



**HAL**  
open science

# Modélisation et identification des matériaux architecturés et composites par des méthodes d'homogénéisation à gradient d'ordre supérieur

Ahmed Lahbazi

► **To cite this version:**

Ahmed Lahbazi. Modélisation et identification des matériaux architecturés et composites par des méthodes d'homogénéisation à gradient d'ordre supérieur. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Lorraine, 2022. Français. NNT : 2022LORR0153 . tel-04072530

**HAL Id: tel-04072530**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-04072530>**

Submitted on 18 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES  
UNIVERSITAIRES**

## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)  
*(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)*

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Laboratoire de Physique  
et Mécanique Textiles



## Thèse

Présentée et soutenue publiquement pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE**

Mention : Mécanique des matériaux

par **LAHBAZI Ahmed**

Sous la direction de **M. GANGHOFFER Jean-François**

**M. SINOIMERI Artan**

Thèse soutenue le 28 octobre 2022

# **Modélisation et identification des matériaux architecturés et composites par des méthodes d'homogénéisation à gradient d'ordre supérieur**

**Membres du jury :**

**Directeurs de thèse :** **M. GANGHOFFER Jean-François**, Pr, Université de Lorraine

**M. SINOIMERI Artan**, Pr, Université de Haute-Alsace

**Rapporteurs :** **M. ALLAOUI Samir**, Pr, Université de Reims Champagne-Ardenne

**Mme VIDAL-SALLE Emmanuelle**, Pr, INSA de Lyon

**Président de jury :** **M. ZAHROUNI Hamid**, Pr, Université de Lorraine

**Examineurs :** **Mme BOUVIER Salima**, Pr, Université Technologique de Compiègne

**Mme DINZART Florence**, MC, Université de Lorraine

**M. BEN KHALIFA Ated**, MC, Université de Monastir

**Invité :** **M. MERAGHNI Fodil**, Pr, ENSAM de Metz

## **Remerciements :**

Ce travail de thèse a été effectué au sein de laboratoire d'étude des microstructures et de mécanique des matériaux (LEM3), en collaboration avec LPMT Mulhouse, LaMCoS Lyon, 3SR Grenoble et MSSMAT Paris.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais adresser toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Mr GANGHOFFER Jean-François, pour sa patience, ses disponibilités et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion. Ça a été un grand plaisir d'effectuer ce mémoire sous sa direction qui m'a aidé à bien orienté ma thèse grâce à un bon suivi du travail.

Je désire aussi remercier mon co-encadrant Mr SINOIMERI Artan, qui m'a fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires, et qui m'a orienté pour la gestion de travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

# Dédicace

**Je dédie cette thèse :**

**A MES CHERES PARENTS :**

**Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.**

**Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.**

**A mon frère et mes sœurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.**

**A MA CHERE EPOUSE AYA ATTIA**

**Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon amour et mon  
attachement à toi.**

**Depuis que je t'ai connu, tu n'as cessé de me soutenir et de  
m'épauler.**

**Tu me voulais toujours le meilleur.**

**Ton amour ne m'a procuré que confiance et stabilité.**

**Tu as partagé avec moi les meilleurs moments de ma vie, aux  
moments les plus difficiles de ma vie, tu étais toujours à mes côtés,**

**Je te remercie de ne m'avoir jamais déçu.**

**Aucun mot ne pourrait exprimer ma gratitude, mon amour et mon  
respect.**

**Je remercie le bon Dieu qui a croisé nos chemins.**

**Puisse le bon dieu nous procurer santé et longue vie.**

## Table des matières de la thèse :

I.	Introduction générale .....	1
1.	Contexte du travail .....	4
2.	Milieux architecturés périodiques .....	5
3.	Milieux continus enrichis de matériaux composites ou architecturés périodiques .....	9
4.	Panorama des méthodes d'homogénéisation de milieux hétérogènes .....	12
5.	Homogénéisation vers les milieux continus généralisés .....	14
5.1.	Méthodes d'homogénéisations non-linéaires .....	19
5.2.	Calcul des propriétés effectives .....	20
5.3.	Taille et morphologie du VER.....	22
5.4.	Description de la cinématique imposée sur le VER .....	25
6.	Objectifs et motivations de la thèse .....	27
7.	Plan de la thèse.....	29
II.	Méthode d'homogénéisation à gradient d'ordre supérieur en élasticité linéaire : Applications aux matériaux composites, au pantographe et aux matériaux à parois minces.....	42
1.	Introduction.....	47
2.	Méthodologie générale pour l'homogénéisation des matériaux hétérogènes périodiques .....	50
3.	Formulations théoriques du modèle à gradient de déformation.....	53
3.1.	Évaluation des champs de déplacements et déformations microscopiques.....	59
3.2.	Évaluation des modules effectifs et validation du modèle du second gradient .....	62
3.2.1.	Composite avec une cellule unitaire poreuse .....	62

3.2.2. Modèle à gradient de déformation d'un pantographe continu .....	66
3.3. Effet de la taille de la cellule unitaire sur les modules effectifs de Cauchy et du second gradient.....	74
4. Variation des modules du second gradient par rapport aux paramètres microstructuraux géométriques et mécaniques de structures composites .....	77
5. Application à un matériau composite sandwich .....	81
6. Applications aux matériaux à parois minces.....	84
7. Sensibilité de la longueur interne extensionnelle du second gradient à la forme géométrique du pantographe .....	89
8. Discussion et conclusion.....	93
III. Méthode d'homogénéisation vers des milieux continus isotropes et anisotropes du second gradient en grandes déformations .....	101
1. Introduction.....	104
2. Méthode d'homogénéisation continue en grandes déformations incrémentales .....	110
2.1. Problème microscopique .....	110
2.2. Homogénéisation en grandes déformations pour le milieu de Cauchy.....	112
2.3. Évaluation des modules effectifs du second gradient sous forme incrémentale .....	115
3. Matériaux hyperélastiques .....	120
3.1. Théories de l'hyperélasticité.....	121
3.2. Modèles hyperélastiques isotropes .....	123
3.3. Modèle hyperélastique du second gradient.....	131
4. Linéarisation et discrétisation par élément finis .....	133
4.1. Formulation variationnelle.....	134



4.2.	Linéarisation du principe du travail virtuel .....	135
4.3.	Approximation par éléments finis de la description spatiale de l'élasticité en grandes déformations.....	137
5.	Modèle anisotrope d'ordre supérieur avec prise en compte de la rigidité en extension et flexion-cisaillement : Application au pantographe .....	138
5.1.	Comportement en extension biaxiale.....	140
5.2.	Comportement en cisaillement .....	143
6.	Discussion et conclusion.....	146
IV.	Identification d'un modèle anisotrope macroscopique par des essais réels et virtuels (numériques) sur un pantographe souple .....	152
1.	Introduction.....	156
2.	Essais en traction sur la structure pantographique .....	157
3.	Identification du potentiel macroscopique anisotrope du pantographe .....	165
3.1.	Identification d'un modèle microscopique hyperélastique de Ciarlet-Geymonat et validation de la méthode d'homogénéisation en grandes déformations .....	165
3.2.	Identification des paramètres du potentiel macroscopique du modèle hyperélastique du premier gradient.....	167
3.3.	Identification des paramètres du potentiel macroscopique pour le milieu du second gradient.....	174
3.3.1.	Problème aux valeurs limites microscopique.....	175
3.3.2.	Linéarisation et discrétisation du problème nonlinéaire au second gradient.....	177
3.3.2.1.	Discrétisation par élément finis du problème d'équilibre.....	179
3.3.3.	Identification du potentiel hyperélastique macroscopique du second gradient.....	184
4.	Applications à des matériaux composites avec vide et des matériaux auxétiques 2D.....	191

5.	Discussion et conclusion .....	195
V.	Calcul de propriétés effectives de matériaux architecturés 3D : Applications en petites et grandes déformations.....	199
1.	Introduction.....	205
2.	Matériaux et méthodes .....	206
3.	Evaluation des propriétés effectives en petites déformations .....	208
3.1.	Identification des propriétés effectives homogénéisées du premier gradient.....	208
3.2.	Evaluation des propriétés effectives du second gradient.....	221
3.2.1.	Calcul de longueurs internes extensionnelles.....	227
4.	Calcul des réponses mécaniques en grandes déformations.....	228
4.1.	Comportement en extension longitudinale et transversale pour le milieu de Cauchy...	231
4.2.	Réponses mécaniques en grandes transformations pour le milieu du second gradient .	236
5.	Conclusion .....	248
VI.	Conclusion générale et perspectives .....	249

# I. Introduction générale

## Table des matières :

I. Introduction générale .....	1
1. Contexte du travail .....	4
2. Milieux architecturés périodiques .....	5
3. Milieux continus enrichis de matériaux composites ou architecturés périodiques .....	9
4. Panorama des méthodes d'homogénéisation de milieux hétérogènes .....	12
5. Homogénéisation vers les milieux continus généralisés .....	14
5.1. Méthodes d'homogénéisations non-linéaires .....	19
5.2. Calcul des propriétés effectives .....	20
5.3. Taille et morphologie du VER.....	22
5.4. Description de la cinématique imposée sur le VER .....	25
6. Objectifs et motivations de la thèse .....	27
7. Plan de la thèse.....	29
Listes des références .....	31

## Liste des figures :

Figure I-1 : Projet AMOC avec les équipes du consortium de partenaires.....	4
Figure I-2 : (a) Micro-réseau métallique à tube creux créé avec un prototypage de guide d'ondes photopolymère auto-propagatif,16 (b) polymère matériau micro-architecturé fabriqué à l'aide de la micro-stéréolithographie par projection (P $\mu$ SL), (c) architecture d'aluminium à tube creux générée avec P $\mu$ SL et revêtement par dépôt de couche atomique (ALD) et (d) matériau architecturé en céramique solide dérivé de P $\mu$ SL avec des nanoparticules d'aluminium dans la suspension de monomère liquide suivie par une étape de frittage (C. Spadaccini, 2019). ....	7
Figure I-3 : Exemples 3D de matériaux architecturés (L. Valdevit et J. Bauer, 2016).....	8
Figure I-4 : Matériaux architecturés pour piéger les contraintes élastiques (S. Shan et al., 2015).....	9
Figure I-5 : Volume élémentaire représentatif d'un matériau composite (X.-Y.Zhou et al., 2016) ..	11
Figure I-6 : Classification des méthodes d'homogénéisation (T. H. Hoang, 2016) .....	14
Figure I-7 : Classification des continuums généralisés : milieux d'ordre supérieur et milieux de gradient supérieur (B. Hassani, 1999).....	16
Figure I-8 : Résumé de la transition d'échelles et du calcul d'homogénéisation (P. Steinmann et al., 2016). ....	21
Figure I-9 : Répartition des tractions admissibles pour des conditions aux limites périodiques qui autorisent la déformation de la VER selon la partie antisymétrique de la déformation du second gradient (Kaczmarczyk et al.. 2008). ....	22
Figure I-10 : Élément de volume représentatif pour un matériau composite ordonné/structuré (à gauche) et pour un matériau désordonné/aléatoire (à droite) (V. P. NGUYEN et al., 2011) .....	24
Figure I-11 : Différents types de conditions aux limites (V. P. Nguyen et al., 2011). ....	26
Figure I-12 : Volume élémentaire représentatif périodique (à gauche) et VER non périodique (à droite) (V. P. Nguyen et al, 2011).....	26

Figure I-13 : cellule unitaire présentant une réponse avec adoucissement en cisaillement : les CL linéaires empêchent les dommages de se produire sur les bords de VER (à gauche) tandis que les CL périodiques le permettent (à droite). Le tracé de bords montre le profil des dommages (V. P. Nguyen et al., 2011).....27

Figure I-14 : Plan de la thèse .....30

## 1. Contexte du travail

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre plusieurs laboratoires de recherche dans un projet financé par l'agence Nationale de Recherche (ANR), ce projet porte l'acronyme AMOC, et son nom développé est 'Tomographie aux rayons X et analyses multiéchelles pour l'optimisation des renforts composites tissés en 3D'. Chaque laboratoire de recherche membre du consortium participe aux tâches appuyées par les compétences résumées dans la Figure I-1.



**Figure I-1 : Projet AMOC avec les équipes du consortium de partenaires**

L'objectif du projet est de développer des modèles de comportement enrichis de milieux fibreux afin de mieux prendre en compte les mécanismes locaux de déformation de la microstructure fibreuse et de quantifier son impact sur le comportement mécanique à l'échelle intermédiaire d'un volume élémentaire représentatif.

Les verrous scientifiques du projet sont les suivants : les transitions d'échelles (échelle du fil ou de la fibre, de la maille élémentaire du tissage), de la macrostructure constituée d'un nombre important de mailles élémentaires), l'imagerie 3D de milieux fibreux réguliers par microtopographie X pour identifier leurs mécanismes de déformation ainsi qu'une cinématique enrichie pour nourrir des

modèles de milieux continus généralisés. Les milieux du second gradient sont mis en avant dans cette thèse.

Le projet est pluridisciplinaire car il concerne la science des matériaux fibreux, la mécanique des matériaux à géométrie discrète car fibreuse, les méthodes d'homogénéisation multiéchelles d'ordre supérieur, la rhéologie, les techniques d'analyse d'images par microtomographie, les méthodes numériques.

Les tâches principales du projet sont :

- Tâche 1 : Mécanique expérimentale et imagerie « enrichie »
- Tâche 2 : Mécanique théorique et numérique pour la formulation de milieux continus équivalents enrichis
- Tâche 3 : prise en compte de l'impact de la variabilité statistique des paramètres microstructuraux
- Tâche 4 : mise en œuvre des outils théoriques et expérimentaux développés pour des applications ciblées : matériaux architecturés, composites, mèches, fils complexes, tresses, tissés...
- Tâche 5 : Coordination du projet, communication interne et externe.

Dans cette thèse, nous aborderons les tâches 2, 3 et 4, en vue d'identifier des milieux continus généralisés du second gradient en petites et grandes transformations.

## **2. Milieux architecturés périodiques**

Dans la période récente (fin du vingtième siècle), des percées technologiques majeures comme les techniques de fabrication additive et la manipulation de la matière à l'échelle des atomes ont ouvert la possibilité de concevoir et de fabriquer de nouvelles classes de matériaux dotés de propriétés mécaniques très supérieures à celles du matériau de base qui les constituent. Les matériaux architecturés définissent une nouvelle classe de matériaux artificiels avec des caractéristiques

statiques et dynamiques exceptionnelles que l'on ne rencontre généralement pas pour les matériaux homogènes qui sont constitués d'une seule phase (N. Karathanasopoulos, et al., 2018 ; P. Lohmuller et al, 2019). La quête des ingénieurs et des chercheurs en science des matériaux pour améliorer les propriétés de ces derniers afin de répondre aux demandes exigeantes de l'industrie a franchi une nouvelle étape. La recherche dans ce domaine a en effet évolué vers un nouveau paradigme, dans lequel l'architecture interne du matériau apparaît comme un nouveau degré de liberté - au-delà de la composition chimique des matériaux de base - dans la conception des matériaux dits architecturés afin de contrôler et d'améliorer leurs propriétés effectives, au sens d'un milieu continu de substitution homogène.

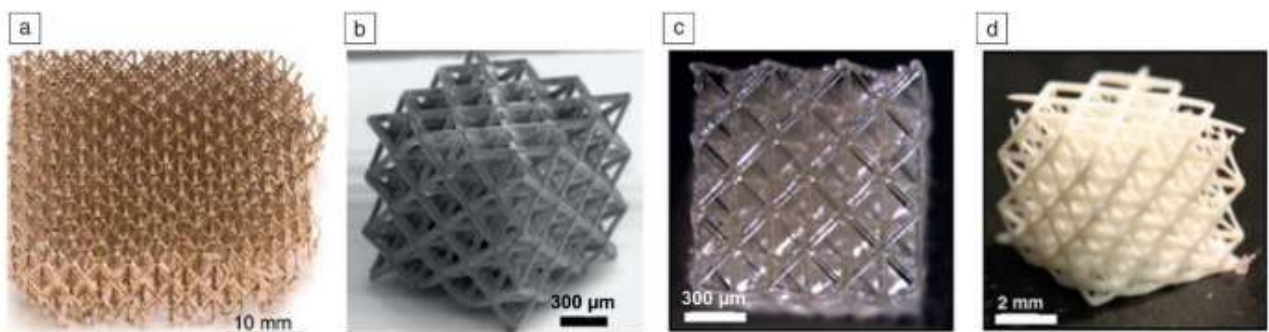
Au cours des dernières années, un grand intérêt a été porté au comportement statique des matériaux architecturés (F. Mike et al, 2003 ; S. Sicong et al, 2015 ; R. Julia et al, 2019). Cette famille de matériaux artificiels est employée dans plusieurs applications en ingénierie (notamment l'aéronautique, le génie civil, la construction mécanique, le génie parasismique, l'absorption du bruit et des vibrations) ainsi qu'en biomécanique (en vue de trouver des biosubstituts), pour contrôler le degré d'anisotropie, absorber les vibrations, les chocs ou impacts, l'énergie (J. Mei et al, 2012), pour la réduction du bruit (H. Reda et al., 2017; A. Bacigalupo et L. Gambarotta, 2014), ou encore en vue de contrôler les caractéristiques de propagation d'ondes et l'amortissement des vibrations dans des plages de fréquence données (H. Xu., 2016, L. Cheng et al., 2018). Le pilotage de l'architecture du niveau atomique jusqu'à l'échelle macroscopique de la structure permet de contrôler les propriétés mécaniques.

Nombre de travaux ont porté sur la modélisation des matériaux architecturés afin d'en comprendre les mécanismes locaux de déformations en relation avec leur comportement aux échelles supérieures, voir les travaux récents et références incluses (N. Karathanasopoulos et al, 2018 ; S. E. Alavi et al, 2021 ; A. Al-Ketan et al, 2017). En particulier, l'accent a été mis depuis deux décades sur la



conception de cellules unitaires 2D de matériaux périodiques avec des attributs de rigidité spécifique donnée par un cahier des charges de l'utilisateur (lui-même fonction de l'application visée).

Ces matériaux architecturés peuvent être réalisés par des méthodes de fabrication additive qui sont en plein essor et dont on repousse continuellement les limites de performance (en terme d'échelle minimale, de possibilité de mélange de matériaux différents) ; cela représente des défis dans la fabrication en raison de la complexité tridimensionnelle requise, des échelles de longueur multiples, de la possibilité offerte d'associer plusieurs matériaux dans une seule architecture et du débit de fabrication global (Figure I-2). Les processus de fabrication additive (FA) peuvent fournir des solutions à certains de ces défis (C. Spadaccini, 2019).



**Figure I-2 : (a) Micro-réseau métallique à tube creux créé avec un prototypage de guide d'ondes photopolymère auto-propagatif, (b) polymère matériau micro-archituré fabriqué à l'aide de la micro-stéréolithographie par projection (PμSL), (c) architecture d'aluminium à tube creux générée avec PμSL et revêtement par dépôt de couche atomique (ALD) et (d) matériau archituré en céramique solide dérivé de PμSL avec des nanoparticules d'aluminium dans la suspension de monomère liquide suivie par une étape de frittage (C. Spadaccini, 2019).**

Les propriétés mécaniques effectives des matériaux architecturés ont pour origine leur topologie interne plutôt que la composition chimique du matériau de base qui les constitue, et ils sont susceptibles de montrer des performances matérielles exceptionnelles, bien supérieures à celles du matériau de base. Les matériaux artificiels de ce type méritent l'épithète de « matériaux architecturés ou métamatériaux », le matériau de base pouvant être un métal, un polymère ou une céramique (Figure I-2).

L'analyse du comportement mécanique des matériaux architecturés périodiques peut être effectuée au niveau microscopique, à l'échelle d'une cellule unitaire (CU), qui est répétée par translation afin de constituer un réseau régulier périodique dans le plan ou dans l'espace. Le vocable de métamatériaux désigne une nouvelle classe de matériaux parmi les matériaux architecturés émergeant au cours des dernières décennies, dotés d'attributs mécaniques statiques ou dynamiques rarement rencontrés au sein des matériaux naturels (N. Karathanasopoulos et al, 2018), telles que des coefficients de Poisson négatifs pour les matériaux dits auxétiques, une anisotropie très prononcée, des couplages entre modes de déformation (tels que traction / cisaillement pour les structures chirales, traction / flexion pour les structures chirales dépourvues de centre de symétrie).

Afin d'atteindre des propriétés supérieures à celles des matériaux conventionnels, différentes stratégies peuvent être envisagées : le pilotage du degré d'anisotropie en modifiant l'architecture, de la densité moyenne en adaptant des paramètres d'épaisseur et de longueur des éléments structuraux, ou encore via des caractéristiques de non centrosymétrie ou de chiralité afin d'activer des interactions entre différents modes de déformation. On trouve dans la littérature des exemples de conceptions de matériaux architecturés sujets à une forte anisotropie ou présentant des effets chiraux (s) (Figure I-3).



**Figure I-3 : Exemples de matériaux architecturés 3D (L. Valdevit et J. Bauer, 2016)**

Mentionnons aussi les travaux de (S. Shan et al., 2015) (Figure I-4) qui portent sur des matériaux architecturés avec un design interne incluant des éléments de poutre bistables et qui permettent un piégeage de l'énergie élastique : ce type de structure a pour vocation d'absorber l'énergie. De plus, le mécanisme d'absorption d'énergie découle uniquement de la géométrie structurale des éléments de poutres ; il est donc indépendant aussi bien du matériau que du chargement.



**Figure I-4 : Matériaux architecturés pour piéger les contraintes élastiques (S. Shan et al., 2015).**

### **3. Milieux continus enrichis de matériaux composites ou architecturés périodiques**

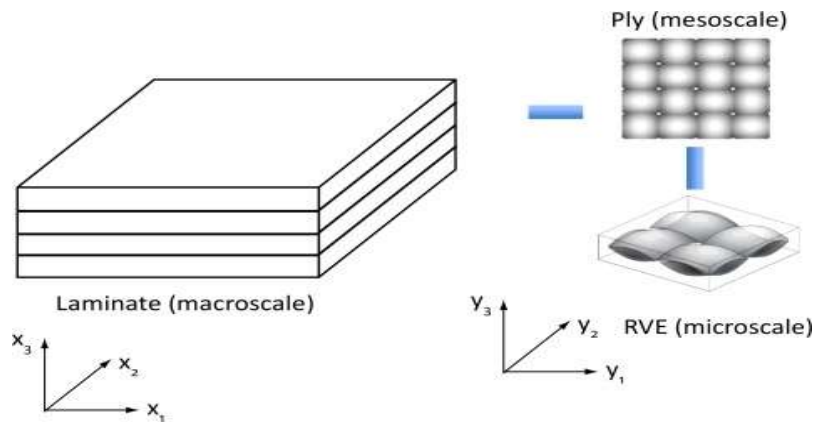
Le développement de modèles micromécaniques de nature prédictive permet de fournir une loi de comportement à l'échelle d'un milieu continu, reliant les propriétés effectives aux paramètres géométriques et microstructuraux des constituants individuels du composite. La présence d'un fort contraste de propriétés entre phases au sein d'un composite (ce contraste est infini pour un matériau architecturé) entraîne le développement de forts gradients de déformation à l'échelle microscopique, conduisant très souvent à la nécessité des développer des modèles de milieu continu enrichi, en tenant compte notamment des gradients d'ordre supérieur du déplacement ou de la déformation.

Dans les dernières décennies, la théorie de l'homogénéisation des matériaux architecturés est devenue un outil fondamental afin d'analyser le comportement global de milieux très hétérogènes, car siège d'un fort contraste de propriétés entre les constituants. Cette théorie repose sur la

détermination du comportement effectif d'un volume élémentaire représentatif (VER), ce qui suppose implicitement que cet élément VER se retrouve presque partout au sein de la structure, ce qui revient en fait à une pseudo-périodicité. Les approches par milieu continu effectif qui consistent à remplacer le matériau hétérogène par un continuum équivalent sont très répandues. Ces approches continues s'avèrent très efficaces et pratiques pour analyser les structures de grande taille car elles constituent un bon compromis entre précision et coût de calcul numérique. L'homogénéisation des matériaux composites et architecturés est un moyen très efficace pour l'identification de paramètres de lois de comportement ; elle est également un moyen de contrôler et d'optimiser la conception globale d'un système ou d'une structure.

La géométrie et les propriétés mécaniques des constituants de matériaux composites (matrice, inclusions) ou architecturés (topologie interne de la cellule unitaire) ont un impact direct sur la réponse du matériau à l'échelle macroscopique. La détermination expérimentale des propriétés mécaniques de ces matériaux étant délicate et coûteuse en raison du nombre de tests nécessaires en 3D, des formulations théoriques et numériques ont été développées afin de relier le comportement aux différentes échelles et de construire une loi de comportement à l'échelle d'un milieu continu effectif. En outre, la conception optimale de matériaux composites nécessite de comprendre de façon quantitative la relation entre l'architecture interne et les propriétés mécaniques, et de formuler des approches théoriques et numériques adéquates pour évaluer ces propriétés en prenant en compte des effets de la microstructure dans des conditions tant statiques que dynamiques. Les matériaux architecturés conçus avec une topologie interne quasi-périodique ont connu une expansion rapide depuis une trentaine d'années (N.S. Bakhvalov et al., 1989 ; B. Gambin et al., 1989) ; la topologie interne complexe de ces matériaux rend l'utilisation de simulations numériques directes ou de calculs en champ complet de macrostructure (dans lesquelles la microstructure est modélisée à son échelle la plus fine) numériquement trop coûteuse. Les méthodes d'homogénéisation permettent de déterminer la réponse mécanique de ces matériaux périodiques à partir de l'échelle du volume élémentaire effectif

(VER) ou de la cellule unitaire (CU) (X.-Y.Zhou et al., 2016) (Figure I-5), cette dernière étant associée à l'idée de périodicité, contrairement au VER qui est une notion plus générale.



**Figure I-5 : Volume élémentaire représentatif d'un matériau composite (X.-Y.Zhou et al., 2016)**

L'organisation multiéchelles parfois complexe de milieux architecturés (qui peuvent présenter plusieurs échelles d'architecture) est susceptible de conduire à non séparabilité des échelles (l'échelle microscopique du VER et l'échelle macroscopique), l'existence de grandes rotations à l'échelle de la microstructure, responsables d'une réponse mécanique anisotrope non linéaire montrant des effets d'imbrication des échelles. Des méthodes d'homogénéisation étendues à la non-séparation d'échelles sont alors nécessaires afin d'appréhender d'une façon approchée le comportement mécanique. Des méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur ont été développées depuis plusieurs décennies. Malgré l'ampleur des travaux de la littérature consacrée à l'homogénéisation d'ordre supérieur de milieux architecturés (H. Askes et al, 2009; I.V. Andrianov, 2011 ; H. Reda et al, 2020 ; M. Ayad et al, 2019), il n'existe encore aucun schéma numérique satisfaisant permettant d'évaluer les modules d'ordre supérieur de façon indépendante de la taille de cellule unitaire ou du volume élémentaire représentatif (VER), ce même en petites déformations.

#### **4. Panorama des méthodes d'homogénéisation de milieux hétérogènes**

Afin d'évaluer les performances mécaniques des topologies parfois complexes des matériaux architecturés, les spécialistes en science des matériaux à la recherche de performances optimisées doivent s'appuyer sur des outils de modélisation et des méthodes de calcul performantes pour évaluer leurs propriétés effectives au niveau de la cellule unitaire (ou les propriétés apparentes au niveau structurel) et les relier à l'architecture interne ainsi qu'aux caractéristiques géométriques et mécaniques des différents matériaux de base distribués au sein de la cellule unitaire.

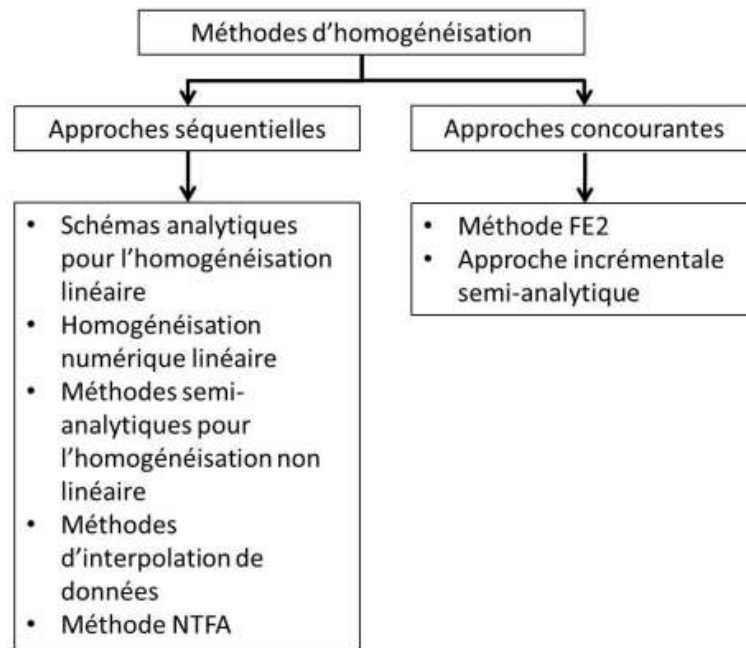
La prédiction de la réponse mécanique effective de matériaux architecturés ne peut pas être obtenue par des simulations numériques directes, dans lesquelles tous les détails microstructuraux sont entièrement résolus à l'aide d'un maillage suffisamment fin. L'absence d'une séparation d'échelles (microscopique et mésoscopique) requiert l'utilisation de théories du continuum enrichies qui incluent beaucoup plus de paramètres constitutifs que la théorie de l'élasticité de Cauchy (près de 1000 paramètres du second gradient en 3D, à mettre en regard de 27 pour un milieu élastique de Cauchy, compte tenu des symétries majeures et mineures du tenseur d'élasticité). Pour ces raisons, une homogénéisation vers des modèles de type milieux continus généralisés est réalisée dans un premier temps, afin ensuite d'effectuer des calculs au niveau de la macrostructure, ce avec un coût numérique moindre.

Les méthodes d'homogénéisation s'avèrent très efficaces pour prédire le comportement effectif des matériaux hétérogènes. Théoriquement, il n'est pas possible de prendre en compte leurs hétérogénéités une par une. Le problème s'avère en effet difficile à résoudre, car la description de ces matériaux n'est possible qu'en « moyenne » : l'idéal est de les remplacer par un milieu continu macroscopiquement équivalent. Par la suite, l'échelle microscopique ou locale est l'échelle des hétérogénéités et l'échelle macroscopique l'échelle du matériau homogénéisé à étudier. La description du comportement macroscopique peut être obtenue soit par une étude phénoménologique ou expérimentale, directement à l'échelle macroscopique, soit par homogénéisation, c'est-à-dire par

un passage de la description microscopique à la description macroscopique grâce à une méthode de transition d'échelle. Parmi les types de méthodes d'homogénéisation, distinguons l'homogénéisation de structures périodiques (HSP) (Bensoussan et al., 1978; Sanchez-Palencia, 1980), et l'homogénéisation statistique (MS) développée par Kröner (1986) pour les structures aléatoires. Les méthodes d'homogénéisation se basent sur des expansions asymptotiques des champs de déformation et de contrainte autour de leurs valeurs macroscopiques correspondantes et utilisent des principes variationnels conduisant à un ensemble de problèmes aux valeurs limites à l'échelle microscopique et peut être à l'échelle macroscopique.

Si l'on revient à l'historique des méthodes d'homogénéisation, les premiers travaux remontent au 19<sup>ème</sup> siècle lorsque Voigt (W. Voigt, 1889) posa l'hypothèse d'une déformation uniforme au sein du matériau hétérogène. A l'opposé, Reuss (A. Reuss, 1929) a approximé le champ de contrainte dans l'agrégat de matériaux polycristallin comme étant uniforme. Au début des années 1960, les travaux de Hashin–Shtrikman (Z. Hashin, and S. Shtrikman, 1963) ont amélioré la prédiction des propriétés effectives de matériaux hétérogènes en calculant des bornes très larges de ces dernières dans le cas d'un contraste très important des propriétés des phases (M. Ostoja-Starzewski, 2007). La généralisation de l'approche variationnelle de Hashin-Shtrikman pour prédire des bornes plus resserrées que les limites de Voigt et de Reuss a été faite par (S. Nemat-Nasser et al., 1993 ; M. Bornert et al., 1996 ; J. Li et al., 2001), principalement en incorporant les informations géométriques des phases. Les méthodes d'homogénéisation classiques en petites perturbations sont bien établies depuis les travaux précités ; en revanche, la construction de milieux continus enrichis de type milieux continus généralisés par des méthodes d'homogénéisation fait l'objet de nombreux travaux depuis une trentaine d'années (Cosserat et Cosserat, 1909 ; Lim, Zhang & Reddy, 2015 ; M. Ayad et al, 2020 ; J.F. Ganghoffer et H. Reda, 2021), la prochaine section présente plusieurs travaux de littérature basés sur l'homogénéisation vers les milieux continus généralisés d'ordre supérieurs.

La figure suivante donne une classification générale des méthodes d'homogénéisation :



**Figure I-6 : Classification des méthodes d'homogénéisation (T. H. Hoang, 2016)**

## 5. Homogénéisation vers les milieux continus généralisés

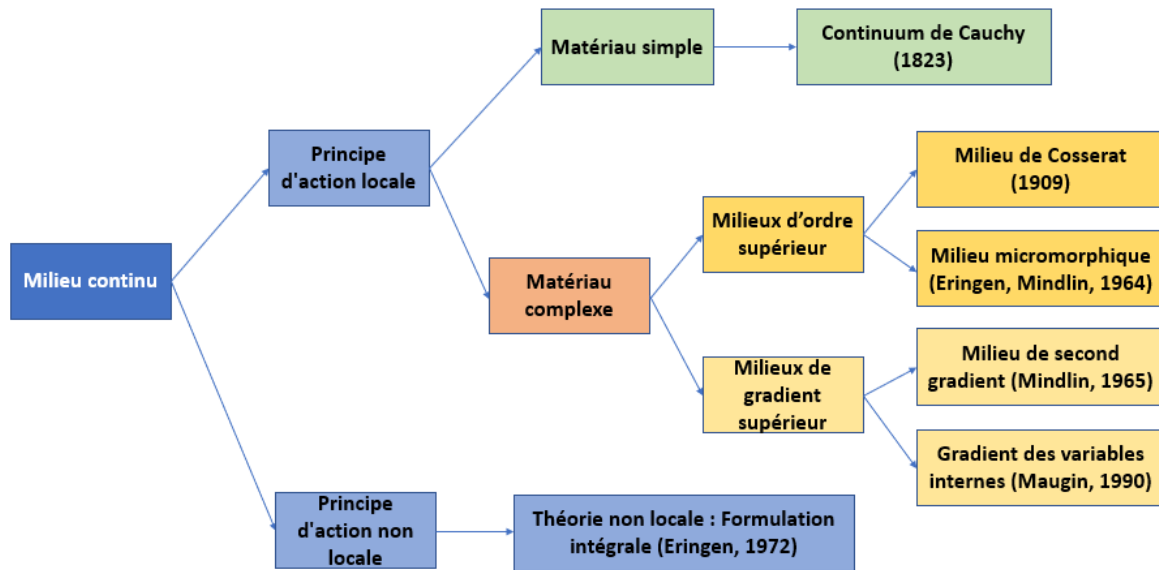
Les techniques d'homogénéisation classiques se limitent à une longueur d'onde du chargement ou de la déformation grande en regard de la taille de la microstructure. Dans les situations où l'hypothèse de séparation d'échelle échoue, la théorie classique de Cauchy s'avère incapable de prédire le comportement global, en particulier, des effets de taille et même des comportements non locaux peuvent survenir en raison de la nature discrète de la matière à des échelles suffisamment petites, dans des situations où la longueur d'onde du chargement est comparable à la taille de la cellule unitaire, pour lesquelles la notion de moyenne perd son sens.

Deux stratégies peuvent être adoptées pour remédier à l'absence de séparation des échelles dans la modélisation des milieux hétérogènes : la première stratégie est de nature phénoménologique et utilise un milieu continu effectif généralisé qui est postulé et dont les coefficients doivent ensuite être identifiés par des essais mécaniques ou des simulations en champ complet. L'incorporation de l'échelle microstructurale dans les formulations enrichies implique de relaxer l'hypothèse de l'action



locale et d'introduire une interaction spatiale et d'échelles de longueur pour tenir compte de l'influence des points voisins dans la formulation de la loi de comportement. L'objectif de l'homogénéisation vers des milieux continus généralisés est de remédier aux limitations des techniques classiques et d'étendre la plage de validité de l'approche du continuum au-delà de l'hypothèse stricte de la séparation d'échelle (Mindlin, 1964 ; Eringen et Suhubi, 1964).

Des formulations d'ordre supérieur permettent de mieux prendre en compte non seulement la déformation locale mais aussi la variation du champ de déformation à l'échelle du VER (Lim, Zhang & Reddy, 2015 ; M. Ayad et al, 2020 ; J.F. Ganghoffer et H. Reda, 2021). Les milieux continus d'ordre supérieur impliquent des degrés de liberté supplémentaires comme le milieu Cosserat promu par les frères Cosserat (Cosserat et Cosserat, 1909) et le milieu micromorphe (Eringen et Suhubi, 1964 ; Mindlin, 1964 ; Germain, 1973). Dans ce modèle d'élasticité (Cosserat et Cosserat, 1909), les rotations locales sont ajoutées comme degrés de liberté supplémentaires. Dans les milieux continus à gradient d'ordre supérieur, on garde les mêmes degrés de liberté mais des gradients plus élevés du champ de déplacement sont ajoutés comme arguments de la densité d'énergie de déformation. La figure suivante représente une classification des continums généralisés pour des milieux d'ordre ou de gradient supérieur.



**Figure I-7 : Classification des continus généralisés : milieux d'ordre supérieur et milieux de gradient supérieur (B. Hassani, 1999)**

Les approches micromécaniques fournissent une classe plus raffinée de méthodes pour identifier les lois de comportement des matériaux puisqu'elles partent directement d'une description à l'échelle microscopique et qu'elles incorporent les informations microstructurales dans la loi de comportement par une méthode de changement d'échelle. De ce fait, elles ont une capacité prédictive et intégrative de la topologie, des propriétés mécaniques (ou plus généralement physiques) des constituants individuels et selon la nature de la charge appliquée. Les modèles micromécaniques visent à comprendre l'impact quantitatif des paramètres microstructuraux de nature géométrique ou mécanique des matériaux composites sur des caractéristiques à la macro-échelle ; ils connaissent des développements importants en raison de la nécessité de méthodes de calcul prédictives effectives des performances des composites dans les régimes statique et dynamique (M. Ayad et al, 2020 ; F. dell'Isola et al, 2017 ; M. De. Angelo et al, 2019).

Parmi les choix a priori possibles du milieu de substitution effectif mentionnés précédemment (Cosserat, micromorphe, gradient de déformation, ...), le continuum élastique à gradient de déformation introduit par Mindlin (1964) et Mindlin et Eshel (1968) présente plusieurs avantages,

comme souligné par (Yvonnet et al., 2020), car il est suffisamment riche pour représenter les propriétés émergentes sans avoir recours au milieu micromorphe qui possède beaucoup plus de paramètres inhérents (Auffray et al., 2015). Un tel modèle peut être construit en utilisant l'homogénéisation asymptotique (Boutin, 1996 ; Bacigalupo et Gambarotta, 2010, 2104a ; Tran et al., 2012). Un grand nombre de travaux ont été consacrés à l'homogénéisation à gradient de déformation dans la littérature depuis plus de 40 ans (Ben-Amoz, 1976 ; Forest et Sab, 1998 ; Forest, 1998 ; Forest et al., 2001 ; Trinh et al., 2012 ; Tran et al., 2012 ; Rahali et al., 2015 ; Bacigalupo et Gambarotta, 2010 ; Ayad et al., 2019, 2020a, 2020b), aussi bien pour les composites à microstructures périodiques ou aléatoires (Goda et Ganghoffer, 2016), les matériaux auxétiques (Bacigalupo et Gambarotta, 2014) ou les milieux fibreux aléatoires (Berkache et al., 2017). Différentes approches ont été employées pour la dérivation des propriétés mécaniques effectives des modèles à gradient de déformation de microstructures hétérogènes. L'homogénéisation du second ordre élimine en partie l'hypothèse de séparation d'échelle en tenant compte du tenseur de gradient de déformation macroscopique (V. Kouznetsova, et al., 2002). De plus, l'homogénéisation du second gradient introduit une longueur physique à l'échelle microscopique qui est absente dans l'homogénéisation du premier gradient. Il est également possible de formuler une homogénéisation du premier gradient en tenant compte des effets de taille et des énergies de surface à l'échelle microscopique (A. Javili et al., 2013 ; A. Javili et al., 2015).

Les méthodes d'homogénéisation périodiques reposent sur l'expansion asymptotique de la solution recherchée en fonction d'un petit paramètre représentatif de l'échelle relative de la cellule unitaire (par rapport à la macro-échelle de la structure globale). L'expansion de la série jusqu'au second ordre conduit à la formulation d'un continuum à gradient de déformation effectif, dans lequel la solution locale dépend du gradient de déformation macroscopique (Boutin, 1996 ; V. P. Smyshlyaev et K. Cherednichenko, 2000 ; Tran, 2012 ; Boutin, 1996 ; Gologanu et al., 1997 ; Forest, 1998 ; Forest et al., 2001 ; Kanit et al., 2003 ; Geers et al., 2001 ; Kouznetsova et al., 2004 ; Bacigalupo et Gambarotta, 2010, 2014 ; Tran et al., 2012 ; Auffray et al., 2010 ; Barboura et Li, 2018 ; Hütter et al., 2017). Les

modules élastiques de gradient de déformation sont calculés en résolvant de manière séquentielle deux problèmes de cellule unitaire : un problème classique conduisant aux modules de Cauchy et un problème d'ordre supérieur associé au gradient de déformation macroscopique comme terme source cinématique. Cependant, ces schémas manquent la plupart du temps d'une preuve mathématique claire de la convergence de la solution microscopique vers la solution limite pour des valeurs vannes du paramètre d'échelle, à l'exception de l'approche variationnelle-asymptotique développée par (V. P. Smyshlyaev et K. Cherednichenko, 2000), ces auteurs fournissant une preuve de convergence.

Les méthodes d'expansion asymptotique (Boutin, 1996 ; V.P. Smyshlyaev et K. Cherednichenko, 2000) sont parfois combinées à une méthode de transformation de Fourier rapide pour calculer les propriétés effectives (Tran et al., 2012 ; Li et Zhang, 2013). Une stratégie assez courante pour calculer les modules de gradient de déformation consiste à adopter des conditions limites quadratiques appropriées sur le RVE comme chargement cinématique minimal capturant un gradient de déformation au niveau macroscopique, une approche suivie par de nombreux auteurs (Gologanu et al., 1997 ; Forest, 1998 ; Forest et al., 2001 ; Kanit et al., 2003 ; Geers et al., 2001 ; Kouznetsova et al., 2004 ; Auffray et al., 2010 ; Barboura et Li, 2018). Cette méthode étend les conditions aux limites uniformes cinématiques classiques employées dans l'homogénéisation de type Cauchy (Huet, 1990). La méthode souffre cependant de deux défauts majeurs, puisque les modules du gradient de déformation effectifs sont non nuls pour des matériaux homogènes ou dans des conditions de séparation d'échelle strictes (Forest et Trinh, 2011), ce qui contredit la réponse locale de type Cauchy des constituants individuels. En outre, les modules effectifs du gradient de déformation ne convergent pas avec la taille du VER (Li et Zhang, 2013 ; Barboura et Li, 2018). Des corrections à ces effets fictifs ont été récemment proposées (Barboura et Li, 2018 ; Yvonnet et al., 2020), les derniers auteurs ajoutant un champ de force de volume aux conditions limites quadratiques ainsi qu'une correction du tenseur de localisation.

Une méthodologie pour la construction de milieux effectifs à gradient de déformation pour les matériaux hétérogènes est proposée par (Reda et Ganghoffer, 2021), combinant un principe variationnel en élasticité linéaire avec le lemme de Hill étendu tenant compte de la cinématique généralisée dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Le champ de déplacement microscopique du milieu continu hétérogène est décomposé de manière additive en une partie homogène polynomiale en les mesures cinématiques généralisées du continuum effectif à gradient de déformation et une fluctuation périodique. La partie homogène du déplacement est évaluée dans une première étape en fonction des variables cinématiques macroscopiques en introduisant les expressions des contraintes et hypercontraintes (statique macroscopique) en conjonction avec le lemme de Hill. Les expressions des tenseurs des modules effectifs sont obtenues à partir de la connaissance des localisateurs de déplacement, comme solutions des problèmes de cellules unitaires classiques et d'ordre supérieur. Des facteurs de correction pour le gradient de déformation et les modules de couplage sont introduits, ce qui permet d'obtenir des modules d'ordre supérieur qui ne dépendent pas du choix ni de la taille de la cellule unitaire, et sont donc intrinsèques à la microstructure.

### **5.1. Méthodes d'homogénéisations non-linéaires**

Au cours des dernières décennies, un grand intérêt a été porté aux méthodes d'homogénéisation en élasticité non linéaire dans le cadre des matériaux hyperélastiques : citons les travaux de Spencer (A.J.M. Spencer, 1984) qui portent sur les matériaux composites renforcés de fibres ; une loi constitutive hyperélastique continue a été développée pour les matériaux anisotropes, par la suite une description globale du comportement anisotrope a été obtenue à l'échelle macroscopique. L'extension de l'application de l'homogénéisation analytique à l'élasticité en transformations finies a été abordée dans les travaux de Hill (R. Hill, 1972) et d'Ogden (R. W. Ogden, 1974). Une formulation de l'hyperélasticité anisotrope polyconvexe en transformations finies a été faite par (J. Schröder et P. Neff, 2003), qui repose sur l'ajout de tenseurs additionnels dits de structure, incorporés comme arguments de l'énergie de déformation. L'objectif principal de (J. Schröder et P. Neff, 2003) a été la

construction de fonctions anisotropes polyconvexes au sens de Ball afin de garantir l'existence de minimiseurs des principes variationnels en élasticité nonlinéaire.

Des estimations variationnelles de la réponse globale d'un diélectrique non linéaire inhomogène ont été obtenues par Willis (J. R. Willis, 1986), qui l'a ensuite étendu aux milieux aléatoirement inhomogènes pour trouver des bornes pour l'énergie globale d'un composite non linéaire, qui se réduisent aux bornes de Hashin-Shtrikman dans la limite d'une réponse linéaire. Un développement significatif a eu lieu avec la formulation d'un principe variationnel non linéaire par (P. Castaneda, 1991) pour estimer les propriétés effectives de composites incompressibles et compressibles nonlinéaires, et en particulier de composites constitués d'une phase ductile et fragile, sur la base des propriétés linéaires correspondantes avec la même distribution microstructurale des phases. Les modèles à deux échelles ont le potentiel de dépasser certaines limites des modèles phénoménologiques, et ils donnent un aperçu des phénomènes qui se produisent à l'échelle microscopique. De ce fait, ils améliorent la compréhension d'un matériau donné et fournissent ainsi une condition préalable à une optimisation de la microstructure (L. Mauricio et al, 2016 ; S. Rezaei et al, 2017 ; S. Wulfinghoff et al, 2018). De plus, des mécanismes micromécaniques complexes conduisent à un comportement complexe, qu'il est généralement difficile de modéliser par des approches purement phénoménologiques, notamment en présence de la combinaison l'anisotropie, et des phénomènes de plasticité et d'endommagement. Les méthodes multiéchelles s'appuient sur des méthodes numériques de pointe en présence de nonlinéarités (M. Geers et al, 2017).

## **5.2. Calcul des propriétés effectives**

Au cours des deux dernières décennies, le calcul d'homogénéisation de matériaux multiphasés complexes a suscité un grand intérêt, et un grand nombre de travaux y ont été consacrés. Des articles de synthèse détaillés sur l'homogénéisation sont cités dans (M. Geers et al. 2010) et (V. Nguyen, et al., 2011). L'une des approches les plus utilisées dans la modélisation des matériaux hétérogènes est la méthode des cellules élémentaires pour les matériaux hétérogènes périodiques, ou celle qui utilise

la notion de volume élémentaire représentative (VER en abrégé) pour les matériaux non périodiques, ce qui conduit à un modèle constitutif macroscopique global pour un matériau hétérogène basé sur une modélisation détaillée de la microstructure (Christman et al., 1989). Ces méthodes évaluent la relation contrainte-déformation à chaque point de la macro-échelle en résolvant le problème aux limites associé à l'échelle microscopique. Dans la littérature, le comportement effectif du matériau hétérogène est calculé à partir d'un volume élémentaire représentatif (VER) de l'échelle microscopique. Les conditions aux limites du problème microscopique sont définies de façon à satisfaire l'équivalence énergétique entre les deux échelles, connue sous le nom de condition de macrohomogénéité de Hill-Mandel (Hill, R., 1972 ; Mandel, J., 1972). La transition entre les échelles s'effectue en faisant la moyenne des champs internes au sein du RVE. La Figure I-8 (P. Steinmann et al., 2016) résume les étapes du calcul d'homogénéisation et de la transition d'échelles afin de trouver le comportement effectif d'un milieu équivalent.

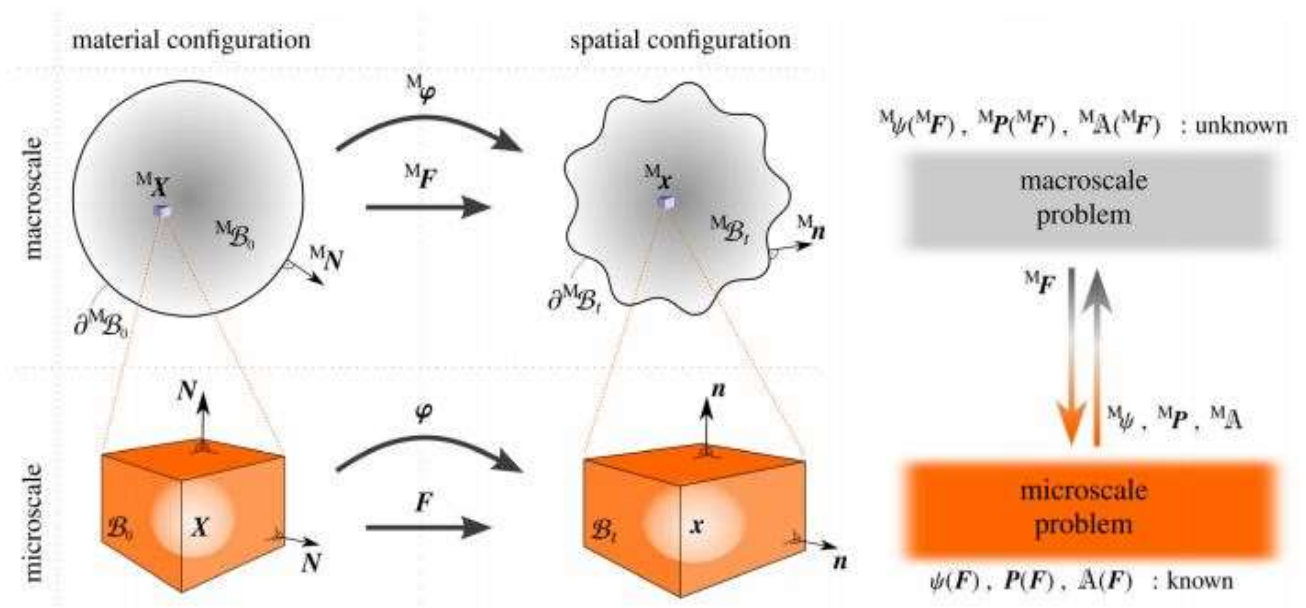
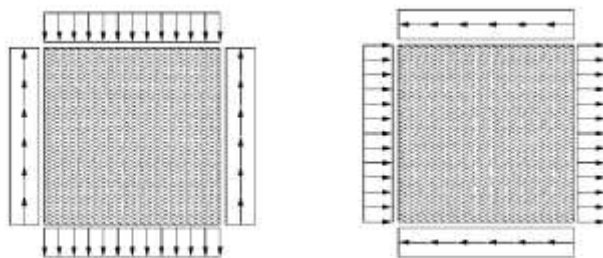


Figure I-8 : Résumé de la transition d'échelles et du calcul d'homogénéisation (P. Steinmann et al., 2016).

Cette figure présente toutes les variables du problème pour les deux échelles micro et macro, l'homogénéisation au premier gradient de déformation permet de calculer la première contrainte de Piola-Kirchhoff et les modules élastiques tangents macroscopiques en résolvant le premier problème de cellule ; l'extension vers le second gradient conduit aux modules élastiques d'ordre supérieurs homogénéisés en résolvant le deuxième problème de cellule. La condition de Hill-Mandel peut être satisfaite par différents types de conditions aux limites, parmi lesquelles parmi les plus courantes : (i) les conditions aux limites de déplacement linéaire, (ii) les conditions aux limites de déplacement périodique et de traction antipériodique, et (iii) les conditions aux limites de traction imposée constante. Les premières et dernières conditions aux limites sont parfois appelées conditions aux limites homogènes. De nombreux auteurs, par exemple (Suquet, P., 1987; Peric', D et al., 2011), ont montré que dans les problèmes mécaniques linéaires et non linéaires, le comportement effectif est dérivé dans des conditions aux limites périodiques limité par des conditions aux limites de déplacement linéaire sur l'arrête supérieure du VER (Figure I-9) et des conditions aux limites de traction constante sur l'arrête inférieure pour une taille finie du VER. (Kaczmarczyk et al.. 2008) ont tiré des conclusions similaires dans le contexte de l'homogénéisation du second gradient.



**Figure I-9 : Répartition des tractions admissibles pour des conditions aux limites périodiques qui autorisent la déformation de la VER selon la partie antisymétrique de la déformation du second gradient (Kaczmarczyk et al.. 2008).**

### 5.3. Taille et morphologie du VER

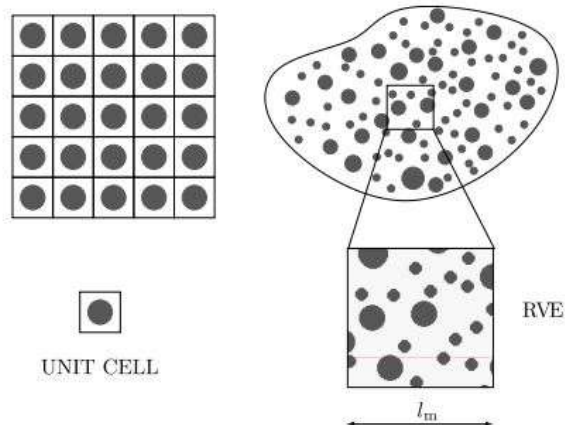
Dans les méthodes d'homogénéisation, la réponse macroscopique est définie comme la moyenne de la réponse d'un échantillon microscopique de taille finie dans laquelle la microstructure est



explicitement résolue. Cet échantillon microscopique est appelé cellule unitaire ou élémentaire pour les matériaux avec une microstructure ordonnée, voir la partie gauche de la Figure I-10 (V. P. Nguyen et al., 2011), et le VER ou RVE en anglais (ce concept a été introduit par Hill) pour les matériaux ayant une microstructure aléatoire, voir la partie droite de la Figure I-10. D'autres noms, y compris l'élément de volume microstructural (MVE) et autres sont également utilisés pour cet échantillon microscopique.

Le choix du volume élémentaire représentatif (VER) pour des matériaux hétérogènes à microstructures complexes est une tâche délicate. Afin d'être efficace dans le choix, une précision maximale avec moins d'effort de calcul est nécessaire. Le VER doit être suffisamment grand pour être statistiquement représentatif du composite afin qu'il comprenne effectivement un échantillonnage de toutes les hétérogénéités microstructurales qui se produisent dans le composite (Drugan, W et al., 1996). En revanche, il doit rester suffisamment petit pour être considéré comme un élément de volume du milieu continu étudié (Kanit, T et al., 2003). Le schéma d'homogénéisation du premier ordre repose de manière critique sur le principe de la séparation des échelles et exige que l'échelle de longueur microscopique de la microstructure soit beaucoup plus petite que la longueur caractéristique sur laquelle la charge macroscopique varie dans l'espace (M. Geers et al., 2010).

De manière générale, les méthodes de calcul par homogénéisation font appel aux étapes suivantes (V. P. NGUYEN et al., 2011) : définition d'un volume élémentaire représentatif (VER), principe de séparation des échelles, théorème de moyenne, par exemple, théorèmes de moyenne de déformation et de contrainte, le principe de macrohomogénéité de Hill – Mandel, comportement des constituants de VER.



**Figure I-10 : Elément de volume représentatif pour un matériau composite ordonné/structuré (à gauche) et pour un matériau désordonné/aléatoire (à droite) (V. P. NGUYEN et al., 2011)**

L'existence d'un VER et le choix de sa taille pour des matériaux hétérogènes aléatoires ont été abordées par plusieurs auteurs (W. J. Drugan et al., 1996 ; I. M. Gitman et al., 2007b ; T. Kanit et al., 2003 ; S. Swaminathan et al., 2006). Parmi ces références, on trouve les travaux de (I. M. Gitman et al., 2007b) qui ont fait une étude intéressante sur l'existence d'un VER pour les matériaux hétérogènes quasi-fragiles qui présentent une localisation de déformation. Ces auteurs ont constaté qu'il n'existe pas de VER pour ces matériaux, car le matériau perd son homogénéité statistique lors de la localisation de la déformation. (V. P. Nguyen et al., 2010) ont montré qu'il existe un VER pour les matériaux hétérogènes quasi-fragiles présentant une localisation de déformation si une relation de traction-séparation, et non une relation contrainte-déformation, est la propriété homogénéisée recherchée. Dans un schéma de calcul par homogénéisation, un échantillon microscopique est dit être un VER lorsque les conditions suivantes sont remplies :

- Une augmentation de sa taille n'entraîne pas de différences importantes dans les propriétés homogénéisées.

- Sa taille est beaucoup plus petite que la longueur caractéristique  $l_M$  sur laquelle le chargement macroscopique varie dans l'espace,  $l_m \ll l_M$ . Cette condition est connue comme le principe de séparation des échelles.

#### **5.4. Description de la cinématique imposée sur le VER**

Un aspect important des méthodes d'homogénéisation basées sur le VER ou CU est le choix des conditions aux limites (CL), qui sont imposées sur les bords du VER, ces conditions sont utilisées pour capturer l'effet du milieu environnant. Le choix des conditions limites affecte les modules homogénéisés, c'est-à-dire la réponse constitutive à l'échelle macroscopique. Selon la littérature, les conditions aux limites suivantes sont couramment utilisées dans les schémas d'homogénéisation :

- Taylor (champ de déformation microscopique homogène)
- Linéaire
- Traction constante
- Périodique
- Cinématiques minimales

Le tableau indiqué Figure I-11 (V. P. Nguyen et al., 2011) présente un résumé de ces conditions aux limites. La Figure I-12 présente en détail les conditions aux limites de type périodique et non périodique.

Nom	Equation	Emplacement	Localisation
Taylor	$u_m(x) = \epsilon_M \cdot x$	$x \in \Omega_M$	-
Linéaire	$u_m(x) = \epsilon_M \cdot x$	$x \in \Gamma_M$	-
Traction constante	$t_m(x) = \sigma_M \cdot n$	$x \in \Gamma_M$	+
Périodique	$u_{\Gamma_{m,2}^+} - u_{\Gamma_{m,2}^-} = u_4 - u_1$ $u_{\Gamma_{m,1}^+} - u_{\Gamma_{m,1}^-} = u_2 - u_3$ $u_q = \epsilon_M \cdot x_q, q=1,2,4$		+
Cinématique minimale	$2 \int_{\Omega_M} \epsilon_{ij}^M =$ $\int_{\Gamma_M} (u_i n_j + u_j n_i) dr$ $u_1 = 0, \epsilon_2^y = 0$		+

Figure I-11 : Différents types de conditions aux limites (V. P. Nguyen et al., 2011).

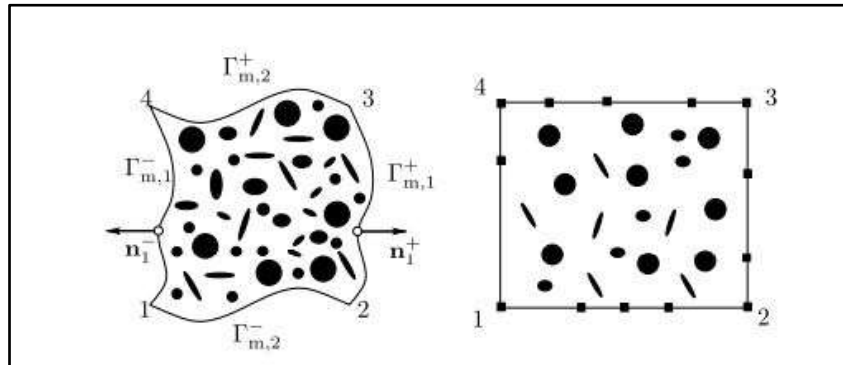
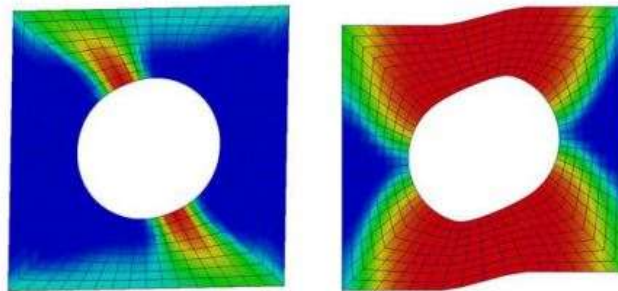


Figure I-12 : Volume élémentaire représentatif périodique (à gauche) et VER non périodique (à droite) (V. P. Nguyen et al., 2011)

Les conditions aux limites de Taylor produisent un champ de déformation microscopique homogène, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les hétérogénéités. Cette condition aux limites est donc irréaliste pour ces types de matériaux hétérogènes. De nombreux auteurs (T. Kanit et al., 2003 ; K. Terada et al., 2000) ont montré que même pour les matériaux hétérogènes non périodiques, les conditions aux limites périodiques fournissent des estimations raisonnables des propriétés effectives. En comparaison avec les conditions aux limites de traction linéaire et constante, les CL

périodiques donnent une convergence plus rapide des propriétés effectives, c'est-à-dire que des VER plus petits peuvent être utilisés avec des CL périodiques. Les CL périodiques sont donc probablement les conditions aux limites les plus couramment utilisées à ce jour pour les VER. Pour les VER sièges de localisation de déformation, les CL linéaires ne doivent pas être utilisées, comme indiqué en Figure I-13 (V. P. Nguyen et al., 2011), car elles empêchent les bandes de localisation ou les fissures de s'approcher du bord du VER.



**Figure I-13 : cellule unitaire présentant une réponse avec adoucissement en cisaillement : les CL linéaires empêchent les dommages de se produire sur les bords de VER (à gauche) tandis que les CL périodiques le permettent (à droite). Le tracé de bords montre le profil des dommages (V. P. Nguyen et al., 2011)**

## 6. Objectifs et motivations de la thèse

L'objectif générale de cette thèse est l'identification de milieux continus enrichis du second gradient pour des matériaux architecturés et composites périodiques, par des méthodes d'homogénéisation. Ces méthodes seront d'abord développées en petites perturbations, puis seront étendues en grandes transformations. Les modèles développés ont pour objectif de déterminer les propriétés effectives de ces matériaux à l'échelle macroscopique pour le milieu classique de Cauchy et du second gradient. Un modèle d'homogénéisation 3D pour le milieu du second en HPP sera développé pour faire des applications sur des macrostructures qui ne sont pas réalisables et projetables en 2D.

Les modèles d'homogénéisation en grandes transformations seront très efficaces pour prédire le comportement effectif de matériaux architecturés mous (le matériau de base qui les constitue étant un

polymère souple) présentant de forts gradients de déformation. Un schéma incrémental sera appliqué pour déterminer la réponse effective du second gradient à chaque incrément de charge. L'élaboration de méthodes d'homogénéisation nonlinéaires de microstructures périodiques au second gradient et sa mise en œuvre pour des milieux architecturés mous constitue l'originalité de cette thèse.

Des schémas d'homogénéisation continus vers des milieux à gradient d'ordre supérieur seront développés, ils conduiront à des formulations incrémentales pour prédire la réponse élastique non linéaire. Les méthodes théoriques et expérimentales développées seront appliquées à une sélection d'architectures bien choisies sujettes à des effets d'échelle interne. Les réponses non linéaires prévues de milieux hétérogènes sélectionnés seront validées par des mesures faites sur des microstructures de pantographe.

Une identification de potentiels macroscopiques anisotropes sera effectuée spécifiquement sur une structure de type pantographe, choisie en raison de sa réponse au second gradient prononcée, due aux effets de flexion de la microstructure (F. Dell'Isola et al., 2019). La formulation incrémentale du problème nonlinéaire du second gradient et sa discrétisation par éléments finis seront établies.

Les travaux de cette thèse se décomposent en trois parties principales. La première partie expose le développement théorique de schémas d'homogénéisations continus pour le milieu de Cauchy et du second gradient en petites et grandes déformations. Puis, l'implémentation de ces formulations numériquement sera faite au sein du code d'éléments finis FreeFem++. Puis, des calculs par éléments finis sur des macrostructures à la microstructure complètement résolue ainsi que des essais mécaniques expérimentaux seront réalisés afin d'identifier les paramètres matériau des modèles hyperélastiques choisis à l'échelle microscopique, soit pour valider la méthode d'homogénéisation développée.

## 7. Plan de la thèse

Ce manuscrit est subdivisé en 6 chapitres. Le chapitre 1 énonce le contexte général et les motivations de la thèse ; il comporte un état de l'art synthétique sur l'homogénéisation. Dans le chapitre 2, une méthode d'homogénéisation du second gradient dans un contexte de l'élasticité linéaire est développée pour des géométries 2D et 3D. Des applications seront réalisées pour des matériaux composites, des matériaux architecturés et à parois mince, avec une étude de sensibilité de la longueur interne à la géométrie de la structure qui est faite pour un pantographe. Le chapitre 3 a pour objet l'élaboration d'une démarche théorique d'homogénéisation en grandes déformations au second gradient. Le chapitre 4 est consacré à l'identification des potentiels macroscopiques anisotropes pour les milieux de substitution hyperélastiques de Cauchy et du second gradient. Nous analyserons plus spécifiquement la structure pantographique sujette à des effets de second gradient prononcés. Des essais mécaniques seront réalisés pour identifier les paramètres matériau de la loi hyperélastique postulée à l'échelle microscopique ; une validation de la méthode d'homogénéisation est faite en comparant les prédictions numériques de l'homogénéisation avec la réponse macroscopique issue d'essais expérimentaux. Le chapitre 5 a pour objectif l'application des méthodes d'homogénéisation du second gradient linéaires et nonlinéaires développées pour des matériaux architecturés dans un contexte 3D. Le chapitre 6 conclut le travail réalisé par une brève discussion des méthodes développées et des résultats obtenus, puis en énonce les perspectives. La Figure I-14 résume le plan général de la thèse.

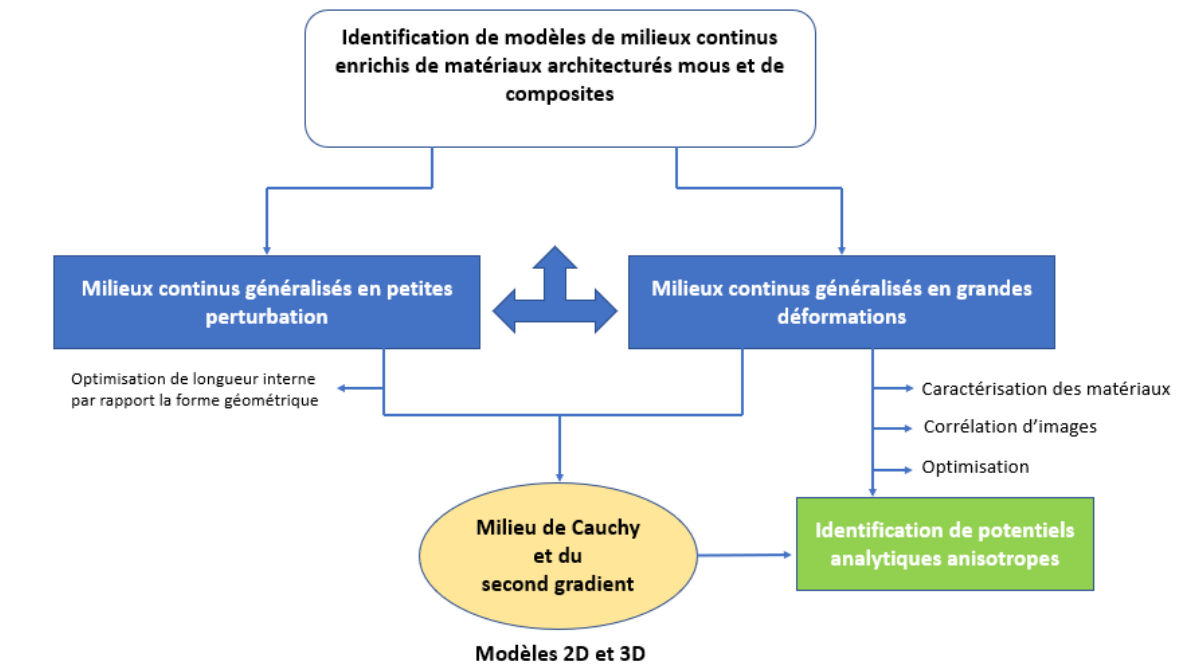


Figure I-14 : Plan de la thèse



# Listes des références

Karathanasopoulos, N., Dos Reis, F., Reda, H., & Ganghoffer, J. F. (2018). Computing the effective bulk and normal to shear properties of common two-dimensional architected materials. *Computational Materials Science*, 154, 284-294.

Lohmuller, P., Favre, J., Kenzari, S., Piotrowski, B., Peltier, L., & Laheurte, P. (2019). Architectural effect on 3D elastic properties and anisotropy of cubic lattice structures. *Materials & Design*, 182, 108059.

Sicong Shan, Sung H. Kang, Jordan R. Raney, Pai Wang, Lichen Fang, Francisco Candido, Jennifer A. Lewis, Katia Bertoldi, Multistable Architected Materials for Trapping Elastic Strain Energy, *ADVANCED MATERIALS*, 2015, <https://doi.org/10.1002/adma.201501708>.

Mike F Ashby and Yves JM Bréchet. Designing hybrid materials. *Acta materialia*, 51(19):5801–5821, 2003.

Julia R. Greer and Vikram S. Deshpande. Three-dimensional architected materials and structures: Design, fabrication, and mechanical behavior. 44(10):750–757, 2019. Publisher: Cambridge University Press.

Reda, H., Rahali, Y., Ganghoffer, J. F., & Lakiss, H. (2017). Wave propagation analysis in 2d nonlinear periodic structures prone to mechanical instabilities. *From Microstructure Investigations to Multiscale Modeling: Bridging the Gap*, 67-97.

Mei, J., Ma, G., Yang, M., Yang, Z., Wen, W., & Sheng, P. (2012). Dark acoustic metamaterials as super absorbers for low-frequency sound. *Nature communications*, 3(1), 1-7.

Bacigalupo, A., Gambarotta, L., (2014). Homogenization of periodic hexa-and tetrachiral cellular solids. *Compos. Struct.* 116, 461–476. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.033>.

Xu, H., Pasini, D. Structurally Efficient Three-dimensional Metamaterials with Controllable Thermal Expansion. *Sci Rep* 6, 34924 (2016). <https://doi.org/10.1038/srep34924>.

Cheng, L., Zhu, J., Abraham, J. et al. 2018 Continues Record Global Ocean Warming. *Adv. Atmos. Sci.* 36, 249–252 (2019). <https://doi.org/10.1007/s00376-019-8276-x>.

Alavi, S.E., Nasimsobhan, M., Ganghoffer, J.F. et al. Chiral Cosserat model for architected materials constructed by homogenization. *Meccanica* 56, 2547–2574 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11012-021-01381-9>.

Al-Ketan, Oraib, Soliman, Ahmad, Alqubaisi, Ayesha M., et al. Nature-Inspired Lightweight Cellular Co-Continuous Composites with Architected Periodic Gyroidal Structures. *Advanced Engineering Materials*, 2018, vol. 20, no 2, p. 1700549.

Spadaccini, C. (2019). Additive manufacturing and processing of architected materials. *MRS Bulletin*, 44(10), 782-788. doi:10.1557/mrs.2019.234.

Lorenzo Valdevit, Jens Bauer, Chapter 13.1 - Fabrication of 3D Micro-Architected/Nano-Architected Materials, Editor(s): Tommaso Baldacchini, In *Micro and Nano Technologies, Three-Dimensional Microfabrication Using Two-photon Polymerization*, William Andrew Publishing, 2016, Pages 345-373, ISBN 9780323353212, <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-35321-2.00018-2>.

N.S. Bakhvalov and G.P. Panasenko, *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer, Dordrecht, 1989.

B. Gambin and E. Kroner, “High order terms in the homogenized stress-strain relation of periodic elastic media,” *Phys. Stat. Sol.*, 51: 513-519, 1989.

Xian-yi Zhoua, P. D. Goslinga, C. J. Pearceb, Z. Ullahb, L. Kaczmarczyk, Perturbation-based stochastic multi-scale computational homogenization method for woven textile composites, *International Journal of Solids and Structures* Volume 80, February 2016, Pages 368-380.

Harm Askes and Elias C. Aifantis, Gradient elasticity and flexural wave dispersion in carbon nanotubes, *Phys. Rev. B* 80, 195412 – Published 17 November 2009.

Andrianov, I.V., Awrejcewicz, J., Danishevs'kyi, V.V., Weichert, D., 2011. Wave propagation in periodic composites: higher-order asymptotic analysis versus plane-wave expansion method. *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 6 (1). doi:10.1115/1.4002389, 011015-1 - 011015-8.

Ayad, M., Karathanasopoulos, N., Reda, H., Ganghoffer, J. F., & Lakiss, H. (2020). On the role of second gradient constitutive parameters in the static and dynamic analysis of heterogeneous media with micro-inertia effects. *International Journal of Solids and Structures*, 190, 58-75.

Bensoussan A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G. (1978), *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

SANCHEZ-PALENCIA E. (1980), *Non-homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag Berlin.

Voigt, W. (1889). Ueber adiabatische Elasticitätsconstanten. *Annalen der Physik*, 272(3), 743-759.

Reuss, A., 1929, "Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle," *ZAMM—J. Appl. Math. Mech.*, 9(1), pp. 49–58.

Hashin, Z., and Shtrikman, S., 1963, "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, 11(2), pp. 127–140.

Ostoja-Starzewski, M., 2007, *Microstructural Randomness and Scaling in Mechanics of Materials*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Nemat-Nasser, S., Yu, N., and Hori, M., 1993, "Bounds and Estimates of Overall Moduli of Composites With Periodic Microstructure," *Mech. Mater.*, 15(3), pp. 163–181

- Bornert, M., Stolz, C., and Zaoui, A., 1996, “Morphologically Representative Pattern-Based Bounding in Elasticity,” *J. Mech. Phys. Solids*, 44(3), pp. 307–331.
- Li, J. Y., and Dunn, M. L., 2001, “Variational Bounds for the Effective Moduli of Heterogeneous Piezoelectric Solids,” *Philos. Mag. A*, 81(4), pp. 903–926.
- Hill, R., 1972, “On Constitutive Macro-Variables for Heterogeneous Solids at Finite Strain,” *Proc. R. Soc. London A*, 326(1565), pp. 131–147.
- Mindlin, R.D. (1964) Micro-Structure in Linear Elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16, 51-78. <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- Eringen, A.C. and Suhubi, E.S. (1964) Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids II. *International Journal of Engineering Science*, 2, 389-404. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90004-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90004-7).
- Lim, C. W., Zhang, G., & Reddy, J. (2015). A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 78, 298-313.
- Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. Notes sur la théorie des corps déformables, in O.D. Chwolson, *Traité de Physique*, t.2, 953–1173, Hermann Librairie Scientifique, Paris.
- Dell’Isola, F., Corte, A. D., & Giorgio, I. (2017). Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(4), 852-872.
- De Angelo, M., Spagnuolo, M., D’annibale, F., Pfaff, A., Hoschke, K., Misra, A., ... & Pawlikowski, M. (2019). The macroscopic behavior of pantographic sheets depends mainly on their microstructure: experimental evidence and qualitative analysis of damage in metallic specimens. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31(4), 1181-1203.

Mindlin RD, Eshel NN (1968) On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int J Solids Struct* 4(1):109–124

Ogden, R. W., 1974, “On the Overall Moduli of Non-Linear Elastic Composite Materials,” *J. Mech. Phys. Solids*, 22(6), pp. 541–553.

Yvonnet, J., Auffray, N., Monchiet, V., (2020). Computational second-order homogenization of materials with effective anisotropic strain-gradient behavior, *International Journal of Solids and Structures*, 191–192, 434-448. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.01.006>.

Auffray, N., Dirrenberger, J., Rosi, G., (2015). A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 69-70, 195–206 .  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.036>.

Boutin, C., (1996). Microstructural effects in elastic composites, *International Journal of Solids and Structures*, 33(7) 1023-1051. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00089-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00089-5).

Bacigalupo, A., Gambarotta, L., (2010). Second-order computational homogenization of heterogeneous materials with periodic microstructure. *ZAMM-J. Appl. Math. Mech.*, 90 (10–11), 796–811. <https://doi.org/10.1002/zamm.201000031>.

Tran, T.-H., Monchiet, V., Bonnet, G., (2012). A micromechanics-based approach for the derivation of constitutive elastic coefficients of strain-gradient media. *Int. J. Solids Struct.* 49, 783–792.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.11.017>.

Forest, S., (1998). Mechanics of generalized continua: construction by homogenization. *Journal de Physique IV* (8), 39–48. <https://doi.org/10.1051/jp4:1998405>.

Geers, M., Kouznetsova, V., Brekelmans, W., (2001). Gradient-enhanced computational homogenization for the micro-macro scale transition. *Le J. Phys. IV* 11 (PR5), Pr5–145.  
<https://doi.org/10.1051/jp4:2001518>.

Barboura, S., Li, J., (2018). Establishment of strain gradient constitutive relations by using asymptotic analysis and the finite element method for complex periodic microstructures. *Int. J. Solids Struct.* 136, 60–76. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.12.003>.

Hutter, Geralf. Homogenization of a Cauchy continuum towards a micromorphic continuum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2017, vol. 99, p. 394-408.

A.J.M. Spencer, *Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites*, International Centre for Mechanical Sciences book series (CISM, volume 282), 1984.

J. Schröder, P. Neff, Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions, *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003) 401–445.

Willis, J. R., 1986, “Variational Estimates for the Overall Response of an Inhomogeneous Nonlinear Dielectric,” *Homogenization and Effective Moduli of Materials and Media (The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications)*, Vol. 1, J. L. Ericksen, D. Kinderlehrer, R. Kohn, and J.-L. Lions, eds., Springer, New York, pp. 247–263

Ponte Castañeda, P., and Willis, J. R., 1988, “On the Overall Properties of Nonlinearly Viscous Composites,” *Proc. R. Soc. London A*, 416(1850), pp. 217–244

Suquet, P. M., 1993, “Overall Potentials and Extremal Surfaces of Power Law or Ideally Plastic Composites,” *J. Mech. Phys. Solids*, 41(6), pp. 981–1002.

Olson, T., 1994, “Improvements on Taylor’s Upper Bound for Rigid-Plastic Composites,” *Mater. Sci. Eng. A*, 175(1–2), pp. 15–20

Talbot, D. R. S., and Willis, J. R., 1992, “Some Simple Explicit Bounds for the Overall Behaviour of Nonlinear Composites,” *Int. J. Solids Struct.*, 29(14–15), pp. 1981–1987

Ponte Castañeda, P., 1991, “The Effective Mechanical Properties of Nonlinear Isotropic Composites,” *J. Mech. Phys. Solids*, 39(1), pp. 45–71.

Mauricio, L, Thomas Böhlke, On optimal zeroth-order bounds of linear elastic properties of multiphase materials and application in materials design, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 84, 2016, Pages 40-48, ISSN 0020-7683, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.12.015>.

Shahe, R, Stephan. W, Stefanie Reese, Prediction of fracture and damage in micro/nano coating systems using cohesive zone elements, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 121, 2017, Pages 62-74, ISSN 0020-7683, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.016>.

Stephan, W, Fabiola Cavaliere, Stefanie Reese, Model order reduction of nonlinear homogenization problems using a Hashin–Shtrikman type finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 330, 2018, Pages 149-179, ISSN 0045-7825, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.10.019>.

Marc G. D. Geers, Varvara G. Kouznetsova, Karel Matouš and Julien Yvonnet, Homogenization Methods and Multiscale Modeling: Nonlinear Problems, Part 2. *Solids and Structures*, 2017.

Ponte Castañeda, P., 1992, “New Variational Principles in Plasticity and Their Application to Composite Materials,” *J. Mech. Phys. Solids*, 40(8), pp. 1757–1788.

Ponte Castañeda, P., deBotton, G., and Li, G., 1992, “Effective Properties of Nonlinear Inhomogeneous Dielectrics,” *Phys. Rev. B*, 46(8), pp. 4387–4394.

deBotton, G., and Ponte Castañeda, P., 1993, “Elastoplastic Constitutive Relations for Fiber-Reinforced Solids,” *Int. J. Solids Struct.*, 30(14), pp. 1865–1890.

Ponte Castañeda, P., and Suquet, P., 1998, “Nonlinear Composites,” *Adv. Appl. Mech.*, 34, pp. 171–302.

Geers, M. G. D., Kouznetsova, V. G., and Brekelmans, W. A. M., 2010, “Multi-Scale Computational Homogenization: Trends and Challenges,” *J. Comput. Appl. Math.*, 234(7), pp. 2175–2182.

- Nguyen, V. P., Stroeve, M., and Sluys, L. J., 2011, “Multiscale Continuous And Discontinuous Modelling of Heterogeneous Materials: A Review on Recent Developments,” *J. Multiscale Modell.*, 3(4), pp. 229–270.
- T. H. Hoang, *Approches d’homogénéisation numériques incrémentales pour le calcul des structures hétérogènes élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques*, Université Paris-Est, 2016.
- Christman, T., Needleman, A., and Suresh, S., 1989, “An Experimental and Numerical Study of Deformation in Metal-Ceramic Composites,” *Acta Metall.*, 37(1), pp. 3029–3050
- Hill, R., 1972, “On Constitutive Macro-Variables for Heterogeneous Solids at Finite Strain,” *Proc. R. Soc. London A*, 326(1565), pp. 131–147.
- Mandel, J., 1972, *Plasticité Classique, Viscoplasticité (CISM Courses and Lectures)*, Vol. 97, Springer-Verlag, New York.
- S. Saeb, P. Steinmann, A. Javili, 2016, *Aspects of Computational Homogenization at Finite Deformations: A Unifying Review From Reuss’ to Voigt’s Bound*, *Applied Mechanics Reviews*
- Suquet, P., 1987, “Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics,” *Homogenization Techniques for Composite Media*, E. Sanchez-Palencia, and A. Zaoui, eds., Springer-Verlag, Berlin, pp. 193–287.
- Perić, D., de Souza Neto, E. A., Feijoo, R. A., Partovi, M., and Carneiro Molina, A. J., 2011, “On Micro-To-Macro Transitions for Multi-Scale Analysis of Non-Linear Heterogeneous Materials: Unified Variational Basis and Finite Element Implementation,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 87(1–5), pp. 149–170
- Kaczmarczyk, L., Pearce, C. J., and Bicanic, N., 2008, “Scale Transition and Enforcement of RVE Boundary Conditions in Second-Order Computational Homogenization,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 74(3), pp. 506–522.



Drugan, W. J., and Willis, J. R., 1996, “A Micromechanics-Based Nonlocal Constitutive Equation and Estimates of Representative Volume Element Size for Elastic Composites,” *J. Mech. Phys. Solids*, 44(4), pp. 497–524.

Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., and Jeulin, D., 2003, “Determination of the Size of the Representative Volume Element for Random Composites: Statistical and Numerical Approach,” *Int. J. Solids Struct.*, 40(13–14), pp. 3647–3679.

Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D., and Brekelmans, W. A. M., 2002, “Multi-Scale Constitutive Modelling of Heterogeneous Materials With a Gradient-Enhanced Computational Homogenization Scheme,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 54(8), pp. 1235–1260.

Javili, A., McBride, A., Mergheim, J., Steinmann, P., and Schmidt, U., 2013, “Micro-To-Macro Transitions for Continua With Surface Structure at the Microscale,” *Int. J. Solids Struct.*, 50(16–17), pp. 2561–2572

Javili, A., Chatzigeorgiou, G., McBride, A., Steinmann, P., and Linder, C., 2015, “Computational Homogenization of Nano-Materials Accounting for Size Effects Via Surface Elasticity,” *GAMM Mitt.*, 38(2), pp. 285–312.

V.P. Smyshlyaev, K.D. Cherednichenko, On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 48, Issues 6–7, 2000, Pages 1325-1357, ISSN 0022-5096, [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00090-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00090-3).

Hill, R., 1963, “Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles,” *J. Mech. Phys. Solids*, 11(5), pp. 357–372.

Ostoja-Starzewski, M., 2006, “Material Spatial Randomness: From Statistical to Representative Volume Element,” *Probab. Eng. Mech.*, 21(2), pp. 112–132.

- Nguyen, V. P, Martijn, S, Lambertus, J. S, Multiscale continuous and discontinuous modeling of heterogeneous materials: A review on recent developments, *Journal of Multiscale Modelling* Vol. 3, No. 4 (2011) 229–270.
- W. J. Drugan and J. R. Willis, A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites, *J. Mech. Phys. Solids* 44 (1996) 497–524.
- I. M. Gitman, H. Askes and L. J. Sluys, Representative volume: Existence and size determination, *Eng. Fract. Mech.* 74 (2007b) 2518–2534.
- S. Swaminathan, S. Ghosh and N. J. Pagano, Statistically equivalent representative volume elements for unidirectional composite microstructures: Part I — without damage, *J. Compos. Mater.* 40 (2006) 583–604.
- V. P. Nguyen, O. Lloberas Valls, M. Stroeven and L. J. Sluys, On the existence of representative volumes for softening quasi-brittle materials — A failure zone averaging scheme, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 199 (2010) 3028–3038
- T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury and D. Jeulin, Determination of the size of the representative volume element for random composites: Statistical and numerical approach, *Int. J. Solids Struct.* 40 (2003) 3647–3679.
- K. Terada, M. Hori, T. Kyoya and N. Kikuchi, Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches, *Int. J. Solids Struct.* 37 (2000) 2285–2311.
- O. van der Sluis, P. J. G. Schreurs, W. A. M. Brekelmans and H. E. H. Meijer, Overall behaviour of heterogeneous elastoviscoplastic materials: Effect of microstructural modelling, *Mech. Mater.* 32 (2000) 449–462.

H. Murakami and G.A. Hegemier, A mixture model for unidirectionally fiber-reinforced composites, J. Appl. Mech. 53:765-773, 1986

Behrooz Hassani and Ernest Hinton. Homogenization and Structural Topology Optimization. Springer London, 1999.

Dell'Isola, F., Corte, A. D., & Giorgio, I. (2017). Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 22(4), 852-872.

Ivan. Giorgio, Francesco. dell'Isola, Anil. Misra, Chirality in 2D Cosserat media related to stretch-micro-rotation coupling with links to granular micromechanics, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 202, 2020, Pages 28-38, ISSN 0020-7683, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.06.005>.

## **II. Méthode d'homogénéisation à gradient d'ordre supérieur en élasticité linéaire : Applications aux matériaux composites, au pantographe et aux matériaux à parois minces**

Nous développons dans ce chapitre des modèles des milieux continus à gradient de déformation basés sur l'homogénéisation pour calculer les modules effectifs de Cauchy et de gradient de déformation de matériaux composites 3D hétérogènes, de structures poreuses à parois mince et de type pantographe. La méthode d'homogénéisation est basée sur un principe variationnel en élasticité linéaire articulé avec le lemme de Hill, qui est étendu en considérant la cinématique généralisée du second gradient dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Le champ de déplacement microscopique est décomposé en la somme d'une fonction polynomiale des variables cinématiques macroscopiques introduites et d'une fluctuation périodique. Les déplacements fluctuants sont exprimés en fonction des variables cinématiques macroscopiques solution des problèmes séquentiels de cellules unitaires classiques et d'ordre supérieur. Les modules élastiques effectifs calculés ne dépendent pas de la taille des cellules unitaires et sont donc intrinsèques à la microstructure des composites. Des applications en 3D pour des structures composites et des microstructures à parois minces sont réalisées afin d'illustrer la stratégie d'homogénéisation proposée, montrant des effets de gradient de déformation prononcés.

## Table des matières

II. Méthode d'homogénéisation à gradient d'ordre supérieur en élasticité linéaire : Applications aux matériaux composites, au pantographe et aux matériaux à parois minces.....	42
1. Introduction.....	47
2. Méthodologie générale pour l'homogénéisation des matériaux hétérogènes périodiques	50
3. Formulations théoriques du modèle de gradient de déformation.....	53
3.1. Évaluation des champs de déplacements et déformations microscopiques.....	59
3.2. Évaluation des modules effectifs et validation du modèle du second gradient .....	62
3.2.1. Composite avec une cellule unitaire poreuse .....	62
3.2.2. Modèle à gradient de déformation d'un pantographe continu .....	66
3.3. Effet de la taille de la cellule unitaire sur les modules effectifs de Cauchy et du second gradient.....	74
4. Variation des modules du second gradient aux paramètres microstructuraux géométrique et matériels de structures composites.....	77
5. Application à un matériau composite sandwich .....	81
6. Applications aux matériaux à parois minces.....	84
7. Influence de la longueur interne extensionnelle du second gradient par rapport la forme géométrique du pantographe.....	89
8. Discussion et conclusion.....	93
Références.....	96

## Liste des figures :

Figure II-1 : Cellule unitaire (CU) de matériaux hétérogènes et milieu effectif équivalent.....	51
Figure II-2 : Exemples de cellules unitaires de matériaux périodiques. ....	52
Figure II-3 : représentation matricielle du tenseur des modules effectifs du second gradient.....	58
Figure II-4: Algorithme de la méthode d'homogénéisation du second gradient .....	62
Figure II-5 : (a) Cellule unitaire du composite, (b) plaque hétérogène avec épaisseur 1mm. ....	64
Figure II-6: Déplacement vertical $u_y$ pour les plaques hétérogènes et homogènes le long d'une verticale Y .....	65
Figure II-7: Cellule unitaire du Pantographe .....	67
Figure II-8: Conditions aux limites de second gradient de la structure de pantographe.....	67
Figure II-9: La forme déformée du pantographe.....	69
Figure II-10: Evolution de la déformation $E_{22}$ en fonction de la position macroscopique sur Y	70
Figure II-11: Conditions aux limites de type second gradient appliquées sur le pantographe 2D	70
Figure II-12: La forme déformée et distribution du déplacement de la structure du pantographe 2D .....	71
Figure II-13: Distribution spatiale des composantes de la déformation (a) $E_{22}$ (b) $E_{11}$ le long de la ligne X=3.5 .....	72
Figure II-14: Différentes tailles de la cellule élémentaire.....	76
Figure II-15: Variation du module effectif du second gradient en traction pure $A_{111111hom}$ (trait noir), module normalisé $A_{111111hom} *$ (trait bleu) et module effectif du premier gradient $C_{1111hom}$ (trait jaune) en fonction du nombre de cellules unitaires N au sein de la fenêtre d'analyse. ....	76
Figure II-16: Matériaux composites avec le même matériau périodique (a), de taille d'inclusion variable (b), d'espacement des inclusions variable (c) le long de l'axe x .....	77
Figure II-17 : Modes de déformation du composite au second gradient .....	79

Figure II-18 : Evolution des modules effectifs en fonction du rapport de rigidité .....	79
Figure II-19 : Evolution des modules effectifs en fonction de la fraction volumique des fibres..	80
Figure II-20: Variation des paramètres de longueur interne <b>leij</b> en fonction du rapport des modules élastiques $E_f/E_m$ pour un rayon de fibre $R=0.1\text{mm}$ . .....	80
Figure II-21: Structure composite stratifiée (a) sans maillage et (b) avec maillage .....	81
Figure II-22 : Les champs de déplacement pour déterminer les modules effectifs en extension uniaxial ( <b>C11hom, C22hom, C33hom</b> ) .....	83
Figure II-23 : Cellule unitaire du Gyroïde .....	85
Figure II-24: Fenêtre d'analyse du gyroïde de différentes tailles (nombre de répétitions de la cellule élémentaire).....	87
Figure II-25: Convergence des modules du second gradient pour le gyroïde .....	87
Figure II-26: Modes de déformations du gyroïde au second gradient .....	88
Figure II-27 : Pourcentage de longueur interne par rapport à la longueur de la cellule élémentaire pour les trois microstructures étudiées .....	88
Figure II-28 : Tracée de la forme d'un huitième de la structure pantographique .....	89
Figure II-29 : Cellules unitaires du pantographe pour différent jeu de paramètres .....	91
Figure II-30 : Evolution de la longueur interne <b>le11</b> , en fonction de b et c. ....	92
Figure II-31 : Forme pantographique qui représente le maximum d'effet du second gradient ....	93

## Liste de tableaux :

Tableau II-1 : Comparaison des modules élastiques effectifs de Cauchy calculés par deux codes éléments finis différents .....	65
Tableau II-2: Modules élastique effectifs de Cauchy .....	73
Tableau II-3: Composantes du tenseur de rigidité du second gradient pour le pantographe, unité en N. ....	73

Tableau II-4: Longueurs internes du pantographe .....	74
Tableau II-5 : Modules élastiques effectifs de Cauchy et du second gradient et longueur interne	78
Tableau II-6 : Répartition des propriétés élastiques au sein de la structure stratifiée.....	82
Tableau II-7: Modules de Cauchy et du second gradient calculés pour la structure composite en stratifiée.....	82
Tableau II-8: longueurs internes de la structure sandwich .....	83
Tableau II-9 : Modules élastiques de Cauchy pour le gyroïde .....	85
Tableau II-10 : Modules du second gradient du Gyroïde .....	86
Tableau II-11: Longueurs internes du Gyroïde.....	86
Tableau II-12: Modules élastiques du second gradient pour différentes tailles de la fenêtre d'analyse .....	87



## 1. Introduction

La modélisation des matériaux à microstructure hétérogène peut requérir des modèles plus riches que la formulation classique du premier gradient (propre au milieu dit de Cauchy) pour prédire leur comportement homogène effectif à l'échelle macroscopique d'un milieu continu de substitution (Mindlin & Eshel, 1968). De forts gradients de déformation microscopique sont observés, avec une longueur d'onde comparable ou plus petite que la taille du VER, en situation de forts gradients des propriétés microscopiques des constituants, en particulier pour les milieux architecturés qui présentent un contraste infini de modules élastiques entre le matériau de base et le vide qui l'entoure.

Les matériaux composites sont très utilisés de nos jours dans les applications aéronautiques, automobiles, navales et en construction mécanique, en raison des nombreux avantages qu'ils procurent, notamment leur légèreté, leurs propriétés et résistance mécaniques élevées, la capacité d'absorption d'énergie, ou encore leur bonne isolation thermique et acoustique. Concevoir ces matériaux homogénéisés de manière optimale nécessite de comprendre la relation entre l'architecture interne et les propriétés mécaniques (plus généralement physiques, par exemple électriques, thermiques, magnétiques), ce qui peut être réalisé grâce aux méthodes d'homogénéisation.

Le calcul des propriétés effectives homogénéisées des matériaux hétérogènes périodiques repose sur la moyenne volumique des champs de déformation et de contrainte sous des conditions aux limites périodiques appliquées sur la cellule unitaire (Hill, 1966, 1967 ; Mandel, 1966). L'homogénéisation classique s'appuie sur l'hypothèse de séparation d'échelles (l'échelle mésoscopique de la cellule de base et l'échelle macroscopique de la structure), connue sous le nom de condition de macro-homogénéité de Hill-Mandel (Hill, 1966, 1967 ; Mandel, 1966). Dans cette approche qui se limite à un milieu effectif du premier gradient, tous les gradients de déplacement d'ordre supérieur sont négligés et seul le premier gradient de déplacement est introduit dans la cinématique du milieu continu de substitution (Truesdell et al, 1960 ; Mindlin & Eshel, 1968). Dans les situations où l'hypothèse de

séparation d'échelle classique ne s'applique plus, la théorie classique ne peut prédire le comportement global, et notamment les effets de taille de microstructure, compte tenu de l'absence d'une échelle de longueur (Mindlin, 1964).

Un grand nombre de travaux de la littérature dévolus à l'homogénéisation vers des milieux du second gradient ont vu le jour depuis une cinquantaine d'années (Ben-Amoz, 1976 ; Forest et Sab, 1998 ; Forest, 1998 ; Forest et al., 2001 ; Trinh et al., 2012 ; Tran et al., 2012 ; Rahali et al., 2015 ; Bacigalupo et Gambarotta, 2010), pour des composites à microstructure périodique ou aléatoire (Goda & Ganghoffer, 2016), des matériaux auxétiques (Bacigalupo & Gambarotta, 2014) ou plus récemment des milieux aléatoires de nature fibreuse (Berkache et al., 2017).

Même si beaucoup de travaux ont porté sur des modélisations bidimensionnelles, le développement de modèles du second gradient dans un contexte 3D s'avère nécessaire pour les géométries qui ne sont pas réalisables ni projetables en 2D, telles que les structures à parois minces (Khalil Refai et al, 2019).

L'objectif de ce chapitre est de développer une méthode d'homogénéisation continue de matériaux hétérogènes périodiques au second gradient dans un contexte de petites transformations, et de calculer les modules élastiques effectifs pour différentes microstructures qui justifient le recours à ce type de modèles.

Le plan du chapitre est le suivant : après une introduction aux méthodes d'homogénéisation (section 2), la théorie de l'homogénéisation continue vers un milieu à gradient de déformation est exposée dans la section 3. Les sections 4, 5 et 6 présentent quelques exemples numériques illustrant la méthodologie proposée pour les composites à base d'inclusion en 3D et pour des matériaux à parois minces. Une étude de sensibilité des modules effectifs à différents paramètres microstructuraux (fraction volumique de renfort, contraste de modules) est réalisée en section 6. La section 7 expose une étude de sensibilité de la longueur interne aux paramètres géométriques d'une structure

pantographique. Une synthèse des principaux résultats obtenus et quelques perspectives de travaux futurs sont présentées dans la section 8.

Les notations utilisées sont précisées dans ce qui suit. L'espace physique est assimilé à l'espace euclidien, les vecteurs et les tenseurs d'ordre supérieur sont décomposés dans une base orthonormée de l'espace vectoriel sous-jacent. Le gradient d'un champ scalaire ou de tenseur par rapport à la position est noté avec l'opérateur nabla et la position en indice, soit  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) \otimes \nabla_{\mathbf{x}}$ , qui représente le gradient du champ de tenseur  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  par rapport à la position macroscopique, le vecteur  $\mathbf{x}$ . La transposée d'un tenseur s'écrit par exemple avec une notation en exposant  $\mathbf{B}^T$ . La transposition d'un tenseur du troisième ordre s'applique à ses deux derniers indices. Le gradient d'un champ tensoriel  $\mathbf{A}(\mathbf{y})$  est noté  $\mathbf{A}(\mathbf{y}) \otimes \nabla_{\mathbf{y}}$  (avec  $\otimes$  le produit tensoriel) et sa divergence est obtenue comme la trace du gradient, notée  $\mathbf{A}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}$ . Le produit dyadique symétrisé est noté  $\otimes^s$ . Le produit scalaire  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  représente le produit interne dans l'espace des vecteurs (tenseurs) cartésiens. Les contractions simples, doubles et triples des tenseurs s'écrivent respectivement  $\cdot$ ,  $\cdot\cdot$ ,  $\cdot\cdot\cdot$ . Le produit vectoriel de deux vecteurs ou tenseurs  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  est noté  $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ . La transposée d'un tenseur du troisième ordre  $\mathbf{G}$  à composantes  $G_{ijk}$  dans une base cartésienne est le tenseur  $\mathbf{G}^T$  de composantes  $G_{ikj}$  dans la même base.

Nous utilisons dans ce présent travail quelques abréviations des termes techniques qui sont standard dans les méthodes d'homogénéisation :

CU : Cellule unitaire

CLP : Conditions aux Limites Périodiques.

VER : Volume Élémentaire Représentatif.

PC : Problème de cellule

SG : Second Gradient

HSP : Homogénéisation des Structures Périodiques

MS : Modélisation Statistique

DH : Déplacement Homogène

DF : Déplacement de Fluctuation

On note les grandeurs microscopiques en minuscule (comme  $u$ ) et en majuscule les grandeurs macroscopiques associées (telle que  $U$ ). Le champ de déformation linéarisé est défini comme la partie symétrique du gradient de déplacement.

$$\varepsilon_X(u) = \frac{1}{2} (u \otimes \nabla_X + u \otimes \nabla_X^T).$$

Le transposé d'un tenseur s'écrit avec une notation d'exposant, par exemple le vecteur ligne ou covecteur  $u^T = [u_x, u_y, u_z]^T$ ; la transposition d'un tenseur du troisième ordre s'applique à ses deux derniers indices.

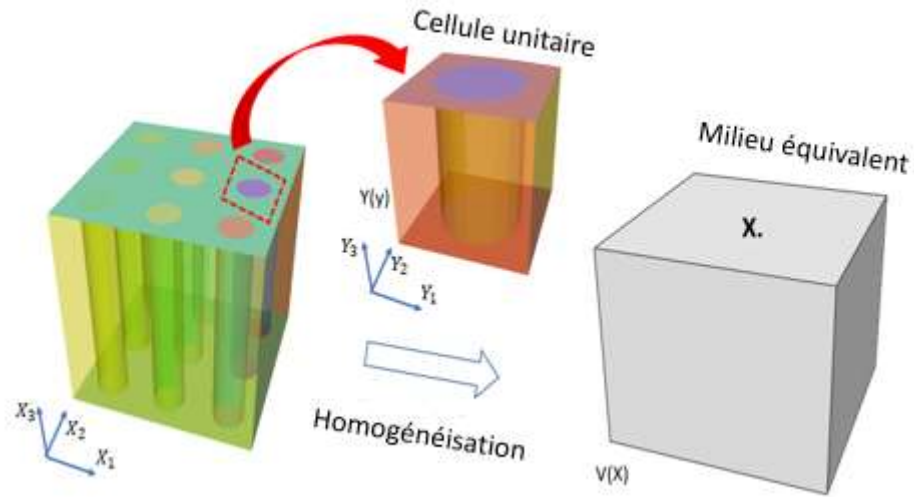
La moyenne volumique d'une quantité microscopique sur un domaine spatial  $V$  est notée selon :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma \, dV$$

## 2. Méthodologie générale pour l'homogénéisation des matériaux hétérogènes périodiques

Les méthodes d'homogénéisation de matériaux composites périodiques distinguent deux échelles : l'échelle de la microstructure pour laquelle la position microscopique est notée  $y$ , et l'échelle macroscopique avec la position spatiale  $x$ . Une dépendance implicite de la position macroscopique est valable pour la déformation macroscopique et son gradient, successivement  $E = E(x)$ ,  $K = K(x) = E(x) \otimes \nabla_X$ . Dans ce qui suit, les vecteurs  $y$  et  $x$  désignent respectivement les positions spatiales microscopique et macroscopique des points matériels, avec toutes les positions définies par rapport à une base cartésienne fixe ; la cellule unitaire (CU) de matériaux hétérogènes et le milieu effectif sont

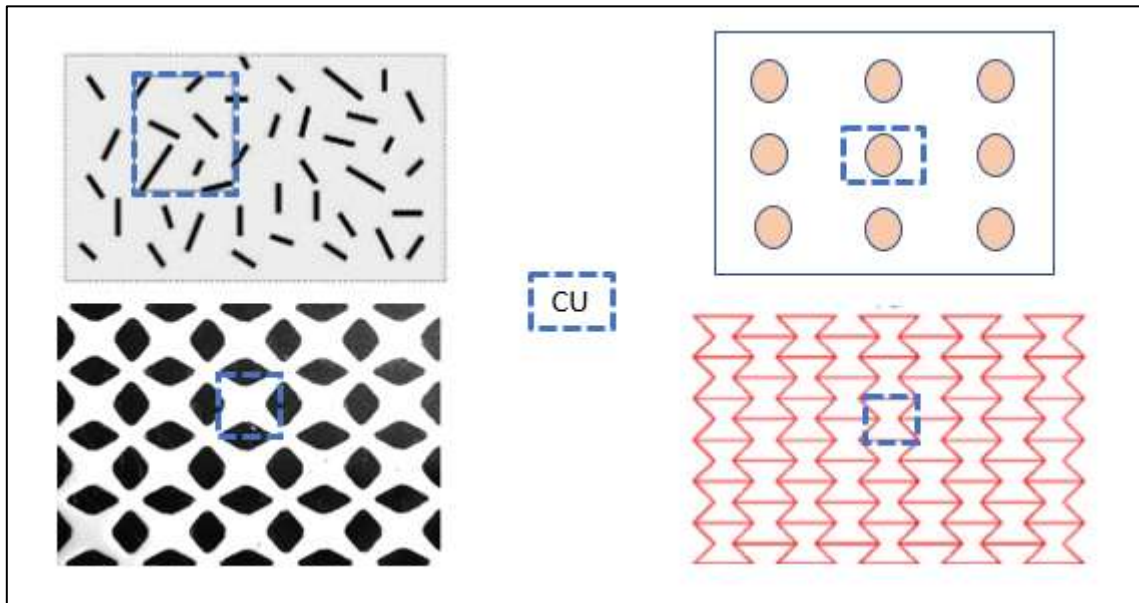
représentées sur la Figure II-1. Pour les matériaux périodiques, on peut alors se limiter à la cellule de base pour faire l'homogénéisation et déterminer les propriétés effectives du milieu équivalent.



**Figure II-1 : Cellule unitaire (CU) de matériaux hétérogènes et milieu effectif équivalent**

Les méthodes d'homogénéisation prédisent le comportement effectif des matériaux hétérogènes. Ces matériaux présentent des hétérogénéités dans différentes zones de la structure, ce qui rend cependant difficile de modéliser les hétérogénéités une par une. L'idéal est de remplacer la structure hétérogène par un milieu continu macroscopiquement équivalent.

Par la suite, l'échelle microscopique ou locale est l'échelle des hétérogénéités et l'échelle macroscopique est l'échelle du milieu équivalent homogénéisé. On montre que le calcul des propriétés effectives par les méthodes d'homogénéisation des matériaux hétérogènes se fait sur une cellule unitaire périodique du matériau (CU), qui représente l'hétérogénéité de la microstructure initiale répétée de façon régulière dans toutes les directions. La Figure II-2 présente la CU pour des matériaux composites et architecturés périodiques.



**Figure II-2 : Exemples de cellules unitaires de matériaux périodiques.**

Les méthodes classiques d'homogénéisation vers un milieu effectif de Cauchy sont limitées à une grande longueur d'onde du champ de déformation en regard de la taille typique de la microstructure. Malgré son emploi très fréquent et son succès, la théorie de Cauchy classique s'avère incapable de prédire le comportement global de la microstructure là où l'hypothèse stricte de séparation d'échelle (entre l'échelle de la cellule et l'échelle de la macrostructure) n'est plus valable. L'absence d'un paramètre d'échelle de longueur interne du matériau dans la théorie classique de l'élasticité de Cauchy conduit à une description insuffisamment précise du comportement à l'échelle de la cellule unitaire de la microstructure, car les effets de taille absolu qui se produisent lorsque la longueur d'onde du chargement est proche de la taille de CU ne sont pas pris en compte (Goda et Ganghoffer, 2015). De même, des modes de déformations spécifiques ne sont pas décrits par l'élasticité du premier gradient, en particulier le développement de forts gradients internes de déformation, qui peuvent conduire à l'émergence de gradient d'ordre supérieur à l'échelle d'un milieu continu homogénéisé de substitution.

### 3. Formulations théoriques du modèle à gradient de déformation

A l'échelle microscopique de la cellule unitaire, une loi de comportement élastique linéaire isotrope du premier gradient est adoptée, ce qui permet d'écrire les équations de champ en statique selon :

$$\sigma \cdot \nabla_y + b = 0 \text{ dans } Y \quad (2.1)$$

$$\sigma \cdot n = t \text{ sur } \partial Y \quad (2.2)$$

$$\sigma = C : \varepsilon \quad (2.3)$$

Avec  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy, symétrique  $\sigma = \sigma^T$  (la symétrie étant une conséquence de l'équilibre du moment angulaire),  $b$  le vecteur des forces volumiques,  $n$  le vecteur normal extérieur sur les frontières du domaine,  $t$  le vecteur traction et  $C$  le tenseur de rigidité microscopique du quatrième ordre.

Le comportement effectif est évalué en appliquant la condition de macrohomogénéité de Hill-Mandel sur la cellule unitaire ou le VER ; cette procédure conduit à un milieu continu effectif à l'échelle macroscopique. Des conditions aux limites périodiques sont appliquées sur la cellule, avec une déformation macroscopique  $E(x)$  pour le milieu du premier gradient et un gradient de déformation  $K(x) = E(x) \otimes \nabla_x$  pour le milieu de second gradient, imposées comme variables cinématiques contrôlées sur la frontière de la cellule unitaire. Le déplacement microscopique est décomposé en une forme quadratique de la cinématique macroscopique représentant la partie dite homogène décrivant exactement le milieu homogène du second gradient postulé ; il est corrigé par une fluctuation  $\tilde{u}_i(y)$ , nulle sur les bords de la cellule unitaire et de moyenne nulle, soit :

$$u_i = u_i^{hom} + \tilde{u}_i = E_{ij} \cdot y_j + \frac{1}{2} K_{ijk} : (y_j \otimes y_k) + \tilde{u}_i(y) \quad (2.4)$$

La déformation macroscopique et les variables cinématiques macroscopiques introduites sont liées par des fonctions de localisation, qui résultent de la formulation des problèmes de cellule, soit :

$$\tilde{u}_i(y) = H_{ijk}^E(y) : E_{jk} + H_{ijkl}^K(y) :: K_{kl} \quad (2.5)$$

où  $E(x)$  et  $K(x)$  sont le premier et le deuxième gradient du macro-déplacement (Mindlin, 1964), exprimés comme suit en fonction du déplacement microscopique :

$$U(x) = \langle u \rangle_Y; E := \langle u^{hom} \otimes^S \nabla_y \rangle_Y; K(X) = E(x) \otimes \nabla_x \quad (2.6)$$

Le tenseur de déformation microscopique linéarisé est la partie symétrique du gradient de déplacement.

$$\varepsilon := u \otimes^S \nabla_y \quad (2.7)$$

La déformation et le gradient de déformation s'écrivent sous forme indicielle comme suit:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); K_{ijk} = \varepsilon_{ij,k} = \frac{1}{2} (u_{i,jk} + u_{j,ik}) \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2} K_{ijk} y_k + \tilde{\varepsilon}_{ij}(y) \quad (2.9)$$

avec  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(y) = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i})(y)$  la partie fluctuante de la déformation. On observe que le champ de déformation est symétrique, soit  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , et le tenseur du second gradient présente une symétrie par permutation des deux derniers indices, soit  $K_{ijk} = K_{ikj}$ .

Le centre d'aire de la cellule unitaire (CU) est le point  $\mathbf{x}$ , défini dans la base cartésienne par la relation intégrale suivante :

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y (\mathbf{y} - \mathbf{x}) dV_y = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

où  $|Y|$  désigne la surface de la cellule unitaire dans un contexte 2D (son volume en 3D). L'intégration a lieu ici sur tous les points microscopiques avec le vecteur position au sein de la CU, le sens de la relation (2.10) étant que la position relative  $\xi := (\mathbf{y} - \mathbf{x})$  des points microscopiques est de moyenne nulle sur la cellule unitaire.



Dans les théories du continuum à gradient de déformation, l'énergie de déformation est écrite comme une forme bilinéaire des variables cinématiques, en adoptant dans ce chapitre une formulation en petites déformations, les énergies étant alors des fonctions quadratiques de leurs arguments cinématiques :

$$W_M(E, K) = \langle W_\mu(\varepsilon) \rangle = \langle \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{y}) : c_{ijkl}(\mathbf{y}) : \varepsilon_{kl}(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{2} E_{ij} : C_{ijkl}^{hom} : E_{kl} + \frac{1}{2} K_{ijk} : A_{ijklmn}^{hom} : K_{lmn} + E_{ij} (B_{ijklm}^{hom} + B_{ijklm}^{hom,T}) : K_{klm} \quad (2.11)$$

avec  $c_{ijkl}$  et  $C_{ijkl}^{hom}$  respectivement les tenseurs des modules élastiques du premier gradient microscopique et macroscopique (tenseurs d'ordre quatre),  $A_{ijklmn}^{hom}$  les composantes du tenseur du sixième ordre des modules du gradient de déformation, et  $B_{ijklm}^{hom}$  le tenseur du cinquième ordre des modules de couplage entre les comportements du premier et du second gradient. La densité d'énergie élastique du milieu du second gradient à l'échelle macroscopique est notée  $W_M(E, K)$ .

La première relation dans l'Eq. (2.11) est la condition de macrohomogénéité étendue de Hill-Mandel, qui stipule que la moyenne en volume du travail interne microscopique au sein de l'CU est égale au travail interne macroscopique du milieu à gradient de déformation postulé.

Les contraintes macroscopiques homogénéisées pour le milieu de Cauchy et second gradient sont obtenus en dérivant l'énergie de déformation par rapport à la macro déformation  $E(x)$  et à son gradient  $K(x)$  respectivement, soit :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{hom} E_{kl} + B_{ijklm}^{hom} K_{klm} \quad (2.12)$$

$$S_{ijk} = B_{ijklm}^{hom} E_{lm} + A_{ijklmn}^{hom} K_{lmn}$$

La matrice des modules élastiques effectifs,  $C_{ijkl}^{hom}$ ,  $A_{ijklmn}^{hom}$ , et la matrice de couplage  $B_{ijklm}^{hom}$ , ont les propriétés de symétrie de permutation indicielles suivantes :

$$C_{ijkl}^{hom} = C_{jikl}^{hom} = C_{klij}^{hom} ; \quad B_{ijklm}^{hom} = B_{jiklm}^{hom} = B_{ijlkm}^{hom} ; \quad A_{ijklmn}^{hom} = A_{jiklmn}^{hom} = A_{lmnijk}^{hom}$$

Dans le cas où la microstructure du matériau présente une symétrie centrale, le tenseur élastique de couplage d'ordre cinq  $B_{ijklm}^{hom}$  s'annule, de sorte que la loi de comportement précédente s'écrit de façon découplée selon :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{hom} E_{kl}$$

$$S_{ijk} = A_{ijklmn}^{hom} K_{lmn} \quad (2.13)$$

A l'aide des modules élastiques effectifs homogénéisés, nous écrivons la loi de comportement de Cauchy et du second gradient en 2D reliant respectivement les contraintes et hyper-contraintes aux tenseurs de déformation et du gradient de déformation, en considérant leur symétrie selon une écriture en format vectoriel, soit trois composantes indépendantes pour les contraintes et déformation du milieu de Cauchy et six composantes indépendantes des tenseurs de gradient de déformation et d'hypercontrainte (du milieu du second gradient) :

$$E = [E_{11}, E_{22}, E_{12} = E_{21}]^T, \Sigma = [\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12} = \Sigma_{21}]^T \quad (2.14)$$

$$K = (K_{111}, K_{221}, K_{122}, K_{222}, K_{112}, K_{121})^T, S = (S_{111}, S_{221}, S_{122}, S_{222}, S_{112}, S_{121})^T \quad (2.15)$$

Les tenseurs macroscopiques de contraintes et de déformations sont liés par la loi de comportement homogénéisée utilisant les notations de (Tran et al., 2012) :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111}^{hom} & C_{1122}^{hom} & C_{1112}^{hom} \\ C_{2211}^{hom} & C_{2222}^{hom} & C_{2212}^{hom} \\ C_{1211}^{hom} & C_{1222}^{hom} & C_{1212}^{hom} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{pmatrix} S_{111} \\ S_{221} \\ S_{122} \\ S_{222} \\ S_{112} \\ S_{121} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{111111}^{hom} & A_{111221}^{hom} & A_{111122}^{hom} & A_{111222}^{hom} & A_{111112}^{hom} & A_{111121}^{hom} \\ A_{221111}^{hom} & A_{221221}^{hom} & A_{221122}^{hom} & A_{221222}^{hom} & A_{221112}^{hom} & A_{221121}^{hom} \\ A_{122111}^{hom} & A_{122221}^{hom} & A_{122122}^{hom} & A_{122222}^{hom} & A_{122112}^{hom} & A_{122121}^{hom} \\ A_{222111}^{hom} & A_{222221}^{hom} & A_{222122}^{hom} & A_{222222}^{hom} & A_{222112}^{hom} & A_{222121}^{hom} \\ A_{112111}^{hom} & A_{112221}^{hom} & A_{112122}^{hom} & A_{112222}^{hom} & A_{112112}^{hom} & A_{112121}^{hom} \\ A_{121111}^{hom} & A_{121221}^{hom} & A_{121122}^{hom} & A_{121222}^{hom} & A_{121112}^{hom} & A_{121121}^{hom} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{111} \\ K_{221} \\ K_{122} \\ K_{222} \\ K_{112} \\ K_{121} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

On écrit également la loi de comportement en 3D pour le milieu de Cauchy selon :

$$E = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} = E_{21}, E_{23} = E_{32}, E_{13} = E_{31}]^T,$$

$$\Sigma = [\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33}, \Sigma_{12} = \Sigma_{21}, \Sigma_{23} = \Sigma_{32}, \Sigma_{13} = \Sigma_{31}]^T \quad (2.18)$$

Dans la formulation classique de Cauchy on retrouve 6 composantes de déformation  $E_{ij}$ , ainsi que les contraintes de Cauchy  $\Sigma_{ij}$ , en utilisant la notation de Voigt modifiée, c'est-à-dire en réécrivant les 6 composantes respectives des tenseurs  $\Sigma$  et  $E$  sous forme de 2 vecteurs colonnes et les composantes des tenseurs d'ordre  $C$ , prenant en compte les symétries indicielles, sous forme d'une matrice 6x6 pour simplifier l'écriture :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{hom} & C_{12}^{hom} & C_{13}^{hom} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{hom} & C_{22}^{hom} & C_{23}^{hom} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^{hom} & C_{32}^{hom} & C_{33}^{hom} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{hom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^{hom} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{hom} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{13} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

La théorie 3D de l'élasticité à gradient de déformation fournit un vecteur gradient de déformation  $K_{ijk}$  qui contient 18 composantes et a une symétrie dans les deux derniers indices, qui est conjugué au sens de l'énergie aux 18 composantes du tenseur des hypercontraintes  $S_{ijk}$ . La relation entre ces deux tenseurs fournit une matrice de modules élastiques homogénéisés  $A_{ijklmn}^{hom}$  de second gradient de taille 18x18.

$$K_{ijk} = [K_{111}, K_{221}, K_{122}, K_{331}, K_{133}, K_{222}, K_{112}, K_{121}, K_{332}, K_{233}, K_{333}, K_{113}, K_{131}, K_{223}, K_{232}, K_{231}, K_{132}, K_{123}]^T$$

$$S_{ijk} = [S_{111}, S_{221}, S_{122}, S_{331}, S_{133}, S_{222}, S_{112}, S_{121}, S_{332}, S_{233}, S_{333}, S_{113}, S_{131}, S_{223}, S_{232}, S_{231}, S_{132}, S_{123}]^T \quad (2.20)$$

Le tenseur des modules du second gradient en 3D s'écrit sous la forme matricielle suivante :

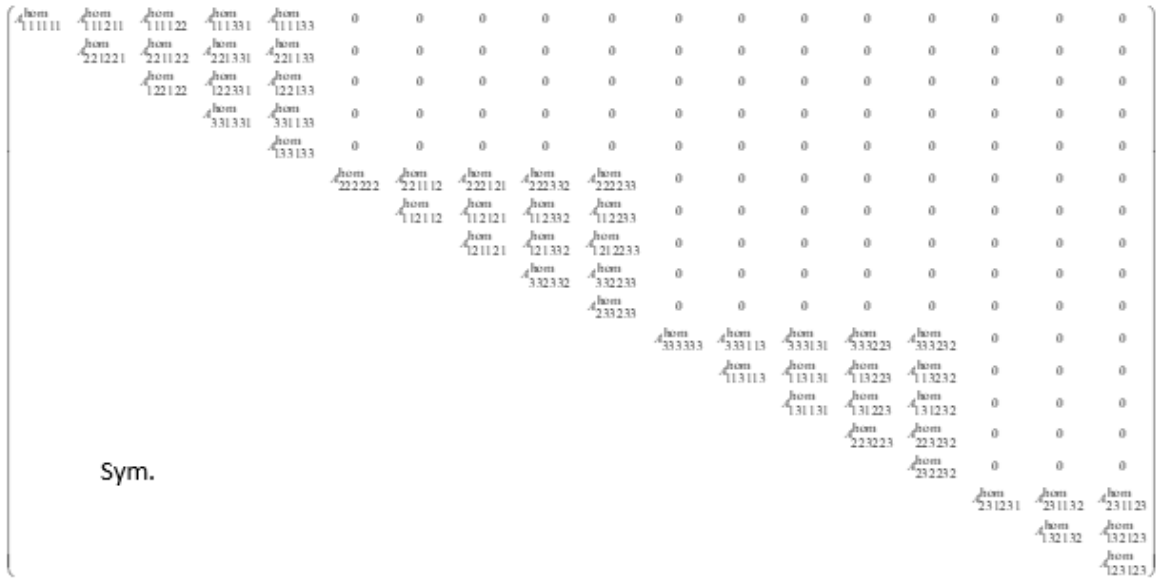


Figure II-3 : représentation matricielle du tenseur des modules effectifs du second gradient

$$\begin{pmatrix} S_{111} \\ S_{221} \\ S_{122} \\ S_{331} \\ S_{133} \\ S_{222} \\ S_{112} \\ S_{121} \\ S_{332} \\ S_{233} \\ S_{333} \\ S_{113} \\ S_{131} \\ S_{223} \\ S_{232} \\ S_{231} \\ S_{132} \\ S_{123} \end{pmatrix} = (A^{hom}_{ijklmn}) \begin{pmatrix} K_{111} \\ K_{221} \\ K_{122} \\ K_{331} \\ K_{133} \\ K_{222} \\ K_{112} \\ K_{121} \\ K_{332} \\ K_{233} \\ K_{333} \\ K_{113} \\ K_{131} \\ K_{223} \\ K_{232} \\ K_{231} \\ K_{132} \\ K_{123} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

On peut écrire les modules élastiques effectifs en fonction des localisateurs de déformation  $A^E(y)$ ,  $A^K(y)$ , respectivement des champs de tenseurs du quatrième et cinquième ordre, exprimés en fonction des localisateurs de déplacement introduits dans l'équation (2.5) :

$$A^E(y) := I_4 + H^E(y) \otimes \nabla_y, A^K(y) := (I_4 \otimes y + H^K(y) \otimes \nabla_y) \therefore T \rightarrow \tilde{\varepsilon}(y) = A^E(y) : E(x) + A^K(y) \therefore K(x) \quad (2.22)$$

$$C^{hom} = \int_y (A^E(y))^T : C(y) : A^E dV_y$$

$$B^{hom} = \int_y (A^E(y))^T : C(y) \therefore A^K(y) dV_y \quad (2.23)$$

$$A^{hom} = \int_y (A^K(y))^T \therefore C(y) \therefore A^K(y) dV_y$$

avec  $C(y)$  le tenseur microscopique des modules d'élasticité.

Afin de quantifier l'importance des effets du second gradient, nous calculons les longueurs internes, définies comme la racine carrée du rapport des paramètres constitutifs du comportement homogénéisé du second gradient à ceux du modèle du premier gradient : la longueur interne définie dans (Goda & Ganghoffer, 2016) s'écrit avec la notation de Voigt simplifiée comme suit :

$$l_{e_{ij}} = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{r=2} A_{irjr}^{hom}}{C_{ij}^{hom}}} \quad (2.24)$$

### 3.1. Évaluation des champs de déplacements et déformations microscopiques

Dans la modélisation tridimensionnelle, les vecteurs déplacement et de déformation s'écrivent comme suit en notation de Voigt :

$$u = [u_x, u_y, u_z]^T = [u_1, u_2, u_3]^T \quad (2.25)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}]^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}]^T \quad (2.26)$$

A partir du développement de l'équations (2.4) et (2.9), on peut obtenir les composantes des vecteurs de déplacement et de déformation microscopiques, écrites successivement comme suit :

$$u_1 = E_{11}x + E_{12}y + E_{13}z + \frac{x^2}{2} K_{111} + \frac{y^2}{2} K_{122} + \frac{z^2}{2} K_{133} + \frac{xy}{2} K_{112} + \frac{xz}{2} K_{113} + \frac{yz}{2} K_{123} + \tilde{u}_1$$

$$u_2 = E_{22}y + E_{21}x + E_{23}z + \frac{y^2}{2} K_{222} + \frac{x^2}{2} K_{211} + \frac{z^2}{2} K_{233} + \frac{xy}{2} K_{212} + \frac{xz}{2} K_{213} + \frac{yz}{2} K_{223} + \tilde{u}_2 \quad (2.27)$$

$$u_3 = E_{33}z + E_{31}x + E_{32}y + \frac{z^2}{2} K_{333} + \frac{x^2}{2} K_{311} + \frac{y^2}{2} K_{322} + \frac{xy}{2} K_{312} + \frac{xz}{2} K_{313} + \frac{yz}{2} K_{323} + \tilde{u}_3$$

Les composantes du tenseur de déformation sont obtenues par dérivation du champ de déplacement :

$$\varepsilon_{11} = E_{11} + K_{111}x + \frac{y}{2} K_{112} + \frac{z}{2} K_{113} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{22} = E_{22} + K_{222}y + \frac{x}{2} K_{212} + \frac{z}{2} K_{223} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{33} = E_{33} + K_{333}z + \frac{x}{2} K_{313} + \frac{y}{2} K_{323} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial z} \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[ (E_{12} + K_{122}y + \frac{x}{2} K_{112} + \frac{z}{2} K_{123}) + (E_{21} + K_{211}x + \frac{y}{2} K_{212} + \frac{z}{2} K_{213}) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left[ (E_{23} + K_{233}z + \frac{x}{2} K_{213} + \frac{y}{2} K_{223}) + (E_{32} + K_{322}y + \frac{x}{2} K_{312} + \frac{z}{2} K_{323}) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left[ (E_{13} + K_{133}z + \frac{x}{2} K_{113} + \frac{y}{2} K_{123}) + (E_{31} + K_{311}x + \frac{y}{2} K_{312} + \frac{z}{2} K_{313}) \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \right)$$

La formulation de l'élasticité du second gradient de déformation donne un problème de valeur aux limites sur la CU soumis à une déformation et un gradient de déformation imposés ; elle se formule comme suit :

$$\operatorname{div} \left\{ c_{ijkl}(y) : \left( E_{kl} + K_{klm} y_m + \nabla_{y_l} \tilde{u}_k \right) \right\} = 0 \quad (2.29)$$

En insérant dans l'équation (2.29) le déplacement fluctuant de l'Eq. (2.5), nous obtenons les problèmes aux valeurs limites (PVL) du premier et du second gradient, posés sur la cellule unitaire comme conditions de stationnarité de l'énergie macroscopique : un principe de minimisation étendu à toutes les fluctuations périodiques s'applique à l'énergie de déformation dans l'équation (2.11) en utilisant l'expression de la microdéformation (2.8), soit :

$$\begin{aligned}
W_M(E, K) &= \text{Min}_{\tilde{u}} \langle w_\mu(\varepsilon) \rangle = \text{Min}_{\tilde{u}} \frac{1}{2} \int_Y \varepsilon_{ij}(\mathbf{y}) : c_{ijkl}(\mathbf{y}) : \varepsilon_{kl}(\mathbf{y}) \\
&= \text{Min}_{\tilde{u}} \frac{1}{2} \int_Y \left( E_{ij} + K_{ijk} y_k + \nabla_{y_j} \tilde{u}_i \right) : c_{ijmn}(\mathbf{y}) : \left( E_{mn} + K_{mnp} y_p + \nabla_{y_n} \tilde{u}_m \right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Les problèmes de cellule unitaire PVL1 et PVL2 au premier et second gradient qui en découlent prennent la forme suivante :

$$PVL1: -\text{div} \left\{ c_{ijkl}(\mathbf{y}) : \left( E_{kl} + \nabla_{y_l} (H_{kmn}^E(\mathbf{y}) : E_{mn}) \right) \right\} = 0 \tag{2.31}$$

$$PVL2: -\text{div} \left\{ c_{ijkl}(\mathbf{y}) : \left( K_{klm} y_m + \nabla_{y_l} (H_{klmn}^K : K_{lmn}) \right) \right\} = 0 \tag{2.32}$$

En utilisant l'équation (2.28) qui donne les composantes de la déformation microscopique, et après le développement de l'équations (2.29), nous obtenons le problème aux limites pour le premier et le deuxième gradient sous forme faible comme suit :

$$\int_{\Omega} \left[ \begin{aligned} & (\lambda_i (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) (\nabla_x v_x + \nabla_y v_y + \nabla_z v_z) + 2\mu_i (\varepsilon_{11} \nabla_x v_x + \varepsilon_{22} \nabla_y v_y + \varepsilon_{33} \nabla_z v_z)) \\ & + 2\mu_i (\varepsilon_{12} (\nabla_x v_y + \nabla_y v_x) + \varepsilon_{23} (\nabla_y v_z + \nabla_z v_y) + \varepsilon_{13} (\nabla_x v_z + \nabla_z v_x)) \end{aligned} \right] d\Omega = 0 \tag{2.33}$$

avec,  $v_x$ ,  $v_y$ , et  $v_z$  les composantes de la fonction test, soit le déplacement virtuel. La résolution de ce problème virtuel conduit à la loi de comportement à l'échelle macroscopique, obtenue en appliquant successivement des chargements macroscopiques de type premier et second gradient, respectivement les tenseurs E et K. Par la suite, les modules d'élasticité de Cauchy et du second gradient sont évalués comme expliqué dans ce qui suit. L'évaluation des contraintes macroscopiques homogénéisées est faite à partir de la densité d'énergie macroscopique :

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{\partial W_M(E, K)}{\partial E}; \quad S_{ijk} = \langle \sigma_{ij} \otimes y_k \rangle = \frac{\partial W_M(E, K)}{\partial K} \tag{2.34}$$

L'algorithme de la méthode d'homogénéisation proposée synthétise (Figure II-4) les différentes étapes de la méthode d'homogénéisation du second gradient.

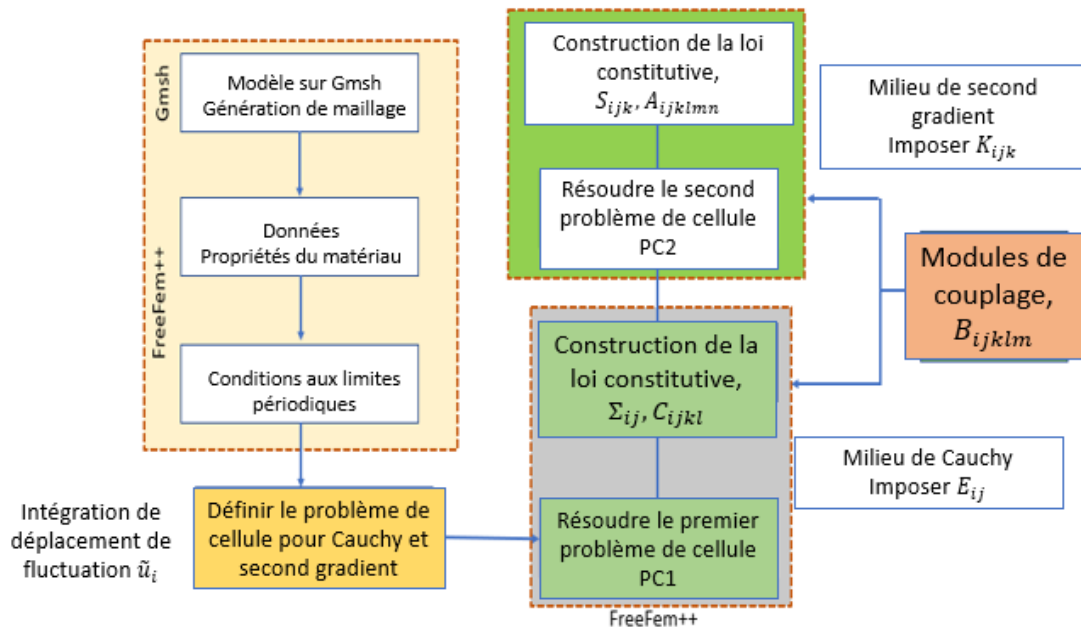


Figure II-4: Algorithme de la méthode d'homogénéisation du second gradient

### 3.2. Évaluation des modules effectifs et validation du modèle du second gradient

Des applications numériques de la méthode d'homogénéisation au second gradient proposée en petites perturbations sont faites dans ce qui suit pour trois types de microstructures périodiques sélectionnées a priori en raison des effets prononcés du second gradient attendu : un composite présentant un contraste infini de propriétés de ses deux constituants (un vide au sein d'une matrice environnante), un pantographe continu développant des modes de déformation de flexion, et un gyroïde qui illustre une structure à parois mince et contient une grande variation géométrique en terme de surfaces, ce qui permet d'activer l'effet du second gradient.

#### 3.2.1. Composite avec une cellule unitaire poreuse

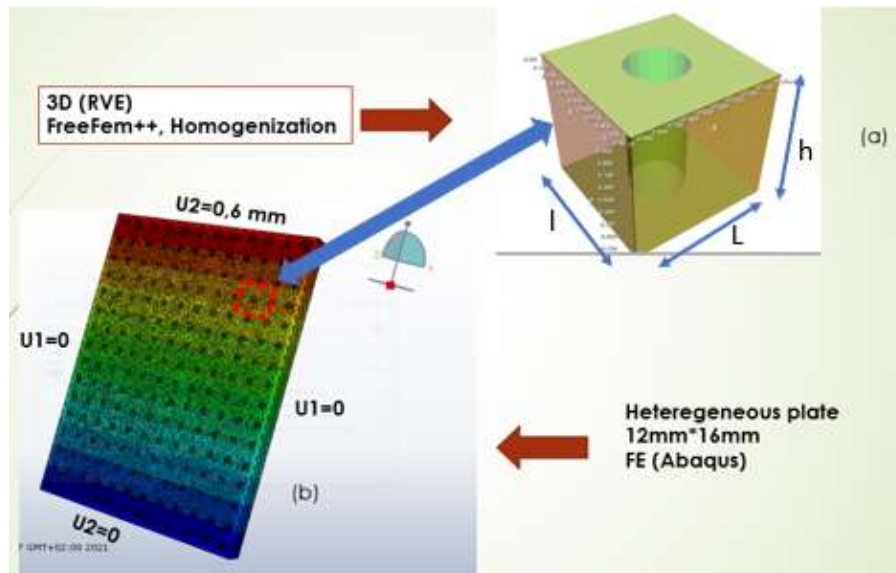
Le calcul des modules d'élasticité homogénéisés de Cauchy et du second gradient est effectué sur la cellule unitaire périodique d'un composite contenant un vide, soit les deux tenseurs de composantes respectives  $C_{ijkl}^{hom}$  et  $A_{ijklmn}^{hom}$ . Un exemple d'une microstructure simple de forme carrée comportant une matrice avec un vide en son centre est traité (Figure II-5). Les dimensions de cette cellule



élémentaire sont  $L = l = h = 1$  mm et  $R = 0,2$  mm, rayon du domaine occupé par le vide (Figure II-5). Les propriétés microscopiques élastiques isotropes sélectionnées sont :  $E = 2500$  MPa et  $\nu = 0,3$ . Un calcul par éléments finis est fait avec le logiciel Abaqus pour la plaque hétérogène (Figure II-5), constituée de la répétition de la cellule de base 16 fois (16 mm) selon  $y$  et 12 fois (12 mm) selon  $x$  afin de calculer la distribution spatiale du déplacement en fonction de la position matérielle au sein de la microstructure. La Figure II-6 représente la distribution de la composante du déplacement  $u_y$  le long de la ligne  $y = -8$  à  $y = 8$  mm, pour une position  $x = 2$  mm choisie assez loin du bord du domaine. La même réponse est obtenue sur la plaque homogène après la résolution du problème d'équilibre macroscopique du second gradient (eq. 2.35) (on utilise le milieu homogénéisé en chaque point) pour des conditions aux limites de traction simple (Figure II-5.b), ce avec le code FreeFem++. La résolution de ce problème a pour objectif de déterminer les déplacements macroscopiques  $U_i$  de la plaque homogénéisée, vérifiant le problème aux limites macroscopique

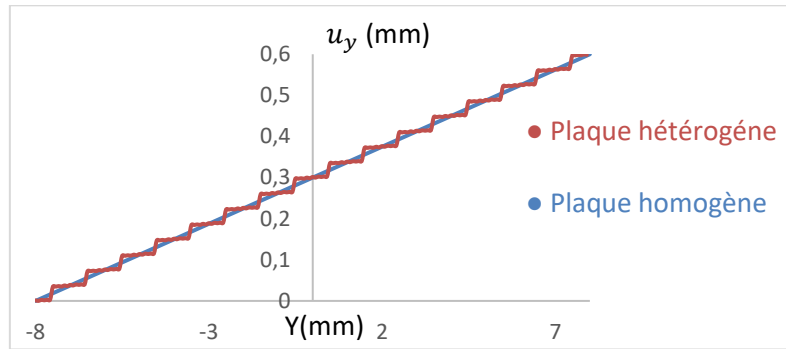
$$\text{div} \Sigma_{ij} - \text{div} S_{ijk} = \text{div} (C_{ijkl}^{hom} : E_{kl}) - \text{div} (A_{ijklmn}^{hom} : K_{lmn}) = 0 \quad (2.35)$$

Les conditions aux limites utilisées sont les suivantes : un déplacement  $U_x$  nul est imposé sur les arêtes verticales à droite et à gauche, et un déplacement  $U_y$  nul est prescrit sur la face inférieure de la plaque, avec un déplacement  $U_y$  imposé sur la face supérieure de valeur 0.6mm.



**Figure II-5 : (a) Cellule unitaire du composite, (b) plaque hétérogène avec épaisseur 1mm.**

Cette méthode de validation qui compare la réponse du problème homogénéisé macroscopique et la solution en champ complet montre l'efficacité du modèle à gradient de déformation, car on retrouve quasiment la même évolution de déplacement avec une erreur relative qui ne dépasse pas 1% entre la solution obtenue pour la microstructure hétérogène et la solution pour la plaque homogène équipée des propriétés effectives de la cellule élémentaire périodique. Le déplacement imposé à la plaque hétérogène sur la face supérieure varie entre zéro et 0.6 mm ; l'évolution du déplacement microscopique  $u_y$  sur cette plaque hétérogène montre une fluctuation périodique superposée à une variation linéaire. La variation spatiale du déplacement macroscopique au sein de la plaque homogène est parfaitement linéaire, et suit la même pente que la solution microscopique, les fluctuations locales de cette dernière étant 'gommées' (Figure II-6).



**Figure II-6: Déplacement vertical  $u_y$  pour les plaques hétérogènes et homogènes le long d'une verticale Y**

Afin de valider les modules élastiques homogénéisés de Cauchy (FreeFem++), nous comparons ces derniers avec les modules élastiques calculés sur le plugin ABAQUS pour l'homogénéisation périodique à l'échelle de la CU développé par (S. L. Omairey et al, 2018). Ce plugin permet de calculer automatiquement les propriétés élastiques homogénéisées qui constituent les composantes de la matrice de souplesse  $So_{ijkl}^{hom}$ , ce qui conduit à la matrice de rigidité dont elle constitue l'inverse,

$$C_{ijkl}^{hom} = (So_{ijkl}^{hom})^{-1}.$$

**Tableau II-1 : Comparaison des modules élastiques effectifs de Cauchy calculés par deux codes éléments finis différents**

	$C_{1111}^{hom}$ (MPa)	$C_{1122}^{hom}$ (MPa)	$C_{2222}^{hom}$ (MPa)	$C_{3333}^{hom}$ (MPa)	$C_{1212}^{hom}$ (MPa)
(Freefem++)	2320	880	2320	2790	750
FE (Abaqus)	2297	847	2295	2730	748

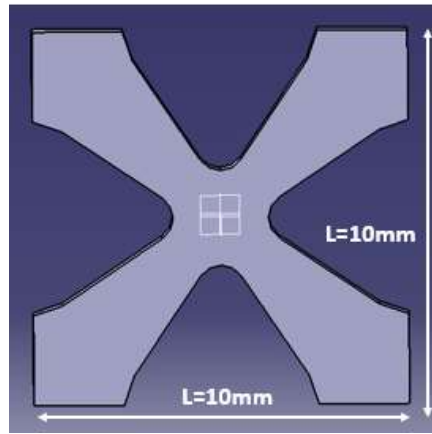
Les résultats trouvés pour le modèle de Cauchy (Tableau II-1) sont très proches des résultats obtenus par les plug-ins Abaqus avec une erreur qui ne dépasse pas 2%, cette erreur étant causée par la différence des maillages utilisés (nous avons raffiné le maillage sur ABAQUS pour la convergence des modules).

### 3.2.2. *Modèle à gradient de déformation d'un pantographe continu*

Le pantographe est ensuite sélectionné comme une structure sujette à de forts effets de gradient de déformation. Un réseau pantographique plan - plus de détails sont donnés dans (A. Madeo et al., 2015; F. dell'Isola et al., 2015b, Y. Rahali et al., 2015) - est un ensemble de deux familles de poutres d'Euler, une famille de poutres étant reliée par un pivot interne à la poutre de l'autre famille et l'intersectant à angle droit. Le pantographe est un exemple typique bien connu d'une structure ne présentant pas d'élasticité du premier gradient lorsque les poutres sont inextensibles (P. Seppecher, J.J. Alibert, F. dell'Isola, 2011), et la réponse élastique est du second gradient pour le milieu continu équivalent : il s'agit donc d'un continuum du second gradient sans élasticité de Cauchy. On considère ici au lieu d'un pantographe discret une version continue de celui-ci, sous la forme de deux poutres s'intersectant à angle droit dans la zone centrale (Figure II-7), de sorte que la microstructure obtenue présente une symétrie tétragonale. Bien que la microstructure stocke de l'énergie de déformation pour l'élasticité de Cauchy, elle devrait a priori présenter des effets de gradient de déformation prononcés en raison de la réponse en flexion des deux ligaments croisés dont elle est constituée.

Un domaine comprenant une répétition du CU de pantographe est considéré (Figure II-8) afin d'effectuer des calculs en champ complet des propriétés apparentes du pantographe et dans le but de valider le comportement homogénéisé du milieu effectif du second gradient de déformation.

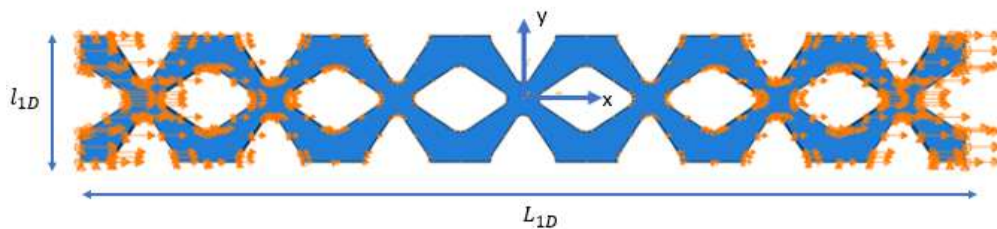
Des conditions aux limites sous la forme d'un champ de déplacement polynomial non homogène sont imposées aux bords du domaine de la structure du pantographe illustrée dans la Figure II-8. Cette structure est une répétition d'une cellule unitaire 7 fois selon la direction  $x$  ; la longueur d'un côté de la cellule unitaire carrée est  $L=l=10\text{mm}$  (Figure II-7). Les dimensions de la structure macroscopique sont  $L_{1D}=70\text{mm}$ ,  $l_{1D}=10\text{mm}$  comme le montre les Figure II-7 et Figure II-8 :



**Figure II-7: Cellule unitaire du Pantographe**

Un chargement cinématique en gradient d'extension est appliqué sur les bords de la structure complète (Figure II-8), soit  $K_{xxx}=1$  (les autres composantes de  $K$  étant nulles), afin de solliciter des effets de gradient de déformation uniaxial le long de la direction  $x$ , avec les conditions aux limites correspondantes en déplacement suivantes imposées sur le macro-domaine :

$$u_x = x^2/2; \quad u_y = u_z=0 \text{ on } \partial\Omega$$



**Figure II-8: Conditions aux limites de second gradient de la structure de pantographe**

Ce chargement cinématique reflète les efforts externes appliqués à la structure, qui sont nécessaires pour activer des effets de gradient de déformation interne ; il est opportun de rappeler l'expression du travail des forces extérieures pour un milieu continu du second gradient, constitué de tractions de Cauchy, de doubles tractions surfaciques et de doubles forces de bord et de traction de bord. Ces deux dernières forces propres au milieu à gradient de déformation peuvent être évaluées à partir du principe

du travail virtuel (P. Germain, 1973 ; S.A. Papanicolopoulos et A. Zervos, 2010), par intégration par partie dans le travail virtuel des efforts internes, à savoir la relation :

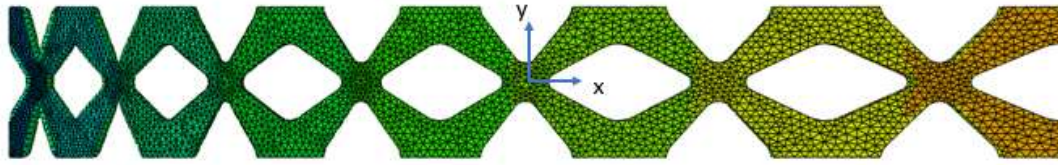
$$\begin{aligned}
 -\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} &= 0 \\
 \delta W_{\text{int}} &= \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + S_{ijk} \delta K_{ijk}) dV \\
 \delta W_{\text{ext}} &= \int_V f_k \delta u_k dV + \int_S P_k \delta u_k dS + \int_S R_k D \delta u_k dS + \oint_C E_k \delta u_k dS
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Les grandeurs  $P_k, R_k, E_k$  sont respectivement les tractions surfaciques, les doubles forces (tractions) surfaciques et les tractions de coin. Les forces volumiques  $f_k$  sont ici choisies nulles puisque le poids peut être négligé. Les forces externes équilibrent les contraintes internes de Cauchy et l'hyper-contrainte (le double crochet  $\oint$  représente le saut de la quantité enclose) et s'expriment selon :

$$\begin{aligned}
 P_k &= n_j (\sigma_{jk} - S_{ijk,i}) - D_j (n_i S_{ijk}) + (D_l n_l) n_j n_i S_{ijk} \\
 R_k &= n_i n_j S_{ijk} \\
 E_k &= s_m e_{mlj} \llbracket n_l n_j S_{ijk} \rrbracket
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

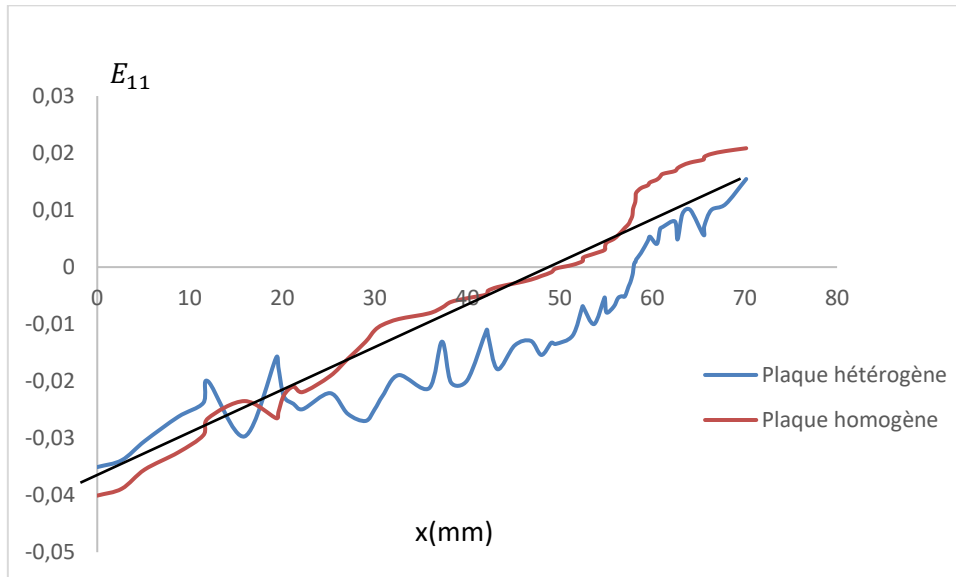
Les scalaires  $e_{mlj}$  représentent les composantes du tenseur de permutation, et  $s_m$  les composantes du vecteur de surface. Dans notre cas, nous appliquons des doubles forces via un contrôle cinématique, afin d'activer le terme de bord précédent  $\int_S R_k D \delta u_k dS$ .

Ces efforts externes conduisent à des caractéristiques spécifiques comme des couches limites et des forces concentrées (Y. Rahali et al., 2015). Le chargement cinématique appliqué précédemment conduit à des forces de réaction doubles sur les bords du domaine, générant la déformée de la structure du pantographe illustrée Figure II-9. La distribution spatiale de la déformation est représentée Figure II-10, qui montre une déformation en flexion dominante à l'échelle de la micro et de la macrostructure.



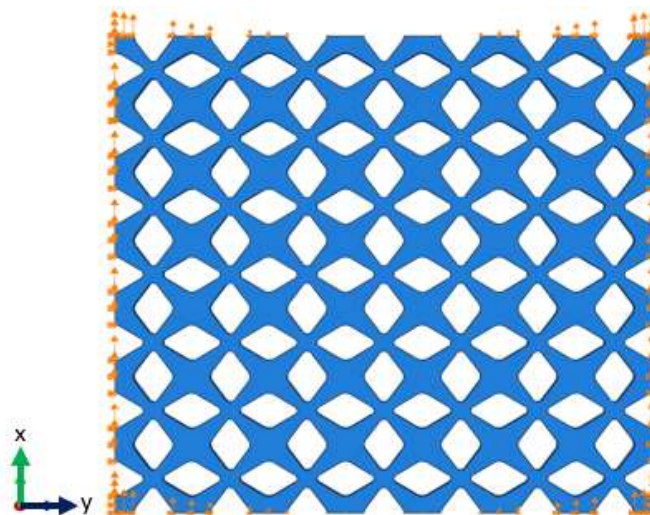
**Figure II-9: déformée du pantographe**

La composante de déformation  $E_{11}$  est tracée le long de la ligne horizontale  $y=5$  mm, sa moyenne montrant une augmentation linéaire le long de cette ligne, avec des fluctuations superposées qui apparaissent lors de la traversée de chaque CU pantographique. La déformée du pantographe (Figure II-9) montre un gradient de déformation des CU successives du bord gauche (fixe le long de  $x$ ) au bord droit de la structure macroscopique. Les cellules élémentaires subissent principalement une flexion locale des poutres en leur sein. La déformation macroscopique reconstruite comme la moyenne volumique de la déformation microscopique montre une variation quasi-linéaire le long de la structure, comme le montre la Figure II-10 (ligne bleue). Les mêmes conditions aux limites de second gradient ( $u_x = x^2/2$ ,  $u_y = u_z=0$  sur  $\partial\Omega$ ) sont appliquées sur la plaque homogène qui intègre les propriétés effectives homogénéisées d'une cellule élémentaire du pantographe. La résolution de l'équation d'équilibre macroscopique (Eq. 3.33) détermine les déplacements macroscopiques  $U_i$ , puis le champ de déformation de la plaque homogénéisée ; ce problème est résolu sous forme faible avec le code open source Freefem++. Une distribution spatiale similaire de la composante de déformation  $E_{11}$  le long d'une ligne traversant les centres de chaque cellule élémentaire au sein de la plaque hétérogène est obtenue comme pour la plaque hétérogène, comme le montre la Figure II-10. Ceci confirme la bonne précision du modèle de gradient de déformation développé pour cette structure pantographique.



**Figure II-10: Evolution de la déformation  $E_{22}$  en fonction de la position macroscopique**

La même analyse est ensuite effectuée pour une structure pantographique dans le plan illustré en Figure II-11 Figure II-12, répétée  $7 \times 7$  fois dans les directions  $x$  et  $y$  afin d'effectuer des calculs en champs complets des propriétés apparentes du pantographe, avec des conditions aux limites d'ordre supérieur qui génèrent des gradients de déformation.



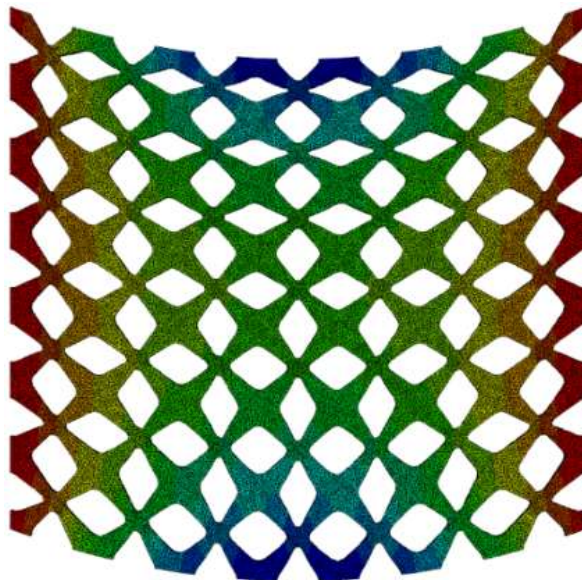
**Figure II-11: Conditions aux limites de type second gradient appliquées sur le pantographe 2D**



Le chargement cinématique du gradient de déformation suivant, comportant exclusivement la composante uniaxiale  $K_{yyy} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = 1$ , est appliqué sur les bords de la structure afin de générer des effets de second gradient uniaxial dans la direction  $y$  (les autres composantes de  $K$  étant nulles), les conditions aux limites imposées en déplacement sur le macro-domaine s'écrivent alors :

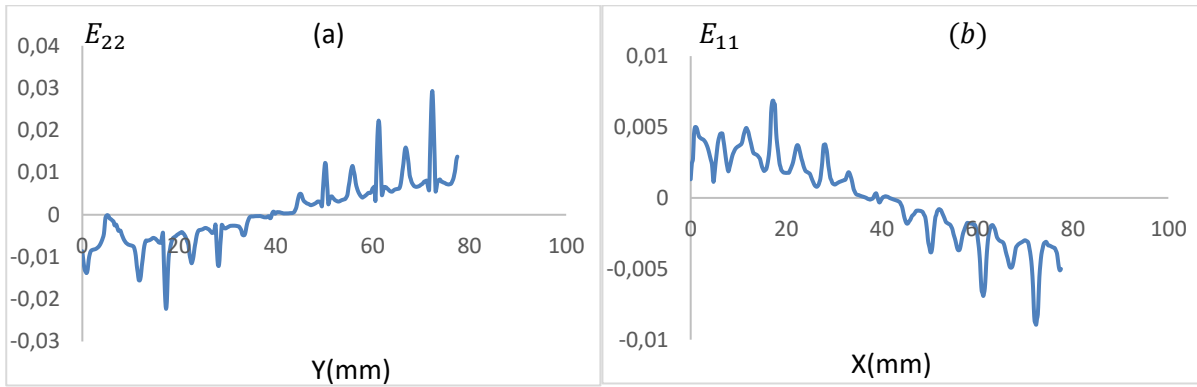
$$u_y = y^2/2; \quad u_x = u_z = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

La distribution spatiale du déplacement est tracée sur la configuration déformée Figure II-12, dont la forme montre une déformation en flexion dominante des micro et macrostructures.



**Figure II-12: déformée et distribution du déplacement de la structure du pantographe 2D**

La distribution spatiale de la déformation  $E_{22}$  le long de la ligne verticale à la position  $x = 3,5$  mm (traversant tous les bords des cellules élémentaires de  $y_{min}$  jusqu'au  $y_{max}$ ), présente une augmentation linéaire (Figure II-13.a), avec des fluctuations microscopiques importantes superposées à la réponse moyenne. Un comportement similaire est obtenu pour la composante de la déformation uniaxiale  $E_{11}$  qui est tracée sur la même ligne (Figure II-13.b).



**Figure II-13: Distribution spatiale des composantes de la déformation (a)  $E_{22}$  (b)  $E_{11}$  le long de la ligne  $X=3.5$**

Peu d'analyses dans la littérature montrent de tels effets de gradient de déformations macroscopiques pour les matériaux composites, les contributions du gradient de déformation résultant de la déformation interne développée au sein de la cellule unitaire répétitive, mais en revanche, un gradient de déformation macroscopique n'est en général pas présent à l'échelle de la macrostructure. Cela est dû au fait que ces gradients macroscopiques doivent être générés par des conditions aux limites d'ordre supérieur appropriées, comme le montre l'analyse précédente : l'application de tractions classiques ne déclenche en effet pas de tels effets de gradient de déformation à l'échelle de la macrostructure. De plus, afin de compléter l'argumentation, il convient de mentionner que les gradients de déformation macroscopiques résultent des gradients de déformation microscopiques en raison de la forme classique du théorème de la moyenne volumique (Howes et al, 1985 ; Wood, 2013). D'après ce théorème, pour un matériau diphasique présentant une continuité du déplacement et des tractions aux interfaces entre constituants, la relation suivante est satisfaite pour toute quantité  $\psi_a$  :

$$\langle \nabla_y \psi_a \rangle_y = \nabla_x \langle \psi_a \rangle_y \quad (2.38)$$

La quantité  $\langle \psi_a \rangle_y$  portant le nom de moyenne de phase (les indices indiquent l'échelle à laquelle la moyenne est faite), grandeur définie explicitement selon la moyenne volumique :

$$\langle \psi_a \rangle_y = \frac{1}{|Y|} \int_Y \psi_a dV_y \quad (2.39)$$

La conséquence du théorème de Whitaker est l'existence d'un macrogradient de la déformation macroscopique résultant de l'existence d'un gradient microscopique de moyenne non nulle au sein de la cellule unité d'une structure périodique.

Un calcul a été effectué sur la structure pantographique complète et sur la cellule unitaire de pantographe pour évaluer les modules de Cauchy et du second gradient, afin de valider le modèle homogénéisé pour cette structure pantographique. Les propriétés mécaniques utilisées dans le calcul sont  $E=2500\text{MPa}$ , et  $\nu=0.3$ .

**Tableau II-2: Modules élastique effectifs de Cauchy**

Tenseur de rigidité	Essais de traction uniaxial			Essais de traction biaxial			Essais de cisaillement		
	$C_{11}^{hom}$	$C_{22}^{hom}$	$C_{33}^{hom}$	$C_{12}^{hom}$	$C_{23}^{hom}$	$C_{13}^{hom}$	$C_{44}^{hom}$	$C_{55}^{hom}$	$C_{66}^{hom}$
<b>Pantographe</b>	588.4	588.4	1509.9	896	621	621	5.4	151.4	5.4

Nous évaluons ensuite les composantes de l'élasticité du second gradient ; à cet effet, nous effectuons dix-huit tests élémentaires pour calculer les composantes diagonales du tenseur du second gradient :

**Tableau II-3: Composantes du tenseur de rigidité du second gradient pour le pantographe, unité en N.**

$A_{111}^{hom}$	$A_{222}^{hom}$	$A_{333}^{hom}$	$A_{122}^{hom}$	$A_{133}^{hom}$	$A_{211}^{hom}$	$A_{233}^{hom}$	$A_{311}^{hom}$	$A_{322}^{hom}$	$A_{112}^{hom}$
<b>11724,36</b>	11724,36	8,560267	3788,896	4040,575	3788,938	2,488	4040,741	4040,575	13968,93
$A_{113}^{hom}$	$A_{123}^{hom}$	$A_{212}^{hom}$	$A_{213}^{hom}$	$A_{223}^{hom}$	$A_{312}^{hom}$	$A_{313}^{hom}$	$A_{323}^{hom}$		
<b>13969,1</b>	8086,031	4049,421	4044,04	15547,44	4044,065	4049,596	15548,1		

On observe que les modules du second gradient sont très importants, ce qui donne des longueurs internes assez importantes, ce qui montre que la structure pantographique est sujette à de forts effets de gradient de déformation conduisant à un effet de second gradient prononcé à l'échelle macroscopique. Les effets de gradient de déformation prononcés s'expliquent par la présence de la flexion globale de la structure lors de la déformation de deux ligaments croisés dont elle est constituée (voir Figure II-12). Le pantographe continu est ainsi une microstructure qui requiert un modèle à gradient de déformation, en raison d'effets de flexion prononcés.

À partir des modules effectifs de Cauchy et du second gradient calculés dans les Tableau II-2 et Tableau II-3, nous évaluons les longueurs internes dans les modes d'extension (Tableau II-4) afin de quantifier l'effet de gradient de déformation au niveau macroscopique, en se basant sur la relation (3.24) pour la définition des longueurs internes.

**Tableau II-4: Longueurs internes du pantographe**

$le_{11}(\text{mm})$	$le_{22}(\text{mm})$
8.7	8.7

Nous observons que les longueurs internes calculées sont du même ordre de grandeur que la taille linéaire de la cellule élémentaire, soit 10mm. Ces résultats permettent de conclure que la structure pantographique montre un effet de second gradient très important, conformément à la littérature sur le sujet (dell'Isola et al., 2015b, Rahali et al., 2015).

### **3.3. Effet de la taille de la cellule unitaire sur les modules effectifs de Cauchy et du second gradient**

Afin d'étudier l'effet de la taille de la fenêtre d'analyse sur les modules élastiques effectifs pour le modèle de gradient de déformation en 3D, nous avons défini des fenêtres d'analyse de tailles croissante, d'une seule cellule jusqu'à 4 cellules répétées dans les deux directions du plan, comme le montre la Figure II-14. Nous utilisons l'exemple d'une matrice avec des vides périodiques, la

périodicité est appliquée selon les 3 directions x, y et z. Un calcul des modules d'élasticité effectifs en traction pure selon x pour le milieu de Cauchy et du second gradient, respectivement  $C_{1111}^{hom}$  et  $A_{111111}^{hom}$  a été effectué pour les 4 structures de taille différente.

Les modules du second gradient dépendent du choix de la cellule élémentaire et de la taille de la fenêtre d'analyse ainsi que de la position absolue de l'origine du centre de gravité de la cellule. Afin de corriger ces effets parasites, des termes de correction pour les modules effectifs du second gradient sont calculés par (Li, 2011), également par (Ganghoffer et Reda, 2021), prenant en compte l'effet de la fluctuation du déplacement ainsi que des corrections des modules de couplage. Les expressions proposées pour les modules de Cauchy et du second gradient homogénéisés par ces deux derniers auteurs sont les suivantes :

$$C_{ijpq}^{hom*} = C_{ijpq}^{hom}$$

$$A_{ijkpqr}^{hom*} = A_{ijkpqr}^{hom} - C_{ijpq}^{hom} I_{kr}$$

$$(Li, 2011) \tag{2.40}$$

$$C^{hom*} = C^{hom}$$

$$A^{hom*} = A^{hom} - C^{hom} \otimes I - H^K \otimes \nabla : H^K \otimes \nabla$$

$$B^{hom*} + B^{hom*T} = -2 C^{hom} \otimes X - 2H^E \otimes \nabla : H^K \otimes \nabla$$

$$(Ganghoffer et Reda, 2021) \tag{2.41}$$

La formulation à gradient de déformation développée par (Ganghoffer et Reda, 2021) corrige mieux les modules d'élasticité du second gradient grâce aux facteurs supplémentaires présent dans les localisateurs de déformation ; mais cela ne converge pas totalement les modules à gradient de déformation qu'après normalisation par  $N \times N$ , avec N est le nombre des cellules unitaires.

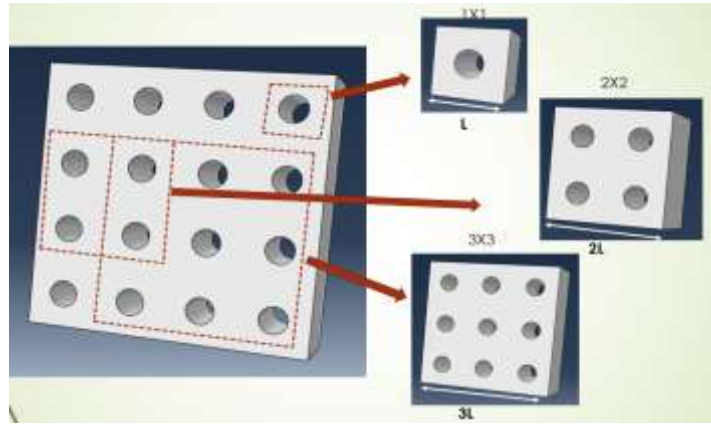


Figure II-14: Différentes tailles de la cellule élémentaire

La méthode proposée montrée une stabilité et une convergence des modules d'élasticité pour Cauchy en 3D ; les modules du second gradient convergent après une normalisation par un facteur  $N \times N$  (afin de calculer les modules sur un domaine de surface constante), où  $N$  est le nombre de cellules unitaires au sein de la fenêtre d'analyse, le module normalisé en traction étant alors défini par  $A_{111111}^{hom*} = A_{111111}^{hom} / N \times N$  (Figure II-15). Les mêmes résultats sont obtenus en 2D par (Ganghoffer et Reda, 2021).

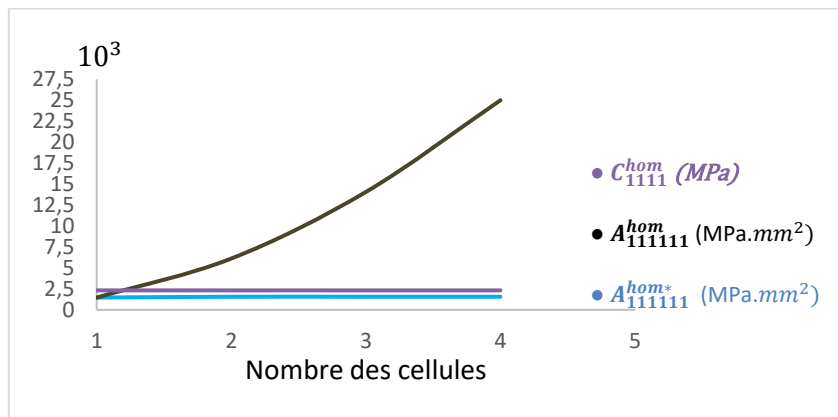


Figure II-15: Variation du module effectif du second gradient en traction pure  $A_{111111}^{hom}$  (trait noir), module normalisé  $A_{111111}^{hom*}$  (trait bleu) et module effectif du premier gradient  $C_{1111}^{hom}$  (trait jaune) en fonction du nombre de cellules unitaires  $N$  au sein de la fenêtre d'analyse.

#### 4. Variation des modules du second gradient par rapport aux paramètres microstructuraux géométriques et mécaniques de structures composites

Afin d'étudier l'impact des propriétés microstructurales géométriques et mécaniques sur le comportement homogénéisé de structures composites 3D, une matrice polymère renforcée par 10 inclusions circulaires de distributions différentes a été conçue dans le but de quantifier l'effet de la répartition des fibres dans la matrice, successivement périodique et quasi-périodique. Le premier cas de figure présente une répartition équidistance entre les fibres et avec le même rayon de fibre, soit 0,12 mm, les dimensions de la matrice étant identiques dans les trois configurations d'étude, à savoir  $L = 3 \text{ mm}$ ,  $l = 1 \text{ mm}$  et  $h = 1 \text{ mm}$  (Figure II-16). La deuxième configuration présente une répartition linéaire des distances entre les fibres, tout en gardant le même rayon des fibres, soit 0,12 mm. Dans la 3<sup>ème</sup> configuration, la distance entre les fibres est inchangée mais le rayon des fibres varie linéairement de 0,05 mm à 0,18 mm, en gardant toujours le même nombre d'inclusions à l'intérieur de la matrice. Les propriétés mécaniques utilisées pour la matrice et les fibres sont  $E_m = 500 \text{ MPa}$ ,  $E_f = 2500 \text{ MPa}$ , et un coefficient de Poisson identique des deux phases, soit  $\nu_f = \nu_m = 0.3$ . Des conditions aux limites périodiques sont appliquées, fournissant ainsi des microstructures composites périodiques avec une répartition différente des inclusions et avec la même taille de cellule.

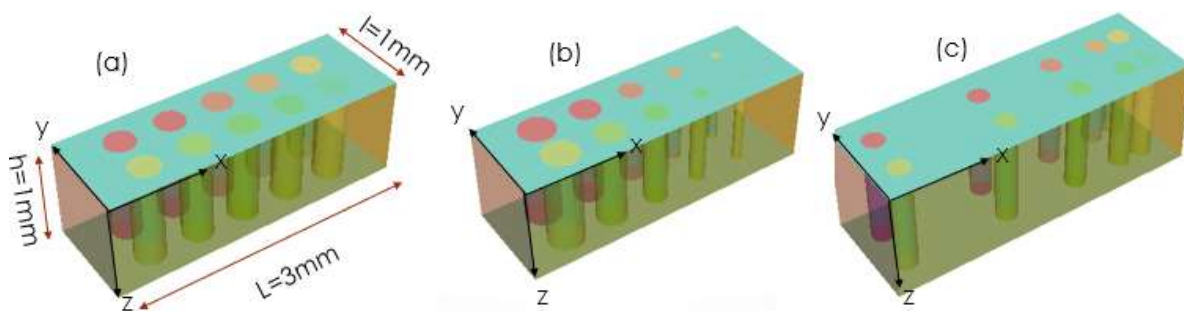


Figure II-16: Matériaux composites avec le même matériau en situation périodique (a), de taille d'inclusion variable (b), d'espacement des inclusions variable (c) le long de l'axe x

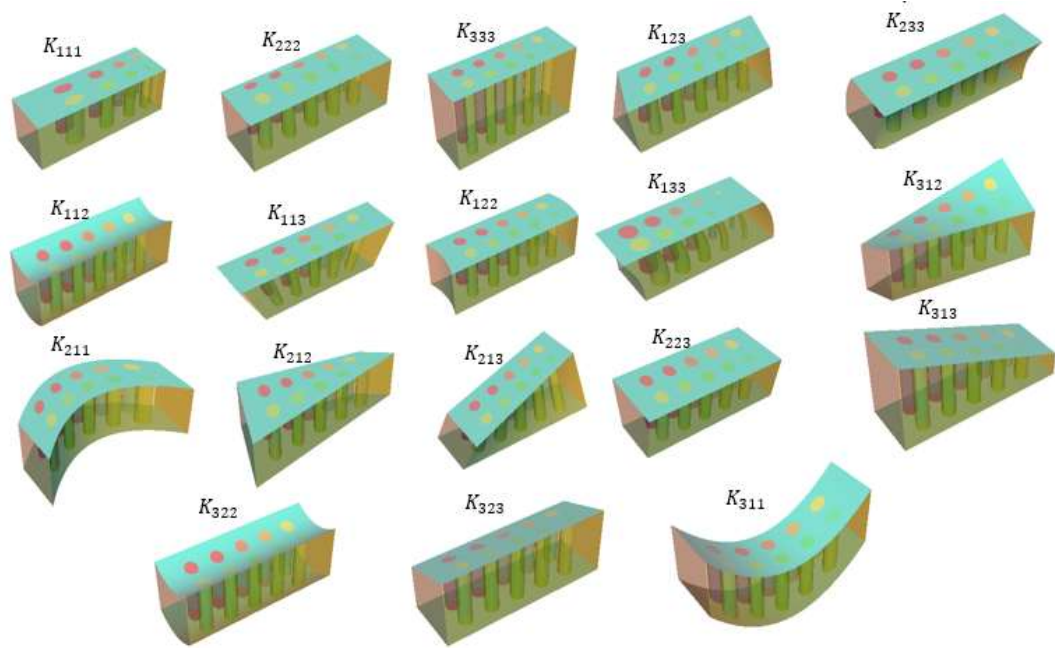
On observe que la structure (b) possède les modules effectifs les plus élevés, pour la fraction volumique des inclusions la plus élevée (Tableau II-5), par contre la configuration (c) qui présente une variation de distance entre les inclusions a le module de second gradient le plus élevé selon la direction x ( $A_{111111}^{hom}$ ). La variation géométrique de la distance entre les fibres (Figure II-16.c) générée le long de la direction X donne un effet de second gradient, les situations (a) et (c) donnant pratiquement le même module effectif pour les réponses de Cauchy et du second gradient. Ces configurations ont la même fraction volumique d'inclusions soit 0.15, mais présentent une répartition différente des inclusions dans la matrice. La variation géométrique à l'intérieur du composite implique un effet de second gradient plus prononcé que dans le cas périodique.

**Tableau II-5 : Modules élastiques effectifs de Cauchy et du second gradient et longueur interne**

	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)
<b>Fraction volumique de fibres <math>V_f</math></b>	0.15	0.163	0.15
$C_{11}^{hom}$ (MPa)	1033	1064	1034
$C_{12}^{hom}$ (MPa)	442.95	456	443
$A_{111111}^{hom}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	686	717	827
$A_{222222}^{hom}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	71	73	71
$A_{333333}^{hom}$ (MPa.mm <sup>2</sup> )	344.5	354.9	344.9
$le_{11}$ (mm)	0.81	0.82	0.89

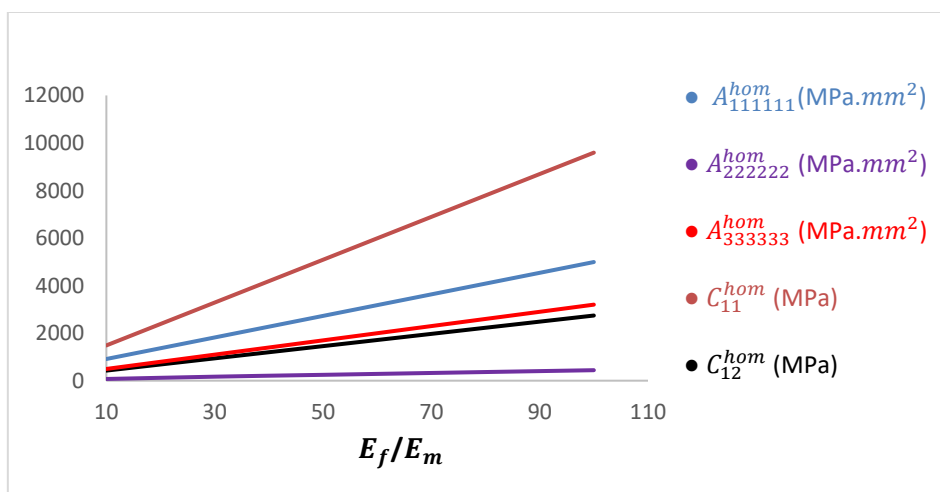
La Figure II-17 représente tous les modes de déformation possible du second gradient selon la nature des composantes imposées  $K_{ijk}$  dans le cas (a) en Figure II-16.





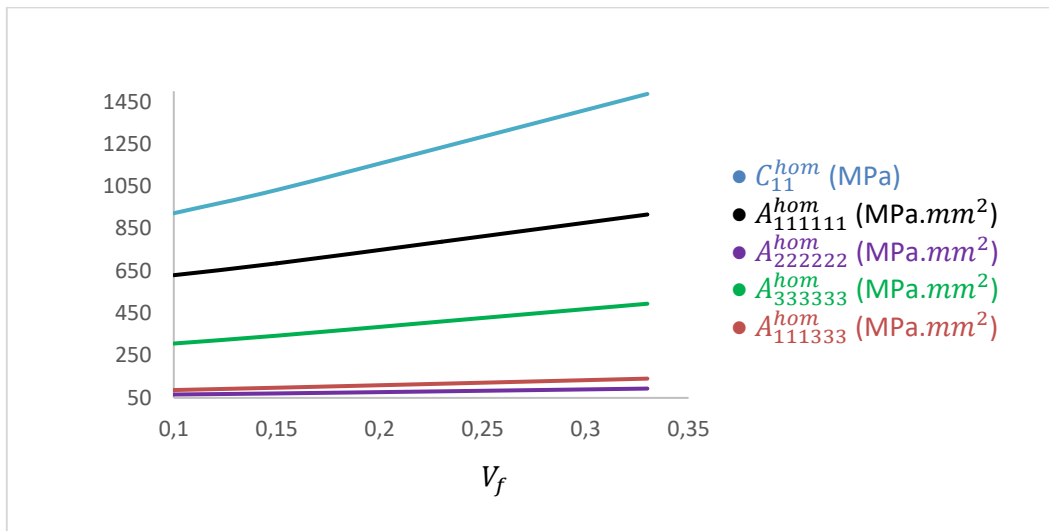
**Figure II-17 : Modes de déformation du composite au second gradient**

Afin d'analyser l'effet des propriétés mécaniques sur le comportement effectif de ces composites, une variation du rapport des modules d'Young inclusion/matrice ( $E_f/E_m$ ) est faite pour le cas (a) de la Figure II-16. L'évolution des modules effectifs du premier et du deuxième gradient en fonction du rapport de modules élastiques est représentée Figure II-18. L'augmentation du rapport de rigidité entraîne une augmentation correspondante des modules effectifs comme on peut s'y attendre.



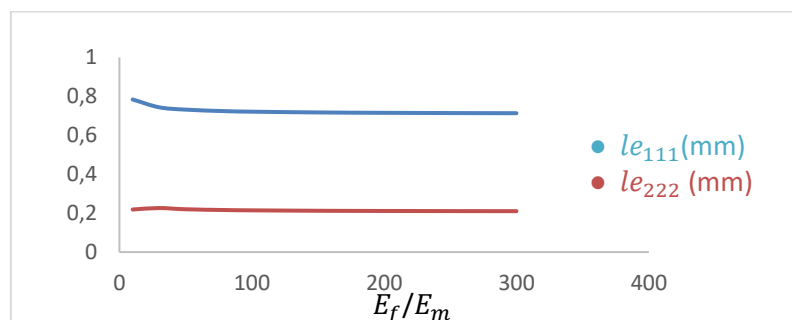
**Figure II-18 : Evolution des modules effectifs en fonction du rapport de rigidité**

Les modules effectifs du second gradient  $A_{111111}^{hom}$ ,  $A_{222222}^{hom}$ ,  $A_{333333}^{hom}$ ,  $A_{111333}^{hom}$  et  $C_{11}^{hom}$  montrent une augmentation linéaire avec la fraction volumique des fibres en Figure II-19.



**Figure II-19 : Evolution des modules effectifs en fonction de la fraction volumique des fibres**

Afin de quantifier l'effet des propriétés mécaniques des constituants des composites sur la réponse macroscopique, nous analysons l'influence du rapport des modules élastiques de la matrice à celui de l'inclusion sur les paramètres de longueur interne  $le_{ij}$ . Nous utilisons la formulation développée dans la section 3 pour calculer les paramètres constitutifs du premier et du deuxième gradient pour la structure composite dans le cas (a) de la Figure II-16, pour différents rapports des modules élastiques (de 1 à 200) avec un rayon de fibre  $R=0.12$ , Figure II-20.



**Figure II-20: Variation des paramètres de longueur interne  $le_{ij}$  en fonction du rapport des modules élastiques  $E_f/E_m$  pour un rayon de fibre  $R=0.1$ mm.**

On observe que les longueurs internes en extension  $le_{11}$  et  $le_{22}$  subissent une légère diminution en fonction du rapport des modules microscopiques et atteignent des valeurs stables pour un rapport de modules important, égal à 50. Les valeurs convergées des longueurs internes sont comparables mais légèrement inférieures à la taille de la cellule unitaire, indiquant des effets de gradient de déformation significatifs au niveau du continuum effectif.

## 5. Application à un matériau composite sandwich

Des structures composites stratifiées sont ensuite considérées, comme illustré en Figure II-21 ; les dimensions de la plaque sont  $L=8\text{mm}$ ,  $l=5\text{mm}$ , et  $h=3\text{mm}$ , l'épaisseur de chaque couche est de  $0.5\text{mm}$ , avec 6 couches dans l'épaisseur. Les couches supérieure et inférieure sont choisies plus rigides, avec un module d'Young  $E_1 = 5000\text{ MPa}$  et un coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0,34$ , alors que les couches internes ont les propriétés suivantes :  $E_2 = 100\text{ MPa}$  et  $\nu_2 = 0,3$ , conduisant ainsi à une structure sandwich avec des propriétés mécaniques très élevées des couches externes, et des couches internes plus molles par exemple des nid-d'abeilles (Figure II-21- (c)) ce que implique un gradient des propriétés dans l'épaisseur de sandwich.

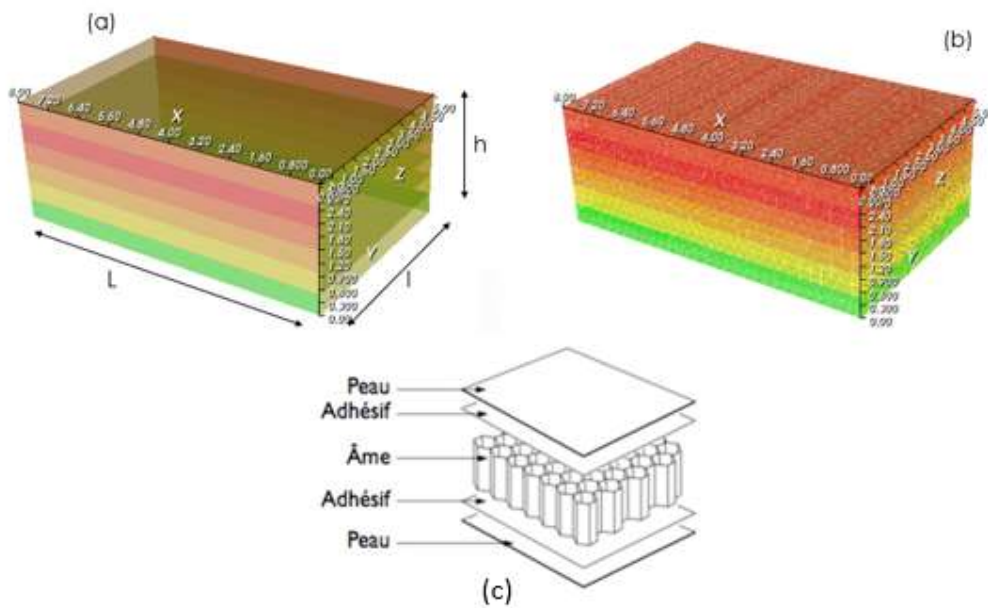


Figure II-21: Structure composite stratifiée (a) sans maillage et (b) avec maillage

Tableau II-6 montre la répartition des matériaux au sein de la structure.

**Tableau II-6 : Répartition des propriétés élastiques au sein de la structure stratifiée**

<b>Layer 1</b>	$E_1, \nu_1$
Layer 2	$E_2, \nu_2$
Layer 3	$E_2, \nu_2$
Layer 4	$E_2, \nu_2$
Layer 5	$E_2, \nu_2$
<b>Layer 6</b>	$E_1, \nu_1$

On constate que le module effectif  $A_{111111}^{hom}$  en gradient d'extension uniaxial est le plus important des modules du second gradient ; le module élastique du gradient de déformation dans la direction Z,  $A_{333333}^{hom}$  est le plus faible, la direction Z représente l'épaisseur du stratifié comme le montre la Figure II-21, de sorte que la structure est moins rigide. Le module le plus faible en extension uniaxial pour Cauchy est  $C_{33}^{hom}$ , les directions X et Y sont celles des couches de ce stratifié, ce qui explique que les modules sont plus importants ; en extension biaxiale le module  $C_{12}^{hom}$  est le plus important, il en est de même en cisaillement pour le module  $C_{44}^{hom}$ .

Afin de calculer le premier module d'élasticité lors d'un essai en gradient d'extension uniaxial, nous activons le premier terme du second gradient de déformation  $K_{111}$  dans le problème de cellule, et de même pour les autres modules : chaque composante du gradient de déformation détermine une colonne de la matrice des modules élastiques du second gradient homogénéisés. La Figure II-22 représente les champs de déplacements appliqués pour déterminer les modules élastiques en extension uniaxiale pour le milieu de Cauchy.

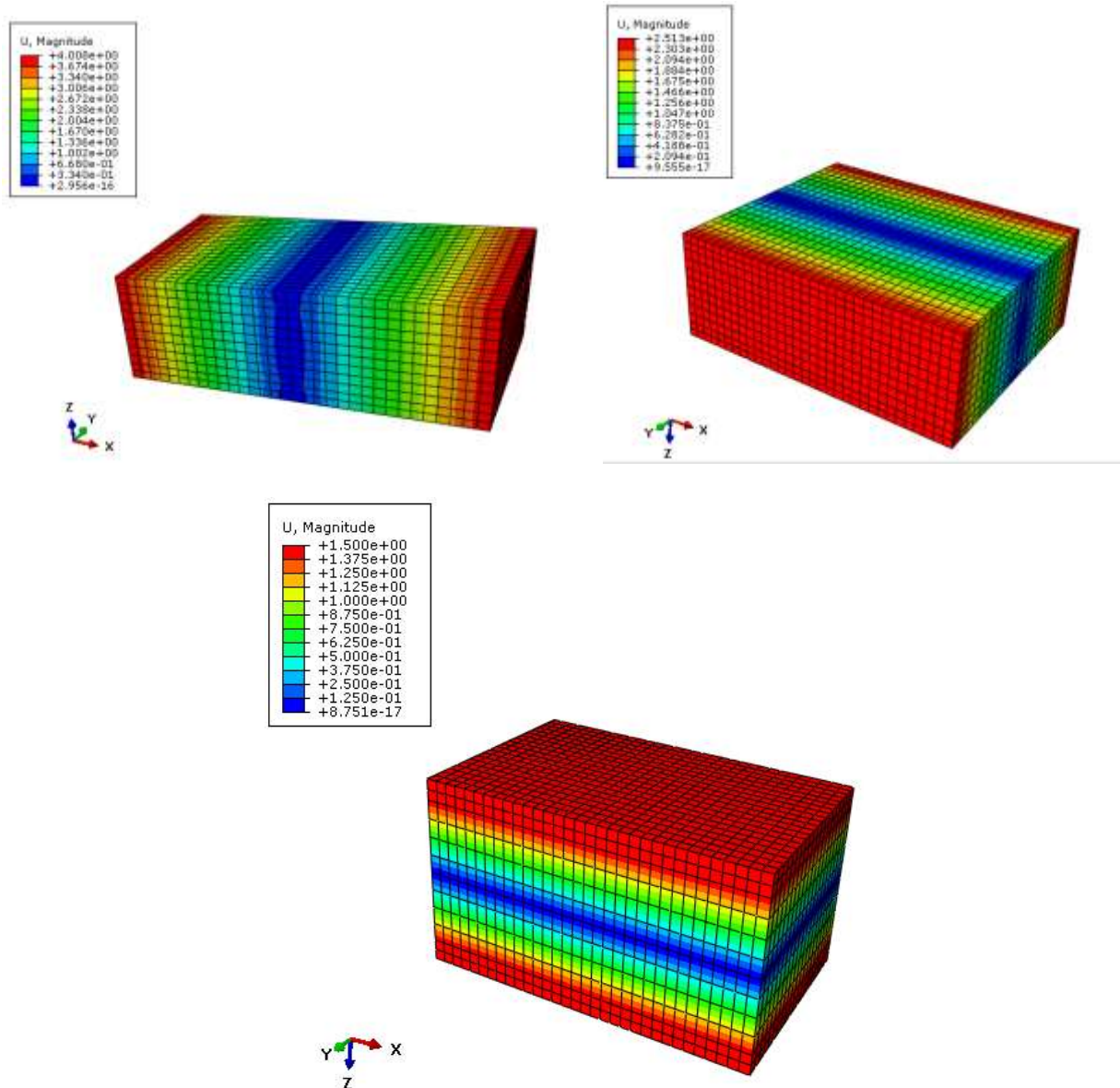
**Tableau II-7: Modules de Cauchy et du second gradient calculés pour la structure composite en stratifiée**

Uni-axiale (SG)			Modules uni-axiale (Cauchy)			Modules bi-axiale (Cauchy)			Module de cisaillement (Cauchy)		
$A_{111111}^{hom}$	$A_{222222}^{hom}$	$A_{333333}^{hom}$	$C_{11}^{hom}$	$C_{22}^{hom}$	$C_{33}^{hom}$	$C_{12}^{hom}$	$C_{13}^{hom}$	$C_{23}^{hom}$	$C_{44}^{hom}$	$C_{55}^{hom}$	$C_{66}^{hom}$
10498	3826	324	1999	1999	200.17	5408	2382	2382	275	70.28	57

Un calcul des longueurs internes a été effectué dans les directions principales pour pouvoir analyser l'effet de second gradient pour cette structure, les résultats sont donnés dans le Tableau II-8.

**Tableau II-8: longueurs internes de la structure sandwich**

$le_{11}(\text{mm})$	$le_{22}(\text{mm})$	$le_{33}(\text{mm})$
2.95	1.95	1.82



**Figure II-22 : Champs de déplacement associés aux modules effectifs en extension uniaxiale ( $C_{11}^{hom}$ ,  $C_{22}^{hom}$ ,  $C_{33}^{hom}$ )**

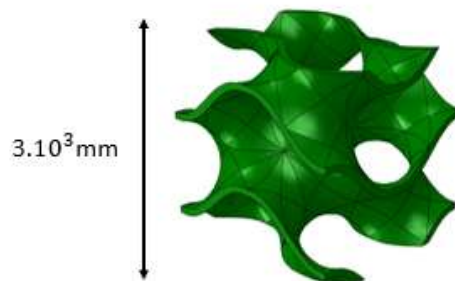
On obtient ainsi des longueurs internes qui varient sur une plage de 20 % à 45% par rapport à la longueur de la cellule unitaire. Cette application montre que la variation des propriétés mécaniques au sein de la structure génère un effet de second gradient qui est significatif.

## **6. Applications aux matériaux à parois minces**

Une classe particulièrement intéressante de matériaux architecturés cellulaires est constituée des structures à surfaces minimales triplement périodiques (appelées TPMS en anglais). Les architectures TPMS permettent de créer des structures cellulaires ayant un rapport surface/volume plus important que les cellules unitaires à base d'entretoises qui consistent en un réseau d'entretoises souvent prismatiques (c'est-à-dire à section constante) connectées aux nœuds, similaires aux structures en treillis. (D.-J. Yoo, 2014 ; D.W. Abueidda et al, 2016). Ces derniers auteurs ont montré des propriétés multifonctionnelles intéressantes en raison des géométries compliquées et de leurs effets d'échelles (Al-Ketan O et al, 2019). Elles ont un grand potentiel dans de nombreuses applications d'ingénierie telles que l'ingénierie tissulaire et les substrats catalytiques. De plus, l'avènement de la fabrication additive (FA) s'est avéré être une méthode fiable pour fabriquer des modèles complexes tels que le TPMS (Jafari D., Wits W.W, 2018), ce qui a accéléré la recherche sur les applications TPMS à paroi mince. La diminution de l'épaisseur conduit à une augmentation de la porosité, résultant en une structure tissulaire biocompatible et biodégradable qui est compatible à la fois en surface et structurellement (S. Qu et al, 2021). L'un des treillis TPMS les plus couramment utilisés pour construire des structures aux performances mécaniques robustes est le gyroïde. Notons les travaux de (I. Maskery et al, 2017) qui ont étudié les mécanismes d'absorption d'énergie et de défaillance de la structure gyroïde en Al-Si10-Mg. De plus, (G.S. Jung et al, 2017) ont proposé d'utiliser le gyroïde en graphène poreux 3D pour obtenir des matériaux structurels légers avec des propriétés thermiques faibles et insensibles à la densité et une résistance mécanique supérieure.

Dans cette section, nous évaluons la réponse mécanique à gradient de déformation de matériaux poreux et à parois minces. Ces structures sont fabriquées par la technologie de fabrication de couches

additives, un procédé de fabrication qui offre de nombreux avantages, notamment une liberté de conception, une grande précision et la possibilité de produire des pièces directement à partir d'un modèle numérique. Les structures à parois minces ont une épaisseur constante sur la surface (Khalil Refai et al, 2019) ; elles présentent de fortes variations géométriques (notamment de courbures), et elles ne sont réalisables qu'en 3D. Il en résulte qu'un modèle à gradient de déformation 3D est nécessaire. Les structures à parois minces présentent une résistance à la fatigue élevée (Khalil Refai et al., 2019). L'objectif des calculs ultérieurs est de quantifier les effets du second gradient de ce type de géométries.



**Figure II-23 : Cellule unitaire du Gyroïde**

Un calcul des modules effectifs du second gradient pour une cellule élémentaire de gyroïde (Figure II-23) a été effectué, pour le choix suivant des propriétés mécaniques :  $E=80$  GPa et  $\nu=0,34$ . La fraction volumique matérielle du gyroïde dans le volume total est de 0,101, la porosité est de  $2.42.10^{10} \text{ mm}^3$ , donc le volume occupé par le matériau est de  $2.73.10^9 \text{ mm}^3$ . Les modules de Cauchy et du second gradient calculés du gyroïde sont donnés dans les Tableau II-9 et

Tableau II-10.

**Tableau II-9 : Modules élastiques de Cauchy pour le gyroïde**

Tests de traction uniaxial	Tests de traction biaxial	Tests de cisaillement
----------------------------	---------------------------	-----------------------

Coefficients de rigidité $C_{ij}$ (MPa)	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{13}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
Gyroïde	7489.02	7489.02	7489.02	3209.58	3209.58	3209.58	2139.72	2139.72	2139.72

**Tableau II-10 : Modules du second gradient du Gyroïde**

$A_{111}$	$A_{222}$	$A_{333}$	$A_{122}$	$A_{133}$	$A_{211}$	$A_{233}$	$A_{311}$	$A_{322}$
$2.24.10^{10}$	$2.24.10^{10}$	$9.77.10^9$	$6.4.10^9$	$2.79.10^9$	$6.4.10^9$	$1.39.10^9$	$6.4.10^9$	$6.4.10^9$
$A_{112}$	$A_{113}$	$A_{123}$	$A_{212}$	$A_{213}$	$A_{223}$	$A_{312}$	$A_{313}$	$A_{323}$
$1.12.10^{10}$	$4.88.10^9$	$1.39.10^9$	$3.2.10^9$	$1.39.10^9$	$4.88.10^9$	$3.2.10^9$	$1.39.10^9$	$1.39.10^9$

Afin de quantifier les effets du gradient de déformation sur le gyroïde, les longueurs internes dans les directions principales sont évaluées dans le Tableau II-11.

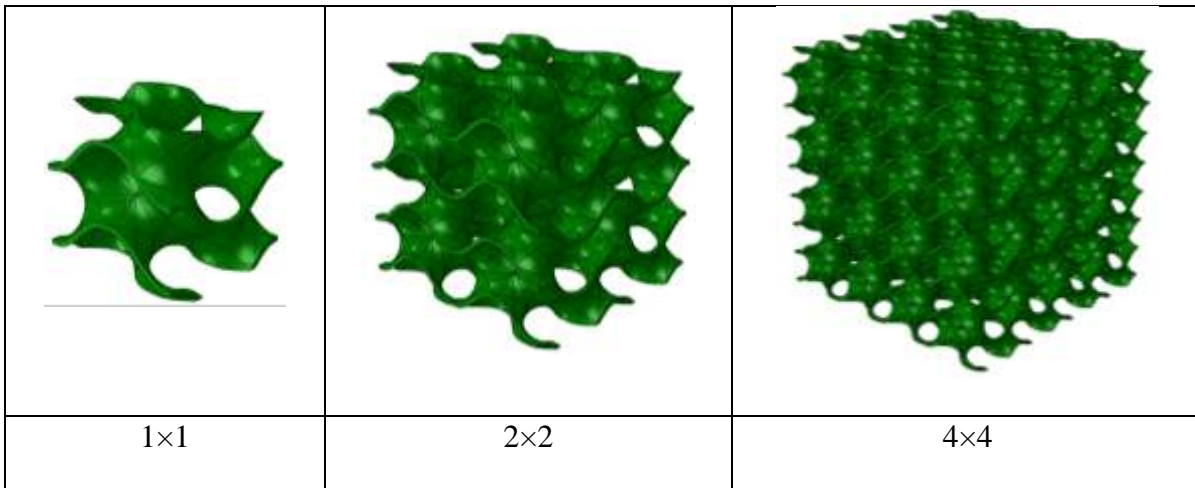
**Tableau II-11: Longueurs internes du Gyroïde**

Longueurs internes (mm)	$le_{11}$	$le_{22}$	$le_{33}$
Gyroïde UC	2053.82	2007.79	1736
Longueur de la cellule	3000 mm		

Des longueurs internes proportionnellement importantes sont trouvées, la plus grande représente 64% de la longueur de la cellule unitaire du gyroïde (indiquée Figure II-23), montrant ainsi que le gyroïde présente des effets de gradient de déformation importants, dus essentiellement aux modes de déformation en flexion de ses parois cellulaires.

Les modules effectifs du gyroïde sont calculés Figure II-24 pour plusieurs répétitions du nombre de cellules unitaires (CU) afin de tester la convergence des modules en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse.



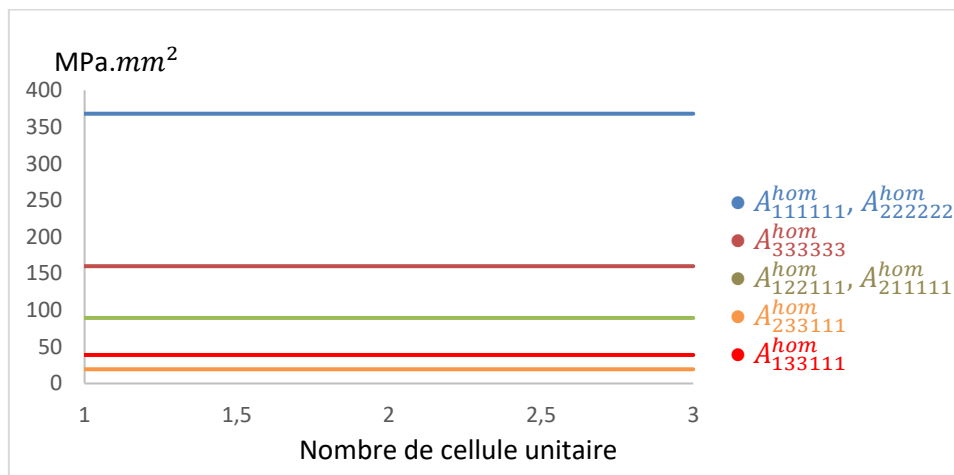


**Figure II-24: Fenêtre d'analyse du gyroïde de différentes tailles (nombre de répétitions de la cellule élémentaire)**

**Tableau II-12: Modules élastiques du second gradient pour différentes tailles de la fenêtre d'analyse**

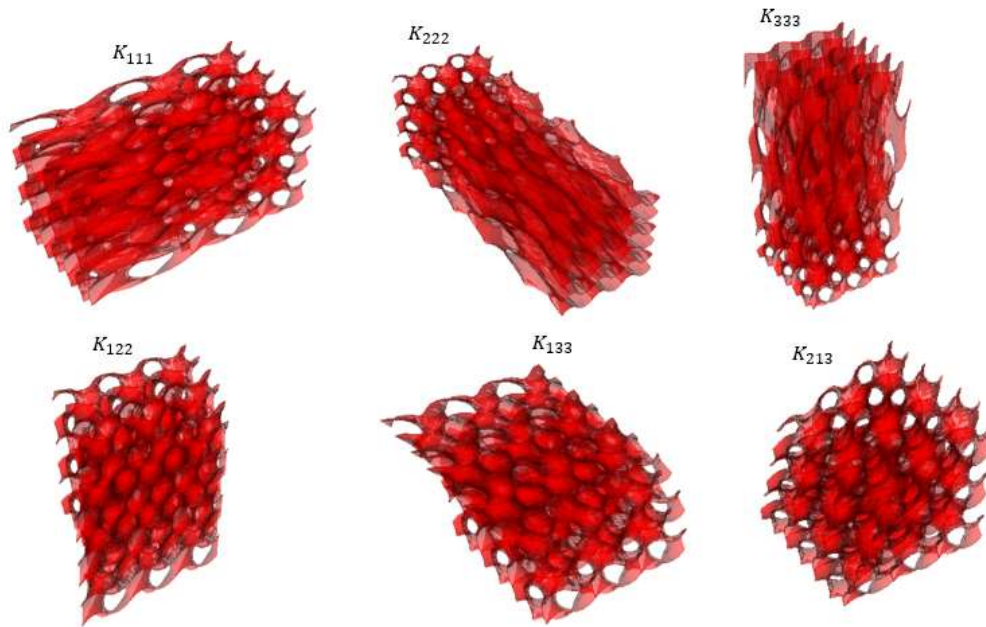
	$A_{111111}^{hom}$	$A_{222222}^{hom}$	$A_{333333}^{hom}$	$A_{122111}^{hom}$	$A_{133111}^{hom}$	$A_{211111}^{hom}$	$A_{233111}^{hom}$	$V_m$ ( $mm^3$ )	Porosité ( $mm^3$ )
N=1	368	368	160	89.4	38.9	89.4	19.4	2.73	24.27
N=2	368	368	160	89.4	38.9	89.4	19.4	21.19	194.87
N=3	368	368	160	89.4	38.9	89.4	19.4	73.9	655.1

Nous observons que tous les modules de second gradient de déformation restent stables lors de l'augmentation de la taille de cellule (Figure II-25), donc aucun effet de taille n'est observé.



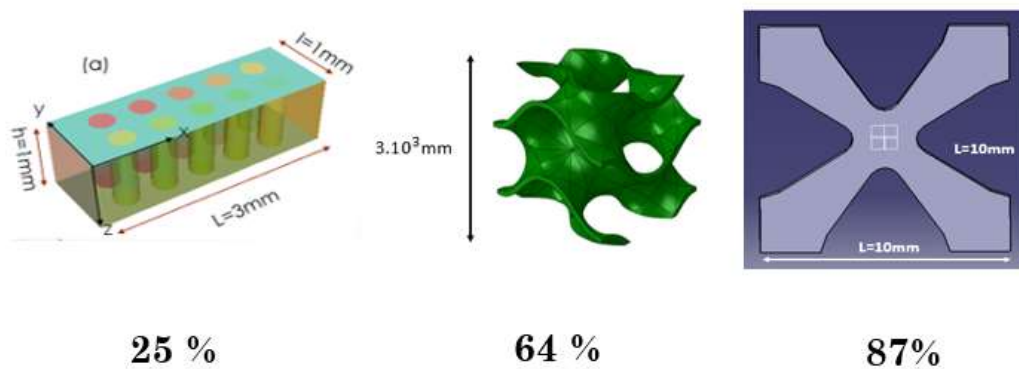
**Figure II-25: Convergence des modules du second gradient pour le gyroïde**

Certains modes de déformation associés au second gradient pour le gyroïde sont montrés sur la Figure II-26 pour une répétition de trois unités de la cellule unitaire dans le but de visualiser la déformée.



**Figure II-26: Modes de déformations du gyroïde au second gradient**

Pour résumer les résultats obtenus pour les trois microstructures considérées, à savoir le pantographe, les composites renforcés de fibres et le gyroïde, la longueur interne normalisée (par la longueur de la cellule élémentaire) est représentée pour ces microstructures en Figure II-27.



**Figure II-27 : Pourcentage de longueur interne par rapport à la longueur de la cellule élémentaire pour les trois microstructures étudiées**

Sur la base de cette mesure des effets du second gradient, le pantographe et le gyroïde sont sujets à des effets de gradient de déformation importants (leur longueur interne étant proche de la taille de la

cellule unitaire), alors que les composites à base d'inclusion présentent un effet de second gradient relativement moindre puisque leur longueur interne ne représente que 25% de la longueur de la cellule unitaire.

## 7. Sensibilité de la longueur interne extensionnelle du second gradient à la forme géométrique du pantographe

Pour faire suite aux résultats trouvés dans ce chapitre, une analyse de sensibilité de la longueur interne (Eq. 2.23 et 2.24) par rapport à la forme géométrique de la structure pantographique (Figure II-7) étudiée auparavant est faite dans cette section, afin de maximiser l'effet du second gradient.

Une structure pantographique paramétrée a été générée par le logiciel FreeFem++ écrit en langage C++. La structure est de symétrie tétragonale, compte tenu de la symétrie par rapport aux axes horizontaux, verticaux, ainsi que relativement aux bissectrices principales alignées avec les fibres. Ces symétries permettent de restreindre l'étude de sensibilité à la forme au sein d'un huitième (partie supérieure droite) de la cellule unitaire (Figure II-28).

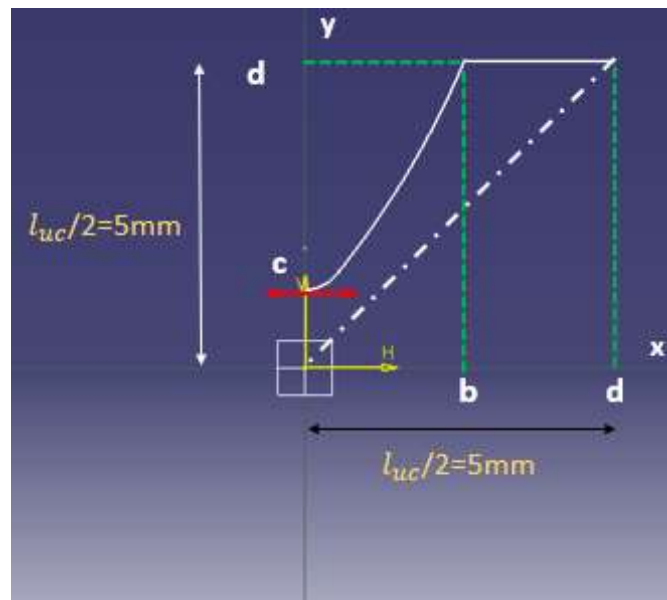


Figure II-28 : Tracé de la forme d'un huitième de la structure pantographique

Les paramètres géométriques de forme de la structure sont la courbure et la longueur de l'arrête horizontale, soit les variables  $b$  et  $c$  respectivement. Une tangente horizontale doit être présente dans la courbure à la position  $X=0$  (eq 4.45) compte tenu des symétries, afin d'avoir une zone de jonction avec continuité des tangentes. Un polynôme du second degré est introduit pour modéliser la forme de la zone de courbure, l'équation de la forme et les conditions aux limites nécessaires pour identifier les coefficients du polynôme sont :

$$Y = \gamma \times X^2 + \beta \times X + \alpha \quad (2.42)$$

$$Y=d ; X=b; \text{ d'où } d = \gamma \times b^2 + \beta \times b + \alpha \quad (2.43)$$

$$Y=c; X=0; c = \alpha \quad (2.44)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times \gamma \times X + \beta = 0 \text{ en } X = 0 \quad (2.45)$$

La solution obtenue est caractérisée par les coefficients suivants :

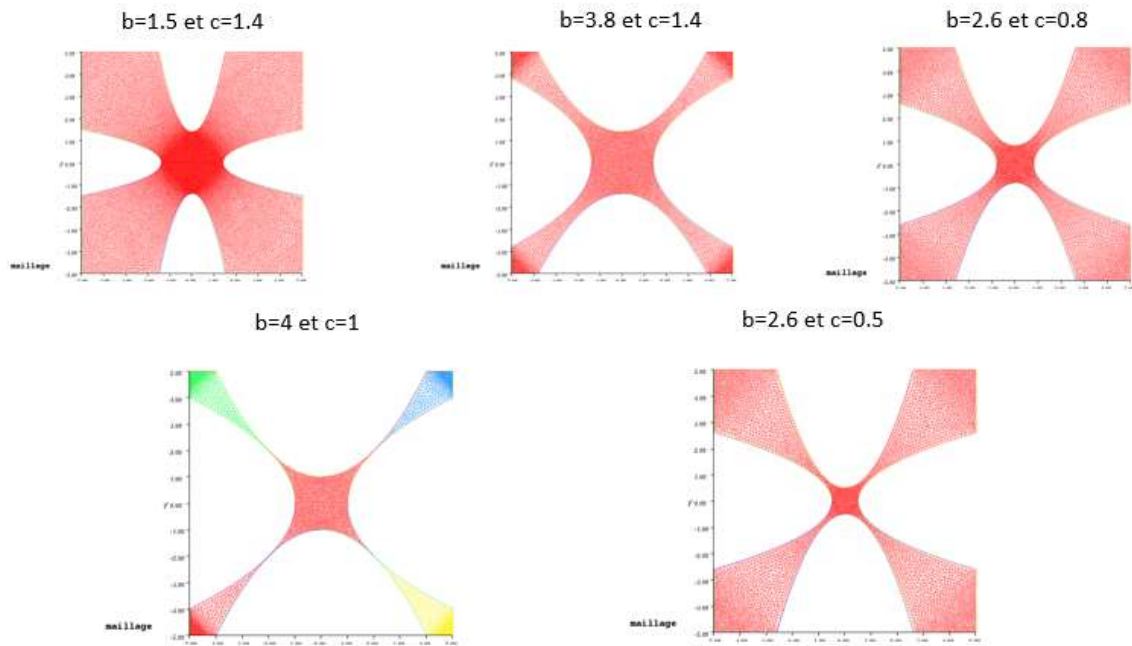
$$\beta = 0 ; \alpha = c ; \gamma = \frac{d-c}{b^2} \quad (2.46)$$

L'équation finale de la forme dépend des paramètres ( $b, c, d$ ) selon :

$$Y = \left( \frac{d-c}{b^2} \right) \times X^2 + c \quad (2.47)$$

La longueur de la cellule unitaire est toujours la même quel que soit la longueur de l'arrête horizontale ou la forme de la courbure, soit  $l_{uc}/2 = 5\text{mm}$  : en appliquant les symétries du problème, on obtient une cellule unitaire de pantographe de taille linéaire  $l_{uc} = 10\text{mm}$ .

En variant  $b$ , on modifie la longueur de l'arrête horizontale (lorsque  $b$  augmente la longueur de cette arrête diminue), et la variation de  $c$  détermine la courbure via la hauteur du point d'intersection du segment vertical interne selon l'axe  $Y$ . Afin de mieux comprendre l'effet de ces deux paramètres sur la forme de la cellule unitaire du pantographe, nous avons réalisé un schéma (Figure II-29) qui représente différentes cellules pour différents jeux de paramètres.



**Figure II-29 : Cellules unitaires du pantographe pour différent jeu de paramètres**

La Figure II-29 montre que l'augmentation de  $b$  conduit à une diminution de longueur des arrêtes horizontales et verticales par symétrie, et par voie de conséquence aussi de l'épaisseur des fibres du pantographe. La zone de jonction diminue également lorsque  $c$  diminue.

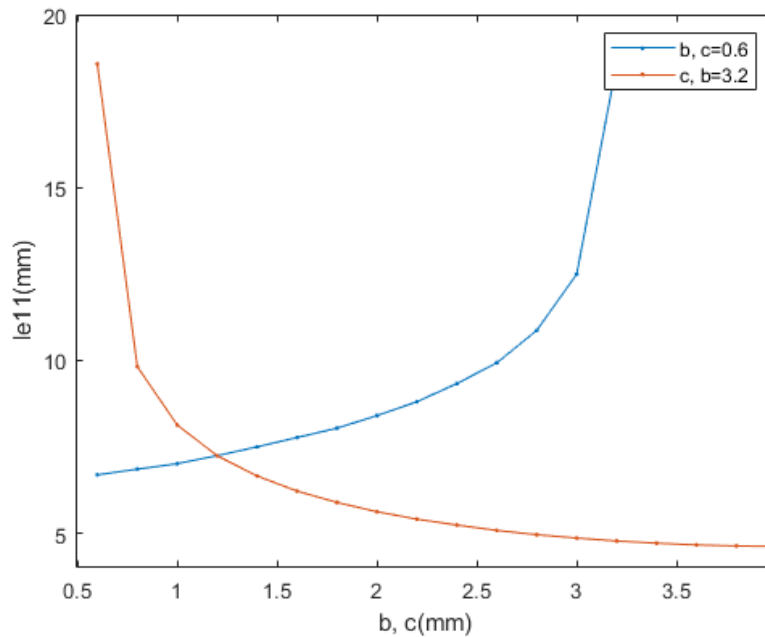
Les contraintes géométriques pour réaliser cette forme de pantographe sont les suivantes :

$$b_{max} \leq 4mm, \text{ quand } c_{min} \geq 1mm$$

$$b_{max} \leq 3.2mm, \text{ quand } c_{min} \geq 0.6mm \quad (2.48)$$

Au-delà de ces conditions, la forme géométrique de ce pantographe ne peut pas être fabriquée par impression 3D.

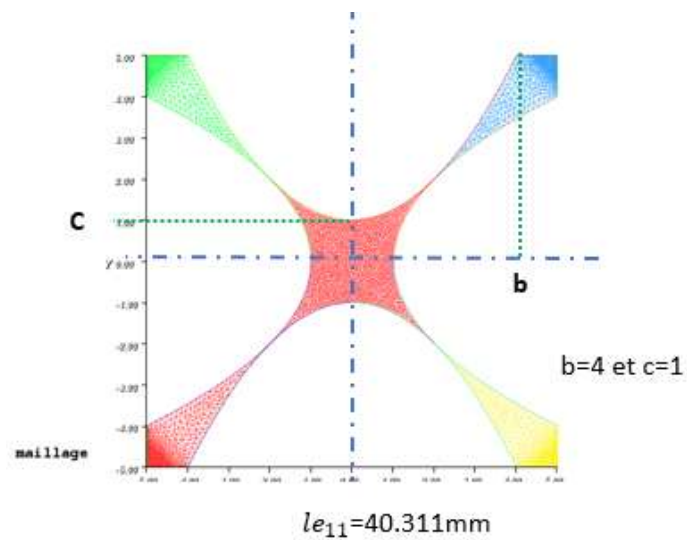
La figure suivante montre l'effet de la géométrie sur la longueur interne  $le_{11}$ , en modifiant de façon indépendante les paramètres de forme  $b$  et  $c$ .



**Figure II-30 : Evolution de la longueur interne  $le_{11}$ , en fonction de b et c.**

La (Figure II-30) représente les deux courbes de variation de la longueur interne en fonction de chacun des paramètres b et c, le second paramètre étant fixé. Nous observons l'existence de plusieurs situations qui donnent une longueur interne qui dépasse la longueur de la cellule  $l_c=10\text{mm}$  : selon les deux courbes obtenues en Figure II-30, la longueur interne maximale trouvée est  $le_{11} = 18.8$ , soit 180.8 % de la longueur de la cellule lorsque  $c=0.6$ ,  $b=3.2$ .

Afin de déterminer une forme plus optimale, une double boucle imbriquée a été implémentée pour trouver la longueur interne maximale, en prenant en compte les limitations géométriques sur les deux paramètres b et c (eq. 4.48). La Figure II-31 présente la forme géométrique optimale obtenue, de longueur interne  $le_{11} = 40.31\text{mm}$ , soit 4 fois la longueur de la cellule unitaire  $l_c=10\text{mm}$ , pour  $b=4$  (soit une longueur des arrêtes horizontales égale à 1mm) et  $c=1\text{mm}$  (la zone de courbure commence à l'ordonnée  $y=1\text{mm}$ ). La forme représentée Figure II-31 définit un cas extrême en termes de limitations géométriques : au-delà de ces valeurs, la géométrie n'est pas réalisable car les courbures se croisent.



**Figure II-31 : Forme du pantographe qui représente le maximum d'effet du second gradient**

Ce type de structure montre une déformation en flexion au sein de la cellule élémentaire (Figure II-12).

Il faut également prendre en compte les contraintes géométriques du procédé de fabrication des éprouvettes (impression 3D, découpe par jet d'eau ou par laser, ...).

Dans les perspectives de cette thèse, des études d'optimisation topologiques peuvent être envisagées, mais qui dépassent le cadre de l'optimisation de forme et seraient susceptibles d'aboutir à d'autres architectures de milieux à forts effets du second gradient.

## 8. Discussion et conclusion

Ce chapitre propose une méthode d'homogénéisation au premier gradient de déformation pour des matériaux hétérogènes dans un contexte 3D pour des microstructures non projetables en 2D, dont il existe très peu d'exemples dans la littérature. La formulation 3D à gradient de déformation développée s'avère nécessaire pour les microstructures qui ont une véritable géométrie 3D, telle que la distribution spatiale des constituants influence le comportement macroscopique dans les trois directions de l'espace.

La méthode d'homogénéisation formulée remédie à une limitation importante des travaux existants de la littérature consacrée à l'homogénéisation d'ordre supérieur de matériaux hétérogènes : la non convergence des modules de gradient de déformation avec la taille de la cellule de base. Dans les travaux de (C. Huet, 1990; T. Kanit, et al, 2003; S. Forest., Trinh, 2011), (V. Kouznetsova, et al, 2002), (I. Goda., et al, 2016), les auteurs utilisent des conditions aux limites quadratiques cinématiques pour le déplacement microscopique imposé sur la cellule unitaire pour capturer les modules d'ordre supérieur, mais ils n'intègrent pas la partie fluctuante du déplacement qui corrige la différence entre le continuum à gradient de déformation homogène postulé et la réponse de la microstructure hétérogène initiale. Par conséquent, les modules à gradient de déformation calculés montrent une dépendance prononcée à la taille et même parfois ne convergent pas vers des valeurs stables avec le nombre de répétitions de la cellule unitaire. Notre formulation est basée sur un principe variationnel et le déplacement microscopique rend compte à la fois de la contribution polynomiale homogène incorporant les variables cinématiques macroscopiques et d'un terme fluctuant solution de deux problèmes aux limites de cellules unitaires séquentiels. La méthode à gradient de déformation développée montre une indépendance des modules effectifs par rapport la taille de la cellule unitaire et à la dimension absolue de la cellule unitaire en vertu d'une normalisation des modules effectifs du second gradient par le carré du nombre de cellules unitaires et en tenant compte des termes de correction reflétant les interactions entre les cellules unitaires voisines.

Les analyses effectuées ont montré que les paramètres de longueur interne sont fortement dépendants des propriétés géométriques de la microstructure, de la fraction d'inclusion de seconde phase, alors que le rapport d'élasticité entre la matrice et l'inclusion a un moindre impact sur les longueurs internes, qui convergent pour un fort contraste de modules élastiques. Pour faibles fractions volumiques de renfort et de contraste mécanique, la formulation classique du premier gradient est suffisante pour décrire le comportement macroscopique du composite.



En termes de perspectives, la méthode d'homogénéisation proposée peut potentiellement traiter une grande diversité de composites 2D et 3D réguliers et de matériaux architecturés pour lesquels des modèles de gradient de déformation pourront être identifiés lors de futurs développements.

# Références

Mindlin, R.D., Eshel, N.N. (1968). On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int J Solids Struct*,4(1) 109-124. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90036-X)

Lim, Zhang & Reddy, 2015, A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 78, May 2015, Pages 298-313.

Ayad, M., Karathanasopoulos, Ganghoffer J.F., Lakiss, H., 2020. Higher-gradient and micro-inertia contributions on the mechanical response of composite beam structures 154, 103318. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103318>.

J.F. Ganghoffer, H. Reda, A variational approach of homogenization of heterogeneous materials towards second gradient continua, *Mechanics of Materials*, 2021.

Hill, R., 1966. Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip. *J. Mech. Phys. Solid.* 14, 95–102.

Hill, R., 1967. The essential structure of constitutive laws of metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solid.* 15, 79–95.

Truesdell, C., Noll, W., 1965. The nonlinear field theories of mechanics. In: Flugge, S. (Ed.), *Handbuch der Physik*, vol. III/3. Springer-Verlag, Berlin.

Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. *Théorie des corps déformables*. Herman et Fils, Paris.

Eringen, A.C., Suhubi, E.S., (1964). Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I. *International Journal of Engineering Science*, 2 (2) 189–203, 389-40. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90004-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90004-7)

- P. Germain. (1973). The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : Microstructure. SIAM J. Appl. Math., 25(3) 556–575, 1973. <https://doi.org/10.1137/0125053>.
- Ben-Amoz, M., (1976). A dynamic theory for composite materials. Z. Angew. Math. Phys. 27 (1), 83– 99. <https://doi.org/10.1007/BF01595244>.
- Forest, S., Sab, K., (1998). Cosserat overall modelling of heterogeneous materials. Mech. Res. Commun. 25(4), 449–454. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(98\)00059-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(98)00059-7).
- Forest, S., Pradel, F., Sab, K., (2001). Asymptotic analysis of heterogeneous Cosserat media. Int. J. Solids Struct. 38 (26-27), 4585–4608. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00295-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00295-X).
- Trinh, D. K., Janicke, R., Auffray, N., Diebels, S., Forest, S., (2012). EVALUATION OF GENERALIZED CONTINUUM SUBSTITUTION MODELS FOR HETEROGENEOUS MATERIALS, International Journal for Multiscale Computational Engineering, 10 (6), 527-549, DOI: 10.1615/IntJMultCompEng.2012003105.
- Tran, T.-H., Monchiet, V., Bonnet, G., (2012). A micromechanics-based approach for the derivation of constitutive elastic coefficients of strain-gradient media. Int. J. Solids Struct. 49, 783–792. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.11.017>.
- Rahali, Y., Giorgio, I., Ganghoffer, J.-F. , dell'Isola, F., (2015). Homogenization à la Piola produces second gradient continuum models for linear pantographic lattices. Int. J. Eng. Sci. 97, 148–172. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.10.003>.
- P Seppecher, JJ Alibert, dell'Isola Francesco ,Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions, Journal of Physics: Conference Series 319 (1), 012018, 2011.
- Bacigalupo, A., Gambarotta, L., (2014). Homogenization of periodic hexa-and tetrachiral cellular solids. Compos. Struct. 116, 461–476. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.033>.

- Berkache, K., Deogekar, S., Goda, I., Picu, R., Ganghoffer, J.-F., (2017). Construction of second gradient continuum models for random fibrous networks and analysis of size effects. *Compos. Struct.* 181, 347–357. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.08.078>.
- Khalil Refai, Charles Brugger, Marco Montemurro, and Nicolas Saintier, (2019), Multi-axial fatigue behaviour of titanium periodic cellular structures produced by Selective Laser Melting (SLM), *MATEC Web of Conferences* 300, 03004 (2019).
- Bensoussan, A., Lions, J. -L. and Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam.
- Sanchez-Palencia, E., (1980). *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8>.
- Kröner, E., (1968). Elasticity theory of materials with long range cohesive forces *International Journal of Solids and Structures*, 3(5), 731-742. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(67\)90049-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90049-2).
- Goda, I., Ganghoffer, J.-F., (2016). Construction of first and second order grade anisotropic continuum media for 3D porous and textile composite structures. *Compos. Struct.* 141, 292–327. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.01.061>.
- Madeo, A., Della Corte, A., Greco, L., Neff, P., 2015. Wave propagation in pantographic 2D lattices with internal discontinuities. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, 64(3S), 325–330.
- Germain, P. (1973). The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 25, 556–575.
- Papanicolopoulos, S.A., Zervos, A. (2010). Continua with microstructure: Part II: second-gradient theory.
- Y. Rahali, I. Giorgio, J.F. Ganghoffer, F. dell'Isola. Homogenization à la Piola produces second gradient continuum models for linear pantographic lattices *Int. J. Engng Sci.*, 97, (2015) 148–172.

Auffray, N., Bouchet, R., Brechet, Y., (2010). Strain gradient elastic homogenization of bidimensional cellular media. *Int. J. Solids Struct.* 47 (13), 1698–1710. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.03.011>.

Sadik L. Omairey, Peter D. Dunning, Srinivas Sriramula, (2018), Development of an ABAQUS plugin tool for periodic RVE homogenization, *Engineering with Computers* (2019) 35:567–577 <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0616-4>.

Li, J., Zhang, X.-B., 2013. A numerical approach for the establishment of strain gradient constitutive relations in periodic heterogeneous materials. *Eur. J. Mech. Solid.* 41, 70–85.

Howes FA, Whitaker S. The spatial averaging theorem revisited. *Chemical Engineering Science* 1985, 40, Issue 8, 1387-1392.

Wood, B.D., Technical Note: Revisiting the Geometric Theorems for Volume Averaging, 2013.

D.-J. Yoo. Advanced porous scaffold design using multi-void triply periodic minimal surface models with high surface area to volume ratios, *Int. J. Precis. Eng. Manuf.*, 15 (2014), pp. 1657-1666.

D.W. Abueidda, R.K. Abu Al-Rub, A.S. Dalaq, D.-W. Lee, K.A. Khan, I.M. Jasiuk. Effective conductivities and elastic moduli of novel foams with triply periodic minimal surfaces. *Mech. Mater.*, 95 (2016), pp. 102-115

Al-Ketan O., Abu Al-Rub R.K. Multifunctional Mechanical Metamaterials Based on Triply Periodic Minimal Surface Lattices. *Adv. Eng. Mater.* 2019; 21:1900524. doi: 10.1002/adem.201900524.

Afari D., Wits W.W. The utilization of selective laser melting technology on heat transfer devices for thermal energy conversion applications: A review. *Renew. Sustain. Energy Rev.* 2018; 91:420–442.

S. Qu, J. Ding, and X. Song. Achieving Triply Periodic Minimal Surface Thin-Walled Structures by Micro Laser Powder Bed Fusion Process. *Micromachines* (Basel). 2021 Jun; 12(6): 705.

I. Maskery, N.T. Aboulkhair, A.O. Aremu, C.J. Tuck, I.A. Ashcroft. Compressive failure modes and energy absorption in additively manufactured double gyroïde lattices. *Addit. Manuf.*, 16 (2017), pp. 24-29.

G.S. Jung, J. Yeo, Z. Tian, Z. Qin, M.J. Buehler. Unusually low and density-insensitive thermal conductivity of three-dimensional gyroid graphene. *Nanoscale*, 9 (2017), pp. 13477-13484.

Huet, C., 1990. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *J. Mech. Phys. Solid.* 38 (6), 813–841.

Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., Jeulin, D., 2003. Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *Int. J. Solid Struct.* 40 (13–14), 3647–3679.

Forest, S., Trinh, D., 2011. Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods. *ZAMM-J. Appl. Math. Mech.* 91 (2), 90–109.

Geers, M., Kouznetsova, V., Brekelmans, W., 2001. Gradient-enhanced computational homogenization for the micro-macro scale transition. *J. Phys. IV* 11 (PR5), r5–145.

### **III. Méthode d'homogénéisation vers des milieux continus isotropes et anisotropes du second gradient en grandes déformations**

Dans ce chapitre une méthode d'homogénéisation en grandes déformations vers des milieux continus du second gradient anisotropes est décrite. Cette méthode repose sur un principe variationnel incrémental et un schéma incrémental est suivi afin de prédire la loi de comportement homogénéisée à chaque incrément de charge appliquée. Une structure de type pantographe a été choisie comme géométrie de référence pour décrire l'anisotropie et prendre en compte les groupes de symétrie dans l'énergie de déformation à l'échelle macroscopique du milieu continu de substitution. La linéarisation du problème non linéaire et l'approximation par éléments finis de la matrice tangente consistante sont intégrées dans la résolution des problèmes de cellule et la construction de la réponse du milieu de substitution qui obéit à une élasticité nonlinéaire du second gradient.

## Table des matières :

III. Méthode d'homogénéisation vers des milieux continus isotropes et anisotropes du second gradient en grandes déformations .....	101
1. Introduction.....	104
2. Méthode d'homogénéisation continue en grandes déformations incrémentales .....	110
2.1. Problème microscopique .....	110
2.2. Homogénéisation en grandes déformations pour le milieu de Cauchy.....	112
2.3. Évaluation des modules effectifs du second gradient sous forme incrémentale .....	115
3. Matériaux hyperélastiques .....	120
3.1. Théories de l'hyperélasticité.....	121
3.2. Modèles hyperélastiques isotropes .....	123
3.3. Matériaux hyperélastiques anisotropes.....	124
3.4. Modèle hyperélastique au second gradient.....	131
4. Linéarisation et discrétisation par élément finis .....	133
4.1. Formulation variationnelle.....	134
4.2. Linéarisation du principe du travail virtuel .....	135
4.3. Approximation par éléments finis de la description spatiale de l'élasticité en grandes déformations.....	137
5. Modèle anisotrope d'ordre supérieur avec prise en compte de la rigidité en extension et flexion-cisaillement : Application au pantographe.....	138
5.1. Application en extension biaxial .....	140
5.2. Application en cisaillement .....	143



6. Discussion et conclusion .....	146
Liste de références .....	147

## Liste des figures :

Figure III-1 : Matériaux architecturé : (a) Structure hexagonale ; (b), (c) Structures pantographiques ; (d), (e) Architectures hexachirales et anti-tétrachirales ; (f) Nid d'abeilles rentrant ; (g) Système 4 étoiles ; (h) Grille losange ; (i) Pointe de flèche .....	106
Figure III-2 : Structure pantographique périodique et la cellule unité.....	108
Figure III-3 : Micro-modèle d'une plaque pantographique avec un détail des trois ressorts de rotation (F. dell'Isola et al, 2019).....	109
Figure III-4 : Géométrie du tissu imprimé en 3D (F. dell'Isola et al, 2015) .....	109
Figure III-5 : Homogénéisation de matériaux composites.....	111
Figure III-6 : Les quatre structures de base d'un motif de type pantographe. a : réseau Carré, b :	126
Figure III-7 : Structure rhombique illustrée par un pantographe .....	127
Figure III-8 : Schéma du problème non linéaire incrémental .....	134
Figure III-9 : Itération de Newton-Raphson par linéarisation.....	136
Figure III-10 : Le pantographe dans la configuration déformée .....	141
Figure III-11 : Tenseurs de structures et leur dual .....	142

## Liste des tableaux :

Tableau III-1 : Invariants indépendants du milieu de Cauchy et du second gradient pour la structure parallélogramme.....	145
Tableau III-2 : Invariants indépendants du milieu de Cauchy et du second gradient pour la structure rhombique .....	146

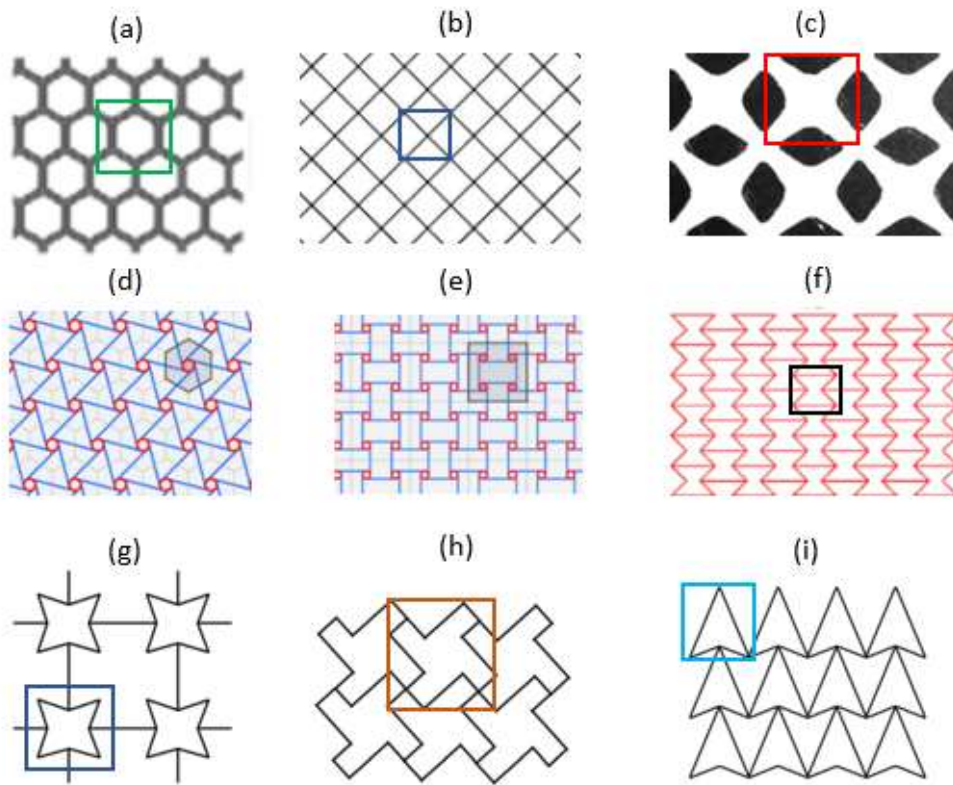
## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous exposons une théorie d'homogénéisation continue incrémentale en grandes déformations dans le cadre de l'élasticité nonlinéaire du second gradient. Un principe variationnel incrémental associé à schéma incrémental permettra de déterminer le comportement effectif à chaque incrément du chargement cinématique appliqué sur la cellule unitaire, et d'évaluer les modules tangents consistants par linéarisation des problèmes de cellules et de la formulation du comportement homogénéisé. Par la suite, une étude de convergence des propriétés effectives avec différents pas d'incrément sera effectuée. Des modèles hyperélastiques pour les matériaux incompressibles seront utilisés pour le matériau de base, notamment le modèle d'Ogden (Ogden, R.W, 1972), et le modèle de Ciarlet-Geymonat (P. G. Ciarlet and G. Geymonat, 1982).

Ce chapitre présente en détail la formulation théorique de la méthode d'homogénéisation utilisée, cette dernière repose sur le lemme de Hill écrit sous forme incrémentale, qui pose une équivalence entre la moyenne de la variation de l'énergie microscopique et de la variation de l'énergie macroscopique, assortie d'un principe de minimisation de l'énergie potentielle parmi toutes les fluctuations du déplacement admissible. Ce travail théorique sera traduit par un schéma numérique implémenté dans le code Freefem++.

Nous traitons des problèmes d'homogénéisation du second gradient de matériaux architecturés (Figure III-1) en grandes transformations. Ces matériaux ont des rigidités spécifiques sur mesure qui sont obtenues en modifiant la topologie de la cellule élémentaire, en fonction des propriétés effectives recherchées (elles-mêmes dépendant des applications) et des modes de déformation appliqués. On peut citer parmi ces métamatériaux, les matériaux auxétiques (Y. Prawoto, 2012 ; N. Karathanasopoulos et al., 2018) qui se caractérisent par un coefficient de Poisson négatif et qui ont une forte rigidité en cisaillement, ainsi que les matériaux chiraux, avec notamment les structures hexachirales, chiral diamond, tétrachiral (N. Karathanasopoulos et al., 2018), et d'autres classes de matériaux architecturés comme les structures en nid d'abeilles rentrantes (Figure III-1).

Dans ce travail, l'intérêt est focalisé spécifiquement sur les structures de type pantographe comme exemples de métamatériaux présentant un comportement du second gradient prononcé ; ces structures comportent des 'fibres' non orthogonales mais équivalentes en termes de propriétés mécaniques. Ces structures sont très connues par leurs comportements prononcés du second gradient (F. dell'Isola, et al, 2015) ; elles sont le siège de très grandes déformations tout en restant dans le régime élastique, (F. dell'Isola, et al, 2016 ; G. Milton, 2017). Aussi elles sont très résistantes aux phénomènes d'endommagement (V.A. Eremeyev, et al, 2016) et présentent un comportement mécanique macroscopique robuste vis-à-vis des perturbations de leur microstructure et de leurs propriétés microscopiques (A. Bertram, et al, 2016). Les structures pantographiques ont un rapport résistance/poids très important (L. Russo, 2013) et un comportement au dommage prévisible. Les structures pantographiques sont avérées avoir des propriétés très prometteuses dans la propagation d'ondes, par exemple pour réaliser des guides d'ondes efficaces (A. Madeo et al, 2016). En contrepartie de ces performances mécaniques élevées, elles possèdent des propriétés physiques qui sont dictées de manière critique par leur géométrie au niveau microscopique.



**Figure III-1 : Matériaux architecturé :** (a) Structure hexagonale ; (b), (c) Structures pantographiques ; (d), (e) Architectures hexachirales et anti-tétrachirales ; (f) Nid d'abeilles rentrant ; (g) Système 4 étoiles ; (h) Grille losange ; (i) Pointe de flèche

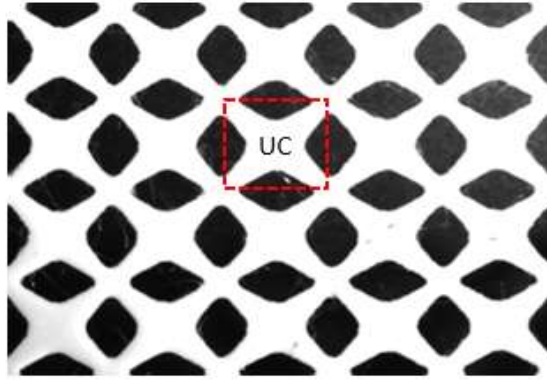
Nous développons dans ce chapitre des modèles hyperélastiques en grandes déformations pour décrire la réponse de structures architecturées, avec comme objet d'étude principal la structure pantographique. Ces types de modèles nécessitent un matériau mou, dans cette étude nous avons choisi un élastomère thermoplastique (TPE). Ces matériaux sont généralement connus par leurs caractéristiques hyperélastiques associées à un comportement élastique sur une large plage de déformations, montrant ainsi une relation non linéaire entre les contraintes et les déformations. L'utilisation de ces matériaux élastomères est de plus en plus fréquente dans les applications industrielles dans plusieurs domaines de l'industrie, tels que l'aéronautique, l'automobile, la biomécanique et le génie civil. Ces types de matériaux présentent des aspects de comportement spécifiques, soit principalement l'hyperélasticité pour des régimes de sollicitations statiques, mais

aussi l'hyper-visco-élasticité pour des sollicitations dynamiques, et des couplages thermique – élasticité modélisés par la thermomécanique.

En général, le comportement de matériau architecturés peut-être décrit par une fonction densité d'énergie de déformation d'arguments cinématiques appropriés reflétant leur anisotropie. Le matériau TPE se comporte comme le caoutchouc, et plusieurs modèles hyperélastiques peuvent être élaborés a priori pour décrire la relation contraintes-déformations, dont parmi eux le modèle d'Ogden (R.W. Ogden, 1972) qui est écrit en fonction des rapports d'élongation principaux.

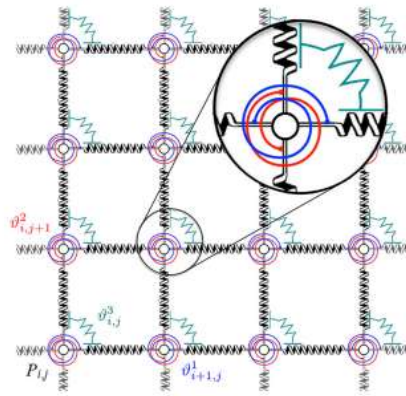
Dans ce chapitre, l'objectif est d'élaborer une méthode d'homogénéisation du second gradient en grandes transformations de matériaux architecturés anisotropes mous. En guise d'application, le potentiel hyperélastique de la structure pantographique sera formulé en considérant la symétrie matérielle de la microstructure (chaque microstructure périodique est caractérisée par son groupe de symétrie matérielle), et son anisotropie. Le potentiel d'un matériau anisotrope s'exprime de façon générale comme une fonction isotrope du tenseur de Cauchy-Green gauche, auquel s'ajoutent des tenseurs de structure (J.P. Boehler , 1978) ; le même principe est ici appliqué pour la formulation d'une loi de comportement anisotrope à gradient de déformation.

Dans ce chapitre, l'intérêt est focalisé sur la modélisation des milieux hyperélastiques anisotropes à gradient de déformation, et ce plus spécifiquement pour le pantographe qui est sélectionné comme une structure sujette à de forts effets de gradient de déformation (Figure III-2).



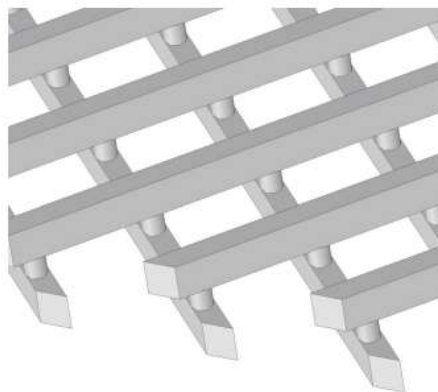
**Figure III-2 : Structure pantographique périodique et la cellule unité**

Le pantographe est un exemple typique bien connu d'une structure ne présentant pas ou très peu d'élasticité au premier ordre, mais au contraire sa réponse élastique est du second gradient lorsqu'elle est considérée comme un milieu continu ; il s'agit donc d'un continuum du second gradient sans ou avec très peu d'élasticité de Cauchy. Plusieurs méthodes sont possibles pour modéliser ce genre de structures, dont la méthode d'homogénéisation discrète basée sur la théorie des poutres (Y. Rahali et al, 2015), qui est une technique d'homogénéisation asymptotique pour construire le continuum du second gradient effectif basé sur des expansions asymptotiques des variables cinématiques discrètes en fonction de la macro-déformation et du gradient de macro-déformation imposés sur une cellule de base de la structure. L'énergie de déformation est composée de trois termes représentant les différentes formes de déformation, tels que, l'extension, la flexion et le cisaillement. On trouve également dans la littérature un modèle de ressorts développé par (F. dell'Isola et al, 2019), ou une approche discrète de type Hencky développée pour les structures pantographiques (F. dell'Isola et al, 2016). L'extension des fibres est modélisée par la connexion des particules adjacentes avec des ressorts de traction (Figure III-3), voir (F. dell'Isola et al, 2019).



**Figure III-3 : Micro-modèle d'une plaque pantographique avec un détail des trois ressorts de rotation (F. dell'Isola et al, 2019).**

De plus, à chaque nœud du treillis, des ressorts en rotation, qui sont déformés lorsque l'angle couvert par deux ressorts de traction contigus est modifié, sont introduits (F. dell'Isola et al, 2019).



**Figure III-4 : Géométrie du tissu imprimé en 3D (F. dell'Isola et al, 2015)**

Le type de pantographe choisi dans cette étude est représenté figure 3.2 ; cette forme de pantographe est obtenue après une projection et simplification du modèle 3D. Dans notre cas d'étude, la structure pantographique est modélisée comme un milieu continu (Figure III-2) ; elle est de symétrie rhombique, pour laquelle les fibres sont équivalentes en termes de propriétés mécaniques, et non orthogonales. La zone de jonction entre les fibres est affinée afin de favoriser les effets de second gradient ; ce type de pantographe a montré un effet de second gradient très important par rapport à d'autres matériaux tels que des composites renforcés par des fibres cylindriques et le

gyroïde, comme l'a montré le chapitre précédent, voir également (A. Lahbazi et al, 2022). Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, des conditions aux limites de type second gradient sont appliquées sur le pantographe ce qui génère un effet de flexion à l'échelle de la cellule élémentaire (A. Lahbazi et al., 2022). Dans ce qui suit, nous généralisons le propos et abordons l'homogénéisation du second gradient en grandes transformations, en commençant par rappeler le cadre plus simple et connu de l'homogénéisation nonlinéaire du premier gradient.

## **2. Méthode d'homogénéisation continue en grandes déformations incrémentales**

L'équation d'équilibre pour un milieu élastique nonlinéaire à l'échelle microscopique dans un domaine tridimensionnel s'écrit sous la forme suivante, où  $\mathbf{X}$  désigne la position dans la configuration de référence non déformée à l'instant initial :

$$\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + f_i = 0 \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{P}$  le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff dit nominal, et  $\mathbf{f}$  la force volumique. La forme faible de l'équation d'équilibre (3.1) s'exprime comme suit :

$$\int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) : \nabla_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{S}} : \partial \bar{\mathbf{E}} \, d\Omega = \int_{\Omega_0} \bar{\mathbf{B}} \cdot \delta \mathbf{u} + \int_{\Omega_{0\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dr \quad \forall \delta \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega_0) \quad (3.2)$$

où  $\bar{\mathbf{t}}$  est le vecteur traction appliquée sur une partie du bord du domaine, noté  $\Omega_{0\sigma}$ .

L'homogénéisation de problèmes d'hyperélasticité passe par une écriture incrémentale qui est exposée dans ce qui suit.

### **2.1. Problème microscopique**

Soit  $\Omega_\mu^0$  un élément de volume représentatif (VER) à l'échelle microscopique d'un voisinage d'un macro point de position  $\mathbf{X}$  dans un repère cartésien. Nous supposons que  $\Omega_\mu^0$  a une taille caractéristique beaucoup plus petite que la dimension caractéristique de la macrostructure, afin de que la condition de séparation des échelles soit satisfaite. A la suite des définitions similaires de la



section précédente, et en désignant par  $(\cdot)_{\mu}$ , les microquantités, nous supposons l'existence d'une fonction d'énergie de déformation  $W_{\mu}(F)$  telle que les contraintes nominales microscopiques sont exprimées par le gradient microscopique de la transformation :

$$P = \frac{\partial w(F)}{\partial F}, \text{ avec } P = F \cdot S \text{ et } F = \nabla_x u_{\mu} + I \quad (3.3)$$

où  $S$  est le second tenseur de Piola-Kirchoff, qui est symétrique.

Dans le domaine microscopique (Figure III-5), la position actuelle des points matériels après déformée est la superposition d'un champ moyen et d'un champ de fluctuation  $\tilde{u}(\mathbf{X})_{\mu}$  induit par la présence d'hétérogénéités, soit :

$$\delta x_{\mu} = \delta \bar{F} \cdot X_{\mu} + \delta \tilde{u}(X_{\mu}) \quad (3.4)$$

Cette décomposition permet d'exprimer le gradient de déformation à l'échelle microscopique de la façon suivante :

$$F = \bar{F} + \delta \tilde{u}(X_{\mu}) \otimes \nabla_X \quad (3.5)$$

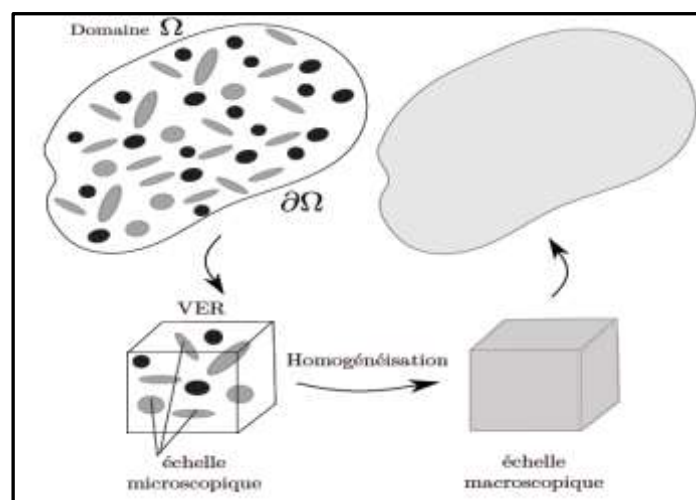


Figure III-5 : Homogénéisation de matériaux composites

Par la suite, l'équation d'équilibre à l'échelle microscopique sur le VER  $\Omega_\mu^0$  peut s'écrire sous forme incrémentale comme suit :

$$\int_{\Omega_\mu^0} \Delta P_n(t) \nabla_X (\delta u) d\Omega = \int_{\Omega_\mu^0} \Delta f_n \delta u d\Omega + \int_{\Omega_\mu^0} \Delta t_n \delta u dr \quad \forall \delta u \in H_0^1(\Omega_\mu^0) \quad (3.6)$$

L'équation constitutive microscopique du matériau est la suivante, dans laquelle  $(C_{T,\mu_{ijkl}})_{n+1}$  désigne le tenseur des modules tangents microscopiques :

$$\delta S_{ij} = C_{T,\mu_{ijkl}} \delta E_{kl} \quad (3.7)$$

$$\text{Avec } S = F^{-1} \cdot P \text{ et par suite } \delta S = \delta F^{-1} P + F^{-1} \delta P \quad (3.8)$$

Le tenseur des modules tangents microscopiques est la matrice Hessienne de l'énergie microscopique, soit :

$$(C_{T,\mu_{ijkl}})_n = \frac{\partial^2 W_\mu(F_n; F)}{\partial F \partial F} \quad (3.9)$$

## 2.2. Homogénéisation en grandes déformations pour le milieu de Cauchy

Nous présentons ci-dessous une méthode d'homogénéisation en grandes déformations incrémentales, basée sur une extension du travail de (M. Aayad et al., 2020) en petites déformations. Cette formulation est appliquée au milieu de Cauchy, et donc n'implique que le premier gradient de déformation. On utilise ici le lemme de Hill sous forme incrémentale : la moyenne de la variation de l'énergie microscopique est identique à la variation de l'énergie macroscopique, assortie d'un principe de minimisation de l'énergie potentielle parmi toutes les fluctuations du déplacement admissible (C. Miehe et al, 2002), soit :

$$\delta W_M(\bar{F}_{n+1}) = \inf_{\delta \tilde{u}} \frac{1}{|V|} \int_B W_\mu(\bar{F}_{n+1} + \nabla \tilde{u}_{n+1}; X) dV \quad (3.10)$$

où  $\bar{F}$  est le tenseur de gradient de transformation macroscopique, et  $\tilde{u}$  est le champ de déplacement de fluctuation. Le déplacement microscopique se décompose en deux parties, une partie homogène et une fluctuation périodique (Eq. 3.11) :

$$\delta u = \delta u^{hom} + \delta \tilde{u} \quad (3.11)$$

Aussi on peut décomposer la variation du déplacement comme suit :

$$\delta u = \delta u^{hom} + \delta \tilde{u} \quad (3.12)$$

Le principe de minimisation s'applique à toutes les fluctuations périodiques qui appartiennent à l'espace des champs périodiques noté  $H_{per}^1$ , de sorte que l'on peut écrire la variation de l'énergie

$$\delta W_M(\delta E) = \min_{\tilde{u} \in H_{per}^1(Y)} \left\{ \int_Y \frac{1}{2} C_{T\mu}(\mathbf{y}) : (\delta E + \delta \tilde{u}(\mathbf{y}) \otimes \nabla \mathbf{y}) : (\delta E + \delta \tilde{u}(\mathbf{y}) \otimes \nabla \mathbf{y}) dV \right\} \quad (3.13)$$

La condition de stationnarité du problème d'optimisation (3.13) fournit comme condition nécessaire un problème aux valeurs limites « BVP » à satisfaire par la fluctuation optimale associée au champ de déplacement réel (en l'absence de forces volumiques) :

$$\begin{cases} -div_{\mathbf{y}} \{ C_{T\mu}(\mathbf{y}) : (\delta E + \delta \tilde{u}(\mathbf{y}) \otimes \nabla \mathbf{y}) \} = 0 \\ \delta \tilde{u}(\mathbf{y}) \text{ Y-périodique} \end{cases} \quad (3.14)$$

La linéarité de la solution, la fluctuation  $\delta \tilde{u}$  du déplacement, relativement au chargement macroscopique cinématique  $E$  et sa variation  $\delta E$ , garantit l'existence d'un localisateur du déplacement  $H^E(\mathbf{y})$ , un tenseur du troisième ordre, tel que la fluctuation s'écrive sous la forme

$$\delta \tilde{u}(\mathbf{y}) = H^E(\mathbf{y}) \cdot \delta E(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

Le déplacement fluctuant peut s'écrire également de la façon suivante :

$$\delta \tilde{u}(\mathbf{y}) = H^E(\mathbf{y}) \cdot I_4 : \delta E \quad (3.16)$$

Avec  $I_4$  est le tenseur identité d'ordre 4, en injectant l'expression (3.16) dans le problème de cellule (3.14), on trouve la nouvelle forme de ce problème :

$$-div_y \{ C_{T\mu}(y) : (I_4 + H^E(y) \otimes \nabla_y) \} = 0 \quad (3.17)$$

Numériquement, le localisateur du premier gradient  $H^E(y)$  est alors obtenu en résolvant le problème de cellule unitaire (3.17) pour l'homogénéisation de Cauchy.

La variation du tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\delta E$  peut s'écrire en fonction du tenseur de déformation  $F$ , de son transposé  $F^T$  et de leurs variations sous la forme suivante :

$$\delta E = 1/2 [F^T \cdot \nabla_X (\delta u) + \nabla_X (\delta u)^T \cdot F] = 1/2 (\delta F^T \cdot F + F^T \cdot \delta F) \quad (3.18)$$

$$\delta W_M(\delta E) = \left\{ \frac{1}{2} \int_y C_{T\mu}(y) : (\delta E + \delta \tilde{u}) \cdot (I_4 \delta E + I_4 \delta \tilde{u}(y)) dV_y \right\} \quad (3.19)$$

L'obtention du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 2 (PK2) s'effectue par dérivation de l'énergie de déformation par rapport à l'incrément de déformation appliquée :

$$\delta \Sigma = \frac{\partial \delta W_M}{\partial \delta E} = \left\{ \int_y C_{T\mu} : (\delta E + H^E(y) \cdot I_4 \delta E) : (I_4 + H^E(y) I_4) \right\} dV_y \quad (3.20)$$

On obtient alors le tenseur des contraintes sous forme incrémentale, en fonction de la matrice de rigidité tangente macroscopique  $C_T^{hom}_{n+1}$ , n définit la discrétisation en fonction du temps. Ce passage de la forme continue à la forme incrémentale se fait avec la discrétisation du chargement cinématique macroscopique appliqué sur la cellule.

$$\delta \Sigma_{n+1} = \left\{ \int_y \underbrace{(C_{T\mu} + C_{T\mu} H^E(y)_{n+1} I_4) \cdot (I_4 + H^E(y)_{n+1} I_4)}_{C_T^{hom}_{n+1}} \right\} : \delta E_{n+1} \quad (3.21)$$

Les contraintes de Piola-Kirchhoff 2 à l'incrément n+1 s'écrivent sous la forme suivante :

$$\delta \Sigma_{n+1} = \delta \Sigma_n + \Delta \Sigma_{n+1} \quad (3.22)$$

La Box 1 résume l'algorithme de la méthode d'homogénéisation incrémentale proposée pour le milieu de Cauchy.

**Homogénéisation continue incrémentale : milieu de Cauchy**

- Initialisation :  $\delta F_{n+1} = \delta F_n$

avec  $\delta F = \nabla_X(\delta u)$

$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \Delta \delta u_{n+1}$

$\delta u = \delta u^{hom} + \delta \tilde{u}$  ;  $\delta \tilde{u} = H^E(y) : \delta E$  ;  $\delta \tilde{u}_{n+1} = H^E(y)_{n+1} : \delta E_{n+1}$

$\delta E = 1/2(\delta F^T \cdot F + F^T \cdot \delta F)$

Problème de cellule :

$-div_y \{ C_{T\mu}(y) : (\delta E_{n+1} + \nabla_y(H^E(y)_{n+1} : \delta E_{n+1})) \} = 0$

$\left[ \begin{array}{l} \delta \tilde{u}(y) : \text{périodique} \\ \text{Avec } (\Delta \Sigma_{ij})_{n+1} = (C_{T,\mu_{ijkl}})_{n+1} (\Delta E_{kl})_{n+1} \quad \text{Microscopique} \end{array} \right.$

$\delta \Sigma_{n+1} = \left\{ \int_y (C_{T\mu} + C_{T\mu} H^E(y)_{n+1} I_4) \cdot (I_4 + H^E(y)_{n+1} I_4) \right\} : \delta E_{n+1}$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{C_{Tn+1}^{hom}}$

Réactualisation de contrainte :

$\delta \Sigma_{n+1} = \delta \Sigma_n + \Delta \Sigma_{n+1}$

### 2.3. Évaluation des modules effectifs du second gradient sous forme incrémentale

Dans cette partie, une évaluation des modules effectifs tangents de second gradient sous forme incrémentale est effectuée. A l'échelle microscopique, une loi de comportement non linéaire de type hyperélastique est postulée. L'énergie de déformation incrémentale du modèle continu effectif peut s'écrire sous la forme d'une expression bilinéaire des mesures cinématiques. Cette forme est équivalente à la moyenne volumique de la déformation microscopique eq. (3.23):

$$\delta \Sigma = C_T^{hom} : \delta E + B_T^{hom} : : \delta K ; \quad \delta S = B_T^{hom,T} : \delta E + D_T^{hom} : : \delta K \Rightarrow$$

$$\delta W_M(\delta E, \delta K) = \Sigma : \delta E + S : : \delta K = \langle \delta W_\mu(\varepsilon) \rangle = \langle a(y) : C(y) : \delta a(y) \rangle \Rightarrow$$

$$\Delta\delta W_M(\delta E, \delta K) = \Delta\Sigma : \delta E + \Delta S : \delta K = \delta E : C_T^{hom} : \Delta E + \delta K : D_T^{hom} : \Delta K + \delta E : (B_T^{hom} + B_T^{hom,T}) : \Delta K \quad (3.23)$$

$D_T^{hom}$  est un tenseur du sixième ordre des modules de gradient de déformation, et  $B^{hom}$  un tenseur du cinquième ordre des modules de couplage entre le premier et le second gradient de déformation, la présence de la somme (terme symétrique)  $(B^{hom} + B^{hom,T})$  est une conséquence de l'existence d'un potentiel d'énergie de déformation qui garantit la symétrie de la matrice de rigidité globale effective, par la relation de Schwarz.

Le déplacement total se décompose en deux parties, une partie homogène et une autre de fluctuation (eq. 3.24)

$$\delta u = \delta u^{hom} + \delta \tilde{u} = \delta E \cdot y + \frac{1}{2} \delta k \cdot (y \cdot y) + H^E(y) \cdot \delta E + H^k(y) \cdot \delta K \quad (3.24)$$

Avec  $\delta u^{hom} = \delta E \cdot y + \frac{1}{2} \delta k \cdot (y \cdot y)$  et  $\delta \tilde{u} = H^E(y) \cdot \delta E + H^k(y) \cdot \delta K$

$$\Delta\Sigma = \frac{\partial \delta \Delta W_M(\delta E, \delta K)}{\partial \delta E} = C_T^{hom} : \Delta E + B_T^{hom} : \delta K ; \Delta S = \frac{\partial \delta \Delta W_M(\delta E, \delta K)}{\partial \delta K} = B_T^{hom,T} : \Delta E + D_T^{hom} : \Delta K \quad (3.25)$$

Un principe de minimisation est écrit pour toutes les fluctuations périodiques sous la forme suivante :

$$\Delta\delta W_M(\delta E, \delta K) = \underbrace{Min}_{\tilde{u} \in H^1_{per}(y)} \left\{ \int_y \frac{1}{2} C_{T\mu} : (\delta E + \delta K : y + \delta \tilde{u}(y) \otimes \nabla_y) : (\Delta E + \Delta K : y + \Delta \tilde{u}(y) \otimes \nabla_y) dV_y \right\} \quad (3.26)$$

La condition de stationnarité du problème d'optimisation (3.26) fournit comme condition nécessaire un problème incrémental à satisfaire par la fluctuation optimale associée au champ de déplacement réel (en l'absence de forces volumiques) ;

$$\left[ \begin{array}{l} -div_y \{ C_{T\mu} : (\delta E_{n+1} + \delta K_{n+1} : y + \delta \tilde{u}(y)_{n+1} \otimes \nabla_y) \} = 0 \\ \delta \tilde{u}(y) : Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

La linéarité de la solution par rapport au chargement cinématique, soit les deux incréments  $\delta E$  et  $\delta K$ , assure l'existence de deux localisateurs pour les chargements appliqués de déformation et son gradient. Ces tenseurs de localisation sont du troisième et du quatrième ordre successivement  $H^E(y), H^K(y)$ , de sorte que la fluctuation s'écrit par la relation suivante :

$$\delta \tilde{u}(y)_{n+1} = H^E(y) \cdot \delta E_{n+1} + H^K(y) \cdot \delta K_{n+1} \quad (3.28)$$

En remplaçant l'équation (3.28) dans le premier problème de cellule, on trouve un 2<sup>ème</sup> problème de cellule impliquant un localisateur du gradient de déformation :

$$\left[ \begin{array}{l} -\text{div}_y \{ C_{T\mu} : (I_4 + H^E(y) \otimes \nabla_y) : \delta E_{n+1} + (I_4 \otimes y + H^K(y) \otimes \nabla_y) : \delta K_{n+1} \} = 0 \\ \delta \tilde{u}(y) : Y\text{-périodique} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Les tenseurs de localisation sont alors obtenus en résolvant les problèmes de cellules : le tenseur de localisation du premier gradient  $H^E(y)$  est obtenu en résolvant le problème de cellule (3.17) et le localisateur du second gradient  $H^K(y)$  par la résolution du problème du second gradient (3.29).

Pour simplifier la résolution des problèmes de cellules, nous insérons les deux localisateurs de déformation  $A^E(y), A^K(y)$ , dans l'équation (3.28). Ces localisateurs sont eux-mêmes définis en fonction de deux localisateurs de déplacement  $H^E(y)$  et  $H^K(y)$  de telle sorte que :

$$A^E(y) := I_4 + H^E(y) \otimes \nabla_y \quad (3.30)$$

$$A^K(y) := I_4 \otimes y + H^K(y) \otimes \nabla_y \quad (3.31)$$

La déformation microscopique s'exprime alors en fonction des tenseurs de déformation et de gradient de déformation selon la relation suivante :

$$\delta \tilde{\epsilon} = A^E(y) : \delta E(X) + A^K(y) : \delta K(X) \quad (3.32)$$

Les tenseurs de contraintes de Cauchy et d'hypercontrainte sous forme incrémentale sont obtenus par dérivation partielle de l'incrément de l'énergie de déformation (3.26) par rapport à la déformation et au premier gradient de déformation respectivement :

$$\delta \Sigma_{n+1} = \frac{\partial \delta W_M(\delta E, \delta K)}{\partial \delta E_{n+1}} ; \quad \delta S_{n+1} = \frac{\partial \delta W_M(\delta E, \delta K)}{\partial \delta K_{n+1}} \quad (3.33)$$

On obtient alors les tenseurs de contraintes réactualisés en terme du temps à l'incrément  $t_{n+1}$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta \Sigma_{n+1} = & \underset{\tilde{u} \in H^1 per(y)}{\text{Min}} \frac{\partial}{\partial \delta E_{n+1}} \left\{ \int_y \frac{1}{2} C_{T\mu} : (\delta E + \delta K : y + \delta \tilde{u}(y) \otimes \nabla_y) : (\Delta E + \Delta K : y + \Delta \tilde{u}(y) \right. \\ & \left. \otimes \nabla_y) dV_y \right\} = \left\{ \int_y A^E(y) : C_{T\mu}(y) : A^E(y) dV_y \right\} : \delta E_{n+1} + \left\{ \int_y (A^E(y))^T : C_{T\mu}(y) : A^K(y) dV_y \right\} : \delta K_{n+1} = \\ & C_T^{hom} : \delta E_{n+1} + B_T^{hom} : \delta K_{n+1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \delta S_{n+1} = & \underset{\tilde{u} \in H^1 per(y)}{\text{Min}} \frac{\partial}{\partial \delta K_{n+1}} \left\{ \int_y \frac{1}{2} C_{T\mu} : (\delta E_{n+1} + \delta K_{n+1} : y + \delta \tilde{u}(y)_{n+1}) \otimes \nabla_y : (\delta E_{n+1} + \delta K_{n+1} : y + \right. \\ & \left. \delta \tilde{u}(y)_{n+1}) dV_y \right\} = \left\{ \int_y A^E(y) : C_{T\mu}(y) : A^E(y) dV_y \right\} : \delta E_{n+1} + \left\{ \int_y (A^K(y))^T : C_{T\mu}(y) : A^K(y) dV_y \right\} : \delta K_{n+1} = \\ & B_T^{hom,T} : \delta E_{n+1} + D_T^{hom} : \delta K_{n+1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les tenseurs des modules effectifs tangents  $C_T^{hom}$ ,  $B_T^{hom}$  et  $D_T^{hom}$  donnés par :

$$C_T^{hom} = \int_y A^E(y) : C_{T\mu}(y) : A^E(y) dV_y \quad (3.36)$$

$$B_T^{hom} = \int_y (A^E(y))^T : C_{T\mu}(y) : A^K(y) dV_y \quad (3.37)$$

$$D_T^{hom} = \int_y (A^K(y))^T : C_{T\mu}(y) : A^K(y) dV_y \quad (3.38)$$

Aussi on peut définir la contrainte de Cauchy et l'hypercontrainte en fonction des localisateurs de déplacement comme suit ;

$$\begin{aligned} \delta \Sigma_{n+1} = & \left\{ \int_y (C_{T\mu} + C_{T\mu} H^E(y) I_4) (I_6 y + H^K(y) I_6) dV_y \right\} : \delta \delta E_{n+1} + \left\{ \int_y C_{T\mu} (y + H^E(y) I_6) (I_4 + \right. \\ & \left. H^E(y) I_4) dV_y \right\} : \delta \delta K_{n+1} = C_T^{hom} : \delta E_{n+1} + C_T^{hom} : \delta K_{n+1} \end{aligned} \quad (3.39)$$



$$\delta S_{n+1} = \left\{ \int_y (C_{T\mu} + C_{T\mu} H^E(y) I_4) (I_4 + H^E(y) I_4) dV_y \right\} : \partial \delta E_{n+1} + \left\{ \int_y (C_{T\mu} y + C_{T\mu} H^K(y) I_6) (I_6 y + H^K(y) I_6) dV_y \right\} : \partial \delta K_{n+1} = B^{hom,T}_{n+1} : \delta E_{n+1} + D^{hom}_{n+1} : \delta K_{n+1} \quad (3.40)$$

La linéarisation et l'homogénéisation commutent (J. F. Ganghoffer et H. Reda, 2021), ce qui garantit que la solution du problème homogénéisé pour une déformation finie appliquée peut être 'découpée' en une somme de sous problèmes incrémentaux linéaires.

L'algorithme suivant résume les équations de la méthode d'homogénéisation incrémentale au second gradient proposée.

### Homogénéisation vers un milieu du second gradient : schéma incrémental

- Initialisation :  $\delta F_{n+1} = \delta F_n$

avec  $\delta F = \nabla_x(\delta u) + 1$

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \Delta \delta u_{n+1}$$

$$\delta u = \delta u^{hom} + \delta \tilde{u} ;$$

$$\delta \tilde{u}_{n+1} = H^E(y)_{n+1} : \delta E_{n+1} + H^K(y)_{n+1} : \delta K_{n+1}$$

$$\delta E = 1/2(\delta F^T \cdot F + F^T \cdot \delta F)$$

#### Premier problème de cellule :

$$\left[ \begin{array}{l} -div_y \{ C_{T\mu} : (\delta E_{n+1} + \delta K_{n+1} : y + \delta \tilde{u}(y)_{n+1} \otimes \nabla_y) \} = 0 \\ \delta \tilde{u}(y) : Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

#### Deuxième problème de cellule :

$$\left[ \begin{array}{l} -div_y \{ C_{T\mu} : (I_4 + H^E(y) \otimes \nabla_y) : \delta E_{n+1} + (I_4 \otimes y + H^K(y) \otimes \nabla_y) : \delta K_{n+1} \} = 0 \\ \delta \tilde{u}(y) : Y\text{-périodique} \end{array} \right.$$

- $(S_{ijk})_{n+1} = (C_{T,\mu_{ijkl}})_{n+1} (E_{kl})_{n+1}$     incrément de la contrainte microscopique

$$\begin{aligned}
& \delta \Sigma_{n+1} \{ \int_y A^E(y) : C(y) : A^E(y) dV_y \} : \delta E_{n+1} + \{ \int_y (A^E(y))^T : C(y) : A^K(y) dV_y \} : \delta K_{n+1} = \\
& C^{hom}_{n+1} : \delta E_{n+1} + B^{hom}_{n+1} : \delta \delta K_{n+1} \\
& \delta S_{n+1} = \{ \int_y (A^K(y))^T : C(y) : A^E(y) dV_y \} : \delta E_{n+1} + \{ \int_y (A^K(y))^T : C(y) : A^K(y) dV_y \} : \delta K_{n+1} = \\
& B^{hom,T}_{n+1} : \delta E_{n+1} + D^{hom}_{n+1} : \delta \delta K_{n+1} \\
& \delta \Sigma_{n+1} = C^{hom}_{n+1} : \delta E_{n+1} + B^{hom}_{n+1} : \delta K_{n+1} \\
& \delta S_{n+1} = B^{hom,T}_{n+1} : \delta E_{n+1} + D^{hom}_{n+1} : \delta K_{n+1} \\
& \delta S_{n+1} = \delta S_n + \delta S_{n+1} \quad \text{et} \quad \delta \Sigma_{n+1} = \delta \Sigma_n + \delta \Sigma_{n+1}
\end{aligned}$$

### 3. Matériaux hyperélastiques

La théorie générale de l'hyperélasticité qui est une théorie de l'élasticité nonlinéaire qui s'appuie sur l'existence d'une fonction densité d'énergie élastique est classiquement invoquée pour prédire la réponse mécanique des matériaux dans des conditions de chargement statique ou pour développer des modèles constitutifs plus sophistiqués tels que la viscoélasticité ou l'adoucissement de la réponse du matériau. De nombreux modèles hyperélastiques ont été développés, mais tous ne sont pas capables de décrire le comportement d'un matériau dans sa complexité, c'est-à-dire de reproduire de manière satisfaisante les données expérimentales obtenues pour différentes conditions de chargement.

Trois types de formulations existent pour modéliser les matériaux hyperélastiques, selon l'approche suivie afin de développer la fonction d'énergie de déformation : la première formulation est basée sur des modèles phénoménologiques (R. S. Rivlin, et al, 1948 ; R. W. Ogden, et al, 1972), la deuxième repose sur des données expérimentales (Hart-Smith et al, 1966) pour déterminer les fonctions matérielles d'énergie et la troisième formulation s'appuie sur des modèles développés à partir de motivations physiques qui sont en général très délicates en termes de leur formulation mathématique.

### 3.1. Théories de l'hyperélasticité

Les matériaux hyperélastiques sont une classe de matériaux pour lesquels l'existence d'une énergie de déformation  $W$  est postulée, cette dernière étant exprimée en fonction du tenseur de gradient de la transformation  $F$  :

$$W=W(F) \quad (3.41)$$

La fonction  $W$  est appelée potentiel élastique et elle représente l'énergie de déformation par unité de volume de la configuration de référence ; ce potentiel élastique peut également être défini en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit  $C$  :

$$C=F^T F; W= W(C) \quad (3.42)$$

Le potentiel élastique  $W$  doit en effet respecter le principe d'indifférence matérielle qui garantit son invariance dans toute rotation de la configuration courante  $\Omega_t$ , cette condition se traduisant par la condition :

$$W(F)=W(Q.F), \forall Q \text{ transformation orthogonale} \quad (3.43)$$

Dans le cas où  $Q$  est la rotation particulière  $R^T$  résultant de la décomposition polaire de  $F$ , la condition (3.43) donne alors :

$$W(F)=W(R^T . F) \quad (3.44)$$

Puisque  $C$  ne varie pas dans un changement de référentiel de l'observateur, il est clair que le potentiel est objectif, soit il vérifie :

$$W(C)= W(RCR^T) \quad \forall R \in O(3) \quad (3.45)$$

La forme générale de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique donnée dans la configuration initiale  $\Omega_0$ , en fonction du tenseur de Green Lagrange  $E$ , et par la suite du tenseur de Green Cauchy droit  $C$ , s'écrit :

$$\Sigma = \frac{\partial W}{\partial E} = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \quad (3.46)$$

La loi de comportement hyperélastique fournit le tenseur des modules d'élasticité à l'échelle microscopique en un point donné et pour une déformation donnée ; ce tenseur d'élasticité est obtenu par la dérivation de l'énergie de déformation  $W$  par rapport aux tenseurs de Green Lagrange  $E$  ou encore Cauchy Green  $C$ , ce qui représente la loi hyperélastique :

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W(E)}{\partial E \partial E} = 4 \frac{\partial^2 W(C)}{\partial C \partial C} \quad (3.47)$$

Ce tenseur des modules d'élasticité tangent présente des symétries mineures et majeures, dues respectivement à la symétrie de  $E$  et de  $\Sigma$  et à l'existence d'une fonction énergie de déformation, qui sont les suivantes :

$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{ijlk}$  : symétries mineures (permutation des indices dans chaque paire (i,j) et (k,l)).

$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij}$  : symétries majeures (permutation des deux paires d'indices).

Pour un matériau isotrope, la cinématique est décrite par les trois principaux invariants isotropes issues de  $C$ , classiquement notés  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ , donnés par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(C) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} [\text{tr}(C)^2 - \text{tr}(C^2)] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 &= \det(C) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont des nombres positifs strictement, appelées allongements principaux.

La loi de comportement des matériaux hyperélastiques isotropes s'écrit comme un développement quadratique de la déformation lagrangienne, avec des coefficients dépendant des principaux

invariants de  $C$ , cela implique que la fonction énergie de déformation est fonction de ces principaux invariants :

$$W=W(I_1(C), I_2(C), I_3(C)) \quad (3.49)$$

Le tenseur des contraintes matérielles Piola-Kirchhoff 2 est alors exprimé en fonction de  $W$  et de ses dérivées par rapport aux invariants :

$$\Sigma=2\frac{\partial W(C)}{\partial C}=\frac{\partial w(C)}{\partial I_1(C)}\frac{\partial I_1(C)}{\partial C}+\frac{\partial w(C)}{\partial I_2(C)}\frac{\partial I_2(C)}{\partial C}+\frac{\partial w(C)}{\partial I_3(C)}\frac{\partial I_3(C)}{\partial C} \quad (3.50)$$

### 3.2.Modèles hyperélastiques isotropes

Avant d'aborder les modèles anisotropes, nous rappelons les modèles hyperélastiques isotropes qui sont exprimés soit en fonction des invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green, soit en fonction des élongations principales, le choix dépendant du modèle utilisé. Nous citons les 3 modèles hyperélastiques les plus connus dans la littérature, le modèle Néo-Hookéen (L.R.G. Treloar, 1944), celui de Mooney-Rivlin (M. Mooney, 1940 ; R.S. Rivlin, 1956) et le modèle d'Ogden (R.W. Ogden, 1972).

- Modèle de matériau Néo-Hookéen :

$$W(C)=C_{100}(I_1 - 3) \quad (3.51)$$

où  $C_{100}$  est un paramètre matériau. Selon la littérature, le modèle de matériau Néo-Hookéen n'est pas assez précis pour prédire la réponse en grandes déformations.

- Modèle de matériau de Mooney-Rivlin :

$$W(C)=C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (3.52)$$

Avec,  $C_1$  et  $C_2$  des constantes de matériau, et où  $G=2(C_1+C_2)$  est le module de cisaillement élastique linéaire. Le modèle Mooney-Rivlin est largement utilisé pour les matériaux caoutchoutiques ; malgré les limitations connues (P. Heuillet, 1995) pour la description d'états de contrainte particuliers, ce

modèle peut être utilisé pour plusieurs structures et dans une large plage de déformation locale jusqu'à environ 200 %.

- Modèle d'Ogden :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_p^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} [\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3] \quad (3.53)$$

Expression dans laquelle les paramètres  $\mu_p$  et  $\alpha_p$  sont des constantes matérielles déterminées empiriquement, et  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les valeurs propres principales du tenseur gradient de la transformation. Selon la littérature, le modèle d'Ogden est un modèle de matériau hyperélastique très pertinent pour prédire le comportement de matériaux non linéaires, tels que le caoutchouc ou les polymères de façon plus générale.

Plusieurs autres modèles hyperélastiques isotropes ont été développés : citons les travaux de Rivlin, Spencer, Ogden, et Truesdell, R.S. Rivlin et al, 1951); (A.J.M. Spencer, 1970); (R.W. Ogden, 1972) ; (C. Truesdell et al, 1992). Ces modèles hyperélastiques ont été très utilisés dans plusieurs applications pour modéliser les élastomères, telles que la biomécanique, l'aéronautique, l'automobile, le génie civil. Matériaux hyperélastiques anisotropes

La construction des lois constitutives de matériaux hyperélastiques fortement anisotropes est toujours très délicate et nécessite des développements théoriques nouveaux par comparaison avec la situation des matériaux hyperélastiques isotropes. Dans les dernières décennies, la modélisation des matériaux anisotropes a beaucoup retenu l'attention des chercheurs en raison de la grande variété de ces matériaux, très présents dans différentes applications en ingénierie (génie civil, aéronautique) mais aussi en biomécanique des tissus mous (veines, artères, muscles, ligaments, tendons, la peau). Plusieurs types de matériaux présentent une anisotropie marquée, soit principalement les matériaux architecturés et les matériaux composites. L'anisotropie de la géométrie des composites à renforts fibreux est décrite par l'orientation des fibres dans la matrice ; dans certains cas, plusieurs directions d'anisotropie existent dans la structure, ces directions définissant le groupe de symétrie de la

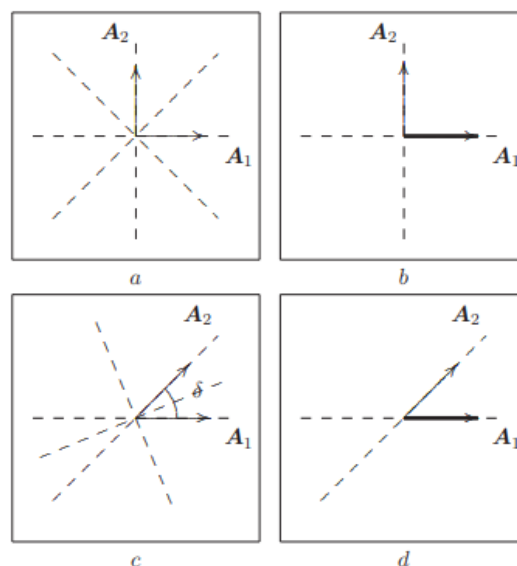
microstructure. Dans le cadre des matériaux composites, (C. Simon et al, 2012) ont développé une loi de comportement constitutive du cerveau de nature visco-hyperélastique transversalement isotrope. Dans ces travaux, l'objectif est d'évaluer la sensibilité du modèle à l'orientation des fibres et au taux de déformation appliqué. Les travaux de Spencer (A.J.M. Spencer, 1984) portent sur les matériaux composites renforcés de fibres, cet auteur ayant développé une loi constitutive hyperélastique continue pour les matériaux anisotropes. Il a fourni une description globale du comportement anisotrope à l'échelle macroscopique. Récemment, (D.R. Nolan et al, 2014) ont développé une formulation hyperélastique anisotrope robuste pour la modélisation des tissus mous, dans cette formulation le modèle Holzapfel-Gasser-Ogden (dit HGO) pour le comportement hyperélastique anisotrope des matériaux renforcés de fibres de collagène a été initialement utilisé pour décrire les propriétés élastiques des tissus mous. (J. Schröder et P. Neff, 2002) ont proposé une formulation de l'hyperélasticité anisotrope polyconvexe en transformations finies, qui repose sur l'ajout de tenseurs additionnels dits de structure, incorporés comme arguments de l'énergie libre. L'objectif principal de ces auteurs a été la construction de fonctions anisotropes polyconvexes au sens de Ball afin de garantir l'existence de minimiseurs des principes variationnels en élasticité nonlinéaire. Dans (J. Schröder et al., 2004), les auteurs proposent une approche variationnelle pour l'hyperélasticité anisotrope qui respecte les conditions de stabilité, basée sur une fonction d'énergie stockée anisotrope qui satisfait a priori la condition de stabilité des équations constitutives au sens de Legendre-Hadamard.

Le potentiel d'un matériau élastique anisotrope siège de grandes déformations peut être représenté par une fonction isotrope du tenseur de Cauchy-Green droit  $C$ , auquel s'ajoutent des tenseurs de structure prenant en compte l'anisotropie. Ainsi, (A.J.M. Spencer, 1984) a établi la formulation d'un milieu continu hyperélastique anisotrope basée sur les tenseurs de structure.

Dans cette partie, outre le développement d'un cadre théorique général pour l'hyperélasticité anisotrope, on s'intéresse plus particulièrement en termes d'application à l'écriture de la loi

hyperélastique (anisotrope) de structures pantographiques, en prenant appui sur l'identification des directions matérielles d'anisotropie. Pour modéliser les matériaux anisotropes il faut prendre en compte les directions principales de la structure. Par la suite, nous montrerons que les composantes du tenseur de déformation de Cauchy-Green  $C$  pourront s'écrire dans la base des directions d'anisotropie de la structure en introduisant ce que l'on appelle les tenseurs de structure, ces composantes constituant des quantités objectives (vis-à-vis d'un changement de référentiel de l'observateur).

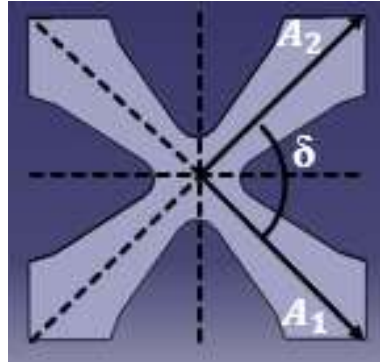
Quatre structures de base sont envisageables pour le réseau du pantographe, selon l'angle formé entre les directions matérielles (appelées fibres) et leurs propriétés mécaniques respectivement : la structure carrée (fibres équivalentes orthogonales), la structure rectangulaire (fibres orthogonales inéquivalentes), la structure rhombique (fibres équivalentes non orthogonales) et la structure parallélogramme (fibres non orthogonales inéquivalentes), toutes quatre représentées Figure III-6. Chacune de ces structures est caractérisée par un groupe de symétrie, plus de détails sont exposés dans les travaux de (G. Indelicato et al, 2009).



**Figure III-6 : Les quatre structures de base d'un motif de type pantographe. a : réseau Carré, b : réseau Rectangulaire, c : réseau Rhombique, d : réseau Parallélogramme (G. Indelicato et al, 2009).**



La structure pantographique sélectionnée pour cette étude a deux directions principales d'anisotropie (les directions principales du tenseur de moment quadratique), elle est de type rhombique et possède des 'fibres' équivalentes, mais non orthogonales, ces directions étant modélisées par les tenseurs de structures  $M_i$  (Figure III-7), dont l'expression est la suivante :



**Figure III-7 : Structure rhombique illustrée par un pantographe**

$$M_i = A_i \otimes A_i ; i=1, \dots, N \quad (N=2 \text{ pour le pantographe}) \quad (3.54)$$

dans laquelle  $A_i$  représentent le vecteur unitaire parallèle à la direction de la fibre dans la configuration de référence, comme le montre la Figure III-7 pour le cas du pantographe. Le groupe des transformations orthogonales qui laisse l'axe parallèle à  $A$  invariant (au signe près) est défini selon :

$$G = \{R \in O(3) / RA_i = \pm A_i; i = 1, \dots, N\} \quad (3.55)$$

Si nous supposons que le matériau de la matrice est hyperélastique, alors il est habituel de supposer qu'en présence de fibres, la condition d'isotropie transverse est vérifiée (G.A. Holzapfel, 2000) :

$$W(C) = W(RCR^T), \forall R \in G \quad (3.56)$$

Il est clair que le groupe de transformations orthogonales  $G$  préserve l'invariance du tenseur de structure pour chaque direction matérielle d'anisotropie associée à un tenseur de structure  $M$  :

$$G = \{R \in O(3) : R M R^T = M\} \quad (3.57)$$

On introduit également le groupe associé à l'orbite des tenseurs de structure, soit l'ensemble des transformations orthogonales qui envoient une direction matérielle d'anisotropie sur une autre direction d'anisotropie (ce qui sera utile pour des structures présentant une équivalence entre différentes directions matérielles d'anisotropie) :

$$M = \{Q \in O(2) : R M_i R^T = P_i\} \quad (3.58)$$

Ayant introduit cette dernière condition, on peut alors écrire l'énergie élastique  $W$  en fonction de  $C$  et du tenseur de structure :

$$W = \widehat{W}(C, A_i \otimes A) = \widehat{W}(C, M_i) \quad (3.59)$$

La relation dans laquelle l'indice 'i' est susceptible de prendre plusieurs valeurs, selon le nombre de tenseurs de structures (directions d'anisotropie) présentes dans la microstructure.

Le **premier théorème de Rychlewski** (Zhang et Rychlewski, 1990) est largement utilisé pour déterminer la nature des invariants dépendant du tenseur de Cauchy-Green ainsi que des tenseurs de structure pour les matériaux renforcés par des fibres : la condition d'isotropie transverse écrite en (3.56) est satisfaite si et seulement si l'énergie de déformation définie en (3.59) est une fonction isotrope de  $C$  et des tenseurs de structure  $M_i$ , c'est-à-dire si elle satisfait la condition :

$$W(C) := \widehat{W}(C, M_i) = \widehat{W}(QCQ^T, QM_iQ^T), \forall Q \in O(3) \quad (3.60)$$

Dans la présente situation du pantographe, l'énergie de déformation peut être écrite comme une fonction isotrope notée  $\widehat{W}$  sur l'espace produit cartésien  $\text{Sym}(n) \times M$  des arguments  $(C, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2)$ , avec  $A_1$  et  $A_2$  les deux directions principales d'anisotropie géométrique de la structure pantographique (voir la Figure III-7). On montre alors que l'invariance de  $W$  sous l'action du groupe  $G$  implique que  $\widehat{W}$  est une fonction isotrope de ses arguments :

$$\widehat{W}(QCQ^T, QA_1 \otimes A_1Q^T, QA_2 \otimes A_2Q^T) = \widehat{W}(C, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2), \forall Q \in O(2) \quad (3.61)$$

D'après le premier théorème de Rychlewski, les invariants anisotropes d'une (micro)structure peuvent être calculés en termes d'invariants isotropes appropriés d'une fonction énergétique dont les arguments sont étendus aux tenseurs de structure. On introduit la définition suivante :

$$\widehat{W}(C, P_i) := W(QCQ^T), \text{ avec } M_i = QP_iQ^T, \forall Q \in O(2) \quad (3.62)$$

Si l'énergie de déformation  $\widehat{W}(C, P_i)$  dont la forme est a priori indéterminée (inconnue) est invariante sous le groupe  $G$  par la condition (3.56), alors la fonction d'énergie étendue  $\widehat{W}(C, P_i)$  définie sur  $\text{Sym}(n) \times M$ , tels que  $C \in \text{Sym}(n)$ , un tenseur symétrique,  $P_i \in M$  et  $Q \in O(n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , est une fonction isotrope de ses arguments. La démonstration est donnée dans (G. Indelicato et al., 2009).

La condition (3.62) est indépendante de la transformation orthogonale  $Q$ . En utilisant la condition (3.56) et (3.62), on peut de façon réciproque prouver l'invariance de l'énergie de déformation  $W$  sous le groupe  $G$ , qui peut alors être exprimée en fonction des invariants isotropes de  $(C, M_i)$ , pour l'action de  $R$  sur  $C$  et  $M_i$ , avec  $R \in G$  :

$$W(RCR^T) = W(C) := \widehat{W}(RCR^T, M_i) = \widehat{W}(R^T(RCR^T)R, R^T M_i R) = \widehat{W}(C, M_i), \forall R \in G \quad (3.63)$$

Ce qui montre que  $W$  est invariante sous l'action du groupe  $G$ .

Cette dernière condition est satisfaite en formant les bases d'intégrité des tenseurs  $C$  et  $M_i$  ; le cadre des matériaux isotropes basés sur des invariants peut être étendu dans le cas présent anisotrope en incluant des invariants supplémentaires basés sur les tenseurs de structure, ce qui conduit à un nombre plus important d'invariants choisis comme arguments de la fonction d'énergie élastique :

$$W = W(I_1(C), I_2(C), I_3(C), I_4(C, A_i), I_5(C, A_i)) \quad (3.64)$$

Les invariants anisotropes des fibres s'expriment selon :

$$I_4(C, A_i) = A_i \cdot CA_i; \quad I_5(C, A_i) = A_i \cdot C^2 A_i \quad (3.65)$$

L'équation constitutive s'écrit alors formellement :

$$\Sigma = 2W_{,C} = 2 \sum_{i=1}^5 W_{I_i} I_{i,C} \quad (3.66)$$

On généralise dans ce qui suit ce résultat classique pour couvrir des classes plus générales d'anisotropie prenant en compte les permutations des fibres, ce qui conduit au **second théorème de Rychlewski** qui en constitue une généralisation. Le groupe de symétrie  $G$  est en général limité pour décrire les propriétés de symétrie de la structure, car il ne permet pas les opérations de permutation qui échangent les tenseurs de structure. Le groupe de symétrie complet d'une structure donnée est alors défini comme suit :

$$\begin{aligned} H &= \{ R \in O(n) / R A_i = (-1)^{\lambda(i)} A_{\sigma(i)}, i=1, \dots, N, \lambda(i) \in \{0, 1\} \} \\ &= \{ R \in O(n) / R M_i R^T = M_{\sigma(i)}, i = 1, \dots, N, \forall \sigma \in S_N \} \end{aligned} \quad (3.67)$$

où  $S_N$  est le groupe symétrique de  $N$  éléments, par la suite le groupe de toutes les permutations des indices  $i = 1, \dots, N$ . On note que  $H'$  est l'image de  $H$  dans  $S_N$ .

La fonction isotrope  $\widehat{W}$  est invariante sous l'action du groupe  $H'$ , la relation (3.64)<sub>3</sub> devient alors sous l'action du groupe  $H'$  :

$$\widehat{W}(C, P_{\sigma(i)}) = \widehat{W}(C, P_i), \text{ pour tout } \sigma \in H' \quad (3.68)$$

La fonction  $W := \widehat{W}(C, M_i)$  est alors invariante sous l'action du groupe  $H$ . Sous ces conditions, la fonction d'énergie est alors invariante sous l'action du groupe de symétrie complet  $H$  ; cette fonction peut être exprimée en fonctions des invariants isotropes  $C$  et  $M_i$ , et en plus elle est invariante sous les permutations du groupe  $H'$ .

Dans notre cas, la structure pantographique possède deux directions principales  $A_1$  et  $A_2$ , la fonction d'énergie isotrope est invariante sous les permutations des tenseurs de structure correspondant à  $H$  :

$$\widehat{W}(C, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2) = \widehat{W}(C, A_{\sigma(1)} \otimes A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)} \otimes A_{\sigma(2)}), \forall \sigma \in H' \quad (3.69)$$

Avec l'introduction du groupe de permutations  $H'$ , nous pouvons distinguer les microstructures par leur groupe de symétrie ; par contre, le théorème classique de Rychlewski ne permet pas de distinguer les structures selon leur symétrie matérielle. Les quatre structures de base d'un motif de tissage, sont : la structure carrée (fibres équivalentes orthogonales), la structure rectangulaire (fibres non équivalentes orthogonales), la structure rhombique (fibres équivalentes non orthogonales), la structure en parallélogramme (fibres non équivalentes non orthogonales). Pour chaque structure prévaut un groupe de symétrie bien défini.

Les structures à symétrie rhombique, formées de deux fibres non orthogonales et équivalentes comme le cas de la structure de référence (le pantographe) considérée, admettent le groupe de permutations  $H'$ , encore noté  $S_N = S_2$ , de sorte que l'énergie est une fonction symétrique de  $C_{11}$  et  $C_{22}$ , ce qui donne la représentation suivante de la densité d'énergie :

$$W=W(C_{11} + C_{22}, C_{11}C_{22}, C_{12}) \quad (3.70)$$

### 3.3.Modèle hyperélastique du second gradient

L'objectif de ce chapitre est alors de formuler une théorie des matériaux anisotropes en grandes déformations et plus spécifiquement pour le pantographe ; le gradient de la transformation et le tenseur de déformation de Cauchy-Green sont complétés de leur gradients pour modéliser le comportement de la structure pantographique, qui constitue une des rares microstructures connues qui obéisse à un comportement très prononcé du second gradient (F. dell'Isola et al, 2019).

Le tenseur de gradient de la transformation  $F$ , son transposé et son gradient qui seront nécessaires dans le cadre d'une modélisation hyperélastique du second gradient sont définis comme suit :

$$F=a_\alpha \otimes A^\alpha ; F^T=A^\beta \otimes a_\beta \quad (3.71)$$

$$F \otimes \nabla= a_{\alpha,\beta} \otimes A^\alpha \otimes A^\beta; F \otimes \nabla \otimes \nabla= a_{\alpha,\beta\gamma} \otimes A^\alpha \otimes A^\beta \otimes A^\gamma \quad (3.72)$$

$\alpha, \beta$  désignent ici et par la suite des indices entiers qui numérotent les fibres dans la structure considérée (prenant les valeurs 1,2). Dans les relations précédentes,  $a_1$  et  $a_2$  sont les vecteurs tangents aux courbes correspondant à une fibre, dans la configuration déformée de la structure, définis comme les transportés des directeurs des fibres dans la configuration initiale :

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_1 A_1 = F_{11} A_1 \\ a_2 = \lambda_2 A_2 = F_{22} A_2 \end{cases}$$

Le tenseur de déformation Cauchy-Green peut être exprimé en fonction des tenseurs de structure de la configuration de référence :

$$C = F^T F = (a_\alpha a_\beta) A^\alpha \otimes A^\beta \quad (3.73)$$

Pour prendre en compte l'effet de second gradient de la structure pantographique, nous intégrons dans l'énergie de déformation, le tenseur de déformation de Cauchy-Green à gradient d'ordre supérieur. Par argument d'objectivité (indifférence matérielle), le potentiel d'énergie élastique peut être écrit en fonction des tenseurs de déformation à l'ordre supérieur suivants :

$$C = C_1 = F^T F, \quad C_2 = F^T \nabla F, \quad C_3 = \nabla F^T \nabla F \quad (3.74)$$

$C_2$  et  $C_3$  sont respectivement des tenseurs d'ordre 3 et 4.

En se basant sur ces tenseurs, l'énergie élastique peut être exprimée comme suit :

$$W(C) = \widehat{W}(a_\alpha a_\beta, a_\alpha a_\beta a_\gamma, a_\alpha a_\beta a_\gamma a_\delta) \quad (3.75)$$

Dans laquelle  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta$  sont des nombres entiers. En appliquant le groupe de symétrie du matériau complet H et la condition (3.63) aux directions principales à la configuration actuelle, on obtient les dérivées partielles du vecteur associés aux directions des fibres dans la configuration actuelle comme suit :

$$a_{\alpha} = (-1)^{\lambda(\alpha)} a_{\sigma(\alpha)} ;$$

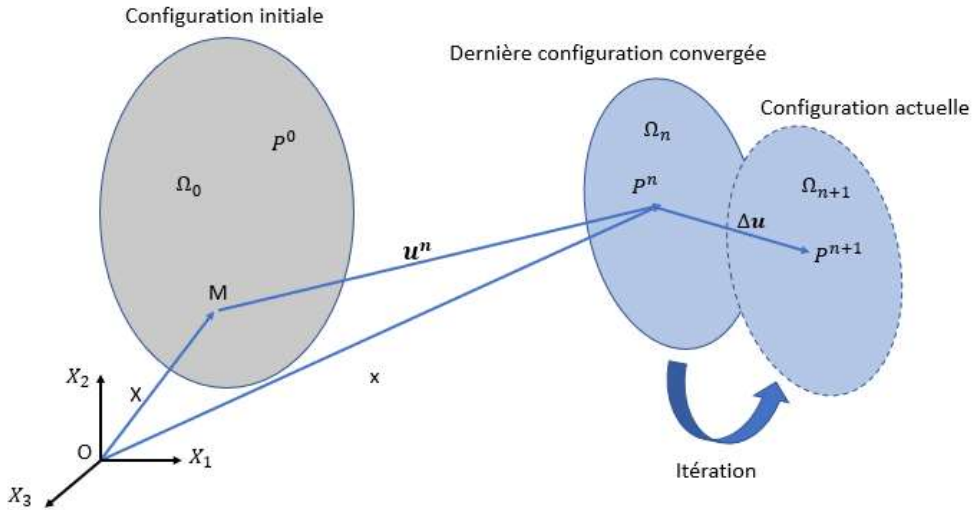
$$a_{\alpha,\beta} = (-1)^{(\lambda(\alpha)+\lambda(\beta))} a_{\sigma(\alpha),\sigma(\beta)} ;$$

$$a_{\alpha,\beta\gamma} = (-1)^{(\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)+\lambda(\gamma))} a_{\sigma(\alpha),\sigma(\beta),\sigma(\gamma)}. \quad (3.76)$$

Avec les conditions ci-dessus,  $W$  est une fonction objective, c'est-à-dire, l'énergie est invariante sous l'action du groupe spécial orthogonal 3D noté  $SO(3)$  et sous l'action de (3.72), et invariante sous  $H$  dont l'action est définie en (3.75).

#### 4. Linéarisation et discrétisation par élément finis

Nous exposons dans cette section la linéarisation et la discrétisation d'un problème non linéaire en grandes déformations au premier et second gradient à l'échelle macroscopique par la méthode des éléments finis. Les tenseurs de déformation macroscopiques  $(\delta E, \delta K)$  sont appliqués comme conditions cinématiques sur le bord de la cellule élémentaire. Par la suite le problème d'équilibre écrit sous forme virtuel microscopique est résolu en utilisant des conditions aux limites de périodicité de la fluctuation du déplacement. L'homogénéisation est réalisée en vertu de la condition macro-homogénéité de Hill-Mandel, la prise de moyenne volumique des grandeurs microscopiques ainsi que la linéarisation de ces mêmes grandeurs. Dans la dernière étape, le problème aux limites macroscopique est résolu et la convergence quadratique du processus itératif est assurée par la méthode de Newton-Raphson. La Figure III-8 fournit le schéma d'un problème non linéaire incrémental en utilisant la méthode de Newton-Raphson.



**Figure III-8 : problème non linéaire incrémental en formulation Lagrangienne actualisée**

#### 4.1. Formulation variationnelle

Afin de linéariser le problème non linéaire, la minimisation de l'énergie potentielle qui correspond à l'équilibre est écrite :

$$\mathcal{J}[u] = \int_{\Omega_0} W_{int}(E) d\Omega - W^{ext} \quad (3.77)$$

où  $W_{int}$  est l'énergie interne stockée et  $W^{ext}$  l'énergie potentielle des charges appliquées, ici considérées comme des charges mortes.

Nous cherchons le champ de déplacement  $u \in \mathbb{Z}$  qui minimise l'énergie potentielle ; par la suite, il faut perturber  $u$  dans la direction de  $\delta u \in \mathbb{Z}$ , choisie petite (on introduit un petit paramètre  $\varepsilon$ ), tels que :

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon \delta u; \quad \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}(u + \varepsilon \delta u)|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial W_{int}}{\partial E} : \delta E - \delta W^{ext} = 0 \quad (3.78)$$

Ici,  $\delta E$  est la perturbation de la déformation macroscopique  $E$  tels que :

$$\delta E(u, \delta u) = \text{Sym}((\nabla_X \delta u)^T F) \quad (3.79)$$



La linéarisation de l'équilibre énergétique est

$$\int_{\Omega_0} \Delta(\Sigma : \delta E) - \Delta \delta W^{ext} = 0$$

$$\Delta(\Sigma : \delta E) = \Delta \Sigma : \delta E + \Sigma : \Delta(\delta E) \quad (3.80)$$

Le terme  $\Sigma : \Delta(\delta E)$  représente la partie géométrique de la matrice de rigidité tangente et le terme  $\Delta \Sigma = \mathbb{C} : \Delta E$  est la partie matérielle de la rigidité tangente.

#### 4.2. Linéarisation du principe du travail virtuel

Le principe du travail virtuel est non linéaire vis-à-vis du champ de vecteurs de déplacement inconnu  $\mathbf{u}$ . Les nonlinéarités sont dues à des contributions géométriques ou matérielles (ou les deux), c'est-à-dire la cinématique du milieu et l'équation constitutive du matériau, respectivement. Des solutions numériques approchées basées sur la méthode des éléments finis sont nécessaires en général. En faisant le lien avec la théorie de l'homogénéisation proposée au-dessus, qui est développé sous le code FreeFem++, la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre le problème non linéaire et obtenir la convergence de la solution. La méthode numérique de Newton est très utilisée car efficace pour résoudre des équations non linéaires avec un taux de convergence quadratique proche du point solution ; elle repose sur une méthode de résolution incrémentale/itérative. Afin de détailler le principe de la linéarisation de l'équation variationnelle, et notamment le travail virtuel des efforts intérieurs  $\delta W_{int}$ , sur lequel on se focalise par la suite, une présentation de la méthode est faite dans une première étape pour le milieu de Cauchy classique :

$$\delta W_{int}(u, \delta u) = \int_{\Omega_0} \Sigma(E(u)) : \delta E(u) dv \quad (3.81)$$

La linéarisation du travail virtuel des efforts intérieurs de l'Eq. (3.81) est donné ci-dessous, pour plus de détails voir (G.A. Holzapfel, 1984):

$$D_{\Delta u} \delta W_{int}(u, \delta u) = \frac{d}{d\varepsilon} \delta W_{int}(u + \varepsilon \Delta u)|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_{\Omega_0} [\Sigma(E(u)): D_{\Delta u} \delta E(u) + \delta E(u): D_{\Delta u} \Sigma(E(u))] dv \quad (3.82)$$

avec  $D_{\Delta u}$  l'opérateur de dérivée de Gâteaux, linéaire par rapport au champ de déplacement incrémental  $\Delta u$ . Le tenseur virtuel de déformation de Green-Lagrange  $\delta E$  est linéarisé comme suit :

$$\Delta \delta E = \text{Sym}(\text{Grad}^T \Delta u \text{ Grad } \delta u) \quad (3.83)$$

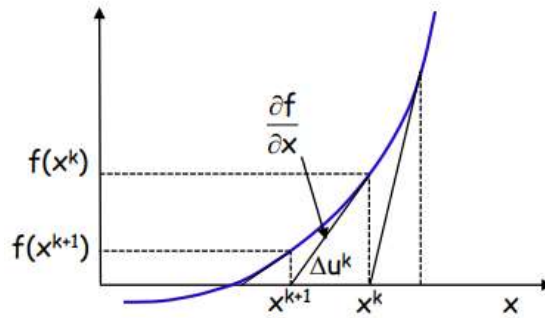
La linéarisation du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff2  $\Sigma$  (symétrique) est réalisée comme suit :

$$D_{\Delta u} \Sigma(E(u)) = \frac{\partial \Sigma(E(u))}{\partial E} : D_{\Delta u} E(u) = \mathbb{C}_T(u) : D_{\Delta u} E(u) \quad (3.84)$$

avec  $\mathbb{C}_T(u)$  le tenseur d'élasticité tangent en description matérielle ; par la suite, la linéarisation du travail virtuel des efforts intérieurs en description Lagrangienne conduit à :

$$D_{\Delta u} \delta W_{int}(u, \delta u) = \int_{\Omega_0} (\text{Grad } \delta u : \text{Grad } \Delta u \Sigma + F^T \text{Grad } \delta u : \mathbb{C}_T : F^T \text{Grad } \Delta u) dv \quad (3.85)$$

Afin d'obtenir le champ de déplacement convergé, la résolution du problème non linéaire est faite par linéarisation selon la méthode de Newton-Raphson, comme le montre la Figure III-9.



**Figure III-9 : Itération de Newton-Raphson par linéarisation**

avec  $u^{n+1} = u^n + \Delta u^n$  et  $x^{n+1} = X + u^{n+1}$  respectivement le déplacement et la position spatiale actualisés à l'instant  $t_{n+1}$ .

### 4.3.Approximation par éléments finis de la description spatiale de l'élasticité en grandes déformations

La description spatiale de la forme faible peut également être écrite en notation matricielle, fournissant la base de calcul la plus efficace des éléments des matrices tangentes. Nous utilisons un élément quadrilatéral à 4 nœuds et à déformation plane dans le cadre de la mise en œuvre de la méthode d'approximation du problème élastique non linéaire, en utilisant les fonctions de forme pour décrire les configurations initiale et déformée, ainsi que les champs de déplacement de fluctuation virtuel et incrémental :

$$\tilde{u}^h = \sum_{i=1}^{ne} N_a \tilde{q} ; \delta \tilde{u}^h = \sum_{i=1}^{ne} N_a \delta \tilde{q} ; \Delta \tilde{u}^h = \sum_{i=1}^{ne} N_a \Delta \tilde{q} \quad (3.86)$$

avec  $N_a$  les fonctions de forme et  $\tilde{q}$  le vecteur de déplacements nodaux.  $\delta \tilde{u}^h$  est le champ de déplacement virtuel, alors que  $\Delta \tilde{u}^h$  est le champ de déplacement incrémental. L'approximation du gradient de transformation et de sa variation virtuelle est :

$$\check{F}^h = \sum_{i=1}^N \tilde{q} \otimes \nabla_x N_a ; \nabla_x \check{F}^h = \sum_{i=1}^N \tilde{q} \otimes \nabla_x^2 N_a \quad (3.87)$$

Les tenseurs gradient de la transformation et de déformation nonlinéaire de Green-Lagrange sont donnés comme suit en 2D :

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{E}\} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,1}) \\ u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{1,2}u_{2,1} + u_{2,2}u_{2,2}) \\ u_{1,2} + u_{1,2} + u_{1,2}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,2} \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

Le résidu de la méthode de Newton-Raphson que l'on cherche à annuler est donné par :

$$\{\bar{q}\}^T \{F^{int}(q) - F^{ext}\} \quad (3.89)$$

avec  $F^{int}$  et  $F^{ext}$  les efforts intérieurs et extérieurs respectivement.

Les tenseurs de déformation Green-Lagrange linéaire et incrémental sont définis successivement par :

$$\{\bar{E}\} = [N_a]\{q\} ; \{\Delta E\} = [N_a]\{\Delta q\} \quad (3.90)$$

La linéarisation de l'énergie de déformation est écrite par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega_0} \bar{E} : C : \Delta E \, d\Omega &= \{\bar{q}\}^T \left[ \int \int_{\Omega_0} [N_a]^T [C] [N_a] \, d\Omega \right] \{\Delta q\} \\ \int \int_{\Omega_0} S : \Delta \bar{E} \, d\Omega &= \{\bar{q}\}^T \left[ \int \int_{\Omega_0} [N_b]^T [\Sigma] [N_b] \, d\Omega \right] \{\Delta q\} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Par la suite, la forme de la matrice de rigidité tangente consistante est donnée comme suit :

$$[K_T] = \int \int_{\Omega_0} \left[ [N_a]^T [C] [N_a] + [N_b]^T [\Sigma] [N_b] \right] \, d\Omega_0 \quad (3.92)$$

avec  $[K_T] = [K_T^M] + [K_T^G]$ . Dans cette dernière décomposition,  $[K_T^M]$  est la partie matérielle de la matrice de rigidité tangente consistante et  $[K_T^G]$  sa partie géométrique.

On obtient finalement l'équation d'équilibre incrémentielle discrète :

$$\{\bar{q}\}^T [K_T] \{\Delta q\} = \{\bar{q}\}^T \{F^{ext} - F^{int}\}, \forall \{\bar{q}\} \in Z_h \quad (3.93)$$

$[K_T]$  varie en fonction de la contrainte et de la déformation atteintes, et le problème d'équilibre virtuel est résolu itérativement jusqu'à ce que le terme résiduel du membre de droite de (3.93) s'annule, compte tenu de la précision choisie.

## **5. Modèle anisotrope d'ordre supérieur avec prise en compte de la rigidité en extension et flexion-cisaillement: Application au pantographe**

Pour construire le potentiel hyperélastique anisotrope dans le cadre de l'hyperélasticité anisotrope, il est nécessaire d'explicitier le tenseur de déformation de Cauchy-Green dans la base des fibres. Ce chapitre intègre également les tenseurs de déformation d'ordre supérieur pour caractériser la loi hyperélastique pour le milieu homogénéisé du pantographe du second gradient. Dans cette

partie, on exprime les champs cinématiques ainsi que l'énergie du milieu du second gradient de substitution jusqu'au second gradient (H. Rahali et al, 2015), (F. Dell'Isola et al, 2019) pour la structure pantographique.

La forme générale de la densité d'énergie s'appuie sur la classification des microstructures en termes de symétries matérielles. La structure pantographique est constituée d'un réseau composé de deux fibres équivalentes et non orthogonales, appelée structure rhombique. Les arguments de l'énergie de ce motif sont obtenus en fonction du groupe de symétrie matérielle de la structure considérée. Le groupe de symétrie matérielle agit dans la configuration de référence, ce qui correspond à une action à droite sur les gradients de transformation  $\nabla F$  et  $\nabla\nabla F$ , tandis que le groupe de changements d'observateur agit dans la configuration actuelle, soit à gauche du gradient de déformation. Selon les études antérieures, notamment (G. Indelicato et al, 2009), on peut écrire le potentiel élastique en fonction des gradients du tenseur de transformation  $F$  à l'ordre supérieur :

$$W=W (F, \nabla F, \nabla\nabla F) \quad (3.94)$$

Par objectivité (indifférence matérielle), le potentiel d'énergie élastique peut être écrit en fonction des tenseurs de déformation à l'ordre supérieur (3.91). La modification du théorème de Rychlewski (3.58) implique qu'une fonction de  $(C_i)_{i=1,\dots,n}$  invariante sous  $H$  peut être écrite comme une fonction isotrope (c'est-à-dire, invariante sous l'action de  $O(2)$ ), de la forme

$$W=\widehat{W}(C_i, A_\alpha), i \in \{1,\dots,3\} \quad (3.95)$$

Les invariants isotropes  $C_i$ , sont ensuite exprimés dans la base des fibres  $A_\alpha$  ; ces invariants sont choisis comme arguments du potentiel élastique, cette définition étant également appliquée aux tenseurs d'ordre supérieur. Dans ce travail nous limitons les variables cinématiques au second gradient ; afin d'écrire la loi constitutive de ce modèle, la cinématique est décrite par le tenseur gradient de la transformation :  $F=a_{,\alpha} \otimes A^\alpha$ , avec  $\alpha$  un indice entier qui numérote les fibres dans la structure, prenant les valeurs 1 et 2 pour le pantographe.

Nous considérons séparément les comportements en extension et en flexion, soit le potentiel élastique se décompose de façon additive en deux contributions distinctes :

$$\widehat{W}(C, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2) = \widehat{W}_{ex}(C, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2) + \widehat{W}_{flex}(C, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2) \quad (3.96)$$

où  $\widehat{W}_{ex}$  et  $\widehat{W}_{flex}$  sont les fonctions d'énergie de déformation en extension et en flexion respectivement.

### 5.1. Comportement en extension biaxiale

Dans le cas de l'extension biaxiale, le tenseur de gradient de transformation F est donné par :

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} = \lambda_1 & 0 \\ 0 & F_{22} = \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ou  $\lambda_i$  sont les élongations appliquées et les composantes du tenseur gradient de la transformation.

Considérons maintenant un repère cartésien  $(X_1, X_2)$  associé à la base  $(A_\alpha)$  ; dans ce système de coordonnées, nous pouvons exprimer le gradient de la transformation et son gradient spatial matériel par :

$$F = a_i \otimes A^i ; \nabla_X F = a_{i,\beta} \otimes A^i \otimes A^\beta \quad (3.97)$$

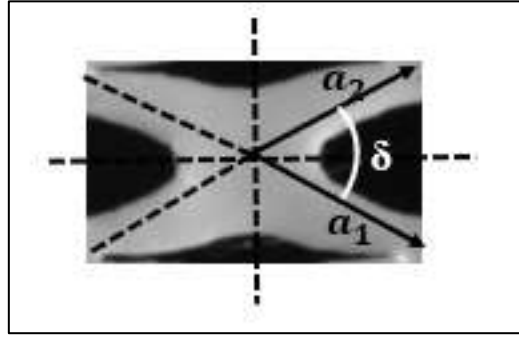
Dans le cas de l'extension biaxiale, le gradient de la transformation s'écrit :

$$F = a_1 \otimes A^1 + a_2 \otimes A^2 ; FA_\alpha = a_\alpha \quad (3.98)$$

Nous rappelons que  $\alpha$  désigne ici et par la suite un indice entier qui numérote les fibres dans la structure considérée (prenant les valeurs 1,2) :

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_1 A_1 = F_{11} A_1 \\ a_2 = \lambda_2 A_2 = F_{22} A_2 \end{cases}$$

Dans cette relation,  $a_1$  et  $a_2$  sont les vecteurs tangents aux courbes correspondant à chaque fibre dans la configuration déformée de la structure (Figure III-10), ici illustrés pour le pantographe.



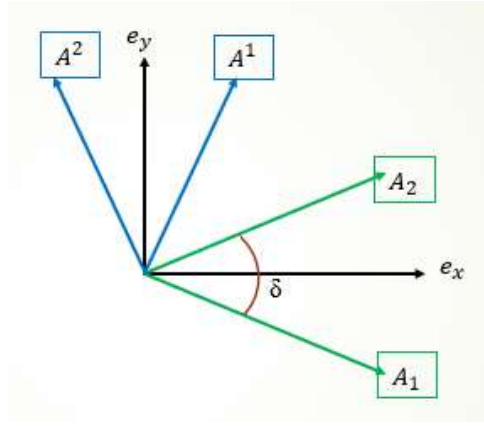
**Figure III-10 : Le pantographe dans la configuration déformée avec les deux vecteurs directeurs**

Pour identifier les directions principales d'anisotropie, on peut se baser sur le tenseur d'inertie de la structure, dont les directions principales définissent les directions principales d'anisotropie. Pour le pantographe, les directions principales d'anisotropie sont représentées sur la Figure III-7 et définissent les tenseurs de structure. Notons que toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs matériels définit également un axe de symétrie, leur demi somme et demi différence fournissant les deux directions d'orthotropie.

Pour les deux directions principales d'anisotropie géométriques définies par les deux populations de fibres, l'expression du gradient de transformation peut être exprimée dans la base mixte attachée aux deux fibres :

$$F = \lambda_1 A_1 \otimes A^1 + \lambda_2 A_2 \otimes A^2 \quad (3.99)$$

Soit  $(X_1, X_2)$ , un système de coordonnées cartésiennes dans  $\mathbb{R}^2$  de base définie par les vecteurs unitaires,  $A_1, A_2$  et soit  $A^1, A^2$  la base duale (voir la Figure III-11), telle que les produits des vecteurs de la base primale et duale satisfont les relations :  $A^i \cdot A_j = \delta_j^i$ , soit les composantes du tenseur identité d'ordre deux.



**Figure III-11 : base constituée des vecteurs associés aux fibres et leur vecteur dual**

Le gradient de la transformation F exprimé dans la base des fibres est :

$$\nabla_X F = \nabla_X (\lambda_1 A_1 \otimes A^1 + \lambda_2 A_2 \otimes A^2) = \lambda_{1,1} A_1 \otimes A^1 \otimes A^1 + \lambda_{1,2} A_1 \otimes A^1 \otimes A^2 + \lambda_{2,1} A_2 \otimes A^2 \otimes A^1 + \lambda_{2,2} A_2 \otimes A^2 \otimes A^2 \quad (3.100)$$

Pour le milieu de Cauchy, le tenseur de déformation de Cauchy-Green C est donné par :

$$\begin{aligned} C &= F^T F = (A^1 \otimes \lambda_1 A_1 + A^2 \otimes \lambda_2 A_2) \cdot (\lambda_1 A_1 \otimes A^1 + \lambda_2 A_2 \otimes A^2) \\ &= (\lambda_1^2) A^1 \otimes A^1 + (\lambda_1 \lambda_2 \cos \delta) A^1 \otimes A^2 + (\lambda_2 \lambda_1 \cos \delta) A^2 \otimes A^1 + (\lambda_2^2) A^2 \otimes A^2 \end{aligned} \quad (3.101)$$

Pour mieux prendre en compte l'effet du second gradient, il faut a priori inclure le tenseur  $C_2$  qui contient le gradient spatial du tenseur gradient de transformation F, les composants de ce tenseur représentant les arguments du potentiel hyperélastique (G. Indelicato et al, 2009) : ce tenseur de déformation de Cauchy-Green d'ordre 3 s'exprime selon :

$$\begin{aligned} C_2 &= F^T \nabla F = [A^1 \otimes \lambda_1 A_1 + A^2 \otimes \lambda_2 A_2] \cdot [\lambda_{1,1} A_1 \otimes A^1 \otimes A^1 + \lambda_{1,2} A_1 \otimes A^1 \otimes A^2 + \lambda_{2,1} A_2 \otimes A^2 \otimes A^1 + \lambda_{2,2} A_2 \otimes A^2 \otimes A^2] \\ &= (\lambda_1 \lambda_{1,1}) A^1 \otimes A^1 \otimes A^1 + (\lambda_1 \lambda_{1,2}) A^1 \otimes A^1 \otimes A^2 + (\lambda_1 \lambda_{2,1} \cos \delta) A^1 \otimes A^2 \otimes A^1 + \\ &(\lambda_1 \lambda_{2,2} \cos \delta) A^1 \otimes A^2 \otimes A^2 + (\lambda_2 \lambda_{1,1} \cos \delta) A^2 \otimes A^1 \otimes A^1 + (\lambda_2 \lambda_{1,2} \cos \delta) A^2 \otimes A^1 \otimes A^2 + \\ &(\lambda_2 \lambda_{2,1}) A^2 \otimes A^2 \otimes A^1 + (\lambda_2 \lambda_{2,2}) A^2 \otimes A^2 \otimes A^2 \end{aligned} \quad (3.102)$$



Dans le cas de l'isotropie transverse, on peut exprimer le potentiel élastique en fonction des tenseurs de déformation de Cauchy-Green à l'ordre supérieur, soit :

$$W=W(\mathbf{C}, \mathbf{C}_2) \quad (3.103)$$

Les tenseurs de déformation de Cauchy-Green sont bien écrits dans la base des fibres de la structure pantographique, et ils traduisent ainsi l'anisotropie de la structure. Ces tenseurs contiennent tous les invariants indépendants de l'énergie, qui sont les composantes du gradient de la transformation F auxquels on ajoute ses gradients dans les directions des deux 'fibres' ou directions principales d'anisotropie de la structure pantographique.

## 5.2. Comportement en cisaillement

Dans le cas du cisaillement pur, le tenseur de gradient de transformation F est donné par :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & F_{12} = \lambda_{12} \\ F_{21} = \lambda_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

En se basant sur l'équation (3.97), les vecteurs  $a_1$  et  $a_2$  sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} a_1 = A_1 + \lambda_{12}A_2 = F_{11}A_1 + F_{12}A_2 \\ a_2 = \lambda_{21}A_1 + A_2 = F_{21}A_1 + F_{22}A_2 \end{cases}$$

Par la suite, le tenseur de gradient de transformation F et son transposé sont donnés par :

$$F = (A_1 + \lambda_{12}A_2) \otimes A^1 + (\lambda_{21}A_1 + A_2) \otimes A^2 \quad (3.104)$$

$$F^T = A^1 \otimes (A_1 + \lambda_{12}A_2) + A^2 \otimes (\lambda_{21}A_1 + A_2) \quad (3.105)$$

Pour le milieu de Cauchy, le tenseur de déformation de Green-Cauchy C s'exprime selon :

$$C = F^T F = (A^1 \otimes (A_1 + \lambda_{12}A_2) + A^2 \otimes (\lambda_{21}A_1 + A_2)) \cdot ((A_1 + \lambda_{12}A_2) \otimes A^1 + (\lambda_{21}A_1 + A_2) \otimes A^2)$$

$$= (A_1 + \lambda_{12}A_2)^2 A^1 \otimes A^1 + (A_1 + \lambda_{12}A_2)(\lambda_{21}A_1 + A_2) A^1 \otimes A^2 + (\lambda_{21}A_1 + A_2)(A_1 +$$

$$\lambda_{12}A_2) A^2 \otimes A^1 + (\lambda_{21}A_1 + A_2)^2 A^2 \otimes A^2 = (2\lambda_{12}\cos\delta + \lambda_{12}^2) A^1 \otimes A^1 + (\cos\delta + \lambda_{12} + \lambda_{21} +$$

$$\lambda_{12}\lambda_{21}\cos\delta) A^1 \otimes A^2 + (\cos\delta + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{21}\cos\delta)A^2 \otimes A^1 + (2\lambda_{21}\cos\delta + \lambda_{21}^2) A^2 \otimes A^2 \quad (3.106)$$

Le gradient de gradient de la transformation F s'exprime dans la base des fibres selon :

$$\nabla_x F = \nabla_x((A_1 + \lambda_{12}A_2) \otimes A^1 + (\lambda_{21}A_1 + A_2) \otimes A^2) = \lambda_{12,1}A_2 \otimes A^1 \otimes A^1 + \lambda_{12,2}A_2 \otimes A^1 \otimes A^2 + \lambda_{21,1}A_1 \otimes A^2 \otimes A^1 + \lambda_{21,2}A_1 \otimes A^2 \otimes A^2 \quad (3.107)$$

Le tenseur de déformation de Cauchy-Green d'ordre 3 s'exprime dans la base des fibres selon :

$$\begin{aligned} C_2 &= F^T \nabla F = [A^1 \otimes (A_1 + \lambda_{12}A_2) + A^2 \otimes (\lambda_{21}A_1 + A_2)] \cdot [\lambda_{12,1}A_2 \otimes A^1 \otimes A^1 + \lambda_{12,2}A_2 \otimes A^1 \otimes A^2 + \lambda_{21,1}A_1 \otimes A^2 \otimes A^1 + \lambda_{21,2}A_1 \otimes A^2 \otimes A^2] \\ &= ((A_1 + \lambda_{12}A_2)\lambda_{12,1}A_2) A^1 \otimes A^1 \otimes A^1 + ((A_1 + \lambda_{12}A_2)\lambda_{12,2}A_2) A^1 \otimes A^1 \otimes A^2 + ((A_1 + \lambda_{12}A_2)\lambda_{21,1}A_1) A^1 \otimes A^2 \otimes A^1 + ((A_1 + \lambda_{12}A_2)\lambda_{21,2}A_1) A^1 \otimes A^2 \otimes A^2 + ((\lambda_{21}A_1 + A_2)\lambda_{12,1}A_2) A^2 \otimes A^1 \otimes A^1 + ((\lambda_{21}A_1 + A_2)\lambda_{12,2}A_2) A^2 \otimes A^1 \otimes A^2 + ((\lambda_{21}A_1 + A_2)\lambda_{21,1}A_1) A^2 \otimes A^2 \otimes A^1 + ((\lambda_{21}A_1 + A_2)\lambda_{21,2}A_1) A^2 \otimes A^2 \otimes A^2 \\ &= (\lambda_{12,1}\cos\delta + \lambda_{12}\lambda_{12,1})A^1 \otimes A^1 \otimes A^1 + (\lambda_{12,2}\cos\delta + \lambda_{12}\lambda_{12,2})A^1 \otimes A^1 \otimes A^2 + (\lambda_{21,1} + \lambda_{12}\lambda_{21,1}\cos\delta)A^1 \otimes A^2 \otimes A^1 + (\lambda_{21,2} + \lambda_{12}\lambda_{21,2}\cos\delta)A^1 \otimes A^2 \otimes A^2 + (\lambda_{21}\lambda_{12,1}\cos\delta)A^2 \otimes A^1 \otimes A^1 + (\lambda_{21}\lambda_{12,2}\cos\delta + \lambda_{12,2})A^2 \otimes A^1 \otimes A^2 + (\lambda_{21}\lambda_{21,1} + \lambda_{21,1}\cos\delta)A^2 \otimes A^2 \otimes A^1 + (\lambda_{21}\lambda_{21,2} + \lambda_{21,2}\cos\delta)A^2 \otimes A^2 \otimes A^2 \quad (3.108) \end{aligned}$$

Pour une structure pantographique rhombique, qui comporte deux fibres équivalentes qui ne sont pas orthogonales (Figure III-7), le groupe de symétrie décrivant l'anisotropie de cette structure est généré par les transformations orthogonales suivantes :

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ \sin\delta & -\cos\delta \end{pmatrix}; R_2 = \begin{pmatrix} -\cos\delta & -\sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}$$

où  $\delta$  est l'angle entre les directions principales des fibres, et la représentation matricielle est ici écrite dans la base orthonormée  $(A_1, j)$ , avec l'axe  $j$  orthogonal à  $A_1$ . Notons que  $R_1$  et  $R_3$  sont les réflexions par rapport aux lignes coupant l'angle entre  $A_1$  et  $A_2$  et l'axe orthogonal à celui-ci.

Pour résumer le développement de tenseurs de déformations pour le milieu de Cauchy et du second gradient, le tableau suivant résume les invariants indépendants pour les deux milieux dans les deux cas de charge. Les composantes des matrices de la déformation de Green-Cauchy sont les invariants de l'énergie de déformation qui prennent en compte l'anisotropie de la structure.

**Tableau III-1 : Invariants indépendants du milieu de Cauchy et du second gradient pour la structure parallélogramme**

Extension		Cisaillement	
Cauchy	Second gradient	Cauchy	Second gradient
$\lambda_1^2$	$(\lambda_1 \lambda_{1,1})$	$(2\lambda_{12} \cos \delta + \lambda_{12}^2)$	$(\lambda_{12,1} \cos \delta + \lambda_{12} \lambda_{12,1})$
$\lambda_1 \lambda_2 \cos \delta$	$(\lambda_1 \lambda_{1,2})$	$(\lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{12} \lambda_{21} \cos \delta)$	$(\lambda_{12,2} \cos \delta + \lambda_{12} \lambda_{12,2})$
$\lambda_2^2$	$(\lambda_1 \lambda_{2,1} \cos \delta)$	$(2\lambda_{21} \cos \delta + \lambda_{21}^2)$	$(\lambda_{21,1} + \lambda_{12} \lambda_{21,1} \cos \delta)$
	$(\lambda_1 \lambda_{2,2} \cos \delta)$		$(\lambda_{21,2} + \lambda_{12} \lambda_{21,2} \cos \delta)$
	$(\lambda_2 \lambda_{1,1} \cos \delta)$		$(\lambda_{21} \lambda_{12,1} \cos \delta + \lambda_{12,1})$
	$(\lambda_2 \lambda_{1,2} \cos \delta)$		$(\lambda_{21} \lambda_{12,2} \cos \delta + \lambda_{12,2})$
	$(\lambda_2 \lambda_{2,1})$		$(\lambda_{21} \lambda_{21,1} + \lambda_{21,1} \cos \delta)$
	$(\lambda_2 \lambda_{2,2})$		$(\lambda_{21} \lambda_{21,2} + \lambda_{21,2} \cos \delta)$

avec  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$  et  $\lambda_{21}$  les composantes de la matrice gradient de la transformation, qui correspondent aux modes de déformation en extension dans les directions 1 et 2 et en cisaillement respectivement. Les gradients des variables  $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,1}$  et  $\lambda_{2,2}$  sont les composantes du gradient d'extension dans les directions des fibres 1 et 2 respectivement. Les variables  $\lambda_{12,1}, \lambda_{12,2}, \lambda_{21,1}$  et  $\lambda_{21,2}$  sont les composantes du gradient de cisaillement dans la direction des fibres 1 et 2 respectivement. Au total, on recense 5 invariants pour le milieu de Cauchy et 16 pour le comportement propre au second gradient. Pour un milieu incompressible, les invariants strictement indépendants seront en nombre plus réduits (lorsque l'on prend en compte la condition d'incompressibilité et ses conséquences différentielles).

Dans le cas de deux fibres équivalentes en termes de leurs propriétés, la structure est dite rhombique, ce qui est le cas du pantographe, et les invariants indépendants présentent alors une symétrie supplémentaire par permutation des deux directions matérielles associées. On obtient alors le tableau des invariants suivants :

**Tableau III-2 : Invariants indépendants du milieu de Cauchy et du second gradient pour la structure rhombique**

Extension		Cisaillement	
Cauchy	Second gradient	Cauchy	Second gradient
$\lambda_1^2 +$	$(\lambda_1\lambda_{1,1} + \lambda_2\lambda_{2,2})$	$(2\lambda_{12}\cos\delta + \lambda_{12}^2) + (2\lambda_{21}\cos\delta +$	$(\lambda_{12,1}\cos\delta + \lambda_{12}\lambda_{12,1}) +$
$\lambda_2^2$	$(\lambda_1\lambda_{1,2} + \lambda_2\lambda_{2,1})$	$\lambda_{21}^2)$	$(\lambda_{21}\lambda_{21,2} + \lambda_{21,2}\cos\delta)$
$\lambda_1\lambda_2\cos\delta$	$(\lambda_1\lambda_{2,1} + \lambda_2\lambda_{1,2})\cos\delta$	$(\lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{21}\cos\delta)$	$(\lambda_{12,2}\cos\delta + \lambda_{12}\lambda_{12,2}) +$
	$(\lambda_1\lambda_{2,2} + \lambda_{1,1})\cos\delta$		$(\lambda_{21}\lambda_{21,1} + \lambda_{21,1}\cos\delta) +$
			$(\lambda_{21,1} + \lambda_{12}\lambda_{21,1}\cos\delta) +$
			$(\lambda_{21}\lambda_{12,2}\cos\delta + \lambda_{12,2})$
			$(\lambda_{21,2} + \lambda_{12}\lambda_{21,2}\cos\delta) +$
			$(\lambda_{21}\lambda_{12,1}\cos\delta + \lambda_{12,1})$

On obtient alors quatre invariants pour Cauchy (extension et cisaillement) et huit invariants pour la densité du second gradient.

## 6. Discussion et conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une méthode d'homogénéisation en grandes déformations vers un milieu anisotrope nonlinéaire du second gradient. L'identification des invariants indépendants de l'énergie de déformation hyperélastique exprimés dans la base des directions matérielles d'anisotropie a été faite pour les modes de déformation en extension et en cisaillement pour les réponses du premier et du second gradient successivement. L'homogénéisation est formulée dans un cadre incrémental ; la structure de référence qui a été abordée et étudiée pour modéliser l'anisotropie est le pantographe. Cette méthode d'homogénéisation nonlinéaire peut être appliquée pour plusieurs types de matériaux sièges de grandes déformations, soit notamment les matériaux composites et les matériaux architecturés souples. Sur la base d'une formulation variationnelle du problème d'homogénéisation et l'écriture des problèmes de cellules incrémentaux, une discrétisation par

éléments finis de la forme faible de l'équilibre incrémental a été faite pour construire les modules tangents macroscopiques et suivre la déformée de la microstructure sur un chemin de déformation appliqué.

Dans le chapitre suivant, une validation de l'homogénéisation nonlinéaire sera réalisée par des simulations éléments finis, suivie de l'identification des paramètres d'un modèle hyperélastique anisotrope pour le pantographe à l'échelle macroscopique, le potentiel hyperélastique s'appuyant sur le jeu d'invariant mis en évidence dans ce présent chapitre. Des essais et des simulations numériques seront réalisés pour plusieurs modes de déformation avec le code EF FreeFem++, en utilisant les paramètres de la loi de comportement du matériau de base du pantographe (un matériau souple de type TPE) qui seront identifiés par une campagne d'essais mécaniques.

## Liste de références

Ogden R.W. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the royal society of London A*, 1972, vol. 326, pp. 565-584.

P. G. Ciarlet and G. Geymonat. Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre*, 295(4) :423–426, 1982.

Tie Jun Cui, David Smith, Ruopeng Liu, *Metamaterials, Theory, Design, and Applications*, 2010.

Y. Prawoto, Seeing auxetic materials from the mechanics point of view: a structural review on the negative Poisson's ratio, *Comput. Mater. Sci.*, 2012, 58, 140–153.

N. Karathanasopoulos, F.Dos Reis, H.Redac, J-F.Ganghoffer, Computing the effective bulk and normal to shear properties of common two-dimensional architected materials, *Journal of Computational Materials Science*, Volume 154, 2018, Pages 284-294.

F. dell'Isola, T. Lekszycki, M. Pawlikowsk, R. Grygoruk, L. Greco,,: Designing a light fabric metamaterial being highly macroscopically tough under directional extension: first experimental evidence. *Z. angew. Math. Phys.* 66, 3473–3498 (2015).

F. dell'Isola, I. Giorgio, M. Pawlikowsk., N. Rizzi, Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. *Proc. R. Soc. A* 472(2185), 23 (2016).

G. Milton., M. Briane, D. Harutyunyan, On the possible effective elasticity tensors of 2-dimensional and 3-dimensional printed materials. *Math. Mech. Complex Syst.* 5(1), 41–94 (2017).

V.A. Eremeyev, W. Pietraszkiewicz, Material symmetry group and constitutive equations of micropolar anisotropic elastic solids. *Math. Mech. Solids* 21(2), 210–221 (2016).

A. Bertram, R. Glüge, Gradient materials with internal constraints. *Math. Mech. Complex Syst.* 4(1), 1–15 (2016).

L. Russo, *The Forgotten Revolution: How Science Was Born in 300 BC and Why It Had to Be Reborn.* Springer, Berlin (2013).

A. Madeo, G. Barbagallo, M.V. D'Agostino, P. Boisse, Continuum and discrete models for unbalanced woven fabrics, *International Journal of Solids and Structures*, Volumes 94–95, September 2016, Pages 263-284.

R.D.MindlinN.N.Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 4, Issue 1, January 1968, Pages 109-124.

C.W.Lim, G. Zhang, J.N.Reddy, A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 78, May 2015, Pages 298-313.

M.Ayad, N.Karathanasopoulos, J.F.Ganghoffer, H.Lakiss, Higher-gradient and micro-inertia contributions on the mechanical response of composite beam structures, *International Journal of Engineering Science*, Volume 154, 2020, 103318.

J.F.Ganghoffer, H.Redha, A variational approach of homogenization of heterogeneous materials towards second gradient continua, *Mechanics of Materials*, Volume 158, July 2021, 103743.

J. P. Boehler, On a Rational Formulation of Isotropic and Anisotropic Hardening, *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics* pp 99-122, 1987.

Y. Rahali, J-F. Ganghoffer, F. Chaouachi, A. Zghal, Strain Gradient Continuum Models for Linear Pantographic Structures: A Classification Based on Material Symmetries, *J. Geom. Symmetry Phys.* 40: 35-52 (2015). DOI: 10.7546/jgsp-40-2015-35-52.

A. Lahbazi, I. Goda, J-F. Ganghoffer, Size-independent strain gradient effective models based on homogenization methods: Applications to 3D composite materials, pantograph and thin walled lattices, *Composite Structures*, Volume 284, 2022, 115065.

R. S. Rivlin, Large elastic deformations of isotropic materials IV. further developments of the general theory, *Mathematical, Physical And Engineering Sciences*, Volume 241 Issue 835, 1948.

L. J. Hart-Smith , Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* volume 17, pages608–626 (1966).

L. R. G. Treloar, Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation, *Transactions of the Faraday Society* 1971, Volume 67, Page 1 to 3681.

M. Mooney, A THEORY OF LARGE ELASTIC DEFORMATION, *Journal of applied physics* 11, 582 (1940).

G. A. Holzapfel, *Nonlinear solid mechanics, A continuum approach for engineering*, 2000.

- P. Heuillet, Modélisation du comportement hyperélastique des caoutchoucs et élastomères thermoplastiques, compacts ou cellulaires. SIA, 1995, pp. 1-26.
- R. S. Rivlin, D. W. Saunders, Large elastic deformations of isotropic materials. (vii) experiments on the deformation of rubber, Philosophical transactions royal society, 1951, vol. 243, pp. 251-288.
- A.J.M. Spencer, A static theory of finite elasticity. Journal of the institute of mathematics and its applications, 1970, vol. 6, pp. 164-200.
- C. TRUESDELL, W. NOLL, The nonlinear field theories of mechanics. SpringerVerlag, Berlin, 1992, 602 p.
- C. Simon, C. Deck. & R. Willinger, An anisotropic viscous hyperelastic constitutive law for brain material finite-element modeling, Journal of Biorheology volume 27, pages26–37 (2012).
- D.R.Nolan, A.L.Gower, M.Destrade, R.W.Ogden, J.P.M cGarry, A robust anisotropic hyperelastic formulation for the modelling of soft tissue, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, Volume 39, 2014, Pages 48-60.
- J. Schröder, P. Neff, Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions, International Journal of Solids and Structures 40 (2003) 401–445.
- A.J.M. Spencer, Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites, International Centre for Mechanical Sciences book series (CISM, volume 282), 1984.
- G. Indelicato and A. Albano, Symmetry Properties of the Elastic Energy of a Woven Fabric with Bending and Twisting Resistance, Journal of Elasticity volume 94, Article number: 33 (2009).
- G. A. Holzapfel, T. C. Gasser and R. W. Ogden, A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models, Journal of elasticity and the physical science of solids volume 61, pages1–48 (2000).



J.M. Zhang and J. Rychlewski, Structural tensors for anisotropic solids, Arch. Mech, 1990.

F. dell'Isola et al, Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges, Continuum Mechanics and Thermodynamics volume 31, pages851–884 (2019).

## **IV. Identification d'un modèle anisotrope macroscopique par des essais réels et virtuels (numériques) sur un pantographe souple**

Les structures pantographiques constituées d'un matériau souple sont le siège de grandes déformations dans le domaine élastique. L'objectif principal de ce chapitre est de construire un modèle hyperélastique anisotrope du second gradient de structures pantographiques par une analyse mathématique reposant sur des invariants cinématiques du premier et second gradient. Une identification des paramètres de la loi de comportement hyperélastique microscopique décrivant la réponse mécanique du matériau de base est effectuée, à partir d'essais mécaniques en traction réalisés sur des éprouvettes architecturées avec une microstructure du pantographe. Une méthode d'homogénéisation nonlinéaire vers un milieu du second gradient est présentée, afin d'identifier un potentiel macroscopique hyperélastique du second gradient à l'échelle d'un milieu continu de substitution. Les invariants structuraux prenant en compte l'anisotropie sont construits à partir des projections des tenseurs de déformation Lagrangiens du premier et second gradient dans la base matérielle constituée des directions principales d'anisotropie. Ils définissent les arguments de la densité hyperélastique à l'échelle du milieu continu de substitution du second gradient. Les coefficients du potentiel hyperélastique sont ensuite identifiés par comparaison avec la réponse numérique prédite par l'homogénéisation pour différents modes de déformation appliqués sur la cellule de base du pantographe. Une validation du modèle d'homogénéisation hyperélastique anisotrope en grandes déformations est effectuée en comparant la réponse prédite à l'échelle de la cellule unitaire du pantographe avec celle mesurée par des essais expérimentaux. Des applications sur différents matériaux architecturés sont effectuées.

## Table des matières :

IV. Identification d'un modèle anisotrope macroscopique par des essais réels et virtuels (numériques) sur un pantographe souple .....	152
1. Introduction.....	156
2. Essais en traction sur la structure pantographique .....	157
3. Identification du potentiel macroscopique anisotrope du pantographe .....	165
3.1. Identification d'un modèle microscopique hyperélastique de Ciarlet-Geymonat et validation de la méthode d'homogénéisation en grandes déformations .....	165
3.2. Identification des paramètres du potentiel macroscopique du modèle hyperélastique au premier gradient.....	167
3.3. Identification des paramètres du potentiel macroscopique pour le milieu du second gradient.....	174
3.3.1. Problème aux valeurs limites microscopique.....	175
3.3.2. Linéarisation et discrétisation du problème nonlinéaire au second gradient.....	177
3.3.2.1. Discrétisation élément finis au second gradient .....	179
3.3.3. Identification du potentiel hyperélastique macroscopique du second gradient.	184
4. Applications matériaux composites et auxétiques 2D .....	191
5. Discussion et conclusion.....	195

## Liste des figures :

Figure IV-1 : Epreuve architecturée comportant une microstructure périodique de type pantographe .....	158
Figure IV-2 : Distribution des déformations $E_{11}$ et $E_{22}$ en traction .....	159
Figure IV-3 : Défauts de fabrication, épreuve et zoom sur la cellule unité.....	161

Figure IV-4 : Dispositif d'essai en extension .....	162
Figure IV-5 : Réponse mécanique mesurée du pantographe en extension .....	163
Figure IV-6 : Cellule unitaire suivie pour la corrélation d'images .....	163
Figure IV-7 : Champ de déplacement $Ux$ à l'état initial et final.....	164
Figure IV-8 : Champ de déformation $E_{xx}$ à l'état initial (vue de gauche) et déformé (vue de droite) .....	164
Figure IV-9 : Comparaison de la réponse mécanique mesurée lors des essais de traction uniaxiaux et celle prédite par la méthode d'homogénéisation.....	166
Figure IV-10 : Comparaison des champs de déformation mesurés sur éprouvette sollicitée en traction et par la simulation numérique par éléments finis .....	166
Figure IV-11 : Réponse numérique effective à l'échelle de la cellule unitaire pour plusieurs modes de déformation appliqués.....	169
Figure IV-12 : Evolution de la réponse macroscopique du modèle analytique et numérique en extension uniaxiale.....	172
Figure IV-13 : Evolution de la réponse macroscopique du modèle analytique et numérique en extension biaxiale.....	172
Figure IV-14 : Evolution de la réponse macroscopique du modèle analytique et numérique en cisaillement .....	173
Figure IV-15 : Contrainte de Piola-Kirchoff 2 dans la direction y en fonction de la déformation pour un VER de pantographe pour différentes valeurs du rapport de biaxialité.....	174
Figure IV-16 : Méthodes d'analyse incrémentale et de corrections itératives pour rétablir l'équilibre à chaque pas de temps.....	183
Figure IV-17 : Algorithme de la méthode d'homogénéisation incrémentale en grandes déformations .....	184
Figure IV-18 : Réponses prédites en gradient d'extension uniaxiale purement du second gradient	187
Figure IV-19 : Réponses prédites en gradient d'extension biaxial purement du second gradient	187

Figure IV-20 : Réponses prédites en gradient cisaillement purement second gradient .....	188
Figure IV-21 : Evolution des composantes $S_{111}, S_{222}, S_{121}$ de l'hypercontrainte prédites par l'homogénéisation nonlinéaire et le modèle analytique.....	189
Figure IV-22 : Evolution de la composante normale $S_{22}$ de l'hypercontrainte en fonction des dilatations principales obtenue par l'homogénéisation et le modèle hyperélastique du second gradient identifié à l'échelle macroscopique pour différents rapports de biaxialité .....	190
Figure IV-23 : Evolution de l'énergie macroscopique extensionnelle de la réponse du premier gradient, du second gradient et la réponse globale. ....	191
Figure IV-24 : (a) Composite avec vide circulaire (C-V-C), (b) composite avec vide rectangulaire (C-V-R), (c) composite avec vide losange, (d) auxétique rentrant, (e) pantographe. ....	192
Figure IV-25 : Réponses prédites en traction pour le milieu de Cauchy .....	193
Figure IV-26 : La forme de déformée et champ des contraintes von mises pour les différentes structures .....	194
Figure IV-27 : Réponses prédites en gradient d'extension uniaxiale purement du second gradient pour les différents matériaux.....	195

### Liste des tableaux :

Tableau IV-1 : Propriétés mécaniques du matériau de base, le TPE (SMARTFil) .....	159
Tableau IV-2 : Paramètres identifiés de la loi Ciarlet-Geymonat en MPa .....	165
Tableau IV-3 : ensemble des paramètres du potentiel macroscopique hyperélastique.....	171
Tableau IV-4 : Paramètres matériau du potentiel hyperélastique du second gradient.....	188

## 1. Introduction

Ce chapitre a pour objet l'identification d'un potentiel hyperélastique macroscopique de matériaux architecturés souples périodiques à l'échelle d'un milieu continu de substitution, appuyée par une démarche d'homogénéisation. Dans une première étape, les paramètres du matériau à l'échelle microscopique sont identifiés par une approche inverse, moyennant le choix d'un modèle hyperélastique du matériau de base à l'échelle microscopique : nous avons choisi le modèle hyperélastique de Ciarlet-Geymonat (C-G en abrégé) (P. G. Ciarlet and G. Geymonat, 1982), (P. G. Ciarlet, 1988), qui est implémenté dans le code FreeFem++. Ce modèle (C-G) propose une fonction d'énergie interne polyconvexe, voire les travaux de (K. Trabelsi, 2004) pour plus détails, avec une énergie de déformation  $W$  convexe en fonction des invariants du tenseur gradient de la transformation  $F$ . La classe des fonctions polyconvexes a été proposée par Ball (J.M. Ball, 1976) ; ces fonctions présentent des propriétés mathématiques permettant de minimiser le problème d'équilibre associé, compatible avec des modèles de lois de comportement tels que les matériaux d'Ogden et de Mooney-Rivlin (dans le cas incompressible).

Les paramètres du matériau qui interviennent dans les équations constitutives qui expriment la réponse de dernier sous l'action d'une déformation macroscopique appliquée sont identifiés à partir des réponses expérimentales (G. A. Holzapfel. et R. W. Ogden, 2009b). Des essais de traction seront réalisés sur une structure pantographique complète, sur la base desquels nous pourrons identifier les paramètres de la loi hyperélastique choisie avec l'application « courbe d'ajustement » (en anglais « Curve Fitting) disponible dans Matlab. Nous utilisons l'algorithme de Levenberg-Marquardt (dit algorithme LM), qui permet d'obtenir une solution numérique au problème de minimisation d'une fonction, souvent nonlinéaire et dépendant de plusieurs variables. L'algorithme repose sur la méthode de Gauss-Newton et l'algorithme du gradient.

La construction du potentiel macroscopique hyperélastique permet a priori d'obtenir un modèle très riche en termes de prédiction des réponses macroscopiques pour plusieurs modes de déformation possibles. La démarche d'identification du potentiel hyperélastique s'appuie sur les étapes suivantes :

- Réalisation d'essais mécaniques sur la structure pantographique et corrélation d'images.
- Identification des paramètres de la loi hyperélastique microscopique par l'algorithme LM.
- Validation de la méthode d'homogénéisation en grandes déformations en comparant la réponse macroscopique fournie par le code FreeFem++ avec la réponse mécanique expérimentale.
- Prédiction des réponses numériques pour plusieurs modes de déformation macroscopique imposée sur la cellule unité (avec le code de calcul par éléments finis FreeFem++), afin d'identifier le potentiel hyperélastique macroscopique du milieu continu de substitution.
- Identification des paramètres du potentiel macroscopique du milieu effectif, ce pour les contributions du premier et du second gradient de la loi de comportement du milieu de substitution.

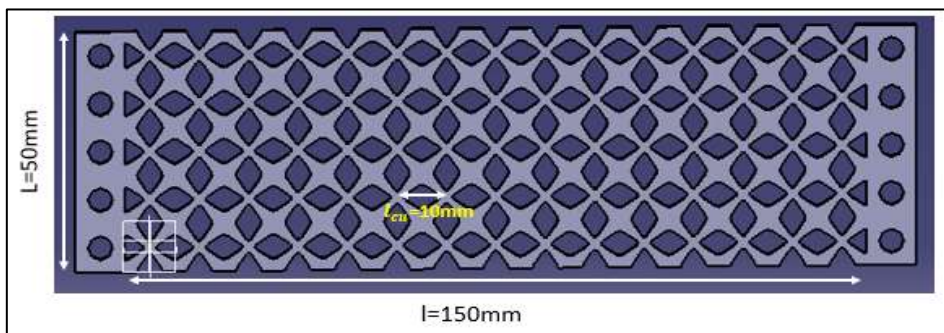
Ce chapitre aborde les développements numériques issus de la démarche d'homogénéisation au second gradient exposée dans le chapitre 3, dans le contexte de l'hyperélasticité anisotrope en grandes déformations. La structure pantographique qui se prête bien à des modélisations de type second gradient est choisie comme application.

## **2. Essais en traction sur la structure pantographique**

Afin de caractériser un matériau hyperélastique, il est nécessaire de choisir un modèle et de déterminer ses paramètres par une méthode inverse qui repose sur des essais mécaniques. Plus précisément, la méthodologie mise en œuvre dans cette thèse repose sur : i) l'identification des coefficients de la loi de comportement hyperélastique microscopique à partir d'essais mécaniques sur éprouvette architecturée, ii) la prédiction de la réponse de la structure en utilisant un modèle homogénéisé en grandes déformations (qui remplace la cellule hétérogène par un milieu homogène équivalent), et iii) la comparaison de la réponse numérique prédite à l'échelle macroscopique avec la réponse mesurée de l'éprouvette. Cette validation macroscopique de la loi de comportement microscopique est ensuite

faite à l'échelle microscopique en comparant les distributions spatiales des champs de déformation entre les mesures (par corrélation d'images) et les simulations EF.

Dans ce cadre, des essais mécaniques expérimentaux en traction et en grandes déformations ont été réalisés sur des éprouvettes architecturées à microstructure périodique pantographique (Figure IV-1).



**Figure IV-1 : Eprouvette architecturée comportant une microstructure périodique de type pantographe**

Cette éprouvette est modélisée par des essais virtuels (numériques) réalisés avec le code d'éléments finis Abaqus, afin d'en optimiser la taille minimale requise en termes du nombre de répétitions de la cellule élémentaire, avec pour objectif d'éviter les effets de bords et d'obtenir une zone centrale non perturbée par ces derniers. Nous avons ainsi varié le nombre de répétitions de la cellule élémentaire sur la longueur et la largeur de l'éprouvette dans le plan (X, Y) ; les mêmes chargements cinématiques sont appliqués afin d'obtenir une éprouvette qui ne présente pas d'effets de bords, soit celle qui fournit un champ de déformation homogène et symétrique dans la zone centrale de l'éprouvette (Figure IV-2). Après ces essais, la taille optimale retenue est 15x5, soit une éprouvette avec une répétition de la cellule élémentaire de 15 fois dans la direction de la longueur L, direction principale de déformation en extension comme le montre la Figure IV-2, et de 5 fois selon la largeur l, direction perpendiculaire au chargement appliqué, avec un rapport  $L/l=3$ . Les résultats numériques (Figure IV-2) montrent que l'éprouvette retenue présente un champ de déformation très uniforme et symétrique, et qui respecte la symétrie de la structure pantographique. Parmi les études antérieures concernant les métamatériaux



pantographiques, on trouve les travaux de Francesco Dell’Isola (F. Dell’Isola et al, 2019) (F. Dell’Isola et al, 2015) et notamment la conception d’un métamatériau en tissu léger hautement résistant en traction, ainsi que (F. Dell’Isola et al, 2016) les auteurs traitant les grandes déformations de poutres extensibles planes et de réseaux pantographiques. Dans ces études, une même taille et élancement (longueur/ largeur) des éprouvettes ont été considérés. Le matériau de base des éprouvettes considéré dans cette étude pour obtenir une déformation qui dépasse 30% est un élastomère thermoplastique (TPE en anglais), ses propriétés mécaniques sont données dans le

Tableau IV-1.

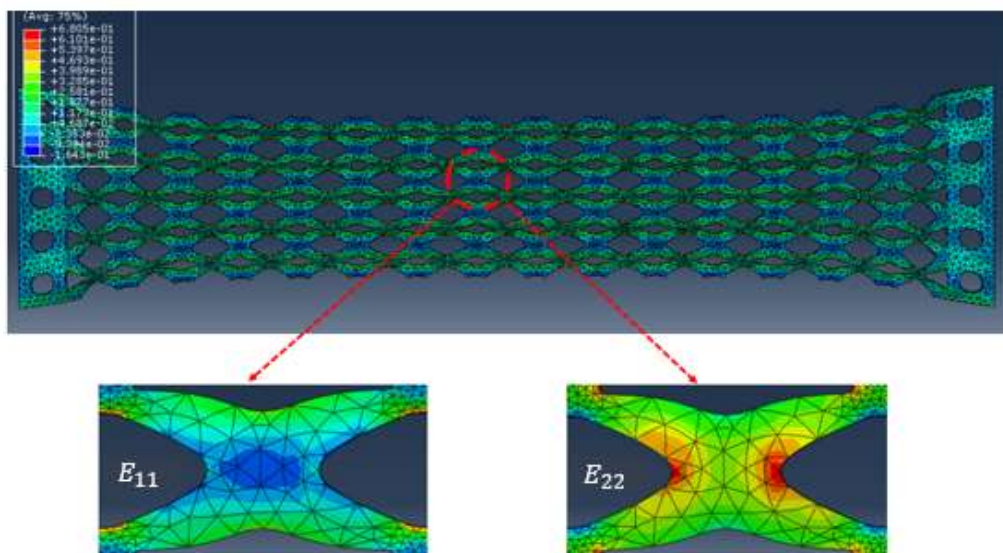


Figure IV-2 : Distribution des déformations  $E_{11}$  et  $E_{22}$  en traction

Tableau IV-1 : Propriétés mécaniques du matériau de base, le TPE (SMARTFil)

Propriétés mécaniques	Valeur	Unité	Méthode d’essai
Résistance à l’abrasion	35	$mm^3$	ISO 4649
Dureté	93	Shore A	ISO868
Résistance à la déchirure	180	N/mm	ISO 34-1 B/b
Résistance à la traction	40	MPa	ISO 37

Allongement à la rupture	500	%	ISO 37
Module 100%	9.5	MPa	ISO 37
Module 300%	19.5	MPa	ISO 37

Les données expérimentales (Figure IV-5) sont utilisées pour déterminer les paramètres du matériau hyperélastique, à l'aide de l'application « curve fitting » disponible sur MATLAB, qui permet de minimiser la somme des erreurs quadratiques entre les contraintes hyperélastiques théoriques du modèle hyperélastique de Ciarlet-Geymonat (4.1) et les contraintes expérimentales. Le modèle C-G est défini par la densité hyperélastique qui est celle d'un milieu du premier gradient à l'échelle microscopique :

$$W(I) = K_1(I_1 I_3^{-1/3} - 3) + K_2(I_2 I_3^{-2/3} - 3) + K_3(\sqrt{I_3} - 1 - (1/2)\log I_3) \quad (4.1)$$

avec  $K_1, K_2$  et  $K_3$  les paramètres du matériau, et  $I_1, I_2$  et  $I_3$  les invariants du tenseur de déformation Cauchy-Green  $C = F^T \cdot F$ .

La somme des erreurs au carré entre les prédictions du modèle et les mesures est définie comme suit :

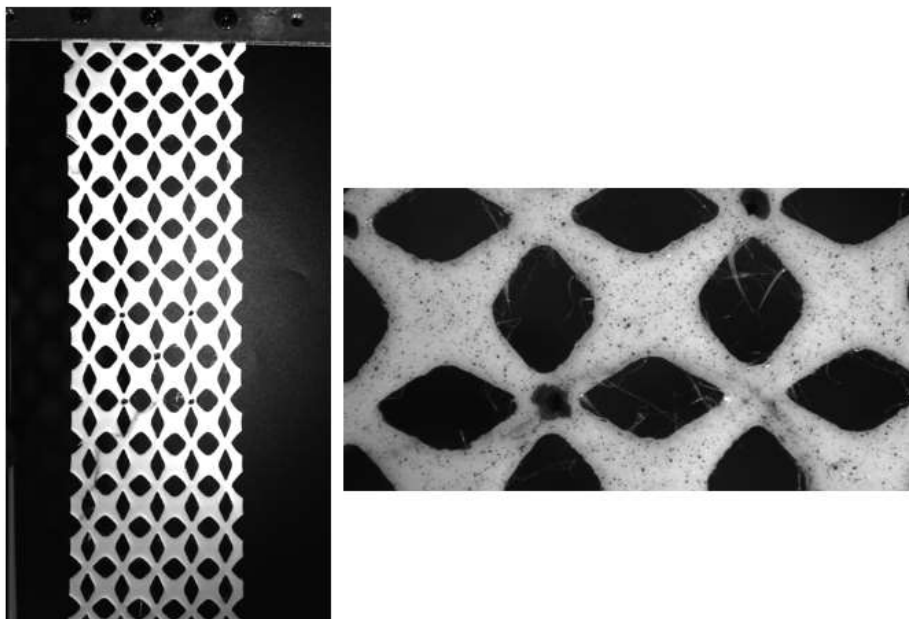
$$\sum_{i=1}^n Er_i = \sum_{i=1}^n (S_{model}(\lambda_i) - \sigma_{exp}(\lambda_i))^2 \quad (4.2)$$

avec  $S_{model}$  la contrainte de Piola-Kirchoff2 (PK2) donnée par l'équation (4.3) qui suit et  $\sigma_{exp}$  la contrainte obtenue expérimentalement,  $\lambda_i$  l'étirement et n le nombre de points de données de mesures.

La contrainte PK2 est obtenue à partir de la densité d'énergie de Eq.(4.1) selon la relation

$$\begin{aligned} S_{model} &= 2 * \left( \frac{dW}{dI_1} \frac{dI_1}{dC} + \frac{dW}{dI_2} \frac{dI_2}{dC} + \frac{dW}{dI_3} \frac{dI_3}{dC} \right) \\ &= 2 * \left( (k_1 I_3^{-1/3}) * I + (K_2 I_3^{-2/3}) * (I_1(C)I - C) + ((-1/3)K_1 I_1 I_3^{-4/3} - (2/3)K_2 I_2 I_3^{-5/3} + \left(\frac{bulk}{2\sqrt{I_3}} - (1/2)(1/I_3)\right) * \det(C)C^{-1}) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

L'éprouvette du test mécanique est fabriquée par la machine de l'impression 3D ultimaker S5 tout en utilisant le dépôt de filament fondu (fused deposition modeling), avec une précision de +/- 0.1 mm, mais elle présente quelques défauts de fabrication (microbilles, quelques taches de la matière hors éprouvette) (Figure IV-3) puisque l'épaisseur de l'éprouvette souhaitée est 1mm, ce qui n'est pas parfaitement convenable avec le procédé de la fabrication impression 3D. Ces défauts peuvent influencer le comportement effectif, mais dans notre cas ils sont mineurs et acceptables pour faire des essais mécaniques. Nous avons fabriqué d'autres éprouvettes par découpe au jet d'eau qui ne présentent pas des défauts avec un état de surface propre ; les mêmes essais sont effectués sur les deux éprouvettes, et nous avons trouvé quasiment la même réponse avec un erreur qui ne dépasse pas 5%.



**Figure IV-3 : Défauts de fabrication sur l'éprouvette et zoom sur la cellule unité**

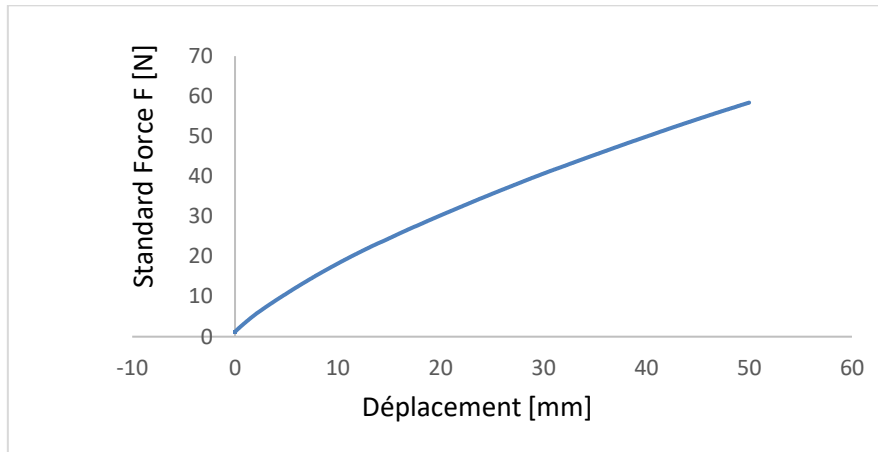
L'essai d'extension est fait sur une machine d'essais uniaxiale : un déplacement de 50 mm est appliqué conduisant à 33% de déformation maximale, avec une vitesse de déplacement constante de 0.25 mm/s, la longueur utile de l'éprouvette étant de 150mm (Figure IV-1). La corrélation d'images est faite en plaçant deux caméras en face de l'éprouvette (Figure IV-4) ; un mouchetis très fin ( Figure IV-8, Figure IV-8) est appliqué sur l'éprouvette avec pour objectif de capturer les déplacements des

points de ce mouchetis au sein d'une cellule élémentaire au cours de l'essai, et d'évaluer les champs de déplacement et de déformation par l'outil Ncorr (dans Matlab). L'intégralité de l'essai enregistré sous forme d'une vidéo de haute qualité, puis différentes images sont générées afin de disposer d'images de références à différents incréments du chargement imposé. L'outil Ncorr et les images prises permettent de trouver les champs de déplacement et de déformation sur la cellule élémentaire de l'éprouvette suivie lors de l'essai. Cette cellule est choisie dans le centre de l'éprouvette afin d'éviter les effets de bords, également nous avons pris la cellule qui représente le moins de défauts.



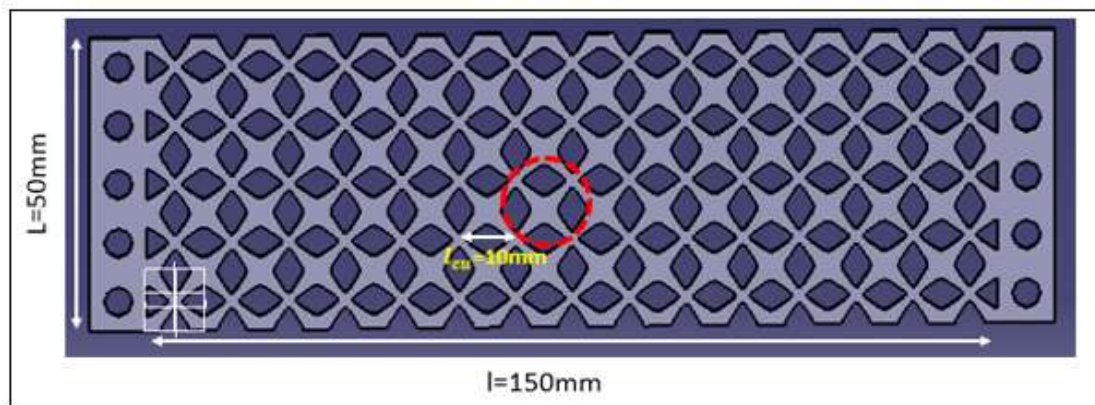
**Figure IV-4 : Dispositif d'essai en extension**

La réponse mécanique en grandes déformations pour le mode d'extension est représentée sur la Figure IV-5, pour une déformation appliquée maximale de 33% : nous observons que l'évolution de la force en fonction du déplacement appliqué est nonlinéaire.



**Figure IV-5 : Réponse mécanique mesurée du pantographe en extension**

Au cours de l'essai, nous avons suivi une cellule élémentaire au sein de la structure loin des bords, précisément la cellule numéro 7 sur la longueur horizontale  $l$  et numéro 3 sur la longueur verticale  $L$  de la structure (Figure IV-6) afin d'éviter les effets des bords et d'obtenir le champ de déplacement et de déformation à l'aide des caméras placées en face du banc d'essai.



**Figure IV-6 : Cellule unitaire suivie pour la corrélation d'images**

Plusieurs images sont prises sur tout au long de l'essai. Avec l'utilisation de l'outil Ncorr disponible sur Matlab, nous avons obtenu les champs de déplacements et de déformations qui sont représentés sur les Figure IV-7 et Figure IV-8. Les champs de déformations obtenus sont déterminés jusqu'au 25

% de déformation, le champ de vision des caméras ne permet pas suivre la cellule unitaire jusqu'au la fin de l'essai à 33 % de déformation.

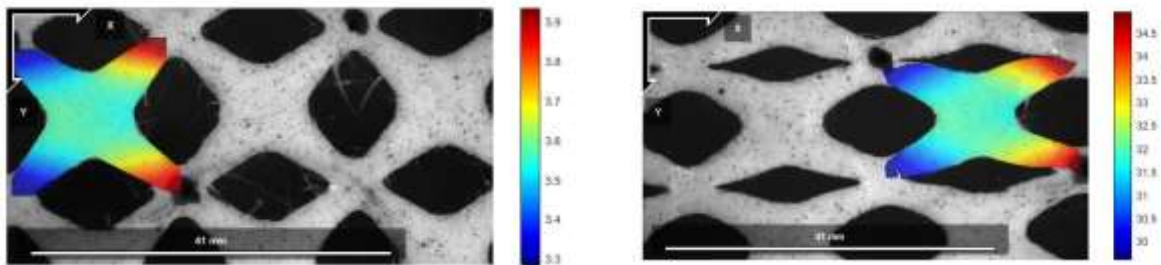


Figure IV-7 : Champ de déplacement  $U_x$  à l'état initial et final

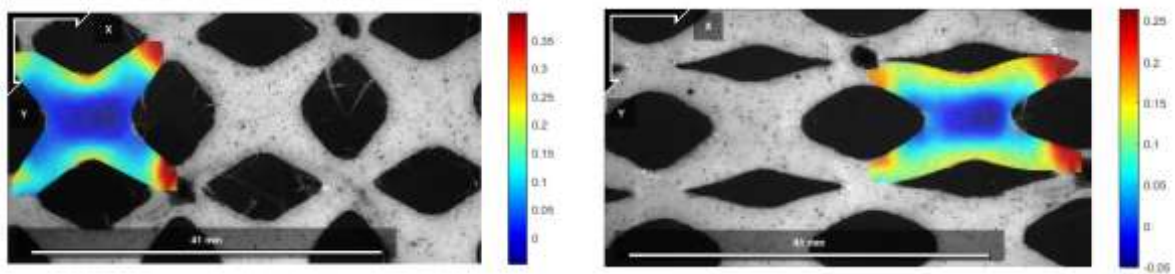


Figure IV-8 : Champ de déformation  $E_{xx}$  à l'état initial (vue de gauche) et déformé (vue de droite)

Nous observons des déformations importantes sont générées dans les zones de fortes courbures de la cellule observée qui correspondent aux zones de jonction entre les cellules adjacentes. Les champs de déplacements et de déformations sont parfaitement symétriques par rapport à l'axe horizontal, comme il est attendu selon le principe de Curie (les symétries des causes induisent les mêmes symétries des effets qui en résultent), car la géométrie et le chargement présentent cette même symétrie.

### 3. Identification du potentiel macroscopique anisotrope du pantographe

#### 3.1. Identification d'un modèle microscopique hyperélastique de Ciarlet-Geymonat et validation de la méthode d'homogénéisation en grandes déformations

Nous avons dans une première étape identifié les paramètres de la loi hyperélastique du matériau de base de type Ciarlet-Geymonat (C-G) écrite Eq.(4.1), par l'optimisation de l'écart quadratique entre les réponses prédites et celles mesurées expérimentalement, les paramètres obtenus figurant dans le Tableau IV-2 :

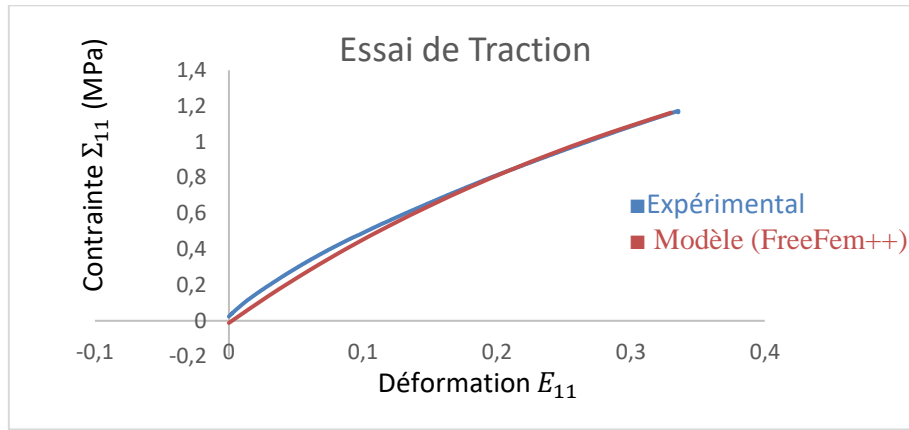
Tableau IV-2 : Paramètres identifiés de la loi Ciarlet-Geymonat en MPa

C-G	$K_1$	$K_2$	$K_3$
Matériau TPE	3.043	0.908	7.162

La résolution du problème de minimisation posé en Eq.(4.2) a été faite par l'algorithme de Levenberg-Marquardt avec Matlab. Nous avons aussi étudié la convergence des paramètres vis-à-vis des paramètres initiaux utilisés dans l'algorithme, qui conduisent aux mêmes paramètres du modèle hyperélastique.

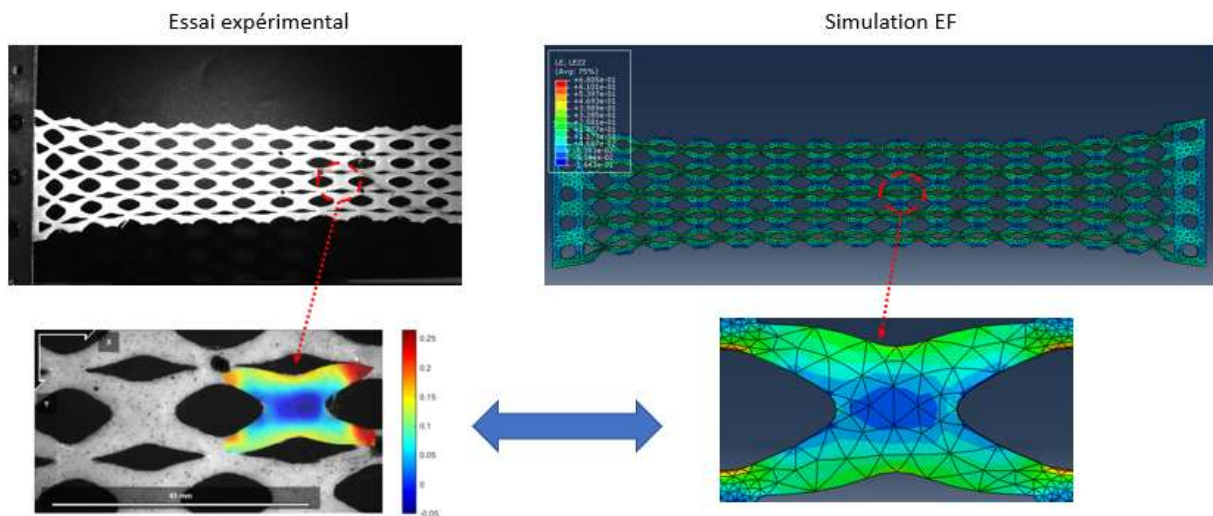
Par la suite, un calcul d'homogénéisation en grandes déformations a été fait sur la cellule périodique avec le code FreeFem++ dans le cadre de l'homogénéisation du premier gradient. La réponse macroscopique de l'essai expérimental et celle prédite par le calcul numérique sont très proches, comme le montre la Figure IV-9. La différence entre les deux réponses en début d'essai peut être liée aux défauts de fabrication ou au protocole de mesure (fixation de l'éprouvette, glissements au niveau des mors...) avec une erreur relative qui ne dépasse pas 12%, l'erreur devient quasiment nulle au-delà de 15% de déformation (Figure IV-9).





**Figure IV-9 : Comparaison de la réponse mécanique mesurée lors des essais de traction uniaxiaux et celle prédite par la méthode d’homogénéisation**

Afin de valider le modèle numérique, nous comparons aussi le champ de déformation calculé avec le champ mesuré sur l’éprouvette architecturée par corrélation d’images lors de l’essai de traction.



**Figure IV-10 : Comparaison des champs de déformation mesurés sur éprouvette sollicitée en traction et par la simulation numérique par éléments finis**

Nous observons une grande similarité entre le champ de déformation simulé par EF et celui obtenu par corrélation d’images ; on observe notamment une concentration de déformation dans la zone de courbure horizontale de la cellule unité (Figure IV-10) ainsi que dans la zone de jonction entre cellules adjacentes.



La méthodologie d'identification du potentiel macroscopique qui est l'objet de la section suivante est faite en deux étapes : la contribution du premier gradient de la réponse effective est identifiée en premier lieu, avant d'identifier la contribution du second gradient.

### 3.2. Identification des paramètres du potentiel macroscopique du modèle hyperélastique du premier gradient

Nous prenons appui sur les développements théoriques du chapitre 3 (partie 4) relatifs au modèle macroscopique qui prend en compte l'anisotropie du pantographe pour les deux modes de déformation principaux, soit l'extension et le cisaillement. Les invariants cinématiques indépendantes de l'énergie de déformation macroscopique sont incorporés dans le tenseur de Cauchy-Green  $C$  qui est exprimé dans la base des fibres, et dont les trois composantes indépendantes en 2D s'expriment en fonction des composantes du tenseur gradient de la transformation macroscopique selon :

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (\lambda_1^2) + (2\lambda_{12}\cos\delta + \lambda_{12}^2)A^1 \otimes A^1 \\
 C_{12} = C_{21} &= (\lambda_1\lambda_2\cos\delta) + (\lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{12}\lambda_{21}\cos\delta)A^1 \otimes A^2 + A^2 \otimes A^1 \\
 C_{22} &= (\lambda_2^2) + (2\lambda_{21}\cos\delta + \lambda_{21}^2)A^2 \otimes A^2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où  $\lambda_{ij}$  sont les composantes du gradient de la transformation  $F$ .

Le pantographe considéré dans cette étude (Figure IV-1) a deux directions principales d'anisotropie, exprimées par les vecteurs unitaires  $A_1$  et  $A_2$  dans la direction des deux directions principales d'anisotropie.

Dans le cas présent de deux populations de fibres (ici les deux directions matérielles d'anisotropie du pantographe), la densité d'énergie s'écrit alors selon les théorèmes de représentation (Holzapfel, G. A, 2000) :

$$W = W(C, A_1 \otimes A_1, A_2 \otimes A_2) = W(C, M_1, M_2)$$

où  $M_1 = A_1 \otimes A_1$  et  $M_2 = A_2 \otimes A_2$  sont les deux tenseurs de la structure.

La densité d'énergie devient une fonction des 7 invariants isotrope et anisotropes comme démontré dans le chapitre 3 (section 5),  $W=W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7)$  :

$$I_1(C) = Tr(C), I_2(C) = (1/2)(Tr(C)^2 - Tr(C^2)) \text{ et } I_3(C) = det(C) ;$$

$$I_4(C, A_1) = A_1 \cdot C \cdot A_1; I_5(C, A_1) = A_1 \cdot C^2 \cdot A_1; I_6(C, A_2) = A_2 \cdot C \cdot A_2; I_7(C, A_2) = A_2 \cdot C^2 \cdot A_2 \quad (4.5)$$

La méthode d'homogénéisation continue en grandes déformations est mise à profit pour calibrer un modèle de comportement effectif hyperélastique pour le milieu de substitution homogène de la cellule unité du pantographe. Une expression polynomiale de la densité d'énergie est choisie en fonction des invariants indépendants selon :

$$W_M^C = W(C, M_1, M_2) = \left(\frac{1}{3}\right)a(I_1^3 - 1) + \left(\frac{1}{2}\right)b(I_2^2 - 1) + c(I_3 - 1) + \left(\frac{1}{2}\right)d(I_4^2 - 1) + e(I_5 - 1) + \left(\frac{1}{2}\right)f(I_6^2 - 1) + g(I_7 - 1) \quad (4.6)$$

avec a, b, c, d, e, f, g les paramètres matériau du potentiel macroscopique à identifier en minimisant l'écart quadratique entre la réponse prédite par l'homogénéisation continue pour différents modes de déformations (traction uniaxiale, cisaillement et traction biaxiale) et celle obtenue par le modèle analytique (4.8). Un polynôme de degré trois est utilisé pour interpoler la courbe de réponse  $\Sigma_{ij}^{Hom} - \Sigma_{ij}$  calculée par l'homogénéisation continue.

L'équation constitutive en terme du tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff II (symétrique) prend la forme suivante, obtenue à partir de Eq. (4.6) :

$$\Sigma = 2[(W_{,I_1} + I_2 W_{,I_2})I - W_{,I_2} C + I_3 W_{,I_3} C^{-1} + W_{,I_4} A_1 \otimes A_1 + W_{,I_5} (A_1 \otimes C \cdot A_1 + C \cdot A_1 \otimes A_1) + W_{,I_6} A_2 \otimes A_2 + W_{,I_7} (A_2 \otimes C \cdot A_2 + C \cdot A_2 \otimes A_2)] \quad (4.7)$$

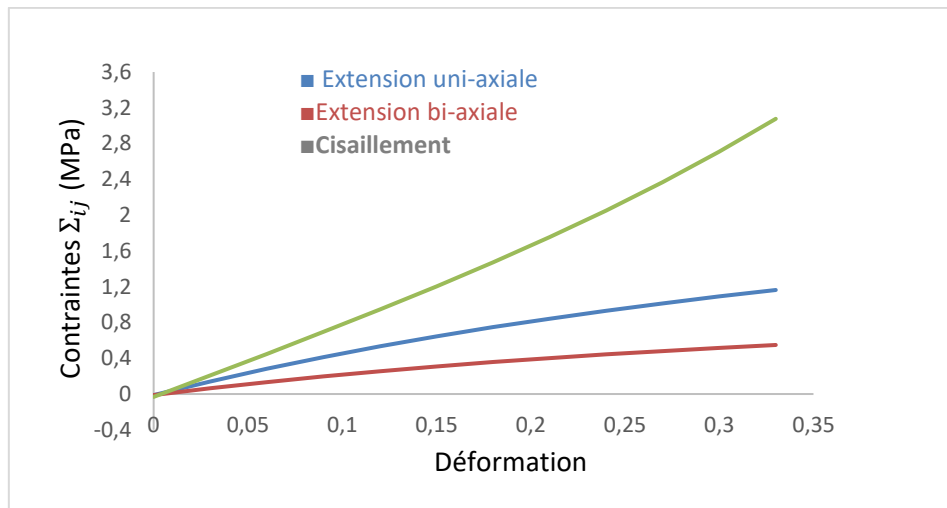
Les paramètres optimaux de la loi de comportement sont la solution du problème de minimisation suivant :

$$Min_{(a,b,c,d,e,f,g)} S^e := \{ \|\Sigma_{11}^{Hom} - \Sigma_{11}\|^2 + \|\Sigma_{22}^{Hom} - \Sigma_{22}\|^2 + \|\Sigma_{12}^{Hom} - \Sigma_{12}\|^2 \}^{1/2} \quad (4.8)$$

La structure pantographique considérée forme ici (c'est un cas particulier de géométrie) un angle droit entre les deux directions matérielles d'anisotropie, soit  $\delta = 90^\circ$  ; il en résulte une simplification des invariants précédents selon la nouvelle expression de  $C$  :

$$C = \begin{bmatrix} (\lambda_1^2) + (\lambda_{12}^2)A^1 \otimes A^1 & (\lambda_{12} + \lambda_{21})A^1 \otimes A^2 + A^2 \otimes A^1 \\ (\lambda_{12} + \lambda_{21})A^2 \otimes A^1 + A^1 \otimes A^2 & (\lambda_2^2) + (\lambda_{21}^2)A^2 \otimes A^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Afin d'identifier les paramètres matériau du potentiel macroscopique  $W_M^C$  pour le milieu de Cauchy, des essais mécaniques numériques ont été effectués sur la cellule unitaire périodique, soumise à plusieurs modes de déformation appliqués (traction uniaxiale, traction biaxiale, et cisaillement) (Figure IV-11).



**Figure IV-11 : Réponse numérique effective à l'échelle de la cellule unitaire pour plusieurs modes de déformation appliqués**

Nous observons que les réponses mécaniques obtenus pour les différents modes de déformations sont bien nonlinéaire. Pour un même niveau de déformation de 33%, on observe que le mode de cisaillement présente la réponse la plus rigide, alors que l'essai de traction biaxiale fournit la réponse la plus souple, avec un niveau de contrainte moitié de celui obtenu en traction uniaxiale.

A partir de ces résultats, l'identification des paramètres du potentiel macroscopique anisotrope est réalisé avec l'outil d'optimisation Lsqcurvefit disponible dans Matlab. Les contraintes analytiques macroscopique sont exprimées à partir du problème de minimisation (4.8), en prenant en compte à chaque fois le mode de déformation spécifique auquel la cellule unité est soumise. Les invariants de la densité d'énergie hyperélastique (4.6) sont calculés séparément pour chaque mode de déformation.

- **Extension uniaxiale :**

Dans le cas d'une extension uniaxiale, le tenseur de la déformation Cauchy-Green C dans la base des fibres prend la forme suivante :

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 A^1 \otimes A^1 & 0 \\ 0 & \text{indéterminée} \end{bmatrix}, \text{ avec } \lambda_1 = 1 + \varepsilon_{xx} \text{ et } \varepsilon_{xx} \text{ la déformation appliquée dans la direction}$$

X du système de coordonnées globales. La composante de la contrainte donnée par le modèle analytique en extension uniaxiale s'exprime alors selon :

$$\Sigma_{11} = 2[(aI_1^2 + I_2 b I_2)I - b I_2 C_{11} + I_3 c C_{11}^{-1} + d I_4 A_1 \otimes A_1 + e (A_1 \otimes C.A_1 + C.A_1 \otimes A_1)_{11} + f I_6 A_2 \otimes A_2 + g (A_2 \otimes C.A_2 + C.A_2 \otimes A_2)_{11}] \quad (4.10)$$

- **Extension équi-biaxiale :** on obtient la forme suivante du tenseur de Cauchy-Green

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 A^1 \otimes A^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 A^2 \otimes A^2 \end{bmatrix}, \text{ avec } \lambda_1 = 1 + \varepsilon_{xx}, \lambda_2 = 1 + \varepsilon_{yy} \text{ et } \varepsilon_{yy} \text{ la déformation appliquée dans la}$$

direction Y du système de coordonnées globales.

Les composantes de la contrainte analytique en extension biaxiale sont alors données comme suit :

$$\Sigma_{11} = 2[(aI_1^2 + I_2 b I_2)I - b I_2 C_{11} + I_3 c C_{11}^{-1} + d I_4 A_1 \otimes A_1 + e (A_1 \otimes C.A_1 + C.A_1 \otimes A_1)_{11} + f I_6 A_2 \otimes A_2 + g (A_2 \otimes C.A_2 + C.A_2 \otimes A_2)_{11}]$$

$$\Sigma_{22} = 2[(aI_1^2 + I_2 b I_2)I - b I_2 C_{22} + I_3 c C_{22}^{-1} + d I_4 A_1 \otimes A_1 + e (A_1 \otimes C.A_1 + (C.A_1 \otimes A_1)_{22} + f I_6 A_2 \otimes A_2 + g (A_2 \otimes C.A_2 + C.A_2 \otimes A_2)_{22}] \quad (4.11)$$

- **Cisaillement :**

Le tenseur de Cauchy-Green dans la base de fibres s'exprime comme suit :

$$C = \begin{bmatrix} (\lambda_{12}^2) A^1 \otimes A^1 & (\lambda_{12} + \lambda_{12}) A^1 \otimes A^2 + A^2 \otimes A^1 \\ (\lambda_{12} + \lambda_{12}) A^1 \otimes A^2 + A^2 \otimes A^1 & (\lambda_{21}^2) A^2 \otimes A^2 \end{bmatrix}$$

En conséquence, la contrainte analytique en cisaillement s'exprime selon :

$$\Sigma_{12} = 2[(aI_1^2 + I_2 b I_2)I - b I_2 C_{12} + I_3 c C_{12}^{-1} + d I_4 A_1 \otimes A_1 + e (A_1 \otimes C.A_1 + (C.A_1 \otimes A_1)_{12} + f I_6 A_2 \otimes A_2 + g (A_2 \otimes C.A_2 + C.A_2 \otimes A_2)_{12}] \quad (4.12)$$

En utilisant l'algorithme Lsqcurvefit, le jeu des paramètres identifiés du potentiel macroscopique hyperélastique du premier gradient est donné dans le tableau IV-3.

**Tableau IV-3 : ensemble des paramètres du potentiel macroscopique hyperélastique**

(MPa)	<b>a</b>	<b>B</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>
	-0.704	-12.20	-1.52	-36.47	13.602	-197.37	198.5

Les figures qui suivent (Figure IV-12, Figure IV-13, Figure IV-14) représentent les réponses issues de la loi de comportement obtenue pour les 3 modes de déformation considérés du potentiel analytique ainsi que par la méthode d'homogénéisation nonlinéaire implémentée dans Freefem++ à l'échelle de la cellule unité dotée de conditions de périodicité.

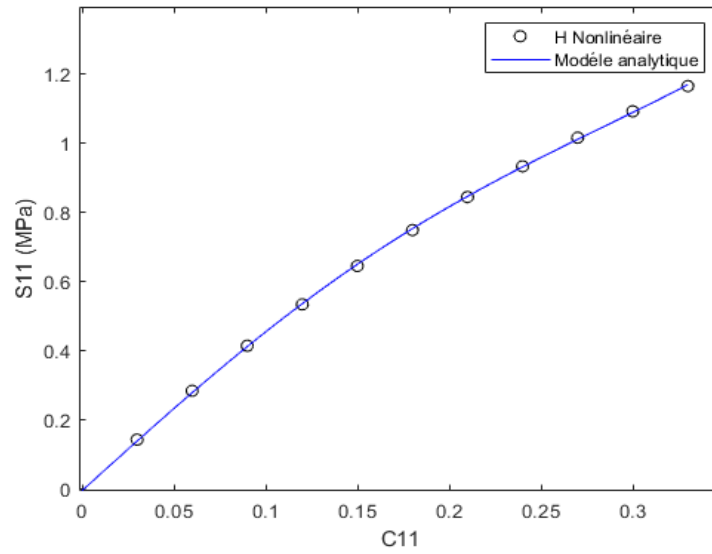


Figure IV-12 : Réponse macroscopique du modèle analytique et numérique en extension uniaxiale

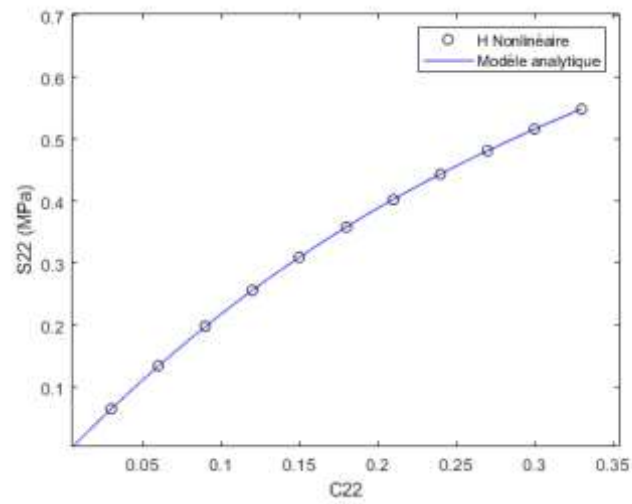
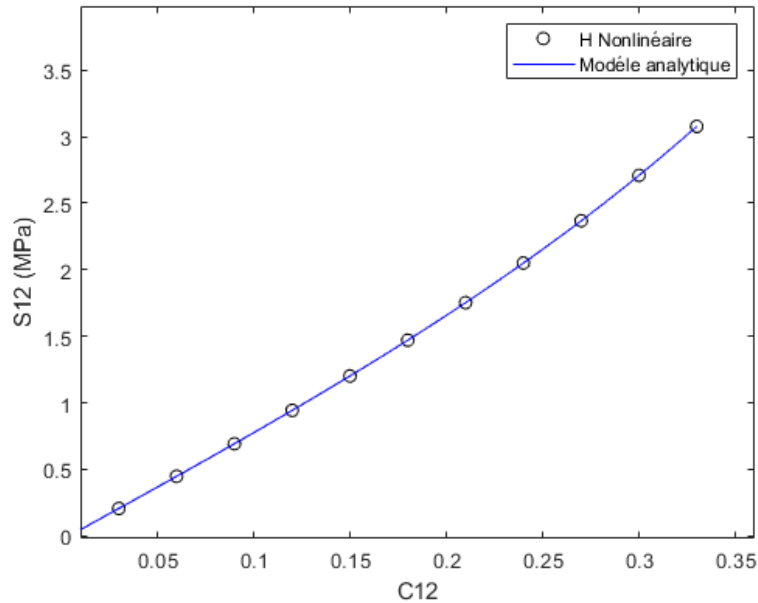


Figure IV-13 : Réponse macroscopique du modèle analytique et numérique en extension biaxiale



**Figure IV-14 : Réponse macroscopique du modèle analytique et numérique en cisaillement**

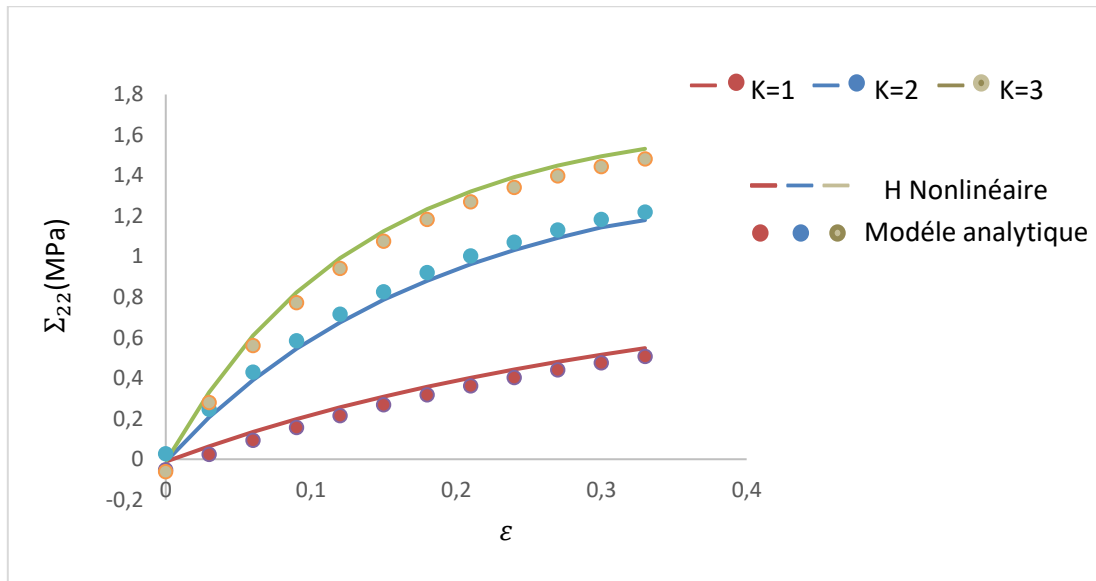
Pour les 3 modes de déformation considérés, le modèle analytique décrit avec une grande précision les réponses numériques obtenues par un calcul direct à l'échelle de la cellule unitaire périodique. Le modèle analytique montre une grande stabilité par rapport au choix des paramètres initiaux.

Afin de vérifier le caractère prédictif du modèle analytique identifié, nous avons effectué par la suite des simulations EF pour d'autres modes de déformation (différents de ceux utilisés pour l'identification des paramètres du modèle), notamment une traction non équi-biaxiale. Les simulations dans ce mode de déformation sont contrôlées par le rapport entre les deux déformations appliquées dans les directions horizontale et verticale, appelé rapport de biaxialité, soit :

$$k = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

avec  $\varepsilon_1$  la déformation appliquée dans la direction horizontale  $x$ , et  $\varepsilon_2$  la déformation appliquée dans la direction verticale  $y$  du repère cartésien global. Le tenseur gradient de transformation est donné par la suite selon :

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 = 1 + \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = 1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$



**Figure IV-15 : Contrainte de Piola-Kirchoff 2 dans la direction y en fonction de la déformation pour le pantographe pour différentes valeurs du rapport de biaxialité**

Nous observons que les réponses de modèle analytiques pour plusieurs rapports de biaxialité sont quasiment les mêmes que celles prédites par EF, avec une erreur relative qui ne dépasse pas 4 % pour toutes les valeurs de déformation. Le modèle analytique développé montre son caractère prédictif de la réponse macroscopique anisotrope pour des structures de type pantographe. Compte tenu des longueurs internes importantes obtenues en petites déformations pour le pantographe dans le chapitre 2, nous abordons dans ce qui suit l'extension au second gradient de l'étude de son comportement en grandes déformations.

### 3.3. Identification des paramètres du potentiel macroscopique pour le milieu du second gradient

Avant d'aborder l'identification des paramètres du potentiel macroscopique anisotrope au second gradient, la linéarisation et la discrétisation d'un problème non linéaire en grandes déformations au second gradient à l'échelle macroscopique par la méthode des éléments finis est formulée.



### 3.3.1. Problème aux valeurs limites microscopique

Afin de traiter et résoudre le problème non linéaire à l'échelle microscopique, nous appliquons des conditions périodiques sur les bords de la cellule unitaire (CU). Dans ce chapitre, nous abordons la résolution du problème aux valeurs limites de gradient de déformation, où le tenseur de déformation d'ordre trois  $C_2$  est ajouté comme descripteur cinématique du second gradient.

La position microscopique des points matériels dans la configuration actuelle s'exprime selon la décomposition additive suivante :

$$\Psi_\mu = F \cdot Y + \frac{1}{2} K : (Y \otimes Y) + \tilde{u} \quad (4.13)$$

avec  $\Psi_\mu = \Psi_\mu^{hom} + \tilde{\Psi}_\mu$ ,  $\Psi_\mu^{hom}$  étant la partie homogène associée au milieu du second gradient de substitution postulé et  $\tilde{\Psi}_\mu$  sa fluctuation ; la position spatiale est donnée par  $x = \Psi(y)$ ,  $\tilde{u}$  est le champ de fluctuation du déplacement microscopique inconnu,  $F$ ,  $K$  sont les tenseurs du premier et second gradient de la transformation respectivement à l'échelle macroscopique.

Par la suite, le tenseur du premier gradient de déformation microscopique  $F_\mu = \nabla \Psi_\mu$  et le tenseur du second gradient de déformation microscopique  $K_\mu = \nabla^2 \Psi_\mu$  sont obtenus selon les relations :

$$F_\mu = F + K \cdot Y + \tilde{F} ; K_\mu = K + \tilde{K} \quad (4.14)$$

avec,  $\tilde{F} = \nabla \tilde{u}$  et  $\tilde{K} = \nabla^2 \tilde{u}$  les premier et second gradients de la fluctuation du déplacement. Leur moyenne volumique sur la cellule élémentaire des quantités microscopique fournit les tenseurs du premier et second gradient de déformation macroscopique, en appliquant le principe de Hill-Mandel :

$$\frac{1}{V_y} \int_{VER} F_\mu dV_y = F \text{ et } \frac{1}{V_y} \int_{VER} K_\mu = \frac{1}{V_y} \int_{VER} \nabla^2 \Psi_\mu dV_y = K$$

En utilisant la condition de macrohomogénéité de Hill-Mandel, le travail virtuel des efforts intérieurs au sein de la cellule unité est identifié au travail virtuel des efforts intérieurs macroscopique selon la relation :

$$\frac{1}{V_y} \int_{VER} (P_\mu : \nabla \delta \Psi_\mu + S_\mu : \nabla^2 \delta \Psi_\mu) dV_y = P : \delta F + S : \delta K \quad (4.15)$$

avec P, S les tenseurs de contrainte et d'hypercontrainte nominaux, conjugués respectivement au premier et second gradients de transformation macroscopique F, K respectivement.

Nous utilisons dans ce chapitre (ainsi que dans le précédent) les tenseurs de déformation de Cauchy-Green du premier et du second gradient comme arguments de l'énergie de déformation ; la relation Eq (4.15) devient alors :

$$\frac{1}{V_y} \int_{VER} (\sigma_\mu : \delta C_\mu + S_\mu : \delta C_{2\mu}) dV_y = \Sigma : \delta C + S : \delta C_2 \quad (4.16)$$

avec  $\Sigma$  le second tenseur de Piola-Kirchoff et S le tenseur d'hypercontrainte du second gradient, tous deux élaborés en fonction du tenseur de Cauchy à l'échelle microscopique selon les relations :

$$\Sigma = \frac{1}{V_y} \int_{V_y} \sigma_\mu dV_y ; \quad S = \frac{1}{V} \int_y \sigma_\mu \otimes y dV_y \quad (4.17)$$

Nous supposons alors que la moyenne volumique de l'énergie de la fluctuation du déplacement incrémental lié au tenseur de déformation microscopique  $F_\mu$  est nulle, soit :

$$\frac{1}{V_y} \int_y \Delta P_\mu : \delta \tilde{u} \otimes \nabla_y dV_y = 0 \quad (4.18)$$

avec  $\Delta P_\mu = K_{T,\mu} : \Delta F_\mu$  et  $\Delta F_\mu = \Delta F_M + \Delta K_M : Y + \Delta \tilde{F}_\mu = \nabla \Psi_\mu \otimes \nabla_y$ , où  $\Delta \tilde{F}_\mu$  est l'incrément du gradient de la transformation du champ de déplacement de fluctuation.

Le problème d'équilibre nonlinéaire s'écrit sous forme de l'annulation de la l'incrément de la puissance virtuelle des efforts intérieurs de la fluctuation (du premier gradient à l'échelle microscopique) en l'absence d'efforts extérieurs appliqués sur le bord de la CU, qui est la traduction de la condition de Eq.(4.18) :

$$\Delta G = \frac{1}{V_y} \int_y \delta \tilde{F}_\mu : K_{T,\mu} : \Delta F_\mu dV_y = 0 \quad (4.19)$$

Nous injectons l'expression précédente du tenseur gradient de la transformation incrémentale  $\Delta F_\mu$  dans (4.19) pour obtenir l'expression développée :

$$\begin{aligned}\Delta G &= \frac{1}{V_y} \int_y (\delta \tilde{F}_\mu : K_{T,\mu} : (\Delta F_M + \Delta K_M \cdot Y) + \delta \tilde{F}_\mu : K_{T,\mu} : \Delta \tilde{F}_\mu) dV_y=0 \\ &= \frac{1}{V_y} \int_y (\delta \tilde{F}_\mu : K_{T,\mu} : (\Delta F_M + \Delta K_M \cdot Y) + \delta \tilde{\Psi}_\mu \otimes \nabla_Y : K_{T,\mu} : \nabla_Y \Delta \tilde{\Psi}_\mu) dV_y=0\end{aligned}\quad (4.20)$$

avec  $\Delta G = \Delta G_M + \Delta \tilde{G}_\mu$  le résidu, qui se décompose en deux parties : le premier terme est la partie macroscopique  $\Delta G_M$  qui intègre les champs cinématiques macroscopique  $F_M$  et  $K_M$  appliqués sur le bord de la CU, le second est une contribution microscopique qui implique la fluctuation du déplacement  $\tilde{u}_\mu = \tilde{\Psi}_\mu$ , compte tenu du fait que la géométrie initiale est fixe, soit  $\delta Y = 0$ .

### 3.3.2. Linéarisation et discrétisation du problème nonlinéaire au second gradient

Pour faire suite au chapitre 3 (Partie 2.5), la linéarisation des champs cinématiques, de l'énergie de déformation interne et externe, et du tenseur des contraintes à l'échelle macroscopique sont introduits dans cette section afin d'extraire la matrice tangente consistante qui résulte de la linéarisation du problème incrémental et de la discrétisation par éléments finis ; pour plus de détails sur ces aspects numériques, nous référons aux travaux de (T. Belytschko, et al, 2014 ; A. Ibrahimbegovic, 2009 ; G.A. Holzapfel, 2000).

Pour rappel, le tenseur de déformation de Cauchy-Green du second gradient et sa variation virtuelle s'expriment selon :

$$C_2 = F^T \nabla_X F ; \delta C_2 = \delta F^T \nabla_X F + F^T \nabla_X \delta F \quad (4.21)$$

Les variations virtuelles du gradient de transformation et de son transposé sont données par :

$$\delta F^T = Grad^T \delta u ; \delta F = Grad \delta u \quad (4.22)$$

La linéarisation du tenseur de gradient de déformation de Cauchy-Green  $C_2$  est ensuite obtenue :

$$\delta C_2 = \delta F^T \cdot \nabla_X F + F^T \cdot \nabla_X \delta F = Grad^T \delta u \cdot \nabla_X F + F^T \cdot \nabla_X Grad \delta u$$

$$\begin{aligned}
\Delta \delta C_2 &= D_{\Delta u} \delta C_2 = \frac{d}{d\varepsilon} \delta C_2(u + \varepsilon \Delta u)|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \{ \text{Grad}^T \delta u \cdot \nabla_X F(u + \varepsilon \Delta u) + F(u + \varepsilon \Delta u)^T \cdot \nabla_X \text{Grad} \delta u \} \\
&= (\text{Grad}^T \delta u) \cdot \text{Grad} \cdot \text{Grad} \Delta u + (\text{Grad}^T \Delta u) \cdot \text{Grad} \cdot \text{Grad} \delta u
\end{aligned} \tag{4.23}$$

où  $\delta u$  est le champ de déplacement virtuel,  $\Delta u$  le champ de déplacement incrémental (l'incrément du déplacement), et  $D_{\Delta u}$  la dérivée directionnelle dans la direction  $\Delta u$ .

Le travail virtuel des efforts intérieurs pour les contributions de Cauchy (premier gradient) et du second gradient prend la forme suivante :

$$\delta W_{int}(u, \delta u) = \int_{\Omega_0} \delta W dV_0 = \int_{\Omega_0} (\Sigma(C(u)) : \delta C(u) + S(C_2(u)) : \delta C_2(u)) dV_0 \tag{4.24}$$

Dans cette dernière expression,  $\Sigma$  et  $S$  sont les tenseurs de contrainte et d'hypercontrainte conjugués à  $C = F^T F$  et  $C_2 = F^T \nabla_X F$ , respectivement. Le travail virtuel des efforts extérieurs n'est pas pris en compte car on considère que la cellule de base est auto-équilibrée.

La linéarisation de la variation interne du travail virtuel du second gradient est donnée par :

$$D_{\Delta u} \delta W_{int}^{SG}(u, \delta u) = S(C_2(u)) : D_{\Delta u} \delta C_2(u) + \delta C_2(u) : D_{\Delta u} S(C_2(u)) \tag{4.25}$$

La linéarisation du tenseur de contraintes macroscopique pour le milieu du second gradient est définie comme suit :

$$D_{\Delta u} S(C_2(u)) = \frac{\partial S}{\partial C_2} : D_{\Delta u} C_2(u) \tag{4.26}$$

avec  $\frac{\partial S}{\partial C_2} = A^{hom} = \frac{\partial^2 W^{SG}}{\partial C_2 \partial C_2}$ , le tenseur de rigidité tangent du second gradient homogénéisé à l'échelle macroscopique, et  $W^{SG}$  le potentiel hyperélastique macroscopique du second gradient.

Le gradient de transformation et son gradient sont donnés comme le suit :

$$F=I + Grad u, \quad Grad F= Grad. Grad u.$$

On peut alors écrire la linéarisation du travail des efforts virtuels du second gradient selon :

$$\begin{aligned} D_{\Delta u} \delta W_{int}^{SG}(u, \delta u) &= S(C_2(u)) \cdot D_{\Delta u} \delta C_2(u) + \delta C_2(u) : A^{hom} \cdot D_{\Delta u} C_2(u) \\ &= \frac{\partial W^{SG}}{\partial C_2} \cdot \{(Grad^T \delta u) \cdot Grad. Grad \Delta u + (Grad^T \Delta u) \cdot Grad. Grad \delta u\} + \\ &\quad \{(Grad^T \delta U) \cdot Grad. Grad \Delta U + (Grad^T \Delta U) \cdot Grad. Grad \delta U\} : \\ &A^{hom} \cdot \{(Grad^T \Delta U) \cdot Grad. Grad U + (Grad^T U) \cdot Grad. Grad \Delta U\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

La seconde variation écrite dans la relation précédente est alors une fonction linéaire et symétrique des variations  $\delta u$  et  $\Delta u$ .

### 3.3.2.1. Discrétisation par éléments finis du problème d'équilibre

Afin de déterminer le champ de déplacement de fluctuation  $\tilde{u}_\mu$  qui est inconnu, nous écrivons par la suite le problème d'équilibre des efforts intérieurs sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \sum_{A=1}^N N^A \tilde{q}^A ; \quad \delta \tilde{u} = \sum_{A=1}^N N^A \delta \tilde{q}^A ; \quad \Delta \tilde{u} = \sum_{A=1}^N N^A \Delta \tilde{q}^A ; \quad \delta \tilde{u}_\mu \otimes \nabla_Y = \sum_{A=1}^N \delta \tilde{q}^A \otimes \nabla_Y N^A ; \\ \nabla_Y \Delta \tilde{u}_\mu = \sum_{A=1}^N \Delta \tilde{q}^A \otimes \nabla_Y N^A \end{aligned} \quad (4.28)$$

En premier lieu, nous développons la discrétisation par éléments finis de la partie microscopique liée à la fluctuation du déplacement, en se basant sur l'Eq. (4.20), soit le terme :

$$\Delta \tilde{G}_\mu = \frac{1}{V_y} \int_{VER} \delta \tilde{u}_\mu \otimes \nabla_Y : K_{T,\mu} : \nabla_Y \Delta \tilde{u}_\mu dV_y \quad (4.29)$$

En substituant l'Eq (4.28) dans l'Eq (4.29), on obtient alors :

$$\Delta \tilde{G}_\mu = \sum_{A=1}^N [\delta \tilde{q}^A] \left\{ \frac{1}{V_y} \int_{VER} [\nabla_Y N^A] [K_{T,\mu}] [\nabla_Y N^A] dV_y [\Delta \tilde{q}^A] \right\} \quad (4.30)$$

Afin de déterminer le déplacement incrémental de la fluctuation  $[\Delta \tilde{q}^A]$ , il faut extraire la matrice tangente consistante au second gradient à l'échelle macroscopique à partir de l'expression (4.20) du

résidu qui est décomposé en deux parties, une partie microscopique fluctuante  $\Delta\tilde{G}_\mu$  et une partie macroscopique homogène  $\Delta G_M$ .

Le problème d'équilibre nonlinéaire s'écrit sous forme de puissance virtuelle des efforts intérieurs sous forme incrémentale comme suit :

$$\begin{aligned} & \delta W_{int}(u_n, \delta u_n) + D_{\Delta u} \delta W_{int}(u_n, \delta u_n) \\ & = \Sigma(C(u)) : \delta C(u) + S(C_2(u)) : \delta C_2(u) + [\Delta u_n]^T \cdot [K_T][\delta u_n] = 0, \forall \delta u_n \end{aligned} \quad (4.31)$$

avec  $\Sigma(C(u)) : \delta C(u) + S(C_2(u)) : \delta C_2(u)$  la contribution géométrique à la contrainte et  $[\Delta u_n]^T \cdot [K_T][\delta u_n]$  la contribution de la partie matérielle de la contrainte totale.

L'énergie de déformation incrémentale du modèle continu effectif peut s'écrire sous la forme d'une expression bilinéaire des incréments et des variations des mesures cinématiques macroscopiques, soit les quantités  $\delta C, \Delta C, \delta C_2$  et  $\Delta C_2$ . La linéarisation de l'état d'équilibre faite apparaitre l'incrément de la puissance virtuelle macroscopique des efforts intérieurs (première partie de l'Eq. (4.20):

$$\Delta G_M = \int_{\Omega} \{ \delta C : [C_T^{hom} : \Delta C + B_T^{hom} : \Delta C_2] + \delta C_2 : [D_T^{hom} : \Delta C + A_T^{hom} : \Delta C_2] \} dV_X \quad (4.32)$$

où  $\delta C, \Delta C$  sont les tenseurs de déformation de Cauchy-Green virtuel (leur variation) et incrémental respectivement, et de façon similaire  $\delta C_2, \Delta C_2$  sont les tenseurs de déformation du second gradient virtuels (variation virtuelle) et incrémentaux respectivement. Les matrices tangentes du comportement du second gradient sont introduites dans Eq.(4.32) :  $C_T^{hom}$  est la matrice des modules élastiques homogénéisés tangents du premier gradient (de Cauchy) ;  $B_T^{hom}, D_T^{hom}$  sont les matrices de couplage entre le milieu de Cauchy et du second gradient, et  $A_T^{hom}$  est la matrice des modules élastiques homogénéisés du second gradient pur.

Le développement des termes de l'Eq. (4.32) en fonction des tenseurs de gradient de la transformation  $F$ , de sa variation virtuelle  $\delta F$ , de son incrément  $\Delta F$ , et de ses gradients  $F \otimes \nabla_X, \delta F \otimes \nabla_X, \Delta F \otimes \nabla_X$ , donne alors :

$$\begin{aligned}
\Delta G_M = \frac{1}{|V_X|} \int_{V_X} \{ & 2\text{sym}(F^T \cdot \delta F) : C_T^{hom} : 2\text{sym}(F^T \cdot \Delta F) + 2\text{sym}(F^T \cdot \delta F) : B_T^{hom} : (\Delta F^T \cdot F \\
& \otimes \nabla_X + F^T \cdot \Delta F \otimes \nabla_X) + (\delta F^T \cdot F \otimes \nabla_X + F^T \delta F \otimes \nabla_X) : D_T^{hom} : 2\text{sym}(F^T \cdot \Delta F) \\
& + (\delta F^T \cdot F \otimes \nabla_X + F^T \cdot \delta F \otimes \nabla_X) : A_T^{hom} : (\Delta F^T \cdot F \otimes \nabla_X + F^T \cdot \Delta F \\
& \otimes \nabla_X) \} dV_X \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Afin de résoudre ce problème aux limites nonlinéaire  $\Delta G = \Delta G_M + \Delta \tilde{G}_\mu$ , les chargements cinématiques incrémentaux du premier et second gradient, respectivement les tenseurs  $\Delta C$  et  $\Delta C_2$ , sont appliqués sur les bords de la cellule unitaire du milieu périodique.

Une discrétisation par éléments finis des champs cinématiques macroscopiques est réalisée. On introduit dans ce qui suit une discrétisation en temps de l'équilibre incrémental qui est résolu par une méthode itérative : soit  $t \in [t_0, t_N] = [t_0, t_1, t_n, t_{n+1} = t_n + \Delta t, \dots, t_N]$ .

Les champs cinématiques macroscopiques sont écrits sous forme discrétisée en fonction des déplacements nodaux et des fonctions de forme de l'approximation par éléments finis, nous considérons des éléments tétraèdre avec 4 nœuds avec une approximation linéaire :

$$U = \sum_{A=1}^N N^A q^A ; \delta U = \sum_{A=1}^N N^A \delta q^A ; \Delta U = \sum_{A=1}^N N^A \Delta q^A \tag{4.34}$$

$$F = \sum_{A=1}^N q^A \otimes \nabla_X N^A ; \delta F = \sum_{A=1}^N \delta q^A \otimes \nabla_X N^A ; \Delta F = \sum_{A=1}^N \Delta q^A \otimes \nabla_X N^A \tag{4.35}$$

$$\delta \nabla_X F = \sum_{A=1}^N \delta q^A \otimes \nabla_X \nabla_X N^A ; \nabla_X \Delta F = \sum_{A=1}^N \Delta q^A \otimes \nabla_X \nabla_X N^A \tag{4.36}$$

Afin d'extraire la matrice de rigidité tangente consistante pour les contributions de Cauchy et du second gradient à l'échelle macroscopique, les expressions (4.35) et (4.36) de la forme discrétisée du gradient de transformation, de sa variation virtuelle et de son incrément sont introduits dans la relation (4.33) :

$$\begin{aligned}
\Delta G_M = & \sum_{A=1}^N [\delta q^A] \left\{ \int_{V_X} [\nabla_X N^A] [C_T^{hom}] [\nabla_X N^A] dV_X [\Delta q^A] + \right. \\
& \int_{V_X} [\nabla_X N^A] [B_T^{hom}] [\nabla_X^2 N^A] dV_X [\Delta q^A] + \int_{V_X} [\nabla_X^2 N^A] [D_T^{hom}] [\nabla_X N^A] dV_X [\Delta q^A] + \\
& \left. \int_{V_X} [\nabla_X^2 N^A] [A_T^{hom}] [\nabla_X^2 N^A] dV_X [\Delta q^A] \right\} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture de l'équilibre dans son approximation par éléments finis, on réécrit l'expression précédente sous une forme bilinéaire des déplacements virtuels et incrémentaux :

$$\Delta G_M = \sum_{A=1}^N [\delta q^A] \begin{Bmatrix} [K_1]_{ij}^C & [K_2]_{ijk}^{Co} \\ [K_3]_{ijk}^{Co} & [K_4]_{ijkl}^{SG} \end{Bmatrix} [\Delta q^A] \quad (4.38)$$

où  $[K_1]_{ij}^C$ ,  $[K_2]_{ijk}^{Co}$ ,  $[K_3]_{ijk}^{Co}$ ,  $[K_4]_{ijkl}^{SG}$ , sont les matrices tangentes consistantes pour la réponse de Cauchy, du couplage entre premier et second gradient et du second gradient respectivement.

Les matrices tangentes de l'expression (4.38) prennent la forme suivante après calcul :

$$\begin{aligned}
[K_1]_{ij}^C &= \int_{V_X} [\nabla_X N^A] [C_T^{hom}] [\nabla_X N^A] dV_X ; [K_2]_{ijk}^{Co} = \int_{V_X} [\nabla_X N^A] [B_T^{hom}] [\nabla_X^2 N^A] dV_X \\
[K_3]_{ijk}^{Co} &= \int_{V_X} [\nabla_X^2 N^A] [D_T^{hom}] [\nabla_X N^A] dV_X ; [K_4]_{ijkl}^{SG} = \int_{V_X} [\nabla_X^2 N^A] [A_T^{hom}] [\nabla_X^2 N^A] dV_X \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Afin de calculer le déplacement incrémental de fluctuation qui est inconnu, nous rassemblons les expressions des Eq. (4.30) et Eq. (4.38) pour trouver la forme finale de l'équilibre nonlinéaire écrite sous forme discrétisée :

$$\begin{aligned}
\Delta G &= \Delta G_M + \Delta \tilde{G} = \sum_{A=1}^N [\delta q^A] [K_T^{hom}] [\Delta q^A] + \sum_{A=1}^N [\delta \tilde{q}^A] \left\{ \frac{1}{V_y} \int_{V_{VER}} [\nabla_y N^A] [K_{T,\mu}] [\nabla_y N^A] dV_y [\Delta \tilde{q}^A] \right. \\
&= \sum_{A=1}^N [\delta q^A] [K_T^{hom}] [\Delta q^A] + \sum_{A=1}^N [\delta \tilde{q}^A] [\tilde{C}_T] [\Delta \tilde{q}^A] = 0 \quad (4.40)
\end{aligned}$$

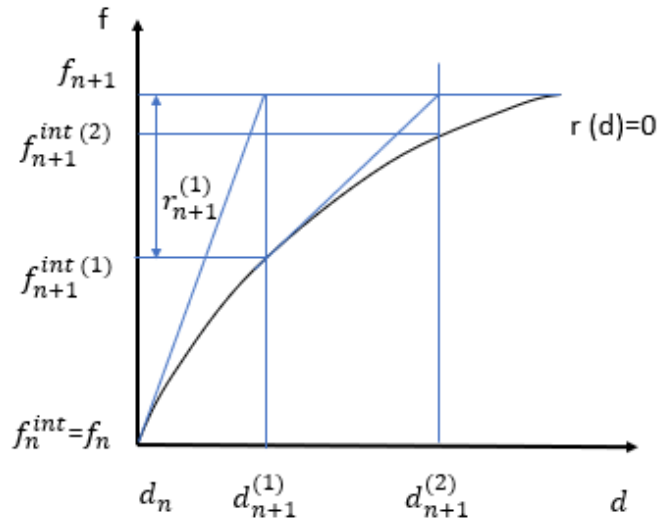
avec,  $\tilde{C}_T = \frac{1}{V_y} \int_{V_{VER}} [\nabla_y N^A] [K_{T,\mu}] [\nabla_y N^A] dV_y$ , la matrice tangente de fluctuation à l'échelle microscopique.



La condition (4.40) d'annulation du résidu de l'équilibre virtuel conduit alors au vecteur fluctuation du déplacement incrémental qui est calculé selon l'expression suivante (compte tenu du caractère virtuel des fluctuations  $\delta\tilde{q}^A$ ):

$$[\Delta\tilde{q}^A] = -(\tilde{C}_T)[K_T^{hom}][\Delta q^A] \quad (4.41)$$

La résolution du problème précédent est faite par l'algorithme de Newton-Raphson, afin de trouver un nouvel état d'équilibre à l'instant ultérieur  $t_{n+1}$ , soit  $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$ , comme le montre la figure IV-16 :



**Figure IV-16 : Méthode de résolution incrémentale d'un problème non linéaire**

Après la résolution du problème non linéaire Eq.(4.40), nous pouvons directement calculer les modules tangents homogénéisés, en appliquant des champs cinématiques macroscopiques  $\delta C_M$  et  $\delta C_{2M}$  sur les bords de la cellule élémentaire en injectant la fluctuation du déplacement microscopique dans les modules tangents.

L'algorithme suivant (Figure IV-17) synthétise l'approche utilisée pour résoudre le problème non linéaire et construire la loi constitutive macroscopique par la méthode d'homogénéisation du second gradient.

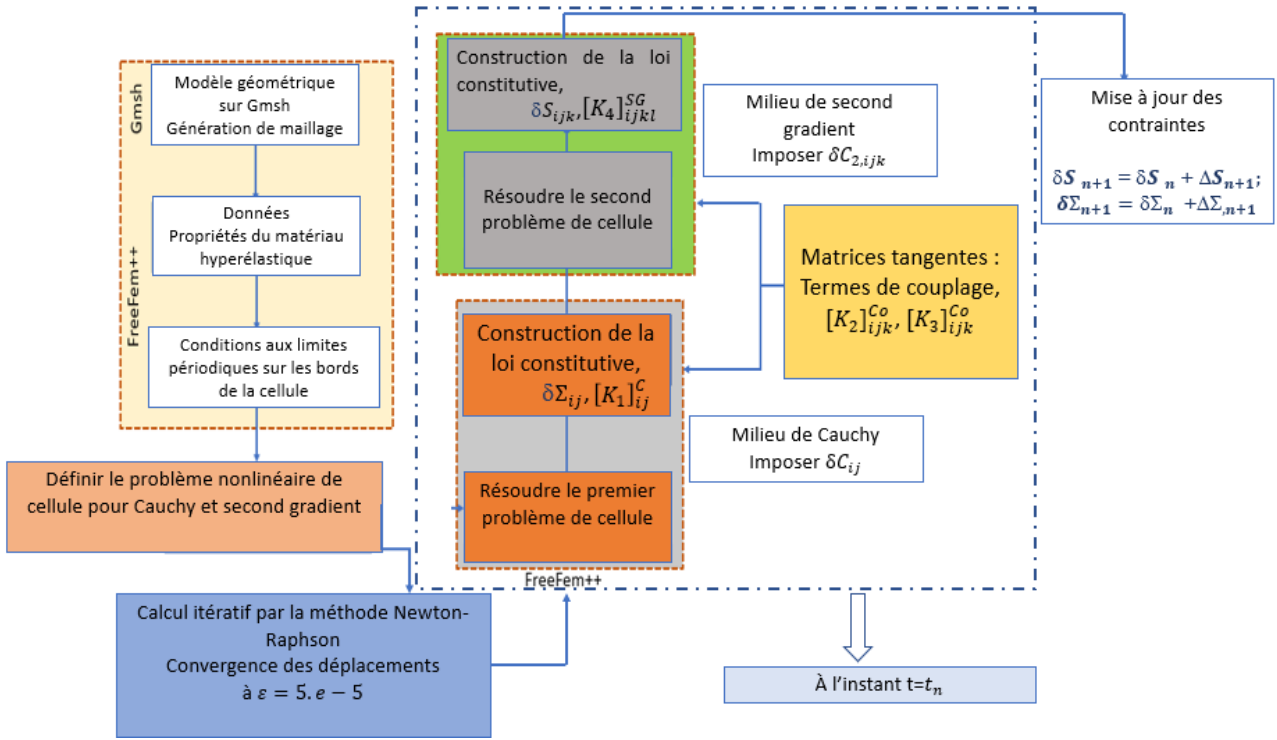


Figure IV-17 : Algorithme de la méthode d'homogénéisation incrémentale en grandes déformations

### 3.3.3. Identification du potentiel hyperélastique macroscopique du second gradient

Afin d'identifier le potentiel macroscopique pour la contribution du second gradient à la loi de comportement homogénéisée, il faut modéliser la forme de l'énergie de déformation macroscopique au second gradient, exprimée en fonction du tenseur de déformation d'ordre trois  $C_2$  qui caractérise la cinématique du milieu du second gradient. Le développement de ce dernier en fonction des composantes du gradient de la transformation et de leurs dérivées spatiales donne les invariants cinématiques indépendants suivants du potentiel macroscopique (voir chapitre 3, section 4) :

$$I_5 = (\lambda_1 \lambda_{1,1} + \lambda_2 \lambda_{2,2}) ;$$

$$I_6 = (\lambda_1 \lambda_{1,2} + \lambda_2 \lambda_{2,1}) ;$$

$$I_7 = (\lambda_1 \lambda_{2,1} + \lambda_2 \lambda_{1,2}) \cos \delta ;$$

$$I_8 = (\lambda_1 \lambda_{2,2} + \lambda_{1,1}) \cos \delta ;$$

$$I_9 = ((\lambda_{12,1} \cos \delta + \lambda_{12} \lambda_{12,1}) + (\lambda_{21} \lambda_{21,2} + \lambda_{21,2} \cos \delta)) ;$$

$$I_{10} = ((\lambda_{12,2} \cos \delta + \lambda_{12} \lambda_{12,2}) + (\lambda_{21} \lambda_{21,1} + \lambda_{21,1} \cos \delta)) ;$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= ((\lambda_{21,1} + \lambda_{12}\lambda_{21,1}\cos\delta) + (\lambda_{21}\lambda_{12,2}\cos\delta + \lambda_{12,2})); \\ I_{12} &= ((\lambda_{21,2} + \lambda_{12}\lambda_{21,2}\cos\delta) + (\lambda_{21}\lambda_{12,1}\cos\delta + \lambda_{12,1})) \end{aligned} \quad (4.42)$$

avec  $I_5, I_6, I_7, I_8$  les invariants liés à l'extension, et  $I_9, I_{10}, I_{11}, I_{12}$  les invariants liés au cisaillement.

La structure pantographique que nous considérons dans cette étude ayant un angle  $\delta = 90^\circ$  entre les deux directions matérielles d'anisotropie, les invariants se simplifient selon le jeu de 6 invariants indépendants suivants :

$$\begin{aligned} I_5 &= (\lambda_1\lambda_{1,1} + \lambda_2\lambda_{2,2}); I_6 = (\lambda_1\lambda_{1,2} + \lambda_2\lambda_{2,1}); I_9 = (\lambda_{12}\lambda_{12,1}) + (\lambda_{21}\lambda_{21,2}); & I_{10} = \\ &(\lambda_{12}\lambda_{12,2}) + (\lambda_{21}\lambda_{21,1}); I_{11} = (\lambda_{21,1} + \lambda_{12,2}); I_{12} = (\lambda_{21,2} + \lambda_{12,1}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nous rappelons que ces derniers invariants sont les composantes de la matrice  $C_{2,ijk}$  en extension biaxiale et en cisaillement exprimés dans la base d'anisotropie. Pour des réseaux à symétrie carrée, formés de deux familles orthogonales de fibres équivalentes, et sous l'action du groupe de permutation  $H'$ , la densité d'énergie du second gradient est alors une fonction symétrique des composantes  $C_{2_{111}}, C_{2_{222}}, C_{2_{112}}, C_{2_{221}}, C_{2_{211}}, C_{2_{122}}$ , c'est-à-dire (voir le détail des développements dans le chapitre 3):

$$W^{SG} = W^{SG}(C_{2_{111}} + C_{2_{222}}, C_{2_{111}} C_{2_{222}}, C_{2_{112}} + C_{2_{221}}, C_{2_{112}} C_{2_{221}}, C_{2_{211}} + C_{2_{122}}, C_{2_{211}} C_{2_{122}})$$

En assemblant les deux modes de déformation dans la même matrice de déformation au second gradient, on obtient alors 6 invariants indépendants qui sont les sommes et les produits des composantes de la matrice  $C_{2,ijk}$ , obtenus par permutation des deux directions matérielles d'anisotropie (on construit ainsi des polynômes quadratiques symétriques de ces composantes) :

$$I_1 = C_{2_{111}} + C_{2_{222}}; I_2 = C_{2_{111}} C_{2_{222}}; I_3 = C_{2_{112}} + C_{2_{221}}; I_4 = C_{2_{112}} C_{2_{221}}; I_5 = C_{2_{211}} + C_{2_{122}}; I_6 = C_{2_{211}} C_{2_{122}}.$$

La forme choisie du potentiel macroscopique du second gradient est la suivante :

$$W^{SG} = a_1 \frac{1}{2} (I_1^2 - 1) + a_2 \frac{4}{3} (I_2^{3/4} - 1) + a_3 \frac{1}{3} (I_3^3 - 1) + a_4 \frac{4}{3} (I_4^{3/4} - 1) + a_5 \frac{1}{5} (I_5^5 - 1) + a_6 \frac{4}{3} (I_6^{3/4} - 1) \quad (4.44)$$

avec  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ , et  $a_6$  des paramètres propres au matériau, qui seront identifiés par la suite.

Il découle de la donnée de l'énergie macroscopique en (4.44) l'expression suivante de l'hypercontrainte sous forme analytique (et sous forme indicielle) :

$$S_{ijk} = \frac{\partial W^{SG}}{\partial C_{2,ijk}} = \sum_{\alpha=1}^6 \frac{\partial W^{SG}}{\partial I_\alpha} \frac{\partial I_\alpha}{\partial C_{2,ijk}}, \quad (4.45)$$

Le développement de l'équation (4.45) donne les expressions suivantes des composantes du tenseur d'hypercontrainte :

$$S_{111} = a_1 I_1 I + a_2 I_2^{-1/4} C_{2,222}$$

$$S_{222} = a_1 I_1 I + a_2 I_2^{-1/4} C_{2,111}$$

$$S_{112} = a_3 I_3^2 I + a_4 I_4^{-1/4} C_{2,221}$$

$$S_{221} = a_3 I_3^2 I + a_4 I_4^{-1/4} C_{2,112}$$

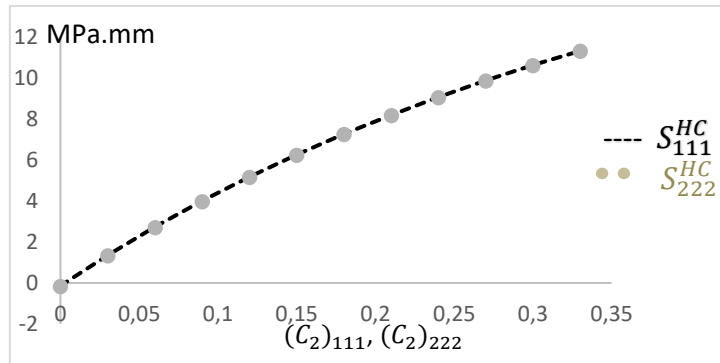
$$S_{211} = a_5 I_5^4 I + a_6 I_6^{-1/4} C_{2,122}$$

$$S_{122} = a_5 I_5^4 I + a_6 I_6^{-1/4} C_{2,211} \quad (4.46)$$

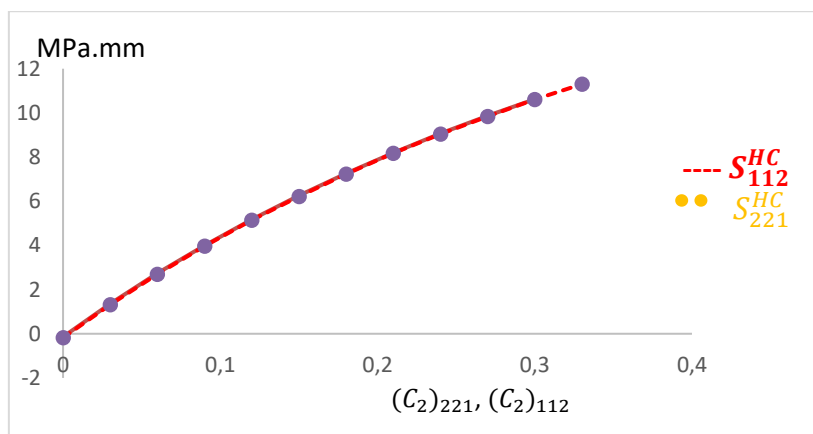
L'identification du potentiel macroscopique (qui dépend de 6 paramètres) est basée sur la minimisation de l'écart quadratique entre la réponse en contraintes du second gradient prédite par l'homogénéisation continue en grandes déformations pour différents modes de déformations et celle fournie par le modèle analytique des Eqs.(4.46), soit :

$$\text{Min}_{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)} S^e := \{ \|S_{111}^{HC} - S_{111}\|^2 + \|S_{222}^{HC} - S_{222}\|^2 + \|S_{112}^{HC} - S_{112}\|^2 + \|S_{221}^{HC} - S_{221}\|^2 + \|S_{211}^{HC} - S_{211}\|^2 + \|S_{122}^{HC} - S_{122}\|^2 \}^{1/2} \quad (4.47)$$

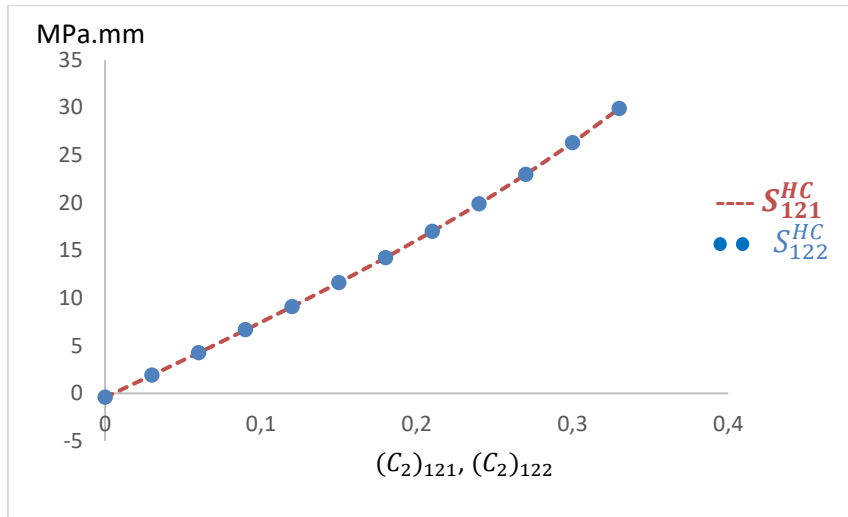
Les réponses prédites numériquement par la méthode d'homogénéisation sont données par la suite pour les différents modes de déformation, soit 6 réponses associées aux 6 modes de déformation du second gradient.



**Figure IV-18 : Réponses prédites en gradient d'extension uniaxiale**



**Figure IV-19 : Réponses prédites en gradient d'extension biaxial**



**Figure IV-20 : Réponses prédites en gradient de cisaillement pur**

Nous observons une réponse nonlinéaire pour tous les modes de déformation, et les mêmes évolutions des contraintes/déformations dans les deux directions principales 1 et 2, ce qui s'explique par le fait que la structure pantographique considérée dans cette étude est dotée de la symétrie tétragonale, et les directions matérielles 1 et 2 sont alors parfaitement équivalentes.

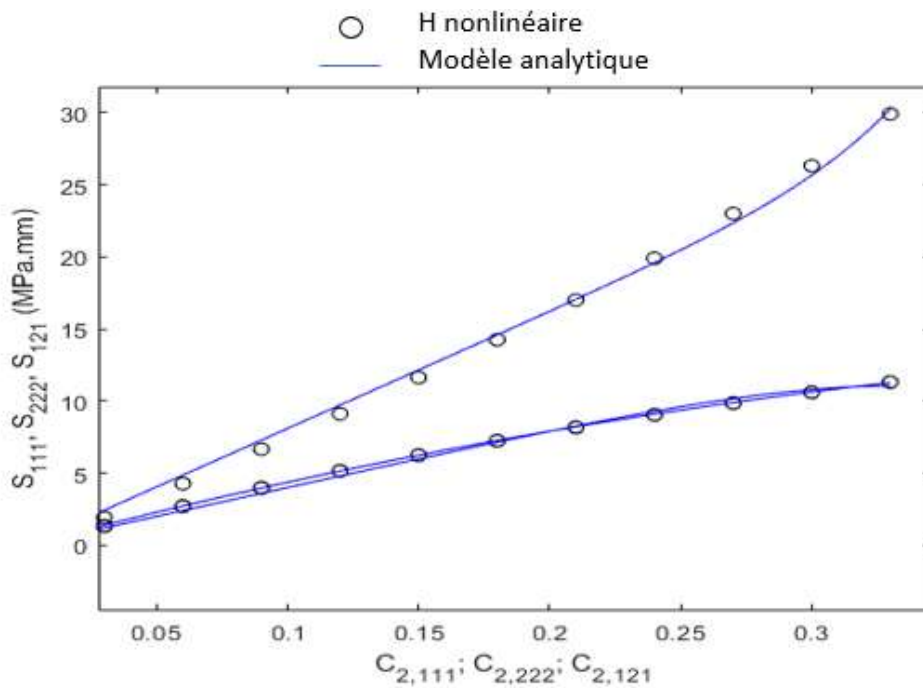
Les paramètres identifiés du potentiel hyperélastique analytique du second sont obtenus avec l'outil d'optimisation Lsqcurvefit de Matlab ; elles figurent dans le Tableau VI-4. Les valeurs obtenues de ces paramètres sont sélectionnées après une étude de convergences par rapport aux paramètres initiaux choisis.

**Tableau IV-4 : Paramètres matériau du potentiel hyperélastique du second gradient**

MPa.mm	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
	-0.0206	0.047	-0.208	0.04	7.17	0.081

La Figure IV-21 montre l'évolution des hypercontraintes prédites par l'homogénéisation nonlinéaire et par le modèle analytique pour différents modes de déformation du second gradient (gradient

d'extension uniaxial, gradient d'extension biaxial, et gradient de cisaillement), qui toutes présentent une très bonne concordance, en fonction de la composante de la déformation associée.



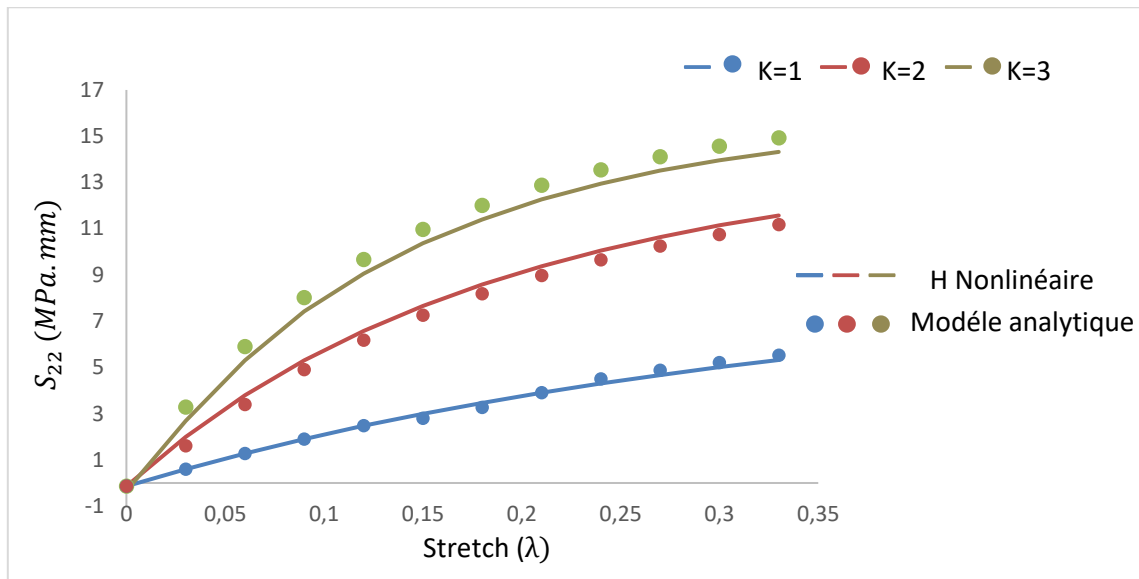
**Figure IV-21 : Evolution des composantes  $S_{111}$ ,  $S_{222}$ ,  $S_{121}$  de l'hypercontrainte prédites par l'homogénéisation nonlinéaire et le modèle analytique**

Afin de vérifier le caractère prédictif du modèle analytique identifié, des simulations pour d'autres modes de déformation ont été faites, notamment en gradient d'extension non équi-biaxiale. Les simulations pour ce mode de déformation sont contrôlées par le rapport entre les deux déformations appliquées dans les directions horizontale et verticale (1 et 2 respectivement), appelé rapport de biaxialité, soit :

$$KS := \frac{C_{2,222}}{C_{2,111}}$$

La Figure IV-22 montre l'évolution des contraintes du second gradient  $S_{222}$  en fonction de la déformation appliquée en extension pour différents rapports de biaxialité, soit  $KS=1, 2, 3$ . Nous observons que la réponse en hypercontrainte prédite par le modèle analytique et celle prédite par le modèle homogénéisé incrémental pour plusieurs rapports de biaxialité sont très proches, avec une

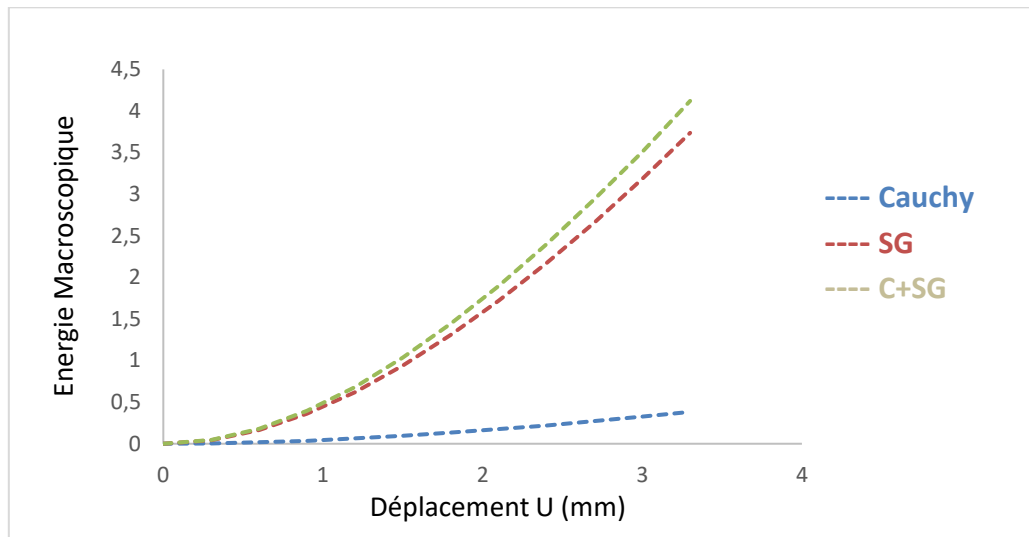
erreur relative qui ne dépasse pas 6%. Le modèle analytique développé montre ainsi son caractère prédictif du comportement macroscopique anisotrope pour des structures de type pantographe.



**Figure IV-22 : Evolution de la composante normale  $S_{22}$  de l'hypercontrainte en fonction des dilatations principales dans la même direction 2 obtenue par l'homogénéisation et le modèle hyperélastique du second gradient identifié à l'échelle macroscopique pour différents rapports de biaxialité**

Afin d'évaluer de façon quantitative l'effet du second gradient pour ces microstructures, nous comparons l'évolution de l'énergie macroscopique en fonction du déplacement imposé lors d'un essai de traction, en séparant de façon artificielle les effets du premier gradient de ceux du second gradient, dont la contribution isolée à l'énergie mécanique totale stockée dans la microstructure à l'échelle macroscopique du milieu de substitution est analysée.



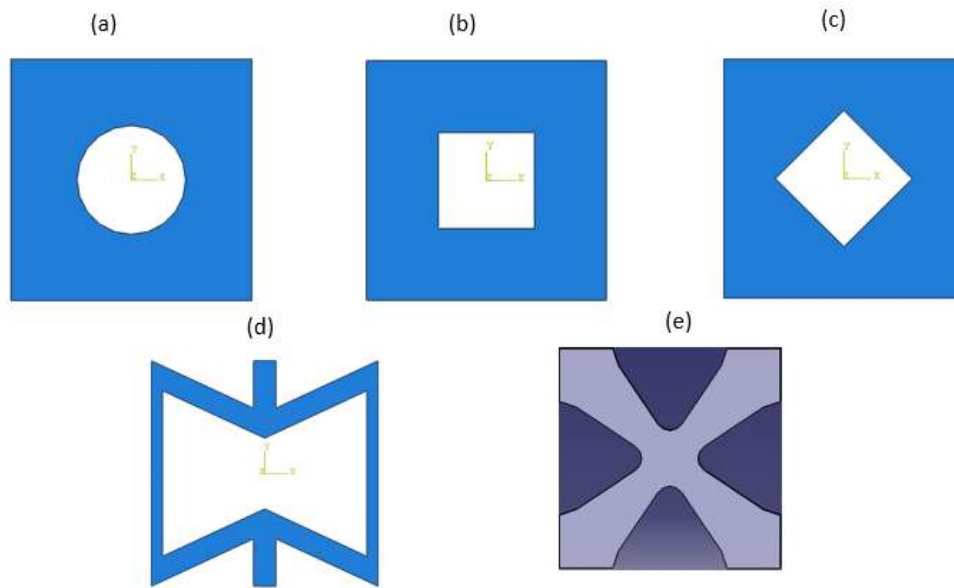


**Figure IV-23 : Evolution de l'énergie macroscopique extensionnelle pour la réponse du premier gradient, du second gradient, et la réponse globale.**

Nous observons Figure IV-23 que l'énergie du second gradient est dominante par rapport à l'énergie de Cauchy, ce qui montre que la structure pantographique a un effet de second gradient très important.

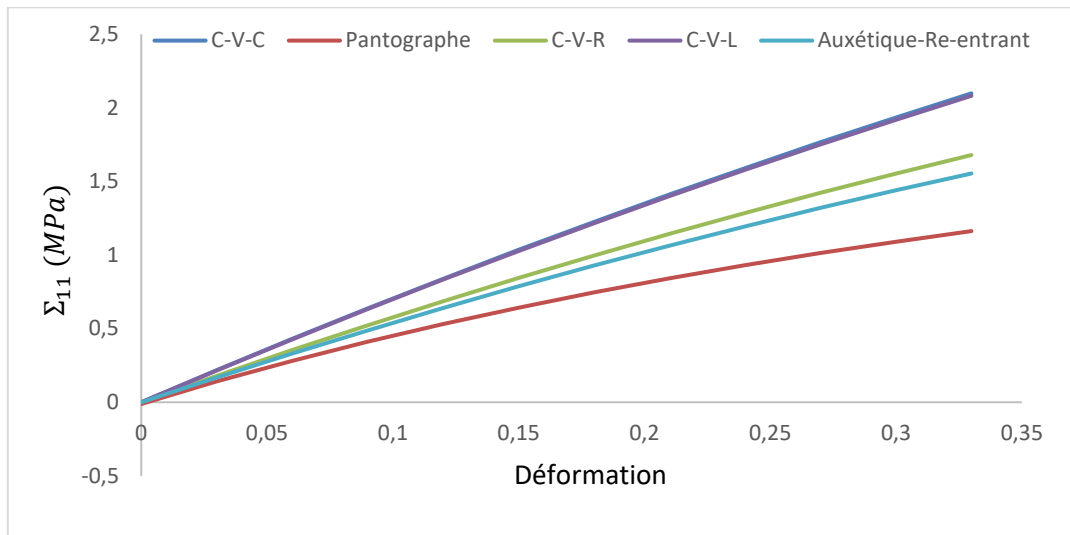
#### **4. Applications à des matériaux composites avec vide et des matériaux auxétiques 2D**

D'autres applications de la méthode d'homogénéisation nonlinéaire développée sont réalisées pour des géométries 2D, soit des composites avec des vides de formes différentes, ainsi qu'un matériau auxétique réentrant, toutes représentées Figure IV-24. La longueur des cellules unitaires est identiques pour ces structures, soit  $L_{CU} = 10mm$ , pour les matériaux composites avec des vides de formes différentes, la fraction volumique est identique, soit : (a) composite avec vide circulaire (C-V-C), (b) composite avec vide rectangulaire (C-V-R), (c) composite avec vide en forme de losange (C-V-L), et (d) matériau auxétique réentrant, encore appelé nid d'abeille réentrant.



**Figure IV-24 : (a) Composite avec vide circulaire (C-V-C), (b) composite avec vide de forme rectangulaire (C-V-R), (c) composite avec vide en losange, (d) auxétique réentrant, (e) pantographe.**

Un essai d'extension simple a été effectué pour ces différentes microstructures afin de comparer entre elles les réponses nonlinéaires homogénéisées du milieu de Cauchy en premier lieu, puis du milieu du second gradient. La Figure IV-25 montre les différentes réponses nonlinéaires obtenues en traction pour le milieu de Cauchy. Nous observons que les matériaux composites avec des vides circulaires et en losange produisent la réponse la plus rigide ; par contre, le pantographe et l'auxétique réentrant fournissent la réponse la plus molle.



**Figure IV-25 : Réponses prédites en traction pour le milieu de Cauchy**

La Figure IV-26 montre la déformée et le champ de contraintes équivalente de Von Mises des différentes architectures sélectionnées. Pour les matériaux composites avec vide, nous observons toujours une concentration de contraintes proche de la frontière des vides ; pour le matériau pantographique et la microstructure auxétique, une concentration de contraintes est observée dans les zones de jonctions entre les entités constitutives de la cellule unité.

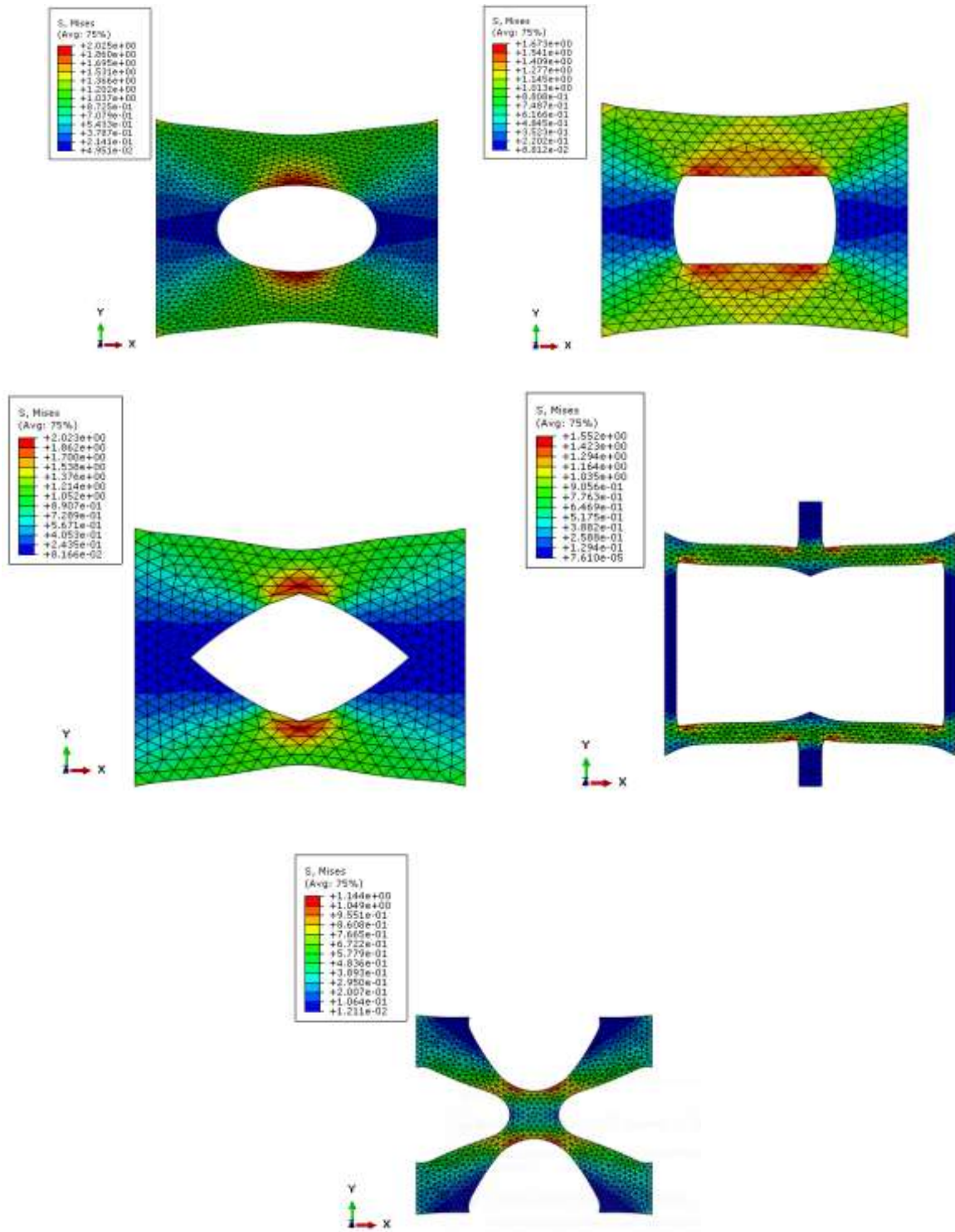
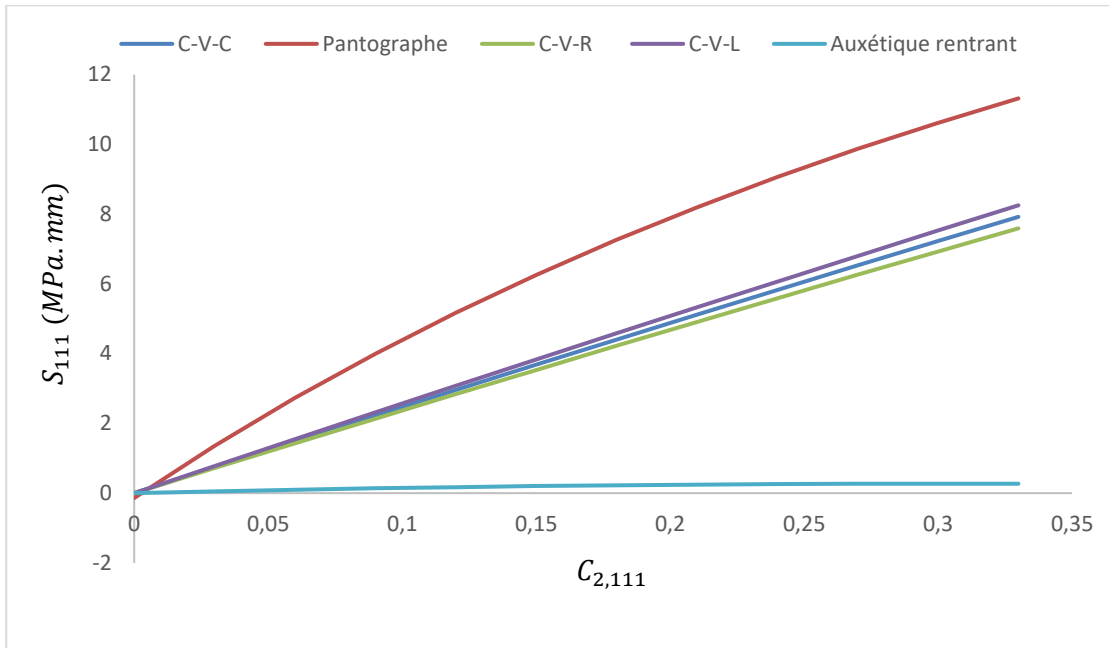


Figure IV-26 : déformée et champ de contraintes de Von Mises pour les différentes microstructures

Afin de quantifier l'effet du second gradient pour ces différentes microstructures, un test numérique avec gradient d'extension simple a été effectué, la Figure IV-27 représentant les réponses prédites.



**Figure IV-27 : Réponses prédites en gradient d'extension uniaxiale pour les différentes microstructures étudiées**

Nous observons que le pantographe présente le niveau des contraintes le plus élevé, qui démontre l'effet du second gradient prononcé de ce type du matériau, de l'autre côté, le matériau auxétique présente à l'inverse la réponse la plus molle. Les réponses au second gradient obtenues pour les trois microstructures de composites comportant un vide et du milieu auxétique sont d'ailleurs très voisines.

## 5. Discussion et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode d'homogénéisation incrémentale de microstructures architecturées périodiques vers un milieu continu de substitution du second gradient. Le pantographe a été choisi comme microstructure présentant des effets prononcés du second gradient, comme le second chapitre de cette thèse l'a montré. Les paramètres microscopiques d'une loi de comportement hyperélastique ont été identifiés à partir d'essais de traction menés sur des éprouvettes architecturées avec la microstructure du pantographe.

Un potentiel macroscopique d'un milieu hyperélastique homogénéisé du second gradient a été identifié pour le pantographe, prenant en compte l'anisotropie de la structure, caractérisée par deux directions matérielles d'anisotropie bien identifiées. Les projections des tenseurs de déformation de Cauchy-Green du premier et du second gradient dans la base constituée des deux directions d'anisotropie définissent les invariants structuraux qui forment les arguments de la densité d'énergie du milieu hyperélastique homogénéisé du second gradient. Les phénomènes de flexion au sein du pantographe sont responsables des effets de second gradient très importants obtenus, l'énergie du second gradient représentant la contribution majeure à l'énergie totale à l'échelle macroscopique du milieu de substitution.

La méthode d'homogénéisation continue du second gradient en grandes déformations qui a été développée permet une étude systématique de la réponse nonlinéaire de milieux architecturés pour différents modes de déformation de la structure, en présupposant identifié et caractérisé l'état d'anisotropie de la microstructure.

L'identification d'un modèle hyperélastique anisotrope à l'échelle d'un milieu continu effectif permet de simuler des milieux architecturés à l'échelle macroscopique dans des applications de calcul des structures.

# Liste de références

P. G. Ciarlet and G. Geymonat. Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre, 295(4) :423–426, 1982.

P. G. Ciarlet. Three-dimensional elasticity, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1988.

K. Trabelsi. On the modeling of thin plates in nonlinear elasticity, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2004.

J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Archive for Rational Mechanics and Analysis, volume 63, 337–403 (1976).

G. A. Holzapfel et R. W. Ogden. Constitutive modelling of passive myocardium: a structurally based framework for material characterization, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2009. <https://doi.org/10.1098/rsta.2009.0091>.

F. Dell’Isola, Lekszycki, T., Pawlikowski, M., Grygoruk, R., Greco, L.: Designing a light fabric metamaterial being highly macroscopically tough under directional extension: first experimental evidence. Z. angew. Math. Phys. 66, 3473–3498 (2015).

F. Dell’Isola, Giorgio, I., Pawlikowski, M., Rizzi, N.: Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. Proc. R. Soc. A 472(2185), 23 (2016).

F. Dell’Isola et al, Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges, Continuum Mechanics and Thermodynamics volume 31, pages851–884 (2019).

G. A. Holzapfel, Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering, 2000.

T. Belytschko, W. Kam Liu, B. Moran, K. I. Elkhodary, Nonlinear Finite Elements for continua and structures, John Wiley& Sons, Ltd, 2014.

A. Ibrahimbegovic, Nonlinear Solid Mechanics, Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods, Solid Mechanics and its applications, volume 160, 2009.



## **V. Calcul de propriétés effectives de matériaux architecturés**

### **3D : Applications en petites et grandes déformations**

Ce chapitre représente une étude numérique sur les matériaux architecturés 3D, en petites et grandes déformations, la première partie focalise l'intérêt sur le calcul des modules élastique effectifs en élasticité linéaire pour les différents matériaux considérés. Ces modules seront calculés pour le milieu de Cauchy et second gradient pour pouvoir quantifier l'effet de second gradient sur ce type des matériaux en calculant les longueurs internes. La deuxième partie sera basée en grandes déformations en utilisant le modèle d'Ogden à l'échelle microscopique. Des réponses mécaniques dans plusieurs modes de déformation seront exploitées pour les différentes géométries pour pouvoir quantifier l'effet de la géométrie sur la réponse effective.

## Table de matières :

V. Chapitre 5 : Calcul de propriétés effectives de matériaux architecturés 3D : Applications en petites et grandes déformations.....	199
1. Introduction.....	205
2. Matériaux et méthodes .....	206
3. Evaluation des propriétés effectives en petites déformations .....	208
3.1. Identification des propriétés effectives homogénéisées du premier gradient .....	208
3.2. Evaluation des propriétés effectives du second gradient.....	221
3.2.1. Calcul de longueurs internes extensionnelles.....	227
4. Calcul de réponses mécaniques en grandes déformations .....	228
4.1. Comportement en extension longitudinale et transversale pour le milieu de Cauchy	231
4.2. Réponses mécaniques en grandes déformation pour le milieu du second gradient	236
5. Conclusion .....	248

## Liste de figures :

Figure V-1 : Matériaux architecturés sélectionnés .....	207
Figure V-2 : Champs de déplacement de CU auxétique semi-rentrant pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a) $C_{11}$ , (b) $C_{22}$ , et le coefficient transversal (c) $C_{33}$ .....	209
Figure V-3 : Champs de déplacement de CU auxétique semi-rentrant pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a) $C_{12}$ , (b) $C_{13}$ et (c) $C_{23}$ .....	210
Figure V-4 : Champs de déplacement de CU auxétique semi-rentrant pour prédire les modules de cisaillement effectifs (a) $C_{12}$ , (b) $C_{13}$ et (c) $C_{23}$ .....	210

Figure V-5 : Champs de déplacement de CU auxétique rentrant pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a) <b>C11</b> , (b) <b>C22</b> , et le coefficient transversal (c) <b>C33</b> .....	212
Figure V-6 : Champs de déplacement de CU auxétique rentrant pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a) <b>C12</b> , (b) <b>C13</b> et (c) <b>C23</b> . .....	212
Figure V-7 : Champs de déplacement de CU auxétique rentrant pour prédire les modules de cisaillement effectifs (a) <b>C44</b> , (b) <b>C55</b> et (c) <b>C66</b> .....	213
Figure V-8 : Champs de déplacement de CU (BCC) pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a) <b>C11</b> , (b) <b>C22</b> , et le coefficient transversal (c) <b>C33</b> .....	214
Figure V-9 : Champs de déplacement de CU (BCC) pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a) <b>C12</b> , (b) <b>C13</b> et (c) <b>C23</b> .....	215
Figure V-10 : Champs de déplacement de CU (BCC) pour prédire les modules de cisaillement effectifs (a) <b>C44</b> , (b) <b>C55</b> et (c) <b>C66</b> . .....	215
Figure V-11 : Champs de déplacement de CU (FCC) pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a) <b>C11</b> , (b) <b>C22</b> , et le coefficient transversal (c) <b>C33</b> .....	216
Figure V-12 : Champs de déplacement de CU (FCC) pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a) <b>C12</b> , (b) <b>C13</b> et (c) <b>C23</b> .....	217
Figure V-13 : Champs de déplacement de CU (FCC) pour prédire les modules de cisaillement effectifs (a) <b>C44</b> , (b) <b>C55</b> et (c) <b>C66</b> . .....	217
Figure V-14 : : Champs de déplacement de CU (C-V-C) pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a) <b>C11</b> , (b) <b>C22</b> , et le coefficient transversal (c) <b>C33</b> .....	218
Figure V-15 : Champs de déplacement de CU (C-V-C) pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a) <b>C12</b> , (b) <b>C13</b> et (c) <b>C23</b> . .....	219
Figure V-16 : Champs de déplacement de CU (C-V-C) pour prédire les modules de cisaillement effectifs (a) <b>C44</b> , (b) <b>C55</b> et (c) <b>C66</b> . .....	219
Figure V-17 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient : (a) <b>A111</b> , (b) <b>A222</b> .....	222

Figure V-18 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A333</b> , (b) <b>A112</b> .....	222
Figure V-19 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A113</b> , (b) <b>A122</b> .....	223
Figure V-20 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A123</b> , (b) <b>A133</b> .....	223
Figure V-21 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A211</b> , (b) <b>A212</b> .....	224
Figure V-22 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A213</b> , (b) <b>A223</b> .....	224
Figure V-23 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A233</b> , (b) <b>A331</b> .....	225
Figure V-24 : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A312</b> , (b) <b>A313</b> .....	225
Figure V-25 : : Champs de déplacement du CU (FCC) pour prédire les modules de second gradient :	
(a) <b>A322</b> , (b) <b>A323</b> .....	226
Figure V-26 : Structures architecturées 3D.....	229
Figure V-27 : Conditions aux limites en extension longitudinale .....	231
Figure V-28 : Champ de déplacement et forme de déformée de la structure BCC. ....	232
Figure V-29 : Champ de déplacement et forme de déformée de la structure CVC. ....	232
Figure V-30 : Champ de déplacement et forme de déformée de la structure FCC.....	233
Figure V-31 : Champ de déplacement et forme de déformée de la structure Auxétique rentrante.	233
Figure V-32 : Champ de déplacement et forme de déformée de la structure auxétique semi-rentrante. .....	234
Figure V-33 : Réponses mécaniques en extension longitudinale pour différentes structures	235
Figure V-34 : Réponses mécaniques en extension transversale pour différentes structures .	235

Figure V-35 : Champ de déplacement <b>K212</b> et forme de déformée de la structure CVC...	237
Figure V-36 : Champ de déplacement <b>K212</b> et forme de déformée de la structure BCC...	238
Figure V-37 : Champ de déplacement <b>K212</b> et forme de déformée de la structure FCC....	238
Figure V-38 : Champ de déplacement <b>K212</b> et forme de déformée avec une coupe plane de la structure auxétique rentrante.....	239
Figure V-39 : Champ de déplacement <b>K212</b> et forme de déformée de la structure auxétique semi-rentrante. ....	240
Figure V-40 : Réponses mécaniques de différentes structures pour le mode de déformation <b>K212</b> . .....	240
Figure V-41 : Champ de déplacement <b>K322</b> et forme de déformée de la structure CVC....	241
Figure V-42 : Champ de déplacement <b>K322</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Z de la structure BCC.....	242
Figure V-43 : Champ de déplacement <b>K322</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Y de la structure FCC. ....	242
Figure V-44 : Champ de déplacement <b>K322</b> et forme de déformée de la structure auxétique rentrante. .....	243
Figure V-45 : Champ de déplacement <b>K322</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Z de la structure auxétique semi-rentrante. ....	243
Figure V-46 : Réponses mécaniques de différentes structures pour le mode de déformation <b>K322</b> . .....	244
Figure V-47 : Champ de déplacement <b>K312</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Z de la structure CVC.....	244
Figure V-48 : Champ de déplacement <b>K312</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Z de la structure BCC.....	245
Figure V-49 : Champ de déplacement <b>K312</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Z de la structure FCC. ....	246

Figure V-50 : Champ de déplacement <b>K312</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Z de la structure auxétique rentrante. ....	246
Figure V-51 : Champ de déplacement <b>K312</b> et forme de déformée avec une coupe sur le plan Y-Z de la structure auxétique semi-rentrante. ....	247
Figure V-52 : Réponses mécaniques de différentes structures considérées pour le mode de déformation K312. ....	247

## Liste de tableaux :

Tableau V-1 : Paramètres matériau du modèle d'Ogden .....	207
Tableau V-2 : Modules effectifs prédits <b>Cij</b> pour la cellule unitaire auxétique semi-rentrant 3D simulée. ....	211
Tableau V-3 : Modules effectifs prédits <b>Cij</b> pour la cellule unitaire auxétique rentrant 3D simulée. ....	213
Tableau V-4 : Modules effectifs prédits <b>Cij</b> pour la cellule unitaire BCC 3D simulée. ....	216
Tableau V-5 : Modules effectifs prédits <b>Cij</b> pour la cellule unitaire FCC 3D simulée. ....	218
Tableau V-6 : Modules effectifs prédits <b>Cij</b> pour la cellule unitaire C-V-C 3D simulée. ....	220
Tableau V-7 : Modules élastiques effectifs de matériaux sélectionnés .....	220
Tableau V-8 : Modules élastique de second gradient (MPa.mm) pour différents matériaux. ....	226
Tableau V-9 : Longueurs internes extensionnelles .....	227

## 1. Introduction

Les matériaux architecturés présentant des architectures des formes complexes 3D et une grande variabilité géométrique sont recherchés dans un certain nombre d'applications d'ingénierie (génie civil, biomécanique, aéronautique et autres). Les matériaux architecturés sont utilisés pour concevoir des structures légères (en vertu de leur porosité élevée), hautement performantes d'un point de vue mécanique (mais aussi multiphysique), et parfois également dans un souci d'élégance (comme la tour Eiffel et la Pyramide du Louvre). Les performances élevées des matériaux architecturés et des métamatériaux mécaniques ont pour origine leur conception interne, en termes de topologie identifiée au sein d'une cellule de base utilisée comme unité périodique, qui remplace la notion d'atomes dans les matériaux conventionnels (Y. Liu, H. Hun, 2010).

Les matériaux architecturés sont une classe émergente de matériaux avancés permettant d'atteindre des propriétés fonctionnelles très spécifiques et adaptables aux besoins des applications industrielles. Ces propriétés sont obtenues grâce à une conception topologique prédéfinie en fonction des propriétés recherchées, un concept qui offre une grande variabilité des formes géométriques possibles. Des types d'architecture variées peuvent être conçues, par exemple des matériaux hybrides (composites constitués de deux constituants au niveau nanométrique ou moléculaire), des matériaux à gradients de microstructure, qui concernent des applications pour lesquelles on recherche des propriétés d'amortissement élevées, une anisotropie prononcée, des capacités d'actuation liées à leur grande souplesse, voire des propriétés multifonctionnelles ou multiphysiques (mécanique, électrique, magnétique). La fabrication de ce type de matériaux est rendue possible de nos jours par les nouveaux procédés de « fabrication additive », qui offrent la possibilité de fabriquer des matériaux architecturés à une échelle de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ .

La réponse mécanique des matériaux architecturés est clairement liée à l'architecture interne et au comportement du matériau de base. Le développement de modèles micromécaniques prédictives a pour objectif d'apporter une compréhension quantitative de l'impact de l'architecture interne sur les

propriétés mécaniques effectives à l'échelle macroscopique. La détermination expérimentale des propriétés mécaniques de telles structures est délicate, en raison de leur anisotropie globale, qui conduit à un nombre élevé d'essais à réaliser. Par conséquent, des approches théoriques et numériques prédictives de nature micromécanique sont nécessaires afin de lier les échelles et de fournir une loi de comportement à l'échelle d'un milieu continu effectif, les propriétés homogénéisées étant reliées aux paramètres microstructuraux géométriques et mécaniques de la microstructure.

## 2. Matériaux et méthodes

Dans ce chapitre, nous réalisons des simulations par éléments finis de différentes structures architecturées et de métamatériaux au second gradient, successivement en petites et en grandes déformations. Dans une première étape, des simulations en petites déformations seront réalisées dans le cadre de l'élasticité linéaire, avec pour objectif de déterminer les propriétés effectives de matériaux architecturés dans le régime initial des petites perturbations. Nous mettrons à profit la théorie développée dans le chapitre 2 (section 3), qui repose sur le principe de Hill-Mandel, avec des conditions de périodicité sur la cellule unitaire. Un matériau métallique est choisi comme matériau de base, spécifiquement l'aluminium qui est un métal très léger dont la densité spécifique est de 2,7 g/cm<sup>3</sup>, avec un module d'Young  $E=69000\text{MPa}$  et un coefficient de poisson  $\nu = 0.34$ . Les cellules unitaires de tous les matériaux choisis ont toutes la même longueur  $l_{CU}=10\text{mm}$ , avec une épaisseur des poutres également identiques  $ep_{CU}=1\text{mm}$  (Figure V-1).

Les simulations en grandes déformations de ces matériaux architecturés seront effectuées sur des macrostructures à motif périodiques afin d'évaluer leur réponse mécanique dans un contexte de milieu de substitution du second gradient. Le modèle hyperélastique d'Ogden d'ordre trois est choisi pour modéliser la loi de comportement à l'échelle microscopique du matériau. Les paramètres matériau (Tableau V-1) de ce modèle sont choisis à partir des essais mécaniques effectués dans le chapitre 4 pour un élastomère thermoplastique (matériau TPE) qui est un matériau de nature hyperélastique permettant d'atteindre jusqu'à 40% de déformation.

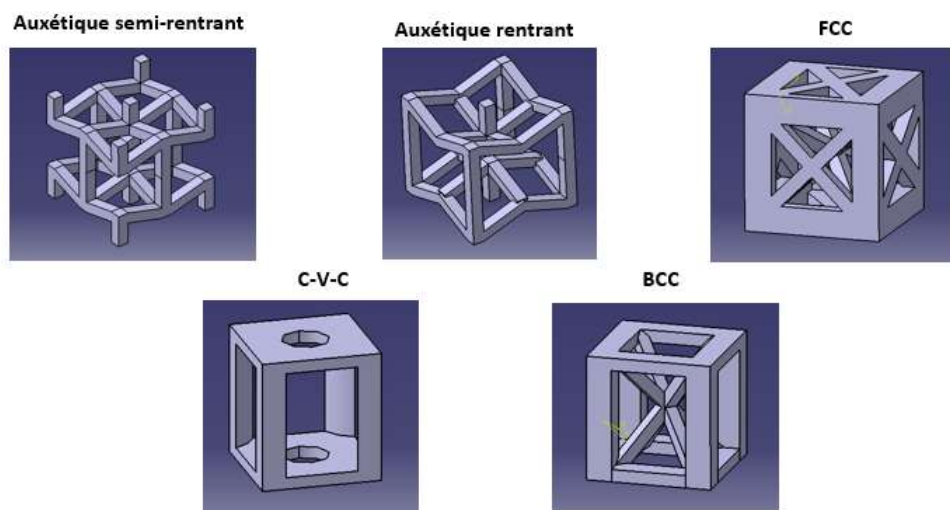


**Tableau V-1 : Paramètres du modèle d'Ogden à l'échelle microscopique du matériau de base**

<b>Modèle d'Ogden</b>			
$\mu_i$ (MPa)	-1.688	0.077	0.051
$\alpha_i$ (MPa)	-1.97	4.61	-2.01

Les structures considérées dans ce chapitre pour illustrer les méthodes d'homogénéisation développées dans les précédents chapitres sont représentées Figure V-1, soit :

- Des microstructures chirales de type nid d'abeilles 3D réentrantes de nature auxétique (X. T. Wang et al, 2017 ; M. S. Rad et al, 2019) utilisées pour des applications à haute rigidité. La structure réentrante est choisie en raison de ses caractéristiques fondamentales sous-jacentes aux principales caractéristiques des structures auxétiques.
- Nous étudions également dans ce chapitre des matériaux inspirés des réseaux cristallins cubiques de Bravais (F. Libonati et al, 2021) afin de mieux comprendre la relation géométrie/propriétés, en modélisant ces structures à l'échelle de leur cellule unitaire (Figure V-1), périodique au sein la structure macroscopique. En particulier, nous étudions ici les réseaux cubiques simple avec vide circulaire (C-V-C), cubiques centrés en volume (body centered cubic en anglais, BCC) et cubique à faces centrées (face-centered cubic en anglais, FCC) (Figure V-1).



**Figure V-1 : Matériaux architecturés sélectionnés**

Les méthodes d'homogénéisation développées dans le chapitre 2 en petites déformations et dans le chapitre 3 en grandes déformations seront appliquées pour évaluer le comportement effectif de ces microstructures.

### 3. Evaluation des propriétés effectives en petites déformations

Nous rappelons que les champs de déformations macroscopiques pour le premier et second gradient sont écrits sous forme vectorielle comme suit :

$$E_{ij} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} = E_{21}, E_{23} = E_{32}, E_{13} = E_{31}]^T$$

$$K_{ijk} = [K_{111}, K_{221}, K_{122}, K_{331}, K_{133}, K_{222}, K_{112}, K_{121}, K_{332}, K_{233}, K_{333}, K_{113}, K_{131}, K_{223}, K_{232}, K_{231}, K_{132}, K_{123}]^T$$

Pour un matériau centrosymétrique, l'élasticité à gradient de déformation est caractérisée par un tenseur élastique du sixième ordre en plus du tenseur élastique classique du quatrième ordre, et les tenseurs de couplage s'annulent.

#### 3.1. Identification des propriétés effectives homogénéisées du premier gradient

Nous concevons différentes conditions aux limites pour la détermination des composantes de la matrice de rigidité ou des modules élastiques sur différents domaines  $\Omega$  de cellules unitaires (Figure V-1) avec une surface notée  $\partial\Omega$ . Dans chaque cas, nous forçons la cellule unitaire dans un contexte 3D à supporter les déformations spécifiques conçues, et nous appliquons des conditions de périodicité sur les bords de cellules unitaires :

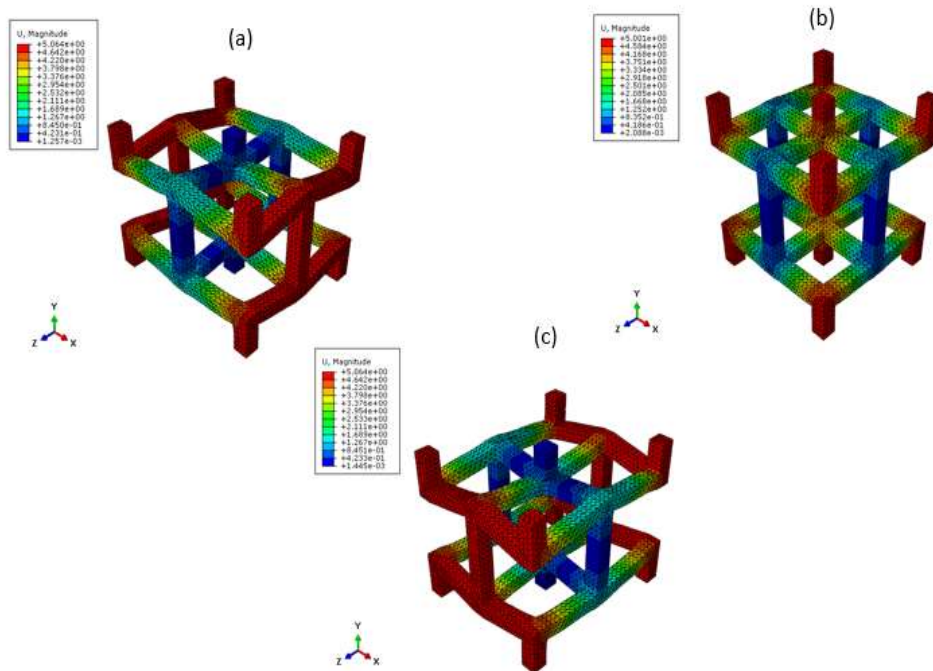
$$E = \left[ \frac{\partial U_x}{\partial x}, \frac{\partial U_y}{\partial y}, \frac{\partial U_z}{\partial z}, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \right]^T \quad (5.1)$$

Nous rappelons que la loi constitutive pour le milieu du premier gradient s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{hom} & C_{12}^{hom} & C_{13}^{hom} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}^{hom} & C_{22}^{hom} & C_{23}^{hom} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}^{hom} & C_{32}^{hom} & C_{33}^{hom} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{hom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^{hom} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{hom} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{13} \end{pmatrix}$$

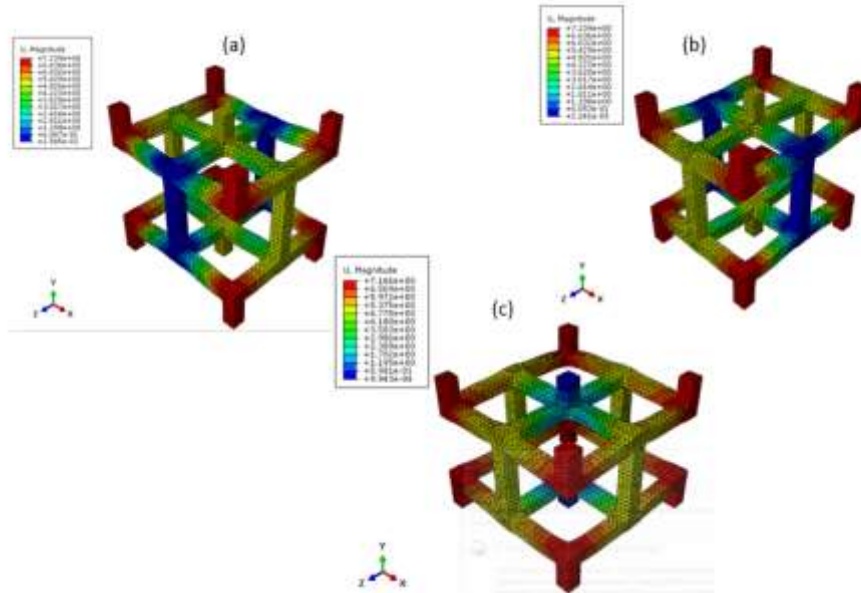
Les modules élastiques homogénéisés sont calculés à partir de (Eq. 2.23) du chapitre 2, en s'appuyant sur la condition de macro-homogénéités de Hill-Mandel. Le type d'éléments finis qu'on a utilisé pour toutes les applications est le tétraèdre à cause des formes géométriques des matériaux choisis qui représentent des poutres variées et des courbures. Nous avons testé également la convergence des résultats par rapport à la taille du maillage, mais dans quelques cas on se limite à une certaine taille vu le temps de calcul important.

Les champs de déplacements appliqués et les déformées issues des tests numériques pour calculer les modules longitudinaux et transverses effectifs du matériau auxétique semi-rentrant sont représentés sur la Figure V-2.

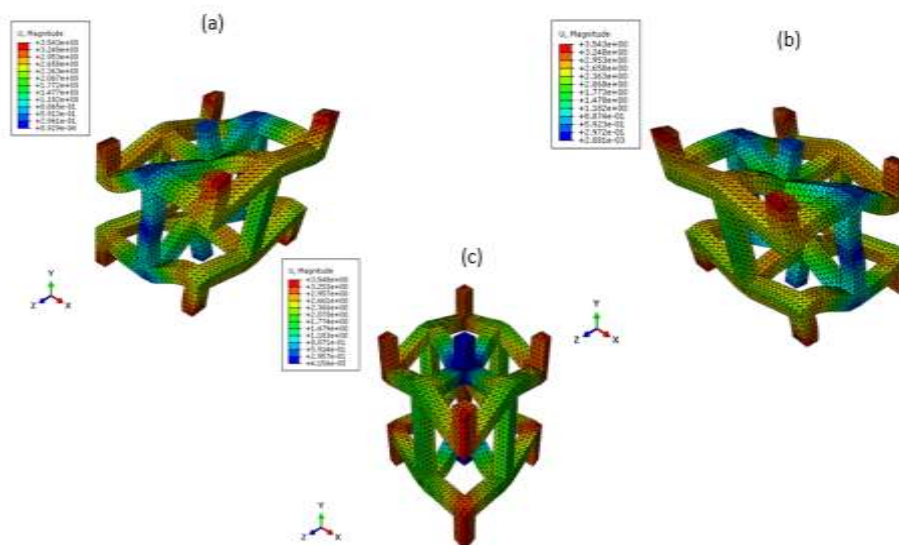


**Figure V-2 : Champs de déplacement de la CU auxétique semi-rentrante appliqués pour le calcul des modules longitudinaux effectifs (a)  $C_{11}$ , (b)  $C_{22}$ , et du coefficient de rigidité transverse (c)  $C_{33}$ .**

Les champs de déplacements appliqués et les déformées de la CU auxétique semi-réentrante pour les sollicitations cinématiques appliquées pour calculer les modules effectifs biaxiaux et les modules de cisaillement du matériau auxétique semi-reentrant sont représentées en Figure V-3 et Figure V-4.



**Figure V-3 : Champs de déplacement de la CU auxétique réentrant résultant des sollicitations cinématiques appliquées pour calculer les modules biaxiaux effectifs (a)  $C_{12}$ , (b)  $C_{13}$  et (c)  $C_{23}$ .**



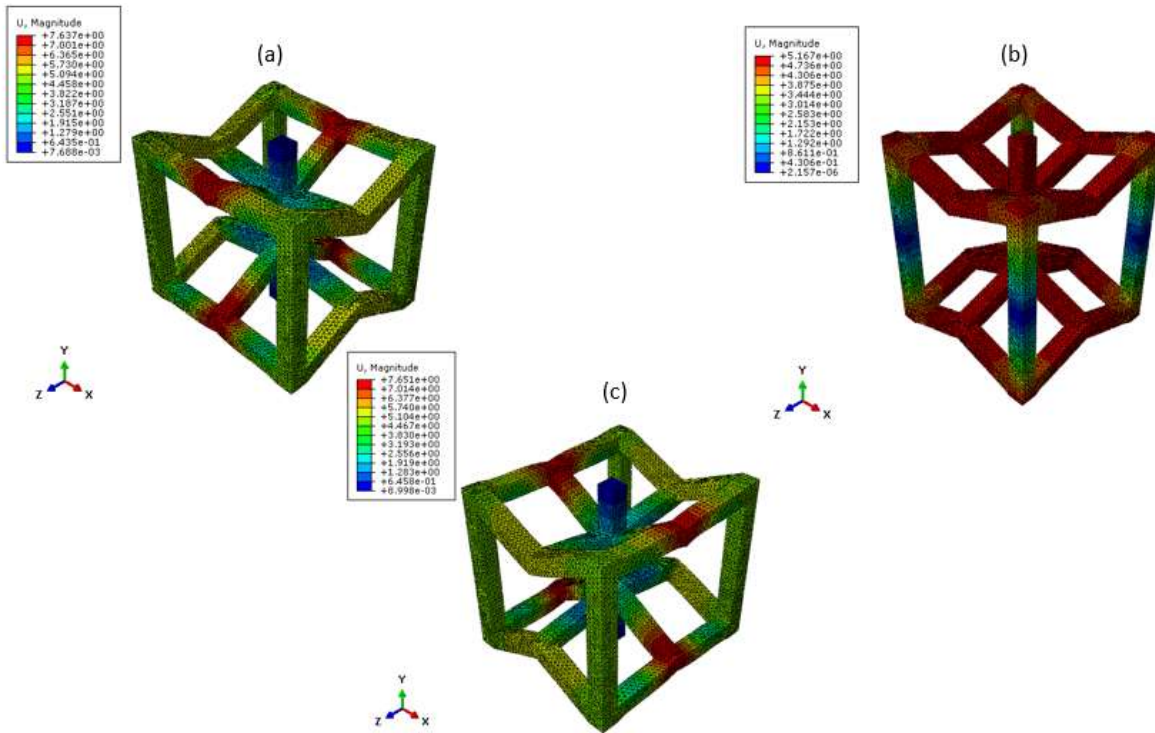
**Figure V-4 : Champs de déplacement de la CU auxétique réentrant résultant des sollicitations cinématiques appliquées pour calculer les modules de cisaillement effectifs (a)  $C_{12}$ , (b)  $C_{13}$  et (c)  $C_{23}$ .**

Les coefficients du tenseur de rigidité effectifs du premier gradient du matériau auxétique semi-reentrant 3D sont donnés dans le Tableau V-2.

**Tableau V-2 : Modules effectifs prédits  $C_{ij}$  pour la cellule unitaire auxétique semi-réentrante 3D simulée.**

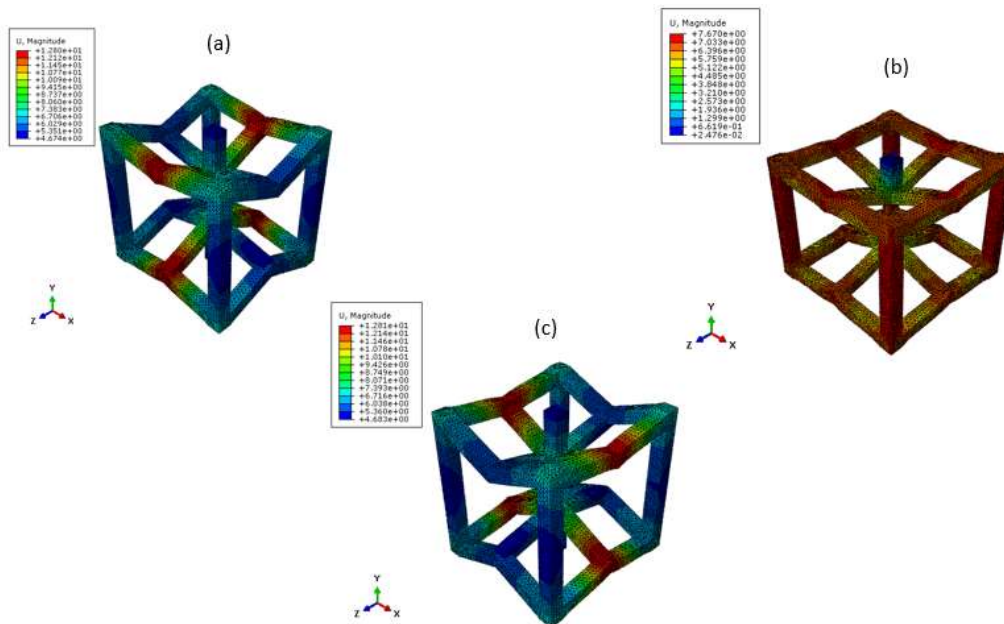
Tenseur de rigidité (MPa)	Essais de traction uniaxiale			Essais de traction biaxiale			Essais de cisaillement		
	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{23}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
<b>Auxétique 3D semi-reentrant</b>	3720	707	3720	3060	7600	3060	137	138	312

Les champs de déplacements appliqués et les déformées de la cellule dans les modes de sollicitation utilisés pour calculer les modules longitudinaux et transverses effectifs du matériau auxétique réentrant sont représentés dans la Figure V-5.

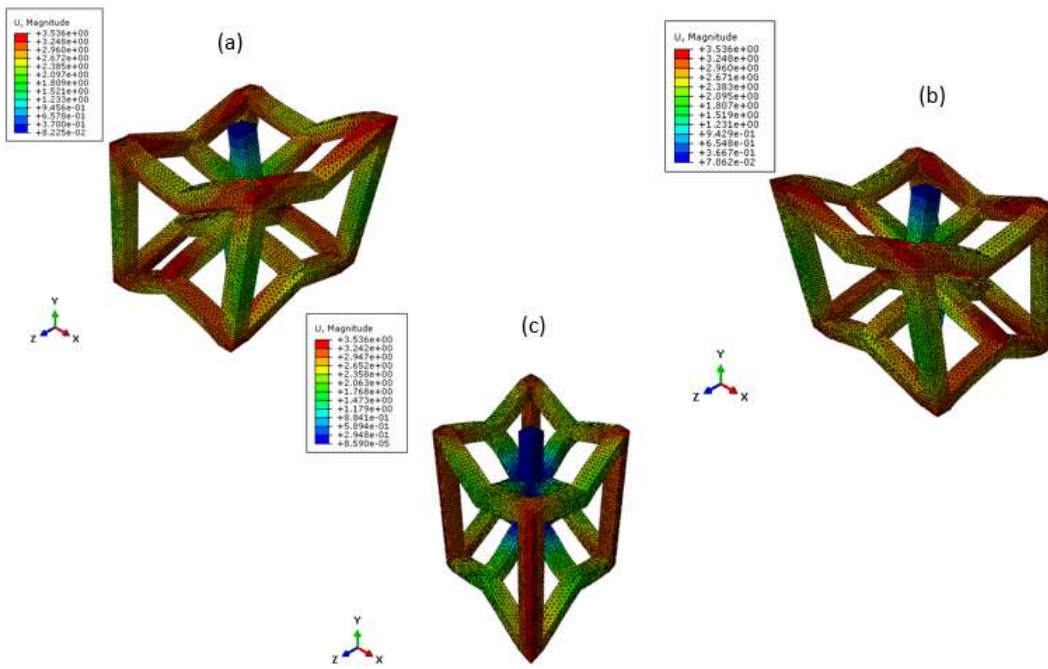


**Figure V-5 : Champs de déplacement de la CU auxétique réentrant résultant des sollicitations cinématiques appliquées pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a)  $C_{11}$ , (b)  $C_{22}$ , et le coefficient transverse (c)  $C_{33}$ .**

Les champs de déplacements appliqués et les formes de déformées pour déterminer les modules effectifs biaxiaux et de cisaillement du matériau auxétique reentrant sont illustrés Figure V-6 et Figure V-7.



**Figure V-6 : Champs de déplacement de CU (BCC) issus des chargements cinématiques appliqués sur la CU réentrante 3D pour le calcul des modules biaxiaux effectifs (a)  $C_{12}$ , (b)  $C_{13}$  et (c)  $C_{23}$ .**



**Figure V-7 : Champs de déplacement de CU (BCC) issus des chargements cinématiques appliqués sur la CU rééminente 3D pour le calcul des modules de cisaillement effectifs (a)  $C_{44}$ , (b)  $C_{55}$  et (c)  $C_{66}$ .**

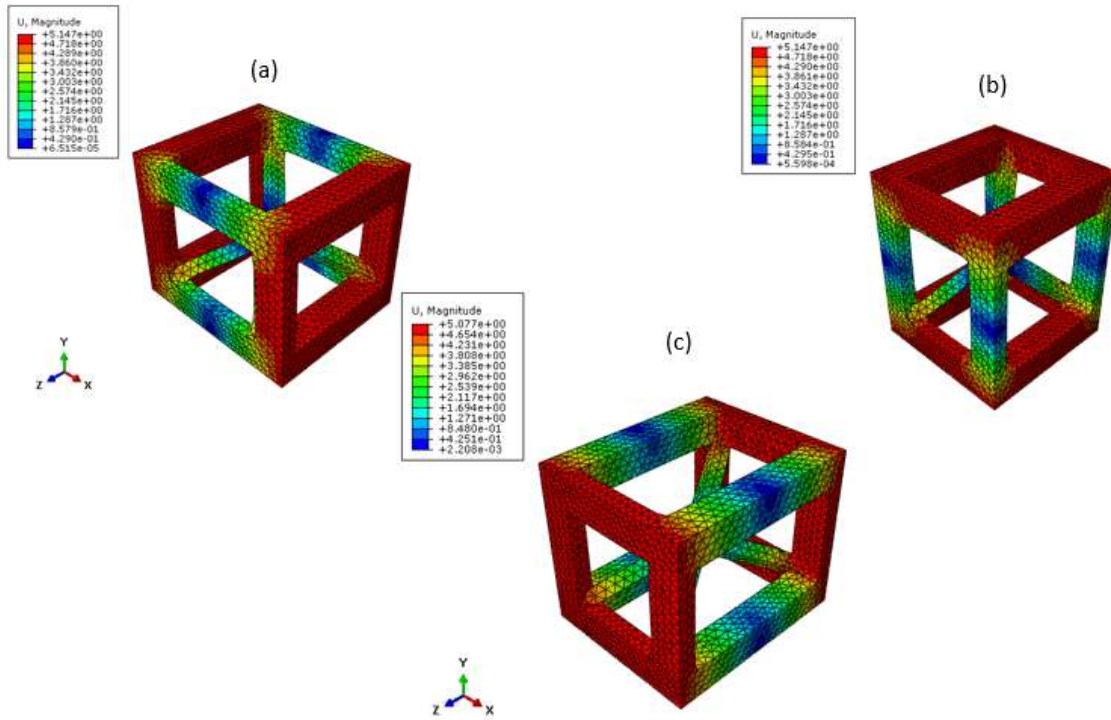
Les modules élastiques effectifs du premier gradient du matériau auxétique rentrant 3D sont donnés dans le Tableau V-3.

**Tableau V-3 : Modules effectifs prédits  $C_{ij}$  pour la cellule unitaire auxétique rentrant 3D simulée.**

Tenseur de rigidité (MPa)	Essais de traction uniaxiale			Essais de traction biaxiale			Essais de cisaillement		
	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{23}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
<b>Auxétique rentrant 3D</b>	2120	2860	2120	2550	6140	5100	134	134	410

Les champs de déplacements appliqués et les formes de déformées pour déterminer les modules longitudinaux et transversal effectifs du BCC sont illustrés sur la Figure V-8.





**Figure V-8 : Champs de déplacement de CU (BCC) issus des chargements cinématiques appliqués sur la CU rééminente 3D pour le calcul des modules longitudinaux effectifs (a)  $C_{11}$ , (b)  $C_{22}$ , et le coefficient transversal (c)  $C_{33}$ .**

Les champs de déplacements appliqués pour déterminer les modules effectifs biaxiaux et de cisaillement du BCC sont représentés sur la Figure V-9 et la Figure V-10.



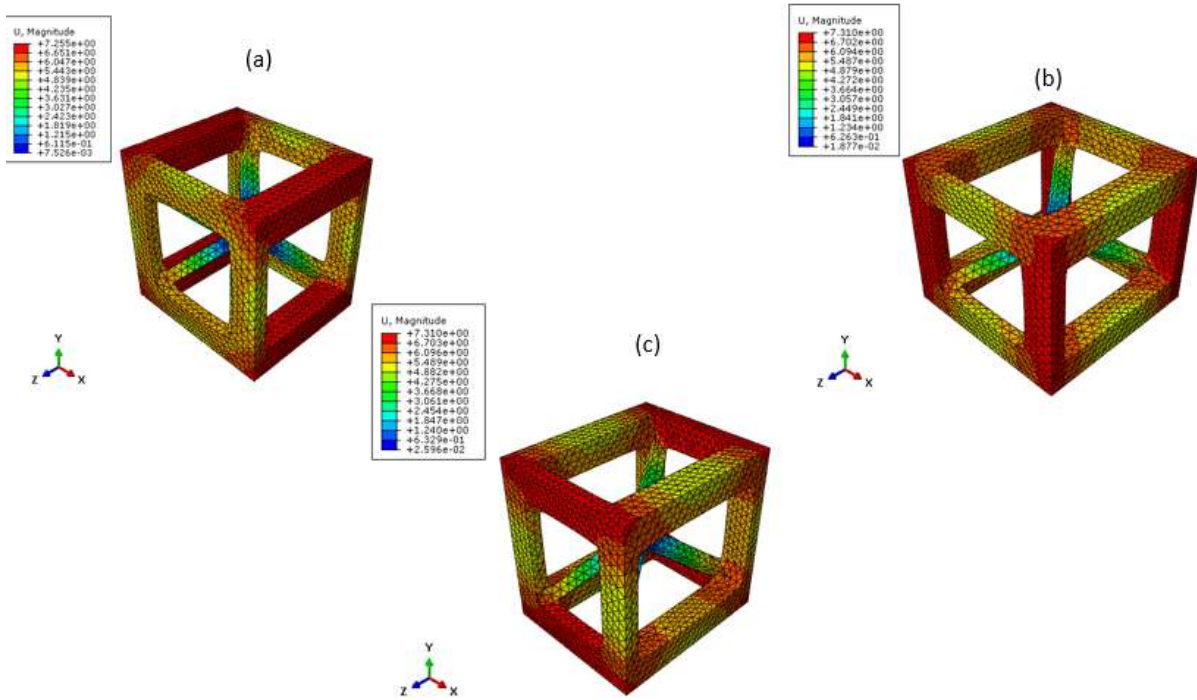


Figure V-9 : Champs de déplacement de CU (BCC) issus des chargements cinématiques appliqués pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a)  $C_{12}$ , (b)  $C_{13}$  et (c)  $C_{23}$ .

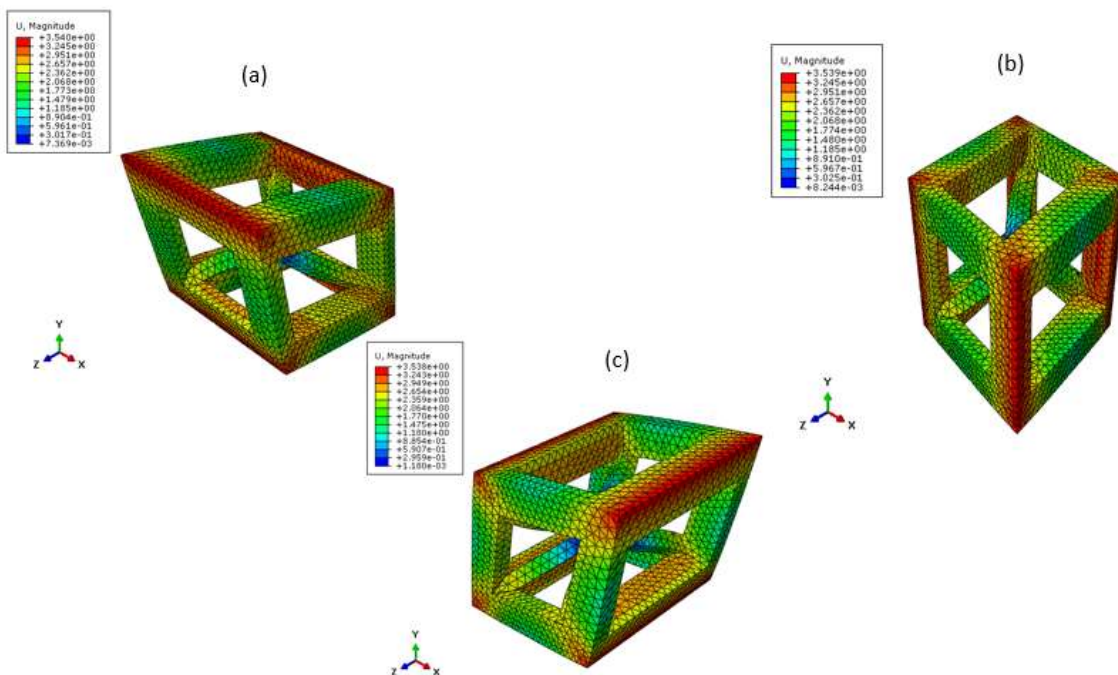


Figure V-10 : Champs de déplacement de CU (BCC) issus des chargements cinématiques appliqués pour prédire les modules de cisailage effectifs (a)  $C_{44}$ , (b)  $C_{55}$  et (c)  $C_{66}$ .

Les modules élastiques effectifs du premier gradient du BCC 3D sont donnés dans le Tableau V-4.

Tableau V-4 : Modules effectifs prédits  $C_{ij}$  pour la cellule unitaire BCC 3D simulée.

Tenseur de rigidité (MPa)	Essais de traction uniaxiale			Essais de traction biaxiale			Essais de cisaillement		
	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{23}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
<b>BCC 3D</b>	7720	7720	13200	18620	24400	24400	1388	1390	1842

Les champs de déplacements appliqués et les formes de déformées pour déterminer les modules longitudinaux et transversal effectifs du FCC sont montés sur la Figure V-11.

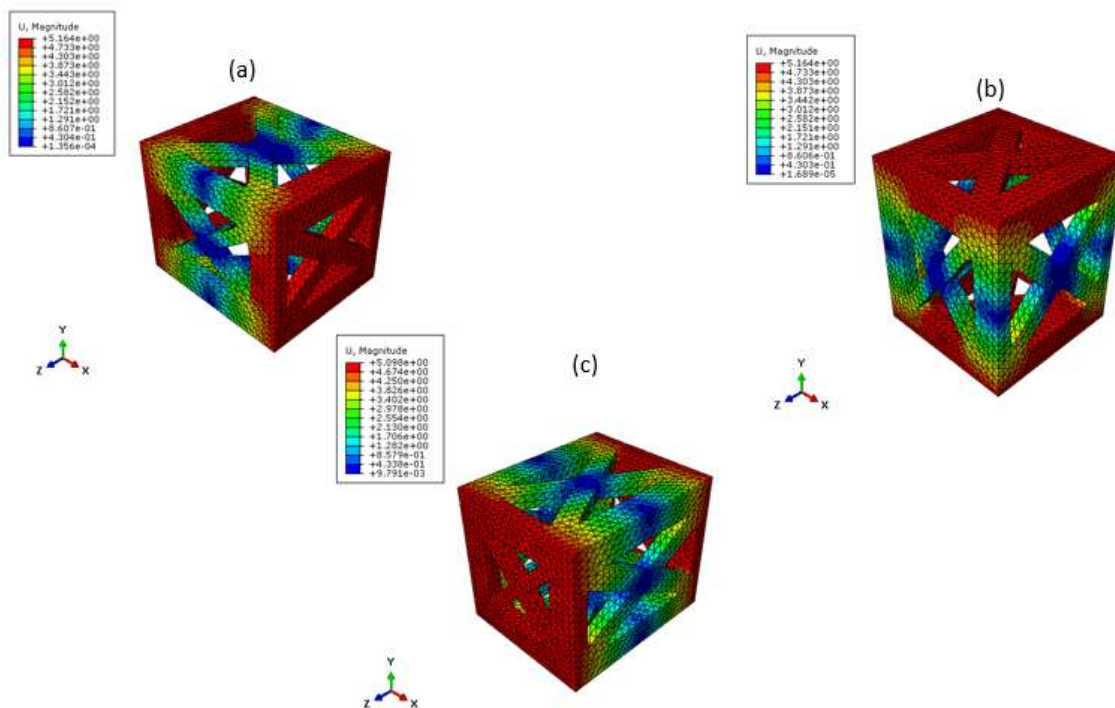


Figure V-11 : Champs de déplacement de CU (FCC) issus des chargements cinématiques appliqués pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a)  $C_{11}$ , (b)  $C_{22}$ , et le coefficient transversal (c)  $C_{33}$ .

Les champs de déplacements appliqués pour déterminer les modules effectifs biaxiaux et de cisaillement du FCC sont illustrés sur la Figure V-12 et Figure V-13.

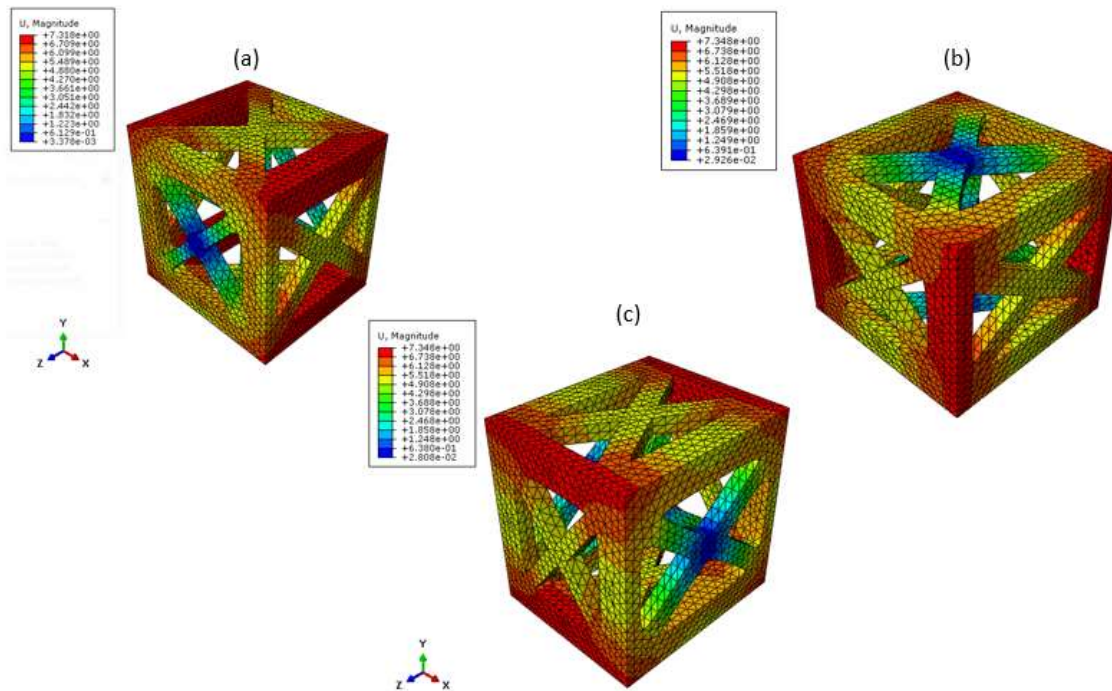


Figure V-12 : Champs de déplacement de CU (FCC) issus des chargements cinématiques appliqués pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a)  $C_{12}$ , (b)  $C_{13}$  et (c)  $C_{23}$ .

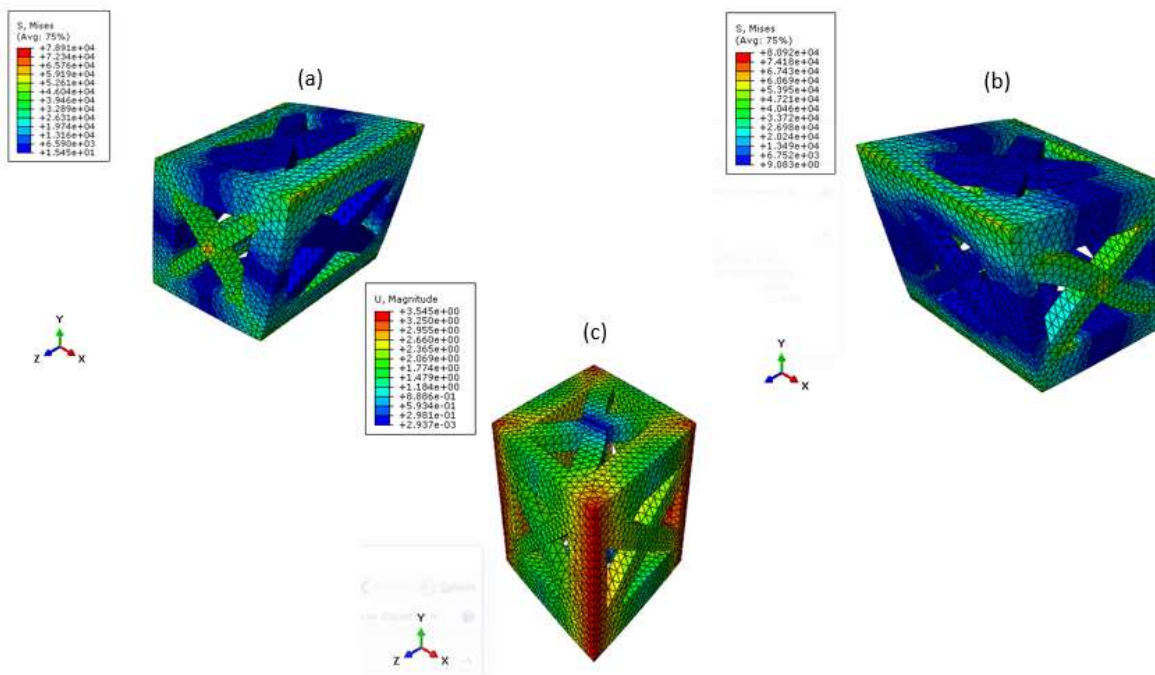


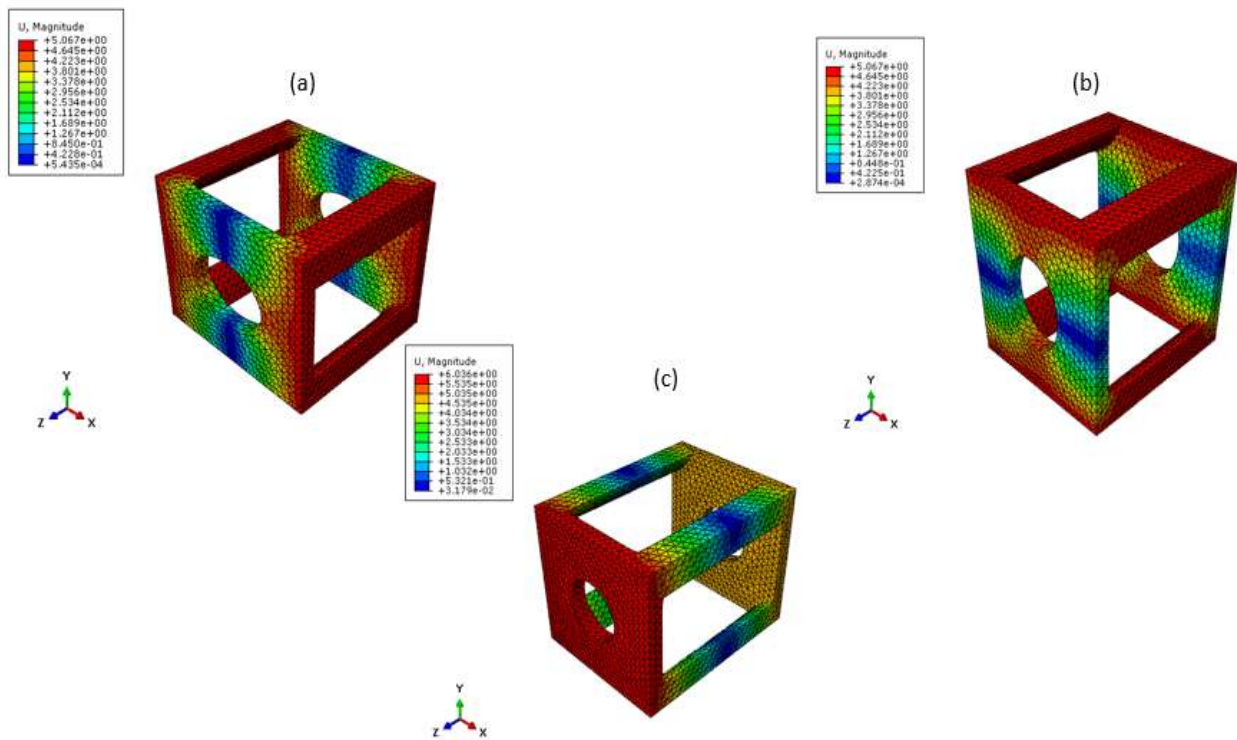
Figure V-13 : Champs de déplacement de CU (FCC) issus des chargements cinématiques appliqués pour prédire les modules de cisaillement effectifs (a)  $C_{44}$ , (b)  $C_{55}$  et (c)  $C_{66}$ .

Les modules élastiques effectifs du premier gradient du FCC 3D sont donnés dans le Tableau V-5.

**Tableau V-5 : Modules effectifs prédits  $C_{ij}$  pour la cellule unitaire FCC 3D simulée.**

Tenseur de rigidité (MPa)	Essais de traction uniaxiale			Essais de traction biaxiale			Essais du cisaillement		
	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{23}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
<b>BCC 3D</b>	11220	11220	19460	28600	38400	38400	2720	2520	2520

Les champs de déplacements appliqués et les formes de déformées pour déterminer les modules longitudinaux et transversal effectifs du matériau composite avec un vide circulaire C-V-C sont illustrés sur la Figure V-14 et Figure V-15.



**Figure V-14 : Champs de déplacement de CU (C-V-C) issus des chargements cinématiques appliqués pour calculer les modules pour prédire les modules longitudinaux effectifs (a)  $C_{11}$ , (b)  $C_{22}$ , et le coefficient transversal (c)  $C_{33}$ .**

Les champs de déplacements appliqués pour déterminer les modules effectifs biaxiaux et de cisaillement du C-V-C sont représentés dans les Figure V-15 et Figure V-16.



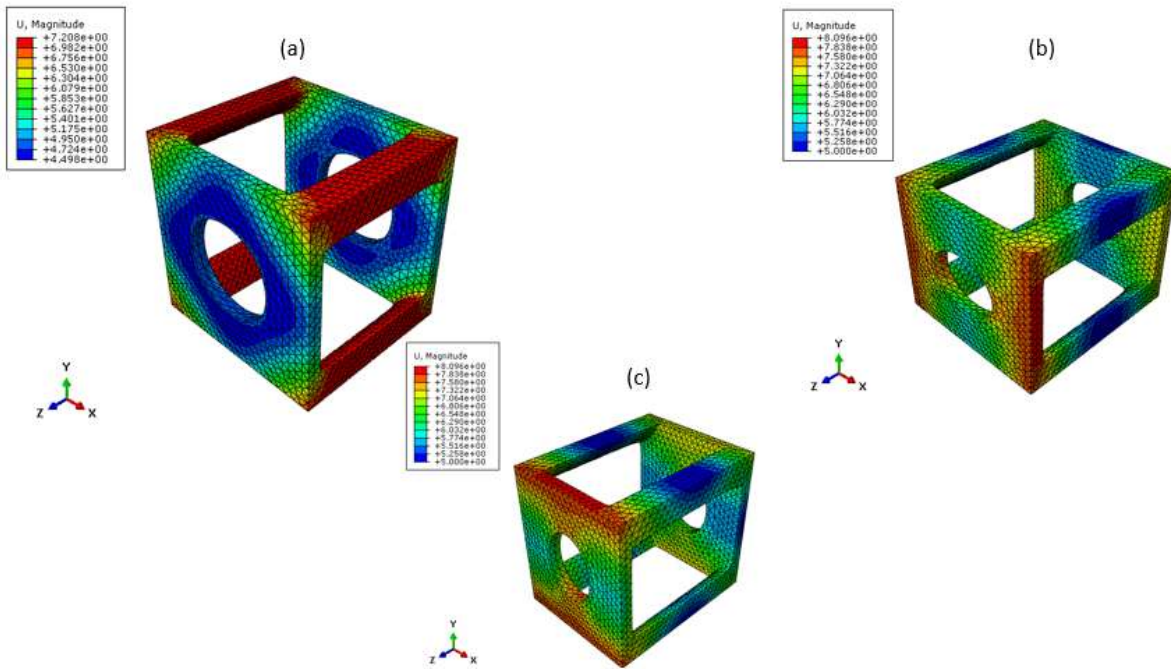


Figure V-15 : Champs de déplacement de CU (C-V-C) issus des chargements cinématiques appliqués pour prédire les modules biaxiaux effectifs (a)  $C_{12}$ , (b)  $C_{13}$  et (c)  $C_{23}$ .

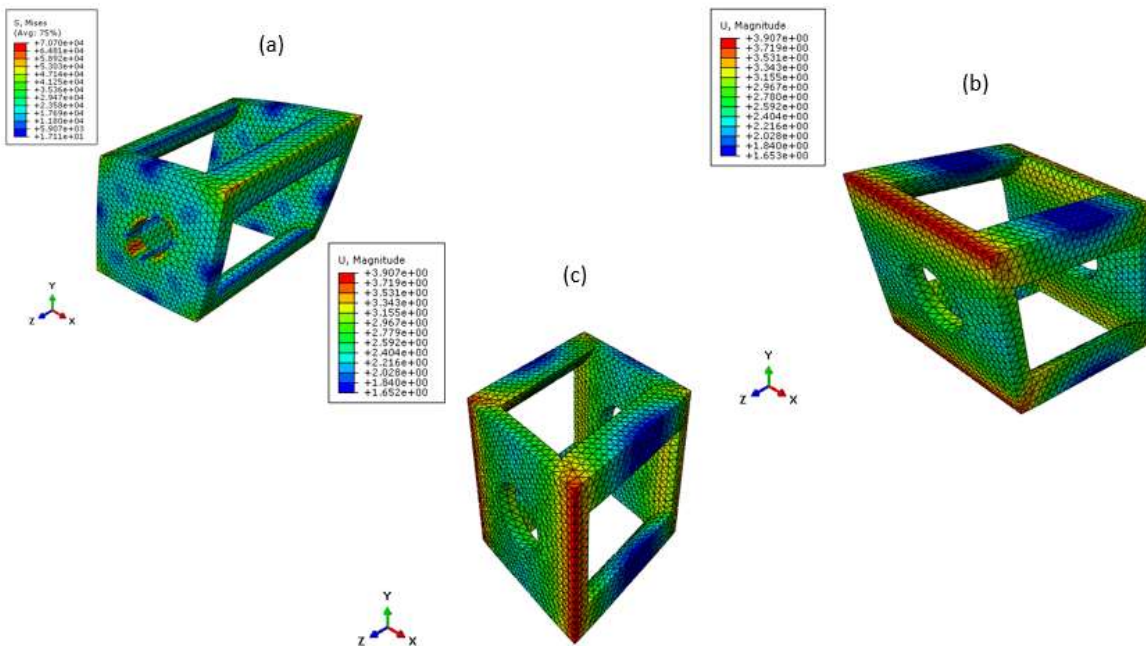


Figure V-16 : Champs de déplacement de CU (C-V-C) issus des chargements cinématiques appliqués pour prédire les modules les modules de cisailment effectifs (a)  $C_{44}$ , (b)  $C_{55}$  et (c)  $C_{66}$ .

Les modules élastiques effectifs du premier gradient du C-V-C 3D sont donnés dans le Tableau V-6.

**Tableau V-6 : Modules effectifs prédits  $C_{ij}$  pour la cellule unitaire C-V-C 3D simulée.**

Tenseur de rigidité (MPa)	Essais de traction uniaxiale			Essais de traction biaxiale			Essais de cisaillement		
	$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{23}$	$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$
<b>BCC 3D</b>	11460	11460	8220	29600	21000	21000	2260	661	661

Afin d'analyser et de comparer les modules de rigidité effectifs des différentes microstructures étudiées, nous rassemblons les modules élastiques calculé dans le Tableau V-7 :

**Tableau V-7 : Modules élastiques effectifs des microstructures sélectionnées**

Matériau	BCC	FCC	C-V-C	Auxétique Reentrant	Auxétique
Essais de traction uniaxiale	$C_{11}$	7720	11220	11460	3720
	$C_{22}$	7720	11220	11460	707
	$C_{33}$	13200	19460	8220	3720
Essais de traction biaxiale	$C_{12}$	18620	28600	29600	3060
	$C_{13}$	24400	38400	21000	7600
	$C_{23}$	24400	38400	21000	3060
Essais de cisaillement	$C_{44}$	1388	2720	2260	137
	$C_{55}$	1390	2520	661	138
	$C_{66}$	1842	2520	661	312

Nous observons que le matériau composite avec un vide circulaire possède les modules élastiques les plus élevés en extension uniaxiale selon les directions X et Y. A l'inverse, les matériaux auxétiques ont les modules les plus faibles pour tous les modes de déformation. Le matériau cubique à faces centrées FCC montre une grande rigidité en cisaillement, compte tenu qu'il a des modules élastiques de cisaillement supérieurs aux autres microstructures.

### 3.2. Evaluation des propriétés effectives du second gradient

Le tenseur de gradient de déformation est écrit en format vectoriel comme le second gradient du champ de déplacement selon :

$K =$

$$\left[ \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial z} \right]^T$$

(5.2)

Les symétries mineures et majeures du tenseur des modules élastiques du second gradient permettent de réduire ce tenseur d'ordre 6 en un tenseur d'ordre 4 :

$$A_{ijklpq} = A_{(ij)kp(qr)} = A_{\alpha k \beta r}; \text{ avec } \alpha, \beta = 1 \dots 6 \text{ et } k, r = 1 \dots 3$$

On a ici introduit la notation de Voigt avec la correspondance suivante des indices,  $\alpha \leftrightarrow (ij); \beta \leftrightarrow (pq)$ , la parenthèse indiquant la symétrisation des indices correspondant, et en utilisant la symétrie majeure du tenseur A des modules élastiques du second gradient. Les couples d'indices  $\alpha k; \beta r$ , qui sont soulignés peuvent être permutés, de sorte qu'on obtient l'identité  $A_{\alpha k \beta r} = A_{\beta r \alpha k}$ . Ceci définit donc un tenseur A représenté par une matrice carrée de taille 18x18 (pour plus de détails voir le chapitre 2, la section 3 et les travaux de I. Goda et al, 2016).

Dans cette section, nous évaluons les modules élastiques (Eq. 2.23) diagonaux de chaque matériau sélectionné, ainsi ses longueurs internes afin de quantifier l'effet de second gradient de ces différentes microstructures.

Les figures (Figure V-17, Figure V-18, Figure V-19, Figure V-20, Figure V-21, Figure V-22, Figure V-23, Figure V-24 et Figure V-25) montrent tous les modes de déformation pour le milieu du second gradient de déformation pour la microstructure FCC :

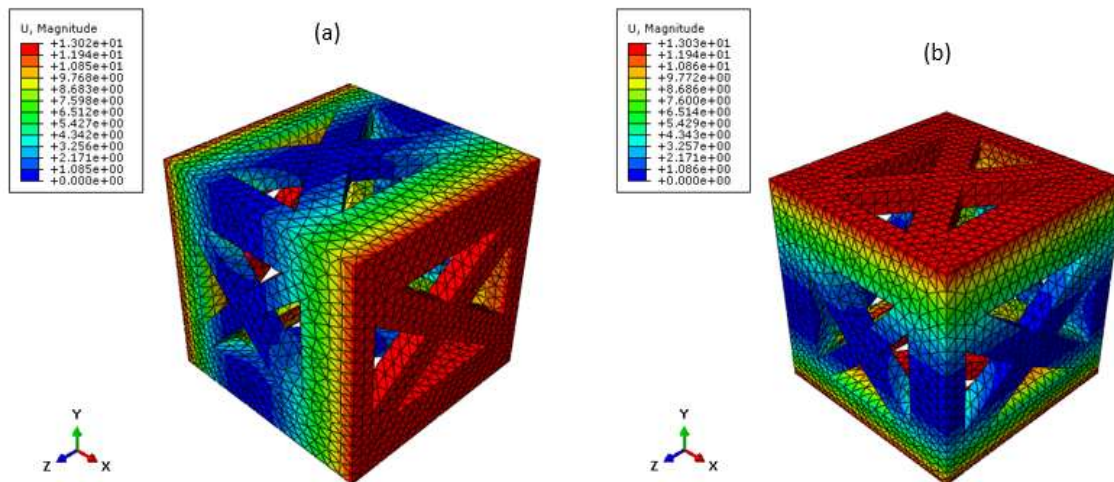


Figure V-17 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{111}$ , (b)  $A_{222}$ .

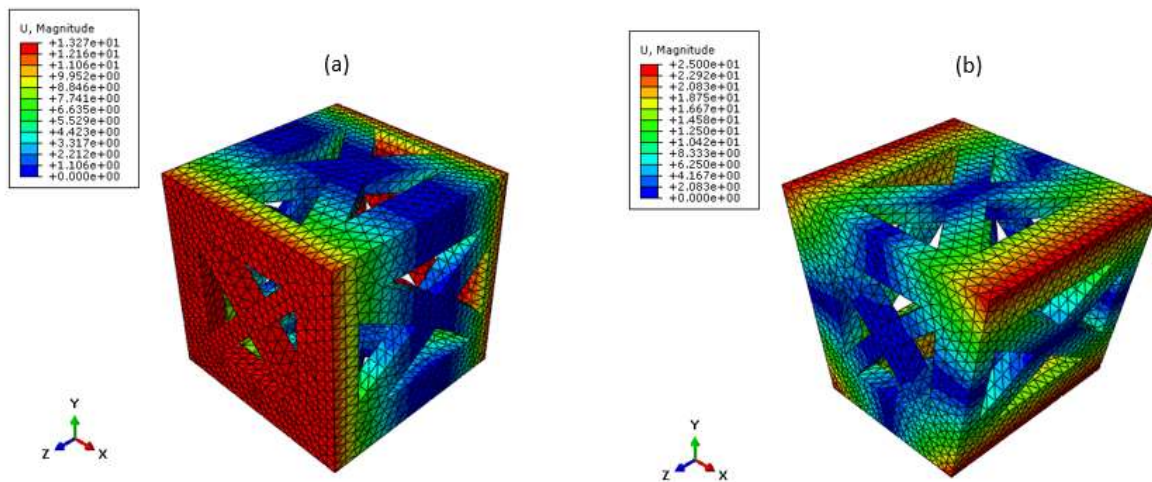


Figure V-18 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{333}$ , (b)  $A_{112}$ .



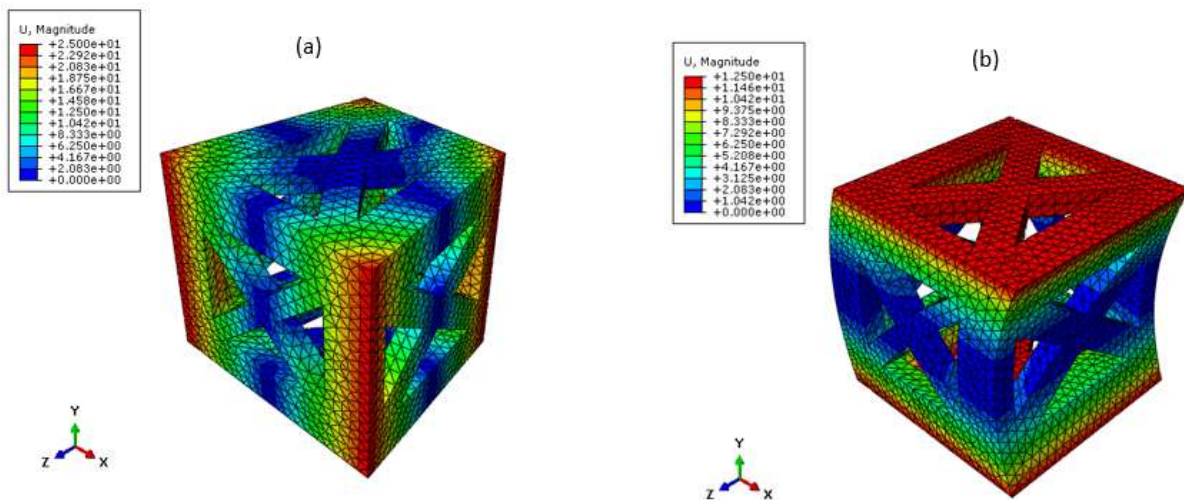


Figure V-19 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{113}$ , (b)  $A_{122}$ .

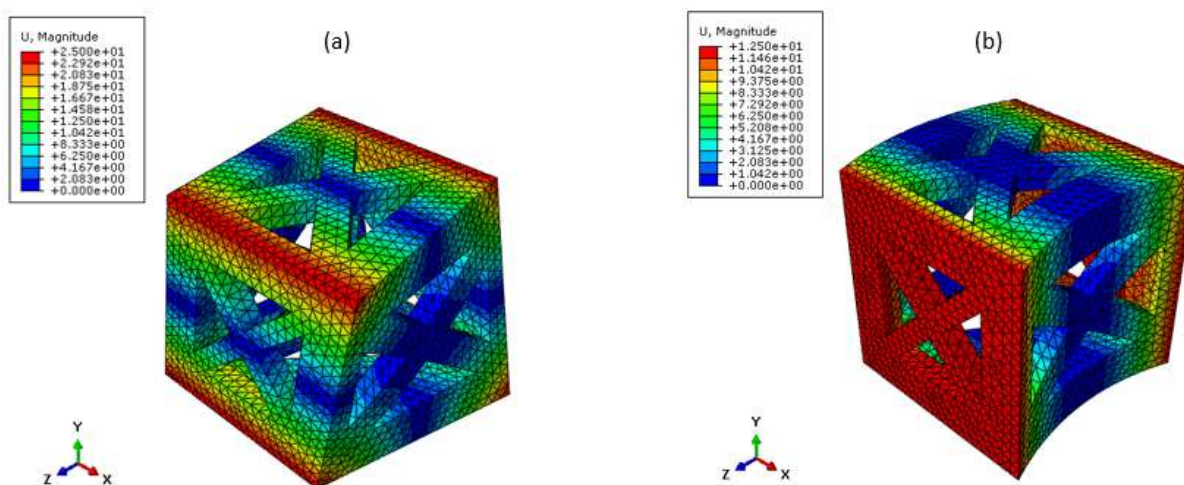


Figure V-20 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{123}$ , (b)  $A_{133}$ .

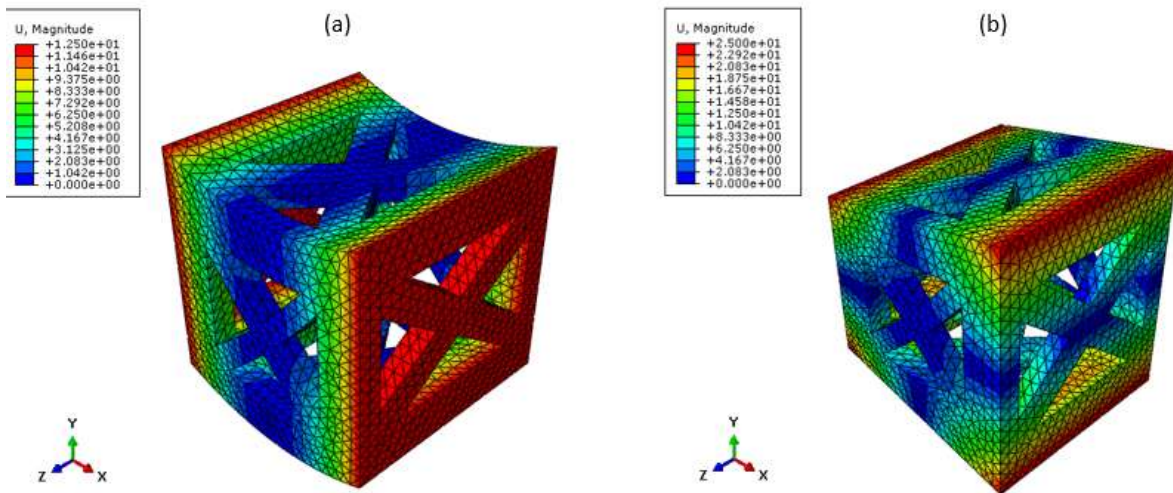


Figure V-21 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{211}$ , (b)  $A_{212}$ .

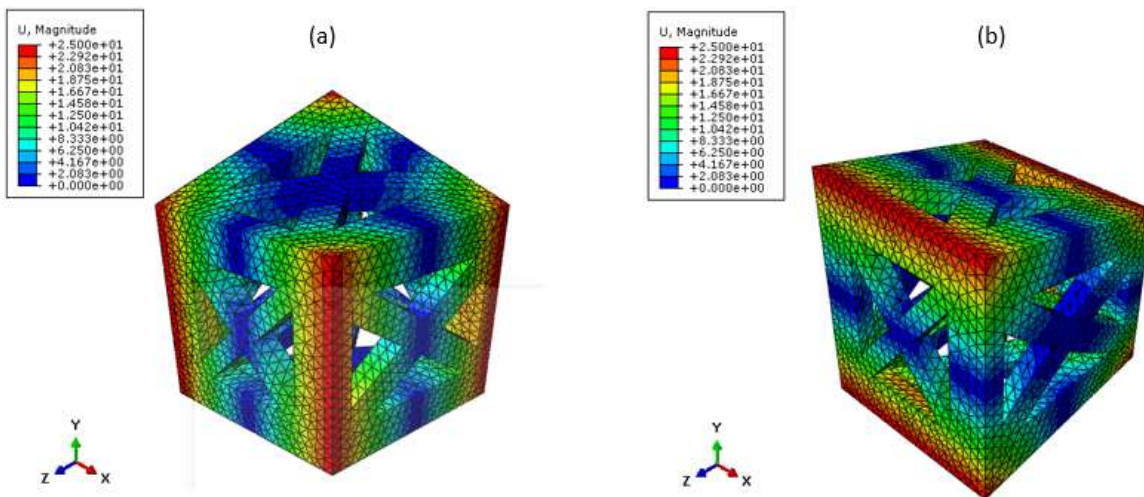


Figure V-22 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{213}$ , (b)  $A_{223}$ .

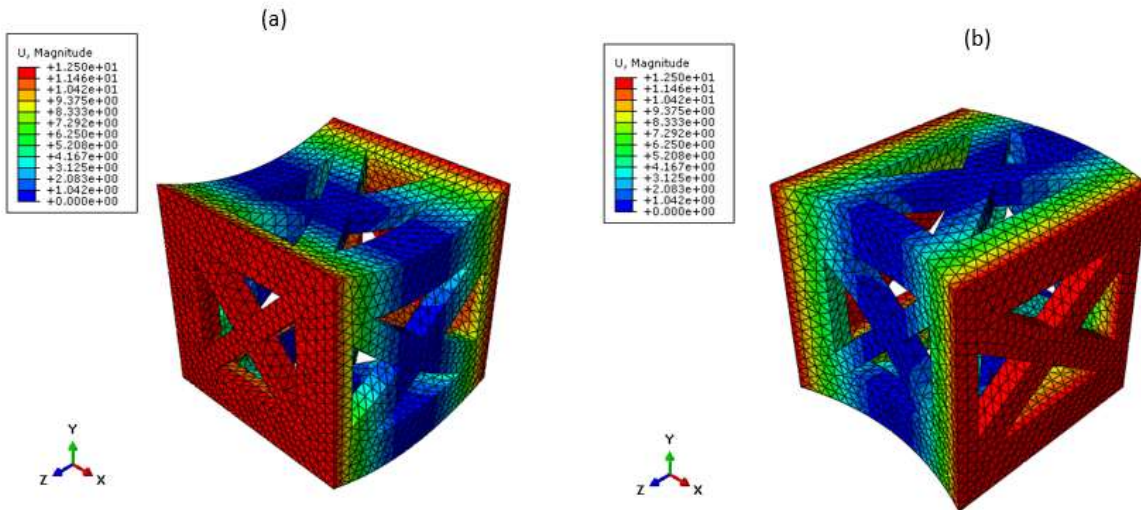


Figure V-23 : Champs de déplacement de la CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{233}$ , (b)  $A_{331}$ .

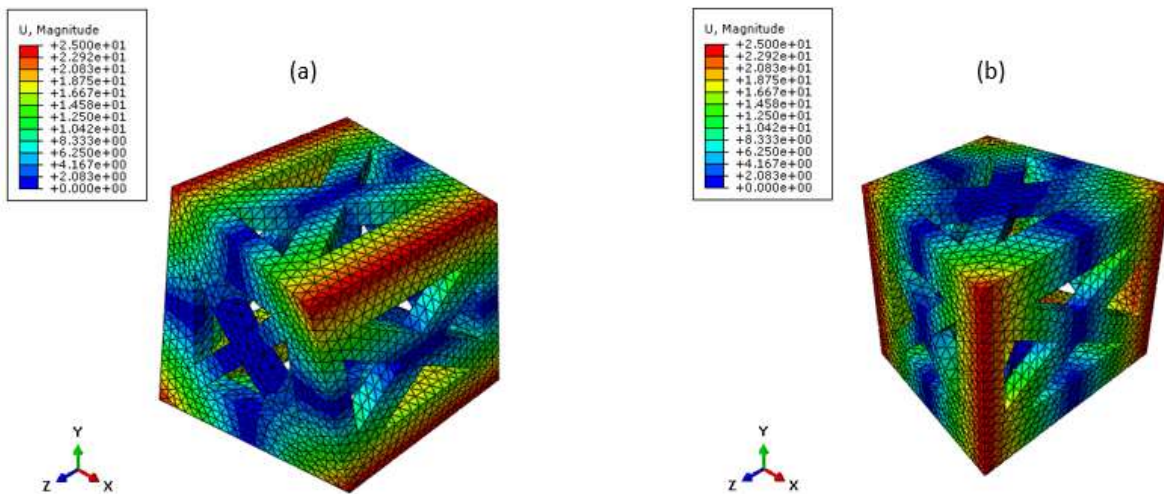


Figure V-24 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{312}$ , (b)  $A_{313}$ .



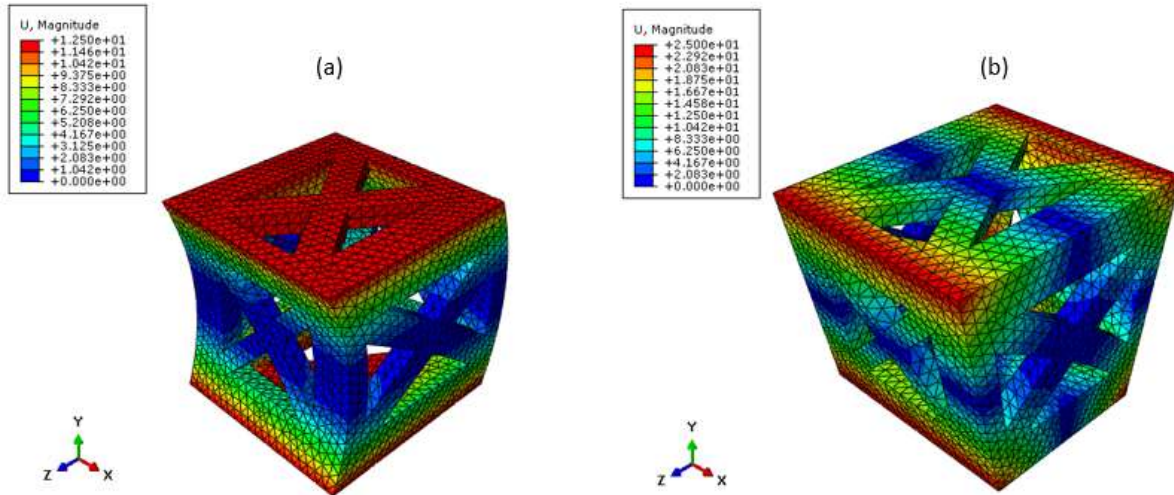


Figure V-25 : Champs de déplacement du CU (FCC) issus des sollicitations utilisées pour le calcul des modules du second gradient : (a)  $A_{322}$ , (b)  $A_{323}$ .

Le Tableau V-8 synthétise tous les modules élastiques du second gradient pour les différentes microstructures étudiées (Figure V-1).

Tableau V-8 : Modules élastiques des second gradient (MPa.mm) pour différents matériaux.

	BCC	FCC	C-V-C	Auxétique rentrant	Auxétique semi-rentrant
$A_{111}$	152000	183600	178000	40900	35320
$A_{222}$	51800	183600	178000	39800	34940
$A_{333}$	124600	178200	131000	40900	35260
$A_{122}$	68600	78000	74600	13120	9800
$A_{133}$	51200	64600	55800	19080	13740
$A_{211}$	68600	78000	74600	17340	11560
$A_{233}$	51200	64600	55800	17340	11560
$A_{311}$	61800	73400	53400	19080	13740
$A_{322}$	61800	73400	53400	13100	9800
$A_{112}$	208000	280000	224000	79800	56600
$A_{113}$	226000	292000	382000	70000	73400
$A_{123}$	127200	175400	170400	33600	28400
$A_{121}$	206000	280000	224000	90800	71000
$A_{213}$	127200	175400	170400	32600	32400
$A_{223}$	226000	294000	382000	90800	71000
$A_{312}$	109800	167800	85800	33600	28400
$A_{313}$	252000	344000	215800	70000	73400
$A_{323}$	252000	344000	215800	79800	56600

Nous remarquons que le matériau à faces cubiques centrés FCC a les modules de second gradient les plus élevés. On ne peut cependant quantifier l'effet de second gradient qu'après le calcul des longueurs internes, définies en fonction du quotient des modules du second gradient aux modules du premier gradient.

La section suivante présente une analyse des effets de second gradient extensionnels sur la base des longueur internes dans ce même mode.

### 3.2.1. Calcul de longueurs internes extensionnelles

Afin de quantifier l'effet de second gradient des microstructures considérées dans ce chapitre, nous évaluons les longueurs internes extensionnelles (Goda & Ganghoffer, 2016) dans les trois directions du repère orthonormé (Tableau V-9) selon l'expression générale

$$le_{ij} = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{r=2} A_{irjr}^{hom}}{C_{ij}^{hom}}}$$

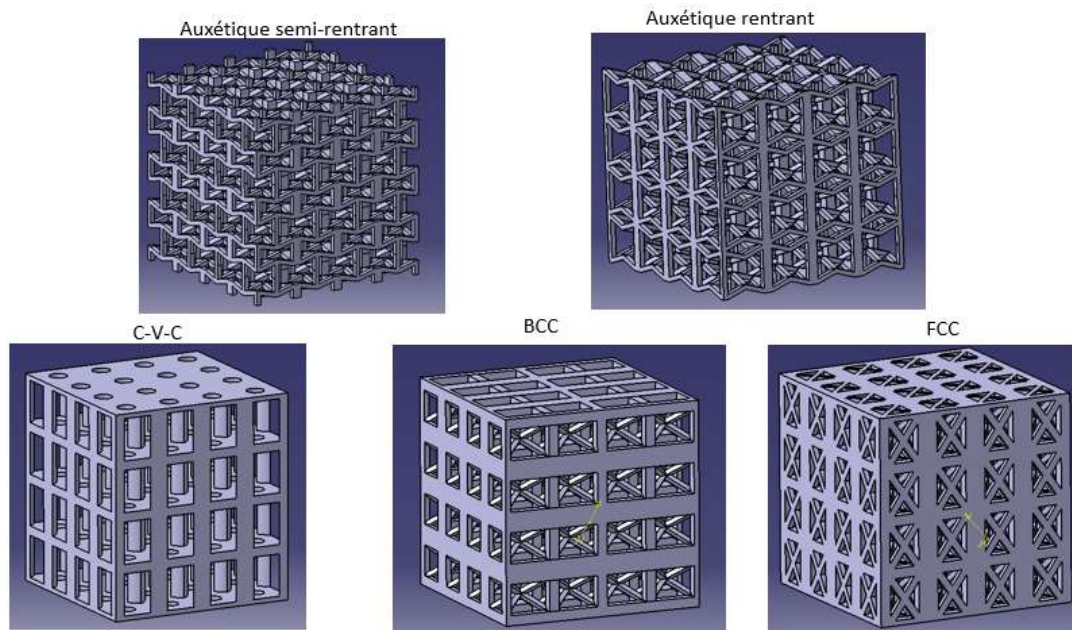
**Tableau V-9 : Longueurs internes extensionnelles**

	$le_{xx}(\text{mm})$	$le_{yy}(\text{mm})$	$le_{zz}(\text{mm})$
<b>BCC</b>	8.77	7.6	4.33
<b>FCC</b>	8.2	7.03	4.08
<b>C-V-C</b>	8.27	7.44	5.37
<b>Auxétique</b>	9.48	7.19	5.87
<b>Rentrant</b>			
<b>Auxétique semi- rentrant</b>	6.66	12.88	3.97

Nous observons que les matériaux auxétiques (semi-réentrant et reentrant) ont les longueurs internes extensionnelles les plus élevées, soit 120.8 % de la longueur de la cellule unité qui est fixé à 10mm pour tous les matériaux, soit l'effet de second gradient le plus élevé. La microstructure FCC a les longueurs internes  $le_{xx}$  et  $le_{yy}$  les plus faibles (l'effet de second gradient le plus faible), en raison d'une rigidité très importante pour le milieu de Cauchy.

#### **4. Calcul des réponses mécaniques en grandes déformations**

Dans cette section, les réponses mécaniques des microstructures précédentes sont calculées par éléments finis à l'échelle macroscopique des matériaux considérés (Figure V-1) dans la première partie. Une extension a été faite sur les cellules unitaires de ces matériaux pour obtenir des structures finies et éviter les effets de bords, nous avons alors fait une répétition périodique des cellules unitaires 4 fois sur les 3 axes du repère orthonormé, ce qui résulte 64 cellules en total, avec une longueur, largeur et hauteur de 40mm pour toutes les structures. Une étude a été faite sur l'effet de la taille de cellules dans le chapitre 2 dans le cadre de HPP, les résultats ont montrés qu'en second gradient, les modules élastiques ne convergent pas qu'après une normalisation par  $NXN$ , ou  $N$  le nombre de cellule. Dans cette partie du chapitre, l'objectif est de sensibiliser l'effet de second gradient en grandes déformations pour différentes structures architecturées finies à l'échelle macroscopique. La Figure V-26 montre les structures effectuées pour cette partie de calcul numérique.



**Figure V-26 : Structures architecturées 3D**

Le matériau utilisé est l'élastomère thermoplastique dont la réponse hyperélastique est décrite par le modèle d'Ogden à l'échelle microscopique, les paramètres matériau sont listé dans le Tableau V-1. Les simulations par éléments finis sont réalisées à l'échelle macroscopique avec le logiciel commercial Abaqus. Des conditions aux limites incrémentales en extension longitudinale et transversal vont être appliquées pour déterminer le comportement mécanique de ces matériaux en grandes déformations. Un déplacement de 8 mm est imposé sur les structures pour obtenir une déformation maximale de 20%, compte tenu du fait que la longueur des structures est de 40 mm pour toutes les faces.

Avant de présenter les résultats des simulations par éléments finis, nous donnons le cadre théorique nécessaire pour déterminer la loi constitutive du second gradient à l'échelle macroscopique. L'idée maitresse est que les tenseurs de contraintes et d'hypercontrainte sont évalués par la moyenne des champs microscopiques en surface du domaine considéré (les forces de volume sont considérées nulles) :

$$\delta\Sigma = \langle \delta\sigma \rangle_Y := \frac{1}{|Y|} \int_Y \delta\sigma dV_y = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} y \otimes \delta\sigma \cdot ndS_y = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} y \otimes \delta t dS_y \equiv \langle y \otimes \delta t \rangle_{\partial Y}$$

$$\delta S = \langle y \otimes \delta\sigma \rangle_Y := \frac{1}{|Y|} \int_Y y \otimes \delta\sigma dV_y = \frac{1}{2|Y|} \int_Y y \otimes y \otimes \delta\sigma \cdot ndV_y = \frac{1}{2|Y|} \int_Y y \otimes y \otimes \delta t dV_y \equiv \frac{1}{2} \langle y \otimes y \otimes \delta t \rangle_{\partial Y}$$

$$\delta\Sigma_{n+1} = \delta\Sigma_n + \Delta\Sigma_n \text{ et } \delta S_{n+1} = \delta S_n + \Delta S_n \quad (5.2)$$

où  $\delta t$  représente les réactions des forces incrémentales appliquées sur la surface  $\partial S$  du domaine. La moyenne surfacique est calculée en appliquant un point de référence hors de la structure et qui est couplé avec la surface du domaine, ou on applique les déplacements imposés.

Les déformations macroscopiques du premier et second gradient sont également calculés à partir des champs de déplacement en surface :

$$\delta E_M = \int_{\partial Y} (\delta u \otimes n)^s dS = |Y| \langle (\delta u \otimes n)^s \rangle_{\partial Y}$$

- $\delta E_{xx} = \frac{\delta U_{xx}(\partial Y_R) - \delta U_{xx}(\partial Y_L)}{L}$
- $\delta E_{yy} = \frac{\delta U_{yy}(\partial Y_R) - \delta U_{yy}(\partial Y_L)}{L}$
- $\delta E_{zz} = \frac{\delta U_{zz}(\partial Y_R) - \delta U_{zz}(\partial Y_L)}{L}$

$$\begin{aligned} \delta K(x) &:= \delta E(x) \otimes \nabla_x = \langle \delta \varepsilon(y) \rangle_Y \otimes \nabla_x = \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} (\delta u \otimes n)^s dS \right\} \otimes \nabla_x \\ &= \langle (\delta u \otimes n)^s \rangle_{\partial Y} \otimes \nabla_x = \frac{1}{|V(x)|} \int_{\partial V(x)} \delta E(x) \otimes N(x) dS_x \end{aligned}$$

- $\delta K_{xxx} = \frac{\delta E_{xx}(\partial Y_R) - \delta E_{xx}(\partial Y_L)}{L}$
- $\delta K_{yyy} = \frac{\delta E_{yy}(\partial Y_R) - \delta E_{yy}(\partial Y_L)}{L}$
- $\delta K_{zzz} = \frac{\delta E_{zz}(\partial Y_R) - \delta E_{zz}(\partial Y_L)}{L}$  (5.3)

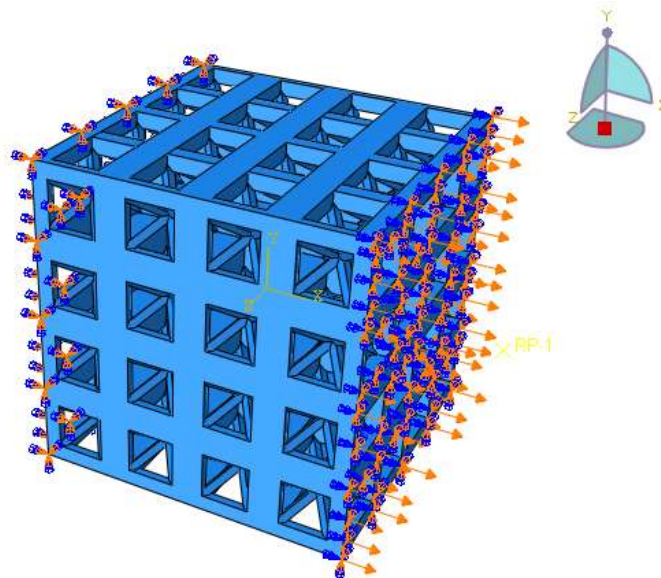
La loi de comportement macroscopique peut s'écrire sous la forme suivante :



$$\delta\Sigma:\delta E_M + \delta S:\delta K_M = \langle y \otimes \delta t \rangle_{\partial V} : |Y| \langle (\delta u \otimes n)^s \rangle_{\partial V} + \frac{1}{2} \langle y \otimes y \otimes \delta t \rangle_{\partial V} : \langle (\delta u \otimes n)^s \rangle_{\partial V} \otimes \nabla_x \quad (5.4)$$

#### 4.1. Comportement en extension longitudinale et transversale pour le milieu de Cauchy

Afin d'évaluer le comportement mécanique en extension longitudinale et transverse des microstructures choisies, les conditions aux limites suivantes sont appliquées sur le domaine (Figure V-27) : un encastrement sur la surface à gauche et un déplacement de 8mm incrémental imposé sur la face de droite tout en laissant les déplacements libres selon les autres directions.



**Figure V-27 : Conditions aux limites en extension longitudinale**

Les champs de déplacements et les déformées sont représentés dans les figures (Figure V-28 : Champ de déplacement et déformée de la structure BCC en extension longitudinale.) :

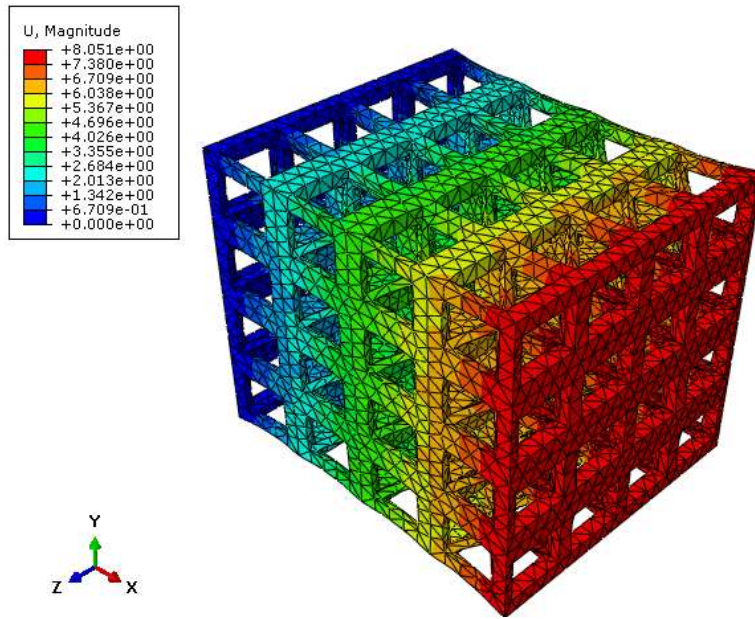


Figure V-28 : Champ de déplacement et déformée de la structure BCC en extension longitudinale.

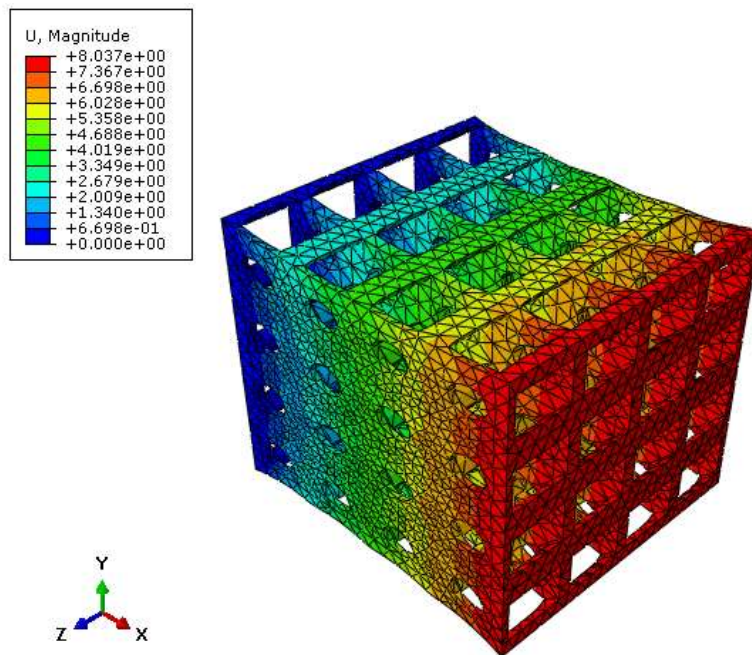


Figure V-29 : Champ de déplacement et déformée de la structure CVC en extension longitudinale.

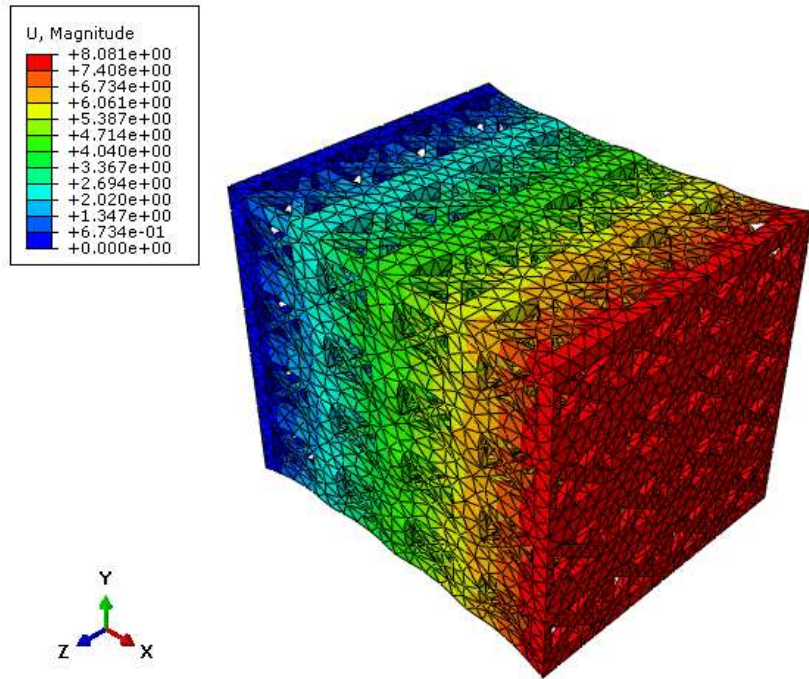


Figure V-30 : Champ de déplacement et déformée de la structure FCC en extension longitudinale.

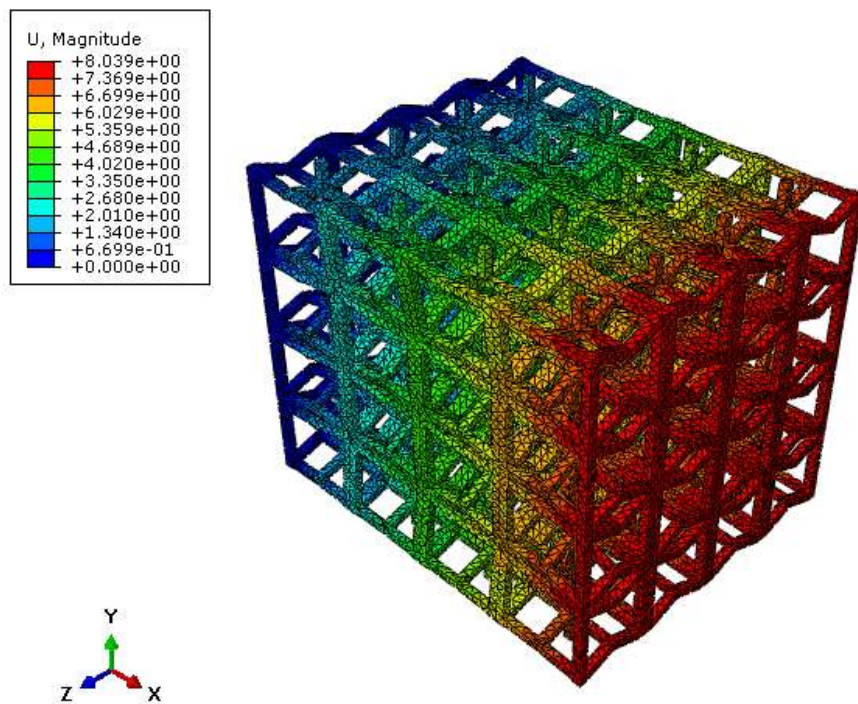
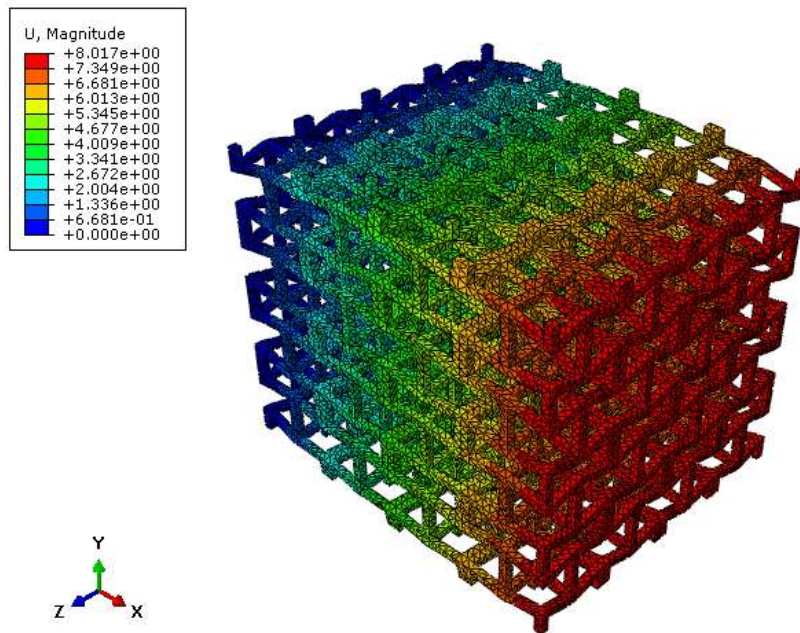


Figure V-31 : Champ de déplacement et déformée de la structure auxétique réentrante en extension longitudinale.

Les structures auxétiques réentrante et semi-réentrante perdent leurs nature auxétique lors de la déformation dans la direction longitudinale, car les poutres inclinées deviennent quasiment alignées

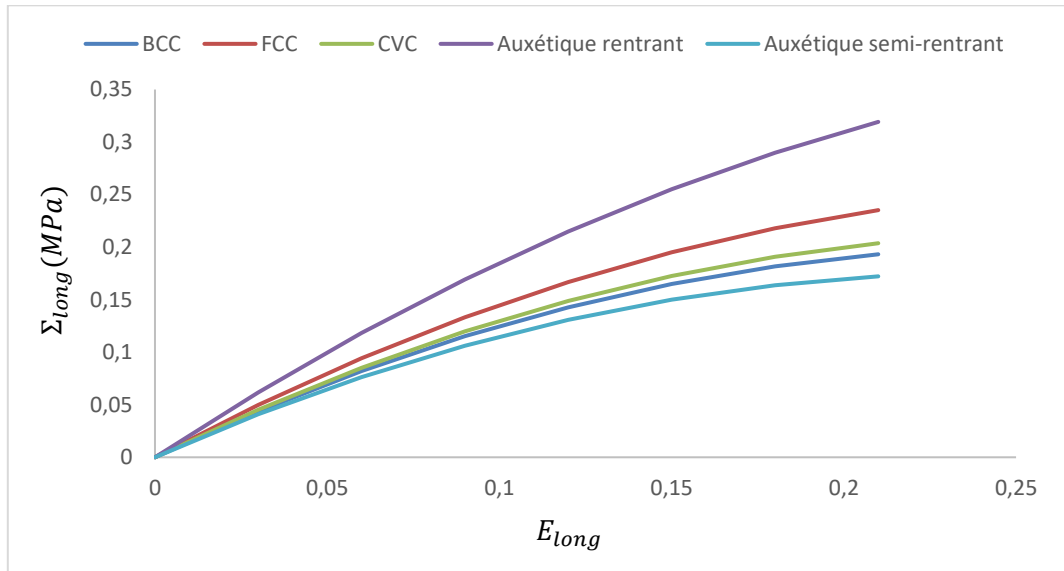
pour 20% de déformation. En revanche, la forme auxétique reste la même pour les autres facettes des structures considérées (Figure V-31 et Figure V-32).



**Figure V-32 : Champ de déplacement et déformée de la structure auxétique semi-rentrante en extension longitudinale.**

La Figure V-33 présente les réponses mécaniques en extension longitudinale pour les différentes structures architecturées considérées.

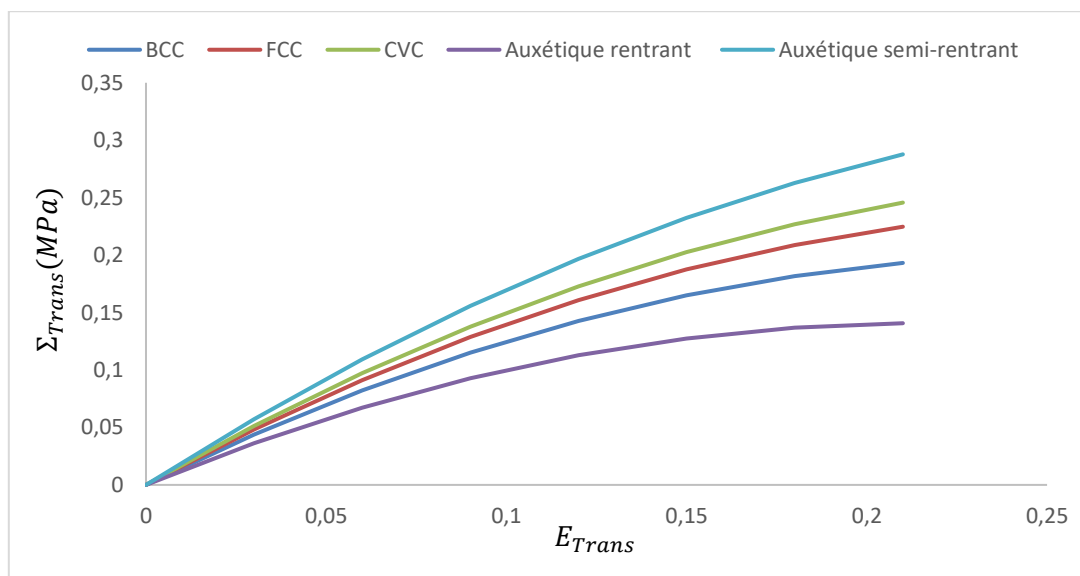




**Figure V-33 : Réponses mécaniques en extension longitudinale pour les différentes structures**

Nous observons que la structure auxétique réentrant et la structure cubique à faces centrées ont le niveau des contraintes les plus élevés en extension longitudinale ; en revanche, la structures auxétique semi-rentrante a le niveau de contraintes le plus faible.

La Figure V-34 représente les réponses mécaniques en extension transversale pour les différentes structures considérées.



**Figure V-34 : Réponses mécaniques en extension transversale pour les différentes structures**

Contrairement à l'extension longitudinale, nous observons que la structure auxétique semi-rentrante et la structure cubique avec un vide circulaire (CVC) ont le niveau de contraintes le plus élevé, et que la structure auxétique réentrant a le comportement le plus faible en extension transversale, ce qui montre la forte anisotropie de ces structures.

#### 4.2. Réponses mécaniques en grandes transformations pour le milieu du second gradient

Afin d'évaluer l'effet de second gradient sur cette famille de matériaux architecturés, des essais numériques en grandes déformations sont effectués, la réponse macroscopique est obtenue en appliquant des conditions de sollicitations cinématiques sur le bord du domaine de type cinématique (polynomiale d'ordre deux afin de solliciter des effets du second gradient). Le champ de gradient de déformation est le suivant :

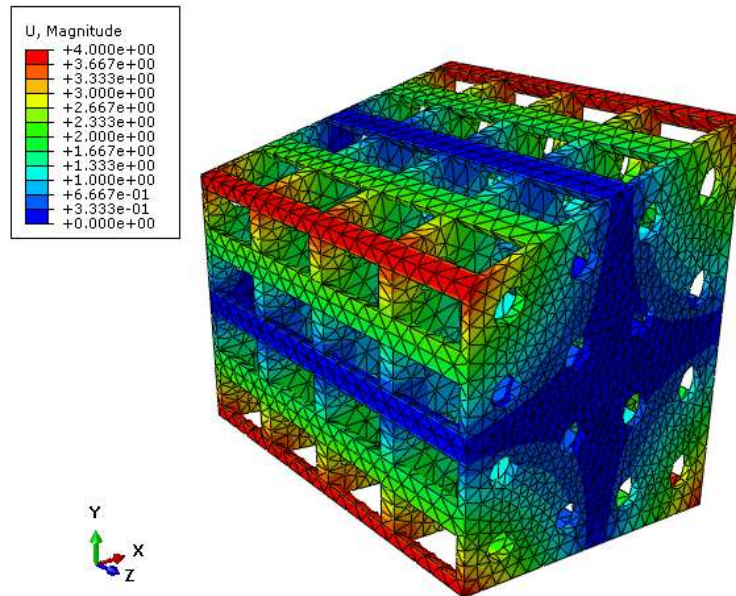
$$K = \left[ \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U_x}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U_y}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U_z}{\partial y \partial z} \right]^T$$

- Dans cette partie, nous focalisons l'intérêt sur quelques modes du gradient de déformation spécifique de type mixte afin de bien visualiser des effets de second gradient prononcés. Les modes de déformations choisis au second gradient sont  $K_{212} = \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y}$ ,  $K_{322} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2}$  et  $K_{312} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y}$  : ce sont des modes qui présentent à la fois un gradient de cisaillement et un gradient de flexion.

Les champs de déplacements imposés et les déformés de différentes structures dans le premier mode de déformation  $K_{212}$  sont donnés par la suite :

- $K_{212} = \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y}$  ;  $U_x = 0, U_y = XY, U_z = 0$  sur  $\partial\Omega$
- $K_{322} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2}$  ;  $U_x = 0, U_y = 0, U_z = \frac{Y^2}{2}$  sur  $\partial\Omega$
- $K_{312} = \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial y}$  ;  $U_x = 0, U_y = 0, U_z = XY$  sur  $\partial\Omega$

Nous évaluons ensuite les réponses mécaniques pour ces modes de déformations pour les différentes structures considérées dans ce chapitre.



**Figure V-35 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{212}$  et déformée de la structure CVC.**

Un déplacement maximal de 4 mm est imposé sur toutes les structures afin d’obtenir une déformation de 10% à l’échelle macroscopique, compte tenu du fait que la longueur des structures est fixée à 40 mm. Au-delà de cette limite, des phénomènes de distorsion des éléments du maillage sont potentiellement générés et la simulation peut se bloquer à un certain stade du calcul. Un gradient de cisaillement est clairement visible sur la Figure V-35 suite à une traction-compression appliquée par

ce mode de déformation, soit la composante  $K_{212} = \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y}$ .

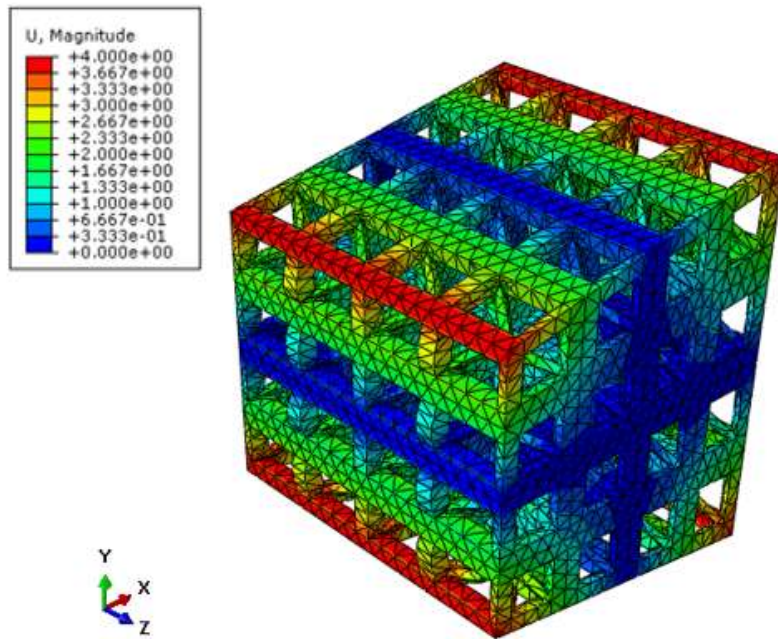


Figure V-36 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{212}$  et déformée de la structure BCC.

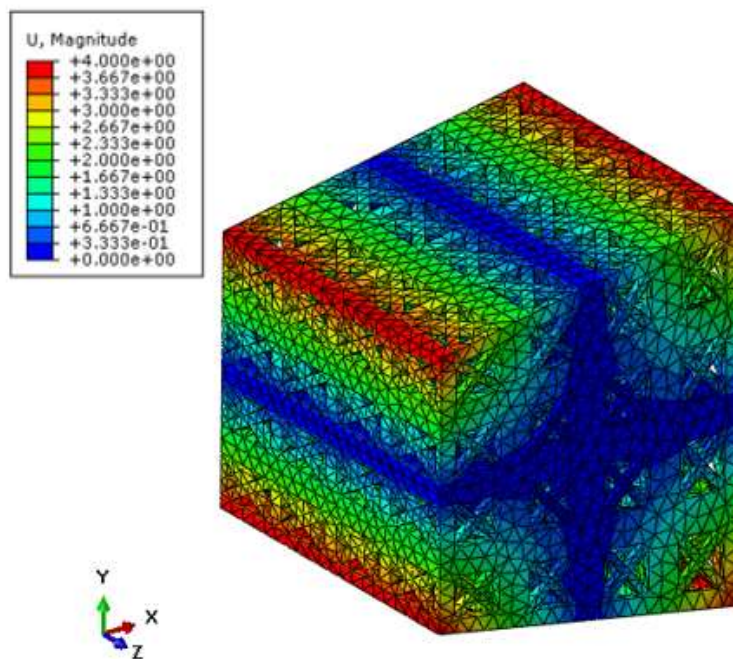
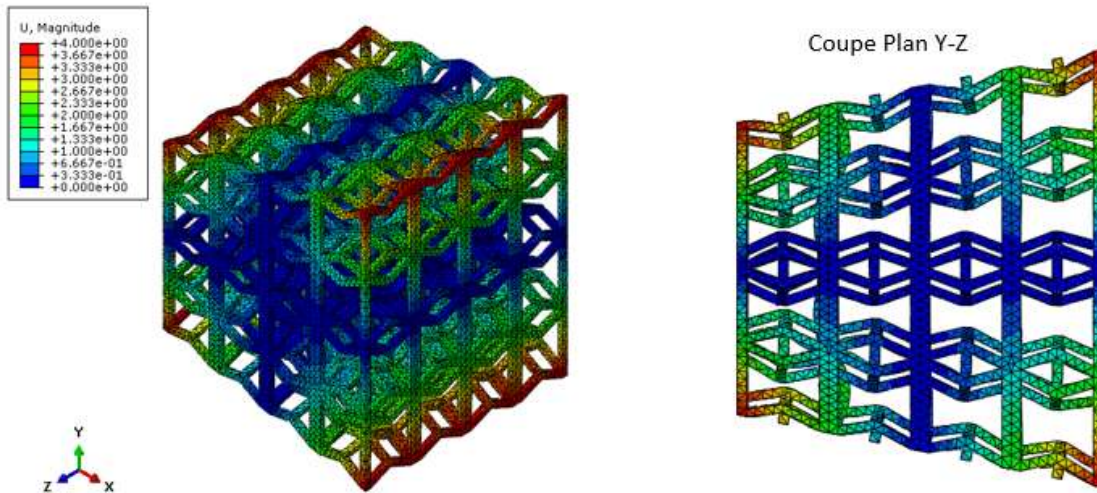


Figure V-37 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{212}$  et déformée de la structure FCC.





**Figure V-38 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{212}$  et déformée avec une vue en coupe sur le plan Y-Z de la structure auxétique réentrante.**

Les Figure V-38 et Figure V-39 représentent les déformées des structures auxétiques, nous observons les effets de gradient de cisaillement suite à une compression côté gauche et une traction côté droite ; les poutres au sein des cellules unitaires se rétractent et s'allongent sur les bords. Un effet de gradient de cisaillement couplé avec la flexion des poutres à l'échelle de la cellule (microscopique) est remarqué.

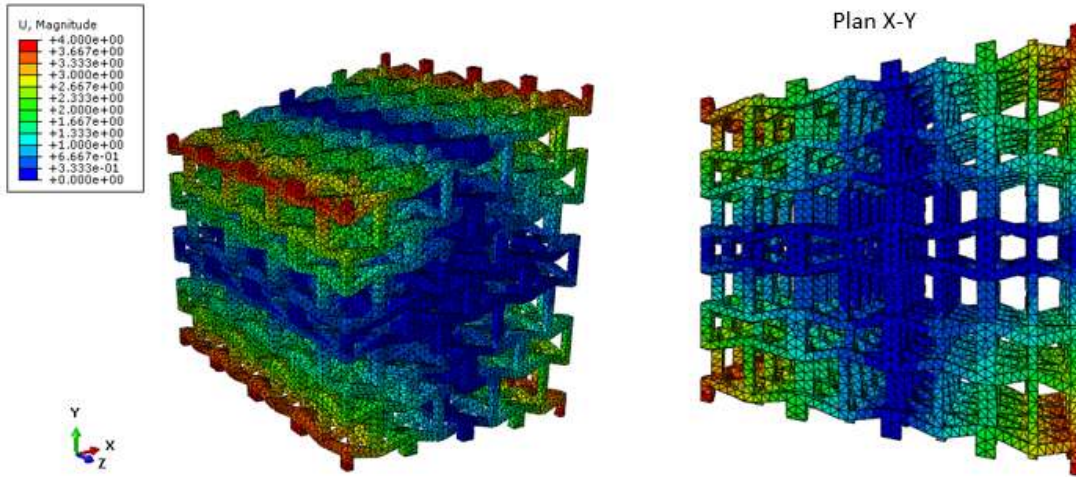


Figure V-39 : Champ de déplacement  $K_{212}$  et déformée de la structure auxétique semi-rentrante.

La Figure V-40 représente les réponses mécaniques des différentes structures considérées pour le mode de déformation  $K_{212}$  : nous observons que la structure auxétiques semi-rentrante a le niveau de l'hypercontrainte  $S_{212}$  le plus élevé, suivi par ordre d'importance de la structure FCC. La nonlinéaire est bien marquée pour toutes les courbes de réponse.

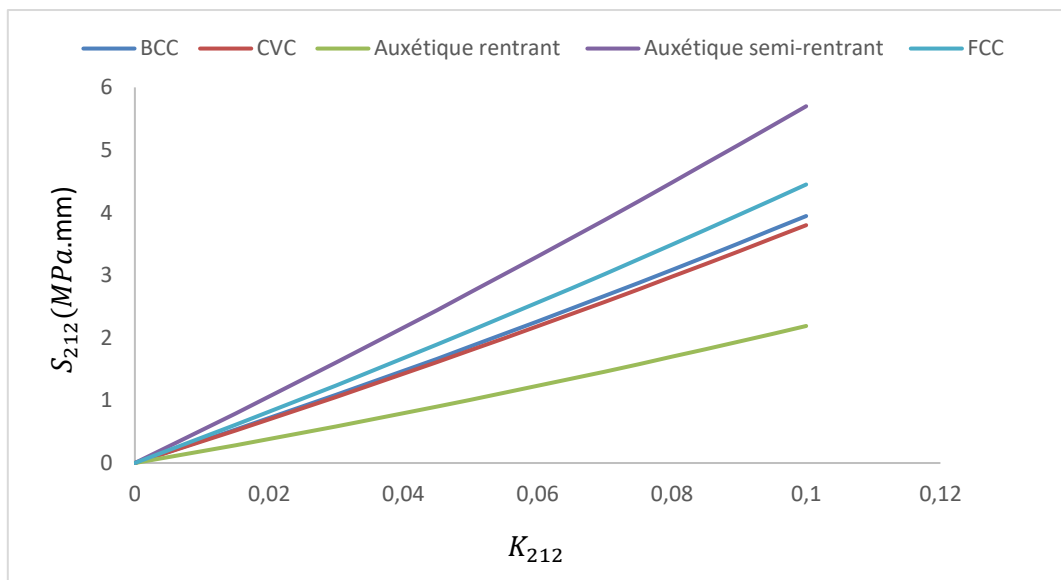
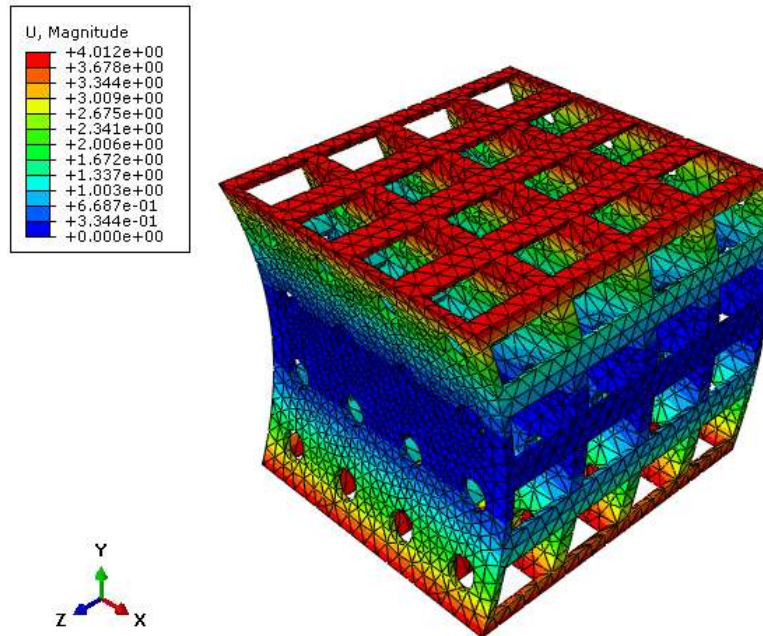


Figure V-40 : Réponses mécaniques de différentes structures pour le mode de déformation  $K_{212}$ .

Les champs de déplacements imposés et les déformés des différentes microstructures dans le deuxième mode de déformation considéré  $K_{322}$  sont représentés dans les figures (Figure V-41, Figure V-42, Figure V-43, Figure V-44 et Figure V-45) :



**Figure V-41 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{322}$  et déformée de la structure CVC.**

Des gradients de flexion sont observés pour le mode de déformation  $K_{322}$  ; un champ de déplacement polynomial d'ordre 2 est appliqué sur tout le bord de la structure ce qui permet d'activer ces modes de second gradient. Les structures BCC et FCC (Figure V-42 ; Figure V-43) présentent un gradient de cisaillement local au niveau des cellules unitaires, les poutres croisées de type pantographique au sein de ces cellules montrent également un gradient de cisaillement combiné à de la torsion.

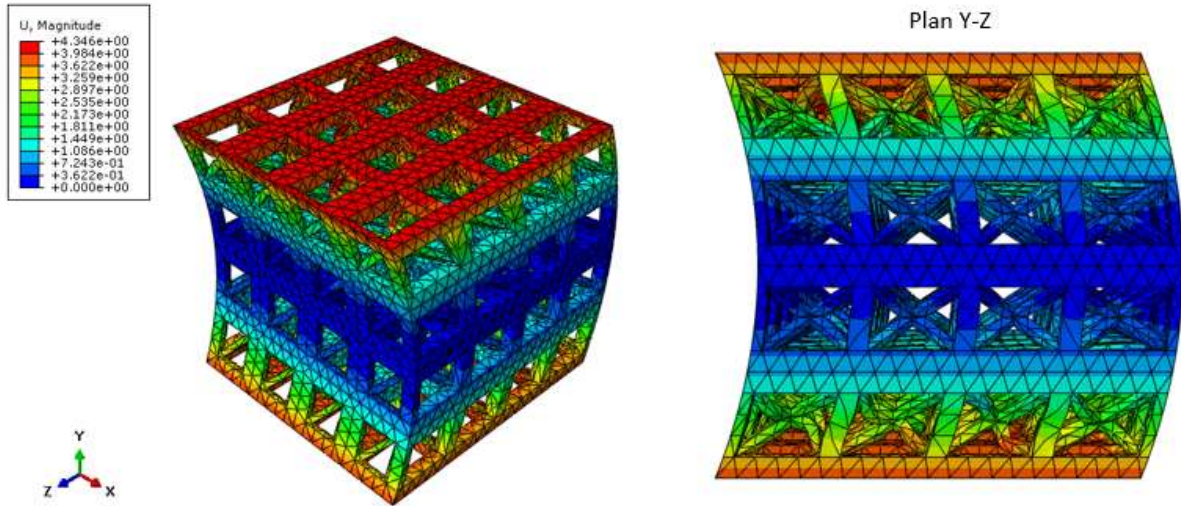


Figure V-42 : Champ de déplacement  $K_{322}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Z de la structure BCC.

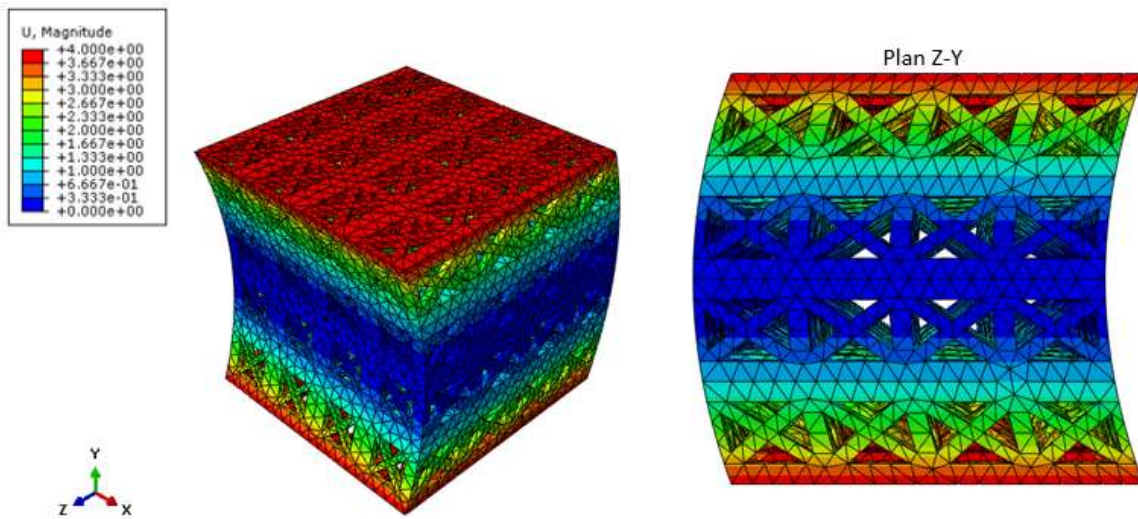


Figure V-43 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{322}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Y de la structure FCC.



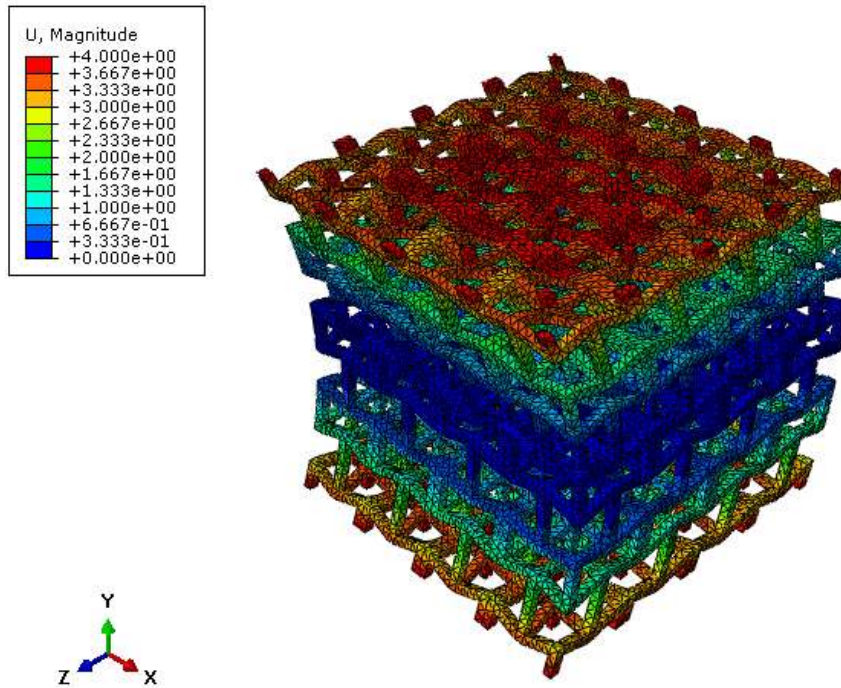


Figure V-44 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{322}$  et déformée de la structure auxétique rentrante.

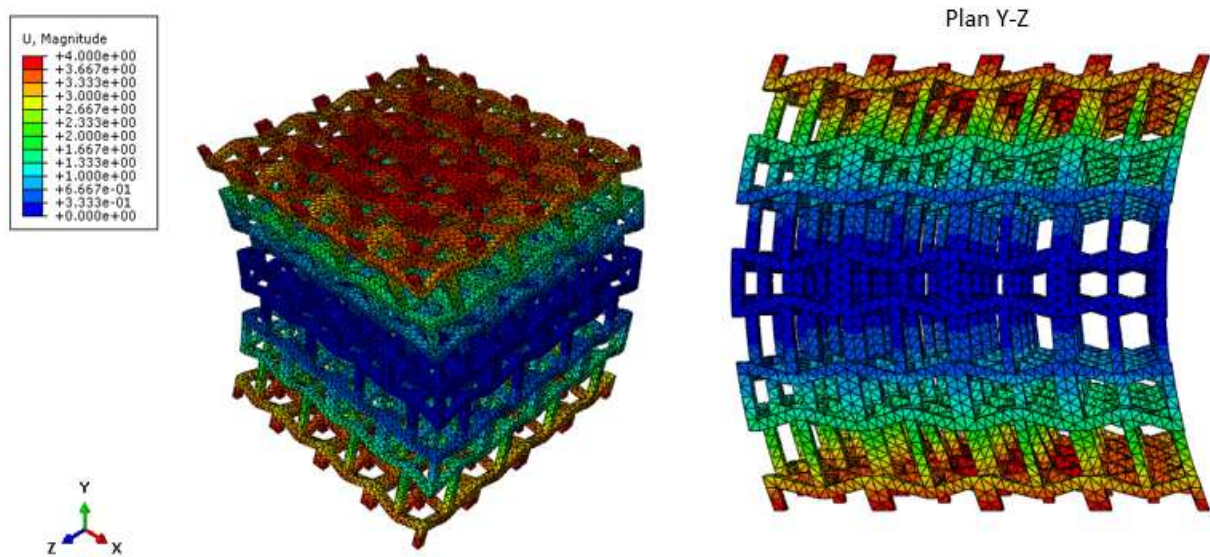


Figure V-45 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{322}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Z de la structure auxétique semi-retrainte.

La Figure V-46 présente les réponses mécaniques des différentes microstructures considérées pour le mode de déformation  $K_{322}$ . Les structures FCC et BCC ont le niveau d'hypercontrainte le plus

important, contrairement au mode de déformation  $K_{212}$  ; les structures auxétiques ont les niveaux d'hypercontraintes les plus faibles, donc présentent la réponse la plus souple.

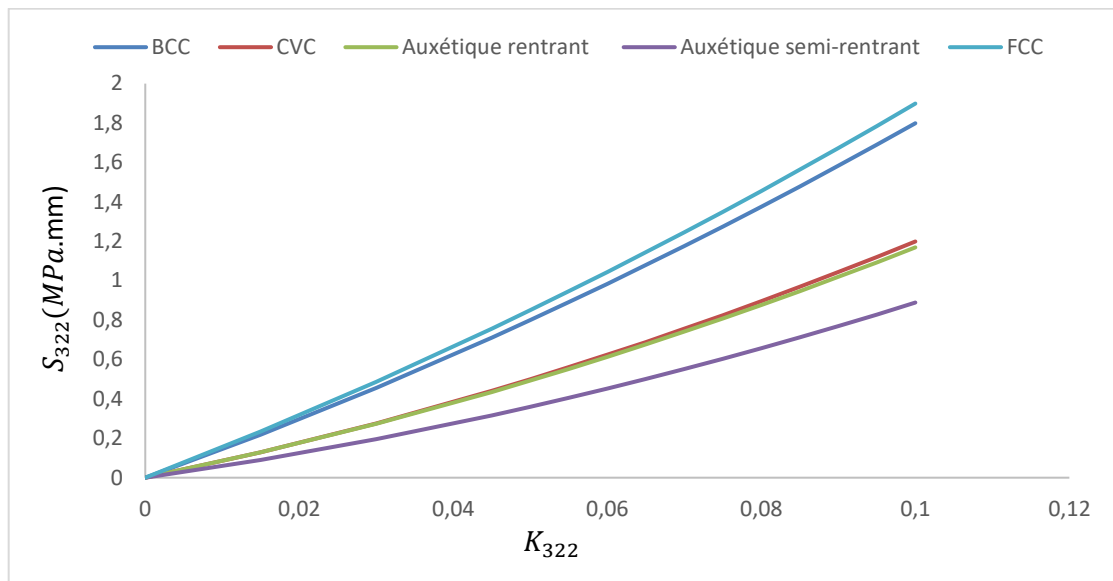


Figure V-46 : Réponses mécaniques des différentes microstructures pour le mode de déformation  $K_{322}$ .

Les champs de déplacements imposés et les déformées des différentes microstructures dans le troisième mode de déformation considéré  $K_{312}$  sont donnés par la suite :

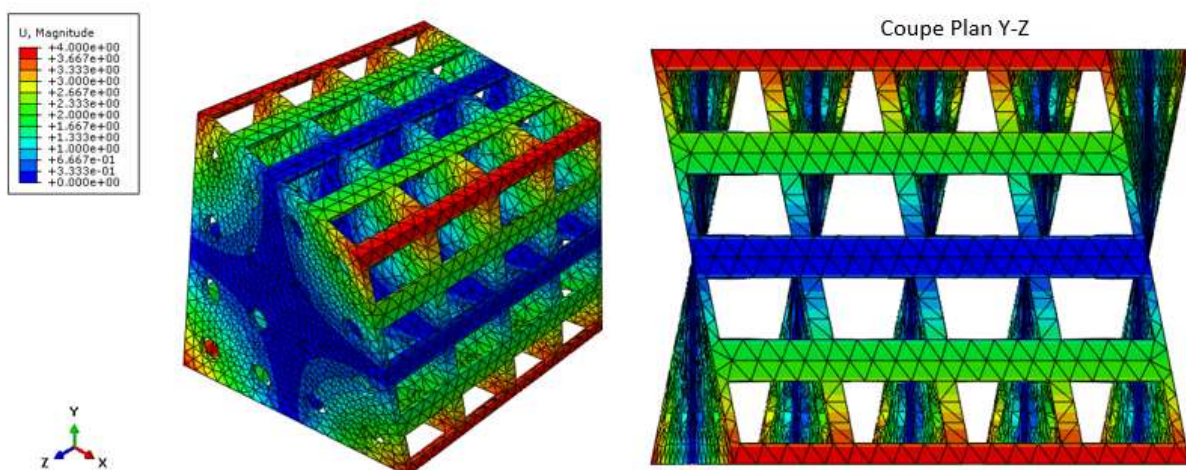
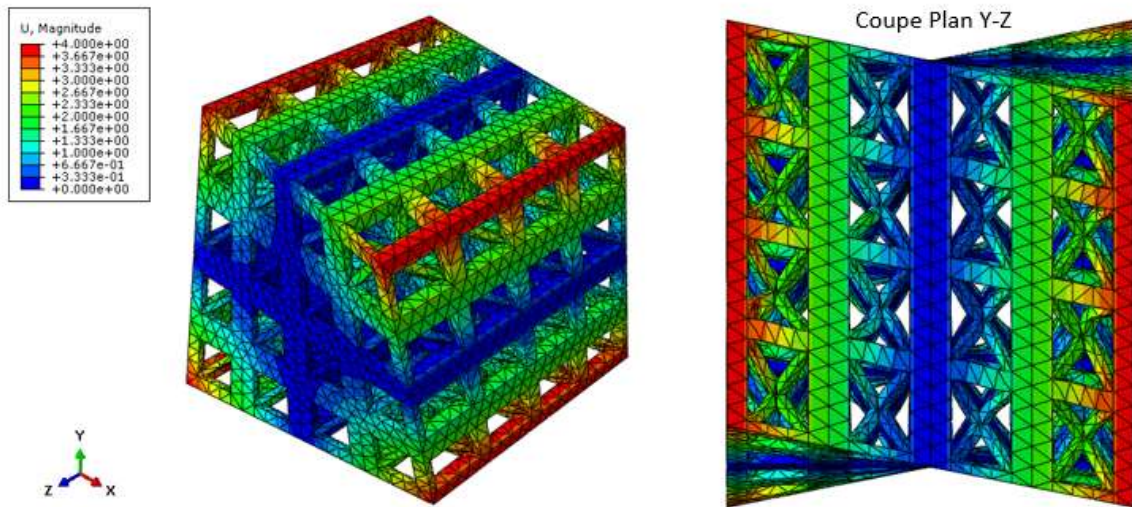


Figure V-47 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{312}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Z de la structure CVC.

Un gradient de cisaillement est observé pour toutes les microstructures (Figure V-47, Figure V-48, Figure V-49, Figure V-50 et Figure V-51), et la vue en coupe dans le plan Y-Z montre bien la forme de cisaillement sur les deux faces du plan, les déformations hors plan X-Y sont bien marquées, qui résultent en une torsion globale à l'échelle macroscopique.



**Figure V-48 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{312}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Z de la structure BCC.**



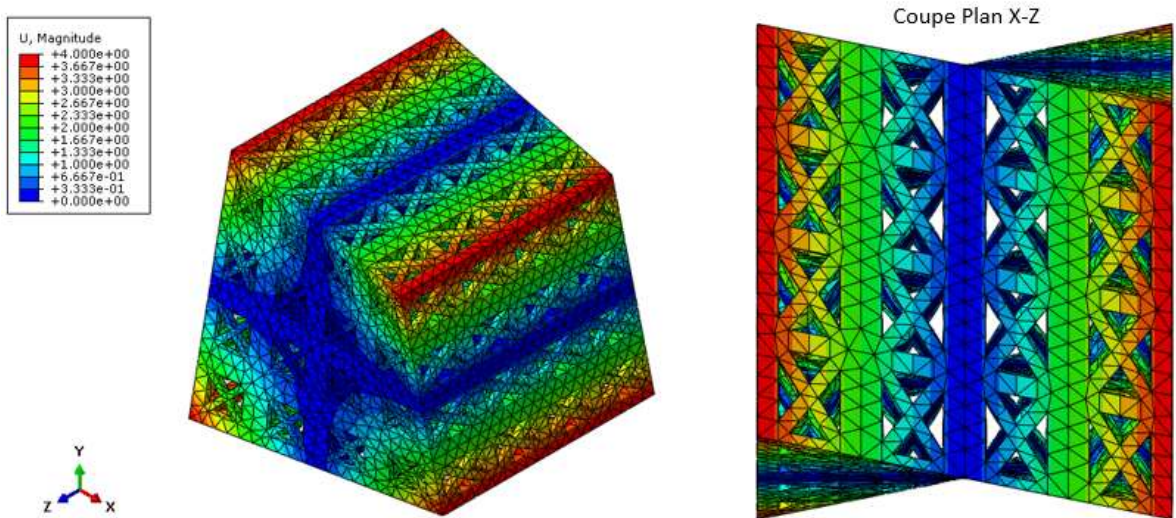


Figure V-49 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{312}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Z de la structure FCC.

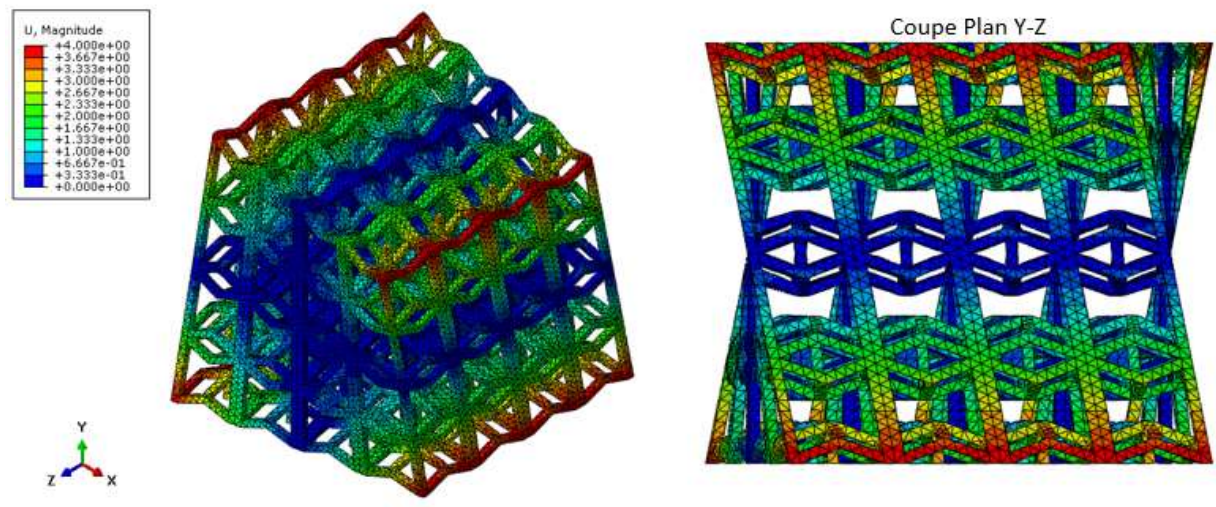
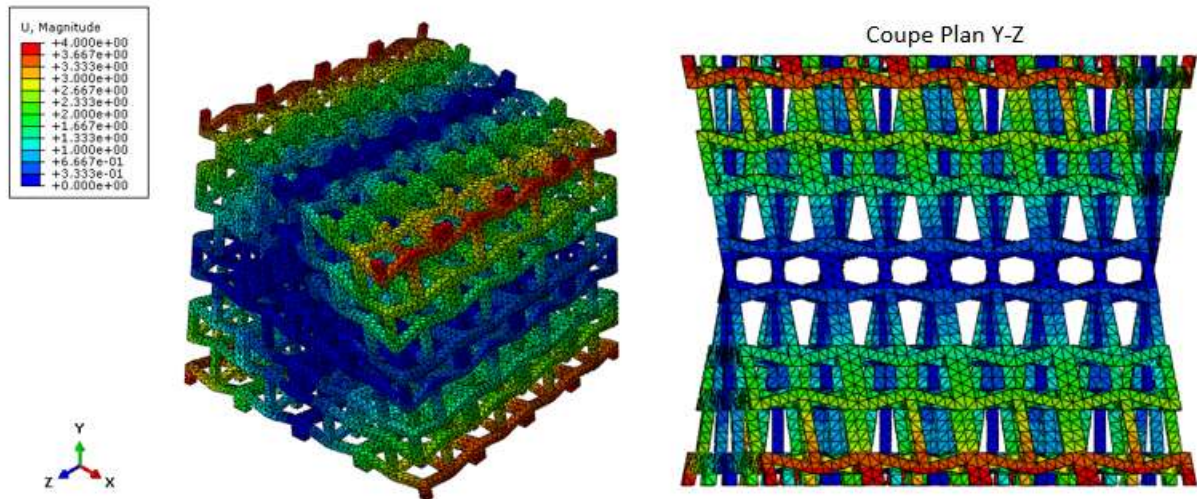


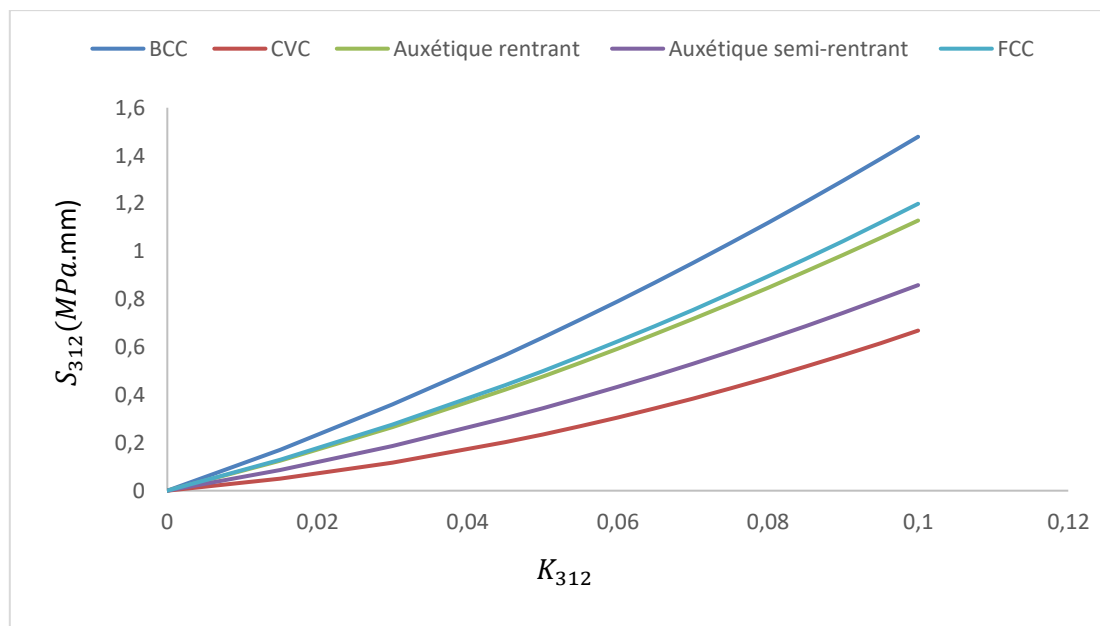
Figure V-50 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{312}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Z de la structure auxétique rentrante.





**Figure V-51 : Champ de déplacement associé à la composante  $K_{312}$  et déformée en coupe dans le plan Y-Z de la structure auxétique semi-rentrante.**

La Figure V-52 présente les réponses mécaniques de différentes structures considérées pour le troisième mode choisi  $K_{312}$  : les structures FCC et BCC ont le niveau d'hypercontrainte  $S_{312}$  le plus élevé, donc la réponse la plus rigide au second gradient.



**Figure V-52 : Réponses mécaniques des différentes structures considérées pour le mode de déformation  $K_{312}$ .**

## 5. Conclusion

Ce chapitre a pour objet le calcul des réponses numériques en petites et grandes déformations de microstructures de matériaux architecturés 3D de type auxétique et cubique. Les structures auxétiques et FCC ont prouvé leurs effets de second gradient prononcés, ce que traduit les longueurs internes les plus élevées obtenues en regard des autres structures en petites déformations avec un matériau de type aluminium de haute performance. Les structures à base cubique présentent des modules élastiques très élevés pour le milieu de Cauchy, une forte anisotropie en extension ainsi que pour d'autres modes de déformation au second gradient.

En perspectives, des modèles hyperélastiques du second gradient de telles microstructures 3D seront identifiés par des méthodes d'homogénéisation en grandes déformations, ce afin d'éviter un calcul en champ complet (prohibitif en temps de calcul) à l'échelle macroscopique.

## Liste des références :

Xin-Tao Wang , Bing Wang , Xiao-Wen Li , Li Ma , Mechanical properties of 3D re-entrant auxetic cellular structures, *International Journal of Mechanical Sciences* (2017), doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.05.048.

Rad, M.S., Hatami, H., Ahmad, Z. *et al.* Analytical solution and finite element approach to the dense re-entrant unit cells of auxetic structures. *Acta Mech* **230**, 2171–2185 (2019). <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02387-x>.

Flavia Libonati, Serena Graziosi, Federico Ballo, Marco Mognato, and Giacomo Sala, *ACS Biomaterials Science & Engineering Article ASAP*, 2021; DOI: 10.1021/acsbiomaterials.0c01708.

## **VI. Conclusion générale et perspectives**

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre plusieurs laboratoires de recherche (LAMCOS, LPMT, MSSMAT, 3SR, LEM3) dans un projet financé par l'agence nationale de recherche (ANR), qui a pour thème principal le développement de modèles enrichis de milieux architecturés par la mécanique des milieux continus généralisés

L'objectif de la thèse était de développer des modèles de comportement de milieux architecturés et fibreux souples, dans le cadre de la mécanique des milieux continus généralisés afin de mieux prendre en compte les mécanismes locaux de déformation et leur impact sur le comportement mécanique à l'échelle intermédiaire d'un volume élémentaire représentatif.

Les matériaux architecturés et composites sont des classes typiques de matériaux largement utilisés en ingénierie en raison de leurs performances mécaniques élevées (comme la résistance mécanique, la capacité d'absorption d'énergie, les propriétés d'isolation thermique et acoustique) à faible poids dans une grande diversité d'applications, notamment l'aéronautique, le génie civil, la construction mécanique, ou encore la biomécanique. Leurs excellentes propriétés sont principalement dues à la possibilité d'ajuster l'architecture et les propriétés microstructurales de la microstructure sous-jacente pour atteindre des performances structurales élevées à l'échelle mésoscopique ou macroscopique.

La prédiction de la réponse mécanique effective des matériaux à microstructures architecturés et cellulaires peut difficilement être obtenue en effectuant des simulations numériques directes, où tous les détails microstructuraux sont entièrement modélisés. En effet, de telles analyses numériques ont généralement un coût de calcul substantiel, ce qui les rend en général irréalisables pour résoudre numériquement des problèmes d'ingénierie. Par ailleurs, la détermination expérimentale des propriétés mécaniques de telles structures est délicate car l'anisotropie globale doit être prise en compte, ce qui conduit à un nombre de tests qui peut être très important.

Les conditions de chargement appliqué sont susceptibles de conduire à l'absence de séparation des échelles (la longueur d'onde du chargement est comparable à la taille de la cellule unitaire de la

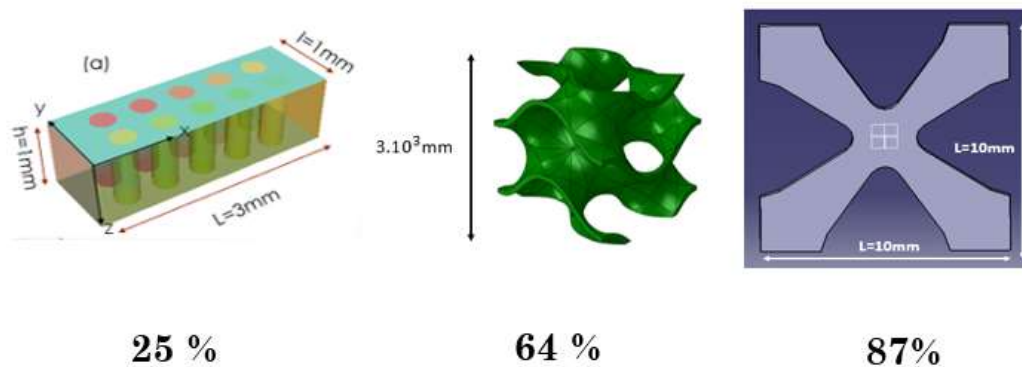
structure), ce qui peut nécessiter l'utilisation de théories du continuum enrichies qui incluent beaucoup plus de paramètres constitutifs que la théorie de l'élasticité de Cauchy. Pour ces raisons, il s'avère pertinent d'effectuer une homogénéisation vers des modèles homogénéisés dans une première étape, ces derniers pouvant être utilisés pour effectuer des calculs au niveau structural.

Cette thèse a pour objectif principal de développer des méthodes d'homogénéisation d'ordre supérieur vers des milieux à gradient d'ordre supérieur pour les matériaux périodiques, en se focalisant principalement sur les matériaux architecturés souples, sujet à de grandes déformations.

Le premier chapitre est consacré à synthétiser les travaux de littérature concernant les méthodes d'homogénéisation en générale, et spécifiquement les milieux continus généralisés à gradient supérieur en élasticité linéaire et nonlinéaire, aussi à définir le cadre de la thèse et énoncer l'objectif et les motivations.

Dans le second chapitre, des modèles de milieux continus à gradient de déformation basés sur l'homogénéisation sont proposés pour calculer les modules effectifs de Cauchy et de gradient de déformation de matériaux composites 3D hétérogènes. La méthode d'homogénéisation est basée sur un principe variationnel en élasticité linéaire articulé avec le lemme de Hill, qui est étendu en considérant la cinématique généralisée du second gradient dans le cadre de l'homogénéisation périodique. Le champ de déplacement microscopique est décomposé en une fonction polynomiale des variables cinématiques macroscopiques introduites et en une fluctuation périodique. Les déplacements fluctuants sont exprimés en fonction des variables cinématiques macroscopiques solution des problèmes séquentiels de cellules unitaires classiques et d'ordre supérieur. Les modules élastiques effectifs calculés ne dépendent pas de la taille des cellules unitaires et sont donc intrinsèques à la microstructure des composites. Des applications sont faites en 3D pour des composites à inclusion présentant un gradient d'architecture interne (gradient de taille d'inclusion ou d'espacement inter-inclusion), des structures poreuses à parois mince et des structures pantographique, ces dernières montrant les effets du second gradient les plus prononcés en raison des

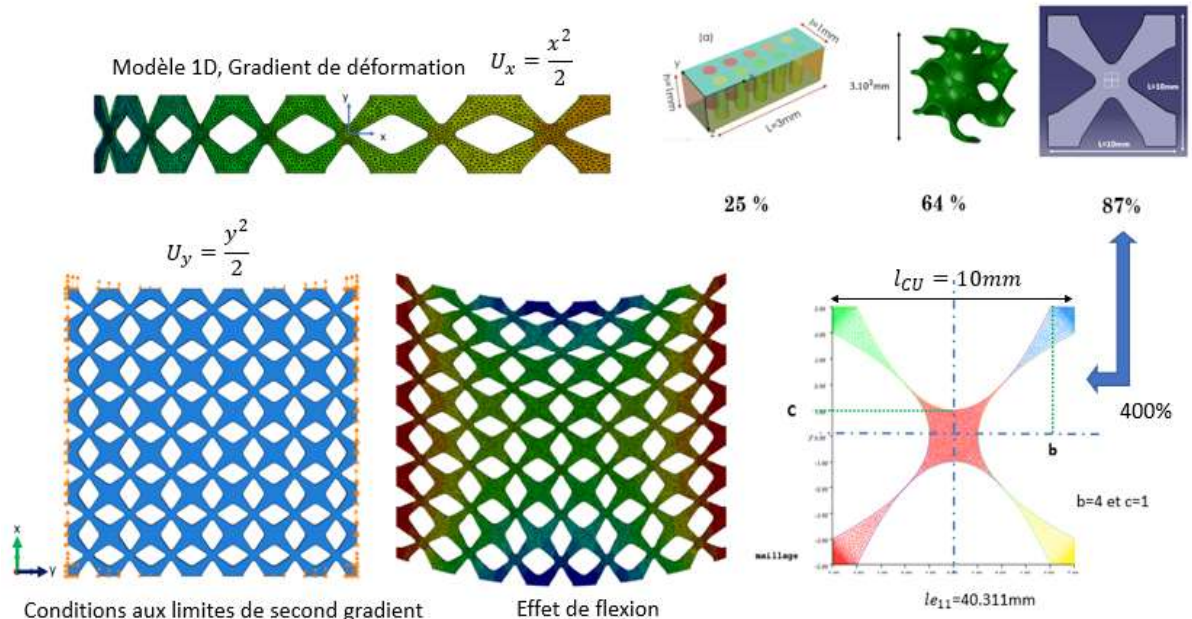
phénomènes de flexion de la microstructure. Les longueurs internes de ces microstructures sont représentées ci-dessous.



**Figure VI-1 : longueur interne en pourcentage de la taille de la cellule unitaire pour trois microstructures. Gauche : composite à inclusion. Milieu : gyroïde. Droite : pantograph**

Les analyses effectuées ont montré que les longueurs internes dépendent fortement des propriétés géométriques de la microstructure, de la fraction d'inclusion, alors que le rapport de modules élastiques entre la matrice et l'inclusion a un impact moindre sur ces dernières.

Dans le chapitre 3, une méthode d'homogénéisation en grandes déformations vers des milieux continus anisotropes du second gradient est proposée. Cette méthode repose sur un principe variationnel incrémental, afin de prédire la loi de comportement homogénéisée à chaque incrément de charge appliquée. Une structure de type pantographe a été choisie comme géométrie de référence pour décrire l'anisotropie et prendre en compte les groupes de symétrie dans l'énergie de déformation à l'échelle macroscopique du milieu continu hyperélastique de substitution. L'idée maîtresse de la modélisation de l'anisotropie repose est d'utiliser comme variables cinématiques les projections des tenseurs de Cauchy-Green du premier et second gradient dans les densités d'énergie de Cauchy et du second gradient respectivement. On montre par le théorème de Rychlewski et compte tenu du groupe de symétrie matérielle de la microstructure du pantographe que ces composantes (projections de ces mêmes tenseurs cinématiques dans la base des fibres) sont des invariants. Les modes de déformation en extension et en cisaillement/ flexion sont intégrés dans les densités d'énergie du premier et second gradient. Un résumé graphique des résultats principaux obtenus dans le chapitre 2 figure ci-dessous.



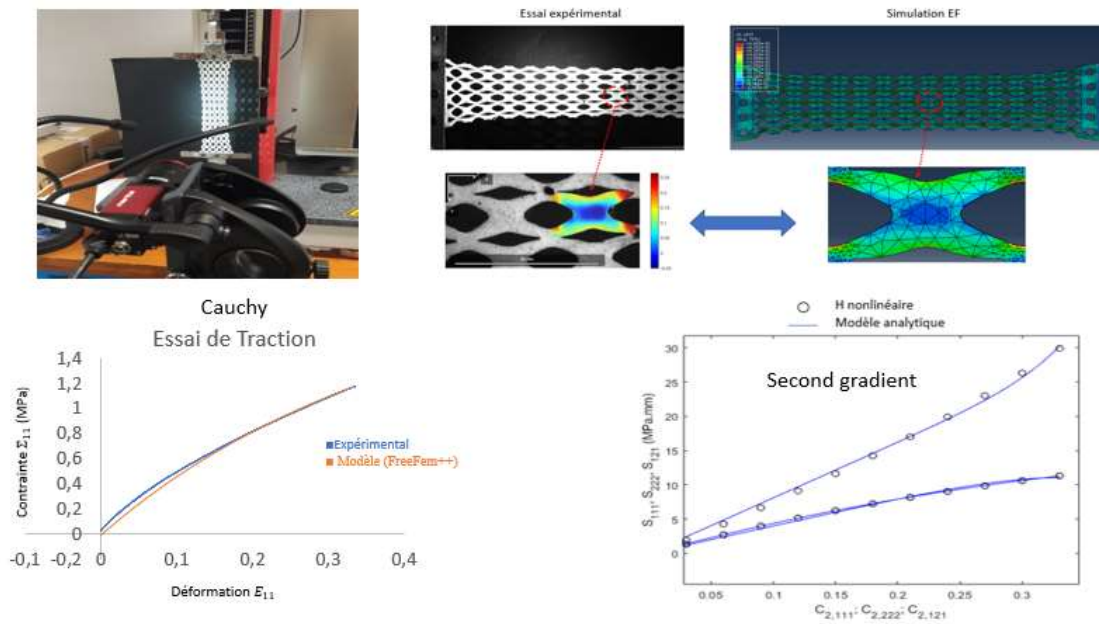
**Figure VI-2 : Résumé graphique des résultats obtenus dans les chapitres 2 de la thèse**

Les structures pantographiques constituées d'un matériau souple sont le siège de grandes déformations dans le domaine élastique. L'objectif principal du chapitre 4 est de construire un modèle hyperélastique anisotrope du second gradient de structures pantographiques par une analyse mathématique reposant sur des invariants cinématiques du premier et second gradient. La linéarisation du problème non linéaire et l'approximation par éléments finis de la matrice tangente consistante sont formulées afin de résoudre les problèmes de cellule et pour construire la réponse nonlinéaire à l'échelle du milieu de substitution qui obéit à une élasticité nonlinéaire du second gradient. Une identification des paramètres de la loi de comportement hyperélastique microscopique de type Ciarlet-Geymonat décrivant la réponse mécanique du matériau de base est effectuée par une méthode inverse, à partir d'essais mécaniques en traction réalisés sur des éprouvettes architecturées avec une microstructure du pantographe. Une méthode d'homogénéisation nonlinéaire vers un milieu du second gradient est ensuite présentée, afin d'identifier un potentiel macroscopique hyperélastique du second gradient. Les invariants structuraux prenant en compte l'anisotropie sont construits à partir des projections des tenseurs de déformation Lagrangiens du premier et second gradient dans la base

matérielle constituée des directions principales d'anisotropie. Ils définissent les arguments de la densité hyperélastique à l'échelle du milieu de substitution du second gradient. Les coefficients du potentiel hyperélastique sont ensuite identifiés à partir d'une base de données d'essais numériques réalisés sur la cellule de base du pantographe en extension uniaxiale, équi-biaxiale et en cisaillement. Les coefficients du modèle hyperélastique anisotrope sont obtenus en minimisant l'écart quadratique entre les réponses numériques et les prédictions du modèle postulé. Cette même procédure est ensuite étendue à l'identification d'un modèle anisotrope hyperélastique du second gradient. Les prédictions numériques s'appuient sur une formulation incrémentale du problème d'homogénéisation nonlinéaire du second gradient. Le modèle identifié est prédictif, comme le montre le très bon accord obtenu entre des simulations par homogénéisation pour des cas de chargement non équi-biaxiaux (en faisant varier le rapport de biaxialité) et les prédictions du modèle hyperélastique. L'énergie du second gradient s'avère être dominante par rapport à l'énergie de Cauchy pour la structure pantographique. Une validation du modèle d'homogénéisation hyperélastique anisotrope en grandes déformations est effectuée en comparant la réponse prédite à l'échelle de la cellule unitaire du pantographe avec celle obtenue par des essais expérimentaux.

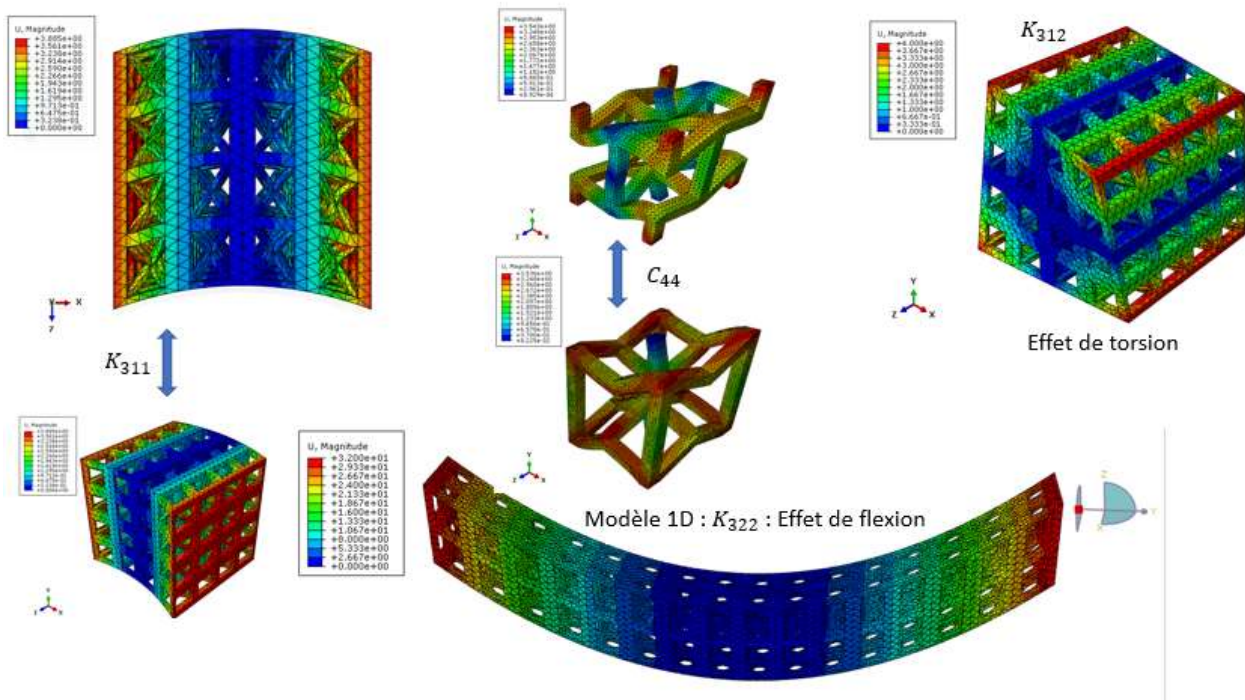
Dans le chapitre 5, les réponses nonlinéaire du premier et du second gradient de différents types de milieux architecturés (BCC, FCC, CVC, Auxétique rentrant et auxétique semi-rentrant) présentant des géométries 3D sont obtenues à une échelle macroscopique, pour un nombre de cellules unités assez important pour minimiser les effets de bord. Dans ces conditions, la réponse macroscopique avec des conditions de sollicitations cinématiques sur le bord du domaine de type cinématique (polynomiale d'ordre deux afin de solliciter des effets du second gradient) est proche de celle obtenue à l'échelle de la cellule unité périodique. Les microstructures auxétiques 3D sont celles qui montrent les effets du second gradient le plus prononcé. Des applications seront faites pour des interlocks 3D dans le cadre d'une collaboration avec une équipe du LaMCoS dans le cadre de perspective de cette thèse. Un résumé graphique des résultats principaux obtenus dans les chapitres 3 et 4 figures ci-dessous.





**Figure VI-3 : Résumé des résultats obtenus dans les chapitres 3 et 4 de la thèse**

Les structures auxétiques, et cubique à faces centrées ont montés respectivement les longueurs internes les plus importantes par rapport les autres structures considérés, par la suite plus d'effet de second gradient. La Figure VI-4 représente les principaux modes de déformations marqués un effet de second gradient très important en raison des phénomènes de flexion de la microstructure. Le modèle 1D a bien montré ces phénomènes de flexion qui sont suite à un déplacement imposé de type polynomiale  $U_Z = \frac{\gamma^2}{2}$ .



**Figure VI-4 : Résumé des résultats obtenus dans le chapitre 5 de la thèse.**

Les perspectives de cette thèse concernent les aspects principaux suivants :

- L'extension de l'homogénéisation 2D (apte à modéliser le comportement de matériaux architecturés plans de faible épaisseur, ou au contraire réalisés par extrusion d'une forme plane initiale) vers des géométries 3D constitue une nécessité compte tenu du grand nombre de structures périodiques concernées, et notamment les tissages de type Interlock). Une problématique associée est celle de l'identification de l'anisotropie dans une configuration de référence de la microstructure, ainsi que sa prise en compte dans les modèles hyperélastiques. La microtomographie est une technique privilégiée permettant de définir les directions principales d'anisotropie en moyenne volumique au sein de l'échantillon analysé.
- Sur le plan numérique, la simulation de microstructures complexes telles que les tissages 3D demande de réaliser un couplage entre le maillage et l'interface du logiciel de calcul par éléments finis (FreeFem++). De nombreux problèmes techniques ont été identifiés dans le cadre de la modélisation des tissages 3D : principalement l'application des conditions aux limites périodique sur les bords de VER qui est très délicate, ainsi que la sélection de tous les labels (surfaces extérieures) du VER. Les méthodes d'homogénéisation nonlinéaires avec prise en compte des effets du second gradient seront appliquées dans des travaux futurs de l'équipe à des interlock 3D et autres milieux fibreux 3D d'architecture interne complexe.

- Les réponses macroscopiques calculées avec une prise en compte des effets de gradient d'ordre supérieur dans les modèles homogénéisés demandent à être corrélées à des analyses de mécanismes locaux de déformation (échelle microscopique), afin de pouvoir proposer des explications du comportement obtenu en termes de mécanismes locaux de déformation de la microstructure. Il est indispensable de combiner à cette fin différentes techniques et méthodes d'analyse, dont les méthodes de corrélation d'images, la microtomographie, et les analyses de champs par éléments finis.
- L'élaboration de protocoles de mesure des propriétés effectives du second gradient de matériaux hétérogènes reste un défi, car il faut être capable d'appliquer des doubles forces, ou de façon duale des gradients de déformations sur les bords de l'éprouvette, afin de solliciter les modes de déformation d'ordre supérieur. Il est envisagé de développer de tels protocoles pour des matériaux architecturés en géométrie plane dans une première étape.