



**HAL**  
open science

## Contrôlabilité en sortie

Baparou Danhane

► **To cite this version:**

Baparou Danhane. Contrôlabilité en sortie. Automatique / Robotique. Université de Lorraine, 2022. Français. NNT : 2022LORR0246 . tel-04062342

**HAL Id: tel-04062342**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-04062342v1>**

Submitted on 7 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES  
UNIVERSITAIRES**

## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)  
*(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)*

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

## Contrôlabilité en sortie

### THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 Décembre 2022

pour l'obtention du

## Doctorat de l'Université de Lorraine

Spécialité Automatique

par

**Baparou DANHANE**

#### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Emmanuel Trélat	Professeur des universités, LJLL Sorbonne Université, Paris, France
	Sophie Tarbouriech	Directrice de Recherche CNRS, LAAS Toulouse, France
<i>Examineurs :</i>	Karine Beauchard	Professeure des universités, IRMAR ENS Rennes, Rennes, France (Présidente du jury)
	Martin Lazar	Professeur Université de Dubrovnik, Croatie
	Mohamed Yagoubi	Enseignant chercheur, LS2N IMT Atlantique, Bretagne-Pays de la Loire, France
<i>Invité :</i>	Michael Schönlein	Docteur Bauhaus-University Weimar, Allemagne
<i>Encadrants :</i>	Marc Jungers	Directeur de Recherche CNRS, CRAN (Directeur) Nancy, France
	Jérôme Lohéac	Chargé de recherche CNRS, CRAN (Co-directeur) Nancy, France



Centre de Recherche en Automatique de Nancy  
UMR 7039 CNRS-Université de Lorraine

2, avenue de la forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy  
Tél. +33 (0)3 83 59 59 59 Fax +33 (0)3 83 59 56 44



## REMERCIEMENTS.

Même si les pages suivantes constituent une part importante de ces trois années de thèse et en témoignent sa réussite, elles ne sont que la partie visible de l'iceberg. Cette section de remerciements est plus importante à mes yeux car elle permet de mettre, un temps soit peu, en valeur les personnes sans qui ce travail n'aurait pu avoir lieu.

J'aimerais, en premier lieu, remercier mes encadrants, Marc Jungers et Jérôme Lohéac, pour leur disponibilité et leur patience pendant ces trois années de thèse. Un grand merci pour avoir cru en moi et pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur un sujet aussi passionnant. Il ne fait aucun doute que j'ai grandi de façon considérable pendant ces années et je suis désolé de n'avoir que mes mots, si limités, pour rendre hommage aux merveilleuses personnes que vous êtes.

En second lieu, ma gratitude va à Emmanuel Trélat et à Sophie Tarbouriech d'avoir accepté de mettre de leur temps à mon profit pour rapporter ma thèse. Elle va également aux examinateurs Karine Beauchard, Martin Lazar, Mohamed Yagoubi pour avoir accepté d'examiner mes travaux et enfin à Michael Schönlein à titre d'invité. Merci à toutes et tous pour l'effort consenti.

En troisième position, je remercie les professeurs Tchariè Kokou, Jean-Michel Coron, Camille Laurent et Emmanuel Trélat, quatre enseignants dont la rencontre a été déterminante dans la personne que je deviens.

Le premier est celui qui m'a introduit le cours sur les équations aux dérivées ordinaires en licence. Il passait des fois le quart de ses heures de cours à venter les mérites des équations aux dérivées partielles (EDP) dont il est spécialiste jusqu'au point où j'en suis tombé amoureux, même si à cette époque la seule chose dont je savais des EDP est le fait qu'elles sont une version étendue des équations aux dérivées ordinaires. L'une de ses phrases fétiches était "tout ce qui est vie est équation, si vous voulez apporter des solutions aux problèmes de la vie quotidienne, il faut comprendre ces équations". Étant donné que j'avais à cœur de faire les mathématiques qui puissent me permettre d'améliorer le quotidien des gens, cette phrase fétiche a eu raison de moi, ce qui fait qu'à la sortie de la licence j'avais pour désir de devenir enseignant-chercheur dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

Le second personnage de cette tétralogie est celui qui m'a introduit le cours sur la théorie du contrôle en Master 1 à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques au Bénin. Il m'a fait comprendre que pour espérer apporter des solutions à certains phénomènes de la vie, il est effectivement nécessaire de comprendre les équations régissant ces phénomènes mais qu'il est aussi parfois nécessaire d'agir sur les dynamiques de ces derniers. À la fin de ce cours d'introduction à la théorie de contrôle, j'avais réalisé un travail pratique sur la contrôlabilité et la stabilisation du double pendule inversée et j'étais très content parce que c'est le premier cours que j'avais suivi où on utilisait les mathématiques pour résoudre vraiment des problèmes pratiques. Avec ce cours introductif qui portait sur du contrôle en dimension finie, ma passion pour les équations aux dérivées partielles a pris un coup (cependant, non fatal) étant donné que je ne savais pas qu'il y a aussi du contrôle dans le cadre des EDP. Je me suis donc rapproché donc de Jean-Michel pour lui expliquer mon dilemme et c'est là qu'il m'informa que j'aurai un cours de contrôle d'EDP en Master 2. Je vous laisse imaginer ma joie. C'est ici qu'entre sur scène le troisième personnage en la personne de Camille Laurent. Ce dernier, avec qui j'ai commencé un stage de Master 2 inachevé parce que je devais rejoindre le Master 2 de la Sorbonne Université, m'a introduit le cours de contrôle d'EDP. Un très bon enseignant

avec qui j'aurais été tout aussi heureux de faire ma thèse.

J'ai eu le privilège de rencontrer physiquement Emmanuel Trélat lors de mon Master 2 à la Sorbonne Université. En effet, on échangeait déjà par mail sur les exercices d'un de ses livres sur la théorie de contrôle que je n'arrivais pas à résoudre. Un très bon enseignant, très pédagogue et toujours à l'écoute des étudiants. Je dois avouer que quand j'ai vu passer ce sujet de thèse, je n'étais pas très motivé au début vu que ça portait sur du contrôle en dimension finie, loin des EDP. Puis j'ai eu une discussion d'abord avec Emmanuel et ensuite avec Jean-Michel qui ont su trouver les bons mots pour me motiver. Aujourd'hui je suis très content de ma thèse et je ne saurai, outre mes mots, comment les remercier.

Je n'oublie pas mes encadrants de stage de Master 2 Christophe Besse et Stéfan Le Coz. Merci de m'avoir donné le goût de la recherche. La théorie de l'équation de Schödinger sur les graphes quantiques est ma seconde passion et je compte bien prendre profit de tout ce que j'ai appris de ce stage.

Merci également à tous mes enseignants de Master 2, en particulier Didier Smets, pour leur disponibilité.

J'ai appris de toutes ces personnes la rigueur et l'humilité dans le travail.

Pour finir cette petite histoire sur mes périodes de master, je voudrais dire merci à mes camarades de Master 2 de la Sorbonne. Les débuts de mon arrivée en France ont été difficiles tant sur le plan social qu'éducatif. Ils ont été toujours présents à chaque fois que je manifestais un besoin. Je pense à Gaspard Kemlin, à Matthieu Dolbeault, à Alexis Thibault, à Rémi Robin et à Alexiane Plessier.

Que dire des membres de l'équipe CO2 du CRAN ? Un grand merci à tous et principalement à mes camarades qui ont su rendre ces trois années agréables. Je n'oublie pas mes camarades du laboratoire LEMTA et de GREEN pour nos soirées et nos moments au cours desquels j'ai eu le privilège de vous démontrer mon talent inégalé et inégalable au football. Un grand merci aussi au groupe de contrôle de l'IECL, à Antoine Lemenant et Mihai-Cosmin Pavel pour toutes nos discussions.

Ma profonde gratitude va également à la famille Kemlin, famille que la Sorbonne Université m'a offerte à travers Gaspard et qui est devenue mienne ici, en France. Les mots ne sauront exprimer fidèlement ma reconnaissance pour tout ce que vous avez fait pour moi. Je vous dis juste merci.

À ma famille, loin des yeux mais près du cœur. Merci pour votre soutien indéfectible.

*Enfin, à vous qui avez pris le temps de lire tout ceci, je vous dédie ce travail.*

*Monipo.*



## RÉSUMÉ.

Cette thèse est essentiellement consacrée à la contrôlabilité de la sortie pour les systèmes linéaires. Principalement, nous considérons des systèmes physiques dont la dynamique est décrite par une équation différentielle linéaire et nous supposons que nous avons accès à une mesure que nous appelons sortie. Au lieu d'essayer de contrôler l'état du système lui-même, qui pourrait ne pas être contrôlable ou n'être d'aucun intérêt, nous nous intéresserons au contrôle de la variable de sortie qui est, dans notre cas, une combinaison linéaire entre l'état du système et l'entrée.

Nous considérons en premier lieu, les systèmes linéaires à temps-invariant de la forme

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (1)$$

Nous examinons la notion de contrôlabilité de l'état vers la sortie introduite dans les années 60 par J. Bertram et P. Sarachik. Pour cette première notion, l'objectif est de déterminer les conditions pour lesquelles la sortie du système (1) peut être envoyée sur une valeur désirée à partir de données initiales en état. Précisément, nous étendons le test de Hautus, bien connu dans le cadre de la contrôlabilité de l'état, au cadre de la contrôlabilité de la sortie. Nous proposons aussi, lorsque la sortie du système est contrôlable, des lois de commande permettant d'envoyer la sortie du système à la valeur désirée avec une énergie minimale.

Nous portons aussi notre attention à la notion de contrôlabilité de sortie qui consiste à envoyer la sortie du système vers une valeur désirée en temps fini, cette fois-ci non pas à partir de données initiales en état, mais à partir de données initiales de sortie. Cette notion avait été introduite pour la première fois par C.-T. Chen dans les années 70 mais confondue à tort avec la notion précédente. De ce fait, une étude plus rigoureuse de cette notion est faite et des conditions nécessaires et suffisantes ont été établies. Le travail précédent a été fait également sur les systèmes linéaires à temps discret et nous les étendons au cadre des systèmes linéaires de la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (2)$$

Enfin, comme la dynamique de systèmes physiques dépend souvent de certains paramètres inhérents à ces derniers, nous considérons aussi les systèmes linéaires de la forme

$$\dot{x}(t, \theta) = A(\theta)x(t, \theta) + B(\theta)u(t), \quad y(t, \theta) = C(\theta)x(t, \theta) + D(\theta)u(t), \quad (3)$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices continues par rapport au paramètre  $\theta$  qui appartient à un ensemble compact  $\mathcal{P}$  du plan complexe.

Pour toute donnée initiale continue en état  $\theta \mapsto x_0(\theta)$  et toute fonction de sortie continue  $\theta \mapsto y_1(\theta)$ , nous étudions l'existence d'une commande en boucle ouverte  $u$  indépendante du paramètre  $\theta$  telle que la sortie du système puisse être, en temps fini, arbitrairement proche de  $y_1$  avec la norme uniforme. Lorsque  $C(\theta)$  est la matrice d'identité, cette notion est généralement appelée *uniforme ensemble contrôlabilité*.

Nous étendons certains résultats d'uniforme ensemble contrôlabilité au cas où  $C(\theta)$  n'est pas la matrice d'identité. Nous donnons également quelques obstructions sur l'Uniforme ensemble contrôlabilité lorsque l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide et relient l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie à la contrôlabilité en moyenne.

**Mots clés :** Systèmes linéaires à temps invariant, systèmes linéaire à temps variant, systèmes à temps discret, contrôlabilité de sortie, systèmes linéaires dépendant d'un paramètre, ensemble contrôlabilité, uniforme ensemble contrôlabilité de l'état, uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie, contrôlabilité en moyenne.

## ABSTRACT.

This thesis is essentially devoted to the controllability of output for linear systems. Mainly, we consider physical systems whose dynamics are described by a linear differential equation and we assume that we have access to a measure that we call output. Instead of trying to control the state of the system itself, which might not be controllable or of no interest, we will be interested in controlling the output variable which is, in our case, a linear combination between the state of the system and the input.

We first examine, for linear time-invariant systems described by the equation

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

the notion of state to output controllability, introduced in the 60's by J. Bertram and P. Sarachik. For this notion, the aim is to investigate conditions under which it is possible to steer the output to a desired value from an initial data in the state variable. More precisely, we extend the Hautus test, well-known in the case of state controllability, to state to output controllability, and propose a controllability Gramian matrix, allowing us to build a continuous control achieving a transfer with minimal energy. We also pay attention to the notion of output controllability which consists in sending the output of the system to a desired value in finite time, in this case, not from initial state data, but from initial output data. This notion was first introduced by C.-T. Chen in the 70's but wrongly confused with the previous notion. Therefore, a more rigorous study of this notion is made and necessary and sufficient conditions have been established. All these results are given in the framework of continuous time and discrete time systems. We have also extended the above work to the case of linear time-variant systems of the form

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t).$$

Finally, since the dynamics of physical systems often depends on some parameters that are inherent to the system, we therefore consider the linear time-invariant systems whose dynamics are described by

$$\dot{x}(t, \theta) = A(\theta)x(t, \theta) + B(\theta)u(t), \quad y(t, \theta) = C(\theta)x(t, \theta) + D(\theta)u(t),$$

where  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are continuous matrices with respect to the parameter  $\theta$ , which belongs to some compact set  $\mathcal{P}$  of the complex plane.

Given any continuous initial state datum  $\theta \mapsto x_0(\theta)$  and any continuous output function  $\theta \mapsto y_1(\theta)$ , we investigate the existence of a  $\theta$ -independent open loop control  $u$  such that  $x_0$  is steered, in finite time, arbitrarily closed to  $y_1$  with the uniform norm.

When  $C(\theta)$  is the identity matrix, this notion is usually called by *uniform ensemble controllability*. We extend some result on uniform ensemble controllability to the case where  $C(\theta)$  is not the identity matrix. We also give some obstructions to ensemble controllability when the parameter set admits an interior point and link the notion of uniform ensemble output controllability to the one of averaged controllability.

**Key words :** Linear time-invariant systems, linear time-varying systems, linear discrete-time systems, output controllability, linear parameter dependent systems, ensemble controllability, uniform ensemble controllability, uniform ensemble output controllability, averaged controllability.



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>ii</b>
<b>Chapitre 1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation et cadre d'étude . . . . .	1
1.2 Organisation du manuscrit . . . . .	8
1.3 Publications et conférences . . . . .	10
<b>Chapitre 2 Préliminaires</b>	<b>11</b>
2.1 Quelques outils mathématiques . . . . .	11
2.2 Rappels sur la contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps invariant . . . . .	12
2.3 Rappels sur la contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps variant . . . . .	16
2.4 Conclusion . . . . .	17
<b>Chapitre 3 Contrôlabilité de l'état vers la sortie pour les systèmes linéaires</b>	<b>19</b>
3.1 Systèmes LTI à temps continu . . . . .	20
3.1.1 Résultats existants dans la littérature . . . . .	21
3.1.2 Contributions . . . . .	22
3.1.3 Illustration des résultats précédents . . . . .	32
3.2 Systèmes LTI à temps discret . . . . .	35
3.3 Systèmes LTV à temps continu . . . . .	39
3.3.1 État de l'art . . . . .	39
3.3.2 Contributions . . . . .	41
3.3.3 Illustration des résultats précédents sur un exemple . . . . .	48
3.4 Conclusion . . . . .	50
<b>Chapitre 4 Contrôlabilité simple et globale de la sortie</b>	<b>53</b>
4.1 Contrôlabilité simple de la sortie . . . . .	54
4.1.1 Cas des systèmes LTI à temps continu . . . . .	54
4.1.2 Cas des systèmes LTI à temps discret . . . . .	63
4.1.3 Cas des systèmes LTV à temps continu . . . . .	66
4.2 Contrôlabilité globale de la sortie . . . . .	68
4.2.1 Cas des systèmes LTI à temps continu . . . . .	68
4.2.2 Cas des systèmes LTI à temps discret . . . . .	73
4.2.3 Cas des systèmes LTV à temps continu . . . . .	75

4.3	Conclusion . . . . .	77
<b>Chapitre 5</b>	<b>Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie</b>	<b>79</b>
5.1	Préliminaires et quelques propriétés de systèmes UECS . . . . .	83
5.1.1	Préliminaires . . . . .	83
5.1.2	Quelques propriétés des systèmes UECS . . . . .	87
5.2	Contribution à l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état . . . . .	90
5.3	Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie . . . . .	103
5.3.1	Résultat de non contrôlabilité pour les systèmes holomorphes . . . . .	104
5.3.2	Résultats sur des structures particulières . . . . .	104
5.4	Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie pour les systèmes en parallèle et en cascade . . . . .	115
5.4.1	Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de systèmes en parallèle . . . . .	115
5.4.2	Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de systèmes en cascade . . . . .	126
5.5	Application à la contrôlabilité en moyenne. . . . .	127
5.6	Illustrations numériques . . . . .	130
5.7	Conclusion . . . . .	133
<b>Chapitre 6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>135</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>137</b>

# Notations

$\forall$	- Pour tout.
$\exists$	- Il existe.
$\implies$	- Implique.
$\iff$	- Équivalent.
$X^*$	- Ensemble $X$ privé de zéro lorsque cela fait sens.
$X_\ell^k$	- Ensemble des matrices à $k$ lignes et $\ell$ colonnes à coefficients dans $X$ . Cet ensemble sera noté $X^k$ pour $\ell = 1$ et $X_\ell$ pour $k = 1$ .
$\mathbb{N}$	- Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}_{<k}$ (resp. $\mathbb{N}_{\leq k}$ )	- $\{0, 1, \dots, k-1\}$ (resp. $\{0, 1, \dots, k\}$ )
$\mathbb{R}$	- Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	- Ensemble des nombres réels positifs y compris 0.
$\mathbb{C}$	- Ensemble des nombres complexes.
$ \eta _k$	- Norme d'un vecteur $\eta$ de $\mathbb{R}^k$ ou de $\mathbb{C}^k$ .
$M^\top$	- Transposée de la matrice $M$ .
$M^*$	- Adjoint de la matrice $M$ .
$M > 0_k^k$	- $M$ définie positive si $M \in X_k^k$ .
$\sigma(M)$	- Spectre de $M$ .
$M^\dagger$	- Pseudo-inverse de Moore-Penrose de $M$ .
$M_\lambda$	- $M - \lambda I$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ où $I$ désigne la matrice identité.
$e^M$	- Exponentiel de la matrice $M$ .
$\text{rk}(M)$	- Rang de la matrice $M$ .
$\bar{z}, \Re(z), \Im(z)$	- Conjugué, partie réelle et partie imaginaire du nombre complexe $z$
$\ker(L)$	- Noyau de l'application linéaire $L$ .
$\text{Im}(L)$	- Image de l'application linéaire $L$ .
Vect	- Espace vectoriel engendré par.

$E^\perp$	- Orthogonal de $E$ si $E$ est un espace vectoriel ou matrice de rang maximal telle que $EE^\perp = 0$ si $E$ est une matrice.
$\ h\ _\infty$	- $\supess h  = \inf\{c \geq 0 \mid \mu(\{\omega \in \Omega \mid  h(\omega)  > c\}) = 0\}$ , pour toute fonction mesurable $h$ définie presque partout (p.p.) sur $\Omega$ .
$\mathcal{L}^\infty(\Omega; \mathbb{K})$	- Ensemble de toutes les fonctions mesurables $h$ définies p.p. sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $\ h\ _\infty$ soit finie.
$L^\infty(\Omega; \mathbb{K})$	- $\{[f], f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega; \mathbb{K})\}$ où $[f]$ désigne la classe des fonctions de $\mathcal{L}^\infty(\Omega; \mathbb{K})$ p.p. égales à $f$ .
$L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{K})$	- Espace des fonctions essentiellement bornées sur tout compact contenu dans $\mathbb{K}$
$L^p(\Omega; \mathbb{K})$	- Défini comme l'espace $L^\infty(\Omega; \mathbb{K})$ avec la norme $\ \cdot\ _\infty$ remplacée par $\ \cdot\ _p$ avec $\ h\ _p^p = \int_\Omega  h(\omega) ^p d\omega$ .
$H^1(\Omega; \mathbb{K})$	- Espace de fonctions de $L^2(\Omega; \mathbb{K})$ définies sur $\Omega$ dont leur dérivée au sens de distribution appartient à $L^2(\Omega; \mathbb{K})$ .
$\mathbb{X}_{\mathbb{K}}(\Omega) := \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{K})$	- Espace de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\ \cdot\ _\infty$ comme norme.
$\mathbb{A}cc^e(x_0, t_f)$	- Ensemble des états atteignables depuis l'état $x_0$ au temps $t_f$ .
$\mathbb{A}cc^s(x_0, t_f)$	- Ensemble des sorties atteignables depuis l'état $x_0$ au temps $t_f$ .
$f^{(k)}$	- $k$ -ième dérivée de $f$ .
$\partial_x f$	- Dérivée partielle de $f$ par rapport à $x$ .
$\nabla_x f$	- Gradient de $f$ par rapport à $x$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	- produit scalaire.
$e_1 \wedge e_2$	- produit vectoriel des vecteurs $e_1$ et $e_2$ .

# Introduction générale

La notion de contrôlabilité de l'état d'un système physique, notion qui consiste à savoir s'il est possible d'envoyer (ou de transférer) un système d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit, a connu un essor spectaculaire à partir des années 60 avec les travaux de R. E. Kalman dans le cadre des systèmes linéaires en dimension finie. Dans [47], Kalman donne des critères permettant de vérifier la contrôlabilité des systèmes linéaires. De plus, lorsque le système est contrôlable, il fournit des expressions explicites de lois de commandes permettant de réaliser le transfert désiré. Dès lors, des critères de contrôlabilité de l'état, que ce soit dans le cadre des systèmes linéaires ou non-linéaires, en dimension finie ou infinie, ont été établis et continuent de faire l'objet d'intenses investigations au sein de la communauté scientifique. D'excellents documents existent dans la littérature à ce sujet. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple [27, 35, 44, 56, 85, 89] qui utilisent des approches d'analyse pour répondre à des problèmes de contrôlabilité de l'état pour des systèmes linéaires et non-linéaires. On peut aussi se référer à [9, 93, 94] pour une approche géométrique.

## 1.1 Motivation et cadre d'étude

Dans le cadre de la contrôlabilité de l'état d'un système, toutes les variables de l'état du système sont contrôlables. Dans certaines situations, plutôt que de contrôler toutes les variables de l'état, ce qui peut s'avérer être une tâche impossible à réaliser, on peut être intéressé par le contrôle d'une combinaison entre les variables d'état et l'entrée du système.

En guise d'exemples, on peut penser :

☆ Au système donné par la Figure 1.1, où l'objectif est de mettre une certaine distance entre deux véhicules en un instant donné. En notant par  $\xi_1$  et  $\xi_2$  respectivement la position de la première et seconde voiture, la différence de position  $y_d$  entre ces voitures est donnée par  $y_d = \xi_1 - \xi_2$ . Les variables  $u_1$  et  $u_2$  peuvent être vues comme les forces motrices et  $f_1$  et  $f_2$ , les forces de frottements. L'état de ce système contient au moins quatre variables : les deux positions et les vitesses des deux voitures. Ici, l'on peut voir que le but est d'envoyer une combinaison entre certaines variables de l'état du système vers une valeur désirée et non de contrôler l'état entier.

☆ À un grand système contenant plusieurs sous-systèmes dans lequel au lieu de contrôler tout l'état du système, on veut contrôler la moyenne des états des sous-systèmes (le vol d'oiseaux ou

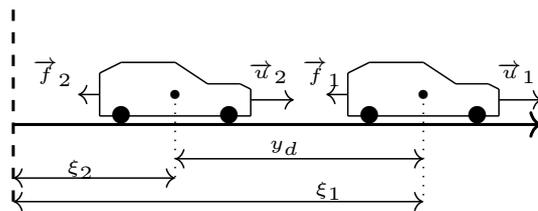


FIGURE 1.1 – Système constitué de deux voitures.

d'un essaim d'abeilles). La sortie ici serait la moyenne des états des sous-systèmes.

☆ Aux systèmes dont la dynamique dépend d'un paramètre qui n'est pas connu avec précision et dans lesquels on est intéressé par le contrôle de la moyenne de l'état par rapport au paramètre. Dans ce cas, on peut voir qu'il ne s'agit plus de contrôler l'état entier du système, qui peut potentiellement appartenir à un espace de dimension infinie, mais une sortie qui est la moyenne (peut-être pondérée) des états qui elle appartient à un ensemble de dimension finie. Voir par exemple [54, 99].

☆ À des systèmes singulièrement perturbés dans lesquels on a une variable lente et une rapide où l'on peut être intéressé par le contrôle de la variable lente ou de la variable rapide (voir [50] pour les systèmes singulièrement perturbés).

☆ À des équations différentielles couplées où l'on est intéressé par le contrôle d'une partie des variables du système. On peut penser à des réactions chimiques dans lesquelles l'on est intéressé par le contrôle de la concentration d'une partie des espèces chimiques mises en jeu.

Le concept de contrôlabilité de la sortie a été introduit pour la première fois en 1960 par J. Bertram et P. Sarachik dans [13] pour les systèmes linéaires à temps discret sans transmission directe de l'entrée sur la sortie (système à temps discret donné par (1.4) avec  $D = 0$ ). Précisément, ils introduisent la notion de *contrôlabilité de l'état vers la sortie* dont le but est de savoir s'il est possible d'atteindre en temps fini n'importe quelle sortie du système à partir de n'importe quelle donnée initiale en état, d'où la précision "de l'état vers la sortie". Ils étendent au cadre de la sortie la condition de rang de Kalman connue dans le cadre de la contrôlabilité de l'état des systèmes linéaires à temps invariant.

Quelques années plus tard, P. Sarachik, un des auteurs de [13], et E. Kreindler donnent dans [52] quelques critères de contrôlabilité de l'état vers la sortie pour les systèmes dont la dynamique en état est donnée par un système linéaire à temps variant et la dynamique de sortie par une combinaison linéaire entre l'état et l'entrée du système. Pour être plus précis, les deux auteurs considèrent le système linéaire à temps variant (1.5), établissent un critère basé sur la positivité d'une matrice grammienne et en déduisent une version étendue du critère de rang de Kalman pour les systèmes de type (1.3).

Cependant, le concept de contrôlabilité de la sortie n'a pas connu le même engouement que celui de l'état. De ce fait, dans la littérature, il y a très peu de documents traitant ce sujet et certains critères, bien connus dans le cadre de la contrôlabilité de l'état, comme par exemple le test de Hautus (bien que très utile comme nous le verrons dans la suite), n'ont pas été étendus au cadre de la sortie. Aussi, en faisant de la bibliographie sur ce concept, nous avons constaté qu'il existe une autre

notion de contrôlabilité de la sortie appelée *contrôlabilité de sortie* et confondue à tort à la *contrôlabilité de l'état vers la sortie*. Cette notion a été introduite pour la première fois par C.-T. Chen dans [22]. Pour cette dernière notion, le but est d'envoyer la sortie du système vers une valeur désirée en partant cette fois-ci, non pas d'une valeur initiale en état mais d'une valeur de sortie à l'instant initial. Dans [22], l'auteur affirme sans preuve qu'une condition nécessaire et suffisante de *contrôlabilité de sortie* est la version étendue de la condition de rang de Kalman établie plus tôt par E. Kreindler et P. Sarachik pour la notion de *contrôlabilité de l'état vers la sortie*. Nous verrons au Chapitre 4 de ce manuscrit que cette affirmation est fautive. Malheureusement ce résultat erroné reste cité dans la littérature, comme par exemple dans [49, Section 2.5], [38, Theorem 1].

Une étude rigoureuse sur ces deux notions de contrôlabilité de la sortie dans le cadre des systèmes linéaires sera faite dans la première partie de cette thèse (Chapitre 3 et 4). Il s'agira, pour la notion introduite par J. Bertram et P. Sarachik, c'est-à-dire la *contrôlabilité de l'état vers la sortie*, de compléter et affiner les résultats existants dans la littérature (Chapitre 3). Pour la notion de *contrôlabilité de sortie* introduite par C.-T. Chen, le but sera de mener une étude rigoureuse en donnant des critères de contrôlabilité tout en relevant les différences et liens qui existent entre elle et la *contrôlabilité de l'état vers la sortie* (Chapitre 4).

La seconde partie de cette thèse (Chapitre 5), nous nous intéressons au concept d'*ensemble contrôlabilité* dans le cadre de la sortie dans le but d'étudier la contrôlabilité de la sortie de systèmes linéaires à temps invariant dont la dynamique dépend d'un paramètre avec des contrôles indépendants de ce paramètre.

Comme exemple de tels systèmes, on peut penser à celui de la Figure 1.1 dans lequel, pour simplifier le modèle, nous supposons que le mouvement est linéaire. En supposant que les forces de frottements  $f_1$  et  $f_2$  sont proportionnelles, respectivement, aux vitesses  $v_1$  et  $v_2$  des voitures avec des coefficients de proportionnalité  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , c'est-à-dire  $f_k = -\alpha_k v_k$  pour  $k = 1, 2$ , un principe fondamental de la dynamique donne la représentation d'état donnée par la première équation de (1.3) où  $x = (\xi_1, v_1, \xi_2, v_2)$  représente l'état du système,  $u = (u_1, u_2)$  est le contrôle (ou la commande) et les matrices  $A$  et  $B$  sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\alpha_2}{m_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

En supposant que la sortie est donnée par  $y = (\xi_1 - \xi_2, v_1 - v_2, \dot{v}_1 - \dot{v}_2)$ , c'est-à-dire qu'elle est un vecteur contenant la différence des positions, des vitesses et des accélérations, cette variable de sortie peut être réécrite sous la forme de la seconde équation de (1.3) où les matrices  $C$  et  $D$  sont données par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-\alpha_1}{m_1} & 0 & \frac{\alpha_2}{m_2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{-1}{m_2} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Dans (1.1) et (1.2),  $m_1$  est la masse de la première voiture et  $m_2$ , celle de la seconde.

Observons que dans ces systèmes, les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  peuvent être constantes, ce qui nous conduit au système (1.3), dépendantes du temps (par exemple les coefficients de frottement évoluent au cours du temps) auquel cas on a un système de la forme (1.5) ou dépendantes d'un paramètre

autre que le temps (par exemple, les masses dépendent du nombre de personnes dans ces voitures, ou les coefficients de frottement de l'état de la chaussée) et dans ce cas, on a un système de la forme (1.6). C'est ce dernier cas de figure qui nous intéressera dans cette seconde partie où l'objectif sera de contrôler une sortie du système avec des contrôles indépendants du paramètre.

Nous introduirons la notion d'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* qui est une extension au cadre de la sortie de l'*uniforme ensemble contrôlabilité* [34] qui elle-même est une variante du concept d'*ensemble contrôlabilité*. La notion d'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* et celle d'*uniforme ensemble contrôlabilité* coïncident donc lorsque la sortie est l'état du système. L'*ensemble contrôlabilité* a été introduite pour étudier la contrôlabilité de l'état des systèmes pour lesquels la dynamique dépend d'un paramètre. La principale question est de savoir s'il est possible de contrôler l'état du système avec des contrôles indépendants du paramètre. Cette notion semble avoir été introduite pour la première fois dans [60] pour des systèmes quantiques dont la dynamique est décrite par des équations différentielles ordinaires appelées équations de Block et où cette dynamique dépend continument de deux paramètres.

Dans le cadre des systèmes linéaires dépendant de paramètres représentés par l'équation d'état du système (1.6), plusieurs travaux existent dans la littérature sur l'*ensemble contrôlabilité*. On peut citer par exemple [34, 43, 58, 61, 95], références dans lesquelles on donne des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'ensemble contrôlabilité.

Dans [61], les auteurs étudient l'*uniforme ensemble contrôlabilité* de l'état du système (1.6) dans le cas où les matrices du système ont une dépendance linéaire par rapport au paramètre. Dans cette référence le paramètre appartient à un compact de  $\mathbb{R}$ . Le même problème est considéré dans [79] où cette fois-ci la dépendance des matrices n'est pas supposée linéaire par rapport au paramètre et l'espace dans lequel appartient le paramètre est un compact de  $\mathbb{R}^d$ . Dans cette référence, des conditions nécessaires et/ou suffisantes ont été établies avec une attention particulière sur les structures en parallèle et en cascade. Les auteurs montrent en particulier que dans le cas où les matrices de l'état de ce système sont réelles analytiques, il est nécessaire que  $d$  soit inférieur ou égal à deux pour avoir l'*uniforme ensemble contrôlabilité* de l'état. Plus récemment, dans [34], les auteurs montrent que dans le cas d'une seule entrée dans l'équation d'état du système (1.6), il est nécessaire que l'ensemble dans lequel appartient le paramètre soit d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ . Notons que dans cet article, l'équation d'état est posée avec un paramètre appartenant à un compact de  $\mathbb{C}$ . Dans [25], l'auteur prouve que cette condition reste nécessaire si les matrices du système sont réelles analytiques ceci quelque soit le nombre d'entrées.

Même si des efforts considérables ont été faits dans ce cadre pour donner des conditions permettant de vérifier si ces systèmes sont ensemble contrôlables, d'importantes questions restent cependant ouvertes. Par exemple, une des questions ouvertes à ce jour et dont nous apporterons des contributions dans cette thèse est de savoir si l'*uniforme ensemble contrôlabilité* peut avoir lieu si l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  n'est pas d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$  ceci quelque soit le nombre d'entrées dans le système.

Dans cette seconde partie, nous établirons des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* et donnerons des obstructions à l'*uniforme ensemble contrôlabilité*.

Les systèmes suivants feront donc objet d'étude dans ce manuscrit.

✿ Les systèmes linéaires à temps invariant (LTI) dans le cadre continu. Ces systèmes sont re-

présentés, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.3)$$

✱ Les systèmes LTI dans le cadre discret, représentés, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , par

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \\ y_k = Cx_k + Du_k, \end{cases} \quad (1.4)$$

✱ Les systèmes linéaires à temps variants (LTV) représentés par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \end{cases} \quad (1.5)$$

Dans ce qui précède, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}_m^n$ ,  $C(t) \in \mathbb{R}_n^q$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}_m^q$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  et  $y_k \in \mathbb{R}^q$  avec  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

✱ Les systèmes LTI dépendants d'un paramètre, représentés par

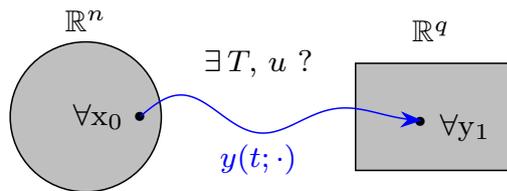
$$\begin{cases} \dot{x}(t, \theta) = A(\theta)x(t, \theta) + B(\theta)u(t), \\ y(t, \theta) = C(\theta)x(t, \theta) + D(\theta)u(t), \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $\theta$  est un paramètre appartenant à un compact  $\mathcal{P}$  avec  $u$  un contrôle indépendant de  $\theta$ . Ici, pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $A(\theta) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_n^n$ ,  $B(\theta) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_m^n$ ,  $C(\theta) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_n^q$ ,  $D(\theta) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_m^q$ ,  $x(t, \theta) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{C}^m$ ,  $y(t, \theta) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  avec  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  un ensemble de fonctions définies sur  $\mathcal{P}$  à préciser.

Pour les systèmes (1.3) à (1.5), nous nous intéressons aux conditions d'existence d'un contrôle  $u$  permettant d'avoir une valeur de sortie désirée en temps fini. De plus, lorsque ce contrôle existe, nous en proposons un qui est de norme minimale et qui permet d'atteindre la valeur de sortie désirée en temps fini. Pour le système (1.6) seules les conditions d'existence d'un contrôle permettant d'atteindre les valeurs de sortie désirées feront l'objet de notre étude dans ce manuscrit.

Précisément,

◻<sub>1</sub> nous considérons les systèmes (1.3) et (1.5) puis étudions la contrôlabilité de l'état vers la sortie introduite par J. Bertram et P. Sarachik dont la question principale est la suivante :

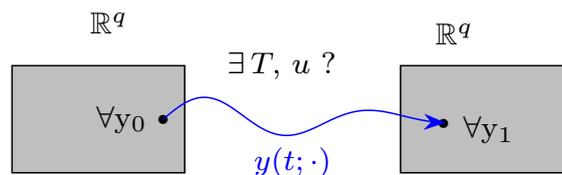


“Étant donnés  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , existe-t-il une commande permettant d'envoyer en temps fini la sortie du système à la valeur  $y_1$  en partant de  $x_0$  ?”

L'objectif de ce premier point sera d'étendre les résultats de Hautus (2.2.1.d) et (2.2.1.e) au cadre de la sortie et d'exhiber, dans la mesure du possible, des expressions de contrôles permettant d'envoyer la sortie du système vers une valeur désirée en un temps fini à partir de n'importe quelle donnée initiale en état. D'autres critères de contrôlabilité de l'état vers la sortie seront également établis.

Il convient d'insister, même si nous y reviendrons sous peu, que dans le cadre des systèmes LTI temps discret ou continu, une condition de type Kalman, que nous rappelons dans le Théorème 3.1.1, avait été déjà établie par J. Bertram, E. Kreindler et P. Sarachik dans [13,52]. Notons aussi qu'un critère relatif à une matrice grammienne a été donné dans les références précédentes. En revanche, les critères de type Hautus n'ont pas connus d'extension au cadre de la sortie même dans le cas où la matrice  $D$  est nulle. En effet, la présence de la matrice  $C$  rend l'analyse plus délicate. Nous proposerons une méthode basée sur l'utilisation des espaces propres généralisés de la matrices  $A$  pour contourner cette difficulté dans le cas général ( $D$  non-nulle) et nous verrons que ces critères sont importants dans la compréhension du problème de contrôlabilité de systèmes de type (1.6). Ceci sera fait dans le Chapitre 3.

$\mathcal{D}_2$  nous nous intéresserons ensuite à la *contrôlabilité de sortie* introduit par C.-T. Chen dans [23] dont nous résumons la question principale de la façon suivante :



“ Étant donnés  $y_0$  et  $y_1$ , existe-t'il une commande permettant d'envoyer en temps fini la sortie du système à la valeur  $y_1$  en partant de  $y_0$  ?”

Comme mentionné un peu plus haut, en faisant la bibliographie sur le concept de contrôlabilité de la sortie, nous avons constaté qu'il y a une confusion entre cette notion et celle de la *contrôlabilité de l'état vers la sortie* présentée au point précédent.

Dans [23], on lit précisément la définition suivante :

[23, Définition 5.10] : Le système LTI temps continu donné dans (1.3) est contrôlable en sortie au temps  $t_0$ , si pour tout  $y_1$  il existe un temps  $t_1 > t_0$  et une entrée  $u_{[t_0, t_1]}$  transférant la sortie du système de  $y(t_0) = 0$  à  $y(t_1) = y_1$ .

Cette définition à été introduite dans le cas où la matrice  $D$  est nulle mais pour illustrer le problème, la présence de cette dernière n'est pas préjudiciable.

En regardant d'un peu plus près cette définition, on se rend compte qu'elle est ambiguë. En effet, observons que pour avoir une trajectoire de sortie, il faut d'abord résoudre le système LTI à temps continu (1.3). Ce qui nécessite une donnée initiale en état. Observons que pour toute donnée initiale en état  $x_0$  et toute entrée initiale  $u_0$ , on a une unique sortie initiale  $y(t_0) = Cx_0 + Du_0$ . En revanche, pour une donnée initiale de sortie  $y_0$ , l'ensemble des  $x_0$  et  $u_0$  pouvant engendrer  $y_0$  n'est pas en général réduit à un singleton, car c'est l'ensemble des solutions de  $Cx_0 + Du_0 = y_0$ . La question qui se pose est donc de savoir à quelle trajectoire de sortie on fait allusion dans la définition précédente.

Le critère de contrôlabilité mentionné dans cette référence comme nécessaire et suffisant, sans preuve, est celui du rang de Kalman étendu (donné dans [52]) au cadre de la sortie pour la *contrôlabilité de l'état vers la sortie*. Ceci, sans doute parce qu'il est facile de confondre les deux notions. Mais comme nous le verrons, cette condition dite nécessaire et suffisante, que nous rappelons dans (3.1.1.b), ne sera que suffisante et ceci dans certains cas particuliers.

Dans le soucis de donner une description rigoureuse sur cette notion de contrôlabilité de sortie, nous introduisons deux nouvelles notions de contrôlabilité de sortie à savoir la *contrôlabilité simple de sortie* et la *contrôlabilité globale de sortie*. Pour la contrôlabilité simple, on se posera la question si pour tout couple  $(y_0, y_1)$ , il existe un couple  $(x_0, u_0)$  tel que  $Cx_0 + Du_0 = y_0$  et un contrôle  $u$  tels que la trajectoire de sortie avec  $x_0$  comme état initial vaille  $y_1$  en temps fini avec des trajectoires de sortie continues, ceci à des fins pratiques. En ce qui concerne la contrôlabilité globale, on se posera la question si pour tout  $(y_0, y_1)$ , il existe un contrôle  $u$  permettant d'avoir la valeur  $y_1$  en temps fini, ceci quelque soit le choix de l'état initial  $x_0$  tel qu'il existe  $u_0$  satisfaisant  $Cx_0 + Du_0 = y_0$ . Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité et montrons comment construire, dans la mesure du possible, des lois de commandes pour la réalisation du transfert désiré.

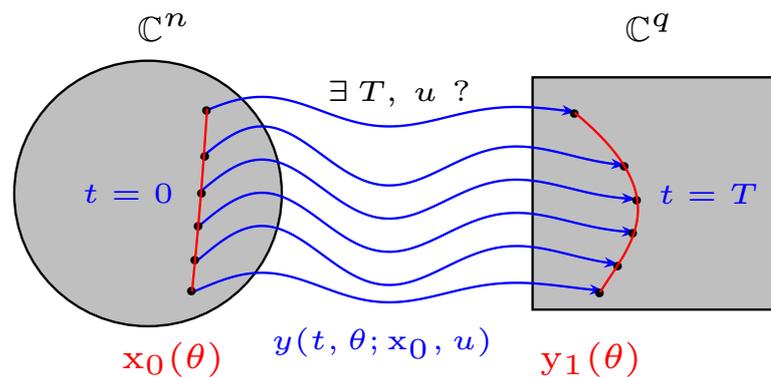
Nous verrons que ces notions sont différentes de celle évoquée au point  $\mathfrak{D}_1$  et qu'ils comportent des subtilités non-triviales.

$\mathfrak{D}_3$  Nous considérons enfin le système (1.6) dans lequel  $\mathcal{P}$  est un compact du plan complexe et  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  désigne l'espace des fonctions continues de  $\mathcal{P}$  à valeurs complexes. Nous nous intéressons à la question suivante :

“ Pour tout  $x_0 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  et  $y_1 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ , existe-t'il un temps fini  $T > 0$  et un contrôle continu  $u$  indépendant de  $\theta$  tels que la trajectoire de sortie du système (1.6) vaille  $y_1$  au temps  $T$  en partant de  $x_0$  avec  $u$  comme contrôle, c'est-à-dire

$$y(T, \theta; x_0, u) = y_1(\theta), \quad \forall \theta \in \mathcal{P} ? ”$$

Nous illustrons cette question sur la figure suivante.



Dans le cas où  $\mathcal{P}$  est de cardinal fini, nous verrons que le problème de contrôlabilité ci-dessus est un problème de contrôlabilité en dimension finie. Des résultats de contrôlabilité seront déduits grâce aux résultats établis au point  $(\mathfrak{D}_1)$ .

Dans le cas où  $\mathcal{P}$  est de cardinal infini, le problème précédent est souvent appelé, dans le cas où la sortie est l'état, problème d'ensemble contrôlabilité exacte ou complète. Dans ce cadre,

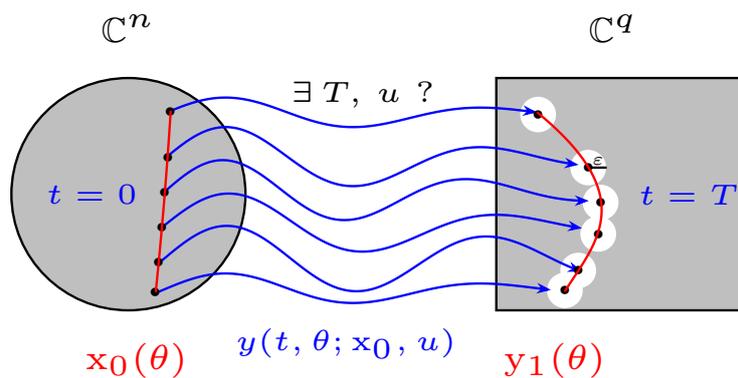
il est connu ([34, 88]) que l'ensemble contrôlabilité exacte de l'état en temps fini ne peut pas avoir lieu. On verra que ce résultat reste vrai dans le cadre de la sortie.

De ce fait, on s'intéressera à une version faible de l'ensemble contrôlabilité que nous appellerons *uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* définie de la façon suivante :

“ Pour tout  $x_0 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ , tout  $y_1 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , existe-t-il en temps fini  $T > 0$  et un contrôle  $u$  continu indépendant du paramètre  $\theta$  tels que la trajectoire de sortie du système (1.6) avec  $x_0$  comme état initial et  $u$  comme contrôle satisfasse

$$\|y(T, \cdot; x_0, u) - y_1(\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon ?”$$

Nous illustrons cette notion sur la figure suivante.



Nous établirons des conditions nécessaires et suffisantes d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie et des obstructions à l'uniforme ensemble contrôlabilité.

## 1.2 Organisation du manuscrit

Le Chapitre 2 fera l'objet de rappels. La première partie du manuscrit fera l'objet des Chapitres 3 et 4 tandis que la seconde partie fera l'objet du Chapitre 5. Le Chapitre 6 servira de conclusion et de perspectives.

Détaillons avec plus de précision le contenu de chaque chapitre.

Au Chapitre 2, nous introduisons quelques outils mathématiques utiles pour la compréhension du reste du manuscrit. En particulier, nous rappelons quelques résultats sur la contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps variant et invariant en dimension finie.

Tout lecteur familier avec la contrôlabilité de l'état des systèmes linéaires en dimension finie et tenté de ne pas lire ce chapitre est cependant invité à prendre connaissance du contenu de la Proposition 2.2.4 et du Lemme 2.2.5. Dans la Proposition 2.2.4, nous rappelons une conséquence du test de Hautus sur la contrôlabilité des systèmes linéaires à temps invariant qui sera d'une très grande utilité au Chapitre 5 et dans le Lemme 2.2.5 nous montrons qu'il est possible d'imposer de la régularité et des valeurs au contrôle sans perdre la contrôlabilité de l'état du système LTI. Ce résultat semble classique mais nous n'avons pas été en mesure de le localiser dans la littérature. Ce résultat sera utilisé dans le Chapitre 3.

Dans le Chapitre 3 nous exposons explicitement nos contributions sur la notion de *contrôlabilité de l'état vers la sortie* mentionnées au point  $\mathfrak{D}_1$ . Nous considérons en premier lieu les systèmes linéaires à temps invariant représentés par le système (1.3). Nous faisons un état d'art de la littérature à ce sujet puis établissons les analogues des tests de Hautus (2.2.1.d) et (2.2.1.e) pour vérifier la *contrôlabilité de l'état vers la sortie* de ces systèmes. D'autres critères de contrôlabilité sont également établis. Ensuite, dans le cas où le système est contrôlable de l'état vers la sortie en temps fini, nous construisons une loi de commande pour atteindre les valeurs de sortie désirées. Enfin, nous établissons aussi des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité de l'état vers la sortie pour les systèmes linéaires à temps variant représentés par le système (1.5). Dans le cas où ces systèmes sont contrôlables, des expressions explicites de contrôles sont également données afin d'atteindre les valeurs de sortie désirées.

Dans le Chapitre 4, nous exposons de façon détaillée les deux notions de contrôlabilité mentionnées au point  $\mathfrak{D}_2$  à savoir la contrôlabilité simple et globale de la sortie. Nous donnons également des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité puis construisons des lois de commandes pour avoir les valeurs de sortie désirées à partir de valeurs de sortie à l'instant initial. Nous montrons que ces deux notions ne sont pas équivalentes à celle discutée au point précédent. L'une des différences étant que, contrairement à la notion de contrôlabilité de l'état vers la sortie, la contrôlabilité simple et la contrôlabilité globale de la sortie sont des concepts qui dépendent du temps. Nous montrerons par ailleurs, à travers un exemple non trivial, que la *contrôlabilité simple* des systèmes (1.3) n'implique pas, en général, la *contrôlabilité simple en temps fini*. Ce qui est contre intuitif pour un système linéaire à temps invariant. Des critères dans le cas des systèmes linéaires à temps variant seront également établis. À la fin de ce chapitre, nous résumons dans un tableau les liens entre les différentes notions de contrôlabilité de la sortie discutées dans les Chapitres 3 et 4.

Dans le Chapitre 5, nous présentons nos résultats sur la notion d'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* évoquée au point  $\mathfrak{D}_3$ . En premier lieu, nous déduisons des résultats d'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* dans le cas où le paramètre appartient à un sous-ensemble de cardinal fini du plan complexe grâce aux résultats établis au Chapitre 3. Ensuite, nous donnons des obstructions à l'*uniforme ensemble contrôlabilité* de l'état du système (1.6). Nous montrons que si le spectre de  $A(\theta)$  rencontre l'axe réel pour tout  $\theta$  dans l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$ , alors la paire  $(A(\theta), B(\theta))$ , ne peut pas être uniformément ensemble contrôlable si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non-vide dans  $\mathbb{C}$ . De même, nous montrons que si les matrices  $A$  et  $B$  sont assez régulières par rapport au paramètre, alors il est nécessaire que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur vide pour que le système soit uniformément ensemble contrôlable. Nous montrons que dans le cas où les matrices impliquées dans (1.6) sont holomorphes, cette condition reste nécessaire pour l'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie*. Des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* sont établies pour des structures particulières, en particulier les systèmes en parallèle et en cascade. Enfin une application à la *contrôlabilité en moyenne* [99] et quelques illustrations numériques concluent ce chapitre.

Nous terminons ce manuscrit avec une conclusion et des questions ouvertes au Chapitre 6.

## 1.3 Publications et conférences

### Publications

Les résultats des Chapitres 3 et 4 sur les systèmes linéaires à temps invariant ont donné lieu à l'article suivant soumis dans le journal Automatica.

- B. Danhane, J. Lohéac, and M. Jungers. *Characterizations of output controllability for LTI systems*. Preprint, 2020.

Une partie des résultats obtenus sur les systèmes linéaires à temps variant a donné lieu à l'article

- B. Danhane, J. Lohéac, and M. Jungers. *Contributions to output controllability for linear time varying systems*. *IEEE Control Systems Letters*, 6 :1064–1069, 2021.

Enfin, le contenu du Chapitre 5 a donné lieu à l'article suivant en cours de rédaction pour soumission.

- B. Danhane, J. Lohéac, and M. Jungers. *Conditions for uniform ensemble output controllability and obstruction to uniform ensemble controllability*.

### Conférences

Durant ces trois années de thèse, j'ai participé aux conférences suivantes :

1. SMAI 2021, Grande-Motte, Montpellier, France.  
À cette conférence j'ai présenté quelques résultats sur la *contrôlabilité de l'état vers la sortie*.
2. Control and analysis of PDE systems (Conférence en l'honneur des 60 ans de Marius Tucsnak), IMT-Bordeaux, France.  
Ici j'ai présenté un poster sur la *contrôlabilité de l'état vers la sortie*.
3. IEEE CDC 2021, Texas (Austin), En ligne.  
J'ai présenté les travaux de l'article L-CSS indiqué ci-dessus.
4. CANUM 2020, Evian-Les-Bains, France.  
À cette occasion, j'ai présenté certains de mes résultats sur l'*uniforme ensemble contrôlabilité*.

# Préliminaires

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Quelques outils mathématiques . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2.2</b>	<b>Rappels sur la contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps invariant .</b>	<b>12</b>
<b>2.3</b>	<b>Rappels sur la contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps variant . .</b>	<b>16</b>
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>17</b>

Dans le présent chapitre, nous rappelons quelques outils mathématiques qui seront utiles dans la suite du manuscrit. Il comporte quatre sections. Dans la Section 2.1, nous introduisons la notion de résolvante d'une équation différentiable linéaire d'ordre 1 et donnons quelques unes de ces propriétés. Dans la Section 2.2, nous rappelons les outils nécessaires sur la contrôlabilité de l'état des systèmes linéaires à temps invariant. La Section 2.3 contient des rappels sur la contrôlabilité de l'état des systèmes linéaires à temps variant et la Section 2.4, la conclusion.

## 2.1 Quelques outils mathématiques

Soient  $A \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})^n$ ,  $B \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})^n_m$  deux matrices. L'objectif de cette partie est d'introduire la notion de solution du problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ .

Pour ce faire, nous introduisons la notion de résolvante de l'équation  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  et donnons quelques unes de ses propriétés qui seront utiles dans la suite du document.

**Définition 2.1.1.** *On appelle résolvante de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , l'application  $R$  définie par  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mapsto R(t, \tau) \in \mathbb{R}^n_n$  telle que pour tout  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$ ,  $M(t) = R(t, \tau)$  soit l'unique solution du problème de Cauchy suivant :  $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$  avec  $M(\tau) = I_n$ .*

La proposition suivante, donnant quelques propriétés de l'opérateur résolvant, peut être trouvée dans [27, Proposition 1.5] ou [2, Lecture 18] :

**Proposition 2.1.1.** *Pour  $A \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})^n$ , on a  $R \in C(\mathbb{R}^2)^n_n$  et*

(2.1.1.a)  $R(\tau, \tau) = I_n$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ ,

(2.1.1.b)  $R(t_1, \tau)R(\tau, t_2) = R(t_1, t_2)$  pour tout  $(t_1, \tau, t_2) \in \mathbb{R}^3$ .

(2.1.1.c) Si  $A \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})_n^n$  alors  $R \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^2)_n^n$  et

$$\partial_t R(t, t_2) = A(t)R(t, t_2), \quad \partial_t R(t_1, t) = -R(t_1, t)A(t), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(2.1.1.d) Si  $A$  est une matrice constante, alors pour tout  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$ ,  $R(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}$ .

Une fois cette notion de résolvante introduite, il nous suffit de rappeler que pour  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})^m$ , le problème (2.1) admet une unique solution continue donnée par

$$x(t; t_0, x_0, u) = R(t, t_0)x_0 + E_t^e u, \quad \text{où} \quad E_t^e u = \int_{t_0}^t R(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (2.2)$$

Dans le cas où les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes, il suit de (2.1.1.d) que la solution précédente devient

$$x(t; t_0, x_0, u) = e^{(t-t_0)A}x_0 + E_t^e u, \quad \text{où} \quad E_t^e u = \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau. \quad (2.3)$$

Il est souhaitable de garder à l'esprit l'opérateur  $E_{t_f}^e$  car on en fera appel dans le Chapitre 3. Le “ $e$ ” en exposant de  $E_t^e$  est mis pour faire référence à état.

## 2.2 Rappels sur la contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps invariant

Dans ce paragraphe, nous faisons un petit rappel sur la notion de contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps invariant. À cet effet, considérons le système LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.4)$$

où  $A \in \mathbb{R}_n^n$ ,  $B \in \mathbb{R}_n^m$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Dans cette équation, la variable  $x$  représente l'état du système et  $u$  la commande (ou encore le contrôle) à appliquer au système. La contrôlabilité d'état du système (2.4) s'énonce comme suit :

**Définition 2.2.1** ([27, Définition 1.2]). — *Le système (2.4) est dit contrôlable en état au temps  $t_f > t_0$  si pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et tout état final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u \in L^\infty([t_0, t_f])^m$  tel que la solution de l'équation (2.4) avec  $x_0$  comme état initial au temps  $t_0$  et  $u$  comme contrôle, satisfasse  $x(t_f; t_0, x_0, u) = x_1$ .*

— *Il est dit contrôlable en état si pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et tout état final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un temps  $t_f > t_0$  et un contrôle  $u \in L^\infty([t_0, t_f])^m$  tels que la solution de l'équation (2.4) avec  $x_0$  comme état initial au temps  $t_0$  et  $u$  comme contrôle, satisfasse  $x(t_f; t_0, x_0, u) = x_1$ .*

D'autres notions de contrôlabilité d'état comme celle de la *contrôlabilité complète d'état sur un intervalle*, la *contrôlabilité complète en un temps fini*, la *contrôlabilité complète*, la *contrôlabilité uniforme*, la *contrôlabilité totale* pour ne citer que celles-là existent et peuvent être trouvées par exemple dans [29, 82]. Comme on peut le voir dans toutes ces références, ces notions de contrôlabilité d'état, pour le système (2.4), sont équivalentes à la notion de *contrôlabilité d'état en temps*  $t_f > 0$  introduite dans la Définition 2.2.1 qui est, elle-même, équivalente à la *contrôlabilité en état*.

Pour caractériser la contrôlabilité de l'état de ce système, plusieurs critères ont été établis. Nous rappelons ceux qui nous seront utiles dans le théorème suivant. La preuve de ce théorème peut être trouvée dans les références susmentionnées.

**Théorème 2.2.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(2.2.1.a) *Le système (2.4) est contrôlable en état au temps  $t_f > t_0$ .*

(2.2.1.b) *L'application  $E_{t_f}^e : L^\infty([t_0, t_f])^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , définie par (2.3) est surjective.*

(2.2.1.c)  $\text{rk}(B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B) = n$ .

(2.2.1.d)  $\text{rk}(A - \lambda I_n | B) = n, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ .

(2.2.1.e)  $\ker(B^\top) \cap \ker(A^\top - \lambda I_n) = \{0^n\}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ .

(2.2.1.f)  $\mathcal{G}_{t_f}^e := \int_{t_0}^{t_f} e^{(t_f-\tau)A} B B^\top e^{(t_f-\tau)A^\top} d\tau > 0_n^n$ .

**Remarque 2.2.1.**

*Il faut noter qu'il n'est pas nécessaire de vérifier les critères (2.2.1.d) et (2.2.1.e) pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ . Il suffit de les vérifier pour tout  $\lambda \in \sigma(A)$  car si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $A$ , on a automatiquement  $\text{rk}(A - \lambda I_n) = n$  (et par dualité  $\ker(A^\top - \lambda I_n) = \{0^n\}$ ).*

**Remarque 2.2.2.**

*L'application  $E_{t_f}^e$  est généralement appelée application entrée-sortie. La preuve de l'équivalence entre (2.2.1.a) et (2.2.1.b) peut être trouvée dans [85, Lemme 2.2.2]. La condition (2.2.1.c) est connue sous le nom de la condition de rang de Kalman établie par Kalman dans [47, Corollary 5.5]. Les critères (2.2.1.d) et (2.2.1.e) sont les tests de Popov-Belevitch-Hautus (connus sous le nom de tests de Hautus) et peuvent être trouvés dans [11, 42, 71]). La matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^e$  définie dans (2.2.1.f) est en général appelée Grammien de contrôlabilité d'état du système (2.4). Ce dernier critère a aussi été établi par Kalman dans [47, Proposition 5.2].*

Une autre notion liée à la contrôlabilité de l'état qui sera utile par la suite est celle d'accessibilité donnée dans la définition suivante.

**Définition 2.2.2** ([85, Définition 2.1]). *L'ensemble des points accessibles depuis  $x_0$  en temps  $t_f$  avec des contrôles dans  $L^\infty([t_0, t_f])^m$  est défini par*

$$\text{Acc}^e(x_0, t_f) = \{x(t_f; t_0, x_0, u) : u \in L^\infty([t_0, t_f])^m\}.$$

*où  $x(t_f; t_0, x_0, u)$  est donné par l'équation (2.3).*

De la Définition 2.2.1, la contrôlabilité en état au temps  $t_f$  du système (2.4) est donc équivalente à  $\text{Acc}^e(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n$ , ceci pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Dans le lemme suivant, nous rappelons une caractérisation de l'ensemble accessible pour le système (2.4). Un exposé plus détaillé sur cette notion peut être trouvé dans [85, Chapitre 1], référence dont est issu ce lemme.

**Lemme 2.2.2.** *Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , l'ensemble de tous les états qui peuvent être atteints depuis  $x_0$  au temps  $t_f$  avec des contrôles dans  $L^\infty([t_0, t_f])^m$  est donné par*

$$\text{Acc}^e(x_0, t_f) = \left\{ e^{(t_f-t_0)A} x_0 \right\} + \text{Im} \left[ B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B \right]. \quad (2.5)$$

**Remarque 2.2.3.**

*Il est connu, et ceci peut être vu à travers le Lemme 2.2.2 et (2.2.1.f), que la contrôlabilité de l'état du système (2.4) ne dépend ni de l'état initial du système, ni du temps de contrôle. De façon plus explicite, si l'on peut atteindre tous les états en un temps  $t_f > t_0$  à partir d'un état initial en  $t_0$ , alors on peut atteindre n'importe quel état en n'importe quel temps  $t > t_0$  et ceci à partir de n'importe quel état initial du système au temps  $t_0$ .*

Lorsque le système (2.4) est contrôlable en temps  $t_f$ , Kalman exhibe grâce à la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^e$  l'expression du contrôle de norme  $L^2([t_0, t_f])^m$  minimale permettant de réaliser le transfert désiré. Plus précisément, on a le théorème suivant.

**Théorème 2.2.3** ([47]). *Supposons que le système (2.4) soit contrôlable en état en un temps  $t_f$ . Alors pour tout  $x_0$  et  $x_1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , le contrôle*

$$u(t) = B^\top e^{(t_f-t)A^\top} \left( \mathcal{G}_{t_f}^e \right)^{-1} \left( x_1 - e^{(t_f-t_0)A} x_0 \right), \quad t \in [t_0, t_f]$$

*envoie le système initialement en  $x_0$  au temps  $t_0$  à l'état  $x_1$  au temps  $t_f$ .*

*De plus, ce contrôle est l'unique minimiseur de*

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)|_m^2 d\tau \\ \mid \quad & u \in L^2([t_0, t_f])^m, \\ & x_1 - e^{(t_f-t_0)A} x_0 = E_{t_f}^e u. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dans le théorème précédent, notons que même si l'application  $E_{t_f}^e$  n'a pas été définie pour des contrôles dans  $L^2([t_0, t_f])^m$ , elle s'étend naturellement à cet espace.

L'expression du contrôle donnée dans ce théorème est plutôt utile sur le plan théorique car cette dernière permet de vérifier à la main que l'on peut effectivement envoyer  $x_0$  sur  $x_1$  au temps  $t_f$ . Le problème de minimisation peut être aussi utile pour des fins numériques afin d'éviter le calcul de l'inverse de la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^e$  qui peut être coûteuse. Cependant, en pratique, on utilise beaucoup plus la méthode de l'état adjoint pour calculer le contrôle optimal car cette dernière permet de ramener le problème d'optimisation (2.6) posé en dimension infinie à un problème d'optimisation en dimension finie.

Le calcul numérique du contrôle optimal par la méthode de l'état adjoint est basé sur la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) introduite par Jacques-Louis Lions dans [62] et présentée en détail dans le cadre des systèmes linéaires en dimension finie dans [27, Section 1.4, p.19].

Le processus est le suivant : on cherche  $\hat{\varphi}^0$  solution du problème de minimisation

$$\begin{aligned} \min \quad & J(\varphi^0) := \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |B^\top \varphi(t)|_m^2 dt - \langle x_1, \varphi^0 \rangle + \langle x_0, \varphi(0) \rangle \\ \mid \quad & \varphi^0 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où pour tout  $\varphi^0 \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $\varphi$  dans  $J(\varphi^0)$  est solution de l'équation adjointe

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -A^\top \varphi \\ \varphi(t_f) &= \varphi^0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

On montre que la contrôlabilité de l'état est équivalente à une inégalité d'observabilité inférant à la fonctionnelle  $J$  les propriétés de stricte convexité et de coercivité, ce qui montre que le problème de minimisation (2.7) admet un unique minimiseur.

Comme  $J$  est différentiable et convexe, la condition d'optimalité du premier ordre montre que  $\hat{\varphi}^0$  est solution de

$$\mathcal{G}_{t_f}^e \hat{\varphi}^0 = x_1 - e^{(t_f-t_0)A} x_0.$$

On résout ensuite l'équation (2.8) avec  $\hat{\varphi}^0$  pour avoir  $\hat{\varphi}$  et on montre que l'expression de la commande optimale  $\hat{u}$  est donnée

$$\hat{u}(t) = B^\top \hat{\varphi}(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{2.9}$$

Observons que la méthode de l'état adjoint permet de ramener un problème d'optimisation sous contrainte en dimension infinie, celui (2.6), à un problème d'optimisation en dimension finie, celui (2.7), beaucoup plus simple à résoudre.

Pour plus de détails sur la méthode de l'état adjoint, le lecteur pourra consulter [54, 55, 98].

Rappelons la proposition suivante qui donne une condition nécessaire de contrôlabilité d'état basée sur le rang de la matrice  $B$  et la multiplicité géométrique des valeurs propres de la matrice  $A$ . C'est un corollaire du test de Hautus (2.2.1.d). Cette proposition nous sera utile dans le Chapitre 5.

**Proposition 2.2.4** ([82, Exercice 3.3.9]). *Si le système (2.4) est contrôlable en état alors la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de  $A$  est au plus le rang de  $B$ .*

Pour clore cette discussion sur la contrôlabilité de l'état des systèmes LTI, nous donnons le lemme suivant qui sera utilisé dans le Chapitre 3. Ce lemme stipule que si l'on est en mesure d'envoyer l'état du système (2.4) d'une valeur donnée à une autre, on peut toujours faire la même chose, cette fois-ci avec une commande continue dont on peut imposer et la valeur initiale et la valeur finale au départ. Ce résultat semble classique, mais n'ayant pas trouvé la référence adéquate, nous proposons une preuve de ce résultat.

**Lemme 2.2.5.** *Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $x_1 \in \text{Acc}^e(x_0, t_f)$ . Pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  et tout  $u_1 \in \mathbb{R}^m$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tel que  $u(t_0) = u_0$ ,  $u(t_f) = u_1$  et  $x(t_f; t_0, x_0, u) = x_1$ .*

*Démonstration.* Considérons pour  $v \in L^\infty([t_0, t_f])^m$ , le système  $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}v(t)$ , où  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ , avec les matrices  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  définies par

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_m^n & 0_m^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n+m}^{n+m}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0_m^n \\ I_m^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_m^{n+m}. \quad (2.10)$$

En écrivant  $\tilde{x} = (x^\top, w^\top)^\top$  où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $w \in \mathbb{R}^m$ , on déduit de (2.5) que pour tout  $\tilde{x}_0 = (x_0^\top, w_0^\top)^\top$ ,

$$\tilde{\text{Acc}}^e(\tilde{x}_0, t_f) = \left\{ e^{(t_f-t_0)\tilde{A}}\tilde{x}_0 \right\} + \text{Im} \left[ \tilde{B} | \tilde{A}\tilde{B} | \tilde{A}^2\tilde{B} | \dots | \tilde{A}^{n+m-1}\tilde{B} \right],$$

où  $\tilde{\text{Acc}}^e(\tilde{x}_0, t_f)$  est l'ensemble de tous les points (de  $\mathbb{R}^{n+m}$ ) qui peuvent être atteints à partir de  $\tilde{x}_0$  au temps  $t_f$  avec des contrôles dans  $L^\infty([t_0, t_f])^m$ .

En observant que

$$\begin{aligned} \text{Im} \left[ \tilde{B} | \tilde{A}\tilde{B} | \tilde{A}^2\tilde{B} | \dots | \tilde{A}^{n+m-1}\tilde{B} \right] &= \text{Im} \begin{bmatrix} 0_m^n & B & AB & \dots & A^{n+m-1}B \\ I_m^m & 0_m^m & 0_m^m & \dots & 0_m^m \end{bmatrix}, \\ &= \text{Im} [B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B] \times \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

et que

$$e^{(t_f-t_0)\tilde{A}}\tilde{x}_0 = \begin{pmatrix} e^{(t_f-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_f} e^{(t_f-t)A}Bw_0 dt \\ w_0 \end{pmatrix},$$

on déduit, en remarquant au passage que  $\int_{t_0}^{t_f} e^{(t_f-t)A}Bw_0 dt \in \text{Im} [B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B]$ , que

$$\tilde{\text{Acc}}^e(\tilde{x}_0, t_f) = \text{Acc}^e(x_0, t_f) \times \mathbb{R}^m.$$

□

**Remarque 2.2.4.**

On peut voir, en itérant le Lemme 2.2.5, qu'en fait si on peut atteindre un état du système avec un contrôle essentiellement borné, on peut aussi l'atteindre avec un contrôle infiniment dérivable tout en imposant, à toutes les dérivées de ce contrôle, les valeurs désirées au temps initial et final.

En fait, dans le Lemme 2.2.5, ce n'est pas la régularité du contrôle qui importe mais le fait qu'on puisse imposer les valeurs voulues au temps initial et final. En effet, pour la régularité, on a vu dans le Théorème 2.2.3 qu'on peut même construire des contrôles analytiques. L'apport de ce lemme réside donc dans le fait qu'en plus de l'analyticité, on peut imposer en même temps, la valeur initiale et la valeur finale de ces contrôles.

## 2.3 Rappels sur la contrôlabilité d'état des systèmes linéaires à temps variant

Dans le cadre de la contrôlabilité des systèmes linéaires à temps variants, c'est-à-dire, celle des systèmes de type (2.1), des études sur la contrôlabilité de l'état de ces systèmes avaient été faites par Kalman dans le même article que celui des systèmes linéaires à temps invariant, c'est-à-dire [47]. Plusieurs définitions de contrôlabilité peuvent être trouvées dans la littérature comme celle de la *contrôlabilité au temps  $t_0$* , de la *contrôlabilité complète au temps  $t_0$*  et de la *contrôlabilité complète*, pour ne citer que ceux-là (voir, par exemple, [29, Chapitre 4], [47, Section 5]). Dans ce manuscrit, nous adoptons la définition suivante qui nous semble plus simple et rigoureuse parce que l'auteur précise bien l'ensemble des contrôles admissibles mais qui reste équivalente à notion de *contrôlabilité au temps  $t_0$* .

**Définition 2.3.1** ([27, Définition 1.2]). *Le système (2.1) est dit contrôlable en état au temps  $t_f > t_0$  si pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et tout état final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle  $u \in L^\infty([t_0, t_f])^m$  tel que la solution de l'équation (2.4) avec  $x_0$  comme état initial au temps  $t_0$  et  $u$  comme contrôle, satisfasse  $x(t_f; t_0, x_0, u) = x_1$ .*

Comme critère de contrôlabilité, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1** ([27, Théorème 1.11]). *Le système (2.1) est contrôlable en état au temps  $t_f > t_0$ , si et seulement si la matrice*

$$G_{t_f}^e := \int_{t_0}^{t_f} R(t_f, t) B(t) B(t)^\top R(t_f, t)^\top d\tau$$

*est définie positive.*

Nous rappelons que l'opérateur résolvante  $R$  a été défini dans la Section 2.1.

Ce critère de contrôlabilité avait été proposé pour la première fois par Kalman dans [47, Proposition 5.2] et sa preuve peut être trouvée, par exemple, dans [85, Théorème 2.5], [27, Théorème 1.11]. Comme on peut le voir à travers ce théorème, la contrôlabilité du système (2.1) ne dépend pas de la donnée initiale mais dépend cette fois-ci du temps de contrôle.

Tout comme dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant, lorsque le système (2.1) est contrôlable en état en un temps  $t_f > t_0$ , on peut construire, pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et tout état  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  un contrôle permettant d'envoyer l'état du système à la valeur  $x_1$  au temps  $t_f$ . Plus précisément, des références précédentes, on a le théorème suivant.

**Théorème 2.3.2** ([27, Proposition 1.13]). *Supposons que le système (2.4) soit contrôlable en état en un temps  $t_f$ . Alors pour tout  $x_0$  et  $x_1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , le contrôle*

$$u(t) = B(t)^\top R(t_f, t)^\top \left(G_{t_f}^e\right)^{-1} (x_1 - R(t_f, t_0)x_0), \quad \text{pour presque tout } t \in [t_0, t_f]$$

*envoie le système initialement en  $x_0$  au temps  $t_0$  à l'état final  $x_1$  au temps  $t_f$ .*

*De plus, ce contrôle est l'unique minimiseur de*

$$\begin{array}{l} \min \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)|_m^2 \, d\tau \\ \left| \begin{array}{l} u \in L^2([t_0, t_f])^m, \\ x_1 - R(t_f, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_f} R(t_f, t)B(t)u(t) \, dt. \end{array} \right. \end{array}$$

Des critères de contrôlabilité analogue à celui du critère de rang de Kalman (2.2.1.c) existent dans la littérature, ceci dans le cas où les matrices du systèmes sont régulières. On a par exemple le résultat suivant dans le cas où les matrices sont infiniment dérivables.

**Théorème 2.3.3** ([21, Théorème 1, p.113]). *Soit  $t_f > t_0$  et supposons que  $A$  et  $B$  soient respectivement  $n - 2$  et  $n - 1$  dérivables dans un voisinage de  $[t_0, t_f]$ . Le système (2.1) est contrôlable en état au temps  $t_f > t_0$ , s'il existe un temps  $\bar{t} \in [t_0, t_f]$  tel que*

$$\text{span}\{\mathfrak{d}_t^\ell B(\bar{t})u, u \in \mathbb{R}^m, \ell \in \mathbb{N}_{\leq n-1}\} = \mathbb{R}^n$$

où l'on a défini

$$\mathfrak{d}_t := -A(t) + \frac{d}{dt}.$$

On peut aussi trouver ce résultat et sa preuve dans [81, Théorème 4], [29, Théorème 4.5], [21, Théorème 1]. Le théorème précédent a été étendu au cas où les matrices  $A$  et  $B$  sont infiniment dérivables dans [27, Théorème 1.18]. De plus, l'auteur montre que dans le cas où les matrices sont analytiques, cette condition nécessaire devient suffisante.

Nous terminons ce paragraphe dédié à la contrôlabilité des systèmes linéaires à temps variant en mentionnant que d'autres critères de contrôlabilité peuvent être trouvés dans la littérature et les références [27, 29, 56, 85] offrent une vue globale sur ce sujet.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les outils mathématiques utiles pour la compréhension des chapitres suivants. Nous avons rappelé ce qu'est l'opérateur résolvant pour une équation différentielle et les propriétés de cet opérateur. Nous avons aussi fait un rappel sur la contrôlabilité des systèmes linéaires.



# Contrôlabilité de l'état vers la sortie pour les systèmes linéaires

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Systèmes LTI à temps continu</b>	<b>20</b>
3.1.1	Résultats existants dans la littérature	21
3.1.2	Contributions	22
3.1.3	Illustration des résultats précédents	32
<b>3.2</b>	<b>Systèmes LTI à temps discret</b>	<b>35</b>
<b>3.3</b>	<b>Systèmes LTV à temps continu</b>	<b>39</b>
3.3.1	État de l'art	39
3.3.2	Contributions	41
3.3.3	Illustration des résultats précédents sur un exemple	48
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>50</b>

La notion de contrôlabilité de l'état vers la sortie pour les systèmes linéaires a été introduite, à notre connaissance, pour la première fois, en 1960, par J. Bertram et P. Sarachik dans [13]. Pour cette notion, il s'agira de se poser la question de savoir si l'on peut atteindre, en temps fini, n'importe quelle valeur de la sortie à partir d'une valeur initiale en état choisie de façon arbitraire. Dans [13], seul le système LTI à temps discret donné par l'équation (1.3) avec la matrice  $D = 0_m^n$  est considéré. Une condition analogue à la condition de rang de Kalman a été donnée et sera rappelée dans la Section 3.2. En 1964, P. Sarachik, l'un des auteurs de l'article précédent, et E. Kreindler étendent cette notion au cas des systèmes LTI temps continu et LTV temps continu dans [52]. Ils établissent les analogues des critères (2.2.1.c) et (2.2.1.f) qui seront rappelés dans la Section 3.1 dédiée aux systèmes LTI temps continu et dans la Section 3.3 pour les systèmes LTV temps continu. Cependant, dans le cas des systèmes LTI donnés par l'équation (1.3), certains résultats connus dans le cadre de la contrôlabilité de l'état n'ont pas connu d'extension. En particulier, les résultats de type Hautus (2.2.1.d) et (2.2.1.e) n'existent pas. Ceci sans doute à cause de la présence des matrices  $C$  et  $D$  qui rendent l'analyse plus difficile. Aussi, en lisant l'article de Kreindler et Sarachik, on peut s'apercevoir que si la condition (3.1.1.c) est satisfaite, on peut construire grâce à la matrice  $\mathcal{K}_{t_f}$  des contrôles discontinus au temps final dont nous rappelons l'expression dans la Proposition 3.1.2.

Mais comme on peut le constater, à travers l'équation (3.1), autoriser une discontinuité au temps final sur le contrôle peut engendrer une discontinuité sur la trajectoire de sortie, ce qui ne présente pas d'intérêt physique.

**Objectifs.** *L'objet de ce chapitre est d'étendre, dans le cadre des systèmes LTI représentés par l'équation (1.3), les critères (2.2.1.d) et (2.2.1.e) dits de Hautus au cadre de la sortie. Toujours dans le même cadre, nous établirons une condition analogue au critère de Grammien de contrôlabilité de l'état de Kalman (2.2.1.f), qui une fois vérifiée, conduira à des expressions explicites de contrôles continus qui permettront de réaliser les transferts avec des trajectoires de sortie continues. Nous porterons aussi notre attention aux systèmes LTV représentés par l'équation (1.5) et nous établirons des conditions nécessaires et/ou suffisantes de contrôlabilité de l'état vers la sortie. Dans la mesure du possible, des expressions explicites de contrôles seront données dans le but de pouvoir atteindre les valeurs de sortie désirées en temps fini, ceci avec des trajectoires de sortie continues.*

Notons que dans [52], les auteurs n'utilisent pas la terminologie *contrôlabilité de l'état vers la sortie* mais plutôt les notions telles que *contrôlabilité complète de la sortie*, *contrôlabilité totale de la sortie*, qui de toute façon sont, entre-elles, équivalentes dans le cadre des systèmes LTI à temps continu et équivalentes à la notion de *contrôlabilité de l'état vers la sortie* introduite plus tôt dans [13].

Dans ce manuscrit, nous utiliserons la terminologie originelle, c'est-à-dire celle de la *contrôlabilité de l'état vers la sortie* parce qu'elle nous permet de faire une distinction nette entre la notion de contrôlabilité qui consiste à envoyer une donnée initiale en état sur une valeur de sortie désirée, objet d'étude dans le présent chapitre, et une autre notion discutée au Chapitre 4 qui consiste à envoyer une donnée initiale de sortie sur une valeur désirée de sortie.

Le chapitre est subdivisé en quatre sections. La Section 3.1 sera dédiée aux systèmes LTI à temps continu, la Section 3.2 aux systèmes LTI à temps discret et la Section 3.3 aux systèmes LTV à temps continu. Dans chacune de ces sections, nous introduisons rigoureusement le modèle considéré, donnons les résultats existants et apportons enfin nos contributions. Nous finissons ce chapitre avec une conclusion à la Section 3.4.

Les résultats sur les systèmes LTI de ce chapitre et ceux du chapitre suivant ont donné lieu à l'article [30]. Les résultats sur les systèmes LTV quant-à eux ont donné lieu à [31] qui a été publié dans L-CSS-CDC.

### 3.1 Systèmes LTI à temps continu

Dans cette section, nous considérons, pour  $t \in \mathbb{R}$ , le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (3.1b)$$

Dans (3.1),  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  désignent respectivement le contrôle (ou l'entrée ou encore la commande), l'état et la sortie du système à l'instant  $t$  où  $m$ ,  $n$  et  $q$  sont des éléments de  $\mathbb{N}^*$ . On suppose également que  $A \in \mathbb{R}_n^n$ ,  $B \in \mathbb{R}_n^m$ ,  $C \in \mathbb{R}_n^q$ ,  $D \in \mathbb{R}_m^q$ .

Soient  $t_0$  et  $t_f$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $t_0 < t_f$ . Désignons par  $\mathcal{U}_o$  l'ensemble de contrôles admissibles pour le système (3.1) c'est-à-dire l'ensemble des contrôles  $u$  pour lesquels pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  au temps  $t_0$ , l'équation (3.1) admet une unique solution telle que l'expression  $y(t_f; t_0, x_0, u)$  ait un sens. Le choix de  $\mathcal{U}_o$  sera fixé dans les lignes suivantes. Pour le moment, considérons la définition suivante.

**Définition 3.1.1.** — *Le système (3.1) sera dit contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f$  si pour tout  $(x_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}_o$  tel que la trajectoire de sortie de ce système en partant de  $x_0$  au temps  $t_0$  en état vaille  $y_1$  au temps  $t_f$ , c'est-à-dire  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .*

— *Il sera dit contrôlable de l'état vers la sortie si pour tout  $(x_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , il existe un temps  $t_f > t_0$  et un contrôle  $u \in \mathcal{U}_o$  tels que la trajectoire de sortie de ce système en partant de  $x_0$  au temps  $t_0$  en état vaille  $y_1$  au temps  $t_f$ , c'est-à-dire  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .*

### 3.1.1 Résultats existants dans la littérature

L'étude de la contrôlabilité d'état vers la sortie du système (3.1) a été initiée par Kreindler et Sarachik dans [52]. Dans cet article, les auteurs proposent les critères suivants en utilisant comme  $\mathcal{U}_o$  l'ensemble des contrôles continus par morceau. La preuve de ces critères ne sera pas rappelée dans ce document et peut être retrouvée dans [52].

**Théorème 3.1.1** ([52]). *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(3.1.1.a) *Le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f > t_0$ .*

(3.1.1.b)  $\text{rk}[CB|CAB|CA^2B|\dots|CA^{n-1}B|D] = q$ .

(3.1.1.c)  $\mathcal{K}_{t_f} := \int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-\tau)A} B B^\top e^{(t_f-\tau)A^\top} C^\top d\tau + D D^\top > 0$ .

Le théorème précédent résume la liste des critères que l'on peut trouver dans la littérature sur la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.1). Aussi, en lisant l'article de Kreindler et Sarachik, on peut s'apercevoir que si la condition (3.1.1.c) est satisfaite, on peut construire grâce à la matrice  $\mathcal{K}_{t_f}$  des contrôles donnés dans la Proposition 3.1.2.

**Proposition 3.1.2.** *Supposons que le système (3.1) soit contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f$ . Alors, pour tout  $(x_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , le contrôle*

$$u(t) = \begin{cases} B^\top e^{(t_f-t)A^\top} C^\top \mathcal{K}_{t_f}^{-1} (y_1 - C e^{(t_f-t_0)A} x_0) & \text{si } t \in [t_0, t_f), \\ D^\top \mathcal{K}_{t_f}^{-1} (y_1 - C e^{(t_f-t_0)A} x_0) & \text{si } t = t_f, \end{cases} \quad (3.2)$$

envoie  $x_0$  sur  $y_1$  au temps  $t_f$ .

De plus, ce contrôle est l'unique minimiseur de

$$\begin{array}{l} \min \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)|_m^2 d\tau + \frac{1}{2} |z|_m^2 \\ \left| \begin{array}{l} u \in L^2([t_0, t_f])^m, \quad z \in \mathbb{R}^m, \\ y_1 - C e^{(t_f-t_0)A} x_0 = C E_{t_f}^c u + D z, \end{array} \right. \end{array}$$

où  $z$  représente la valeur finale du contrôle.

*Démonstration.*

Supposons que le système (3.1) soit contrôlable de l'état vers la sortie et soit  $t_f > t_0$ . Ainsi, le contrôle donné par (3.2) dans cette proposition est bien défini et on peut vérifier à la main que ce contrôle envoie  $x_0$  sur  $x_1$  au temps  $t_f$ .

Posons, pour  $u \in L^2([t_0, t_f])^m$  et  $z \in \mathbb{R}^m$

$$J(u, z) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)|_m^2 d\tau + \frac{1}{2} |z|_m^2.$$

La fonctionnelle  $J$  est strictement convexe et différentiable. De plus, l'hypothèse de contrôlabilité implique donc que le problème de minimisation donné dans la proposition précédente est un problème strictement convexe sous contrainte affine non vide. De ce fait, on a l'existence d'un unique minimiseur. Le Lagrangien de ce système s'écrit

$$\mathcal{L}(u, z, \psi) = J(u, z) + \langle y_1 - Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 - CE_{t_f}^e u + Dz, \psi \rangle, \quad \text{où } \psi \in \mathbb{R}^q.$$

L'existence d'un unique minimiseur  $(u_{\text{opt}}, z_{\text{opt}})$  et la condition d'optimalité du premier ordre implique l'existence de  $\psi_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^q$  tel que

$$\nabla_u \mathcal{L}(u_{\text{opt}}, z_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}}) = 0, \quad \nabla_z \mathcal{L}(u_{\text{opt}}, z_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}}) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\psi \mathcal{L}(u_{\text{opt}}, z_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}}) = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$u_{\text{opt}} = (E_{t_f}^e)^* C^\top \psi_{\text{opt}}, \quad z_{\text{opt}} = D^\top \psi_{\text{opt}}, \quad y_1 - Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 = (CE_{t_f}^e (E_{t_f}^e)^* C^\top + DD^\top) \psi_{\text{opt}}.$$

En observant que pour tout  $\psi \in \mathbb{R}^n$ ,  $(E_{t_f}^e)^* \psi(t) = B^\top e^{(t_f-t)A^\top} \psi$ , on récupère de ce qui précède l'expression du contrôle optimal donnée par (3.2) dans la proposition précédente.  $\square$

On peut voir, dans l'expression du contrôle donné dans la Proposition 3.1.2 que l'on aura des contrôles continus uniquement si les matrices  $B$ ,  $C$  et  $D$  satisfont  $CB = D$ . L'idéal serait, pour des fins pratiques, d'avoir des contrôles continus pour ainsi générer des trajectoires de sortie continues, ce qui fait plus de sens dans les applications.

### 3.1.2 Contributions

L'atteinte des objectifs susmentionnés commence déjà par un bon choix de l'ensemble  $\mathcal{U}_o$  dans la Définition 3.1.1. En effet, si dans le cadre de la contrôlabilité de l'état évoquée à la Section 2.2.1 l'on peut avoir des trajectoires d'état continues avec des contrôles dans  $L^\infty([t_0, t_f])^m$ , cela n'est plus vrai pour la sortie dans le cas où l'on dispose d'une contribution directe de l'entrée sur la sortie, c'est-à-dire  $D \neq 0_m^q$ . Plus précisément, pour des contrôles  $u$  dans  $L^\infty([t_0, t_f])^m$  qui sont des représentants de classes de fonctions, il ne fait pas sens d'écrire

$$y(t_f; t_0, x_0, u) = Cx(t_f; t_0, x_0, u) + Du(t_f). \quad (3.3)$$

Il serait donc plus approprié, pour donner un sens à (3.3), de considérer l'ensemble

$$\{u \in \mathcal{L}^\infty([t_0, t_f])^m \mid u(t_f) \in \mathbb{R}^m\} \quad (3.4)$$

comme ensemble de contrôles admissibles, ensemble qui contient d'ailleurs l'ensemble de contrôles continus par morceau. Mais puisque nous avons pour objectif d'exhiber, dans la mesure du possible, des lois de commandes continues dans le but de garantir des trajectoires de sortie continues, nous allons choisir sans perte de généralité  $\mathcal{U}_o = \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ . Le "sans perte de généralité" dans la phrase précédente est le résultat de l'observation suivante.

**Proposition 3.1.3.** *Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ . Si l'on peut atteindre  $y_1$  au temps  $t_f$  en partant de  $x_0$  au temps  $t_0$  avec un contrôle appartenant à l'ensemble donné à l'équation (3.4), alors il existe un contrôle dans  $\mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  permettant d'envoyer la trajectoire de sortie donnée par (3.3) à la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$  en partant de  $x_0$  au temps  $t_0$ . De plus,*

$$\mathbb{A}cc^s(x_0, t_f) = C\mathbb{A}cc^e(x_0, t_f) + \text{Im}(D), \quad (3.5)$$

et par définition, le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f$  si et seulement si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{A}cc^s(x_0, t_f) = \mathbb{R}^q$ .

*Démonstration.*

Pour toute fonction bornée  $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , on a d'après (3.3),  $\mathbb{A}cc^s(x_0, t_f) \subset C\mathbb{A}cc^e(x_0, t_f) + \text{Im}(D)$ . Il suffira donc de montrer que tout  $y_1$  dans  $C\mathbb{A}cc^e(x_0, t_f) + \text{Im}(D)$ , il existe un contrôle continu  $\tilde{u}$  tel que  $y(t_f; t_0, x_0, \tilde{u}) = y_1$ . Ainsi, l'ensemble accessible avec des contrôles dans l'ensemble donné par (3.4) serait égal à celui engendré par les contrôles continus.

À cet effet, on déduit d'abord du fait que  $y_1 \in C\mathbb{A}cc^e(x_0, t_f) + \text{Im}(D)$  l'existence de  $x_1 \in \mathbb{A}cc^e(x_0, t_f)$  et de  $u_1 \in \mathbb{R}^m$  tels que  $y_1 = Cx_1 + Du_1$ . Ensuite, comme  $x_1 \in \mathbb{A}cc^e(x_0, t_f)$ , on déduit du Lemme 2.2.5 qu'il existe un contrôle continu  $\tilde{u}$  tel que  $\tilde{u}(t_f) = u_1$  et  $x(t_f; t_0, x_0, \tilde{u}) = x_1$ . Avec le contrôle  $\tilde{u}$ , on a  $y(t_f; t_0, x_0, \tilde{u}) = Cx(t_f; t_0, x_0, \tilde{u}) + D\tilde{u}(t_f) = Cx_1 + Du_1 = y_1$ .  $\square$

**Remarque 3.1.1.**

De la relation (3.5), il suit qu'une condition nécessaire de contrôlabilité de l'état vers la sortie est

$$\text{rk}(C|D) = q. \quad (3.6)$$

Avec (2.5) et (3.5), on voit que les deux notions de contrôlabilité données dans la Définition 3.1.1 sont équivalentes.

En effet, si le système est contrôlable d'état vers la sortie, il suit que pour tout  $(x_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , il existe un temps  $t_f > t_0$  tel que

$$y_1 \in \text{Im}(CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|D) + \{Ce^{(t_f-t_0)A}x_0\}.$$

Ainsi, en choisissant  $x_0 = 0^n$ , pour tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , on a  $y_1 \in \text{Im}(CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|D)$  impliquant que

$$\text{Im}(CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|D) = \mathbb{R}^q$$

et donc la contrôlabilité de l'état vers la sortie au temps  $t_f$  du système.

Mais puisque la contrôlabilité de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  implique, par définition, la contrôlabilité de l'état vers la sortie, on a l'équivalence.

De ce qui précède et de (3.5), il suit que si l'on peut atteindre toute valeur de sortie désirée à partir d'un état initial donné, alors on peut atteindre toute valeur de sortie désirée ceci quelque soit l'état initial du système.

**Remarque 3.1.2.**

De la Proposition 3.1.3, on déduit que si l'état du système (3.1) est contrôlable au sens de la Définition 2.2.1 et que la condition (3.6) est satisfaite, alors le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie.

Dans le théorème suivant, nous étendons les critères de type Hautus donnés par (2.2.1.d) et (2.2.1.e) au cadre de la contrôlabilité d'état vers la sortie. Aussi, nous proposons dans ce théorème un critère basé sur l'inversibilité d'une matrice grammienne. Ce critère lorsqu'il est satisfait, nous permettra de construire des contrôles continus et donc des trajectoires de sortie continues.

**Théorème 3.1.4.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(3.1.4.a) *Le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f > t_0$ .*

(3.1.4.b) *L'application linéaire*

$$\begin{aligned} E_{t_f}^s : \mathcal{C}([t_0, t_f])^m &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ u &\mapsto \int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-t)A} B u(t) dt + D u(T) \end{aligned}$$

*est surjective.*

(3.1.4.c)  $\text{rk}(C|D) = q$  et  $\text{Im} \begin{pmatrix} C^\top \\ D^\top \end{pmatrix} \cap \left( \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda \times \{0^m\} \right) = \{0^{n+m}\}$ , où<sup>1</sup>

$E_\lambda = \ker(A_\lambda^\top)^{n_\lambda} \cap \left( \bigcap_{k=0}^{n_\lambda-1} \ker B^\top (A_\lambda^\top)^k \right)$ , avec  $n_\lambda$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $A$ .

(3.1.4.d)  $\text{rk}(C|D) = q$  et  $\text{rk} \begin{pmatrix} K_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & (C|D)^\perp \\ 0 & K_{\lambda_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{\lambda_p} & (C|D)^\perp \end{pmatrix} = (n+m)p$ ,

où  $p = \#\sigma(A)$ ,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} = \sigma(A)$ ,  $K_\lambda = \begin{pmatrix} M_\lambda & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n+(n_\lambda+1)m}^{n+m}$  et  $M_\lambda = (A_\lambda^{n_\lambda} | A_\lambda^{n_\lambda-1} B | \cdots | A_\lambda B | B) \in \mathbb{R}_{n+n_\lambda m}^n$ .

(3.1.4.e)  $\mathcal{G}_{t_f}^s := \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, \tau) H(t_f, \tau)^\top d\tau > 0_q^q$ , où  $H(t_f, \tau) = \int_\tau^{t_f} C e^{(t_f-t)A} B dt + D$ .

Avant de donner une preuve de ce théorème, faisons quelques remarques.

La Remarque 3.1.3 montre que la propriété classique d'indépendance en temps de la contrôlabilité en état reste vraie dans le cadre de la contrôlabilité de l'état vers la sortie.

La Remarque 3.1.4 montre que dans le cas où la sortie est l'état ( $q = n$ ,  $C = I_n$  et  $D = 0_m^n$ ) alors les critères des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.4 se réduisent à ceux du Théorème 2.2.1.

La Remarque 3.1.5 illustre le fait que si la condition (3.1.4.c) est satisfaite avec  $\sigma(A)$  remplacé par n'importe quel ensemble  $\Lambda$  de cardinal fini, alors on a la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.1). C'est en fait une équivalence.

**Remarque 3.1.3.**

On peut remarquer, à travers les critères (3.1.1.c) et (3.1.4.e), que si le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f > t_0$ , alors il est contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $T$ ,

1. On rappelle que  $A_\lambda := A - \lambda I_n$  a été défini dans les notations du manuscrit.

ceci pour tout  $T > t_0$ .

En effet, en remarquant que  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  est semi-définie positive, il suit que si cette matrice est définie positive pour un temps  $t_f > t_0$  alors, par linéarité de l'intégrale, elle reste définie positive pour tout temps supérieur à  $t_f$ .

Pour un temps  $\tau$  satisfaisant  $t_0 \leq \tau < t_f$ , on observe qu'en supposant que  $\mathcal{G}_\tau^s$  n'est pas définie positive qu'il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^q \setminus \{0^q\}$  tel que  $\eta^\top \mathcal{G}_\tau^s \eta = 0$ . Il suit donc que  $H(\tau, t)^\top \eta = 0^m$  pour tout  $t \in [t_0, \tau]$  et puisque l'application  $t \mapsto H(\tau, t)^\top \eta$  est analytique, on déduit grâce au théorème de prolongement analytique que  $H(\cdot, t)^\top \eta$  s'annule identiquement sur  $\mathbb{R}$  contredisant le fait que  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  soit définie positive.

### Remarque 3.1.4.

Dans le cas où  $q = n$ ,  $C = I_n$  et  $D = 0_m^n$ , on voit que les critères (3.1.1.b), (3.1.1.c) et (3.1.4.b) sont respectivement les mêmes que (2.2.1.c), (2.2.1.f) et (2.2.1.b).

Le critère (3.1.4.e) ne se réduit pas exactement à (2.2.1.f) mais il est facile de voir que s'il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que  $\eta^\top e^{(t_f-t)A} B = 0_m$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$  alors  $\eta^\top H(t_f, t) = \int_t^{t_f} \eta^\top e^{(t_f-s)A} B ds = 0_m$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ . La réciproque s'obtient en dérivant l'équation  $\eta^\top H(t_f, t) = 0_m$  par rapport à  $t$ .

On remarque également que (3.1.4.c) devient  $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda = \{0^n\}$ . Ce qui est équivalent, en vertu de la somme directe, à  $E_\lambda = \{0^n\}$  pour tout  $\lambda \in \sigma(A)$  qui est elle-même équivalente à  $\ker B^\top \cap \ker A_\lambda^\top = \{0^n\}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  c'est-à-dire au critère (2.2.1.d).

En effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\ker B^\top \cap \ker A_\lambda^\top \subset E_\lambda$  et réciproquement, s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $E_\lambda \neq \{0^n\}$ , alors pour tout  $z_\lambda \in E_\lambda \setminus \{0^n\}$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $(A_\lambda^k)^\top z_\lambda \neq 0_n$  et  $(A_\lambda^k)^\top z_\lambda \in \ker A_\lambda^\top \cap \ker B^\top$ .

Enfin, on note que pour  $C = I_n$  et  $D = 0_m^n$ , en choisissant  $(C|D)^\perp = (0_m^n | I_m)^\top$ , le critère (3.1.4.d) se résume à  $\text{rk} \text{diag}(M_{\lambda_1}; \dots; M_{\lambda_p}) = np$ . Relation qui est équivalente à  $\text{rk} M_\lambda = n$  pour tout  $\lambda \in \sigma(A)$ . En raisonnant comme au point précédent, on obtient (2.2.1.e) par dualité.

### Remarque 3.1.5.

Remarquons que le critère (3.1.4.c) est équivalent à  $\text{rk}(C|D) = q$  et pour tout  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  tel que

$\#\Lambda \leq n$ , on a  $\text{Im} \begin{pmatrix} C^\top \\ D^\top \end{pmatrix} \cap \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \times \{0^m\} \right) = \{0^{n+m}\}$ , ceci étant vrai parce que pour tout

$\Lambda \subset \mathbb{C}$ , on a  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \subset \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda$  et  $\#\sigma(A) \leq n$ .

Dans le même ordre d'idée, on note que le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si le critère (3.1.4.d) reste satisfait sur tout sous-ensemble fini de  $\mathbb{C}$  de cardinal  $p \leq n$  à la place de  $\sigma(A)$ . Il est nécessaire de rappeler, même si c'est la définition du cardinal d'un ensemble, que les éléments de cet ensemble doivent être distincts. En effet, on peut voir qu'il n'y a pas d'équivalence entre

$$\ker(K_\lambda | (C|D)^\perp)^\top = \{0^{n+m}\} \quad \text{et} \quad \ker \begin{pmatrix} K_\lambda & 0 & (C|D)^\perp \\ 0 & K_\lambda & (C|D)^\perp \end{pmatrix}^\top = \{0^{2(n+m)}\}.$$

Si certaines propriétés, comme l'indépendance par rapport à la donnée initiale et au temps de contrôle, dans le cadre de la contrôlabilité de l'état du système (2.4) restent vraies dans le cadre de la contrôlabilité de l'état vers la sortie, il y a aussi des propriétés qui ne sont plus vraies. On peut par exemple voir que la condition nécessaire donnée dans la Proposition 2.2.4 n'est plus vraie en considérant l'exemple suivant.

**Exemple 3.1.1.**

Considérons le système (3.1) avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = 0_1^2.$$

On peut voir que la paire  $(A, B)$  n'est pas contrôlable en état en utilisant (2.2.1.c). Mais on peut aussi aboutir à la même conclusion à l'aide de la Proposition 2.2.4. En effet, on remarque que la matrice  $A$  admet la valeur propre 1 avec une multiplicité géométrique égale à 2 supérieure au rang de  $B$  qui vaut 1.

En revanche, on peut voir que le système  $(A, B, C)$  est contrôlable de l'état vers la sortie en utilisant (3.1.1.b) ou en remarquant que la matrice  $C$  est juste une sélection de deux parmi les trois variables d'état contrôlables.

Revenons-en à la preuve du Théorème 3.1.4. Pour alléger cette preuve, nous introduisons deux lemmes intermédiaires. Dans le Lemme 3.1.5, nous établissons l'équivalence entre la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.7) et celle d'un système sans apport direct de l'entrée sur la sortie. Au Lemme 3.1.6, nous prouvons l'équivalence entre les critères (3.1.4.a), (3.1.4.c) et (3.1.4.d) du Théorème 3.1.4 dans le cas  $D = 0_m^q$ . Enfin suivra la preuve du Théorème 3.1.4.

**Lemme 3.1.5.** Considérons pour  $t \geq 0$  le système

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}v(t), \tag{3.7a}$$

$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t), \tag{3.7b}$$

où  $v(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n+m}$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ , les matrices  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  étant celles définies au (2.10) et  $\tilde{C} = (C|D)$ . Le système (3.7) est contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si le système (3.1) l'est.

**Remarque 3.1.6.**

Dans le lemme précédent, on peut prendre comme ensemble de contrôles admissibles  $L^\infty([t_0, t_f])^m$ .

*Démonstration.*

On commence par déduire des relations (2.5) et (3.5) que pour tout état  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$  au temps  $t_0$  et tout  $t_f \geq t_0$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Acc}}^s(\tilde{x}_0, t_f) &= \left\{ Ce^{(t_f-t_0)\tilde{A}}\tilde{x}_0 \right\} + \tilde{C} \text{Im} \left[ \tilde{B}|\tilde{A}\tilde{B}|\tilde{A}^2\tilde{B}|\dots|\tilde{A}^{n+m-1}\tilde{B} \right] \\ &= \left\{ Ce^{(t_f-t_0)\tilde{A}}\tilde{x}_0 \right\} + \text{Im} [CB|CAB|CA^2B|\dots|CA^{n-1}B|D]. \end{aligned}$$

Ensuite  $\text{Acc}^s(x_0, t_f) = \left\{ Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 \right\} + \text{Im} [CB|CAB|CA^2B|\dots|CA^{n-1}B|D]$ .

On conclut en remarquant que  $\tilde{\text{Acc}}^s(\tilde{x}_0, t_f) = \mathbb{R}^q$  pour tout  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$  si et seulement si on a  $\text{Acc}^s(x_0, t_f) = \mathbb{R}^q$  pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . □

Ainsi, il suffit de prouver le Théorème 3.1.4 dans le cas  $D = 0_m^q$  et appliquer les résultats au Lemme 3.1.5. Comme mentionné précédemment, dans le Lemme 3.1.6 nous ne donnons que les critères correspondant à (3.1.4.c) et (3.1.4.d). Ainsi, on a :

**Lemme 3.1.6.** Supposons  $D = 0_m^q$  dans (3.1). Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(3.1.6.a) Le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie.

(3.1.6.b)  $\text{rk}(C) = q$  et

$$\text{Im } C^\top \cap \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda = \{0^n\},$$

où nous rappelons  $E_\lambda = \ker(A_\lambda^\top)^{n_\lambda} \cap \left(\bigcap_{k=0}^{n_\lambda-1} \ker B^\top (A_\lambda^\top)^k\right)$ , avec  $n_\lambda$ , la multiplicité algébrique de  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $A$ .

$$(3.1.6.c) \quad \text{rk}(C) = q \text{ et } \text{rk} \begin{pmatrix} M_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & C^\perp \\ 0 & M_{\lambda_2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & M_{\lambda_p} & C^\perp \end{pmatrix} = np, \text{ où } M_\lambda \text{ est définie dans (3.1.4.d).}$$

*Démonstration.*

• *Équivalence entre (3.1.6.a) et (3.1.6.b)*

Nous montrons que (3.1.6.b) implique (3.1.6.a) par contraposition.

Pour cela, définissons

$$\mathbb{W} := \text{Im } C^\top \cap \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda.$$

On commence par rappeler que dans le cas  $D = 0_m^q$ , la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.1) est équivalente, d'après le Théorème 3.1.1, à

$$\text{rk} [CB|CAB|CA^2B|\dots|CA^{n-1}B] = q.$$

Ceci découle directement de la Proposition 3.1.3 et de la preuve du Lemme 3.1.5.

Supposons que le système ne soit pas contrôlable de l'état vers la sortie.

Dans ce cas, il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^q \setminus \{0^q\}$  tel que  $\eta^\top CA^k B = 0_m$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{<n}$  et donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par Cayley-Hamilton.

Soit  $\eta \in \ker(C^\top)$  impliquant que  $\text{rk}(C) < q$  et donc que (3.1.6.b) n'est pas satisfaite, soit le vecteur  $v := C^\top \eta \in \text{Im}(C^\top)$  est non nul et dans ce dernier cas, on a un vecteur  $v$  non nul, appartenant à  $\text{Im}(C^\top)$  et vérifiant  $vA^k B = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Définissons

$$\mathcal{N} := \left\{ w \in \mathbb{R}^n : B^\top (A^k)^\top w = 0^m, \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{N}$  n'est pas réduit au singleton  $\{0^n\}$  car contient le vecteur  $v$ .

On déduit donc que

$$\text{Im}(C^\top) \cap \mathcal{N} \neq \{0^n\}.$$

En observant que l'espace vectoriel  $\mathcal{N}$  est  $A^\top$  invariant, il suit de [39, Théorème 2.1.5] que

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \left( \mathcal{N} \cap \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda} \right).$$

Il suffit donc de montrer maintenant que  $\mathcal{N} \cap \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda} = E_\lambda$  pour aboutir au fait que  $\mathbb{W} \neq \{0^n\}$ .

Soit donc  $v_\lambda$  un vecteur non nul de  $\mathcal{N} \cap \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda}$ .

On a  $v_\lambda \in \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda}$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B^\top (A^\top)^k v_\lambda = 0^m$ .

En écrivant  $B^\top (A_\lambda^\top)^k v_\lambda = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-\bar{\lambda})^{k-\ell} B^\top (A^\top)^\ell v_\lambda$  grâce à la formule du binôme de Newton,

on déduit que  $v_\lambda \in E_\lambda$  et donc que  $\mathcal{N} \cap \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda} \subset E_\lambda$ .

Réciproquement, pour tout vecteur non nul  $v_\lambda \in E_\lambda$ , on a  $(A_\lambda^\top)^{n_\lambda} v_\lambda = 0^n$  et  $B^\top (A_\lambda^\top)^k v_\lambda = 0^m$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}$ . En utilisant de nouveau la formule du binôme de Newton, on déduit de  $B^\top (A_\lambda^\top)^k v_\lambda = 0^m$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}$  que  $B^\top (A^\top)^k v_\lambda = 0^m$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}$ . Pour les  $k \geq n_\lambda$ , on commence par remarquer que  $(A_\lambda^\top)^{n_\lambda + \ell} v_\lambda = 0^n$  pour tout  $\ell \geq 0$  car  $v_\lambda \in \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda}$ . Ensuite, on utilise la formule du binôme de Newton pour faire une expansion de  $B^\top (A_\lambda^\top)^k v_\lambda$  pour tout  $k \geq n_\lambda$ . Enfin, on utilise le fait que  $B^\top (A^\top)^k v_\lambda = 0^m$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}$ .

Par exemple, pour  $k = n_\lambda$ , on a  $(A_\lambda^\top)^{n_\lambda} v_\lambda = 0^n$  et donc  $B^\top (A_\lambda^\top)^{n_\lambda} v_\lambda = 0^m$ . La formule du binôme de Newton nous permet à nouveau de dire que  $\sum_{\ell=0}^{n_\lambda} \binom{n_\lambda}{\ell} (-\bar{\lambda})^{n_\lambda - \ell} B^\top (A^\top)^\ell v_\lambda = 0^m$ . Mais puisque  $B^\top (A^\top)^k v_\lambda = 0^m$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}$ , on déduit que  $B^\top (A^\top)^{n_\lambda} v_\lambda = 0^m$ .

On a ainsi prouvé que  $v_\lambda \in \mathcal{N}$  et que  $E_\lambda \subset \mathcal{N} \cap \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda}$ .

De ce qui précède, on déduit l'égalité souhaitée, c'est-à-dire

$$\mathcal{N} \cap \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda} = E_\lambda.$$

On a donc montré que si le système n'est pas contrôlable de l'état vers la sortie alors le critère (3.1.6.b) n'est pas satisfait, ce qui est équivalent au fait que (3.1.6.b) implique (3.1.6.a).

Montrons maintenant par la même méthode que (3.1.6.a) implique (3.1.6.b).

On commence par se rappeler grâce à la condition nécessaire (3.6) que si  $\text{rk}(C) < q$  alors on n'a pas (3.1.6.a). Supposons maintenant que  $\text{rk}(C) = q$  et que  $\mathbb{W} \neq \{0^n\}$ .

Comme  $\mathbb{W} \neq \{0^n\}$ , il existe un vecteur non nul  $v = C^\top \eta$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , tel que  $v = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} v_\lambda$  où  $v_\lambda \in E_\lambda$ . De la preuve de l'implication précédente, il est clair que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B^\top (A^\top)^k C^\top \eta = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} B^\top (A^\top)^k v_\lambda = 0^m$  et donc que  $\text{rk} [CB | CAB | CA^2B | \dots | CA^{n-1}B] < q$ .

Ceci montre que (3.1.6.a) implique (3.1.6.b) et achève la preuve de l'équivalence entre les deux points.

• *Équivalence entre (3.1.6.b) et (3.1.6.c).*

On commence par remarquer que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $E_\lambda = \ker(M_\lambda^\top)$  et que s'il existe un vecteur non nul  $v \in \mathbb{W}$ , alors  $v \in \text{Im}(C^\top)$  et peut être mis sous la forme  $v = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} v_\lambda$ , où  $v_\lambda \in \ker(M_\lambda^\top)$ . Ensuite, puisque  $v \in \text{Im}(C^\top)$  et que  $\text{Im}(C^\top) = \ker(C)^\perp$ , on déduit que pour tout  $w \in \ker(C)$ ,  $\langle v, w \rangle = 0$ . Aussi, de la définition de  $C^\perp$ , on a  $\ker(C) = \text{Im}(C^\perp)$ . Ainsi, on a  $\langle v, C^\perp \eta \rangle = 0$  ceci pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^\kappa$  où  $\kappa = \dim \ker(C)$ . Il suit donc que  $(C^\perp)^\top v = 0^\kappa$  et donc que  $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} (C^\perp)^\top v_\lambda = 0^\kappa$ . Puisque pour tout  $\lambda \in \sigma(A)$ ,  $v_\lambda \in \ker M_\lambda^\top$ , on déduit de ce qui précède que

$$\begin{pmatrix} v_{\lambda_1} \\ v_{\lambda_2} \\ \vdots \\ v_{\lambda_p} \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} M_{\lambda_1}^\top & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_{\lambda_p}^\top \\ C^{\perp \top} & \dots & \dots & C^{\perp \top} \end{pmatrix}.$$

et ceci achève la preuve de l'équivalence entre (3.1.6.b) et (3.1.6.c). □

**Remarque 3.1.7.**

*Il convient de noter que dans le cas où  $C$  est inversible et  $D = 0_m^n$ , l'ensemble  $\mathbb{W}$  défini dans la preuve précédente est exactement égal à  $\mathcal{N}$ . Dans ce cas, comme  $\mathcal{N}$  est  $A^\top$  invariant, il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{W} \setminus \{0^n\}$  si et seulement s'il existe un vecteur propre de  $A^\top$  dans le noyau de  $B^\top$ , autrement dit, si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\ker(A_\lambda^\top) \cap \ker(B^\top) \neq \{0^n\}$ . Ce qui nous*

donne le test de Hautus (2.2.1.e) et, par dualité, (2.2.1.d).

En revanche, si la matrice  $C$  n'est pas inversible mais juste de rang  $q$ , l'ensemble  $\mathbb{W}$  n'est plus nécessairement invariant par  $A^\top$  et on ne peut plus raisonner comme précédemment.

Nous donnons maintenant la preuve du Théorème 3.1.4.

*Démonstration.*

• *Équivalence entre (3.1.4.a) et (3.1.4.b).*

Si l'on suppose que l'application  $E_{t_f}^s$  est surjective, alors pour tout vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tel que  $E_{t_f}^s u = \eta$ . Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , comme le vecteur  $y_1 - Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle  $u$  tel que  $E_{t_f}^s u = y_1 - Ce^{(t_f-t_0)A}x_0$ . Il suit donc que le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$ .

Réciproquement, s'il existe un vecteur dans  $\mathbb{R}^q \setminus \{0^q\}$  tel que  $\eta^\top E_{t_f}^s u = 0$  pour tout  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  alors, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , la trajectoire de sortie de l'équation (3.1) satisfait  $\eta^\top y(t_f; t_0, x_0, u) = \eta^\top Ce^{(t_f-t_0)A}x_0$  impliquant en particulier que  $\eta$  ne peut pas être atteint à partir de l'état  $x_0 = 0^n$ .

• *Équivalence entre (3.1.4.a) et (3.1.4.c).*

Pour prouver que les critères (3.1.4.a) et (3.1.4.c) sont équivalents, on applique au système (3.7) le critère (3.1.6.b) du Lemme 3.1.6 et on utilise l'équivalence entre la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.1) et celle du système (3.7).

D'après le critère (3.1.6.b), le système (3.7) est contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si

$$\text{rk}(\tilde{C}) = q \quad \text{et} \quad \text{Im } \tilde{C}^\top \cap \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\tilde{A})} \tilde{E}_\lambda = \{0^{n+m}\}, \quad (3.8)$$

où pour tout  $\lambda \in \sigma(\tilde{A})$ ,

$$\tilde{E}_\lambda = \ker(\tilde{A}_\lambda^\top)^{n_\lambda} \cap \left( \bigcap_{k=0}^{n_\lambda-1} \ker \tilde{B}^\top (\tilde{A}_\lambda^\top)^k \right)$$

et  $n_\lambda$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $\tilde{A}$ .

Remarquons déjà que  $\text{rk}(\tilde{C}) = \text{rk}(C|D)$  et que  $\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A) \cap \{0\}$ .

Réécrivons maintenant le critère ci-dessus en fonction des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

On a aisément

$$\text{Im } \tilde{C}^\top = \text{Im} \begin{pmatrix} C^\top \\ D^\top \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ker \tilde{B}^\top = \mathbb{R}^n \times \{0^m\}. \quad (3.9)$$

Soit  $\tilde{v}_\lambda = (\eta_\lambda^\top, w_\lambda^\top)^\top \in \tilde{E}_\lambda$ , avec  $\eta_\lambda \in \mathbb{R}^n$  et  $w_\lambda \in \mathbb{R}^m$ .

Comme  $\tilde{v}_\lambda \in \tilde{E}_\lambda$  alors en prenant  $k = 0$  dans  $\tilde{E}_\lambda$ , on a  $\tilde{v}_\lambda \in \ker(\tilde{B}^\top)$  et donc que  $w_\lambda = 0^m$  d'après (3.9).

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\left( \tilde{A}_\lambda^\top \right)^k = \begin{pmatrix} (A_\lambda^\top)^k & 0_m^n \\ \sum_{\ell=0}^{k-1} (-\lambda)^\ell B^\top (A_\lambda^\top)^{k-\ell-1} & (-\lambda)^k I_m \end{pmatrix}.$$

On déduit que  $v_\lambda \in \ker \left( \tilde{A}_\lambda^\top \right)^{n_\lambda}$  si et seulement si

$$\eta_\lambda \in \ker \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda} \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=0}^{n_\lambda-1} (-\lambda)^\ell B^\top \left( A_\lambda^\top \right)^{n_\lambda-\ell-1} \eta_\lambda = 0^m. \quad (3.10)$$

On a aussi, en utilisant (3.9) et le fait que  $(\tilde{A}_\lambda^\top)^k v_\lambda \in \ker \tilde{B}^\top, \forall k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}^*$ ,

$$\sum_{l=0}^{k-1} (-\lambda)^l B^\top (A_\lambda^\top)^{k-l-1} \eta_\lambda = 0^m, \forall k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}^*.$$

De l'équation précédente et de la relation (3.10), il suit de façon équivalente que

$$\eta_\lambda \in \ker (A_\lambda^\top)^{n_\lambda} \text{ et } (A_\lambda^\top)^k \eta_\lambda \in \ker B^\top, \forall k \in \mathbb{N}_{<n_\lambda}. \quad (3.11)$$

Les relations (3.9) et (3.11) montrent que  $\tilde{E}_\lambda = E_\lambda \times \{0^m\}$ . Remarquons que si  $0 \notin \sigma(A)$  alors  $\tilde{E}_0 = \{0^{n+m}\}$ . Pour finir, il suffit de remplacer dans l'équation (3.8) la matrice  $\tilde{C}$  par  $(C|D)$ ,  $\sigma(\tilde{A})$  par  $\sigma(A)$  et  $\tilde{E}_\lambda$  par  $E_\lambda \times \{0^m\}$ .

• *Équivalence entre (3.1.4.c) et (3.1.4.d).*

Pour cette équivalence, il suffit de remarquer que (3.1.4.c) a la même forme que (3.1.6.b) avec  $E_\lambda$  remplacé par  $E_\lambda \times \{0^m\}$ . En observant que  $E_\lambda \times \{0^m\} = \ker(K_\lambda^\top)$  où  $K_\lambda^\top$  est définie dans (3.1.4.d), il suffit donc de remplacer dans (3.1.6.b) les matrices  $C, M_\lambda$  respectivement par  $(C|D)$  et  $K_\lambda$  et  $n$  par  $n + m$  pour obtenir (3.1.4.d).

• *Équivalence entre (3.1.4.a) et (3.1.4.e).*

Il suffit d'appliquer (3.1.1.c) au système (3.7) et de remarquer<sup>2</sup> que

$$e^{(t_f-t)\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^{(t_f-t)A} & \int_t^{t_f} e^{(t_f-\tau)A} B \, d\tau \\ 0_n^m & I_m \end{pmatrix}.$$

□

Dans la suite de cette section, nous montrons comment construire, dans le cas où le système (3.1) est contrôlable de l'état vers la sortie, une commande permettant d'avoir une valeur de sortie désirée à partir d'un état initial.

On a le théorème suivant :

**Théorème 3.1.7.** *Supposons que le système (3.1) soit contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f > t_0$ . Alors, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_1 \in \mathbb{R}^q$  et pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ , le contrôle*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t H(t_f, \tau)^\top \, d\tau (\mathcal{G}_{t_f}^s)^{-1} (y_1 - y(t_f; t_0, x_0, u_0)) \quad (3.12)$$

*envoie la sortie du système à la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$  en partant de  $x_0$  au temps  $t_0$ . Rappelons que  $H(t_f, \cdot)$  et  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  ont été définis dans (3.1.4.e) et  $y(t_f; t_0, x_0, u_0) := Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 + H(t_f, t_0)u_0$ . De plus, ce contrôle est l'unique solution du problème de minimisation*

$$\min \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |\dot{u}(t)|_m^2 \, dt \quad (3.13)$$

|  $u \in H^1([t_0, t_f])^m, u(t_0) = u_0, y_1 = y(t_f; t_0, x_0, u)$ .

2. Si besoin, voir la référence [90] sur le calcul de l'exponentiel de matrices.

*Démonstration.*

Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ . Comme le système (3.1) est supposé contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f$  alors il existe un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  envoyant la trajectoire de sortie à la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$ . En fait, il y a une infinité de contrôles qui le font puisque le noyau de l'application  $E_{t_f}^s$  est de dimension infinie. Ici, nous proposons d'en construire un auquel on s'impose la valeur initiale  $u_0$ .

Pour ce faire, supposons qu'il existe un contrôle  $u$  dans  $H^1([t_0, t_f])^m$  tel que  $u(t_0) = u_0$  et que ce contrôle satisfait  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ , la supposition étant justifiée par le fait que  $H^1([t_0, t_f])^m$  s'injecte strictement dans  $\mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ . Quoiqu'il en soit, on peut voir que la régularité des contrôles importe peu pour la notion de contrôlabilité que nous regardons. Mais puisque nous n'avons pas rigoureusement démontré que si le système (3.1) est contrôlable avec des contrôles  $\mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ , il l'est avec des contrôles  $H^1([t_0, t_f])^m$ , faisons une preuve par analyse et synthèse.

Puisque  $u \in H^1([t_0, t_f])^m$  et  $u(t_0) = u_0$ , il existe une fonction  $v \in L^2([t_0, t_f])^m$  telle que  $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$ . Injectant cette expression dans celle de  $y(t_f; t_0, x_0, u)$  donnée au (3.3), on obtient

$$y(t_f; t_0, x_0, u) = y(t_f; t_0, x_0, u_0) + \int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-t)A} B \int_{t_0}^t v(s) ds dt + D \int_{t_0}^{t_f} v(t) dt.$$

Une intégration par partie sur la première intégrale à droite de l'égalité précédente donne

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-t)A} B \left[ \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right] dt &= \left[ \left( \int_{t_0}^t C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau \right) \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right]_{t_0}^{t_f} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau \right] v(t) dt, \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ C e^{(t_f-t)A} B \int_{t_0}^{t_f} v(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau v(t) \right] dt, \end{aligned}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^t C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau \right] v(t) dt &= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau - \int_t^{t_f} C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau \right] v(t) dt, \\ &= \int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau \int_{t_0}^{t_f} v(t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \int_t^{t_f} C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau v(t) dt. \end{aligned}$$

Il suit donc que

$$\int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-t)A} B \left[ \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right] dt = \int_{t_0}^{t_f} \left[ \int_t^{t_f} C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau \right] v(t) dt$$

et que

$$y(t_f; t_0, x_0, u) = y(t_f; t_0, x_0, u_0) + \Phi v, \quad \text{où} \quad \Phi v := \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, t) v(t) dt. \quad (3.14)$$

En reportant l'expression précédente de  $y(t_f; t_0, x_0, u)$  et celle de  $u$  dans le problème (3.13), il devient

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |v(t)|_m^2 dt \\ | \quad & v \in L^2([t_0, t_f])^m \text{ et } y_1 - y(t_f; t_0, x_0, u_0) = \Phi v. \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation précédent étant un problème strictement convexe sous contrainte affine non vide, on en déduit qu'il admet une unique solution dans  $L^2([t_0, t_f])^m$ . En désignant par  $\psi \in \mathbb{R}^q$  le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'égalité, le Lagrangien du problème précédent s'écrit

$$\mathcal{L}(v, \psi) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |v(t)|_m^2 dt + \langle \psi, y_1 - y(t_f; t_0, x_0, u_0) - \Phi v \rangle.$$

De ce qui précède, on déduit l'existence de  $u_{\text{opt}} \in L^2([t_0, t_f])^m$  et d'un  $\psi_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^q$  tels que

$$\nabla_u \mathcal{L}(u_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}}) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\psi \mathcal{L}(u_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}}) = 0,$$

conduisant à

$$u_{\text{opt}}(t) = H(t_f, t)^\top \psi_{\text{opt}}, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{t_f}^s \psi_{\text{opt}} = y_1 - y(t_f; t_0, x_0, u_0).$$

En utilisant l'hypothèse de contrôlabilité du système, on déduit que la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  est inversible et donc que le contrôle optimal est donné par

$$u_{\text{opt}}(t) = H(t_f, t)^\top (\mathcal{G}_{t_f}^s)^{-1} (y_1 - y(t_f; t_0, x_0, u_0)), \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

Le contrôle  $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t u_{\text{opt}}(\tau) d\tau$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  est continu et satisfait  $u(t_0) = u_0$ . De plus, par construction, ce contrôle envoie la sortie du système vers la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$  en partant d'une donnée initiale  $x_0$  en état au temps  $t_0$  et il est solution de (3.13).

Remarquons, pour finir, que ce contrôle est celui donné par l'équation (3.12).  $\square$

### 3.1.3 Illustration des résultats précédents

Dans le reste de cette section, nous illustrons les résultats précédents à travers deux exemples. Le premier exemple est académique et le second reprend l'exemple des voitures.

Considérons le système (3.1) avec  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $q = 2$  et les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix},$$

où  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  et  $\delta$  sont des nombres réels.

Sur cet exemple, il est possible de voir que le système est contrôlable en état si et seulement si  $\alpha \neq 0$ . En effet, si  $\alpha = 0$ , on remarque le contrôle n'agit pas sur la première composante de l'état. On peut aussi utiliser le Théorème 2.2.1.

La condition nécessaire (3.6) de contrôlabilité de l'état vers la sortie, quant-à-elle, stipule qu'au moins un des paramètres  $\gamma$ ,  $\nu$  ou  $\delta$  doit être non nul. La condition de rang de Kalman (3.1.1.b) étant bien connue, nous dérivons à travers elle les conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité de l'état vers la sortie et montrons que nous retrouvons les mêmes conditions avec les critères proposés dans le Théorème 3.1.4.

- *Critère (3.1.1.b).*

Dans cet exemple, on a

$$[CB|CAB|CA^2B|D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ \nu & \nu & \nu + \alpha\gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Du critère (3.1.1.b), on déduit que le système n'est pas contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si

$$\delta = \nu = \alpha\gamma = 0. \quad (3.15)$$

• *Critère (3.1.4.c).*

Commençons par rappeler que la condition nécessaire (3.6) implique que pour avoir la contrôlabilité de l'état vers la sortie, il faut que  $\gamma \neq 0$  ou  $\nu \neq 0$  ou  $\delta \neq 0$ . Il est clair que si cette condition n'est pas satisfaite, alors (3.15) est automatiquement satisfaite.

Aussi, on peut voir que  $\sigma(A) = \{1\}$ .

- Si  $\alpha = 0$ , la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 dans le polynôme minimal de  $A$  est  $n_1 = 2$  car le polynôme minimal de  $A$  est  $p_{\min}(A) = (A - I_3)^2$ . On a aussi  $E_1 = \text{Vect}\{(1 \ 0 \ 0)^\top\}$ . En effet,  $E_1 = \ker(A_1^\top)^2 \cap \ker(B^\top) \cap \ker(B^\top A_1^\top)$  avec  $\ker(A_1^\top)^2 = \mathbb{R}^3$ ,  $\ker(B^\top) = \text{Vect}\{(1 \ 0 \ 0)^\top, (0 \ 1 \ 0)^\top\}$  et  $\ker(B^\top A_1^\top) = \text{Vect}\{(1 \ 0 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 1)^\top\}$ . Aussi, on a  $\text{Im}(C|D)^\top = \text{Vect}\{(0 \ 1 \ 0 \ 0)^\top, (\gamma \ 0 \ \nu \ \delta)^\top\}$ . On déduit donc que si  $\alpha = 0$  alors

$$\text{Im}(C|D)^\top \cap \left( \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda \times \{0^m\} \right) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \nu \\ \delta \end{pmatrix} \right\} \cap \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Notons que l'espace vectoriel précédent n'est pas réduit au singleton  $\{0^4\}$  si et seulement si  $\gamma \neq 0$  et  $\nu = \delta = 0$ .

- Si  $\alpha \neq 0$ , on a  $n_1 = 3$  avec  $E_1 = \{0^3\}$ . Il suit donc que  $\text{Im}(C|D)^\top \cap \left( \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda \times \{0^m\} \right) = \{0^4\}$  et que dans ce cas, la condition nécessaire est suffisante.

Ce dernier item illustre bien la Remarque 3.1.2 et l'importance de la condition nécessaire (3.6) dans le critère (3.1.4.c).

• *Critère (3.1.4.d).*

Pour vérifier ce critère, il nous faut choisir la matrice  $J = (C|D)^\perp$  et calculer  $K_1$ .

Pour la matrice  $J$ , on fait le choix suivant :

Pour $\gamma \neq 0$ ,	Pour $\nu \neq 0$ ,	Pour $\delta \neq 0$ ,
$J = \begin{pmatrix} -\nu & -\delta \\ 0 & 0 \\ \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$	$J = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 0 \\ -\gamma & -\delta \\ 0 & \nu \end{pmatrix},$	$J = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \delta \\ -\gamma & -\nu \end{pmatrix}.$

Rappelons que la matrice  $J$  est une matrice de rang maximal contenant une base du noyau de la matrice  $(C|D)$ . Donc pour calculer  $J$ , on a besoin de distinguer les cas  $\gamma \neq 0$ ,  $\nu \neq 0$  et  $\delta \neq 0$ .

De façon similaire, pour calculer  $K_1$ , on a besoin de distinguer le cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha \neq 0$ .

En se rappelant que  $\sigma(A) = \{1\}$  et  $p = \#\sigma(A) = 1$ , on déduit, en appliquant la formule donnée

dans (3.1.4.d), que

pour $\alpha \neq 0, K_1 \in \mathbb{R}_7^4$ et	pour $\alpha = 0, K_1 \in \mathbb{R}_6^4$ et
$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$	$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- Si  $\alpha = 0$  et  $\gamma \neq 0$  alors la condition nécessaire (3.6) est satisfaite et  $\text{rk}(K_1|J) = (n+m)p = 4$  si et seulement si  $\nu \neq 0$  ou  $\delta \neq 0$ .
- Si  $\alpha = 0$  et  $\nu \neq 0$  (resp.  $\delta \neq 0$ ), la condition (3.6) est également satisfaite et  $\text{rk}(K_1|J) = 4$  sans aucune restriction sur  $\gamma$  et  $\delta$  (resp.  $\nu$ ).
- Si  $\alpha \neq 0$ , on a  $\text{rk}(K_1|J) = 4$  dans les cas  $\gamma \neq 0, \nu \neq 0$  et  $\delta \neq 0$ . Ce qui montre qu'il y'a contrôlabilité de l'état vers la sortie si et seulement si la condition (3.6) est satisfaite.

Il suit que le système n'est pas contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si la relation (3.15) est satisfaite.

• Critère (3.1.4.e).

Pour vérifier ce critère, on fixe  $t_0 = 0$  et on choisit dans un premier temps  $t_f = 1$ .

En appliquant la formule donnant  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  dans (3.1.4.e), on montre que le déterminant de  $\mathcal{G}_1^s$  se met sous la forme

$$\det \mathcal{G}_1^s = \frac{1}{256} \begin{pmatrix} \alpha\gamma & \nu & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_6 \\ a_4 & a_2 & a_5 \\ a_6 & a_5 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \nu \\ \delta \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= 3e^4 - 16e^3 - 38e^2 + 272e - 301, & a_2 &= 16(e^4 - 8e^3 + 14e^2 + 8e - 19), \\ a_3 &= 64(-3e^2 + 16e - 21), & a_4 &= 4(e^4 - 8e^3 + 20e^2 - 40e + 67), \\ a_5 &= 64(e^2 - 6e + 9), & a_6 &= 16(e^3 - 9e^2 + 27e - 27). \end{aligned}$$

On peut ainsi facilement voir que la matrice impliquée dans ce déterminant est définie positive et donc que ce déterminant s'annule si et seulement si (3.15) est satisfaite.

Réciproquement, si (3.15) est satisfaite, on a pour tout  $t_f > 0$ ,  $\mathcal{G}_{t_f}^s = \begin{pmatrix} f(t_f) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  où  $4f(t_f) = (2t_f^2 - 6t_f + 5)e^{2t_f} + 8(t_f - 2)e^{t_f} + 4t_f + 11$ . Ainsi,  $\det \mathcal{G}_{t_f}^s = 0$  pour tout  $t_f > 0$ .

On peut donc voir que les critères du Théorème 3.1.4 convergent vers la même conclusion que celui de Kalman étendu (3.1.1.c) c'est-à-dire que le système considéré est contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si la condition (3.15) n'est pas satisfaite.

**Remarque 3.1.8.**

Il convient de préciser, puisqu'il s'agit de la sortie, que la contrôlabilité de l'état vers la sortie et l'observabilité sont deux notions distinctes. En effet, la sortie du système (3.1) peut être contrôlable sans que ce système soit observable. Il suffit de considérer l'exemple précédent avec  $\alpha = \gamma = \delta = 0$  et  $\nu \neq 0$ . Pour la notion d'observabilité, nous nous référons à [87, Section 3.3].

Considérons maintenant l'exemple des deux voitures mentionné dans l'introduction générale et dont les équations d'état et de sortie sont données respectivement par (1.1) et (1.2). L'objectif que nous nous fixons pour ce système est d'envoyer la sortie à la valeur  $y_1 = (2, 0, 0)^\top$  au temps  $t_f = 1$  en partant d'une position initiale en état  $x_0 = (1, 0, 1, 0)^\top$ . De façon explicite, on aimerait que les deux voitures, étant à la même position initiale à l'instant initial  $t_0 = 0$ , puissent avoir, au temps  $t_f = 1$ , une distance de 2 qui les sépare, la même vitesse et la même accélération.

En remarquant que ce système est contrôlable en état et que la condition nécessaire (3.6) est satisfaite, il suit de la Remarque 3.1.7 que ce système est contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f = 1$  et qu'il est donc possible de remplir le cahier des charges défini précédemment.

Pour les paramètres du système, nous prenons  $m_1 = m_2 = 1$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ . Nous imposons que la valeur initiale de notre contrôle soit  $u_0 = (1, 0)^\top$ .

En appliquant le Théorème 3.1.7, on obtient comme contrôle  $u = (u_1, u_2)^\top$  avec

$$u_1 = 1 - u_2 \quad \text{et} \quad u_2(t) = at + bt^2 + c(e^{\frac{t}{2}} - 1), \quad t \in [0, 1]$$

où nous avons posé

$$a = \frac{254 + 98e - 316e^{\frac{1}{2}}}{222e - 736e^{\frac{1}{2}} + 610}, \quad b = \frac{105 + 45e - 138e^{\frac{1}{2}}}{222e - 736e^{\frac{1}{2}} + 610}, \quad c = \frac{54 - 32e^{\frac{1}{2}}}{222e - 736e^{\frac{1}{2}} + 610}.$$

Aussi, le contrôle construit à partir de la matrice  $\mathcal{K}_{t_f}$  et donné dans la Proposition 3.1.2 est

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, -\tilde{u}_1)^\top, \quad \tilde{u}(1) = (0, 0)^\top \quad \text{avec} \quad \tilde{u}_1(t) = \frac{2e^{\frac{t}{2}} - e^{\frac{1}{2}} - 1}{6e^{\frac{1}{2}} - 10}, \quad t \in [0, 1).$$

Les deux contrôles et les trajectoires d'état et de sortie associés sont représentés sur la Figure 3.1. La première ligne de cette figure montre le contrôle construit grâce à la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$ . Ce contrôle est continu et vaut  $u_0$  au temps  $t = 0$ . Il permet aussi d'avoir une distance de 2 entre les positions des deux voitures avec une même vitesse et une même accélération au temps  $t_f = 1$  avec des trajectoires de sortie continues. Dans la seconde ligne, nous traçons en premier lieu le contrôle construit grâce à la matrice  $\mathcal{K}_{t_f}$ . On voit que la discontinuité de ce contrôle au temps  $t_f = 1$  engendre une discontinuité sur la trajectoire de sortie au temps final, phénomène non souhaitable dans la pratique.

## 3.2 Systèmes LTI à temps discret

Dans cette section, nous considérons la version temps discret de l'équation (3.1) donnée par

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (3.16a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \quad (3.16b)$$

où  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^q$ ,  $D \in \mathbb{R}^q$ . Les variables  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^q$  désignent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système à l'instant  $k \in \mathbb{N}$ . Ici, l'ensemble de contrôles admissibles est l'ensemble de suites  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $u_k \in \mathbb{R}^m$ . Nous empruntons la définition suivante issue de [13, p.430].

**Définition 3.2.1.** — *Le système (3.16) est dit contrôlable de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s), si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $(u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tel que la trajectoire de sortie partant de l'état initial  $x_0$  au temps  $k_0$  vaille  $y_1$  au temps  $k_0 + N$ , c'est-à-dire  $y_{k_0+N} = y_1$ .*

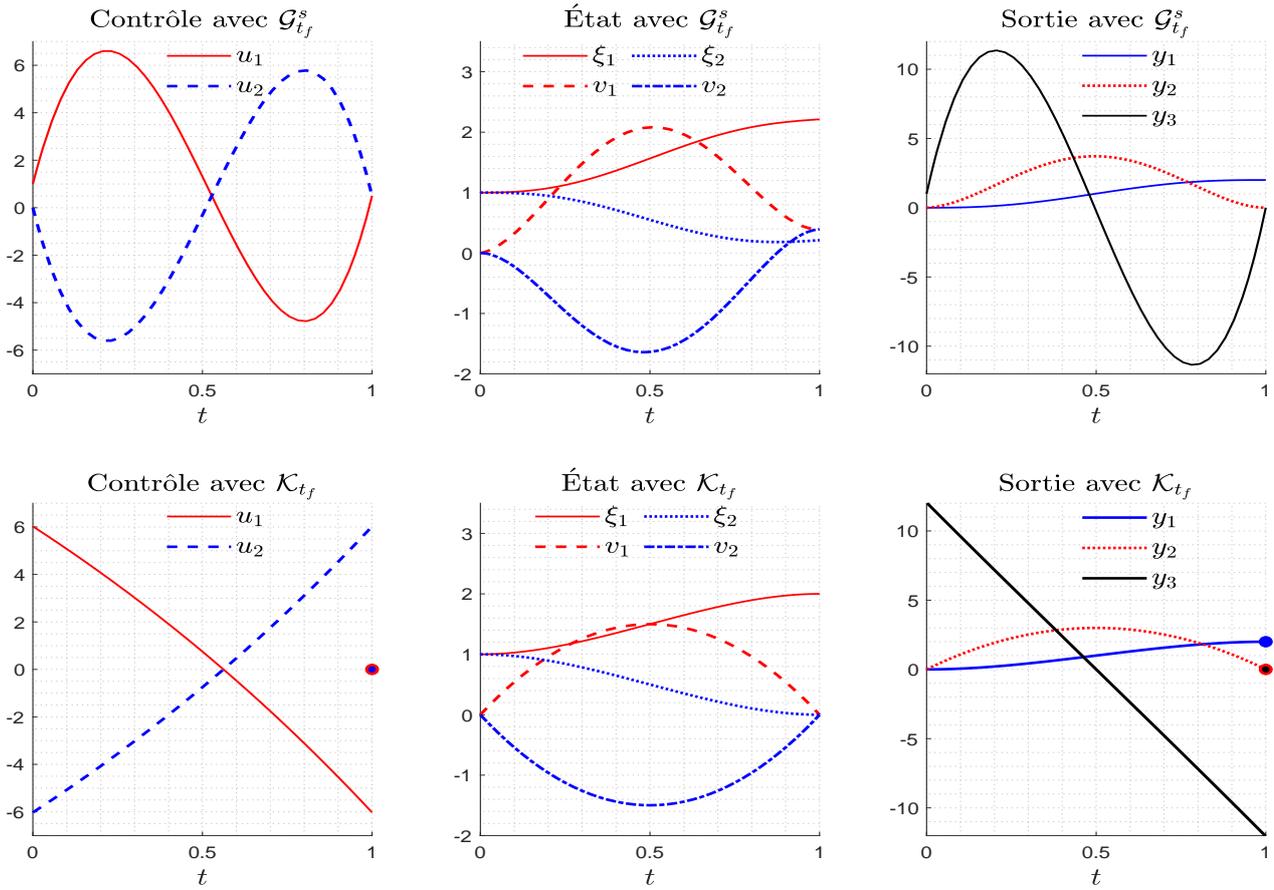


FIGURE 3.1 – Sur la première ligne, nous avons les trajectoires associées au contrôle construit avec la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  et sur la seconde ligne, les trajectoires associées au contrôle construit avec la matrice  $\mathcal{K}_{t_f}$ . Rappelons qu'il s'agit du système (3.1) avec  $A, B, C, D$  données par les équations (1.1) et (1.2). Aussi, on a choisi  $x_0 = (1, 0, 1, 0)^\top$ ,  $y_1 = (2, 0, 0)^\top$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_f = 1$ ,  $m_1 = m_2 = 1$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ .

— Le système (3.16) est dit *contrôlable de l'état vers la sortie*, si pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^q$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $(u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tels que la trajectoire de sortie partant de l'état initial  $x_0$  au temps  $k_0$  vaille  $y_1$  au temps  $k_0 + N$ , c'est-à-dire  $y_{k_0+N} = y_1$ .

Si  $C = I_n$  et  $D = 0_m^n$  alors la sortie est l'état. Dans ce cas, le sujet est bien compris dans la littérature, voir par exemple [44, Lecture 11].

Dans ce paragraphe, nous montrons que les critères (3.1.1.b), (3.1.4.c) et (3.1.4.d) sont également nécessaires et suffisants pour la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.16). Aussi, nous donnons dans le cas où le système est contrôlable, l'expression d'un contrôle nous permettant d'atteindre la valeur de sortie désirée.

En remarquant que pour toute donnée initiale en état  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $(u_k)_{k \geq k_0}$ , la trajectoire de sortie après  $N$  itération(s) en partant de  $x_0$  au temps  $k_0$  est donnée par

$$y_{k_0+N} = CA^N x_0 + \sum_{\ell=0}^{N-1} CA^{N-\ell-1} B u_{k_0+\ell} + D u_{k_0+N}, \quad (3.17)$$

on a le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.** *Les propositions suivantes sont équivalentes*

(3.2.1.a) *Le système (3.16) est contrôlable de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s)*

(3.2.1.b) *L'application linéaire*

$$E_N^s : (\mathbb{R}^m)^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$(u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}) \mapsto \sum_{\ell=0}^{N-1} CA^{N-\ell-1} Bu_{\ell+k_0} + Du_{N+k_0}$$

*est surjective.*

(3.2.1.c)  $\text{rk}(\mathbb{K}_N) = q$  où  $\mathbb{K}_N := [CA^{N-1}B | CA^{N-2}B | \dots | CAB | CB | D]$ .

(3.2.1.d) *La matrice  $\mathcal{G}_N^s := \sum_{\ell=0}^{N-1} CA^\ell BB^\top (A^\ell)^\top C^\top + DD^\top$  est définie positive.*

*Démonstration.*

Si (3.16) est contrôlable de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s) alors par définition, pour tout état initial du système  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  à l'instant  $k_0$  et toute valeur de sortie  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $u := (u_k)_{k \geq k_0} \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tel que, d'après (3.17),  $E_N^s u = y_1 - CA^N x_0$ . En particulier pour tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $u := (u_k)_{k \geq k_0} \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tel que  $E_N^s u = y_1$ . Il suit donc que l'application  $E_N^s$  est surjective.

Réciproquement, si l'application  $E_N^s$  est surjective alors puisque pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ ,  $y_1 - CA^N x_0 \in \mathbb{R}^q$ , il suit que (3.2.1.a) est satisfait et ceci achève la preuve de l'équivalence entre (3.2.1.a) et (3.2.1.b). Pour montrer que (3.2.1.b) et (3.2.1.c) sont équivalents, il suffit de remarquer que  $\text{Im}(E_N^s) = \text{Im}(\mathbb{K}_N)$  et puisque  $\mathcal{G}_N^s = \mathbb{K}_N \mathbb{K}_N^\top \in \mathbb{R}_q^q$ , on a l'équivalence entre (3.2.1.c) et (3.2.1.d).  $\square$

Il est important de souligner que dans le cas  $D = 0_m^q$ , les critères (3.2.1.c) et (3.2.1.d) ont été déjà établis dans [13].

**Remarque 3.2.1.**

*Du critère (3.2.1.c), on peut clairement voir que si le système (3.16) est contrôlable de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s), alors il l'est pour tout  $\tilde{N} \geq N$ .*

*En revanche, il n'est pas nécessairement contrôlable pour  $\tilde{N} < N$ , ce qui est une obstruction à la contrôlabilité de l'état vers la sortie des systèmes LTI à temps continu, discutée dans la section précédente. En d'autres termes, dans le cas des systèmes du type (3.16), si on prend  $N_{\min}$  le plus petit entier tel que (3.2.1.c) soit satisfait,  $N_{\min}$  peut être strictement supérieur à 1.*

**Remarque 3.2.2.**

*Que peut-on dire des critères (3.1.4.c) et (3.1.4.d) dans le cadre présent ?*

*Remarquons que dans la preuve du Théorème 3.1.4, nous avons utilisé l'invariance de l'espace  $\mathcal{N}$  pour établir les tests de type Hautus. Puisqu'en général, l'espace vectoriel  $\bigcap_{k=0}^{N-1} \ker(B^\top A^{\top k})$  n'est pas stable par  $A^\top$ , on ne peut rien dire. Mais dans le cas où cet espace est stable par  $A^\top$  auquel cas  $\text{rk}(\mathbb{K}_N) = \text{rk}(\mathbb{K}_n)$ , les critères (3.1.4.c) et (3.1.4.d) deviennent nécessaires et suffisants pour la contrôlabilité de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s) du système (3.16). En particulier, Hautus étendu est valable pour  $N \geq n$ .*

La proposition suivante lie les deux points de la Définition 3.2.1.

**Proposition 3.2.2.** *Le système (3.16) est contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si il existe un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que ce système soit contrôlable de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s).*

*Démonstration.*

Par définition, s'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que le système (3.16) soit contrôlable de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s) alors il est contrôlable de l'état vers la sortie.

Réciproquement, s'il est contrôlable de l'état vers la sortie alors pour tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $u := (u_k)_{k \geq k_0} \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tels que  $y_1 = E_N^s u \in \text{Im}(\mathbb{K}_n)$ . Il suit donc que  $\text{Im}(\mathbb{K}_n) = \mathbb{R}^q$  et donc que le système (3.16) est contrôlable de l'état vers la sortie en  $N = n$  itération(s).  $\square$

De la proposition précédente, le corollaire suivant est immédiat.

**Corollaire 3.2.3.** *Les propositions suivantes sont équivalentes*

(3.2.3.a) *Le système (3.16) est contrôlable de l'état vers la sortie*

(3.2.3.b) *Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que l'application linéaire*

$$E_N^s : (\mathbb{R}^m)^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$(u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}) \mapsto \sum_{\ell=0}^{N-1} CA^{N-\ell-1} B u_{\ell+k_0} + D u_{N+k_0}$$

*soit surjective.*

(3.2.3.c)  $\text{rk}(\mathbb{K}_n) = q$  où  $\mathbb{K}_n$  est définie dans (3.2.1.c).

(3.2.3.d) La matrice  $\mathcal{G}_n^s := \sum_{\ell=0}^{n-1} CA^\ell B B^\top (A^\ell)^\top C^\top + D D^\top$  est définie positive.

Puisque les critères (3.2.3.c) et (3.1.1.b) sont les mêmes et que (3.1.1.b) est équivalent aux critères (3.1.4.c) et (3.1.4.d), il suit que dans le cas où le système (3.16) est contrôlable de l'état vers la sortie, (3.1.4.c) et (3.1.4.d) constituent des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité pour ce système.

Pour finir cette section, donnons ce dernier théorème permettant de montrer, dans le cas de la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.16), comment construire un contrôle pour atteindre les valeurs de sortie désirées.

**Théorème 3.2.4.** *Supposons que le système (3.16) soit contrôlable de l'état vers la sortie en  $\widetilde{N}$  itérations. Un contrôle  $(u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  permettant d'envoyer  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  sur  $y_1 \in \mathbb{R}^q$  en  $N \geq \widetilde{N}$  itérations est donné par*

$$(u_{k_0}^\top, u_{k_0+1}^\top, \dots, u_{k_0+N}^\top)^\top = \mathbb{K}_N^\top (\mathcal{G}_N^s)^{-1} (y_1 - CA^N x_0), \quad (3.18)$$

où  $\mathbb{K}_N$  est définie dans (3.2.1.c).

De plus, ce contrôle est l'unique minimiseur de

$$\min \frac{1}{2} |u|_{(N+1)m}^2$$

$$\left| \begin{array}{l} u := (u_0^\top, u_1^\top, \dots, u_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{(N+1)m}, \\ CA^N x_0 + \mathbb{K}_N u = y_1. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

*Démonstration.*

Le système (3.16) étant supposé contrôlable de l'état vers la sortie en  $\widetilde{N}$  itérations, il suit de la Remarque 3.2.1 qu'il est contrôlable pour tout  $N \geq \widetilde{N}$  itérations. Ainsi, pour tout état initial du système  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  pris au temps  $k_0$  et toute sortie  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle  $u := (u_0^\top, u_1^\top, \dots, u_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{(N+1)m}$  tel que  $y_1 = CA^N x_0 + \mathbb{K}_N u$ . Il suit que le problème (3.19) est un problème strictement

convexe sous contrainte affine non vide et donc admet une unique solution.  
En définissant

$$\mathcal{L}(u, \psi) = \frac{1}{2} \|u\|_{(N+1)m}^2 + \langle \psi, y_1 - CA^N x_0 - \mathbb{K}_N u, \rangle \text{ où } \psi \in \mathbb{R}^q,$$

et en appliquant les conditions d'optimalité du premier ordre, on obtient l'existence de  $u_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^{(N+1)m}$ ,  $\psi_{\text{opt}} \in \mathbb{R}^q$  tels que  $\nabla_u \mathcal{L}(u_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}}) = 0$  et  $\nabla_\psi \mathcal{L}(u_{\text{opt}}, \psi_{\text{opt}}) = 0$ , conduisant donc à  $u_{\text{opt}} = \mathbb{K}_N^\top \psi_{\text{opt}}$  et  $\mathcal{G}_N^s \psi_{\text{opt}} = y_1 - CA^N x_0$ . Ce qui achève la preuve puisque  $\mathcal{G}_N^s$  est inversible par hypothèse.  $\square$

### 3.3 Systèmes LTV à temps continu

Dans cette section, nous considérons, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (3.20a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (3.20b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système au temps  $t$ , et  $n, m, q$  sont des entiers naturels. On suppose sauf mention du contraire que  $A \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})^n$ ,  $B \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})^n_m$ ,  $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^q_n$  et  $D \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^q_m$ .

Soient  $t_0 < t_f$ . Pour les mêmes raisons que celles évoquées dans la Section 3.1, nous choisissons comme ensemble de contrôles admissibles l'ensemble  $\mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  et considérons comme définition de contrôlabilité pour le système (3.20) celle de la contrôlabilité de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  donnée par le premier item de la Définition 3.1.1. Remarquons que pour toute donnée initiale en état  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  au temps  $t_0$  et tout contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ , l'équation (3.20) admet, d'après la Section 2.1, une unique trajectoire de sortie continue sur  $[t_0, t_f]$  donnée par

$$\begin{aligned} y(t; t_0, x_0, u) &= C(t)R(t, t_0)x_0 + E_t^s u, \text{ où} \\ E_t^s u &:= \int_{t_0}^t C(t)R(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau + D(t)u(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

#### 3.3.1 État de l'art

La contrôlabilité de l'état vers la sortie, en temps fini, du système (3.20) a été étudiée par E. Kreindler et P. Sarachik dans [52], article duquel est tiré le Théorème 3.1.1. Dans l'article susmentionné, la notion de contrôlabilité discutée est celle dite *contrôlabilité complète de sortie sur*  $[t_0, t_f]$  (cf. [52, Définition 3]). Cette notion est équivalente à la notion de contrôlabilité de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  discutée ici à la différence que l'espace de contrôles admissibles considéré dans leur cas est celui des contrôles continus par morceau. Les matrices du système sont aussi supposées continues par morceau.

Dans [52] les auteurs montrent que la *contrôlabilité complète de sortie sur*  $[t_0, t_f]$  du système (3.20) est équivalente à la positivité de la matrice

$$\mathcal{K}_{t_f} := \int_{t_0}^{t_f} M_{t_f}(t)M_{t_f}(t)^\top dt + D(t_f)D^\top(t_f), \quad (3.22)$$

où  $M_{t_f}(t) := C(t_f)R(t_f, t)B(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ .

Tout comme dans le cas des systèmes LTI temps continu, cette matrice, lorsqu'elle est définie positive, conduit à l'expression d'un contrôle qui n'est en général pas continu alors que dans la pratique, il fait beaucoup plus sens d'avoir des contrôles continus pour éviter des trajectoires de sortie discontinues.

Nous donnons l'expression du contrôle en question dans la proposition suivante dont une preuve peut être déduite en suivant les étapes de la preuve proposée pour la Proposition 3.1.2.

**Proposition 3.3.1.**

Supposons que le système (3.20) soit contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$ . Alors, pour tout  $(x_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ , le contrôle

$$u(t) = \begin{cases} M_{t_f}(t)^\top (\mathcal{K}_{t_f})^{-1} (y_1 - R(t_f, t_0)x_0), & \forall t \in [t_0, t_f), \\ D(t_f)^\top (\mathcal{K}_{t_f})^{-1} (y_1 - R(t_f, t_0)x_0), & \text{si } t = t_f, \end{cases}$$

envoie  $x_0$  sur  $y_1$  au temps  $t_f$ . Ce contrôle n'est continu que si  $C(t_f)B(t_f) = D(t_f)$ .

De plus, ce contrôle est l'unique minimiseur de

$$\begin{array}{l} \min \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |u(t)|_m^2 dt + \frac{1}{2} |z|_m^2 \\ \left| \begin{array}{l} u \in L^2([t_0, t_f])^m, \quad z \in \mathbb{R}^m, \\ y_1 - R(t_f, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_f} M_{t_f}(t)u(t) dt + D(t_f)z, \end{array} \right. \end{array}$$

où  $z$  représente la valeur finale du contrôle.

Dans le cas où la matrice  $D$  est identiquement nulle, une condition suffisante de type Kalman a été donnée dans [29, Theorem 4.9] montrant que si les matrices  $A$  et  $B$  sont respectivement  $n - 2$  et  $n - 1$  fois p.p. dérivables sur  $[t_0, t_1]$ , alors on a la contrôlabilité complète de sortie sur  $[t_0, t_f]$  si la matrice

$$\mathbb{S}_{co}(t) = C(t_f)R(t_f, t)[B(t), \mathfrak{d}_t B(t), \dots, \mathfrak{d}_t^{n-1} B(t)]$$

est de rang  $q$  presque partout sur un sous intervalle  $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_f]$ , où, nous rappelons,

$$\mathfrak{d}_t := -A(t) + \frac{d}{dt}. \tag{3.23}$$

Comme on peut le voir, cette condition n'est que suffisante et demande non seulement une certaine régularité sur les matrices du système mais aussi la connaissance de la résolvante  $R$  qui peut être compliquée, voire impossible, à calculer même pour des matrices carrées d'ordre deux.

Pour éviter le calcul de l'opérateur résolvant, il est affirmé dans [29, Theorem 4.11] que si la matrice

$$\mathbb{S}_c(t) = C(t_f)[B(t), \mathfrak{d}_t B(t), \dots, \mathfrak{d}_t^{n-1} B(t)]$$

est de rang  $q$  p.p. sur un sous intervalle  $[t_1, t_2]$  de  $[t_0, t_f]$  alors le système est complètement contrôlable en sortie sur  $[t_0, t_f]$  car  $\text{rk}(\mathbb{S}_{co}(t)) = \text{rk}(\mathbb{S}_c(t))$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ .

Même si nous ne sommes pas capable d'attester la suffisance de cette condition, nous pouvons cependant affirmer que l'égalité de rang ci-dessus, et donc la preuve de cette condition suffisante est

fausse. Pour voir cela, considérons pour  $f$  et  $g$  deux fonctions infiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ , positives, telles que  $f$  soit supportée dans  $[1/4, 1/2]$ ,  $g$  supportée dans  $[3/4, 1]$  et vérifiant  $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 g(t) dt = \pi/2$ . Considérons maintenant le système (3.20) avec  $[t_0, t_f] = [0, 1]$ ,  $D(t) = 0_2^2$

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t)\mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}} & 0_2^2 \\ 0_2^2 & g(t)\mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que

$$R(1, t) = \begin{pmatrix} R_f(1, t) & 0_2^2 \\ 0_2^2 & R_g(1, t) \end{pmatrix} \quad \text{où } R_f(1, t) := \begin{pmatrix} \cos F(t) & -\sin F(t) \\ \sin F(t) & \cos F(t) \end{pmatrix}$$

$$R_g(1, t) := \begin{pmatrix} \cos G(t) & -\sin G(t) \\ \sin G(t) & \cos G(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \int_t^1 f(s) ds \quad \text{et} \quad G(t) = \int_t^1 g(s) ds.$$

On a donc

$$\mathbb{S}_c(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f(t) & 0 & f^{(1)}(t) & 0 & f^{(2)}(t) - f(t)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g(t) & 0 & g^{(1)}(t) & 0 & g^{(2)}(t) - g(t)^3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{S}_{co}(t) = \begin{pmatrix} -\sin F(t) & 0 & f(t) \cos F(t) & 0 & \star \\ 0 & -\sin G(t) & 0 & g(t) \cos G(t) & \star \end{pmatrix}.$$

Sur cet exemple, on a  $\text{rk}(\mathbb{S}_c(t)) \leq 1$  tandis que  $\text{rk}(\mathbb{S}_{co}(t)) = 2$  pour presque tout  $t \in [t_0, t_f]$ .

### 3.3.2 Contributions

Dans ce paragraphe, nous proposons d'établir d'autres tests de contrôlabilité de l'état vers la sortie en temps fini et de montrer comment, dans le cas de la contrôlabilité, construire des contrôles continus pour atteindre les valeurs de sortie désirées.

Nous attirons l'attention du lecteur que sauf mention explicite du contraire, les matrices du système (3.20) possèdent leur régularité initiale c'est-à-dire  $A \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})_n^n$ ,  $B \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})_m^n$ ,  $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R})_n^q$  et  $D \in \mathcal{C}(\mathbb{R})_m^q$  et que la définition de contrôlabilité considérée est celle de la contrôlabilité de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  énoncée au premier item de la Définition 3.1.1.

Le premier théorème que nous donnons relie la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.20) à la surjectivité de l'application entrée-sortie  $E_{t_f}^s$  définie au (3.21) et à la positivité d'une matrice grammienne.

**Théorème 3.3.2.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(3.3.2.a) *Le système (3.20) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$ .*

(3.3.2.b) *L'application linéaire*

$$E_{t_f}^s : \mathcal{C}([t_0, t_f])^m \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$u \mapsto \int_{t_0}^{t_f} C(t_f)R(t_f, t)B(t)u(t) dt + D(t_f)u(t_f)$$

*est surjective.*

(3.3.2.c) La matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s := \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, t)H(t_f, t)^\top dt$  est définie positive. Dans cette matrice, on a posé  $H(t_f, t) = \int_t^{t_f} C(t_f)R(t_f, \tau)B(\tau) d\tau + D(t_f)$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ .

*Démonstration.*

La preuve de l'équivalence entre (3.3.2.a) et (3.3.2.b) peut être obtenue en utilisant les mêmes arguments que celle de l'équivalence entre (3.1.4.a) et (3.1.4.b).

• *Équivalence entre (3.3.2.b) et (3.3.2.c).*

Supposons l'existence d'un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^q$  non nul tel que  $\eta^\top \mathcal{G}_{t_f}^s \eta = 0$ .

Il suit immédiatement que

$$\eta^\top H(t_f, t) = 0_m \quad (3.24)$$

pour presque tout  $t \in [t_0, t_f]$  et donc pour tout  $t \in [t_0, t_f]$  par continuité de  $H(t_f, \cdot)$ . Ainsi, en prenant  $t = t_f$  dans (3.24) puis en dérivant cette même équation par rapport à  $t$ , on obtient respectivement  $\eta^\top D(t_f) = 0_m$  et  $\eta^\top C(t_f)R(t_f, t)B(t) = 0_m$  pour presque tout  $t \in [t_0, t_f]$ . Ceci montre que le vecteur non nul  $\eta$  satisfait  $\eta^\top E_{t_f}^s u = 0$  ceci indépendamment du choix de  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ . Il suit donc que l'application  $E_{t_f}^s$  n'est pas surjective.

Réciproquement, supposons qu'il existe un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\eta^\top E_{t_f}^s u = 0_m$  ceci pour tout  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ . Il suit donc qu'en particulier, pour les contrôles de la forme  $u(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$  où  $v \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ , on a

$$\int_{t_0}^{t_f} \eta^\top C(t_f)R(t_f, t)B(t) \left[ \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right] dt + \eta^\top D(t_f) \int_{t_0}^{t_f} v(t) dt = 0_m.$$

En faisant une intégration par partie comme dans la preuve du Théorème 3.1.7, on déduit finalement que  $\eta^\top \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, t)v(t)dt = 0_m$  pour toute fonction  $v \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ .

En particulier, pour  $v(t) = H(t_f, t)^\top \eta$ , on a  $\eta^\top \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, t)H(t_f, t)^\top dt \eta = 0$ .

On déduit de ce qui précède que  $\eta^\top \mathcal{G}_{t_f}^s \eta = 0$  pour un vecteur  $\eta$  non nul. Ce qui implique que la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  n'est pas définie positive.  $\square$

### Remarque 3.3.1.

On peut remarquer à travers ce théorème qu'une condition nécessaire pour que le système (3.20) soit contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  est

$$\text{rk}(C(t_f), D(t_f)) = q.$$

Ceci montre aussi que le système (3.20) peut être contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  sans l'être en un temps  $t'_f$ .

### Remarque 3.3.2.

De la preuve précédente, on peut remarquer que le Lemme 3.1.5 reste vrai dans le cas où les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  dépendent du temps. Ceci montre d'ailleurs que la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.20) en temps fini est indépendante de la régularité des contrôles. Si on peut le contrôler avec des contrôles continus, on peut le faire avec des contrôles infiniment dérivables quitte à ajouter plusieurs actions intégrales sur l'entrée du système comme nous l'avons fait dans le Lemme 3.1.5.

Le théorème suivant dont nous ne donnerons pas de preuve, car on peut en faire une en suivant les mêmes arguments que ceux du Théorème 3.1.7, nous procure, dans le cas où la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  est inversible, l'expression d'un contrôle permettant de réaliser nos transferts avec des trajectoires de sortie continues.

**Théorème 3.3.3.** *Supposons que le système (3.1) soit contrôlable de l'état vers la sortie un temps  $t_f > t_0$ . Alors, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_1 \in \mathbb{R}^q$  et pour tout  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ , le contrôle*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t H(t_f, \tau)^\top d\tau (\mathcal{G}_{t_f}^s)^{-1} (y_1 - y(t_f; t_0, x_0, u_0)) \quad (3.25)$$

*envoie la sortie du système à la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$  en partant de  $x_0$  au temps  $t_0$ . Rappelons que  $H(t_f, \cdot)$  et  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  ont été définis dans (3.3.2.c) et  $y(t_f; t_0, x_0, u_0) = C(t_f)R(t_f, t_0)x_0 + H(t_f, t_0)u_0$ . De plus, ce contrôle est l'unique solution du problème*

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |\dot{u}(t)|_m^2 dt \\ | \quad & u \in H^1([t_0, t_f])^m, u(t_0) = u_0, y_1 = y(t_f; t_0, x_0, u). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Revenons-en aux critères. Comme on peut le voir, parmi les deux critères proposés dans le Théorème 3.3.2, seul le critère (3.3.2.c) est d'une importance pratique. Mais la vérification de ce dernier nécessite non seulement la connaissance de la résolvante, qui comme nous l'avons dit un peu plus haut, peut être difficile voir impossible à calculer mais aussi la vérification de l'inversibilité de la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$ . Le théorème suivant donne une condition suffisante de contrôlabilité sans passer par le calcul de l'opérateur résolvant. C'est une extension du Théorème 2.3.3 au cadre de la sortie.

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et supposons que  $A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})_n^n$  (ou  $A \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})_n^n$  pour  $k = 0$ ),  $B \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})_m^n$ . Si*

$$\text{rk} \left( D(t_f) | C(t_f) \mathfrak{d}_t^\ell B(t_f), \ell \in \mathbb{N}_{\leq k} \right) = q, \quad (3.27)$$

*alors le système (3.20) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$ . De plus, si les matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques alors l'équation (3.27) avec  $k = \infty$  devient nécessaire.*

Rappelons que l'opérateur  $\mathfrak{d}_t$  a été défini dans (3.23).

Avant de donner une preuve à ce théorème, faisons quelques remarques.

**Remarque 3.3.3.**

*Observons qu'en réalité, dans le théorème précédent les matrices  $A$  et  $B$  n'ont besoin de la régularité demandée qu'au voisinage de  $t_f$ .*

**Remarque 3.3.4.**

*Étant donné que le rang d'une matrice est invariant en dessous d'un certain seuil de perturbation (voir [84, Chapitre 5]), il suit que si le critère (3.27) est satisfait au temps  $t_f$  alors il reste satisfait dans un voisinage de  $t_f$ . Pour preuve, avec les hypothèses du théorème, les matrices  $\mathfrak{d}_t^\ell B$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k}$  sont continues.*

**Remarque 3.3.5.**

*Il est à noter que dans le Théorème 3.3.4, l'entier  $k$  n'a rien à voir avec la dimension de l'espace d'état  $n$ , cet entier est donné par la régularité du système. En revanche, en gardant à l'esprit Cayley-Hamilton, il suit immédiatement que si les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes, le critère (3.27) avec  $k \geq n$  n'est rien d'autre que la condition de rang de Kalman (3.1.1.b).*

**Remarque 3.3.6.**

*Terminons ces remarques en insistant sur le fait que la condition de rang (3.27) n'est que suffisante.*

En effet, considérons le système (3.20) avec  $A(t) = 0_3^3$ ,  $C(t) = (I_2 | 0_1^2)$ ,  $D(t) = 0_1^2$  et  $B(t) = (f(t), g(t), h(t))^T$  où  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont trois fonctions  $k$  fois dérivables, non identiquement nulles sur  $[0, 1]$  et telles que  $f$  et  $g$  soient supportées respectivement sur  $[0, 1/2]$  et  $[3/4, 1]$ . En prenant  $t_0 = 0$  et  $t_f = 1$ , il suit que  $\text{Vect} \left\{ D(1)u, C(1)\partial_t^\ell B(1)u, \ell \in \mathbb{N}_{\leq k}, \forall u \in \mathbb{R}^m \right\} \subset \{0\} \times \mathbb{R}$ . Ce qui montre que la condition de rang (3.27) n'est pas satisfaite. Cependant, on a  $\mathcal{K}_1 = \text{diag} \left( \int_0^1 f(t)^2 dt, \int_0^1 g(t)^2 dt \right)$  et cette matrice est bien définie positive.

Pour prouver le Théorème 3.3.4, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.3.5.** Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Si  $A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})_n^n$  (ou  $A \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})_n^n$  pour  $k = 0$ ) et  $B \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})_m^n$  alors  $H(t_f, \cdot) \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})_m^q$  et  $\partial_t^\ell H(t_f, t) = -C(t_f)R(t_f, t)\partial_t^{\ell-1}B(t)$  pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k+1}^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.*

Rappelons que

$$H(t_f, t) = \int_t^{t_f} C(t_f)R(t_f, \tau)B(\tau) d\tau + D(t_f), \quad t \in [t_0, t_f].$$

D'après la Proposition 2.1.1, si  $A \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})_n^n$  alors  $R$  est continue et si  $A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})_n^n$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $R$  est  $\mathcal{C}^k$ . De ce fait, puisque  $B$  est  $\mathcal{C}^k$ , on déduit que  $C(t_f)R(t_f, \cdot)B$  est  $k$  fois différentiable et donc que  $H(t_f, \cdot)$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

Montrons maintenant par induction sur  $\ell$  que  $\partial_t^\ell H(t_f, t) = -C(t_f)R(t_f, t)\partial_t^{\ell-1}B(t)$  pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k+1}^*$ .

La relation est immédiate au rang  $\ell = 1$ .

Supposons qu'elle soit vraie au rang  $\ell = k$ , c'est-à-dire que

$$\partial_t^k H(t_f, t) = -C(t_f)R(t_f, t)\partial_t^{k-1}B(t).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que  $\partial_t R(t_f, t) = -R(t_f, t)A(t)$  (cf. (2.1.1.c)), on a

$$\begin{aligned} \partial_t^{k+1} H(t_f, t) &= \partial_t \left[ \partial_t^k H(t_f, t) \right] \\ &= -\partial_t \left[ C(t_f)R(t_f, t)\partial_t^{k-1}B(t) \right] \\ &= -C(t_f) \left[ \partial_t R(t_f, t)\partial_t^{k-1}B(t) + R(t_f, t)\partial_t(\partial_t^{k-1}B(t)) \right], \\ &= -C(t_f)R(t_f, t) [-A(t) + \partial_t] \partial_t^{k-1}B(t), \\ &= -C(t_f)R(t_f, t)\partial_t^k B(t). \end{aligned}$$

□

Donnons maintenant une preuve au Théorème 3.3.4.

*Démonstration.*

La preuve de ce théorème se fait par contraposition. Supposons donc que le système (3.20) ne soit pas contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$ . On a donc la relation (3.24) satisfaite pour un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{R}^q$ . Puisque  $H(t_f, \cdot)$  est continue, en prenant  $t = t_f$  dans cette équation, on obtient  $\eta^T D(t_f) = 0_m$ . Aussi, par hypothèse on a  $H(t_f, \cdot) \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})_m^q$ , donc pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k+1}^*$ , en utilisant le fait que  $\partial_t^\ell H(t_f, t) = -C(t_f)R(t_f, t)\partial_t^{\ell-1}B(t)$  (Lemme 3.3.5) et  $R(t_f, t_f) = I_n$

(Proposition 2.1.1), il suit, en dérivant (3.24)  $\ell$  fois et en évaluant l'équation obtenue au temps  $t_f$ , que  $\eta^\top C(t_f) \partial_t^{\ell-1} B(t_f) = 0_m$  pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k+1}^*$ . On déduit donc que la condition de rang (3.27) n'est pas satisfaite.

Supposons maintenant que les matrices  $A$  et  $B$  soient analytiques, auquel cas, la matrice  $H(t_f, \cdot)$  est analytique. Ainsi la fonction  $(v, t) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \mapsto f_v(t) := v^\top H(t_f, t)$  est analytique et comme pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\partial_t^\ell f_v(t) = -v^\top C(t_f) R(t_f, t) \partial_t^{\ell-1} B(t)$ , si la condition de rang (3.27) avec  $k = \infty$  n'est pas satisfaite, il existerait un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\partial_t^\ell f_\eta(t_f) = 0_m$  ceci pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ . Le Théorème du prolongement analytique nous permettrait donc de déduire que  $f_\eta = \eta^\top H(t_f, \cdot)$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{R}$  et donc que pour tout temps  $t_f$ ,  $\eta^\top \mathcal{G}_{t_f}^s \eta = 0$ .  $\square$

Une version générale du Théorème 3.3.4, dont la preuve peut se faire en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve précédente, est donnée dans la proposition suivante. L'application nécessite cependant la connaissance de la résolvante.

**Proposition 3.3.6.** *Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et supposons que  $A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})_n^n$  (ou  $A \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})_n^n$  pour  $k = 0$ ),  $B \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})_m^n$ . Le système (3.20) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  s'il existe  $\tau \in [t_0, t_f]$  tel que*

$$\text{rk} \left( \partial_t^\ell H(t_f, t)|_{t=\tau}, \ell \in \mathbb{N}_{\leq k+1} \right) = q. \quad (3.28)$$

De plus, si les matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques alors (3.28) avec  $k = \infty$  devient nécessaire.

En prenant  $\tau = t_f$  dans (3.28), on obtient la condition suffisante (3.27). Aussi, dans cette proposition et dans la suite, l'écriture  $\partial_t^\ell H(t_f, t)|_{t=s}$  désigne la dérivée  $\ell^{\text{ième}}$  de  $H(t_f, t)$  par rapport à  $t$  évaluée au temps  $s$ .

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité de l'état vers la sortie. Dans le cas où les matrices  $A, B$ , sont constantes,  $C = I_n$  et  $D = 0_m^n$ , ce théorème a permis, dans [63, Lemma 5.2.7], aux auteurs de prouver l'unicité d'un contrôle en temps minimal. Ce théorème reste valable dans le cas des systèmes LTI à temps continu discuté dans la Section 3.1.

**Théorème 3.3.7.** *Le système (3.20) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  si et seulement s'il existe  $t_1, \dots, t_q \in [t_0, t_f]$ , non nécessairement distincts, tels que*

$$\text{rk} (H(t_f, t_1), \dots, H(t_f, t_q)) = q. \quad (3.29)$$

De plus, si les matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques,  $(t_1, \dots, t_q)$  peut être trouvé dans n'importe quel sous-ensemble ouvert de mesure non nulle de  $[t_0, t_f]^q$ .

*Démonstration.*

La suffisance de ce critère vient directement du fait que si le système n'est pas contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  alors il existe un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{R}^q$  tel que l'équation (3.24) soit satisfaite ceci pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ . Supposons maintenant que pour tout  $(t_1, \dots, t_q) \in [t_0, t_f]^q$ ,  $\text{rk}(H(t_f, t_1), \dots, H(t_f, t_q)) < q$  et choisissons  $\tau_1, \dots, \tau_q \in [t_0, t_f]$  tels que

$$\text{rk}(H(t_f, \tau_1), \dots, H(t_f, \tau_q)) = \max_{t_1, \dots, t_q \in [t_0, t_f]} \text{rk}(H(t_f, t_1), \dots, H(t_f, t_q)).$$

On déduit donc que pour tout  $t \in [t_0, t_f]$  et pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$ , on a

$$H(t_f, t)u \in \text{Vect} \left\{ H(t_f, \tau_\ell)v, \ell \in \mathbb{N}_{\leq q}^*, v \in \mathbb{R}^m \right\} \subsetneq \mathbb{R}^q.$$

Ceci montre qu'il existe un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\eta^\top H(t_f, t)\mathbf{u} = 0$  ceci pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  et tout  $t \in [t_0, t_f]$  et donc  $\eta^\top \mathcal{G}_{t_f}^s \eta = 0$ .

Si les matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques et que le système est contrôlable en temps  $t_f$ , alors de ce qui précède, on déduit qu'il existe  $t_1, \dots, t_q \in [t_0, t_f]$  tels que la condition (3.29) soit satisfaite. Ceci implique donc l'existence de  $\tau_1, \dots, \tau_q \in \{t_1, \dots, t_q\}$  et  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q \in \mathbb{R}^m$  tels que  $\det(H(t_f, \tau_1)\mathbf{u}_1, \dots, H(t_f, \tau_q)\mathbf{u}_q) \neq 0$ . Il suffit de remarquer que comme  $A$  et  $B$  sont analytiques alors l'application  $(s_1, \dots, s_q) \in [t_0, t_f]^q \mapsto \det(H(t_f, s_1)\mathbf{u}_1, \dots, H(t_f, s_q)\mathbf{u}_q) \in \mathbb{R}$  est analytique et non identiquement nulle. Puisque les zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle sont isolés, il suit que pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de mesure non nulle contenu dans  $[t_0, t_f]^q$ , il existe  $(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_q) \in \mathcal{O}$  tel que  $\det(H(t_f, \bar{t}_1)\mathbf{u}_1, \dots, H(t_f, \bar{t}_q)\mathbf{u}_q) \neq 0$ .  $\square$

Un autre résultat qui peut être utile, lorsqu'on a de la régularité sur les matrices  $A$  et  $B$ , est donné dans le théorème suivant.

**Théorème 3.3.8.** *Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et supposons que  $A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})_n^n$  (ou  $A \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})_n^n$  si  $k = 0$ ),  $B \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})_m^n$ . Le système (3.20) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  s'il existe  $t_1, \dots, t_k \in [t_0, t_f]$ , non nécessairement distincts, tels que*

$$\text{rk} \left( \partial_t^{\ell-1} H(t_f, t)|_{t=t_\ell}, \ell \in \mathbb{N}_{\leq k}^* \right) = q. \quad (3.30)$$

De plus si  $k = q$  dans le critère précédent alors il devient nécessaire.

*Démonstration.*

Rappelons d'entrée que puisque  $A \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})_n^n$  (ou  $A \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})_n^n$  pour  $k = 0$ ),  $B \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})_m^n$  alors  $H(t_f, \cdot) \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})_m^q$ . La suffisance de la condition (3.30) vient du fait que si le système est non contrôlable au temps  $t_f$ , alors il existe un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{R}^q$  tel que

$$\eta^\top \partial_t^\ell H(t_f, t) = -\eta^\top C(t_f)R(t_f, t)\mathfrak{D}_t^{\ell-1}B(t) = 0_m$$

pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k}^*$  et tout  $t \in [t_0, t_f]$ .

Prouvons maintenant sa nécessité.

Supposons que le système soit contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$ . De cette hypothèse, s'il existe un vecteur  $\eta \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\eta^\top H(t_f, t) = 0_m$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ , alors  $\eta = 0^q$ . De ce fait, il existe un vecteur  $\eta_1 \in \mathbb{R}^q$  et un temps  $t_1 \in [t_0, t_f]$  tels que  $\eta_1^\top H(t_f, t_1) \neq 0_m$ . Si  $\text{rk}(H(t_f, t_1)) = q$ , la preuve est terminée. Sinon, il existe un vecteur  $\eta_2 \in \mathbb{R}^q$  non nul et orthogonal à  $\eta_1$  tel que  $\eta_2^\top H(t_f, t_1) = 0_m$ . Mais aussi par hypothèse de contrôlabilité, il existe un temps  $t_2 \in [t_0, t_f]$  tel que  $\eta_2^\top \partial_t H(t_f, t)|_{t=t_2} \neq 0_m$  car si  $\eta_2^\top \partial_t H(t_f, t) = 0_m$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ , en intégrant l'équation précédente par rapport à  $t$  sur l'intervalle  $[t_1, t]$ , on aurait  $\eta_2^\top H(t_f, t) - \eta_2^\top H(t_f, t_1) = 0_m$  impliquant donc  $\eta_2^\top H(t_f, t) = 0_m$  ceci pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ . Ce qui contredirait l'hypothèse de contrôlabilité. Si  $\text{rk}(H(t_f, t_1), \partial_t H(t_f, t_2)) = q$  on arrête la preuve, sinon il existe de nouveau un vecteur  $\eta_3$  non nul, orthogonal à la fois à  $\eta_1$  et  $\eta_2$  tel que  $\eta_3^\top H(t_f, t_1) = \eta_3^\top \partial_t H(t_f, t)|_{t=t_2} = 0_m$ . Mais aussi, par l'hypothèse de contrôlabilité, il existerait un temps  $t_3 \in [t_0, t_f]$  tel que  $\eta_3^\top \partial_t^2 H(t_f, t)|_{t=t_3} \neq 0_m$ . Soit la procédure s'arrête avant  $q$  itérations, soit on atteint  $q$  itérations et on aurait construit  $q$  vecteurs non nuls  $\eta_1, \dots, \eta_q$  deux à deux orthogonaux tels que

$$\eta_\ell^\top \left[ H(t_f, t_1), \dots, \partial_t^{\ell-2} H(t_f, t_{\ell-1}) \right] = 0, \text{ pour } \ell \in \{2, 3, \dots, q\} \quad (3.31a)$$

$$\text{et } \eta_\ell^\top \partial_t^{\ell-1} H(t_f, t_\ell) \neq 0, \text{ pour } \ell \in \mathbb{N}_{\leq q}^*. \quad (3.31b)$$

Étant donné que  $\text{Vect}\{\eta_\ell, \ell \in \mathbb{N}_{\leq q}^*\} = \mathbb{R}^q$ , il suit donc que tout vecteur  $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^q$  non nul peut se mettre sous la forme  $\tilde{\eta} = \sum_{\ell=1}^q \alpha_\ell \eta_\ell$  où les  $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$  avec au moins un  $\alpha_\ell$  non nul. Ainsi, on a  $\tilde{\eta}^\top [H(t_f, t_1), \dots, \partial_t^{q-1} H(t_f, t_q)] = [\alpha_1 \eta_1^\top H(t_f, t_1), \dots, \sum_{\ell=1}^q \alpha_\ell \eta_\ell^\top \partial_t^{q-1} H(t_f, t_q)]$ . Puisque l'un des coefficients  $\alpha_\ell$  est non nul, on déduit donc que  $\text{rk} [H(t_f, t_1), \dots, \partial_t^{q-1} H(t_f, t_q)] = q$   $\square$

La proposition suivante étend [27, Proposition 1.19] au cadre de la sortie.

**Proposition 3.3.9.** *Supposons que le critère (3.27) soit satisfait au temps  $t_f$  avec  $k = \infty$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in (t_f - \varepsilon, t_f + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \{t_f\})$ ,*

$$\text{rk} \left( \partial_t^\ell H(t_f, t), \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right) = q. \quad (3.32)$$

*De plus, si les matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques, alors les critères (3.27) et (3.32) sont équivalents.*

Il nous semble nécessaire d'insister ici sur le fait que sans l'analyticité des matrices  $A$  et  $B$ , les critères (3.27) et (3.32) ne sont pas équivalents. Il suffit, pour le voir, de considérer le système (3.20) avec  $m = n = q = 1$ ,  $A = D = 0$ ,  $C = 1$  et  $B(t) = (2/(t-1)^3)e^{-1/(t-1)^2}$  pour  $t \neq 1$  et  $B(1) = 0$ . En prenant  $t_f = 1$ , on a  $H(t_f, t) = e^{-1/(t-1)^2}$ . On voit que le critère (3.32) est satisfait alors que le critère (3.27) ne l'est pas.

*Démonstration.*

La preuve de cette proposition se fait en deux étapes. On commence par faire la preuve dans le cas  $m = 1$  et on finit en montrant comment le cas  $m > 1$  peut être ramené au cas  $m = 1$ . Remarquons que dans le cas où les matrices  $A$  et  $B$  sont analytiques, l'implication inverse dans la proposition précédente est une conséquence du Théorème 3.3.2.

• *Cas  $m = 1$ .* Observons que comme  $A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})_n^n$  et  $B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^n$  alors  $H(t_f, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^q$  (cf. Lemme 3.3.5). Puisque par hypothèse le critère (3.27) est satisfait au temps  $t_f$ , on a donc

$$\text{rk} \left( \partial_t^\ell H(t_f, t_f), \ell \in \mathbb{N} \right) = q.$$

Appliquant donc le [27, Lemme 1.22] et la discussion qui suit ce lemme, on déduit l'existence de  $q$  entiers  $d_1 < \dots < d_q$ ,  $q$  fonctions  $a_\ell \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et  $q$  vecteurs  $v_\ell \in \mathbb{R}^q$  tels que

$$\text{rk}(v_1, \dots, v_q) = q, \quad a_\ell(t_f) \neq 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_{\leq q}^*, \quad (3.33a)$$

$$H(t_f, t) = \sum_{\ell=1}^q a_\ell(t)(t - t_f)^{d_\ell} v_\ell, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.33b)$$

$$\det \left( \partial_t^\ell H(t_f, t), \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right) = \alpha(t - t_f)^\delta + O \left( (t - t_f)^{1+\delta} \right), \quad (3.33c)$$

où  $\delta = -q(q-1)/2 + \sum_{\ell=1}^q d_\ell$  et  $\alpha = \left( \prod_{1 \leq \ell < k \leq q} (d_k - d_\ell) \right) \left( \prod_{\ell=1}^q a_\ell(t_f) \right) \det(v_1, \dots, v_q)$ .

En utilisant (3.33a) et le fait que pour tout  $k \neq \ell$ ,  $d_k \neq d_\ell$ , on déduit que  $\alpha \neq 0$  et donc qu'il existe, grâce à (3.33c),  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in (t_f - \varepsilon, t_f + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \{t_f\})$ ,  $\det \left( H_{t_f}^{(\ell)}(t), \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right) \neq 0$ . •

• *Cas  $m > 1$ .* Posons  $H(t_f, t) = (h_1(t), \dots, h_m(t))$  où les  $h_\ell$  représentent les colonnes de la matrice  $H(t_f, t)$ . Remarquons qu'en écrivant  $H(t_f, t)$  ainsi, on a, en utilisant le fait que l'équation (3.27) est satisfaite au temps  $t_f$ ,

$$\mathbb{R}^q = \text{Vect} \left\{ h_j^{(\ell)}(t_f), j \in \mathbb{N}_{\leq m}^*, \ell \in \mathbb{N} \right\}.$$

On déduit donc de ce qui précède l'existence d'un entier  $p$  tel que  $\mathbb{R}^q = \text{Vect} \left\{ h_j^{(\ell)}(t_f), j \in \mathbb{N}_{\leq m}^*, \ell \in \mathbb{N}_{< p} \right\}$ .

Posons maintenant pour tout  $t \geq t_0$

$$\tilde{H}(t) = \sum_{j=1}^m (t - t_f)^{(j-1)p} h_j(t).$$

Par construction  $\text{rk} \left( \tilde{H}^{(\ell)}(t_f), \ell \in \mathbb{N} \right) = q$  et puisque pour tout  $j$ ,  $h_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^q$ , on a aussi  $\tilde{H} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^q$ . Il suit donc du cas  $m = 1$  qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in (t_f - \varepsilon, t_f + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \{t_f\})$ ,  $\text{rk} \left( \tilde{H}^{(\ell)}(t), \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right) = q$ .

En remarquant que  $\text{Vect} \left\{ \tilde{H}^{(\ell)}(t), \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right\} \subset \text{Vect} \left\{ h_j^{(\ell)}(t), j \in \mathbb{N}_{\leq m}^*, \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right\}$ , on déduit donc que pour tout  $t \in (t_f - \varepsilon, t_f + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus \{t_f\})$ ,

$$\text{rk} \left( \tilde{H}_{t_f}^{(\ell)}(t), \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right) = \text{rk} \left( \partial_t^\ell H(t_f, t), \ell \in \mathbb{N}_{< q} \right) = q.$$

□

### Remarque 3.3.7.

Observons que tous les critères établis dans cette section sont aussi valables pour la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.1) étudié dans la section 3.1.

### 3.3.3 Illustration des résultats précédents sur un exemple

Considérons le système (3.20) avec  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $q = 2$ , les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  données pour tout  $t \geq 0$  par

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t^2 \\ t & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad D(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

#### • Vérification de critères de contrôlabilité

Sur cet exemple, les matrices du système sont analytiques.

Aussi, comme la matrice  $A$  commute pour différentes valeurs du paramètre  $t$ , il devient facile ([12, p.173]) de calculer sa résolvante. Elle est donnée pour tout  $(t, \tau) \in \mathbb{R}_+^2$  par

$$R(t, \tau) = \begin{pmatrix} \cos(t - \tau) & -\sin(t - \tau) & 0 \\ \sin(t - \tau) & \cos(t - \tau) & 0 \\ 0 & 0 & e^{(t^2 - \tau^2)/2} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc pour tout  $t \in [0, t_f]$ ,  $M_{t_f}(t) = (\sin(t_f), t_f \cos(t_f))^\top$  et

$$H(t_f, t) = ((t_f - t) \cos(t_f), t_f(t_f - t) \cos(t_f) + \sin(t_f))^\top.$$

Il est donc immédiat que  $\det(\mathcal{K}_{t_f}) = t_f \sin(t_f)^4$  et  $\det(\mathcal{G}_{t_f}^s) = t_f^4 \sin(t_f)^4 / 12$ . On déduit que les critères (3.22) et (3.3.2.c) conduisent à la même conclusion c'est-à-dire que le système (3.20) avec les matrices données dans (3.34) est contrôlable de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  si et seulement si  $t_f \notin \pi\mathbb{N}$ .

Observons maintenant que pour tout  $t \in [0, t_f]$ ,  $\partial_t H(t_f, t) = (-\sin(t_f), -t_f \cos(t_f))$  et pour tout

$\ell \geq 2$ , on a  $\partial_t^\ell H(t_f, t) = 0^2$ . Ceci montre que le résultat aurait été plus rapide si l'on avait appliqué le Théorème 3.3.4. En effet, avec ce théorème, il suffit de vérifier sous quelles conditions on a

$$\text{rk}(H(t_f, t_f), \partial_t H(t_f, t_f)) = \text{rk}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t_f) \end{pmatrix}^\top, \begin{pmatrix} -\sin(t_f) \\ -t_f \cos(t_f) \end{pmatrix}^\top\right) = 2.$$

Ceci étant possible si et seulement si  $t_f \notin \pi\mathbb{N}$ . La Proposition 3.3.6 conduit aussi au même résultat car elle stipule qu'il y a contrôlabilité de l'état vers la sortie en temps  $t_f$  si et seulement s'il existe  $\tau \in [0, t_f]$  tel que

$$\det(H(t_f, \tau), \partial_t H(t_f, \tau)) = \sin^2(t_f) \neq 0.$$

On vérifie que pour tout  $t_1, t_2$  dans l'intervalle  $[0, t_f]$ ,

$$\det(H(t_f, t_1), H(t_f, t_2)) = (t_2 - t_1) \sin(t_f)$$

et donc que le Théorème 3.29 conduit au même résultat.

On peut voir que tous les résultats de la sous-section précédente donnent la même condition.

• *Calcul du contrôle.*

On suppose que le système (3.20) avec les matrices données au (3.34) est à l'état  $x_0 = (1, 0, 1)^\top$  au temps  $t_0 = 0$  et que nous voulons avoir une sortie  $y_1 = (1, 2)^\top$  au temps  $t_f = \pi/2$ .

Nous savons, d'après le premier point, qu'il est possible d'obtenir cette valeur de sortie au temps  $t_f = \pi/2$ . En choisissant  $u(0) = 1$ , le Théorème 3.3.3 conduit au contrôle

$$u(t) = \frac{12}{\pi^2} \left(3 + \pi e^{\pi^2/8}\right) t^2 - \frac{2}{\pi} \left(8 + 3\pi e^{\pi^2/8}\right) t + 1, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Le contrôle obtenu grâce à la matrice de  $\mathcal{K}_{t_f}$  (Remarque 3.3.1) est donné par

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} e^{\pi^2/8} & \text{si } t \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 2 & \text{si } t = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Les trajectoires du système sont sur la Figure 3.2. Sur cette figure, la première ligne illustre que le contrôle construit, grâce à la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$ , est continu valant  $u_0 = 1$  au temps  $t = 0$  et permet d'avoir une sortie avec des trajectoires continues avec une valeur finale  $(1, 2)^\top$  au temps  $t_f = \pi/2$ . La seconde ligne de cette figure montre des trajectoires de sortie discontinues au temps final, ceci parce que le contrôle construit grâce à la matrice  $\mathcal{K}_{t_f}$  présente une discontinuité au temps final.

Pour clore ce paragraphe, revenons-en à notre exemple pratique des deux voitures. Ici, supposons que les forces de frottement sont données par  $f_k(t) = -tv_k(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  où nous rappelons que  $v_k$  désigne la vitesse de la voiture  $k$ . Aussi, on prend  $m_1 = m_2 = 1$ . Le système devient donc

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -t & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ici le critère adéquat pour vérifier la contrôlabilité de l'état vers la sortie en un temps  $t_f$  est le Théorème 3.3.4 car le calcul de la résolvante  $R$  nécessite quelques efforts. Avec le Théorème 3.3.4 il est aisé de voir que ce système est contrôlable de l'état vers la sortie en tout temps  $t_f > 0$ .

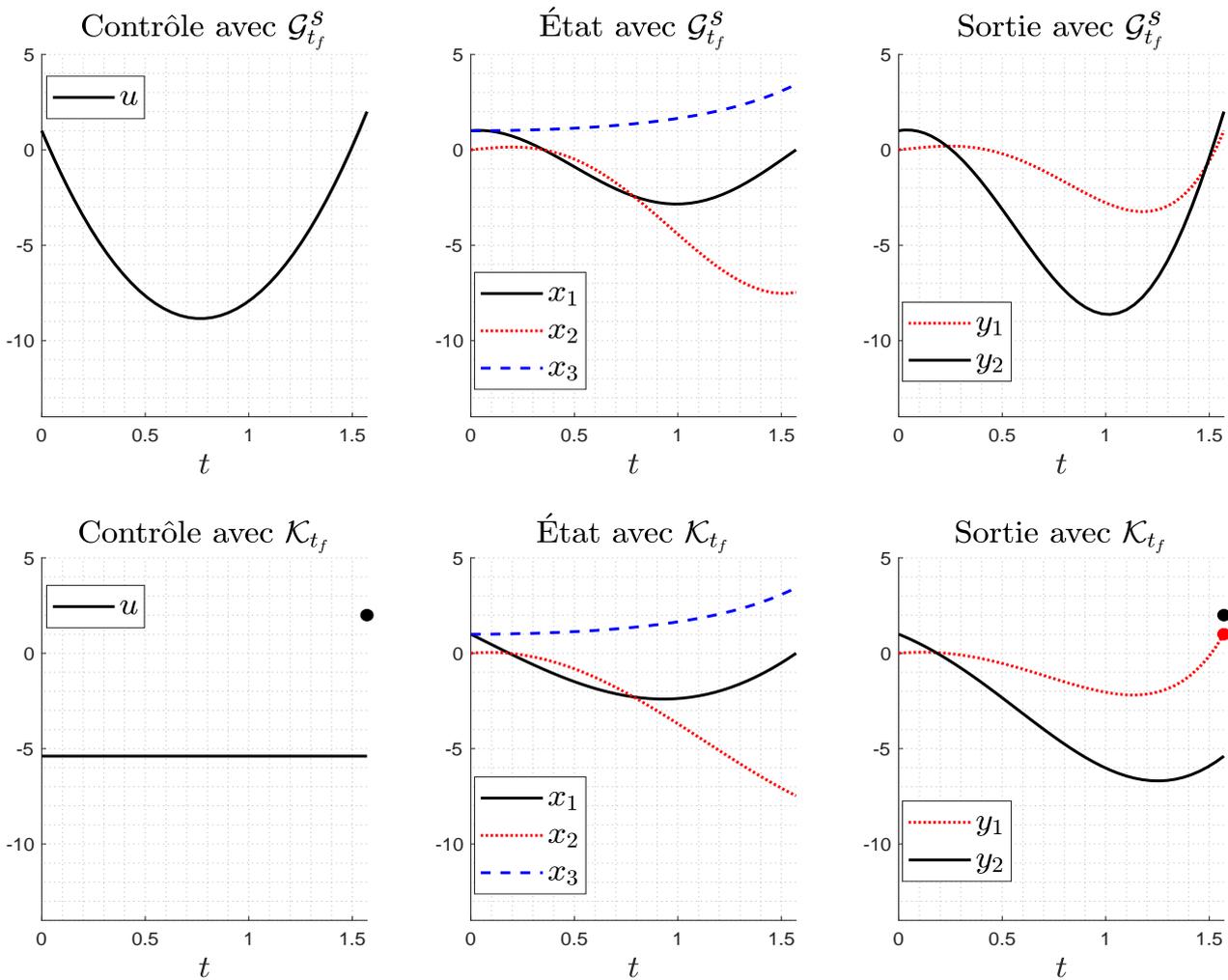


FIGURE 3.2 – Sur la première ligne, nous avons des trajectoires provenant du contrôle construit grâce à la matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  et sur la seconde ligne, les trajectoires associées au contrôle construit avec la matrice  $\mathcal{K}_{t_f}$ . Rappelons qu'ici, l'objet est d'atteindre la valeur de sortie  $(1, 2)^\top$  à partir de l'état initial  $x_0 = (1, 0, 1)^\top$  au temps  $t_f = \pi/2$ .

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la contrôlabilité de l'état vers la sortie des systèmes linéaires à temps invariant dans le cadre discret et continu. Dans ce cadre, nous avons étendu principalement les critères de Hautus bien connus dans le cadre de la contrôlabilité de l'état au cadre de la sortie. Ces résultats nous seront très utiles dans la suite du manuscrit et principalement au Chapitre 5. Nous avons également proposé d'autres critères de contrôlabilité dans le but de compléter et d'affiner ceux existants dans la littérature. Cette étude a été faite également sur les systèmes linéaires à temps variant mais uniquement dans le cas du temps continu. Nous avons donné des critères de contrôlabilité et dans la mesure du possible des expressions explicites de contrôles permettant d'atteindre des valeurs de sortie désirées à partir d'une donnée initiale en état, ceci en temps fini.

Pour cette notion de contrôlabilité de sortie, l'objet était de savoir si l'on peut atteindre n'importe quelle valeur de sortie à partir de n'importe quelle donnée initiale en état. Ce qui implique que nous

supposons la connaissance de l'état du système au temps initial  $t_0$ . Mais on peut aussi se dire qu'on a en notre possession une valeur de sortie à l'instant  $t_0$  et se poser la question de savoir s'il est possible d'atteindre une valeur de sortie désirée en temps fini à partir de cette valeur de sortie initiale. Comme dit dans l'introduction, cette question qui semble être anodine comporte des propriétés, loin d'être intuitives, qui feront l'objet du chapitre suivant.



# Contrôlabilité simple et globale de la sortie

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Contrôlabilité simple de la sortie</b> . . . . .	<b>54</b>
4.1.1	Cas des systèmes LTI à temps continu . . . . .	54
4.1.2	Cas des systèmes LTI à temps discret . . . . .	63
4.1.3	Cas des systèmes LTV à temps continu . . . . .	66
<b>4.2</b>	<b>Contrôlabilité globale de la sortie</b> . . . . .	<b>68</b>
4.2.1	Cas des systèmes LTI à temps continu . . . . .	68
4.2.2	Cas des systèmes LTI à temps discret . . . . .	73
4.2.3	Cas des systèmes LTV à temps continu . . . . .	75
<b>4.3</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>77</b>

---

Dans le Chapitre 3, nous avons porté notre attention sur la question suivante : est-il possible d'atteindre n'importe quelle valeur souhaitée de la sortie d'un système en partant de n'importe quelle valeur initiale en état en temps fini ? Mais on peut aussi se dire qu'à l'instant initial, on n'a pas accès à une valeur de l'état mais plutôt à une donnée initiale de sortie (résultat d'une mesure par exemple) et se poser la question s'il est possible d'agir sur le système pour obtenir une valeur de sortie désirée en un temps ultérieur.

De ce fait, nous considérons, en premier lieu, dans ce chapitre le système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.1a}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{4.1b}$$

où  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  désignent respectivement le contrôle (ou l'entrée ou encore la commande), l'état et la sortie du système à l'instant  $t$ .

Afin de pallier au problème relevé dans  $\mathfrak{D}_2$ , nous introduisons, pour toute donnée initiale de sortie  $y_0 \in \mathbb{R}^q$ , l'ensemble  $\Gamma_{y_0}$  des  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  pouvant engendrer  $y_0$  donné par

$$\Gamma_{y_0} = \left\{ (x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n+m} \mid Cx_0 + Du_0 = y_0 \right\}. \tag{4.2}$$

Cet ensemble peut être vide si la condition nécessaire (3.6) n'est pas satisfaite, en d'autres termes, si  $\text{rk}(C|D) < q$ . Dans le cas où cette condition nécessaire est satisfaite,  $\Gamma_{y_0}$  est un espace affine

dont la dimension est celle du noyau  $(C|D)$ .

Puisque les éléments de  $\Gamma_{y_0}$  engendrent des trajectoires de sortie qui ne sont pas nécessairement identiques, la question est donc de savoir à quelle trajectoire de sortie on fait allusion dans la définition précédente.

L'objectif de ce chapitre est donc le suivant :

**Objectifs.** Donner une description mathématique rigoureuse de cette notion de contrôlabilité en introduisant deux nouvelles notions de contrôlabilité de sortie à savoir la contrôlabilité simple de sortie qui nous permettra de transférer pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  un élément de  $\Gamma_{y_0}$  sur la sortie désirée  $y_1$  avec toujours l'idée de le faire avec des trajectoires de sortie continues, et celle dite contrôlabilité globale de sortie où l'objet sera d'envoyer tous les éléments de  $\Gamma_{y_0}$  sur  $y_1$  par le biais d'un unique contrôle continu. Des critères et lois de contrôle seront proposés dans le cadre du temps discret et du temps continu.

Selon la notion de contrôlabilité considérée, nous montrerons que la condition mentionnée ci-dessus comme nécessaire et suffisante n'est que parfois suffisante. Nous verrons que certaines propriétés auxquelles nous sommes habitués dans le cadre des systèmes LTI ne sont plus valables, c'est par exemple le cas de la dépendance en temps de ces deux notions.

Le chapitre sera subdivisé en trois sections. La première sera dédiée à la notion de contrôlabilité simple, section dans laquelle nous allons traiter les systèmes LTI (à temps continu et discret) et LTV (à temps continu). Ensuite la seconde section sera dédiée à la notion de contrôlabilité globale avec les mêmes considérations et enfin suivra une dernière section dédiée à la conclusion et aux questions ouvertes.

Les résultats sur les systèmes LTI de ce chapitre et du chapitre précédent ont donné lieu à l'article [30] qui est en révision.

## 4.1 Contrôlabilité simple de la sortie

### 4.1.1 Cas des systèmes LTI à temps continu

Commençons déjà par donner une définition précise de ce que nous entendons par contrôlabilité simple de la sortie du système (4.1). Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$  fixé.

**Définition 4.1.1.** — *Le système (4.1) est dit simplement contrôlable en sortie au temps  $t_f > t_0$  si pour toute sortie initiale  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  prise au temps  $t_0$  et toute valeur de sortie  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}$  et un contrôle continu  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  valant  $u_0$  au temps  $t_0$  tels que la trajectoire de sortie donnée par l'équation (4.1b) avec  $x_0$  comme état initial satisfasse  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .*

— *Il est dit simplement contrôlable en sortie si pour toute sortie initiale  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  prise au temps  $t_0$  et toute valeur de sortie  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}$ , un temps  $t_f > t_0$  et un contrôle continu  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  valant  $u(t_0) = u_0$  tels que la trajectoire de sortie donnée par l'équation (4.1b) avec  $x_0$  comme état initial satisfasse  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .*

Dans un premier temps, nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité simple du système (4.1) en temps  $t_f$ . Une fois la contrôlabilité acquise, nous montrerons comment choisir les commandes adéquates pour atteindre les valeurs de sortie désirées.

En particulier, on verra que cette notion de contrôlabilité de sortie dépend du temps et que la contrôlabilité simple du système n'implique pas sa contrôlabilité simple en un temps fini, ce qui constitue des obstructions à la notion de contrôlabilité de l'état vers la sortie discutée dans le Chapitre 3.

### ✱ Contrôlabilité simple en temps $t_f$ .

Le théorème suivant regroupe les critères pour la contrôlabilité simple au temps  $t_f$ .

**Théorème 4.1.1.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(4.1.1.a) *Le système (4.1) est simplement contrôlable en sortie au temps  $t_f$ .*

(4.1.1.b) *L'application entrée-sortie*

$$E_{t_f}^s : \mathbb{R}^{\kappa_{CD}} \times \mathcal{C}([t_0, t_f])^m \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$(\zeta, u) \mapsto \mathbb{G}(t_f)\zeta + \int_{t_0}^{t_f} C e^{(t_f-t)A} B u(t) dt + D u(t_f)$$

*est surjective où  $\kappa_{CD} = \dim \ker(C|D)$  et  $\mathbb{G}(t_f) := [C e^{(t_f-t_0)A} | H(t_f, t_0)] (C|D)^\perp$ .*

(4.1.1.c)  *$\text{rk}(CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|\mathfrak{D}(t_f)) = q$  où  $\mathfrak{D}(t_f) := (D | [C e^{(t_f-t_0)A} | 0_m^q] (C|D)^\perp)$ .*

(4.1.1.d) *La matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s := \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, t)H(t_f, t)^\top dt + \mathbb{G}(t_f)\mathbb{G}(t_f)^\top$  est définie positive avec*

$$H(t_f, t) = \int_t^{t_f} C e^{(t_f-\tau)A} B d\tau + D \text{ pour tout } t \in [t_0, t_f].$$

Faisons quelques remarques importantes sur ce théorème.

#### Remarque 4.1.1.

Notons que le critère (4.1.1.c) a exactement la même forme que le critère (3.1.1.b) avec la matrice  $D$  dans (3.1.1.b) remplacée par la matrice  $\mathfrak{D}(t_f)$ . Par conséquent, les tests de Hautus (3.1.4.c) et (3.1.4.d) constituent, en remplaçant la matrice  $D$  par  $\mathfrak{D}(t_f)$ , des conditions nécessaires et suffisantes de contrôlabilité simple en sortie au temps  $t_f$  du système (4.1).

#### Remarque 4.1.2.

La contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (4.1) implique la contrôlabilité simple de la sortie au temps  $t_f$  ceci pour tout temps  $t_f > t_0$ . En revanche, si le système (4.1) est simplement contrôlable au temps  $t_f$ , il n'est pas nécessairement contrôlable de l'état vers la sortie.

Comme exemple, considérons le système (4.1) avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sur cet exemple, on a  $(CB|CAB|CA^2B|D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $(CB|CAB|CA^2B|\mathfrak{D}(t_f)) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(t_f - t_0) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , où l'on a choisi  $(C|D)^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top$ . On peut donc voir que ce système n'est pas contrôlable de l'état vers la sortie mais qu'il est simplement contrôlable en sortie au temps  $t_f$  pour tout temps  $t_f$  satisfaisant  $t_f \notin t_0 + \pi\mathbb{N}$ .

Donnons maintenant une preuve au Théorème 4.1.1.

*Démonstration.*

• *Montrons que (4.1.1.a) implique (4.1.1.b).*

Supposons que le système (4.1) est simplement contrôlable au temps  $t_f$ .

Il suit donc que pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}$  et un contrôle continu  $u$  valant  $u_0$  au temps  $t_0$  tels que

$$y_1 = Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t_f} Ce^{(t_f-t)A}Bu(t) dt + Du(t_f).$$

Réécrite autrement, cette expression devient :

$$y_1 = [Ce^{(t_f-t_0)A} | H(t_f, t_0)] \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t_f} Ce^{(t_f-t)A}B(u(t) - u_0) dt + D(u(t_f) - u_0). \quad (4.3)$$

Puisque  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}$ , il existe  $\zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}}$  tel que  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top = (C | D)^\dagger y_0 + (C | D)^\perp \zeta$ .

De ce fait, pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe  $\zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}}$  et un contrôle continu  $w := u - u_0$  tels que

$$y_1 = \mathbb{F}(t_f)y_0 + \mathbb{G}(t_f)\zeta + \int_{t_0}^{t_f} Ce^{(t_f-t)A}Bw(t) dt + Dw(t_f)$$

où  $\mathbb{F}(t_f) := [Ce^{(t_f-t_0)A} | H(t_f, t_0)] (C | D)^\dagger$ .

On déduit que pour tous les couples  $(0^q, y_1)$ , il existe  $\zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}}$  et un contrôle continu  $v$  tels que  $y_1 = E_{t_f}^s(\zeta, u)$ . Ce qui implique la surjectivité de l'application  $E_{t_f}^s$ .

• *Montrons que (4.1.1.b) implique (4.1.1.c).*

Pour cette implication, il suffit de remarquer que  $\text{Im}(E_{t_f}^s) \subset \text{Im}(CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|D|\mathbb{G}(t_f))$ . Ainsi, la surjectivité de l'application entrée-sortie  $E_{t_f}^s$  implique

$$\text{rk}(CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|D|\mathbb{G}(t_f)) = q.$$

Enfin, en utilisant le fait que pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $H(t_f, t_0)u \in \text{Im}(CB|CAB|\dots|CA^{n-1}B|D)$ , on remarque qu'on a de façon équivalente le critère (4.1.1.c) satisfait.

• *Montrons que (4.1.1.c) implique (4.1.1.d).*

Un raisonnement par contraposition montre que s'il existe un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{R}^q$  tel que  $\eta^\top \mathcal{G}^s(t_f)\eta = 0$  alors  $\eta^\top H(t_f, t) = 0_m$  pour tout  $t \in [t_0, t_f]$  et que  $\eta^\top \mathbb{G}(t_f) = 0_m$ . On a donc  $\eta^\top H(t_f, t_f) = \eta^\top D = 0_m$ . En dérivant l'expression  $\eta^\top H(t_f, t) = 0_m$  autant de fois que nécessaire par rapport au temps et en évaluant l'équation obtenue au temps  $t_f$  on déduit que le vecteur non nul  $\eta$  satisfait  $\eta^\top CA^k B = 0_m$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{<n}$ . Ceci montre donc que le critère (4.1.1.c) n'est pas satisfait.

• *Montrons que (4.1.1.d) implique (4.1.1.a).*

Supposons donc (4.1.1.d) et prenons  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ .

Le contrôle

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t H(t_f, \tau)^\top d\tau (\mathcal{G}_{t_f}^s)^{-1} (y_1 - \mathbb{F}(t_f)y_0) \\ (x_0^\top, u_0^\top)^\top &= (C | D)^\dagger y_0 + (C | D)^\perp \mathbb{G}(t_f)^\top (\mathcal{G}_{t_f}^s)^{-1} (y_1 - \mathbb{F}(t_f)y_0), \end{aligned} \quad (4.4)$$

nous permet d'avoir  $y_1$  comme valeur de sortie au temps  $t_f$  en partant de l'état initial  $x_0$  au temps  $t_0$ . Comme par hypothèse le critère (4.1.1.d) est satisfait, il suit que le vecteur  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top$  donné dans (4.4)

est bien défini et appartient à  $\Gamma_{y_0}$ . De plus le contrôle  $u$  donné dans la même équation est continu et satisfait  $u(t_0) = u_0$ . Écrivons maintenant  $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$  où, pour tout  $t \in [t_0, t_f]$ ,

$$v(t) := H(t_f, t)^\top \left( \mathcal{G}_{t_f}^s \right)^{-1} (y_1 - \mathbb{F}(t_f)y_0).$$

En se souvenant de l'intégration par partie faite dans la preuve du Théorème 3.1.7, il suit de l'équation (4.3) que

$$y(t_f; t_0, x_0, u) = \left[ C e^{(t_f - t_0)A} \mid H(t_f, t_0) \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, t) v(t) dt.$$

En remplaçant  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top$  et  $v$  respectivement par leur expression dans la relation précédente, on obtient  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .  $\square$

Une fois que l'on est convaincu de la nécessité et de la suffisance des critères proposés dans le Théorème 4.1.1, on comprend mieux pourquoi le critère (3.1.1.b) du Théorème 3.1.1 souvent prétendu comme nécessaire et suffisant, n'est que, dans le cadre de la contrôlabilité simple, suffisant.

La preuve de « (4.1.1.d) implique (4.1.1.a) » nous montre que lorsque le système est simplement contrôlable en sortie au temps  $t_f$ , tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  peut être envoyé sur  $y_1$  au temps  $t_f$  avec le contrôle et l'état initial donnés par (4.4). On peut aussi vérifier, en procédant comme dans la preuve du Théorème 3.1.7, que le couple  $(u, x_0^\top)$  donné par (4.4) est l'unique solution du problème de minimisation

$$\min \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |\dot{u}(t)|_m^2 dt + \frac{1}{2} |\zeta|_{\kappa_{CD}}^2$$

$$\left| \begin{array}{l} u \in H^1([t_0, t_f])^m, u(t_0) = u_0, y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1, \zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}} \end{array} \right.$$

$$\text{avec } (x_0^\top, u_0^\top) \text{ donnés par } (x_0^\top, u_0^\top)^\top = (C \mid D)^\dagger y_0 + (C \mid D)^\perp \zeta.$$

### Exemple 4.1.1.

Comme illustration, considérons le système (4.1) avec les matrices données dans la Remarque 4.1.2. On se donne comme tâche d'envoyer la sortie de ce système à la valeur  $y_1 = (1, 2)^\top$  au temps  $t_f = \pi/2$  avec comme donnée initiale de sortie  $y_0 = (0, 1)^\top$  au temps  $t_0 = 0$ .

D'après la Remarque 4.1.2, le système est simplement contrôlable en sortie pour tout temps  $t_f$  tel que  $t_f \notin \pi\mathbb{N}$ . Ainsi puisque  $t_f = \pi/2 \notin \pi\mathbb{N}$ , notre tâche est réalisable.

En calculant l'expression du contrôle  $u$  et de l'état initial  $x_0$  donnés dans l'équation (4.4), on obtient

$$x_0 = \left( 1 \quad 0 \quad \frac{\pi(\pi + 12)}{2(\pi^2 + 9\pi + 12)} \right)^\top,$$

$$u(t) = \frac{\pi^2 + 6\pi + 24}{2(\pi^2 + 9\pi + 12)} - \frac{(3\pi - 12)(2 + \pi - t)t}{\pi(\pi^2 + 9\pi + 12)}, \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Les trajectoires du système sont représentées sur la Figure 4.1.

### Remarque 4.1.3.

Dans la Remarque 4.1.2, nous avons mentionné le fait que la contrôlabilité simple en temps  $t_f$  n'implique pas la contrôlabilité de l'état vers la sortie. Toutefois, on peut déduire du critère (4.1.1.c)

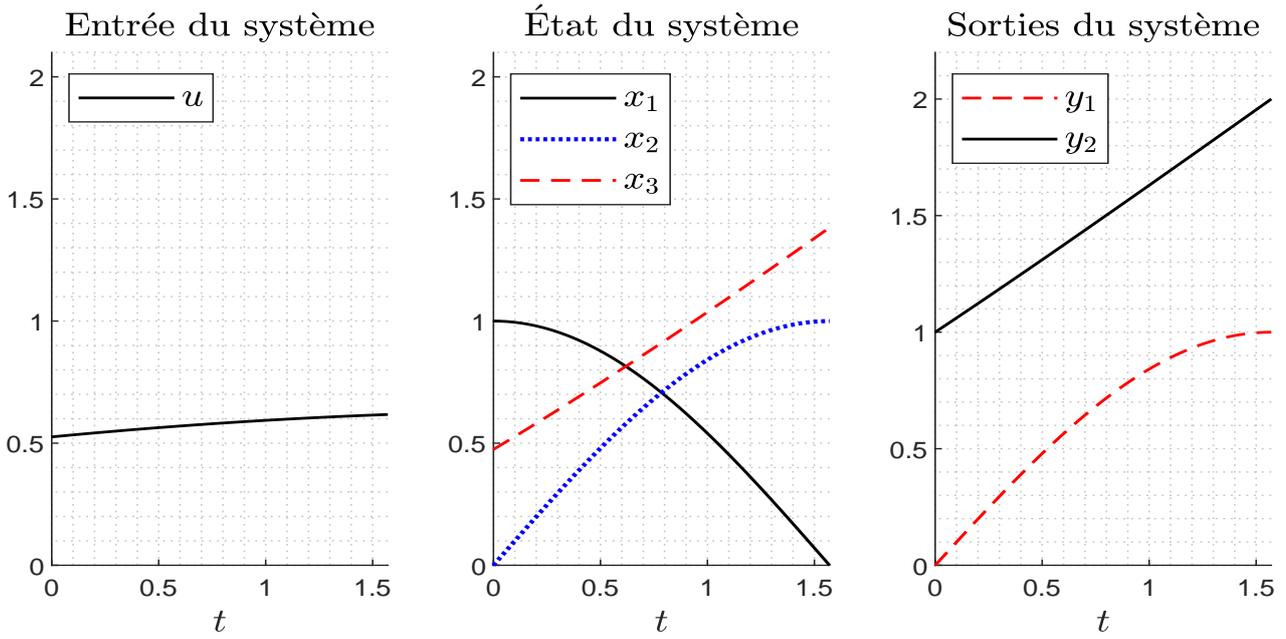


FIGURE 4.1 – Dans la première fenêtre à gauche, nous avons la trajectoire du contrôle permettant de transférer la sortie du système (4.1) avec les matrices données dans la Remarque 4.1.2 de la valeur  $y_0 = (0, 1)^\top$  au temps  $t_0 = 0$  à la valeur  $y_1 = (1, 2)^\top$  au temps  $t_f = \pi/2$ . Au milieu nous avons les trajectoires associées aux variables d'état et à droite celles associées aux variables de sorties.

que la contrôlabilité simple en temps  $t_f$  du système (4.1) est équivalente, en définissant  $\mathfrak{B} := (B | 0_{\kappa_{CD}}^n) \in \mathbb{R}^{m+\kappa_{CD}}$ , à la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + \mathfrak{B}u(t), \\ y(t) &= Cx(t) + \mathfrak{D}(t_f)u(t).\end{aligned}$$

En effet, la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système précédent est équivalente à

$$\text{rk} \left( C\mathfrak{B} | C A \mathfrak{B} | \dots | C A^{n-1} \mathfrak{B} | \mathfrak{D}(t_f) \right) = q.$$

Ce qui en remplaçant  $\mathfrak{B}$  par  $(B | 0_{\kappa_{CD}}^n)$  donne (4.1.1.c).

#### \* Contrôlabilité simple.

De l'équation (4.3), la contrôlabilité simple de la sortie est équivalente, pour tout couple  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , à l'existence d'un temps  $t_f > t_0$  dépendant éventuellement de  $y_0$  et  $y_1$  tel que  $y_1 \in \{\mathbb{F}(t_f)y_0\} + \text{Im} (CB | CAB | \dots | CA^{n-1}B | \mathfrak{D}(t_f))$ . Il suit donc que l'ensemble de toutes les sorties accessibles depuis  $y_0$  est donné par

$$\text{Acc}(y_0) = \bigcup_{t_f \geq t_0} \left( \{\mathbb{F}(t_f)y_0\} + \text{Im} (CB | CAB | \dots | CA^{n-1}B | \mathfrak{D}(t_f)) \right).$$

Ainsi, la contrôlabilité simple de la sortie est équivalente à

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}^q, \quad \bigcup_{t_f \geq t_0} \left( \{\mathbb{F}(t_f)y_0\} + \text{Im} (CB | CAB | \dots | CA^{n-1}B | \mathfrak{D}(t_f)) \right) = \mathbb{R}^q. \quad (4.6)$$

Nous avons vu au Chapitre 3 que pour les systèmes LTI, la contrôlabilité de l'état vers la sortie impliquait la contrôlabilité de l'état vers la sortie en tout temps fini. Il est donc naturel de se demander si la même propriété reste vraie dans la cadre de la contrôlabilité simple, c'est-à-dire, si la contrôlabilité simple de la sortie du système (4.1) implique sa contrôlabilité simple en un temps fini.

Dans la suite de ce paragraphe, nous répondons par la négative à cette question, excepté pour le cas  $q = 1$ . Pour ce faire, nous donnerons un exemple de système simplement contrôlable mais non simplement contrôlable pour tout temps  $t_f > t_0 = 0$ .

Premièrement, observons que quitte à projeter (4.6) dans l'orthogonal de  $\text{Im}(CB | \dots | CA^{n-1}B) + \text{Im}(D)$ , on peut supposer que  $B = 0_m^n$  et  $D = 0_m^q$ . Avec cette hypothèse, il suit de (4.6) que la contrôlabilité simple de la sortie est équivalente à

$$\bigcup_{t_f > 0} \left( \text{Im}(Ce^{t_f A} C^\perp) + \{Ce^{t_f A} C^\dagger y_0\} \right) = \mathbb{R}^q, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^q. \quad (4.7)$$

Deuxièmement, nous supposons que  $q \neq 1$  car si  $q = 1$  et si le système est simplement contrôlable en sortie, il existe un temps  $t_f > 0$  tel que le système soit simplement contrôlable en temps  $t_f$ . En effet, si le système est simplement contrôlable alors on a  $\bigcup_{t_f > 0} \text{Im}(Ce^{t_f A} C^\perp) = \mathbb{R}$ . On a pris  $y_0 = 0$  dans la relation (4.7). Or, il est impossible d'avoir  $\bigcup_{t_f > 0} \text{Im}(Ce^{t_f A} C^\perp) = \mathbb{R}$  si le système est non simplement contrôlable en tout temps  $t_f$  car, dans ce cas,  $\text{Im}(Ce^{t_f A} C^\perp) = \{0\}$  pour tout  $t_f > 0$ .

Troisièmement, puisque la matrice  $Ce^{t_f A} C^\perp$  contient  $n - q$  colonnes, pour augmenter notre chance de tomber sur un système simplement contrôlable mais non simplement contrôlable en temps fini, on se met dans le cas où  $n - q < q$ , c'est-à-dire  $n < 2q$  où, nous rappelons que,  $n$  est la dimension de l'espace d'état et  $q$  celle de la sortie. En effet, si  $n - q < q$ , le système ne peut pas être simplement contrôlable en temps fini car il est impossible d'engendrer  $\mathbb{R}^q$  avec  $n - q$  vecteurs fixes.

Et enfin, remarquons que pour avoir la contrôlabilité simple, il faut que pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  il existe un temps  $t_f$  et  $n - q$  coefficients réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-q}$  tels que  $y_1 - Ce^{t_f A} C^\dagger y_0 = \alpha_1 v_1(t_f) + \dots + \alpha_{n-q} v_{n-q}(t_f)$ , où  $v_k$  est la colonne  $k$  de la matrice  $Ce^{t_f A} C^\perp$ . On obtient donc  $q$  équations à  $n - q + 1$  inconnues. Pour augmenter de nouveau notre chance de trouver un contre-exemple, on se place dans le cas où  $2q - 1 \leq n$ .

Ainsi donc, nous nous plaçons dans le cadre suivant.

$$B = 0_m^n, \quad D = 0_m^q, \quad q \neq 1 \text{ et } 2q - 1 = n. \quad (4.8)$$

■ **Supposons dans un premier temps que  $q = 2$  et  $n = 3$ .**

Nous montrons que dans ce cadre, l'exemple recherché ne peut être trouvé.

Dans le présent cas, quitte à faire un changement de base sur la variable d'état, on peut se limiter aux cas où la matrice  $A$  prend les formes de Jordan

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ ou } A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \beta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

avec  $a, b, c, \lambda_k, k \in \{1, 2, 3\}, \alpha$  et  $\beta$  des nombres réels.

On peut déjà remarquer que si la matrice  $A$  est nulle alors la relation (4.7) ne peut pas être satisfaite.

Puisque  $n - q = 1$  alors  $C^\perp$  est un vecteur colonne. Choisissons sans perte de généralité  $C^\perp = (c_1, c_2, c_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0^3\}$  tel que  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ .

Remarquons que le vecteur  $e_3 = (0, 0, 1)^\top$  est un vecteur propre simultanément pour les matrices  $A_1$  et  $A_2$ . Il ne serait donc pas avisé de choisir  $C^\perp = e_3^\top$ . En effet, ceci impliquerait qu'aucun vecteur autre que le vecteur nul ne peut être atteint à partir de l'origine. Nous choisissons donc la transposée de  $C^\perp \wedge e_3$  comme première ligne de  $C$  et la transposée  $C^\perp \wedge (C^\perp \wedge e_3)$  comme seconde ligne de  $C$ .

En posant  $r^2 = c_1^2 + c_2^2$  et en prenant, en premier lieu,  $A = A_1$ , on a

$$C = \begin{pmatrix} c_2 & -c_1 & 0 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & -r^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C e^{t_f A_1} C^\perp = -r^2 \begin{pmatrix} e^{t_f a} \sin(t_f b) \\ c_3 e^{t_f c} - c_3 e^{t_f a} \cos(t_f b) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Observons de (4.9) que si  $r = 0$  ou  $c_3 = 0$  alors le système ne peut pas être simplement contrôlable en sortie car, par exemple, le vecteur  $y_1 = (0, 1)^\top$  ne peut pas être atteint à partir de l'origine. Supposons maintenant que  $r \neq 0$  et  $c_3 \neq 0$ .

Premièrement, si  $a = c$ , le vecteur  $y_1 = (1, 0)^\top$  ne peut pas être atteint à partir de l'origine car sinon, il existerait un temps  $t_f$  tel que  $\sin(t_f b) \neq 0$  et  $\cos(t_f b) = 1$ .

Deuxièmement, si  $a < c$ , le vecteur  $y_1 = (1, 0)^\top$  ne peut pas être atteint à partir de l'origine car sinon, il existerait un temps  $t_f$  tel que  $\cos(t_f b) = e^{t_f(c-a)} > 1$ .

Enfin, observons que si  $a > c$ , l'origine ne peut pas être atteinte à partir de  $y_0 = (0, 1)^\top$ . En effet, en posant  $v_1 = C e^{t_f A_1} C^\perp$  et  $v_2 = C e^{t_f A_1} C^\top y_0$ , on a  $\det(v_1, v_2) = -c_3 r^2 e^{t_f(a+c)} (e^{t_f(a-c)} - \cos(t_f b))$ . Puisque  $a > c$  il suit donc qu'il n'existe pas de temps  $t_f > 0$  tel que  $\det(v_1, v_2) = 0$ .

En tout, nous venons de montrer qu'il n'est pas possible de trouver le système désiré avec une matrice  $A$  ayant la forme de  $A_1$ .

Considérons maintenant le cas  $A = A_2$ .

Si l'on suppose que  $\alpha = \beta = 1$ , auquel cas  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , on a

$$C e^{t_f A_2} C^\perp = \frac{t_f e^{\lambda_1 t_f}}{2} \begin{pmatrix} 2c_2^2 - 2c_1 c_3 + t_f c_2 c_3 \\ 2c_1 c_2 + 2c_2 c_3 + t_f c_1 c_3 \end{pmatrix}.$$

En posant  $v_1 = C e^{t_f A_2} C^\perp$  et  $v_2 = (c_2, c_1)^\top$ , on a  $\det(v_1, v_2) = -t_f e^{\lambda_1 t_f} c_3 r^2$ . Ceci montre que le vecteur  $v_2$  ne peut être atteint que si  $c_3 = 0$  ou si  $c_1 = c_2 = 0$ . Mais si  $c_3 = 0$ , alors on ne peut pas atteindre par exemple le point  $y_1 = (0, 1)^\top$  à partir de 0. Aussi si  $c_1 = c_2 = 0$  on a directement  $v_1 = 0^2$  et donc aucun autre point en dehors de l'origine ne peut être atteint à partir de l'origine.

Si  $\alpha = \beta = 0$ , auquel cas les valeurs propres  $\lambda_k$  sont deux à deux distinctes ou toutes nulles, on obtient

$$C e^{t_f A_2} C^\perp = \begin{pmatrix} c_1 c_2 (e^{\lambda_1 t_f} - e^{\lambda_2 t_f}) \\ c_3 c_1^2 (e^{\lambda_1 t_f} - e^{\lambda_3 t_f}) + c_3 c_2^2 (e^{\lambda_2 t_f} - e^{\lambda_3 t_f}) \end{pmatrix}.$$

De ce calcul, si au moins l'un des paramètres  $c_k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$ , est nul alors on perd la contrôlabilité simple de la sortie. Si nous supposons que les paramètres  $c_k$  sont non nuls, alors il est immédiat que le vecteur  $y_1 = (0, 1)^\top$  ne peut pas être atteint à partir de l'origine car, par hypothèse,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

Si l'on suppose que  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ , auquel cas  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , on obtient

$$Ce^{t_f A_2} C^\perp = \begin{pmatrix} c_2^2 t_f e^{\lambda_1 t_f} \\ c_3 \Gamma^2 (e^{\lambda_1 t_f} - e^{\lambda_3 t_f}) + c_1 c_2 c_3 e^{\lambda_1 t_f} \end{pmatrix}.$$

De l'expression précédente, on voit que si  $c_2 \neq 0$ , il est impossible d'atteindre les sorties d'abscisse nulle à partir de l'origine et si  $c_2 = 0$  il est impossible d'atteindre celles d'abscisse non nulle.

Enfin, le cas  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$  se déduit du cas précédent par permutation.

Nous venons donc de montrer qu'il n'est pas possible de trouver l'exemple recherché en considérant comme matrice  $A$  les matrices ayant la forme  $A_2$ .

De ce qui précède, nous déduisons que le système recherché ne peut pas être trouvé dans le cas  $q = 2$  et  $n = 3$ .

■ **Supposons maintenant que  $q = 3$  et  $n = 5$ .**

En augmentant la dimension de l'espace de sortie à  $q = 3$ , auquel cas on a  $n = 5$  (en suivant (4.8)), nous proposons après quelques investigations le système suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons montrer que le système (4.1), avec  $B = 0_m^n$ ,  $D = 0_m^q$  et les matrices  $A$  et  $C$  données ci-dessus, est simplement contrôlable en sortie mais qu'il ne l'est pas en temps fini.

Remarquons que ce système ne peut être simplement contrôlable en temps fini car pour tout  $t_f > 0$ , le nombre de colonnes de la matrice  $Ce^{t_f A} C^\perp$  est  $n - q = 2$  strictement plus petit que la dimension de l'espace de sortie  $q = 3$ , on a  $\text{rk}(Ce^{t_f A} C^\perp) < 3$ .

Montrons maintenant que ce système est simplement contrôlable en sortie.

Pour commencer, nous calculons  $C^\dagger$  et choisissons la matrice  $C^\perp$  de la manière suivante :

$$C^\dagger = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^\perp = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant  $v(T) = (v_1(T), v_2(T)) = Ce^{TA} C^\perp$ ,  $s = \sin(T)$  et  $c = \cos(T)$ , on a

$$v(T) = e^T \begin{pmatrix} 2s(1 - 2c) & 2(-c^2 + sc - s) + 1 + e^{-T} \\ 4cs & 2c(c - s) - 1 - e^{-T} \\ 2(1 + c - 2c^2) & 2c(-1 + s + c) - 1 + e^{-T} \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant montrer que pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un temps  $T \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $d(T) := \det(v_1(T), v_2(T), y_1 - Ce^{TA} C^\dagger y_0) = 0$ . Mais avant d'utiliser cette méthode, nous devons d'abord déterminer les temps  $T$  pour lesquels les vecteurs  $v_1(T)$  et  $v_2(T)$  sont colinéaires.

Le produit vectoriel de  $v_1(T)$  et  $v_2(T)$  est donné par

$$v_1(T) \wedge v_2(T) = e^{2T} \left[ \begin{pmatrix} -2c^3 - 2sc^2 + c + 1 \\ 1 - s - c \\ s(-2s^2 + 2cs + 1) \end{pmatrix} e^T + \begin{pmatrix} 2s^2 + 2cs + c - 1 \\ c - s + 2s^2 + 2sc - 1 \\ -s \end{pmatrix} \right]$$

On doit donc résoudre  $v_1(T) \wedge v_2(T) = 0$ , c'est-à-dire

$$(-2c^3 - 2sc^2 + c + 1)e^T = 2s^2 + 2cs + c - 1, \quad (4.10a)$$

$$(1 - s - c)e^T = c - s + 2s^2 + 2sc - 1, \quad (4.10b)$$

$$s(-2s^2 + 2cs + 1)e^T = -s. \quad (4.10c)$$

Dans un premier temps, on remarque que si  $T \in 2\pi\mathbb{N}$  alors  $v_1(T)$  et  $v_2(T)$  sont colinéaires. Réciproquement, on peut aussi remarquer que la relation (4.10c) n'est satisfaite que si  $s = \sin(T) = 0$ , c'est-à-dire  $T \in \pi\mathbb{N}$ . En effet, si  $s \neq 0$  alors de (4.10c) on a  $e^T = 1/(-2s^2 + 2cs + 1)$ . En reportant cette expression de  $e^T$  dans (4.10a), on obtient  $s^2 - 1 = 0$  impliquant que  $T \in \pi\mathbb{N} + \pi/2$ . Mais  $T \notin \pi\mathbb{N} + \pi/2$  car sinon, on aurait  $e^T = -1$ . Pour que la troisième composante du produit vectoriel soit donc nulle, il faut que  $T \in \pi\mathbb{N}$ .

On remarque maintenant que si  $T = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , on obtient de (4.10b) que  $e^T = -1$ . Ceci montre que le produit vectoriel de ces deux vecteurs s'annule si et seulement si  $T \in 2\pi\mathbb{N}$ . Cette preuve est confirmée par la Figure 4.2.

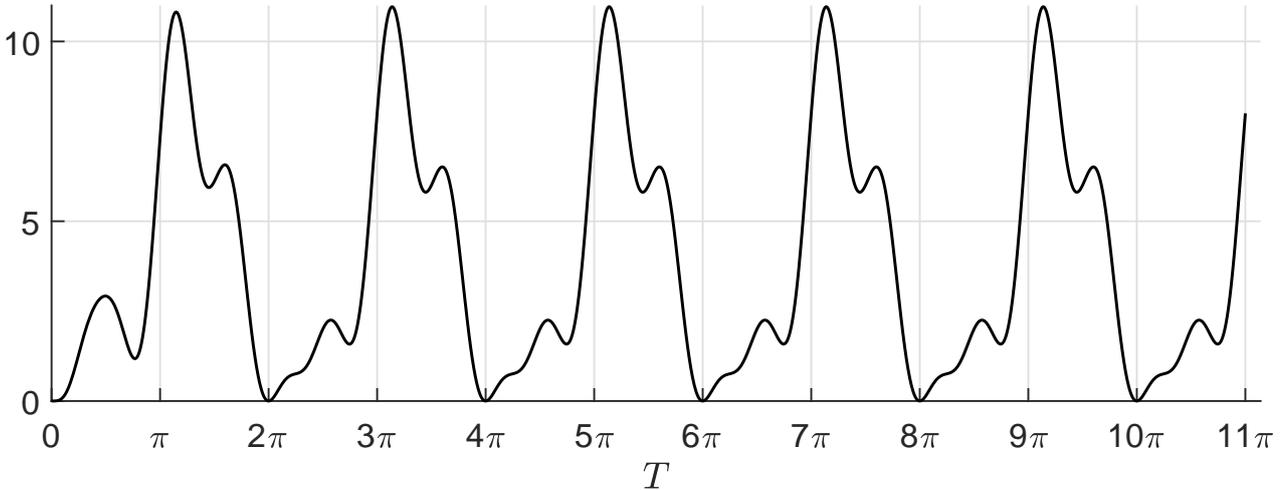


FIGURE 4.2 – Norme de  $(v_1 \wedge v_2)e^{-2T}$ .

De ce qui précède, la contrôlabilité simple du système considéré est garantie si nous montrons que pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un temps  $T \in \mathbb{R}_+ \setminus 2\pi\mathbb{N}$  tel que  $d(T) := \det(v_1(T), v_2(T), y_1 - Ce^{TA}C^\dagger y_0) = 0$ .

En posant  $y_0 = (y_{01}, y_{02}, y_{03})^\top$  et  $y_1 = (y_{11}, y_{12}, y_{13})^\top$ , on obtient

$$d(T) = -2e^{3T} [\alpha_1 f_1(T) + \alpha_2 f_2(T)] - 2e^{2T} [\beta_0 g_0(T) + \beta_1 g_1(T) + \beta_2 g_2(T) + \tilde{g}(T)] - 2e^T h(T).$$

où nous avons posé

$$\alpha_1 = y_{01} + y_{02}, \quad f_1(T) = 2s^2 - 2sc + c - 1, \quad f_2(T) = s,$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= y_{02} + y_{03}, & g_0(T) &= s(1 - 2s^2), & g_1(T) &= -1 + 2s^3 + c, \\
 \beta_0 &= 2y_{11} + y_{12} - y_{13}, & g_2(T) &= -2cs^2, \\
 \beta_1 &= y_{11} + y_{12}, & \tilde{g}(T) &= \alpha_1(1 + 2s - 2s^3 - c + 2cs^2) + \alpha_2s(-1 + 2s^2 + 2cs), \\
 \beta_2 &= 2y_{02} + y_{11} + y_{13}, & h(T) &= \beta_1(1 + 2s - c - 2s^2 - 2sc) - \beta_0s.
 \end{aligned}$$

Pour simplifier le reste de la preuve, nous introduisons le lemme suivant.

**Lemme 4.1.2.** *Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  deux fonctions réelles, continues et  $2\pi$ -périodique;  $r$  une fonction réelle et continue, définie sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\lim_{T \rightarrow \infty} r(T) = 0$ .*

*Supposons qu'il existe  $T_1, T_2$  dans  $(0, 2\pi)$  tels que  $\varphi_1(T_1) < 0, \varphi_1(T_2) > 0$  et  $\varphi_2(T_1) = \varphi_2(T_2) = 0$ .*

*Prenons  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et posons  $H = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 + r$ .*

*Alors, il existe  $T \in \mathbb{R}_+ \setminus 2\pi\mathbb{N}$  tel que  $H(T) = 0$ .*

*Démonstration.*

Supposons sans perte de généralité que  $\gamma = 1$  et  $T_1 < T_2$ .

Comme  $\varphi_2(T_1) = \varphi_2(T_2) = 0$  alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout  $\ell \in \{1, 2\}$ , on a  $H(T_\ell + 2k\pi) = \varphi_1(T_\ell) + r(T_\ell + 2k\pi)$ . Comme par hypothèse  $\varphi_1(T_1) < 0, \varphi_1(T_2) > 0$  et que  $r$  tend vers 0 quand  $T$  tend vers l'infini, il existe  $k$  suffisamment grand tel que  $H(T_1 + 2k\pi) < 0 < H(T_2 + 2k\pi)$ . Il suit donc du Théorème des Valeurs Intermédiaires que  $H$  s'annule sur l'intervalle  $(T_1 + 2k\pi, T_2 + 2k\pi)$ .  $\square$

En utilisant le lemme précédent, nous allons montrer que le déterminant calculé un peu plus haut s'annule en dehors des temps de l'ensemble  $2\pi\mathbb{N}$ .

Observons que si  $\alpha_1 \neq 0$  (resp.  $\alpha_2 \neq 0$  et  $\alpha_1 = 0$ ), en prenant  $\varphi_1 = f_2, \varphi_2 = f_1$  (resp.  $\varphi_1 = f_2, \varphi_2 = 0$ ) et  $r(T) = e^{-T}(\beta_0g_0(T) + \beta_1g_1(T) + \beta_2g_2(T) + \tilde{g}(T) + e^{-T}h(T))$  dans le Lemme 4.1.2, on déduit que  $d(\cdot)$  s'annule sur  $\mathbb{R}_+ \setminus 2\pi\mathbb{N}$ . Sur la Figure 4.3 on peut vérifier que les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  satisfont bien les conditions du Lemme 4.1.2.

Supposons maintenant que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  et définissons  $\varphi_1(T) = \beta_0g_0(T) + \beta_1g_1(T) + \beta_2g_2(T), \varphi_2(T) = 0$  et  $r(T) = e^{-T}h(T)$ .

On a donc  $d(T) = -2e^{2T}[\varphi_1(T) + \varphi_2(T) + r(T)]$ . On remarque que  $\varphi_1(0) = \varphi_1(2\pi) = 0, \varphi_1'(0) = \beta_0$  et  $\varphi_1$  est  $2\pi$ -périodique. Donc si  $\beta_0 \neq 0$ , il existe  $T_1$  et  $T_2$  sur  $(0, 2\pi)$  tels que  $\varphi_1(T_1) < 0$  et  $\varphi_1(T_2) > 0$ . En appliquant de nouveau le Lemme 4.1.2, on déduit que  $d(\cdot)$  s'annule de nouveau sur  $\mathbb{R}_+ \setminus 2\pi\mathbb{N}$ .

On suppose que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_0 = 0$ , auquel cas  $d(T) = -2e^{2T}[\beta_1g_1(T) + \beta_2g_2(T) + r(T)]$ .

Si  $\beta_1 \neq 0$  (resp.  $\beta_2 \neq 0$  et  $\beta_1 = 0$ ), en prenant  $\varphi_1 = g_1, \varphi_2 = g_2$  (resp.  $\varphi_1 = g_2, \varphi_2 = 0$ ) et  $r(T) = e^{-T}h(T)$  dans le Lemme 4.1.2, on déduit que  $d(\cdot)$  s'annule sur  $\mathbb{R}_+ \setminus 2\pi\mathbb{N}$ . La Figure 4.3 confirme bien que les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  satisfont aux critères du Lemme 4.1.2.

Enfin, si on suppose que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ , on obtient  $d(T) = 0$  pour tout  $T > 0$  et il n'y a rien à prouver.

En résumé, nous avons montré que pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un temps  $T \in \mathbb{R}_+ \setminus 2\pi\mathbb{N}$  tel que  $d(T) := \det(v_1(T), v_2(T), y_1 - Ce^{TA}C^{\dagger}y_0) = 0$ . Ce qui prouve que le système considéré est bien simplement contrôlable mais pas simplement contrôlable en temps fini. En revanche, si le système (4.1) est simplement contrôlable au temps  $t_f$  alors il est par définition simplement contrôlable.

### 4.1.2 Cas des systèmes LTI à temps discret

Dans cette partie, nous introduisons la notion de contrôlabilité simple en temps fini du système à temps discret donné par l'équation (3.16).

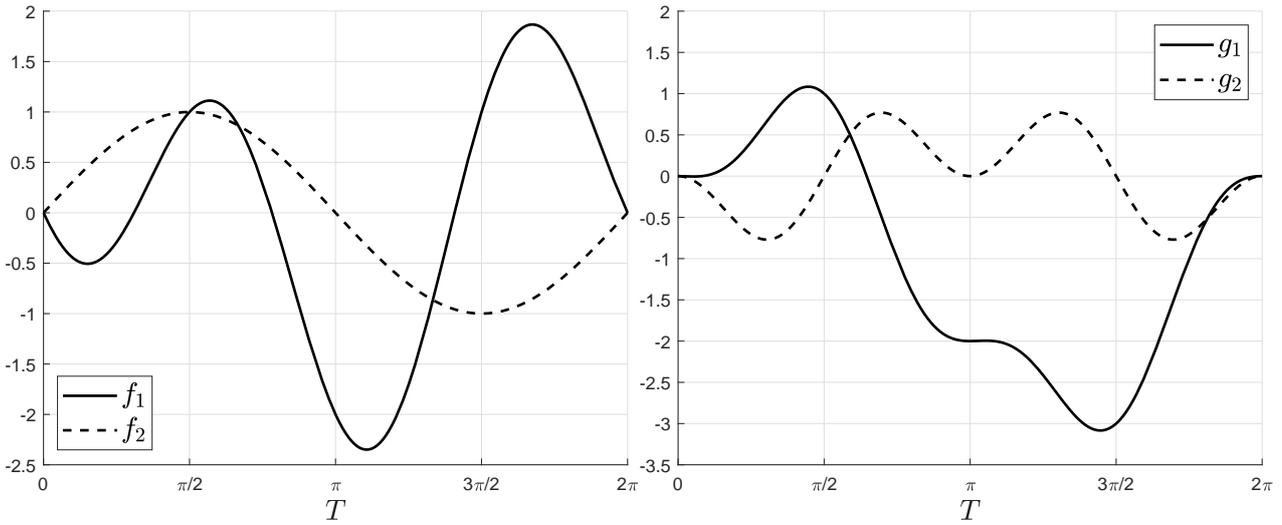


FIGURE 4.3 – À gauche, nous avons les courbes de  $f_1$ ,  $f_2$  et à droite celles de  $g_1$  et  $g_2$ .

**Définition 4.1.2.** — *Le système (3.16) est dit simplement contrôlable en sortie en  $N$  itération(s), si pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  pris au temps  $k_0$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}$ , des entrées  $u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}$  dans  $\mathbb{R}^m$  tels que  $u_{k_0} = u_0$  et que la trajectoire de sortie partant de l'état initial  $x_0$  au temps  $k_0$  prend la valeur  $y_1$  au temps  $k_0 + N$ , c'est-à-dire  $y_{k_0+N} = y_1$ .*

— *Il est dit simplement contrôlable en sortie, si pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  pris au temps  $k_0$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}$ , un entier  $N \in \mathbb{N}^*$ , des entrées  $u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}$  dans  $\mathbb{R}^m$  tels que  $u_{k_0} = u_0$  et la trajectoire de sortie partant de l'état initial  $x_0$  au temps  $k_0$  prend la valeur  $y_1$  au temps  $k_0 + N$ .*

Le théorème suivant permet de caractériser la contrôlabilité simple de la sortie en  $N$  itération(s) du système discret (3.16).

**Théorème 4.1.3.** *Soit  $N > 0$ . Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(4.1.3.a) *Le système (3.16) est simplement contrôlable en sortie en  $N$  itération(s)*

(4.1.3.b) *L'application*

$$E_N^s : \mathbb{R}^{\kappa_{CD}} \times (\mathbb{R}^m)^N \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$(\zeta; u_1, \dots, u_N) \mapsto \mathbb{G}_N \zeta + \sum_{\ell=1}^{N-1} CA^{N-\ell-1} Bu_\ell + Du_N$$

*est surjective où  $\mathbb{G}_N = (CA^N | CA^{N-1}B)(C | D)^\perp$ .*

(4.1.3.c)  *$\text{rk}(\mathbb{K}_N) = q$  où  $\mathbb{K}_1 = \mathfrak{D}_1$ ,  $\mathbb{K}_N = (CA^{N-2}B | \dots | CB | \mathfrak{D}_N)$  pour tout  $N \geq 2$  et  $\mathfrak{D}_N := (D | \mathbb{G}_N)$ .*

(4.1.3.d) *La matrice  $\mathcal{G}_N^s := \sum_{\ell=0}^{N-2} CA^\ell BB^\top (A^\ell)^\top C^\top + \mathfrak{D}_N \mathfrak{D}_N^\top$  est définie positive avec  $\mathcal{G}_1^s = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_1^\top$ .*

Quelques remarques :

**Remarque 4.1.4.**

*Notons que contrairement à la notion de contrôlabilité de l'état vers la sortie, si  $N_{\min}$  est le plus petit entier naturel tel que le système (3.16) est simplement contrôlable en sortie en  $N_{\min}$  itération(s),*

il n'est pas nécessairement simplement contrôlable en tout  $N > N_{\min}$  itérations. Cette remarque s'illustre bien en considérant de nouveau le système (3.16) avec les matrices données dans la Remarque 4.1.2.

En effet, sur cet exemple, en choisissant de nouveau

$$(C|D)^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\top,$$

on a

$$\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_{2\ell+1} = (0_{2\ell-1}^2 | \tilde{\mathbb{K}}_{2\ell+1}) \quad \text{où} \quad \tilde{\mathbb{K}}_{2\ell+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^\ell & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \ell \geq 1.$$

$$\mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_{2\ell} = (0_{2\ell-2}^2 | \mathbb{K}_2), \quad \forall \ell \geq 2.$$

Ce qui montre que ce système n'est simplement contrôlable en  $N$  itération(s) que si  $N$  est impair.

#### Remarque 4.1.5.

Observons que si l'espace vectoriel  $\bigcap_{k=0}^{N-2} \ker(B^\top A^{\top k})$  est stable par  $A^\top$  auquel cas  $\text{rk}(\mathbb{K}_N) = \text{rk}(\mathbb{K}_n)$ , les critères (3.1.4.c) et (3.1.4.d) deviennent, en remplaçant la matrice  $D$  dans les références précitées par  $\mathfrak{D}_N$ , nécessaires et suffisants pour la contrôlabilité simple de la sortie en  $N$  itération(s) du système (3.16).

#### Remarque 4.1.6.

Comparativement à la Remarque 4.1.3, il n'est pas vrai que la contrôlabilité simple en  $N$  itération(s) avec  $N < n + 1$ , du système à temps discret (4.1) soit équivalente à la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + \mathfrak{B}u_k, \\ y_k &= Cx_k + \mathfrak{D}_N u_k, \end{aligned}$$

où, nous rappelons  $\mathfrak{B} := (B | 0_{\kappa_{CD}}^n) \in \mathbb{R}_{m+\kappa_{CD}}^n$ .

Pour se convaincre de cela, considérons le système (4.1) avec les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec ce système, on a directement  $\ker(C|D) = \{0^3\}$  donc

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (CA\mathfrak{B} | C\mathfrak{B} | \mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur cet exemple, on voit que ce système (4.11) est contrôlable de l'état vers la sortie car la matrice  $(CA\mathfrak{B} | C\mathfrak{B} | \mathfrak{D}_2)$  est de rang 3 mais qu'il n'est pas simplement contrôlable en 2 itérations car le rang de  $\mathbb{K}_2$  est 2.

Donnons maintenant une preuve au Théorème 4.1.3.

*Démonstration.*

Rappelons que, de l'équation (3.17), la trajectoire de sortie après  $N$  itération(s) est donnée par

$$y_{k_0+N} = CA^N x_0 + \sum_{\ell=0}^{N-1} CA^{N-\ell-1} B u_{k_0+\ell} + D u_{k_0+N}.$$

Notons que par définition, si le système (3.16) est simplement contrôlable en sortie en  $N$  itération(s), alors pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe  $\zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}}$ ,  $u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}$  dans  $\mathbb{R}^m$  tels que

$$y_1 = \mathbb{F}_N y_0 + \mathbb{G}_N \zeta + \sum_{\ell=1}^{N-1} CA^{N-\ell-1} B u_{k_0+\ell} + D u_{k_0+N}, \text{ où } \mathbb{F}_N := (CA^N | CA^{N-1}B)(C | D)^\dagger.$$

En particulier, pour tout couple  $(0^q, y_1)$ , il existe  $\zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}}$ ,  $u_1, \dots, u_N$  dans  $\mathbb{R}^m$  tels que  $y_1 = E_N^s(\zeta; u_1, \dots, u_N)$  impliquant donc la surjectivité de l'application  $E_N^s$ . De ce qui précède, on déduit que (4.1.3.a) implique (4.1.3.b).

Pour montrer que (4.1.3.b) implique (4.1.3.c), il suffit de remarquer que  $\text{Im}(E_N^s) = \text{Im}(\mathbb{K}_N)$ .

Comme  $\mathcal{G}_N^s = \mathbb{K}_N \mathbb{K}_N^\top$  il suit immédiatement que (4.1.3.c) implique (4.1.3.d).

Enfin, supposons  $\mathcal{G}_N^s$  définie positive et prenons  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ . Considérons le contrôle  $u_{k_0} = u_0, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}$  donné par

$$\begin{aligned} (u_{k_0+1}^\top, u_{k_0+2}^\top, \dots, u_{k_0+N}^\top, \zeta^\top)^\top &= \mathbb{K}_N^\top (\mathcal{G}_N^s)^{-1} (y_1 - \mathbb{F}_N y_0), \\ (x_0^\top, u_0^\top)^\top &= (C | D)^\dagger y_0 + (C | D)^\perp \zeta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

On a par hypothèse  $\mathcal{G}_N^s$  définie positive et donc (4.12) est bien définie et  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}$ .

En posant  $u = (u_{k_0+1}^\top, \dots, u_{k_0+N}^\top, \zeta^\top)^\top$  et en réécrivant  $y_{k_0+N}$  sous la forme  $y_{k_0+N} = \mathbb{F}_N y_0 + \mathbb{K}_N u$ , on a, en prenant  $u = u$ ,  $y_{k_0+N} = y_1$ .  $\square$

#### Remarque 4.1.7.

Le couple  $(x_0^\top, u^\top)^\top$  donné dans (4.12) est l'unique solution du problème de minimisation suivant.

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^N |u_\ell|_m^2 + \frac{1}{2} |\zeta|_{\kappa_{CD}}^2 \\ \text{subject to} \quad & (u_1^\top, u_2^\top, \dots, u_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{mN}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}} \\ & y_1 = \mathbb{F}_N y_0 + \mathbb{K}_N (u_1^\top, u_2^\top, \dots, u_N^\top, \zeta^\top)^\top. \end{aligned}$$

De ce qui précède, on peut aussi déduire que la contrôlabilité simple de la sortie du système (3.16) est équivalente à

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} (\{\mathbb{F}_N y_0\} + \text{Im}(\mathbb{K}_N)) = \mathbb{R}^q, \text{ ceci pour tout } y_0 \in \mathbb{R}^q.$$

De nouveau on peut se poser la question de savoir si la contrôlabilité simple de la sortie du système (4.1) implique sa contrôlabilité simple en sortie en temps fini dans le cas  $q > 1$ . À cette question, nous n'avons pas de réponse.

Remarquons que dans le cas des systèmes LTI à temps continu, nous avons pu répondre par la négative grâce au théorème des valeurs intermédiaires. Puisque nous ne disposons pas de cet outil dans le domaine à temps discret, la réponse ne nous est pas claire.

### 4.1.3 Cas des systèmes LTV à temps continu

Dans ce paragraphe, nous considérons le système linéaire à temps variant (3.20) et discutons uniquement de la contrôlabilité simple en temps fini introduite au premier item de la Définition 4.1.1

que nous rappelons ici. Soit  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  pris au temps  $t_0$  fixé et définissons

$$\Gamma_{y_0}^{t_0} = \left\{ (x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n+m} \mid C(t_0)x_0 + D(t_0)u_0 = y_0 \right\}. \quad (4.13)$$

**Définition 4.1.3.** *Le système (4.1) est dit simplement contrôlable en sortie au temps  $t_f > t_0$  si pour toute sortie initiale  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  prise au temps  $t_0$  et toute valeur de sortie  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un  $(x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}^{t_0}$  et un contrôle continu  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  valant  $u_0$  au temps  $t_0$  tels que la trajectoire de sortie donnée par l'équation (4.1b) avec  $x_0$  comme état initial satisfasse  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .*

De la définition précédente, il suit qu'une condition nécessaire de contrôlabilité simple de sortie au temps  $t_f > t_0$  est

$$\text{rk}(C(t_0) \mid D(t_0)) = q. \quad (4.14)$$

On suppose donc dans la suite que (4.14) est satisfaite, auquel cas,  $\Gamma_{y_0}^{t_0}$  est non vide pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$ .

Le théorème suivant dont une preuve peut être faite en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du Théorème 4.1.1 donne des conditions nécessaires et suffisantes de la contrôlabilité simple de sortie au temps  $t_f$ .

**Théorème 4.1.4.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(4.1.4.a) *Le système (3.20) est simplement contrôlable en sortie au temps  $t_f$ .*

(4.1.4.b) *L'application entrée-sortie*

$$\begin{aligned} E_{t_f}^s : \mathbb{R}^{\kappa_{CD}} \times \mathcal{C}([t_0, t_f])^m &\rightarrow \mathbb{R}^q \\ (\zeta, u) &\mapsto \mathbb{G}(t_f)\zeta + \int_{t_0}^{t_f} C(t_f)R(t_f, t)B(t)u(t) dt \\ &\quad + D(t_f)u(t_f) \end{aligned}$$

*est surjective où  $\kappa_{CD} = \dim \ker(C(t_0) \mid D(t_0))$ ,*

$$\mathbb{G}(t_f) = [C(t_f)R(t_f, t_0) \mid H(t_f, t_0)] (C(t_0) \mid D(t_0))^\perp$$

$$\text{avec } H(t_f, t) = \int_t^{t_f} C(t_f)R(t_f, \tau)B(\tau) d\tau + D(t_f) \text{ pour tout } t \in [t_0, t_f].$$

(4.1.4.c) *La matrice  $\mathcal{G}_{t_f}^s := \int_{t_0}^{t_f} H(t_f, t)H(t_f, t)^\top dt + \mathbb{G}(t_f)\mathbb{G}(t_f)^\top$  est définie positive.*

On peut donc déduire du théorème précédent que la contrôlabilité simple au temps  $t_f$  du système (3.20) est équivalente à la contrôlabilité de l'état vers la sortie au temps  $t_f$  du système

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + (B(t) \mid 0_{\kappa_{CD}}^n)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + (D(t) \mid \mathbb{G}(t))u(t) \end{aligned}$$

où  $u(t) \in \mathbb{R}^{m+\kappa_{CD}}$ . Ainsi, tous les critères de contrôlabilité de l'état vers la sortie au temps  $t_f$  établis dans le paragraphe 3.3.2 appliqués au système précédent constituent des critères de contrôlabilité simple de sortie au temps  $t_f$  du système (3.20).

Lorsque le système (3.20) est simplement contrôlable au temps  $t_f$ , le résultat suivant permet de réaliser le transfert désiré.

**Théorème 4.1.5.** *Supposons que le système (3.20) soit simplement contrôlable en sortie au temps  $t_f$ . Alors, pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , le contrôle*

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t H(t_f, \tau)^\top d\tau \left(\mathcal{G}_{t_f}^s\right)^{-1} (y_1 - \mathbb{F}(t_f)y_0), \quad t \in [t_0, t_f] \\ (x_0^\top, u_0^\top)^\top &= (C(t_0) | D(t_0))^\dagger y_0 + (C(t_0) | D(t_0))^\perp \mathbb{G}(t_f)^\top \left(\mathcal{G}_{t_f}^s\right)^{-1} (y_1 - \mathbb{F}(t_f)y_0), \quad (4.16) \\ &\text{où } \mathbb{F}(t_f) := [C(t_f)R(t_f, t_0) | H(t_f, t_0)] (C(t_0) | D(t_0))^\dagger, \end{aligned}$$

permet d'obtenir la valeur de sortie  $y_1$  au temps  $t_f$  à partir de la valeur  $y_0$  au temps  $t_0$  en partant de la donnée initiale  $x_0$  en état. De plus, le couple  $(x_0^\top, u^\top)$  est l'unique minimiseur du problème de minimisation

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |\dot{u}(t)|_m^2 dt + \frac{1}{2} |\zeta|_{\kappa_{CD}}^2 \\ \left| \begin{array}{l} u \in H^1([t_0, t_f])^m, \quad u(t_0) = u_0, \quad y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{\kappa_{CD}} \\ \text{avec } (x_0^\top, u_0^\top) \text{ donnés par } (x_0^\top, u_0^\top)^\top = (C(t_0) | D(t_0))^\dagger y_0 + (C(t_0) | D(t_0))^\perp \zeta. \end{array} \right. \end{aligned}$$

## 4.2 Contrôlabilité globale de la sortie

La question principale dans le cadre de la contrôlabilité simple de la sortie discutée dans la section précédente consistait à savoir si pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  il est possible, dans le cas où  $\Gamma_{y_0}$  (4.2) (resp.  $\Gamma_{y_0}^{t_0}$  dans le cas de systèmes LTV) est non vide, d'envoyer un élément de cet ensemble vers la sortie  $y_1$  en un temps fini avec un contrôle continu. On peut se poser aussi la question s'il est possible d'envoyer tous les éléments de cet ensemble vers la valeur  $y_1$  en temps fini avec des contrôles continus indépendants de  $(x_0^\top, u_0^\top)$ .

Dans le cas  $D \neq 0_m^q$ , cela n'est pas possible car l'ensemble  $\Gamma_{y_0}$  (resp.  $\Gamma_{y_0}^{t_0}$ ) n'est pas nécessairement réduit à un singleton et le contrôle  $u$  pour être continu doit prendre la valeur  $u_0$  pour tous les  $u_0$  tels qu'il existe  $x_0$  satisfaisant  $Cx_0 + Du_0 = y_0$  (resp.  $C(t_0)x_0 + D(t_0)u_0 = y_0$ ). De ce fait, il serait raisonnable d'utiliser comme ensemble de contrôles admissibles, celui des contrôles continus sur  $(t_0, t_f]$  mais qui peuvent admettre une discontinuité dépendante de  $(x_0^\top, u_0^\top)$  au temps  $t_0$ . Dans le cas où la matrice  $D$  est nulle, ce problème ne se pose pas car  $\Gamma_{y_0}$  ne dépend pas de la valeur initiale du contrôle.

### 4.2.1 Cas des systèmes LTI à temps continu

Dans ce paragraphe, nous considérons les systèmes LTI à temps continu représentés par le système (4.1). En définissant  $\Lambda_{y_0} := \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u_0 \in \mathbb{R}^m \text{ satisfaisant } (x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}\}$ , nous introduisons la définition suivante.

**Définition 4.2.1.** — *Le système (4.1) sera dit globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f$  si pour toute sortie initiale  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  prise au temps  $t_0$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tel que pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ , on a  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .*

— *Il sera dit globalement contrôlable en sortie (GCS) si pour toute sortie initiale  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  prise au temps  $t_0$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un temps  $t_f > t_0$  et un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tels que pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ ,  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$ .*

Désignons par  $d := \dim \text{Im}(D)$  et soit  $\mathbb{P} \in \mathbb{R}_q^{q-d}$  une matrice de rang maximal telle que  $\ker(\mathbb{P}) = \text{Im}(D)$  et prenons  $y_0 \in \mathbb{R}^q$ .

Notons que pour tout  $x_0^1$  et  $x_0^2$  appartenant à  $\Lambda_{y_0}$ , on a aussi  $\mathbb{P}C(x_0^1 - x_0^2) = 0$ , ce qui implique que  $(x_0^1 - x_0^2) \in \ker(\mathbb{P}C)$ . Aussi, si le système (4.1) est globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f$  alors pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , tout  $x_0^1$  et  $x_0^2$  dans  $\Lambda_{y_0}$  il existerait un contrôle continu  $u$  tel que  $y_1 = y(t_f; t_0, x_0^1, u)$  et  $y_1 = y(t_f; t_0, x_0^2, u)$ . Il suivrait donc que  $y(t_f; t_0, x_0^1, u) - y(t_f; t_0, x_0^2, u) = 0^q$ , c'est-à-dire  $Ce^{(t_f-t_0)A}(x_0^1 - x_0^2) = 0$ .

On déduit donc qu'une condition nécessaire de contrôlabilité globale de sortie au temps  $t_f$  est

$$e^{(t_f-t_0)A} \ker(\mathbb{P}C) \subset \ker(C). \quad (4.17)$$

Notons aussi que si le système est globalement contrôlable au temps  $t_f$  alors par définition pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle continu  $u$  tel que pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ ,  $Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 + E_{t_f}^s u = y_1$  où  $E_{t_f}^s u = \int_{t_0}^{t_f} Ce^{(t_f-t)A} Bu(t) dt + Du(t_f)$ .

Étant donné que  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ , alors  $\mathbb{P}C x_0 = \mathbb{P}y_0$  et donc sous l'hypothèse (4.17), on a  $Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 = Ce^{(t_f-t_0)A}(\mathbb{P}C)^\dagger y_0$  car  $Ce^{(t_f-t_0)A}(\mathbb{P}C)^\perp = 0$ . Il suit donc que l'application  $E_{t_f}^s$ , définie sur l'espace  $\mathcal{C}([t_0, t_f])^m$ , est surjective.

Réciproquement, si l'application  $E_{t_f}^s$  est surjective alors pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle continu  $u$  tel que  $y_1 - Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 = E_{t_f}^s u$  ceci pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ .

Observons maintenant que pour un autre  $x_0^1 \in \Lambda_{y_0}$ , on a avec le contrôle précédent  $y(t_f; t_0, x_0^1, u) - y_1 = Ce^{(t_f-t_0)A}(x_0 - x_0^1) = 0$  si (4.17) est satisfaite.

On a donc le résultat suivant dont seuls les second et troisième points nécessitent d'être prouvés.

**Théorème 4.2.1.** (4.2.1.a) *Le système (4.1) est globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f$  si et seulement si (4.17) est satisfait et qu'il est contrôlable de l'état vers la sortie (voir Chapitre 3).*

(4.2.1.b) *Le système (4.1) est globalement contrôlable en temps  $t_f$  si et seulement s'il l'est pour tout temps  $t \in \{kt_f - (k-1)t_0, k \in \mathbb{N}^*\}$ .*

(4.2.1.c) *Il est globalement contrôlable en sortie si et seulement s'il existe un temps  $t_f > t_0$  tel qu'il est globalement contrôlable en temps  $t_f$ .*

*Démonstration.*

Pour la condition (4.2.1.b) il suffit de remarquer que pour  $t = kt_f - (k-1)t_0, k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$e^{(t-t_0)A} \ker(\mathbb{P}C) = e^{k(t_f-t_0)A} \ker(\mathbb{P}C) = e^{(k-1)(t_f-t_0)A} e^{(t_f-t_0)A} \ker(\mathbb{P}C).$$

Si (4.17) est satisfait, on a donc  $e^{(t-t_0)A} \ker(\mathbb{P}C) \subset e^{(k-1)(t_f-t_0)A} \ker(C) \subset e^{(k-1)(t_f-t_0)A} \ker(\mathbb{P}C)$  car  $\ker(C) \subset \ker(\mathbb{P}C)$ . Ceci prouve que  $e^{(t-t_0)A} \ker(\mathbb{P}C) \subset \ker(C)$ .

En ce qui concerne (4.2.1.c), il est clair que la contrôlabilité globale en sortie au temps  $t_f$  implique la contrôlabilité globale en sortie. Réciproquement, si le système est globalement contrôlable alors pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un temps  $t_f > t_0$  et un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tels que pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ ,  $y_1 - Ce^{(t_f-t_0)A}x_0 = E_{t_f}^s u$ . Il suit d'une part que pour tout  $x_0^1$  et  $x_0^2$  dans  $\Lambda_{y_0}$ ,  $(x_0^1 - x_0^2) \in \ker(\mathbb{P}C)$  et que  $Ce^{(t_f-t_0)A}(x_0^1 - x_0^2) = 0$  et d'autre part que  $y_1 \in \text{Im}(E_{t_f}^s) + \{Ce^{(t_f-t_0)A}(\mathbb{P}C)^\dagger \mathbb{P}y_0\}$ . Ainsi, il existe un temps  $t_f$  tel que la condition (4.17) soit satisfaite et en particulier tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$  appartient à  $\text{Im}(E_{t_f}^s)$  impliquant donc la contrôlabilité globale de la sortie en temps  $t_f$ .  $\square$

**Remarque 4.2.1.**

Notons que la condition nécessaire (4.17) n'est pas équivalente à

$$A \ker(\mathbb{P}C) \subset \ker(C). \quad (4.18)$$

Pour se convaincre, prenons  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = 0$  (donc  $\mathbb{P} = 1$ ). On a

$$e^{(t_f-t_0)A} = \begin{pmatrix} \cos(t_f - t_0) & -\sin(t_f - t_0) \\ \sin(t_f - t_0) & \cos(t_f - t_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \ker(C) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sur cet exemple, on voit bien que (4.17) est satisfaite pour tout  $t_f \in t_0 + \pi\mathbb{N}$  mais que (4.18) n'est pas satisfaite.

**Remarque 4.2.2.**

Pour la matrice  $\mathbb{P}$  on peut choisir les  $q-d$  lignes linéairement indépendantes de la matrice  $I_q - DD^\dagger$ .

Dans le cas où le système est globalement contrôlable au temps  $t_f$ , le théorème suivant, dont la preuve est similaire à celle du Théorème 3.1.7, permet d'envoyer le système (4.1) de  $y_0$  à  $y_1$  au temps  $t_f$ .

**Théorème 4.2.2.** *Supposons que le système (4.1) soit globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f > t_0$ . Soit  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  et  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  tel qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  satisfaisant  $Cx_0 + Du_0 = y_0$ . Le contrôle*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t H(t_f, \tau)^\top d\tau (\mathcal{G}_{t_f}^s)^{-1} (y_1 - \tilde{y}_0) \quad (4.19)$$

envoie la sortie du système à la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$  en partant de n'importe quel état initial  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  au temps  $t_0$ . Rappelons que  $H(t_f, \cdot)$  et  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  ont été définis dans (3.1.4.e) et  $\tilde{y}_0 := Ce^{(t_f-t_0)A} (\mathbb{P}C)^\dagger \mathbb{P}y_0 + H(t_f, t_0)u_0$ .

De plus, ce contrôle est l'unique solution du problème de minimisation

$$\min \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |\dot{u}(t)|_m^2 dt \\ u \in H^1([t_0, t_f])^m, u(t_0) = u_0, \\ y_1 = Ce^{(t_f-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t_f} Ce^{(t_f-t)A} Bu(t) dt + Du(t_f), \forall x_0 \in \Lambda_{y_0}. \end{cases} \quad (4.20)$$

*Démonstration.*

Supposons que le système (4.1) soit globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f > t_0$ . Soit  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ . On suppose, de plus, par analyse, qu'il existe un contrôle  $u \in H^1([t_0, t_f])^m$  tel que  $u(t_0) = u_0$  satisfaisant  $y_1 = Ce^{(t_f-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t_f} Ce^{(t_f-t)A} Bu(t) dt + Du(t_f)$ , ceci pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ . Le problème (4.20) devient un problème strictement convexe sous contraintes affines non vides et admet donc un unique minimiseur.

Comme pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  il existe  $\zeta \in \mathbb{R}^\kappa$  tel que  $x_0 = (\mathbb{P}C)^\dagger y_0 + (\mathbb{P}C)^\perp \zeta$  où  $\kappa = \dim \ker(\mathbb{P}C)$ , on utilise le fait que par hypothèse de contrôlabilité on a la relation (4.17) satisfaite pour déduire que  $y_1 = Ce^{(t_f-t_0)A} (\mathbb{P}C)^\dagger y_0 + \int_{t_0}^{t_f} Ce^{(t_f-t)A} Bu(t) dt + Du(t_f)$ .

Pour le reste, il suffit d'abord d'utiliser le fait que par hypothèse  $u \in H^1([t_0, t_f])^m$  et  $u(t_0) = u_0$  et donc qu'il existe un contrôle  $v \in L^2([t_0, t_f])^m$  tel que  $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$ , puis de raisonner comme dans la preuve du Théorème 3.1.7, de déterminer le contrôle  $v$  conduisant à l'expression de  $u$  donnée au (4.19) et enfin vérifier par synthèse que ce contrôle satisfait bien les propriétés requises.  $\square$

**Exemple 4.2.1.**

Comme application, considérons de nouveau l'exemple des deux voitures donné dans l'introduction (Figure 1.1). Nous rappelons les équations de ce système avec  $m_1 = m_2 = 1$  et  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En choisissant

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{on a } \ker(\mathbb{P}C) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{et } A \ker(\mathbb{P}C) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sur cet exemple, on a  $\ker(\mathbb{P}C) = \ker(C)$  et  $A \ker(\mathbb{P}C) \subset \ker(C)$ .

Puisque l'on a déjà montré que cet exemple est contrôlable de l'état vers la sortie (conf. Paragraphe 3.1.3), il suit que le système (4.1) avec les matrices précédentes est globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f$  ceci pour tout  $t_f > t_0$ .

Supposons qu'au temps  $t_0 = 0$  nous obtenons d'un radar une valeur de sortie  $y_0 = (1, 0, 1)^\top$  et que nous ayons comme cahier des charges de mettre au temps  $t_f = 1$  une distance de 2 entre les deux voitures, une même vitesse et même accélération, c'est-à-dire  $y_1 = (2, 0, 0)^\top$ .

Au vu de ce qui précède, nous savons qu'il est possible de le faire.

Dans le cas présent,  $\Gamma_{y_0} = \Lambda_{y_0} \times \Gamma_{y_0}^u$  où  $\Lambda_{y_0} = \ker(C) + (1, 0, 0, 0)^\top$  et  $\Gamma_{y_0}^u = \text{Vect}\{(1, 1)^\top\} + (1, 0)^\top$ . Pour appliquer le Théorème 4.2.2, on prend  $u_0 = (1, 0)^\top$  et on obtient comme contrôle  $u = (1 - \alpha v, \alpha v)$  où  $\alpha = 1/(222e - 736\sqrt{e} + 610)$ ,  $v(t) = (90 - 114\sqrt{e} + 36e)t^2 + (209 + 71e - 244\sqrt{e})t + (4\sqrt{e} - 6)(e^{\frac{t}{2}} - 1)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Sur la Figure 4.4, nous traçons les trajectoires de sortie pour trois valeurs de l'état initial. Le premier état initial  $x_0^1$  est choisi de telle sorte que  $Cx_0^1 + Du_0 = y_0$  ce qui fait que le contrôle construit envoie exactement  $y_0$  sur  $y_1$  au temps  $t_f = 1$ . Le second état initial  $x_0^2$  appartient à  $\Lambda_{y_0} \setminus \{x_0^1\}$ . On remarque sur cette figure qu'on obtient  $y_1$  au temps  $t_f = 1$  en partant toujours de la sortie initiale  $y_0$ . Ceci est dû au fait qu'il y a séparation entre les ensembles  $\Lambda_{y_0}$  et  $\Gamma_{y_0}^u$  dans  $\Gamma_{y_0}$ . Sur cet exemple, quelle que soit la donnée initiale  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ , on a  $Cx_0 + Du_0 = y_0$  et donc en choisissant n'importe quelle valeur initiale en état dans  $\Lambda_{y_0}$ , on va exactement envoyer  $y_0$  sur  $y_1$  au temps  $t_f = 1$ . S'il existait un  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  tel que  $Cx_0 + Du_0 \neq y_0$ , on aurait envoyé la trajectoire de sortie à la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$  cette fois-ci en partant du point  $Cx_0 + Du_0 \neq y_0$ . Enfin, la troisième donnée initiale en état  $x_0^3 \notin \Lambda_{y_0}$  est une perturbation de  $x_0^1$  avec le vecteur  $(0.2, 0, 0, 0.2)^\top$  et on voit que cela engendre un petit décalage sur la valeur finale de la sortie.

Avant de terminer cette section, faisons la Remarque 4.2.3 qui indique entre autre que la contrôlabilité globale en sortie en tout temps implique qu'il est possible d'imposer la dynamique de la sortie par un retour statique de sortie et en particulier qu'il est possible de stabiliser la dynamique de la sortie grâce à un retour statique de sortie.

Avant de terminer ce paragraphe, faisons la remarque suivante reliant la notion de contrôlabilité globale à celle de la stabilisation de la sortie par retour de sortie. Nous insistons ici qu'il s'agit de la

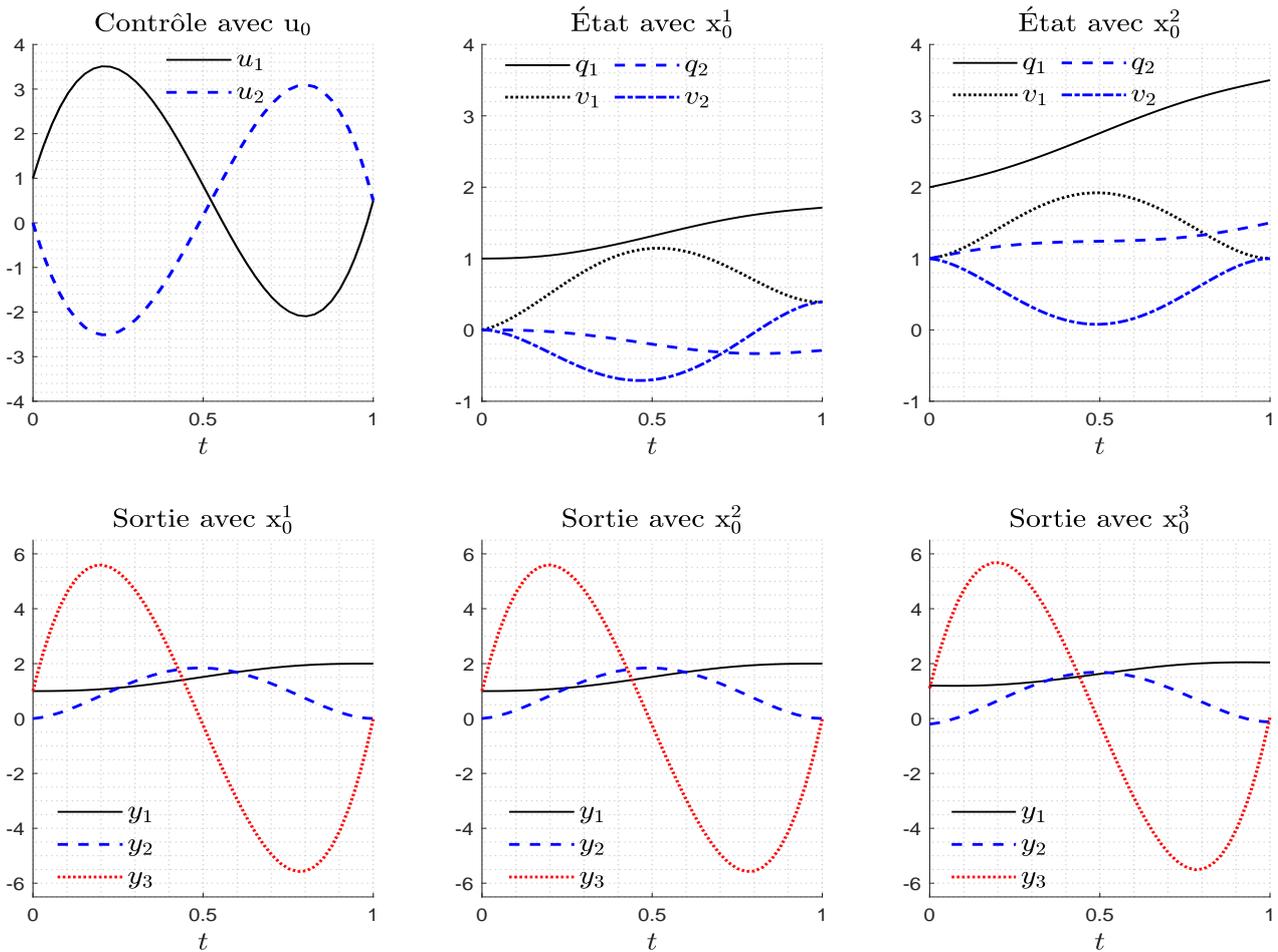


FIGURE 4.4 – Sur cette figure, nous avons tracé sur la première fenêtre le contrôle transférant  $y_0 = (1, 0, 1)^\top$  sur  $y_1 = (2, 0, 0)$  au sens de la contrôlabilité globale en temps  $t_f = 1$  avec  $u_0 = (1, 0)^\top$ . Nous avons choisi  $x_0^1 = (1, 0, 0, 0)^\top$ ,  $x_0^2 = (2, 1, 1, 1)^\top$  et  $x_0^3 = x_0^1 + (.2, 0, 0, .2)^\top$ .

stabilisation de la sortie par un retour de sortie et non la stabilisation de l'état par un retour de sortie. Il peut être cependant intéressant de regarder les liens qui existent entre la contrôlabilité globale de la sortie et la stabilisation de l'état par un retour de sortie, ce qui n'a pas été fait dans cette thèse. Quant-à ce qui concerne la stabilisation de l'état du système par un retour de sortie, il s'agit d'un problème qui est, en toute généralité, ouvert. Le lecteur intéressé par ce sujet peut consulter, par exemple, [4, 14, 17, 46, 57, 74], références qui offrent un point de vue un peu global sur les avancées en la matière.

**Remarque 4.2.3.**

On se place dans le cas où  $D = 0_m^q$  et on fixe sans perte de généralité  $t_0 = 0$ .

Supposons que le système (4.1) soit globalement contrôlable en sortie en tout temps  $t_f > 0$ . La dérivée temporelle de la sortie vaut  $\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t)$ . En décomposant  $x = C^\dagger Cx + Lx$  où  $L$  est le projecteur orthogonal dans le noyau de  $C$ , on a  $\dot{y}(t) = CAC^\dagger y(t) + CBu(t)$  puisque  $CAL = 0$  grâce à la relation (4.18). Le système  $(CAC^\dagger, CB)$  est contrôlable en état. Il est donc possible de choisir un gain  $F \in \mathbb{R}_q^m$  pour imposer arbitrairement le spectre de  $(CAC^\dagger + CBF) \in \mathbb{R}_q^q$ .

**Remarque 4.2.4.**

En revanche, notons que la contrôlabilité globale en sortie est indépendante de la stabilisation d'état par un retour de sortie, notion étudiée par exemple dans [4, 14, 17, 46, 57, 74]. Effectivement reprenons l'exemple des deux voitures, c'est-à-dire l'Exemple 4.2.1 avec  $D = 0_2^3$ . Soit le vecteur  $v = (1, 0, 1, 0)^\top$ . Comme  $Av = 0^4$  et  $Cv = 0^4$ , nous avons  $(A + BFC)v = 0^4$  quelque soit  $F \in \mathbb{R}_3^2$ . Ainsi 0 est toujours valeur propre de  $(A + BFC)$  pour tout gain de retour de sortie  $F$ . On conclut que l'Exemple 4.2.1 est globalement contrôlable en sortie mais n'est pas stabilisable en état par retour de sortie. Inversement, le système défini par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = 0_2^2$ . Ce système est stabilisable en état par retour de sortie :  $A + B * (-2) * C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  mais n'est pas contrôlable de l'état vers la sortie  $[CB, CAB]$  de rang 1 et donc pas contrôlable globalement en sortie.

### 4.2.2 Cas des systèmes LTI à temps discret

Dans cette section, nous analysons la contrôlabilité globale des systèmes LTI à temps discret représentés par le système (3.16). Nous adoptons la définition suivante.

- Définition 4.2.2.** — *Le système (3.16) sera dit globalement contrôlable en sortie en  $N$  itération(s), si pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  pris au temps  $k_0$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe des entrées  $u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}$  dans  $\mathbb{R}^m$  telles que la trajectoire de sortie satisfasse  $y_{k_0+N} = y_1$  ceci pour toute donnée initiale en état  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  prise au temps  $k_0$ .*
- *Il sera dit globalement contrôlable en sortie (GCS), si pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  pris au temps  $k_0$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  et des entrées  $u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}$  dans  $\mathbb{R}^m$  tels que et la trajectoire de sortie satisfasse  $y_{k_0+N} = y_1$  ceci pour toute donnée initiale en état  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  prise au temps  $k_0$ .*

La version discrète du Théorème 4.2.1 est la suivante.

**Théorème 4.2.3.** (4.2.3.a) *Le système (3.16) est GCS en  $N$  itération(s) si et seulement s'il est contrôlable de l'état vers la sortie en  $N$  itération(s) (cf. Théorème 3.2.1) et*

$$A^N \ker(\mathbb{P}C) \subset \ker(C). \quad (4.21)$$

(4.2.3.b) *Si le système (3.16) est GCS en  $N$  itération(s) alors il l'est en  $kN$  itération(s) ceci pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .*

(4.2.3.c) *Il est globalement contrôlable en sortie si et seulement s'il existe un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que (4.21) soit satisfait et que ce système soit contrôlable de l'état vers la sortie (CES).*

*Démonstration.*

• *Preuve de (4.2.3.a).*

Si le système (3.16) est GCS en  $N$  itération(s), il suit de la définition que pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe  $u = (u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N})$  dans  $(\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tel que pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ ,  $y_1 - CA^N x_0 = E_N^s u$  avec  $E_N^s u = \sum_{\ell=0}^{N-1} CA^{N-1-\ell} B u_{k_0+\ell} + D u_{k_0+N}$ . Ainsi, pour tout  $x_0^1$  et  $x_0^2$  pris dans  $\Lambda_{y_0}$ , on a  $(x_0^1 - x_0^2) \in \ker(\mathbb{P}C)$ ,  $CA^N(x_0^1 - x_0^2) = 0$  et que  $y_1 \in \text{Im}(CA^{N-1}B | CA^{N-2}B | \dots | CB | D)$ . On

déduit que (4.21) est satisfait et que l'application  $E_N^s$  est surjective et donc que le système est CES en  $N$  itérations.

Réciproquement si l'application  $E_N^s$  est surjective alors pour tout couple  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  et tout  $x_0^1 \in \Lambda_{y_0}$ , il existe un contrôle  $u \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tel que  $CA^N x_0^1 + E_N^s u = y_1$ . Pour  $x_0^2 \in \Lambda_{y_0}$ , la solution du système discret avec le contrôle  $u$  en  $N$  itérations satisfait  $CA^N x_0^2 + E_N^s u = y_{k_0+N}$ . On a donc  $CA^N(x_0^2 - x_0^1) = y_{k_0+N} - y_1$ . Mais comme  $x_0^1$  et  $x_0^2$  sont des éléments de  $\Lambda_{y_0}$ , on a  $x_0^2 - x_0^1 \in \ker(\mathbb{P}C)$ . Ainsi, si la relation (4.21) est satisfaite, on a  $CA^N(x_0^2 - x_0^1) = 0^q$  et donc  $y_{k_0+N} = y_1$ .

• *Preuve de (4.2.3.b).*

On remarque d'une part que  $A^{kN} \ker(\mathbb{P}C) = A^{(k-1)N} A^N \ker(\mathbb{P}C)$  et que si la relation (4.21) est satisfaite, en utilisant le fait que  $\ker(C) \subset \ker(\mathbb{P}C)$ , on obtient  $A^{kN} \ker(\mathbb{P}C) \subset \ker(C)$ .

D'autre part, on a  $\text{Im}(CA^{N-1}B | \dots | CB | D) \subset \text{Im}(CA^{kN-1}B | \dots | CB | D), \forall k \in \mathbb{N}^*$ .

• *Preuve de (4.2.3.c).*

Remarquons que si le système est GCS alors pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  et un contrôle  $u = (u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N})$  dans  $(\mathbb{R}^m)^{N+1}$  tels que pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ ,  $y_1 - CA^N x_0 = E_N^s u$ . Il suit immédiatement que pour tout  $x_0^1$  et  $x_0^2$  pris dans  $\Lambda_{y_0}$ ,  $(x_0^1 - x_0^2) \in \ker(\mathbb{P}C)$ ,  $CA^N(x_0^1 - x_0^2) = 0$  et que  $y_1 \in \text{Im}(CA^{N-1}B | CA^{N-2}B | \dots | CB | D) + \{CA^N x_0\}$ . On déduit en particulier que pour tout  $(0^q, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que (4.21) soit satisfaite et que  $y_1 \in \text{Im}(CA^{N-1}B | CA^{N-2}B | \dots | CB | D)$ .

Réciproquement, si le système n'est pas GCS alors il existe  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $u \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$ , il existe  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  tel que  $y_{k_0+N} \neq y_1$ . Ce qui implique qu'il existe  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  et  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  tel que  $y_1 \notin \text{Im}(CA^{N-1}B | \dots | CB | D) + \{CA^N x_0\}$ . On déduit donc que  $\text{Im}(CA^{N-1}B | CA^{N-2}B | \dots | CB | D) \neq \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Le théorème suivant permet, dans le cas de la contrôlabilité globale en sortie du système (3.16) en  $N$  itération(s), de construire, pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , un contrôle permettant d'avoir, au sens de la Définition 4.2.2, une valeur de sortie  $y_1$  en  $N$  itération(s).

**Théorème 4.2.4.** *Supposons que le système (3.16) soit globalement contrôlable en sortie en  $N$  itérations. Soit  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ .*

*Le contrôle  $(u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N}) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$  donné par*

$$(u_{k_0}^\top, u_{k_0+1}^\top, \dots, u_{k_0+N}^\top)^\top = \mathbb{K}_N^\top (\mathbb{K}_N \mathbb{K}_N^\top)^{-1} (y_1 - CA^N (\mathbb{P}C)^\dagger \mathbb{P} y_0), \quad (4.22)$$

*avec  $\mathbb{K}_N = (CA^{N-1}B | \dots | CAB | CB | D)$  permet d'avoir la valeur de sortie  $y_1 \in \mathbb{R}^q$  en  $N$  itération(s) ceci en partant de n'importe quelle donnée initiale  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ .*

*De plus, ce contrôle est l'unique minimiseur du problème de minimisation*

$$\begin{cases} \min & \frac{1}{2} |u|_{(N+1)m}^2 \\ & u := (u_0^\top, u_1^\top, \dots, u_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{(N+1)m}, \\ & CA^N x_0 + \mathbb{K}_N u = y_1, \forall x_0 \in \Lambda_{y_0}. \end{cases} \quad (4.23)$$

*Démonstration.*

Commençons par montrer que le contrôle construit conduit à  $y_1$  en  $N$  itération(s) ceci à partir de n'importe quelle  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  pris au temps initial  $k_0$ . On rappelle que la trajectoire de sortie

après  $N$  itération(s) à partir de  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$  au temps  $k_0$  est donnée par  $y_{k_0+N} = CA^N x_0 + \mathbb{K}_N u$  où  $u = (u_{k_0}, u_{k_0+1}, \dots, u_{k_0+N})$ .

Comme  $x_0 \in \Lambda_{y_0}$ , il existe  $\zeta \in \mathbb{R}^\kappa$  où  $\kappa = \dim \ker(\mathbb{P}C)$  tel que  $x_0 = (\mathbb{P}C)^\dagger \mathbb{P}y_0 + (\mathbb{P}C)^\perp \zeta$ . En utilisant le fait que  $CA^N (\mathbb{P}C)^\perp = 0$ , on déduit donc que  $y_{k_0+N} = CA^N (\mathbb{P}C)^\dagger \mathbb{P}y_0 + \mathbb{K}_N u = CA^N (\mathbb{P}C)^\dagger \mathbb{P}y_0 + \mathbb{K}_N u$ .

En remplaçant dans la précédente expression de  $y_{k_0+N}$  le contrôle  $u$  par l'expression donnée dans l'équation (4.22), on obtient  $y_{k_0+N} = y_1$ . Fort de tout ce qui précède, on peut montrer que ce contrôle est l'unique solution du problème (4.23) en utilisant par exemple la méthode Lagrangienne.  $\square$

### 4.2.3 Cas des systèmes LTV à temps continu

Dans cette section, nous considérons le système LTV à temps continu défini par (3.20).

Posons  $\Lambda_{y_0}^{t_0} := \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u_0 \in \mathbb{R}^m \text{ satisfaisant } (x_0^\top, u_0^\top)^\top \in \Gamma_{y_0}^{t_0}\}$  où  $\Gamma_{y_0}^{t_0}$  est défini par (4.13) et considérons ici la définition suivante.

**Définition 4.2.3.** *Le système (3.20) sera dit globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f > t_0$  si pour toute sortie initiale  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  prise au temps  $t_0$  et tout  $y_1 \in \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tel que  $y(t_f; t_0, x_0, u) = y_1$  ceci pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}^{t_0}$ .*

De la définition précédente, il est clair qu'une condition nécessaire de contrôlabilité en sortie est que  $\Lambda_{y_0}^{t_0}$  soit non vide pour tout  $y_0 \in \mathbb{R}^q$  et donc que le critère (4.14) reste nécessaire. Nous le supposons satisfait par la suite.

Rappelons que pour toute donnée initiale en état  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et toute entrée continue  $u$ , la solution du système (3.20) au temps  $t_f > t_0$  est donnée par

$$y(t_f; t_0, x_0, u) = C(t_f)R(t_f, t_0)x_0 + E_{t_f}^s u \text{ où } E_{t_f}^s u = \int_{t_0}^{t_f} C(t_f)R(t_f, t)B(t)u(t) dt + D(t_f)u(t_f).$$

Ainsi, si le système est GCS au temps  $t_f$ , alors pour tout couple  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  il existe un contrôle  $u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tel que  $y_1 = C(t_f)R(t_f, t_0)x_0 + E_{t_f}^s u$  ceci pour tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}^{t_0}$ .

Désignons par  $d_0 = \dim \text{Im}(D(t_0))$  et soit  $\mathbb{P}_0 \in \mathbb{R}^{q-d_0}$  une matrice de rang maximal telle que  $\ker(\mathbb{P}_0) = \text{Im}(D(t_0))$ . En raisonnant comme dans le cas des systèmes LTI à temps continu, on déduit que dans le cadre présent, la condition nécessaire (4.17) devient

$$R(t_f, t_0) \ker(\mathbb{P}_0 C(t_0)) \subset \ker(C(t_f)). \quad (4.24)$$

En observant que tout  $x_0 \in \Lambda_{y_0}^{t_0}$ , s'il existe, peut se mettre sous la forme  $x_0 = (\mathbb{P}_0 C(t_0))^\dagger \mathbb{P}_0 y_1 + (\mathbb{P}_0 C(t_0))^\perp \zeta$  où  $\zeta \in \mathbb{R}^\kappa$  avec  $\kappa = \dim \ker(\mathbb{P}_0 C(t_0))$ , on déduit de (4.24) que si le système est GCS au temps  $t_f$ , alors pour tout  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ , il existe un contrôle  $\mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tel que  $y_1 = C(t_f)R(t_f, t_0)(\mathbb{P}_0 C(t_0))^\dagger \mathbb{P}_0 y_1 + E_{t_f}^s u$ . Ce qui implique la surjectivité de l'application  $E_{t_f}^s$  et donc la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système (3.20) d'après le Théorème 3.3.2.

Réciproquement, si la condition (4.24) est satisfaite et que l'application  $E_{t_f}^s$  est surjective, alors le système (3.20) est GCS au temps  $t_f$ .

En effet, prenons  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ .

Puisque nous avons supposé la condition (4.14) satisfaite, l'ensemble  $\Lambda_{y_0}^{t_0}$  est non vide.

Comme l'application  $E_{t_f}^s$  est supposée surjective, alors pour tout  $x_0^1 \in \Lambda_{y_0}^{t_0}$ , il existe un contrôle

$u \in \mathcal{C}([t_0, t_f])^m$  tel que  $y_1 = C(t_f)R(t_f, t_0)x_0^1 + E_{t_f}^s u$ . On remarque ensuite qu'en utilisant le même contrôle et en partant d'une condition initiale  $x_0^2 \in \Lambda_{y_0}^{t_0}$ , on a

$$y_1 - y(t_f; t_0, x_0, u) = C(t_f)R(t_f, t_0)(x_0^1 - x_0^2).$$

Comme  $x_0^1$  et  $x_0^2$  sont des éléments de  $\Lambda_{y_0}^{t_0}$ , il suit que  $(x_0^1 - x_0^2) \in \ker(\mathbb{P}_0 C(t_0))$  et de la relation (4.24), on déduit que  $y_1 = y(t_f; t_0, x_0, u)$ .

Ceci montre que le contrôle  $u$  envoie bien tous les éléments de  $\Lambda_{y_0}^{t_0}$  sur  $y_1$ . Ce qui implique la contrôlabilité globale de la sortie au temps  $t_f$  du système.

On a donc le théorème suivant.

**Théorème 4.2.5.** *Le système (3.20) est globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f > t_0$  si et seulement s'il est contrôlable de l'état vers la sortie au temps  $t_f > t_0$  et que les conditions (4.14) et (4.24) sont satisfaites.*

Pour les critères de contrôlabilité de l'état vers la sortie en temps fini du système (3.20), nous nous référons au paragraphe 3.3.2 du Chapitre 3.

Dans le cas où le système (3.20) est globalement contrôlable au temps  $t_f$ , le théorème suivant, dont une preuve peut être déduite du Théorème 4.19, permet d'envoyer le système (3.20) de  $y_0$  à  $y_1$  au temps  $t_f$ .

**Théorème 4.2.6.** *Supposons que le système (3.20) soit globalement contrôlable en sortie au temps  $t_f > t_0$ . Soit  $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$  et  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  tel qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  satisfaisant  $C(t_0)x_0 + D(t_0)u_0 = y_0$ . Le contrôle*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t H(t_f, \tau)^\top d\tau (\mathcal{G}_{t_f}^s)^{-1} (y_1 - \tilde{y}_0) \quad (4.25)$$

*envoie la sortie du système à la valeur  $y_1$  au temps  $t_f$  en partant de n'importe quel état initial  $x_0 \in \Lambda_{y_0}^{t_0}$  au temps  $t_0$ . Rappelons que  $H(t_f, \cdot)$  et  $\mathcal{G}_{t_f}^s$  ont été définis dans le Théorème 3.3.2 et  $\tilde{y}_0 := C(t_f)R(t_f, t_0) (\mathbb{P}_0 C(t_0))^\dagger \mathbb{P}_0 y_0 + H(t_f, t_0)u_0$ .*

*De plus, ce contrôle est l'unique solution du problème de minimisation*

$$\min \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} |\dot{u}(t)|_m^2 dt \\ u \in H^1([t_0, t_f])^m, u(t_0) = u_0, \\ y_1 = C(t_f)R(t_f, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} C(t_f)R(t_f, t)B(t)u(t) dt + D(t_f)u(t_f), \forall x_0 \in \Lambda_{y_0}^{t_0}. \end{cases}$$

Pour clôturer ce chapitre, nous résumons dans le tableau ci-dessous les liens entre les différentes notions de contrôlabilité de sortie discutées jusqu'à présent à savoir la contrôlabilité de l'état vers la sortie (CES), la contrôlabilité simple de sortie (CSS) et la contrôlabilité globale de la sortie (GCS). Dans ce tableau, Iter := Itération(s).

Système	Temps continu	Temps discret
LTI	$GCS \text{ au temps } t_f \Rightarrow CES \text{ au temps } t_f$ $CES \text{ au temps } t_f \Rightarrow CSS \text{ au temps } t_f$  $GCS \Rightarrow CES \Rightarrow CSS$	$GCS \text{ en } N \text{ Iter} \Rightarrow CES \text{ en } N \text{ Iter},$ $CES \text{ en } N \text{ Iter} \not\Rightarrow CSS \text{ en } N \text{ Iter},$ (voir Remarque 4.1.6).  $CGS \Rightarrow CES \Rightarrow CSS$
LTV	$GCS \text{ au temps } t_f \Rightarrow CES \text{ au temps } t_f$  $CES \text{ au temps } t_f$ + (4.14) $\Rightarrow CSS \text{ au temps } t_f$	Thème non abordé.

### 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit deux notions de contrôlabilité de sortie qui sont les contrôlabilités simple et globale de la sortie. Le but est de savoir s'il est possible d'obtenir, à partir d'une donnée initiale de sortie recueillie au temps  $t_0$ , une valeur de sortie désirée en un temps ultérieur à  $t_0$ . Nous avons établi des critères de contrôlabilité et donné, dans la mesure du possible, des expressions de contrôles permettant d'obtenir la valeur de sortie désirée.

En général, la dynamique d'un système physique dépend d'un ou de plusieurs paramètres inhérents à ce dernier et qui ne sont pas connus avec précision. Dans le cadre des deux voitures, on peut par exemple penser à leur masse.

De ce fait, pour envoyer le système d'un point à un autre, au lieu de calculer, pour chaque valeur fixe de ces paramètres, une commande (dépendant donc des paramètres fixés) pour envoyer le système de la sortie originale à la sortie finale, il est raisonnable de se poser la question s'il est possible de construire un contrôle qui puisse transférer le système indépendamment des valeurs de ces paramètres.

Dans le chapitre suivant, nous étudierons la contrôlabilité de sortie des systèmes linéaires dont la dynamique dépend d'un paramètre.



# Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Préliminaires et quelques propriétés de systèmes UECS</b>	<b>83</b>
5.1.1	Préliminaires	83
5.1.2	Quelques propriétés des systèmes UECS	87
<b>5.2</b>	<b>Contribution à l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état</b>	<b>90</b>
<b>5.3</b>	<b>Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie</b>	<b>103</b>
5.3.1	Résultat de non contrôlabilité pour les systèmes holomorphes	104
5.3.2	Résultats sur des structures particulières	104
<b>5.4</b>	<b>Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie pour les systèmes en parallèle et en cascade</b>	<b>115</b>
5.4.1	Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de systèmes en parallèle	115
5.4.2	Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de systèmes en cascade	126
<b>5.5</b>	<b>Application à la contrôlabilité en moyenne.</b>	<b>127</b>
<b>5.6</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>130</b>
<b>5.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>133</b>

Dans les Chapitres 3 et 4, nous avons étudié la contrôlabilité de la sortie des systèmes linéaires dont la dynamique est complètement connue, dans le sens où les matrices qui régissent cette dynamique sont déterminées. Mais en pratique, la modélisation de systèmes physiques peut faire intervenir dans la dynamique de ces derniers la présence d'un ou de plusieurs paramètres inconnus. À titre d'illustration, on peut revenir au cas des deux voitures données dans l'introduction et se dire que leur masse n'est pas connue avec précision et que ces masses appartiennent à un ensemble donné.

Sur l'exemple des voitures, les connaissances acquises jusque là nous permettent, dans la mesure du possible, de construire, pour un couple de masse  $(m_1, m_2)$  fixé, une loi de commande permettant d'avoir une valeur de sortie désirée en un temps fini. Étant donné que le contrôle construit dépend du couple de masse choisi, si l'on conçoit une loi de commande pour un couple de masse et que l'on implémente cette commande sur le système avec un autre couple de masse, il est fortement probable que l'on ne puisse obtenir la valeur de sortie escomptée. Ainsi, pour être sûr d'avoir la valeur de sortie désirée, il faut construire, pour chaque couple de masse, le contrôle correspondant.

Avec cette stratégie qui devient très coûteuse, car à chaque couple de masse il faut construire une commande adéquate, il est légitime de se questionner sur la possibilité de construire un contrôle

qui reste robuste au changement de masses, c'est-à-dire un contrôle qui nous permet d'avoir, dans un sens à éclaircir, la valeur de sortie désirée indépendamment des masses que l'on se donne.

En dehors de cet exemple de voitures, on peut facilement imaginer des exemples de la vie pratique dans lesquels une telle question fait sens. Le concept d' "Ensemble Contrôlabilité" a été introduit pour répondre à ce type de question.

Pour ce concept, il s'agira de se questionner sur la possibilité, pour un système dont la dynamique dépend d'un paramètre, de contrôler l'état de ce système avec des contrôles indépendants du paramètre.

C'est une thématique en pleine exploration ces dernières années grâce de la diversité de ses champs d'applications. Elle est, par exemple, utilisée en contrôle quantique où l'objectif est, pour un système dont la fréquence de résonance n'est pas connue avec précision, de développer des excitations externes permettant d'envoyer un ensemble d'états initiaux du système vers un ensemble d'états finaux [61, 72]. Une autre application concerne la médecine où l'ensemble contrôlabilité est utilisé pour élaborer des stimuli externes adéquats pour désynchroniser une population de neurones dans le traitement de troubles neurologiques [92, 97]. Pour plus de motivations, le lecteur pourra consulter aussi [3, 25, 43, 61, 66].

Dans ce manuscrit, nous considérons, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , le système

$$\dot{x}(t, \theta) = A(\theta)x(t, \theta) + B(\theta)u(t), \quad (5.1a)$$

$$y(t, \theta) = C(\theta)x(t, \theta) + D(\theta)u(t). \quad (5.1b)$$

Dans (5.1), l'ensemble  $\mathcal{P}$  désigne l'espace des paramètres. Nous supposons que  $\mathcal{P}$  est un compact de  $\mathbb{C}$ ,  $A \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_n^n$ ,  $B \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_m^n$ ,  $C \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_n^q$  et  $D \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_m^q$  où  $\mathbb{X}(\mathcal{P}) := \mathcal{C}(\mathcal{P}, \mathbb{C})$  désigne l'espace de fonctions continues définies sur  $\mathcal{P}$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ . Étant donné  $x_0 : \theta \mapsto x_0(\theta)$  une donnée initiale en état et  $u$  un contrôle, la solution associée à la variable de sortie lorsqu'elle existe sera notée  $y(t, \cdot; x_0, u)$ .

La notion d'Ensemble contrôlabilité regardée dans ce manuscrit est celle de l'Ensemble contrôlabilité de la sortie dont nous formulons de la façon suivante.

**Définition 5.1.1.** — *Le système (5.1) sera dit simultanément ensemble contrôlable en sortie (SECS) si pour toute donnée initiale en état  $x_0 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  et toute sortie finale  $y_1 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ , il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{C}^m)$  indépendant du paramètre  $\theta$ , tels que la solution du système (5.1) avec  $x_0$  comme donnée initiale et  $u$  comme contrôle satisfasse  $y(T, \theta; x_0, u) = y_1(\theta)$ ,  $\forall \theta \in \mathcal{P}$ .*

— *Il sera dit uniformément ensemble contrôlable en sortie (UECS) si pour toute donnée initiale en état  $x_0 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ , toute sortie finale  $y_1 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{C}^m)$  indépendant du paramètre  $\theta$ , tels que la solution du système (5.1) avec  $x_0$  comme donnée initiale et  $u$  comme contrôle satisfasse*

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} |y(T, \theta; x_0, u) - y_1(\theta)| \leq \varepsilon.$$

Notons que, pour toute donnée initiale  $x_0 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  et tout contrôle  $u \in \mathcal{C}([0, T]; \mathbb{C}^m)$ , la trajectoire de sortie est continue par rapport au temps et au paramètre  $\theta$ , ce qui donne un sens à la définition précédente.

### Un peu de bibliographie.

Un cas particulier du système (5.1) est celui pour lequel la sortie est identique à l'état. Le concept

---

d'*Ensemble contrôlabilité de la sortie*, qui est un concept nouveau que nous avons proposé est une généralisation du concept d'*Ensemble contrôlabilité* (de l'état) défini pour la première fois dans [60].

Du concept générique d'ensemble contrôlabilité, plusieurs autres notions comme l'*Uniforme ensemble contrôlabilité* [43, 59, 61], l'*Uniforme ensemble atteignabilité* et l'*Uniforme ensemble  $L^p$ -contrôlabilité* [34] ont émergé. Dans cette liste de références non exhaustive mais récente, des avancées ont été faites pour répondre à la question d'ensemble contrôlabilité. Dans les références précitées, des conditions nécessaires et/ou suffisantes dans certains cas ont été établies.

Dans le cas où l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  est de cardinal infini, il est connu, voir par exemple [34, 64], que le système (5.1) ne peut pas être simultanément ensemble contrôlable en état. Ceci est une conséquence directe du Théorème 3.3.1 de l'article de R. Triggiani [88].

En 2021, G. Dirr et M. Schönlein donnent dans [34] des critères d'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état parmi lesquels figure la nécessité que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$  dans le cas  $m = 1$ ,  $m$  étant le nombre d'entrées du système.

Cet article induit donc une question ouverte sur l'ensemble contrôlabilité de la paire  $(A, B)$  dans le cas où  $m > 1$ , celle de savoir s'il est possible d'avoir l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état si l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  est un compact d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$ .

Une réponse partielle fut apportée par X. Chen dans [25] où il prouve que si les matrices  $A$  et  $B$  sont réelles analytiques, il est impossible d'avoir  $L^p$ -ensemble contrôlabilité pour tout  $p \geq 2$  si  $\mathcal{P}$  contient un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  pour tout  $d \geq 2$  ceci quelque soit le nombre d'entrées dans le système.

*Cette question reste à notre connaissance, dans le cas où la paire  $(A, B)$  n'est pas réelle analytique et le nombre d'entrées strictement supérieur à 1, ouverte et nous apportons quelques contributions sur ce sujet.*

Dans les références mentionnées ci-dessus, les auteurs étudient principalement la question d'existence de contrôle. Il y a également dans la littérature des résultats montrant comment construire ces contrôles numériquement. L'on peut consulter par exemple [53, 78] où, sous hypothèse d'uniforme ensemble contrôlabilité de  $(A, B)$ , les auteurs présentent des méthodes numériques pour calculer ces contrôles. Aussi, dans [77] l'auteur étudie l'effet de contrôles par retour d'état sur la classe des systèmes uniformément ensemble contrôlables.

Dans le cadre de systèmes linéaires à temps variant, c'est-à-dire dans le cas où les matrices du système dépendent du temps et du paramètre, nous nous référons, en plus des références précédentes de ce chapitre, à [58, 95]. Dans le cas non linéaire, on peut citer [3, 6, 10, 26, 60, 72, 76].

### **Plan du chapitre.**

Dans la Section 5.1, nous discutons le cas où  $\mathcal{P}$  est de cardinal fini et montrons que dans le cas où  $\mathcal{P}$  est un continuum, il est impossible d'avoir l'uniforme ensemble contrôlabilité simultanée de la sortie en temps fini. Ensuite, nous donnons quelques propriétés sur les systèmes uniformément ensemble contrôlable en sortie. Nous présentons les liens qui existent entre l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie et celle de l'état. Enfin, nous donnons le Lemme 5.1.5 dans lequel nous montrons comment les systèmes uniformément ensemble contrôlables en sortie réagissent lorsqu'on restreint l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$ . Ce lemme sera très utile dans la suite.

Dans la Section 5.2 nous donnons des obstructions à l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état.

Plus précisément, nous montrons que si le spectre de  $A(\theta)$  intersecte  $\mathbb{R}$  ceci pour tout  $\theta$  dans  $\mathcal{P}$ , il est impossible d'avoir l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état si l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  contient un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  pour tout  $d \geq 2$  ceci quelque soit le nombre d'entrées du système. Nous montrons que si la paire  $(A, B)$  est suffisamment régulière, ce résultat de non contrôlabilité reste vrai.

À la Section 5.3, nous donnons des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie du système (5.1).

La Section 5.5 est dédiée à l'application de l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie à la notion de contrôlabilité en moyenne introduite par E. Zuazua dans [99].

La Section 5.6 fait l'objet de quelques simulations numériques.

Nous terminons le chapitre avec une conclusion à la Section 5.7.

**Les résultats de ce chapitre sont en cours de rédaction pour publication.**

### Notations et terminologies.

Un ensemble  $X$  est dit *contractile* si l'application identité de cet ensemble est homotope à une application constante, c'est-à-dire, s'il existe une application continue  $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$  tel que  $H(0, x) = x$  et  $H(1, x) = c$  pour une constante  $c \in X$ . Pour plus d'informations sur la notion de contractilité, le lecteur pourra consulter, par exemple, [83, Chapter 1] ou [20].

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble d'un ensemble  $X$ . On dira que  $\Omega$  vérifie la condition de *non séparation* si  $X \setminus \Omega$  est connexe. La notation  $\bar{\Omega}$  sera utilisée pour désigner l'adhérence de  $\Omega$  dans  $X$ .

Pour un polynôme  $p$  d'une variable, la notation  $d^\circ(p)$  (resp.  $p'$ ) sera utilisée pour désigner le degré (resp. la dérivée) de ce polynôme.

### Quelques résultats classiques.

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats classiques utilisés dans ce chapitre.

Notons  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et désignons par  $U(k, \mathcal{Y})$ , pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble des matrices  $k \times k$  inversibles à coefficients dans  $\mathcal{Y}$ .

**Théorème 5.1.1** ([40, Theorem 3.8], [80]). *Soit  $\mathcal{X}$  un espace topologique para-compact, contractile et séparé. Soit  $M : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_\ell^k$  une application continue telle que  $\text{rk}(M(z)) = r_0$ , ceci pour tout  $z \in \mathcal{X}$  où  $r_0 \in \{0, \dots, \min\{k, \ell\}\}$ .*

(5.1.1.a) *Il existe une application continue  $M_0 : \mathcal{X} \rightarrow U(k, \mathcal{Y})$  et une application continue  $N_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{r_0}^k$  telles que pour tout  $z \in \mathcal{X}$ ,*

$$M(z)M_0(z) = [N_0(z) \mid 0_{\ell-r_0}^k]. \quad (5.2)$$

(5.1.1.b) *Si  $\mathcal{X}$  possède une structure de variété réelle différentiable de classe  $\mathcal{C}^\ell$ , de dimension finie, et  $M \in \mathcal{C}^\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , alors il existe des applications  $M_0 : \mathcal{X} \rightarrow U(k, \mathcal{Y})$ ,  $N_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}_{r_0}^k$  de classe  $\mathcal{C}^\ell$  telles que (5.2) soit satisfaite.*

Soulignons que l'hypothèse de contractilité est très importante dans le théorème précédent. En effet, si on considère par exemple  $\mathcal{X} = \mathcal{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{k=1}^3 x_k^2 = 1\}$  et  $M(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$  la normale unitaire à  $\mathcal{X}$ , on a  $\text{rk}(M(x)) = 1$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . En revanche, il n'existe pas d'application continue  $M_0$  telle que  $M_0(x)$  soit inversible pour tout  $x \in \mathcal{X}$  et satisfaisant  $M(x)M_0(x) = (b(x), 0_2^1)$  où  $b(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ . Si une telle application

continue existe, la deuxième et troisième colonne de  $M_0$  sont des champs de vecteurs ne s'annulant nul part sur  $\mathcal{X}$ . Il est bien connu que sur  $\mathcal{X} = \mathcal{S}^2$ , qui est d'ailleurs compact et simplement connexe, tout champ de vecteur continu s'annule quelque part (cf. [45, Corollary 2.4, p.134]).

**Théorème 5.1.2** ([75, Theorem 20.5]). *Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}$  dont le complémentaire est connexe et  $f$  une fonction continue sur  $K$  à valeur complexe et holomorphe à l'intérieur de  $K$ .*

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme complexe  $p$  tel que  $|f(z) - p(z)| < \varepsilon$  pour tout  $z \in K$ .*

Le Théorème 5.1.2 est connu sous le nom du théorème de Mergelyan. La conclusion de ce théorème reste vraie si  $K$  est d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire, que si  $K$  est d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ , toute fonction continue sur  $K$  peut être approchée par un polynôme. Voir par exemple la discussion suivant ce théorème dans [75].

Enfin, donnons le résultat suivant dû à Rouché.

**Théorème 5.1.3** ([37, Rouché's Theorem, p.229]). *Soit  $D$  un domaine borné à bord  $\partial D$  régulier. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes sur  $D \cup \partial D$ . Si  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$  pour tout  $z \in \partial D$  alors  $f$  et  $g$  possèdent le même nombre de zéros, comptés avec leur multiplicité, contenus dans  $D$ .*

## 5.1 Préliminaires et quelques propriétés de systèmes UECS

### 5.1.1 Préliminaires

Dans cette partie, nous discutons premièrement le cas où  $\mathcal{P}$  est de cardinal fini, ensuite suivra le cas où  $\mathcal{P}$  est un continuum, cas dans lequel nous montrerons qu'il est impossible d'avoir l'uniforme ensemble contrôlabilité simultanée de la sortie et qu'en revanche, l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie est possible.

✿ **Cas  $\#\mathcal{P} < \infty$**

Supposons donc que  $\mathcal{P} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\} \subset \mathbb{C}$  pour un entier  $N \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas, en posant  $x = (x_{\theta_1}^\top, \dots, x_{\theta_N}^\top)^\top$  et  $y = (y_{\theta_1}^\top, \dots, y_{\theta_N}^\top)^\top$ , on a pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x(t) \in \mathbb{C}^{Nn}$ ,  $y(t) \in \mathbb{C}^{Nq}$  et le système (5.1) devient

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}x(t) + \mathbb{B}u(t), \quad (5.3a)$$

$$y(t) = \mathbb{F}x(t) + \mathbb{G}u(t), \quad (5.3b)$$

où les matrices  $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{Nn}^{Nn}$ ,  $\mathbb{B} \in \mathbb{C}_m^{Nn}$ ,  $\mathbb{F} \in \mathbb{C}_{Nn}^{Nq}$  et  $\mathbb{G} \in \mathbb{C}_m^{Nq}$  sont données par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & A(\theta_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B(\theta_1) \\ \vdots \\ B(\theta_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} C(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\theta_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G} = \begin{pmatrix} D(\theta_1) \\ \vdots \\ D(\theta_N) \end{pmatrix}.$$

On a donc un système de contrôle en dimension finie et dans ce cas, l'ensemble contrôlabilité simultanée de la sortie et l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie sont équivalentes à la contrôlabilité de l'état vers la sortie étudiée au Chapitre 3 de ce manuscrit.

De ce fait, on a la proposition suivante.

**Proposition 5.1.1.** *Supposons que*

(5.1.1.a) *pour tout  $k \neq l$ ,  $\sigma(A(\theta_k)) \cap \sigma(A(\theta_l)) = \emptyset$ ,*

(5.1.1.b) *pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ , le système  $(A(\theta_k), B(\theta_k), C(\theta_k))$  est contrôlable de l'état vers la sortie.*

*Alors le système (5.3) est Simultanément et Uniformément ensemble contrôlable en sortie.*

*Démonstration.*

Parmi la multitude de critères qui s'offrent à nous, nous allons utiliser la version du test de Hautus étendue donnée au (3.1.4.c) du Théorème 3.1.4 puisque cette dernière nous permet d'exploiter la condition (5.1.1.a). Aussi, la condition a été établie pour des matrices réelles mais elle reste vraie dans le cas où les matrices sont à valeurs complexes.

Ainsi, en appliquant le critère (3.1.4.c), on déduit que l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie du système (5.3) est équivalente à

$$\text{rk}(\mathbb{F} | \mathbb{G}) = Nq \quad \text{et} \quad \text{Im} \left( \begin{array}{c} \mathbb{F}^* \\ \mathbb{G}^* \end{array} \right) \cap \left( \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} E_\lambda \times \{0^m\} \right) = \{0^{Nn+m}\}, \quad (5.4)$$

où  $E_\lambda = \{z \in \ker(\mathbb{A}_\lambda^*)^{n_\lambda} \mid (\mathbb{A}_\lambda^*)^l z \in \ker \mathbb{B}^*, \forall l \in \mathbb{N}_{< n_\lambda}\}$  avec  $n_\lambda$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{A}_\lambda^* = \mathbb{A}^* - \bar{\lambda}I_{Nn}$ .

Premièrement, remarquons que

$$\text{rk}(\mathbb{F} | \mathbb{G}) = Nq \iff \text{rk} \begin{pmatrix} C(\theta_1) & & D(\theta_1) \\ & \ddots & \vdots \\ & & C(\theta_N) & D(\theta_N) \end{pmatrix} = Nq, \quad \text{et que} \quad (5.5)$$

$$\text{Im} \left( \begin{array}{c} \mathbb{F}^* \\ \mathbb{G}^* \end{array} \right) = \left( \prod_{k=1}^N \text{Im}(C(\theta_k)^*) \right) \times \text{Im}(D(\theta_1)^* | \dots | D(\theta_N)^*).$$

Deuxièmement, comme  $\mathbb{A}$  est une matrice diagonale par blocs, il suit que  $\sigma(\mathbb{A}) = \bigcup_{k=1}^N \sigma(A(\theta_k))$  et que pour tout  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ ,  $n_\lambda = \max\{n_{\theta_k, \lambda}, k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*\}$  où  $n_{\theta_k, \lambda}$  est la multiplicité algébrique de  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $A(\theta_k)$ .

En exploitant cette même structure diagonale, on déduit que  $(\mathbb{A}_\lambda^*)^l = \text{diag}(A(\theta_1)_\lambda^*, \dots, A(\theta_N)_\lambda^*)^l$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ . De surcroît, on a

$$\ker(\mathbb{A}_\lambda^*)^{n_\lambda} = \prod_{k=1}^N \ker(A(\theta_k)_\lambda^*)^{n_{\theta_k, \lambda}}. \quad (5.6)$$

Ainsi, tout  $z \in \ker(\mathbb{A}_\lambda^*)^{n_\lambda}$  se réécrit sous la forme  $z = (z_1^\top, \dots, z_N^\top)^\top$ , où chaque  $z_k$  appartient à  $\ker(A(\theta_k)_\lambda^*)^{n_{\theta_k, \lambda}}$ .

Aussi,  $(\mathbb{A}_\lambda^*)^l z \in \ker \mathbb{B}^*$  pour tout  $l \in \mathbb{N}_{< n_\lambda}$  équivaut à

$$\sum_{k=1}^N B(\theta_k)^* (A(\theta_k)_\lambda^*)^l z_k = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}_{< n_\lambda}. \quad (5.7)$$

Des relations (5.6) et (5.7), il suit que pour tout  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ ,

$$E_\lambda = \left\{ (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \prod_{k=1}^N \ker (A(\theta_k)_\lambda^*)^{n_{\theta_k, \lambda}} \mid \sum_{k=1}^N B(\theta_k)^* (A(\theta_k)_\lambda^*)^l z_k = 0, \forall l \in \mathbb{N}_{< n_\lambda} \right\}. \quad (5.8)$$

Observons maintenant que si la condition (5.1.1.a) est satisfaite, alors pour tout  $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ , il existe un unique  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  tel que  $\lambda \in \sigma(A(\theta_k))$ . Ainsi, de la relation (5.6), on déduit que tout  $z \in \ker (\mathbb{A}_\lambda^*)^{n_\lambda}$  prend la forme  $z = (0, \dots, 0, z_k, 0, \dots, 0)$  où  $z_k \in \ker (A(\theta_k)_\lambda^*)^{n_{\theta_k, \lambda}}$ .

Il suit donc que

$$E_\lambda = \dots \times \{0\} \times E_{\theta_k, \lambda} \times \{0\} \times \dots, \quad (5.9)$$

où à la  $k$ -ième position, on a

$$E_{\theta_k, \lambda} := \left\{ z \in \ker (A(\theta_k)_\lambda^*)^{n_{\theta_k, \lambda}} \mid B(\theta_k)^* (A(\theta_k)_\lambda^*)^l z = 0, \forall l \in \mathbb{N}_{< n_{\theta_k, \lambda}} \right\}.$$

De ce qui précède, on déduit que

$$\bigoplus_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} E_\lambda = \prod_{k=1}^N \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A(\theta_k))} E_{\theta_k, \lambda}. \quad (5.10)$$

Des relations (5.5) et (5.10), il suit que, sous l'hypothèse (5.1.1.a), le système (5.3) est contrôlable de l'état vers la sortie si et seulement si

$$\text{rk} \begin{pmatrix} C(\theta_1) & & D(\theta_1) \\ & \ddots & \vdots \\ & & C(\theta_N) & D(\theta_N) \end{pmatrix} = Nq \quad \text{et} \quad \text{Im } C(\theta_k)^* \cap \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A(\theta_k))} E_{\theta_k, \lambda} = \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*. \quad (5.11)$$

Enfin, l'hypothèse (5.1.1.b) permet de conclure que la relation (5.11) est satisfaite.  $\square$

### Remarque 5.1.1.

• La condition (5.1.1.a) n'est pas une condition nécessaire. On peut le voir en considérant le système (5.3) avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{G} = 0_4^2.$$

Sur cet exemple, la matrice  $\mathbb{A}$  est constituée de deux blocs ayant la même valeur propre 1. En vertu de la Proposition 2.2.4, ce système n'est pas contrôlable en état car la multiplicité géométrique de cette valeur propre est 2 strictement supérieure au rang de la matrice  $\mathbb{B} = 1$ . Cependant, ce système est contrôlable de l'état vers la sortie (cf. Chapitre 3).

• Observons qu'on n'a pas nécessairement besoin de la condition (5.1.1.b) pour que (5.11) soit satisfaite, il suffit de prendre  $N = 1$ ,  $\mathbb{F} = 0$  et  $\mathbb{G}$  inversible pour le voir.

• À travers la preuve précédente, on peut aussi remarquer que la Proposition 5.1.1 reste vraie si pour tout  $k$ ,  $y(t, \theta_k) \in \mathbb{C}^{q_k}$  où les  $q_k$  ne sont nécessairement pas les mêmes.

✱ **Cas**  $\#\mathcal{P} = \infty$

Dans ce cas, introduisons  $\mathfrak{M}_A : \mathbb{X}(\mathcal{P})^n \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ ,  $\mathfrak{M}_B : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ ,  $\mathfrak{M}_C : \mathbb{X}(\mathcal{P})^n \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et  $\mathfrak{M}_D : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  les opérateurs de multiplication induits par les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  définis pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ ,  $v \in \mathbb{C}^m$  par

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}_A f)(\theta) &= A(\theta)f(\theta), & (\mathfrak{M}_B v)(\theta) &= B(\theta)v, \\ (\mathfrak{M}_C f)(\theta) &= C(\theta)f(\theta) & \text{et} & \quad (\mathfrak{M}_D v)(\theta) = D(\theta)v. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Puisque nous avons supposé que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont continues par rapport au paramètre  $\theta$ , on déduit que  $\mathfrak{M}_A$ ,  $\mathfrak{M}_B$ ,  $\mathfrak{M}_C$  et  $\mathfrak{M}_D$  sont des opérateurs linéaires et bornés (cf. [41, Proposition 2.1]).

Avec ces opérateurs, le système (5.1) devient

$$\dot{x}(t, \cdot) = \mathfrak{M}_A x(t, \cdot) + \mathfrak{M}_B u(t), \quad (5.13a)$$

$$y(t, \cdot) = \mathfrak{M}_C x(t, \cdot) + \mathfrak{M}_D u(t). \quad (5.13b)$$

En utilisant le fait que  $\mathfrak{M}_A$ ,  $\mathfrak{M}_B$ ,  $\mathfrak{M}_C$  et  $\mathfrak{M}_D$  sont bornés et que  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  est de dimension infinie, on déduit, d'une part, en raisonnant comme dans [88, Theorem 3.3.1], que le système (5.1) ne peut pas être simultanément ensemble contrôlable en sortie en temps fini et d'autre part, que l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de ce système ne dépend ni de sa condition initiale, ni du temps de contrôle et qu'elle est équivalente (cf. [88, Theorem 7.1.1]) à

$$\overline{\text{Im}(\mathfrak{M}_D) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Im} \{ \mathfrak{M}_C \mathfrak{M}_A^k \mathfrak{M}_B \}} = \mathbb{X}(\mathcal{P})^q. \quad (5.14)$$

Il est aussi clair que l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie ne dépend pas de la régularité des contrôles.

*Au vu des remarques précédentes, les considérations suivantes seront faites pour la suite.*

- Nous abandonnons la notion d'ensemble contrôlabilité simultanée de la sortie et nous nous concentrons sur l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie.
- Aussi nous prendrons dans la définition de l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie  $x_0 \equiv 0$ .
- Nous prenons sans perte de généralité  $D \equiv 0_m^q$ . Si  $D$  est non nulle, il suffit d'augmenter le système comme dans le Lemme 3.1.5 pour se ramener à ce cas.
- Enfin, lorsque l'analyse sera plus simple avec des contrôles dans  $L^2([0, T]; \mathbb{C}^m)$ , nous utiliserons cet ensemble comme ensemble de contrôles admissibles. Ceci fait bien sens dans le cas  $D$  nulle.

Dans le cas  $D$  identiquement nulle, la densité (5.15) prend la forme

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Im} \{ \mathfrak{M}_C \mathfrak{M}_A^k \mathfrak{M}_B \} = \mathbb{X}(\mathcal{P})^q. \quad (5.15)$$

En définissant par  $CA^k b_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ ,  $(CA^k b_j v)(\theta) = C(\theta)A(\theta)^k b_j(\theta)v$  pour tout  $v \in \mathbb{C}$  et tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , où  $b_j(\theta)$  est la  $j^{\text{ième}}$  colonne de  $B(\theta)$ , il suit de (5.15) que l'UECS est équivalente à la densité dans l'espace  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  de

$$\mathcal{R}(A, B, C) := \text{span} \{ CA^k b_j, k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_{\leq m}^* \}. \quad (5.16)$$

Ce qui est équivalent en terme d'approximation polynomiale au fait que pour tout  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^m C p_j(A) b_j - f \right\|_{\infty} \leq \varepsilon. \quad (5.17)$$

### 5.1.2 Quelques propriétés des systèmes UECS

Dans ce paragraphe, nous introduisons quelques propriétés de l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie.

Dans la Proposition 5.1.2 nous prouvons que l'UECS reste préservée par complexification. Il s'agit d'une extension de [34, Lemma 1] au cadre de la sortie. Dans la Proposition 5.1.3, nous montrons que l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie est préservée par changement de base et changement de variable sur le paramètre. La Proposition 5.1.4 fait un lien entre l'UEC de l'état et celle de la sortie. Enfin, le Lemme 5.1.5 montre l'effet de la restriction sur l'UECS.

**Proposition 5.1.2.** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Notons par  $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^k = \mathcal{C}(\mathcal{P}, \mathbb{R})^k$  l'espace des fonctions réelles continues à valeurs vectorielles et par  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^k$  son complexifié, c'est-à-dire,*

$$\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^k := \{f + ig \mid f, g \in \mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^k\}$$

*muni de la plus petite norme de complexification raisonnable*<sup>3</sup>

$$\|f + ig\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^k} := \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|f \cos(t) - g \sin(t)\|_{\infty}.$$

*Supposons  $(A, B, C) \in \mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})_n^n \times \mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})_m^n \times \mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})_n^q$ .*

*$(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q$  si et seulement s'il est UECS sur  $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q$  c'est-à-dire que si pour tout  $f \in \mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m$  polynômes à coefficients réels tels que*

$$\left\| \sum_{j=1}^m Cp_j(A)b_j - f \right\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.*

Supposons que  $(A, B, C)$  soit UECS sur  $\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q$ . Soit  $f \in \mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q$  et  $\varepsilon > 0$ .

Pour des raisons de simplicité, nous prenons  $m = 1$  et posons  $B = b$  dans la suite de cette preuve.

Puisque  $f \in \mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q$ , alors  $f \in \mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q$  et donc par hypothèse, il existe un polynôme complexe  $p(z) = p_0 + p_1z + \dots + p_Nz^N$  tel que

$$\|Cp(A)b - f\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q} \leq \varepsilon.$$

En posant  $r(z) = \Re(p_0) + \Re(p_1)z + \dots + \Re(p_N)z^N$  et  $s(z) = \Im(p_0) + \Im(p_1)z + \dots + \Im(p_N)z^N$ , on déduit de [68, Proposition 1] que

$$\|Cr(A)b - f\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q} \leq \|Cr(A)b - f + iCs(A)b\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q} = \|Cp(A)b - f\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q} \leq \varepsilon.$$

Réciproquement supposons que  $(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q$ .

Soit  $f = g + ih \in \mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q$  et  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $g$  et  $h$  appartiennent à  $\mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q$  il existe donc deux polynômes à coefficients réels  $p_1$  et  $p_2$  tels que

$$\|Cp_1(A)b - g\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \|Cp_2(A)b - h\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{R}}(\mathcal{P})^q} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

En posant  $p = p_1 + ip_2$ , on a

$$\begin{aligned} \|Cp(A)b - f\|_{\mathcal{X}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})^q} &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|(Cp_1(A)b - g) \cos(t) - (Cp_2(A)b - h) \sin(t)\|_{\infty} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \sup_{t \in [0, 2\pi]} (|\cos(t)| + |\sin(t)|) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

3. Cf. [68] pour plus de détails.

La proposition suivante montre que la propriété d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie reste préservée par changement de base et de variable.

**Proposition 5.1.3.** (5.1.3.a) *Le système  $(A, B, C)$  est UECS si et seulement si pour toute matrice  $T$  continue telle que  $T(\theta) \in \mathbb{C}_n^n$  soit inversible pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , le système  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)$  est UECS où  $T^{-1} : \theta \mapsto T(\theta)^{-1}$ .*

(5.1.3.b) *Le système  $(A, B, C)$  est UECS si et seulement si pour toute matrice  $T$  continue telle que  $T(\theta) \in \mathbb{C}_q^q$  soit inversible pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , le système  $(A, B, TC)$  est UECS.*

(5.1.3.c) *Soit  $\varphi$  une application continue et injective sur  $\mathcal{P}$ . Le système  $(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  si et seulement si  $(A \circ \varphi^{-1}, B \circ \varphi^{-1}, C \circ \varphi^{-1})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\varphi(\mathcal{P}))^q$ .*

*Démonstration.*

Pour le critère (5.1.3.a) il suffit de remarquer que

$$\mathcal{R}(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT) = \mathcal{R}(A, B, C).$$

Rappelons que  $\mathcal{R}$  est définie par (5.16).

Pour le critère (5.1.3.b), observons que l'application linéaire et bornée  $\mathfrak{M}_T : \mathbb{X}(\mathcal{P})^q \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  définie pour tout  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et tout  $\theta \in \mathcal{P}$  par  $(\mathfrak{M}_T f)(\theta) = T(\theta)f(\theta)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  avec  $\mathfrak{M}_{T^{-1}}$ , définie par  $(\mathfrak{M}_{T^{-1}} f)(\theta) = T(\theta)^{-1}f(\theta)$ , comme bijection réciproque.

Supposons maintenant que  $(A, B, C)$  soit UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et prenons  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et  $\varepsilon > 0$ .

Il faut montrer l'existence de  $m$  polynômes complexes tels que

$$\left\| \sum_{j=1}^m TCp_j(A)b_j - f \right\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Pour ce faire, on écrit d'abord

$$\left\| \sum_{j=1}^m TCp_j(A)b_j - f \right\|_{\infty} = \left\| T \left( \sum_{j=1}^m Cp_j(A)b_j - T^{-1}f \right) \right\|_{\infty} \leq \|T\|_{\infty} \left\| \sum_{j=1}^m Cp_j(A)b_j - T^{-1}f \right\|_{\infty},$$

puis on observe que  $T^{-1}f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et que par hypothèse d'UECS de  $(A, B, C)$ , il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que  $\left\| \sum_{j=1}^m Cp_j(A)b_j - T^{-1}f \right\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

Pour la preuve de (5.1.3.c), supposons que  $(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .

Puisque l'application  $\varphi : \mathcal{P} \mapsto \varphi(\mathcal{P})$  est un homéomorphisme,  $(A \circ \varphi^{-1}, B \circ \varphi^{-1}, C \circ \varphi^{-1})$  est bien défini sur  $\mathbb{X}(\varphi(\mathcal{P}))^q$ .

De ce fait, pour tout  $f \in \mathbb{X}(\varphi(\mathcal{P}))^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  $f \circ \varphi \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et comme  $(A, B, C)$  est par hypothèse UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ , il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq q}^*$

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} \left| \left( \sum_{k=1}^m C(\theta)p_k(A(\theta))b_k(\theta) - f \circ \varphi(\theta) \right)_{\ell} \right| \leq \varepsilon.$$

Ce qui équivaut à

$$\sup_{z \in \varphi(\mathcal{P})} \left| \left( \sum_{k=1}^m C(\varphi^{-1}(z))p_k(A(\varphi^{-1}(z)))b_k(\varphi^{-1}(z)) - f(z) \right)_{\ell} \right| \leq \varepsilon.$$

On déduit donc que le système  $(A \circ \varphi^{-1}, B \circ \varphi^{-1}, C \circ \varphi^{-1})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\varphi(\mathcal{P}))^q$ . Dans ce qui précède, si  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  alors  $(f)_{\ell}$  désigne la  $\ell^{\text{ième}}$  composante de  $f$ .  $\square$

Dans la proposition suivante, nous donnons un lien entre l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie et celle de l'état.

**Proposition 5.1.4.** *Supposons que pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $\text{rk}(C(\theta)) = q$ . Si le système  $(A, B)$  est uniformément ensemble contrôlable en état alors  $(A, B, C)$  est UECS. De plus, si  $C(\theta)$  est inversible pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , alors il y a équivalence.*

*Démonstration.*

Supposons en premier lieu que pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $\text{rk}(C(\theta)) = q$  et que le système  $(A, B)$  est UEC en état. Nous allons montrer que pour tout  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m$  polynômes complexes tels que  $\left\| \sum_{j=1}^m Cp_j(A)b_j - f \right\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

En utilisant le fait que  $\text{rk}(C(\theta)) = q$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , on déduit que l'application  $C^\dagger : \theta \mapsto C(\theta)^\star (C(\theta)C(\theta)^\star)^{-1}$  est bien définie sur  $\mathcal{P}$ . Elle est continue et satisfait  $CC^\dagger = I_q$ .

Ainsi, on a

$$\left\| \sum_{j=1}^m Cp_j(A)b_j - f \right\|_{\infty} = \left\| C \left( \sum_{j=1}^m p_j(A)b_j - C^\dagger f \right) \right\|_{\infty} \leq \|C\|_{\infty} \left\| \sum_{j=1}^m p_j(A)b_j - C^\dagger f \right\|_{\infty}.$$

En utilisant le fait que  $C^\dagger f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  et l'hypothèse d'UEC de la paire  $(A, B)$ , on déduit qu'il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que  $\left\| \sum_{j=1}^m p_j(A)b_j - C^\dagger f \right\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

Si  $C(\theta)$  est inversible pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , on a  $C^\dagger = C^{-1}$  et on observe  $\left\| \sum_{k=1}^m p_k(A)b_k - f \right\|_{\infty} \leq \|C^{-1}\|_{\infty} \left\| \sum_{k=1}^m Cp_k(A)b_k - Cf \right\|_{\infty}$ .  $\square$

Terminons cette section avec le Lemme 5.1.5 qui montre que l'UECS du système (5.1) est préservée par restriction. Ce lemme est une extension du [34, Lemma 2] au cadre de la sortie et sera d'une grande importance dans la suite.

Soit  $\hat{\mathcal{P}}$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{C}$  contenu dans  $\mathcal{P}$  et  $R : \mathbb{X}(\mathcal{P})^q \rightarrow \mathbb{X}(\hat{\mathcal{P}})^q$ , l'opérateur, à toute fonction  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ , associe sa restriction  $Rf = f|_{\hat{\mathcal{P}}} \in \mathbb{X}(\hat{\mathcal{P}})^q$ . Cet opérateur est linéaire, surjectif et unitaire.

**Lemme 5.1.5.** *Si  $(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  alors  $(RA, RB, RC)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\hat{\mathcal{P}})^q$ .*

*Démonstration.*

Supposons que  $(A, B, C)$  soit UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .

Soient  $\hat{f} \in \mathbb{X}(\hat{\mathcal{P}})^q$  et  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\hat{f} \in \mathbb{X}(\hat{\mathcal{P}})^q$  alors il existe une fonction  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  telle que  $Rf = \hat{f}$ . En utilisant le fait que  $(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ , on déduit qu'il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que  $\left\| \sum_{j=1}^m Cp_j(A)b_j - f \right\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

On finit la preuve en écrivant

$$\left\| \sum_{k=1}^m RCp_k(RA)Rb_k - \hat{f} \right\|_{\infty} = \left\| R \left( \sum_{k=1}^m Cp_k(A)b_k - f \right) \right\|_{\infty} \leq \left\| \sum_{k=1}^m Cp_k(A)b_k - f \right\|_{\infty}.$$

$\square$

## 5.2 Contribution à l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état

Comme nous l'avons vu, l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie est une extension de l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état.

Dans cette section, nous apportons des contributions à l'UEC de l'état du système (5.1). Plus précisément, nous prouvons, dans le Théorème 5.2.1, que si la paire  $(A, B)$  est suffisamment régulière, alors une condition nécessaire d'UEC de l'état est que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ . De même, dans le Théorème 5.2.5, nous montrons que si le spectre de  $A(\theta)$  intersecte l'axe réel pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  alors il est impossible d'avoir l'UEC de l'état si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$  ceci indépendamment du nombre d'entrées dans le système, c'est-à-dire quelque soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

**Théorème 5.2.1.** *Supposons que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$ ,  $A$  de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}(\mathcal{P})_n^n$  et  $B$  de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}(\mathcal{P})_m^n$ . La paire  $(A, B)$  ne peut pas être UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ .*

La preuve que nous proposons pour ce théorème est une preuve par contraposition. La stratégie de cette preuve est la suivante.

- (a) Nous supposons que  $(A, B)$  est UEC avec  $\mathcal{P}$  d'intérieur non vide.
- (b) Nous montrons l'existence d'une boule contenue dans  $\mathcal{P}$  sur laquelle la matrice  $A$  admet une valeur propre  $\lambda$  avec un vecteur propre à gauche qui lui est associé tous possédant la même régularité que  $A$ . Ceci est fait dans le Lemme 5.2.2.
- (c) Nous montrons que quitte à réduire la taille de la boule mentionnée dans le point précédent,  $\lambda$  est injective. Nous le montrons dans le Lemme 5.2.3.
- (d) Nous nous ramenons grâce à la Proposition 5.1.4 au cas  $n = 1$  et relierons le problème de contrôlabilité à un problème de densité dont nous montrons qu'il ne peut pas être satisfait.

Nous commençons cette preuve en introduisant le lemme suivant.

**Lemme 5.2.2.** *Soit  $\mathcal{P}$  un compact d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$  et  $A$  une matrice de classe  $\mathcal{C}^k$  à l'intérieur de  $\mathcal{P}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Alors il existe  $\theta_0$  un point intérieur à  $\mathcal{P}$  et  $\delta_0 > 0$  tels que  $A$  admette une valeur propre  $\lambda$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  et un vecteur propre à gauche de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  associé à  $\lambda$ .*

*Démonstration.*

- (1) *Sélection locale d'une valeur propre continue.*

Définissons pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  et tout  $\nu \in \mathbb{C}$ ,

$$f(\theta, \nu) = \det(A(\theta) - \nu I_n). \quad (5.18)$$

Ainsi définie, la fonction  $f$  est continue par rapport à  $\theta$  et holomorphe par rapport à  $\nu$ .

Puisque  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide, soit  $\mathcal{O}$  un ouvert non vide contenu dans  $\mathcal{P}$  et posons

$$k_0 = \min \{n_z \mid z \in \sigma(A(\theta)), \theta \in \mathcal{O}\}, \quad (5.19)$$

où  $n_z$ , pour tout  $z \in \sigma(A(\theta))$ , désigne la multiplicité algébrique de  $z$  dans le polynôme caractéristique de  $A(\theta)$ .

Observons que l'entier  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  existe car  $\{n_z \mid z \in \sigma(A(\theta)), \theta \in \mathcal{O}\}$  est un sous ensemble non vide de  $\mathbb{N}^*$  de cardinal fini.

Soit  $\theta_0$  un élément de  $\mathcal{O}$  en lequel  $k_0$  est atteint et  $\lambda_0$  un élément de  $\sigma(A(\theta_0))$  tel que  $n_{\lambda_0} = k_0$ .

Soit  $d$  la distance<sup>4</sup> entre  $\{\lambda_0\}$  et  $\sigma(A(\theta_0)) \setminus \{\lambda_0\}$ .

Enfin prenons  $\varepsilon_0 < d$  et  $\gamma$  une courbe régulière fermée encerclant  $\lambda_0$  et strictement contenue dans  $B_{\lambda_0}(\varepsilon_0)$ .

Par construction, la fonction  $f(\theta_0, \nu)$  ne s'annule pas sur  $\text{Im } \gamma$ . Il existe donc  $\eta > 0$  tel que

$$\min_{z \in \text{Im } \gamma} |f(\theta_0, z)| > 2\eta. \quad (5.20)$$

En utilisant le fait que  $f$  soit continue par rapport à  $\theta$  et holomorphe par rapport à  $\nu$ , on déduit que

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ tel que } \forall (\theta, z) \in B_{\theta_0}(\delta_0) \times \text{Im } \gamma, \quad |f(\theta, z) - f(\theta_0, z)| \leq \eta. \quad (5.21)$$

Des relations (5.20) et (5.21), il suit que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$

$$|f(\theta, z)| = |f(\theta, z) - f(\theta_0, z) + f(\theta_0, z)| \geq |f(\theta_0, z)| - \eta > \eta, \quad \forall z \in \text{Im } \gamma. \quad (5.22)$$

De (5.21) et (5.22), on conclut que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$  et tout  $z \in \text{Im } \gamma$ ,

$$|f(\theta_0, z) - f(\theta, z)| < |f(\theta, z)|.$$

En utilisant le théorème de Rouché, Théorème 5.1.3, on déduit donc que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$ , la fonction  $f(\theta, \cdot)$  admet  $k_0$  zéros dans  $\text{Im } \gamma$  comptés avec multiplicité.

Grâce au choix de  $\lambda_0$ , on a aussi  $\#\sigma(A(\theta)) \cap B_{\lambda_0}(\varepsilon_0) = 1$  pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$  car sinon, il existerait un  $\theta \in \mathcal{O}$  en lequel la matrice  $A(\theta)$  admet au moins deux valeurs propres dont la somme de multiplicité est  $k_0$ . Ce qui entrainerait l'existence d'une valeur propre sur  $\mathcal{O}$  de multiplicité algébrique strictement inférieure à  $k_0$  et donc contredirait le choix de  $\lambda_0$ .

Définissons maintenant  $\lambda : B_{\theta_0}(\delta_0) \rightarrow \mathbb{C}$  qui à tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$  on associe l'unique élément de  $\sigma(A(\theta))$  se trouvant dans  $B_{\lambda_0}(\varepsilon_0)$ .

La valeur propre  $\lambda$  est continue sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

En effet, soit  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$  et  $\varepsilon > 0$ . Par construction, on a  $\lambda(\theta) \in B_{\lambda_0}(\varepsilon_0)$ .

En appliquant de nouveau le théorème de Rouché autour de  $\lambda(\theta)$ , on a l'existence de  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\tilde{\theta} \in B_{\theta}(\delta) \cap B_{\theta_0}(\delta_0)$ , on a  $\lambda(\tilde{\theta}) \in \sigma(A(\tilde{\theta})) \cap B_{\lambda(\theta)}(\varepsilon)$  impliquant donc que pour tout  $\tilde{\theta} \in B_{\theta}(\delta) \cap B_{\theta_0}(\delta_0)$ ,  $|\lambda(\theta) - \lambda(\tilde{\theta})| \leq \varepsilon$ . Ce qui prouve la continuité de  $\lambda$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

Jusque là, nous avons montré que la matrice  $A$  admet une valeur propre  $\lambda$  continue sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  et de multiplicité algébrique constante égale à  $k_0$ , c'est-à-dire que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$ ,

$$\partial_{\nu}^{\ell} f(\theta, \lambda(\theta)) = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_{<k_0} \quad \text{et} \quad \partial_{\nu}^{k_0} f(\theta, \lambda(\theta)) \neq 0. \quad (5.23)$$

Si  $k = 0$  alors la preuve d'existence d'une valeur propre continue serait terminée.

Supposons que  $k \geq 1$ . Dans ce cas,  $A \in \mathcal{C}^k(\mathcal{P})_n^n$  alors la fonction  $f(\theta, \nu)$  définie au (5.18) est  $k$  fois différentiable par rapport à  $\theta$  et holomorphe par rapport à  $\nu$ .

En prenant  $\theta = \theta_0$  dans la relation (5.23), on déduit, en appliquant le théorème des fonctions implicites (cf. [51]) à la fonction  $\partial_{\nu}^{k_0-1} f$ , qu'il existe  $\varepsilon > 0$ , un voisinage  $\Gamma_{\lambda(\theta_0)}$  de  $\lambda(\theta_0)$  et une fonction différentiable  $\varphi$  tels que  $\varphi(\theta_0) = \lambda(\theta_0)$  et

$$\forall (\theta, \lambda) \in B_{\theta_0}(\varepsilon) \times \Gamma_{\lambda(\theta_0)}, \quad \partial_{\nu}^{k_0-1} f(\theta, \lambda) = 0 \iff \lambda = \varphi(\theta). \quad (5.24)$$

4. Nous utilisons la convention que la distance à un ensemble vide est infinie

Les relations (5.23) et (5.24) montrent que quitte à réduire  $\delta_0$ ,  $\lambda$  peut être pris  $\mathcal{C}^1$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

Posons maintenant

$$g(\theta, \lambda(\theta)) = \partial_\nu^{k_0-1} f(\theta, \lambda(\theta)), \quad \theta \in B_{\theta_0}(\delta_0).$$

La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $\theta$  et comme  $g(\theta, \lambda(\theta)) = 0$  pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$ , on déduit que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$ ,

$$\partial_\theta g(\theta, \lambda(\theta)) + \lambda'(\theta) \partial_\nu g(\theta, \lambda(\theta)) = 0,$$

ce qui est équivalent, en vertu de (5.23), à

$$\lambda'(\theta) = -\frac{\partial_\theta \partial_\nu^{k_0-1} f(\theta, \lambda(\theta))}{\partial_\nu^{k_0} f(\theta, \lambda(\theta))}. \quad (5.25)$$

De la relation précédente, il est aisé de voir que  $\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^k(B_{\theta_0}(\delta_0))$ .

Pour résumer ce point, nous avons prouvé que si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide et que  $A$  est  $k$  fois différentiable, alors il existe  $\theta_0$  intérieur à  $\mathcal{P}$  et  $\delta_0 > 0$  tels que sur la boule  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ ,  $A$  admette une valeur propre  $\lambda$  qui est  $k$  fois différentiable et de multiplicité algébrique constante  $k_0$ .

(2) *Construction d'un vecteur propre à gauche associé à  $\lambda$ .*

Soit  $K$  une boule fermée contenue dans  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

Par construction de  $\lambda$ , la matrice  $(A(\theta)^* - \overline{\lambda(\theta)} I_n)^{k_0}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  dans un voisinage de  $K$  et de rang constant  $n - k_0$  sur  $K$ .

De plus, puisque  $K$  est une boule fermée donc compacte et contractile. On déduit de (5.1.1.b) du Théorème 5.1.1 qu'il existe un vecteur  $\zeta$  de classe  $\mathcal{C}^k$  tel que  $\zeta(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in K$  satisfaisant  $(A(\theta)^* - \overline{\lambda(\theta)} I_n)^{k_0} \zeta(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in K$ .

Si  $k_0 = 1$  alors  $v = \zeta^*$  est le vecteur propre recherché dans le Lemme 5.2.2.

Si  $k_0 > 1$  alors on prend  $k$  le plus petit entier tel que  $(A(\theta)^* - \overline{\lambda(\theta)} I_n)^k \zeta(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in K$  puis on pose  $\tilde{\zeta}(\theta) = (A(\theta)^* - \overline{\lambda(\theta)} I_n)^{k-1} \zeta(\theta)$  pour tout  $\theta \in K$ .

Il existe par construction de  $\tilde{\zeta}$  un complexe  $\theta_1 \in K$  tel que  $\tilde{\zeta}(\theta_1) \neq 0$ . Aussi, par continuité de  $\tilde{\zeta}$  il existe  $\delta_1 > 0$  tel que  $\tilde{\zeta}(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in B_{\delta_1}(\theta_1) \subset K$ .

Le vecteur  $v$  donné par la restriction de  $\tilde{\zeta}^*$  à  $B_{\delta_1}(\theta_1)$  constitue donc un vecteur propre à gauche de classe  $\mathcal{C}^k$  associé à  $\lambda$ .

□

### Remarque 5.2.1.

Grâce au lemme de restriction, observons qu'en réalité dans le Lemme 5.2.2, on a juste besoin que  $A$  soit de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un petit ouvert de  $\mathcal{P}$  et non dans tout l'intérieur de  $\mathcal{P}$ .

Faisons à présent une remarque importante qui sera utilisée dans la preuve du Théorème 5.2.1.

### Remarque 5.2.2.

Dans l'item (1) de la preuve précédente, nous avons prouvé que si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide et que  $A$  est  $k$  fois différentiable, alors il existe  $\theta_0$  intérieur à  $\mathcal{P}$  et  $\delta_0 > 0$  tels que sur la boule  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ ,  $A$  admette une valeur propre  $\lambda$  qui est  $k$  fois différentiable et de multiplicité algébrique constante  $k_0$ .

Observons que si  $\lambda$  est injective sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ , alors  $\lambda : B_{\theta_0}(\delta_0) \rightarrow \lambda(B_{\theta_0}(\delta_0))$  est un homéomorphisme. De ce fait, il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  contenu dans  $\lambda(B_{\theta_0}(\delta_0))$  tel que la bijection réciproque  $\lambda^{-1}$  soit  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{O}$ .

En effet, pour tout  $z \in \lambda(B_{\theta_0}(\delta_0))$ , on a  $\lambda(\lambda^{-1}(z)) = z$ . Ainsi, en dérivant l'expression précédente par rapport à  $z$ , on a  $(\lambda^{-1})'(z)\lambda'(\lambda^{-1}(z)) = 1$  pour tout  $z \in \lambda(B_{\theta_0}(\delta_0))$ . Puisque  $\lambda$  est un homéomorphisme de  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  sur  $\lambda(B_{\theta_0}(\delta_0))$ , il existe bien un ouvert  $\mathcal{O}$  contenu dans  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  sur lequel  $\lambda'(\theta) \neq 0$ . Ainsi,  $\lambda'(\lambda^{-1})$  est continue et ne s'annule pas sur  $\lambda(\mathcal{O})$ . On déduit donc du fait que  $(\lambda^{-1})' = 1/\lambda'(\lambda^{-1})$  sur  $\lambda(\mathcal{O})$  que  $\lambda^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\lambda(\mathcal{O})$ . On peut voir qu'en prenant  $\mathcal{O} = \lambda(\mathcal{O})$ , que  $\lambda^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathcal{O}$ .

En utilisant les notations du Lemme 5.2.2, le lemme suivant explicite l'item (c).

**Lemme 5.2.3.** *Supposons que  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide et que  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ . Si  $A$  est  $\mathcal{C}^1$  à l'intérieur de  $\mathcal{P}$ , alors, il existe une boule contenue dans  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  sur laquelle  $\lambda$  est injective.*

Avant de donner une preuve à ce lemme, rappelons que grâce au Lemme 5.1.5 (lemme de restriction) et à la Proposition 2.2.4 (voir aussi [34, Proposition 4]) une condition nécessaire d'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état est que pour tous nombres complexes deux à deux distincts  $\theta_1, \dots, \theta_k$  de  $\mathcal{P}$ ,

$$\sigma(A(\theta_1)) \cap \dots \cap \sigma(A(\theta_k)) = \emptyset, \quad \forall k > m. \quad (5.26)$$

Pour rappel, la Proposition 2.2.4 stipule que pour  $\theta$  fixé dans  $\mathcal{P}$ , une condition nécessaire pour que  $(A(\theta), B(\theta))$  soit contrôlable en état est que la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de  $A(\theta)$  soit au plus le rang de  $B(\theta)$ , donc, dans le cas présent, au plus  $m$ .

Si on applique le lemme de restriction à un ensemble de  $m + 1$  paramètres distincts  $\{\theta_0, \dots, \theta_m\}$ , on obtiendrait le système parallèle

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A(\theta_0) & & \\ & \ddots & \\ & & A(\theta_m) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B(\theta_0) \\ \vdots \\ B(\theta_m) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si la paire  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  alors le système parallèle précédent serait contrôlable en état et puisque  $\mathbb{B}$  est de rang au plus  $m$  alors  $\sigma(A(\theta_0)) \cap \dots \cap \sigma(A(\theta_m)) = \emptyset$ . En effet, si  $\sigma(A(\theta_0)) \cap \dots \cap \sigma(A(\theta_m)) \neq \emptyset$ , il existerait une valeur propre de multiplicité géométrique  $m + 1$ . Ce qui est impossible en vertu de la Proposition 2.2.4.

Cela constitue les principales étapes de la preuve de (5.26).

Une conséquence immédiate de la condition (5.26) est que la paire  $(A, B)$  ne peut pas être UEC si la matrice  $A$  possède une valeur propre constante.

Proposons maintenant une preuve au Lemme 5.2.3.

*Démonstration.*

D'après le Lemme 5.2.2, puisque  $A$  est  $\mathcal{C}^1$  à l'intérieur de  $\mathcal{P}$ , il existe un point  $\theta_0$  intérieur à  $\mathcal{P}$  et  $\delta_0 > 0$  tels que  $A$  admette une valeur propre  $\lambda$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\theta_0 \in B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

En utilisant (5.26), nous allons montrer que quitte à bouger  $\theta_0 \in B_{\theta_0}(\delta_0)$  et à réduire  $\delta_0$ ,  $\lambda$  est injective sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

Pour ce faire, définissons  $\Upsilon_{\theta_0}^{\delta_0} := \{(\Re \lambda(\theta), \Im \lambda(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)\}$  et  $\tilde{\lambda} : \Upsilon_{\theta_0}^{\delta_0} \mapsto \mathbb{R}^2$  avec  $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$  où  $\lambda_1 = \Re(\lambda)$  et  $\lambda_2 = \Im(\lambda)$ .

Comme  $\lambda$  est  $C^1$  alors  $\tilde{\lambda}$  l'est aussi et la Jacobienne de  $\tilde{\lambda}$  en tout point  $(\theta_1, \theta_2) \in \Upsilon_{\theta_0}^{\delta_0}$  est donnée par

$$J_{\tilde{\lambda}}(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \partial_1 \lambda_1(\theta_1, \theta_2) & \partial_2 \lambda_1(\theta_1, \theta_2) \\ \partial_1 \lambda_2(\theta_1, \theta_2) & \partial_2 \lambda_2(\theta_1, \theta_2) \end{pmatrix}.$$

Dans l'expression de  $J_{\tilde{\lambda}}$ , les expressions  $\partial_1 \lambda_1$  (resp.  $\partial_1 \lambda_2$ ) et  $\partial_2 \lambda_1$  (resp.  $\partial_2 \lambda_2$ ) désignent respectivement les dérivées partielles de  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ) par rapport à la première et à la seconde variable.

Supposons maintenant que  $\lambda$  n'est injective sur aucun ouvert de  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

Il suit donc que pour tout  $(\theta_1, \theta_2) \in \Upsilon_{\theta_0}^{\delta_0}$ ,  $\det J_{\tilde{\lambda}}(\theta_1, \theta_2) = 0$ .

Si  $\text{rk } J_{\tilde{\lambda}} = 0$  sur un sous-ensemble de mesure non nulle contenu dans  $\Upsilon_{\theta_0}^{\delta_0}$  alors  $\tilde{\lambda}$ , et donc  $\lambda$ , est constante sur un sous-ensemble de mesure non nulle, ce qui contredit l'hypothèse d'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(A, B)$  à cause de la propriété (5.26).

Supposons maintenant qu'il existe  $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \in \Upsilon_{\theta_0}^{\delta_0}$  tel que  $\text{rk } J_{\tilde{\lambda}}(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = 1$ .

Par continuité de la Jacobienne de  $\tilde{\lambda}$ , il existe une boule fermée  $K$  centrée en  $\tilde{\theta}$  et contenue dans  $\Upsilon_{\theta_0}^{\delta_0}$  sur laquelle  $\text{rk } J_{\tilde{\lambda}} = 1$ . L'ensemble  $K$  étant par construction compact et contractile,  $J_{\tilde{\lambda}}$  continue et de rang constant égal à 1 sur  $K$ , on déduit du Théorème 5.1.1 qu'il existe une fonction continue  $\alpha : K \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $J_{\tilde{\lambda}}(\theta_1, \theta_2)\alpha(\theta_1, \theta_2) = 0$  pour tout  $(\theta_1, \theta_2) \in K$ .

Construisons, grâce au Théorème de Cauchy-Peano [91], à l'intérieur de  $K$  un chemin continu  $\gamma$  satisfaisant

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) &= \alpha(\gamma(t)), t \in [0, 1] \\ \gamma(0) &= \tilde{\theta}. \end{cases}$$

De ce qui précède, on a

$$\frac{d}{dt} (\tilde{\lambda}(\gamma(t))) = J_{\tilde{\lambda}}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = J_{\tilde{\lambda}}(\gamma(t))\alpha(\gamma(t)) = 0,$$

impliquant que  $\tilde{\lambda}$ , et donc  $\lambda$ , est constant le long du flot de  $\gamma$ . Ce qui contredit de nouveau l'hypothèse d'UEC de la paire  $(A, B)$ .

En définitive, quitte à bouger  $\theta_0$  dans  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  et à réduire  $\delta_0$ , on a l'injectivité de  $\lambda$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .  $\square$

Le résultat du lemme précédent induit la remarque suivante.

### Remarque 5.2.3.

La preuve du Lemme 5.2.3 montre que si  $\mathcal{P}$  est homéomorphe à un compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d > 2$ , alors il est impossible d'avoir l'uniforme ensemble contrôlabilité de l'état de la paire  $(A, B)$  si  $A$  est différentiable. En effet, dans ce cas, l'UEC de  $(A, B)$  impliquerait, d'après le Lemme 5.2.3, l'existence d'une application continue et injective d'une boule de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^2$ , ce qui contredit [15, Theorem 20.2, p.242]. Le théorème 20.2, dit de Borsuk-Ulam, cité précédemment stipule qu'il n'existe pas d'application continue et injective de la  $\kappa$ -sphère (vue comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^{\kappa+1}$ ) à valeur dans  $\mathbb{R}^{\kappa}$ .

Soit  $D$  une boule fermée contenue dans  $\mathbb{C}$  et définissons par  $\mathcal{H}(D)$  l'espace des fonctions holomorphes à l'intérieur de  $D$  et continues sur  $D$ . Le résultat suivant nous sera utile pour la preuve du Théorème 5.2.1.

**Lemme 5.2.4.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $b_1, \dots, b_k$  des fonctions continues sur  $D$  et de classe  $\mathcal{C}^{2k+1}$  à l'intérieur de  $D$ . Supposons que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k}^*$ , il n'existe pas de compact  $K$  contenu dans  $D$  tel que

$b_\ell|_K \in \mathcal{H}(K) + \sum_{s=1, s \neq \ell}^k b_s|_K \mathcal{H}(K)$ .  
Alors, pour toute fonction

$$\varphi \in \overline{\mathcal{H}(D) + b_1 \mathcal{H}(D) + \dots + b_k \mathcal{H}(D)}^{\mathbb{X}(D)},$$

il existe un compact  $D_0$  contenu dans  $D$  sur lequel  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . De plus, on a  $\varphi|_{D_0} \in \mathcal{H}(D_0) + b_1|_{D_0} \mathcal{H}(D_0) + \dots + b_k|_{D_0} \mathcal{H}(D_0)$ .

*Démonstration.*

Nous donnons une preuve dans le cas  $k = 1$ . Le cas général peut être fait en suivant les mêmes arguments et est discuté dans la Remarque 5.2.4.

Notons  $R(D, b_1) := \mathcal{H}(D) + b_1 \mathcal{H}(D)$ . Comme  $\varphi \in \overline{R(D, b_1)}$  avec  $b_1$  non holomorphe sur aucun ouvert contenu dans  $D$  et trois fois différentiable à l'intérieur de  $D$ , il existe donc une suite de fonctions  $(\varphi_n)_n$  dans  $R(D, b_1)$  convergeant uniformément sur  $D$  vers  $\varphi$ . En utilisant le fait que pour tout  $n$ ,  $\varphi_n \in R(D, b_1)$ , on déduit que chaque  $\varphi_n$  est trois fois différentiable et prend la forme  $\varphi_n = \varphi_n^0 + b_1 \varphi_n^1$  avec  $(\varphi_n^0, \varphi_n^1) \in \mathcal{H}(D) \times \mathcal{H}(D)$ .

Posons

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{et} \quad L = (\bar{\partial} b) \bar{\partial}^2 - (\bar{\partial}^2 b_1) \bar{\partial}.$$

À l'intérieur de  $D$ , on a

$$\varphi_n = \varphi_n^0 + b_1 \varphi_n^1 \iff \bar{\partial} \varphi_n = \varphi_n^1 \bar{\partial} b_1 \quad \text{car} \quad \bar{\partial} \varphi_n^0 = \bar{\partial} \varphi_n^1 = 0.$$

Comme  $b_1$  n'est holomorphe sur aucun ouvert contenu dans  $D$ , il existe une boule ouverte  $\mathcal{B} \subset D$  telle que pour tout  $\theta \in \mathcal{B}$ ,  $\bar{\partial} b_1(\theta) \neq 0$ .

On a donc sur  $\mathcal{B}$ ,

$$\frac{1}{\bar{\partial} b_1} \bar{\partial} \varphi_n = \varphi_n^1, \tag{5.27}$$

impliquant que

$$\bar{\partial} \left( \frac{\bar{\partial} \varphi_n}{\bar{\partial} b_1} \right) = 0.$$

En développant l'expression précédente, on a

$$(\bar{\partial} b_1) \bar{\partial}^2 \varphi_n - (\bar{\partial}^2 b_1) \bar{\partial} \varphi_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$L \varphi_n = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{B}. \tag{5.28}$$

Observons, de ce qui précède, que si  $L \varphi_n = 0$  à l'intérieur de  $\overline{\mathcal{B}}$ , alors on déduit du fait que  $b_1$  soit non holomorphe sur aucun ouvert contenu dans  $D$  qu'il existe un compact  $K$  contenu dans  $D$  tel que  $\varphi_n|_K = h_n^0 + b_1|_K h_n^1$  pour deux fonctions  $h_n^0$  et  $h_n^1$  dans  $\mathcal{H}(K)$ .

De la relation (5.28), pour toute fonction infiniment différentiable  $\psi$  dont le support est inclus dans  $\overline{\mathcal{B}}$ , on a

$$\langle L \varphi_n, \psi \rangle = \langle \varphi_n, L^* \psi \rangle = 0, \quad \text{où} \quad L^* = (\bar{\partial} \bar{b}_1) \partial^2 + 3 (\partial^2 \bar{b}_1) \partial + 2 \partial^3 \bar{b}_1. \tag{5.29}$$

En utilisant le fait que  $\varphi_n$  converge uniformément vers  $\varphi$ , on déduit de (5.29) que  $\langle \varphi, L^* \psi \rangle = 0$ . En observant d'abord que les coefficients de l'opérateur uniformément elliptique  $L$  sont différentiables, ensuite que les coefficients de l'opérateur adjoint  $L^*$  sont continus et enfin que la fonction

$\varphi$  appartient à  $L^\infty(\overline{\mathcal{B}})$ , on déduit du Théorème 2.2 de [16] que pour tout compact situé à une distance positive du complémentaire de  $\overline{\mathcal{B}}$ , la fonction  $\varphi$  est trois fois différentiable. De ce fait, on a l'existence d'un ouvert contenu dans  $\overline{\mathcal{B}}$  sur lequel  $L\varphi = 0$  au sens classique. En se rappelant de l'observation faite en dessous de (5.28) on a bien l'existence d'une boule fermée  $K$  contenue dans  $\overline{\mathcal{B}}$  sur lequel  $\varphi|_K = h_0|_K + b_1|_K h_1|_K$ .  $\square$

**Remarque 5.2.4.**

De façon générale ( $k$  quelconque), en procédant comme dans la preuve précédente, l'opérateur  $L$  est un opérateur d'ordre  $k + 1$  dont le coefficient associé à la plus grande dérivée contient des termes de dérivée d'ordre  $k$  des fonctions  $b_k$ . Ainsi, pour assurer que les coefficients de l'opérateur adjoint  $L^*$  soient continus, il faut donc que ce coefficient soit  $k + 1$  fois différentiable. Ce qui justifie l'hypothèse  $b_1, \dots, b_k$  de classe  $\mathcal{C}^{2k+1}$ . Aussi, l'hypothèse selon laquelle pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k}^*$ , il n'existe pas de compact  $K$  contenu dans  $D$  tel que  $b_\ell|_K \in \mathcal{H}(K) + \sum_{s=1, s \neq \ell}^k b_s|_K \mathcal{H}(K)$  est faite pour assurer le fait que le module du coefficient de la dérivée d'ordre  $k$  soit minoré par une constante strictement positive afin d'assurer que l'opérateur  $L$  soit uniformément elliptique (cf. [16]).

Par exemple dans le cas  $k = 2$ , en prenant  $\varphi = \varphi_0 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2$ , on a  $\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}b_1\varphi_1 + \bar{\partial}b_2\varphi_2$ . Comme  $b_1$  n'est holomorphe sur aucun ouvert contenu dans  $D$  il existe un ouvert  $\mathcal{O}_1$  sur lequel  $\bar{\partial}b_1$  ne s'annule jamais. Sur  $\mathcal{O}_1$ , on a donc

$$\frac{\bar{\partial}\varphi}{\bar{\partial}b_1} = \varphi_1 + \frac{\bar{\partial}b_2}{\bar{\partial}b_1}\varphi_2 \implies \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\varphi}{\bar{\partial}b_1}\right) = \zeta_1\varphi_2, \quad \text{où } \zeta_1 = \bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}b_2}{\bar{\partial}b_1}\right).$$

De même, il existe un ouvert  $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$  sur lequel  $\zeta_1(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathcal{O}_2$ , car sinon,  $\zeta_1(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathcal{O}_1$ , ce qui impliquerait que  $\bar{\partial}b_2 = h_1\bar{\partial}b_1$  où  $h_1$  est une fonction holomorphe sur  $\mathcal{O}_1$ . Ainsi, on a  $\bar{\partial}(b_2 - hb_1) = 0$  sur  $\mathcal{O}_1$  et donc que  $b_2 = h_1b_1 + h_0$  où  $h_0$  est une fonction holomorphe sur  $\mathcal{O}_1$ . Ce qui contredit le fait qu'il n'existe pas de compact  $K$  contenu dans  $D$  tel que  $b_\ell|_K \in \mathcal{H}(K) + \sum_{s=1, s \neq \ell}^k b_s|_K \mathcal{H}(K)$ . De ce qui précède, on a donc sur  $\mathcal{O}_2$ ,

$$\bar{\partial}\left(\frac{1}{\zeta_1}\bar{\partial}\left(\frac{\bar{\partial}\varphi}{\bar{\partial}b_1}\right)\right) = 0.$$

En posant  $\zeta_2 = \bar{\partial}^2 b_1 / (\bar{\partial}b_1)^2$  et en développant l'équation précédente, on a  $L\varphi = 0$  sur  $\mathcal{O}_2$  avec

$$L = \zeta_1 \bar{\partial}b_1 \bar{\partial}^3 - \left(\bar{\partial}\zeta_1 \bar{\partial}b_1 + \zeta_1 \bar{\partial}^2 b_1 + \zeta_1 \zeta_2 \bar{\partial}b_1^2\right) \bar{\partial}^2 + \zeta_1 \bar{\partial}b_1^2 \left(\bar{\partial}\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \bar{\partial}\zeta_2\right) \bar{\partial}.$$

Par construction,  $\zeta_1 \bar{\partial}b_1$  ne s'annule jamais sur  $\mathcal{O}_2$  et ne contient que des dérivées d'ordre au plus deux de  $b_1$  et de  $b_2$ . Comme  $b_1$  et  $b_2$  sont de classe  $\mathcal{C}^5$  sur  $\mathcal{O}_2$  alors  $\zeta_1 \bar{\partial}b_1$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\mathcal{O}_2$ . On peut aussi voir que  $\bar{\partial}\zeta_1 \bar{\partial}b_1 + \zeta_1 \bar{\partial}^2 b_1 + \zeta_1 \zeta_2 \bar{\partial}b_1^2$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^3$  et que  $\zeta_1 \bar{\partial}b_1^2 \left(\bar{\partial}\zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1 \bar{\partial}\zeta_2\right)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Ceci montre bien que les coefficients de l'opérateur adjoint sont continus sur  $\mathcal{O}_2$ .

**Remarque 5.2.5.**

Pour appliquer le [16, Théorème 2.2] dans la preuve du Lemme 5.2.4, on a juste besoin que les coefficients de l'opérateur adjoint  $L^*$  soient essentiellement bornés, ce qui montre que pour la méthode adoptée dans cette preuve, on peut obtenir un meilleur résultat en demandant à ce que les fonctions  $b_\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq k}^*$  soient de classe  $\mathcal{C}^{2k,1}$ , espace des fonctions dont la dérivée jusqu'à l'ordre  $2k$  sont continues et dont la dérivée d'ordre  $2k + 1$  est essentiellement bornée.

Nous pouvons maintenant donner une preuve au Théorème 5.2.1.

*Démonstration.*

Supposons que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur non vide,  $(A, B)$  de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}$  à l'intérieur de  $\mathcal{P}$  et UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ . Rappelons que  $m$  est le nombre de colonne de  $B(\theta)$ .

D'après les Lemmes 5.2.2 et 5.2.3, il existe  $\theta_0$ , un point intérieur à  $\mathcal{P}$ , et  $\delta_0 > 0$  tels que  $A$  admette une valeur propre  $\lambda$  continue, injective, de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  et un vecteur propre à gauche  $v$  de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  associé à  $\lambda$ .

• *Réduction au cas  $n = 1$ .*

Soit  $K$  une boule fermée contenue dans  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

En multipliant à gauche l'équation d'état par le vecteur  $v$ , on a

$$v(\theta)\dot{x}(t, \theta) = v(\theta)A(\theta)x(t, \theta) + v(\theta)B(\theta)u(t). \quad (5.30)$$

En utilisant le fait que  $v(\theta)A(\theta) = \lambda(\theta)v(\theta)$  sur  $K$  puis en posant  $y(t, \theta) = v(\theta)x(t, \theta) \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{b}(\theta) := v(\theta)B(\theta) = (\tilde{b}_1(\theta), \dots, \tilde{b}_m(\theta)) \in \mathbb{C}_m$ , l'équation (5.30) devient

$$\dot{y}(t, \theta) = \lambda(\theta)y(t, \theta) + \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j(\theta)u_j(t), \quad (5.31)$$

où la variable  $y$  peut être vue comme une variable de sortie.

En utilisant le fait que la paire  $(A, B)$  est UEC et que  $\text{rk}(v(\theta)) = 1$  pour tout  $\theta \in K$ , on déduit de la Proposition 5.1.4 que l'équation (5.31) est UEC sur  $\mathbb{X}(K)$ .

Dans la suite, nous posons  $b = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m)$ .

• *Lien avec le Lemme 5.2.4.*

En vertu de l'item (5.1.3.c) de la Proposition 5.1.3, on peut supposer que  $\lambda$  est l'application identité de  $K$ . En effet, d'après cet item,  $(\lambda, b)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(K)$  si et seulement si  $(i_d, b \circ \lambda^{-1})$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\lambda(K))$ . Comme  $\lambda : K \rightarrow \lambda(K)$  est un homéomorphisme et que  $K$  est un compact d'intérieur non vide, alors  $\lambda(K)$  est aussi un compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{C}$ . De plus, grâce à la Remarque 5.2.2,  $b \circ \lambda^{-1}$  est continue et de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}$  sur un ouvert contenu dans  $\lambda(K)$ . Ainsi, on peut, et c'est ce qui sera fait dans la suite de cette preuve, supposer sans perte de généralité que  $(i_d, b)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(K)$  où  $K$  est un compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{C}$ .

Par hypothèse de l'UEC de  $(i_d, b)$  sur  $\mathbb{X}(K)$ , on déduit du résultat de densité (5.16) que

$$\overline{\text{span} \{ \theta \in K \mapsto \theta^k b_j(\theta) \mid k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_{\leq m}^* \}} = \mathbb{X}(K).$$

De plus, le lemme de restriction stipule qu'il existe  $\theta_0$  intérieur à  $K$  et  $k_0 \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$  tels que  $b_{k_0}(\theta_0) \neq 0$ . En effet, ce lemme stipule que si le système  $(i_d, b)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(K)$  alors pour tout  $\theta \in K$ , la paire  $(\theta, b(\theta))$  est contrôlable en état et donc que le vecteur  $b(\theta)$  est non nul pour tout  $\theta \in K$ .

En utilisant la continuité de  $b$  et le fait que  $\theta_0$  soit un point intérieur à  $K$ , on déduit l'existence d'un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\theta_0$  contenu dans  $K$  tel que pour tout  $\theta \in \mathcal{V}$ ,  $b_{k_0}(\theta) \neq 0$ .

Considérons maintenant tout les  $b_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$ , dont le support intercepté avec  $\mathcal{V}$  est d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$  et  $D$  une boule fermée contenue dans cette intersection.

Par construction de  $D$ , soit pour tout  $\theta \in D$ ,  $b_k(\theta) \neq 0$  où  $b_k$  s'annule identiquement sur  $D$ . Supposons sans perte de généralité que pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$ ,  $b_k(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in D$ .

En utilisant le fait que, par hypothèse,  $(i_d, b)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  et le lemme de restriction, on déduit que  $(i_d, b)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(D)$  et on a

$$\Lambda := \overline{\text{span} \{ \theta \in D \mapsto \theta^k b_j(\theta) \mid k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_{\leq m}^* \}} = \mathbb{X}(D). \quad (5.32)$$

En utilisant le fait que pour tout  $\theta \in D$ ,  $b_\ell(\theta) \neq 0$  ceci pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$  et l'UEC de  $(i_d, b)$  sur  $\mathbb{X}(D)$ , on peut supposer, grâce à la Proposition 5.1.4 que  $b_1(\theta) = 1$  pour tout  $\theta \in D$ .

Dans la suite on prend  $b = (1, b_2, \dots, b_m)$ . Observons que le vecteur  $b$  de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}$  à l'intérieur de  $D$ .

Puisque les applications  $\theta \mapsto \theta^k$  sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$  ceci pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et que  $D$  est un compact à complémentaire connexe dans  $\mathbb{C}$ , on a

$$\text{span} \{ \theta \in D \mapsto \theta^k b_j(\theta) \mid k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_{\leq m}^* \} \subset \mathcal{H}(D) + b_2 \mathcal{H}(D) + \dots + b_m \mathcal{H}(D).$$

De la relation (5.32), on déduit donc que

$$\overline{\mathcal{H}(D) + b_2 \mathcal{H}(D) + \dots + b_m \mathcal{H}(D)} = \mathbb{X}(D). \quad (5.33)$$

Dans l'équation (5.33), on peut supposer, sans perte de généralité, que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{< m}^*$ , il n'existe pas de compact  $K$  contenu dans  $D$  tel que  $b_\ell|_K \in \mathcal{H}(K) + \sum_{k=2, k \neq \ell}^m b_k \mathcal{H}(K)$ . S'il existe un entier  $\ell \in \mathbb{N}_{< m}^*$  et compact  $K$  contenu dans  $D$  tels que  $b_\ell|_K \in \mathcal{H}(K) + \sum_{k=2, k \neq \ell}^m b_k \mathcal{H}(K)$ , alors il faut appliquer le lemme de restriction à ce compact et on aura, à la place de l'équation (5.33), l'équation

$$\overline{\mathcal{H}(K) + b_2 \mathcal{H}(K) + \dots + b_m \mathcal{H}(K)} = \mathbb{X}(K).$$

Comme sur  $K$ , la fonction  $b_\ell$  appartient déjà  $\mathcal{H}(K) + \sum_{k=2, k \neq \ell}^m b_k \mathcal{H}(K)$ , on peut supprimer le terme  $b_\ell \mathcal{H}(K)$  de la relation de densité précédente.

• *Conclusion de la preuve.*

La relation de densité (5.33) et le Lemme 5.2.4 implique donc que pour toute fonction continue sur  $D$ , il existe une boule ouverte  $D_0$  contenue dans  $D$  sur laquelle cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^m$ , ce qui est impossible (cf. Karl Weierstrass).  $\square$

Faisons quelques remarques.

Le Théorème 5.2.1 a pour conséquence la remarque suivante.

**Remarque 5.2.6.**

Soit  $\mathcal{P}$  un compact de  $\mathbb{C}$ . Si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$  et si  $A$  et  $B$  sont respectivement de classe  $\mathcal{C}^{2m-1}(\mathcal{P})_n^n$  et  $\mathcal{C}^{2m-1}(\mathcal{P})_m^n$ , alors il existe une mesure complexe non nulle dont le support est contenu dans  $\mathcal{P}$  tel que

$$\int_{\mathcal{P}} B(\theta)^* A(\theta)^{*k} d\mu(\theta) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Soit  $T > 0$ . Sous les hypothèses précédentes, on sait que la paire  $(A, B)$  ne peut pas être UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  avec  $L^2([0, T]; \mathbb{C}^m)$  comme ensemble de contrôles admissibles.

Désignons par  $\Phi_T$  l'application linéaire et bornée définie  $L^2([0, T]; \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})$  telle que pour tout  $u \in L^2([0, T]; \mathbb{C}^m)$ , et  $\theta \in \mathcal{P}$ ,

$$(\Phi_T u)(\theta) = \int_0^T e^{(T-t)A(\theta)} B(\theta) u(t) dt.$$

Le dual de l'application  $\Phi_T$  noté  $\Phi_T^*$  est donc une application linéaire de l'espace des mesures de Radon que nous notons  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  dans  $L^2([0, T]; \mathbb{C}^m)$  défini pour tout  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ , par

$$(\Phi_T^* \mu)(t) = \int_{\mathcal{P}} B(\theta)^* e^{(T-t)A(\theta)^*} d\mu(\theta) \quad (t \in [0, T]).$$

De [89, Theorem 11.2.1], l'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(A, B)$  est équivalente au principe de continuation unique

$$\forall t \in [0, T], \quad (\Phi_T^* \mu)(t) = 0 \quad \implies \quad \mu = 0.$$

Dans la relation précédente,  $\mu = 0$  signifie que pour tout  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ ,

$$\langle \mu, f \rangle_{\mathcal{M}(\mathcal{P}), \mathbb{X}(\mathcal{P})^n} = \int_{\mathcal{P}} f d\mu = 0.$$

Mais puisque nous avons montré que  $(A, B)$  ne peut être UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide, on déduit du principe de continuation unique qu'il existe une mesure complexe non nulle  $\mu$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $(\Phi_T^* \mu)(t) = 0$ . Le résultat escompté s'obtient en évaluant les dérivées successives de  $(\Phi_T^* \mu)(t) = 0$  au temps  $T$ .

**Remarque 5.2.7.**

Observons, à travers la preuve du Théorème 5.2.1, que dans le cas  $m = 1$ , on n'a pas besoin que la matrice  $A$  soit différentiable pour montrer qu'une condition nécessaire d'UEC de la paire  $(A, B)$  est que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur vide. En effet, la différentiabilité de  $A$  nous a permis d'avoir l'injectivité de la valeur propre construite dans le Lemme 5.2.3. Or dans le cas  $m = 1$ , l'injectivité de cette valeur propre est garantie par le lemme de restriction et la relation (5.26). Il suffira donc d'utiliser le Lemme 5.2.2 pour se ramener au cas  $n = m = 1$  et constater que l'UEC implique, d'après (5.33), que  $\mathcal{H}(D) = \mathbb{X}(D)$  où  $D$  est une boule fermée contenue dans  $\mathcal{P}$ , ce qui est impossible (cf. [36, Theorem 8.7]).

Rappelons que dans le cas  $m = 1$ , ce résultat de non contrôlabilité lorsque l'ensemble  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$  avait été établi dans [34, Theorem 3].

**Remarque 5.2.8.**

De tout ce qui précède, on peut voir que si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$ ,  $A \in \mathcal{C}^1(\mathcal{P})_n^n$  et  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ , alors il existe une boule fermée  $D$  contenue dans  $\mathcal{P}$  et  $m - 1$  fonctions continues  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ , satisfaisant  $b_k(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in D$  et

$$\overline{\mathcal{H}(D) + b_1 \mathcal{H}(D) + \dots + b_{m-1} \mathcal{H}(D)} = \mathbb{X}(D). \quad (5.34)$$

De plus, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{< m}^*$ , il n'existe pas de compact  $K$  contenu dans  $D$  tel que  $b_\ell|_K \in \mathcal{H}(K) + \sum_{k=1, k \neq \ell}^{m-1} b_k|_K \mathcal{H}(K)$ .

Observons que (5.34) ne peut pas être satisfait si l'espace

$$\mathcal{H}(D) + b_1 \mathcal{H}(D) + \dots + b_{m-1} \mathcal{H}(D)$$

est un sous-espace fermé de  $\mathbb{X}(D)$ .

En effet, si cet espace est un fermé de  $\mathbb{X}(D)$ , alors on a

$$\mathcal{H}(D) + b_1 \mathcal{H}(D) + \dots + b_{m-1} \mathcal{H}(D) = \mathbb{X}(D).$$

De ce fait, pour toute fonction  $g \in \mathbb{X}(D)$ , il existe  $m$  fonctions  $h_0, \dots, h_{m-1}$  holomorphes à l'intérieur de  $D$  et continues sur  $D$  telles que

$$g = h_0 + b_1 h_1 + \dots + b_{m-1} h_{m-1} \quad (5.35)$$

En prenant donc  $g$  une fonction continue sur  $D$  valant 0 dans une boule ouverte  $\mathcal{B}$  contenue dans  $D$  et 1 sur le bord de  $D$ , on a pour toute boule fermée  $K$  contenue dans  $\mathcal{B}$

$$h_0 + b_1 h_1 + \dots + b_{m-1} h_{m-1} = 0.$$

Puisque  $g$  est non nulle, quitte à réduire la taille de  $K$ , il existe  $j_1 \in \{1, \dots, m-1\}$  tel que  $h_{j_1}(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in K$ . On déduit donc que sur  $K$ ,  $b_{j_1} = -\frac{h_0}{h_{j_1}} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_1}}^{m-1} b_j \frac{h_j}{h_{j_1}}$ , ce qui contredit le fait que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{< m}^*$ , il n'existe pas de compact  $K$  contenu dans  $D$  tel que  $b_\ell|_K \in \mathcal{H}(K) + \sum_{k=1, k \neq \ell}^{m-1} b_k \mathcal{H}(K)$ .

### Remarque 5.2.9.

De la remarque précédente, la question qui peut être posée est de savoir si l'espace  $\mathcal{H}(D) + b_1 \mathcal{H}(D) + \dots + b_{m-1} \mathcal{H}(D)$  peut être fermé dans  $\mathbb{X}(D)$ . Dans l'affirmative, il suivrait, de cette remarque, qu'il est impossible d'avoir l'UEC de la paire  $(A, B)$  si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$ . La réponse à cette question est en générale négative. Pour voir cela, considérons le cas  $m = 2$ ,  $D = \{\theta \in \mathbb{C} \mid |\theta| \leq 1\}$  et  $b_1(\theta) = \bar{\theta}$  pour tout  $\theta \in D$ . Posons  $N = \mathcal{H}(D)$  et  $M = b_1 \mathcal{H}(D)$ . Puisque  $b_1$  n'est holomorphe sur aucun ouvert contenu dans  $D$ , on a  $M \cap N = \{0\}$ . De ce fait, on déduit de [96, Theorem 1.1] que  $M + N$  est fermé si et seulement s'il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que pour tout  $f \in M$  et tout  $g \in N$ ,

$$\|f\|_\infty \leq \kappa \|f + g\|_\infty. \quad (5.36)$$

Nous allons nier l'inégalité (5.36) en montrant qu'il existe une suite  $f_n \in \mathcal{H}(D)$  telle que  $\|f_n\|_\infty = 1$  et une suite  $g_n \in \mathcal{H}(D)$  telle que

$$\|f_n + b_1 g_n\|_\infty < \frac{1}{n}.$$

Prenons à cet effet  $f_n(\theta) = \theta^{2n}$ ,  $g_n(\theta) = -(n/(n+1))\theta^{2n+1}$ . On a bien que  $f_n \in \mathcal{H}(D)$  et  $\|f_n\|_\infty = 1$ . De plus, on a

$$\|f_n + b_1 g_n\|_\infty = \sup_{\theta \in \mathbb{D}} |f_n(\theta) - b_1(\theta)g_n(\theta)| = \sup_{r \in [0,1]} |r^{2n} - (n/(n+1))r^{2n+1}|.$$

En posant  $\zeta_n(r) = r^{2n} - (n/(n+1))r^{2n+1}$ , on a  $\zeta_n'(r) = nr^{2n-1}(1-r)$ . Ce qui montre que  $\zeta_n'$ , pour  $n$  non nul, s'annule pour  $r = 0$  et  $r = 1$ . Puisque  $\zeta_n'$  est positive sur  $[0, 1]$  et s'annule en 0, on déduit donc que la fonction  $\zeta_n$  atteint son maximum en  $r = 1$  avec  $\zeta_n(1) = 1 - (n/(n+1))$ , ce qui implique que

$$\|f_n + b_1 g_n\|_\infty = \frac{1}{n+1}$$

et donc que l'inégalité (5.36) n'est pas satisfaite.

Ce qui précède montre que  $M + N$  n'est pas fermé et illustre aussi le fait qu'une somme de sous-espaces fermés n'est pas toujours fermée en dimension infinie.

Dans le cas général, la question de densité (5.34) est formulée comme ouverte dans [86, Section 3]. Plusieurs travaux existent dans la littérature sur ce type de sujets mais nous n'avons pas été en mesure de localiser ou de donner une réponse définitive à cette question. Parmi ces travaux, on peut citer [18, 19, 32, 36, 70].

Dans le cas où le spectre de  $A(\theta)$  rencontre l'axe réel pour tout  $\theta$  dans  $\mathcal{P}$ , on a le résultat suivant.

**Théorème 5.2.5.** *Supposons que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$  et que pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $\sigma(A(\theta)) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ . Alors la paire  $(A, B)$  ne peut pas être UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ .*

*Démonstration.*

La preuve que nous proposons pour ce résultat suit exactement le même schéma que celle du Théorème 5.2.1 à la seule différence qu'on montre que sous les hypothèses de ce théorème, si la paire  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ , on peut construire une valeur propre réelle continue et injective d'une boule fermée de  $\mathbb{C}$  à valeur réelle, ce qui contredit le fait qu'il n'existe pas d'application continue et injective de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  (cf. [15, Theorem 20.2, p.242]).

Supposons donc que les hypothèses du Théorème 5.2.5 sont satisfaites et que la paire  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ .

• *Sélection continue d'une valeur propre réelle.*

Pour commencer, prenons  $\mathcal{O}$  un ouvert non vide contenu dans  $\mathcal{P}$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est supposé posséder un point intérieur, un tel ouvert existe.

Définissons

$$k_0 = \min \{n_z \mid z \in \sigma(A(\theta)) \cap \mathbb{R}, \theta \in \mathcal{O}\}, \quad (5.37)$$

où pour  $\theta$  pris dans  $\mathcal{O}$  et tout  $z \in \sigma(A(\theta))$ ,  $n_z$  est la multiplicité algébrique de  $z$  dans le polynôme caractéristique de  $A(\theta)$ .

Comme, par hypothèse,  $\sigma(A(\theta))$  intersecte l'axe réel pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , alors l'ensemble

$$\{n_z \mid z \in \sigma(A(\theta)) \cap \mathbb{R}, \theta \in \mathcal{O}\}$$

est un sous ensemble fini et non vide de  $\mathbb{N}^*$  et de ce fait, l'entier  $k_0$  existe (et  $k_0 \geq 1$ ).

Soit  $\theta_0$  un élément de  $\mathcal{O}$  en lequel  $k_0$  est atteint et  $\lambda_0$  un élément de  $\sigma(A(\theta_0)) \cap \mathbb{R}$  tel que  $n_{\lambda_0} = k_0$ .

En posant  $m_0 = \sum_{z \in \sigma(A(\theta_0)) \cap \mathbb{R}} n_z$ , on a

$$m_0 \leq n \quad \text{et} \quad m_0 \geq k_0 \# (\sigma(A(\theta_0)) \cap \mathbb{R}).$$

Soit  $d$  la distance entre  $\{\lambda_0\}$  et  $\sigma(A(\theta_0)) \setminus \{\lambda_0\}$ .

Enfin prenons  $\varepsilon_0 < d$  et  $\gamma$  une courbe régulière fermée encerclant  $\lambda_0$  et strictement contenue dans  $B_{\lambda_0}(\varepsilon_0)$ .

En procédant comme dans l'item (1) du Lemme 5.2.2, on déduit qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta)$ , la matrice  $A(\theta)$  admet  $k_0$  valeurs propres intérieures à  $B_{\lambda_0}(\varepsilon_0)$ , c'est-à-dire  $\sum_{z \in \sigma(A(\theta)) \cap B_{\lambda_0}(\varepsilon_0)} n_z = k_0$ .

Dans le cas présent, deux situations, qui ne s'excluent pas mutuellement, peuvent se produire :

(s<sub>1</sub>) il existe  $\delta_0 \leq \delta$  tel que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$  on a  $\sigma(A(\theta)) \cap B_{\lambda_0}(\varepsilon_0) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ ,

(s<sub>2</sub>) il existe  $\theta_0^1 \in B_{\theta_0}(\delta)$  tel que  $\sigma(A(\theta_0^1)) \cap B_{\lambda_0}(\varepsilon_0) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ .

Si  $(s_1)$  se produit, on a nécessairement, grâce au choix de  $k_0$  dans (5.37),  $\#(\sigma(A(\theta)) \cap B_{\lambda_0}(\varepsilon_0)) = 1$  et on définit  $\lambda : B_{\theta_0}(\delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui à tout  $\theta \in B_{\theta_0}(\delta_0)$  associe l'unique élément de  $\sigma(A(\theta)) \cap B_{\lambda_0}(\varepsilon) \cap \mathbb{R}$ . On peut montrer en suivant les mêmes arguments que dans l'item (1) du Lemme 5.2.2 que  $\lambda$  est continue et de multiplicité algébrique constante  $k_0$  sur  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ .

Si  $(s_1)$  ne se produit pas, alors  $(s_2)$  a lieu. On déduit donc du théorème de Rouché (Théorème 5.1.3) qu'il existe  $\delta_1 > 0$  tel que pour tout  $\theta \in B_{\theta_0^1}(\delta_1)$ , la matrice  $A(\theta)$  admette  $k_0$  valeur(s) propre(s) complexe(s).

Dans ce cas, posons  $\mathcal{P}_1 = B_{\theta_0^1}(\delta_1)$  et définissons

$$k_1 := \min \{n_z \mid z \in \sigma(A(\theta)) \cap \mathbb{R}, \theta \in \mathcal{P}_1\}.$$

Soit  $\theta_1$  un élément de  $\mathcal{P}_1$  en lequel  $k_1$  est atteint et  $\lambda_1$  un élément de  $\sigma(A(\theta_1)) \cap \mathbb{R}$  tel que  $n_{\lambda_1} = k_1$ . En posant  $m_1 = \sum_{\lambda \in \sigma(A(\theta_1)) \cap \mathbb{R}} n_\lambda$ , on a

$$k_0 \leq k_1 \quad \text{et} \quad k_1 \#(\sigma(A(\theta_1)) \cap \mathbb{R}) \leq m_1 \leq n - k_0.$$

On recommence le processus précédent en faisant jouer à  $\theta_1$  le rôle de  $\theta_0$ ,  $k_1$  celui de  $k_0$ ,  $\lambda_1$  celui de  $\lambda_0$  et  $\mathcal{P}_1$  celui de  $\mathcal{P}_0 := \emptyset$ .

En itérant le processus  $\ell$  fois, on a l'existence de  $\ell$  nombres complexes  $\theta_j$ ,  $\ell$  ensembles  $\mathcal{P}_j$  avec  $\mathcal{P}_{j+1} \subsetneq \mathcal{P}_j$ ,  $\theta_j \in \mathcal{P}_j \setminus \mathcal{P}_{j+1}$ ,  $\ell$  entiers  $k_j$  satisfaisant  $k_j \leq k_{j+1}$  et enfin  $\ell$  entiers  $m_j$  satisfaisant  $\#(\sigma(A(\theta_j)) \cap \mathbb{R}) \leq m_j \leq n - jk_0$  ceci pour tout  $j \in \mathbb{N}_\ell^*$ .

Puisque par hypothèse  $\sigma(A(\theta)) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , on déduit donc de ce qui précède qu'on fini nécessairement dans  $(s_1)$  en au plus  $n$  itérations (exactement  $n$  si  $k_0 = 1$ ).

Nous avons donc prouvé que sous les hypothèses du Théorème 5.2.5 il existe une boule  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  contenue dans  $\mathcal{P}$  sur laquelle la matrice  $A$  admet une sélection continue d'une valeur propre réelle  $\lambda$  de multiplicité algébrique constante  $k_0$ .

• *Injectivité de  $\lambda$ .*

Ici, nous allons montrer que si la paire  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ , quitte à réduire la taille de  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ ,  $\lambda$  est injective sur cette boule.

Supposons par contraposition que pour tout  $\delta \leq \delta_0$ ,  $\lambda$  ne soit pas injective sur  $B_{\theta_0}(\delta)$ .

Ainsi, il existe  $\theta_1 \neq \theta_2$  tels que  $\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2)$ .

Si  $\lambda(\theta_1) \neq \lambda(\theta_0)$ , alors on utilise la connexité par arcs de  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  pour construire  $m + 1$  chemins distincts  $\gamma_\ell : [0, 1] \rightarrow B_{\theta_0}(\delta_0)$  reliant  $\theta_0$  à  $\theta_1$  puis on applique le Théorème des Valeurs Intermédiaires aux fonctions  $\lambda \circ \gamma_\ell$  pour déduire l'existence de  $m + 1$  complexes distincts  $\tilde{\theta}_0, \dots, \tilde{\theta}_m$  dans  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  tels que  $\lambda(\tilde{\theta}_0) = \dots = \lambda(\tilde{\theta}_m)$ . Ce qui contredit la propriété (5.26).

Si  $\lambda(\theta_2) = \lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_0)$  alors soit  $\theta_1 = \theta_0$  soit  $\theta_2 = \theta_0$  soit  $\theta_1, \theta_2$  sont tous distincts de  $\theta_0$ .

Supposons sans perte de généralité que  $\theta_1 \neq \theta_0$  et choisissons  $\delta_1 < \delta_0$  tel que  $\theta_1 \notin B_{\theta_0}(\delta_1)$ .

Puisque par hypothèse  $\lambda$  n'est pas injective sur  $B_{\theta_0}(\delta_1)$ , il existe  $\theta_3 \neq \theta_4$  dans  $B_{\theta_0}(\delta_1)$  tels que  $\lambda(\theta_3) = \lambda(\theta_4)$ .

De nouveau, si  $\lambda(\theta_3) \neq \lambda(\theta_0)$ , on utilise l'argument des  $m + 1$  courbes et le Théorème des Valeurs Intermédiaires nous conduit à une contradiction. Dans le cas où  $\lambda(\theta_3) = \lambda(\theta_0)$ , on a de nouveau soit  $\theta_3 = \theta_0$ , soit  $\theta_4 = \theta_0$ , soit  $\theta_3$  et  $\theta_4$  sont tous différents de  $\theta_0$ .

Supposons sans perte de généralité que  $\theta_3 \neq \theta_0$ .

Remarquons qu'à cette étape, on a trois nombres complexes distincts  $\theta_0, \theta_1$  et  $\theta_3$  tels que  $\lambda(\theta_0) = \lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_3)$ .

On continue le processus en séparant  $\theta_3$  de  $\theta_0$ . Le processus prend nécessairement fin après  $m$

itérations car au bout de  $m$  itérations, on aurait construit  $m + 1$  complexes deux à deux distincts  $\tilde{\theta}_0, \dots, \tilde{\theta}_m$  contenus dans  $B_{\theta_0}(\delta_0)$  tels que  $\lambda(\tilde{\theta}_0) = \dots = \lambda(\tilde{\theta}_m)$  contredisant de nouveau la propriété (5.26).

On vient donc de montrer que sous hypothèse d'UEC de la paire  $(A, B)$ , quitte à réduire la taille de  $B_{\theta_0}(\delta_0)$ ,  $\lambda$  est injective sur cette boule.

• *Conclusion de la preuve.*

Nous avons prouvé que sous les hypothèses du Théorème 5.2.5, si la paire  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  alors la matrice  $A$  admet une valeur propre réelle continue et injective sur un sous ensemble compact d'intérieur non vide contenu dans  $\mathcal{P}$ . Ceci implique l'existence d'une application continue et injective de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , ce qui est impossible d'après [15, Theorem 20.2, p.242].  $\square$

La conclusion du Théorème 5.2.5 reste vraie même si  $\mathcal{P}$  est un compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^d$  ceci pour tout  $d \geq 2$ .

En effet, si  $\mathcal{P}$  est un compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^d$  pour tout  $d \geq 2$ , il existe  $(\theta_3, \dots, \theta_d) \in \mathbb{R}^{d-2}$  et  $\hat{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^2$  d'intérieur non vide tels que  $\{(\theta_3, \dots, \theta_d)\} \times \hat{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ . Si le système  $(A, B)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^n$ , sa restriction à l'ensemble  $\{(\theta_3, \dots, \theta_d)\} \times \hat{\mathcal{P}}$  serait UEC, ce qui serait en contradiction avec le résultat du Théorème 5.2.5.

Une autre façon de le voir est de remarquer, tout comme dans la Remarque 5.2.3, que dans la preuve fournie pour ce théorème, nous avons construit, sous hypothèse d'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(A, B)$  (avec  $\mathcal{P}$  d'intérieur non vide), une valeur propre réelle, continue et injective sur une boule ouverte contenue dans  $\mathcal{P}$ . Mais puisque toute boule ouverte de  $\mathbb{R}^d$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^d$ , on a donc construit une application continue et injective de  $\mathbb{R}^d$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Ce qui est en contradiction avec [15, Theorem 20.2, p.242] pour  $d = 3$  et donc pour tout  $d > 2$ .

**Remarque 5.2.10.**

*La conclusion du Théorème 5.2.5 reste vraie si au lieu de  $\sigma(A(\theta)) \cap \mathbb{R}$  non vide pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , on suppose :  $\sigma(A(\theta)) \cap V$  non vide pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  avec  $V$  une sous variété continue de  $\mathbb{C}$  de dimension réelle 1.*

Pour clore cette section dédiée à l'uniforme ensemble contrôlabilité, notons que même si nous pensons que la paire  $(A, B)$  ne peut être UEC si l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  est homéomorphe à un compact d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^d$  pour tout  $d \geq 2$ , le prouver avec  $A$  et  $B$  uniquement continues (sans restriction sur le spectre de  $A$ ) reste une question ouverte. Aussi, il est important de spécifier que les résultats de non contrôlabilité obtenus ne s'appliquent qu'aux systèmes linéaires. On peut consulter par exemple [24] où l'auteur donne des exemples de systèmes non-linéaires affines contrôlables avec des espaces de paramétrisation d'intérieur non vide par rapport à la topologie qu'il considère.

## 5.3 Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie

Dans cette section, nous présentons les résultats que nous avons obtenu pour l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie. Dans un premier temps, nous donnons un résultat de non contrôlabilité, conséquence directe du lemme de restriction. Ensuite nous donnons des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'UEC de la sortie pour des structures particulières dans le but de les utiliser

pour déduire les résultats de contrôlabilité pour des systèmes plus généraux. Résultats que nous donnerons à la fin de cette section.

### 5.3.1 Résultat de non contrôlabilité pour les systèmes holomorphes

Dans le cas où le système  $(A, B, C)$  est holomorphe, c'est-à-dire que les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont holomorphes, on a le résultat suivant :

**Théorème 5.3.1.** *Supposons que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$ .*

*S'il existe un ouvert non vide  $\mathcal{O}$  contenu dans  $\mathcal{P}$  sur lequel le système  $(A, B, C)$  est holomorphe, alors ce système ne peut pas être UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .*

*Démonstration.*

Supposons que  $\mathcal{P}$  soit un compact d'intérieur non vide dans  $\mathbb{C}$  et qu'il existe un ouvert  $\mathcal{O}$  sur lequel les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont holomorphes. Soit  $K$  une boule fermée contenue dans  $\mathcal{O}$ .

Si le système  $(A, B, C)$  était UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ , il serait, d'après le lemme de restriction, UECS sur  $\mathbb{X}(K)^q$ . Ainsi, pour tout  $f \in \mathbb{X}(K)^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existerait une suite  $(p_1^k, \dots, p_m^k)_k$  de polynômes complexes telle que  $\left\| \sum_{j=1}^m C p_j^k(A) b_j - f \right\|_\infty$  tende vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini.

Puisque les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont holomorphes, alors il existerait une suite de fonctions holomorphes  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles  $\|f_k - f\|_\infty$  tende vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini et donc on aurait la convergence uniforme de  $f_k$  vers  $f$  sur  $K$ . Il suivrait donc que  $f$  est holomorphe à l'intérieur de  $K$ .  $\square$

#### Remarque 5.3.1.

*Observons que l'argument principal utilisé dans la preuve précédente est le fait que si une suite de fonctions holomorphes converge uniformément sur tout compact d'un ouvert, alors la fonction limite est non seulement continue mais elle est aussi holomorphe sur l'ouvert, voir [67, Theorem 1.4]. Ce qui n'est plus vrai en analyse réelle car dans ce cadre, la convergence uniforme ne préserve, en général, pas la dérivabilité [33, p.93].*

*De ce fait, pour un système réel analytique défini sur un compact de  $\mathbb{R}$ , on peut avoir l'UECS sans que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur non vide dans  $\mathbb{R}$ .*

*Considérons par exemple le système suivant.*

$$\mathcal{P} = [-1, 1], \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \theta & 1 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}, \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On voit que  $\mathcal{P}$  n'est pas d'intérieur vide dans  $\mathbb{R}$ . En revanche, une application immédiate du Théorème 5.3.4 montre que ce système est uniformément ensemble contrôlable en sortie sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .*

### 5.3.2 Résultats sur des structures particulières

Nous débutons ce paragraphe avec le plus simple des systèmes : le cas scalaire, c'est-à-dire le cas  $n = q = m = 1$ . On pose donc  $(A, B, C) = (\lambda, b, c)$  où pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $\lambda(\theta)$ ,  $b(\theta)$  et  $c(\theta)$  sont de nombres complexes. On a le théorème suivant.

**Théorème 5.3.2.** *Soit  $\mathcal{P}$  un compact de  $\mathbb{C}$  à complémentaire connexe.*

*Le système scalaire  $(\lambda, b, c)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(5.3.2.a) Pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , le système  $(\lambda(\theta), b(\theta), c(\theta))$  est contrôlable de l'état vers la sortie (cf. Chapitre 3).

(5.3.2.b)  $\lambda$  est injective.

(5.3.2.c)  $\mathcal{P}$  est d'intérieur vide.

*Démonstration.*

• Supposons que  $(\lambda, b, c)$  soit UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

La nécessité de la condition (5.3.2.a) provient du lemme de restriction. Ceci implique aussi que pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $c(\theta) \neq 0$ . De ce fait, on déduit de la Proposition 5.1.4 que  $(\lambda, b)$  est uniformément ensemble contrôlable sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

La nécessité de (5.3.2.b) vient donc de (5.26). Rappelons que (5.26) stipule qu'une condition nécessaire d'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(\lambda, b)$  est que pour tout  $k > m = 1$ ,

$$\sigma(A(\theta_1)) \cap \cdots \cap \sigma(A(\theta_k)) = \{\lambda(\theta_1)\} \cap \cdots \cap \{\lambda(\theta_k)\} = \emptyset$$

ceci pour  $k$  nombres complexes distincts  $\theta_1, \dots, \theta_k$  pris dans  $\mathcal{P}$ . En prenant  $k = 2$  on a donc que pour tout  $\theta_1 \neq \theta_2$  pris dans  $\mathcal{P}$ ,  $\lambda(\theta_1) \neq \lambda(\theta_2)$ .

La nécessité de (5.3.2.c) vient de la Remarque 5.2.7.

• Supposons maintenant les conditions (5.3.2.a) à (5.3.2.c) vérifiées.

D'après l'hypothèse (5.3.2.a),  $c(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ . Il suffit donc, grâce à la Proposition 5.1.4, de montrer que la paire  $(\lambda, b)$  est UEC sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ . Pour ce faire, soit  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous allons donc montrer qu'il existe un polynôme complexe  $p$  tel que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} |p(\lambda(\theta))b(\theta) - f(\theta)| \leq \varepsilon.$$

Ce qui est équivalent, grâce à l'injectivité de  $\lambda$ , à montrer l'existence d'un polynôme complexe  $p$  tel que

$$\sup_{z \in \lambda(\mathcal{P})} |p(z)b \circ \lambda^{-1}(z) - f \circ \lambda^{-1}(z)| \leq \varepsilon.$$

En utilisant (5.3.2.a), on a aussi  $b(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ . Ainsi, il suffit donc de montrer que pour toute fonction  $f \in \mathbb{X}(\lambda(\mathcal{P}))$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme complexe  $p$  tel que

$$\sup_{z \in \lambda(\mathcal{P})} |p(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Nous allons montrer que  $\lambda(\mathcal{P})$  est un compact d'intérieur vide et dont le complémentaire est connexe. Ainsi, grâce au théorème de Mergelyan, Théorème 5.1.2, on déduira que toute fonction continue sur  $\lambda(\mathcal{P})$  peut être approximée par un polynôme. Ce qui achèvera la preuve.

Observons déjà que comme  $\lambda : \mathcal{P} \rightarrow \lambda(\mathcal{P})$  est un homéomorphisme et que  $\mathcal{P}$  est un compact d'intérieur vide,  $\lambda(\mathcal{P})$  est aussi un compact d'intérieur vide.

Il reste donc à montrer que le complémentaire de  $\lambda(\mathcal{P})$  est connexe.

On suppose, sans perte de généralité, que  $\mathcal{P}$  est simplement connexe. Si ce n'est pas le cas, il faut écrire  $\mathcal{P}$  comme une réunion disjointe de ses composantes connexes. Puisque  $\mathcal{P}$  est un compact de  $\mathbb{C}$  et que  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$  est connexe alors les composantes connexes de  $\mathcal{P}$  sont simplement connexes car  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$  est connexe par arc.

En effet, si une composante connexe de  $\mathcal{P}$  n'est pas simplement connexe et donc contient un trou,

la connexité par arc de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}$  implique qu'on peut relier un point de ce trou n'appartenant pas à  $\mathcal{P}$  à un autre point n'appartenant pas à  $\mathcal{P}$  et qui est en dehors de la partie bornée de cette composante connexe. Ce qui est impossible dans le plan. Donc les composantes connexes de  $\mathcal{P}$  sont nécessairement simplement connexes.

Montrons maintenant que si  $\mathcal{P}$  est simplement connexe, alors  $\lambda(\mathcal{P})$  est simplement connexe. Soit  $\gamma$  un lacet dans  $\lambda(\mathcal{P})$ . Puisque  $\lambda$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{P}$  dans  $\lambda(\mathcal{P})$  alors  $\lambda^{-1}(\gamma)$  est une courbe fermée dans  $\mathcal{P}$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est simplement connexe, il existe une application continue  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$  telle que  $H(0, t) = \lambda^{-1} \circ \gamma(t)$  et  $H(1, t) = \theta_0$  pour un  $\theta_0 \in \mathcal{P}$ . L'application  $\lambda \circ H$  est une application continue de  $[0, 1] \times [0, 1]$  dans  $\lambda(\mathcal{P})$  avec  $\lambda \circ H(0, t) = \gamma(t)$  et  $\lambda \circ H(1, t) = \lambda(\theta_0) \in \lambda(\mathcal{P})$ . Ceci montre que tout lacet de  $\lambda(\mathcal{P})$  est homotope à un lacet constant et donc que  $\lambda(\mathcal{P})$  est simplement connexe. En plus de la compacité de  $\lambda(\mathcal{P})$ , on déduit que  $\mathbb{C} \setminus \lambda(\mathcal{P})$  est connexe. On a donc prouvé que  $\lambda(\mathcal{P})$  est un compact à complémentaire connexe d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Pour un système scalaire avec plusieurs entrées, c'est-à-dire  $n = q = 1$  et  $m > 1$ , le théorème suivant donne des conditions suffisantes de contrôlabilité.

**Théorème 5.3.3.** *Soit  $\mathcal{P}$  un compact contractile de  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $b = (b_1, \dots, b_m) : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}_m$  et  $c : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$  des applications continues.*

*Le système  $(\lambda, b, c)$  est uniformément ensemble contrôlable en sortie sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(5.3.3.a) *Pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , le système  $(\lambda(\theta), b(\theta), c(\theta))$  est contrôlable de l'état vers la sortie.*

(5.3.3.b)  *$\lambda$  est injective sur  $\mathcal{P}$ .*

(5.3.3.c)  *$\mathcal{P}$  est d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ .*

Observons que dans le cadre d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie, il fait sens de considérer les systèmes avec  $m > n$  car l'état du système vit dans un espace de dimension infinie.

*Démonstration.*

Supposons donc que les conditions (5.3.3.a) à (5.3.3.c) soient satisfaites.

Puisque  $\lambda$  est supposée continue et injective et donc est un homéomorphisme de  $\mathcal{P}$  dans  $\lambda(\mathcal{P})$ , on peut de nouveau, grâce à la Proposition 5.1.3, se limiter à prouver l'uniforme ensemble contrôlabilité de sortie du triplet  $(i_d, b, c)$  où  $i_d$  est l'application identité de  $\mathcal{P}$ .

En utilisant la condition (5.3.3.a), on peut aussi prendre sans perte de généralité, grâce à la Proposition 5.1.4,  $c(\theta) = 1$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ . On est donc ramené à prouver l'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(i_d, b)$  sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

Soit donc  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous allons montrer qu'il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que

$$\left\| \sum_{k=1}^m p_k(i_d) b_k - f \right\|_{\infty} = \sup_{\theta \in \mathcal{P}} \left| \sum_{k=1}^m p_k(\theta) b_k(\theta) - f(\theta) \right| \leq \varepsilon. \quad (5.38)$$

Grâce à l'hypothèse (5.3.3.a), on a  $\text{rk}(b(\theta)) = 1$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ . De plus,  $\mathcal{P}$  est compact et contractile. De ce fait, on déduit du Théorème 5.1.1, qu'il existe  $m$  fonctions continues  $c_1, \dots, c_m$  telles que  $b_1(\theta)c_1(\theta) + b_2(\theta)c_2(\theta) + \dots + b_m(\theta)c_m(\theta) = 1$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ . Il suit donc que pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , on a

$$f(\theta) = f(\theta)c_1(\theta)b_1(\theta) + \dots + f(\theta)c_m(\theta)b_m(\theta). \quad (5.39)$$

Observons maintenant que pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$ , les fonctions  $f c_k$  sont des fonctions continues sur  $\mathcal{P}$ . Puisque  $\mathcal{P}$  est un compact contractile, on déduit de [73, Proposition 4.2.8] que le complémentaire de  $\mathcal{P}$  est connexe. De plus, par hypothèse,  $\mathcal{P}$  est d'intérieur vide. On déduit donc du théorème de Mergelyan qu'il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$ , on aie

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} |p_k(\theta) - c_k(\theta)f(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad (5.40)$$

avec  $\alpha = \sum_{k=1}^m \sup_{\theta \in \mathcal{P}} |b_k(\theta)| > 0$ .

La relation (5.38) avec les polynômes  $p_1, \dots, p_m$  combinée avec (5.39) et (5.40) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in \mathcal{P}} \left| \sum_{k=1}^m p_k(\theta)b_k(\theta) - f(\theta) \right| &= \sup_{\theta \in \mathcal{P}} \left| \sum_{k=1}^m p_k(\theta)b_k(\theta) - \sum_{k=1}^m f(\theta)c_k(\theta)b_k(\theta) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sup_{\theta \in \mathcal{P}} |(p_k(\theta) - f(\theta)c_k(\theta))b_k(\theta)| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \sup_{\theta \in \mathcal{P}} |b_k(\theta)| \sup_{\theta \in \mathcal{P}} |p_k(\theta) - f(\theta)c_k(\theta)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{k=1}^m \sup_{\theta \in \mathcal{P}} |b_k(\theta)| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la paire  $(i_d, b)$  est uniformément ensemble contrôlable sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .  $\square$

### Remarque 5.3.2.

• Dans le cas où  $n = m = q = 1$ , nous avons vu, à travers le Théorème 5.3.2, que l'injectivité de  $\lambda$  était nécessaire. Dans le cas où  $n = q = 1$  et  $m > 1$ , cette condition n'est plus nécessaire. Pour voir cela, supposons que les conditions (5.3.3.a) et (5.3.3.c) soient satisfaites. On peut donc prendre  $c(\theta) = 1$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ . Dans ce cas, l'UECS du triplet  $(\lambda, b, c)$  est équivalente à l'UEC de la paire  $(\lambda, b)$ .

Montrer que la paire  $(\lambda, b)$  est UEC revient donc à montrer que pour toute fonction  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m$  polynômes complexes  $p_1, \dots, p_m$  tels que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} \left| \sum_{k=1}^m p_k(\lambda(\theta))b_k(\theta) - f(\theta) \right| \leq \varepsilon.$$

Mais étant donné que  $\mathcal{P}$  est compact, contractile et d'intérieur vide, il suffit donc de prouver la relation précédente uniquement pour les polynômes puisque l'espace engendré par les polynômes est dense dans  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

Une façon de voir que l'injectivité de  $\lambda$  n'est pas une condition nécessaire dans le cas  $m > 1$  est de remarquer que dans certains cas, l'équation  $\sum_{k=1}^m p_k(\lambda)b_k - p = 0$  admet une solution polynomiale ceci pour tout polynôme  $p$ .

Comme exemple, prenons  $\mathcal{P} = [-1, 1]$ ,  $\lambda(\theta) = \theta^2$  et  $b(\theta) = (1, \theta, \dots)$ . Ici, on voit que  $\lambda$  n'est pas injective sur  $\mathcal{P}$ . Observons cependant que pour tout polynôme  $p$ , on peut toujours trouver deux polynômes  $p_1$  et  $p_2$  tels que  $p_1(\theta^2) + \theta p_2(\theta^2) = p(\theta)$ . Il suffit d'écrire  $p = p_+ + p_-$  où  $p_+$  et  $p_-$  désignent respectivement la partie paire et impaire du polynôme  $p$ . Le polynôme  $p_1$  satisfait donc  $p_1(\theta^2) = p_+(\theta)$  et le polynôme  $p_2$  satisfait  $\theta p_2(\theta^2) = p_-(\theta)$ .

Même si l'injectivité n'est plus une condition nécessaire dans le cas  $m > 1$ , la condition (5.26) reste nécessaire, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes distincts  $\theta_0, \dots, \theta_m$  pris dans  $\mathcal{P}$ , il

existe  $k, \ell \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$  tels que  $\lambda(\theta_k) \neq \lambda(\theta_\ell)$ .

- La nécessité de la condition (5.3.3.c) ne nous est pas claire, excepté dans le cas où  $(\lambda, b)$  est régulier. Dans ce cas, la nécessité est une conséquence du Théorème 5.2.1.
- Grâce au lemme de restriction, la condition (5.3.3.a) reste quant-à-elle nécessaire.

Dans le théorème suivant, nous considérons le cas où  $A$  a une structure de bloc de Jordan. Les matrices  $B$  et  $C$  seront supposées constantes. Aussi, on supposera dans le théorème que  $B$  et  $C$  sont respectivement des vecteurs colonne et ligne.

**Théorème 5.3.4.** Soit  $\mathcal{P}$  un compact de  $\mathbb{C}$  à complémentaire connexe. Le système  $(A, B, C)$  défini, pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , par

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \lambda(\theta) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_n^n, \quad B(\theta) \equiv B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

et  $C(\theta) \equiv C = (c_1 \ \dots \ c_n) \in \mathbb{C}_n$ , (5.41)

est uniformément ensemble contrôlable en sortie sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

- (5.3.4.a) Pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , le système  $(A(\theta), B, C)$  est contrôlable de l'état vers la sortie.
- (5.3.4.b)  $\lambda$  est injective sur  $\mathcal{P}$ .
- (5.3.4.c)  $\mathcal{P}$  est d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ .

*Démonstration.*

Nous faisons la preuve dans le cas  $n = 2$ , c'est-à-dire le cas où

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \lambda(\theta) & 1 \\ 0 & \lambda(\theta) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = (c_1 \ c_2). \quad (5.42)$$

Le cas général suit les mêmes arguments. Nous rappelons que  $B$  et  $C$  sont des vecteurs constants.

- Nécessité des conditions (5.3.4.a)-(5.3.4.c).

Supposons que le système (5.42) soit uniformément ensemble contrôlable en sortie sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

Grâce au résultat d'approximation polynômiale (5.17), on a

$$\overline{\text{span} \{ CA^k B, k \in \mathbb{N} \}} = \mathbb{X}(\mathcal{P}). \quad (5.43)$$

En posant  $\alpha_0 = c_1 b_1 + c_2 b_2 \in \mathbb{C}$  et  $\alpha_1 = c_1 b_2 \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} \text{span} \{ CA^k B \mid k \in \mathbb{N} \} &= \text{span} \{ \alpha_0, \alpha_0 \lambda^k + k \alpha_1 \lambda^{k-1} \mid k \in \mathbb{N}^* \} \\ &\subset \text{span} \{ \alpha_0 \lambda^k \mid k \in \mathbb{N} \} + \text{span} \{ k \alpha_1 \lambda^{k-1} \mid k \in \mathbb{N}^* \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{span} \{ \alpha_0 \lambda^k \mid k \in \mathbb{N} \} + \text{span} \{ \alpha_1 \lambda^k \mid k \in \mathbb{N} \} \\
 &= \begin{cases} \{0\} & \text{si } \alpha_0 = \alpha_1 = 0, \\ \text{span} \{ \lambda^k \mid k \in \mathbb{N} \} & \text{si } \text{rk}(\alpha_0, \alpha_1) = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

De la relation (5.43), on a donc nécessairement

$$\text{rk}(\alpha_0, \alpha_1) = 1 \quad \text{et} \quad \overline{\text{span} \{ \lambda^k \mid k \in \mathbb{N} \}} = \mathbb{X}(\mathcal{P}).$$

On a donc la nécessité de la condition (5.3.4.a) car  $\text{rk}(\alpha_0, \alpha_1) = 1$  et le fait que  $\overline{\text{span} \{ \lambda^k \mid k \in \mathbb{N} \}} = \mathbb{X}(\mathcal{P})$  montre que la paire  $(\lambda, 1)$  est uniformément ensemble contrôlable sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ , ce qui implique, en vertu du Théorème 5.3.2, que les critères (5.3.4.b) et (5.3.4.c) sont satisfaits.

• *Suffisance des conditions (5.3.4.a)-(5.3.4.c).*

Grâce à l'hypothèse (5.3.4.b), on peut de nouveau supposer que  $\lambda = i_d$  de  $\mathcal{P}$ . Il nous reste donc à montrer que sous les hypothèses (5.3.4.a) et (5.3.4.c), le système  $(A(\theta), B, C)$  avec  $\lambda(\theta) = \theta$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ , ce qui revient à prouver que pour toute fonction  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme complexe  $p$  tel que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} |Cp(A(\theta))B - f(\theta)| = \sup_{\theta \in \mathcal{P}} |\alpha_1 p'(\theta) + \alpha_0 p(\theta) - f(\theta)| \leq \varepsilon. \quad (5.44)$$

Puisque  $\mathcal{P}$  est un compact à complémentaire connexe et d'intérieur vide, le Théorème 5.1.2 montre que l'espace vectoriel engendré par les polynômes est dense dans l'espace  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$  et donc qu'il suffit de prouver la relation (5.44) pour les polynômes. Pour être plus explicite, il suffit de prouver que pour tout polynôme  $p_1$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme complexe  $p$  tel que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} |\alpha_0 p(\theta) + \alpha_1 p'(\theta) - p_1(\theta)| \leq \varepsilon. \quad (5.45)$$

Pour montrer que (5.45) est satisfaite, nous allons prouver que l'équation

$$\alpha_0 p + \alpha_1 p' = p_1, \quad (5.46)$$

admet une solution polynomiale  $p$  sur  $\mathcal{P}$ .

Grâce à la condition (5.3.4.a), l'un, au moins, des nombres complexes  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  est non nul. En effet, puisque pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  le triplet  $(i_d, B, C)$  est contrôlable de l'état vers la sortie, on a, d'après (3.1.1.b),

$$\text{rk}(CB|CA(\theta)B) = \text{rk}(\alpha_0, \alpha_0\theta + \alpha_1) = 1.$$

Ce qui prouve que  $\text{rk}(\alpha_0, \alpha_1) = 1$  et donc qu'au moins un des complexes  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  est non nul.

Si  $\alpha_0 = 0$ , alors  $\alpha_1 \neq 0$  et tout polynôme  $p$  tel que  $p' = p_1/\alpha_1$  satisfait (5.46) et donc (5.45).

Supposons maintenant  $\alpha_0$  non nul et puisque  $p_1$  est un polynôme, posons  $p_1(\theta) = \sum_{k=0}^N p_{1,k} \theta^k$ .

Choisissons aussi  $p(\theta) = \sum_{k=0}^N p_k \theta^k$ .

En substituant  $p$  et  $p_1$  par leur expression dans (5.46), on déduit que les coefficients de  $p$  doivent satisfaire

$$\begin{cases} \alpha_0 p_{k-1} = p_{1,k-1} - \alpha_1 k p_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*, \\ \alpha_0 p_N = p_{1,N}. \end{cases} \quad (5.47)$$

De la relation (5.47), on déduit que le polynôme  $p(\theta) = \sum_{k=0}^N p_k \theta^k$  avec  $p_N = p_{1,N}/\alpha_0$  et  $p_{k-1} = (p_{1,k-1} - \alpha_1 k p_k)/\alpha_0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  satisfait la relation (5.46) et donc l'inégalité (5.45).  $\square$

**Remarque 5.3.3.**

Observons que dans le Théorème 5.3.4, le fait que la matrice  $B$  soit réduite à un vecteur colonne n'est pas important. Les conditions de ce théorème restent nécessaires et suffisantes pourvu que la matrice  $B$  reste constante, ceci quelque soit le nombre d'entrées, et le vecteur  $C$  reste constant également.

On peut aussi remarquer que ce théorème s'étend au cadre des systèmes pour lesquels les vecteurs  $B$  et  $C$  dépendent du paramètre  $\theta$  mais les coefficients  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  restent constants.

Dans le cas où les vecteurs  $B$  et  $C$  dépendent du paramètre  $\theta$  et que les coefficients  $\alpha_0(\theta) = c_1(\theta)b_1(\theta) + c_2(\theta)b_2(\theta)$ ,  $\alpha_1(\theta) = c_1(\theta)b_2(\theta)$  dépendent de  $\theta$ , l'analyse de l'uniforme ensemble contrôlabilité du système  $(A(\theta), B, C)$  ne nous est pas claire en toute généralité.

Nous discutons, dans les remarques suivantes, de quelques cas particuliers de systèmes où les conditions du Théorème 5.3.4 restent suffisantes. Dans ces remarques nous considérons toujours le système (5.42) où les vecteurs  $B$  et  $C$  dépendent maintenant du paramètre  $\theta$ .

Rappelons que sous les hypothèses du Théorème 5.3.4, pour montrer l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie du système (5.42) il suffit de prouver que pour tout polynôme  $p_1$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe un polynôme complexe  $p$  tel que l'inégalité (5.45), avec  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  dépendants de  $\theta$ , soit satisfaite.

**Remarque 5.3.4.**

Dans cette remarque, nous discutons le cas où les coefficients  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des polynômes en  $\theta$  dans l'équation (5.46).

Dans ce cas, en posant  $d_0 = d^\circ(\alpha_0)$ ,  $d_1 = d^\circ(\alpha_1)$ ,  $d_p = d^\circ(p)$  et  $d_{p_1} = d^\circ(p_1)$ , on voit que si l'on se donne  $d_{p_1}$ , le nombre d'équations et d'inconnues dans l'équation (5.46) sont respectivement  $\max\{d_0 + d_p, d_1 + d_p - 1, d_{p_1}\} + 1$  et  $d_p + 1$ . Ainsi, une condition nécessaire pour que l'équation (5.46) admette une solution polynômiale est  $\max\{d_0 + d_p, d_1 + d_p - 1, d_{p_1}\} \leq d_p$ , c'est-à-dire  $\max\{d_0, d_1 - 1, d_{p_1} - d_p\} \leq 0$ . De ce fait, pour que l'équation (5.46) admette une solution polynômiale, il est nécessaire que  $d_0 = 0$  et  $d_1 \in \{0, 1\}$ .

Si  $d_0 = d_1 = 0$ , c'est-à-dire  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  constants, on a la suffisance grâce au Théorème 5.3.4.

Supposons maintenant que  $d_0 = 0$  et  $d_1 = 1$ , c'est-à-dire  $\alpha_0(\theta) = a$ ,  $\alpha_1(\theta) = b\theta + c$  ceci pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  où  $a, b$  et  $c$  sont trois complexes avec  $b \neq 0$ .

Dans le cas présent, on peut montrer que l'équation (5.46) admet une solution polynômiale ceci pour tout polynôme  $p_1$  si et seulement si  $a \notin -b\mathbb{N}$ .

Grâce à la linéarité de l'équation (5.46), il suffit de prouver que cette équation admet une solution polynômiale pour les polynômes  $p_1(\theta) = \theta^\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ .

Prenons donc  $p_1(\theta) = \theta^\ell$  pour un certain  $\ell \in \mathbb{N}^*$ . Si l'équation (5.46) admettait une solution polynômiale, elle serait nécessairement de la forme  $p(\theta) = \sum_{k=0}^N P_k \theta^k$  pour un certain  $N \geq \ell$ . En reportant cette expression de  $p$  dans (5.46), on a

$$\alpha_0(\theta)p(\theta) + \alpha_1(\theta)p'(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} [c(k+1)P_{k+1} + (a+bk)P_k] \theta^k + (a+Nb)P_N \theta^N. \quad (5.48)$$

De l'équation précédente, on voit que s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $a = -bN$ , l'équation (5.46) n'admet

pas de solution polynômiale pour  $p_1(\theta) = \theta^N$ . En revanche, si  $a \notin -b\mathbb{N}$ , on voit que cette équation admet une unique solution polynômiale  $p$  donnée par  $p(\theta) = \sum_{k=0}^{\ell} P_k \theta^k$  avec

$$\begin{cases} P_{\ell} &= 1/(a + b\ell), \\ P_k &= c(k+1)P_{k+1}/(a + bk), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}_{<\ell}^*. \end{cases} \quad (5.49)$$

Dans la remarque précédente, le cas  $a \in -b\mathbb{N}$  peut aussi être résolu dans certains cas particuliers. C'est, par exemple, le cas où  $\mathcal{P} = [\theta_0, \theta_1] \subset \mathbb{R}$ . Avant de montrer comment résoudre ce cas critique, introduisons la remarque suivante. Notons que dans cette remarque,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  n'ont pas nécessairement besoin d'être des polynômes.

**Remarque 5.3.5.**

On suppose que  $\mathcal{P} = [\theta_0, \theta_1] \subset \mathbb{R}$  avec  $\theta_0 < \theta_1$  et que  $\alpha_1$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{P}$ . Dans ce cas, pour tout polynôme  $p_1$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme  $p$  tel que l'inégalité (5.45) soit satisfaite.

En effet, puisque  $\alpha_1$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{P}$ , on peut diviser l'équation (5.46) par  $\alpha_1$  pour obtenir

$$p'(\theta) = -\frac{\alpha_0(\theta)}{\alpha_1(\theta)}p(\theta) + \frac{p_1(\theta)}{\alpha_1(\theta)} := F(p, \theta).$$

Observons que, par hypothèse, la fonction  $F$  est globalement lipschitzienne par rapport à  $p$  et continue par rapport  $\theta$ . Il suit donc qu'il existe une fonction  $h$  de classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{P})$  solution de l'équation précédente. Cependant, la fonction  $h$  n'est pas nécessairement un polynôme.

Prenons pour  $\delta > 0$ , un polynôme  $\tilde{p}$  tel que  $\|h' - \tilde{p}\|_{\infty} \leq \delta$ , et posons  $p(\theta) = h(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta} \tilde{p}(z) dz$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ .

On a

$$\|p - h\|_{\infty} \leq (\theta_1 - \theta_0)\delta.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|\alpha_1 p' + \alpha_0 p - p_1\|_{\infty} &= \|\alpha_1 p' + \alpha_0 p - \alpha_1 h' - \alpha_0 h + \alpha_1 p' + \alpha_0 p - p_1\|_{\infty} \\ &\leq \|\alpha_0\|_{\infty} \|p - h\|_{\infty} + \|\alpha_1\|_{\infty} \|\tilde{p} - h'\|_{\infty} + \|\alpha_1 h' + \alpha_0 h - p_1\|_{\infty} \\ &\leq \|\alpha_0\|_{\infty} (\theta_1 - \theta_0)\delta + \|\alpha_1\|_{\infty} \delta. \end{aligned}$$

De ce qui précède, en choisissant  $\delta$  suffisamment petit, on a  $\|\alpha_1 p' + \alpha_0 p - p_1\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

Dans le cas où  $\alpha_1$  s'annule sur  $\mathcal{P}$ , trouver un polynôme  $p$  satisfaisant l'inégalité (5.45) ne nous est pas clair excepté le cas où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des polynômes. Notons que grâce à la Remarque 5.3.4, dans le cas où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont des polynômes, il suffit de montrer qu'on peut toujours trouver un polynôme  $p$  satisfaisant l'inégalité (5.45) dans le cas critique, c'est-à-dire dans le cas  $a \in -b\mathbb{N}$ . Nous montrons comment choisir ce polynôme dans la remarque suivante.

**Remarque 5.3.6.**

Nous sommes toujours dans le cas  $\mathcal{P} = [\theta_0, \theta_1] \subset \mathbb{R}$  avec  $\theta_0 < \theta_1$ . Nous reprenons les notations de la Remarque 5.3.4 et supposons qu'il existe un entier  $N$  tel que  $a = -bN$  et que  $\alpha_1$  s'annule sur  $\mathcal{P}$ . Dans ce cas, on sait, d'après la Remarque 5.3.4, que l'équation (5.45) n'admet pas de solution polynômiale car, par exemple, on ne peut pas trouver de solution polynômiale à cette équation pour les monômes de la forme  $p_1(\theta) = \beta\theta^N$ ,  $\beta \in \mathbb{C}^*$ .

L'objectif ici sera de montrer que grâce à la marge que l'on a dans l'inégalité (5.46), il est possible de construire un polynôme satisfaisant cette inégalité même dans le cas  $a \in -b\mathbb{N}$ .

L'idée est de perturber  $\alpha_1$  avec une perturbation  $\eta$  tel que  $\alpha_1 + \eta$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{P}$ , ensuite utiliser le résultat de la Remarque 5.3.5 et enfin passer à la limite lorsque  $|\eta| \rightarrow 0$ .

Nous illustrons la stratégie dans le cas  $N = 1$ . Les autres cas peuvent être résolus en suivant la même stratégie.

Dans le cas  $N=1$ , quitte à translater  $\mathcal{P}$ , on peut, sans perte de généralité, supposer que  $0 \in [\theta_0, \theta_1]$  et prendre  $\alpha_0 = 1$  et  $\alpha_1(\theta) = -\theta$ . Dans ce cas, les monômes qu'on ne peut pas atteindre sont représentés par  $p_1(\theta) = \theta$ .

Soit  $\eta \in \mathbb{R}^*$  et posons  $\tilde{\alpha}_1(\theta) = -\theta + i\eta$ . Pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ , on a  $\tilde{\alpha}_1(\theta) \neq 0$ .

En résolvant l'équation différentielle

$$h'_\eta = -\frac{\alpha_0}{\tilde{\alpha}_1} h_\eta + \frac{q}{\tilde{\alpha}_1} = \frac{h_\eta - \theta}{\theta - i\eta},$$

nous obtenons une solution particulière  $h_\eta(\theta) = -(\theta - i\eta) \log(\theta - i\eta) + \theta$  et avons  $h'_\eta(\theta) = -\log(\theta - i\eta)$  où pour tout nombre complexe  $z$ ,  $\log(z)$  désigne la partie principale du logarithme complexe.

Observons maintenant que

$$\begin{aligned} & |\alpha_1(\theta)h'_\eta(\theta) + \alpha_0(\theta)h_\eta(\theta) - p_1(\theta)| \\ & \leq |(\alpha_1(\theta) + i\eta)h'_\eta(\theta) + \alpha_0(\theta)h_\eta(\theta) - p_1(\theta)| + |\eta h'_\eta(\theta)| = |\eta h'_\eta(\theta)| = |\eta \log(\theta - i\eta)|. \end{aligned}$$

Puisque pour  $\eta$  suffisamment petit

$$|\eta \log(\theta - i\eta)| \leq \eta(2|\theta| + \eta\pi/2 + |\eta \ln(|\eta|)|),$$

on a

$$\sup_{\theta \in [\theta_0, \theta_1]} |\eta \log(\theta - i\eta)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } |\eta| \rightarrow 0.$$

De ce fait, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta(\varepsilon) \neq 0$  tel que

$$\sup_{[\theta_0, \theta_1]} |\alpha_1(\theta)h'_\eta(\theta) + \alpha_0(\theta)h_\eta(\theta) - p_1(\theta)| \leq \varepsilon/2.$$

On finit donc la preuve comme dans la Remarque 5.3.5 en approximant la fonction  $h_\eta$  par un polynôme  $p$  tel que  $p'$  approche  $h'_\eta$ .

Pour finir cette sous-section sur les structures particulières, nous considérons les systèmes pour lesquels les matrices  $B$  et  $C$  sont constantes et  $A(\theta) = \theta A$  avec  $A$  une matrice constante. Ce théorème étend [61, Theorem 1] et [79, Theorem 5] au cadre de la sortie.

**Théorème 5.3.5.** Soit  $\mathcal{P}$  un compact de  $\mathbb{C}$  à complémentaire connexe et d'intérieur vide.

Le système  $(\theta A, B, C)$  où les matrices  $A, B$  et  $C$  sont constantes est uniformément ensemble contrôlable en sortie sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  si

$$\text{rk}(CA^k B) = q, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.50)$$

Si de plus

$$0 \in \mathcal{P}, \quad A \ker C \subset \ker C \quad \text{et} \quad \text{Im } C^* \cap \ker A^{n^*} = \{0\}, \quad (5.51)$$

la condition (5.50) devient nécessaire.

Notons que la condition (5.50) n'est pas nécessaire sans la condition (5.51). En effet, considérons pour tout nombre complexe  $\theta$  non nul le système (5.1) avec

$$\mathcal{P} = \{\theta\}, \quad A(\theta) = \theta A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sur cet exemple, on voit que  $\mathcal{P}$  vérifie toutes les hypothèses du Théorème 5.3.5 et que l'UECS dans ce cas n'est rien d'autre que la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système  $(A, B, C)$ .

Comme  $\text{rk}(CB|CAB) = 1$  alors le système est UECS mais la condition (5.50) n'est pas satisfaite car  $\text{rk}(CB) = 0$ .

En vertu du Théorème 5.3.1, il est clair que si  $\mathcal{P}$  n'est pas d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$  alors le système considéré dans le Théorème 5.3.5 ne peut pas être UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .

Donnons une preuve au Théorème 5.3.5.

*Démonstration.*

Soit  $T > 0$ . Désignons par  $\Phi_T$  l'application linéaire et bornée définie de  $L^2([0, T]; \mathbb{C}^m)$  dans  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  telle que pour tout  $u \in L^2([0, T]; \mathbb{C}^m)$ , et  $\theta \in \mathcal{P}$ ,

$$(\Phi_T u)(\theta) = \int_0^T C e^{(T-t)\theta A} B u(t) dt.$$

Le dual de l'application  $\Phi_T$  noté  $\Phi_T^*$  est donc une application linéaire de l'espace des mesures de Radon que nous notons  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  dans  $L^2([0, T]; \mathbb{C}^m)$  défini pour tout  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ , par

$$(\Phi_T^* \mu)(t) = \int_{\mathcal{P}} B^* e^{(T-t)\bar{\theta} A^*} C^* d\mu(\theta) \quad (t \in [0, T]).$$

De [89, Theorem 11.2.1], l'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(\theta A, B, C)$  est équivalente au principe de continuation unique

$$\forall t \in [0, T], \quad (\Phi_T^* \mu)(t) = 0 \quad \implies \quad \mu = 0. \quad (5.52)$$

De ce qui précède, on déduit que l'UECS du triplet  $(\theta A, B, C)$  est équivalente à

$$\forall t \in [0, T], \quad (\Phi_T^* \mu)(t) = \int_{\mathcal{P}} B^* e^{(T-t)\bar{\theta} A^*} C^* d\mu(\theta) = 0 \quad \implies \quad \mu = 0, \quad (5.53)$$

où  $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{P})$ .

Supposons que (5.50) soit satisfaite et soit  $\mu$  une mesure complexe supportée sur  $\mathcal{P}$  telle que

$$(\Phi_T^* \mu)(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.54)$$

En dérivant la relation (5.54) par rapport à  $t$  et en évaluant l'équation résultante au temps  $T$ , on obtient

$$B^*(A^*)^k C^* \int_{\mathcal{P}} \bar{\theta}^k d\mu(\theta) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.55)$$

En utilisant l'hypothèse que la relation (5.50) est satisfaite, on déduit de (5.55) que

$$\int_{\mathcal{P}} \theta^k d\bar{\mu}(\theta) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Il suit donc que pour tout polynôme  $p$ ,

$$\int_{\mathcal{P}} p(\theta) d\bar{\mu}(\theta) = 0. \quad (5.56)$$

Puisque  $\mathcal{P}$  est un compact à complémentaire connexe et d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$ , on déduit du Théorème de Mergelyan que toute fonction continue sur  $\mathcal{P}$  peut être approchée par un polynôme. Il suit de (5.56) que pour toute  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})$ ,  $\int_{\mathcal{P}} f d\bar{\mu} = 0$  impliquant  $\bar{\mu} = 0$ .

Montrons que si la condition (5.51) est satisfaite, alors la condition (5.50) devient nécessaire. Supposons que le système  $(\theta A, B, C)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et que (5.51) soit satisfaite. De plus, supposons, par contradiction, qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{rk}(CA^N B) < q$ . Comme le système  $(\theta A, B, C)$  est supposé UECS et que  $0 \in \mathcal{P}$ , alors, d'après le lemme de restriction,  $N \neq 0$  car la restriction de ce système à  $\{0\}$  est contrôlable de l'état vers la sortie, c'est-à-dire

$$\ker B^* \cap \text{Im } C^* = \{0\}.$$

En utilisant le fait que  $\text{rk}(CA^N B) < q$ , on déduit qu'il existe un vecteur non nul  $\eta \in \mathbb{C}^q$  tel que  $\eta^* CA^N B = 0$ . De ce fait, on a  $A^{N^*} v \in \ker B^*$  avec  $v = C^* \eta \in \text{Im } C^*$ . Puisque le système est supposé UECS,  $v$  est non nul car  $\text{rk}(C) = q$ .

Si  $A^{N^*} v = 0$  on aboutit à une contradiction car  $v \in \ker(A^{n^*}) \cap \text{Im } C^*$ .

De même, si  $A^{N^*} v \neq 0$ , on déduit de  $\ker B^* \cap \text{Im } C^* = \{0\}$  et de  $A^{N^*} v \in \ker B^*$  que  $A^{N^*} v \notin \text{Im } C^*$ . Ce qui montre que  $\text{Im } C^*$  ne peut pas être stable par  $A^*$  contredisant de nouveau (5.51).  $\square$

### Remarque 5.3.7.

Sous l'hypothèse (5.50) du Théorème 5.3.5, on peut construire explicitement, pour toute fonction  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , un élément  $g \in \mathcal{R}(\theta A, B, C)$  tel que  $\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

En effet, d'après le résultat de densité, l'UECS du système  $(\theta A, B, C)$  est équivalente à

$$\overline{\mathcal{R}(\theta A, B, C)} = \overline{\text{span} \{ \theta \in \mathcal{P} \mapsto \theta^k CA^k b_j \mid k \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}_{\leq m}^* \}} = \mathbb{X}(\mathcal{P})^q.$$

où pour tout  $j \in \mathbb{N}_{\leq m}^*$ ,  $b_j$  désigne la  $j^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $B$ .

Soit  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et que  $\mathcal{P}$  est un compact de  $\mathbb{C}$  à complémentaire connexe et d'intérieur vide, il existe un polynôme  $p(\theta) = \sum_{k=0}^N (P_k^1, \dots, P_k^q)^{\top} \theta^k$  pour un certain  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f - p\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on choisit, grâce à (5.50),  $(g_k^1, g_k^2, \dots, g_k^m) \in \mathbb{C}_m$  tel que

$$g_k^1 CA^k b_1 + g_k^2 CA^k b_2 + \dots + g_k^m CA^k b_m = (P_k^1, \dots, P_k^q)^{\top},$$

c'est-à-dire

$$CA^k B \begin{pmatrix} g_k^1 \\ g_k^2 \\ \vdots \\ g_k^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_k^1 \\ P_k^2 \\ \vdots \\ P_k^q \end{pmatrix}.$$

En prenant  $g(\theta) = \sum_{k=0}^N (g_k^1 CA^k b_1 + g_k^2 CA^k b_2 + \dots + g_k^m CA^k b_m) \theta^k$ , on a  $g \in \mathcal{R}(\theta A, B, C)$  et par construction  $\|f - g\|_{\infty} \leq \varepsilon$ .

## 5.4 Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie pour les systèmes en parallèle et en cascade

Dans la section précédente, nous avons établi des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie. Dans cette section, l'objectif est d'établir des résultats de contrôlabilité sur des systèmes plus généraux.

Avant de donner nos résultats, nous avons besoin d'introduire le spectre,  $\sigma_{\mathbb{X}^n}(\mathfrak{M}_A)$ , de l'opérateur de multiplication  $\mathfrak{M}_A : \mathbb{X}(\mathcal{P})^n \rightarrow \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  associé à la matrice  $A$ . Rappelons que  $\mathfrak{M}_A$  a été défini dans (5.12).

Pour cela, nous introduisons la *fonction spectrale*  $\text{spec } A : \mathcal{P} \rightsquigarrow \mathbb{C}$  définie pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  par

$$\text{spec } A(\theta) = \sigma(A(\theta)).$$

Il a été prouvé dans [69, Lemma 7.1] (voir aussi [41]) que la fermeture dans  $\mathbb{C}$  de l'image de la *fonction spectrale* définie précédemment est le spectre de l'opérateur de multiplication  $\mathfrak{M}_A$ . Plus précisément, on a

$$\sigma_{\mathbb{X}^n}(\mathfrak{M}_A) = \overline{\bigcup_{\theta \in \mathcal{P}} \sigma(A(\theta))}.$$

Rappelons aussi que  $\Omega \subset \mathbb{C}$  vérifie la condition de *non séparation* (ou *ne sépare pas le plan*) si  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  est connexe.

### 5.4.1 Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de systèmes en parallèle

Dans cette sous-section, nous étudions l'uniforme ensemble contrôlabilité de systèmes en parallèle.

Nous avons le résultat suivant.

**Théorème 5.4.1.** *Soit  $\mathcal{P}$  un compact de  $\mathbb{C}$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  et  $q_1, \dots, q_\kappa \in \mathbb{N}^*$ .*

*Prenons pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $A_\ell \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_{n_\ell}^{n_\ell}$  et  $B_\ell \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_m^{n_\ell}$ . Prenons aussi pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq \kappa}^*$  et tout  $j \in \{\ell, \dots, N\}$ ,  $C_{\ell,j} \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_{n_j}^{q_\ell}$  et considérons le système parallèle*

$$\left( \left( \begin{array}{ccc} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccc} C_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_{1,N} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & C_{\kappa,\kappa} & \cdots & C_{\kappa,N} \end{array} \right) \right). \quad (5.57)$$

*Le système parallèle (5.57) est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ ,  $q = \sum_{k=1}^{\kappa} q_k$ , si*

(5.4.1.a) *Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq \kappa-1}^*$ , le système  $(A_\ell, B_\ell, C_{\ell,\ell})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_\ell}$ ;*

(5.4.1.b) *Il existe  $r \in \{\kappa, \dots, N\}$  tel que le système  $(A_r, B_r, C_{r,r})$  soit UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_\kappa}$ ;*

(5.4.1.c) *Pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_k}}(\mathfrak{M}_{A_k})$  possède un nombre fini de composantes connexes;*

(5.4.1.d) *Pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_k}}(\mathfrak{M}_{A_k})$  ne sépare pas le plan;*

(5.4.1.e) *Pour tout  $k, \ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  tels que  $k \neq \ell$ ,  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_k}}(\mathfrak{M}_{A_k}) \cap \sigma_{\mathbb{X}^{n_\ell}}(\mathfrak{M}_{A_\ell}) = \emptyset$ .*

Dans le théorème précédent, les conditions (5.4.1.a)-(5.4.1.e) ne sont que suffisantes. On peut par exemple voir à travers l'exemple

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

que le critère de disjonction de spectre (5.4.1.e) n'est pas satisfait mais que le système est contrôlable de l'état vers la sortie.

En pratique, il peut arriver que des blocs aient des valeurs propres communes. Grâce à la Proposition 5.1.3, on peut, dans certains cas, effectuer une permutation dans la variable d'état et de sortie pour regrouper ces blocs.

Pour rendre la preuve du Théorème 5.4.1 plus légère, nous introduisons deux lemmes intermédiaires. Le premier prouve ce théorème dans le cas où  $\kappa = N$  et le second dans le cas où  $\kappa = 1$ .

**Lemme 5.4.2.** *Supposons  $\kappa = N$  dans le Théorème 5.4.1. Avec les notations et les hypothèses (5.4.1.a)-(5.4.1.e) de ce théorème, le système*

$$\left( \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,N} \\ & \ddots & \vdots \\ & & C_{N,N} \end{pmatrix} \right) \quad (5.59)$$

est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .

*Démonstration.*

La preuve que nous proposons pour ce lemme est inspirée par la preuve du [34, Theorem 1]. Nous proposons cette preuve dans le cas  $N = 2$ ,  $m = 1$ . Le cas général suit les mêmes arguments.

Puisque nous avons pris  $m = 1$ , nous posons  $B_1 = b_1$  et  $B_2 = b_2$ .

Dans ce cas, le système auquel nous portons attention est

$$\left( \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ & C_{2,2} \end{pmatrix} \right). \quad (5.60)$$

Nous allons montrer que pour tout  $(f_1^\top, f_2^\top) \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_1} \times \mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_2}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme complexe  $p$  tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} C_{1,1}p(A_1)b_1 + C_{1,2}p(A_2)b_2 - f_1 \\ C_{2,2}p(A_2)b_2 - f_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \varepsilon. \quad (5.61)$$

Premièrement, observons que l'hypothèse (5.4.1.a) stipule que le système  $(A_2, b_2, C_{2,2})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_2}$ . De ce fait, il existe un polynôme complexe  $p_2$  tel que

$$\|C_{2,2}p_2(A_2)b_2 - f_2\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Deuxièmement, des hypothèses (5.4.1.c)-(5.4.1.e), on déduit de [34, Lemmas 7 et 8] qu'il existe deux compacts de  $\mathbb{C}$  notés  $K_1$  et  $K_2$  disjoints, ne séparant pas le plan tels que  $K_1$  contienne strictement  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_1}}(\mathfrak{M}_{A_1})$  et que  $K_2$  contienne strictement  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_2}}(\mathfrak{M}_{A_2})$ . Considérons pour tout  $\ell \in \{1, 2\}$ , les fonctions  $h_\ell : K_1 \cup K_2 \rightarrow \mathbb{C}$  définies par

$$h_1(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in K_1, \\ 0 & \text{si } z \in K_2, \end{cases} \quad \text{et} \quad h_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in K_1, \\ 1 & \text{si } z \in K_2. \end{cases}$$

De [68] (voir aussi [34, Lemma 9]), il existe, pour tout  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , deux polynômes complexes  $\pi_1$  et  $\pi_2$  tels que pour tout  $z \in K_1 \cup K_2$ ,

$$|\pi_1(z) - h_1(z)| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{et} \quad |\pi_2(z) - h_2(z)| < \tilde{\varepsilon}.$$

Il suit donc que

$$\begin{aligned} |\pi_1(z) - 1| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{et} \quad |\pi_2(z)| < \tilde{\varepsilon} & \quad (z \in K_1), \\ |\pi_1(z)| < \tilde{\varepsilon} \quad \text{et} \quad |\pi_2(z) - 1| < \tilde{\varepsilon} & \quad (z \in K_2). \end{aligned} \quad (5.62)$$

À ce stade, rappelons que seul le polynôme  $p_2$  est connu. L'idée est donc de choisir  $\tilde{\varepsilon}$  et donc les polynômes  $\pi_1$  et  $\pi_2$  pour construire un polynôme  $p$  satisfaisant (5.61).

Pour ce faire, posons  $\tilde{f}_1 = f_1 - C_{1,2}p_2(A_2)b_2 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_1}$ .

Par l'hypothèse (5.4.1.a), le système  $(A_1, b_1, C_{1,1})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_1}$ . Il existe donc un polynôme complexe  $p_1$ , dépendant de  $p_2$ , tel que

$$\|C_{1,1}p_1(A_1)b_1 - \tilde{f}_1\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire

$$\|C_{1,1}p_1(A_1)b_1 - f_1 + C_{1,2}p_2(A_2)b_2\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.63)$$

Choisissons maintenant comme polynôme candidat pour (5.61)

$$p(z) = \pi_1(z)p_1(z) + \pi_2(z)p_2(z). \quad (5.64)$$

Pour plus de détails sur la construction et les propriétés de ce polynôme, nous suggérons [5].

Dans la suite de cette preuve, nous allons montrer qu'on peut choisir  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , et donc  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , dans (5.62) pour que le polynôme  $p$  donné par l'équation (5.64) satisfasse (5.61).

Pour y arriver, commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} \|C_{11}p(A_1)b_1 + C_{12}p(A_2)b_2 - f_1\|_\infty &\leq \|C_{1,1}\pi_1(A_1)p_1(A_1)b_1 - C_{1,1}p_1(A_1)b_1\|_\infty \\ &\quad + \|C_{1,1}\pi_2(A_1)p_2(A_1)b_1\|_\infty \\ &\quad + \|C_{1,2}\pi_1(A_2)p_1(A_2)b_2\|_\infty \\ &\quad + \|C_{1,2}p_2(A_2)\pi_2(A_2)b_2 - C_{1,2}p_2(A_2)b_2\|_\infty \\ &\quad + \|C_{1,1}p_1(A_1)b_1 - f_1 + C_{1,2}p_2(A_2)b_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Dans l'inégalité précédente, on a ajouté et retranché à l'expression  $C_{11}p(A_1)b_1 + C_{12}p(A_2)b_2 - f_1$  les quantités  $C_{1,1}p_1(A_1)b_1$  et  $C_{1,2}p_2(A_2)b_2$  puis utilisé l'inégalité triangulaire.

En considérant le premier terme à droite de cette inégalité, on peut écrire

$$\|C_{1,1}\pi_1(A_1)p_1(A_1)b_1 - C_{1,1}p_1(A_1)b_1\|_\infty \leq \|C_{1,1}\|_\infty \|(\pi_1(A_1) - I_{n_1})p_1(A_1)\|_\infty \|b_1\|_\infty.$$

Ensuite, on utilise la formule de Dunford-Taylor, donnée par

$$g(A_k(\theta)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} g(z)(zI_{n_k} - A_k(\theta))^{-1} dz \quad (k \in \{1, 2\}),$$

où  $g$  est un polynôme complexe et  $\gamma_k$  ( $k \in \{1, 2\}$ ) est une courbe polygonale fermée orientée dans le sens positif et contenue dans  $K_k \setminus \sigma_{\mathbb{X}^{n_k}}(\mathfrak{M}_{A_k})$  (cf. [48, Chapter 1]), pour écrire

$$\|(\pi_1(A_1) - I_{n_1})p_1(A_1)\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} |(\pi_1(z) - 1)||p_1(z)| \|(zI_{n_1} - \mathfrak{M}_{A_1})^{-1}\| dz.$$

Puisque sur  $K_1$  on a  $|\pi_1(z) - 1| < \tilde{\varepsilon}$ , on a donc

$$\|(\pi_1(A_1) - I_{n_1})p_1(A_1)\|_\infty \leq \frac{\tilde{\varepsilon}L_1}{2\pi} \sup_{z \in \text{Im}(\gamma_1)} \left( |p_1(z)| \| (zI_{n_1} - \mathfrak{M}_{A_1})^{-1} \| \right).$$

Dans ce qui précède (et qui suit)  $L_k$  est la longueur du chemin  $\gamma_k$ .

En posant, pour tout  $k, \ell \in \{1, 2\}$

$$\beta_k = \|b_k\|_\infty, \nu_{k,\ell} = \|C_{k,\ell}\|_\infty, \alpha_{k,\ell} = \sup_{z \in \gamma_k} \left( |p_\ell(z)| \| (zI_{n_k} - \mathfrak{M}_{A_k})^{-1} \| \right),$$

on obtient, en raisonnant comme précédemment et en utilisant (5.62),

$$\begin{aligned} \|C_{1,1}\pi_1(A_1)p_1(A_1)b_1 - C_{1,1}p_1(A_1)b_1\|_\infty &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}\nu_{1,1}\beta_1\alpha_{1,1}L_1}{2\pi}, \\ \|C_{1,1}\pi_2(A_1)p_2(A_1)b_1\|_\infty &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}\alpha_{1,2}\beta_1\nu_{1,1}L_1}{2\pi}, \\ \|C_{1,2}\pi_1(A_2)p_1(A_2)b_2\|_\infty &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}\alpha_{2,1}\beta_2\nu_{1,2}L_2}{2\pi}, \\ \|C_{1,2}p_2(A_2)\pi_2(A_2)b_2 - C_{1,2}p_2(A_2)b_2\|_\infty &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}\alpha_{2,2}\beta_2\nu_{1,2}L_2}{2\pi}. \end{aligned}$$

En combinant les estimations précédentes et la relation (5.63), on a donc

$$\|C_{1,1}p(A_1)b_1 + C_{1,2}p(A_2)b_2 - f_1\|_\infty \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\pi} (\beta_1\nu_{1,1}L_1(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}) + \beta_2\nu_{1,2}L_2(\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2})) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tel que

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{2\pi} (\beta_1\nu_{1,1}L_1(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}) + \beta_2\nu_{1,2}L_2(\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2})) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\varepsilon} < \pi\varepsilon (\beta_1\nu_{1,1}L_1(\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}) + \beta_2\nu_{1,2}L_2(\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}))^{-1} := \tilde{\varepsilon}_1,$$

dans l'approximation (5.62), on a

$$\|C_{1,1}p(A_1)b_1 + C_{1,2}p(A_2)b_2 - y_1\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Pour finir cette preuve, nous montrons qu'avec un bon choix de  $\tilde{\varepsilon} > 0$  dans (5.62), le polynôme  $p$  donné dans (5.64) satisfait aussi

$$\|C_{2,2}p(A_2)b_2 - y_2\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De nouveau on ajoute et retranche  $C_{2,2}p_2(A_2)b_2$  pour écrire, avec l'aide de l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|C_{2,2}p(A_2)b_2 - f_2\|_\infty &\leq \|C_{2,2}\pi_1(A_2)p_1(A_2)b_2\|_\infty + \|C_{2,2}p_2(A_2)b_2 - f_2\|_\infty \\ &\quad + \|C_{2,2}\pi_2(A_2)p_2(A_2)b_2 - C_{2,2}p_2(A_2)b_2\|_\infty. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés pour la première composante de (5.61), on a

$$\|C_{2,2}\pi_1(A_2)p_1(A_2)b_2\|_\infty \leq \frac{\tilde{\varepsilon}\alpha_{2,1}\beta_2\nu_{2,2}L_2}{2\pi},$$

$$\|C_{2,2}\pi_2(A_2)p_2(A_2)b_2 - C_{2,2}p_2(A_2)b_2\|_\infty \leq \frac{\tilde{\varepsilon}\alpha_{2,2}\beta_2\nu_{2,2}L_2}{2\pi}$$

et donc

$$\|C_{2,2}p(A_2)b_2 - f_2\|_\infty \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{2\pi}\beta_2\nu_{2,2}L_2(\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout  $\tilde{\varepsilon} < \pi\varepsilon (L_2\beta_2\nu_{2,2}(\alpha_{2,1} + \alpha_{2,2}))^{-1} := \tilde{\varepsilon}_2$ , on a donc

$$\|C_{2,2}p(A_2)b_2 - f_2\|_\infty \leq \varepsilon.$$

In fine, tout  $\tilde{\varepsilon} \in (0, \min(\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2))$  fournit une bonne approximation  $\pi_1$  et  $\pi_2$  dans (5.62) pour que le polynôme  $p$  donné par la relation (5.64) satisfasse (5.61).  $\square$

**Lemme 5.4.3.** *Supposons, avec les notations du Théorème 5.4.1, que*

(5.4.3.a) *il existe  $r \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  tel que  $(A_r, B_r, C_r)$  soit UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ ,*

(5.4.3.b) *les ensembles  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_r}}(\mathfrak{M}_{A_r})$  et  $\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N \sigma_{\mathbb{X}^{n_k}}(\mathfrak{M}_{A_k})$  sont disjoints, ne séparent pas le plan et possèdent un nombre fini de composantes connexes.*

Alors le système

$$\left( \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}, (C_1 \ \cdots \ C_N) \right)$$

est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .

Dans ce lemme aussi, ni la condition (5.4.3.a), ni la condition (5.4.3.b) ne sont nécessaires. Pour la condition (5.4.3.a), il suffit de nouveau de considérer le système en dimension finie

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Sur cet exemple, on a

$$A_1 = B_1 = 1, C_1 = (1, 0)^\top, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = (0, 1)^\top \text{ et } C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aucun des triplets  $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$ ,  $\ell \in \{1, 2\}$ , n'est contrôlable de l'état vers la sortie car  $\text{rk}(C_\ell) = 1 \neq 2$ . Par contre, puisque le système est contrôlable en état et que  $\text{rk}(\mathbb{F}) = 2$ , le système est contrôlable de l'état vers la sortie et donc UECS étant donné que l'on est en dimension finie.

Observons tout de même que le Lemme 5.4.2 permet de vite conclure sur l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie du système (5.65).

En effet, il suffisait de remarquer que les systèmes

$$(A_1, B_1, C_{1,1}) = (1, 1, 1), \quad \text{et} \quad (A_2, B_2, C_{2,2}) = \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (0, 1) \right)$$

sont tous UECS et que  $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$ .

Pour voir que la condition (5.4.3.b) n'est pas nécessaire, considérons un exemple plus intéressant : celui des deux voitures (cf. Figure (1.1)).

Pour des raisons de simplicité, on va supposer les masses de voitures constantes  $m_1 = m_2 = 1$  et  $f_1 = -\theta v_1$ ,  $f_2 = -2\theta v_2$  où  $v_1$  et  $v_2$  représentent respectivement la vitesse de la première et seconde voiture et  $\theta \in \mathcal{P} = [0, 1]$ . On suppose également qu'on sait mesurer la différence de vitesse entre les deux voitures. On note cette différence  $y(t) = v_1(t) - v_2(t)$ .

En posant  $x = (x_1, v_1, x_2, v_2)^\top$ ,  $u = (u_1, u_2)^\top$ , l'équation régissant l'état et la sortie est donnée par le système

$$\mathcal{P} = [0, 1], \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \ 1 \ 0 \ -1). \quad (5.66)$$

Sur cet exemple, la matrice  $A$  est constituée de deux blocs et la condition (5.4.3.b) n'est pas satisfaite.

En faisant cependant une permutation dans la variable d'état, on peut voir que l'UECS de ce système est équivalente à celle du système  $(\theta\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  où

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \tilde{C} = (1 \ -1).$$

Une application immédiate du Théorème 5.3.5 montre que ce système est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

Observons que la paire  $(A, B)$  donnée dans (5.66) ne peut pas être uniformément ensemble contrôlable (en état) car la matrice  $A$  admet une valeur propre constante 0.

#### Exemple 5.4.1.

Comme exemple d'application du Lemme 5.4.3, considérons toujours celui des deux voitures.

Puisque nous avons motivé le chapitre en parlant de variation de masses, nous supposons que  $m_1$  et  $m_2$  varient continûment en fonction du paramètre  $\theta$  de la façon suivante :

$$m_1(\theta) = \theta, \quad m_2(\theta) = 2(\theta + 1), \quad \theta \in \mathcal{P} = [1, 2].$$

Les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont supposés constants et égaux à 1.

Nous supposons de plus que la sortie est la différence des vitesses.

Sous ces hypothèses, le système couplé (1.1)- (1.2) devient, pour tout  $\theta \in \mathcal{P} = [1, 2]$ ,

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2(\theta+1)} \end{pmatrix}, \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(\theta+1)} \end{pmatrix}, \quad C(\theta) = (0 \ 1 \ 0 \ -1). \quad (5.67)$$

En faisant de nouveau une permutation dans les variables d'état, il suit que l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de ce système est équivalente à celle du système

$$\mathcal{P} = [1, 2], \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2(\theta+1)} \end{pmatrix}, \quad B(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(\theta+1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C(\theta) = (1, -1).$$

Pour la permutation, il suffit de faire un changement de variable d'état  $x(t, \theta) = T(\theta)\tilde{x}(t, \theta)$  où pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une fois cette remarque faite, on observe, qu'en posant  $A_1(\theta) = -1/\theta$  et  $A_2(\theta) = -1/2(\theta + 1)$ , que  $\sigma_{\mathbb{X}}(\mathfrak{M}_{A_1}) = [-1, -1/2]$  et  $\sigma_{\mathbb{X}}(\mathfrak{M}_{A_2}) = [-1/4, -1/6]$  et donc que  $\sigma_{\mathbb{X}}(\mathfrak{M}_{A_1}) \cap \sigma_{\mathbb{X}}(\mathfrak{M}_{A_2}) = \emptyset$ . Ce qui implique que la condition (5.4.3.b) est satisfaite.

De plus, puisque  $\mathcal{P}$  est d'intérieur vide et de complémentaire connexe dans  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda$  définie de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathbb{C}$  par  $\lambda(\theta) = -1/\theta$  est injective et pour tout  $\theta$  dans  $\mathcal{P}$  le triplet  $(A_1(\theta), B_1(\theta), C_1(\theta)) := (-1/\theta, 1/\theta, 1)$  est contrôlable de l'état vers la sortie.

Il suit du Théorème 5.3.2 que le triplet  $(A_1, B_1, C_1)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ . Ce qui implique que la condition (5.4.3.a) du Lemme 5.4.3 est satisfaite.

Toutes les conditions du Lemme 5.4.3 étant satisfaites, il vient que le système (5.67) est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

Le résultat précédent peut être confirmé par le résultats d'approximation polynômiale. En effet, soit  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})$  et  $\varepsilon > 0$ . Nous allons montrer qu'il existe deux polynômes complexes  $p_1$  et  $p_2$  tels que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} |C(\theta)p_1(A(\theta))b_1(\theta) + C(\theta)p_2(A(\theta))b_2(\theta) - f(\theta)| \leq \varepsilon.$$

Dans l'inégalité précédente,  $b_1(\theta)$  et  $b_2(\theta)$  désignent respectivement la première et seconde colonne de  $B(\theta)$ . En observant que pour tout polynôme  $p$

$$p(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & p(-\frac{1}{\theta}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & p(-\frac{1}{2(\theta+1)}) \end{pmatrix},$$

on déduit qu'il faut montrer que

$$\sup_{\theta \in \mathcal{P}} \left| \frac{1}{\theta} p_1(-\frac{1}{\theta}) - \frac{1}{2(\theta+1)} p_2(-\frac{1}{2(\theta+1)}) - f(\theta) \right| \leq \varepsilon.$$

On choisit d'abord  $p_2 = 0$  et on pose  $\lambda(\theta) = -1/\theta \in [-1, -1/2]$ . On doit donc montrer qu'il existe un polynôme  $p_1$  tel que

$$\sup_{\theta \in \lambda(\mathcal{P})} |\theta p_1(\theta) + f \circ \lambda(\theta)| \leq \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir  $p_1$  comme étant l'approximation de la fonction continue définie pour tout  $\theta \in \lambda(\mathcal{P})$  par  $-f \circ \lambda(\theta)/\theta$ . Ce choix est possible grâce au théorème de Weierstrass.

Proposons maintenant une preuve au Lemme 5.4.3.

*Démonstration.*

Nous nous plaçons également dans le cas  $m = 1$  et posons  $B = (b_1, \dots, b_N)^\top$ . Le cas général se fait en suivant les mêmes arguments. Nous supposons aussi, sans perte de généralité, que c'est

le triplet  $(A_1, b_1, C_1)$  qui est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ . L'objectif est de montrer que pour toute fonction  $f \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , sous les hypothèses (5.4.3.a) et (5.4.3.b), il existe un polynôme complexe  $p$  tel que

$$\|C_1 p(A_1) b_1 + \tilde{C} p(\tilde{A}) \tilde{b} - f\|_\infty \leq \varepsilon, \quad (5.68)$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (C_2 \quad \cdots \quad C_N).$$

En utilisant l'UECS du triplet  $(A_1, b_1, C_1)$ , on déduit qu'il existe un polynôme  $p_1$  tel que

$$\|C_1 p_1(A_1) b_1 - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant l'hypothèse (5.4.3.b) et en raisonnant comme dans le Lemme 5.4.2, on déduit qu'il existe deux compacts  $K_1$  et  $K_2$  disjoints, ne séparant pas le plan tels que  $K_1$  contienne strictement  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_1}}(\mathfrak{M}_{A_1})$  et que  $K_2$  contienne strictement  $\sigma_{\mathbb{X}^{\tilde{n}}}(\mathfrak{M}_{\tilde{A}}) = \bigcup_{k=2}^N \sigma_{\mathbb{X}^{n_k}}(\mathfrak{M}_{A_k})$  où nous avons posé  $\tilde{n} = \sum_{k=2}^N n_k$ .

On construit  $\pi_1$  comme dans (5.62) puis on prend comme polynôme candidat dans (5.68),  $p = \pi_1 p_1$ . Pour finir, on écrit

$$\begin{aligned} \|C_1 p(A_1) b_1 + \tilde{C} p(\tilde{A}) \tilde{b} - f\|_\infty &\leq \|C_1 p_1(A_1) \pi_1(A_1) b_1 - C_1 p_1(A_1) b_1\|_\infty \\ &\quad + \|\tilde{C} p_1(\tilde{A}) \pi_1(\tilde{A}) \tilde{b}\|_\infty + \|C_1 p_1(A_1) b_1 - f\|_\infty \end{aligned}$$

puis on raisonne comme dans la preuve du Lemme 5.4.2 pour construire une bonne approximation  $\pi_1$  de  $h_1$  dans (5.62) pour que  $p$  satisfasse (5.4.1).  $\square$

Proposons maintenant une preuve pour le Théorème 5.4.1.

*Démonstration.*

Nous faisons cette preuve dans le cas  $N = 3, \kappa = 2$ .

Dans ce cas le système (5.57) devient

$$\left( \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ & C_{2,2} & C_{2,3} \end{pmatrix} \right). \quad (5.69)$$

Une preuve pour le cas général peut être faite en suivant les mêmes arguments.

Posons

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} A_2 & \\ & A_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{1,2} = (C_{1,2} \quad C_{1,3}) \text{ and } \tilde{C}_{2,2} = (C_{2,2} \quad C_{2,3}).$$

Avec ces notations, le système précédent devient

$$\left( \begin{pmatrix} A_1 & \\ & \tilde{A}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{1,1} & \tilde{C}_{1,2} \\ & \tilde{C}_{2,2} \end{pmatrix} \right). \quad (5.70)$$

En utilisant les hypothèses (5.4.1.b)-(5.4.1.e) et le Lemme 5.4.3, on déduit que le triplet  $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2, \tilde{C}_{2,2})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_2}$ .

Observons que  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_1+n_2}}(\mathfrak{M}_{\tilde{A}_2}) = \sigma_{\mathbb{X}^{n_2}}(\mathfrak{M}_{A_2}) \cup \sigma_{\mathbb{X}^{n_3}}(\mathfrak{M}_{A_3})$  possède un nombre fini de composantes connexes, ne sépare pas le plan en vertu du [34, Lemma 7, p.33] et n'intercepte pas, par hypothèse,  $\sigma_{\mathbb{X}^{n_1}}(\mathfrak{M}_{A_1})$ . En utilisant donc le fait que les sous systèmes  $(A_1, B_1, C_{1,1}), (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2, \tilde{C}_{2,2})$  sont UECS, on déduit du Lemme 5.4.2 que le système (5.69) est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .  $\square$

### Diagonalisation de la matrice d'état.

Le but de ce paragraphe est de regarder ce que l'on peut dire de l'UECS du système (5.1) dans le cas où les matrices du système n'ont pas la forme (5.57).

Pour ce faire, nous introduisons les terminologies suivantes, empruntées de [78].

Une "application" à valeur ensembliste  $\Gamma : \mathcal{P} \rightsquigarrow \mathbb{C}$  est dite *application spectrale partielle* si pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $\Gamma(\theta) \subset \sigma(A(\theta))$ . Elle est dite continue si elle est continue par rapport à la distance de Hausdorff. L'application  $\Gamma$  sera dite *univaluée* si pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,  $\Gamma(\theta)$  est réduit à un singleton.

Deux applications spectrales partielles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont dites disjointes si  $\Gamma_1(\theta) \cap \Gamma_2(\theta) = \emptyset$ . Elles seront dites strictement disjointes si  $\Gamma_1(\mathcal{P}) \cap \Gamma_2(\mathcal{P}) = \emptyset$ . Bien entendu, la disjonction stricte implique la disjonction, la réciproque étant fautive. Prendre par exemple

$$\mathcal{P} = [1, 2], \quad \Gamma_1(\theta) = \{\theta\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2(\theta) = \{\theta + 1\}.$$

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On dira que la matrice  $A$  admet une *décomposition spectrale continue*, s'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $N$  applications spectrales partielles continues  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  telles que pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,

$$\bigcup_{k=1}^N \Gamma_k(\theta) = \sigma(A(\theta)).$$

Il existe toujours une décomposition spectrale continue de  $A$ , celle dite triviale donnée par  $\Gamma(\theta) := \sigma(A(\theta))$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ .

Une décomposition spectrale continue  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  de  $A$  est dite *disjointe* si les applications spectrales continues qui la constituent sont deux à deux disjointes. Elle est dite *strictement disjointe* si ces applications sont deux à deux strictement disjointes.

Pour les critères d'existence d'une décomposition spectrale de la matrice  $A$ , nous nous référons au Lemme 3 de [78].

Nous aurons besoin, dans la suite, de la Proposition 2 de la référence précédente et dont nous rappelons le contenu ici.

**Proposition 5.4.4.** *Soit  $\mathcal{P}$  un sous ensemble compact et contractile de  $\mathbb{C}$  et  $A \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_n^n$ .*

*Supposons que la matrice  $A$  admette une décomposition spectrale continue  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  deux à deux disjointes.*

*Alors il existe une famille de transformations continues et inversibles  $T(\theta)$  telles que*

$$T(\theta)^{-1}A(\theta)T(\theta) = \begin{pmatrix} A_1(\theta) & & \\ & \ddots & \\ & & A_N(\theta) \end{pmatrix}, \quad (5.71)$$

avec  $\sigma(A_\ell(\theta)) = \Gamma_\ell(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  et tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ .

Sauf mention du contraire, nous supposons dans la suite de ce paragraphe que la matrice  $A$  admet une décomposition spectrale continue  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  deux à deux disjointes et que l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  est compact et contractile.

Dans ce cas, le système  $(A, B, C)$  peut être mis sous la forme

$$\left( \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix}, (C_1 \ \cdots \ C_N) \right). \quad (5.72)$$

En effet, posons  $\Pi_k := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & I_{n_k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_n^{n_k}$ , où  $n_k$  est la taille du bloc  $A_k(\theta)$  dans (5.71).

En définissant  $T : \theta \mapsto T(\theta)$ ,  $A_k : \theta \mapsto A_k(\theta)$ ,  $B_k : \theta \mapsto \Pi_k T(\theta)^{-1} B(\theta)$  et  $C_k : \theta \mapsto C(\theta) T(\theta) \Pi_k^*$ , l'application qui au triplet  $(A, B, C)$  associe  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)$  définie par  $\theta \mapsto (T(\theta)^{-1}A(\theta)T(\theta), T(\theta)^{-1}B(\theta), C(\theta)T(\theta))$  transforme  $(A, B, C)$  en (5.72).

Une fois cette décomposition faite, on déduit le théorème suivant.

**Théorème 5.4.5.** *Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble compact et contractile de  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $A$  admette une décomposition spectrale continue  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  strictement disjointes. Supposons, de plus, que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $\Gamma_\ell(\mathcal{P})$  ne sépare pas le plan.*

*Considérons le système (5.72) où, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $A_\ell, B_\ell$  et  $C_\ell$  sont définies dans le paragraphe précédent ce théorème.*

*S'il existe  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  tel que le triplet  $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  soit UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ , alors le système  $(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .*

*Démonstration.*

Observons que sous les hypothèses de théorème précédent, les critères (5.4.3.a) et (5.4.3.b) du Lemme 5.4.3 sont satisfaits. Il suit donc de ce lemme que le système (5.72) est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .

Puisque le système (5.72) est obtenu par une transformation continue et inversible  $T$  dans la variable d'état du système  $(A, B, C)$ , on déduit de la Proposition 5.1.3 que ce triplet est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .  $\square$

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la Proposition 5.1.3 et des Théorèmes 5.4.1 et 5.4.5.

**Théorème 5.4.6.** *Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble compact et contractile de  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $A$  admette une décomposition spectrale continue  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  strictement disjointes. Supposons, de plus, que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $\Gamma_\ell(\mathcal{P})$  ne sépare pas le plan.*

*Soit  $T \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_n^n$  une application continue et inversible telle que  $(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)$  prenne la forme (5.72). Enfin, supposons qu'il existe une transformation inversible et continue  $M \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_q^q$  telle que*

$$MCT = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & \dots & \dots & C_{1,N} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & C_{\kappa,\kappa} & \dots & C_{\kappa,N} \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

Si

(5.4.6.a) *pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_{\leq \kappa-1}^*$ , le sous-système  $(A_\ell, B_\ell, C_{\ell,\ell})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_\ell}$ ,*

(5.4.6.b) *il existe  $\ell \in \{\kappa, \dots, N\}$  tel que  $(A_\ell, B_\ell, C_{\ell,\ell})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_\ell}$ ,*

*Alors le système  $(A, B, C)$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .*

Pour illustrer ce théorème, considérons l'exemple suivant.

**Exemple 5.4.2.**

On considère le système

$$\mathcal{P} = [1, 2], \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & -2\theta & 1 \\ 0 & 0 & -2\theta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \theta \\ 3\theta \\ \theta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 2\theta \\ 2\theta & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

Sur cet exemple, on voit que la matrice  $C$  ne présente pas une structure dont on sait directement appliquer un résultat établi précédemment. En revanche, on remarque que les deux premières colonnes de cette matrice sont linéairement indépendantes sur  $\mathcal{P}$ .

En prenant  $M$  l'application définie par

$$M : \theta \mapsto \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2\theta & -\theta \end{pmatrix},$$

On a

$$MC : \theta \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(\theta - 1)/\theta \\ 0 & 1 & 2(2\theta - 1) \end{pmatrix}.$$

En définissant  $C_{1,1} : \theta \mapsto 1$ ,  $C_{1,2} : \theta \mapsto (0, 2(\theta - 1)/\theta)$  et  $C_{2,2} : \theta \mapsto (1, 2(2\theta - 1))$ , l'application  $MC$  prend donc la forme (5.73).

Puisque la transformation  $M$  est inversible pour tout  $\theta$ , il suit de la Proposition 5.1.3 que l'UECS de  $(A, B, C)$  est équivalente à celle de  $(A, B, MC)$ .

Définissons

$$A_1 : \theta \mapsto \theta, \quad A_2 : \theta \mapsto \begin{pmatrix} -2\theta & 1 \\ 0 & -2\theta \end{pmatrix}, \quad B_1 : \theta \mapsto \theta, \quad B_2 : \theta \mapsto \begin{pmatrix} 3\theta \\ \theta \end{pmatrix}.$$

De ce qui précède, on a

$$\sigma_{\mathbb{X}}(\mathfrak{M}_{A_1}) = [1, 2], \quad \sigma_{\mathbb{X}^2}(\mathfrak{M}_{A_2}) = [-4, -2] \quad \text{et donc} \quad \sigma_{\mathbb{X}}(\mathfrak{M}_{A_1}) \cap \sigma_{\mathbb{X}^2}(\mathfrak{M}_{A_2}) = \emptyset.$$

De plus  $\sigma_{\mathbb{X}}(\mathfrak{M}_{A_1})$  et  $\sigma_{\mathbb{X}^2}(\mathfrak{M}_{A_2})$  sont compacts, connexes et ne séparent pas le plan.

Une application directe du Théorème 5.3.2 montre que le sous-système  $(A_1, B_1, C_{1,1})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

De même, grâce au Théorème 5.3.4 et à la Remarque 5.3.5, on déduit que le sous-système  $(A_2, B_2, C_{2,2})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})$ .

De ce qui précède, on déduit du Théorème 5.4.6 que le système donné par l'équation (5.74) est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^2$ .

#### Remarque 5.4.1.

De l'exemple précédent, on peut donc remarquer que si les  $q$  premières colonnes de la matrice  $C(\theta)$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathcal{P}$ , on peut toujours trouver une transformation linéaire, continue et inversible pour ramener  $C$  sous la forme (5.73).

En général, cette transformation continue et inversible n'existe pas.

En effet, prenons  $\mathcal{P} = [-1, 1]$  et supposons que  $C$  est de la forme

$$C(\theta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} f(\theta) \cos(\theta) & 1 & 0 \\ f(\theta) \sin(\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \theta \leq 0, \\ \begin{pmatrix} f(\theta) \sin(\theta) & 1 & 0 \\ f(\theta) \cos(\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \theta > 0, \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction continue ne s'annulant qu'en zéro.

Comme défini, on peut voir que  $C$  est continue sur  $\mathcal{P}$  avec une première colonne ne s'annulant

qu'en zéro. De plus  $\text{rk}(C(\theta)) = 2$  pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$  et toutes les applications  $M$  transformant  $C$  sous la forme (5.73) sont

$$M(\theta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \star & \star \\ -h(\theta) \sin(\theta) & h(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix} & \text{si } \theta < 0, \\ \begin{pmatrix} \star & \star \\ -g(\theta) \cos(\theta) & g(\theta) \sin(\theta) \end{pmatrix} & \text{si } \theta > 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour que  $M$  soit continue sur  $\mathcal{P}$ , il faut qu'elle soit continue en zéro. Ce qui implique que  $h(0) = g(0) = 0$ . Mais si  $h(0) = g(0) = 0$ , on peut voir que  $M(0)$  n'est pas inversible.

### 5.4.2 Uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de systèmes en cascade

Dans cette sous-section, nous étudions l'uniforme ensemble contrôlabilité de sortie des systèmes dont la dynamique est sous la forme

$$\left( \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N} \\ & \ddots & \vdots \\ & & A_{N,N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,N} \\ & \ddots & \vdots \\ & & B_{N,N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,N} \\ & \ddots & \vdots \\ & & C_{N,N} \end{pmatrix} \right) \quad (5.75)$$

où  $A_{k,\ell} \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_{n_\ell}^{n_k}$ ,  $B_{k,\ell} \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_{m_\ell}^{n_k}$ ,  $C_{k,\ell} \in \mathbb{X}(\mathcal{P})_{n_\ell}^{q_k}$  avec  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^*$ ,  $q_1, \dots, q_N \in \mathbb{N}^*$ .

On a le théorème suivant.

**Théorème 5.4.7.** *Si pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ , le sous-système  $(A_{k,k}, B_{k,k}, C_{k,k})$  est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_k}$ , alors le système (5.75) est UECS sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$  avec  $q = \sum_{k=1}^N q_k$ .*

*Démonstration.*

Nous proposons une preuve dans le cas  $N = 2$ . Le cas général peut être déduit en suivant les mêmes étapes.

Dans le cas  $N = 2$ , le système devient

$$\dot{x}_1(t, \theta) = A_{1,1}(\theta)x_1(t, \theta) + B_{1,1}(\theta)u_1(t) + A_{1,2}(\theta)x_2(t, \theta) + B_{1,2}(\theta)u_2(t), \quad (5.76a)$$

$$\dot{x}_2(t, \theta) = A_{2,2}(\theta)x_2(t, \theta) + B_{2,2}(\theta)u_2(t), \quad (5.76b)$$

$$y_1(t, \theta) = C_{1,1}(\theta)x_1(t, \theta) + C_{1,2}(\theta)x_2(t, \theta), \quad (5.76c)$$

$$y_2(t, \theta) = C_{2,2}(\theta)x_2(t, \theta). \quad (5.76d)$$

Notre but est de montrer que, sous l'hypothèse d'UECS des sous-systèmes  $(A_{k,k}, B_{k,k}, C_{k,k})$ ,  $k = 1, 2$ , pour tout  $f_1 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_1}$ ,  $f_2 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^{q_2}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u$  tels que les trajectoires de sortie du système (5.76), avec  $x_0 = 0$  comme état initial et  $u$  comme entrée, satisfassent, au temps  $T$ ,

$$\max \{ \|y_1(T, \cdot; 0, u) - f_1\|_\infty, \|y_2(T, \cdot; 0, u) - f_2\|_\infty \} \leq \varepsilon.$$

Pour y arriver, considérons pour  $k = 1, 2$  les systèmes suivants.

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t, \theta) &= A_{k,k}(\theta)x_k(t, \theta) + B_{k,k}(\theta)u_k, \\ \varphi_k(t, \theta) &= C_{k,k}(\theta)x_k(t, \theta). \end{aligned}$$

En utilisant l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie du sous-système  $(A_{2,2}, B_{2,2}, C_{2,2})$ , il suit que pour tout  $T > 0$ , il existe un contrôle  $u_2 \in L^2([0, T]; \mathbb{C}^{m_2})$  indépendant de  $\theta$  tel que

$$\|\varphi_2(T, \cdot; 0, u_2) - f_2\|_\infty = \|y_2(T, \cdot; 0, u_2) - f_2\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De (5.76c), on a pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ ,

$$y_1(T, \theta; 0, u_1) = \varphi_1(T, \theta; 0, u_1) + \tilde{f}(\theta),$$

avec

$$\tilde{f}(\theta) = C_{1,1}(\theta) \int_0^T e^{(T-t)A_{1,1}(\theta)} (A_{1,2}(\theta)x_2(t, \theta) + B_{1,2}(\theta)u_2(t)) dt + C_{1,2}(\theta)x_2(T, \theta).$$

En utilisant l'uniforme ensemble contrôlabilité du sous-système  $(A_{1,1}, B_{1,1}, C_{1,1})$ , on déduit qu'il existe, pour la fonction  $f_1 - \tilde{f}$ , un contrôle  $u_1 \in L^2([0, T]; \mathbb{C}^{m_1})$  indépendant de  $\theta$  tel que

$$\|\varphi_1(T, \cdot; 0, u_1) - f_1 + \tilde{f}\|_\infty = \|y_1(T, \cdot; 0, u_1) - f_1\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Un contrôle adéquat est donc  $u = (u_1^\top, u_2^\top)^\top$ . □

## 5.5 Application à la contrôlabilité en moyenne.

Dans cette section, nous relient la notion d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie à celle de la contrôlabilité en moyenne.

À notre connaissance, le concept de contrôlabilité en moyenne a été introduit pour la première fois par E. Zuazua dans [99]. Dans cet article, l'auteur considère le système  $(A, B) : \theta \mapsto (A(\theta), B(\theta))$  où  $\theta \in (0, 1)$  et donne des conditions pour lesquelles, en un temps  $T > 0$  fixé, et pour toute donnée initiale  $x_0$  (pouvant dépendre du paramètre  $\theta$ ) et tout état  $x_1$  indépendant du paramètre, il existe un contrôle  $u$  indépendant de  $\theta$  tel que  $\int_0^1 x(T, \theta; x_0, u) d\theta = x_1$ .

L'auteur montre que la paire  $(A(\theta), B(\theta))$  est contrôlable en moyenne si et seulement si

$$\text{rk} \left( \int_0^1 A(\theta)^k B(\theta) d\theta, k \in \mathbb{N} \right) = n.$$

Dans le même article, l'auteur considère également la contrôlabilité en moyenne de l'équation de la chaleur dans laquelle le coefficient de diffusion dépend d'un paramètre  $\nu \in (0, 1)$ .

Depuis lors, d'autres problèmes de contrôlabilité en moyenne dans le cadre des EDP ont été considérés dans la littérature et sont consultables, par exemple, dans [7, 8, 28, 65]. Des méthodes numériques de calcul de contrôles pour la contrôlabilité en moyenne ont été également proposées dans [1, 53].

Dans ce manuscrit, nous considérons une version un peu plus générale de la contrôlabilité en moyenne dont nous empruntons la définition à la référence [34]. Dans cette partie, on munie  $\mathcal{P}$  d'une tribu borélienne.

**Définition 5.5.1.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathcal{P}$ .

Le système (5.1) sera dit contrôlable en moyenne si pour tout  $y_1 \in \mathbb{C}^q$ , il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u \in L^1([0, T]; \mathbb{C}^m)$  tels que

$$\int_{\mathcal{P}} y(T, \theta; 0, u) d\mu(\theta) = y_1.$$

Les auteurs de [34] montrent que la contrôlabilité en moyenne du système (5.1) est équivalente, en désignant par  $b_\ell(\theta)$  la  $\ell^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $B(\theta)$ , à

$$\text{rk} \left( \int_{\mathcal{P}} C(\theta) A(\theta)^k b_\ell(\theta) d\mu(\theta), k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}_{\leq m}^* \right) = q. \quad (5.77)$$

De plus, ils prouvent que si la paire  $(A, B)$  est uniformément ensemble contrôlable en état et qu'il existe  $\theta_1, \dots, \theta_k$  dans le support de la mesure  $\mu$  tels que  $\text{rk} \begin{pmatrix} C(\theta_1) & \dots & C(\theta_k) \end{pmatrix} = q$ , alors le système (5.1) est contrôlable en moyenne.

Comme contribution à la notion de contrôlabilité en moyenne, on a le résultat suivant :

**Proposition 5.5.1.** *Le système (5.1) est contrôlable en moyenne s'il est uniformément ensemble contrôlable en sortie sur  $\mathbb{X}(\mathcal{P})^q$ .*

*Démonstration.*

Puisque l'espace dans lequel vit la variable de sortie moyennée est de dimension finie, prouver que le système (5.1) est contrôlable en moyenne revient à montrer que pour tout  $y_1 \in \mathbb{C}^q$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u \in L^1([0, T]; \mathbb{C}^m)$  tels que

$$\left| \int_{\mathcal{P}} y(T, \theta; 0, u) d\mu(\theta) - y_1 \right| \leq \varepsilon.$$

Pour finir la preuve, il suffit, en utilisant le fait que  $\mu(\mathcal{P}) = 1$ , d'écrire

$$\left| \int_{\mathcal{P}} y(T, \theta; 0, u) d\mu(\theta) - y_1 \right| = \left| \int_{\mathcal{P}} (y(T, \theta; 0, u) - y_1) d\mu(\theta) \right| \leq \|y(T, \cdot; 0, u) - y_1\|_\infty.$$

□

Pour revenir aux exemples sur les voitures, à savoir celui du système (5.66) ou (5.67), puisque les deux systèmes ne sont pas uniformément ensemble contrôlable en état, on ne peut rien déduire sur la contrôlabilité en moyenne de ces systèmes avec les critères proposés dans [34] à l'exception du critère de Kalman étendu (5.77). Mais avec la proposition précédente, on déduit directement que les systèmes (5.66) et (5.67) sont contrôlables en moyenne.

Pour finir avec cette section, considérons le cas particulier où  $\mu$  est une somme finie de masses de Dirac. Typiquement,  $\mu = \sum_{k=1}^N p_{\theta_k} \delta_{\theta_k}$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $\theta_k \in \mathcal{P}$ ,  $\delta_{\theta_k}$  est une masse de Dirac localisée en  $\theta_k$  et  $p_{\theta_k}$ , la probabilité pour que  $\theta = \theta_k$  avec  $0 < p_{\theta_k} < 1$  et  $\sum_{k=1}^N p_{\theta_k} = 1$ .

Dans ce cas, on a

$$\int_{\mathcal{P}} y(T, \theta; 0, u) d\mu(\theta) = \sum_{k=1}^N p_{\theta_k} C(\theta_k) x(T, \theta_k; 0, u)$$

et la contrôlabilité en moyenne du système (5.1) est équivalente à la contrôlabilité de l'état vers la sortie du système de dimension finie (5.3) avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & A(\theta_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} B(\theta_1) \\ \vdots \\ B(\theta_N) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F} = (p_{\theta_1} C(\theta_1) \mid \dots \mid p_{\theta_N} C(\theta_N)). \quad (5.78)$$

Posons

$$\mathbb{W} = \text{Im} \begin{pmatrix} C(\theta_1)^* \\ \vdots \\ C(\theta_N)^* \end{pmatrix} \cap \prod_{k=1}^N \left( \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A(\theta_k))} E_{\theta_k, \lambda} \right),$$

où, nous rappelons que les ensembles  $E_{\theta_k, \lambda}$  ont été définis juste en dessous de l'équation (5.9). La proposition suivante peut être déduite de la preuve de la Proposition 5.1.1.

**Proposition 5.5.2.** *Supposons que*

(5.5.2.a) *pour tout  $k \neq \ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $\sigma(A(\theta_k)) \cap \sigma(A(\theta_\ell)) = \emptyset$ ,*

(5.5.2.b)  *$\text{rk}(C(\theta_1) | \dots | C(\theta_N)) = q$  et  $\mathbb{W} = \{0\}$ .*

*Alors le système (5.1) avec  $\mu = \sum_{k=1}^N p_{\theta_k} \delta_{\theta_k}$  est contrôlable en moyenne.*

De la proposition précédente, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 5.5.3.** *Supposons que*

(5.5.3.a) *pour tout  $k \neq \ell \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ ,  $\sigma(A(\theta_k)) \cap \sigma(A(\theta_\ell)) = \emptyset$ ,*

(5.5.3.b) *il existe  $k_0 \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  tel que  $(A(\theta_{k_0}), B(\theta_{k_0}), C(\theta_{k_0}))$  soit contrôlable de l'état vers la sortie.*

*Alors le système (5.1) avec  $\mu = \sum_{k=1}^N p_{\theta_k} \delta_{\theta_k}$  est contrôlable en moyenne.*

*Démonstration.*

Il suffit de montrer que l'hypothèse (5.5.2.b) de la Proposition 5.5.2 est satisfaite.

Pour ce faire, observons déjà que la contrôlabilité de l'état vers la sortie de  $(A(\theta_{k_0}), B(\theta_{k_0}), C(\theta_{k_0}))$  implique que  $\text{rk}(C(\theta_{k_0})) = q$  et donc que  $\text{rk}(\mathbb{F}) = q$ .

Soit maintenant  $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{W}$ . L'idée est de montrer que  $z = 0$ .

Puisque  $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{W}$ , il existe  $\eta \in \mathbb{C}^q$  tel que  $z_k = C(\theta_k)^* \eta \in \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A(\theta_k))} E_{\theta_k, \lambda}$ , ceci pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ .

En utilisant le fait que  $(A(\theta_{k_0}), B(\theta_{k_0}), C(\theta_{k_0}))$  soit contrôlable de l'état vers la sortie, on a

$$\text{Im}(C(\theta_{k_0})^*) \cap \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A(\theta_{k_0}))} E_{\theta_{k_0}, \lambda} = \{0\},$$

impliquant  $\eta = 0$ , et donc que  $z = 0$ .

On déduit donc que sous l'hypothèse (5.5.3.b) du Corollaire 5.5.3, la condition (5.5.2.b) est satisfaite.  $\square$

De la preuve précédente, on peut voir que si l'on prend  $C(\theta_k) = I_n$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$ , on a

$$\mathbb{W} = \{0\} \iff \bigcap_{k=1}^N \left( \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A(\theta_k))} E_{\theta_k, \lambda} \right) = \{0\}. \quad (5.79)$$

Ceci montre que si  $C(\theta_k) = I_n$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  et que la condition (5.5.3.a) est satisfaite, la contrôlabilité en moyenne est garantie s'il existe un  $k \in \mathbb{N}_{\leq N}^*$  tel que  $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(A(\theta_k))} E_{\theta_k, \lambda} = \{0\}$ , c'est-à-dire, si au moins l'une des paires  $(A(\theta_k), B(\theta_k))$  est contrôlable en état.

## 5.6 Illustrations numériques

Dans cette section, nous faisons quelques simulations numériques fondées sur les méthodes de calcul de contrôle pour les systèmes uniformément ensemble contrôlables en état présentées dans [53, 55].

### ✱ Illustration d’UECS

Considérons le système donné dans l’Exemple 5.4.2.

Puisque nous avons prouvé l’uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie de ce dernier, il suit que toute donnée initiale en état peut être envoyée dans un voisinage de n’importe quelle valeur de sortie en tout temps.

Nous allons illustrer numériquement ce fait sur l’Exemple 5.4.2.

Pour ce faire, prenons, par exemple,  $x_0(\theta) = (\theta \quad -\theta \quad \sqrt{\theta})^\top$ ,  $y_1(\theta) = 0^2$  et  $T = 1$ .

Ici, nous essayerons d’approcher numériquement le contrôle de norme  $L^2([0, T], \mathbb{C}^m)$  minimale. Nous adaptons le processus de calcul de contrôle décrit dans [53, Section 3] (voir aussi [55]) dans le cadre de l’uniforme ensemble contrôlabilité de l’état. L’idée principale est d’approcher ce contrôle par une suite de contrôles  $u_K$  où  $K$  est le nombre de point de discrétisation de l’ensemble  $\mathcal{P} = [1, 2]$ .

Pour la résolution numérique du système adjoint et de la dynamique en état, nous avons utilisé le schéma de Crank–Nicolson avec un pas de temps de  $10^{-3}$  et il apparaît que quatre valeurs du paramètre  $\theta$  sont suffisantes pour avoir une erreur de  $10^{-1}$  sur la valeur  $y_1(\theta) = 0^2$  au temps  $T = 1$ .

Pour avoir ces quatre valeurs, on utilise une approche dite glouton décrite dans la référence mentionnée précédemment. Plus précisément, on suppose qu’à l’itération  $K$ , l’ensemble des paramètres utilisés pour construire le contrôle  $u_K$  est  $P_K$ . À l’itération  $K + 1$ , on prend  $P_{K+1} = P_K \cup \{\theta_{K+1}\}$  avec

$$\theta_{K+1} \in \operatorname{argmax}_{\theta \in \mathcal{P}} \|y_1(\theta) - y(T, \theta; x_0, u_K)\|.$$

Avec cette stratégie, on obtient  $P_4 = \{1, 1.363, 1.803, 2\}$ .

Sur la Figure 5.1, nous traçons la fonction  $\theta \mapsto y(T, \theta)$ .

Sur la Figure 5.2, nous traçons la courbe du contrôle obtenu en fonction du temps et sur les Figures 5.3 et 5.4, nous traçons respectivement les trajectoires de la sortie et de l’état en fonction du temps avec différentes valeurs du paramètre  $\theta$  et avec le contrôle de la Figure 5.2 comme entrée.

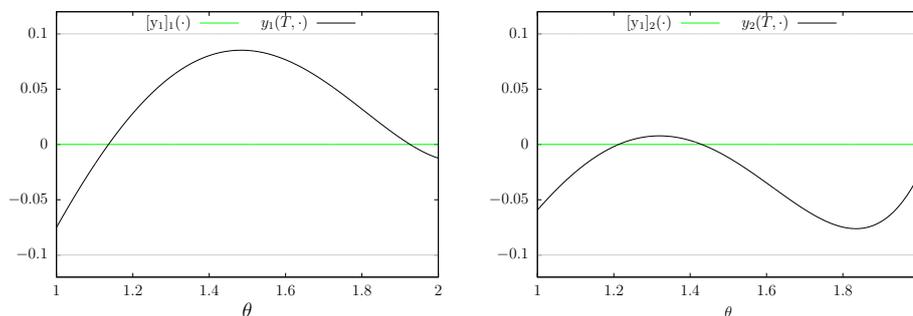


FIGURE 5.1 – Trajectoires de sortie au temps final  $T = 1$  du système de l’Exemple 5.4.2. En vert, nous avons la fonction cible et en noir, la fonction obtenue grâce au contrôle de la Figure 5.2.

Sur la Figure 5.1, on voit qu’avec quatre valeurs du paramètre  $\theta$  dans  $\mathcal{P} = [1, 2]$ , on atteint à  $10^{-1}$  près la fonction nulle.

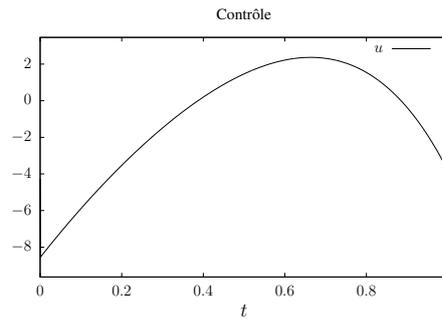


FIGURE 5.2 – Contrôle de norme  $L^2$ –minimale obtenu pour approcher la sortie nulle au temps  $T = 1$  du système donné dans l’Exemple 5.4.2.

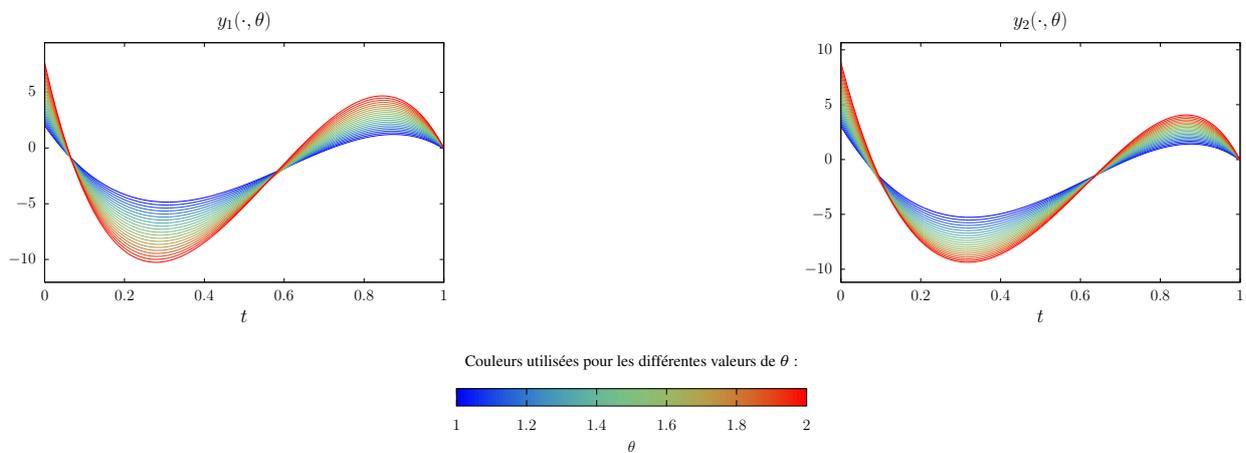


FIGURE 5.3 – Trajectoires de sortie obtenues pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$  en fonction du temps du système de l’Exemple 5.4.2 avec le contrôle de la Figure 5.2.

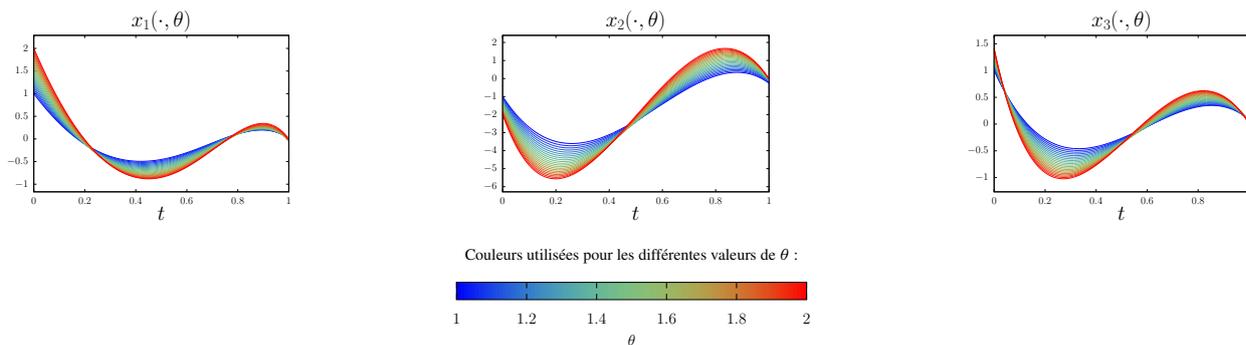


FIGURE 5.4 – Trajectoires de l’état obtenues pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$  en fonction du temps du système de l’Exemple 5.4.2 avec le contrôle de la Figure 5.2.

#### ✿ Illustration pour la contrôlabilité en moyenne

Nous avons vu que l’uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie impliquait la contrôlabilité en moyenne. Puisque le système de l’Exemple 5.4.2 est uniformément ensemble contrôlable en sortie, alors il est contrôlable en moyenne pour la mesure de Lebesgue, c’est-à-dire  $d\mu(\theta) = d\theta$ .

Nous illustrons cela numériquement avec  $T = 1$  et  $y_1 = 0^2$ .

Pour ce faire, nous essayerons d’approcher numériquement le contrôle de norme  $L^2([0, T], \mathbb{C}^m)$  minimale permettant d’approcher  $y_1$  comme valeur moyenne de sortie en adaptant la stratégie proposée dans [53, Section 2.1]. L’idée principale est d’approcher la mesure  $\mu$  par une somme de Dirac avec des poids et des points de localisation dans  $\mathcal{P}$  bien choisis.

En ce qui concerne la résolution numérique de la dynamique et du système adjoint, nous utilisons toujours Crank-Nicholson et pour le calcul de la moyenne en sortie nous utilisons la méthode du point milieu décrite dans [53, Section 2.1].

Sur la Figure 5.5, nous traçons la fonction  $\theta \mapsto y(T, \theta)$ .

Sur la Figure 5.6 nous traçons le contrôle obtenu en fonction du temps et sur les Figures 5.7 et 5.8, nous traçons respectivement les trajectoires de la sortie et de l’état en fonction du temps avec différentes valeurs du paramètre  $\theta$  et avec le contrôle de la Figure 5.6 comme entrée.



FIGURE 5.5 – Trajectoire de sortie en fonction du paramètre  $\theta$  au temps  $T = 1$  pour la contrôlabilité en moyenne du système considéré dans Exemple 5.4.2 avec le contrôle obtenu sur la Figure 5.6.

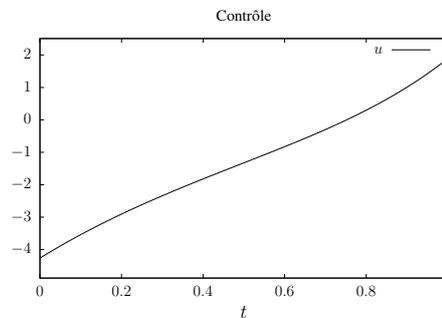


FIGURE 5.6 – Contrôle obtenu pour avoir une valeur moyenne en sortie  $y_1 = 0^2$  au temps  $T = 1$  pour le système considéré dans l’Exemple 5.4.2.

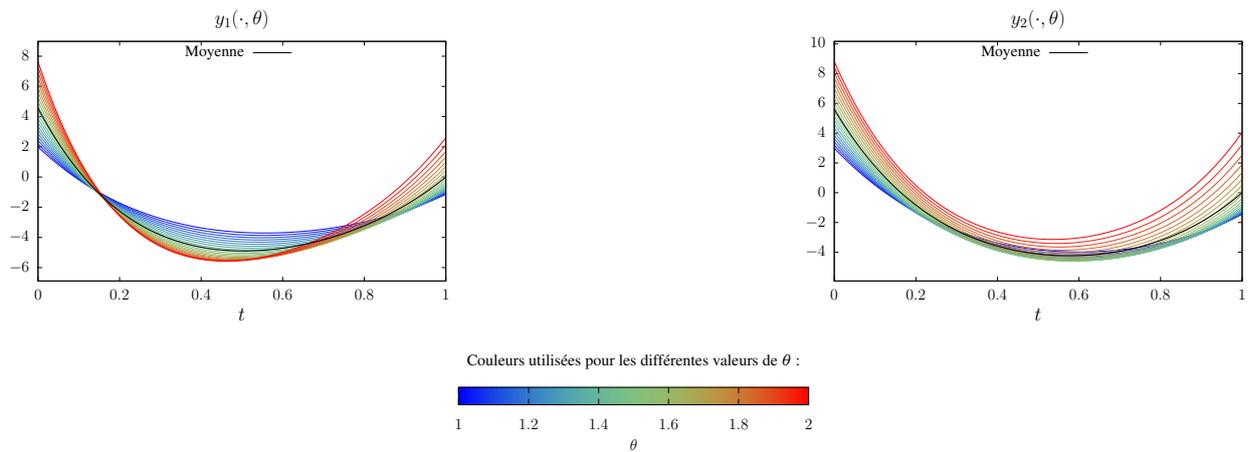


FIGURE 5.7 – Trajectoire de sortie pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$  en fonction du temps avec le contrôle de la Figure 5.6. En couleur noire, nous avons la moyenne de ces trajectoires.

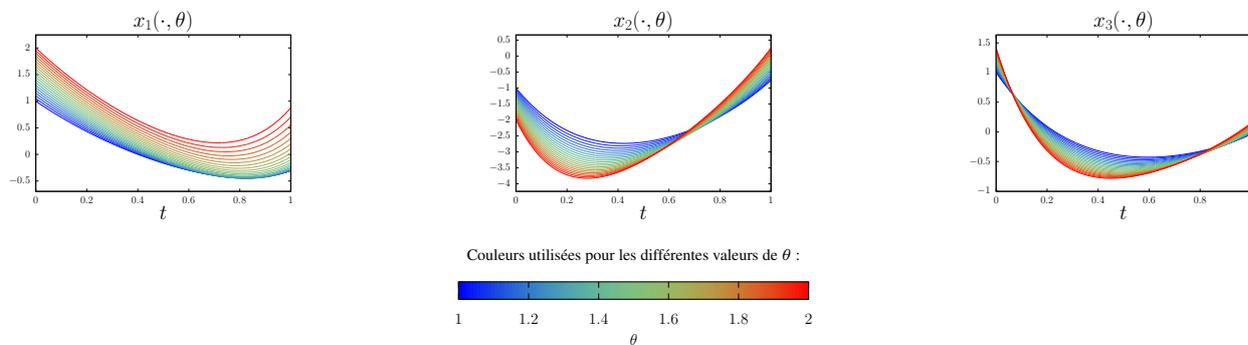


FIGURE 5.8 – Trajectoire de l'état pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$  en fonction du temps avec le contrôle de la Figure 5.6.

### Remarque 5.6.1.

Observons que lorsque le système est UECS, pour toute sortie  $y_1 \in \mathbb{C}^q$ , tout état initial  $x_0 \in \mathbb{X}(\mathcal{P})^n$  et tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, le contrôle de norme  $L^2$ -minimale envoyant  $x_0$  dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $y_1$  au temps  $T > 0$  est de norme  $L^2$  plus grande que celui de norme  $L^2$ -minimale envoyant la moyenne de la sortie au temps  $T$  dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $y_1$ . Aussi, en utilisant l'approche par pénalisation proposée dans [64] il aurait été possible de construire un contrôle réalisant à la fois le contrôle en moyenne et l'UECS.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie des systèmes dont la dynamique linéaire dépend d'un paramètre vivant dans un compact du plan complexe. Plus précisément, nous avons considéré les systèmes linéaires dont la dynamique est représentée par le triplet  $(A(\theta), B(\theta), C(\theta))$  où ces matrices sont des fonctions continues par rapport au paramètre  $\theta \in \mathcal{P}$ . Nous avons montré que ces systèmes ne peuvent pas être UECS si les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont holomorphes par rapport au paramètre  $\theta$  et l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  d'intérieur non vide.

Nous avons prouvé aussi que dans le cas où  $C(\theta)$  est inversible pour tout  $\theta$ , il est impossible d'avoir l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide et que le spectre de la  $A(\theta)$  rencontre la droite réelle pour tout  $\theta \in \mathcal{P}$ . De même, si  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non vide et que  $A$  est différentiable, nous montrons que l'UECS de  $(A(\theta), B(\theta), C(\theta))$  implique un résultat de densité dont nous savons qu'il est faux dans certains cas particuliers.

Dans ce chapitre, des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie ont été établies. Un lien entre la notion d'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie et celle de la contrôlabilité en moyenne a été établi et des illustrations numériques ont été proposées dans la dernière partie du chapitre.

## Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié la contrôlabilité de sortie de systèmes linéaires tant dans le cadre discret que continu.

Plus précisément,

- ✓ nous avons établi, au Chapitre 3, des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour la *contrôlabilité de l'état vers la sortie* de systèmes linéaires, notion introduite en 1960 par J. Bertram et P. Sarachik, tant dans le cadre discret que continu. Nous avons, en particulier, étendu le test de Hautus au cadre de la sortie et donné, dans la mesure du possible, des expressions explicites de contrôles permettant d'avoir la valeur de sortie désirée en temps fini avec des trajectoires de sortie continues.
- ✓ nous avons introduit, au Chapitre 4, deux nouvelles notions de contrôlabilité de la sortie, à savoir la *contrôlabilité simple de la sortie* et la *contrôlabilité globale de la sortie*, dans le but d'apporter des réponses rigoureuses sur la question de savoir s'il est possible d'atteindre une valeur de sortie désirée en temps fini à partir d'une valeur initiale de sortie. Nous avons donné des conditions nécessaires et/ou suffisantes de contrôlabilité pour chacune de ces deux notions et avons donné aussi, dans la mesure du possible, des expressions de contrôles pour atteindre les valeurs de sortie désirées.
- ✓ au Chapitre 5, nous avons étudié *l'uniforme ensemble contrôlabilité* et *l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* de systèmes linéaires dont la dynamique dépend d'un paramètre. Nous avons vu, en particulier, que si la matrice d'état  $A$  possède une valeur propre réelle alors il est impossible que l'état du système en question soit uniformément ensemble contrôlable si l'espace de paramétrisation contient une boule ouverte de  $\mathbb{R}^d$  pour tout  $d \geq 2$ . Nous avons aussi montré que si les matrices du système sont suffisamment régulières, ce résultat de non contrôlabilité reste vrai. Des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'*uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie* ont été établies sur des structures particulières. Une application à la contrôlabilité en moyenne et une illustration numérique ont été données.

Plusieurs questions, dont nous énumérerons quelques unes dans la suite, restent cependant ouvertes et feront l'objet de futures investigations.

- ❶ La première est celle que nous avons laissée à la fin du Chapitre 4, celle qui consiste à savoir si dans le cadre des systèmes à temps discret, la contrôlabilité simple de la sortie implique la contrôlabilité simple en un nombre fini d'itérations. Rappelons que dans le cas où la dimension de l'espace de sortie  $q$  est strictement supérieure à 1, nous avons pu répondre par

la négative pour les systèmes à temps continu grâce au Théorème des valeurs intermédiaires. Aussi, dans cette thèse, nous n'avons considéré que les systèmes linéaires. Il serait intéressant d'étudier par la suite la contrôlabilité de la sortie des systèmes dont les dynamiques de l'état et de sortie sont non-linéaires.

- ② Une question qui serait intéressante à regarder est la suivante : Soit  $D$  une boule fermée de  $\mathbb{C}$  et  $g_1, g_2, \dots, g_k, k \in \mathbb{N}$ ,  $k$  fonctions continues sur  $D$ . Est-il possible que

$$\overline{\mathcal{H}(D) + g_1 \mathcal{H}(D) + \dots + g_k \mathcal{H}(D)} = \mathbb{X}(D)? \quad (6.1)$$

Dans le cas où les fonctions  $g_k, k \in \mathbb{N}$ , sont assez régulières, nous avons montré, à travers le Lemme 5.2.4, que cette densité ne peut pas avoir lieu. Dans le cas où ces fonctions sont justes continues, la réponse ne nous est pas claire.

- ③ Dans le cadre de l'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(A(\theta), B(\theta))$ , nous avons vu que si l'on a une seule entrée, c'est-à-dire  $m = 1$ , alors il est nécessaire que  $\mathcal{P}$  soit d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$  pour que ce système soit uniformément ensemble contrôlable. Dans le cas  $m > 1$ , nous avons montré que cette condition reste nécessaire sous réserve que les matrices  $A$  et  $B$  soient assez régulières. À cet effet, nous avons montré qu'une condition nécessaire d'uniforme ensemble contrôlabilité est que la relation de densité (6.1) soit satisfaite avec des  $g_k$  régulières. Cependant, la question d'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(A(\theta), B(\theta))$  lorsque  $\mathcal{P}$  n'est pas d'intérieur vide et  $A$  et  $B$  juste continues et sans hypothèse sur le spectre de  $A$  reste ouverte. Rappelons que dans le cas  $m > 1$ , nous avons pu relier ce problème à celui de la densité (6.1) parce que nous avons supposé  $A$  différentiable.

Notons qu'une réponse négative à la question évoquée au point ② permettrait de conclure que la paire  $(A(\theta), B(\theta))$  ne peut pas être uniformément ensemble contrôlable lorsque l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  est d'intérieur non-vide dans  $\mathbb{C}$  et  $A$  différentiable.

- ④ Le problème d'uniforme ensemble contrôlabilité de la paire  $(A(\theta), B(\theta))$  lorsque  $\mathcal{P}$  n'est pas d'intérieur vide dans  $\mathbb{C}$  évoqué au point précédent se pose également dans le cadre de la sortie. Plus précisément, est-il possible d'avoir l'uniforme ensemble contrôlabilité de la sortie du système (5.1) si l'espace de paramétrisation  $\mathcal{P}$  n'est pas d'intérieur vide. Nous avons donné une réponse négative à cette question dans le cas où les matrices du système sont holomorphes. Dans le cas général, cette question est ouverte et semble plus délicate que celle de l'uniforme ensemble contrôlabilité à cause de la présence de la matrice  $C(\theta)$ .

# Bibliographie

- [1] M. Abdelli and C. Castro. Numerical approximation of the averaged controllability for the wave equation with unknown velocity of propagation. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 27 :26, 2021. Id/No 64.
- [2] R. P. Agarwal and D. O'Regan. *An introduction to ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [3] A. Agrachev, Y. Baryshnikov, and A. Sarychev. Ensemble controllability by Lie algebraic methods. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 22(4) :921–938, 2016.
- [4] F. Amato, M. Ariola, and C. Cosentino. Finite-time stabilization via dynamic output feedback. *Automatica*, 42(2) :337–342, 2006.
- [5] V. Andrievskii. Polynomial approximation of analytic functions on a finite number of continua in the complex plane. *Journal of Approximation Theory*, 133(2) :238–244, 2005.
- [6] N. Augier, U. Boscain, and M. Sigalotti. Adiabatic ensemble control of a continuum of quantum systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56(6) :4045–4068, 2018.
- [7] A. S. Avetisyan and A. Z. Khurshudyan. Averaged controllability of euler-bernoulli beams with random material characteristics : the green's function approach. *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 72(4) :7–18, 2019.
- [8] J. A. Bárcena-Petisco and E. Zuazua. Averaged dynamics and control for heat equations with random diffusion. *Systems & Control Letters*.
- [9] G. Basile and G. Marro. *Controlled and conditioned invariants in linear system theory*. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1992.
- [10] K. Beauchard, J.-M. Coron, and P. Rouchon. Controllability issues for continuous-spectrum systems and ensemble controllability of Bloch equations. *Communications in Mathematical Physics*.
- [11] V. Belevitch. *Classical network theory*. Holden-Day, San Francisco, Calif.-Cambridge-Amsterdam, 1968.
- [12] S. Benzoni-Gavage. *Calcul différentiel et équations différentielles-2e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2014.
- [13] J.E. Bertram and P.E. Sarachik. On optimal computer control. *IFAC Proceedings Volumes*, 1(1) :429–432, 1960.
- [14] V. D. Blondel, E. D. Sontag, M. Vidyasagar, and J. C. Willems. *Open problems in mathematical systems and control theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [15] G. E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Grad. Texts Math.* Berlin : Springer, corr. 3rd printing of the 1993 original edition, 1997.
- [16] F. E. Browder. Functional analysis and partial differential equations. ii. *Mathematische Annalen*, 145(2) :81–226, 1962.
- [17] C. I. Byrnes. Pole assignment by output feedback. *Three decades of mathematical system theory*, pages 31–78, 1989.
- [18] J. J. Carmona. Mergelyan’s approximation theorem for rational modules. *Journal of approximation theory*, 44(2) :113–126, 1985.
- [19] J. J. Carmona Doménech. A necessary and sufficient condition for uniform approximation by certain rational modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 86(3) :487–490, 1982.
- [20] M. Cartan. Cours de C3, Algèbre et Géométrie, Groupe fondamental, Revêtements. *Université Paris XI*, 41, 1968.
- [21] A. Chang. An algebraic characterization of controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 10(1) :112–113, 1965.
- [22] C.-T. Chen. *Introduction to linear system theory*. Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [23] C.-T. Chen. *Linear systems theory and design*. Oxford university press, 1999.
- [24] X. Chen. Structure theory for ensemble controllability, observability, and duality. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 31(2) :1–40, 2019.
- [25] X. Chen. Controllability issues of linear ensemble systems over multi-dimensional parameterization spaces, 2020. preprint.
- [26] F. C. Chittaro and J.-P. Gauthier. Asymptotic ensemble stabilizability of the bloch equation. *Systems & Control Letters*, 113 :36–44, 2018.
- [27] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [28] J. Coulson, B. Gharesifard, and A.-R. Mansouri. On average controllability of random heat equations with arbitrarily distributed diffusivity. *Automatica*, 103 :46–52, 2019.
- [29] H. d’Angelo. *Linear time-varying systems : analysis and synthesis*. Allyn and Bacon, 1970.
- [30] B. Danhane, J. Lohéac, and M. Jungers. Characterizations of output controllability for LTI systems. Preprint, 2020.
- [31] B. Danhane, J. Lohéac, and M. Jungers. Contributions to output controllability for linear time varying systems. *IEEE Control Systems Letters*, 6 :1064–1069, 2021.
- [32] A. M. Davie. Analytic capacity and approximation problems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 171 :409–444, 1972.
- [33] F. DE MARÇAY. Analyse complexe. *Département de Mathématiques d’Orsay, Université Paris-Saclay, France, Cours*.
- [34] G. Dirr and M. Schönlein. Uniform and  $L^q$ -ensemble reachability of parameter-dependent linear systems. *Journal of Differential Equations*, 283 :216–262, 2021.
- [35] P. A. Fuhrmann and U. Helmke. *The mathematics of networks of linear systems*. Universitext. Cham : Springer, 2015.

- 
- [36] T. W. Gamelin. Uniform algebras. Prentice-Hall Series in Modern Analysis. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, Inc. XIII, 257 p. (1969)., 1969.
- [37] T. W. Gamelin. *Complex analysis*. Undergraduate Texts Math. New York, NY : Springer, 2001.
- [38] M. I. García-Planas and J. L. Domínguez-García. Alternative tests for functional and pointwise output-controllability of linear time-invariant systems. *Systems & control letters*, 62(5) :382–387, 2013.
- [39] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. *Invariant subspaces of matrices with applications*, volume 51 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2006. Reprint of the 1986 original.
- [40] K. A. Grasse. A vector-bundle version of a theorem of V. Doležal. *Linear Algebra and its Applications*.
- [41] V. Hardt and E. Wagenführer. Spectral properties of a multiplication operator. *Mathematische Nachrichten*.
- [42] M. L. J. Hautus. Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 72 = Indag. Math.*, 31 :443–448, 1969.
- [43] U. Helmke and M. Schönlein. Uniform ensemble controllability for one-parameter families of time-invariant linear systems. *Systems & Control Letters*, 71 :69–77, 2014.
- [44] J. P. Hespanha. *Linear systems theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2nd updated edition edition, 2018.
- [45] M. W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Grad. Texts Math*. Springer, Cham, 1976.
- [46] L. Huang and Z. Li. Solvability of quadratic optimal control via output feedback. *Sci. China Ser. A*, 33(10) :1238–1245, 1990.
- [47] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 5 :102–119, 1960.
- [48] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Class. Math. Berlin : Springer-Verlag, reprint of the corr. print. of the 2nd ed. 1980 edition, 1995.
- [49] J. Klamka. *Controllability and minimum energy control*, volume 162 of *Stud. Syst. Decis. Control*. Cham : Springer, 2019.
- [50] P. Kokotović, H. K. Khalil, and J. O’Reilly. *Singular perturbation methods in control : analysis and design*, volume 25 of *Classics Appl. Math*. Philadelphia, PA : SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- [51] S. G. Krantz and H. R. Parks. *The implicit function theorem. History, theory, and applications*. Mod. Birkhäuser Classics. New York, NY : Birkhäuser/Springer, reprint of the 2003 hardback edition edition, 2013.
- [52] E. Kreindler and P. E. Sarachik. On the concepts of controllability and observability of linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-9 :129–136, 1964.
- [53] L. Lazar and J. Lohéac. Chapter 8 - control of parameter dependent systems. In Emmanuel Trélat and Enrique Zuazua, editors, *Numerical Control : Part A*, volume 23 of *Handbook of Numerical Analysis*, pages 265–306. Elsevier, 2022.
- [54] M. Lazar and J. Lohéac. Control of parameter dependent systems. In *Handbook of Numerical Analysis*, volume 23 of *Numerical Control : Part A*, pages 265–306. 2022.

- [55] M. Lazar and E. Zuazua. Greedy controllability of finite dimensional linear systems. *Automatica*, 74 :327–340, 2016.
- [56] E. B. Lee and L. Markus. Foundations of optimal control theory. Technical report, Minnesota Univ Minneapolis Center For Control Sciences, 1967.
- [57] W. S. Levine and M. Athans. On the determination of the optimal control constant output feedback gains for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-15 :44–48, 1970.
- [58] J.-S. Li. Ensemble control of finite-dimensional time-varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(2) :345–357, 2010.
- [59] J.-S. Li and N. Khaneja. Control of inhomogeneous quantum ensembles. *Physical review A*, 73 :030302, Mar 2006.
- [60] J.-S. Li and N. Khaneja. Ensemble control of Bloch equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(3) :528–536, 2009.
- [61] J.-S. Li and J. Qi. Ensemble control of time-invariant linear systems with linear parameter variation. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [62] J.-L. Lions. Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations de systemes distribués. tome 1. contrôlabilité exacte. *Recherche en Mathématiques Appliquées*, 8, 1988.
- [63] J. Lohéac, E. Trélat, and E. Zuazua. Nonnegative control of finite-dimensional linear systems. *Annales de l’Institut Henri Poincaré C*, 38(2) :301–346, 2021.
- [64] J. Lohéac and E. Zuazua. From averaged to simultaneous controllability. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques. Série VI*.
- [65] F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, and F. Periago. Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *Journal of Optimization Theory and Applications*.
- [66] W. Miao, G. Cheng, and J.-S. Li. On uniform ensemble controllability of diagonalizable linear ensemble systems. preprint, 2021.
- [67] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 62 of *Texts Read. Math.* New Delhi : Hindustan Book Agency, reprint of the 2006 3rd edition published by Princeton University Press edition, 2012.
- [68] G. A. Muñoz, Y. Sarantopoulos, and A. Tonge. Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps. *Studia Mathematica*.
- [69] R. Nagel, editor. *One-parameter semigroups of positive operators*, volume 1184 of *Lect. Notes Math.* Springer, Cham, 1986.
- [70] A. G. O’Farrell. Annihilators of rational modules. *Journal of Functional Analysis*, 19(4) :373–389, 1975.
- [71] V.-M. Popov. *Hyperstability of control systems*. Editura Academiei, Bucharest; Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. Translated from the Romanian by Radu Georgescu, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 204.
- [72] R. Robin, N. Augier, U. Boscain, and M. Sigalotti. Ensemble qubit controllability with a single control via adiabatic and rotating wave approximations. *Journal of Differential Equations*, 318, May 2022.

- 
- [73] J. Roe. *Winding around. The winding number in topology, geometry, and analysis*, volume 76 of *Stud. Math. Libr.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS); University Park, PA : Mathematics Advanced Study Semesters, 2015.
- [74] J. Rosenthal and J. C. Willems. Open problems in the area of pole placement. In *Open problems in mathematical systems and control theory*, Comm. Control Engrg. Ser., pages 181–191. Springer, London, 1999.
- [75] W. Rudin. *Real and complex analysis*. New York, NY : McGraw-Hill, 3rd ed. edition, 1987.
- [76] A. Scagliotti. Optimal control of ensembles of dynamical systems. preprint, 2022.
- [77] M. Schönlein. Feedback equivalence and uniform ensemble reachability. *Linear Algebra and its Applications*.
- [78] M. Schönlein. Computation of open-loop inputs for uniformly ensemble controllable systems. preprint, 2021.
- [79] M. Schönlein and U. Helmke. Controllability of ensembles of linear dynamical systems. *Math. Comput. Simul.*, 125 :3–14, 2016.
- [80] Y. Sibuya. Some global properties of matrices of functions of one variable. *Mathematische Annalen*.
- [81] L. Silverman and H. Meadows. Controllability and time-variable unilateral networks. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 12(3) :308–314, 1965.
- [82] E. D. Sontag. *Mathematical control theory*, volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998. Deterministic finite-dimensional systems.
- [83] E. H. Spanier. *Algebraic topology*. Berlin : Springer-Verlag, 1995.
- [84] G. W. Stewart and J. G. Sun. *Matrix perturbation theory*. Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [85] E. Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. [Concrete Mathematics]. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications. [Theory and applications].
- [86] T. Trent and J. L.-M. Wang. The uniform closure of rational modules. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 13(5) :415–420, 1981.
- [87] H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel, and M. Hautus. *Control theory for linear systems*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2001.
- [88] R. Triggiani. Controllability and observability in Banach space with bounded operators. *SIAM Journal on Control*, 1974.
- [89] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and control for operator semigroups*. Birkhäuser Adv. Texts, Basler Lehrbüch. Basel : Birkhäuser, 2009.
- [90] C. F. Van Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(3) :395–404, 1978.
- [91] W. Walter. There is an elementary proof of peano’s existence theorem. *The American Mathematical Monthly*, 78(2) :170–173, 1971.
- [92] D. Wilson and J. Moehlis. Optimal chaotic desynchronization for neural populations. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 13(1) :276, 2014.
- [93] W. Wonham. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(6) :660–665, 1967.

- [94] W. M. Wonham and A. S. Morse. Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach. *SIAM Journal on Control*, 8(1) :1–18, 1970.
- [95] S. Zeng and F. Allgoewer. A moment-based approach to ensemble controllability of linear systems. *Systems & Control Letters*, 98 :49–56, 2016.
- [96] Z.-M. Zheng and H.-S. Ding. A note on closedness of the sum of two closed subspaces in a banach space. *arXiv preprint arXiv :1509.06445*, 2015.
- [97] A. Zlotnik and J.-S. Li. Optimal entrainment of neural oscillator ensembles. *Journal of neural engineering*, 9(4) :046015, 2012.
- [98] E. Zuazua. *Controllability of partial differential equations*. PhD thesis, Optimization and Control, 2006.
- [99] E. Zuazua. Averaged control. *Automatica*, 50(12) :3077–3087, 2014.