé à en attendre la publication un tems qui m'eut été précieux. J'aurois même entièrement renoncé aux recherches que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de la classe, si je n'avais appris, par le théorème de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Rodrigues, que l'équation obtenue dans une hypothèse différente de celle que j'avais proposée, résulteroit également de cette dernière hypothèse. En effet je voyais chaque jour de nouvelles raisons de regarder mon hypothèse comme incontestable ; et pourtant le respect dû à l'autorité de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Poisson m'otait le courage de soumettre au calcul un principe que je ne prévoyais pas alors devoir être d'accord avec l'équation publiée par cet habile géomètre.

$\mathfrak{N}$°10 Si dans l'équation (d) qui appartient à la surface élastique vibrante, on fait abstraction des forces de tensions, elle se réduira à

$$b^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4} + \square^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right) + \frac{d^2z''}{dt^2} = 0$$

Le cas des mouvemens réguliers est le seul qui intéresse la théorie du corps sonore. Ainsi, en représentant comme à l'ordinaire par $\underline{K}$ la longueur du pendule aux mouvemens duquel on compare ceux de la surface vibrante, et en choisissant pour unité des espaces la hauteur dont un corps abandonné à lui même tombe dans une seconde, nous pourrons prendre $\frac{d^2z''}{dt^2} = -\frac{z''}{K}$.

L'équation de la surface vibrante sera alors

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4} + \square^2\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right) = z''\text{.....}(e)$$

Avant de m'occuper de l'application de cette formule, je vais m'arrêter un instant à l'examen du procédé qui a servi à l'obtenir. On a vu, $\mathfrak{N}$°7, que ce n'est qu'au moyen du choix des plans coordonnés, pour un point déterminé de la surface, que je suis parvenu à donner à l'équation de la surface vibrante, la forme très simple sous laquelle j'ai crû pouvoir la présenter. Il est clair que, quelqu'eut été le point de la surface que l'on eut considéré, les résultats eussent été semblables ; ils s'appliquent donc, dans les mêmes

suppositions, à la totalité des points qui composent la surface élastique. Mais l'ensemble de telles suppositions exige évidemment que le plan tangent change de position ; z'' ne peut donc être considéré comme fonction des valeurs de x et y qui resulteroient d'une des positions quelconque de ce plan, mais bien des courbes formées sur la surface par les intersections de deux plans coordonnés qui passeroient par l'axe des $\underline{z}$; en sorte que, dans l'équation (e) x et y représentent véritablement des axes de courbes dépendantes de la figure initiale de la surface.

Cela posé, il est aisé de voir que cette équation renferme tous les cas que peut présenter le corps élastique vibrant.

$\mathfrak{N}$°11 Je supposerai d'abord que la figure du corps élastique en repos est toute entière comprise dans le plan, ce qui revient à faire $\square = 0$. Il est évident que si, dans l'équation $Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4}\right) = z''$ qui résulte de cette supposition, on prend pour les deux variables dont z'' doit être fonction, les intersections de deux plans coordonnés qui passeroient par l'axe des z'', avec la figure initiale de la surface, x et y seront de simples lignes droites.

J'ai présenté pour le concours de 1813 un mémoire dans lequel j'ai longuement discuté les conséquences de l'équation des plaques élastiques vibrantes. La classe ayant bien voulu témoigner qu'elle etait satisfaite de cette partie de mon travail, je crois pouvoir me dispenser de revenir ici sur le même objet.

L'équation $Kb^2\varepsilon\frac{d^4z''}{dx^4} = z''$ de la lame élastique peut être déduite, comme on sait, de l'équation de la plaque élastique en fesant dans cette dernière $\underline{y}$ constante. Tant que la lame est naturellement droite, $\underline{\mathrm{x}}$ ne peut représenter qu'une simple ligne droite.

Si la figure naturelle de la lame est courbe, et que pourtant le mouvement qui lui est imprimé s'exécute dans une direction perpendiculaire au plan qui comprend cette figure, l'équation $Kb^2\varepsilon\frac{d^4z''}{dx^4} = z''$ ne cesse pas de lui être applicable, mais les différentes valeurs de x représentent alors les arcs que composent la figure initiale.

Dans le cas présent z'' peut aussi être regardé comme fonction de deux coordonnées rectilignes ; c'est ainsi qu'en appliquant, avec les restrictions convenables, l'équation de la plaque circulaire à l'anneau plan, je suis parvenue (ν $\mathfrak{N}$°19 de mon mém p 1813) à prouver que l'anneau plan n'est, à parler analytiquement, qu'un cas particulier de la plaque circulaire.

A présent, si dans l'équation (e) on laisse à $\square$ une valeur indéterminée, mais que l'on regarde une des variables x et y comme constante, on aura l'équation

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4}+\square^2\frac{d^2z''}{dx^2}\right)=z''\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(f)$$

Cette équation appartient à la lame élastique naturellement courbe mue dans le plan de sa figure naturelle.
L'équation de l'anneau soumis à la même condition ne peut être qu'un cas déterminé de l'équation (f), elle est en effet identique à celle qu'Euler a donnée (de Sono campanorum in nov. comment. acad. petrop. , tome X).

L'anneau qui sert de limite à la cloche hémisphérique peut être considéré comme un cas particulier de cette surface ; il suit de là, que dans certains cas, la cloche et l'anneau doivent présenter le même nombre de lignes nodales, et rendre les mêmes sons correspondans.

La théorie que je présente ici me paraît d'autant plus incontestable, qu'elle est revêtue de l'autorité d'Euler. Cependant je ne puis dissimuler que, suivant $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, l'expérience donne des résultats contraires a ceux de l'analyse.

En effet, d'après Euler (de Sono campanorum $\mathfrak{N}$°14) l'intervalle entre les sons qui correspondent aux deux cas de quatre et six lignes nodales sur l'anneau circulaire, est exprimé par $\sqrt{6}$, c'est-à-dire que cet intervalle ne diffère pas sensiblement d'une dixième majeure. Suivant la table donnée par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni n°161 de son traité d'acoustique, le même intervalle seroit exprimé par $\frac{9}{4}$, il devroit donc être d'un octave et un ton majeur. De pareilles différences se font remarquer entre les nombres correspondans d'après la théorie aux cas de huit dix etc lignes nodales, et ceux qui, pour les mêmes cas, se trouvent portés dans la table donnée par $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni.

Si les différences dont je viens de faire mention étoient réelles, elles seroient inexplicables ; mais heureusement $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, dont l'ouvrage n'est pas moins digne d'éloge pour la bonne foi qui y règne, que pour la sagacité qui s'y fait remarquer, nous fournit lui même le moyen de les apprécier à leur juste valeur.

En effet, après avoir écrit la suite des nombres qui lui paroissent conformes à l'expérience, l'auteur ajoute « cette série sera celle d'une cloche d'harmonica, ou d'un autre vase semblable ; mais si la forme est différente, ou si l'épaisseur n'est pas la même vers le bord que vers le milieu, tous les intervalles peuvent se diminuer ou s'agrandir ; de manière que la distance du premier son au second, peut être moindre d'une octave, ou plus grande d'une douzième, et que de même, les autres distances s'élargissent ou se contractent. Cependant il faut regarder la série citée, comme le terme moyen pour les

distances d'un son à l'autre qui sont les mêmes que sur une plaque ronde divisée de la même manière. »

Il résulte du passage que je viens de transcrire que l'auteur a souvent employé des cloches très deffectueuses, je ferai voir plus bas que lorsqu'au lieu de cloches hémisphériques on soumet à l'expérience de simples calottes sphériques, les sons qui accompagnent les figures formées de quatre six etc lignes nodales, ne suivent plus la même loi. Ils se rapprochent alors plus ou moins de la série adoptée par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni. Je ne doute pas que si ce physicien ait pris soin d'éviter l'inégalité d'épaisseur en se bornant à employer des verres soufflés d'un bon choix, il n'eut apprécié avec son exactitude ordinaire l'influence de la diversité des formes. On voit au contraire que loin d'avoir séparé les différentes causes d'erreur qu'il a indiquées il s'est borné a balancer leurs résultats.

Cependant, aux termes mêmes de l'auteur, les extrêmes des erreurs qu'il a rencontrées dans l'intervalle des deux premiers sons, donneroient un résultat moyen conforme à la théorie. En effet la moyenne proportionnelle entre moins d'un octave et plus d'une douzième est bien une dixième comme le veut la théorie, et non pas une neuvième comme on le concluroit de la série adoptée par $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni.

En poursuivant la lecture du $\mathfrak{N}^{\circ}$161 du traité d'acoustique, on voit que l'auteur regarde l'hypothèse d'Euler comme contraire à la nature. Sans doute cette hypothèse n'est pas générale, cela ne peut s'appliquer au cas où la figure nodale qui se formeroit sur la cloche présenteroit d'autres lignes que celles qui résulteroient de la section de cette surface par un plan perpendiculaire à la base, et passant par le sommet de la même surface. Mais en se bornant à ce cas particulier, la théorie la plus générale donne le même résultat que l'hypothèse d'Euler. Il est arrivé plusieurs fois que ce grand géomètre, en partant d'hypothèses qui semblent contraires aux lois de la physique, a pourtant rencontré juste. On sait, par exemple, que l'équation qu'il a donnée pour les surfaces tendues, a été trouvée à l'aide d'une supposition de ce genre.

Au reste il regne dans tout ceci d'étranges confusions ; ni $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni ni Golovin ne paroissent avoir remarqué qu'Euler a donné deux équations différentes pour l'anneau élastique, en sorte qu'ils ont crû agir conformément à la théorie de cet illustre auteur, en appliquant aux cloches l'équation de l'anneau plan.

Par une autre erreur, Golovin a confondu la figure la plus simple que présente l'expérience avec la figure la plus simple qu'indique la théorie de l'anneau plan. Il est résulté de là qu'il a écrit la série 1, 2, 3, etc dont il auroit dû suprimer le premier terme. La série 2, 3, 4, etc qui est celle qu'a adoptée $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni, est donc précisément celle qu'auroit dû donner Golovin ; en sorte que $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni qui improuve l'explication de la vibration de la cloche par la vibration de l'anneau, retombe lui même dans cette

supposition en confondant les deux genres de mouvemens qu'Euler a distingués dans l'anneau.

De tout ce que je viens de dire il résulte, ce me semble, que c'est à tort et faute d'un examen suffisant, que $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni a crû devoir contredire la théorie d'Euler, et que l'expérience même, dont il a la bonne foi de rapporter les erreurs extrêmes, donne un résultat moyen conforme à cette théorie.

$\mathfrak{N}$°12 Si on prend $z'' = Bsin.n.\frac{x}{a}$ pour intégrale de l'équation $Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + \frac{1}{a^2}\frac{d^2z''}{dx^2}\right) = z''$, équation qui convient à la fois a la cloche hémisphérique ; dans le cas où la situation des divers points qui la composent ne seroit déterminée que par rapport aux arcs parallèles à la base ; et à l'anneau qui sert de base à cette surface ; il est évident que les sons qui accompagneront les figures nodales composées de $\underline{n}$ lignes sur la cloche, et de $\underline{2n}$ points sur l'anneau, seront proportionnels aux nombres $\frac{n}{a^2}\sqrt{(n^2-1)}$.

Le cas présent pouroit être le seul qu'Euler ait eu en vue dans son mémoire <u>De sono companorum</u>.

Des rapports analogues existent entre les figures et les sons de la calotte sphérique, comparée sous les mêmes conditions, à l'anneau qui lui sert de base.

En effet si on prend A pour le rayon de la sphère à laquelle la calotte appartient, l'équation commune à cette dernière surface et à l'anneau qui lui sert de base, sera $Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + \frac{1}{A^2}\frac{d^2z''}{dx^2}\right) = z''$.

Supposons que $\underline{a}$ soit le rayon de la base, et $\underline{\varphi}$ l'arc compris entre le point le plus élevé de la surface, et cette même base, on aura

$$a = Asin\varphi \quad , \quad A^2 = \frac{a^2}{sin^2\varphi} \quad , \quad Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + \frac{sin^2\varphi}{a^2}\frac{d^2z''}{dx^2}\right) = z''$$

En continuant de prendre $z'' = Bsin.n.\frac{x}{a}$, les sons qui accompagneront les figures nodales composées de $\underline{n}$ lignes sur la calotte, et de $\underline{2n}$ sur l'anneau seront proportionnels aux nombres $\frac{n}{a^2}\sqrt{(n^2 - sin^2\varphi)}$.

L'équation $Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + \frac{sin^2\varphi}{a^2}\frac{d^2z''}{dx^2}\right) = z''$ contient la théorie des mouvemens de l'anneau élastique vibrant dans sa plus grande généralité. L'angle φ est évidemment celui que la direction d'un quelconque de ces mouvemens fera avec la perpendiculaire au plan de l'anneau. Chaque direction du mouvement de l'anneau est correspondante, sous certaines conditions, aux mouvemens d'une calotte sphérique dont les limites sont d'une part la plaque circulaire et de l'autre la cloche hémisphérique.

𝔑°13 J'aurois désiré pouvoir établir une comparaison détaillée entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience ; mais il s'est rencontré tant de difficultés dans les expériences que j'ai tentées et il me restoit si peu de tems pour me livrer à ce genre de travail que je n'ai pû atteindre complettement le but que je m'étois proposé.

Je vais rendre compte de ce que j'ai fait à cet égard.

Le moyen que 𝔐r Chladni propose pour déterminer les différentes figures nodales qui se forment pendant le mouvement des cloches, m'ayant paru difficile à employer, je me suis contenté de me servir, comme à l'ordinaire, de poussière jettée sur la surface. On sent aisément que ce genre d'expériences exige beaucoup plus de précautions que si on agissoit sur des surfaces planes.

Dans ce dernier cas on obtient tout de suite la figure nodale complette. Si un son étranger vient effacer cette figure, la poussière ne reste pas moins sur la surface, et se trouve toute disposée pour former de nouveau la figure que l'on veut observer. Au contraire, lorsque la surface est courbe, on ne peut connoître la figure entière qu'en renouvellant plusieurs fois le même son, et plaçant successivement les différens points de cette surface dans une situation telle que la pesanteur n'entraîne pas la poussière qui la recouvre. Si par malheur un son étranger se fait entendre, la poussière est chassée hors de la surface, il faut donc déranger la main pour prendre une nouvelle portion de poussière. Après ce déplacement il est souvent impossible de reformer la figure que l'on vouloit déterminer. J'ai quelque fois passé une demie heure dans des essais de ce genre sans obtenir le moindre succès.

On peut encore compter au nombre des difficultés que présentent les expériences à faire sur les cloches sphériques, la similitude de situation des différens points de leur contour par rapport à leur centre de figure ; similitude d'ou résulte la possibilité que la figure nodale qui accompagne un son donné, varie à chaque instant de position.

Mais de tous les obstacles que j'ai rencontrés, le plus grand est le concours des sons, et l'oscillation des figures nodales qui, suivant que l'un ou l'autre des sons simultanés domine, se dessinent de manières différentes sans cesser jamais d'être vagues et incertaines.

Malgré les difficultés dont je viens de faire mention, je ne doute pas qu'avec du tems et de la patience, on ne puisse obtenir des résultats fort exacts.

Voici le petit nombre de faits que j'ai éprouvés un assez grand nombre de fois pour qu'il ne me reste aucun doute à leur égard.

Une calotte sphérique de la courbure la plus parfaite, dont l'arc compris entre le sommet et la base était de 73°3' centigrades, s'est partagée successivement en quatre et

six parties vibrantes au moyen de deux et trois lignes qui se croisoient au sommet de la surface.

Le son qui accompagnoit la première figure étoit fa $^{\sharp}$ 1

Le son qui accompagnoit la seconde figure étoit si $^{\flat}$ 2

Une autre calotte spherique dont la courbure étoit uniforme autour du sommet de la surface, mais dont les sections par les plans passants par ce sommet et par le centre de la sphère eussent présenté, au lieu d'arcs parfaits de cercle, des espèces d'anses de paniers, toutefois peu différens du cercle, a été soumise a la meme expérience. L'arc compris entre le sommet et la base étoit a très peu près 25" centigrades.

Le son qui accompagnoit la première figure étoit 5".

Le son qui accompagnoit la seconde figure étoit plus bas que 4".

Une troisième calotte sphérique à la figure de laquelle on peut appliquer les remarques dont j'ai fait mention relativement au cas précédent, et donc l'arc compris entre le sommet et la base étoit de 20" centigrades, à été soumise aux mêmes expériences.

Le son qui accompagnoit la première figure étoit sol $^{\sharp}$ 1

Le son qui accompagnoit la seconde figure étoit si 2

Il resulte de la théorie exposée $\mathfrak{N}$°12, que l'intervalle entre les sons qui accompagnent la première et la seconde figure doit en général être exprimé par $\frac{2\sqrt{(9-sin^2\varphi)}}{2\sqrt{2}-sin^2\varphi}$. Quant aux deux premiers cas soumis à l'expérience on peut prendre sans erreur sensible $sin^2\varphi = \frac{4}{5}$. $\frac{4}{5}$ est $>$ que $sin^2(65")$ et $<$ que $sin^2(73" - 9)$ mais plus près de la dernière valeur que de la première.

Soit donc $\frac{3\sqrt{(9-sin^2\varphi)}}{2\sqrt{(4-sin^2\varphi)}} = \frac{3\sqrt{35}}{2\sqrt{15}}$, on trouvera, en observant que $\sqrt{41}$ est un peu $>$ que $6,4$, que l'intervalle cherché est un peu $>$ que $\frac{3.64}{30} = \frac{32}{5}$, c'est-à-dire que cet intervalle doit être plus grand qu'un octave, un ton majeur et un demi ton majeur.

Dans le premier cas soumis à l'expérience, il y a deux raisons pour que l'intervalle des sons surpasse réellement un octave un ton et un demi ton.

Dans le second cas, les deux raisons d'inexactitudes, si elles sont susceptibles d'un effet sensible, doivent se compenser.

Il résulte de la première expérience que l'intervalle des sons est un octave, un ton majeur et un ton mineur. Il surpasse donc l'intervalle trouvé à l'aide du calcul, de la difference entre un ton mineur et un demi ton majeur. Cette difference est un peu plus forte que ne l'exige la théorie.

Dans le second cas donné par l'expérience, l'intervalle est un octave, un ton majeur et moins d'un ton mineur. Peut-être cet intervalle est-il encore un peu trop grand ; mais il approche pourtant beaucoup de celui qu'indique la théorie.

A l'égard du troisième cas soumis à l'expérience, on peut prendre sans erreur sensible $sin^2\varphi = \frac{1}{A}$ et par conséquent $\frac{3\sqrt{(9-sin^2\varphi)}}{2\sqrt{\sqrt{(4-sin^2\varphi)}}} = \frac{3\sqrt{35}}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\sqrt{21}$ est de très peu moindre que 4.6. On a donc l'intervalle cherché à très peu près égal à $\frac{46}{20} = \frac{23}{10} =$ un octave $+\frac{23}{20}$. L'intervalle $\frac{23}{20}$ differe à peine de $\frac{125}{104}$ qui exprime la somme d'un ton mineur et d'un demi ton mineur. Dans les suppositions présentes, l'intervalle donné par la théorie est donc un peu plus petit qu'un octave, un ton mineur et un demi ton majeur ; et on peut encore observer que la supposition $sin^2\varphi = \frac{1}{4}$ conviendroit mieux à l'arc de 34° qu'à celui de 30°.

L'intervalle donné par l'expérience est un octave, un ton majeur et un demi ton mineur. Il est donc encore un peu plus fort que ne le veut la théorie.

Dans la comparaison entre la théorie et l'expérience que je viens d'exposer, j'ai tenu compte de différences qui dans la théorie des plaques vibrantes eussent paru trop petites pour être remarquées [5] ; mais il faut observer que la différence extrême entre les intervalles des sons qui accompagnent la première figure considérée sur la plaque circulaire et sur la cloche hémisphérique devant être moindre qu'un ton majeur, puisqu'elle est exprimée par $\frac{4\sqrt{6}}{9}$, on ne peut s'assurer de l'exactitude de la théorie qu'en tenant compte des moindres circonstances qui accompagnent l'expérience.

Dans les cas que je viens d'examiner, l'intervalle entre les sons qui accompagnoient les seules figures que j'ai déterminées s'est toujours trouvé, de fort peu, à la vérité, plus grand que la théorie ne l'exigeoit ; mais au reste la marche de la théorie et celle de l'expérience se sont trouvées entièrement d'accord, car plus la calotte présentoit de courbure, plus aussi l'intervalle dont il s'agit s'est éloigné de celui qui convient aux plaques circulaires pour se rapprocher, et même plus que la théorie ne l'auroit fait prévoir de l'intervalle qu'Euler indique pour le cas des cloches hémisphériques.

Quoique je n'aie tenu note que des trois expériences que je viens de rapporter, j'ai eu occasion de remarquer un assez grand nombre de fois l'accord de la théorie et de l'expérience. Des faits pour ainsi dire fugitifs et que je ne pouvois plus retrouver lorsque je voulois les constater, m'ont convaincu que la théorie d'Euler sur l'anneau qui vibre dans le plan même de sa courbure, et la théorie plus générale que j'ai exposée n.12, rendoient un compte satisfesant des vibrations correspondantes des cloches sphériques.

J'ai tenté quelques expériences sur l'anneau ; mais je n'ai encore obtenu aucun succès.

5. car elles sont toutes fort au dessous d'un demi ton limite reconnue des erreurs inévitables

$\mathfrak{N}$°14 Après les cas dont je viens de parler, le plus simple auquel on puisse appliquer l'équation (e), est celui d'une surface cylindrique à base circulaire. En prenant R pour le rayon de cette base l'équation (e) deviendra

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4}+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}+\frac{1}{R^2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right)=z''$$

Si au lieu de l'équation de la surface entière, on veut avoir à présent celle d'une portion quelconque de la même surface, on aura, en fesant A l'arc de cette portion et $\underline{a}$ l'arc correspondant à A dans le cercle dont le rayon est pris pour unité, la proportion $1 : R :: a : A$. On en tire $R = \frac{A}{a}$, $\frac{1}{R^2} = \frac{a^2}{A^2}$.

Le genre de surfaces auxquelles appartient l'équation

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4}+2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z''}{dy^4}+\frac{a^2}{A^2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2}+\frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right)=z''.....(g)$$

n'a encore été, je crois, l'objet d'aucune expérience. Je me trouve donc privé, à cet égard, de tout secours étranger.

Je me suis décidé trop tard à reprendre le sujet qui fait l'objet du présent mémoire. Le tems me manque à la fois et pour exécuter la totalité des expériences que j'aurois désiré faire, et pour m'appliquer à la recherche des intégrales particulières qui devront rendre raison des résultats de l'expérience.

Quelqu'imparfaite que soit cette partie de mon travail, je vais en rendre compte.

$\mathfrak{N}$°15. Dans la vue d'obtenir, autant que possible, des résultats comparables entre les expériences que j'allois entreprendre et celles qui ont été faites dans le cas le plus simple que présentent les vibrations des surfaces planes, j'ai fait tailler un certain nombre de plaques quarrées qui ont été ensuite ployées aux différentes courbures dont je voulois connoître l'influence.

Avant de faire bomber les plaques dont il s'agit, j'avois essayé les sons correspondans aux différentes figures nodales qui peuvent s'y former ; j'espérois obtenir par là une première indication de l'effet de la courbure.

J'ai vu avec étonnement que la première figure nodale de $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni, c'est-a-dire celle qui est composée de deux lignes droites qui se croisent au centre de la plaque, figure qui se forme de la même manière et sur les surfaces cylindriques et sur les plaques, étoit accompagnée du même son après et avant la courbure. Sur une quarantaine de surfaces qui ont été ainsi essayées, il s'est trouvé sept ou huit fois une différence d'un demi ton.

Le son de la surface courbe étoit alors le plus élevé. Je suis porté à croire que le contraire devoit arriver. Je pense que la haute temperature à laquelle on est forcé d'élever le verre pour le rendre flexible, complique l'effet que je voulois obtenir en changeant l'élasticité naturelle des pièces. Le peu d'activité des ateliers à l'époque où je me suis occupé de ce genre d'essais, m'a empêché de les varier sous les différentes conditions que j'avois imaginées pour en écarter toute cause d'erreur.

En essayant de suite au moins quarante plaques quarrées, j'ai eu occasion de m'assurer qu'un des intervalles le plus constant est celui qui se fait remarquer entre les sons qui accompagnent, sur ce genre de surfaces, les figures nodales composées de deux lignes droites perpendiculaires entr'elles et de trois lignes également droites dont l'une est perpendiculaire aux deux autres.

Je n'ai remarqué que deux fois une différence qui n'étoit pas même d'un demi ton.

Lorsqu'il s'agit des surfaces cylindriques, l'intervalle des sons qui accompagnent les figures analogues à celles dont je viens de parler, varie en raison du plus ou moins de courbure.

Sur les plaques quarrées un nombre donné de lignes nodales est toujours accompagné du même son. Cette loi est si constante qu'elle a guidé $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni de la manière la plus heureuse dans la classification des distorsions des figures nodales.

Le contraire arrive dans les surfaces cylindriques. On verra tout à l'heure que des figures nodales composées du même nombre de lignes parallèles, les unes aux côtés courbes de la surface, les autres aux côtés droits de la même surface, sont accompagnées de sons differens.

En fin la figure nodale composée de deux lignes diagonales, se montre très facilement sur les plaques quarrées suivant la théorie que j'ai exposée $\mathfrak{N}$°11 de mon mémoire pour 1813, la figure dont il s'agit est équivalente à celle qui seroit composée de deux lignes droites parallèles à un des côtés de la plaque. $\mathfrak{M}^{\text{r}}$ Chladni a remarqué que jamais cette dernière figure ne se forme sur les plaques quarrées, mais qu'elle est toujours remplacée des distorsions dont la nature a été expliquée ailleurs.

La vibration des surfaces cylindriques offre encore, en ce point, des phénomènes entièrement contraires à ceux qui se font remarquer dans les mouvemens des plaques quarrées.

En effet le moindre degré de courbure suffit pour s'opposer à la formation de la figure nodale composée de deux lignes diagonales. Cette figure est quelque fois remplacée par deux lignes nodales parallèles aux côtés courbes de la surface.

Avant de tenter l'explication des phénomènes généraux que je viens d'exposer, je vais entrer dans quelques détails sur les expériences auxquelles je me suis livré.

$\mathfrak{N}$°16 Afin d'éviter toute confusion, je nommerai figure 1ère celle qui est formée de deux lignes nodales perpendiculaires entr'elles et passant par le centre de figure de la surface. la figure 2ème sera celle qui est composée de deux lignes nodales parallèles aux côtés droits de la surface, et d'une autre ligne nodale perpendiculaire aux deux premières et passant par le centre de figure de la même surface. Enfin je désignerai par a2ème la figure inverse de cette dernière, c'est-à-dire celle dans laquelle les deux lignes nodales parallèles entr'elles, seront en même tems parallèles aux côtés courbes de la surface, tandis que la ligne perpendiculaire a celles-ci sera parallèle aux côtés droits de la même surface.

Six surfaces cylindriques dont l'arc étoit de 180° ont été soumises à l'expérience.

Le son qui accompagnoit dans la

$$\left\{\begin{array}{ll}
premiere\ \ la & \left\{\begin{array}{l} fig\ \ 1^{\text{ère}}\ \ etoit\ \ plus\ \ que\ \ re\ \ 1 \\ fig\ \ 2^{\text{ème}}\ \ etoit\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ re\ \ 2 \end{array}\right. \\
seconde\ \ la & \left\{\begin{array}{l} fig\ \ 1^{\text{ère}}\ \ etoit\ \ si\ \ 1 \\ fig\ \ 2^{\text{ème}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ si\ \ 2 \end{array}\right. \\
troisieme\ \ la & \left\{\begin{array}{l} fig\ \ 1^{\text{ère}}\ \ etoit\ \ re\ \ 1 \\ fig\ \ 2^{\text{ème}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ re\ \ 2 \end{array}\right. \\
quatrieme\ \ la & \left\{\begin{array}{l} fig\ \ 1^{\text{ère}}\ \ etoit\ \ mi\ \ 1 \\ fig\ \ 2^{\text{ème}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ mi\ \ 2 \end{array}\right. \\
cinquieme\ \ la & \left\{\begin{array}{l} fig\ \ 1^{\text{ère}}\ \ etoit\ \ mi^{\text{b}}\ \ 1 \\ fig\ \ 2^{\text{ème}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ mi^{\text{b}}\ \ 2 \end{array}\right. \\
sixieme\ \ la & \left\{\begin{array}{l} fig\ \ 1^{\text{ère}}\ \ etoit\ \ fa\ \ 1 \\ fig\ \ 2^{\text{ème}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ fa\ \ 2 \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Une surface cylindrique dont l'arc étoit de 150° a présenté les mêmes figures.

Les sons étoient pour la $\left\{\begin{array}{l} fig\ \ 1^{\text{ère}}\ \ etait\ \ si\ \ 1 \\ fig\ \ a2^{\text{ème}}\ \ plus\ \ bas\ \ que\ \ sol\ \ 3 \end{array}\right.$

Trois surfaces cylindriques dont l'arc étoit de 120° ont été soumises aussi aux mêmes expériences.

Le son qui accompagnoit dans la

$$\left\{\begin{array}{l}
premiere \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad sol^{\sharp} \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad la \quad 2 \end{array}\right. \\
seconde \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad sol \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \quad un \quad peu \quad plus \quad bas \quad que \quad sol^{\sharp} \quad 2 \end{array}\right. \\
troisieme \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad fa \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots \quad fa^{\sharp} \quad 2 \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Une surface cylindrique dont l'arc étoit de 100° a encore montré les mêmes figures.

Les sons étoient pour la $\left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \ldots\ldots\ldots \quad re \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots \quad mi \quad 2 \end{array}\right.$

Cinq surfaces cylindriques dont l'arc étoit de 90°, soumises à l'expérience, ont donné les résultats suivans :

Le son qui accompagnoit dans la

$$\left\{\begin{array}{l}
premiere \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad re \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \quad \ldots\ldots \quad fa \quad 2 \end{array}\right. \\
seconde \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad mi \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \quad plus \quad bas \quad que \quad sol \quad 2 \end{array}\right. \\
troisieme \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad si^{\text{b}} \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad mi^{\sharp} \quad 2 \end{array}\right. \\
quatrieme \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad plus \quad bas \quad que \quad re \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad mi \quad 2 \end{array}\right. \\
cinquieme \quad la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad re \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad mi \quad 2 \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Quatre surfaces cylindriques dont l'arc étoit de 60° ont été soumises aux mêmes épreuves.

Le son qui accompagnoit dans la

$$\left\{\begin{array}{ll} premiere & la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad si^{\sharp} \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad re \quad 3 \end{array}\right. \\ seconde & la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad si^{\sharp} \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad ut^{\sharp} \quad 3 \end{array}\right. \\ troisieme & la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad re^{\sharp} \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \quad plus \quad haut \quad que \quad fa^{\sharp} \quad 2 \\ fig \quad a2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad re \quad 3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

La quatrième de ces surfaces donnoit les mêmes sons que la troisième ; mais la figure $\underline{a}2^{\text{ème}}$ n'étoit pas régulière.

Les quatre surfaces cylindriques dont il me reste à parler, seront rangées dans l'ordre de leur courbure respective. L'arc de la première s'est trouvé d'a peu près 30°. La courbure de la dernière étoit presqu'insensible.

Le son qui accompagnoit dans la

$$\left\{\begin{array}{ll} premiere & la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad re \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad fa \quad 2 \\ fig \quad a2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad la \quad 2 \end{array}\right. \\ seconde & la \left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad re \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \quad plus \quad haut \quad que \quad fa^{\sharp} \quad 2 \\ fig \quad a2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad sol^{\sharp} \quad 3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

La figure nodale composée de deux lignes parallèles aux côtés courbes de la surface s'est montrée sur la seconde de ces surfaces. Le son qui accompagnoit cette figure était si ^{b}.

Dans la troisième surface le son qui accompagnoit la

$$\left\{\begin{array}{l} fig \quad 1^{\text{ère}} \quad etoit \quad sol \quad 1 \\ fig \quad 2^{\text{ème}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad mi \quad 2 \\ fig \quad a2^{\text{ème}} \quad plus \quad bas \quad que \quad fa^{\sharp} \quad 2 \end{array}\right.$$

La figure composée de deux lignes nodale parallèles aux côtés courbes de la surface s'est également montrée sur celle dont je viens de parler. Le son qui accompagnoit cette figure étoit sol.1

Dans la quatrième et dernière surface

le son qui accompagnoit la $\begin{cases} fig & 1^{\text{ère}} & etoit & si & 1 \\ fig & 2^{\text{ème}}..... & & mi & 3 \end{cases}$

La figure 2eme ne s'est pas formée d'une manière régulière sur cette surface.

Lorsque l'on veut soumettre à l'expérience le cas des surfaces cylindriques, on a sans doute à vaincre plus de difficultés que lorsque l'on opere sur des surfaces planes. Le choix des pièces devient alors plus important.

J'ai éprouvé que des plaques qui se conduisoient comme si elles eussent été d'une épaisseur parfaitement égale, ont manifesté leur deffectuosité lorsqu'elles ont été ployées à des courbures qui pourtant m'ont paru très régulières. Cependant les expériences dont il s'agit ici, sont encore sans comparaison plus faciles que celles qui ont les cloches sphériques pour objet. Le concours des sons y est moins fréquent et plus aisé à éviter.

Je m'étois procuré un assez grand nombre de surfaces cylindriques de différentes grandeurs. J'esperois obtenir, comme on sait que cela a lieu pour les plaques, les figures nodales les plus simples sur celles de ces surfaces qui étoient d'une dimension plus petite, et avoir les figures nodales les plus compliquées sur les surfaces de plus grande dimension. Jusqu'à présent je n'ai reussi à former les figures $1^{\text{ère}}$ et 2eme que sur les surfaces dont le côté étoit d'un décimètre. D'autres plus petites ne donnoient que la figure 1ere. De plus grandes ne fesoient entendre le son qui accompagnoit la fig. 2eme qu'avec un mélange d'autres sons qui rendoit le principal difficile à juger.

Voici les seules conclusions que l'on puisse tirer du petit nombre de faits que j'ai exposés.

L'intervalle des sons qui accompagnent les figures 1ere et 2eme est d'autant plus grand que la courbure de la surface unité en expérience est moins considérable.

Les sons qui accompagnent les figures 2eme et $\underline{a}2^{\text{eme}}$ different d'autant plus entr'eux que la courbure de la surface est plus grande.

L'intervalle entre les sons qui accompagnent les figures $1^{\text{ère}}$ et $\underline{a}2^{\text{ème}}$ est d'autant moins grand que la courbure de la surface est elle même moins considérable.

On voit que sauf des anomalies qui sont toutes au dessous d'un demi ton (limite reconnue des erreurs inévitables) la première des conclusions ci dessus s'est confirmée sur la totalité moins une des pièces observées. La seconde et la troisième ne se trouvent au contraire appuyées que sur six expérience.

J'ai déjà fait mention de l'absence de la figure composée de deux diagonales nodales et de l'apparition des deux lignes nodales parallèles de la surface, figure qui me paroit remplacer dans le cas des surfaces cylindriques celle qui ne peut plus se former.

J'ai noté les sons qui sur deux pièces accompagnoient les deux lignes nodales parallèles. Mais j'ai observé cette figure sur plusieurs autres surfaces peu courbes. Je n'ai pas tenu note des sons parce que ces pièces ne m'ont pas donné la figure 1ere.

J'ai toujours remarqué que les deux lignes nodales parallèles étoient placées aux intervalles qui, dans le cas des plaques, est indiqué par la théorie, c'est-à-dire, comme je l'ai expliqué ailleurs, que la distance entre ces lignes étoit plus que double de celle entre une des mêmes lignes et la plus voisine des extrémités de la surface auxquelles elles sont parallèles.

J'ai aussi remarqué que les lignes dont il s'agit ici, sont un peu renflées vers le milieu ; d'ailleurs elles m'ont, le plus souvent paru parfaitement droites.

Les observations que j'ai rassemblées sont en si petit nombre que je ne suis pas encore en état de demêler avec certitude ce qui peut n'être qu'accidentel, des circonstances qui sont inhérentes à l'expérience ; c'est ce qui m'a déterminé à rapporter des détails qui pourront paroître minucieux, mais que je n'ai osé supprimer dans la crainte d'omettre quelques faits qu'une connoissance plus approfondie de cette matière pourra faire regarder comme essentielle.

$\mathfrak{N}$°17 Ce n'est qu'après avoir rassemblé un grand nombre de faits, qu'il sera possible d'entreprendre entre la théorie des surfaces cylindriques et l'expérience une comparaison détaillée.

Quant à présent, je n'oserois même affirmer que la figure 1ere soit due, sur ce genre de surface, à l'intégrale périodique.

En effet, une figure semblable peut résulter d'une infinité de suppositions différentes, il faudroit donc connoître une serie de figures et de sons correspondans à chacune d'elles qui pussent tous être expliqués par l'intégrale qui conviendroit en même tems à la fig. 1ere pour être en état de décider qu'elle est véritablement cette intégrale. C'étoit principalement pour fixer toute incertitude à cet égard, en partant d'un point déterminé et suffisamment connu, que j'avois desiré de m'assurer de l'intervalle des sons qui accompagnent la fig. 1ère, considérée sur la même pièce, avant et après la courbure.

Pour éviter toute conclusion hazardée, je me vois donc forcé de me borner à de simples considérations générales.

Il est évident que l'intégrale

$$z'' = \mathcal{A}\left(e^{\frac{\omega x}{A}} + e^{\frac{(A-x)\omega}{A}} + (1 \mp e^{\omega}) sin\frac{\omega x}{A} + (1 + e^{\Gamma}) cos\frac{\omega x}{A}\right)$$

$$+\mathcal{B}\left(e^{\frac{\omega y}{A}} + e^{\frac{(A-y)\omega}{A}} + (1 \mp e^{\omega}) sin\frac{\omega y}{A} + (1 + e^{\Gamma}) cos\frac{\omega y}{A}\right)$$

à l'aide de laquelle je suis parvenu à rendre compte de la figure nodale composée de deux diagonales, aussi bien que de plusieurs autres figures qui se rapportent aux différentes valeurs de l'angle ω (ν mon mem. μ 1813 n°10 et suivans) ne sauroit satisfaire à l'équation

$$Kb^2\varepsilon\left(\frac{d^4z''}{dx^4} + 2\frac{d^4z''}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z''}{dy^4} + \frac{a^2}{A^2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)\right) = z''.....(g)$$

des surfaces cylindriques.

Il suit de là que ni les deux diagonales nodales, ni les autres figures qui se rapportent à la même intégrale, ne peuvent se montrer sur ce genre de surfaces.

Mais si, $\underline{y}$ étant l'ordonnée courbe de la surface, on vouloit considerer cette variable comme constante, ce qui revient à faire abstraction de la dimension à laquelle appartient la courbure, cette surface pourroit se mouvoir comme une simple lame droite, ou, ce qui est la même chose, comme un assemblage de pareilles lames disposées autour du centre de courbure de la dimension dont on fait abstraction.

L'expérience est dans tout ceci parfaitement d'accord avec la théorie, car, non seulement, comme je l'ai déja dit, le moindre degré de courbure suffit pour empêcher la formation des deux diagonales nodales, mais aucune autre des figures qui appartiennent à la même intégrale, ne se montre non plus sur les surfaces cylindriques.

Au contraire les deux lignes nodales qui conviendroient au mouvement de la simple lame, se forment aux distances déterminées par la théorie et parallèlement, comme cela doit être, à la dimension dont cette manière de vibrer permet l'abstraction.

Revenons à l'équation générale des surfaces cylindriques.

Il est clair que l'une et l'autre des suppositions $z'' = e^{\pm\frac{\omega}{A}(x+y)}$, $z'' = e^{\pm\frac{\omega'}{A}(x+y)\sqrt{-1}}$ satisferont également à cette équation.

Les sons qui résulteroient de l'intégrale $z'' = e^{\pm\frac{\omega}{A}(x+y)}$ seroient proportionnels aux nombres $\frac{\omega}{A}\sqrt{(\omega^2 + a^2)}$. Ils seroient donc d'autant plus élevés que l'arc $\underline{a}$ seroit plus grand.

Les sons qui conviendroient à l'intégrale $z'' = e^{pm\frac{\omega'}{A}(x+y)\sqrt{-1}}$ seroient proportionnels aux nombres $\frac{\omega'}{A}\sqrt{(\omega'^2 - a^2)}$. Ils seroient donc d'autant moins élevés que l'arc $\underline{a}$ seroit plus grand.

Le tems me manque pour examiner les conséquences que l'on pourroit tirer des intégrales particulières qui resulteroient de la combinaison de celles dont je viens de parler. On voit seulement que si on employoit a la fois ces deux genres d'intégrales les nombres qui conviennent aux sons, dans chacune d'elles, devroient être égaux entr'eux.

Sans cette condition, on ne pourroit obtenir de vibrations régulières.

Les sons qui appartiennent aux deux genres d'intégrales dont on vient de parler, suivent, comme on voit, des lois opposées. Les sons qui accompagneroient les figures nodales comprises dans le premier, seroient d'autant plus rapprochés entr'eux que la surface est plus courbe. Au contraire les sons qui accompagneroient les figures nodales comprises dans le second, seroient d'autant plus éloignés entr'eux que la surface est plus courbe. En fin si on compare deux sons, l'un dépendant du premier genre d'intégrales, l'autre appartenant au second, leur intervalle sera d'autant plus grand que la courbure de la surface sera plus considérable.

Les résultats généraux de l'expérience que j'ai exposée n°16, sont, comme on le voit, entièrement d'accord avec cette indication de la théorie. Ils manifestent, si je ne me trompe, l'existence du terme $\frac{a^2}{A^2}\left(\frac{d^2z''}{dx^2} + \frac{d^2z''}{dy^2}\right)$ dans l'équation des surfaces élastiques cylindriques.

Si je m'en raportois à l'inspection des figures, je serois porté à penser que la figure 2eme, aussi bien que plusieurs autres figures que j'ai aperçues sur certaines pièces, doivent appartenir à une intégrale périodique par rapport a l'une des variables $\underline{x}$ et $\underline{y}$ et non périodique par rapport à l'autre. Je crois aussi que l'état des extrémités parallèles à la direction de la moindre courbure de la surface, doit être différent, dans ce cas de l'état des extrémités qui sont dans la direction de la plus grande courbure de la même surface.

Ce que je puis affirmer au moins, c'est que les figures nodales composées de lignes perpendiculaires entr'elles, forment, lorsqu'elles sont en nombre égal suivant chaque direction, au lieu de simples quarrés, des parallélogrammes d'autant plus alongés que la courbure de la surface est plus considérable. Je n'ai vu la figure $\underline{a}2^{\text{eme}}$ que sur des surfaces dont l'arc étoit de 60° et au dessous. Les lignes nodales étoient disposées comme sur les surfaces planes ; mais la difference dont je viens de parler étant peu sensible sur les surfaces de cette courbure, et d'ailleurs le nombre des faits observés étant fort petit, je ne puis encore décider si cette différence appartiendroit également au cas dont il s'agit.

C'est avec regret que je me vois forcé de terminer ici mes recherches. Je sens combien elles laissent encore à désirer. Mais peut-être aussi m'eut-il fallu plusieurs années, pour rassembler, relativement aux seules surfaces cylindriques, une masse de faits qui permit d'agir sur ce genre de surfaces avec le degré de certitude que l'on a obtenu, dans le cas des surfaces planes, a l'aide des nombreuses expériences de $\mathfrak{M}^{\mathrm{r}}$ Chladni.

Index des noms de personnes

Abbé Mazzocchi, 30

Bernoulli, Daniel, 34, 199
Bernoulli, Jacques, 124, 126, 140, 148
Berthollet, Claude-Louis, 23, 31
Bezout, Étienne, 17, 18
Biot, Jean-Baptiste, 23, 31, 39, 42, 61, 69, 72, 117, 171, 172, 179, 188, 209, 216, 219

Cagniard-Latour, Charles, 169
Carnot, Lazare, 100, 165
Cauchy, Augustin Louis, 149, 150, 176, 177, 179, 186, 196, 197
Chladni, Ernst, 10, 12, 29–36, 41, 42, 46, 48, 49, 65–68, 73, 77–81, 92, 95–101, 114, 115, 120, 136, 142, 147, 155, 164, 166, 169, 172, 175, 190–192, 195, 196, 202, 216, 221–225
Condorcet, Nicolas, 51, 52
Cousin, Jacques Antoine Joseph, 20
Cuvier, Georges, 145, 165, 213

D'Alembert, Jean Le Rond, 11, 34, 124, 126, 127, 200
de Fourcroy, Antoine-François, 18
de Lacépède, Bernard-Germain, 42, 146, 147
de Laplace, Pierre-Simon, 23, 25, 31, 34, 36, 70, 71, 100, 117, 145, 146, 158, 163–165, 171, 210, 213
de Prony, Gaspard, 30, 34, 35, 42, 146, 213
Delambre, Jean-Baptiste Joseph, 25, 34, 120, 165
Dutrochet, Henri, 17

Euler, Jean-Albert, 29
Euler, Léonhard, 11, 18, 29, 34–36, 42–54, 57–61, 64, 68, 72, 73, 75, 80, 92, 93, 98–100, 106, 114, 115, 134, 142, 147, 148, 152–155, 158, 159, 175, 176, 178, 191, 195, 200, 201, 205, 207–209, 216–223, 225

Fermat, Pierre, 1, 2
Fourier, Fourier, 124
Fourier, Joseph, 20, 21, 24, 26, 39, 121, 126, 144, 145, 149, 152, 154, 169, 173–175, 177, 188, 197, 198, 212, 213

Galilée, 35
Gauss, Carl Friedrich, 1, 22, 24, 38, 41, 45, 152, 153, 161, 197
Gay-Lussac, Joseph Louis, 169

Geoffroy, Ernest Louis, 17
Geoffroy, René-Claude, 17
Gergonne, Joseph-Diaz, 39
Germain Marie-Madeleine, 17
Germain, Ambroise-François, 16
Germain, Angélique, 17
Germain, Sophie, **ii**, **1–5**, **7, 8**, **10–13**, **15–29**, **36–39**, **41–52**, **54**, **56–62**, **64–67**, **70–81**, **83–104**, **106–118**, **120, 121**, **123–130**, **132–198**, **204–212**, **222**, **225**
Germain, Thomas, 16
Golovin, 221
Gossec, François-Joseph, 42
Grétry, André, 42

Hachette, Jean-Nicolas-Pierre, 25
Hallé, Jean Noël, 211, 212
Haüy, René Just, 34, 42
Hooke, Robert, 35
Humbolt, Alexandre, 31

Kirchhoff, Gustav Robert, 180–183, 186
Kramp, Christian, 39

Lacroix, Sylvestre-François, 25, 50, 70, 71, 100
Lacépède, Etienne, 31
Lagrange, Joseph-Louis, 11, 18, 20, 22, 24, 25, 34, 36, 38, 45, 49–52, 54, 55, 57, 58, 70–72, 76, 80, 84, 87, 92, 100, 101, 106, 107, 132, 159, 162, 163, 166, 171, 177, 180, 184, 197, 200, 209, 210, 219
Lalande, Jérôme, 20–22, 38
Le Breton, Joachim, 42
Leblanc, Antoine-Auguste, 18, 19, 24, 37, 38
Legendre, Adrien-Marie, 11, 24, 33, 34, 44, 47, 49, 50, 52, 70–73, 75, 80, 100–102, 117, 121, 128, 144, 159, 165, 170, 171, 173, 174, 177, 188, 195, 197, 204, 206, 208–210
Lepaute, Nicole Reine, 22
Lherbette, Armand-Jacques, 2, 17, 189
Lherbette, Charles, 17
Lherbette, Honorine-Marie, 17
Libri, Guglielmo, 23, 24, 37–39, 187
Lichtenberg, Georg Christoph, 31

Malus, Étienne Louis, 70, 71
Mariotte, Edme, 35
Monge, Gaspard, 25
Montucla, Jean-Étienne, 17, 18, 37
Mérul, Nicolas, 42

Napoléon Bonaparte, 12, 31, 32, 202
Navier, Claude-Louis, 31
Navier, Henri, 35, 147, 148, 175–177, 179, 180, 186, 188, 197
Newton, Isaac, 18, 36, 192

Paradisi, Giovanni, 42, 65, 190, 191
Poinsot, Louis, 117
Poisson, Siméon Denis, 4, 22–25, 31, 34, 36, 37, 61, 81, 91, 100, 110, 114, 117, 124–130, 132, 135, 136, 141, 145–148, 151, 158, 160, 163–171, 174, 176, 179, 182, 183, 188, 191, 197, 200, 211–213, 220
Pythagore, 199

Reynaud, Antoine-André-Louis, 25
Riccati, Giordano, 36, 79, 80, 134, 148
Rouillé de Meslay, Jean-Baptiste, 27

Sauveur, Joseph, 34, 35, 199, 201, 202
Savart, Félix, 23, 31, 39, 136, 144, 169
Sedillot, Charles-Émmanuel, 120

Taylor, Brook, 34, 35, 199
Todhunter, Isaac, 183–185
Trutat, Antoine Henri Amable, 17

Wheatstone, Charles, 148

Index des mots-clés

comparaison, 222–224
courbures, 104, 223
expériences, 221–225
figures, 223, 224
hypothèse, 221
lignes nodales, 225
sons, 223–225
surfaces, 124, 146, 202, 216, 223, 224
vibrations, 202, 217
élasticité, 163, 217, 218
épaisseur, 146
équation, 162, 163, 218
Académie, ii, 2, 4, 9, 10, 12, 16, 17, 19, 22, 24–29, 32, 34, 36, 41, 69, 71, 73, 78, 80, 100, 102, 104, 117, 118, 121, 122, 141, 145, 147, 149, 151, 161, 164, 165, 169, 172, 173, 178, 180, 181, 185, 186, 195–197, 199, 213
comparaison, 3, 4, 46, 65, 73, 95–99, 101, 102, 114–117, 125, 136, 143, 164, 169, 183, 185, 219, 221, 223, 224
concours, ii, 3, 9, 10, 16, 19, 24, 28, 29, 34, 36, 37, 41, 47, 49, 52, 64, 65, 70–73, 75, 77, 80, 95, 100, 102, 117, 118, 122, 124, 126, 128, 133, 134, 142, 144, 158, 161, 162, 164, 165, 170, 172–174, 178, 185, 195, 196, 223
courbures, 51, 52, 56, 58, 59, 105, 106, 125–127, 130, 136, 137, 139, 140, 143, 155, 156, 163, 165, 166, 176, 212, 217, 218, 221, 224
expériences, 30, 31, 33–35, 42, 49, 50, 65–68, 73, 75, 77, 79–84, 94–102, 114–117, 120, 128, 136, 137, 142–144, 147, 148, 151, 155, 156, 158, 159, 164–166, 169, 172, 175, 181, 185, 191, 192, 195, 196, 199, 202, 216, 219, 221–225
figures, 31, 66, 67, 77–79, 81, 88, 94–98, 112, 113, 115–117, 134, 137, 222–225
hypothèse, 51, 52, 57, 59, 66, 83–85, 104, 106, 124–128, 130, 132, 138, 140, 141, 143, 144, 147, 151, 155, 163, 165–167, 169–172, 174–176, 178–180, 184, 196, 209–213, 216, 221
lignes nodales, 31, 48, 66, 67, 81–83, 95, 97, 100, 112, 115, 134, 136, 137, 143, 220–222, 224, 225

sons, 29, 45, 46, 78, 82, 83, 98–100, 112–116, 134, 136, 137, 143, 207, 216, 219, 221–225

surfaces, ii, 1–4, 8, 15, 19, 24, 35, 41, 42, 48, 49, 51, 57, 59, 61, 64, 65, 67, 71–73, 75, 76, 84, 87–94, 96–102, 105, 106, 108, 110, 111, 113–118, 120, 121, 125, 128, 130, 132, 137, 143–145, 147–149, 152–158, 160, 161, 163–166, 169–171, 174, 176–181, 183, 184, 186–188, 190–192, 195–197, 201, 210, 217–219, 221–224

surface, 224

vibrations, ii, 1–4, 8, 15, 19, 24, 29–31, 33–35, 42, 44, 47–49, 51, 59, 64, 66, 71–73, 75, 78, 80, 88–91, 95, 100, 101, 106, 111, 112, 115–118, 121, 125, 128, 130, 135, 144, 145, 147–150, 152–154, 156–158, 160, 161, 163–165, 168–171, 175–181, 183–188, 190–192, 195–197, 199, 201, 216, 219, 223

élasticité, ii, 4, 5, 10, 19, 20, 29, 34, 35, 43, 44, 48–51, 55–60, 72, 73, 84–86, 99, 106, 126, 127, 129, 138, 140, 141, 145, 147–152, 155, 156, 159, 163, 166–169, 171, 177, 180, 183, 185–187, 191–193, 195, 197, 200, 201, 209–212, 216–218, 225

élastiques, 175

épaisseur, 43, 54–56, 59, 71, 85, 98, 107, 114, 116, 128, 129, 141, 146–150, 155–157, 163, 166–168, 181, 218, 221, 223, 224

équation, 42–45, 48–51, 53, 54, 57–67, 69, 71, 72, 74–77, 84, 85, 87–91, 94, 97, 101, 102, 106, 108–114, 116, 120, 125, 128–130, 132–135, 141, 142, 147–150, 154–158, 160, 163–168, 170–172, 174, 176, 177, 179–184, 187, 200, 201, 204–207, 209–211, 213, 216–225

Bibliographie

Académie royale des sciences de Paris

GERMAIN, Sophie (sept. 1811), « Mémoire sur cette question proposée par la première classe de l'institut », Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

— (sept. 1813), « Mémoire sur cette question proposée par la première classe de l'institut », Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

— (sept. 1815), « Mémoire sur cette question proposée par la première classe de l'institut », Archives de l'Académie des Sciences de Paris.

Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les mémoires dec mathématiques et de physiques,1783 (1786).

Memoires de l'Institut national des sciences et arts - Sciences mathematiques et physiques (1802).

Procès-verbaux (1808-1811).

Procès-verbaux (1812-1815).

Procès-verbaux des séances de l'Académie, 1824-1827 (1918).

Journaux

Annales de chimie et physique (1816).

Annales de chimie et physique (1820).

AYLMER, J. (février 1876), « Sir Charles Wheatstone », *L'électricité, revue scientifique illustrée de l'électricité* 2.

Correspondance sur l'École Royale Polytechnique (jan. 1816).

Journal de l'Empire (s. d.).

Journal des débats politiques et littéraires (jan. 1816).

Journal des débats politiques et littéraires (mai 1832).

Journal des mathématiques pures et appliquées] (1880).

Journal des sçavans (1817).

Journal des sçavans (1826).
La Revue et Gazette Musicale de Paris (oct. 1838), Dimanche 14.
Le Moniteur universel (jan. 1809).
Mercure de France (1810).
« Mort de la mathématicienne Sophie Germain » (1831), *La France pittoresque*.

Sources primaires

Bernoulli, Daniel (1753), « Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin* 9, p. 147-172.

Bernoulli, Jacob II (1789), « Essai théorique sur les vibrations des plaques élastiques, rectangulaires et libres », *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 5, p. 197-219.

Bernoulli, Jacques (1705), « Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort », *Histoire de l'Acadadémie royale des sciences*, p. 176-186.

Biot, Jean-Baptiste (1802), « Recherches sur l'intégration des équations différentielles partielles, et sur les vibrations des surfaces », *Mémoires de l'Institut national des sciences et arts-Sciences mathématiques et physiques* tome 4, p. 21-111.

Cauchy, Augustin-Louis (1887), *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy : 2e serie*, Paris : Gauthier-Villars.

— (1890a), « Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide », in : *Œuvres complètes, 2e série*, t. 8, Paris : Gauthier-Villars, p. 288-378.

— (1890b), « Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide », in : *Œuvres complètes, 2e série*, t. 8, Paris : Gauthier-Villars, p. 381-411.

— (1890c), « Sur l'équilibre et le mouvement d'une verge rectangulaire », in : *Œuvres complètes, 2e série*, t. 8, Paris : Gauthier-Villars, p. 412-426.

— (1890d), « Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique », in : *Œuvres complètes, 2e série*, t. 8, Paris : Gauthier-Villars, p. 195-226.

— (1891a), « Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque élastique dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens », in : *Œuvres complètes, 2e série*, t. 9, Paris : Gauthier-Villars, p. 9-22.

— (1891b), « Sur l'équilibre et le mouvement d'une verge rectangulaire extraite d'un corps solide dont l'élasticité n'est pas la même dans tous les sens », in : *Œuvres complètes, 2e série*, t. 9, Paris : Gauthier-Villars, p. 23-40.

CHLADNI, Ernst Florens Friedrich (1809), *Traité d'acoustique*, Paris : Courcier.

Correspondance de Sophie Germain avec les mathématiciens et savants Cauchy, Delambre, Fourier, Gauss, Le Gendre, d'Ansse de Villoison, etc,-1801-1900 (s. d.), Bibliothèque nationale de France. Département des manuscrits français.

COUSIN, Jacques Antoine Joseph (1796), *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris : Régent & Bernard.

D'ALEMBERT, Jean (1747), « Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration-suite des mêmes recherches », *Histoire de l'Acadadémie Royale des sciences et belles lettres*, p. 214-220.

— (1761), « Recherches sur les vibrations des cordes sonores », *Opuscules mathématiques* 1, p. 1-64.

DIDEROT, Denis et Jean D'ALEMBERT (1755), *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciencesn des arts et des métiers, par une société de gens de lettres]*, t. 5, Paris : Briasson, David, Le Breton & Durand, p. 444-447.

EULER, Leonhard (1744), *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Genève : Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.

— (1765), « Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin* 21, p. 307-334.

— (1767), « Recherches sur la courbure des surfaces », *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, p. 119-143.

— (1768), « Sur la vibrations des cordes », *Histoire de l'Acadadémie Royale des sciences et belles lettres*, p. 69-85.

— (1779), « Investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt », *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, p. 103-161.

FOURIER, Joseph (1818), « Note relative aux vibrations des surfaces élastiques et au mouvement des ondes », *Bulletin des sciences par la Société Philomathique de Paris*, p. 129-136.

GERMAIN, Sophie (1821), *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, Paris : Vve Courcier.

— (1826), *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et équation générale de ces surfaces*, Paris : Huzard-Courcier.

GERMAIN, Sophie (1828), « Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques », *Annales de chimie et de physique* tome 38, p. 123-131.

— (1831), « Mémoire sur la courbure des surfaces », *Journal für die reine und angewandte Mathematik de Crelle, Berlin* 7, p. 1-29.

— (1833), *Considérations générales sur l'état des sciences et des lettres, aux différentes époques de la culture*, Paris : Lachevardière.

— (1880), « Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques », *Journal des mathématiques pures et appliquées* 6, p. 1-29.

— (2013), *Papiers de Sophie Germain - Recueil de dissertations et problemes mathématiques et physiques - 1801-1900*, Bibliothèque nationale de France. Département des manuscrits français.

Histoire de l'Académie royale des inscriptions et belles-lettres (1777), t. 38, Paris : Imprimerie royale, p. 283-290.

KIRCHHOFF, Gustav (1850), « Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe », *Journal für die reine und angewandte Mathematik de Crelle* 38, p. 51-88.

LAGRANGE, Joseph-Louis (1811), *Mécanique analytique*, t. 1, Paris : Mme Courcier.

— (1828), « Note communiquée aux Commissaires pour le prix de la surface élastique décembre 1811 », *Annales de Chimie et de Physique* 39, p. 149-151.

LAPPARENT, Albert de (1895), « Poisson », *École polytechnique-livre du centenaire (1794-1894)* 1, p. 97-103.

MONTUCLA, Jean-Etienne (1968), *Histoire des mathématiques*, t. 3, Paris : Blanchard, p. 659-667.

NAVIER, Henri (1823), « Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques », *Bulletin des sciences par la Société Philomathique de Paris*, p. 92-102.

PARADISI, Giovanni (1806), *Ricerche sopra la vibrazione delle lamine elastiche*, t. 1, Bologna : Classe di fisica e matematica, p. 393-431.

POISSON, Siméon Denis (1816), *Mémoire sur les surfaces élastiques*, Paris : Firmin Didot, p. 167-225.

— (1827), « Note sur les vibrations des corps sonores », *Annales de Chimie et de Physique* 36, p. 86-93.

RICCATI, Giordano (1782), « Delle vibrazioni sonore dei cilindri », *Memorie di matematica e fisica delle Societa italiana* 1, p. 444-525.

RODRIGUES, Olinde (1815a), « Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une classe d'intégrales

doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie », *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique* 3, p. 162-183.

— (1815b), « Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces », *Bulletin scientifique de la société philomatique de Paris*, p. 34-36.

Savart, Félix (1824), « Mémoire sur les vibrations des corps solides, considérés en général », 25.

Sources secondaires

Anselmet, Fabien et Pierre-Olivier Mattei (2015), *Acoustique, aéroacoustique et vibrations*, Londres : ISTE Editions, p. 13-18, 225-266.

Bandini, A. (s. d.), *Empirisme*, http ://encyclo-philo.fr/empirisme-a/, Version Grand Public.

Beauvalet-Boutouyrie, Scarlett (2000), « La femme seule à l'époque moderne : une histoire qui reste à écrire », in : *Annales de démographie historique*, JSTOR, p. 127-141.

Belhoste, Bruno (1985), *Cauchy, un mathématicien légitimiste du XIXe siècle*, Paris : Belin.

— (2011), *Paris savant*, Paris : Armand Colin.

— (2016), *Histoire de la science moderne : De la Renaissance aux Lumières*, Paris : Armand Colin.

Bernard, Yann (2014), « Autour des surfaces de Willmore », Images des mathématiques.

Biasi, Pierre-Marc de (2003), « Sciences : des archives à la genèse. Pour une contribution de la génétique des textes à l'histoire des sciences », *Genesis (Manuscrits-Recherche-Invention)* 20.1, p. 19-52.

Boucard, Jenny (2011), « Un "rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres" : études sur l'utilisation des congruences en France de 1801 à 1850 », thèse de doct., Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.

— (2020), « Arithmetic and Memorial Practices by and around Sophie Germain in the 19th Century », in : *Against All Odds*, Springer-Verlag, p. 185-230.

Boucard, Jenny et Isabelle Lémonon (2018), « «Women in Mathematics : Historical and Modern Perspectives» Réflexions sur les femmes en mathématiques ».

Boyé, Anne (2017), « Sophie Germain, une mathématicienne face aux préjugés de son temps », *Le Bulletin Vert* 523, p. 231-243.

Boyé, Anne et Christine Charretton (2017), *je suis ... Sophie Germain*, Lyon : Jacques André éditeur.

Brian, Eric et Christiane Demeulenaere-Douyère, éd. (1996), *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences : guide de recherches*, Paris : TEC & DOC-Lavoisier.

Bucciarelli, Louis L et Nancy Dworsky (2012), *Sophie Germain : An essay in the history of the theory of elasticity*, Londres : D. Reidel Publishing Company.

Busser, Elisabeth (2001), « Portraits de femmes », *Tangente*, Numéro 83, p. 14-16.

Caradonna, Jeremy L (2009), « Prendre part au siècle des Lumières. Le concours académique et la culture intellectuelle au XVIII e siècle », in : *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, t. 64, 3, Cambridge University Press, p. 631-662.

Chazal, Gérard (2006), *Les femmes et la science*, Paris : Ellipses Marketing, p. 52-54.

Crosland, Maurice (2002), *Science Under Control : The French Academy of Sciences 1795-1914*, Cambridge : Cambridge University Press.

Dahan Dalmédico, Amy (1987a), « Mécanique et théorie des surfaces : les travaux de Sophie Germain », *Historia mathematica* 14.4, p. 347-365.

— (1987b), « Sophie Germain une femme aux marges de la communauté scientifique », in : *Histoire et épistémologie des mathématiques : les mathématiques dans la culture d'une époque : actes du Colloque INTER-IREM : Strasbourg 22-23 mai 1987*, Université Louis Pasteur, Institut de recherche sur l'enseignement des sciences, p. 18.

— (1988), « Etude des méthodes et des "styles" de mathématisation : la science de l'élasticité », in : *Sciences à l'époque de la Révolution française : recherches historiques*, Paris : Albert Blanchard, p. 349-442.

— (1992a), « Leçons de Lagrange », in : *L'École normale de l'an III : Leçons de mathématiques, Laplace-Lagrange-Monge*, Université Louis Pasteur, Institut de recherche sur l'enseignement des sciences, p. 169-265.

— (1992b), *Mathématisations : Augustin-Louis Cauchy et l'École Francaise*, Marseille : Éditions du Choix.

— (1996), « Sophie Germain », in : *Les Mathématiciens*, sous la dir. de Pierre Thuillier, Paris : Belin, p. 72-85.

Del Centina, Andrea (2005), « Letters of Sophie Germain preserved in Florence », *Historia Mathematica* 32.1, p. 60-75.

Del Centina, Andrea et Alessandra Fiocca (2018), « On the Correspondence of Sophie Germain », in : *Mathematical Correspondences and Critical Editions*, sous la dir. de Maria Teresa Borgato, Erwin Neuenschwander et Irène Passeron, Cham, Suisse : Springer International Publishing, p. 147-166.

DEMEULENAERE-DOUYÈRE, Christiane (1996), « Les sources documentaires conservées à l'Académie des sciences », p. 69-73.

DESTOUCHES, Jean Louis (1967), « Qu'est-ce que la physique mathématique », p. 7-32.

DHOMBRES, Jean G et Jean-Bernard ROBERT (1998), *Fourier, créateur de la physique-mathématique*, Paris : Belin.

DHOMBRES, Nicole (1985), « Napoleon et les Scientifiques, Part I : 1779-1798 », *La Revue du Souvenir Napoléonien* 340, p. 2-26.

DHOMBRES, Nicole et Jean DHOMBRES (1989), *Naissance d'un nouveau pouvoir : Sciences et savants en France, 1793-1824*, Paris : Payot.

DUHEM, Pierre (2016), *La théorie physique. Son objet, sa structure*, Lyon : ENS éditions, p. 197-248, 273-332.

EHRHARDT, Caroline (2011), *Évariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique*, Paris : EHESS.

EMERY, Monique et Centre international de synthèse. COLLOQUE (1983 : PARIS) (1989), *Jean D'Alembert, savant et philosophe : portrait à plusieurs voix : actes du colloque organisé par [le] Centre international de synthèse-Fondation pour la science : Paris, 15-18 juin 1983*, Edition des Archives contemporaines.

FABIANI, Jean-Louis (1998), « Jacques Revel (sous la direction de), Jeux d'échelles. La micro-analyse à l'expérience, Paris, Gallimard-Le Seuil,«Hautes Études», 1996, 248 p. », in : *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, t. 53, 2, Cambridge University Press, p. 444-447.

FIOCCA, Alessandra (sept. 2014), « The Correspondence between Sophie Germain and Gauss », in : *ESHS Conference*, Lisbonne.

FUSS, Paul Heinrich (1968), *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIeme siècle : Lettres de Jean Bernoulli, le père, à Léonard Euler. Correspondance entre Nicolas Bernoulli (fils aîné de Jean) et Goldbach. Correspondance entre Daniel Bernoulli et Goldbach. Lettres de Daniel Bernoulli à Léonard Euler. Lettres de Daniel Bernoulli à Nicolas Fuss. Lettres de Nicolas Bernoulli (neveu de Jacques et de Jean) à Léonard Euler*, t. 2, St Pétersbourg : l'Académie impériale des sciences.

GARGAM, Adeline (2009), « Savoirs mondains, savoirs savants : les femmes et leurs cabinets de curiosités au siècle des Lumières », *Genre & Histoire* 5.

GERINI, Christian et Norbert VERDIER (2014), *L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle*, Londres : College Publications, p. 1-36.

GÉRINI, Christian (2008), « Les Annales de mathématiques pures et appliquées de Gergonne », *Bibnum*.

Gilain, Christian et Alexandre Guilbaud (2015), *Les Sciences mathématiques 1750-1850 : Continuités et rupture*, Paris : Cnrs.

Gillispie, Charles Coulston (1980), *Dictionary of scientific biography*, t. 5, New-York : Charles Scribner's Sons, p. 375-376.

Grattan-Guinness, Ivor (1990), *Convolutions in French Mathematics, 1800–1840. From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics, vols 3*, Bale, Suisse : Birkhäuser.

Gray, Jeremy (2006), « A history of prizes in mathematics », *The Millennium Prize Problems*, p. 3-27.

Griset, Pascal et Florence Greffe (2016), *Une compagnie en son siècle : 350 ans de l'Académie des sciences*, Paris : Le Cherche midi.

Hadamard, Jacques (1902), « La théorie des plaques élastiques planes », *Transactions of the American Mathematical Society* 3.4, p. 401-422.

Hascher, Xavier et Athanase Papadopoulos (2015), *Leonhard Euler : Mathématicien, physicien et théoricien de la musique*, Paris : CNRS Éditions.

Henry, Charles (1879), « Manuscrits de Sophie Germain », *Revue philosophique* 8, p. 631.

Higgs, David (2007), « French Salons : High Society and Political Sociability from the Old Regime to the Revolution of 1848 », *The American historical review* 112.3, p. 934-934.

Hill, Amy Marie (1995), « Sophie Germain : a mathematical biography », thèse de doct., États Unis : University of Oregon.

Houssay, Anne (2009), « Félix Savart acousticien : entre mythe et réalité », in : 134e congrès, Bordeaux.

Israel, Giorgio (1996), *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*, Paris : Éditions du Seuil.

Joffredo, Thierry (2017), « Approches biographiques de l'Introduction á l'analyse des lignes courbes algébriques de Gabriel Cramer », thèse de doct., Université de Lorraine.

Jouve, Guillaume (2007), « Imprévus et pièges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783). Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions », thèse de doct., Lyon : Université Claude Bernard.

Kurrer, Karl-Eugen (2018), *The history of the theory of structures : searching for equilibrium*, Berlin : John Wiley & Sons.

Le Lay, Colette (2004), « L'astronomie des dames », *Dix-huitieme Siècle. Femmes des Lumières* 36, p. 303-312.

Le Ru, Véronique (2001), « Réflexions sur le calcul infinitésimal et l'émergence de la notion de limite dans l'œuvre de D'Alembert », *Contribution au présent ouvrage.*

Lecornu, Léon (1929), « Théorie mathématique de l'élasticité ».

Lémonon, Isabelle (2019), « La Savante des Lumières françaises, histoire d'une persona : pratiques, représentations, espaces et réseaux », thèse de doct., École des Hautes Études en Sciences Sociales.

— (2021), « De la salle à manger au Collège royal : les espaces savants des collaboratrices en astronomie de Jérôme Lalande », *Cahiers François Viète* 3.11, p. 20-48.

Les académies (2021), Les essentiels littératures.

Libes, Antoine (1812), *Histoire philosophique des progrès de la physique*, t. 3, Paris : Courcier.

Lilti, Antoine (2005), *Le monde des salons : sociabilité et mondanité à Paris au XVIIIe siècle*, Paris : Fayard.

Love, Augustus Edward Hough (1944), « A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity ».

Mafarette-Dayries, Pascale (2000), « L'académie royale des sciences et les grandes commissions d'enquête et d'expertise à la fin de l'ancien régime », in : *Annales historiques de la Révolution française*, 320, Armand Colin, Société des études robespierristes, p. 121-135.

Maindron, Ernest (1881), *Les fondations de prix à l'Académie des Sciences : les lauréats de l'Académie, 1714-1880*, Paris : Gauthier-Villars.

— (1888), *L'Académie des sciences : Histoire de l'Académie, fondation de l'Institut national, Bonaparte membre de l'Institut national*, Paris : Alcan, Félix.

Maz'ya, Vladimir et Tatiana Shaposhnikova (2012), *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, Les Ulis : Édition Diffusion Presse sciences.

Messaoudi, Kaouthar (2003), « L'évolution de la théorie de l'élasticité des solides », thèse de doct., Paris 7.

— (2012), *L'Evolution de la théorie d'élasticité*, Paris : Editions Publibook.

Montferrier, Alexandre André Victor Sarrazin de (1835), *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. 1, Bibliotheque scientifique.

Musielak, Dora (2020), *Sophie Germain : Revolutionary Mathematician*, Cham, Suisse : Springer.

Paty, Michel et Patrice Bailhache (2002), *Analyse et dynamique : études sur l'œuvre de D'Alembert*, Canada : Presses Université Laval.

Pickering, Mary (2011), « Le positivisme philosophique, Auguste Comte », *Revue interdisciplinaire d'études juridiques* 67, p. 49-67.

PICON, Antoine, Bruno BELHOSTE et Amy DAHAN DALMÉDICO (1994), *La formation polytechnicienne 1794-1994*, Paris : Dunod.

RAYLEIGH, John William Strutt (1894), *The theory of sound : in two volumes. 1*, Londres : Macmillan.

REBIÈRE, Alphonse (1894), *Les femmes dans la science : Conférence faite au cercle Saint-Simon le 24 février, 1894...*

RIBOT, Théodule (1879), *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, t. 8, Paris : Librairie Germer Bailliere et compagnie, p. 619-641.

ROLLET, Laurent et Philippe NABONNAND (2012), *Les uns et les autres... Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Nancy : Presses Universitaires de Lorraine.

SCHELER, Lucien (1961), « Antoine-Laurent Lavoisier et Michel Adanson rédacteurs de programmes des Prix à l'Académie des Sciences », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, p. 257-284.

SÉGAL, Alain (2015), « Le physicien Félix Savart (1791-1841). Médecin/Chirurgien, pionnier des études acoustiques », 49, Numéro 1, p. 81-88.

STÖCKMANN, Hans-Jürgen (2007), « Chladni meets Napoleon », *The European Physical Journal Special Topics* 145.1, p. 15-23.

STRUTT, John William (1877), *The theory of sound*, t. 1, Londres : Macmillan et Company.

STUPUY, Hippolite et Sophie GERMAIN (1896), *Œuvres philosophiques de Sophie Germain suivies de pensées et de lettres inédites et précédées d'une étude sur sa vie et ses oeuvres*, Paris : Libraire De Firmin Didot Freres.

SUSANA SEGUIN, Maria (2004), « Les femmes et les sciences de la nature », *Dix-huitième siècle* 36.1, p. 333-343.

TATON, René (1959), « Condorcet et Sylvestre-François Lacroix (I) », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, p. 127-158.

— (1990), « La Société Philomathique de Paris et les Sciences exactes : Premier tiers du XIXème siècle », *La Société philomathique de Paris et deux siècles de la Science en France*, p. 37-54.

TODHUNTER, Isaac (1886), *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials : Galilei to Saint-Venant, 1639-1850*, t. 1, Cambridge : University Press, p. 147-160.

TRUESDELL, Clifford (1983), « The influence of elasticity on analysis : the classic heritage », *Bulletin of the American Mathematical Society* 9.3, p. 293-310.

Ullmann, Dieter (1996), *Chladni und die Entwicklung der Akustik von 1750–1860*, Bale, Suisse.

Vautrin, Guy (2018), *Histoire de la vulgarisation scientifique avant 1900*, Les Ulis : Édition Diffusion Presse sciences.

Verdier, Norbert (2015), « L'édition mathématique en France 1750-1850 : héritages et reconfigurations », in : *Sciences mathématiques 1750-1850. Continuités et ruptures*, Paris : CNRS Éditions, p. 207-231.

— (2017), « Le livre mathématique au XIXe siècle : libraires, typographes et graveurs (1810-1864) », in : *Le livre technique avant le XXe siècle à l'échelle du monde*, Paris : CNRS Éditions, p. 395-407.

Waquet, Françoise (2015), *L'Ordre matériel du savoir. Comment les savants travaillent. XVIe-XXIe siècle. : Comment les savants travaillent XVIe-XXIe*, Paris : Cnrs.

Witkowski, Nicolas (2015), *Trop belles pour le Nobel. Les femmes et la science*, Paris : Le Seuil, p. 148-151.