



HAL
open science

Stabilisation d'une classe d'EDP non linéaire. Application à l'équation de Vlasov-Poisson

Karima Saidi

► **To cite this version:**

Karima Saidi. Stabilisation d'une classe d'EDP non linéaire. Application à l'équation de Vlasov-Poisson. Automatique / Robotique. Université de Lorraine; Université de Carthage (Tunisie), 2023. Français. NNT : 2023LORR0225 . tel-04517199

HAL Id: tel-04517199

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-04517199v1>

Submitted on 22 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**UNIVERSITÉ
DE LORRAINE**

**BIBLIOTHÈQUES
UNIVERSITAIRES**

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact bibliothèque : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr
(Cette adresse ne permet pas de contacter les auteurs)

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Thèse en cotutelle

En vue de l'obtention du

DOCTORAT

Spécialités : Mathématiques appliquées & Automatique

Stabilisation d'une classe d'EDP non linéaire. Application à l'équation de Vlasov-Poisson

Présentée et soutenue publiquement le 29 Septembre 2023 par :
Karima SAIDI

<i>Présidente/Examinatrice</i>	Catherine BONNET	Directrice de Recherche à l'INRIA Paris, L2S
<i>Rapporteurs :</i>	Driss BOUTAT	Pr., INSA Centre Val de Loire
	Ines ELLOUZE	MC. HDR, SCS&Nonlinear PDE, Université de Sfax
<i>Examinatrice :</i>	Salwa ELLOUMI	Pr., LSA, Université de Carthage
<i>Directeurs :</i>	Mohamed BOUTAYEB	Pr., CRAN, Université de Lorraine
	Chaker JAMMAZI	Pr., LIM, Université de Tunis EL Manar

Remerciements

En préambule, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement et à témoigner toute ma reconnaissance à mes encadrants Mr. *Mohamed BOUTAYEB* et Mr. *Chaker JAMMAZI* pour leurs disponibilités, leurs patiences, leurs compréhensions et leurs temps qu'ils m'ont consacré tout au long de ce travail, sachant répondre à toutes mes interrogations et me guidant durant toutes les étapes de mon mémoire de thèse.

Mes remerciements sont aux membres des deux laboratoires **CRAN** (Centre de recherche en Automatique de Nancy) et **LIM** (Laboratoire d'Ingénierie Mathématique) pour leur sympathie, leur gentillesse et leur aide à remédier aux problèmes rencontrés lors de la réalisation de ce travail. Je remercie plus particulièrement tous les membres à l'Institut Henri Poincaré pour leur dynamique.

J'exprime également ma gratitude à Mr. *Lotfi BEJI* et Mr. *Chaouki AOUITI* sans oublier leurs conseils précieux, leurs participations au cheminement de ce rapport et leurs contributions indispensables au bon démarrage de ce projet.

J'exprime mes sincères remerciements aux **membres de jury** de bien accepter de juger ce travail et témoigner de l'intérêt qu'il porte à mon travail en participant à mon jury de thèse. Je suis très honorée à exprimer mes remerciements à Mme. *Catherine BONNET* (INRIA Paris) et Mme. *Salwa ELLOUMI* (Université de Carthage) d'avoir examiner ce travail et lui accordant leurs remarques pertinentes. Je suis extrêmement reconnaissante à Mr. *Driss BOUTAT* (INSA Centre Val de Loire) et Mme. *Ines ELLOUZE* (Université de Sfax) d'avoir accepté de rapporter cette thèse, d'y avoir consacré une partie de leur temps et de me faire l'honneur de leur présence le jour de la soutenance.

Dédicaces



Avec l'expression de ma reconnaissance je dédie ce travail à tous ceux que j'aime et en particulier :

À mon cher père :

Permettez-moi de vous exprimer mon amour aîné. Je suis très fière s'être votre fille et de pouvoir enfin réaliser ce que vous avez tant attendu de moi. Vous n'avez jamais cessé de m'encourager et de m'allumer le chemin de la réussite. Que Dieu vous garde.

À ma chère mère :

Toutes mes années d'études étaient fascinantes grâce à votre présence et à vos compliments. Merci pour votre confiance et pour votre éducation. Ma joie est de te voir heureuse. Que Dieu vous protège.

À mes frères et mes soeurs :

Avec qui j'ai partagé les plus beaux moments de ma vie. En vous témoignant mon amour extrême, je vous souhaite une vie pleine de bonheur, de joie et de réussite. Que Dieu nous garde toujours unis, heureux et sincères.

À mon mari :

Pour l'amour et l'affection qui nous unissent. Je ne saurais exprimer ma profonde reconnaissance pour le soutien continu dont tu as toujours fait preuve. Tu m'as toujours encouragé, incité à faire de mon mieux, ton soutien m'a permis de réaliser le rêve tant attendu. Je te dédie ce travail avec mes vœux de réussite, de prospérité et de bonheur. Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel, et d'exaucer tous nos rêves.



tous mes enseignants, tous mes amis et tous mes proches qui ont tant attendu ce jour.



Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur la stabilisation d'une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Il s'agit d'un modèle discrétisé de l'équation de Vlasov-Poisson décrivant l'évolution spatio-temporelle, dans un plasma, d'une fonction de distribution de particules chargées. Dans une première étape, nous avons abordé la stabilisation des systèmes dynamiques en temps fixe (i.e. la stabilisation en temps fini avec un temps d'établissement uniformément borné). Des critères relaxant des résultats existants dans la littérature ont été établis. En effet, nous avons montré que, pour un système dynamique, la combinaison de la stabilité lente (au sens polynomiale) et de la stabilité rapide (au sens temps fini) conduit à une stabilité en temps fixe. Diverses applications sur le système de Vlasov-Poisson discrétisé concernent aussi le système double intégrateur avec observateur et les systèmes bilinéaires de dimension infinie où pour chacun de ces systèmes, le retour stabilisant et /ou les observateurs en temps fixe sont construits et testés numériquement. Dans une seconde étape, nous nous sommes intéressés à la stabilisation en temps petit des systèmes dynamiques variants dans le temps. En fait, la notion de temps petit est couramment utilisée dans la théorie de la commandabilité. Pour la stabilisation, ce temps petit est situé entre le temps fini et le temps fixe. Nous avons élaboré des résultats théoriques basés sur la méthode énergétique garantissant la convergence de la solution, vers zéro, en temps petit. Cela est obtenu moyennant une excitation temporelle d'une fonction positive non intégrable au sens de Lebesgue. Puis, nous avons appliqué nos résultats sur des exemples modèles comme l'équation de transport avec contrôle frontière, l'équation d'onde soumise à un contrôle frontière du type Wentzell. Également, pour les systèmes bilinéaires en dimension finie et infinie qui sont, en outre, des modèles types de Vlasov-Poisson discrétisé. Pour chaque système, nous avons élaboré son retour d'état dont la construction est basée sur l'intégration des excitations temporelles et uniformes.

Mots-clés : Systèmes bilinéaires, discrétisation, Vlasov-Poisson, retour d'état homogène, stabilité en temps petit, stabilité en temps fixe.

Abstract

The work presented in this thesis concerns the stabilization of a class of nonlinear partial differential equations. It is a discretized model of the Vlasov-Poisson equation describing the spatial and temporal evolution, in a plasma, of a distribution function of charged particles. In a first step, we addressed the stabilization of the dynamical systems in fixed time (i.e. stabilization in finite time with a uniformly bounded). Criteria relaxing existing results in the literature have been established. Indeed, we have shown that, for a dynamical system, the combination of slow stability (in the polynomial sense) and fast stability (in the finite time sense) leads to a stability in fixed time. Various applications on the discretized Vlasov-Poisson system also concern the double integrator system with observer and the bilinear systems in infinite dimension where for each of these systems, the stabilizing feedback and/or observers in fixed time are constructed and numerically tested. In a second step, we are interested in the small time stabilization of time varying dynamical systems. In fact, the notion of small time is commonly used in theory of controllability. For stabilization, this small time is located between finite time and the fixed time. We have developed theoretical results based on the energy method guaranteeing the disappearance of the solution in small time. This is obtained by means of a time excitation of a positive function not integrable in the sense of Lebesgue. Then, we have applied our results on model examples such as the transport equation with boundary control, the wave equation subject to a boundary control of the Wentzell type. Also, for finite and infinite dimensional bilinear systems which are, in addition, typical discretized Vlasov-Poisson models. For each system, we have elaborated its feedback whose construction is based on the integration of temporal and uniform excitations.

Key-words : Bilinear systems, discretization, Vlasov-Poisson, homogeneous feedback, small-time stability, fixed-time stability.

Table des matières

Remerciements	i
Dédicaces	iii
Résumé	v
Abstract	vii
Notations	1
Introduction générale	1
1 Généralités	3
1.1 Introduction	3
1.2 Outils d'analyse fonctionnelle	3
1.3 Notion d'homogénéité et de dilatation	5
1.3.1 Dilatation en dimension finie	6
1.3.2 Dilatation en dimension infinie	7
1.3.3 Opérateurs homogènes	8
1.3.4 Normes canoniques homogènes	10
1.4 Commandabilité et stabilisation des systèmes linéaires	11
1.5 Rappels et définitions de l'observabilité des systèmes dynamiques	16
2 État de l'art	19
2.1 Introduction	19
2.2 Modèle de Vlasov-Poisson	20
2.3 Techniques de commandabilité et de stabilisation utilisées	21
2.4 Contributions	24
2.5 Conclusion	25

3	Stabilisation rapide du système de Vlasov-Poisson contrôlé en dimension finie	27
3.1	Commandabilité	28
3.1.1	Formulations variationnelles	28
3.1.2	Discrétisation et convergence	32
3.1.3	Critère de commandabilité	37
3.2	Stabilisation rapide en dimension finie	44
3.2.1	Stabilisation en temps fixe	44
3.2.2	Stabilisation en temps petit des systèmes non autonomes	49
3.3	Conclusion	55
4	Stabilisation en temps fixe des systèmes dynamiques	57
4.1	Introduction	57
4.2	Nouvelle caractérisation de la stabilité en temps fixe	59
4.2.1	Définitions et résultats	59
4.2.2	Applications	64
4.3	Critère à base d'intégrales de la stabilité en temps fixe	69
4.3.1	Application sur les systèmes bilinéaires	71
4.3.2	Stabilisation par une fonction de Lyapunov homogène	72
4.3.3	Cas particulier	75
4.3.4	Exemple	77
4.4	Conclusion	77
5	Stabilisation en temps petit de quelques systèmes en dimension infinie	79
5.1	Introduction	79
5.2	Extensions pour une dimension quelconque	81
5.3	Stabilisation en temps petit des systèmes non autonomes en dimension infinie	82
5.3.1	Critères de type intégrales	82
5.3.2	Application à l'équation de transport en dimension infinie	84
5.3.3	Application aux systèmes bilinéaires	87
5.3.4	Application aux équations d'onde avec condition au bord de type Wentzell	89
5.4	Conclusion	93
	Conclusions et perspectives	95
	Bibliographie	97

Notations

Ω	:	espace des phases.
Ω_x	:	espace des positions.
Ω_v	:	espace des vitesses.
ϵ_{ij}	:	la composante de ϵ .
X	:	un vecteur de coordonnées x et v .
h	:	le pas du maillage.
$\mathcal{M}_{\alpha,\zeta}$:	l'ensemble des matrices à α lignes et ζ colonnes.
$\nabla \mathbf{u}$:	gradient de \mathbf{u} .
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:	le produit scalaire de \mathbf{u} et \mathbf{v} .
\mathbf{u}^{tr}	:	transposé de \mathbf{u} .
\mathbf{u}'	:	la dérivée ordinaire de \mathbf{u} .
$\partial_t \mathbf{u}$:	la dérivée de \mathbf{u} par rapport à t .
$g \circ f$:	la composée de g par f .
J_0	:	matrice jacobienne.
$\det(J_0)$:	déterminant de J_0 .
N	:	le nombre global des noeuds de calcul.
N_G	:	le nombre global des éléments de maillage.
$L^2(\Omega)$	=	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\Omega} u^2 < \infty\}$.
$H^m(\Omega)$	=	$\{u \in L^2(\Omega), \partial^{\alpha} u \in L^2(\Omega), 0 \leq \alpha \leq m, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}, m \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{L}^2(\Omega)$	=	$\{\mathbf{u} = (u^1, u^2), u^i \in L^2(\Omega), i = 1, 2\}$.
$\mathbb{H}^m(\Omega)$	=	$\{\mathbf{u} = (u^1, u^2), u^i \in H^m(\Omega), i = 1, 2\}, m \in \mathbb{N}$.

Table des figures

3.1	Solution exacte $f_0(x, v, t)$	40
3.2	Solution approchée à $T = 5$	40
3.3	Fonction de distribution à $T = 20$	41
3.4	Fonction de distribution à $T = 30$	41
3.5	Fonction de distribution à $T = 40$	41
3.6	Fonction de distribution à $T = 100$	42
3.7	Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.77).	49
3.8	Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.67).	49
3.9	Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.77)	54
3.10	Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.79)	55
4.1	Évolution des trajectoires $x(t)$ et $y(t)$	68
4.2	Évolution de la trajectoire $x(t)$	68
4.3	Évolution de la trajectoire $y(t)$	68
4.4	Évolution des observateurs e_1 et e_2	69
4.5	Trajectoires des états x_1, x_2, e_1 , et e_2	69
4.6	Trajectoires des états y_1 et y_2	77
5.1	Trajectoire des états y_1 et y_2 de (5.24) utilisant la fonction d'excitation $f(t) = t^2$	89
5.2	Trajectoire des états y_1 et y_2 de (5.24) utilisant la fonction d'excitation $f(t) = \frac{t^3}{1+t}$	89
5.3	Trajectoire de la solution $y(., x)$ à $T = 1000s$ utilisant la fonction d'excitation $h(t) = e^{3t}$	93
5.4	Trajectoire de la solution $y(., x)$ à $T = 1000s$ sans excitation.	93

Introduction générale

Cette thèse aborde à la fois le problème de la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires de très grandes dimensions et, le développement d'algorithmes d'ordre réduit pour une mise en œuvre facile sur des systèmes réels. En effet, une des motivations principales concerne l'application de ces approches à l'équation de Vlasov-Poisson discrétisé. Cette dernière décrit l'évolution de la fonction de distribution de particules chargées dans un plasma. A ce jour, la majeure partie des travaux dans la littérature sur les équations de Vlasov-Poisson concerne l'analyse et la synthèse de techniques de discrétisation de ces équations, mais très peu de résultats existent sur la stabilisation de ces systèmes et encore moins sur le temps de convergence. On montrera que l'approche utilisée s'applique également à d'autres types de systèmes non linéaires.

Dans un premier temps, nous commençons par étudier la stabilisation des systèmes dynamiques en temps fixe (stabilisation en temps fixe veut dire ici stabilisation en temps fini avec un temps d'établissement uniformément borné). Des conditions peu conservatrices, par rapport aux résultats existants dans la littérature, sont établies. En effet, nous montrons que pour un système dynamique ; l'utilisation de la stabilité polynomiale (phase de la stabilité lente) avec la stabilité en temps fini (i.e. phase de la stabilité rapide) conduit à une stabilité en temps fixe. Les résultats obtenus ont été appliqués à des exemples académiques comme le double intégrateur, utilisant un observateur, ou les systèmes bilinéaires écrits sous une forme générale. En effet, nous montrons que le modèle de Vlasov-Poisson discrétisé peut être représenté sous une forme bilinéaire. Les conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité et d'observabilité du système ainsi obtenu ont été établies. Nous avons ainsi développés des lois, homogènes, stabilisant le modèle discrétisé en temps fixe. Plusieurs simulations numériques montrent la faisabilité et la pertinence de l'approche proposée.

Nous montrons également qu'une deuxième approche utilisant des lois de commande in-stationnaires permet la stabilisation en temps petit de l'équation de Vlasov-Poisson discrétisée. Nous avons proposé des conditions suffisantes, basées sur des fonctions de Lyapunov particulières, pour garantir cette stabilité en temps petit. En plus de l'équation de Vlasov-Poisson, cette technique a été appliquée avec succès sur d'autres classes de systèmes dynamiques, voire des EDP, tels que l'équation de transport, les équations d'onde avec la condition de Wentzell. L'idée principale dans la construction des lois de commande stabilisantes en temps petit est d'intégrer des fonctions temporelles avec des excitations persistantes. Afin de montrer la pertinence des résultats obtenus, plusieurs simulations numériques sont données prenant comme modèle des exemples académiques.

Cette thèse est organisée comme suit : Après une introduction générale, le chapitre 1 est consacré aux principaux outils mathématiques permettant de mieux suivre et comprendre le contenu de cette thèse. Nous y rappelons les notions d'homogénéité, de dilatation, de commandabilité, d'observabilité et de stabilisation en temps petit et en temps fixe. Dans

le chapitre 2, on décrit le système de Vlasov-Poisson, les verrous scientifiques et l'état de l'art sur la stabilisation. Le chapitre 3 a pour but le développement de lois de commande pour la stabilisation en temps fixe du système Vlasov-Poisson de dimension finie. Nous avons, dans un premier temps, donné les conditions de commandabilité et d'observabilité du modèle discrétisé dans le plan de phase. Ensuite, en se basant sur la théorie d'homogénéité, nous avons construit des lois de commande stabilisantes en temps fixe. Ces lois de commande sont validées par plusieurs simulations numériques. Le chapitre 4 présente un simple critère de stabilité en temps fixe des systèmes dynamiques autonomes. Comme première application, il s'agit de résoudre le problème de la stabilité du système double intégrateur par des retours d'état (continu et discontinu). La deuxième application est consacrée à la stabilisation en temps fixe des systèmes bilinéaires de dimension infinie. Le chapitre 5 fait l'objet de la stabilisation en temps petit des systèmes dynamiques variants dans le temps. Nous nous sommes intéressés aux systèmes de dimension infinie tels que l'équation de transport, l'équation d'onde et les systèmes bilinéaires. Tous nos résultats sont illustrés par des exemples académiques et des simulations numériques. Pour finir, une conclusion et des perspectives sont présentées à la fin du manuscrit.

Chapitre 1

Généralités

Sommaire

1.1	Introduction	3
1.2	Outils d'analyse fonctionnelle	3
1.3	Notion d'homogénéité et de dilatation	5
1.3.1	Dilatation en dimension finie	6
1.3.2	Dilatation en dimension infinie	7
1.3.3	Opérateurs homogènes	8
1.3.4	Normes canoniques homogènes	10
1.4	Commandabilité et stabilisation des systèmes linéaires	11
1.5	Rappels et définitions de l'observabilité des systèmes dynamiques	16

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous faisons un rappel de quelques outils mathématiques pour le lecteur afin de lire ce manuscrit avec une certaine autonomie. On commence, dans la première partie, par rappeler quelques résultats d'analyse fonctionnelle. La deuxième partie est consacrée à introduire la notion d'homogénéité et de dilatation en dimension finie et infinie. Tandis que la dernière partie est destinée à la notion de stabilisation des systèmes dynamiques. On présentera les conditions de commandabilité par linéarisation et par l'approche de Lyapunov pour une large classe de systèmes dynamiques même ceux variants dans le temps. Nous nous intéressons en particulier à la stabilité et à la stabilisation par des lois de commande en temps petit ou en temps fixe. Toutes ces notions vont être exploitées pour la stabilisation du modèle de Vlasov-Poisson.

1.2 Outils d'analyse fonctionnelle

Soit H un espace de Hilbert, sur \mathbb{R} , muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$. On note par $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de deux éléments x et y de H .

Définition 1.1. [32] Un opérateur est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset H &\rightarrow H \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

linéaire et continue où $D(A)$ est le domaine de A défini par $D(A) = \{x \in H / Ax \text{ existe}\}$.

Définition 1.2. [32] A est dit dissipatif si $\forall x \in D(A), \langle Ax, x \rangle \leq 0$.

Définition 1.3. [32] Une famille $(S(t))_t, 0 \leq t \leq +\infty$, d'opérateurs linéaires continus de H dans H (i.e. $(S(t))_t \in \mathcal{L}(H)$), est un semi-groupe si :

1. $S(0) = I$.
2. $\forall t, s \in [0, +\infty[: S(t+s) = S(t) \circ S(s)$.

Si, de plus, $\forall x \in H$, l'application $t \in [0, +\infty[\mapsto S(t)x \in H$ est continue alors $(S(t))$ est dit semi-groupe fortement continu.

Définition 1.4. [32] Soit $(S(t))_t, 0 \leq t \leq +\infty$, un semi-groupe fortement continu. On définit

$$D(A) = \{x \in H, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe}\},$$

et

$$A(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

$(A, D(A))$ est dit générateur infinitésimal de $(S(t))_t, \forall t \in [0, +\infty[$.

Définition 1.5. [32] $(S(t))_{t \geq 0}$ est dit un semi-groupe de contraction si

$$\|S(t)\| \leq 1, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Définition 1.6. [32] Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur non borné de domaine $D(A)$ tel que

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H.$$

1. A est dit monotone si $\langle Av, v \rangle \geq 0, v \in D(A)$.
2. A est dit maximal monotone si A est monotone et $Im(A + I) = H^1$ (i.e. $\forall y \in H, \exists x \in D(A) : Ax + x = y$).

Proposition 1.7. [32] Soit A est un opérateur maximal monotone. Alors on a les propriétés suivantes :

1. $\overline{D(A)} = H$ (i.e. $D(A)$ est dense).
2. A est un fermé.
3. $\forall \lambda > 0, (I + \lambda A)$ est bijectif de $D(A)$ à valeurs dans H , $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Définition 1.8. [32] Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit l'opérateur linéaire $A : H_1 \rightarrow H_2$. Alors, l'adjoint de A , noté A^* , est un opérateur linéaire vérifiant

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \forall (x, y) \in H_1 \times H_2.$$

De plus, on a

$$\|A\| = \|A^*\|,$$

et si $A = A^*$, on dit que A est un opérateur auto-adjoint.

-
1. $Im(A)$ est l'image de A

Théorème 1.9. [32] *Supposons que $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est fermé et $D(A)$ dense dans H . Si A et A^* sont tous les deux dissipatifs, alors pour chaque $x_0 \in D(A)$, il existe un unique $x \in C^0([0, +\infty[; D(A)) \cap C^1([0, +\infty[; H)$ tel que*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & \forall t \in [0, +\infty[, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, nous avons $\|x(t)\| \leq \|x_0\|$, $\forall t \in [0, +\infty[$ et $\|\dot{x}(t)\| = \|Ax(t)\| \leq \|Ax_0\|$, $\forall t \in [0, +\infty[$. Le domaine $D(A)$ est muni de la norme suivante

$$\|y\|_{D(A)} := \|y\| + \|Ay\|.$$

Définition 1.10. [99] *Soit A un opérateur infinitésimal qui génère un C^0 semi-groupe et $f \in L^1(0, T; H)$. Soit le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au + f(t), & \forall x \in H, \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (1.1)$$

Une solution mild de (1.1) est une fonction u continue satisfaisant

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Théorème 1.11. [99] *Soit*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + f(t, x), & \forall x \in H, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Si

1. *l'opérateur A génère un semi-groupe de contraction.*
2. *f est continue en temps localement lipschitzienne par rapport à x .*

Alors le problème de Cauchy (1.2) admet une unique solution, mild maximale, définie sur $[0, t_{\max}[$ et $x \in C([0, t_{\max}[, H)$.

1.3 Notion d'homogénéité et de dilatation

L'homogénéité [107] est une propriété géométrique qui garantit certaines propriétés invariantes de la solution. Elle a été définie et utilisée dans la théorie du contrôle pour spécifier le type de stabilité pour un système dynamique. En effet, si le degré d'homogénéité est positif on parle d'une stabilité polynômiale, si le degré d'homogénéité est nul, on parle dans ce cas d'une stabilité exponentielle tandis que, si le degré d'homogénéité est négatif, alors on a une stabilité en temps fini. Cette propriété fonctionne de manière invariante par rapport à une classe de transformation appelée dilatation.

1.3.1 Dilatation en dimension finie

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ x &\longmapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^{tr}, \end{aligned}$$

une fonction supposée régulière.

Pour $\varepsilon > 0$, on définit l'application dilatation par :

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ x &\longmapsto \Delta_\varepsilon x = (\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n)^{tr}, \end{aligned}$$

où les $r_i > 0$, $\forall i = 1, n$ (les r_i sont dits les poids de la dilatation Δ_ε). L'application Δ_ε est une bijection différentiable de \mathbb{R}^n sur lui même.

Lorsque les $r_i = 1, \forall i = 1, n$, on parle alors d'une dilatation uniforme.

Définition 1.12. On dit que la composante $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de f , est homogène de degré d si

$$f_i(\Delta_\varepsilon x) = \varepsilon^{r_i+d} f_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans ce cas, la fonction f est dite homogène de degré d si chaque composante f_i , de f , est homogène de degré d .

Exemple 1.13. Soit le système suivant

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ x &\longmapsto f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1 x_2)^{tr}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

Soit l'opérateur Δ_ε tel que $\Delta_\varepsilon x = (\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2)$, où $r_i > 0$, $i = 1, 2$. On a

$$f_1(\Delta_\varepsilon x) = \varepsilon^{2r_1} f_1(x) = \varepsilon^{r_1+d} f_1(x),$$

donc $d = r_1$.

De la même façon, on calcule

$$f_2(\Delta_\varepsilon x) = \varepsilon^{r_1+r_2} f_2(x) = \varepsilon^{r_2+d} f_2(x),$$

alors $d = r_1$.

Ainsi, le système (1.3) est homogène de degré $d = r_1$.

Exemple 1.14 ([67]). Soit le système physique suivant qui décrit le mouvement d'un oscillateur harmonique contrôlé (dit double intégrateur)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{1.4}$$

Soit $u(x_1, x_2) = -x_1|x_1|^{\alpha-2} - x_2|x_2|^{\frac{\alpha-2}{2}}$, pour $2 < \alpha < 4$ et $\Delta_\varepsilon(x_1, x_2) = (\varepsilon x_1, \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} x_2)$, on montre que le système (1.4) est homogène de degré $d = \frac{\alpha}{2} - 1$. En effet, pour $x = (x_1, x_2)$, soit

$$\dot{x} = (f_1(x), f_2(x)) = (x_2, u)^{tr}.$$

Le calcul de $f_1(\Delta_\varepsilon x)$ et $f_2(\Delta_\varepsilon x)$ donne

$$f_1(\Delta_\varepsilon x) = f_1(\varepsilon x_1, \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} x_2) = \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} x_2 = \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}-1} f_1(x),$$

et

$$f_2(\Delta_\varepsilon x) = f_2(\varepsilon x_1, \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} x_2) = -\varepsilon^{\alpha-1} x_1|x_1|^{\alpha-2} - \varepsilon^{\alpha-1} x_2|x_2|^{\frac{\alpha-2}{2}} = \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}-1} \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} f_2(x).$$

Définition 1.15. On dit qu'une fonction f est symétrique par rapport à la dilatation uniforme de son argument $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \lambda x$, où $\lambda > 0$ est le facteur d'échelle, est connu sous le nom d'homogénéité :

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \lambda > 0, \forall x.$$

1.3.2 Dilatation en dimension infinie

Ce paragraphe décrit la notion de dilatation lorsque l'espace d'action est de dimension infinie, c'est une généralité de la notion définie précédemment sur \mathbb{R}^n .

Soit X un espace de Banach réel muni de sa norme notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.16. [110] Une application

$$\begin{aligned} \mathbf{d} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{L}(X) \\ s &\mapsto \mathbf{d}(s) : X \rightarrow X \\ &u \mapsto \mathbf{d}(s)u, \end{aligned}$$

est appelée une dilatation si elle satisfait les conditions suivantes

1. propriété du groupe : $\mathbf{d}(0) = I \in \mathcal{L}(X)^2$; $\mathbf{d}(t+s) = \mathbf{d}(t)\mathbf{d}(s)$, pour $t, s \in \mathbb{R}$;
2. propriété de la continuité forte : $\mathbf{d}(\cdot)u : \mathbb{R} \rightarrow X$ est continue pour tout $u \in X$;
3. propriété de limite : $\lim_{s \rightarrow -\infty} \|\mathbf{d}(s)u\| = 0$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \|\mathbf{d}(s)u\| = \infty$ uniformément sur $u \in \mathbb{S}$ où \mathbb{S} est la sphère unité de X ($\mathbb{S} := \{x \in X; \|x\| = 1\}$).

A chaque dilatation \mathbf{d} , on associe un groupe de générateur infinitésimal, $G_{\mathbf{d}}$, donné dans la définition suivante.

Définition 1.17. [109] Le générateur $G_{\mathbf{d}} : \mathcal{D}(G_{\mathbf{d}}) \subset X \rightarrow X$ est défini par

$$G_{\mathbf{d}}y = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}(s)y - y}{s} \text{ (lorsqu'elle existe)}$$

et de domaine

$$\mathcal{D}(G_{\mathbf{d}}) = \{y \in X / \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}(s)y - y}{s} \text{ existe dans } X\}.$$

Pour tout $y \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{d}})$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ alors $\mathbf{d}(s)y \in \mathcal{D}(G_{\mathbf{d}})$.

la fonction $\mathbf{d}(\cdot)y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}(G_{\mathbf{d}})$ est différentiable et nous avons

$$\frac{d}{ds} \mathbf{d}(s)y = G_{\mathbf{d}}\mathbf{d}(s)y = \mathbf{d}(s)G_{\mathbf{d}}y. \tag{1.5}$$

Exemple 1.18. [119] Soit $X = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^3$. On considère la dilatation d définie par

$$(d(s)y)(x) = e^s y(e^{-s}x), \quad s \in \mathbb{R}, \quad y \in X \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

D'après (1.5), le groupe de générateur $G_{\mathbf{d}}$ est donné par

$$(G_{\mathbf{d}}y)(x) = -xy'(x) + y(x), \text{ de domaine } \mathcal{D}(G_{\mathbf{d}}) = \{y \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / -xy' + y \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}.$$

2. $\mathcal{L}(X)$: l'espace des opérateurs linéaires continus
3. $L^2(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$: espace de Hilbert des fonctions de carrées intégrables sur \mathbb{X} à valeurs dans \mathbb{Y}

Dans la suite, pour $g \in \mathcal{L}(X)$, on note par

$$\|g\|_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} := \sup_{y \in \mathbb{S} \cap \mathcal{D}} \|g(y)\| \quad \text{et} \quad [g]_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} := \inf_{y \in \mathbb{S} \cap \mathcal{D}} \|g(y)\|.$$

où \mathcal{D} est une partie de X stable par rapport à la dilatation \mathbf{d} ou bien dite \mathbf{d} -homogène, c'est à dire $\mathbf{d}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.

La monotonie des opérateurs est un moyen utile pour étudier l'existence et l'unicité des solutions d'une équation d'évolution. C'est pour cela, la définition suivante introduit cette notion pour les dilatations [100].

Définition 1.19. [110] Une dilatation d est dite

1. monotone sur $\mathcal{D} \subset X$, lorsque $\mathbf{d}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ et $\|\mathbf{d}(s)\|_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} < 1, \forall s < 0$;
2. strictement monotone s'il existe $\beta > 0$ tel que $\|\mathbf{d}(s)\|_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} < e^{\beta s}, \forall s < 0$.

Exemple 1.20. Soit $S(t)$ un semi-groupe d'isométries ($\|S(t)u\| = \|u\|, \forall u \in X$ et $\forall t \in \mathbb{R}$).

À partir de la définition 1.17, S joue le rôle de G_d .

On considère le système linéaire

$$\dot{x} = Ax,$$

alors la fonctionnelle $\mathbf{d}(s) = e^s S(s)$ est une dilatation. Un calcul simple nous donne $G_{\mathbf{d}} = I + A$ avec $\mathcal{D}(G_{\mathbf{d}}) = \mathcal{D}(A)$.⁴ En effet, $\|\mathbf{d}(s)u\| = e^s \|S(s)u\| = e^s \|u\| = e^s, \forall u \in \mathbb{S}$ et

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbf{d}(s) &= e^s S(s) + e^s AS(s) \\ &= e^s S(s) + e^s S(s)A \\ &= e^s S(s)(I + A). \end{aligned}$$

Pour $s < 0$, on a

$$\|\mathbf{d}(s)\|_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} \leq \sup_{u \in \mathbb{S}} \|\mathbf{d}(s)u\|,$$

donc

$$\|\mathbf{d}(s)u\| < 1, \forall s < 0.$$

Ce qui implique

$$\|\mathbf{d}(s)\|_{\mathcal{L}}^X \leq 1,$$

donc \mathbf{d} est monotone.

Toutefois, cette dilatation est aussi strictement monotone, puisque, pour $s < 0$,

$$\|\mathbf{d}(s)\|_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} < e^s = e^{\beta s} \quad \text{avec} \quad \beta = 1.$$

1.3.3 Opérateurs homogènes

Comme la définition des fonctions homogènes en dimension finie, on introduit de façon similaire la notion d'homogénéité pour les opérateurs.

4. Pour $x \in \mathcal{D}(A)$, $Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}$ où $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ et H est un espace de Hilbert

Définition 1.21. [109] Soit d une dilatation sur X et soit $\mu \in \mathbb{R}$.

Un opérateur $f : \mathcal{D} \subset X \rightarrow X$ est dit d -homogène de degré μ lorsque \mathcal{D} est un ensemble d -homogène (i.e. $\mathbf{d}(s)\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$) et

$$f(\mathbf{d}(s)y) = e^{\mu s} \mathbf{d}(s)f(y), \quad \forall s \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{D}.$$

Examinons les deux exemples suivants tirés de [110].

Exemple 1.22. Soit l'équation aux dérivées partielles définie par

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - v \frac{\partial v}{\partial x}$$

où $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$. Cette équation est appelée équation de Korteweg-de Vries, en abréviation (KdV).

Considérons la dilatation suivante

$$(\mathbf{d}(s)u)(x) = e^{2s}u(e^s x), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Soit $f(u) = -u''' - uu'$ avec \prime est la dérivée ordinaire. Alors on a

$$\begin{aligned} \left(f(\mathbf{d}(s)u) \right)(x) &= -\left(e^{2s}u(e^s x) \right)''' - e^{2s}u(e^s x) \left(e^{2s}u(e^s x) \right)' \\ &= -e^{5s}u'''(y) - e^{5s}u(y)u'(y)|_{y=e^s x} \\ &= e^{3s} \mathbf{d}(s)f(u)(x), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc $f(\mathbf{d}(s)u) = e^{3s} \mathbf{d}(s)f(u)$. Par conséquent, f est d -homogène de degré $\mu = 3$.

Exemple 1.23. On considère l'opérateur f défini sur un espace de Hilbert X par

$$f(y) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} y, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace et I est la matrice identité. Soit la dilatation \mathbf{d} définie par

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2$$

où $\mathbf{d}_1(s)y = \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} y$ et $\mathbf{d}_2(s)y = y(e^{-\frac{s}{2}}x)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(s)y &= \mathbf{d}_1(\mathbf{d}_2(s)y), \\ &= \mathbf{d}_1\left(y(e^{-\frac{s}{2}}x)\right), \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}}y(e^{-\frac{s}{2}}x) \\ y(e^{-\frac{s}{2}}x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'autre part, en prenant $y = \begin{pmatrix} y_1 \in \mathbb{R} \\ y_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(s)y &= \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2(s)y, \\ &= \mathbf{d}_1\left(y(e^{-\frac{s}{2}}x)\right), \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(e^{-\frac{s}{2}}x) \\ y_2(e^{-\frac{s}{2}}x) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{s}{2}}y_1(e^{-\frac{s}{2}}x) \\ y_2(e^{-\frac{s}{2}}x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le groupe de générateur $G_{\mathbf{d}} := \frac{d}{ds} \mathbf{d}$ défini par

$$G_{\mathbf{d}} = G_{\mathbf{d}_1} + G_{\mathbf{d}_2},$$

où

$$G_{\mathbf{d}_1} y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \text{ et } G_{\mathbf{d}_2} y = -\frac{1}{2} xy',$$

découle de la dérivée d'un produit de fonctions. Donc

$$G_{\mathbf{d}} y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} y_1 - \frac{1}{2} x y_1' \\ -\frac{1}{2} x y_2' \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$f(\mathbf{d}(s)y) = \begin{pmatrix} y_2(e^{-\frac{s}{2}}x) \\ e^{-\frac{s}{2}}y_1(e^{-\frac{s}{2}}x) \end{pmatrix} = e^{-\frac{s}{2}} \mathbf{d}(s) f(y).$$

Ainsi, l'opérateur f est homogène de degré $\mu = -\frac{1}{2}$ par rapport à \mathbf{d} ainsi définie.

Soit \mathcal{D} une partie de X supposée \mathbf{d} -homogène.

Proposition 1.24. [109] Pour une dilatation \mathbf{d} sur $\mathcal{D} \subset X$, nous avons

1. pour tout $u \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, il existe un unique couple $(s_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}_{\mathbf{d}}(1)$ tel que $u = \mathbf{d}(s_0)u_0$;
2. la fonction $\|d(\cdot)u\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (avec $u \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$) est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

Dans la suite, nous allons introduire la notion de norme canonique homogène que nous considérons tout au long de ce mémoire.

1.3.4 Normes canoniques homogènes

Soit \mathbf{d} une dilatation sur X .

Définition 1.25. [109] Une application $p : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite une norme homogène par rapport à \mathbf{d} sur X si p est continue sur X et vérifiant :

1. $p(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$,
2. $p(d(s)x) = e^s p(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $s \in \mathbb{R}$.

Notons que la fonctionnelle p ne vérifie pas l'inégalité triangulaire ($p(x+y) \leq p(x) + p(y)$) et donc il ne s'agit pas d'une norme. Cependant, plusieurs auteurs (comme par exemple dans [2], [6], [42]) qualifient l'application p comme "norme homogène".

Exemple 1.26. Soit $X = \mathbb{R}^n$ et on considère la fonction $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ définie par

$$p(u) = \sum_{i=1}^n |u_i|^{\frac{1}{r_i}}, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^{tr} \in \mathbb{R}^n, \quad r_i > 0.$$

Considérons la dilatation suivante

$$d(s) = \text{diag}\{e^{r_1 s}, e^{r_2 s}, \dots, e^{r_n s}\}.$$

Il est clair que la fonction p est continue et $p(0) = 0$. De plus, $p(d(s)u) = e^s p(u)$, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, p est une norme homogène.

Maintenant, on introduit la définition de la norme canonique homogène.

Définition 1.27. [120] La fonctionnelle $\|\cdot\|_d : X \setminus \{0\} \rightarrow]0, \infty[$ définie par

$$\|u\|_d = e^{s_u}, \quad \text{où } s_u \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|d(-s_u)u\| = 1,$$

est appelée la norme canonique homogène sur X où d est une dilatation monotone sur X .

Pour tout $y \in X$, on a

$$[\mathbf{d}(\ln \|\mathbf{y}\|_d)]_{\mathcal{L}}^{\mathbf{X}} \leq \|y\| \leq \|\mathbf{d}(\ln \|\mathbf{y}\|_d)\|_{\mathcal{L}}^{\mathbf{X}}. \quad (1.6)$$

L'inégalité (1.6) permet de donner une relation entre la norme homogène $\|\cdot\|_d$ et la norme habituelle $\|\cdot\|$ de l'espace de Banach X .

1.4 Commandabilité et stabilisation des systèmes linéaires

Soit le système linéaire (stationnaire) de la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (1.7)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$ où $T > 0$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur commande, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Le problème de la commandabilité du système (1.7) peut s'écrire de la façon suivante : Soit deux points x_0 et x_1 dans \mathbb{R}^n ; existe-t-il $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que

$$\left(\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right) \implies (x(T) = x_1)? \quad (1.8)$$

Avec

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds = x_1. \quad (1.9)$$

Proposition 1.28. [32] La condition nécessaire et suffisante de commandabilité peut s'écrire, grâce au critère de Kalman, comme suit

$$rg(C) := rg(B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B) = n, \quad C \in M_{n,mn}(\mathbb{R}).$$

Remarque 1.29. 1. Lorsque $rg(C) = n$, on dit alors que la paire (A, B) est commandable.

2. La condition de Kalman est une condition algébrique qui traduit

$$e.v\{A^i B, i = 0, \dots, n-1\} = \mathbb{R}^n,$$

où $e.v(\cdot)$ désigne l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes $A^i B$.

Exemple 1.30. Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u. \end{cases} \quad (1.10)$$

En notant par $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, le système (1.10) est équivalent à

$$\dot{z} = Az + Bu,$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est clair que

$$\text{rg}(B|AB) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Ainsi, le système (1.10) est commandable.

La condition de commandabilité peut également s'écrire de la façon suivante.

Proposition 1.31. [32] (A, B) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité

$$C_T = \int_0^T e^{sA} B B^{tr} e^{sA^{tr}} ds$$

est inversible.

La solution $u(\cdot)$ est donné par [32] comme suit :

$$u(s) = B^{tr} e^{(T-s)A^{tr}} C_T^{-1} (x_1 - e^{TA} x_0).$$

Les résultats obtenus pour les systèmes linéaires peuvent être utilisés dans le cas des systèmes non linéaires grâce à des techniques de linéarisation.

Théorème 1.32. [32] Soit le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \\ f(x_0, u_0) = 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

où f est de classe C^1 .

Si le linéarisé du système autour de l'équilibre (x_0, u_0) est commandable, alors le système non linéaire (1.11) est localement commandable.

Dans le cas où $A = A(t)$ et $B = B(t)$, on obtient le système instationnaire (ou temps-variant) suivant

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.12)$$

Pour $u \in L^1(]0, T[; \mathbb{R}^m)$ et $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, données, on définit la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Définition 1.33. [32] Soit $b \in L^1(]0, T[; \mathbb{R}^n)$. Une application $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in]0, T[, \quad (1.14)$$

si $x \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ et satisfait

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} (A(t)x(t) + b(t)) dt, \quad \forall (t_1, t_2) \in [0, T]^2. \quad (1.15)$$

En particulier, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, une solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in]0, T[, \quad x(0) = x_0, \quad (1.16)$$

est une fonction $x \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau (A(t)x(t) + b(t)) dt, \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (1.17)$$

Définition 1.34. Le système linéaire instationnaire, (1.12), est commandable si, pour chaque $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $u \in L^\infty(]0, T[; \mathbb{R}^m)$ tel que la solution $x \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy (1.13) satisfait

$$x(T) = x_1.$$

Supposons que A et B sont de classe $C^\infty([0, T])$. On définit une suite d'applications $B_i \in C^\infty([0, T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n))$ de la manière suivante

$$B_0(t) := B(t), \quad B_i(t) := \dot{B}_{i-1}(t) - A(t)B_{i-1}(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.18)$$

Théorème 1.35. [32] *Supposons que, pour certains $s \in [0, T]$,*

$$e.v\{B_i(s)u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n.$$

Alors le système linéaire (1.12) est commandable sur $[0, T]$.

Dans un second temps, on donne un bref aperçu sur la notion de stabilisation des systèmes non linéaires à l'aide d'un retour d'état. Le problème de stabilisation (ou bien de régulation) consiste à maintenir le système près de son point d'équilibre à l'aide d'une action appelée retour d'état.

Soit le système de contrôle

$$\dot{x} = f(x, u) := g(x). \quad (1.19)$$

On a bien $g(0) = 0$ et $g \in C^0$.

Une loi de commande ou bien un retour est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \\ x &\longmapsto u(x), \end{aligned}$$

continue tel que $u(0) = 0$. et le système en boucle fermée $\dot{x} = f(x, u(x))$ soit localement ou globalement asymptotiquement stable.

Pour cela, on va rappeler la notion d'asymptotiquement stable. Soit un système en régime libre :

$$\dot{x} = g(x), \quad g(0) = 0, \quad (1.20)$$

où $g \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ⁵.

5. Pour un système dynamique $\dot{x} = g(x)$, on peut supposer toujours que 0 est un point d'équilibre. En effet, si x_e un point d'équilibre, $y = x - x_e$ et $g(x) = g(y + x_e) = \tilde{g}(y)$. Donc $\tilde{g}(0) = g(x_e) = 0$.

Remarque 1.36. Puisque g est définie et continue de \mathbb{R}^n sur lui même alors le théorème de Péano nous garantit que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

possède des solutions. Dans le cas où g est localement lipschitzienne, le problème (1.20) possède une unique solution.

Définition 1.37. L'équilibre $x = 0$ du système (1.20) est dit stable au sens de Lyapunov si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.20) on ait :

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.38. L'équilibre $x = 0$ du système (1.20) est dit attractif s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.20) on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

Définition 1.39. L'équilibre $x = 0$ du système (1.20) est dit asymptotiquement stable s'il est à la fois stable et attractif.

Définition 1.40. L'équilibre $x = 0$ du système (1.20) est dit exponentiellement stable s'il existe $r > 0, M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0.$$

Définition 1.41. [7, 70] L'équilibre $x = 0$ du système (1.20) est dit polynomialement stable s'il existe $M \geq 0, k \geq 0$ et $\eta \leq 1$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait :

$$(\exists r > 0 : (\|x(0)\| \leq r) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \frac{M \|x(0)\|^\eta}{(1 + \|x(0)\|^k t)^k}, \forall t \geq 0) \quad (1.21)$$

Exemple 1.42. Soit $m > 1$ un nombre impair. Le système scalaire $\dot{x} = -x^m$ avec $x(0) = x_0 \neq 0$ est polynomialement stable dont sa solution $x(t)$, obtenue par intégration, est donnée par :

$$x(t) = \left(\frac{x^{m-1}(0)}{1 + (m-1)x^{m-1}(0)t} \right)^{1/(m-1)}.$$

Le critère de Lyapunov est une méthode utilisée en théorie du contrôle pour déterminer la stabilité d'un système dynamique. Il permet de déterminer si un système est stable ou bien instable (c.à.d l'équilibre n'est pas stable) en analysant les propriétés de la fonction de Lyapunov.

Définition 1.43. Une fonction V est dite définie positive si elle satisfait les conditions suivantes :

1. $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
2. $V(x) > 0, \forall x \neq 0$, et $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Définition 1.44. Une fonction $V(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite candidate pour g si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, a(\|x\|) \leq V(x) \leq b(\|x\|),$$

où $a, b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions strictement croissantes s'annulant en 0 telles que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} a(\|x\|) = \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} b(\|x\|) = +\infty.$$

Définition 1.45. [129, section 2.4 p 103] Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continûment différentiable, est une fonction de Lyapunov au sens large pour le système (1.20) si elle est candidate à Lyapunov stationnaire et vérifie :

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si les deux conditions de la définition précédente sont satisfaites, on parle alors de système stable au sens de Lyapunov, c'est-à-dire que toutes les trajectoires restent dans un voisinage de l'équilibre.

Il est connu qu'une fonction de Lyapunov peut jouer le rôle de l'énergie d'un système. Elle permet d'avoir la notion de stabilité (resp. de stabilité asymptotique) comme il est indiqué dans le théorème suivant. Soit D un voisinage ouvert du point d'équilibre 0.

Théorème 1.46. [72, 129] Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction candidate à Lyapunov tels que

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad \dot{V} \leq 0 \quad \text{dans} \quad D.$$

Alors l'origine est stable.

De plus, si la dérivée \dot{V} de V le long des trajectoires du système

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \neq 0,$$

alors l'origine est asymptotiquement stable.

Si \dot{V} n'est pas définie négative (i.e. $-\dot{V}$ est définie positive) alors, dans ce cas, on fait recours au principe de l'invariance de LaSalle.

On définit alors l'ensemble

$$Q := \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = 0 \right\}.$$

Théorème 1.47. (Invariance de LaSalle [72]) Considérons le système dynamique $\dot{x} = g(x)$. Supposons qu'on ait obtenu une fonction de Lyapunov V au sens large. Alors toute solution bornée converge vers I le plus grand ensemble g -invariant inclus dans Q . Si de plus I est réduit à zéro, alors l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

Exemple 1.48. Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (1.22)$$

a pour le point d'équilibre $(0,0)$ qui est stable mais non attractif. En effet, si on prend la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, sa dérivée \dot{V} est nulle.

Exemple 1.49. Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - y, \end{cases} \quad (1.23)$$

Soit $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Sa dérivée le long du système (1.23) donne $\dot{V} = -y^2 \leq 0$ et $\dot{V} = 0 \iff y = 0$. Donc \dot{V} est semi-définie négative. Soit $(x(t), y(t))$ une trajectoire incluse dans $\{\dot{V} = 0\}$ alors

$$\begin{aligned} y(t) = 0, \forall t \geq 0 &\Rightarrow \dot{y}(t) = 0, \forall t \geq 0, \\ &\Rightarrow -x(t) = 0, \forall t \geq 0, \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

D'après le principe de l'invariance de LaSalle, l'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Exemple 1.50. Pour l'exemple suivant,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (1.24)$$

on cherche u admissible pour que $(0, 0)$ soit exponentiellement stable. Soit le retour stabilisant $u(x, y) = -2(x + y)$. Pour la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2$, on montre que sa dérivée le long de la trajectoire du système (1.24) satisfait $\dot{V} \leq -2V$, et donc l'équilibre $(0, 0)$ est exponentiellement stable.

1.5 Rappels et définitions de l'observabilité des systèmes dynamiques

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \quad y \in \mathbb{R}^k, C \in M_{k,n}(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (1.25)$$

Définition 1.51. Le système (1.25) est dit observable lorsqu'il est possible de déterminer l'état actuel du système à partir des observations de ses sorties sur une période donnée. Cela signifie que la connaissance de l'état du système peut être déduite à partir de la sortie et ses dérivées.

Définition 1.52. Le système linéaire (1.25) est observable si et seulement si (critère de Kalman)

$$rg(O) = rg \left(C, CA, \dots, CA^{n-1} \right)^{tr} = n.$$

On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Notons que la paire (A, C) est observable si et seulement s'il existe $T > 0$ tel que la matrice

$$O_T = \int_0^T e^{sA^{tr}} C^{tr} C e^{sA} ds$$

soit inversible.

Désignons par x l'état du système, u le vecteur commande (les entrées), \hat{x} représente l'estimation de l'état faite par l'observateur et y le vecteur des variables observées (sorties). Alors on a

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (1.26)$$

où A et B décrivent la dépendance entrée-sortie et C décrit la dépendance état-sortie. La matrice L est appelée matrice de gain et doit être choisie de manière à ce que l'erreur sur l'état converge asymptotiquement vers 0.

En réalisant un bouclage $u = -K\hat{x}$, la dynamique du système bouclé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = (A - BK)\hat{x} + L(y - C\hat{x}) \end{cases} \quad (1.27)$$

On fait le changement de variable suivant pour écrire l'erreur \tilde{x} de la forme

$$\tilde{x} = x - \hat{x},$$

d'où en remplaçant $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - LC)\tilde{x}$, on obtient une nouvelle écriture en fonction de l'état et de l'erreur :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire par blocs. Il est donc facile de montrer que la convergence asymptotique vers zéro est équivalente à la stabilisabilité de (A, B) et à la détectabilité de (A, C) .

Définition 1.53. Soit un système régi par (1.25). On dit que ce système est asymptotiquement stable si la matrice A est Hurwitz. Une matrice A est dite Hurwitz si toutes ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives.

Chapitre 2

État de l'art

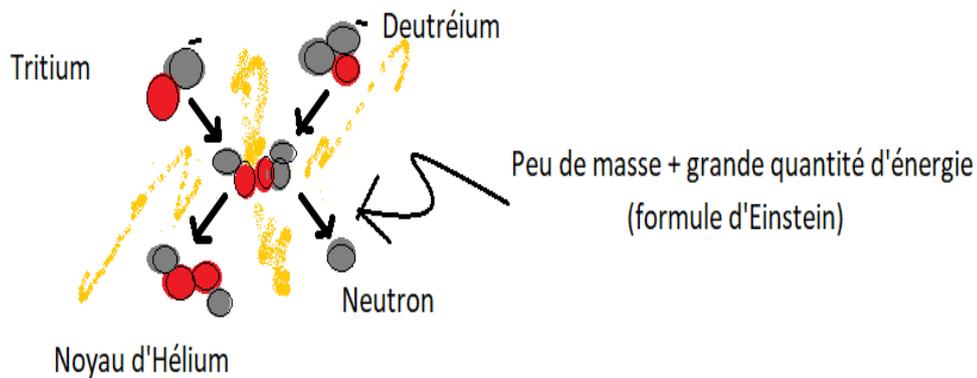
Sommaire

2.1	Introduction	19
2.2	Modèle de Vlasov-Poisson	20
2.3	Techniques de commandabilité et de stabilisation utilisées	21
2.4	Contributions	24
2.5	Conclusion	25

2.1 Introduction

Ce chapitre présente un état de l'art sur les techniques de stabilisation de l'équation de Vlasov-Poisson.

L'équation de Vlasov-Poisson décrit l'évolution de la fonction de distribution des particules chargées dans un plasma. De ce fait c'est une équation fondamentale dans le processus de fusion nucléaire dont la réalisation et le rendement dépendent fortement de la façon de contrôler cette équation [44, 123, 128].



Dans une réaction de fusion (à très haute température : plusieurs millions de °C) il est important de confiner les particules formant le plasma au centre du réacteur afin d'éviter tout contacts avec la paroi du réacteur et éviter ainsi la détérioration de celle-ci. Pour réaliser cet

objectif, les ingénieurs ont mis en place un dispositif d'électro-aimants très puissants afin de contrôler le confinement des particules chargées [82], c'est le principe de confinement magnétique utilisé dans le réacteur Tokamak.

C'est dans ce cadre, s'inscrit mes travaux de thèse qui portent sur le problème de confinement des particules dans le système de Vlasov-Poisson.

Le système de Vlasov-Poisson est le système de base pour décrire les effets collectifs dans un plasma. Il décrit l'évolution temporelle de la fonction de distribution d'un très grand nombre de particules chargées électriquement. C'est une densité de probabilité qui dépend de la position et de la vitesse. Ces particules se déplacent, dans le plasma, sous l'influence d'un champ électrique qui est donnée par l'équation de Poisson. Le problème est soumis à un paramètre de commande permettant de localiser et confiner les particules au centre de Tokamak. Ce paramètre est géré par un champ magnétique extérieur qui agit sur les vitesses des particules par une force magnétique dite force de Lorentz.

Dans ce contexte, le problème de commandabilité consiste à faire migrer les particules du paroi de l'enceinte vers le milieu du Tokamak moyennant une action en boucle ouverte. Une fois le problème de commandabilité est résolu, on peut de plus passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère. On parle, alors, d'un problème de contrôle optimal qui a pour but de minimiser l'énergie fournie pour garder l'ensemble des particules dans un endroit adéquat au centre de Tokamak. Ce problème qui a été résolu dans la littérature ([74], [75] et [76]) consiste à connaître d'abord les trajectoires joignant un ensemble initial près du bord à une cible localisée au centre de la boîte. Ensuite, en comparant leurs coûts, la solution du problème optimal correspond à moindre coût et par conséquent à moindre énergie fournie.

Compte tenu du fait que les particules se déplacent à une vitesse semblable à celle de la lumière ($3 \times 10^8 m/s$), il est difficile de tracer leurs trajectoires. Pour cette raison, on fait recours à des solutions numériques à travers la discrétisation. À ce propos, le problème de discrétisation a été résolu par Knopf en utilisant l'approche de Galerkin. Ses résultats numériques ont un très grand impact sur la conception du système de contrôle de fusion nucléaire et la compréhension des phénomènes de transport dans les plasmas.

En outre, de nombreux travaux ont résolu le système de Vlasov-Poisson par la méthode de Galerkin [28], des volumes finis [45] ou des différences finies [118]. Un développement par la méthode PIC (Particle In Cell) de l'équation de Vlasov est réalisé dans [46]. Dans sa thèse récemment soutenue [30], Amadou Cisse a traité la discrétisation du système de Vlasov-Poisson en s'appuyant sur la méthode de Galerkin discontinue. Cette méthode est notamment utilisée dans [54], [87] et [121].

Le problème de stabilisation consiste à mettre les particules dans les régions stables situées au centre du Tokamak. La résolution de ce problème en étudiant le déplacement de particules chargées est très importante pour l'obtention d'énergie de fusion.

2.2 Modèle de Vlasov-Poisson

Le système de Vlasov-Poisson est un modèle mathématique utilisé pour décrire le comportement d'un plasma. Il s'agit d'un couplage entre l'équation dite de Vlasov, qui décrit l'évolution de la fonction de distribution des particules f en fonction de sa variation par rapport à la position x et la vitesse v , et celle de Poisson qui décrit l'évolution du potentiel électrique.

En dimension 1D, le système de contrôle de Vlasov-Poisson est composé de deux équations :

1. L'équation de Vlasov

$$\partial_t f(t, X) = -v \partial_x f - (E(t, x) + v \cdot B(t, x)) \partial_v f, \text{ dans } [0, T] \times \Omega_x \times \Omega_v, \quad (2.1)$$

2. L'équation de Poisson

$$\partial_x E(t, x) = \int_{-V}^V f dv - 1, \quad (2.2)$$

avec des conditions limites périodiques dans le tore Ω_x de dimension 1, où $\Omega_x = [0, L]$, $\Omega_v = [-V, V]$, $X = (x, v)$, E désigne le champ électrique, B représente le champ magnétique, (f, E) est l'état et $u = v \cdot B(t, x)$ est la commande donné par la force de Lorentz pour agir sur les particules chargées.

En théorie du contrôle, il y a de très peu de travaux sur le problème de Vlasov-Poisson. Par conséquent, dans cette thèse, nous essayons d'aborder ce problème en répondant à quelques questions sur la stabilisation de son système discrétisé.

En dimension finie, il existe plusieurs méthodes numériques pour résoudre le système discrétisé de Vlasov-Poisson telles que la méthode des caractéristiques, la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies. En termes de stabilisation et de contrôle, plusieurs approches ont été proposées pour garantir la stabilité du système de Vlasov-Poisson. Parmi ces approches, on peut citer la méthode des fonctions de Lyapunov qui a pour objectif de garantir la stabilité globale ou asymptotique du système en utilisant des outils de la théorie du contrôle et de l'analyse fonctionnelle.

2.3 Techniques de commandabilité et de stabilisation utilisées

Depuis les travaux de Villani sur le sujet de l'amortissement Landau et la physique des particules sous divers aspects, nous citons par exemple, le célèbre article [124], le problème de Vlasov-Poisson en tant que système de contrôle est en expansion rapide en particulier avec les travaux de O. Glass et ses collaborateurs [49, 50].

Dans [49], l'auteur a étudié la commandabilité du système Vlasov-Poisson dans un domaine périodique de \mathbb{R}^n (un tore $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$). Le problème de commandabilité consiste à agir sur le système à travers la frontière d'un ouvert non vide du tore de manière à ce que la solution du système passe d'un état donné à un autre prescrit. La méthode sur laquelle repose l'auteur est la méthode du retour de Coron. Dans une première étape, O. Glass a montré que le linéarisé du système autour de la trajectoire triviale n'est pas commandable. Ensuite, il a construit une autre trajectoire cible autour de laquelle il a donné le linéarisé du système, puis il a montré, en se basant sur la réversibilité du système, que le système obtenu est commandable. Ensuite, par des arguments de changements d'échelle en temps et en vitesse, il a montré la commandabilité globale. Le même problème a été traité par O. Glass et Han-Kwan [50] et la condition de commandabilité est obtenue sous la présence d'un champ de force externe (à savoir un champ de force borné ou un champ magnétique), au moyen d'une commande interne local. Également, grâce à la méthode du retour, le résultat de commandabilité globale est obtenue.

Toutefois, rien n'a été fait dans le cadre de la stabilisation en temps fini ou temps fixe. Ceci fait, dans un premier lieu, l'objet de notre travail. Dans sa thèse [8], A. Back a étudié le problème de Vlasov-Maxwell, et elle a prouvé une invariance géométrique dans le système. En particulier,

l'auteur a proposé un nouveau point de vue pour l'étude de la simulation de plasmas à l'aide du modèle cinétique qui couple les équations de Vlasov pour la distribution des particules et les équations de Maxwell pour la contribution des champs électromagnétiques.

Les techniques utilisées pour la stabilité en dimension finie du système de Vlasov-Poisson reposent sur des concepts mathématiques avancés tels que l'analyse fonctionnelle, la théorie de la stabilité, la théorie du contrôle et la théorie des équations aux dérivées partielles. Voici quelques détails mathématiques sur les techniques les plus couramment utilisées :

1. Méthodes de Galerkin : Les méthodes de Galerkin consistent à approximer la solution du système de Vlasov-Poisson en utilisant une base de fonctions, comme des fonctions polynomiales ou la transformée de Fourier discrète. En général, on commence par décomposer la fonction de distribution $f(t, x, v)$ en une somme pondérée de fonctions de base :

$$f(t, x, v) = \sum_i c_i(t, x) \phi_i(v). \quad (2.3)$$

Ensuite, les coefficients $c_i(t, x)$ sont déterminés en résolvant un système d'équations algébriques. La stabilité des schémas numériques (i.e. la convergence de la solution approchée vers la solution exacte lorsque l'étape de discrétisation converge vers 0) dépend du choix de la base de fonctions, du pas de discrétisation et de la norme utilisée pour mesurer l'erreur.

2. Méthodes de Lyapunov : Les méthodes de Lyapunov sont basées sur la recherche d'une fonction de Lyapunov, qui est une fonction définie positive sur l'espace d'état du système de Vlasov-Poisson. En outre, une fonction de Lyapunov satisfait les conditions suivantes :
 - (a) Elle est différentiable.
 - (b) Elle est définie positive sur tout l'espace des états.
 - (c) Elle décroît le long des trajectoires du système.

La recherche de cette fonction de Lyapunov peut être effectuée de manière analytique ou numérique. En général, on cherche une fonction de Lyapunov quadratique, c'est-à-dire une fonction de la forme :

$$V(f) = \int \int f^2(t, x, v) dx dv. \quad (2.4)$$

3. Méthodes de commande stabilisante (ou retour d'état stabilisant) : Les méthodes de contrôle consistent à concevoir une loi de commande qui permet de stabiliser asymptotiquement le système de Vlasov-Poisson (c.à.d ramener en temps grand l'ensemble des particules du système vers le centre de Tokamak). C'est la stabilisation. Le retour stabilisant dans ce cas est composé du champ magnétique externe et de la force de Lorentz. De façon naturelle, le système de Vlasov-Poisson est soumis souvent à des perturbations (provenant des déchets nucléaires) maîtrisées (supposées bornées). L'objet du contrôle est de compenser ces perturbations et de garantir la stabilité asymptotique du système. On parle, alors, de retour d'état ou commande robuste.

Les techniques de contrôle utilisées pour la stabilisation du système discrétisé de Vlasov-Poisson sont basées sur la théorie des systèmes bilinéaires.

Depuis qu'elle est découverte par Polyakov [105], la notion de stabilité à temps fixe a reçu une attention considérable de la communauté du contrôle, voir les travaux de [21, 51, 105, 107, 133] ; parce qu'elle est utile et pratique pour savoir quand est-ce qu'un système de contrôle peut atteindre son point d'équilibre dans un temps rapide avec une estimation plus élevée de son temps de stabilisation. Dans [105], l'auteur a formulé l'idée de stabilité à temps fixe en donnant une condition suffisante de Lyapunov caractérisant cette propriété. Basé sur des contrôleurs de mode glissante, l'auteur a proposé des exemples de retour de stabilisation en temps fixe pour des exemples classiques de systèmes de contrôle linéaire. Dans [83], les auteurs ont fourni les conditions nécessaires et suffisantes garantissant qu'un système dynamique autonome est stable en temps fixe. Clairement comme la stabilité en temps fini [16, Théorème 4.3], la condition nécessaire de Lyapunov prend en considération la continuité du temps de d'établissement. Dans [133, Chap. 2], les auteurs ont fait une synthèse bibliographique sur le temps fixe, les résultats et les outils sont présentés et utilisés pour le développement de la théorie du contrôle pour les systèmes multi-agents avec différentes dynamiques d'agents. Dans [92], les auteurs ont proposé des résultats traitant la robustesse de la stabilité à temps fixe. Quelques nouveaux résultats pour les systèmes scalaires globaux robustes en temps fixe, où les coefficients exposants variables dépendent de l'état, sont donnés.

Dans [21, 51], les auteurs ont développé de nouveaux résultats sur le problème de stabilisation des véhicules spatiaux flexibles en utilisant des retours de stabilisation en temps fixe. La construction de ces retours est basée sur un contrôleur en mode glissante. En outre, un contrôle adaptatif à temps fixe est élaboré.

Dans [122], les auteurs ont proposé un retour de stabilisation en temps fixe suivie par l'observateur et le retour de sortie pour le double intégrateur. La construction de ces retours est basée sur la technique d'homogénéité bi-limite introduite par Andrieu et ses collaborateurs dans [2]. Bien sûr, cette idée de technique a été utilisée par d'autres auteurs pour étudier la stabilité en temps-fini / temps-fixe ; en particulier dans le papier [110], les auteurs ont présenté un état de l'art de divers concepts de stabilité et de convergence des contrôleurs modernes en mode glissement.

Parallèlement aux systèmes de dimension finie, les systèmes d'évolution dans un espace de Hilbert ont gagné une attention considérable [106]. L'auteur a proposé, dans cet article, des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité en temps fini / temps fixe des système d'évolution dans les espaces de Banach. Ces conditions sont basées sur la fonction de Lyapunov. Le deuxième point évoqué dans cette thèse est la stabilisation en temps petit par des retours instationnaires. Cette notion de stabilité est obtenues par des retours d'état techniques, nous citons par exemple : [16, 17, 31, 33, 39, 40, 63, 66, 93, 94, 101, 107, 109, 120].

1. La fonction Lyapunov : il s'agit de construire une fonction de Lyapunov de contrôle appropriée V de sorte que, le long du système, V obéit à l'inégalité différentielle $\dot{V} \leq -cV^\theta$ avec $\theta \in]0, 1[$. Fondamentalement, cette approche a été développée par Bhat et Bernstein in [16] et largement utilisée dans plusieurs contributions de la stabilité en temps fini ou en temps petit ; voir encore [93] pour les systèmes discontinus.
2. La méthode de l'homogénéité : sommairement, cette contribution pour le temps fini est due à Bhat et Bernstein [17], où les auteurs ont relaxé la condition de Lyapunov. Ils ont prouvé qu'un système homogène est stable de temps fini si et seulement s'il est asymptotiquement stable et admet un degré d'homogénéité négatif (voir encore [94]) pour les champs vectoriels discontinus. Une extension de cette théorie pour des systèmes de dimension infinie a été donnée par Polyakov et ses collaborateurs dans [107, 109].

La stabilité du temps fini est obtenue pour les systèmes homogènes dans les espaces de Banach où la notion de dilatation est étendue. Les auteurs prouvent que la stabilité asymptotique combinée avec l’homogénéité de degré négatif de l’ensemble du système conduit à la stabilité en temps fini. Ce résultat est utilisé pour la construction de la loi de stabilisation en temps fini pour les systèmes de contrôle linéaires et bilinéaires [109, 120].

3. La technique du backstepping est considérée dans [40] pour résoudre la stabilité en temps fini du double intégrateur et de l’intégrateur de Brockett. Les auteurs ont donné une extension des techniques de backstepping standard, pour la stabilisation par des lois de rétroaction régulière, à la stabilisation en temps fini par des lois Höldériennes, et la construction est basée sur la méthode de desingularization [111]. Cette approche est utilisée par plusieurs auteurs [56, 59].

Bien sûr, pour les systèmes de contrôle, le problème de stabilisation en temps fini ou temps petit nécessite la construction de retours d’état appropriés rendant le système en boucle fermée stable en temps fini / temps petit. Cependant, pour les systèmes infinis-dimensionnels, la technique de backstepping a été étendue par Krstic [77] pour plusieurs EDP soumis à des commandes de frontière, et devient une méthode utile pour la stabilisation rapide [3, 34, 43]. Pour les systèmes de contrôle hyperboliques, les auteurs ont donné le temps optimal pour la stabilité en temps fini en termes de somme “itérée” d’intégrales d’inverses de valeurs propres strictement positives d’opérateurs hyperboliques stricts.

2.4 Contributions

Avant de présenter les résultats de stabilisation du système discrétisé de Vlasov-Poisson, nous avons focalisé nos efforts sur des systèmes dynamiques abstraits où on a développé des résultats, de stabilité en temps fixe et en temps petit, qui seront utiles par la suite dans des exemples contrôlés de Vlasov-Poisson.

Notre principale contribution [68] est de développer certains résultats flexibles ou relaxés pour le problème de la stabilité et la stabilisabilité en temps fixe des systèmes dynamiques ou des systèmes de contrôle autonomes. Nos efforts se sont principalement concentrés sur de nouveaux critères demandant si les systèmes dynamiques peuvent être stables à temps fixe ?

Nous avons prouvé que la stabilité à temps fixe peut être obtenue par la fusion de la stabilité polynomiale [70] et de la stabilité en temps fini à condition que la fonction de Lyapunov approprié soit la même pour les deux.

L’idée principale [68] est que la stabilité en temps fixe est obtenue à travers deux transitions du système dynamique ; une phase lente correspond à la stabilité polynomiale qui permet aux solutions d’accéder à un petit voisinage de l’origine en temps fixe, tandis que la deuxième phase est rapide et permet aux solutions de converger vers zéro en temps fixe. Nous avons illustré nos résultats par des applications de stabilité en utilisant des retours d’état menant à la stabilité à temps fixe du système en boucle fermée. Ces applications concernent la stabilisation non linéaire des systèmes de contrôle bilinéaires dans un espace de Hilbert et en particulier des cas du système discrétisé de Vlasov-Poisson.

Également, nous avons étudié la dissipation des systèmes en temps petit et cela à travers la dissipation de la fonction d’énergie représentée par la fonction de Lyapunov V . En effet, on a montré que si on a l’inégalité $\dot{V} \leq -c(t)V^\theta$ avec $\theta \in]0, 1[$, et $c(\cdot)$ est une fonction

mesurable positive. La stabilité en temps fini est obtenue dans ce cas sous une hypothèse supplémentaire sur $c(\cdot)$ qui est une fonction mesurable n'appartenant pas à l'espace Lebesgue (i.e. $c \notin L^1[0, +\infty[$). Dans ce travail, les systèmes que nous avons abordé, en temps petit, sont des systèmes non autonomes définis sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$. Nous avons relaxé la condition ci-dessus pour certaines EDP simples lorsque la commande frontière est soumis à une excitation persistante [88]. Ensuite, un retour d'état aux frontières variant dans le temps stabilisant en temps petit le système en boucle fermée est construit.

2.5 Conclusion

Ce chapitre présente un bref aperçu de l'état de l'art de cette thèse. Nous avons évoqué, dans ce contexte, les notions de stabilité rapide (en temps fixe et en temps petit) qui seront utilisées dans l'analyse qualitative du système discrétisé de Vlasov-Poisson. En effet, pour ce système, on construit les retours d'état adéquats qui stabilisent en temps fixe puis en temps petit le système discrétisé. En faisant la discrétisation, nous avons remarqué que le système discrétisé ainsi obtenu prend la forme bilinéaire en dimension finie. C'est pourquoi, il est souhaitable de traiter, dans les prochains chapitre, les systèmes bilinéaires génériques.

Chapitre 3

Stabilisation rapide du système de Vlasov-Poisson contrôlé en dimension finie

Sommaire

3.1	Commandabilité	28
3.1.1	Formulations variationnelles	28
3.1.2	Discrétisation et convergence	32
3.1.3	Critère de commandabilité	37
3.2	Stabilisation rapide en dimension finie	44
3.2.1	Stabilisation en temps fixe	44
3.2.2	Stabilisation en temps petit des systèmes non autonomes	49
3.3	Conclusion	55

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la stabilisation du système de Vlasov-Poisson de dimension finie.

Des travaux existent sur la résolution numérique des équations de Vlasov-Maxwell. Citons par exemple [8] où l'idée sous-jacente est de faire une discrétisation des formes différentielles en utilisant les B-splines comme fonctions d'interpolation. Également, dans sa thèse, Nicolas [13] a réalisé une étude numérique de l'équation de Vlasov-Poisson sur des maillages non structurés de l'espace des phases.

De point de vue numérique, le problème d'extraction de particules d'un plasma, à frontière libre, est transformé en un problème d'optimisation de formes⁶ avec l'équation de Vlasov-Poisson. Dans ce contexte, Bourdiec et al. [79] ont utilisé des méthodes spectrales comme celles basées sur les transformées de Fourier avec des conditions aux limites périodiques. Cottet et al. [35] ont traité le cas de Vlasov-Poisson en une dimension d'espace et de vitesse avec des conditions aux limites périodiques et lorsque les particules sont initialement réparties uniformément dans l'espace des phases. Également, les auteurs dans [14] et [113] ont utilisé des méthodes semi-lagrangiennes qui consistent à approcher une fonction par un nombre fini de particules définies par leurs positions et leurs poids. Cette idée est couramment utilisée dans la communauté de simulation de l'équation Vlasov-Poisson. D'autre part, les auteurs

6. Le problème d'optimisation de forme consiste à minimiser une fonction coût selon des considérations géométriques du domaine supposé borné

dans [36] ont développé des méthodes eulériennes basées sur des schémas de volumes finis, qui ont été appliquées, dans [55], pour des maillages non orthogonaux en dimension deux. En outre, dans [103], les auteurs ont présenté une méthode utilisée pour la discrétisation de l'équation de Vlasov par rapport à la vitesse. Cela nous a donné une motivation pour donner une discrétisation, par la méthode des éléments finis, en $1D$ et $2D$, par rapport à l'espace x et la vitesse v , de l'équation contrôlée de Vlasov-Poisson. La commande, dans cette situation, se manifeste par la présence d'un champ magnétique externe B . Ainsi, on obtient un système bilinéaire contrôlé de dimension finie. Les matrices de stockage du système linéaire contiennent des informations "quantiques" sur sa commandabilité. Ainsi, nous disposons d'un critère qui permet le déplacement des particules dans tout l'espace d'état (c'est le problème de commandabilité) sans tenir compte du temps T de commandabilité. Pour contourner le problème de la stabilisation "aveugle" et éviter la possibilité que les particules peuvent franchir les bords du domaine, nous construisons des retours d'état (\equiv des forces magnétiques) de bonnes régularités (au moins continus) permettant d'annuler les déplacements de ces entités ioniques, en temps arbitrairement petit, tout en restant loin du bord (c'est le problème de stabilisation en temps fixe ou bien en temps petit). Ensuite, dans le but de retrouver tous les états de notre système, en disposant d'un minimum d'informations sur ses états, on met des capteurs aux bords $x = 0$ et $x = L$ appelés encore observateurs.

3.1 Commandabilité

Tout d'abord, nous présentons une formulation variationnelle du problème de contrôle de Vlasov-Poisson, et nous prouvons que notre problème est bien posé dans un espace de Hilbert adéquat. Dans la deuxième étape, nous donnons le schéma de discrétisation du problème et les conditions de commandabilité du système discrétisé sont déduites. Enfin, une étude numérique sera présentée.

3.1.1 Formulations variationnelles

3.1.1.1 Description du système

Dénotons par $\Omega_x = [0, L]$, $\Omega_v = [-V, V]$ et $\Omega := \Omega_x \times \Omega_v$, $X = (x, v)$. L'ensemble Ω est un domaine borné de frontière $\partial\Omega = (\partial\Omega_x \times \Omega_v) \cup (\Omega_x \times \partial\Omega_v)$.

On désigne par $f(t, x, v) \geq 0$ la fonction de distribution des électrons dans l'espace des phases (les constantes physiques telles que la masse, la charge et la permittivité sont normalisées à un).

Le système de Vlasov-Poisson est donné par le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\partial_t f = -v \partial_x f - (E(t, x) + v \wedge B(t, x)) \partial_v f = 0, \quad (3.1)$$

$$\partial_x E(t, x) = \rho(t, x), \quad (3.2)$$

où $E(., .) : [0, T] \times \Omega_x \longrightarrow \mathbb{R}$ est le champ électrique, $B(., .) : [0, T] \times \Omega_x \longrightarrow \mathbb{R}$ est le champ magnétique et $\rho(t, x)$ est la densité de charge définie sur Ω_v par

$$\rho(t, x) = \int_{-V}^V f dv - 1.$$

Dans l'espace (x, v) , on considère un plasma périodique de période L . Alors la distribution f et le champ E satisfont les conditions aux limites périodiques à savoir

$$f(t, 0, v) = f(t, L, v), \quad \forall v \in [-V, V], \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

$$E(t, 0) = E(t, L), \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

D'après (3.2), on a $\partial_x E(t, x) = \int_{-V}^V f dv - 1$ alors

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-V}^V f(t, x, v) dv dx = 1.$$

Ce qui donne

$$\int_0^L \rho(t, x) dx = 0.$$

Pour avoir un problème bien posé, on ajoute la condition suivante

$$\int_0^L E(t, x) dx = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

qui traduit que le champ électrique est à moyenne nulle. La condition initiale est donnée par

$$f(0, x, v) = f_0(x, v). \quad (3.5)$$

Grâce aux travaux de thèse de Nicolas Besse [13], le champ électrique E satisfait l'équation à noyau intégrale suivante

$$E(t, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-V}^V f(t, y, v) dv - 1 \right) dy, \quad (3.6)$$

où

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{L} - 1 & \text{si } 0 \leq x < y, \\ \frac{y}{L} & \text{si } y < x \leq L. \end{cases}$$

Également, on intègre l'équation de Vlasov-Poisson par rapport à v . On obtient l'équation dite de la conservation de la charge

$$\partial_t \rho + \partial_x j = 0,$$

où $j = j(t, x)$ est la densité de courant définie par

$$j(t, x) = \int_{-V}^V v f(t, x, v) dv.$$

Ainsi, on a

$$\partial_t E(t, x) = - \int_0^L K(x, y) \partial_y j(t, y) dy,$$

et donc

$$\partial_t E(t, x) = \frac{1}{L} \int_0^L j(t, x) dx - j(t, x). \quad (3.7)$$

Les équations (3.1), (3.2) et (3.5) forment le système de Vlasov-Maxwell.

Pour l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du système formé par (3.1, 3.2, 3.5), nous renvoyons le lecteur aux références [18] et [112].

On considère le système différentiel du premier ordre, [13], défini par :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{X}(t; s, x, v) = \mathbf{V}(t; s, x, v), \\ \partial_t \mathbf{V}(t; s, x, v) = E(t, \mathbf{X}(t; s, x, v)), \end{cases} \quad (3.8)$$

tel que les courbes caractéristiques $t \mapsto (\mathbf{X}(t; s, x, v), \mathbf{V}(t; s, x, v))$ sont des solutions de (3.8) avec la condition initiale

$$\mathbf{X}(s; s, x, v) = x, \quad \mathbf{V}(s; s, x, v) = v.$$

Alors la solution du problème (3.1)-(3.5) est donnée par

$$f((t, x, v) = f(\mathbf{X}(0; t, x, v), \mathbf{V}(0; t, x, v)), \quad x, v \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (3.9)$$

Toutefois, pour l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème continu, on a le résultat suivant.

Théorème 3.1. [13] *On suppose $f_0 \in C_{c,per_x}^1(\Omega)$ ⁷, positive, périodique par rapport à la variable x de période L , à support compact par rapport à la variable v et $Q(0) \leq R$ avec $R > 0$ et $Q(t)$ est défini comme suit*

$$Q(t) = 1 + \sup\{|v| : \exists x \in [0, L], \tau \in [0, t] / f(\tau, x, v) \neq 0\},$$

et

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-V}^V f_0(x, v) dv dx = 1.$$

Alors le système de Vlasov-Poisson périodique a une unique solution classique (f, E) périodique en x , de période L , pour tout temps $t \in [0, T]$, tel que

$$f \in C_b^1(0, T; C_{c,per_x}^1(\Omega)),$$

$$E \in C_b^1(0, T; C_{b,per_x}^1(\mathbb{R})),$$

et

$$Q(T) \leq CT.$$

En outre, si $f_0 \in C_{c,per_x}^m(\Omega)$, alors pour tout temps fini T , $(f, E) \in C_b^m(0, T; C_{c,per_x}^m(\Omega)) \times C_b^m(0, T; C_{b,per_x}^m(\mathbb{R}))$.

La preuve de ce théorème correspond à celle faite dans [117]. L'idée consiste à utiliser le système caractéristique (3.8). Pour majorer $Q(t)$, il suffit d'approcher l'intégrale $\int_0^t E(t, \mathbf{X}(t)) ds$.

7. $C_{c,per_x}^1(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues, différentiables, à support compact et périodique par rapport à la variable $x \in \Omega$.

3.1.1.2 Formulations faibles

3.1.1.2.1 Cas de l'équation de Poisson

Soit

$$W = \{s \in H^1(\Omega_x) \text{ tel que } s(0) = s(L)\}.$$

Pour $w \in W$, la norme de w est notée par $\|w\|_{H^1(\Omega_x)} = \|w\|_{L^2(\Omega_x)} + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_x)}$. Équipé du produit intérieur standard de $H^1(\Omega_x)$, W est un sous espace fermé de $H^1(\Omega_x)$, donc il s'agit d'un sous-espace vectoriel de Hilbert de $H^1(\Omega_x)$.

Multipliant l'équation (3.1) par une fonction test w et intégrant sur Ω_x , on obtient

$$\int_{\Omega_x} \partial_x E(t, x) w(x) dx = \int_{\Omega_x} \int_{-V}^V f(t, X) w(x) dv dx - \int_{\Omega_x} w(x) dx.$$

Par intégration par parties, on aura

$$- \int_{\Omega_x} E(t, x) \partial_x w(x) dx + \int_{\partial\Omega_x} E(t, x) w(t, x) dx = \int_{\Omega_x} \int_{-V}^V f(t, X) w(x) dv dx - \int_{\Omega_x} w(x) dx.$$

Comme $\partial\Omega_x = \{0, 1\}$ et $\lambda(\{0, 1\}) = 0$ (λ : mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}), on obtient

$$- \int_{\Omega_x} E(t, x) \partial_x w(x) dx = \int_{\Omega_x} \int_{-V}^V f(t, X) w(x) dv dx - \int_{\Omega_x} w(x) dx. \quad (3.10)$$

3.1.1.2.2 Cas de l'équation de Vlasov

Soit $g \in H = \{g \in H^1(\Omega) \text{ s. t } g(0, v) = g(L, v)\}$. La norme d'une telle $g \in H^1(\Omega)$ est notée par $\|g\|_{H^1(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$.

Muni du produit intérieur standard de $H^1(\Omega)$, H est une partie de $H^1(\Omega)$ et donc il s'agit d'un sous-espace vectoriel de Hilbert de $H^1(\Omega)$.

Comme précédemment, multipliant l'équation (3.2) par une fonction test g et l'intégrant sur Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} \partial_t f(t, X) g(X) dx dv = - \int_{\Omega} v \partial_x f(t, X) g(X) dx dv - \int_{\Omega} [E(t, x) + v \cdot B(t, x)] \partial_v f(t, X) g(X) dx dv.$$

Par une intégration par parties, par rapport à x et v , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t f(t, X) g(X) dx dv &= \int_{\Omega} v f(t, X) \partial_x g(X) dx dv - \int_{\partial\Omega_x \times \Omega_v} v f(t, X) g(X) dx dv \\ &+ \int_{\Omega} [E(t, x) + v \cdot B(t, x)] f(t, X) \partial_v g(X) dx dv \\ &- \int_{\Omega_x \times \partial\Omega_v} [E(t, x) + v \cdot B(t, x)] f(t, X) g(X) dx dv. \end{aligned}$$

Or $\int_{\partial\Omega_x \times \Omega_v} v f(t, X) g(X) dx dv = 0$ (resp. $\int_{\Omega_x \times \partial\Omega_v} [E(t, x) + v \cdot B(t, x)] f(t, X) g(X) dx dv = 0$), car $\lambda(\partial\Omega_x) = 0$ (resp. $\lambda(\partial\Omega_v) = 0$) où λ est la mesure de Lebesgue.

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t f(t, X) g(X) dx dv &= \int_{\Omega} [E(t, x) + v \cdot B(t, x)] f(t, X) \partial_v g(X) dx dv \\ &+ \int_{\Omega} v f(t, X) \partial_x g(X) dx dv. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.2 Discrétisation et convergence

Dans cette section, nous présentons une approche de discrétisation 1D et 2D du problème de Vlasov-Poisson en présence d'un champ magnétique externe.

3.1.2.1 Discrétisation 1D

Divers travaux sont réalisés sur la discrétisation du problème de Vlasov-Poisson modélisant des problèmes ioniques sous l'effet d'un champ électrique [5]. Notre travail s'intéresse à la discrétisation de l'espace et de la vitesse en présence d'un champ magnétique externe. Soit N_x (resp. N_v) le nombre d'éléments du maillage suivant la direction de x (resp. suivant la direction de v). Soit $\Omega_x^h = \cup_i K_i, i = 1, \dots, N_x - 1$ (resp. $\Omega_v^h = \cup_j K_j, j = 1, \dots, N_v - 1$) l'espace approché de Ω_x (resp. de Ω_v). Ensuite, le nombre total d'éléments du maillage est égal à $N_G = (N_x - 1) \times (N_v - 1)$, le nombre total de nœuds du maillage est égal à $N = N_x \times N_v$ et l'espace approximatif de Ω , qui est noté Ω_h est tel que

$$\Omega^h = \Omega_x^h \times \Omega_v^h = \cup_{i,j} K_i \times K_j, i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_v - 1.$$

Les espaces Ω_x^h , Ω_v^h et Ω^h sont générés respectivement par les fonctions de forme ϕ_i , $i = 1, \dots, N_x$, ψ_j , $j = 1, \dots, N_v$ et $\Phi_{ij} = x_i^h \phi_i + v_j^h \psi_j$ avec

$$\phi_i(x_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \\ 0 & \text{si } i \neq l \end{cases}, \psi_j(v_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

La famille $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_x}\}$ est une base de Ω_x et $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$ est une base de Ω_v (et donc $(\Phi_{ij})_{i,j}$ est une base de Ω). On peut, ainsi, écrire :

$$f(t, X) = \sum_{k=1}^N f_k^h(t) \Phi_k(X) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_v} f_i^h(t) \phi_i(x) \times f_j^h(t) \psi_j(v), \quad (3.12)$$

$$E(t, x) = \sum_{i=1}^{N_x} E_i^h(t) \phi_i(x), \quad (3.13)$$

et

$$B(t, x) = \sum_{i=1}^{N_x} B_i^h(t) \phi_i(x). \quad (3.14)$$

3.1.2.1.1 Formulation discrète de Poisson

Pour $1 \leq j \leq N_x$, soit $w(x) = \phi_l(x)$. La formulation (3.10) devient

$$- \int_{\Omega_x} \sum_{i=1}^{N_x} E_i^h(t) \phi_i(x) \partial_x \phi_j(x) dx = \int_{\Omega_x} \int_{-V}^V \sum_{k=1}^N f_k^h(t) \Phi_k(X) \phi_j(x) dv dx - \int_{\Omega_x} \phi_j(x), \quad (3.15)$$

ou bien

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_x} \sum_{i=1}^{N_x} E_i^h(t) \phi_i(x) \partial_x \phi_j(x) dx &= \int_{\Omega_x} \int_{-V}^V \sum_{p=1}^{N_x} \sum_{q=1}^{N_v} f_p^h(t) \phi_p(x) f_q^h(t) \psi_q(v) \phi_j(x) dv dx \\ &\quad - \int_{\Omega_x} \phi_j(x), \end{aligned} \quad (3.16)$$

or $\phi_p(x) \times \phi_j(x) = 0, \forall p \neq j$. Ainsi, on a

$$-\sum_{i=1}^{N_x} E_i^h(t) \int_{\Omega_x} \phi_i(x) \partial_x \phi_j(x) dx = \sum_{p=1}^{N_x} f_p^h(t) \int_{\Omega_x} \left(\sum_{q=1}^{N_v} f_q^h(t) \int_{-V}^V \psi_q(v) dv \right) \phi_p^2(x) dx - \int_{\Omega_x} \phi_j(x). \quad (3.17)$$

3.1.2.1.2 Formulation discrète de Vlasov

Pour $1 \leq l \leq N$, soit $g(X) = \Phi_l(X)$. La formulation (3.11) devient

$$\int_{\Omega} \partial_t \sum_{k=1}^N f_k^h(t) \Phi_k(X) \Phi_l(X) dx dv = \int_{\Omega} v \sum_{k=1}^N f_k^h(t) \Phi_k(X) \partial_x \Phi_l(X) dx dv + \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{N_x} E_i^h(t) \phi_i(x) + v \cdot \sum_{i=1}^{N_x} B_i^h(t) \phi_i(x) \right] \sum_{k=1}^N f_k^h(t) \Phi_k(X) \partial_v \Phi_l(X) dx dv. \quad (3.18)$$

ou bien

$$\sum_{k=1}^N \dot{f}_k^h(t) \int_{\Omega} \Phi_k(X) \Phi_l(X) = \sum_{k=1}^N f_k^h(t) \int_{\Omega} v \Phi_k(X) \partial_x \Phi_l(X), + \sum_{k=1}^N f_k^h(t) \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{N_x} E_i^h(t) \phi_i(x) + \sum_{i=1}^{N_x} B_i^h(t) v \phi_i(x) \right] \Phi_k(X) \partial_v \Phi_l(X) \quad (3.19)$$

qui peut être donnée par le système matriciel global suivant

$$\mathbb{M} \dot{F} = \mathbb{K}^x F + \overbrace{(G_1 \cdot \mathbb{E} + G_2 \cdot \mathbb{B})}^U \mathbb{K}^v F, \quad (3.20)$$

où $F = (f_1^h, f_2^h, \dots, f_N^h)^{tr}$, $\mathbb{E} = (E_1^h, E_2^h, \dots, E_{N_x}^h)^{tr}$ et $\mathbb{B} = (B_1^h, B_2^h, \dots, B_{N_x}^h)^{tr}$ sont trois vecteurs de tailles respectivement N , N_x et N_v . Les matrices carrées \mathbb{M} , \mathbb{K}^x et \mathbb{K}^v sont de taille N , et U^1 et U^2 sont deux vecteurs de taille N_x tels que

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \Phi_i(X) \Phi_j(X) dx dv, \\ \mathbb{K}_{ij}^x &= \int_{\Omega} v \Phi_i(X) \partial_x \Phi_j(X) dx dv, \\ \mathbb{K}_{ij}^v &= \int_{\Omega} \Phi_i(X) \partial_v \Phi_j(X) dx dv, \\ G_{1i} &= \int_{\Omega_x} \phi_i dx, \quad G_{2i} = \int_{\Omega_x} v \phi_i dx. \end{aligned}$$

Le système (3.20) est équivalent au problème

$$\dot{F} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K}^x F + U \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K}^v F = \mathbf{A} F + U \mathbf{B} F, \quad (3.21)$$

où $\mathbf{A} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K}^x$, $\mathbf{B} = \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K}^v$. Il s'agit bien d'un système bilinéaire de dimension finie.

3.1.2.1.3 Calcul élémentaire

Passons de n'importe quel élément K_{ij} à l'élément de référence $\hat{K} = [0, 1] \times [-1, 1]$ en utilisant une transformation affine T^K de \hat{K} dans K_{ij} telle que

$$T^K(\hat{x}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x = \sum_{k=1}^2 x_k \hat{\phi}_k(\hat{x}) \\ v = \sum_{k=1}^2 x_k \hat{\psi}_k(\hat{v}) \end{pmatrix},$$

avec (x_k, v_k) , $k = 1, 2$ sont les coordonnées des nœuds de l'élément K_{ij} .

De plus, par le théorème de changement de variable, on a

$$\int_{K_{ij}} f(t, X) dx dv = \int_{\hat{K}} f(t, X) |det J_0| d\hat{x} d\hat{v},$$

où $det(J_0)$ est le déterminant de la matrice jacobienne suivante

$$J_0(\hat{x}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{v}) & \frac{\partial v}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{v}) \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{v}}(\hat{x}, \hat{v}) & \frac{\partial v}{\partial \hat{v}}(\hat{x}, \hat{v}) \end{pmatrix}.$$

Désignons par $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\Phi}_3$ et $\hat{\Phi}_4$ les quatre fonctions de forme dans l'élément de référence \hat{K} . Soit

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_1 = \hat{\phi}_1 \times \hat{\psi}_1 = \frac{1}{2}(1 - \hat{x})(1 - \hat{v}), \\ \hat{\Phi}_2 = \hat{\phi}_2 \times \hat{\psi}_1 = \frac{1}{2}\hat{x}(1 - \hat{v}), \\ \hat{\Phi}_3 = \hat{\phi}_2 \times \hat{\psi}_2 = \frac{1}{2}\hat{x}(1 + \hat{v}), \\ \hat{\Phi}_4 = \hat{\phi}_1 \times \hat{\psi}_2 = \frac{1}{2}(1 - \hat{x})(1 + \hat{v}). \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour rendre les résultats du calcul plus exacts, nous pouvons utiliser des éléments de références en augmentant le nombre de nœuds de calcul. Soit, par exemple, un rectangle $[0, 1] \times [-1, 1]$ avec huit nœuds de calcul avec des fonctions de formes données par

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_1 = \hat{\phi}_1 \times \hat{\psi}_1 = -(\hat{x} - 1)(\hat{x} - \frac{1}{2})(1 - \hat{v})\hat{v}, \\ \hat{\Phi}_2 = \hat{\phi}_2 \times \hat{\psi}_1 = -2\hat{x}(\hat{x} - \frac{1}{2})(1 - \hat{v})\hat{v}, \\ \hat{\Phi}_3 = \hat{\phi}_2 \times \hat{\psi}_2 = 2\hat{x}(\hat{x} - \frac{1}{2})(1 + \hat{v})\hat{v}, \\ \hat{\Phi}_4 = \hat{\phi}_1 \times \hat{\psi}_2 = (\hat{x} - 1)(\hat{x} - \frac{1}{2})(1 + \hat{v})\hat{v}, \\ \hat{\Phi}_5 = \hat{\phi}_3 \times \hat{\psi}_1 = -2\hat{x}(1 - \hat{x})(1 - \hat{v})\hat{v}, \\ \hat{\Phi}_6 = \hat{\phi}_2 \times \hat{\psi}_3 = 2\hat{x}(\hat{x} - \frac{1}{2})(1 - \hat{v}^2), \\ \hat{\Phi}_7 = \hat{\phi}_3 \times \hat{\psi}_2 = 2\hat{x}(1 - \hat{x})(1 + \hat{v})\hat{v}, \\ \hat{\Phi}_8 = \hat{\phi}_1 \times \hat{\psi}_3 = 2(\hat{x} - 1)(\hat{x} - \frac{1}{2})(1 - \hat{v}^2). \end{cases} \quad (3.23)$$

ou le même élément en ajoutant un neuvième nœud de calcul dont la fonction de forme $\hat{\Phi}_9$ est donnée par

$$\hat{\Phi}_9 = \hat{\phi}_3 \times \hat{\psi}_3 = 4(1 - \hat{x})\hat{x}(1 - \hat{v}^2). \quad (3.24)$$

Notons qu'après ce calcul élémentaire, nous faisons l'assemblage de toutes les matrices totales. Revenons aux systèmes (3.17) et (3.19). On va les résoudre dans n'importe quel élément $K_{ij} = K_i \times K_j$ (carré à quatre nœuds).

On note par $E_e(t) = (E_e^1(t), E_e^2(t))^T$ (resp. $B_e(t) = (B_e^1(t), B_e^2(t))^T$) la valeur du vecteur E (resp. de B) in K_i , $F_e(t) = (f_e^1(t), f_e^2(t), f_e^3(t), f_e^4(t))^T$ la valeur du vecteur f dans K_{ij} , $F_e^x(t) =$

$(f_e^1(t), f_e^2(t))^T$ la valeur du vecteur de f dans K_i .

Dans un élément K_i , nous pouvons écrire l'expression (3.17) comme suit

$$-\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 E_i^h(t) \phi_i(x) \partial_x \phi_j(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_i^h(t) \left(\sum_{j=1}^{N_v} f_j^h(t) \int_{-V}^V \psi_j(v) dv \right) \phi_i^2(x) - \sum_{i=1}^2 \phi_i(x). \quad (3.25)$$

Il s'agit d'un système matriciel élémentaire de la forme suivante :

$$E_e(t) = -M_e^{-1} [(W_e)^T F_e^x(t) - S_e], \quad (3.26)$$

avec

$$M_e = \begin{pmatrix} \phi_1(\partial_x \phi_1) & \phi_1(\partial_x \phi_2) \\ \phi_2(\partial_x \phi_1) & \phi_2(\partial_x \phi_2) \end{pmatrix},$$

$$S_e = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

De même, si nous écrivons l'expression (3.19) dans un élément K_{ij} , nous obtenons

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 f_k^h(t) \left[\sum_{i=1}^2 E_i^h(t) \phi_i(x) + \sum_{i=1}^2 B_i^h(t) v \phi_i(x) \right] \Phi_k(X) \partial_v \Phi_l(X) + \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 f_k^h(t) v \Phi_k(X) \partial_x \Phi_l(X), \quad (3.27)$$

Nous devons, alors, résoudre le système élémentaire suivant

$$\dot{F}_e(t) = (\mathbb{M}_e)^{-1} \mathbb{K}_e^x F_e + U_e (\mathbb{M}_e)^{-1} \mathbb{K}_e^v F_e, \quad (3.28)$$

Le système (3.28) s'écrit sous la forme

$$\dot{F}_e = \mathbf{A}_h F_e + U_e \mathbf{B}_h F_e, \quad (3.29)$$

où

$$\mathbf{A}_h = (\mathbb{M}_e)^{-1} \mathbb{K}_e^x,$$

$$\mathbf{B}_h = (\mathbb{M}_e)^{-1} \mathbb{K}_e^v,$$

$$U_e = G_{1e} \cdot \mathbb{E}_e + G_{2e} \cdot \mathbb{B}_e.$$

Ensuite, nous assemblons les $(N_x - 1) \times (N_v - 1)$ matrices \mathbf{A}_h , les $(N_x - 1) \times (N_v - 1)$ matrices \mathbf{B}_h et les $N_x - 1$ vecteurs \mathbb{U}_e . Nous obtenons les deux matrices carrées globales \mathbf{A} et \mathbf{B} ainsi que le vecteur \mathbb{U} .

Exemple 3.2. Dans l'élément rectangulaire $[0, 1] \times [-1, 1]$, notons par $\int = \int_0^1 \int_{-1}^1 \dots dx dv$.

Ainsi, en faisant le calcul avec quatre noeuds, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_e &= \begin{pmatrix} \int \Phi_1^2 & \int \Phi_1 \Phi_2 & \int \Phi_1 \Phi_3 & \int \Phi_1 \Phi_4 \\ \int \Phi_2 \Phi_1 & \int \Phi_2^2 & \int \Phi_2 \Phi_3 & \int \Phi_2 \Phi_4 \\ \int \Phi_3 \Phi_1 & \int \Phi_3 \Phi_2 & \int \Phi_3^2 & \int \Phi_3 \Phi_4 \\ \int \Phi_4 \Phi_1 & \int \Phi_4 \Phi_2 & \int \Phi_4 \Phi_3 & \int \Phi_4^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbb{K}_e^x &= \begin{pmatrix} \int v \Phi_1(\partial_x \Phi_1) & \int v \Phi_1(\partial_x \Phi_2) & \int v \Phi_1(\partial_x \Phi_3) & \int v \Phi_1(\partial_x \Phi_4) \\ \int v \Phi_2(\partial_x \Phi_1) & \int v \Phi_2(\partial_x \Phi_2) & \int v \Phi_2(\partial_x \Phi_3) & \int v \Phi_2(\partial_x \Phi_4) \\ \int v \Phi_3(\partial_x \Phi_1) & \int v \Phi_3(\partial_x \Phi_2) & \int v \Phi_3(\partial_x \Phi_3) & \int v \Phi_3(\partial_x \Phi_4) \\ \int v \Phi_4(\partial_x \Phi_1) & \int v \Phi_4(\partial_x \Phi_2) & \int v \Phi_4(\partial_x \Phi_3) & \int v \Phi_4(\partial_x \Phi_4) \end{pmatrix}, \\ \mathbb{K}_e^v &= \begin{pmatrix} \int \Phi_1(\partial_v \Phi_1) & \int \Phi_1(\partial_v \Phi_2) & \int \Phi_1(\partial_v \Phi_3) & \int \Phi_1(\partial_v \Phi_4) \\ \int \Phi_2(\partial_v \Phi_1) & \int \Phi_2(\partial_v \Phi_2) & \int \Phi_2(\partial_v \Phi_3) & \int \Phi_2(\partial_v \Phi_4) \\ \int \Phi_3(\partial_v \Phi_1) & \int \Phi_3(\partial_v \Phi_2) & \int \Phi_3(\partial_v \Phi_3) & \int \Phi_3(\partial_v \Phi_4) \\ \int \Phi_4(\partial_v \Phi_1) & \int \Phi_4(\partial_v \Phi_2) & \int \Phi_4(\partial_v \Phi_3) & \int \Phi_4(\partial_v \Phi_4) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$G_{1e} = (\phi_1, \phi_2)^{tr}, \quad G_{2e} = (v\phi_1, v\phi_2)^{tr}.$$

En utilisant les fonctions de formes définies par (3.22), on obtient

$$\mathbb{M}_e = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_e^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{K}_e^v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$G_{1e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{tr} \quad \text{et} \quad G_{2e} = \left(v\frac{1}{2}, v\frac{1}{2}\right)^{tr}.$$

La matrice \mathbb{M}_e est inversible et son inverse est donné par

$$(\mathbb{M}_e)^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 & -4 \\ -4 & 8 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de \mathbf{A}_h et \mathbf{B}_h donne

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.3. Dans l'élément rectangulaire $[0, 1] \times [0, 1]$, en utilisant les fonctions de formes définies par

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_1 = (1 - \hat{x})(1 - \hat{v}), \\ \hat{\Phi}_2 = \hat{x}(1 - \hat{v}), \\ \hat{\Phi}_3 = \hat{x}\hat{v}, \\ \hat{\Phi}_4 = (1 - \hat{x})\hat{v}, \end{cases} \quad (3.30)$$

le calcul de \mathbf{A}_h et \mathbf{B}_h donne

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1.2.2 Convergence

Afin de prouver que la solution $F(t) = (f_1^h(t), f_2^h(t), \dots, f_N^h(t))^{tr}$ est une bonne approximation de la solution exacte $f(t, x, v)$, nous devons calculer l'estimation de l'erreur.

Lemme 3.4. *Il existe une constante C qui ne dépend pas du choix de l'espace d'approximation Ω^h tel que*

$$\|f(t, x, v) - F(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \inf_{g^h \in \Omega^h} \|f(t, x, v) - g^h(t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.31)$$

Sachant que f est suffisamment régulière. Ainsi, il est possible de majorer la quantité

$$\inf_{g^h \in \Omega^h} \|f(t, x, v) - g^h(t)\|_{L^2(\Omega)} = d(f(t, x, v), \Omega^h),$$

par un terme proportionnel à $C(f)h^\beta$ où $C(f)$ est indépendant de pas h avec $\beta > 0$.

En effet,

$$\begin{aligned} \|f(t, x, v) - F(t)\|_{L^2(\Omega)} &= \|f(t) - \sum_{i,j}^N f^h(t) \Phi_{ij}(x, v)\|_{L^2(\Omega)}, \\ &= \|f(t) - \sum_{i=1}^{N_x+1} \sum_{j=1}^{N_v+1} f^h(t) \phi_i(x) \times \psi_j(v)\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq \|f(t) - \sum_{i=1}^{N_x+1} f^h(t) \phi_i(x)\|_{L^2(\Omega_x)} + \|f(t) - \sum_{j=1}^{N_v+1} f^h(t) \psi_j(v)\|_{L^2(\Omega_v)}, \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_x+1} \|f(t) - f^h(t) \phi_i(x)\|_{L^2(K_i)} + \sum_{j=1}^{N_v+1} \|f(t) - f^h(t) \psi_j(v)\|_{L^2(K_j)}. \end{aligned}$$

Puisque la mesure de Lebesgue de K_i est finie alors

$$\|f(t) - f^h(t) \phi_i(x)\|_{L^2(K_i)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

De la même façon, vu que la mesure de Lebesgue de K_j est finie alors

$$\|f(t) - f^h(t) \psi_j(v)\|_{L^2(K_j)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Donc, suite aux travaux de Ghattassi, ([47], [48]) nous pouvons prouver que si l'étape de discrétisation, h converge vers 0, la solution approchée en dimension finie converge alors vers la solution réelle en dimension infinie.

3.1.3 Critère de commandabilité

Dans cette partie, on va étudier la commandabilité du système discrétisé de Vlasov obtenu dans chaque élément $K_{ij} = K_i \times K_j$ par le champ magnétique fixé à l'extérieur. Rappelons que la forme matricielle du système de Vlasov, dans un élément K_{ij} donnée par (3.27), résout le système élémentaire suivant

$$\dot{F}_e = \mathbf{A}_h F_e + U_e \mathbf{B}_h F_e, \quad (3.32)$$

Le problème de commandabilité à résoudre est le suivant : Le système (3.32) est commandable si pour n'importe quel point $(f_0, f_1) \in \Omega \times \Omega$, il y a un $T \geq 0$ temps fini et une commande U_e pour passer de f_0 à f_1 .

Ainsi, le système discrétisé (3.32) est un système bilinéaire qui prend la forme générale suivante

$$\dot{y} = f(y, u) := Ay + uBy, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (3.33)$$

Toujours $y \in \mathbb{R}^n$ l'état du système et $u \in \mathbb{R}$ la commande, avec A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Contrairement aux systèmes linéaires où on dispose de plusieurs critères de commandabilité, dus aux travaux de Kalman [32], la commandabilité des systèmes bilinéaires en tant que des systèmes non linéaires est difficile et on a de très peu de résultats dans la littérature. Nous citons dans ce cadre les travaux de Jurdjevic-Sallet où un critère de commandabilité complète pour les systèmes bilinéaires a été donné [125]. Sussmann a proposé un critère de commandabilité qui se base sur les mauvais et les bons crochets de Lie [32].

Ici, on se contente de donner un argument de commandabilité qui se base sur la technique de linéarisation et la méthode quasi-statique de Coron [32]. Pour cela.

1. On linéarise le système (3.33) autour d'une trajectoire non triviale $(\bar{y}, \bar{u}) = (\gamma_0, \gamma_1)$ telle que

$$\gamma_0 \in \text{Ker}(A + \gamma_1 B), \quad \gamma_0 \notin \text{Ker} B.$$

Soit alors $\bar{A} := \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_0, \gamma_1) = A + \gamma_1 B$, et $\bar{B} := \frac{\partial f}{\partial u}(\gamma_0, \gamma_1) = B\gamma_0$

2. On considère alors le système linéarisé suivant

$$\dot{y} = (A + \gamma_1 B)y + (B\gamma_0)u. \quad (3.34)$$

Si la condition de Kalman est satisfaite pour le système (3.34), c'est à dire $\text{rg}(A + \gamma_1 B, B\gamma_0) = n$, alors le système linéarisé (3.34) est commandable. Par conséquent le système non linéaire (3.33) est localement commandable autour de (\bar{y}, \bar{u}) .

3. Pour la commandabilité du système non linéaire, on suit la technique de la déformation quasi-statique de Coron [32]. Soit la fonction $g \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. On définit $\tilde{u} : [0, \frac{1}{\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{u}(t) := \gamma_1 g(\varepsilon t), \quad t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}].$$

Maintenant, soit $\tilde{x}(t) : [0, \frac{1}{\varepsilon}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + \gamma_1 g(\varepsilon t)B\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = 0.$$

On montre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{x}(1/\varepsilon) = \gamma_0.$$

4. Cette idée utilise la technique des perturbations singulières sur des variétés lentes et rapides [72].

L'utilisation des observateurs dans le retour d'état consiste à mesurer toutes les variables d'état et à les renvoyer au contrôleur avec une commande ou un signal pour calculer ensuite ce signal de commande appliquée. Ce qui est non valable lorsque nous ne pouvons pas mesurer

tout l'état. En effet, si nous ne pouvons pas mesurer qu'un ensemble de variables de sortie, une façon typique consiste à transmettre cette sortie à un observateur qui va estimer l'état du système et le renvoyer au contrôleur afin de calculer le signal de commande.

Malgré la bonne fonction de ce type d'observabilité, il y a des difficultés liées à leur conception tels que la non linéarité et l'incertitude. Pour relever ces problèmes, il s'agit d'utiliser des observateurs à gain élevé [112] caractérisés par leur rapidité de récupérer les trajectoires d'état. Dans notre cas, l'observabilité du système de Vlasov-Poisson consiste à réaliser une reconstruction d'état à travers deux signaux de capteurs situés dans les positions $x = 0$ et $x = L$.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + uBy(t) := z(t, y, u), \\ Y(t) = Cy(t) := h(t, y, u), \end{cases} \quad (3.35)$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous cherchons à concevoir un retour de sortie. Afin de mettre en oeuvre le système (3.35) sans contrôle, on peut construire un observateur donné par

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= A\hat{y} + Bu + H(Y - C\hat{y}), \\ &= A\hat{y} + Bu + HC(y - \hat{y}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Le terme de correction $H(Y - C\hat{y})$ fait apparaître le gain de l'observateur H qui est relatif à l'estimation d'erreur donnée par $\tilde{y} = y - \hat{y}$, dont sa dérivée est :

$$\dot{\tilde{y}} = (A - HC)\tilde{y}.$$

Nous pouvons montrer que le système (3.35) est observable au sens de Fliess [90]. En effet, en utilisant la formule de Leibniz pour calculer la dérivée d'ordre k , on cherche s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$Y^{(k)} = C_{ob}y,$$

où C_{ob} est une matrice satisfaisant la condition d'observabilité de Kalman. Alors, nous pouvons écrire une représentation d'espace d'état sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \dot{Y} = C\dot{y} = C(A + uB)y, \\ \dot{\zeta}_2 = \ddot{Y} = C(A^2 + uAB + \dot{u}B + uBA + u^2B^2)y, \\ \dot{\zeta}_3 = Y^{(3)} \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{k-1} = Y^{(k-1)} \\ \dot{\zeta}_k = Y^{(k)} \\ Y = Cy = \zeta_1. \end{cases}$$

La détermination de la matrice H revient à choisir les valeurs propres de la matrice $A - HC$ de façon qu'elle soit de Hurwitz.

3.1.3.1 Test numérique

Dans le but de valider notre approche de discrétisation, sur des cas test, nous allons commencer par le cas où le champ E est constant. Prenons la condition initiale de la fonction de distribution suivante

$$f_0(x, v) = (1 + \epsilon \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}, \quad (3.37)$$

où $k = 0.2$, $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$, $L = \frac{2\pi}{k}$.

3.1.3.1.1 Cas v -transport ($\partial_x f = 0$)

En utilisant la méthode des caractéristiques, la solution exacte est donnée par :

$$f(x, v, t) = f_0(x, v - E(x)t).$$

La figure 3.1 représente la solution exacte donnée par l'expression (3.37).

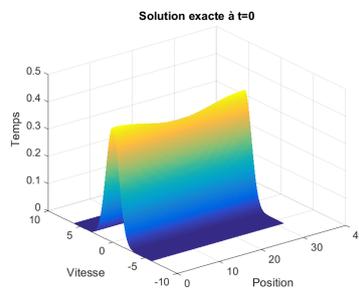


FIGURE 3.1 – Solution exacte $f_0(x, v, t)$.

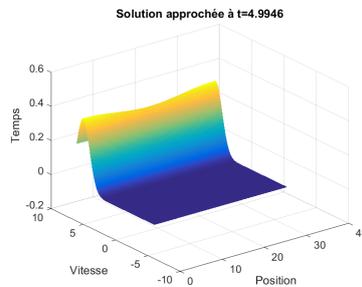


FIGURE 3.2 – Solution approchée à $T = 5$.

3.1.3.1.2 Cas x -transport ($E \equiv 0$)

Dans ce cas, l'expression de la solution exacte est donnée par

$$f(x, v, t) = f_0(x - vt, v).$$

Dans les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6, on a représenté, pour chaque T , la fonction de distribution dans le cas réduit de l'équation de Vlasov-Poisson.

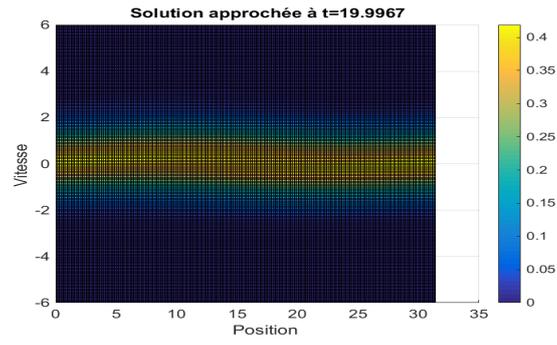


FIGURE 3.3 – Fonction de distribution à $T = 20$.

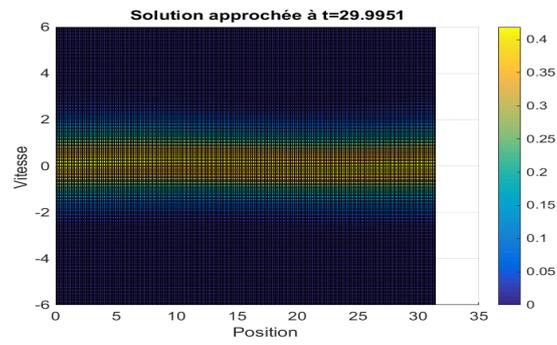


FIGURE 3.4 – Fonction de distribution à $T = 30$

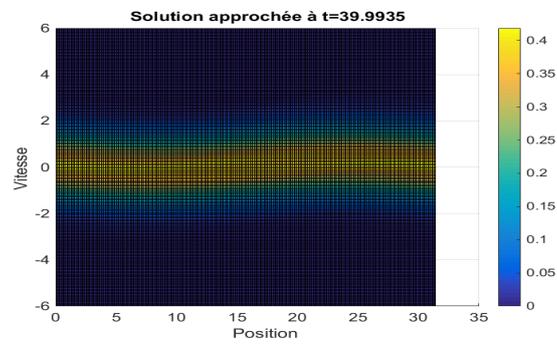
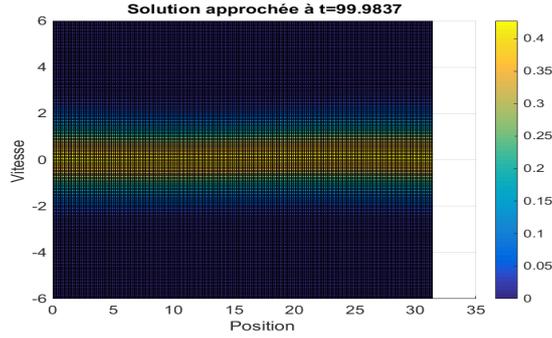


FIGURE 3.5 – Fonction de distribution à $T = 40$.


 FIGURE 3.6 – Fonction de distribution à $T = 100$.

3.1.3.2 Discrétisation 2D

Soient $t \in [0, T]$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega_x = [0, L] \times [0, L]$ et $v = (v_1, v_2) \in \Omega_v = [-V, V] \times [-V, V]$. Notons par $\Omega := \Omega_x \times \Omega_v$ et $X = (x, v)$.

Le problème de contrôle de Vlasov-Poisson, en dimension 2, décrivant l'évolution d'une fonction de distribution f des particules, dans l'espace Ω par rapport au temps $t > 0$, est modélisé par :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, X) = -v \nabla_x f - [E(t, x) + v \otimes B(t, x)] \nabla_v f \text{ dans } [0, T] \times \Omega, \\ \nabla_x E(t, x) = \int_{-V}^V f dv - 1, \\ f(t, 0, v) = f(t, L, v), \\ E(t, 0) = E(t, L), \\ f(0, X) = f_0(X), \\ f(T, X) = f_1(X). \end{cases} \quad (3.38)$$

où l'état et le contrôle sont respectivement (f, E) et $u(t, X) = v \otimes B(t, x)$.

Soit $g \in H = \{g \in H^1(\Omega) \text{ s. t } g(t, 0, v) = g(t, L, v), g(t, x, -V) = g(t, x, V) \text{ sur } \partial\Omega\}$.

Muni de la norme $\|g\|_{H^1(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$, H est un espace de Hilbert.

Multipliant l'équation

$$\nabla_x E(t, x) = \int_{-V}^V f dv - 1,$$

par une fonction test $w \in W = \{w \in H^1(\Omega_x) \text{ s. t } w(0) = w(L)\}$ et intégrant sur Ω_x . Alors, il s'agit de résoudre une première équation

$$- \int_{\Omega_x} E(t, x) \nabla_x w(x) dx + \int_{\partial\Omega_x} E(t, x) w(x) d\lambda = \int_{\Omega_x} \int_{-V}^V f w(x) dv dx - \int_{\Omega_x} w(x) dx. \quad (3.39)$$

En multipliant maintenant l'équation

$$\partial_t f(t, X) = -v \nabla_x f(t, X) - \left[E(t, x) + v \otimes B(t, x) \right] \nabla_v f(t, X),$$

par une fonction test $g \in H$ et intégrant sur Ω , on obtient une deuxième équation à résoudre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t f(t, X) g(X) &= \int_{\Omega} v f \nabla_x g(X) + \int_{\Omega} \left[E(t, x) + v \otimes B(t, x) \right] f(t, X) \nabla_v g(X) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_x \times \Omega_v} \begin{pmatrix} v \\ E(t, x) + v \otimes B(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{n}_x \\ 0 \end{pmatrix} f(t, X) g(X) \\ &\quad - \int_{\Omega_x \times \partial\Omega_v} \begin{pmatrix} v \\ E(t, x) + v \otimes B(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{n}_v \end{pmatrix} f(t, X) g(X), \end{aligned} \quad (3.40)$$

où \vec{n}_x (resp. \vec{n}_v) est la normale sortante à Ω_x (resp. Ω_v).

En prenant les conditions aux bords, on obtient les deux systèmes suivants

$$- \int_{\Omega_x} E(t, x) \nabla_x w(t, x) dx = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_v} f(t, X) w(t, x) dv dx - \int_{\Omega_x} w(t, x), \quad (3.41)$$

et

$$\int_{\Omega} \partial_t f(t, X) g(X) = \int_{\Omega} v f(t, X) \nabla_x g(X) + \int_{\Omega} \left[E(t, x) + v \otimes B(t, x) \right] f(t, X) \nabla_v g(X). \quad (3.42)$$

Pour la discretization, $2D$, on prend les K_i (resp. K_j) comme des rectangles.

Soit $\Omega^h = \Omega_x^h \times \Omega_v^h = \cup_{i,j} K_i \times K_j$, $i = 1, \dots, N^x$, $j = 1, \dots, N^v$, l'espace approché de $\Omega = \Omega_x \times \Omega_v$ avec N^x et N^v sont respectivement les nombres des éléments rectangulaires du maillage suivant la direction x et la direction v . Notons par N_x et N_v respectivement les nombres des éléments suivant x et v . Alors, pour ce maillage, on a le nombre total N_G des éléments du maillage ainsi que le nombre total des noeuds (N) tels que $N_G = N^x \times N^v$ et $N = N_x \times N_v / 2$. On obtient

$$- \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} E(t, x) \nabla_x w(t, x) = \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_j} f(t, X) w(t, x) - \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} w(t, x) dx. \quad (3.43)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_j} \partial_t f(t, X) g(X) &= \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_j} v f(t, X) \nabla_x g(X) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_j} \left[E(t, x) + v \otimes B(t, x) \right] f(t, X) \nabla_v g(X) \end{aligned} \quad (3.44)$$

les espaces Ω_x^h , Ω_v^h et Ω^h sont générés respectivement par les fonctions de forme ϕ_i , $i = 1, \dots, N_x$, ψ_j , $j = 1, \dots, N_v$ et Φ_{ij} est définie par le produit cartésien de ϕ_i et ψ_j .

Ainsi les formulations discrètes, dans un élément cubique à quatre noeuds, sont données par

$$\begin{aligned} &- \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 E^h(t) \phi_l(x) w^h(t) \nabla_x \phi_k(x) \\ &= \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_j} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 f^h(t) \phi_l(X) w^h(t) \phi_k(x) - \sum_{i=1}^{N_x} \int_{K_i} \sum_{k=1}^4 w^h(t) \phi_k(x). \end{aligned} \quad (3.45)$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_i} \int_{K_j} \sum_{k=1}^8 \sum_{l=1}^8 \dot{f}^h(t) \Phi_l(X) g^h \Phi_k(X) = \\ &\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_i} \int_{K_j} \sum_{k=1}^8 \sum_{l=1}^8 v f^h(t) \Phi_l(X) g^h \nabla_x \Phi_k(X) \\ &+ \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_v} \int_{K_i} \int_{K_j} \sum_{k=1}^8 \sum_{l=1}^8 \sum_{kk=1}^4 \sum_{ll=1}^4 R_1(X), \end{aligned} \quad (3.46)$$

avec

$$R_1(X) = \left[E^h(t) \phi_{ll}(x) + v \otimes B^h(t) \phi_{kk}(x) \right] \times f^h(t) \Phi_l(X) g^h \nabla_v \Phi_k(X). \quad .$$

Dans le calcul élémentaire, on va utiliser l'élément de référence $\hat{K} = [0, 1]^2 \times [-1, 1]^2$. Notons par $\hat{\phi}_i, i = 1, \dots, 4$ (resp. $\hat{\psi}_j, j = 1, \dots, 4$) les quatre fonctions aux quatre noeuds de l'élément de référence $[0, 1] \times [0, 1]$ (resp. de l'élément de référence $[-1, 1] \times [-1, 1]$) tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_1 = (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2), \\ \hat{\phi}_2 = \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2), \\ \hat{\phi}_3 = \hat{x}_1\hat{x}_2, \\ \hat{\phi}_4 = (1 - \hat{x}_1)\hat{x}_2. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}_1 = \frac{1}{4}(1 - \hat{v}_1)(1 - \hat{v}_2), \\ \hat{\psi}_2 = \frac{1}{4}(1 + \hat{v}_1)(1 - \hat{v}_2), \\ \hat{\psi}_3 = \frac{1}{4}(1 + \hat{v}_1)(1 + \hat{v}_2), \\ \hat{\psi}_4 = \frac{1}{4}(1 - \hat{v}_1)(1 + \hat{v}_2). \end{array} \right. \quad (3.47)$$

Ainsi on obtient les huit fonctions de forme dans l'élément de référence $\hat{K} = [0, 1]^2 \times [-1, 1]^2$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\Phi}_1 = \hat{\phi}_1 \times \hat{\psi}_2 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)(1 + \hat{v}_1)(1 - \hat{v}_2), \\ \hat{\Phi}_2 = \hat{\phi}_2 \times \hat{\psi}_2 = \frac{1}{4}\hat{x}_1(1 - \hat{x}_2)(1 + \hat{v}_1)(1 - \hat{v}_2), \\ \hat{\Phi}_3 = \hat{\phi}_3 \times \hat{\psi}_1 = \frac{1}{4}\hat{x}_1\hat{x}_2(1 - \hat{v}_1)(1 - \hat{v}_2), \\ \hat{\Phi}_4 = \hat{\phi}_4 \times \hat{\psi}_1 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x}_1)\hat{x}_2(1 - \hat{v}_1)(1 - \hat{v}_2), \\ \hat{\Phi}_5 = \hat{\phi}_1 \times \hat{\psi}_3 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2)(1 + \hat{v}_1)(1 + \hat{v}_2), \\ \hat{\Phi}_6 = \hat{\phi}_2 \times \hat{\psi}_3 = \frac{1}{4}\hat{x}_1(1 - \hat{x}_2)(1 + \hat{v}_1)(1 + \hat{v}_2), \\ \hat{\Phi}_7 = \hat{\phi}_3 \times \hat{\psi}_4 = \frac{1}{4}\hat{x}_1\hat{x}_2(1 - \hat{v}_1)(1 + \hat{v}_2), \\ \hat{\Phi}_8 = \hat{\phi}_4 \times \hat{\psi}_4 = \frac{1}{4}(1 - \hat{x}_1)\hat{x}_2(1 - \hat{v}_1)(1 + \hat{v}_2). \end{array} \right. \quad (3.48)$$

3.2 Stabilisation rapide en dimension finie

La stabilisation en temps fixe et la stabilisation en temps petit indiquent que le système atteindra un état stable en un temps de convergence rapide. Cette section présente quelques conditions suffisantes pour la stabilisation en temps fixe et la stabilisation en temps petit à l'aide d'un retour d'état instationnaire du système de Vlasov-Poisson discrétisé. Nous illustrons nos études par quelques exemples des systèmes de contrôle bilinéaires en donnant des simulations numériques.

3.2.1 Stabilisation en temps fixe

Dans cette partie, nous présentons quelques conditions suffisantes pour la stabilisation en temps fixe des systèmes de contrôle de dimension finie.

3.2.1.1 Introduction

De nos jours, la stabilité en temps fixe a connu une progression remarquable dans la théorie du contrôle ([20], [51], [105], [107] et [133]). Il s'agit d'une stabilité en temps fini avec un temps d'établissement uniformément borné par rapport à la donnée initiale. Les premières idées remontent à Polyakov, [105], [106], qui a donné une caractérisation de stabilité en temps fini et en temps fixe des systèmes d'évolution dans des espaces de Banach. Ces conditions sont exprimées en termes des fonctions de Lyapunov.

Quant à nous, on montre un résultat relaxant ceux obtenus par plusieurs auteurs et qui consiste à fusionner la stabilité en temps fini [16] et la stabilité polynômiale [70]. Cette idée est significative et semble être un phénomène naturel (la stabilité en temps fixe traduit la durée

de vie de la solution d'un système dynamique). Elle peut être traduite de la façon suivante : grâce à la stabilité polynomiale, toutes les trajectoires du système peuvent atteindre en temps fixe T_1 une petite boule de l'équilibre ([78]), et donc par la deuxième propriété de la stabilité en temps fini, les trajectoires qui seront à l'intérieur de la boule convergent vers zéro en temps petit qui devient dans cette étape un second temps fixe T_2 (puisque les conditions initiales sont bornées dans la boule). Le temps fixe résultant T est alors la somme de T_1 et T_2 .

Pour un tel système $\dot{x} = X(x)$, une autre condition de stabilité en temps fixe peut être obtenue à l'aide de la décomposition du champ de vecteur X du système en deux champs de vecteurs X_1 et X_2 tels que les systèmes décrits par X_1 et X_2 sont respectivement stable en temps fini et polynomialement stable.

Les propriétés mentionnées ci-dessus vont nous servir pour étudier la stabilité en temps fixe du système discrétisé de Vlasov-Poisson. Ce dernier prend la forme d'un système bilinéaire de dimension finie. Ainsi, pour étudier sa stabilisation, nous avons étudié, dans un cadre général, les systèmes bilinéaires sur un espace réel de Hilbert noté H .

Considérons alors le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + u(t)By(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.49)$$

où, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire de classe \mathcal{C}_0 sur un espace réel de Hilbert H avec un domaine $\mathcal{D}(A)$, $B : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire borné, $t \mapsto y(t) \in H$ est l'état du système et la fonction scalaire $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle. Avant de présenter les résultats de cette partie, nous allons définir la stabilisation en temps fixe du système bilinéaire (3.49).

Définition 3.5. On a parlé de cette définition dans l'aperçu des résultats (où on a pas bien détaillé les résultats). Ainsi, dans le Chapitre 3, on a défini de manière rigoureuse la notion de stabilisation en temps fixe ainsi que la construction des feedbacks stabilisants les systèmes bilinéaires en dimension finie. On dit que le système (3.49) est stabilisable en temps fixe à l'aide d'un retour d'état $u : H \rightarrow \mathbb{R}$ si le système bouclé $\dot{y}(t) = Ay(t) + u(y)By(t)$ satisfait les propriétés suivantes :

1. Le système bouclé est stable en temps fini (i.e. $\exists T(y(0))$ tel que $y(t) = 0 \forall t \geq T$).
2. Il existe T_{\max} indépendant de la donnée initiale tel que $T(y(0)) < T_{\max}$ et $y(t) = 0 \forall t \geq T_{\max}$.

On admet, pour le moment, le théorème suivant qui va être prouvé dans le chapitre 4.

Théorème 3.6. *Supposons que :*

1. *La dilatation d sur H est strictement monotone, et le groupe associé G_d sur $D \subset \mathcal{D}(G_d)$ où D est dense dans H , satisfait*

$$k_1 \|z\|^2 \leq \langle G_d z, z \rangle \leq k_2 \|z\|^2 \quad \text{pour } k_1, k_2 > 0 \text{ et pour tout } z \in D,$$

2. *l'opérateur A génère un semi-groupe de contractions sur H tel que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(G_d)$,*
3. *l'opérateur B est fortement positif, c.à.d., il existe $k > 0$ tel que pour tout $y \in H$, on a $\langle By, y \rangle \geq k \|y\|^2$,*

4. L'opérateur A et B sont, respectivement, homogènes de degré m et 0 par rapport à la dilatation d .

On définit les deux retours u_1 et u_2 tels que

$$u_1(y) = \begin{cases} -\frac{\langle By, y \rangle}{\|y\|_d^\beta} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

et

$$u_2(y) = -\|y\|_d^\theta, \quad (3.51)$$

où $\|\cdot\|_d$ est la norme homogène associée à d , avec la condition $3b > \beta > 2a$, où a et b sont données dans le lemme 4.23 et $\theta > 0$. Alors, sous l'action du retour d'état $u(y) = u_1(y) + u_2(y)$, le système en boucle fermée (3.49) est stable en temps fixe.

Ce résultat peut être utilisé lorsque les opérateurs A et B sont des matrices vérifiant les hypothèses du théorème 3.6. Considérons donc le système bilinéaire dans \mathbb{R}^n suivant :

$$\dot{y} = Ay + uBy, \quad (3.52)$$

où $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont deux matrices constantes, $y \in \mathbb{R}^n$ est l'état et $u \in \mathbb{R}$ est le contrôle. Soit la dilatation

$$d(s) = e^{sG_d} \quad (3.53)$$

telle que G_d est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs. D'après [107], il existe une matrice symétrique définie positive P tel que

$$G_d^{tr} P + PG_d = \mu P, \quad \mu \in]0, +\infty[, \quad (3.54)$$

Définissons le produit scalaire sur \mathbb{R}^n par $\langle u, v \rangle := u^{tr} P v$ et la norme $\|u\|^2 := u^{tr} P u$. Dans ce cas, nous avons G_d fortement positif et $\lambda_{\min} \|y\|^2 \leq \langle G_d y, y \rangle \leq \lambda_{\max} \|y\|^2$ où λ_{\min} et λ_{\max} sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de G_d . De plus, nous avons

$$\frac{d}{ds} \|d(s)y\|^2 = y^{tr} e^{sG_d^{tr}} (G_d^{tr} P + PG_d) e^{sG_d} y \quad (3.55)$$

$$= \mu y^{tr} e^{sG_d^{tr}} P e^{sG_d} y \quad (3.56)$$

$$= \mu \|d(s)y\|^2. \quad (3.57)$$

Par conséquent, nous en déduisons par intégration que

$$\|d(s)y\| = e^{\frac{\mu s}{2}} \sqrt{y^{tr} P y},$$

En utilisant le fait que $\|d(-s)y\| = 1$ nous concluons que

$$\|y\|_d = (y^{tr} P y)^{1/\mu}.$$

Il est clair qu'avec $\mu = 2$, $\|y\|_d = \sqrt{y^{tr} P y}$.

On suppose, de plus, que $AG_d = G_d A$ et $BG_d = G_d B$, alors, on a $Ad(s)y = Ae^{sG_d} y = e^{sG_d} Ay = d(s)Ay$, et aussi $Bd(s)y = d(s)By$. Ainsi A et B sont homogènes avec un degré d'homogénéité nul.

Remarquons dans notre cas que a et b dans le lemme 4.23 sont tel que $a = b = 1$. Ainsi, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3.7. *Supposons que la matrice A est dissipative (i.e $-A$ est positive), et B est fortement positive. Considérons le retour $u = u_1 + u_2$ tel que*

$$u_1(y) = \begin{cases} -\frac{(By)^{tr}Py}{(y^{tr}Py)^{\beta/2}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (3.58)$$

où $2 < \beta < 3$, et

$$u_2(y) = -(y^{tr}Py)^{\theta/2}, \quad \theta > 0. \quad (3.59)$$

Alors, le retour $u : y \mapsto u_1(y) + u_2(y)$ rend le système en boucle fermée (3.52) stable en temps fixe.

3.2.1.2 Stabilisation en temps fixe du système discrétisé de Vlasov-Poisson

Dans cette partie, nous traitons la stabilisation en temps fixe du système discrétisé de Vlasov-Poisson dont son système matriciel s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = \mathbf{A}F(t) + \mathbb{U}(t)\mathbf{B}F(t), & t > 0, \\ F(0) \neq 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}^x, \\ \mathbf{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}^v, \\ F \text{ est l'état du système,} \\ \mathbb{U} = G_1\mathbb{E} + G_2\mathbb{B} \text{ (le contrôle).} \end{cases} \quad (3.60)$$

où $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ sont deux matrices constantes.

Dans l'objet d'appliquer la proposition 3.7 nous prouvons que la décomposition du système initial (3.60) en deux sous-systèmes, un est stabilisable en temps fini et l'autre est polynomialement stabilisable, conduit à sa stabilisation en temps fixe. Ceci étant à condition que les deux stabilisations sont assignables par la même fonction de Lyapunov.

Pour la dilatation (3.53), on suppose que $\mathbf{A}G_d = G_d\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}G_d = G_d\mathbf{B}$. Alors, d'après [107], les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont homogènes de degré zéro par rapport à la dilatation d . Autrement, on a

$$\begin{cases} \mathbf{A}e^{sG_d}F = d(s)\mathbf{A}F, \\ \mathbf{B}e^{sG_d}F = d(s)\mathbf{b}F. \end{cases}$$

Supposons que la matrice \mathbf{A} est dissipative (c'est-à-dire que $-\mathbf{A}$ est positif), et que \mathbf{B} est fortement positif. Considérer le retour d'état $\mathbb{U} = u_1 + u_2$ où

$$u_1(F) = \begin{cases} -\frac{(\mathbf{B}F)^{tr}PF}{(F^{tr}PF)^{\beta/2}} & \text{si } F \neq 0, \\ 0 & \text{si } F = 0, \end{cases} \quad (3.61)$$

où β est tel que $2 < \beta < 3$, et

$$u_2(F) = -(F^{tr}PF)^{\theta/2}, \quad \theta > 0. \quad (3.62)$$

Alors, le retour $\mathbb{U} : F \mapsto u_1(F) + u_2(F)$ rend le système en boucle fermée (3.60) stable en temps fixe.

3.2.1.3 Exemples

Pour illustrer l'approche de conception, des simulations numériques montrent des performances élevées du retour stabilisant en temps fini et en temps fixe des systèmes bilinéaires. Les deux exemples traitent la stabilisation en temps fixe.

3.2.1.3.1 Exemple 1

Nous considérons l'exemple d'équation suivant

$$\ddot{z} + z^2 \dot{z} + z = 0. \quad (3.63)$$

Afin de faire le lien avec le système bilinéaire (3.63), nous introduisons le contrôle $u \in \mathbb{R}$. Soit $y = (y_1, y_2)$, alors le système (3.63) devient

$$\dot{y} = Ay + uBy,$$

avec le choix suivant de matrices A et B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui équivaut à la représentation analytique suivante

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + 2y_1 u, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + y_2 u. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Dans (3.54), on prend $P = I_2$, alors la matrice G_d dans ce cas est I_2 . Par rapport à ce choix,

1. La matrice A est dissipative puisque $\langle Ay, y \rangle = 0$,
2. La matrice B est fortement positive puisque

$$\begin{aligned} \langle By, y \rangle &= 2y_1^2 + y_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \|(y_1, y_2)\|^2. \end{aligned}$$

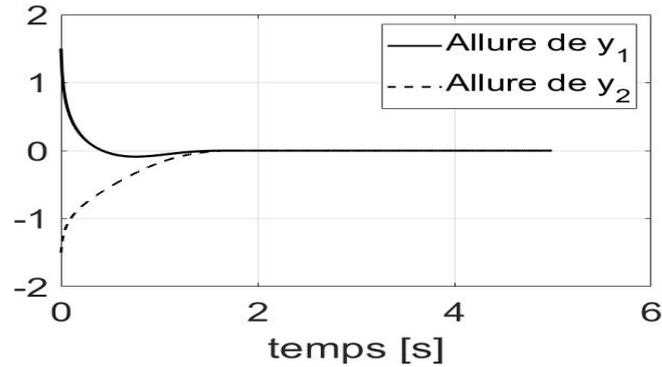
Par conséquent, le retour $u = u_1 + u_2$ où

$$u_1(y) = \begin{cases} -\frac{2y_1^2 + y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\beta/2}} & \text{si } (y_1, y_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (y_1, y_2) = (0, 0), \end{cases} \quad (3.65)$$

où β est tel que $2 < \beta < 3$, et

$$u_2(y) = -(y_1^2 + y_2^2)^{\theta/2}, \quad \theta > 0, \quad (3.66)$$

stabilise en temps fixe le système (3.77). La condition initiale est $(y_1(0), y_2(0)) = (1.5, -1.5)$.


 FIGURE 3.7 – Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.77).

Ce qui nous permet, d'après la figure 3.7 d'affirmer qu'à $T = 1.7$, les particules se confinent sous l'effet du champ magnétique.

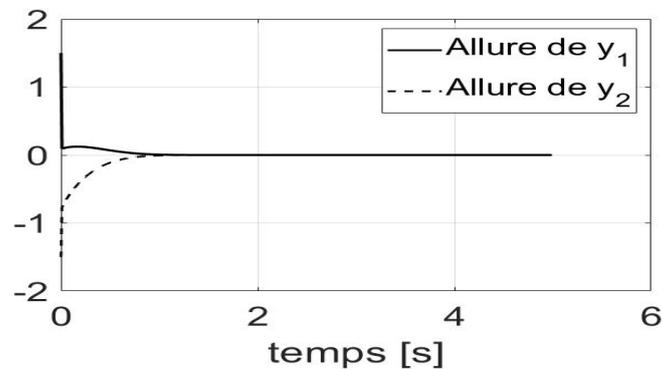
3.2.1.3.2 Exemple 2

Le système bilinéaire suivant

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2 - y_1 + 2y_1u, \\ \dot{y}_2 &= y_1 - 2y_2 + y_2u, \end{aligned} \quad (3.67)$$

est stabilisable en temps fixe par le retour d'état (3.65 - 3.66).

La condition initiale est $(y_1(0), y_2(0)) = (1.5, -1.5)$.


 FIGURE 3.8 – Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.67).

Ainsi les trajectoires affichées dans la figure 3.8 nous permettent de dire que le temps de confinement des particules est donné par $T = 1$.

3.2.2 Stabilisation en temps petit des systèmes non autonomes

Contrairement à la stabilisation asymptotique, la stabilité en temps petit est souvent très pratique car il est préférable de stabiliser un système pendant un temps petit. Ceci semble

très adopté dans les exemples, des lancements des missiles ou satellites, des réactions chimiques ou nucléaires, où les opérations sont faites pendant des courtes durées. Si bien, ce sujet a connu des investigations intenses pendant ces dernières années et fait l'objectif de nombreux travaux. Citons, par exemple, [4, 10, 16, 17, 23, 40, 41, 57, 62, 64, 65, 101, 108, 109, 116, 120].

Dans cette section, on va s'occuper des systèmes variants dans le temps de dimension finie et de dimension infinie. L'idée sous-jacente est d'attaquer en premier lieu les systèmes de dimension finie et les résultats seront appliqués sur le système discrétisé de VP en donnant des tests numériques.

3.2.2.1 Stabilité un temps petit : conditions de Lyapunov

On considère le système non autonome défini sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ par

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.68)$$

avec $x(0) = x_0$. On suppose de plus que $f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$ (0 est un point d'équilibre).

L'existence de solutions est assurée par le théorème de Péano. Ainsi, l'unicité des solutions n'est pas garantie. Nous supposons plutôt que toutes les solutions de (3.68) sont continues à posteriori [16].

Soit \mathcal{K}_∞ l'espace de Hahn défini par :

$$\mathcal{K}_\infty := \{\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue, } \alpha(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = +\infty\}.$$

Dans la suite, on va définir la notion de stabilité en temps fini et de stabilisation du système (3.68).

Définition 3.8. Le système (3.68) est dit stable en temps petit si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0 \exists \eta = \eta(t_0, \varepsilon) > 0$ tels que

1. $(\|x(t_0)\| < \eta) \Rightarrow (\|x(t)\| < \varepsilon \forall t \geq t_0)$.
2. $(\|x(t_0)\| < \eta) \Rightarrow (x(\varepsilon) = 0)$.

La notion de stabilité en temps petit a été définie par Coron et ses collaborateurs dans [40]. On exige la stabilité au sens de Lyapunov du système en question à l'aide du critère de η et de ε . Le ε dans la deuxième ligne joue le rôle du facteur temps. On peut interpréter cette définition de la façon suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut, il existe $\eta > 0$ telle que dès que $x(0) \in B(0, \eta)$ alors la solution $x(t)$ s'annule à l'instant (ε) et y reste.

Soit le système dynamique

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, u), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ g(0, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

où $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue.

Remarque 3.9. S'il existe un retour $u = u(t, x)$ continu tel que $u(t, 0) = 0$ alors la première équation du système (3.69) reprend la forme suivante :

$$\dot{x} = g(x, u(t, x)) \simeq f(t, x).$$

Définition 3.10. [40] Le système (3.69) est dit stabilisable en temps petit, s'il existe un retour d'état $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de sorte que chaque solution du système en boucle fermée $\dot{x} = g(x, u(x))$ atteint le point d'équilibre en temps petit.

Remarque 3.11. 1. Il a été remarqué dans [40] que “la stabilité en temps petit \implies la stabilité en temps fini”. En particulier, les deux notions sont équivalentes lorsque la fonction temps de stabilisation est continue. Notons qu’il est prouvé dans [16, Exemple 2.2] qu’en général, la stabilité en temps fini n’implique pas que la fonction de temps de stabilisation T est continue à l’origine.

2. Pour les systèmes variables dans le temps, on donne la définition suivante.

Définition 3.12. [40] Le système (3.69) est dit stable en temps petit par un retour variable dans le temps s’il existe une carte $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $u(t, 0) = 0$, et en boucle fermée la solution $x(\cdot)$ telle que $\dot{x}(t) = g(x, u(t, x))$, satisfait les conditions suivantes.

1. $(\dot{x}(t) = g(x, u(t, x)), x(s) = 0) \implies (x(t) = 0 \forall t \geq s), \forall s \in \mathbb{R}$
2. pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\|x(s)\| < \eta) \implies \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t > s.$$

Considérons, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, le système en boucle fermée $\dot{x} = g(x, u(x))$ donné dans la définition 3.10. Une des conditions suffisantes connues, à condition que l’équilibre $0 \in \mathbb{R}^n$ est stable en temps fini [16], est l’existence d’une fonction candidate \mathcal{C}^1 de Lyapunov V , un réel $\beta \in]0, 1[$ est une constante $c > 0$ de telle sorte que le long du système $\dot{V} \leq -cV^\beta$.

La question qui se pose : comment généraliser cette condition suffisante pour des systèmes variants dans le temps ?

Notre première situation est présentée dans le prochain théorème.

Théorème 3.13. *On considère le système (3.68), et on suppose qu’il existe des fonctions $\alpha_1, \alpha_2 \in K_\infty$, une constante $\beta \in]0, 1[$ et une fonction \mathcal{C}^1 -différentiable $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on obtient*

1. $\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|), \forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. $\dot{V}(t, x(t)) \leq -c(t)V^\beta(t, x(t))$.

où $x(t) = x(t, x_0)$ est la solution du système (3.68). Supposons que $c : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction mesurable tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t c(s) ds = +\infty. \quad (3.70)$$

Alors le système (3.68) est globalement stable en temps petit avec le temps d’établissement T^* est défini par

$$\int_0^{T^*} c(s) ds = \frac{V^{1-\beta}(x_0)}{1-\beta}. \quad (3.71)$$

Preuve. La preuve repose sur le principe de comparaison [72, page 110]. Soit V une fonction positive permettant de résoudre l’équation différentielle

$$\dot{V} = -c(t)V^\beta, \beta \in]0, 1[, \quad (3.72)$$

avec la condition initiale $V(x(0)) := V_0$. Cette solution est donnée par

$$V(t) = \begin{cases} [V_0^{1-\beta} - (1-\beta) \int_0^t c(s) ds]^{1/(1-\beta)}, & 0 \leq t \leq T^* \text{ et } V_0 \neq 0, \\ 0, & \text{si } t \geq T^* \text{ et } V_0 \neq 0, \\ 0, & \text{si } V_0 = 0. \end{cases} \quad (3.73)$$

où le temps T^* sera défini plus tard. Pour $V_0 \neq 0$, nous considérons la fonction dérivée h sur $[0, +\infty[$ définie par

$$h(t) := V_0^{1-\beta} - (1-\beta) \int_0^t c(s) ds.$$

La dérivée temporelle de h est donnée par $h'(t) = -(1-\beta)c(t) \leq 0$, alors h est une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$. Avec l'hypothèse (3.70) nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = -\infty.$$

On choisit c continue et positive sur $[0, +\infty)$. Par conséquent, par le théorème de valeur intermédiaire (TVI), il existe un temps unique $T^* := T^*(V(0))$, (clairement $T^*(V_0)$ est unique car h est décroissante) tel que $h(T^*) = 0$, et donc le temps T^* est défini de telle sorte que

$$\int_0^{T^*} c(s) ds = \frac{V^{1-\beta}(0)}{1-\beta}.$$

La fonction décroissante V converge vers zéro au moment T^* et par la suite pour $t \geq T^*$ nous obtenons $V(x(t)) = 0$, et donc par la première condition du théorème, tel que $x(t) = 0$ pour chaque $t \geq T^*$. \square

Nous allons maintenant donner deux contre-exemples montrant que [53, Théorème 1] est faux.

1. Pour $p \geq 1$, nous considérons V positif défini par

$$V(t) = \frac{1}{(1+t)^p}, t \geq 0.$$

Cette fonction satisfait

$$\dot{V} = -p \frac{1}{(1+t)^{p+1}} = -p \frac{1}{(1+t)^{1+\frac{2p}{3}}} V^{1/3}$$

où la fonction continue et positive $c(\cdot)$ sur $[0, +\infty[$ est définie par $c(t) = \frac{p}{(1+t)^{1+\frac{2p}{3}}}$, $t \geq 0$.

0. Puisque $1 + \frac{2p}{3} > 1$, alors clairement on a $c(\cdot)$ est Lebesgue intégrable et

$$\int_0^{+\infty} c(s) ds := M < \infty.$$

Toutes les hypothèses du théorème 1 sont satisfaites, ici $\beta = \frac{1}{3} < 1$, en outre V ne converge pas vers zéro en temps petit, parce que, il n'y a pas de temps T^* tel que $V(t) = 0$ pour $t \geq T^*$.

2. Le deuxième contre-exemple est le suivant :

$$V(t) = e^{-t^2}, t \geq 0.$$

Il est clair que V ne peut pas converger vers zéro en temps petit. De plus, cette fonction V satisfait l'inégalité différentielle

$$\dot{V} \leq -c(t)V^{2/3},$$

où $c(t) = 2te^{-t^{2/3}}$. On peut facilement vérifier que

$$\int_0^{+\infty} c(d) dt < +\infty.$$

L'hypothèse $\int_0^{+\infty} c(t)dt = +\infty$ est cruciale pour obtenir la stabilité en temps petit du système dynamique $\dot{x} = f(t, x)$.

Remarque 3.14. Le cas où la fonction $c(\cdot)$ est constante, nous obtenons le résultat standard de Bhat et Bernstein [16]. Dans ce cas, nous avons $T^* = \frac{V^{1-\beta}(0)}{c(1-\beta)}$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.15. ([16]) *Supposons que V est une fonction définie positive et de classe C^1 définie sur $[0, +\infty[$, et*

$$\dot{V} \leq -cV^\alpha, \quad (3.74)$$

où $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$ sont deux constantes. Alors, il existe un temps de stabilisation $T(V(0))$ dépendant de la condition initiale tels que

$$V = 0, \forall t \geq T, \text{ et } T \leq \frac{V^{1-\alpha}(0)}{c(1-\alpha)}.$$

Exemple 3.16. *L'exemple suivant est proposé [53, Exemple 13], $\dot{x} = -\frac{1 - \sin t}{1 + t^2}x^{1/3}$ n'est pas stable en temps fini car la fonction donnée $c(t) = \frac{1 - \sin t}{1 + t^2}$ est Lebesgue-intégrable. De plus, $\dot{x} = -\frac{1 - \sin t}{1 + t}x^{1/3}$ est stable en temps fini.*

Exemple 3.17. *Le système scalaire $\dot{x} = -(1+t)\text{sgn}(x)|x|^a$, $a \in]0, 1[$ où $\text{sgn}(\cdot)$ est, habituellement, la fonction signe (pour $x \in \mathbb{R}$, $\text{sgn}(x) := \frac{x}{|x|}$, si $x \neq 0$ et $\text{sgn}(0) = 0$), est stable en temps petit.*

Corollaire 3.18. *Considérons le système qui varie dans le temps (3.68) et supposons que toutes les conditions du théorème 4.22 sont satisfaites, et que le long du système la fonction candidate de Lyapunov V satisfait d'avantage*

$$\dot{V} \leq -c(t)V^\beta - kV^\gamma, \quad (3.75)$$

pour certaines constantes strictement positives k, γ tel que $\gamma > 1$. Alors (3.68) est stable en temps fixe.

3.2.2.2 Application au système de Vlasov-Poisson discrétisé

Revenons au système discrétisé de contrôle de Vlasov bilinéaire défini par (3.60).

Cette partie est consacrée à l'étude de la stabilisation en temps petit du système de contrôle de Vlasov-Poisson, en temps variable, au moyen d'un retour excité. Nous l'illustrons par quelques exemples des systèmes de contrôle bilinéaires. En effet, pour construire un retour stabilisant en temps petit le système (3.60), nous allons exciter uniformément les conditions aux limites et ceci permet de renforcer la distribution des particules d'être confinées au centre du Tokamak et ce confinement permet d'éviter leur contact avec les parois de l'enceinte. Cette notion des conditions d'excitation persistante est très importante et semble une idée attrayante pour stabiliser le système de contrôle de Vlasov-Poisson.

La forme d'un tel retour \mathbb{U} peut prendre la forme suivante

$$\mathbb{U}(t, y) = \begin{cases} -f(t) \frac{\langle \mathbf{B}y, y \rangle}{\|y\|^\beta} & y \neq 0, \beta \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.76)$$

avec f non intégrable en temps.

3.2.2.3 Applications

Afin de montrer des performances élevées du retour stabilisant en temps petit des systèmes bilinéaires, nous illustrons notre approche par des simulations numériques.

Dans les exemples ci-dessous, on va prendre

$$u(t, y) = \begin{cases} -f(t) \frac{\langle By, y \rangle}{\|y\|^\beta} & y \neq 0, \beta \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$f(t) = (1 + t^2).$$

3.2.2.3.1 Exemple 1

Soit $y = (y_1, y_2)$, $u \in \mathbb{R}$ et la représentation

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + 2y_1u, \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + y_2u, \end{aligned} \quad (3.77)$$

ce qui équivaut au système bilinéaire $\dot{y} = Ay + uBy$ avec le choix suivant de matrices A et B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le retour u où

$$u(t, y) = \begin{cases} -(1 + t^2) \frac{2y_1^2 + y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\beta/2}} & \text{si } (y_1, y_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (y_1, y_2) = (0, 0), \end{cases} \quad (3.78)$$

où β est telle que $2 < \beta < 3$, stabilise en temps petit le système (3.77).

La condition initiale est $(y_1(0), y_2(0)) = (1.5, -1.5)$.

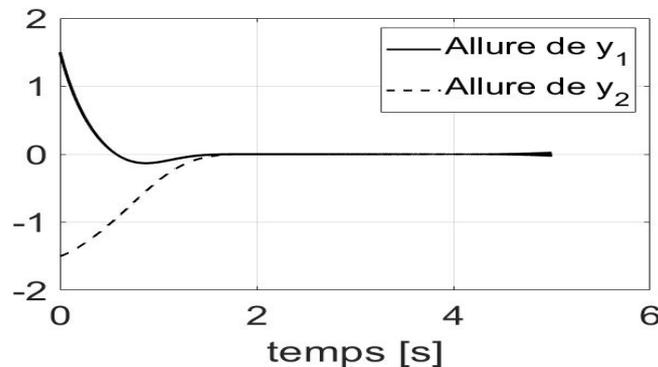


FIGURE 3.9 – Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.77)

3.2.2.3.2 Exemple 2

Le système bilinéaire suivant

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_2 - y_1 + 2y_1u, \\ \dot{y}_2 &= y_1 - 2y_2 + y_2u, \end{aligned} \quad (3.79)$$

est équivalent au système bilinéaire $\dot{y} = Ay + uBy$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ et, } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système (3.79) est stabilisé en temps petit par le retour (3.78).

La condition initiale est $(y_1(0), y_2(0)) = (1.5, -1.5)$.

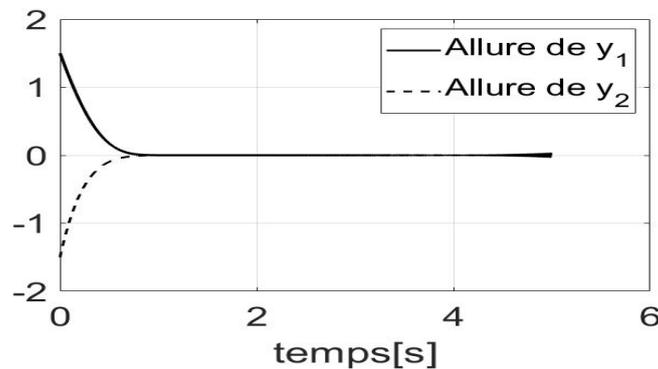


FIGURE 3.10 – Trajectoires des états y_1 et y_2 de (3.79)

3.3 Conclusion

Dans le but de réaliser le confinement des particules dans le système de Vlasov-Poisson, en temps fixe ou en temps petit, nous avons utilisé le système discrétisé qui décrit le mouvement de ces particules en dimension finie. Ainsi, en se basant sur la théorie d'homogénéité combinée avec l'approche de Lyapunov, nous avons construit une famille de retours d'état stabilisant en temps fixe le système en question. Des exemples illustratifs, justifiés par des simulations, sont donnés. Également, nous avons montré des résultats de stabilité en temps petit qui couvrent une classe de systèmes instationnaires. Ceci nous a permis de construire des retours instationnaires soumis à des excitations non intégrables qui stabilisent en temps petit le système discrétisé de Vlasov-Poisson et assurent, par la suite, le confinement des particules. Nos résultats théoriques sont validés par des tests numériques.

Chapitre 4

Stabilisation en temps fixe des systèmes dynamiques

Sommaire

4.1	Introduction	57
4.2	Nouvelle caractérisation de la stabilité en temps fixe	59
4.2.1	Définitions et résultats	59
4.2.2	Applications	64
4.3	Critère à base d'intégrales de la stabilité en temps fixe	69
4.3.1	Application sur les systèmes bilinéaires	71
4.3.2	Stabilisation par une fonction de Lyapunov homogène	72
4.3.3	Cas particulier	75
4.3.4	Exemple	77
4.4	Conclusion	77

4.1 Introduction

Le problème de la stabilité en temps fixe (ou bien extinction en temps fixe) est un sujet d'actualité qui a fait l'objet de nombreux articles et livres au cours des dix dernières années. Nous citons les travaux suivants [21, 51, 58, 73, 83, 105, 107, 133], car d'un point de vue pratique, il est préférable de savoir quand-est-ce qu'un système peut atteindre son point d'équilibre en temps petit avec une bonne précision. Ce problème a été soulevé par Polyakov dans [105] où l'auteur a introduit la notion de stabilité en temps fixe; puis il l'a caractérisé en terme de fonction de Lyapunov. Cette nouvelle idée de stabilité ouvre la porte aux diverses applications en automatique. Par exemple, le même auteur a traité le problème de stabilisation en temps fixe pour les systèmes mono-entrée et entrées multiples. La construction des retours d'état est basée sur des surfaces glissantes.

Dans [84], les auteurs ont donné des conditions nécessaires et suffisantes de types Lyapunov assurant la stabilité en temps fixe. Ils ont construit des retour d'état stabilisants pour tout système avec dérive.

Dans un récent livre par Zuo et al. [133, Chap. 2], les auteurs ont repris les résultats de base de la stabilité en temps fixe pour le développement d'algorithmes de coopération en temps

fixe pour des systèmes multi-agents.

Dans [21, 51], les auteurs ont résolu le problème de stabilisation de l'attitude des engins spatiaux flexibles en utilisant des retours stabilisants en temps fixe. Encore une fois, la construction est basée sur la technique des modes glissants. En outre, les auteurs ont construit un retour adaptatif en temps fixe pour les modèles génériques des engins spatiaux.

La contribution principale de ce chapitre est de présenter une nouvelle idée qui relaxe les résultats existants pour le problème de stabilité en temps fixe des systèmes dynamiques. On peut se demander quand-est-ce qu'un système dynamique est stable en temps fixe ? On montre que cette stabilité en temps fixe peut être obtenue en fusionnant la stabilité polynomiale [70] et la stabilité en temps fini. Cela nous permet de prouver, grâce à un théorème d'inversion de type Lyapunov, qu'un système dynamique est stable en temps fixe si et seulement s'il est décomposé en deux sous-systèmes l'un est stable en temps fini et l'autre est polynomialement stable. Cette caractérisation semble pratique pour montrer la stabilité en temps fixe car on a suffisamment de critères de stabilité en temps fini et de stabilité polynomiale.

La stabilité en temps fixe peut être qualifiée de "stabilité simultanée" (i.e. un mixage entre une stabilité lente et une stabilité rapide). C'est un phénomène naturel⁸ obtenu par deux transitions du système dynamique ; une phase lente qui correspond à la stabilité polynomiale et permet aux solutions d'accéder, en temps fixe, à un petit voisinage de l'équilibre, tandis que la deuxième phase (stabilité en temps fini) est rapide et permet aux solutions de converger vers zéro en temps petit (considéré fixe). Le temps fixe du processus dans ce cas est alors la somme des deux temps fixes.

Ce chapitre fait citer notre contribution [68]. Il est organisé comme suit. On commence par donner une nouvelle caractérisation de stabilité en temps fixe des systèmes dynamiques autonomes. Nous prouvons que la fusion de la stabilité polynomiale et la stabilité en temps fini conduit à une stabilité en temps fixe. Nous appliquons ce résultat pour construire des retours d'état stabilisants en temps fixe le système classique du double intégrateur. Par la suite, la construction d'un retour de sortie stabilisant en temps fixe utilisant un observateur. Puis, on présente des résultats qui concernent les systèmes de dimension infinie avec des exemples de systèmes bilinéaires.

Prenons, comme exemple, le système suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, u), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\ g(0, 0) &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, avec $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état et $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle.

Définition 4.1. Le système (4.1) est dit stabilisable en temps fixe par un retour continu s'il existe un contrôle admissible $x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}^m$ avec $u(0) = 0$ et le système en boucle fermée $\dot{x} = g(x, u(x))$ est stable en temps fixe. Plus précisément,

- (a) l'origine de $\dot{x} = g(x, u(x))$, $x(0) = x_0$ est stable en temps fini avec un temps d'établissement $T(x(0))$, $\left(\text{c.à.d. } \exists r > 0 : \|x(0)\| < r \Rightarrow x(t) = 0 \text{ pour } t \geq T(x(0)) \right)$.
- (b) il existe un $T_F > 0$, indépendant de la condition initiale, tel que $T(x(0)) < T_F$ et $x(t) = 0, \forall t \geq T_F$.

8. La stabilité en temps fixe traduit la durée de vie des solutions du système dynamique.

Exemple 4.2. *Le système scalaire $\dot{x} = u$ est stabilisable par le retour*

$$u(x) = -x^{\frac{1}{3}} - x^3.$$

De plus, il est prouvé, dans [133], que $T_F = \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$.

Le théorème suivant caractérise la stabilité en temps fixe.

Théorème 4.3. [107] *Supposons qu'il existe une fonction non bornée définie positive de classe \mathcal{C}^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$, tel que, le long du système $\dot{x} = g(x, 0) := h(x)$,*

$$\dot{V}(x(t)) \leq -c_1 V^\alpha(x(t)) - c_2 V^\beta(x(t)) \quad (4.2)$$

pour $c_1, c_2 > 0$ et $0 < \alpha < 1 < \beta$. Ainsi, l'origine du système $\dot{x} = h(x)$ est stable en temps fixe et le temps de stabilisation est donné par

$$T(x_0) \leq \frac{1}{c_1(1-\alpha)} + \frac{1}{c_2(\beta-1)}.$$

4.2 Nouvelle caractérisation de la stabilité en temps fixe

L'objet de cette section est de donner une nouvelle caractérisation de la stabilité en temps fixe. Dans la suite, nous rappelons quelques définitions et résultats qui seront utilisés.

4.2.1 Définitions et résultats

Nous adoptons les notations suivantes : $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire, tr est le symbole de transposition, sgn est la fonction signe usuelle ($sgn(x) = 1$ si $x > 0$, $sgn(x) = -1$ si $x < 0$ et $sgn(0) = 0$).

L'ensemble des rationnels positifs impairs, noté \mathbb{Q}_{odd}^+ , est une partie de \mathbb{Q}^+ définie par :

$$\mathbb{Q}_{odd}^+ = \left\{ r \in \mathbb{Q}_+ : r = \frac{p}{q}, \text{ où } p, q \text{ sont des entiers impairs} \right\}.$$

Avant de présenter quelques commentaires sur le théorème 4.3, qui repose sur la notion de stabilité polynomiale, nous précisons la signification de cette stabilité et sa caractérisation au sens de Lyapunov. Nous nous limitons au système en régime libre (c.à.d. sans contrôle)

$$\dot{x} = g(x, 0) := h(x), \quad h(0) = 0. \quad (4.3)$$

Par usage d'utilité, nous rappelons, ici, la définition de la stabilité polynomiale.

Définition 4.4. [7, 70] Le système (4.3) est dit polynomialement stable s'il existe des nombres positifs M, k et $\eta \leq 1$ tel que si⁹

$$(\exists r > 0 : (\|x(0)\| \leq r) \Rightarrow \|x(t)\| \leq \frac{M \|x(0)\|^\eta}{(1 + \|x(0)\|^k t)^k}, \quad \forall t \geq 0.$$

⁹. Si cette deuxième condition s'applique à tout $r > 0$, alors le système est dit globalement polynomialement stable pour $\dot{x} = h(x)$.

Remarque 4.5. Il est pratique, parfois, d'utiliser la définition suivante pour la stabilité polynomiale [67, 89] : Le système (4.3) est dit polynomialement stable s'il existe $r > 0$ et $\alpha > 0$ tel que

$$(\|x(0)\| \leq r) \Rightarrow \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha \|x(t)\| = 0 \right).$$

Le réel $\alpha > 0$ est le taux de décroissance de la solution $x(t)$.

Dans les travaux suivants [67, 69, 70], les auteurs ont prouvé des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité polynomiale du système continu (4.3). Ces conditions peuvent être résumées dans le théorème suivant.

Théorème 4.6. *Le système (4.3) est polynomialement stable si et seulement s'il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ candidate de Lyapunov de classe C^1 définie positive et deux constantes α et c positives tel que le long de la trajectoire $h(\cdot)$ on a*

$$\dot{V}(x(t)) \leq -cV^{1+\alpha}(x(t)). \quad (4.4)$$

Remarque 4.7. Du théorème 4.3, nous concluons que :

1. La condition $\dot{V}(x) \leq -c_1 V^\alpha(x) - c_2 V^\beta(x)$ induit $\dot{V}(x) \leq -c_1 V^\alpha(x)$ avec $0 < \alpha < 1$; ce qui implique que l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ est globalement stable en temps fini pour le système $\dot{x} = h(x)$, [16] et le temps d'établissement est continu à l'origine¹⁰. La propriété globale est déduite du fait que V est radialement non bornée.
2. De plus, la condition $\dot{V}(x) \leq -c_1 V^\alpha(x) - c_2 V^\beta(x)$ induit $\dot{V}(x) \leq -c_2 V^\beta(x)$ avec $\beta > 1$, ainsi à partir du théorème 4.6, l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$ est globalement polynomialement stable pour le système $\dot{x} = h(x)$. La fonction d'énergie V décroît comme $\frac{1}{t^{1/\beta-1}}$, voir [70].

Notre résultat peut être formulé de la façon suivante.

Proposition 4.8. *Considérons le système dynamique (4.3) et supposons que*

1. *Le système (4.3) est stable en temps fini et la fonction temps d'établissement $T : x \in \mathbb{R}^n \mapsto T(x)$ est continue à l'origine.*
2. *Le système (4.3) est polynomialement stable.*
3. *Les deux types de stabilité sont assignables par la même fonction de Lyapunov.*

Alors, le système (4.3) est stable en temps fixe.

Preuve. Considérons le système dynamique $\dot{x} = h(x)$, $h(0) = 0$ et supposons que les conditions de la proposition sont vérifiées.

Utilisons la première hypothèse, par le théorème de Lyapunov inverse [16, 65], il existe une fonction candidate de Lyapunov W , une constante $\alpha \in]0, 1[$ et $c_1 > 0$ tel que le long de $h(\cdot)$ on a

$$\dot{W}(x) \leq -c_1 W^\alpha(x).$$

Grâce à la troisième hypothèse, la fonction de Lyapunov W peut être utilisée pour caractériser cette stabilité polynomiale. Il existe donc des constantes $\beta > 1$ et $c_2 > 0$ tel que le long de

¹⁰. D'après l'inversion de Lyapunov, [16], la stabilité en temps fini n'est vraie que lorsque $T(\cdot)$ est continue en 0.

h on a $\dot{W}(x) \leq -c_2 W^\beta(x)$. En combinant les deux propriétés, nous obtenons $2\dot{W}(x) \leq -c_1 W^\alpha(x) - c_2 W^\beta(x)$ et

$$\dot{W}(x) \leq -\frac{c_1}{2} W^\alpha(x) - \frac{c_2}{2} W^\beta(x).$$

□

Le résultat suivant peut être démontré par le théorème 4.3.

Proposition 4.9. *Si h admet sur \mathbb{R}^n la décomposition $h = h_1 + h_2$, $h_1(0) = h_2(0) = 0$ avec h_1 est continue non-Lipschitzienne et h_2 est continue, on suppose que*

1. *Il existe $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 et radialement non bornée tel que pour $x \neq 0$ on a $\langle \nabla V(x), h_1(x) \rangle < 0$ et $\langle \nabla V(x), h_2(x) \rangle < 0$.*
2. *La fonction h_1 est homogène avec un degré négatif $d_1 < 0$ par rapport à une dilatation $\delta_\varepsilon^1(x)$ et la fonction h_2 est homogène avec un degré positif $d_2 > 0$ par rapport à une dilatation $\delta_\varepsilon^2(x)$.*

Alors, le système $\dot{x} = h(x)$ est globalement stable en temps fixe.

Discussion de la proposition 4.9

La première condition traduit la stabilité asymptotique des deux systèmes $\dot{x} = h_1(x)$ et $\dot{x} = h_2(x)$. Or, puisque la fusion de la stabilité asymptotique et de l'homogénéité avec un degré négatif (resp. avec un degré positif) conduit à la stabilité en temps fini, (resp. à la stabilité polynomiale, voir [7, 17, 67]). Ainsi, le système $\dot{x} = h_1(x)$ est stable en temps fini et $\dot{x} = h_2(x)$ est polynomialement stable. En outre, les deux systèmes sont assignables par la même fonction de Lyapunov V . Par conséquent, la proposition 4.8 nous permet de conclure.

Exemple 4.10. *Considérons le système scalaire donné par $\dot{x} = -\text{sgn}(x)|x|^a - x^p = h(x)$ où $a \in]0, 1[$ et p est un nombre rationnel impair tel que $p > 1$. Alors ce système est stable en temps fixe. En effet, il est clair dans cet exemple, que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -\text{sgn}(x)|x|^a - x^p = h_1(x) + h_2(x)$ où $h_1(x) = -\text{sgn}(x)|x|^a$ et $h_2(x) = -x^p$. Le système dynamique $\dot{x} = h_1(x)$ est stable en temps fini alors que le système $\dot{x} = h_2(x)$ est polynomialement stable. Pour les deux systèmes, la fonction candidate de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x^2$ est assignable. Ensuite, par la proposition 4.8, le système $\dot{x} = h(x)$ est stable en temps fixe. Un simple calcul montre que $\dot{V} = -|x|^{a+1} - x^{p+1} \leq -c_1 V^{(a+1)/2} - c_2 V^{(p+1)/2}$, avec la condition $0 < (a+1)/2 < 1 < (p+1)/2$. En fait, ce principe de décomposition de la fonction h est général. Supposons par exemple que $h = h_1 + h_2 + \dots + h_n$ où pour chaque h_i le système $\dot{x} = h_i(x)$ satisfait la propriété en temps fixe de la proposition 4.8. Alors le système $\dot{x} = h(x)$ est stable en temps fixe.*

Exemple 4.11. *On considère le système scalaire $\dot{x} = -\mu_1 \text{sgn}(x) - \mu_2 \text{sgn}(x)|x|^a - x^p$ où $\mu_i > 0$, $a \in]0, 1[$ et $p > 1$ un nombre impair. Soit $h_1(x) = -\mu_1 \text{sgn}(x)$, $h_2(x) = -\mu_2 \text{sgn}(x)|x|^a$ et $h_3(x) = -x^p$. Comme la partie droite du système est discontinue, alors les solutions sont définies au sens de Filippov [94]. Il est clair que les trois systèmes sont asymptotiquement stables et assignables par la fonction de Lyapunov $V = x^2$. En outre, h_1 et h_2 sont homogènes avec un degré négatif par rapport à la dilatation $\delta_\varepsilon x = \varepsilon x$; Plus précisément, on a $d_1 = -1$ et $d_2 = a - 1 < 0$, tandis que la fonction h_3 est homogène avec un degré d'homogénéité positif $d_3 = p - 1 > 0$. Ainsi, toutes les conditions de la proposition 4.9 sont vérifiées, le système est donc stable en temps fixe. D'autre part, nous avons, par un simple calcul, l'inégalité*

$\dot{V} \leq -2\mu_1 V^{1/2} - 2\mu_2 V^{(a+1)/2} - 2V^{(p+1)/2}$. Pour simplifier, on prend $\mu_1 = \mu_2 = 1$, alors le temps fixe T_F satisfait la contrainte suivante

$$\begin{aligned} T_F &\leq \frac{1}{2} \min \left\{ 2 + \frac{2}{p-1}, \frac{2}{1-a} + \frac{2}{p-1} \right\}, \\ &\leq \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{p-1} \right), \\ &\leq \frac{p}{p-1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Comme nous l'avons mentionné au début, nous présentons dans le prochain résultat une condition nécessaire de stabilité en temps fixe par la décomposition du champ vectoriel X en deux parties X_1 et X_2 , tel que $\dot{x} = X_1(x)$ est stable en temps fini et $\dot{x} = X_2(x)$ est polynomialement stable.

Théorème 4.12. [68] *Supposons que le système (4.3) est stable en temps fixe avec une fonction temps d'établissement continue T ainsi qu'une fonction escape-temps τ ¹¹. Alors, il existe des fonctions continues X_1 et $X_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $X_1(0) = X_2(0) = 0$ et X admet la décomposition $X = X_1 + X_2$ où $\dot{x} = X_1(x)$ est stable en temps fini et $\dot{x} = X_2(x)$ est polynomialement stable.*

Preuve. Comme le système $\dot{x} = X(x)$ est stable en temps fixe avec une fonction temps d'établissement continue $T(\cdot)$ ainsi qu'une fonction escape-temps d'évasion τ , alors, par le théorème inverse [84, Theo 7], il existe une fonction de Lyapunov V , des constantes positives c_1, c_2 et $0 < \alpha < 1 < \beta$ tel que le long du système on a

$$\dot{V}(x) \leq -c_1 V^\alpha(x) - c_2 V^\beta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.6}$$

Soit $c \leq \min(c_1, c_2)$. Grâce au théorème inverse de Lyapunov pour la stabilité en temps fini (resp. la stabilité polynomiale) [7, 16], on définit les fonctions continues $X_1, K_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $X_1(0) = K_1(0) = 0$,

$$-c_1 V^\alpha(x) \leq \langle \nabla V(x), X_1(x) \rangle \leq -c V^\alpha(x), \tag{4.7}$$

et

$$-c_2 V^\beta(x) \leq \langle \nabla V(x), K_1(x) \rangle \leq -c V^\beta(x). \tag{4.8}$$

De la partie droite de (4.7) et celle de (4.8), le système $\dot{x} = X_1(x)$ est stable en temps fini tandis que $\dot{x} = K_1(x)$ est polynomialement stable.

Soit φ la fonction continue définie par

$$\varphi := X - (X_1 + K_1).$$

Il est clair que

$$\varphi(0) = 0, \text{ et } \langle \nabla V(x), \varphi(x) \rangle = \langle \nabla V(x), X(x) \rangle - \langle \nabla V(x), X_1(x) + K_1(x) \rangle.$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, on a,

$$-\langle \nabla V(x), (X_1 + K_1)(x) \rangle \leq c_1 V^\alpha + c_2 V^\beta$$

11. La notion d'escape-temps est liée à l'explosion de la solution en temps fini ex. $\dot{x} = -x^2, x(0) = -1$ explose à $t_e = 1$. Le lecteur est invité à voir [84, Definition 3] pour la notion de stabilité en temps fixe.

et d'après (4.6), on a, de plus

$$\langle \nabla V(x), X(x) \rangle \leq -c_1 V^\alpha - c_2 V^\beta,$$

alors, par addition, on obtient

$$\langle \nabla V(x), \varphi(x) \rangle \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.9)$$

qui signifie que le système $\dot{x} = \varphi(x)$ est stable au sens de Lyapunov.

À partir de la construction ci-dessus, on peut affirmer que, le système $\dot{x} = K_1(x) + \varphi(x)$ reste polynomialement stable. On désigne alors par $X_2 := K_1 + \varphi$. Ainsi, en construisant φ , on obtient la décomposition $X = X_1 + X_2$. \square

Remarque 4.13. Le théorème précédent présente une obstruction à la stabilité en temps fixe. Par exemple, le système dynamique $\dot{x} = -x - x^{1/3}$ n'est pas stable en temps fixe. En effet, selon la décomposition ci-dessus nous avons $X_1(x) = -x^{1/3}$ et $X_2(x) = -x$. On peut montrer que le système $\dot{x} = X_1(x)$ est stable en temps fini alors que le système $\dot{x} = X_2(x)$ n'est pas polynomialement stable; Alors, d'après le théorème 4.12, le système global ne peut pas être stable en temps fixe.

Théorème 4.14. [68] *Supposons qu'il existe deux fonctions de Lyapunov V_1 et V_2 (V_2 non bornée) tel que*

$$\exists \alpha > 0, \beta > 0 \text{ deux réels tel que } \alpha V_2 \leq V_1 \leq \beta V_2. \quad (4.10)$$

$$\exists a > 0, b > 0, c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ avec } 0 < a < 1 < b \text{ et } \dot{V}_1 \leq -c_1 V_1^a, \dot{V}_2 \leq -c_2 V_2^b. \quad (4.11)$$

Alors, le système (4.3) est stable en temps fixe.

Preuve. On définit la fonction de Lyapunov non bornée $W := V_1 + V_2$. On a

$$\dot{W} \leq -c_1 V_1^a - c_2 V_2^b.$$

D'après l'hypothèse (4.10), on a $V_1^a \geq \alpha^a V_2^a$. Ainsi, on obtient

$$-\dot{W} \geq c_1 \alpha^a V_2^a + c_2 V_2^b \quad (4.12)$$

$$\geq \min(c_2, c_1 \alpha^a) (V_2^a + V_2^b) \quad (4.13)$$

$$\geq k_1 (V_2^a + V_2^b), \quad k_1 := \min(c_2, c_1 \alpha^a). \quad (4.14)$$

De même, on a $V_2^b \geq \frac{1}{\beta^b} V_1^b$ alors

$$-\dot{W} \geq c_1 V_1^a + \frac{c_2}{\beta^b} V_1^b \quad (4.15)$$

$$\geq \min(c_1, \frac{c_2}{\beta^b}) (V_1^a + V_1^b) \quad (4.16)$$

$$\geq k_2 (V_1^a + V_1^b), \quad k_2 := \min(c_1, \frac{c_2}{\beta^b}). \quad (4.17)$$

En utilisant les inégalités des puissances classiques (voir par exemple [58]) comme suit :

$$V_1^a + V_1^b \geq (V_1^a + V_1^b)^a, \quad \text{car } a \in]0, 1[,$$

et

$$V_2^b + V_1^b \geq 2^{1-b}(V_2 + V_1)^b, \text{ car } b > 1.$$

Ainsi, à partir de (4.12) et (4.15), on obtient

$$-2\dot{W} \geq (k_1V_2^a + k_2V_1^a) + (k_1V_2^b + k_2V_1^b) \quad (4.18)$$

$$\geq \min(k_1, k_2)(V_2^a + V_1^a) + \min(k_1, k_2)(V_2^b + V_1^b) \quad (4.19)$$

$$\geq k'W^a + 2^{1-b}k'W^b, \quad (4.20)$$

et

$$\dot{W} \leq -\frac{k'}{2}W^a - \frac{k'}{2^b}W^b. \quad (4.21)$$

Ce qui nous permet de conclure que le système (4.3) est stable en temps fixe. \square

4.2.2 Applications

4.2.2.1 Stabilisation en temps fixe du double intégrateur

Le double intégrateur est un système auxiliaire qui apparaît, par transformation ou difféomorphisme, dans plusieurs systèmes mécaniques. Nous présentons une nouvelle construction de retour stabilisant en temps fixe du double intégrateur.

$$\dot{x} = y, \dot{y} = u. \quad (4.22)$$

Les deux résultats suivants concernent les retours stabilisants en temps fixe. Le premier résultat introduit un retour continu tandis que le second utilise un retour discontinu. Pour le deuxième cas, le sens des solutions est défini au sens de Filippov [94].

Proposition 4.15. [68] *Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta > 2$. Alors, le système (4.22) est globalement stable en temps fixe sous l'action d'un retour de la forme*

$$\begin{aligned} u_{\alpha,\beta}(x, y) &= -\operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - \operatorname{sgn}(y)|y|^\alpha \\ &- x|x|^{\beta-2} - y|y|^{\frac{(\beta-2)}{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Preuve. Désignons par $u_\alpha(x, y) := -\operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - \operatorname{sgn}(y)|y|^\alpha$, $u_\beta(x, y) = -x|x|^{\beta-2} - y|y|^{\frac{(\beta-2)}{\beta}}$ et $z := (x, y)$. D'après [17], le retour u_α stabilise en temps fini le double intégrateur (4.22), alors que le retour u_β stabilise polynomialement le système (4.22) (voir [67]). Considérons la

matrice de Hurwitz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors, le système plan $\dot{z} = Az$ est asymptotiquement

stable. Par conséquent, il existe $P = P' > 0$ tel que $PA + A'P = -Q$ (équation de Lyapunov) où $Q = Q' > 0$. On a $\dot{V} = -z'Qz < 0$, $z \neq 0$. Nous allons prouver que la fonction de Lyapunov $V = z'Pz$ est assignable (c.-à-d. une fonction candidate de Lyapunov) pour les deux systèmes $\dot{z} = (y, u_\alpha(z))$ et $\dot{z} = (y, u_\beta(z))$.

Le retour u_α est homogène de degré $\alpha - 1 < 0$ par rapport à la dilatation $\delta_\varepsilon z := (\varepsilon^{2-\alpha}x, \varepsilon y)$ et stabilise en temps fini le système $\dot{z} = (y, u_\alpha(z))$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$. Puis, par l'argument du lemme de Tube [102], il existe $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ tel que pour chaque $\alpha \in]0, \varepsilon_0[$ la fonction V est une fonction candidate de Lyapunov pour le système $\dot{z} = (y, u_\alpha(z))$ et donc on a $\dot{V} < 0$

pour $z \neq 0$. La propriété d'homogénéité du système en boucle fermée donne $\dot{V} \leq -c_1 V^\alpha$, [17, Théorème 7.2].

De même, le système en boucle fermée $\dot{z} = (y, u_\beta(z))$ est polynomialement stable [67] et homogène avec un degré positif $d = \frac{\beta}{2} - 1$ par rapport à la dilatation $\Delta_\varepsilon z := (x, \varepsilon^{\beta/2} y)$.

Comme $\beta > 2$, alors la dilatation $z \mapsto \Delta_\varepsilon z$ est de classe \mathcal{C}^1 . En utilisant le lemme de Tube, il existe $\varepsilon_1 > 1$ tel que, pour chaque $\beta \in]1 + \varepsilon_1, +\infty[$, la fonction de Lyapunov V satisfait $\dot{V} \leq -cV^{1+m}$ où $m = \frac{\beta/2-1}{l}$ et $l = 3\beta/2$ (voir [67, Prop. 4.3]). Ainsi, le long du système en boucle fermée, nous avons $\dot{V} \leq -c_1 V^\alpha - c_2 V^{1+\frac{\beta-2}{3\beta}}$. Le théorème 4.3 permet de conclure. \square

Le résultat suivant concerne la stabilisation par un retour discontinu.

Proposition 4.16. [68] *Soient a et b deux paramètres connus tel que $a > b > 0$ et $\alpha \in]1, +\infty[$ un nombre réel. Alors, le système en boucle fermée (4.22) est stable en temps fixe par le retour discontinu suivant*

$$u(x, y) = -2a \operatorname{sgn}(x) - b \operatorname{sgn}(y) - b|y|^\alpha. \quad (4.24)$$

Preuve. Comme dans la preuve de la proposition 4.24, on désigne par $u_1(x, y) = -a \operatorname{sgn}(x) - b \operatorname{sgn}(y)$, $u_2(x, y) = -a \operatorname{sgn}(x) - b|y|^\alpha$ et $z = (x, y)$. D'après [93], le système $\dot{z} = u_1(x, y) = -a \operatorname{sgn}(x) - b \operatorname{sgn}(y)$ est stable en temps fini, et la fonction $V = a|x| + \frac{1}{2}y^2$ est une candidate de Lyapunov, homogène de degré $m = 2$ par rapport à la dilatation $\delta_\varepsilon(x, y) = (\varepsilon^2 x, \varepsilon y)$. De plus, le système en boucle fermée $\dot{z} = u_1(x, y)$ est homogène de degré négatif $d = -1$.

Considérons maintenant le système en boucle fermée

$$\ddot{z} = u_2(x, y) \text{ ou bien } \dot{z} = (y, u_2(x, y)). \quad (4.25)$$

La dérivée de V est donnée par $\dot{V} = -b|y|^{\alpha+1} \leq 0$. Soit $V_1 := b|y|^{\alpha+1}$. Comme la partie droite de l'équation (4.25) est discontinue alors le principe d'invariance ne fonctionne pas. On considère la fonction potentielle définie par $W = xy$, et on calcule la dérivée temporelle le long du système en boucle fermée $\dot{W} = y^2 - a|x| - bx|y|^\alpha \operatorname{sgn}(y)$. Pour tout $\delta > 0$, on définit l'ensemble $V_\delta = \{(x, y) : b|y|^{\alpha+1} \leq \delta\}$. Pour $(x, y) \in V_\delta$, on a $\dot{W} \leq y^2 - a|x| + b|x||y|^\alpha$. Puisque $2 < \alpha + 1 < 3$ alors $|y|^{\alpha+1} \leq |y|^2 + |y|^3$ et $|y|^\alpha \leq |y| + |y|^2 \leq (\frac{\delta}{b})^{1/(\alpha+1)} + (\frac{\delta}{b})^{2/(\alpha+1)}$. Par conséquent $\dot{W} \leq y^2 - a|x| + ((\frac{\delta}{b})^{1/(\alpha+1)} + (\frac{\delta}{b})^{2/(\alpha+1)})|x|$. On choisit a suffisamment grand que $M := ((\frac{\delta}{b})^{1/(\alpha+1)} + (\frac{\delta}{b})^{2/(\alpha+1)})$. On obtient, $c > 0$ tel que $\dot{W} \leq cV_1^{2/(\alpha+1)} - (a - M)|x|$ où $W_1 := cV_1^{2/(\alpha+1)} + (a - M)|x|$ est définie positive. Alors, le système en boucle fermée (4.25) est asymptotiquement stable [94].

Maintenant, un calcul simple montre que \dot{V} est homogène de degré positif $d = \alpha + 1$ par rapport à la dilatation $\delta_\varepsilon(x, y) = (\varepsilon^2 x, \varepsilon y)$. Ensuite, si $\alpha + 1 > 2$ qui signifie $\alpha > 1$ alors, par résultat prouvé dans [7, 67], le système en boucle fermée (4.25) est polynomialement stable i.e. $\dot{V} \leq -cV^{\frac{\alpha+1}{2}}$ avec $\frac{\alpha+1}{2} > 1$. En utilisant la proposition 4.8 on conclut que le système en boucle fermée (4.25) est globalement stable en temps fixe. \square

4.2.2.2 Synthèse d'observateur en temps fixe pour le double intégrateur

Par application du résultat principal, nous faisons la synthèse d'un nouvel observateur en temps fixe pour le système double intégrateur. Dans notre cas, nous allons utiliser la proposition 4.8.

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (4.26)$$

La dynamique de l'observateur d'état s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \varphi(y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 = u + \psi(y - \hat{x}_1). \end{cases} \quad (4.27)$$

Le système d'erreurs correspondant est donné par

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \varphi(e_1), \\ \dot{e}_2 = -\psi(e_1), \end{cases} \quad (4.28)$$

où $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ et $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$. Le problème de la synthèse consiste à construire les fonctions φ et ψ tel que $(e_1, e_2) = (0, 0)$ soit stable en temps fixe.

La conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires reste un défi en particulier pour le temps fini [12, 102, 104]. Cette construction est basée sur la propriété d'homogénéité donnée dans la proposition 4.9.

Proposition 4.17. [68] *Soit β tel que $1 < \beta < 2$. En choisissant les fonctions $\varphi(\cdot)$ et $\psi(\cdot)$ comme suit :*

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= 1/2(e_1|e_1|^{(\beta-1)/2} + \text{sgn}(e_1)|e_1|^{(\beta+1)/2}), \\ \psi(e_1) &= 1/2(e_1|e_1|^{\beta-1} + \text{sgn}(e_1)|e_1|^\beta), \end{aligned} \quad (4.29)$$

le système d'erreur (4.28) est globalement stable en temps fixe.

Preuve. Considérons la fonction candidate de Lyapunov V

$$V = \frac{1}{\beta+1}|e_1|^{\beta+1} + \frac{1}{2}e_2^2.$$

On définit les fonctions

$$h_1(e) = \left(\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_1|e_1|^{(\beta-1)/2}, \frac{1}{2}e_1|e_1|^{\beta-1}\right) \text{ et } h_2(e) = \left(\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}\text{sgn}(e_1)|e_1|^{(\beta+1)/2}, \frac{1}{2}\text{sgn}(e_1)|e_1|^\beta\right).$$

Alors, on a $\dot{e} = h_1(e) + h_2(e)$, où $e = (e_1, e_2)$. En utilisant l'argument de la proposition 4.9, on considère le système $(S_1) : \dot{e} = h_1(e)$ représenté par

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= f_1(e_1, e_2) := 1/2(e_2 - e_1|e_1|^{(\beta-1)/2}) \\ \dot{e}_2 &= f_2(e_1, e_2) := \frac{1}{2}e_1|e_1|^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

La fonction V est radialement non bornée et

$$2\dot{V} = -|e_1|^{(3\beta+1)/2} \leq 0.$$

Par le principe d'invariance de LaSalle, l'ensemble $\{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} = 0\}$ est réduit à $\{(0, 0)\}$. Par conséquent $(e_1, e_2) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

Soit la dilatation $\delta_\varepsilon(e_1, e_2) := (\varepsilon e_1, \varepsilon^{(\beta+1)/2} e_2)$. Par un simple calcul, nous avons

$$\begin{aligned} f_1(\delta_\varepsilon(e_1, e_2)) &= \varepsilon^{1+d_1} f_1(e_1, e_2) \\ f_2(\delta_\varepsilon(e_1, e_2)) &= \varepsilon^{(\beta+1)/2+d_1} f_2(e_1, e_2), \end{aligned} \quad (4.31)$$

où

$$d_1 = \frac{\beta - 2}{2} < 0.$$

Alors (4.31) est homogène, avec un degré négatif, par rapport à la dilatation δ_ε et donc (4.30) est globalement stable en temps fini.

De plus, si on considère le système $\dot{e} = h_2(e)$ dont sa représentation est :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= g_1(e_1, e_2) := 1/2(e_2 - \text{sgn}(e_1)|e_1|^{(\beta+1)/2}) \\ \dot{e}_2 &= g_2(e_1, e_2) := 1/2\text{sgn}(e_1)|e_1|^\beta, \end{aligned} \quad (4.32)$$

Par un calcul simple la dérivée temporelle de V le long de (4.32), on obtient

$$2\dot{V} = -|e_1|^{(3\beta+1)/2} \leq 0,$$

et par le principe d'invariance de LaSalle nous concluons que (4.32) est globalement asymptotiquement stable. Comme dans la première étape, on a

$$\begin{aligned} g_1(\delta_\varepsilon(e_1, e_2)) &= \varepsilon^{1+d_2} g_1(e_1, e_2) \\ g_2(\delta_\varepsilon(e_1, e_2)) &= \varepsilon^{(\beta+1)/2+d_2} g_2(e_1, e_2), \end{aligned} \quad (4.33)$$

où

$$d_2 = \frac{\beta - 1}{2} > 0.$$

Alors le système (4.32) est globalement polynomialement stable. Par conséquent, le système d'erreur $\dot{e} = h(e)$ où $h = h_1 + h_2$ est globalement stable en temps fixe. \square

Théorème 4.18. [68] Soient $u_{\alpha_0, \beta_0}(x_1, x_2)$ le retour donné dans la proposition 4.8, et soient $\varphi(e_1)$ et $\psi(e_1)$ comme dans la proposition 4.17. Alors, le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_{\alpha_0, \beta_0}(x_1, x_2 - e_2), \\ \dot{e}_1 = e_2 - \varphi(e_1), \\ \dot{e}_2 = -\psi(e_1), \end{cases} \quad (4.34)$$

est globalement stable en temps fixe.

4.2.2.3 Simulations numériques

Dans cette section, nous présentons des simulations numériques des exemples traités dans les propositions 4.9, 4.15 et du théorème 4.18. La figure 4.1 représente la simulation du double intégrateur pour le retour continu stabilisant en temps fixe. Dans ce cas, avec le choix de $\alpha = 0.7$, $\beta = 2.7$ et la condition initiale $(x_1(0), x_2(0)) = (-4, 5)$, on remarque que $T_F \cong 4.5$ est le temps fixe. Alors que, pour les retours discontinus, on remarque des phénomènes de

chattering. Cela est dû à la présence de la fonction *sign* dans l'expression du retour (voir 4.2 et 4.3). Pour cette simulation, nous avons pris $(x_1(0), x_2(0)) = (1.5, -1.5)$.

En outre, les observateurs en temps fixe proposés et les retours de sortie du théorème 4.18 sont testés numériquement. La figure 4.5 représente le comportement en temps fixe du système en boucle fermée (4.34). En particulier, l'état (x_1, x_2) du double intégrateur et l'erreur (e_1, e_2) en temps fixe sont représentés. Dans ces simulations, les conditions initiales sont $(x_1(0), x_2(0), e_1(0), e_2(0)) = (-3, 0.5, 2, -0.5)$, avec $\beta = 0.7$ comme dans la proposition 4.17.

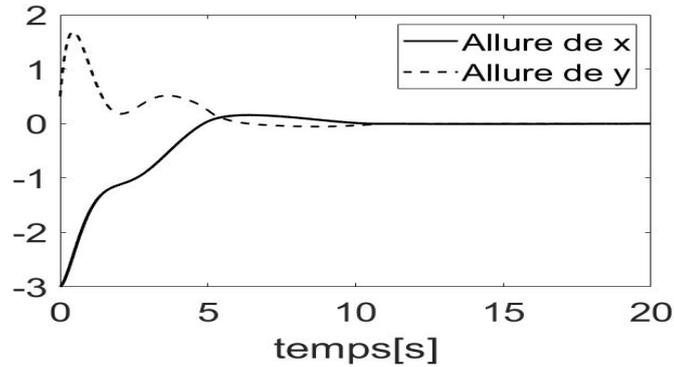


FIGURE 4.1 – Évolution des trajectoires $x(t)$ et $y(t)$.

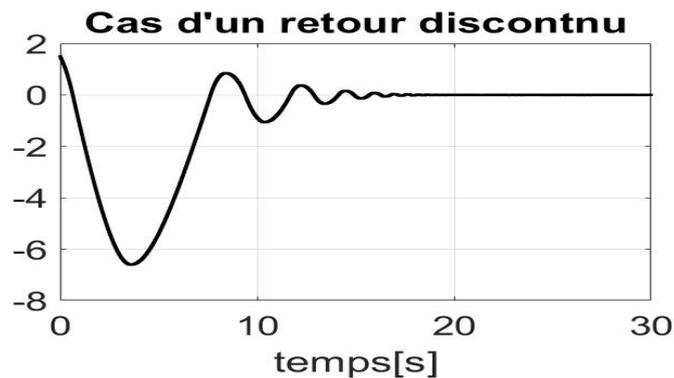


FIGURE 4.2 – Évolution de la trajectoire $x(t)$.

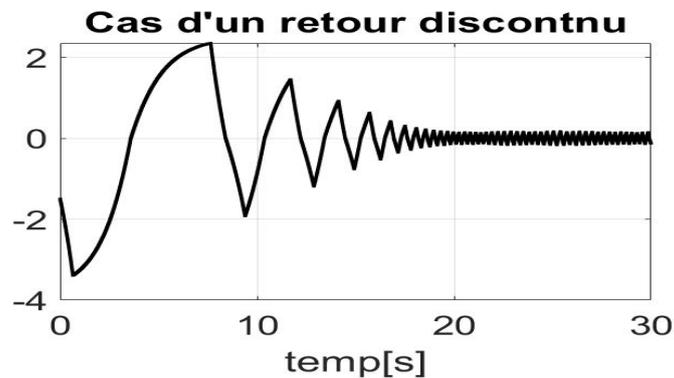
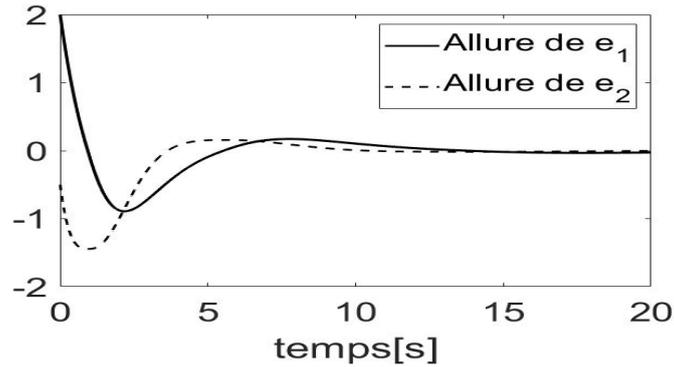
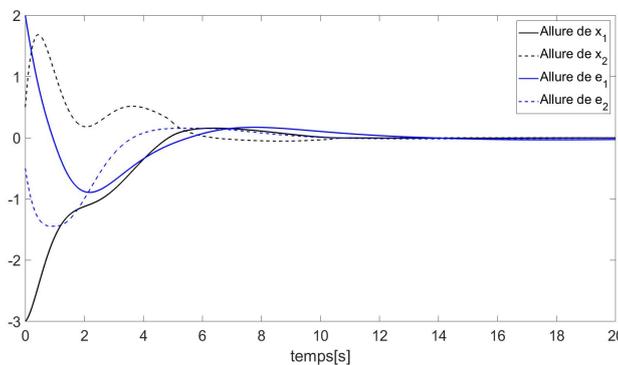


FIGURE 4.3 – Évolution de la trajectoire $y(t)$.


 FIGURE 4.4 – Évolution des observateurs e_1 et e_2 .

 FIGURE 4.5 – Trajectoires des états x_1 , x_2 , e_1 , et e_2 .

4.3 Critère à base d'intégrales de la stabilité en temps fixe

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilité en temps fixe des systèmes de dimension infinie.

Théorème 4.19. [68] Soit $E : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe une fonction continue $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la restriction de $r|_{[0, +\infty[} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est dans la classe \mathcal{K} ¹² et

$$\int_t^{+\infty} r(E(s)) ds \leq E(t), \quad t \geq 0. \quad (4.35)$$

Si le système scalaire $\dot{x} = -r(x)$ est stable en temps fixe alors $E = 0$ en temps fixe.

Preuve. Observons que, si $E(0) = 0$, alors $\int_0^{+\infty} r(E)(s) ds = 0$, d'où par la positivité de r sur $[0, +\infty[$ et l'argument de continuité de r et E , nous concluons que $r(E)(t) = 0, \forall t \geq 0$; et

12. Une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite dans la classe \mathcal{K} si $\alpha(0) = 0$ et α est continue et strictement croissante.

du fait que $r \in \mathcal{K}$ sur $[0, +\infty[$, on déduit facilement que $E(t) = 0, \forall t \geq 0$. On suppose que $E(0) \neq 0$. On introduit la fonction positive F sur $[0, +\infty[$ définie par

$$F(t) = \int_t^{+\infty} r(E(s))ds.$$

Il est clair que la fonction F est différentiable et

$$\dot{F}(t) = -r(E(t)) \leq 0.$$

Comme r est croissante et $F(t) \leq E(t), \forall t \geq 0$, nous obtenons pour chaque $t \geq 0, r(F(t)) \leq r(E(t))$ et

$$\dot{F}(t) \leq -r(F).$$

Nous utilisons l'hypothèse que, dans \mathbb{R} le système, $\dot{x} = -r(x)$ est stable en temps fixe pour déduire par le principe de comparaison [72, Lemme 3.4] que $F(t) = 0$ en temps fixe, et par conséquent $E(t) = 0$ en temps fixe. \square

Remarque 4.20. Pour une telle fonction $r(\cdot)$, on peut prendre comme exemple $r(x) = x^{1/p} + x^p, x \in \mathbb{R}$ où $p > 1$ est un nombre impair. Il est facile de voir, en appliquant le théorème 4.3 avec la fonction de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x^2$, que $\dot{x} = -r(x)$ est stable en temps fixe, et le temps d'établissement est donné par

$$T_F = \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{2^{(1-p)/2p}} + \frac{1}{2^{(p-1)/2}} \right).$$

Corollaire 4.21. [68] *On considère E et r comme dans le théorème précédent. Supposons, de plus, qu'il existe $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante telle que $v(0) = 0$, et $r \neq v^{-1}$. Si l'inégalité suivante*

$$\int_t^{+\infty} r(E(s))ds \leq v(E(t)), \quad t \geq 0, \quad (4.36)$$

est vraie et le système scalaire $\dot{x} = -r \circ v^{-1}(x)$ est stable en temps fixe alors $E = 0$ en temps fixe.

Preuve. Comme dans la preuve précédente, nous définissons la fonction différentiable F sur $[0, +\infty[$ par

$$F(t) = \int_t^{+\infty} r(E(s))ds,$$

nous avons $\dot{F}(t) = -r(E(t))$. D'après les définitions de r et v , il est clair que F satisfait l'inégalité

$$\dot{F} \leq -r \circ v^{-1}(F).$$

Puisque le système scalaire $\dot{x} = -r \circ v^{-1}(x)$ est stable en temps fixe alors, par le principe de comparaison [72, Lemme 3.4], nous obtenons $F = 0$ en temps fixe et donc E converge vers zéro en temps fixe.

Par exemple, l'inégalité intégrale $\int_t^{+\infty} (E(s) + E^9(s))ds \leq E^3(t)$ conduit à la convergence vers zéro de la fonction E en temps fixe. Il est clair, ici, que $r \circ v^{-1}(x) = x^{1/3} + x^3$ et que les solutions de $\dot{x} = -x^{1/3} - x^3$ convergent vers zéro en temps fixe $T = \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi$. \square

4.3.1 Application sur les systèmes bilinéaires

Afin d'étudier la stabilité en temps fixe du système discrétisé de Vlasov-Poisson (3.19), nous nous focalisons sur les systèmes bilinéaires, de dimension infinie, de la forme

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + u(t)By(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.37)$$

où, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire de classe \mathcal{C}_0 sur un espace de Hilbert réel H avec un domaine $\mathcal{D}(A)$, $B : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire borné, $t \mapsto y(t) \in H$ est l'état du système et la fonction scalaire $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle. Le système de la forme (4.37) décrit plusieurs modèles physiques tel que les systèmes quantiques, économiques ou biologiques [19, 22, 37, 91, 127].

En dimension finie, [114], l'auteur montre sous certaines hypothèses sur les matrices A et B que le système bilinéaire peut être stabilisé par un retour quadratique optimal. En outre, le retour stabilisant est lent et la solution du système en boucle fermée décroît lentement comme $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Le résultat de Quinn a été utilisé par de nombreux auteurs [27, 95, 131]. En particulier, dans [27], l'auteur prouve une stabilisation rapide (i.e. exponentielle) d'un système bilinéaire en utilisant des retours d'état uniformément bornés. En outre, la stabilisation globale en temps fini des systèmes bilinéaires avec un retour d'état homogène est résolue dans [120]. De plus, le retour d'état temps-variant et stabilisant en temps petit/préscrit est traité dans [67].

Théorème 4.22. [68] *On considère le système bilinéaire (4.37) et on suppose que :*

1. *l'opérateur A est dissipatif et est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact sur H .*
2. *l'opérateur B est fortement positif, c.-à-d., pour certains $k > 0$, nous avons $\langle By, y \rangle \geq k\|y\|^2, \forall y \in H$.*

Soit p un nombre rationnel impair tel que $1 < p < 2$. On définit sur \mathbb{R} la fonction scalaire r telle que $r(x) = x^{1/p} + x^p$. Alors, le retour défini par

$$u(y) = \begin{cases} -\frac{r(\|y\|^2)}{\langle By, y \rangle} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

stabilise en temps fixe le système en boucle fermée (4.37).

Preuve. Étape 1 : Problème bien posé.

En boucle fermée, le système (4.37) est une équation d'évolution de la forme $\dot{y} = Ay + F(y)$, où A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact sur H , et $F(y) = -\frac{r(\|y\|^2)}{\langle By, y \rangle}By, y \neq 0$, avec $F(0) = 0$; alors F est continu sur H . En effet, comme B est borné et fortement positif alors pour $y \neq 0$, on obtient

$$\|F(y)\| \leq \frac{\|B\| (\|y\|^{2/p} + \|y\|^{2p})}{k \|y\|} \quad (4.39)$$

$$\leq c(\|y\|^{(2/p)-1} + \|y\|^{2p-1}), \quad (4.40)$$

où c regroupe toutes les constantes. Vu que $p \in]1, 2[$, alors le côté droit de (4.40) tend vers zéro lorsque y s'approche de zéro, ce qui réalise la continuité de F . De plus, F envoie tout ensemble borné sur un ensemble borné, et donc le système en boucle fermée (4.37) possède une solution faible maximale y définie sur $[0, t_{\max})$ (voir, [99, Théorème 2.1]). Du fait que $\langle F(y), y \rangle \leq 0$, nous déduisons la limite [9] que $y(t)$ est continu par rapport à y_0 et

$$\|y(t)\| \leq \|y_0\|, \quad \forall t \in [0, t_{\max}).$$

Cela signifie que la solution y est globale, c.à.d. $t_{\max} = +\infty$ (voir [99, Théorème 2.2 pp. 192]).

Étape 2 : Stabilisation en temps fixe.

Pour cette étape, nous utilisons la fonction énergie $E(t) := \frac{1}{2}\|y(t)\|^2$ et nous calculons \dot{E} , pour presque tout $t \in [0, +\infty[$, le long des courbes de (4.37). Nous obtenons, pour presque tout $t \in [0, +\infty[$, les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \langle Ay, y \rangle + u(y)\langle By, y \rangle \\ &\leq -r(2E) \text{ (car } A \text{ est dissipative)} \\ &\leq -r(E) \leq 0 \text{ (car } r \text{ est une fonction croissante sur } [0, +\infty[). \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction énergie E admet une limite finie en $+\infty$. Alors, si nous intégrons la dernière inégalité sur $[t, +\infty[$, nous obtenons

$$\int_t^{+\infty} r(E(s))ds \leq E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.41)$$

Puisque le système scalaire $\dot{x} = -r(x)$ est stable en temps fixe, alors toutes les hypothèses du théorème 4.19 sont vérifiées. Nous déduisons, ainsi, à partir de (4.41) que E converge vers zéro en temps fixe. Plus précisément,

$$y(t) = 0 \text{ pour presque tout } t \geq T_F = \frac{1}{p-1} \left(\frac{p}{2^{(1-p)/2p}} + \frac{1}{2^{(p-1)/2}} \right).$$

□

4.3.2 Stabilisation par une fonction de Lyapunov homogène

Dans cette partie, nous résolvons la stabilisation en temps fixe de (4.37) en utilisant une approche homogène pour l'espace de dimension infinie de Hilbert [107, 109]. Étant donné une dilatation d définie sur H , le résultat suivant présente un lemme de comparaison entre la norme habituelle $\|\cdot\|$ sur H et la norme homogène, généralement notée par, $\|\cdot\|_d$.

Lemme 4.23. [107, Lemme 7.2] *Si la dilatation d est strictement monotone sur H , alors :*

1. *Il existe des constantes $a \geq b > 0$ et $M \geq 1$ tels que*

$$\frac{1}{M}\|y\|_d^a \leq \|y\| \leq \|y\|_d^b, \quad y \in B_d(1)^{13},$$

et

$$\|y\|_d^b \leq \|y\| \leq M\|y\|_d^a, \quad y \in H \setminus B_d(1).$$

13. L'ensemble $B_d(1) = \{y \in H : \|y\|_d < 1\}$ est la boule ouverte homogène centrée en zéro et de rayon 1.

2. La norme homogène $\|\cdot\|_d$ satisfait la condition de Lipschitz sur la couronne

$$K(r_1, r_2) := \{y \in H : r_1 \leq \|y\| \leq r_2\}, \quad 0 < r_1 < r_2.$$

Le résultat principal dans cette section est énoncé comme suit.

Proposition 4.24. [68] *On considère le système bilinéaire (4.37). Supposons que :*

1. La dilatation d sur H est strictement monotone, et le groupe associé G_d sur $D \subset D(G_d)$ où D est dense dans H , satisfait

$$k_1 \|z\|^2 \leq \langle G_d z, z \rangle \leq k_2 \|z\|^2 \quad \text{pour } k_1, k_2 > 0 \text{ et pour tout } z \in D,$$

2. l'opérateur A génère un semi-groupe de contractions sur H tel que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(G_d)$,

3. l'opérateur B est fortement positif, c.à.d., il existe $k > 0$ tel que pour tout $y \in H$, on a $\langle By, y \rangle \geq k \|y\|^2$,

4. l'opérateur A et B sont, respectivement, homogènes de degré m et 0 par rapport à la dilatation d .

Alors, avec le retour d'état suivant

$$u_1(y) = -\|y\|_d^\theta, \quad \theta > 0, \quad (4.42)$$

le système en boucle fermée (4.37) est polynomialement stable.

Preuve. Étape 1 : Problème bien posé. En boucle fermée, le système (4.37) est une équation d'évolution de la forme $\dot{y} = Ay - \|y\|_d^\theta By = Ay + F(y)$, $y(0) = y_0 \neq 0$ où $F(y) := -\|y\|_d^\theta By$. Comme l'opérateur A génère un semi-groupe de contractions, alors, pour prouver que le système est bien-posé, il suffit de prouver que F est localement Lipschitzienne [99].

Soient $\rho_1, \rho_2 > 0$ deux nombres réels et soit $z, y \in H$ tels que $\rho_1 < \|y\| \leq \|z\| \leq \rho_2$, alors on a

$$\begin{aligned} F(y) - F(z) &= \|z\|_d^\theta Bz - \|y\|_d^\theta By \\ &= (\|z\|_d^\theta - \|y\|_d^\theta) Bz + \|y\|_d^\theta B(z - y). \end{aligned}$$

Nous utilisons la deuxième propriété du lemme 4.23, qui indique que $\|\cdot\|_d$ satisfait la condition de Lipschitz sur $K(\rho_1, \rho_2)$, pour avoir une constante $c > 0$ tel que

$$|\|z\|_d^\theta - \|y\|_d^\theta| \leq c \|z - y\|.$$

D'après les inégalités précédentes, nous déduisons que

$$\|F(y) - F(z)\| \leq ((c + 1)\rho_2 \|B\|) \|y - z\|.$$

Ceci montre que F est localement Lipschitz.

Enfin, F est Lipschitz lorsque $y = 0$ et $z \in H \setminus \{0\}$ voisin de zéro. En utilisant la partie gauche de la première inégalité du lemme 4.23, on obtient facilement

$$\|F(z)\| \leq c' \|z\|^{1+\theta/b} \quad (c' \text{ regroupe toutes les constantes}),$$

Il est clair que lorsque z s'approche de zéro, $\|z\|^{1+\theta/b} = o(\|z\|)$. Ce qui signifie, qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\|z\|^{1+\theta/b} \leq \mu\|z\|$ pour z près de zéro.

Par conséquent, le système en boucle fermée (4.37) admet une unique solution faible et maximale. Et comme $\langle F(y), y \rangle \leq 0$ alors cette solution maximale est définie sur $[0, +\infty[$. En outre, d'après [99, Théorème 1.6, p. 189], pour $y_0 \in D(A)$ dense dans H , cette solution faible est classique¹⁴.

Étape 2 : Stabilité polynomiale du système en boucle fermée. Nous considérons la fonction candidate de Lyapunov définie par

$$E(t) = \frac{1}{\alpha} \|y(t)\|_d^\alpha, \quad \forall y \in H \text{ et } \alpha > 1. \quad (4.43)$$

Soit $y_0 \in \mathcal{D}(A)$. Puisque $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(G_d)$ et la fonction $y \mapsto V(y)$ est différentiable au sens de Fréchet sur $\mathcal{D}(G_d) \setminus \{0\}$, alors, de la dérivation de la norme homogène au sens de Fréchet [109, Lemme 2], et pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a le long du système (4.37)

$$\dot{E}(t) = \frac{\langle d(-\ln(\|y(t)\|_d))(Ay(t) + u_1(t))By(t), d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t) \rangle}{\langle G_d d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t), d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t) \rangle} \|y(t)\|_d^\alpha.$$

En utilisant l'hypothèse 4 sur A et B , nous obtenons pour tout $t \in [0, +\infty[$

$$\dot{E}(t) \leq \frac{1}{k_1} u_1(t) \langle Bd(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t), d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t) \rangle \|y(t)\|_d^\alpha$$

et en boucle fermée, nous obtenons

$$\dot{E}(t) \leq -\frac{1}{k_1} \langle Bd(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t), d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t) \rangle \|y(t)\|_d^{\alpha+\theta} \leq 0.$$

Comme, pour $y \neq 0$, on a

$$\|d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t)\| = 1; \quad (4.44)$$

et B étant fortement positif alors on a

$$\dot{E}(t) \leq -c \|y(t)\|_d^{\alpha+\theta}, \quad (4.45)$$

où c regroupe toutes les constantes.

En résumé, nous avons

$$\dot{E}(t) \leq -c E(t)^{1+(\alpha+\theta)/\alpha}, \quad (4.46)$$

avec l'exposant $1 + (\alpha + \theta)/\alpha > 1$. Ce qui prouve, par le théorème 4.6, que le système en boucle fermée (4.37) est polynomialement stable. \square

Proposition 4.25. [67] *On considère le système (4.37) selon les hypothèses de la proposition 4.24. Soit le retour d'état défini par*

$$u_2(y) = \begin{cases} -\frac{\langle By, y \rangle}{\|y\|_d^\beta} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (4.47)$$

où $\|\cdot\|_d$ est la norme homogène associée à d , avec la condition $3b > \beta > 2a$, où a et b sont données dans le lemme 4.23. Alors, par le retour $u(y)$, le système en boucle fermée (4.37) est stable en temps fini.

14. Pour $\dot{y} = Ay + uBy$, la solution classique est de la forme $y(t) = y(0) + \int_0^t (Ay(s) + uBy(s)) ds$.

Comme conséquence des deux propositions, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 4.26. [68] *Considérons le système (4.37) avec les hypothèses des deux propositions 4.24 et 4.25. Par le retour d'état $y \mapsto u_1(y) + u_2(y)$, le système en boucle fermée (4.37) converge vers le point d'équilibre en temps fixe.*

Preuve. Le système en boucle fermée prend la forme $\dot{y} = X_1(y) + X_2(y)$ où $X_1(y) = \frac{1}{2}Ay + u_1(y)By$ et $X_2(y) = \frac{1}{2}Ay + u_2(y)By$. Le système $\dot{y} = X_1(y)$ est polynomialement stable alors que $\dot{y} = X_2(y)$ est stable en temps fini. Ainsi, le théorème 4.12 nous permet de conclure. \square

4.3.3 Cas particulier

On considère l'application de dualité J définie par

$$J(x) := \{x^* \in H^* : \|x^*\| = \|x\|, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2\}, \quad \forall x \in H,$$

où H^* désigne l'ensemble des formes linéaires continues sur H .

Il est connu que si A génère un semi-groupe de contractions sur H alors, pour $x \in \mathcal{D}(A)$, il existe $x^* \in J(x)$ tel que $\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Pour $x \in H$, chaque élément de $J(x)$ est noté par f_x . On dit que J est continue Lipschitzienne si J est à valeur unique et l'application $x \mapsto f_x$ est continue Lipschitzienne [130].

Dans cette partie, nous supposons comme dans [96] que

$$(K) : J \text{ est continue et Lipschitzienne.}$$

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [130].

Notons que l'hypothèse (K) implique que la norme $\|\cdot\|^2$ est différentiable au sens de Fréchet (voir [1]). Nous avons le lemme suivant.

Lemme 4.27 ([71]). *Soit $t \mapsto f(t) \in H$ une fonction qui satisfait :*

1. *La fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ est différentiable presque partout sur \mathbb{R} ,*
2. *La dérivée faible f' de f existe presque partout sur \mathbb{R} .*

Alors, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|f(t)\| \left(\frac{d}{dt} \|f(t)\| \right) = \langle f'(t), x^* \rangle, \quad x^* \in J(f(t)).$$

Le résultat suivant concerne la stabilisation en temps fixe du système bilinéaire sous l'hypothèse (K) .

Proposition 4.28. [68] *Supposons que l'opérateur A génère un semi-groupe compact de contractions sur H , B est un opérateur borné, linéaire et fortement positif. Supposons, en outre, que l'hypothèse (K) est vérifiée. Pour $\gamma_i/2$, $i = 1, 2$ des nombres rationnels impairs, nous définissons les retours d'état :*

$$u_1(y) = \begin{cases} -\frac{\|y\|^{\gamma_1}}{\langle By, J(y) \rangle}, & \text{si } y \neq 0 \text{ et } \gamma_1 \in]1, 2[\\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

$$u_2(y) = \begin{cases} -\frac{\|y\|^{\gamma_2}}{\langle By, J(y) \rangle}, & \text{si } y \neq 0 \text{ et } \gamma_2 \in]2, +\infty[, \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (4.49)$$

Alors, le retour $u(y) = u_1(y) + u_2(y)$ rend le système en boucle fermée (4.37) globalement stable en temps fixe.

Preuve. Supposons que B est un opérateur borné et fortement positif; c.à.d. il existe $k > 0$ tel que pour tout $y \in H$ on a $\langle By, y \rangle \geq k\|y\|^2$. Ainsi, l'application F définie par $F(0) = 0$, et pour $y \neq 0$, $F(y) = u(y)By$ est continue sur H . En effet, il suffit d'étudier la continuité de F en zéro. Par une estimation simple de F selon les hypothèses du théorème et l'hypothèse (K) nous obtenons pour tout $y \neq 0$,

$$\|F(y)\| \leq \frac{\|y\|^{\gamma_1-1} + \|y\|^{\gamma_2-1}}{k\|J\|}.$$

La partie droite de cette inégalité tend vers zéro lorsque y tend vers zéro. Ce qui implique que F est continue en zéro. Par conséquent, par la compacité de l'opérateur A , toutes les hypothèses de [99, Théorème 2.1] sont vérifiées, et donc le problème de Cauchy (4.37-4.49) admet une solution faible y . Et, comme l'application F envoie tout ensemble borné sur un ensemble borné, alors la solution y est maximale sur $[0, +\infty[$, voir [99, Théorème 2.2, pp. 192].

Pour le résultat de stabilité, nous considérons la fonction d'énergie E définie par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|y(t)\|^2.$$

D'après l'hypothèse (K), pour presque tout t , la fonction E est différentiable, et pour presque tout t , nous avons le long du système en boucle fermée (4.37)

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \langle \dot{y}, J(y) \rangle \\ &= \langle Ay, J(y) \rangle + u(y)\langle By, J(y) \rangle. \end{aligned}$$

Puisque A est dissipatif (car A génère un semi-groupe de contractions), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{E} &\leq u(y)\langle By, J(y) \rangle, \\ &\leq -\|y\|^{\gamma_1} - \|y\|^{\gamma_2}, \\ &\leq -r(E), \end{aligned}$$

où r est une fonction croissante définie sur \mathbb{R} par $r(x) = x^{\frac{\gamma_1}{2}} + x^{\frac{\gamma_2}{2}}$ avec les exposants impairs $\frac{\gamma_1}{2} < 1$ et $\frac{\gamma_2}{2} > 1$. Il est clair que le système scalaire $\dot{x} = -r(x)$ est stable en temps fixe, avec un temps d'établissement donné par $T_{\gamma_1, \gamma_2} = \frac{4}{2^{(\gamma_1+2)/4}(2-\gamma_1)} + \frac{4}{2^{(\gamma_2+2)/4}(\gamma_2-2)}$. Encore une fois, par intégration sur $[t, +\infty[$ on obtient l'inégalité

$$\int_t^{+\infty} r(E)(s)ds \leq E.$$

Enfin, nous utilisons le fait que $\dot{x} = -r(x)$ est stable en temps fixe pour conclure par le théorème 4.19, que E converge vers zéro en temps fixe et donc $y = 0$ pour presque tout $t \geq T_{\gamma_1, \gamma_1}$. \square

4.3.4 Exemple

On considère le système bilinéaire suivant $\dot{y} = Ay + uBy$, où A et B sont deux matrices choisies comme suit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par rapport à ce choix, la matrice A est dissipative, et la matrice B est fortement positive. Le retour (4.38), dans ce cas, a l'expression suivante :

$$u(y) = \begin{cases} -\frac{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{10}{3}} + (y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{5}}}{2y_1^2 + y_1y_2 + 3y_2^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

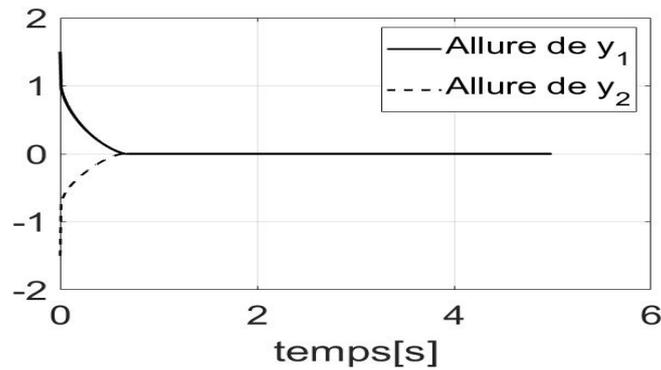


FIGURE 4.6 – Trajectoires des états y_1 et y_2 .

La figure 4.6 montre que le retour d'état (4.50) stabilise en temps fixe le système $\dot{y} = Ay + uBy$. Le temps d'établissement est $T = 0.65$.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un nouveau critère «simple» garantissant la stabilité en temps fixe des systèmes dynamiques autonomes ; il s'agit de la fusion des stabilités rapides et lentes du système dynamique à condition que les deux propriétés soient assignables par la même fonction de Lyapunov. En tant qu'application, la stabilité du système double intégrateur est résolue en temps fixe par divers retours d'état : continu et discontinu. Une extension à la conception d'observateur d'état a également été établie. La deuxième application concerne la stabilisation en temps fixe des systèmes bilinéaires de dimension infinie.

Chapitre 5

Stabilisation en temps petit de quelques systèmes en dimension infinie

Sommaire

5.1	Introduction	79
5.2	Extensions pour une dimension quelconque	81
5.3	Stabilisation en temps petit des systèmes non autonomes en dimension infinie	82
5.3.1	Critères de type intégrales	82
5.3.2	Application à l'équation de transport en dimension infinie	84
5.3.3	Application aux systèmes bilinéaires	87
5.3.4	Application aux équations d'onde avec condition au bord de type Wentzell	89
5.4	Conclusion	93

5.1 Introduction

La notion de stabilité en temps petit a reçu beaucoup d'attention ces dernières années; [11, 16, 17, 31, 33, 38, 39, 40, 63, 93, 94, 101, 107, 109, 120]. Toutefois, la plupart des méthodes utilisées pour analyser cette stabilité sont principalement basées sur la théorie de Lyapunov. Parmi ces méthodes, on trouve :

1. Stabilité en temps petit basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov V convenablement choisi de sorte que sa dérivée le long des trajectoires du système satisfait la contrainte $\dot{V} \leq -cV^\theta$ avec $\theta \in]0, 1[$. Cette idée est dû à Bhat et son collaborateur Bernstein [16] et est largement utilisée pour établir la stabilité en temps fini, voir par exemple; [15, 37, 40, 59, 60, 105]; et aussi [94] pour les systèmes avec second membre discontinus
2. Approche basée sur l'homogénéité; sommairement, cette contribution pour la stabilité en temps fini est prouvé par Bhat et Bernstein [17], où les auteurs ont relaxé la condition précédente de Lyapunov. Ils ont prouvé qu'un système homogène est stable en temps fini si et seulement s'il est asymptotiquement stable et homogène de degré négatif par

rapport à une dilatation appropriée. Des résultats dans le cadre des systèmes discontinus sont aussi étendus par les travaux d'Orlov [94].

En se basant sur la théorie des semi-groupes [99, Chap 1], une extension de la théorie d'homogénéité en dimension infinie a été reformulée dans les travaux de Polyakov et ses collaborateurs [107, 109]. La stabilité en temps fini est obtenue pour les systèmes homogènes dans des espaces de Banach où la notion de dilatation est étendue. Pour une large classe de systèmes quasi-linéaires, les auteurs ont prouvé que la stabilité asymptotique combinée avec l'homogénéité du système avec un degré négatif conduit à la stabilité en temps fini. Ce résultat est utilisé pour la construction des lois des commandes stabilisantes en temps fini pour les systèmes linéaires et bilinéaires [109, 120].

3. La technique du backstepping : c'est une approche couramment utilisée pour les systèmes ayant une structure en cascade [32, 40, 61, 111]. Cette approche est l'origine de la construction des retours stabilisants soit en temps fini ou bien polynomialement de divers systèmes comme, par exemple, le système double intégrateur et l'intégrateur de Brockett. Plusieurs auteurs ont exploité l'idée de la méthode dite de desingularisation [111] (qui correspond aux retours non différentiables) pour établir la stabilisation en temps fini des systèmes chaînés quasi-linéaires [56, 59].

Dans ce chapitre, nous étudions l'approche de Lyapunov, à savoir la dissipation de la fonction énergie en temps petit selon la loi

$$\dot{V} \leq -c(t)V^\theta, \quad (5.1)$$

avec $\theta \in]0, 1[$, et $c(\cdot)$ est une fonction mesurable positive. La stabilité en temps fini est obtenue dans ce cas avec une hypothèse supplémentaire sur $c(\cdot)$ qui est une fonction mesurable n'appartenant pas à l'espace de Lebesgue ; c'est à dire $c \notin L^1[0, +\infty[$. Nous prouvons, par des contre-exemples, que le cas $c \in L^1[0, +\infty[$ correspond à des systèmes qui ne sont pas stables en temps fini et donc ils ne peuvent pas être stables en temps petit. La fonction $t \mapsto c(t)$ dans l'inégalité (5.1) joue le rôle d'une fonction excitatrice qui permet au système d'atteindre le point d'équilibre en temps petit. C'est le concept souvent appelé excitation persistante uniforme, largement étudié par A. Loria et ses collaborateurs au cours des dernières décennies pour les systèmes variants dans le temps ; voir par exemple, [85, 86, 88, 97, 98]. Par conséquent, dans ce travail, la classe des systèmes que nous aborderons - en temps petit/temps fini- est instationnaire et continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ (i. e. le champ vectoriel f est variant dans le temps t). Nous avons relaxé les conditions de stabilité en temps petit/temps fini, en ajoutant un "amortissement artificiel" soumis à ce qu'on appelle l'excitation persistante uniforme. Nous avons appliqué nos résultats sur des exemples de dimension infinie lorsque le contrôle aux frontières est soumis à une excitation persistante uniforme. Puis nous avons construits des retours d'état aux frontières, variants dans le temps et stabilisant en temps petit de tels systèmes en boucle fermée.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, nous présentons une extension du théorème de Lyapunov 4.22 pour des systèmes de dimension quelconque. Ensuite, nous traitons le cas des systèmes non autonomes de dimension infinie. La méthode qui sera développée est basée sur l'estimation en temps petit de l'énergie. Nous abordons en particulier l'équation de transport, les systèmes bilinéaires et l'équation d'onde.

5.2 Extensions pour une dimension quelconque

Dans cette section, nous présentons des extensions du Théorème 4.22, pour étudier la stabilité en temps petit des systèmes en dimension infinie. En effet, le problème de stabilisation d'une équation d'évolution par des retours d'état frontières, se traduit par une inégalité différentielle de la forme suivante.

Lemme 5.1. *Soit $E(t)$ une fonction décroissante et positive sur $[0, +\infty[$ satisfaisant l'inégalité différentielle*

$$\dot{E} \leq -c f(t) E^\beta, \quad (5.2)$$

où $\beta \in]0, 1[$, $f(\cdot)$ est une fonction continue positive et satisfait sur $[0, +\infty[$ la "condition de croissance" $\int_0^t f(s) ds \geq \mu t^m > 0$ avec $\mu, m > 0$.

Alors, il existe un temps d'établissement T^* tel que

$$E(t) = 0, \forall t \geq T^*.$$

Preuve. Nous utilisons le principe de comparaison [72, page 110]. Soit V une fonction positive solution de l'équation différentielle

$$\dot{V} = -c f(t) V^\beta, \quad c > 0, \beta \in]0, 1[, \quad (5.3)$$

avec la condition initiale $V(0) := V_0$. Cette solution est donnée par

$$V(t) = \begin{cases} [V_0^{1-\beta} - c(1-\beta) \int_0^t f(s) ds]^{1/(1-\beta)}, & 0 \leq t \leq T^* \text{ et } V_0 \neq 0, \\ 0, & \text{si } t \geq T^* \text{ et } V_0 \neq 0, \\ 0, & \text{si } V_0 = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Cette solution est donnée par T^* qui sera défini plus tard. Clairement, pour $V_0 \neq 0$, nous avons

$$V_0^{1-\beta} - c(1-\beta) \int_0^t f(s) ds \leq V_0^{1-\beta} - c(1-\beta) \mu t^m. \quad (5.5)$$

En effet, le premier cas est valable à condition que $V_0^{1-\beta} - c(1-\beta) \int_0^t f(s) ds \geq 0$, alors, si $V_0^{1-\beta} - c(1-\beta) \mu t^m \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \left(\frac{V_0^{1-\beta}}{c\mu(1-\beta)}\right)^{1/m}$, ainsi on prend dans ce cas

$$T^* := \left(\frac{V_0^{1-\beta}}{c\mu(1-\beta)}\right)^{1/m},$$

et pour $t \geq T^*$, nous avons $V = 0$. Maintenant, nous considérons la condition initiale $E(0) := E_0$ tel que $E_0 \leq V_0$. Par le principe de comparaison [72, page 110], on obtient

$$E(t) \leq V(t), \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, l'énergie E converge vers zéro en temps petit. \square

Lemme 5.2. *Nous considérons les hypothèses du lemme 5.1 et nous supposons que la fonction f satisfait la “condition uniforme d’excitation persistante”. [85].*

(\mathcal{P}) : *Il existe $c > 0$ tel que pour chaque $t \geq 0$ et $h > 0$ on a*

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s) ds \geq c.$$

Alors, l’énergie E converge vers zéro en temps petit.

Le lemme ci-dessus est un cas particulier de la proposition suivante.

Proposition 5.3. *Soit $0 < r < 1$, $u(t)$ une fonction positive localement lipschitzienne définie sur $[0, +\infty[$. Soit f une fonction continue positive satisfaisant la propriété (\mathcal{P}), k un nombre réel positif. Nous supposons que nous avons l’inégalité*

$$u(t) \leq u(t_0) - k \int_{t_0}^t f(s) u^r(s) ds, \quad t \geq t_0 \geq 0. \quad (5.6)$$

Alors la solution u converge vers zéro en temps petit.

Preuve. Puisque u est localement Lipschitz, alors la dérivée temporelle de u est définie dans le sens de Dini par $D^+u(t) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} < \infty$. Par conséquent, sous la

contrainte (5.6) nous obtenons $D^+u(t) \leq -\limsup_{h \rightarrow 0^+} c \int_t^{t+h} \frac{f(s) u^r(s)}{h} ds \leq 0$, donc u est une fonction décroissante sur $[t_0, +\infty[$. Ainsi pour $t \leq s \leq t+h$, on a $-u^r(s) \leq -u^r(t+h)$. Prenant en compte la continuité de u et la condition de croissance (\mathcal{P}), nous obtenons

$$D^+u(t) \leq -ck u^r(t).$$

Par le lemme 3.15 nous concluons que u converge vers zéro en temps petit. \square

Exemple 5.4. *Le système scalaire $\dot{x} = u$ peut être stabilisé en temps petit par $u(t, x) = -\alpha(t)x^{1/3}$ sous la condition $\alpha(t) > 0$ et $\int_t^{t+h} \alpha(s) ds \geq ch$ (excitation persistante).*

En effet, la fonction candidate de Lyapunov $V = \frac{1}{2}x^2$ satisfait le long du système $\dot{V} \leq -\alpha(t)V^{2/3}$. Le lemme 5.2 permet de conclure.

5.3 Stabilisation en temps petit des systèmes non autonomes en dimension infinie

Dans cette section, nous commençons par rappeler la notion de stabilisation en temps fini des systèmes dynamiques définis dans l’espace de Hilbert.

5.3.1 Critères de type intégrales

Soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x, u), & x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}, \\ g(0, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

où $g : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ est une fonction continue, avec \mathcal{X} et \mathcal{U} sont des espaces Hilbert désignent respectivement l’espace d’état et l’espace de contrôle.

Définition 5.5. Le système (5.7) est dit stable en temps petit par un retour d'état instationnaire s'il existe une application $u : [0, +\infty[\times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tel qu'en boucle fermée la solution $\Phi(t, s, y_0)$ satisfait les conditions suivantes.

1. $\Phi(t, s, y_0) = 0$, pour tout $t \geq s + T$ et tout $y_0, \forall T > 0$.
2. pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\|y_0\| < \eta) \Rightarrow \|\Phi(t, s, y_0)\| < \varepsilon, \forall t > s.$$

Pour l'analyse de la stabilité en temps fini des systèmes de dimension infinie, nous utilisons la proposition et le corollaire suivants.

Proposition 5.6. Soit $E : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe une fonction positive mesurable $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ tel que $\int_0^{+\infty} f(s) ds = +\infty$, $\alpha \in]0, 1[$ et $c > 0$ où

$$\int_t^{+\infty} f(s) E^\alpha(s) ds \leq c E(t), t \geq 0. \quad (5.8)$$

Alors, il existe un temps d'établissement $T^* := T(E(0), f)$ tel que $E = 0$ pour tout $t \geq T^*$.

Preuve. Si $E(0) = 0$, alors $\int_0^{+\infty} f(s) E^\alpha(s) ds = 0$, donc par la continuité et la positivité de E , nous concluons que $E = 0$ pour tout $t \geq 0$. Ensuite, sans perte de généralité, nous supposons que $E(0) \neq 0$. Nous introduisons la fonction positive F définie par

$$F(t) = \int_t^{+\infty} f(s) E^\alpha(s) ds.$$

Il est clair que la fonction F est différentiable et

$$\dot{F}(t) = -f(t) E^\alpha(t).$$

En utilisant l'inégalité $F(t) \leq c E(t)$, on obtient facilement

$$\frac{1}{c^\alpha} f(t) F^\alpha(t) \leq -\dot{F}(t) \Leftrightarrow \dot{F}(t) \leq -\frac{1}{c^\alpha} f(t) F^\alpha(t). \quad (5.9)$$

La condition $\int_0^{+\infty} f(s) ds = +\infty$ implique par le théorème 4.22, que F converge vers zéro en temps fini T^* défini par

$$\int_0^{T^*} f(s) ds = \frac{c^\alpha F^{1-\alpha}(0)}{1-\alpha}.$$

□

Comme corollaire de la proposition 5.6, nous avons :

Corollaire 5.7. Soit $E : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue décroissante. Supposons que pour α et β deux réels positifs, $c > 0$ et $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction mesurable tel que

$$\int_0^{+\infty} f(s) ds = +\infty,$$

nous avons

$$\int_t^{+\infty} f(s)E^\alpha(s)ds \leq c E^\beta(t), t \geq 0. \quad (5.10)$$

Si $\beta > \alpha$, alors E converge vers zéro en temps fini, c-à-d. il existe un temps de stabilisation $T^* := T^*(E(0), f)$ tel que $E = 0$ pour chaque $t \geq T^*$.

Preuve. Soit $F(t) = \int_t^{+\infty} f(s)E^\alpha(s)ds$. Alors, F satisfait l'inégalité $\dot{F}(t) \leq -c' f(t)F^{\alpha/\beta}(t)$ où $c' > 0$. La condition $\alpha/\beta < 1$ conduit à la stabilité en temps fini de F , et donc E converge vers zéro en temps fini. \square

5.3.2 Application à l'équation de transport en dimension infinie

Soit $T > 0$, nous considérons le système linéaire décrivant l'équation de transport

$$y_t + y_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (5.11)$$

$$y(t, 0) = u(t), \quad 0 < t < T, \quad (5.12)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad 0 < x < 1, \quad (5.13)$$

où $u(t) \in \mathbb{R}$ représente la commande du système et $y(t, \cdot) :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est son état. Il est connu (voir par exemple [32, section 2.1]) que pour chaque $y_0 \in L^2]0, 1[$ et $u \in L^2]0, T[$ le problème de Cauchy (5.11)-(5.13) admet une solution faible unique dans $L^2(]0, 1[\times]0, T[)$.

Dans cette partie, en utilisant l'approche de Lyapunov, nous prouvons la stabilisation en temps fini de l'équation de transport par des retours d'état aux frontières à condition que la condition d'excitation persistante uniforme soit satisfaite. Avant de présenter le retour d'état stabilisant, nous remarquons que si $y(t, 1)$ converge vers zéro pour tout $t \geq 0$, alors la stabilité en temps fini de (5.11)-(5.13) n'est pas possible. En effet, soit E la fonction énergie définie par $E := \int_0^1 |y(t, x)|^2 dx$. Par un calcul simple, nous obtenons $\dot{E} = -(y^2(t, 1) - u^2(t))$ ce qui implique que $\dot{E} = u^2 \geq 0$. Par conséquent, pour $u = 0$, E est constante et la stabilisation en temps fini est impossible. Pour $u(t) > 0$, nous concluons par la première méthode de Lyapunov que (5.11)-(5.13) est instable [72].

Dans la suite, nous supposons que $y(t, 1) \neq 0$ pour $t \geq 0$. Afin de traiter le problème, il est possible d'exciter uniformément la condition limite $y(t, 1)$, et ceci permet la convergence vers l'origine. La notion d'excitation persistante semble une idée attractive pour stabiliser de nombreux systèmes de contrôle, voir par exemple [26, 29, 52, 85]. Pour les systèmes de dimension finie, cette idée est utilisée par Loria et ses collaborateurs [85, 88]. Pour les équations aux dérivées partielles, la notion d'excitation persistante est utilisée dans [29, 52]. Pour l'analyse de la stabilisation en temps fini de l'équation de transport, nous montrons qu'il est possible d'obtenir le temps fini sous la condition d'excitation persistante uniforme.

Lemme 5.8. *Soit $E : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue décroissante. Supposons qu'il existe une fonction mesurable positive $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ satisfaisant la propriété de persistance (\mathcal{Q}) : il existe deux constantes positives T et μ tel que*

$$\int_t^{t+T} f(s)ds \geq \mu, \quad \forall t \geq 0,$$

et

$$\dot{E} \leq -k f(t) E^\alpha, \text{ où } (\alpha, k) \in]0, 1[\times]0, +\infty[.$$

Alors $E = 0$ en temps fini.

Preuve. Il suffit de prouver que la condition (\mathcal{Q}) implique que $\int_0^{+\infty} f(s) ds = +\infty$ et donc nous concluons le résultat par le théorème 4.22.

Nous avons pour N un entier assez grand

$$\int_0^{+\infty} f(s) ds := \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N f(s) ds \text{ et } \int_0^N f(s) ds = \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(s) ds.$$

Deux cas peuvent être discutés.

Cas 1 : $T \leq 1$. Ainsi par la propriété \mathcal{Q} , nous avons $\mu \leq \int_0^T f(s) ds \leq \int_0^1 f(s) ds$ et alors $\mu \leq \int_n^{n+T} f(s) ds \leq \int_n^{n+1} f(s) ds$ pour chaque $n \geq 0$. Alors $\int_0^N f(s) ds = \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(s) ds \geq N\mu$

et, en laissant la limite de $N \rightarrow +\infty$, nous obtenons $\int_0^{+\infty} f(s) ds = +\infty$.

Cas 2 : $T > 1$. On désigne par $m := P_e(T) \geq 1$ (où $P_e(\cdot)$ est la partie entière de T), alors $1 \leq m \leq T < m+1$. Par conséquent, pour chaque n nous avons $\mu \leq \int_n^{n+T} f(s) ds \leq \int_n^{n+m+1} f(s) ds$. Ainsi,

$$\int_0^{N(m+1)} f(s) = \int_0^{1+m} f(s) ds + \int_{m+1}^{2(1+m)} f(s) ds \quad (5.14)$$

$$+ \int_{2(m+1)}^{3(1+m)} f(s) ds + \dots + \int_{(N-1)(m+1)}^{N(m+1)} f(s) ds \geq ((N-1)(m+1) + 1)\mu, \quad (5.15)$$

puis en prenant la limite quand $N \rightarrow +\infty$. □

Maintenant, nous passons au résultat principal de cette partie.

Théorème 5.9. *Considérons le système (5.11)-(5.13). Supposons qu'il existe une fonction mesurable $k :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ de sorte que, pour la condition limite $y(t, 1)$, nous avons la condition d'excitation persistante uniforme suivante (\mathcal{Q}')*

$$\exists T, \mu > 0 : \int_t^{t+T} (1 - k^2(s)) y^2(s, 1) ds \geq \mu, \forall t \geq 0. \quad (5.16)$$

Alors pour chaque $y_0 \in L^2]0, 1[$, le retour frontière

$$u(y) = k(t) y(t, 1), \quad (5.17)$$

stabilise en temps fini (5.11)-(5.13). Plus précisément, il existe un temps d'établissement T^* dépendant de la condition initiale tel que $y(t, x) = 0, \forall t \geq T^*$ pour presque tout $x \in [0, 1]$.

Preuve. Pour $y_0 \in L^2(]0, 1[)$, considérons le système en boucle fermée

$$y_t + y_x = 0, \quad x \in]0, 1[, t > 0, \quad (5.18)$$

$$y(t, 0) = k(t)y(t, 1), \quad (5.19)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (5.20)$$

On définit $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(]0, 1[) \rightarrow L^2(]0, 1[)$ l'opérateur linéaire tel que $Af = -f_x$ avec un domaine $\mathcal{D}(A) := \{f \in H^1(]0, 1[) : Af = -f_x, \text{ et } f(0) = kf(1)\}$. Il est facile de voir que A est monotone¹⁵ maximale¹⁶, le problème de Cauchy (5.18-5.20) est bien posé dans $C^1([0, T]; L^2(]0, 1[)) \cap C^0([0, T]; H^1(]0, 1[))$ [99].

Soit $\beta > 1$ un nombre réel. On considère la fonction candidate de Lyapunov définie par

$$V = \left(\int_0^1 |y(t, x)|^2 dx \right)^\beta. \quad (5.21)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \beta \left(\int_0^1 |y(t, x)|^2 dx \right)^{\beta-1} \left(2 \int_0^1 y(t, x) y_t(t, x) dx \right) \\ &= -\beta V^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left(y^2(t, 1) - u^2(t) \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Par conséquent, en vertu du retour d'état $u(y) = k(t)y(t, 1)$, avec $0 < k(t) < 1$ comme dans le théorème, nous obtenons

$$\dot{V} = -\beta(1 - k^2(t))y^2(t, 1)V^{1-\frac{1}{\beta}} \leq -c f(t) V^\alpha, \quad (5.23)$$

où $c := \beta > 0$, $\alpha := 1 - \frac{1}{\beta} \in]0, 1[$ et $f(t) := (1 - k^2(t))y^2(t, 1)$ est positive, continue (la continuité de la solution dans la limite est due à la régularité cachée, voir e. g. [32]) et satisfait à la condition d'excitation persistante uniforme (\mathcal{Q}'). Ainsi, d'après le lemme 5.8, il existe un temps d'établissement T^* tel que $V(t) = 0, \forall t \geq T^*$. Alors pour tout $x \in]0, 1[$, l'état $y(t, x)$ converge vers zéro en temps fini. \square

Remarque 5.10. Le retour d'état (5.17) assure la stabilité exponentielle et la stabilité en temps fini de la condition (5.16). En effet, prenons l'exemple en dimension finie $\dot{q} = u$. Nous montrons qu'avec le retour suivant

$$u(t, q) = -f(t) \operatorname{sgn}(q) |q|^\alpha - q, \quad \alpha \in]0, 1[,$$

où f est une fonction mesurable positive (par exemple, $f(t) = \frac{|\sin(t)|}{1+t}$) tel que

$$\int_0^{+\infty} f(s) ds = +\infty,$$

le système en boucle fermée est stable en temps fini. En effet, prenant la fonction de Lyapunov $V = q^2$, nous avons

$$\dot{V} \leq -f(t) V^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

et par conséquent $q(t) = 0$ en temps fini. En outre, par un simple calcul, nous avons

$$\dot{V} \leq -2V$$

et donc le système en boucle fermée est exponentiellement stable.

15. $\forall f \in \mathcal{D}(A), \langle Af, f \rangle \geq 0$

16. La partie imaginaire $\operatorname{Im}(I + A) = L^2]0, 1[, I$ est l'identité.

5.3.3 Application aux systèmes bilinéaires

Dans cette section, on développe une solution générale du problème de la stabilisation en temps petit des systèmes bilinéaires en dimension infinie. Ces derniers couvrent entre autres le système de Vlasov-Poisson.

Considérons les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + u(t)By(t), & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5.24)$$

où, $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe linéaire de classe \mathcal{C}_0 sur un espace réel de Hilbert H avec un domaine $\mathcal{D}(A)$, $B : H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire borné, $t \mapsto y(t) \in H$ est l'état du système et $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$ représente la commande.

Pour résoudre le problème de stabilisation des systèmes bilinéaires dans l'espace de Hilbert, nous utilisons la théorie d'homogénéité étendue par Polyakov et ses collaborateurs en dimension infinie [107, 108, 109, 110]. Le résultat principal de cette partie est le suivant.

Proposition 5.11. *Considérons le système bilinéaire (4.37) et supposons que*

1. *Le groupe G_d associé à la dilatation d sur $D \subset \mathcal{D}(G_d)$ où D est dense en H , satisfait*

$$k_1 \|z\|^2 \leq \langle G_d z, z \rangle \leq k_2 \|z\|^2 \text{ pour certains } k_1, k_2 > 0 \text{ et pour tout } z \in D.$$

2. *l'opérateur A génère un semi-groupe compact de contractions sur H tel que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(G_d)$,*
3. *l'opérateur B est fortement positif, c'est à dire qu'il existe $k > 0$ tel que pour chaque $y \in H$, nous avons $\langle By, y \rangle \geq k \|y\|^2$,*
4. *les opérateurs A et B sont, respectivement, homogènes de degré p et 0 par rapport à la dilatation d .*

Soit $y \mapsto u(y)$ le retour d'état

$$u(t, y) = \begin{cases} -f(t) \frac{\langle By, y \rangle}{\|y\|_d^\beta} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (5.25)$$

où $\|\cdot\|_d$ est la norme homogène associée à d , avec la condition $3b > \beta > 2a$, où a et b sont donnés par le lemme 4.23, f est une fonction continue positive par morceaux tel que $\int_0^{+\infty} f(s) ds = +\infty$. Alors, en vertu de $u(t, y)$, le système en boucle fermée (5.24) est stable en temps fini.

Preuve. Par la condition $2a < \beta < 3b$, l'application F définie par $F(t, 0) = 0$ et $F(t, y) = -f(t) \frac{\langle By, y \rangle}{\|y\|_d^\beta} By, y \neq 0$, est continue par rapport à t et y . En outre, A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact sur l'espace Hilbert H , alors toutes les conditions de [99, Théorème 2.1, pp. 191] sont satisfaites, le problème de Cauchy (5.24) admet donc une solution mild¹⁷ y . Comme l'application F envoie tout l'ensemble borné vers un ensemble

17. Pour un semi-groupe noté S_g , la solution mild, du système (5.24), s'écrit sous la forme $y(t) = S_g(t)y_0 + \int_0^t S_g(t-s)uBy(s)ds$.

borné, alors la solution y est maximale sur $[0, +\infty[$, voir [99, Théorème 2.2, pp. 192]. Nous considérons la fonction candidate de Lyapunov définie par

$$V(y) = \frac{1}{\alpha} \|y\|_d^\alpha, \quad \forall y \in H \text{ avec } \alpha + 2a > \beta \quad (5.26)$$

Soit $y_0 \in \mathcal{D}(A)$. Puisque $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(G_d)$ et la fonction $y \mapsto V(y)$ est différentiable au sens de Fréchet sur $\mathcal{D}(G_d) \setminus \{0\}$, la dérivation de la norme homogène au sens de Fréchet [109, Lemme 2], et pour presque chaque $t \in [0, +\infty[$, donne :

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) = \frac{\langle d(-\ln(\|y(t)\|_d))(Ay(t) + u(y(t))By(t)), d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t) \rangle}{\langle G_d d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t), d(-\ln(\|y(t)\|_d))y(t) \rangle} \|y(t)\|_d^\alpha.$$

Un calcul simple, sous les hypothèses 3) et 4), implique :

$$\frac{d}{dt}V(y(t)) \leq -c_1 f(t) V^{1+(2a-\beta)/\alpha},$$

où $c_1 > 0$. Pour chaque $t \geq 0$, nous avons

$$\int_t^{+\infty} f(s) V^{1+(2a-\beta)/\alpha}(s) ds \leq \frac{1}{c_1} V$$

Du fait que $(2a - \beta)/\alpha < 0$ et $1 + (2a - \beta)/\alpha < 1$, le corollaire 5.6 nous permet de conclure que $V = 0$ en temps petit, par conséquent $y = 0$ en temps petit. \square

Exemple 5.12. *Considérons le système (5.24). Soient*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par rapport à ce choix, la matrice A est dissipative puisque $\langle Ay, y \rangle = 0$, et la matrice B est fortement positive puisque

$$\begin{aligned} \langle By, y \rangle &= 2y_1^2 + 3y_2^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \| (y_1, y_2) \|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, toutes les conditions de la proposition précédente sont vérifiées. Ainsi, le retour d'état, donné par l'expression

$$u(t, y) = \begin{cases} -f(t) \frac{2y_1^2 + 3y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\beta/2}}, & 2 < \beta < 3 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases} \quad (5.27)$$

rend le système (5.24) stable en temps petit.

Les figures suivantes sont obtenues avec la condition initiale est donnée par $(y_1(0), y_2(0)) = (1.5, -1.5)$.

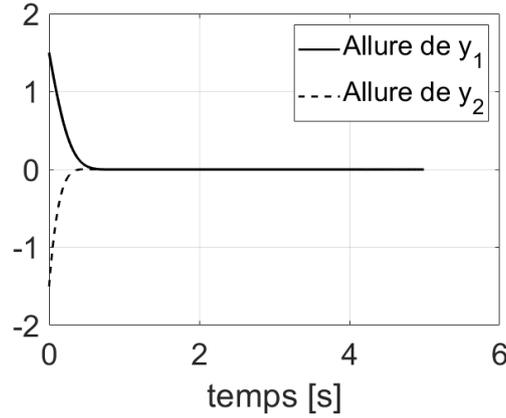


FIGURE 5.1 – Trajectoire des états y_1 et y_2 de (5.24) utilisant la fonction d’excitation $f(t) = t^2$.

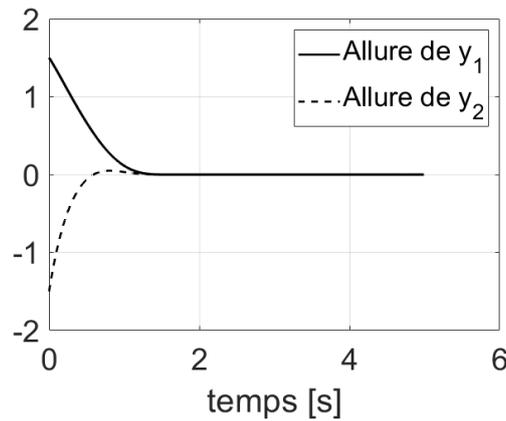


FIGURE 5.2 – Trajectoire des états y_1 et y_2 de (5.24) utilisant la fonction d’excitation $f(t) = \frac{t^3}{1+t}$.

5.3.4 Application aux équations d’onde avec condition au bord de type Wentzell

La stabilisation d’onde par un retour d’état avec une condition de bord de Wentzell non linéaire a été largement étudié dans de nombreux travaux [24, 25, 80, 81]. Dans [80], les auteurs prouvent une propriété de stabilisation polynomiale avec un taux de décroissance optimal si la frontière d’onde est activée par des conditions non linéaires de Wentzell, l’amortissement est également non linéaire.

5.3.4.1 Stabilization de l'équation d'onde en temps petit

On considère l'équation d'onde contrôlée au bord par l'équation de Wentzell :

$$y_{tt} - y_{xx} = 0, \quad x \in]0, 1[, t \geq 0, \quad (5.28)$$

$$y(t, 0) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.29)$$

$$y_{tt}(t, 1) = u(t), \quad t \geq 0, \quad (5.30)$$

$$y(0, x) = \alpha^0(x), y_t(0, x) = \beta^0(x), x \in]0, 1[. \quad (5.31)$$

Prenons dans notre cas $\alpha^0 \in H_{(0)}^1(]0, 1[)$ ¹⁸ et $\beta^0 \in L^2(]0, 1[)$.

L'espace vectoriel $H_{(0)}^1(]0, 1[)$ est muni du produit scalaire suivant :

$$\langle f, g \rangle_{H_{(0)}^1(]0, 1[)} := \int_0^1 f_x g_x dx.$$

Remarque 5.13. [80, Théorème 4.1] Si on utilise le contrôle aux frontières suivant $u(y) = -y_t(t, 1) - y_x(t, 1)$, le problème est bien posé et la solution du système en boucle fermée décroît lentement en $\frac{1}{t}$ avec un taux de décroissance optimal.

Nous montrerons, dans la suite, que sous un choix approprié de la fonction de Lyapunov, les hypothèses du lemme 5.8 sont vérifiées et donc la stabilisation en temps petit de l'équation d'onde est établie.

Avant de présenter le résultat principal, il est important de souligner quelques difficultés pour montrer la stabilité en temps petit de l'équation d'onde.

Lemme 5.14. *Si $y_t(t, 1) = 0$, alors le système d'onde (5.28)-(5.31) ne peut pas être stabilisable en temps petit.*

Preuve. Pour le système (5.28)-(5.31), soit E la fonction énergie définie par :

$$E := \frac{1}{2} \int_0^1 (|y_t|^2 + |y_x|^2) dx + \frac{1}{2} |y_t(t, 1)|^2.$$

En utilisant l'intégration par parties, nous obtenons

$$\dot{E} = y_t(t, 1)(y_x(t, 1) + u), \quad \forall t \geq 0.$$

Il est clair que si $y_t(t, 1) = 0, \forall t \geq 0$, on a $\dot{E}(t) = 0$, le système donc est conservatif. L'équation d'onde (5.28)-(5.31) ne peut pas être stabilisable en temps petit ou de façon asymptotique. \square

Dans la suite, nous considérerons que $y_t(t, 1) \neq 0$ pour presque chaque $t > 0$.

Théorème 5.15. *Soit h une fonction continue positive par morceaux de telle sorte que $t \mapsto h(t)y_t^2(t, 1)$ satisfait la propriété d'excitation persistante uniforme*

$$(\mathcal{P}') : \quad \exists T, \mu > 0; \int_t^{t+T} h(s)y_s^2(s, 1) ds \geq \mu, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.32)$$

18. $H_{(0)}^1(]0, 1[) := \{\alpha \in H^1(]0, 1[) : \alpha(0) = 0\}$.

Ainsi, pour tout $\alpha^0 \in H_{(0)}^1(]0, 1[)$, $\beta^0 \in L^2(]0, 1[)$, le contrôle aux frontières

$$u(t, y) = -h(t) y_t(t, 1) - y_x(t, 1), \quad (5.33)$$

stabilise l'équation d'onde (5.28) en temps petit. Plus précisément, il existe un temps d'établissement T^* qui dépend de la condition initiale telle que pour presque chaque $x \in [0, L]$, $y(t, x) = 0$, $\forall t \geq T^*$.

Preuve. Pour $(\alpha^0, \beta^0) \in H_0^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[)$, le système en boucle fermée est donné par

$$y_{tt} - y_{xx} = 0, \quad (t, x) \in]0, +\infty[\times]0, 1[, \quad (5.34)$$

$$y(t, 0) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.35)$$

$$y_{tt}(t, 1) = -h(t) y_t(t, 1) - y_x(t, 1), \quad t \geq 0, \quad (5.36)$$

$$y(0, x) = \alpha^0(x), y_t(0, x) = \beta^0(x), x \in]0, 1[. \quad (5.37)$$

On définit la matrice A telle que

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} \\ -u_x(1) - hv(1) \end{pmatrix},$$

avec $D(A) = \{(u, v, w) \in H^2(]0, 1[) \times H^1(]0, 1[) \times \mathbb{R} : u(0) = 0, w = z(1)\}$ où $z(1) := -u_x(1) - hv(1)$.

En adoptant la même idée développée dans [80, 81, 99], on peut facilement prouver que A est maximale monotone et par conséquent le système en boucle fermée est bien posé dans $H_{(0)}^1(]0, 1[) \times L^2(]0, 1[)$. Plus précisément, la solution est dans l'ensemble $\mathcal{C}^0([0, \infty[; H_{(0)}^1(]0, 1[)) \cap \mathcal{C}^1([0, \infty[; L^2(]0, 1[))$.

Soit $\alpha^0 \in H_{(0)}^1(]0, 1[)$ et $\beta^0 \in L^2(]0, 1[)$. Pour le système (5.28)-(5.30), nous allons construire une loi de commande donnée par la fonction de Lyapunov suivante

$$V = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (|y_t|^2 + |y_x|^2) dx + \frac{1}{2} |y_t(t, 1)|^2 \right)^\alpha, \quad \alpha > 1. \quad (5.38)$$

En utilisant une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \alpha \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (|y_t|^2 + |y_x|^2) dx + \frac{1}{2} |y_t(t, 1)|^2 \right)^{\alpha-1} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 (y_t y_{xx} + y_x y_{tx}) dx + y_t(t, 1) u \right) \\ &= 2\alpha V^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} y_t(t, 1) (y_x(t, 1) + u). \end{aligned}$$

Si on choisit $u(t, y) = -y_x(t, 1) - h(t) y_t(t, 1)$, nous obtenons

$$\dot{V} \leq -\alpha f(t) V^\beta, \quad (5.39)$$

où $\beta := \frac{\alpha-1}{\alpha} \in]0, 1[$, et $f(t) := h(t) y_t^2(t, 1)$.

Grâce aux (5.38) et (5.39), on déduit que V admet une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$ et par conséquent $y_t(t, \cdot) \in L^2(]0, 1[)$. En particulier, en raison de la propriété de régularité de

l'équation d'onde, nous avons encore $y_t(t, 1) \in \mathcal{C}^0(]0, \infty[)$, ceci implique que $t \mapsto f(t) := h(t)y_t^2(t, 1)$ est positive et continue par morceaux. Sous la condition de persistance (5.32), toutes les conditions du lemme 5.8 sont vérifiées. Nous pouvons conclure que V converge vers zéro en temps petit.

Soit T^* le temps de stabilisation, alors pour tout $x \in [0, 1]$, $y_x(t, x) = 0$ pour $t \geq T^*$. En utilisant l'inégalité de Poincaré dans $H_{(0)}^1(]0, 1[)$, on a :

$$\|y\|_{H_{(0)}^1]0, 1[} \leq c' \|y_x\|_{L^2]0, 1[}, \quad c' > 0, \quad (5.40)$$

qui implique à nouveau pour chaque $x \in [0, 1]$

$$y(t, x) = 0, \quad \forall t \geq T^*.$$

□

Remarque 5.16. Une question importante peut être posée : le retour d'état donné par (5.33) stabilise-t-il l'onde en présence d'une perturbation additive a (i.e. une perturbation interne) ? Comme dans [132], on suppose que a appartient à $L^\infty([0, +\infty[\times [0, 1])$ et satisfait la condition $\|a\|_\infty \leq r$ pour $r > 0$. Dans la suite, nous apportons une réponse partielle à cette question ouverte.

Supposons que $a(t, x) = a(x) > 0$, alors l'équation d'onde perturbée $y_{tt} - y_{xx} + a(x)y = 0$, avec le contrôle aux frontières (5.33) est stable en temps petit.

Preuve. Pour $\beta > 1$, On considère la fonction candidate de Lyapunov V définie par

$$V := \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (|y_t|^2 + |y_x|^2 + a|y|^2) dx + \frac{1}{2} |y_t(t, 1)|^2\right)^\alpha.$$

Une intégration par parties implique :

$$\dot{V} = \alpha V^{1-1/\alpha} y_t(t, 1)(u + y_t(t, 1)).$$

En utilisant (5.33), on a $\dot{V} \leq -\alpha f(t)V^\beta$ où $\beta := \frac{\alpha-1}{\alpha} \in]0, 1[$, et $f(t) := h(t)y_t^2(t, 1)$. Les arguments de la preuve du Théorème 5.15 nous permettent de conclure que le système converge vers zéro en temps petit. □

5.3.4.2 Simulation numérique

Dans cette section, la loi de commande instationnaire, pour stabiliser l'équation d'onde, est testée numériquement. La discrétisation utilise la méthode des différences finies, où les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} \alpha^0(x) &= \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1] \\ \beta^0(x) &= \cos(\pi x). \end{aligned} \quad (5.41)$$

La fonction d'excitation est donnée par $h(t) = e^t$ avec $u(t, y) = -y_x(t, 1) - e^t y_t(t, 1)$ et la contrainte $\int_0^{+\infty} h(s)y_s^2(s, 1)ds = +\infty$.

Nous avons comparé notre résultat avec les retours d'état proposés dans [80, Théorème 4.1] où il s'agit d'une stabilité lente. Notre approche garantit une stabilité rapide en temps petit. En utilisant Matlab, nous obtenons les figures suivantes.

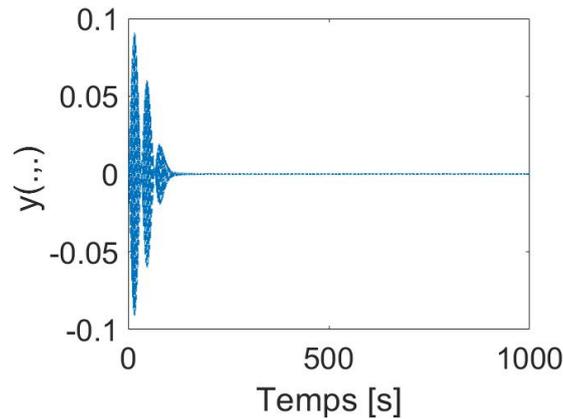


FIGURE 5.3 – Trajectoire de la solution $y(., x)$ à $T = 1000s$ utilisant la fonction d'excitation $h(t) = e^{3t}$.

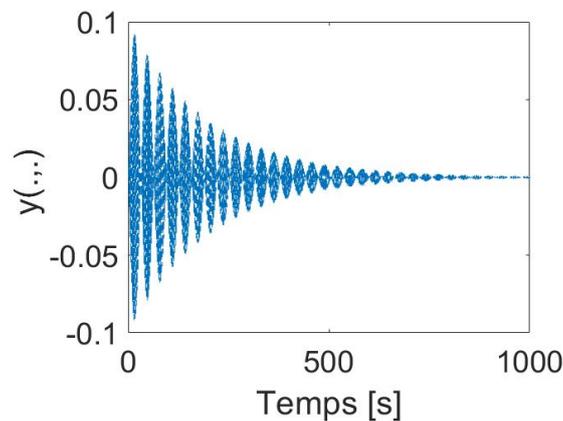


FIGURE 5.4 – Trajectoire de la solution $y(., x)$ à $T = 1000s$ sans excitation.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi des conditions suffisantes pour la stabilisation, en temps petit, d'une classe de systèmes temps-variant de dimension finie et infinie. Notre analyse est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov judicieuse et d'une fonction d'excitation persistente temps-variant où le contrôle se fait par les bords. Plusieurs systèmes ont été traités par cette approche : L'équation de transport, l'équation d'onde ou les systèmes bilinéaires. Les performances de cette approche ont été testées à travers plusieurs exemples numériques, avec succès.

Conclusions et perspectives

Dans ce travail, notre contribution porte sur la stabilisation rapide d'une classe de systèmes dynamiques, nous citons les systèmes bilinéaires, le système double intégrateur, l'équation de transport ou l'équation d'onde soumise à un contrôle par le bord de type Wentzell. Nous nous sommes particulièrement focalisés sur le système de Vlasov-Poisson.

Pour ce dernier, en présence d'un champs magnétique externe, nous avons établi un schéma de discrétisation basée sur la méthode des éléments finis garantissant la convergence vers la solution réelle lorsque le pas converge vers zéro. Nous avons montré qu'il peut s'écrire sous la forme d'un système bilinéaire de dimension finie. L'étude de l'observabilité peut se faire aisément en se basant sur des transformations de types "éléments primitives différentielles" développées [90]. D'autre part, autour d'une trajectoire de référence, nous avons établi des conditions suffisantes de commandabilité du système bilinéaire obtenu.

Nous avons également établi des conditions suffisantes de stabilité en temps fixe relaxant les résultats existants dans la littérature. Il s'agit de la fusion de la stabilité lente (i.e. polynomiale) et de la stabilité rapide (i.e. en temps fini). Plusieurs exemples de systèmes bilinéaires sont donnés. Également, pour les systèmes non autonomes de façon générale, la stabilisation en temps fixe est obtenue par la décomposition d'un retour d'état en deux parties : une lente et l'autre rapide.

Dans le cas des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles avec un contrôle aux bords nous avons proposé un retour d'état instationnaire garantissant une stabilisation en temps petit. Plus particulièrement, nous avons étudiés le cas des systèmes bilinéaires, l'équation d'onde avec condition au bord de type Wentzell et l'équation de transport. Les simulations numériques corroborent les résultats obtenus.

Parmi les perspectives qui se dégagent de ce travail, nous pouvons envisager l'étude de la stabilisation polynomiale, en temps fini, en temps fixe ou en temps petit du système non linéaire de Vlasov-Poisson sans passer par la discrétisation. Une autre perspective intéressante serait d'étudier l'optimalité des retours d'état stabilisants et vérifier leur robustesse.

Bibliographie

- [1] AGARWAL, R. P., OREGAN, D., AND SAHU, D. R. *Fixed point theory for Lipschitzian-type mapping with applications*. Springer Dordrecht Heidelberg, London New York, 2009.
- [2] ANDRIEU, V., PRALY, L., AND ASTOLFI, A. Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM Contr. Optim.* 47, 4 (2008), 1814–1850.
- [3] ANFINSEN, H., AND AAMO, O. M. *Adaptive Control of Hyperbolic PDEs*. Communications and Control Engineering, 2019.
- [4] ANTONTSEV, S. N., DÍAZ, J. I., AND SHMAREV, S. *Energy Methods for Free Boundary Problems : Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics*, vol. 48 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser Basel, 2002.
- [5] AYUSO DE DIOS, B., CARRILLO DE LA PLATA, J. A., AND SHU, C.-W. Discontinuous Galerkin methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson system.
- [6] BACCIOTTI, A., AND ROSIER, L. *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. 2001.
- [7] BACCIOTTI, A., AND ROSIER, L. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, 2nd edition ed. Communications and Control Engineering. Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [8] BACK, A. *Etude théorique et numérique des équations de Vlasov-Maxwell dans le formalisme covariant*. Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2011.
- [9] BALL, J. M. On the asymptotic behavior of generalized processes with applications to nonlinear evolution equations. *J. Diff. Equat.* 27 (1978), 224–265.
- [10] BASTIN, G., AND CORON, J. M. *Stability and Boundary Stabilization of 1-D Hyperbolic Systems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 2016.
- [11] BELGACEM, G. B., AND JAMMAZI, C. Some results on the internal finite-time stabilization of vibrating strings with interior mass. *Math Meth Appl Sci.* 44 (2021), 865–881.
- [12] BERNUAU, E., PERRUQUETTI, W., EFFIMOV, D., AND MOULAY, E. Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator. *International Journal of Control* 88, 3 (2015), 451–460.
- [13] BESSE, N. Etude mathématique et numérique de l'équation de Vlasov non linéaire sur des maillages non structurés de l'espace des phases. Tech. rep., 2003.
- [14] BESSE, N., AND SONNENDRÜCKER, E. Semi-lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space. *Journal of Computational Physics* 191, 2 (2003), 341–376.
- [15] BHAT, S. P., AND BERNSTEIN, D. S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Trans. Autom. Control* 43, 5 (1998), 678–682.

-
- [16] BHAT, S. P., AND BERNSTEIN, D. S. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM J. Control and Optim* 38 (2000), 751–766.
- [17] BHAT, S. P., AND BERNSTEIN, D. S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Math Control Signals Systems* 17 (2005), 101–127.
- [18] BOUCHUT, F., GOLSE, F., AND PULVIRENTI, M. *Kinetic equations and asymptotic theory*. Elsevier, 2000.
- [19] CANCÈS, E., BRIS, C. L., AND PILOT, M. Contrôle optimal bilinéaire d’une équation de Schrödinger. *CRAS Paris*, 330 (2000), 567–571.
- [20] CAO, L., XIAO, B., GOLESTANI, M., AND RAN, D. Faster fixed-time control of flexible spacecraft attitude stabilization. *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 16, 2 (2019), 1281–1290.
- [21] CAO, L., XIAO, B., GOLESTANI, M., AND RAN, D. Faster fixed-time control of flexible spacecraft attitude stabilization. *IEEE Trans on Indis Informatics* 16, 2 (2020), 1281–1290.
- [22] CARDONA, G., SARLETTE, A., AND ROUCHON, P. Exponential stabilization of quantum systems under continuous non-demolition measurements. *Automatica* 112 (2020), 108719.
- [23] CARLES, R., AND GALLO, C. Finite time extinction by nonlinear damping for the Schrödinger equation. *Comm. Partial Differential Equations* 36, 6 (2011), 961–975.
- [24] CAVALCANTI, M., LASIECKA, I., AND TOUNDYKOV, D. Geometrically constrained stabilization of wave equations with Wentzell boundary conditions. *Appl. Anal.* 91, 8 (2012), 1427–1452.
- [25] CAVALCANTI, M., LASIECKA, I., AND TOUNDYKOV, D. Wave equation with damping affecting only a subset of static Wentzell boundary is uniformly stable. *Trans. Amer. Math. Soc.* 364, 11 (2012).
- [26] CHAILLET, A., CHITOUR, Y., LORIA, A., AND SIGALOTTI, M. Uniform stabilization for linear systems with persistency of excitation : the neutrally stable and the double integrator cases. *Math. Control Signals Syst.* 20, 2 (2008), 135–156.
- [27] CHEN, M.-S. Exponential stabilization of a constrained bilinear system. *Automatica* 34, 8 (1998), 989–992.
- [28] CHENG, Y., GAMBA, I. M., AND MORRISON, P. J. Study of conservation and recurrence of runge-kutta discontinuous Galerkin schemes for Vlasov-Poisson systems. *Journal of Scientific Computing* 56, 2 (2013), 319–349.
- [29] CHITOUR, Y., MAZANTI, G., AND SIGALOTTI, M. Persistently damped transport on a network of circles. *Trans. Amer. Math. Soc.* 369, 6 (2017), 3841–3881.
- [30] CISSE, A. *Observation et commande d’une classe d’équations aux dérivées partielles couplées : Application à l’équation de Vlasov-Poisson*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2022.
- [31] CORON, J. M. On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law. *SIAM Contr. Optim.* 33, 3 (1995), 804–833.

- [32] CORON, J.-M. *Control and Nonlinearity*, vol. 136. Mathematical Surveys and Monographs, 2007.
- [33] CORON, J.-M., AND L HU, G OLIVE, P. S. . Boundary stabilization in finite time of one-dimensional linear hyperbolic balance laws with coefficients depending on time and space. *J. Diff. Eqs. 271* (2021), 1109–1170.
- [34] CORON, J.-M., VAZQUEZ, R., KRSTIC, M., AND BASTIN, G. Local exponential H^2 stabilization of a 2x2 quasilinear hyperbolic system using backstepping. *SIAM J. Control Optim. 51*, 3 (2013), 2005–2035.
- [35] COTTET, G.-H., AND RAVIART, P.-A. Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations. *SIAM journal on numerical analysis 21*, 1 (1984), 52–76.
- [36] COULAUD, O., SONNENDRÜCKER, E., DILLON, E., BERTRAND, P., AND GHIZZO, A. Parallelization of semi-lagrangian Vlasov codes. *Journal of Plasma Physics 61*, 3 (1999), 435–448.
- [37] CUI, H., LIU, D., AND XU, G. Asymptotic behavior of a Schrödinger equation under a constrained boundary feedback. *Math. Control and Related Fields 8*, 2 (2018), 383–395.
- [38] CUI, H., XU, G., AND HAN, Z. Distributed tracking control of the Schrödinger equation with internal disturbance. *IMA J. Math. Control Inform. 34*, 3 (2017), 831–850.
- [39] D’ANDRA NOVEL, B., MOYANO, I., AND ROSIER, L. Finite-time stabilization of an overhead crane with a flexible cable. *Math. Control Signals Systems 31*, 2 (2019), 1–19.
- [40] D’ANDRÉA NOVEL, B., CORON, J.-M., AND PERRUQUETTI, W. Small-time stabilization of homogeneous cascaded systems with application to the unicycle and the slider examples. *SIAM Journal on Control and Optimization 58*, 5 (2020), 2997–3018.
- [41] DÍAZ, J. I. *Special finite time extinction in nonlinear evolution systems : dynamic boundary conditions and Coulomb friction type problems*, vol. 64 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2005.
- [42] EFIMOV, D., AND PERRUQUETTI, W. On conditions of oscillations and multi-homogeneity. *Math. Control Signals Syst. (2016) 28 :3 28*, 3 (2016), 1–37.
- [43] ET H.-M. NGUYEN, J.-M. C. Optimal time for the controllability of linear hyperbolic systems in one-dimensional space. *SIAM J. Control Optim. 57*, 2 (2019), 1127–1156.
- [44] FILBET, F. Contribution à l’analyse et la simulation numérique de l’équation de Vlasov. *Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, France* (2001).
- [45] FILBET, F. Convergence of a finite volume scheme for the Vlasov–Poisson system. *SIAM Journal on Numerical Analysis 39*, 4 (2001), 1146–1169.
- [46] FRÉNOT, E., RAVIART, P., AND SONNENDRÜCKER, E. Asymptotic expansion of the Vlasov equation in a large external magnetic field. *J. Math. Pures et Appl 80*, 8 (2001), 815–843.
- [47] GHATTASSI, M. *Modélisation, observation et commande d’une classe d’équations aux dérivées partielles : application aux matériaux semi-transparents*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2015.
- [48] GHATTASSI, M., BOUTAYEB, M., AND ROCHE, J. R. Reduced order observer of finite dimensional radiative-conductive heat transfer systems. *SIAM Journal on Control and Optimization 56*, 4 (2018), 2485–2512.

-
- [49] GLASS, O. On the controllability of the Vlasov-Poisson system. *J. Differential Equations* 195 (2003), 332–379.
- [50] GLASS, O., AND HAN-KWAN, D. On the controllability of the Vlasov-Poisson system in the presence of external force fields. *J. Differential Equations* 252 (2012), 5453–5491.
- [51] GOLESTANI, M., ESMAELZADEH, S. M., AND MOBAYEN, S. Fixed-time control for high-precision attitude stabilization of flexible spacecraft. *European Journal of Control* 57, 9 (2021), 222–231.
- [52] HANTE, F. M., SIGALOTTI, M., AND TUCSNAK, M. On conditions for asymptotic stability of dissipative infinite-dimensional systems with intermittent damping. *J. Diff. Eqs.* 252, 252 (2012), 5569–5593.
- [53] HE, X., LI, X., AND NIETO, J. J. Finite-time stability and stabilization for time-varying system. *Chaos, Fractals and Solitons* 111076 (2021), 1–5.
- [54] HEATH, R. E., GAMBA, I. M., MORRISON, P. J., AND MICHLER, C. A discontinuous Galerkin method for the Vlasov–Poisson system. *Journal of Computational Physics* 231, 4 (2012), 1140–1174.
- [55] HERMELINE, F. Two coupled particle-finite volume methods using delaunay-voronoi meshes for the approximation of Vlasov-Poisson and Vlasov-Maxwell equations. *Journal of Computational Physics* 106, 1 (1993), 1–18.
- [56] HONG, Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Syst. Control Lett.*, 46 (2002), 231–236.
- [57] HONG, Y., AND JIANG, Z. P. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties. *IEEE Trans. Autom. Cont.* 51, 2 (December 2006), 1950–1956.
- [58] HU, C., YU, J., CHEN, Z., JIANG, H., AND HUANG, T. Fixed-time stability of dynamical systems and fixed-time synchronization of coupled discontinuous neural networks. *Neural Networks* 89 (2017), 74–83.
- [59] HUANG, X., LIN, W., AND YANG, B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica* 41 (2005), 881–888.
- [60] JAMMAZI, C. Finite-time partial stabilizability of chained systems. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I (346)*, 17-18 (2008), 975–980.
- [61] JAMMAZI, C. A discussion on the Hölder and finite-time partial stabilizability of Brockett’s Integrator. *ESAIM : COCV* 18, 2 (2012), 360–382.
- [62] JAMMAZI, C. Continuous and discontinuous homogeneous feedbacks finite-time partial stabilizing controllable multichained systems. *SIAM J. Control Optim* 52, No.1 (2014), 520–544.
- [63] JAMMAZI, C. Continuous and discontinuous homogeneous feedbacks finite-time partially stabilizing controllable multi-chained systems. *SIAM Contr. Optim.* 52, 1 (2014), 520–544.
- [64] JAMMAZI, C. Some results on finite-time stabilizability : application to triangular control systems. *IMA J. Math. Control Inform.* 35 (2018), 877–899.
- [65] JAMMAZI, C., AND ABICHOU, A. Controllability of linearized systems implies local finite-time stabilizability : applications to finite-time attitude control. *IMA Math Control and Info* 35, 2 (2018), 249–277.

- [66] JAMMAZI, C., AND BELGACEM, G. B. On the finite-time stabilization of some hyperbolic control systems by boundary feedback laws : Lyapunov approach. In *Identification and Control : some new challenges*. Contemp. Math., 757, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2020, pp. 137–160.
- [67] JAMMAZI, C., BOUTAYEB, M., AND BOUAMEID, G. On the global polynomial stabilization and observation with optimal decay rate. *Chaos, Solitons and Fractals* 153 (2021), 111447.
- [68] JAMMAZI, C., BOUTAYEB, M., AND SAIDI, K. On the fixed-time extinction based nonlinear control and systems decomposition : applications to bilinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals* 174 (2023), 113893.
- [69] JAMMAZI, C., AND ZAGHDOUDI, M. On the rational stability of autonomous dynamical systems. Applications to chained systems. *Appl. Math. Comput.*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.03.096> (2013).
- [70] JAMMAZI, C., ZAGHDOUDI, M., AND BOUTAYEB, M. On the global polynomial stabilization of nonlinear dynamical systems. *Nonlinear Analysis : Real World Applications* 46 (2019), 29–42.
- [71] KATO, T. Nonlinear semigroups and evolution equations. *J. Math. Soc.* 19, 4 (1967), 508–520.
- [72] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*, third ed. Prentice Hall, 2002.
- [73] KHANZADEH, A., AND MOHAMMADZAMAN, I. Fixed-time integral sliding mode control design for a class of uncertain nonlinear systems based on a novel fixed-time stability condition. *European Journal of Control* 69 (2023), 100753.
- [74] KNOPF, P. Optimal control of a Vlasov-Poisson plasma by an external magnetic field-analysis of a tracking type optimal control problem. *arXiv preprint arXiv :1708.02753* (2017).
- [75] KNOPF, P. Optimal control of a Vlasov-Poisson plasma by an external magnetic field-the basics for variational calculus. *arXiv preprint arXiv :1708.02464* (2017).
- [76] KNOPF, P., AND WEBER, J. Optimal control of a Vlasov-Poisson plasma by fixed magnetic field coils. *Applied Mathematics & Optimization* 81, 3 (2020), 961–988.
- [77] KRSTIC, M., AND SMYSHLYAEV, A. *Boundary control of PDEs : A course on backstepping designs*. Advances in Design and Control. SIAM, 2008.
- [78] LAGHROUCHE, S., HARMOUCHE, M., AND CHITOUR, Y. Stabilization of perturbed integrator chains using Lyapunov-based homogeneous controllers. *International Journal of Control* 90, 12 (2017), 2631–2640.
- [79] LE BOURDIEC, S., DE VUYST, F., AND JACQUET, L. Numerical solution of the Vlasov-Poisson system using generalized hermite functions. *Computer physics communications* 175, 8 (2006), 528–544.
- [80] LI, C., LIANG, J., AND XIAO, T.-J. Boundary stabilization for wave equation with damping only on the nonlinear Wentzell boundary. *Nonlinear Analysis* 164 (2017), 155–175.
- [81] LI, C., AND XIAO, T.-J. Asymptotics for wave equations with Wentzell boundary conditions and boundary damping. *Semigroup Forum* 94 (2017), 520–531.

-
- [82] LI, J., GUO, H., WAN, B., GONG, X., LIANG, Y., XU, G., GAN, K., HU, J., WANG, H., WANG, L., ET AL. A long-pulse high-confinement plasma regime in the experimental advanced superconducting Tokamak. *Nature physics* 9, 12 (2013), 817–821.
- [83] LOPEZ-RAMIREZ, F., EFIMOV, D., POLYAKOV, A., AND PERRUQUETT, W. On necessary and sufficient conditions for fixed-time stability of continuous autonomous systems. In *European Control Conference ECC* (2018), pp. 197–200.
- [84] LOPEZ-RAMIREZ, F., EFIMOV, D., POLYAKOV, A., AND PERRUQUETT, W. Conditions for fixed-time stability and stabilization of continuous autonomous systems. *Systems & Control Letters* 129 (2019), 26–35.
- [85] LORIA, A., AND PANTELEY, E. Uniform exponential stability of linear time-varying systems : revisited. *Systems & Control Letters* 47, 1 (2001), 13–24.
- [86] LORIA, A., PANTELEY, E., POPOVIC, D., AND TEEL, A. R. A nested matrosov theorem and persistency of excitation for uniform convergence in stable nonautonomous systems. *IEEE Transactions on automatic control* 50, 2 (2005), 183–198.
- [87] MADAULE, É., RESTELLI, M., AND SONNENDRÜCKER, E. Energy conserving discontinuous Galerkin spectral element method for the Vlasov–Poisson system. *Journal of Computational Physics* 279, 261–288.
- [88] MAGHENEM, M., LORIA, A., AND PANTELEY, E. A robust δ -persistently exciting controller for leader-follower tracking-agreement of multiple vehicles. *Eur. J. Contr.* 40 (2018), 1–12.
- [89] MAO, X. Almost sure polynomial stability for a class of stochastic differential equation. *Quart. J. Math. Oxford* 43, 2 (1992), 339–348.
- [90] MARTINEZ-GUERRA, R., AND DE LEÓN-MORALES, J. Some results about nonlinear observers for a class of bilinear systems. In *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95* (1995), vol. 3, IEEE, pp. 1643–1644.
- [91] MOHLER, R. R., AND FRICK, P. A. Bilinear demographic control processes. *Int. J. Policy Anal. Inf. Systems*, 2 (1979), 57–70.
- [92] MOULAY, E., LCHAPP, V., BERNUAU, E., AND PLESTAN, F. Robust fixed-time stability : application to sliding mode control. *Submitted to IEEE Trans. On Automa. Control* (2021).
- [93] ORLOV, Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM J. Control Optim.* 43, 4 (2005), 1253–1273.
- [94] ORLOV, Y. *Discontinuous systems - Lyapunov Analysis and Robust Synthesis under Uncertainty Conditions*, first ed. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag, London, 2009.
- [95] OUZAHRA, M. Exponential and weak stabilization of constrained bilinear systems. *SIAM Contr. Optim.* 48, 6 (2010), 3962–3974.
- [96] OUZAHRA, M., AND BENZAZA, A. Weak and strong stabilization of bilinear systems in a Banach space. *Int. J. Control* (2018).
- [97] PANTELEY, E., AND LORIA, A. On global uniform asymptotic stability of nonlinear time-varying systems in cascade. *Systems & Control Letters* 33, 2 (1998), 131–138.

- [98] PANTELEY, E., LORIA, A., AND TEEL, A. Relaxed persistency of excitation for uniform asymptotic stability. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46, 12 (2001), 1874–1886.
- [99] PAZY, A. *Semi-groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [100] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [101] PERROLLAZ, V., AND ROSIER, L. Finite-time stabilization of systems of conservation laws on networks. *SIAM Contr. and Optimization* 52, 1 (2014), 143–163.
- [102] PERRUQUETTI, W., FLOQUET, T., AND MOULAY, E. Finite-time observers : application to secure communication. *IEEE Transactions on Automatic Control* 53, 1 (2008), 356–360.
- [103] PHAM, N., HELLUY, P., AND CRESTETTO, A. Space-only hyperbolic approximation of the Vlasov equation. In *ESAIM : Proceedings* (2013), vol. 43, EDP Sciences, pp. 17–36.
- [104] PISANO, A., ORLOV, Y., AND USAI, E. Tracking control of the uncertain heat and wave equation via power-fractional and sliding-mode techniques. *SIAM J. Control Optim.* 49, 2 (2011), 363–383.
- [105] POLYAKOV, A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *Trans. Automa. Control* 57, 8 (2012), 2106–2110.
- [106] POLYAKOV, A. Characterization of finite/fixed-time stability of evolution inclusions. In *CDC 2019-58th IEEE Conference on Decision and Control* (2019).
- [107] POLYAKOV, A. *Generalized Homogeneity in Systems and Control*. Communications and Control Engineering. Springer, 2020.
- [108] POLYAKOV, A., CORON, J. M., AND ROSIER, L. On boundary finite-time feedback control for heat equation. In *20th IFAC World Congress* (Toulouse, France, 2017).
- [109] POLYAKOV, A., CORON, J. M., AND ROSIER, L. On homogeneous finite time control for linear evolution equation in hilbert space. *IEEE Transact. Automa. Control* (2018), 0018–9286.
- [110] POLYAKOV, A., EFIMOV, D., FRIDMAN, E., AND PERRUQUETTI, W. On homogeneous distributed parameter systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 61, 11 (2016), 3657–3662.
- [111] PRALY, L., D’ANDRÉA NOVEL, B., AND CORON, J.-M. Lyapunov design of stabilizing controllers for cascaded systems. *IEEE Trans. Autom. Control* 36 (1991), 1177–1180.
- [112] PRASOV, A. A., AND KHALIL, H. K. A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework. *IEEE Transactions on Automatic Control* 58, 3 (2012), 569–580.
- [113] QIU, J.-M., AND CHRISTLIEB, A. A conservative high order semi-lagrangian weno method for the Vlasov equation. *Journal of Computational Physics* 229, 4 (2010), 1130–1149.
- [114] QUINN, J. P. Stabilization of bilinear systems by quadratic feedback controls. *J. Math. Anal. and Appl.* 75 (1980), 66–80.

-
- [115] SAIDI, K., BOUTAYEB, M., AND JAMMAZI, C. On the fixed-time stability and stabilization of autonomous dynamical systems. application to some academic examples. In *2022 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD) (2022)*, IEEE, pp. 1–6.
- [116] SAIDI, K., JAMMAZI, C., AND BOUTAYEB, M. Time varying control design for small-time stabilization of Brockett’s integrator. In *2022 10th International Conference on Systems and Control (ICSC) (2022)*, IEEE, pp. 334–339.
- [117] SCHAEFFER, J. Global existence of smooth solutions to the Vlasov Poisson system in three dimensions. *Communications in partial differential equations* 16, 8-9 (1991), 1313–1335.
- [118] SCHAEFFER, J. Convergence of a difference scheme for the Vlasov–Poisson–Fokker–Planck system in one dimension. *SIAM journal on numerical analysis* 35, 3 (1998), 1149–1175.
- [119] SOGORE, M. *Stabilisation globale en temps petit de quelques systèmes bilinéaires*. Thèse de doctorat, Université de Carthage, 2020.
- [120] SOGORÉ, M., AND JAMMAZI, C. On the global finite-time stabilization of bilinear systems by homogeneous feedback laws. Applications to some PDE’s. *J. Math. Anal. Appl.* 486 (2020), 1–22.
- [121] SONNENDRÜCKER, E., ROCHE, J., BERTRAND, P., AND GHIZZO, A. The semi-lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation. *Journal of computational physics* 149, 2 (1999), 201–220.
- [122] TIAN, B., ZUO, Z., YAN, X., AND WANG, H. A fixed-time output feedback control scheme for double integrator systems. *Automatica* 80 (2017), 17–24.
- [123] TOSCHI, R. Nuclear fusion, an energy source. *Fusion engineering and design* 36, 1 (1997), 1–8.
- [124] VILLANI, C. Landau damping. In *APS Division of Plasma Physics Meeting Abstracts (2011)*, vol. 53, pp. QT3–001.
- [125] VIVALDA, J.-C. *Contrôlabilité des systèmes non linéaires en basse dimension : structure et classification*. PhD thesis, Metz, 1986.
- [126] VOROTNIKOV, V. I. *Partial stability and control*. Springer, 1998.
- [127] WILLIAMSON, D. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica* 13 (1977), 243–254.
- [128] WINTER, J. Dust : A new challenge in nuclear fusion research. *Physics of Plasmas* 7, 10 (2000), 3862–3866.
- [129] ZABCZYK, J. *Mathematical Control Theory : An Introduction*. Modern Birkhäuser Classics, 1995.
- [130] ZEMEK, M. Strong monotonicity and lipschitz-continuity of the duality mapping. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica* 32, 2 (1991), 61–64.
- [131] ZERRIK, E., OUZAHRA, M., AND ZTOT, K. Regional stabilization for infinite bilinear systems. *IEEE Proc. Control Theory Appl* 151, 1 (2004), 109–116.
- [132] ZUAZUA, E. Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension. *Annales de IHP, section C* 10 (1993), 109–129.

- [133] ZUO, Z., HAN, Q.-L., AND NING, B. *Fixed-Time Cooperative Control of Multi-Agent Systems*, vol. 1. Springer Nature, 2019.